स्वाध्याय • स्वमन्थन • स्वावलम्बन

उ० प्र० राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

॥ सरस्वती नः सुभगा मयस्करत् ॥

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-10
भौतिकी में गणितीय विधियाँ-II

प्रथम खण्ड - साधारण अवकल समीकरण

द्वितीय खण्ड - आंशिक अवकल समीकरण

शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, इलाहाबाद - 211013

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालग

UGPHS-10

भौतिकी में गणितीय विधियां -II

खंड

1

साधारण अवकल समीकरण

भौतिकी में गणितीय विधियां - II

परिवर्तन के अलावा कुछ भी स्थायी नहीं है, यही सबसे बड़ी सच्चाई है। जैसा कि आप जानते हैं, भौतिक जगत में परिवर्तन विविध रूपों में दिखाई देता है। मिसाल के तौर पर, मौसम बदलते हैं जिनके साथ साथ वायुमंडलीय तापमान भी बदलता है। ऐसे बहुत से उदाहरण आप खुद भी दे सकते हैं, जैसे कि पृथ्वी की सतह से हम जितना ऊपर जाते हैं, वायुमंडलीय दाब कम होता जाता है; दाब बदलने के साथ साथ गैस का आयतन बदल जाता है, प्रकाश के किसी आम स्रोत, जैसे बल्ब से दूरी बढ़ने के साथ साथ प्रकाश की तीव्रता कम होती जाती है; कोई गाड़ी जितनी दूरी तय करती है, उतना ही उसकी टंकी में तेल कम होता जाता है, आदि। कहने का मतलब है कि चाहे आप खगोलीय पिंडों की गति का अध्ययन करें या परमाणुओं में इलेक्ट्रानों की गति समझें, वैद्युत परिपथों में बह रही धारा पर विचार करें या प्रकृति में प्रकाश के विभिन्न प्रभावों का अध्ययन करें, भौतिक जगत में प्रत्येक स्थिति में आपको ऐसे प्राचल (parameters) मिलेंगे, जिनमें समय और/ या स्थान के साथ परिवर्तन होता है।

भौतिकी के विद्यार्थी होने के नाते आप अब तक यह तो जान ही गए होंगे कि इस प्रकार के प्राचलों (या फलनों) के परिवर्तनों को उनकी "परिवर्तन दर" के रूप में, यानि कि किन्हीं चरों के सापेक्ष उनके अवकलों के रूप में व्यक्त किया जाता है। उदाहरण के लिए, स्कूल के पाठ्यक्रमों में आपने न्यूटन के गति नियमों और सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियम के बारे में पढ़ा है। इन नियमों को लागू करके हम किसी भी कण की गति का अध्ययन एक ऐसे समीकरण द्वारा कर सकते हैं जिसमें एक अज्ञात फलन (विस्थापन या वेग) और इसके प्रथम या उच्च कोटि के अवकलज होते हैं। मान लीजिए कि हम पृथ्वी की सतह के निकट गिर रही एक वस्तु की गति का अध्ययन कर रहे हैं। अगर हम यह मान लें कि इस वस्तु पर केवल गुरुत्व बल लग रहा है, तो हम न्यूटन के नियमों के आधार पर वस्तु की गति का एक मॉडल बना सकते हैं, जिसमें इसका त्वरण अचर होता है। गणितीय रूप में इस मॉडल को हम इस तरह व्यक्त कर सकते हैं :

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

जहां v वस्तु की चाल है, और g गुरुत्व त्वरण है।

अब आप जानते हैं कि अगर क्षण t पर वस्तु पृथ्वी की सतह से दूरी x पर हो, तो $v = dx/dt$ और तब वस्तु का गति समीकरण हो जाता है

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -g$$

यह तो आप जानते हैं कि इस समीकरण को हल करने पर हमें वस्तु की स्थिति x (जो कि **अज्ञात चर** (unknown variable) है), t के (जो कि **ज्ञात चर** (known variable) है) पदों में मिलती है। फलन $x(t)$ को हम **अज्ञात फलन** (unknown function) कहते हैं और इस समीकरण को हल करके हम इसका मान निकाल सकते हैं।

ऐसे समीकरणों को, जिनमें अज्ञात फलन और उनके अवकलज उपस्थित होते हैं, **अवकल समीकरण** (differential equation) कहा जाता है। भौतिक जगत में परिवर्तन के अध्ययन में अवकल समीकरण एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। प्रकृति के अधिकांश व्यापक नियमों की अति स्वाभाविक अभिव्यक्ति अवकल समीकरणों की भाषा में होती है, चाहे वे नियम भौतिकी, रसायनशास्त्र, जीवविज्ञान से संबंधित हों या खगोलिकी, इंजीनियरी, स्वास्थ्य विज्ञान आदि क्षेत्रों में हों। यही कारण है कि भौतिकी में गणितीय विधियां-II नामक इस 2- क्रेडिट पाठ्क्रम में हमने अपना पूरा ध्यान अवकल समीकरणों पर केंद्रित किया है।

इस पाठ्यक्रम को दो खंडों में प्रस्तुत किया गया है। खंड 1 में हमने **साधारण अवकल समीकरणों** (ordinary differential equations) की चर्चा की है। ये वे अवकल समीकरणें हैं जिनमें अज्ञात

फलन केवल एक चर पर निर्भर करते हैं। उन अवकल समीकरणों को जिनमें अज्ञात फलन एक से अधिक चरों पर निर्भर करते हैं, **आंशिक अवकल समीकरण** (partial differential equations) कहा जाता है। इन समीकरणों के बारे में आप खंड 2 में पढ़ेंगे।

इस पाठ्यक्रम में आप साधारण और आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियां सीखेंगे। इन विधियों को सिखाने में हमारा उद्देश्य यही है कि आप इनका प्रयोग भौतिकी की समस्याएं हल करने में कर सकें। हो सकता है कि इस पाठ्यक्रम को पढ़ने के बाद आप अवकल समीकरणों के बारे में गणितीय परिशुद्धता की दृष्टि से और अधिक जानकारी पाना चाहें। उस स्थिति में हमारा सुझाव यही होगा कि आप 'अवकल समीकरण' नामक गणितीय पाठ्यक्रम MTE-08 का अध्ययन करें।

अंत में हम कुछ ऐसे सुझाव देना चाहेंगे, जिनको अगर आप पाठ पढ़ते समय ध्यान में रखेंगे तो इस पाठ्यक्रम को और बेहतर समझ सकेंगे।

अध्ययन संबंधी सुझाव : इस पाठ्यक्रम को भली भांति समझने के लिए यह आवश्यक है कि आप कैलकुलस अच्छी तरह जानते हों। खासकर अवकल समीकरणों को हल करने के लिए समाकलन की जानकारी होना बहुत ज़रूरी है। अतः हमारा सुझाव होगा कि इस पाठ्यक्रम को पढ़ने से पहले आप कैलकुलस के गणितीय पाठ्यक्रम MTE-01 को दोहरा लें। अगर आपने यह पाठ्यक्रम लिया ही न हो तो कम से कम + 2 या बारहवीं कक्षा में जो कैलकुलस आपने पढ़ा है, उसे ही अच्छी तरह दोहरा लें। साथ ही हम यह भी सलाह देंगे कि यह पाठ्यक्रम पढ़ते समय आप भौतिकी के पाठ्यक्रम PHE-01, PHE-02 और PHE-03(L) अपने पास रखें क्योंकि हम समय समय पर इस पाठ्यक्रम में उनका हवाला देंगे।

दूसरे, यहां हम वे कुछ बातें दोहराना चाहते हैं जो कि हम भौतिकी के पाठ्यक्रमों में बराबर कहते आ रहे हैं। यहां दी जा रही जानकारी पर महारत हासिल करने के लिए और भौतिकी में उसका प्रभावी ढंग से इस्तेमाल करने के लिए आप पाठ में दी गई सभी समीकरणों और उदाहरणों को स्वंय हल करने का प्रयास करें। इकाइयों में दिए गए बोध प्रश्नों और उनके अंत में दिए गए प्रश्नों को स्वयं हल करें। अतः जब भी आप पढ़ने बैठें अपने साथ कागज़ और पेंसिल अवश्य रखें। कुछ गणनाओं के लिए आपको कैलकुलेटर की, या उन पुस्तिकाओं की जिनमें लघुगणकीय और त्रिकोणमितीय फलनों (logarithmic and trigonometric functions) की तालिकाएं दी जाती हैं, ज़रूरत पड़ेगी। अतः इन्हें भी साथ रखें। हमारा सुझाव है कि इन सभी गणनाओं को पहले खुद करने की कोशिश करें। इन प्रश्नों के हलों को, जो कि प्रत्येक इकाई के अंत में दिए गए हैं, पहले ही देखने के लालच से बचें।

इस पाठ्यक्रम को पढ़ने के लिए आपको कुल 60 घंटे लगाने होंगे। हमारा अनुमान है कि आपको औसतन 45 से 50 घंटे पाठों को समझने में, यानि कि इकाइयों को पढ़ने, उनमें दिए गए प्रश्नों आदि को हल करने में लगेंगे। दोनों खंडों को पढ़ने में लगभग बराबर समय लगेगा यानि कि प्रत्येक खंड को पढ़ने में आपको औसतन 22 से 25 घंटे लगेंगे। बाक़ी समय सत्रीय कार्यों, परामर्श सत्रों, ऑडियो और वीडियो कार्यक्रमों के लिए रखा गया है। प्रत्येक बोध प्रश्न और इकाई के अंत में दिए प्रश्नों की दायीं ओर के हाशिए पर हमने वह समय दिया है जो कि औसतन आपको इन प्रश्नों को हल करने में लग सकता है। लेकिन पढ़ाई पर लगने वाले औसत समय के बारे में हमारे यह आंकड़े महज़ सुझाव के तौर पर हैं जो कि हमने अनुभव के आधार पर तय किए हैं।

इस पाठ्यक्रम को पढ़ने में आप वास्तव में कितना समय लेते हैं, यह बहुत कुछ आपके अब तक के ज्ञान, क्षमता और पाठ्यक्रम के प्रति आपके रुझान और रुचि पर भी निर्भर करेगा।

हम आशा करते हैं कि आपको यह पाठ्यक्रम रुचिकर और सार्थक लगेगा। हमारी शुभकामनाएं आपके साथ हैं।

खंड 1 साधारण अवकल समीकरण

प्रस्तावना

ज़रा इन प्रश्नों पर विचार कीजिए : रॉकेट के ईंधन के जलने का उसके वेग पर क्या प्रभाव पड़ता है ? एक कार के निलंबन तंत्र और एक वैद्युत् परिपथ में क्या समानता है ? दो खंभों के बीच लटक रहे तार का आकार कैसा होगा ? मनुष्यों द्वारा किए जा रहे प्रदूषण को एकदम समाप्त कर देने पर किसी प्रदूषित झील को अपनी प्राकृतिक अवस्था में लौट आने में कितना समय लगेगा ? अगर हम ऐसे प्रश्नों के उत्तर मालूम करना चाहते हैं तो हमें साधारण अवकल समीकरणों का अध्ययन करना पड़ेगा।

वस्तुतः हम वास्तविक जीवन से जुड़े ऐसे कई प्रश्नों के समाधान साधारण अवकल समीकरणों की सहायता से, इन परिघटनाओं के उपयुक्त गणितीय मॉडल बना कर, प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, माना कि आप एक लोलक (pendulum) को गति देकर जानना चाहते हैं कि किसी क्षण पर उसकी स्थिति क्या होगी ? आप जानते हैं कि यह लोलक डोरी से बंधी कोई भी वस्तु (object) हो सकती है। इस वास्तविक भौतिक समस्या से हम पहले एक आदर्श भौतिक मॉडल (idealised physical model) बनाते हैं। इस आदर्श भौतिक मॉडल में हम यह मान लेते हैं कि डोरी भारहीन है। साथ ही वस्तु को कण के रूप में निरूपित करते हैं; यह भी मान लेते हैं कि जिस धुरी से यह आदर्श लोलक लटका है वह घर्षणहीन है, और वायु प्रतिरोध की उपेक्षा कर देते हैं। वास्तविक भौतिक समस्या का एक आदर्श भौतिक मॉडल बना लेने के बाद हम उस पर उपयुक्त भौतिक नियमों को लागू करते हैं और तब उसका गणितीय विवरण देते हैं। जैसा कि आप जानते हैं, लोलक के इस आदर्श भौतिक मॉडल पर हम न्यूटन के गति नियम लागू करते हैं जिससे हमें लोलक का सुपरिचित गति समीकरण मिलता है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

जहां $\omega^2 = g/L$ (यहां L डोरी की लंबाई और g गुरुत्व त्वरण है)। फिर हम इस प्रकार प्राप्त गणितीय समस्या को हल करते हैं। लोलक के गति समीकरण का हल तो आपने भौतिकी के पाठ्यक्रम PHE-02 में किया ही है जो कि निम्नलिखित है :

$$x = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

गणितीय समस्या के हल की तुलना हम इन्हीं वास्तविक तंत्रों पर सावधानी से किए गए प्रयोगों के परिणामों या उन पर किए गए प्रेक्षणों से करते हैं। तभी हम सही निष्कर्ष यानि उत्तर तक पहुंच पाते हैं कि हमारा मॉडल वास्तविकता को सही तरह से निरूपित करता है या नहीं। उदाहरण के लिए, प्रयोगशाला में लोलक के विस्थापन को समय के साथ माप कर आप इस निकाय के गणितीय मॉडल की सार्थकता की जांच कर सकते हैं। अगर आपने भौतिकी का प्रयोगशाला पाठ्यक्रम PHE-03(L) लिया होगा तो आपने यह प्रयोग किया भी होगा।

इस पूरी प्रक्रिया को **गणितीय निदर्शन** (mathematical modelling) कहते हैं। यहां इस प्रक्रिया को हमने संक्षेप में लोलक के सुपरिचित उदाहरण द्वारा समझाया है। इस प्रक्रिया के बारे में विस्तार से आप इस खंड की इकाई 4 में पढ़ेंगे।

भौतिक परिघटनाओं का साधारण अवकल समीकरणों की मदद से प्रभावी निदर्शन करने के लिए पहले आपको साधारण अवकल समीकरणों से संबंधित संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझना होगा। और साथ ही आपको इस तरह प्राप्त अवकल समीकरणों को हल करना सीखना होगा। इसलिए गणितीय निदर्शन के बारे में विस्तार से बताने से पहले हम इन्हीं बातों पर चर्चा करेंगे। अतः इस खंड की पहली तीन इकाइयों में हमने अवकल समीकरणों के वर्गीकरण और साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की मुख्य विधियों की चर्चा की है।

इकाई 1 में आप अवकल समीकरणों से संबद्ध आधारभूत परिभाषाएं और उनका वर्गीकरण समझेंगे। इसी इकाई में आप "प्रथम कोटि" साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विधियां भी सीखेंगे। इकाई 2 और 3 में आप "द्वितीय कोटि" साधारण अवकल समीकरणों से संबद्ध कुछ परिभाषाएं और उन्हें हल करने की प्रमुख विधियां सीखेंगे। इस प्रकार, अवकल समीकरणों को हल करने की विधियां सीखने और उन पर महारत हासिल करने के बाद आप इनका प्रयोग इस परिवर्तनशील भौतिक जगत की सरल परिघटनाओं के निदर्शन के लिए कर सकेंगे। यही इकाई 4 की विषयवस्तु है।

साधारण अवकल समीकरणों का उद्भव, आइज़क न्यूटन (Isaac Newton, 1642-1727) और विलहेम लीब्नीज़ (Wilhelm Leibnitz, 1646-1716) के कार्यों में हुआ। ज्ञान के इस क्षेत्र को पिछली तीन सदियों में अनेक गणितज्ञों ने और अधिक समृद्ध किया। इन गणितज्ञों में फर्मा (Fermat), बर्नोली (Bernoulli), आयलर (Euler), रिकाटी (Riccatti) के योगदान विशेष उल्लेखनीय हैं। खंड 1 में हमने इन महान विद्वानों द्वारा प्रस्तुत ज्ञान भंडार का वह हिस्सा प्रस्तुत किया है जो भौतिकी में हमारे काम का है।

इससे पहले कि आप इन इकाइयों को पढ़ना शुरू करें, हम आपको पाठ में प्रयुक्त संकेत चिन्हों के अर्थ पुनः याद दिलाना चाहेंगे। पाठ में प्रयुक्त संकेत, भाग x.y का अर्थ है इकाई x का भाग y। इसी प्रकार चित्र x.y का अर्थ है इकाई x का चित्र y और समीकरण (x.y) का अर्थ है इकाई x का समीकरण y. उदाहरण के लिए भाग 1.4, इकाई 1 का चौथा भाग, चित्र 2.1 इकाई 2 का पहला चित्र और समीकरण (3.10) इकाई 3 का दसवां समीकरण है। पढ़ाई में लगने वाले समय के लिहाज़ से ये सभी इकाइयां बराबर नहीं हैं। हमारे हिसाब से औसतन आपको इकाई 1 को पढ़ने के लिए 8 घंटे, इकाई 2 और इकाई 3 के लिए 5 घंटे, और इकाई 4 के लिए 6 घंटे का समय लगना चाहिए। हम आशा करते हैं कि इस खंड का अध्ययन आपके लिए आनंददायक सिद्ध होगा।

इकाई 1 प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना

आप प्रारंभिक यांत्रिकी (PHE-01) के पाठ्यक्रम में प्रक्षेप्य (projectile) की गति और रॉकेट की गति के बारे में पढ़ चुके हैं। आप जानते हैं कि प्रक्षेप्य के वेग पर वायु प्रतिरोध (air-resistance) का प्रभाव पड़ता है और रॉकेट के वेग पर जल गई ईंधन की मात्रा का प्रभाव पड़ता है। अब सवाल उठता है कि क्या हम किसी गणितीय विधि से यह मालूम कर सकते हैं कि प्रक्षेप्य के वेग पर वायु प्रतिरोध का **कितना** प्रभाव पड़ता है और जल गई ईंधन की मात्रा का राकेट के वेग पर **क्या** प्रभाव पड़ता है? इसी तरह का सवाल एक पर्यावरण संबंधी मामले में भी उठाया जा सकता है। शायद आप जानते हों कि 1991 के खाड़ी युद्ध के दौरान फ़ारस की खाड़ी में समुद्री पानी में बड़ी मात्रा में तेल मिल जाने के कारण पर्यावरण प्रदूषण से संबंधित एक गंभीर ख़तरा पैदा हो गया था। अब सवाल यह है कि तेल के प्रदूषण पर पूरी तरह क़ाबू पा लेने के बाद फ़ारस की खाड़ी को प्राकृतिक अवस्था में लौट आने में कितना समय लगेगा ? हमें इन प्रश्नों और इसी तरह के अन्य प्रश्नों के उत्तर गणितीय विधि से मिल सकते हैं। इसके लिए हमें संबंधित तंत्रों के लिए प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण लिखने होंगे तथा उन्हें हल करना होगा।

इस इकाई में आप प्रथम कोटि अवकल समीकरणों का अध्ययन करेंगे, क्योंकि इनके भौतिकी में अनेक अनुप्रयोग होते हैं। आप "दोलन और तरंगें" नामक भौतिकी के पाठ्यक्रम PHE-02 में कुछ अवकल समीकरणों के बारे में पढ़ ही चुके हैं। यहां पहले हम कुछ सरल उदाहरणों के ज़रिए इस बात पर चर्चा करेंगे कि अवकल समीकरण क्या होता है। इसके बाद आप जानेंगे कि अवकल

समीकरणों का वर्गीकरण किस तरह किया जाता है। और, तब आप समझेंगे कि अवकल समीकरण के हल का क्या अर्थ होता है।

इस पाठ्यक्रम में हमारा मुख्य उद्देश्य भौतिक समस्याओं में जाने वाली अवकल समीकरणों को हल करने की विधियां सीखना है। इस इकाई में आप प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियां सीखेंगे। इन समीकरणों को आप चरों की पृथक्करण विधि (method of separation of variables) और प्रतिस्थापन विधि (method of substitution) से हल करना सीखेंगे। आप यथातथ समीकरणों (exact equations) को भी हल करना सीखेंगे। इसके बाद आप अयथातथ समीकरणों (inexact equations) को यथातथ समीकरणों में बदलने की विधि सीखेंगे। इससे आप प्रथम कोटि रैखिक साधारण अवकल समीकरणों (first order linear ordinary differential equations) को हल कर सकेंगे। इन समीकरणों के भौतिकी में कुछ अनुप्रयोगों के बारे में आप इकाई 4 में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- अवकल समीकरण के व्यापक हल और विशेष हल को परिभाषित कर सकेंगे
- पृथक्करणीय रूपों में समानेय प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल कर सकेंगे
- यथातथ समीकरणों को हल कर सकेंगे
- समाकलन गुणक विधि से प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल कर सकेंगे
- प्रथम कोटि में समानेय साधारण अवकल समीकरणों को हल कर सकेंगे।

1.2 अवकल समीकरण किसे कहते हैं ?

अर्नेस्ट रदरफ़र्ड (1871-1937) ने रेडियोएक्टिवता के सिद्धांत पर काफ़ी काम किया। PHE-01 की इकाई 8 से आपको याद होगा कि रदरफ़र्ड ने परमाणु का न्यूक्लीय मॉडल भी प्रस्तुत किया था।

आपने अपने स्कूल विज्ञान पाठ्यक्रम में रेडियोएक्टिवता (radioactivity) के बारे में अवश्य पढ़ा होगा। 1886 में एक फ्रांसीसी वैज्ञानिक हेनरी बैकेरल ने रेडियोएक्टिव क्षय नियम (the principle of radioactive decay) का पता लगाया था। प्रयोगों से उन्होंने यह स्थापित किया था कि जिस दर से एक रेडियोएक्टिव पदार्थ के परमाणु विघटित होते हैं, वह उस पदार्थ में मौजूद परमाणुओं की संख्या N के समानुपाती होती है। आइए हम इस संकल्पना को गणितीय ढंग से व्यक्त करने की कोशिश करें। रेडियोएक्टिव पदार्थ के परमाणुओं की विघटन दर $\left(\dfrac{-dN}{dt}\right)$ है, जहां t समय को प्रकट करता है। यहां हमने ऋण चिन्ह इसलिए लगाया है, क्योंकि t के साथ N में कमी आती जाती है (इसलिए $\dfrac{dN}{dt}$ ऋणात्मक होता है)। अब रदरफ़र्ड के अनुसार यह दर N के समानुपाती होती है। अतः

$$-\frac{dN}{dt} = \lambda N, \text{ जहां } \lambda \text{ एक अचर है}$$

$$\text{या } \frac{dN}{dt} + \lambda N = 0 \tag{1.1}$$

समीकरण (1.1) की सहायता से हम स्वतंत्र चर t और आश्रित चर N में एक संबंध प्राप्त कर सकते हैं। ध्यान दीजिए कि समीकरण (1.1) में एक पद N से संबंधित है और दूसरा समय के सापेक्ष इसका **साधारण अवकलज** (ordinary derivative) है। भौतिकी के पाठ्यक्रमों में आपने ऐसी समीकरणें भी देखी हैं जिनमें स्वतंत्र चर के सापेक्ष आश्रित चर के उच्च कोटि साधारण अवकलज होते हैं। उदाहरण के लिए, PHE-02 के खंड 1 में आपने एक-विम रैखिक आवर्त दोलक (one-dimensional linear harmonic oscillator) का गति समीकरण पढ़ा है जो कि निम्नलिखित है

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \tag{1.2}$$

जहां m दोलक का द्रव्यमान है और k बल नियतांक (force constant) है। समीकरण (1.2) में x से संबद्ध एक पद और समय के सापेक्ष इसका द्वितीय अवकलज है। ध्यान दीजिए कि

समीकरण (1.1) और (1.2) में आश्रित चर के **साधारण अवकलज** ही उपस्थित हैं । आइए हम एक और उदाहरण लें । मान लीजिए एक वैद्युत् परिपथ में अत्यणु (infinitesimal) समय dt के लिए धारा i प्रवाहित होती है । तब इस समय में प्रवाहित आवेश होगा

प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण

$$dq = i\,dt \tag{1.3}$$

समीकरण (1.3) में अवकल dq और dt उपस्थित हैं । (1.1) से (1.3) जैसे समीकरणों को **साधारण अवकल समीकरण** (ordinary differential equations) कहा जाता है । परिभाषा से,

> उस समीकरण को, जिसमें **एक स्वतंत्र चर** के सापेक्ष एक या अधिक आश्रित चरों के अवकल या केवल साधारण अवकलज हों, **साधारण अवकल समीकरण** कहा जाता है ।

अब आपने PHE-02 की इकाई 6 में एक-विम तरंग समीकरण (one-dimensional wave equation) भी पढ़ी है जो यह है

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} \tag{1.4}$$

यहां ψ तरंग फलन (wave function) है और v तरंग चाल है । समीकरण (1.4) में चरों x और t के सापेक्ष ψ के द्वितीय कोटि **आंशिक-अवकलज** (partial derivatives) हैं । (1.4) जैसे समीकरणों को **आंशिक अवकल समीकरण** (partial differential equations) कहा जाता है क्योंकि इसमें **दो या अधिक स्वतंत्र चरों** के सापेक्ष एक या अधिक आश्रित चरों के आंशिक अवकलज होते हैं । इस खंड में आप साधारण अवकल समीकरणों का अध्ययन करेंगे । अब हम अवकल समीकरण की एक व्यापक परिभाषा दे सकते हैं ।

आंशिक अवकलजों के बारे में और अधिक जानकारी आपको भौतिकी में गणितीय विधियाँ-I (PHE-04) की इकाई 2 और 3 या इस पाठ्यक्रम के खंड 2 के भाग 5.2 में मिलेगी ।

> एक या अधिक स्वतंत्र चरों के सापेक्ष एक या अधिक आश्रित चरों के अवकलजों या अवकलों वाले समीकरणों को **अवकल समीकरण** कहा जाता है ।

अब आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न में कुछ साधारण अवकल समीकरणों और आंशिक अवकल समीकरणों की पहचान कीजिए ।

बोध प्रश्न 1

नीचे भौतिकी के विभिन्न क्षेत्रों से संबंधित दस समीकरण दिए गए हैं । बताइए कि इनमें से कौन से साधारण अवकल समीकरण हैं और कौन से आंशिक अवकल समीकरण ।

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

(i) $\dfrac{d^2y}{dt^2} = g$

(ii) $y = u_0t - \dfrac{1}{2}gt^2$

(iii) $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} + \dfrac{g}{l}\theta = 0$

(iv) $\dfrac{\partial^2T}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2T}{\partial y^2} = 0$

(v) $L\dfrac{d^2q}{dt^2} + R\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{q}{c} = E(t)$

(vi) $\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2u}{\partial z^2} = \dfrac{1}{\alpha^2}\dfrac{\partial u}{\partial t}$

(vii) $u = A\sin(x-\omega t) + B\cos(x-\omega t)$

(viii) $\dfrac{dT}{dt} = k(T-T_0)$

(ix) $m\dfrac{dv}{dt} = mg - kv$

(x) $\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right) + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial^2u}{\partial\theta^2}\right) + \dfrac{\partial^2u}{\partial z^2} = 0$

साधारण अवकल समीकरणों का अध्ययन करते समय हमें मुख्यतः तीन बातों का अध्ययन करना होता है । ये हैं साधारण अवकल समीकरण का निर्माण, इसका हल और इसके अनुप्रयोग । ये तीनों बातें अलग अलग प्रकार के साधारण अवकल समीकरणों के लिए अलग अलग होती हैं । अतः इन बातों का अध्ययन करने से पहले आपके लिए यह जानना ज़रूरी है कि साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण किस प्रकार किया जाता है । यही भाग 1.3 की चर्चा का विषय है और हम यह चाहेंगे कि भाग 1.3 पढ़ लेने के बाद आप साधारण अवकल समीकरणों को देखते ही उनका वर्गीकरण कर सकें । अतः इस भाग को आप सावधानी के साथ, अच्छी तरह पढ़ें ।

1.3 साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण

साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण कई तरह से किया जाता है जैसा कि सारणी 1.1 में दिखाया गया है। अपनी चर्चा में हम सारणी 1.1 का प्रयोग काफ़ी करेंगे। इसलिए पहले हम आपको यह बताना चाहेंगे कि इस सारणी का प्रयोग आप कैसे करें। जैसा कि आप देख सकते हैं, सारणी के दूसरे स्तंभ (column) में साधारण अवकल समीकरणों के अनेक उदाहरण दिए गए हैं। और, पहली पंक्ति (row) में साधारण अवकल समीकरणों को वर्गीकृत करने के विभिन्न तरीक़े दिए गए हैं। अब इस भाग को पढ़ते हुए बेहतर यह होगा कि आप अपना ध्यान उस उदाहरण विशेष और वर्गीकरण की उस विधि विशेष पर ही सीमित रखें जिसकी चर्चा उस समय पाठ में की जा रही है। इस चर्चा के दौरान सारणी में दी गई अन्य बातों में अपना ध्यान न बंटने दें। क्या आप सारणी में कुछ खाली स्थानों को देख रहे हैं ? इस भाग को पढ़ने के बाद आपको इन खाली स्थानों को भरना होगा। तो आइए अब हम साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण सीखें। सबसे पहले एक साधारण अवकल समीकरण को उसकी कोटि (order) और घात (degree) के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है।

साधारण अवकल समीकरण की कोटि और घात

> साधारण अवकल समीकरण की **कोटि** इस समीकरण के उच्चतम अवकलज की कोटि होती है।
> साधारण अवकल समीकरण का **घात,** समीकरण को इस रूप में व्यक्त कर लेने के बाद, कि किसी भी अवकलज का भिन्नात्मक या ऋणात्मक घात (fractional or negative power) न हो, समीकरण के उच्चतम कोटि अवकलज का घात होता है।

यहाँ हम $\frac{d^2y}{dx^2}$ को y'' से निरूपित कर रहे हैं।

आइए हम सारणी 1.1 का समीकरण (4) लें और देखें कि इस समीकरण की कोटि और घात क्या हैं। चूंकि उच्चतम अवकलज y'' एक द्वितीय कोटि अवकलज है, इसलिए इस समीकरण की कोटि 2 होगी। अब आइए हम समीकरण का वर्ग करके भिन्नात्मक घात 1/2 को हटा दें। तब, क्योंकि y'' का घात 2 है, इसलिए इस समीकरण का घात 2 होगा। इसी प्रकार आप सारणी 1.1 में दिए गए समीकरणों (1) और (3) की कोटि और घात के मानों की जांच कर सकते हैं। इस तरह आपने एक साधारण अवकल समीकरण को उसकी कोटि और घात के आधार पर वर्गीकृत करना सीख लिया है। हम साधारण अवकल समीकरणों को रैखिक (linear) या अरैखिक (non-linear) समीकरणों में भी वर्गीकृत करते हैं।

रैखिक और अरैखिक साधारण अवकल समीकरण

सारणी 1.1 का समीकरण (3) लीजिए। इस समीकरण में फलन y और इसके सभी अवकलज घात 1 वाले हैं। इस समीकरण में $yy', yy'', y'y''$ आदि जैसे गुणनफल नहीं हैं। इसमें $\sin x$, $\ln x$ जैसे कोई अबीजीय फलन (transcendental function) भी नहीं हैं। यह रैखिक साधारण अवकल समीकरण (linear ordinary differential equation या संक्षेप में linear ODE) का एक उदाहरण है।

उस फलन को जिसे
$$P_0(x)\,u^n + P_1(x)\,u^{n-1} + \ldots P_{n-1}(x)\,u + P_n(x) = 0$$
के रूप के बहुपद समीकरण के एक हल के रूप में व्यक्त न किया जा सकता हो, **अबीजीय फलन** कहा जाता है। लघुगणकीय, त्रिकोणमितीय, अतिपरवलयिक फलन और उनके संगत प्रतिलोम फलन अबीजीय फलनों के उदाहरण हैं।

अवकल समीकरण को **रैखिक** तब कहते हैं जबकि निम्नलिखित प्रतिबंध संतुष्ट होते हों :

> i) अज्ञात फलन और उसके अवकलज केवल एक घात वाले हों।
> ii) समीकरणों में अज्ञात फलन और उसके अवकलजों का कोई गुणनफल या दो अथवा अधिक अवकलजों का कोई गुणनफल न हो।
> iii) समीकरणों में अज्ञात फलन या इसके किसी भी अवकलज से संबंधित कोई अबीजीय फलन न हो।

एक n– कोटि (n^{th} order) साधारण अवकल समीकरण को, जो y में रैखिक है, निम्न रूप में व्यक्त किया सकता है :

$$a_n(x)\,y^{(n)} + a_{n-1}\,y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x) \qquad (1.5)$$

यहां f और गुणांक $a_0, a_1, \ldots, a_n$, x के किसी अंतराल पर केवल x के फलन हैं और इस अंतराल पर $a_n(x) \neq 0$ । समीकरण (1.5) को लिखते समय हमने $y' = \frac{dy}{dx}$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n}$ की संकेतन पद्धति अपनायी है । उस अवकल समीकरण को, जो रैखिक **नहीं है, अरैखिक** (non-linear) अवकल समीकरण कहा जाता है । आप यह जांच कर सकते हैं कि सारणी 1.1 का साधारण अवकल समीकरण (1) रैखिक है, और साधारण अवकल समीकरण (4) और (7) अरैखिक हैं । रैखिक साधारण अवकल समीकरणों को **समघात** (homogeneous) या **असमघात** (nonhomogeneous) समीकरणों के रूप में भी वर्गीकृत किया जा सकता है :

> यदि समीकरण (1.5) के दक्षिण पक्ष में $f(x) = 0$ हो, तो यह **समघात** (homogeneous) रैखिक साधारण अवकल समीकरण होता है और यदि $f(x) \neq 0$ तो यह **असमघात** (nonhomogeneous) रैखिक साधारण अवकल समीकरण होता है ।

उदाहरण के लिए, सारणी 1.1 के साधारण अवकल समीकरण (1) और (6) असमघात हैं, क्योंकि इनमें क्रमशः $f(x) = E$ और $f(x) = e^x$ हैं । चूंकि साधारण अवकल समीकरण (3) में $f(x) = 0$ है, इसलिए यह समघात है ।

टिप्पणी : जब शब्द **समघात** का प्रयोग **प्रथम कोटि** साधारण अवकल समीकरण के लिए किया जाता है तो इसका एक अन्य अर्थ भी होता है । समघात प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण का यह अर्थ हम इस इकाई के भाग 1.5.2 में बताएंगे ।

सारणी 1.1: साधारण अवकल समीकरणों का वर्गीकरण

क्रमांक	साधारण अवकल समीकरण	कोटि	घात	रैखिक/अरैखिक	असमघात/समघात	टिप्पणी
(1)	$L\frac{di}{dt} + Ri = E$	1	1	रैखिक	असमघात	E को वाम पक्ष में ले जाकर और $i_1 = i - \frac{E}{R}$ का प्रतिस्थापन करके इसे समघात बनाया जा सकता है ।
(2)	$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F\cos\omega t$					
(3)	$x^2y'' + 2xy' + y = 0$	2	1	रैखिक	समघात	
(4)	$\{1 + (y')^2\}^{1/2} = y''$	2	2	अरैखिक		यह अरैखिक है क्योंकि इसका घात 2 है । चूंकि यह अरैखिक है इसलिए इसे समघात या असमघात में वर्गीकृत करने का प्रश्न नहीं उठता ।
(5)	$(y'')^3 + 2xy' - y = 0$					
(6)	$y''' + y = e^x$				असमघात	यह असमघात है क्योंकि दायें पक्ष में e^x है ।
(7)	$y'' + 7y = \sin y$	2	1	अरैखिक		यह अरैखिक है क्योंकि $\sin y$, y का अबीजीय फलन है ।
(8)	$y'' - 2y' + 3y = 0$					

इस प्रकार इस भाग में आपने साधारण अवकल समीकरणों को चार तरह से वर्गीकृत करना सीखा है: (i) कोटि, (ii) घात (iii) रैखिकता/अरैखिकता और (iv) समघातता/असमघातता के अनुसार। आगे के अध्ययन में हमारी सलाह है कि आप किसी भी साधारण अवकल समीकरण को देखते ही, सबसे पहले उसे वर्गीकृत करने की आदत बना लें। यानि कि किसी भी साधारण अवकल समीकरण को देखते ही आपको यह बता सकना चाहिए कि उसकी कोटि क्या है, उसका घात क्या है और वह समीकरण रैखिक है या अरैखिक। और, यदि वह रैखिक हो तो आपको यह भी बता सकना चाहिए कि वह समघात है या असमघात। उदाहरण के लिए, सारणी 1.1 का साधारण अवकल समीकरण (1) प्रथम कोटि, प्रथम घात का रैखिक असमघात साधारण अवकल समीकरण है।

आपने अभी तक जो कुछ भी पढ़ा है, उस पर अब एक बोध प्रश्न हल करें।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 2

सारणी 1.1 में दिए गए खाली स्थानों को भरिए। टिप्पणी वाले स्तंभ में दिए गए खाली स्थानों को भरने की ज़रूरत नहीं है।

अभी तक आपने साधारण अवकल समीकरणों से संबंधित आधारभूत शब्दावली के बारे में जाना है और साधारण अवकल समीकरणों को वर्गीकृत करना सीखा है। अब जैसा कि हम पहले भी कह चुके हैं, इस पाठ्यक्रम में आपका उद्देश्य भौतिकी में आने वाले प्रमुख अवकल समीकरणों को हल करने की योग्यता हासिल करना है। पर अवकल समीकरणों को हल करने से पहले आपको यह समझना होगा कि अवकल समीकरण के हल (solution) का क्या अर्थ है।

1.4 अवकल समीकरण के हल का क्या अर्थ है ?

आइए हम निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरण लें :

$$y'' + y' = 0 \tag{1.6}$$

अब यदि हम

$$y = \sin x \tag{1.7}$$

लें, तो हमें

$$y' = \cos x \text{ और } y'' = -\sin x$$

मिलता है और समीकरण (1.6) एक सर्वसमिका (identity) हो जाती है। इस स्थिति में हम फलन $y = \sin x$ को समीकरण (1.6) का **हल** (solution) कहते हैं। इस हल का अस्तित्व (existence), अंतराल $(-\infty, \infty)$ के प्रत्येक x के लिए होता है। आइए अब हम एक और उदाहरण लें। समीकरण

$$y^2 + x = 4 \tag{1.8}$$

साधारण अवकल समीकरण $2yy' = -1$ का एक हल है। हम इसे समीकरण (1.3) का अवकलन करके सत्यापित कर सकते हैं; अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$2yy' + 1 = 0$$

जो कि दिया हुआ साधारण अवकल समीकरण ही है। अब हम समीकरण (1.8) को इस तरह भी लिख सकते हैं :

$$y = \pm\sqrt{4-x}$$

जो कि दो फलनों को परिभाषित करता है । इनमें से प्रत्येक फलन अंतराल $(-\infty, 4)$ के प्रत्येक x के लिए परिभाषित है । आपने देखा होगा कि समीकरण (1.8) के हल के लिए अंतराल, समीकरण (1.6) के हल के लिए दिए गए अंतराल से भिन्न है । अतः वह अंतराल जिस पर एक अवकल समीकरण का हल परिभाषित होता है, दिए हुए प्रश्न से निर्धारित होता है । यह अंतराल $(-\infty, \infty)$, (a, ∞), $(-\infty, a)$, $[a, b]$, (a, b) आदि अंतरालों में से कोई भी अंतराल हो सकता है । अब हम साधारण अवकल समीकरण के हल को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं :

> फलन
>
> $$y = \phi(x)$$
>
> को किसी अंतराल, मान लीजिए $a \le x \le b$ पर, y में दिए किसी अवकल समीकरण का **हल** कहा जाता है, यदि $\phi(x)$ इसे पूरे अंतराल में परिभाषित और अवकलनीय हो और ऐसा हो कि y के स्थान पर $\phi(x)$ प्रतिस्थापित करने पर अवकल समीकरण एक सर्वसमिका हो जाती हो ।

हम यहां यह भी कहते हैं कि $y = \phi(x)$ से अवकल समीकरण संतुष्ट हो जाता है । समीकरण (1.7) और (1.8) में आपने एक बात और देखी होगी । समीकरण (1.7) में y, x का एक **स्पष्ट फलन** (explicit function) है । इस प्रकार के हल को **स्पष्ट हल** (explicit solution) कहा जाता है । पर समीकरण (1.8) में y और x के बीच का संबंध एक अस्पष्ट (implicit) संबंध है । अतः समीकरण (1.8) को एक **अस्पष्ट हल** (implicit solution) कहते हैं । दूसरे शब्दों में अगर अवकल समीकरण का हल

$$G(x, y) = 0 \tag{1.9}$$

के जैसा हो तो उसे **अस्पष्ट हल** कहा जाता है । अवकल समीकरणों के हल इन्हीं दो रूपों में (स्पष्ट या अस्पष्ट) व्यक्त होते हैं ।

अब अगर आप समीकरण (1.6) को फिर से देखें तो आप यह आसानी से जांच कर सकते हैं कि $y = \cos x$ भी इस अवकल समीकरण का एक हल है । वास्तव में एक अवकल समीकरण के अनेक हल सकते हैं । अवकल समीकरण सिद्धांत का एक प्रमुख उद्देश्य किसी दिए हुए अवकल समीकरण के सभी हल प्राप्त करना है । इसके बाद हम इन हलों की भौतिक सार्थकता के बारे में पता लगाते हैं । आइए अब हम इस विषय पर कुछ विस्तार से चर्चा करें ।

1.4.1 व्यापक हल और विशेष हल

समीकरण (1.6) के जरिए ऊपर हम यह बता चुके हैं कि एक अवकल समीकरण के अनेक हल हो सकते हैं । आइए अब हम एक और उदाहरण लें । इसके लिए हम अवकल समीकरण

$$y' = \cos x \tag{1.10}$$

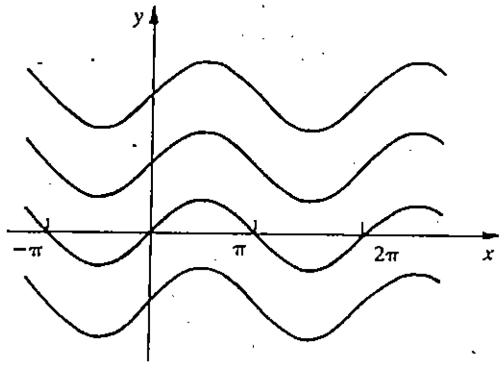
लेते हैं । आप यह आसानी से जांच कर सकते हैं कि फलनों

$$y = \sin x, \quad y = \sin x + 5, \quad y = \sin x - 9, \quad y = \sin x + \frac{5}{8}$$

में से प्रत्येक फलन, समीकरण (1.10) का एक हल है । आप इन्हें व्यापक तौर पर

$$y = \sin x + C \tag{1.11}$$

के रुप में व्यक्त कर सकते हैं जहां C एक स्वेच्छ अचर (arbitrary constant) है । समीकरण (1.11) को समीकरण (1.10) का **व्यापक हल** (general solution) कहा जाता है । समीकरण (1.11) से समीकरण (1.10) के कितने ही हल प्राप्त हो सकते हैं । हमने ऐसे हल निकाय को चित्र 1.1 में दिखाया है ।



चित्र 1.1 : अवकल समीकरण $y' = \cos x$ के अनेक हल ।

इसी प्रकार आप यह भी जांच कर सकते हैं कि

$$y = A\cos x + B\sin x \tag{1.12}$$

जहां A और B स्वेच्छ अचर हैं, समीकरण (1.6) का हल है । अत:

> उस हल को जिसमें स्वेच्छ अचर होते हैं, **व्यापक हल** कहा जाता है ।

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि समीकरण (1.10) एक प्रथम कोटि अवकल समीकरण है और इसके व्यापक हल (1.11) में एक स्वेच्छ अचर है । समीकरण (1.6) एक द्वितीय कोटि अवकल समीकरण है और इसके व्यापक हल (1.12) में दो स्वेच्छ अचर हैं । इस तरह हम यह पाते हैं कि **अवकल समीकरण के हल में स्वेच्छ अचरों की संख्या अवकल समीकरण की कोटि के बराबर होती है ।**

आइए अब हम समीकरण (1.11) पर निम्नलिखित प्रतिबंध लागू करें:

$y = 0$ जबकि $x = 0$ । तब समीकरण (1.11) से हमें मिलता है

$$0 = 0 + C \quad \text{या} \quad C = 0 \quad \text{और} \quad y = \sin x$$

अत: समीकरण (1.11) पर एक प्रतिबंध लागू करके हम C को एक विशेष मान दे सकते हैं । इस तरह प्राप्त हल को **विशेष हल** (particular solution) कहा जाता है ।

आपको इकाई 2 में शब्द 'विशेष समाकल' (particular integral) देखने को मिलेगा । आप विशेष समाकल और यहां बताए जा रहे विशेष हल को एक ही मत समझ लीजिए ।

> यदि व्यापक हल के प्रत्येक स्वेच्छ अचर को एक निश्चित मान दिया जा सके तो हमें एक **विशेष हल** प्राप्त होता है ।

उदाहरण के लिए $y = \sin x + 2$ समीकरण (1.11) का एक विशेष हल है और $y = 2\cos x + 3\sin x$ समीकरण (1.6) का एक विशेष हल है ।

जैसा कि आपने अभी पढ़ा, हल फलन पर प्रतिबंध लागू करके व्यापक हल से विशेष हल प्राप्त किए जाते हैं । अब इस बारे में दो सवाल उठते हैं :

(i) क्या विशेष हल का अस्तित्व सदा ही होता है ?

(ii) यदि इसका अस्तित्व होता है, तो क्या यह हल अद्वितीय (unique) होता है ?

आइए अब हम इन सवालों पर संक्षेप में चर्चा करें। यहां यह चर्चा हम केवल इसलिए कर रहे हैं ताकि आपको इन बातों की जानकारी रहे। हम इन सवालों पर विस्तारपूर्वक चर्चा यहां नहीं करेंगे।

1.4.2 विशेष हल का अस्तित्व और अद्वितीयता

इस चर्चा में हम कुछ नए शब्दों का प्रयोग करेंगे जिन्हें पहले समझ लेना जरूरी है। हम जानते हैं कि n-कोटि साधारण अवकल समीकरण के व्यापक हल में n स्वेच्छ अचर होते हैं। अतः एक n-कोटि साधारण अवकल समीकरण का विशेष हल निकालने के लिए हमें हल फलन और इसके अवकलजों पर n प्रतिबंध लागू करने होते हैं। और फिर, इस तरह प्राप्त n युगपत रैखिक समीकरणों (simultaneous linear equations) को n स्वेच्छ अचरों के लिए हल किया जा सकता है। इन प्रतिबंधों का हम संक्षेप में उल्लेख करेंगे।

1. यदि अवकल समीकरण के हल या उसके अवकलजों पर लगाए गए प्रतिबंध स्वतंत्र चर के केवल एक मान के लिए हों, तो इन्हें **आदि प्रतिबंध** (initial conditions) कहा जाता है। अपने आदि प्रतिबंधों सहित अवकल समीकरण को **आदि-मान समस्या** (initial-value problem) कहा जाता है।
2. यदि अवकल समीकरण के हल या उसके अवकलजों पर लगाए गए प्रतिबंध स्वतंत्र चर के दो या अधिक मानों के लिए हों, तो इन्हें **परिसीमा प्रतिबंध** (boundary conditions) कहा जाता है। अपने परिसीमा प्रतिबंधों सहित अवकल समीकरण को **परिसीमा-मान समस्या** (boundary-value problem) कहा जाता है।

उदाहरण के लिए

क) आदि प्रतिबंध $y(0) = 1$ के साथ $y' + 2y = 3$ एक प्रथम कोटि आदि-मान समस्या है।

ख) आदि प्रतिबंधों $y(1) = 2, y'(1) = -8$ के साथ $y'' + 3y = 0$ एक द्वितीय कोटि आदि-मान समस्या है।

ग) परिसीमा प्रतिबंधों $y(0) = 2, y(1) = -1$ के साथ $y'' - 2y' + 6y = x^3$ एक द्वितीय कोटि परिसीमा-मान समस्या है।

आइए अब हम अस्तित्व और अद्वितीयता के प्रश्न पर विचार करें। इसके लिए आइए हम एक उदाहरण लें। आपने यह देखा है कि $y'' + y = 0$ का व्यापक हल होता है

$$y = A\cos x + B\sin x$$

अब सवाल उठता है कि हम परिसीमा-मान समस्या $y'' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y(\pi) = 2$ के हल के बारे में क्या कह सकते हैं। व्यापक हल में दिए गए परिसीमा प्रतिबंध को लागू करने पर हमें मिलता है

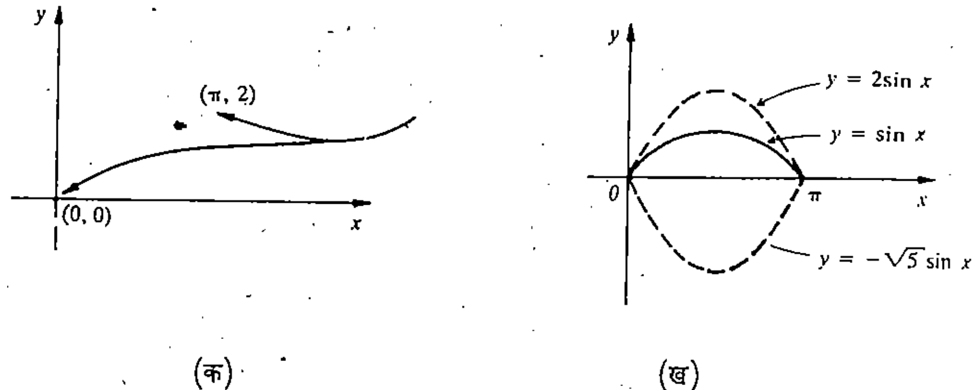
$$0 = A\cos 0 + B\sin 0 \text{ और } 2 = A\cos\pi + B\sin\pi$$

पहले समीकरण से $A = 0$ मिलता है जबकि दूसरे समीकरण से $A = -2$। क्योंकि A एक साथ 0 और -2, दोनों के बराबर नहीं हो सकता, इसलिए इस परिसीमा-मान समस्या का कोई भी हल संभव नहीं है (चित्र 1.2 क भी देखिए)। आप स्वयं ही आसानी से जांच कर सकते हैं कि परिसीमा-मान समस्या

$$y'' + y = 0,\ y(0) = y(\pi) = 0$$

से असंदिग्ध रुप से $A = 0$ प्राप्त होता है। लेकिन इन प्रतिबंधों द्वारा B को कोई भी निश्चित मान नहीं दिया जा सकता क्योंकि B के किसी भी मान के लिए यह प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं यानि कि B के अनंततः अनेक मान संभव हैं। इस तरह हम पाते हैं कि इस परिसीमा-मान समस्या के अंनततः अनेक हल हैं जो $y = B\sin x$ से दिए जाते हैं।

साधारण अवकल समीकरणों की पाठ्य पुस्तकों में आपको साधारण अवकल समीकरण का एक अन्य प्रकार का हल, **विचित्र हल** (singular soultion) भी देखने को मिलेगा। यह साधारण अवकल समीकरण का वह हल है जिसमें स्वयं में कोई स्वेच्छ अचर नहीं होता। इसके अलावा व्यापक हल के स्वेच्छ अचर को कोई मान देकर भी इसे प्राप्त नहीं किया जा सकता। उदाहरण के इसलिए $y = x^2/4$, साधारण अवकल समीकरण $y'^2 - xy' + y = 0$ का एक विचित्र हल है। इसमें कोई भी स्वेच्छ अचर नहीं है और इस समीकरण के व्यापक हल $y = cx - c^2$ पर कोई प्रतिबंध लगा करके भी इसे प्राप्त नहीं किया जा सकता।



चित्र 1.2: (क) $y = A\cos x + B\sin x$ **के रूप का कोई भी आलेख बिंदुओं** $(\pi, 2)$ **और** $(0,0)$ **से एक साथ होकर नहीं जाएगा; (ख) अंतराल** $(0, \pi)$ **पर** $y = B\sin x$ **के रूप का वक्र**

ऊपर दिए गए उदाहरणों को देखने से हमें पता चलता है कि यह भी संभव है कि परिसीमा-मान समस्या के हल का अस्तित्व (existence) हो ही नहीं। और यदि इसका अस्तित्व हो भी तो यह संभव है कि हल अद्वितीय (unique) नहीं हो। वस्तुतः ऐसा कोई सरल सिद्धांत नहीं है जिसके तहत यह निश्चित रूप से कहा जा सके कि किसी परिसीमा-मान समस्या के अद्वितीय हल का अस्तित्व है या नहीं। लेकिन एक ऐसा प्रमेय अवश्य है जिसमें उन आवश्यक प्रतिबंधों (necessary conditions) को बताया गया है जिनके अधीन एक प्रथम कोटि आदि-मान समस्या का एक अद्वितीय हल होता है। चूंकि हमारा उद्देश्य आपको इन संकल्पनाओं के बारे में बताना भर ही है इसलिए यहां हम इस प्रमेय और अन्य संकल्पनाओं पर गहराई से चर्चा नहीं करेंगे। अगर आप इन संकल्पनाओं को और विस्तार से समझना चाहें तो हमारा सुझाव है कि आप 'अवकल समीकरण' न..क गणित पाठ्यक्रम MTE-08 की इकाई 1 के भाग 1.3 का अध्ययन करें। वस्तुतः स्नातकोत्तर स्तर ा अवकल समीकरण संबंधी उच्च पाठ्यक्रमों में अवकल समीकरणों के हलों के अस्तित्व, अद्वितीय... और व्यापक व्यवहार पर विशेष रूप से विचार किया जाता है। अतः अब से इस खंड में हम केवल उन्हीं अवकल समीकरणों पर विचार करेंगे जिनके हल का अस्तित्व होता हो।

अभी तक आपने साधारण अवकल समीकरण के व्यापक हल और विशेष हल के बारे में पढ़ा है। आप हलों के अस्तित्व और अद्वितीयता के बारे में भी कुछ बातें जान चुके हैं। अब हम रैखिक साधारण अवकल समीकरणों के हल से संबंधित कुछ गुणधर्मों पर चर्चा करेंगे। रैखिक साधारण अवकल समीकरणों को हल करते समय आप यह देखेंगे कि ये गुणधर्म काफ़ी उपयोगी सिद्ध होते हैं।

1.4.3 रैखिक साधारण अवकल समीकरणों के हलों के व्यापक गुणधर्म

आइए हम निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरण लें

$$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0 \qquad (1.13\text{ क})$$

और

$$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x) \qquad (1.13\text{ ख})$$

समी..रण (1.13 क) और (1.13 ख) दोनों ही द्वितीय कोटि रैखिक साधारण अवकल समीकरण हैं। इनमें पहला समीकरण समघात है और दूसरा असमघात। हम मुख्यतः सरलता की दृष्टि से द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों के संदर्भ में ही इन गुणधर्मों पर चर्चा करेंगे। ऐसा करने का एक और कारण यह है कि प्रायः भौतिकी में आपका वास्ता रैखिक द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों से ही पड़ेगा।

जिन गुणधर्मों की चर्चा हम यहां कर रहे हैं वे किसी भी कोटि के रैखिक साधारण अवकल समीकरण के लिए सही होते हैं।

रैखिक साधारण अवकल समीकरणों के गुणधर्म

i) $y = 0$ समीकरण (1.13 क) का एक हल है। इसे **तुच्छ हल** (trivial solution) कहा जाता है।

ii) यदि y_1 और y_2 समीकरण (1.13 क) के रैखिकतः स्वतंत्र हल हों, तो $u = c_1 y_1 + c_2 y_2$ भी समीकरण (1.13 क) का हल होता है, जहां c_1 और c_2 अचर हैं।

iii) यदि y_1, समीकरण (1.13 क) का हल हो और y_2, समीकरण (1.13ख) का हल हो, तो $z = y_1 + y_2$ समीकरण (1.13 ख) का एक हल होता है।

iv) समीकरण (1.13 ख) के दो हलों y_1, और y_2 का अंतर $(y_1 - y_2)$, समीकरण (1.13 क) का एक हल होता है।

दो फलनों $y_1(x)$ और $y_2(x)$ को अंतराल I पर, जहाँ दोनों फलन परिभाषित हैं, **रैखिकतः आश्रित** (linearly dependent) कहा जाता हैं, यदि और केवल यदि, हम ऐसे शून्येतर अचर (non-zero constants) k_1 और k_2 ज्ञात कर सकते हों, जिससे कि I के सभी x के लिए
$k_1 y_1(x) + k_2 y_2(x) = 0$
इस तरह, हम यह पाते हैं कि रैखिकतः आश्रित फलन, अंतराल I पर आनुपातिक होते हैं। यदि अंतराल I पर फलन आनुपातिक न हों, तो इन्हें **रैखिकतः स्वतंत्र** कहा जाता हैं। अतः रैखिकतः स्वतंत्र फलनों के लिए संबंध

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 = 0$$

तभी संतुष्ट होता है जबकि

$$c_1 = c_2 = 0$$

इन गुणधर्मों की उपपत्तियां काफ़ी सरल हैं। यदि समय मिले तो आप इन्हें स्वयं सिद्ध कर सकते हैं। अभी तक इस भाग में आपने जो कुछ पढ़ा है, अब आप उससे संबंधित एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 3

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

(क) सत्यापित कीजिए कि $x^2 + y^2 - 1 = 0$ अंतराल $[-1, 1]$ पर अवकल समीकरण $yy' = -x$ का एक हल है। बताइए कि यह हल स्पष्ट है या अस्पष्ट।

(ख) सत्यापित कीजिए कि

$y = Ax + \cos A$, जहां A अचर है

साधारण अवकल समीकरण

$y = xy' + \cos y'$ का हल है।

यह भी बताइए कि यह किस प्रकार का (व्यापक या विशेष) हल हैं।

चूंकि आप अवकल समीकरण के हल का अर्थ और रैखिक अवकल समीकरणों के हलों के आधारभूत गुणधर्मों को समझ चुके हैं, इसलिए अब आप प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियों के बारे में पढ़ सकते हैं। आगे की चर्चा में हमने अभ्यास के लिए अनेक बोध प्रश्न दिए हैं। बताई गई विधियों को अच्छी तरह समझने के लिए यह ज़रूरी है कि आप इन प्रश्नों को भी हल करते चलें। पहले हम उन साधारण अवकल समीकरणों को लेंगे जिन्हें पृथक्करणीय रूपों (separable formes) में समानीत (reduce) किया जा सकता हो।

1.5 पृथक्करणीय रूप में समानेय समीकरण

अनेक प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के संबंध में आप यह देखेंगे कि समीकरण को इस तरह लिखा जा सकता है कि समीकरण में उपस्थित स्वतंत्र चर और उनके अज्ञात फलन अलग हो जाएं। और, तब अलग हुए भागों के समाकलों को हल करके उस साधारण अवकल समीकरण को हल किया जा सकता है। आइए हम देखें कि यह विधि किस तरह लागू की जाती है।

1.5.1 चरों की पृथक्करण विधि

आइए हम

$$y' = f(x, y) \tag{1.14}$$

के रूप का एक व्यापक प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण लें।
यदि, हम $f(x, y)$ को

$$f(x, y) = \frac{M(x)}{N(y)} \tag{1.15}$$

के रूप में लिख सकें, तो समीकरण (1.14)

$$M(x)\,dx - N(y)\,dy = 0 \qquad (1.16)$$

के रूप का हो जाएगा।

(1.14) और (1.16) तुल्य समीकरण हैं। उदाहरण के लिए समीकरणों

$$y' = \frac{y}{1+x} \text{ और } (1+x)\,dy - y\,dx = 0$$

का एक ही अर्थ है। $y' = \frac{M(x)}{N(y)}$ **के रूप के साधारण अवकल समीकरण को पृथक्करणीय समीकरण** (separable equation) कहा जाता है। (1.16) के रूप में समीकरण (1.14) को लिखने पर स्वतंत्र चर x और उसका अज्ञात फलन y अलग अलग हो जाते हैं।

समीकरण (1.16) का समाकलन करने पर हमें मिलता है

$$\int M(x)\,dx - \int N(y)\,dy = C \qquad (1.17)$$

जहां C एक स्वेच्छ अचर है। समीकरण (1.17), साधारण अवकल समीकरण (1.14) का अभीष्ट हल है और यदि हम समाकलों को हल कर लें तो हम इस अभीष्ट हल को प्राप्त कर सकते हैं। आइए अब हम एक उदाहरण द्वारा इस विधि को समझें।

उदाहरण 1

समीकरण $\frac{dy}{dx} = -\frac{5(y^2+2)}{xy}$ को हल करें।

हल

इस समीकरण के $f(x, y)$ की समीकरण (1.15) के साथ तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि

$$M(x) = -\frac{5}{x},\; N(y) = \frac{y}{y^2+2}$$

अंतः इसे हम समीकरण (1.17) के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं

$$5\int \frac{dx}{x} + \int \frac{y\,dy}{y^2+2} = c$$

या

$$5\ln|x| + \frac{1}{2}\ln|y^2+2| = c$$

$$\therefore \ln|x|^5|y^2+2|^{1/2} = c$$

या

$$x^5(y^2+2)^{1/2} = c_1 \text{ जहां } c_1 = \exp(c)$$

अभीष्ट हल है।

मान लीजिए $I = \int \frac{y\,dy}{y^2+2}$। हम $u = y^2+2$ लेते हैं
$\therefore du = 2y\,dy$
$I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|$
$= \frac{1}{2}\ln|y^2+2|$
स्मरण रहे कि
$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$

हल की जांच करना
आइए हम उदाहरण 1 के साधारण अवकल समीकरण के हल की जांच करें। हल का अवकलन करने पर हमें मिलता है :
$5x^4(y^2+2)^{1/2} + \frac{x^5}{2}(y^2+2)^{-1/2}$
$2 . yy' = 0$
या $y' = -\frac{5x^4(y^2+2)^{1/2}}{x^5 y(y^2+2)^{-1/2}}$
या $y' = -\frac{5}{xy}(y^2+2)$
जो कि दिया हुआ साधारण अवकल समीकरण ही है। अतः हल सही है।

टिप्पणी : साधारण अवकल समीकरण को हल करने की प्रक्रिया में एक अति महत्वपूर्ण काम है, **हल की जांच करना।** आपको हमेशा साधारण समीकरण में हल को प्रतिस्थापित करके यह देख लेना चाहिए कि एक सर्वसमिका (identity) मिलती है या नहीं। कभी कभी तो हल का अवकलन करने पर ही हमें साधारण अवकल समीकरण मिल जाता है जैसा कि हमने उदाहरण 1 के लिए किया है। (हाशिए पर दी गई टिप्पणी देखिए।)

इस तरह हम यह पाते हैं कि **चरों की पृथक्करण विधि** (method of separation of variables)

के दो चरण होते हैं जिनका संक्षिप्त विवरण हम

चरों की पृथक्करण विधि

चरण 1 : प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण को $y' = \frac{M(x)}{N(y)}$ या $M(x)\,dx - N(y)\,dy = 0$ के रूप में लिखें।

चरण 2 : हल प्राप्त करने के लिए इसका समाकलन करें।

प्रश्न पर 5 मिनट लगाए

बोध प्रश्न 4

(क) साधारण अवकल समीकरण $(y+1)\,y' + x = 0$ का व्यापक हल मालूम कीजिए।

(ख) आदि-मान समस्या $y' = -2xy,\ y(0) = 3$ को हल कीजिए।

हलों की जांच करना न भूलें।

देखने में कुछ साधारण अवकल समीकरण अपृथक्करणीय (non-separable) लगते हैं। पर, कुछ प्रतिस्थापन करने पर वे पृथक्करणीय हो जाते हैं।

प्रतिस्थापन विधि से हल

पहले हम एक ऐसी स्थिति लेंगे जिसमें केवल समीकरण को देखकर ही प्रतिस्थापन किया जा सकता हो। उदाहरण के लिए, आइए हम साधारण अवकल समीकरण $y' = \cos(x+y)$ लें। इसमें $(x+y)$ होने के कारण यह समीकरण अपृथक्करणीय है। अतः हम निम्नलिखित प्रतिस्थापन (substitution) करते हैं

$$u = x + y$$

$$\therefore \frac{du}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx} \quad \text{या} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dx} - 1$$

अतः

$$\frac{du}{dx} = 1 + \cos u = 2\cos^2\frac{u}{2}$$

$$\therefore \frac{du}{2\cos^2 u/2} = dx$$

इस तरह हमने चरों u और x को अलग अलग कर लिया है। अब, इस समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$\frac{1}{2}\sec^2\frac{u}{2}\,dy - dx = 0$$

या

$$\frac{1}{2}\int \sec^2\frac{u}{2}\,du - \int dx = c$$

या

$$\tan\frac{u}{2} - x = c$$

या

$$\tan\frac{x+y}{2} - x = c$$

यही अभीष्ट हल है। क्यों न अब आप एक बोध प्रश्न हल करें?

हल की जांच करना

हल को x के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें मिलता है

$$\sec^2\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(\frac{1+y'}{2}\right) = 1$$

या

$$y' = 2\cos^2\left(\frac{x+y}{2}\right) - 1$$

$$= \cos(x+y)$$

जो कि हल किया जा रहा साधारण अवकल समीकरण है।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 5

निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरणों को हल करें

(क) $(x - 2y - 1) = (x - 2y + 7)\,y'$

(ख) $(1 + \cos\theta)\,dr = r\sin\theta\,d\theta$

हलों की जांच करना न भूलें।

आइए अब हम $y' = f(y/x)$ के रूप के साधारण अवकल समीकरणों के लिए उपयुक्त प्रतिस्थापन विधि के बारे में जानें। $f, y/x$ का फलन है। उदाहरणतः $f, (y/x)^3, \sin(y/x)$ आदि के जैसा हो सकता है। आइए एक उदाहरण द्वारा इस बात को समझें।

उदाहरण 2

अवकल समीकरण

$$(x^2+y^2)\,dx - xy\,dy = 0$$

को हल कीजिए।

हल

हम समीकरण को इस रूप में लिख सकते हैं

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} = \frac{x}{y}+\frac{y}{x}$$

समीकरण के इस रूप से पता चलता है कि हमें $\frac{y}{x} = v$ का प्रतिस्थापन करना चाहिए, जहां v, x का एक फलन है। इस तरह,

$$y = vx \quad \text{और} \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$$

अतः अवकल समीकरण निम्न रूप का हो जाता है :

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1}{v} + v$$

हल की जांच करना
हल को x के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें मिलता है
$1 = c_1 \exp(y^2/2x^2)$

$$\times\left[\frac{2yy'}{2x^2} - \frac{2y^2}{2x^3}\right]$$

$$1 = \frac{xy}{x^2}\left[y' - \frac{y}{x}\right]$$
$y' = x/y + y/x$
जो कि हल किया जा रहा साधारण अवकल समीकरण है।

या

$$v\,dv - \frac{dx}{x} = 0$$

इस तरह, v और x दोनों चर अलग अलग हो गए हैं। समाकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{v^2}{2} - \ln|x| = c.$$

या

$$x = c_1 \exp(v^2/2) = c_1 \exp(y^2/2x^2)$$

उदाहरण 2 को हल करने के बाद शायद आपके दिमाग में यह सवाल आया हो : यह कैसे मालूम किया जाए कि किसी साधारण अवकल समीकरण को प्रतिस्थापन $y = vx$ से पृथक्कृत किया जा सकता है कि नहीं? अगले भाग में हम इसी सवाल का जवाब देंगे।

1.5.2 समघात प्रथम कोटि अवकल समीकरण

समघात प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के चरों को पृथक्कृत करने के लिए हम प्रतिस्थापन $y = vx$ लागू कर सकते हैं। आप पूछ सकते हैं कि समघात प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण क्या होता है?

आपको याद होगा कि हमने भाग 1.3 में उच्च कोटि समघात अवकल समीकरणों को एक अलग ढंग से परिभाषित किया है।

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{1.18}$$

के रूप के प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण को **समघात** भी कहा जाता है, यदि M और N **समान घात में समघात फलन** हों। अब आप पूछेंगे कि **समघात फलन** क्या होता है? फलन $f(x,y)$ को x और y में घात n वाला **समघात फलन** कहा जाता है, यदि प्रत्येक k के लिए

$$f(kx, ky) = k^n f(x, y)$$

जहां k एक वास्तविक प्राचल (real parameter) है। उदाहरण के लिए

(क) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ घात 2 वाला एक समघात फलन है, क्योंकि

$$f(kx, ky) = (kx)^2 + (kx)(ky) + (ky)^2$$
$$= k^2(x^2 + xy + y^2) = k^2 f(x, y)$$

(ख) $f(x, y) = \sqrt{x - y}$ घात $\frac{1}{2}$ वाला एक समघात फलन है, क्योंकि

$$f(kx, ky) = \sqrt{kx - ky} = k^{1/2}\sqrt{x - y} = k^{1/2} f(x, y)$$

(ग) $f(x, y) = \exp(x/y) + \tan\frac{y}{x}$ घात शून्य वाला एक समघात फलन है, क्योंकि

$$f(kx, ky) = e^{kx/ky} + \tan\frac{ky}{kx} = e^{x/y} + \tan\frac{y}{x} = k^0 f(x, y)$$

(घ) $f(x, y) = x^3 + y^3 + 4$ समघात **नहीं** है, क्योंकि

$$f(kx, ky) = k^3x^3 + k^3y^3 + 4$$

चूंकि M और N समान घात, मान लीजिए n, वाले समघात फलन हैं, इसलिए M/N घात शून्य वाला एक समघात फलन होगा :

$$\frac{M(kx, ky)}{N(kx, ky)} = \frac{k^n M(x, y)}{k^n N(x, y)} = \frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

इस तरह, हम समीकरण (1.18) के लिए यह कह सकते हैं कि

$$\frac{dy}{dx} = \text{शून्य घात वाला एक समघात फलन}$$

और यह समघात प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण है जिसे प्रतिस्थापन $y = vx$ लागू करके हल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए,

(क) अवकल समीकरण $y\,dx + (x + y)\,dy = 0$ समघात है, क्योंकि $M(x, y)\,\{= y\}$ और $N(x, y)\,\{= x + y\}$ घात 1 वाले समघात फलन हैं,

(ख) अवकल समीकरण $y' = \exp(x/y) + \cos(y/x)$ समघात है, क्योंकि y' को घात शून्य वाले एक समघात फलन के रूप में व्यक्त किया गया है। संक्षेप में, यह विधि इस प्रकार है।

समघात प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण को हल करने की विधि

चरण 1 : साधारण अवकल समीकरण को

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

के रूप में लिखें।

चरण 2 : मालूम कीजिए कि $M(x, y)$ और $N(x, y)$ समान घात वाले समघात फलन हैं कि नहीं।

चरण 3 : प्रतिस्थापन $y = vx$ लागू करके चरों को अलग कीजिए।

अब आप देख सकते हैं कि उदाहरण 2 का साधारण अवकल समीकरण एक प्रथम कोटि **समघात** साधारण अवकल समीकरण ही है।

प्रथम कोटि अवकल समीकरण को हल करने की इस विधि को रैखिक गुणांकों (linear coefficients) वाले साधारण अवकल समीकरणों पर भी लागू किया जा सकता है। इस प्रकार के साधारण अवकल समीकरणों को **रैखिक प्रतिस्थापन** (linear substitution) द्वारा समघात बनाया जा सकता है।

रैखिक गुणांकों वाले साधारण अवकल समीकरण

मान लीजिए कि समीकरण (1.18) के फलन M और N, x और y में रैखिक फलन हैं, अर्थात्

$$M(x, y) = a_1x + b_1y + c_1 \text{ और } N(x, y) = a_2x + b_2y + c_2 \qquad (1.19)$$

आप देख सकते हैं कि यदि समीकरण (1.19) में $c_1 = c_2 = 0$ तो समीकरण (1.18) घात शून्य वाला समघात समीकरण होगा । और यदि $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ तो केवल देखकर ही आप प्रतिस्थापन $u = a_1 x + b_1 y$ कर सकते हैं, जैसा कि आपने बोध प्रश्न 5 (क) में किया है ।

जहां $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ अचर हैं । हम रैखिक प्रतिस्थापन $x = x' + h$ करके इस समीकरण को समघात बना सकते हैं । यहां h और k अचर हैं जिनके मान हमें निकालने हैं । ध्यान रहे कि यहां x' और y' चर हैं, अवकलज नहीं हैं । आइए हम एक उदाहरण की सहायता से इस विधि को और अच्छी तरह से समझने की कोशिश करें ।

उदाहरण 3

अवकल समीकरण

$$(y - x - 2)\, dx + (x + y + 1)\, dy = 0$$

को हल कीजिए ।

हल

हम $x = x' + h$ और $y = y' + k$ लेते हैं जिससे कि $dx = dx'$ और $dy = dy'$

तब समीकरण इस रूप का हो जाता है

$$(y' - x' + c_1)\, dx' + (x' + y' + c_2)\, dy' = 0$$

जहां $c_1 = -h + k - 2$ और $c_2 = h + k + 1$

अब हम h और k के वे मान लेते हैं जिनसे कि समीकरणें $c_1 = 0$ और $c_2 = 0$ एक साथ संतुष्ट हों, यानि कि

$$-h + k - 2 = 0 \text{ और } h + k + 1 = 0$$

एक साथ संतुष्ट हों ।

इस समीकरण निकाय (system of equations) का हल करने पर मिलता है $h = -\frac{3}{2}$ और $k = \frac{1}{2}$ । और तब

$$(y' - x')\, dx' + (x' + y')\, dy' = 0$$

या

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{x' - y'}{x' + y'}$$

यह समीकरण x' और y' में समघात है । अब आप $y' = vx'$ लेकर इस उदाहरण को पूरा कर सकते हैं । यह याद रखिएगा कि आपको h और k के मानों को लेकर अंतिम हल को x और y के पदों में व्यक्त करना है ।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 6

(क) उदाहरण 3 में दिए गए अवकल समीकरण के हल को पूरा करें । अपने हल की जांच करना न भूलें ।

(ख) बताइए कि निम्नलिखित समीकरणों में से कौन कौन से समघात प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण हैं ।

(i) $x^2 \frac{dy}{dx} = y^2 - 3xy + 5x^2$

(ii) $(x^2 + y^2)\, dx + (x + y)\, dy = 0$

(iii) $\{y + x \sin(\frac{y}{x})\}\, dx - x\, dy = 0$

(iv) $xy\, dx + (x^2 + 4)\, dy = 0$

(v) $x dx + (y - 2x)\, dy = 0$

(vi) $x dy - (y + \sqrt{x^2 - y^2})\, dx = 0$

अभी तक हमने प्रथम कोटि अवकल समीकरणों को हल करने की कुछ विधियों पर चर्चा की है ।

सभी स्थितियों में हमने समीकरण का व्यापक रूप

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

लिया है।

अब अगर समीकरण का वाम पक्ष ऐसा हो, कि इसे $d[z(x, y)]$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो तो हमें मिलता है

$$d[z(x, y)] = 0 \tag{1.20}$$

और हल होता है

$$z(x, y) = c = \text{एक अचर}$$

एक ऐसी प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण को जिसे (1.20) के रूप में व्यक्त किया जा सकता हो, **यथातथ समीकरण** (exact equation) कहा जाता है। आइए अब हम इस प्रकार के समीकरणों का अध्ययन करें।

1.6 यथातथ समीकरण

यथातथ समीकरण की परिभाषा से आप यह जान सकते हैं कि

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

के रूप का समीकरण तभी **यथातथ** होगा, जबकि एक ऐसा फलन $z(x, y)$ होता हो, जिसके लिए

$$\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} = M(x, y) \text{ और } \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = N(x, y) \tag{1.21}$$

तब हम साधारण अवकल समीकरण को निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं

$$\frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = 0 \tag{1.22 क}$$

या

$$d[z(x, y)] = 0 \tag{1.22 ख}$$

और साधारण अवकल समीकरण का हल होगा

$$z(x, y) = c = \text{एक अचर}$$

अब, हम यह कैसे मालूम करें कि दिया हुआ साधारण अवकल समीकरण यथातथ है कि नहीं?

समीकरण (1.21) से

$$M = \frac{\partial z}{\partial x} \text{ और } N = \frac{\partial z}{\partial y}$$

या

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$$

और

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

अब हम यह जानते हैं कि यदि $z = z(x, y)$ तो $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

दूसरे शब्दों में,

> $Mdx + Ndy = 0$ एक यथातथ साधारण अवकल समीकरण होता है यदि
>
> $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{1.23}$$

आपने भौतिकी में गणितीय विधियां-1 (PHE-04) के खंड 1 की इकाई 2 में एक फलन के आंशिक अवकलज और संपूर्ण अवकल के बारे में अवश्य पढ़ा होगा। आपको याद होगा कि फलन $f(x, y)$ का संपूर्ण अवकल होता है :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

यदि M, N और उनके आंशिक अवकलज $\partial M/\partial y$ और $\partial N/\partial x$ संतत हों तो प्रतिबंध (1.23), अवकल समीकरण $Mdx + Ndy = 0$ के यथातथ होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध होता है। अब सवाल उठता है कि यथातथ समीकरण को हल कैसे किया जाए।

यथातथ समीकरणों को हल करने की विधि

y को अचर मान कर x के सापेक्ष (1.21) की पहली समीकरण के समाकलन करने पर हमें मिलता है

$$z(x,y) = \int M(x,y)\,dx + f(y) \tag{1.24क}$$

यहां स्वेच्छ फलन $f(y)$ समाकलन अचर (constant of integration) है। $f(y)$ मालूम करने के लिए हम समीकरण (1.24क) को y के सापेक्ष अवकलित करते हैं और (1.21) की दूसरी समीकरण का प्रयोग करते हैं :

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \frac{df}{dy} = N(x,y)$$

इससे हमें मिलता है

$$\frac{df}{dy} = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \tag{1.24ख}$$

अंततः हम y के सापेक्ष समीकरण (1.24ख) का समाकलन करते हैं और प्राप्त परिणाम को समीकरण (1.24क) में प्रतिस्थापित करते हैं। तब साधारण अवकल समीकरण का हल होता है $z(x,y) = c$.

टिप्पणी : उपरोक्त विधि को हम (1.21) की दूसरी समीकरण अर्थात् $\dfrac{\partial z}{\partial y} = N(x,y)$ को लेकर भी शुरू कर सकते हैं। तब समीकरण (1.24क) और (1.24ख) के अनुरूप (analogues) क्रमशः होंगे

$$z(x,y) = \int N(x,y)\,dy + g(x) \tag{1.24 ग}$$

और $$\frac{dg}{dx} = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy \tag{1.24 घ}$$

आइए अब हम इस विधि को एक उदाहरण द्वारा अच्छी तरह समझें।

उदाहरण 4

दिखाइए कि अवकल समीकरण

$$3x(xy-2)\,dx + (x^3 + 2y)\,dy = 0$$

यथातथ है और इसे हल कीजिए।

हल

यहां $M = 3x^2y - 6x$, $N = x^3 + 2y$

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} = 3x^2$, $\dfrac{\partial N}{\partial x} = 3x^2$ अर्थात् $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$. अतः समीकरण यथातथ है।

अब हमें इस साधारण अवकल समीकरण को हल करना है। चूंकि यह समीकरण यथातथ है, इसलिए एक ऐसा फलन $z(x,y)$ होना चाहिए जिसके लिए $dz(x,y) = Mdx + Ndy = 0$. अब हम या तो समीकरणों (1.24 क) और (1.24 ख) को या समीकरणों (1.24 ग) और (1.24 घ) को लागू कर सकते हैं। समीकरण (1.24 क) से हमें मिलता है

$$z = \int M(x,y)\,dx + f(y) = \int (3x^2y - 6x)\,dx + f(y) = x^3y - 3x^2 + f(y)$$

चूंकि $\frac{\partial z}{\partial y} = N(x, y)$, इसलिए

$$x^3 + \frac{df}{dy} = x^3 + 2y$$

$$\therefore \frac{df}{dy} = 2y \text{ या } f(y) = y^2 + k,$$

जहां k एक स्वेच्छ अचर है ।

इस तरह,

$$z = x^3y - 3x^2 + y^2 + k$$

अतः अभीष्ट हल होगा

$$x^3y - 3x^2 + y^2 + k = c = \text{एक अचर}$$

या $$x^3y - 3x^2 + y^2 = \text{अचर}$$

हल की जांच करना
x के सापेक्ष हल को अवकलित करने पर मिलता है :
$3x^2y + x^3y' - 6x + 2yy' = 0$
या
$3x(xy - 2) + (x^3 + 2y)y' = 0$
या
$3x(xy - 2)\,dx + (x^3 + 2y)\,dy = 0$

जो कि हल किया जा रहा साधारण अवकल समीकरण है ।

संक्षेप में यथातथ समीकरण को हल करने की विधि इस प्रकार है :

यथातथ समीकरण को हल करने की विधि

चरण 1: अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखें
$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$
और यह जांच कर लें कि $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

चरण 2: (i) $z(x, y) = \int M(x, y)\,dx + f(y)$ या
$z(x, y) = \int N(x, y)dy + g(x)$
का मान निकालिए ।

(इन समाकलों में किसी को हल करते समय, पहले समाकल में y को या दूसरे समाकल में x को अचर मान लें ।)

चरण 3: $\frac{\partial z}{\partial y} = N(x, y)$ या $\frac{\partial z}{\partial x} = M(x, y)$ लेकर चरण 2 के स्वेच्छ फलनों $f(y)$ या $g(x)$ का मान निकालिए ।

चरण 4: अपने हल को आप $z(x, y) = c$ के रूप में लिखें ।

अब आप यथातथ समीकरणों को हल करने के संबंध में एक बोध प्रश्न हल करें ।

बोध प्रश्न 7

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरणों में से प्रत्येक समीकरण की जांच करके बताइए कि यह यथातथ है कि नहीं और यथातथ समीकरण को हल कीजिए ।

(क) $(x\cos y - y)\,dx + (x\sin y + x)\,dy = 0$

(ख) $(e^x + y - 1)\,dx + (3e^y + x - 7)\,dy = 0$

हल की जांच करना न भूलें ।

इस तरह आपने यथातथ समीकरण को हल करना सीख लिया है । पर, उस स्थिति में आप क्या

करेंगे जब $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ अर्थात् जब समीकरण अयथातथ (inexact) हो।

वस्तुत: एक उपयुक्त फलन $P(x, y) \neq 0$ से गुणा करके अयथातथ साधारण अवकल समीकरण को यथातथ बनाया जा सकता है। ऐसे फलन को साधारण अवकल समीकरण का **समाकलन गुणक** (integrating factor) कहा जाता है। समाकलन गुणक का परिकलन हम रैखिक प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण के लिए व्यवस्थित ढंग से कर सकते हैं। आइए किसी प्रथम कोटि रैखिक साधारण अवकल समीकरण को हल करने की यह विधि समझें।

1.6.1 प्रथम कोटि रैखिक अवकल समीकरण

भाग 1.3.2 में आपने यह देखा है कि x के किसी अंतराल पर परिभाषित एक प्रथम कोटि रैखिक असमघात अवकल समीकरण निम्न रूप का होता है

$$a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = f(x) \tag{1.25}$$

जहां $a_1(x) \neq 0$. समीकरण (1.25) के दोनों पक्षों को $a_1(x)$ से भाग देने पर हमें मिलता है :

$$y' + p(x)\,y = q(x) \tag{1.26}$$

यह प्रथम कोटि रैखिक असमघात अवकल समीकरण का **मानक रूप** (standard form) है। हम यह दिखा सकते हैं कि एक समाकलन गुणक $v(x)$, जो कि केवल x पर निर्भर करता है, प्राप्त करके समीकरण (1.26) को हल किया जा सकता है। अब अगर इस तरह के गुणक का अस्तित्व हो, तो समीकरण (1.26) को $v(x)$ से गुणा करने पर हमें एक यथातथ समीकरण प्राप्त हो जाना चाहिए, यानि कि

$$v(x)\,y' + v(x)\,p(x)\,y = v(x)\,q(x)$$

एक यथातथ समीकरण होना चाहिए। इस समीकरण को हम इस रूप में लिखते हैं

$$[\,v(x)\,p(x)\,y - v(x)\,q(x)\,]\,dx + v(x)\,dy = 0$$

यथातथता (exactness) के प्रतिबंध यानी समीकरण (1.23) से हमें मिलता है

$$\frac{\partial}{\partial y}[\,v(x)\,p(x)\,y - v(x)\,q(x)\,] = \frac{\partial}{\partial x}[v(x)] = \frac{dv(x)}{dx} \tag{1.27}$$

अतः समीकरण (1.27) से

$$\frac{dv(x)}{dx} = v(x)\,p(x)$$

$$\text{या}\quad \frac{d\,[v(x)]}{v(x)} = p(x)\,dx$$

दोनों ओर समाकलन करने पर हमें मिलता है

$$\ln|v(x)| = \int p(x)\,dx$$

$$\therefore\ v(x) = \exp[h(x)]\quad \text{जहाँ}\ h(x) = \int p(x)\,dx \tag{1.28}$$

यहाँ हमने जानबूझ कर समाकलन अचर को नहीं लिखा है क्योंकि हम केवल एक ही समाकलन अचर, यानि समाकलन गुणक $v(x)$ लेना चाहते हैं। अब, समीकरण (1.26) को समाकलन गुणक से गुणा करने पर हमें मिलता हैं।

$$e^h(y' + py) = e^h q$$

चूंकि समीकरण (1.28) से $h' = p$, इसलिए हम इस समीकरण को इस रूप में लिख सकते हैं

$$\frac{d}{dx}\left(y\,e^h\right) = e^h q$$

समीकरण के दोनों पक्षों का समाकलन करने और e^h से भाग देने पर हमें मिलता है

$$y = e^{-h}\left[\int e^h q\,dx + c\right],\quad h = \int p(x)\,dx \tag{1.29}$$

यह (1.26) के रूप के प्रथम कोटि रैखिक असमघात साधारण अवकल समीकरण का व्यापक हल है। आइए हम इस विधि को एक उदाहरण पर लागू करें।

उदाहरण 5

निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिए ।

$$L\frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sin \omega t$$

हल

हम समीकरण को इस रूप में लिख सकते हैं

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{E_0}{L}\sin \omega t$$

$\therefore$ समाकलन गुणक $= \exp\left(\int \frac{R}{L}dt\right) = \exp\left(\frac{Rt}{L}\right)$

इस गुणक से साधारण अवकल समीकरण को गुणा करने पर हमें मिलता है

$$e^{Rt/L}\left[\frac{di}{dt} + \frac{Ri}{L}\right] = \frac{E_0}{L}e^{Rt/L}\sin \omega t$$

$$\therefore \frac{d}{dt}(i\, e^{Rt/L}) = \frac{E_0}{L}e^{Rt/L}\sin \omega t$$

$$\therefore i\, e^{Rt/L} = \frac{E_0}{L}\int e^{Rt/L}\sin \omega t\, dt + C,$$

जहां C एक स्वेच्छ अचर है । अतः अभीष्ट हल यह होगा

$$i = \frac{E_0 \sin(\omega t - \theta)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} + C\, e^{-Rt/L}$$

जहां $\theta = \tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$

मान लीजिए

$I = \int e^{Rt/L}\sin \omega t\, dt$

खंडशः समाकलन (integration by parts) करने पर हमें मिलता है

$$I = e^{Rt/L}\left(\frac{-\cos \omega t}{\omega}\right) + \frac{R}{L\omega}\int e^{Rt/L}\cos \omega t\, dt$$

$$= -e^{Rt/L}\frac{\cos \omega t}{\omega} + \frac{R}{L\omega}\left[e^{Rt/L}\frac{\sin \omega t}{\omega} - \frac{R}{L\omega}\int e^{Rt/L}\sin \omega t\, dt\right]$$

या

$$I = \frac{e^{Rt/L}}{\omega^2 L}(R\sin \omega t - \omega L\cos \omega t) - R^2 I/\omega^2$$

$$I = \frac{L\, e^{Rt/L}}{(R^2 + \omega^2 L^2)}(R\sin \omega t - \omega L\cos \omega t)$$

$\cos\theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$ और

$\sin\theta = \frac{\omega L}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$

रखने पर हमें मिलता है

$$I = \frac{L\, e^{Rt/L}\sin(\omega t - \theta)}{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}$$

जहां $\theta = \tan^{-1}(\omega L/R)$

प्रथम कोटि रैखिक असमघात साधारण अवकल समीकरण को हल करने की विधि का संक्षिप्त विवरण हम इस प्रकार दे सकते हैं ।

> **प्रथम कोटि रैखिक असमघात साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विधि**
>
> **चरण 1 :** समीकरण को मानक रूप $y' + p(x)y = q(x)$ में लिखें ।
> (**टिप्पणी** : y' का गुणांक 1 होना चाहिए ।)
>
> **चरण 2 :** $p(x)$ मालूम कीजिए और $v(x) = e^{\int p(x)\,dx}$ का परिकलन कीजिए ।
>
> **चरण 3 :** समीकरण के मानक रूप को $v(x)$ से गुणा कीजिए । समीकरण का वाम पक्ष सदा ही स्वतंत्र चर के सापेक्ष गुणनफल $[y\,v(x)]$ का एक साधारण अवकलज होगा ।
>
> **चरण 4 :** परिवर्तित समीकरण के दोनों पक्षों का समाकलन कीजिए और y के लिए हल कीजिए ।

कुछ अनुभव हो जाने पर आप स्वयं भी, केवल देखकर ही, अन्य प्रकार के प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के समाकलन गुणक मालूम कर सकते हैं । पर, इस पाठ्यक्रम में हम इस बारे में आपकी परीक्षा नहीं लेंगे ।

अब आप ऊपर बताई गई विधि पर आधारित एक बोध प्रश्न हल करें ।

बोध प्रश्न 8

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

हल कीजिए : $xy' + 2y = x^3$

हल की जांच करना न भूलें ।

इस तरह आपने प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की कुछ सामान्य विधियां सीखी हैं। उच्च कोटि के ऐसे भी साधारण अवकल समीकरण हो सकते हैं जिन्हें प्रथम कोटि के साधारण अवकल समीकरणों में समानीत (reduce) किया जा सकता है। फिर इन विधियों में से किसी भी विधि को लागू करके उन्हें हल किया जा सकता है। इस इकाई को समाप्त करने से पहले हम ऐसी दो द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों की चर्चा करेंगे।

1.7 प्रथम कोटि में समानेय समीकरण

(i) अगर x और y में द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण में आश्रित चर y न हो, तो इसे इस रूप में लिखा जा सकता है

$$F(y'', y', x) = 0 \tag{1.30}$$

अब हम इसमें $w = y' = \frac{dy}{dx}$ का प्रतिस्थापन करते हैं। इस तरह, समीकरण (1.30) इस रूप का हो जाता है

$$F(w', w, x) = 0 \tag{1.31}$$

इस विधि को और अच्छी तरह से समझने के लिए हम निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरण लेते हैं :

$$y'' + 2y' = 0 \tag{1.32}$$

यहां हम $w = y'$ लेते हैं, जिससे कि

$$\frac{dw'}{dx} + 2w = 0 \tag{1.33}$$

अब आप इस समीकरण को चरों की पृथक्करण विधि से हल कर सकते हैं। आइए अब हम दूसरी स्थिति पर विचार करें।

(ii) यदि द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण में स्वतंत्र चर x न हो तो इसे इस रूप में लिखा जा सकता है

$$F(y'', y', y) = 0 \tag{1.34}$$

यहाँ भी हम $w = y'$ का प्रतिस्थापन करते हैं। तब हम y'' को इस रूप में लिख सकते हैं :

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy}\frac{dy}{dx} = w\frac{dw}{dy}$$

इस तरह, समीकरण (1.34) हो जाता है

$$F\left(w\frac{dw}{dy}, w, y\right) = 0 \tag{1.35}$$

जो w में एक प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण है जिसमें y स्वतंत्र चर है। इस विधि को और अच्छी तरह से समझने के लिए हम निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरण लेते हैं :

$$yy'' + (y')^2 = 0 \tag{1.36}$$

हम $w = y'$ लेते हैं जिससे कि $y'' = w\frac{dw}{dy}$. अतः हमें मिलता है

$$yw\frac{dw}{dy} + w^2 = 0 \tag{1.37}$$

अब इसे चरों की पृथक्करण विधि से हल किया जा सकता है।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 9

साधारण अवकल समीकरणों (1.33) और (1.37) के हल को पूरा कीजिए।

हल की जाँच करना न भूलें।

इस इकाई में आपने प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियां सीखी हैं। आगे जब कभी भी आपको प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण का हल करना हो, तो सबसे पहले आप उसका वर्गीकरण करें। फिर आप समीकरण से संबद्ध निम्नलिखित प्रश्नों पर विचार कर सकते हैं :

- क्या समीकरण के चर पृथक हो जाते हैं ?
- क्या कोई ऐसा स्पष्ट प्रतिस्थापन है जिससे कि साधारण अवकल समीकरण सरल हो जाता है?
- क्या साधारण अवकल समीकरण यथातथ है ?
- क्या समीकरण रैखिक, असमघात है ?

प्रायः इन प्रश्नों के उत्तर से आपको इस बात का पता चल जाएगा कि दिए हुए साधारण अवकल समीकरण को हल करने के लिए आपको किस विधि को लागू करना चाहिए। हाँ, यह बात अवश्य है कि कुछ साधारण अवकल समीकरणों को एक से अधिक विधियों से हल किया जा सकता है। ऐसी स्थिति में आप उस विधि को अपना सकते हैं जो सबसे सरल हो।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है, अब हम उसका एक संक्षिप्त विवरण यहाँ दे रहे हैं।

1.8 सारांश

- उन समीकरणों को जिनमें स्वतंत्र चरों के सापेक्ष एक या अधिक आश्रित चरों के साधारण या आंशिक अवकलज या अवकल होते हैं, **अवकल समीकरण** कहा जाता है।
- हम अवकल समीकरण को उसके प्रकार, अर्थात् **साधारण** या **आंशिक** के अनुसार, उसकी **कोटि** और **घात** के अनुसार, और इसके अनुसार कि वह **रैखिक** है या **अरैखिक**, वर्गीकृत करते हैं। **रैखिक** साधारण अवकल समीकरण दो तरह के, **समघात** या **असमघात** हो सकते हैं।
- फलन $y = \phi(x)$ किसी अंतराल पर अवकल समीकरण का **हल** तब होता है, जब $\phi(x)$ उस अंतराल में परिभाषित और अवकलित होता हो और यह फलन ऐसा हो कि y के स्थान पर अवकल समीकरण में $\phi(x)$ प्रतिस्थापित करने पर वह एक सर्वसमिका हो जाती हो। उस हल को जिसमें स्वेच्छ अचर होते हैं, **व्यापक हल** कहा जाता है। यदि कुछ प्रतिबंधों के अधीन व्यापक हल के स्वेच्छ अचरों को निश्चित मान दिए जा सकते हों, तो यह **विशेष हल** हो जाता है। प्रतिबंधों को लागू करने की विधि के अनुसार हमें **आदि-मान समस्या** या **परिसीमा-मान समस्या** प्राप्त होती है।
- **प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण** को हल करने की विधि समीकरण के उपयुक्त वर्गीकरण पर निर्भर करती है। यहाँ हम चार विधियों का संक्षिप्त विवरण दे रहे हैं :
  - प्रथम कोटि अवकल समीकरण **पृथक्करणीय** होता है, यदि इसे $N(y)\,dy = M(x)\,dx$ के रूप में लिखा जा सकता हो। समीकरण के दोनों पक्षों का समाकलन करके हल निकाला जाता है।
  - अवकल समीकरण $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ को प्रथम कोटि का **समघात** अवकल समीकरण कहा जाता है, यदि $M(x, y)$ और $N(x, y)$ समान घात वाले **समघात फलन** हों। $y = vx$ का प्रतिस्थापन करके इसे पृथक्करणीय बनाया जा सकता है। और, यदि M और N, x और y के रैखिक फलन हों, तो $x = x' + h, y = y' + k, y' = vx'$ के प्रतिस्थापन करके भी साधारण अवकल समीकरण को हल किया जा सकता है। ध्यान रहे कि यहाँ x' और y' चर हैं, अवकलज नहीं।

- अवकल समीकरण $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ को **यथातथ** कहा जाता है, यदि $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ एक यथातथ अवकल $[= dz(x,y)]$ हो । जब M और N संतत होते हैं और उनके संतत आंशिक अवकलज होते हैं, तो $Mdx + Ndy$ के यथातथ होने के लिए $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ एक आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध (necessary and sufficient condition) होता है । तब एक ऐसे फलन z का अस्तित्व होता है जिसके लिए $M(x,y) = \dfrac{\partial z}{\partial x}$ और $N(x,y) = \dfrac{\partial z}{\partial y}$ । इन व्यंजकों में से किसी भी व्यंजक का समाकलन करके यथातथ साधारण अवकल समीकरण को हल करने की प्रक्रियां शुरू होती है ।

- यदि प्रथम कोटि रैखिक साधारण अवकल समीकरण को

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

के रूप में लिखा जा सकता हो, तो इसे **समाकलन गुणक** $\exp\left[\int p(x)\,dx\right]$ से गुणा करके इसे यथातथ रूप में समानीत किया जा सकता है । हम समीकरण

$$\frac{d}{dx}\left[\left\{\exp\left(\int p(x)\,dx\right)\right\}y\right] = \left\{\exp\left(\int p(x)\,dx\right)\right\}q(x)$$

के दोनों पक्षों का समाकलन करके इस अवकल समीकरण को हल कर सकते हैं ।

- उपयुक्त **प्रतिस्थापन** या **चर परिवर्तन** करके साधारण अवकल समीकरण को एक सुपरिचित रूप में समानीत किया जा सकता है ।

- $F(y'', y', x) = 0$ और $F(y'', y', y) = 0$ के रूप के द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों को प्रथम कोटि समीकरणों में समानीत किया जा सकता है, और इस तरह, $y' = w$ का प्रतिस्थापन करके इन्हें हल किया जा सकता है ।

प्रश्नों पर कुल 30 मिनट लगाएं

1.9 अंत में कुछ प्रश्न

1. प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण

$$2y' - 4y = 16e^x$$

का व्यापक हल प्राप्त कीजिए ।

2. अवकल समीकरण

$$x\,dy - (y - \sqrt{x^2 + y^2})\,dx = 0$$

का विशेष हल प्राप्त कीजिए, जबकि दिया हो कि $x = 3$ पर $y = 4$.

3. समीकरण (1.2) को प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण में समानीत कीजिए और इस तरह इसे हल कीजिए । यहां यह दिया गया है कि $\dfrac{dx}{dt} = 0$ जबकि $x = a$ और $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

1.10 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. साधारण अवकल समीकरण : (i), (iii), (v), (viii), (ix),
   आंशिक अवकल समीकरण : (iv), (vi), (x)

2.

समीकरण	कोटि	घात	रैखिक/अरैखिक	समघात/असमघात
(2)	2	1	रैखिक	असमघात
(5)	2	3	अरैखिक	—
(6)	3	1	रैखिक	असमघात
(8)	2	1	रैखिक	समघात

3. (क) x के सापेक्ष समीकरण

$$x^2+y^2-1 = 0$$

के दोनों पक्षों का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$2x+2yy' = 0$$

या $yy'+x = 0$, जो कि दिया हुआ अवकल समीकरण है।
इसलिए $x^2+y^2-1 = 0$ दिए हुए समीकरण का हल है। यह अस्पष्ट हल है।

(ख) यह दिया हुआ है कि

$$y = Ax+\cos A$$

$$\therefore y' = \frac{dy}{dx} = A$$

इस तरह A के स्थान पर y' रखने पर दिया हुआ समीकरण हो जाता है
$y = y'x+\cos y'$ जो कि दिया हुआ अवकल समीकरण है। इसलिए,
$y = Ax+\cos A$ दिए हुए अवकल समीकरण का एक हल है।
क्योंकि A एक स्वेच्छ अचर है, इसलिए यह एक व्यापक हल है।

4. (क) $(y+1)y'+x = 0$
यह पृथक्करणीय समीकरण है। चरों की पृथक्करण विधि लागू करने पर हमें मिलता है

$$\int (y+1)\,dy = -\int x\,dx$$

या $$\frac{1}{2}y^2+y = -\frac{x^2}{2}+c$$

या $$y^2+x^2+2y = 2c$$

या $$(y+1)^2+x^2 = 2c+1$$

यह संकेन्द्रीय वृत्त कुल (family of concentric circles) का समीकरण है जिनके केंद्र $(0, -1)$ पर हैं और जिनकी त्रिज्याएं $\sqrt{2c+1}$ हैं (चित्र 1.3 क)।

(ख) आदि-मान समस्या $y' = -2xy, y(0) = 3$ भी एक पृथक्करणीय अवकल समीकरण है :

$$\int \frac{dy}{y} = -2\int x\,dx+c$$

या $$\ln|y| = -x^2+c$$

या $$y = c_1 e^{-x^2} \text{ जहाँ } c_1 = \ln|c|$$

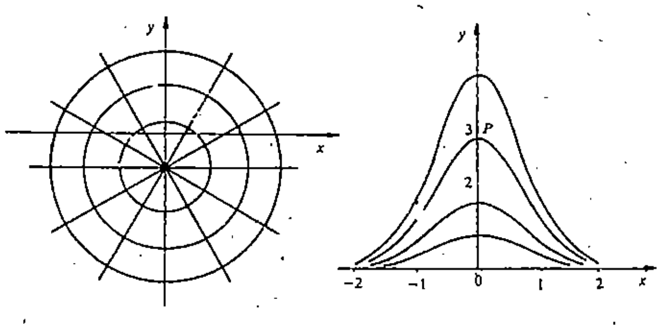
आदि प्रतिबंध से हमें मिलता है

$$c_1 = 3$$

अतः विशेष हल है

$$y = 3e^{-x^2}$$

इन व्यापक और विशेष हलों को चित्र 1.3 ख में दिखाया गया है। आपको भौतिकी में इस प्रकार के वक्र प्रायः देखने को मिलेंगे।



(क) (ख)

चित्र 1.3 : (क) संकेंद्रीय वृत्त जिनके केंद्र (0,-1) पर हैं ; (ख) उपरि-अर्धसमतल ($y > 0$) में $y' = -2xy$ के हल जो कि घंटाकार वक्र हैं। बिंदु P विशेष हल को निरूपित करता है।

5. (क) देखकर हम बता सकते हैं कि हमें निम्न प्रतिस्थापन करना चाहिए :

$$x - 2y = v$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$1 - 2\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} \text{ या } y' = \frac{1}{2}(1 - v')$$

मूल साधारण समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है

$$(v - 1) = \frac{(v+7)}{2}\left(1 - \frac{dv}{dx}\right)$$

या $\dfrac{dv}{dx} = 1 - \dfrac{2v-2}{v+7} = \dfrac{-v+9}{v+7}$

चरों की पृथक्करण विधि लागू करने पर हमें मिलता है

$$\int \frac{v+7}{v-9}\,dv = -\int dx + c$$

या $\displaystyle\int \left(1 + \frac{16}{v-9}\right) dv = -\int dx + c$

या $v + 16 \ln|v - 9| = -x + c$

क्योंकि $v = x - 2y$ इसलिए हमें निम्न रूप में व्यापक हल प्राप्त होता है

$$x - 2y + 16 \ln|x - 2y - 9| = -x + c$$

या $2x - 2y + 16 \ln|x - 2y - 9| = c$

(ख) $(1 + \cos\theta)\, dr = r \sin\theta\, d\theta$

$$\therefore \frac{dr}{r} - \frac{\sin\theta\, d\theta}{1 + \cos\theta} = 0$$

या $\displaystyle\int \frac{dr}{r} + \int \frac{-\sin\theta\, d\theta}{(1 + \cos\theta)} = \ln|c|$

या $\ln|r| + \ln|1 + \cos\theta| = \ln|c| \quad \left[\because \dfrac{d}{d\theta}(1 + \cos\theta) = -\sin\theta\right]$

$\therefore r(1 + \cos\theta) = C$ हल है।

6. (क) $\dfrac{dy'}{dx'} = \dfrac{x' - y'}{x' + y'} = \dfrac{1 - \dfrac{y'}{x'}}{1 + \dfrac{y'}{x'}}$

हम $y' = vx'$ लेते हैं।

$$\therefore \frac{dy'}{dx'} = v + x'\frac{dv}{dx'}$$

अतः अवकल समीकरण हो जाता है $v + x'\dfrac{dv}{dx'} = \dfrac{1 - v}{1 + v}$

या $x'\dfrac{dv}{dx'} = \dfrac{1 - v}{1 + v} - v = \dfrac{1 - 2v - v^2}{1 + v}$

या $\dfrac{dx'}{x'} = \dfrac{(1 + v)\, dv}{1 - 2v - v^2}$

या $\dfrac{dx'}{x'} + \dfrac{(1 + v)\, dv}{v^2 + 2v - 1} = 0$

या $\displaystyle\int \frac{dx'}{x'} + \int \frac{(1 + v)\, dv}{v^2 + 2v - 1} = \ln|c|$

या $\ln|x'| + \frac{1}{2}\ln|u| = \ln|c|, \quad u = v^2 + 2v - 1$

या $x' u^{1/2} = c_1$

$\therefore x'(v^2 + 2v - 1)^{1/2} = c_1$

$\therefore (y'^2 + 2y'x' - x'^2)^{1/2} = c_1$

या $y'^2 + 2y'x' - x'^2 = c_1^2$

या $\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(y - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{3}{2}\right) - \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = c_1^2$

अर्थात् $x^2 - y^2 - 2xy + 4x - 2y + A = 0$ अभीष्ट हल है

जहां $A = c_1^2 + \frac{7}{2}$

मान लीजिए $I = \int \frac{(1+v)\,dv}{v^2 + 2v - 1}$

हम $u = v^2 + 2v - 1$ लेते हैं

$\therefore du = (2v + 2)\,dv$

$= 2(v + 1)\,dv$

या $I = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$= \frac{1}{2}\ln|u|$

(ख) (i), (iii), (v), (vi)

7. (क) $M = x\cos y - y, \; N = x\sin y + x$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = -x\sin y - 1, \; \frac{\partial N}{\partial x} = \sin y + 1$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$$

अतः समीकरण अयथातथ है।

(ख) $M = e^x + y - 1, \; N = 3e^y + x - 7$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = 1, \; \frac{\partial N}{\partial x} = 1$$

$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ और समीकरण यथातथ है।

$\therefore \frac{\partial z}{\partial x} = e^x + y - 1$ और $\frac{\partial z}{\partial y} = 3e^y + x - 7$

पहले समीकरण से हमें मिलता है

$$z = e^x + xy - x + f(y)$$

अतः

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3e^y + x - 7 = x + \frac{df}{dy}$$

$$\therefore \frac{df}{dy} = 3e^y - 7$$

या $f(y) = 3e^y - 7y + c_1$

अभीष्ट हल है $z(x, y) = c'$

या $e^x + xy + 3e^y - x - 7y + C = 0$

8. दिए हुए साधारण समीकरण को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$y' + \frac{2}{x}y = x^2$$

समाकलन गुणक $= \exp\left(\int \frac{2}{x}\,dx\right) = e^{\ln|x^2|} = x^2$

इसलिए

$$\frac{d}{dx}\left(x^2 y\right) = x^4$$

या $x^2 y = \int x^4 dx + C$

$\therefore x^2 y - \frac{x^5}{5} = C$ अभीष्ट हल है।

9. समीकरण (1.33) से

$$\frac{dw}{2w} + dx = 0$$

या $\frac{1}{2}\int \frac{dw}{w} + \int dx = C$, जहाँ C एक स्वेच्छ अचर है

या $\frac{1}{2}\ln|w| + x = C$

$\therefore w = A\,e^{-2x}$, जहां $A = e^{2C}$

या $\frac{dy}{dx} = Ae^{-2x}$ अतः अभीष्ट हल है

$$y = -\frac{A}{2}e^{-2x} + B$$

जहां B एक स्वेच्छ अचर है।

समीकरण (1.37) से हमें मिलता है

$$\frac{dw}{w} + \frac{dy}{y} = 0$$

समाकलन करने पर हमें $\ln(wy) = c$ या $wy = e^c$ मिलता है।

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{A}{y}$, जहां $A = e^c$

या $\int y\,dy = \int A\,dx$

अतः अभीष्ट हल है $\frac{y^2}{2} = Ax + B$

अंत में कुछ प्रश्न

1. आप यह देख सकते हैं कि दिया हुआ साधारण अवकल समीकरण रैखिक असमघात प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण है। अतः यहां हम भाग 1.6.1 में बतायी गई विधि को लागू कर सकते हैं। समीकरण को मानक रूप में लिखने पर हमें मिलता है

$$y' - 2y = 8e^x$$

यहां $p(x) = -2$. अतः समाकलन गुणक होगा

$$v(x) = \exp\left[-\int 2\,dx\right] = \exp(-2x)$$

दिए हुए साधारण अवकल समीकरण के मानक रूप को e^{-2x} मे गुणा करने पर हमें मिलता है

$$e^{-2x}y' - 2y\,e^{-2x} = 8e^{-x}$$

या $\frac{d}{dx}(y\,e^{-2x}) = 8e^{-x}$

या $d\left(y\,e^{-2x}\right) = 8\,e^{-x}dx$

दोनों पक्षों का समाकलन करने पर

$$y\,e^{-2x} = -8e^{-x} + C$$

अतः व्यापक हल होगा

$$y = -8e^x + C\,e^{2x}$$

2. समीकरण को इस रूप में लिखा जा सकता है

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y - \sqrt{x^2 + y^2}}{x}$$

जो कि प्रथम कोटि समघात साधारण अवकल समीकरण है।

हम $y = vx$ लेते हैं जिससे कि $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$

और दक्षिण पक्ष $= \frac{vx - x\sqrt{1+v^2}}{x} = v - \sqrt{1+v^2}$

अतः

$$v + x\frac{dv}{dx} = v - \sqrt{1+v^2}$$

या $\frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = -\frac{dx}{x}$

$$\therefore \int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} + \frac{dx}{x} = \ln|c|$$

या $\ln|v + \sqrt{v^2+1}| + \ln|x| = \ln|c|$

या $\ln|x(v + \sqrt{v^2+1})| = \ln|c|$

$$\therefore x[v + \sqrt{v^2+1}] = C$$

अर्थात् $y + \sqrt{y^2+x^2} = C$ अभीष्ट व्यापक हल है ।

यह दिया हुआ है कि $x = 3$ पर $y = 4$

$$\therefore 4 + \sqrt{4^2+3^2} = C \text{ या } C = 9$$

अतः विशेष हल होगा

$$y + \sqrt{y^2+x^2} = 9$$

3. $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dt}\left(\frac{dv}{dx}\right) = v\left(\frac{dv}{dx}\right)$ और $\frac{k}{m} = \omega^2$

इस तरह समीकरण (1.2) को इस रूप में लिखा जा सकता है

$$v\frac{dv}{dx} + \omega^2 x = 0$$

या $v\,dv + \omega^2 x\,dx = 0$

समाकलन करने पर हमें मिलता है

$\frac{v^2}{2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = C$, जहां C एक स्वेच्छ अचर है, अर्थात्

$v^2 + \omega^2 x^2 = C'$ जहाँ $C' = 2C$

पर $\frac{dx}{dt} = v = 0$ जब $x = a$

$$\therefore C' = \omega^2 a^2$$

$$\therefore v^2 = \omega^2(a^2 - x^2)$$

या $v = \frac{dx}{dt} = \pm\omega\sqrt{a^2-x^2}$

या $\frac{dx}{\pm\sqrt{a^2-x^2}} = \omega\,dt$

$\therefore \int \frac{dx}{\pm\sqrt{a^2-x^2}} = \omega t + \delta$ जहां δ एक स्वेच्छ अचर है

$$\therefore \left.\begin{matrix} \sin^{-1}\frac{x}{a} \\ \\ \cos^{-1}\frac{x}{a} \end{matrix}\right] = \omega t + \delta$$

इस तरह $\frac{x}{a} = \begin{cases} \sin(\omega t + \delta) \\ \text{या} \\ \cos(\omega t + \delta) \end{cases}$

हल की जांच करना

हम व्यापक हल को इस प्रकार लिख सकते हैं

$y + \sqrt{y^2+x^2} = c$ (i)

या $x^2 + y^2 = (c-y)^2$

$= c^2 + y^2 - 2cy$

या $x^2 = c^2 - 2cy$ (ii)

इससे हमें मिलता है

$2x\,dx = -2c\,dy$

या $dy = -\frac{x}{c}dx$ (iii)

(i) से $\sqrt{x^2+y^2}$ और (iii) से dy का मान साधारण अवकल समीकरण में रखने पर हमें मिलता है

$x\left(\frac{-x}{c}dx\right) - dx(y - c + y) = 0$

या $dx\left[-\frac{x^2}{c} - 2y + c\right] = 0$ (iv)

(iv) में (ii) का प्रतिस्थापन करने पर हमें एक सर्वसमिका मिलती है । अतः (i) दिए हुए साधारण अवकल समीकरण का हल है ।

अतः अभीष्ट हल होंगे

$x = a \sin(\omega t + \delta)$ और $x = a \cos(\omega t + \delta)$

1.11 शब्दावली

अबीजीय फलन	transcendental function
अरैखिक	nonlinear
अवकल समीकरण	differential equation
असमघात	nonhomogeneous
आंशिक अवकल समीकरण	partial differential equation
आदि प्रतिबंध	initial conditions
आदि-मान समस्या	initial-value problem
आश्रित चर	dependent variable
कोटि	order
घात	degree
तुच्छ हल	trivial solution
परिसीमा-मान समस्या	boundary-value problem
पृथक्करण	separation
यथातथ अवकल समीकरण	exact differential equation
रैखिक	linear
रैखिकतः आश्रित	linearly dependent
रैखिकतः स्वतंत्र	linearly independent
विचित्र हल	singular solution
विशेष हल	particular integral
व्यापक हल	general solution
समघाती	homogeneous
समाकलन गुणक	integrating factor
समानेय	reducible
सर्वसमिका	identity
स्वेच्छ अचर	arbitrary constant
हल	solution

इकाई 2 अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना

इकाई 1 में आपने प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करना सीखा है। भौतिक तंत्रों के अध्ययन में ये समीकरण काफ़ी उपयोगी सिद्ध होते हैं। उदाहरण के लिए, इन समीकरणों की सहायता से रेडियोएक्टिव-क्षय, पिंड का पृथ्वी के गुरूत्व के अधीन मुक्त रूप से गिरना, तरल प्रवाह, विद्युत परिपथों में धारा प्रवाह आदि का अध्ययन किया जा सकता है। पर ऐसे अनेक तंत्र हैं जिनके अध्ययन के लिए, एक से अधिक कोटि वाले साधारण अवकल समीकरणों के हल की आवश्यकता होती है। दोलन और तरंगें नामक भौतिकी के पाठ्यक्रम की इकाई 1 में आप पढ़ चुके हैं कि अनवमंदित आवर्ती दोलक (undamped harmonic oscillator) की गति को अचर गुणांकों वाला एक समघात द्वितीय कोटि अवकल समीकरण निरूपित करता है। इसी प्रकार, क्षैतिज छड़ों का अवनमन (depression) ज्ञात करने के लिए आपको अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि अवकल समीकरण को ही हल करना होता है। आप इन समीकरणों को हल करने की विधि भाग 2.3 में सीखेंगे।

लेकिन क्या आप समघात द्वितीय कोटि अवकल समीकरण द्वारा *RLC* परिपथ में आवेश का समय के साथ परिवर्तन (यानि धारा) और अनुनाद क्रिया का अध्ययन कर सकते हैं ? ऐसी स्थितियों में हमें अचर गुणांकों वाले असमघात द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों को हल करना पड़ता है। पर हम सदैव ऐसा भी नहीं कर सकते। उदाहरणतया यदि हम आवेशित गोले या बेलन के इर्द-गिर्द क्षेत्र-वितरण का अध्ययन करना चाहें, तो इसके लिए हमें चर **गुणांकों (variable coefficients)** वाले **द्वितीय अवकल समीकरणों को हल करना होता है। यही स्थिति ऊष्मा, प्रकाशिकी, विद्युत-चुंबकीय** सिद्धांत, आणविक भट्टी में ऊर्जा उत्पादन, क्वांटम यांत्रिकी आदि में भी आती है। ऐसे समीकरणों को हल करने के लिए या तो हम घात-श्रेणी हल (power series solution) प्राप्त करते हैं या फ्रोबेनियस विधि (Frobenius method) का प्रयोग करते हैं। अगली इकाई में आप इन विधियों का अध्ययन करेंगे। इस इकाई में हम अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों को हल करने की कुछ आधारभूत विधियों पर चर्चा करेंगे। इनके कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा हम इकाई 4 में करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप

- साधारण अवकल समीकरण के लिए रांसकियन (Wronskian) परिकलित कर सकेंगे
- समघात द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों के एकघाततः स्वतंत्र हल प्राप्त कर सकेंगे
- असमघात द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों के रैखिकतः स्वतंत्र हल प्राप्त करने के लिए अनिर्धारित गुणांक विधि और प्राचल विचरण विधि इस्तेमाल कर सकेंगे ।

2.2 पदावली

इकाई 1 में आप साधारण अवकल समीकरणों से संबंधित आधारभूत पदावली के बारे में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं । लेकिन द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों के संदर्भ में हम कुछ ऐसे पदों का प्रयोग करते हैं जिनके बारे में अभी तक आपको कोई जानकारी नहीं है । अतः यह नितांत आवश्यक है कि आप ऐसे सभी पदों से परिचित हों । इस भाग में हम इसी बारे में चर्चा करेंगे ।

आप जानते हैं कि द्वितीय कोटि रैखिक साधारण अवकल समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)\, y = g(x) \tag{2.1}$$

फलन $g(x)$ को **प्रेरक फलन** (forcing function) कहा जाता है और $p_1(x)$ तथा $p_0(x)$ **गुणांक फलन** (coefficient function) हैं । ये फलन उस अंतराल में संतत हैं जिस में दिये हुए समीकरण के हल का अस्तित्व होता है ।

एकघाततः स्वतंत्र हल और रांसकियन

इकाई 1 (भाग 1.4.3) में आप यह पढ़ चुके हैं कि यदि y_1 और y_2 समघात समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_0(x)\, y(x) = 0 \tag{2.2}$$

के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं तो इनका एकघात संचय (linear combination)

$$y(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{2.3}$$

समीकरण (2.2) का एक व्यापक हल है । इसमें C_1 तथा C_2 स्वेच्छ अचर हैं । उदाहरणतया $y_1 = \sin \omega t$ और $y_2 = \cos \omega t$ अनवमंदित आवर्ती दोलक के साधारण अवकल समीकरण $\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$ के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं । अतः

$$y(t) = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t$$

उपर्युक्त समीकरण का व्यापक हल है ।

अब आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि रैखिकतः स्वतंत्र हल क्या होते हैं तथा इसका परीक्षण हम किस प्रकार करते हैं? क्या रैखिकतः स्वतंत्र हलों के एकघात संचय से सदैव अलग हल प्राप्त होता है? रैखिक अवकल समीकरण का हल समुच्चय कब व्यापक हल होता है? आइए, अब द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों के लिए ऐसे सभी प्रश्नों के उत्तर ढूंढें ।

रैखिकतः स्वतंत्र समीकरणों को **एकघाततः स्वतंत्र** और **रैखिकतः आश्रित** समीकरणों को **एकघाततः परतंत्र** भी कहा जाता है । अपने सभी गणितीय और भौतिकी के पाठ्यक्रमों में समान शब्दावली का प्रयोग करने की दृष्टि से हमने इस पदावली का प्रयोग किया है ।

किसी अंतराल पर दो हल y_1 और y_2 तब रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं जबकि सर्वसमिका

$$C_1 y_1 + C_2 y_2 = 0 \tag{2.4}$$

तभी संतुष्ट होती हो जब $C_1 = C_2 = 0$. क्योंकि यदि C_1 और C_2 शून्येतर अचर (non-zero constants) हों तो समीकरण (2.4) से $\frac{y_2}{y_1} = K$ (एक अचर) प्राप्त होगा, अर्थात् दिए हुए अंतराल

में y_1 और y_2 समानुपातिक होंगे। ऐसी स्थिति में उस अंतराल में y_1 और y_2 समानुपाती होंगे। ऐसी स्थिति में उस अंतराल में y_1 और y_2 रैखिकत: आश्रित फलन होंगे। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि y_1 और y_2 की रैखिक स्वतंत्रता का अर्थ यह है कि y_2/y_1 अचर नहीं है। इससे यह संकेत मिलता है कि इस अनुपात का अवकलज

अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

y_2', y_2 का x के सापेक्ष अवकलज है।

$$\frac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} \tag{2.5}$$

शून्येतर (non zero) है। अतः हम द्वितीय कोटि के समघात साधारण अवकल समीकरण के दो हलों y_1 और y_2 की रैखिक स्वतंत्रता के प्रतिबंध को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \tag{2.6}$$

सारणिक (determinant) $W(y_1, y_2)$ को दिए हुए अवकल समीकरण का **रांसकी सारणिक** (Wronski determinant) या **रांसकियन** (Wronskian) कहा जाता है। अतः हम कह सकते हैं कि

> किसी अंतराल $[a, b]$ पर द्वितीय कोटि के नियत गुणांकों वाले साधारण अवकल समीकरण के दो हल y_1 और y_2 रैखिकतः स्वतन्त्र केवल तभी हो सकते हैं जबकि उनका रांसकियन $a \le x \le b$ के लिए शून्येतर हो।

आवर्ती दोलक के लिए

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin \omega t & \cos \omega t \\ \omega \cos \omega t & -\omega \sin \omega t \end{vmatrix} = -\omega$$

यह दर्शाता है कि $\sin \omega t$ और $\cos \omega t$ रैखिकतः स्वतंत्र हैं। हम यह भी कह सकते हैं कि अंतराल I पर y_1 और y_2 केवल तभी रैखिकतः स्वतंत्र हल होते हैं जबकि $x = x_0$ के लिए रांसकियन शून्य होता है।

बोध प्रश्न 1

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

समीकरण $y'' + 4y = 0$ के हल $y_1 = \sin 2x$ और $y_2 = \cos 2x$ हैं। क्या ये एकघाततः स्वतंत्र हैं?

विशेष समाकल और पूरक फलन

दोलन और तरंगें (PHE-02) पाठ्यक्रम के भाग 4.2 में आप पढ़ चुके हैं कि प्रणोदित अवमंदित आवर्ती दोलक (forced damped harmonic oscillator) के गति समीकरण को हम निम्न रूप में लिखते हैं :

$$my'' + \gamma y' + ky = F_0 \cos \omega t \tag{2.7}$$

जिसे प्रायः इस रूप में लिखा जाता है

$$y'' + 2by' + \omega_0^2 y = f_0 \cos \omega t$$

जहां $2b = \gamma/m$, $\omega_0^2 = k/m$ और $f_0 = F_0/m$.

भौतिक रूप में इस निकाय की गति के दो घटक है: इनमें से एक गति अवमंदित आवृत्ति की होती है और दूसरी गति की आवृत्ति प्रेरक बल की आवृत्ति के बराबर होती है। गणितीय रूप में इसे हम इस प्रकार व्यक्त करते हैं :

$$y(t) = y_1 + y_2 \tag{2.8}$$

जहां y_1 समघात समीकरण

$$y_1'' + 2b y_1' + \omega_0^2 y_1 = 0 \tag{2.9}$$

का हल है। समीकरण (2.8) को समीकरण (2.7) में प्रतिस्थापित करने और इस तरह प्राप्त व्यंजक में समीकरण (2.9) का उपयोग करने पर आप पाएंगे कि y_2 समीकरण

$$y_2'' + 2b\,y_2' + \omega_0^2 y_2 = f_0 \cos \omega t$$

का हल है । गणित में y_1 को पूरक फलन (complementary function) और y_2 को विशेष समाकल (particular integral) कहा जाता है । हम अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि असमघात रैखिक अवकल समीकरण के व्यापक हल को पूरक फलन और विशेष समाकल के योग के रूप में लिख सकते हैं :

$$y(x) = y_p(x) + y_c(x) \tag{2.10}$$

आप जानते हैं कि द्वितीय कोटि अवकल समीकरण के हल में केवल दो स्वेच्छ अचर हो सकते हैं । इसका अर्थ यह है कि विशेष समाकल में कोई स्वेच्छ अचर नहीं हो सकता ।

हम आशा करते हैं कि अब आप समस्त आवश्यक पदावली से अच्छी तरह से परिचित हो गए हैं । आइए अब हम अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात रैखिक साधरण अवकल समीकरणों को हल करना सीखें ।

2.3 अचर गुणांकों वाले समघात रैखिक समीकरण

अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात रैखिक अवकल समीकरण का अनुप्रयोग प्रायः अभियांत्रिकी तथा जैविक और भौतिक निकायों के लिए होता है । आप यांत्रिक और वैद्युत कंपनों में इनके अनुप्रयोग से भली-भांति परिचित हैं । इन समीकरणों को हल करने की अनेक विधियां विकसित हो चुकी हैं । इनमें कोटि समानयन (reduction of order) विधि जिसे आप इकाई 1 में पढ़ चुके हैं, और चरघातांकी फलन विधि (method of exponential functions) शामिल हैं । अब हम उपर्युक्त विधि के बारे में चर्चा करेंगे ।

अचर गुणांकों वाले समघात द्वितीय कोटि अवकल समीकरण को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{2.11}$$

यहां a, b और c अचर हैं ।

समीकरण (2.11) से आप देख सकते हैं कि y, y' और y'' रैखिकतः आश्रित हैं । इससे पता चलता है कि y एक चरघातांकी फलन होना चाहिए क्योंकि चरघातांकी फलन के किसी कोटि के अवकलज मूल चरघातांकी फलन के गुणज से रैखिकतः आश्रित होते हैं ।

इकाई 1 से आपको याद होगा कि प्रथम कोटि समघात रैखिक अवकल समीकरण ($y'' - k^2 y = 0$) का हल एक चरघातांकी फलन होता है :

$$y = A \exp(\pm kx)$$

अतः हम उपर्युक्त हल को निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$y(x) = A \exp(mx) \tag{2.12}$$

यहां m की विमा x की विमा के प्रतिलोम होनी चाहिए ताकि चरघातांकी फलन का घात विमाहीन (dimensionless) रहे । समीकरण (2.12) और इसके अवकलजों

$$y' = A\,m \exp(mx)$$

और

$$y'' = A\,m^2 \exp(mx)$$

को समीकरण (2.11) में प्रतिस्थापित करने पर आपको

$$(a\,m^2 + b\,m + c)A \exp(mx) = 0$$

समीकरण प्राप्त होगा । चूंकि $A \exp(mx)$ शून्येतर हैं इसलिए यह समीकरण केवल तभी संतुष्ट होगा जबकि

$$a\,m^2 + b\,m + c = 0 \tag{2.13}$$

हो । द्विघात समीकरण (2.13) को **अभिलक्षणिक समीकरण** (characteristic equation) या **सहायक समीकरण** (auxiliary equation) कहा जाता है । इसके मूल

$$m_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{तथा} \quad m_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

हैं। उदाहरणतया, समीकरण

$$y'' + 5y' - 7y = 0$$

का सहायक समीकरण

$$m^2 + 5m - 7 = 0$$

है। अतः आप मानेंगे कि

$$y_1(x) = A\exp(m_1 x) \tag{2.14a}$$

और

$$y_2(x) = A\exp(m_2 x) \tag{2.14b}$$

समीकरण (2.11) के हल हैं। अध्यारोपण-सिद्धांत (principle of superposition) को इस्तेमाल करके आप समीकरण (2.11) के व्यापक हल को निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$y(x) = c_1\exp(m_1 x) + c_2\exp(m_2 x) \tag{2.14c}$$

इसमें c_1 तथा c_2 नियत गुणांक हैं जिन्हें आदि प्रतिबंध तथा परिसीमा प्रतिबंधों की सहायता से परिकलित किया जा सकता है। y_1 तथा y_2 का रांसकियन

$$W(x) = \begin{vmatrix} A\exp(m_1 x) & A\exp(m_2 x) \\ m_1 A\exp(m_1 x) & m_2 A\exp(m_2 x) \end{vmatrix}$$

$$= (m_2 - m_1)B\exp[(m_1 + m_2)x] \tag{2.15}$$

है। यहां $B = (A^2)$ एक अचर है। इससे पता चलता है कि यदि m_1 और m_2 समान न हों तो ये हल रैखिकतः आश्रित होंगे।

आप समझ गए होंगे कि अचर गुणांकों वाले समघात रैखिक द्वितीय कोटि अवकल समीकरण को हल करने की प्रक्रिया में यदि हम चरघातांकी फलन का प्रयोग करें तो हमें द्विघात समीकरण के मूल ज्ञात करने पड़ते हैं। इस प्रकार प्राप्त द्विघात समीकरण के मूल ये हो सकते हैं :

1. वास्तविक और असमान, यदि $b^2 - 4ac > 0$ या $b^2 > 4ac$
2. वास्तविक और बराबर, यदि $b^2 - 4ac = 0$ या $b^2 = 4ac$ तथा
3. संमिश्र संयुग्मी, यदि $b^2 - 4ac < 0$ या $b^2 < 4ac$.

आइए अब हम इन मूलों के संगत हल प्राप्त करें।

असमान वास्तविक मूल

असमान वास्तविक मूलों के लिए $\exp(m_1 x)$ और $\exp(m_2 x)$ रैखिकतः स्वतंत्र होते हैं तथा व्यापक हल निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$y(x) = c_1\exp(m_1 x) + c_2\exp(m_2 x)$$

$$= \exp\left[-\left(\frac{bx}{2a}\right)\right][c_1\exp(\alpha x) + c_2\exp(-\alpha x)] \tag{2.16}$$

जबकि $\alpha = \dfrac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

दिए हुए आदि और परिसीमा प्रतिबंधों को लागू करके c_1 और c_2 प्राप्त किए जा सकते हैं। उपर्युक्त विधि को अब हम एक उदाहरण की सहायता से समझाने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 1

आदि प्रतिबंध $y(0) = 1$ और $y'(0) = 2$ के संगत समीकरण

$$y'' + 3y' + 2y = 0$$

को हल कीजिए।

हल

दिए गए समीकरण के संगत सहायक समीकरण

$$m^2 + 3m + 2 = 0$$

है, जिसके मूल $m = -1$ और $m = -2$ हैं। अतः व्यापक हल

$$y = c_1 \exp(-x) + c_2 \exp(-2x) \qquad \text{(i)}$$

है। c_1 और c_2 को ज्ञात करने के लिए पहले हम $x = 0$ पर $y = 1$ प्रतिबंध को लागू करते हैं। अतः

$$c_1 + c_2 = 1 \qquad \text{(ii)}$$

और क्योंकि

$$y' = c_1 \exp(-x) - 2c_2 \exp(-2x)$$

है इसलिए

$$y'(0) = 2 = -c_1 - 2c_2 \qquad \text{(iii)}$$

c_1 तथा c_2 के लिए (ii) और (iii) को हल करने पर आप देखेंगे कि $c_1 = 4$ तथा $c_2 = -3$ हैं। अतः दिये हुए समीकरण का अभीष्ट विशेष हल निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$y = 4\exp(-x) - 3\exp(-2x)$$

जब दो मूल बराबर होते हैं अर्थात् $m_1 = m_2$, तब $W(x) = 0$. इसका अर्थ यह है कि $\exp(m_1 x)$ और $\exp(m_2 x)$ रैखिकतः आश्रित हैं। यह किस बात का संकेत करता है ? इससे पता चलता है कि (i) समीकरण (2.14) मान्य नहीं है और (ii) हमारी प्रारंभिक कल्पना ही ग़लत है। अब आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि जब द्वितीय कोटि अवकल समीकरण के सहायक समीकरण के दोनों मूल बराबर हों तो हम रैखिकतः स्वतंत्र फलन किस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं ? ऐसी स्थिति में हम कोटि समानयन विधि (method of reduction of order) का उपयोग करते हैं। इसे नीचे बताया गया है।

पुनरावृत्त वास्तविक मूल (repeated real roots)

जब एक द्वितीय कोटि अवकल समीकरण के दोनों मूल बराबर होते है, तब हम द्वितीय हल का सही रूप प्राप्त करने के लिए यह कल्पना करते हैं कि

$$y_2 = u(x)\exp(mx) \qquad (2.17)$$

जहां m सहायक समीकरण (2.13) का एक मूल है। समीकरण (2.17) को x के सापेक्ष अवकलित करने पर आप देखेंगे कि

$$y_2' = u'\exp(mx) + m\,u\,\exp(mx)$$

और

$$y_2'' = u''\exp(mx) + 2\,mu'\,\exp(mx) + m^2 u\exp(mx)$$

इन्हें समीकरण (2.11) में प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि

$$(am^2 + bm + c)\, u(x) \exp(mx) + (2ma + b)\, u' \exp(mx) + au'' \exp(mx) = 0$$

समीकरण (2.13) के अनुसार इस व्यंजक का पहला पद लुप्त हो जाता है। u' का गुणांक शून्य है क्योंकि $m = -b/2a$. अतः उपर्युक्त व्यंजक काफ़ी सरल रूप ले लेता है :

$$a \exp(mx)\, u'' = 0$$

$\exp(-mx)$ से गुणा करके समाकलन करने पर आप देखेंगे कि

$$u' = K$$

जहां K एक स्वेच्छ समाकलन अचर है।

पुनः समाकलित करने पर आप लिख सकते हैं कि

$$u = Kx + c$$

तथा

$$y_2(x) = x \exp(mx) = x \exp\left(-\frac{bx}{2a}\right) \qquad (2.18)$$

अभीष्ट हल है! अतः द्वितीय कोटि अवकल समीकरण के व्यापक हल को हम निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$y(x) = c_1 \exp\left(-\frac{bx}{2a}\right) + c_2\, x \exp\left(-\frac{bx}{2a}\right)$$

$$= (c_1 + x c_2) \exp\left(-\frac{bx}{2a}\right) \qquad (2.19)$$

जहां c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

यह जांच करने के लिए कि $\exp\left(-\frac{bx}{2a}\right)$ और $x \exp\left(-\frac{bx}{2a}\right)$ रैखिकतः स्वतंत्र हैं आप इनका रांसकियन परिकलित करें

$$W(x) = \begin{vmatrix} \exp\left(\frac{bx}{2a}\right) & x \exp\left(-\frac{bx}{2a}\right) \\ -\frac{b}{2a} \exp\left(-\frac{bx}{2a}\right) & -\frac{b}{2a} x \exp\left(-\frac{bx}{2a}\right) + \exp\left(-\frac{bx}{2a}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \exp(-bx/a) > 0 \quad \text{for} \quad a \le x \le b \qquad (2.20)$$

इससे पता चलता है कि $\exp(-bx/a)$ और $x \exp(-bx/2a)$ मान्य हल हैं।
समीकरण (2.19) के स्वेच्छ अचर c_1 और c_2 को दिए गए आदि और परिसीमा प्रतिबंध की मदद से ज्ञात किया जा सकता है। अतः हम कह सकते हैं कि

> यदि अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के संगत सहायक समीकरण के वास्तविक मूल पुनरावृत्त हों $(m_1 = m_2 = m)$ तो समीकरण का व्यापक हल
>
> $$y(x) = (c_1 + c_2 x) \exp(mx)$$
>
> होता है। यहां c_1 और c_2 स्वेच्छ अचर हैं।

समीकरण (2.18) को प्राप्त करने की दूसरी विधि में हम $\exp(m_1 x)$ और $\exp(m_2 x)$ का एकघात संयोजन बना सकते हैं :

$$\frac{\exp(m_1 x) - \exp(m_2 x)}{m_1 - m_2}$$

इस व्यंजक की $\lim\limits_{m_1 \to m_2 (= m)}$ लेने पर यह निम्नलिखित रूप ले लेता है :

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{(m+h)x} - e^{mx}}{h}, h = m_1 - m$$

$$= \frac{d}{dm} e^{mx} = x e^{mx}$$

यह देखने के लिए कि आप इस विधि को अच्छी तरह से समझ गए हैं, आप निम्नलिखित बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 2

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं।

प्रारंभिक मान समस्या

$$y'' + 6y' + 9y = 0,\ y(0) = 2 \text{ तथा } y'(0) = 1$$

को हल कीजिए

संमिश्र मूल (complex roots)

आइए अब हम उस स्थिति पर विचार करते है जहाँ सहायक समीकरण के सम्मिश्र मूल $m = \alpha + i\beta$ के रूप के हैं। यहाँ α और β वास्तविक अचर हैं। आपने अपने स्कूल के गणित के पाठ्यक्रमों में पढ़ा होगा कि वास्तविक बहुपद समीकरण (real polynomial equation) के संमिश्र मूल सदैव संयुग्मी युग्मों (conjugate pairs) में होते हैं। अर्थात्, यदि

$$m_1 = \alpha + i\beta$$

एक मूल है तो

$$m_2 = \alpha - i\beta$$

दूसरा मूल होगा।

पहले की तरह यहां भी हम दो रैखिकतः स्वतंत्र हलों के रैखिक संयोजन द्वारा दिये गए अवकल समीकरण का व्यापक हल लिख सकते हैं :

$$\begin{aligned} y &= A \exp(m_1 x) + B \exp(m_2 x) \\ &= A \exp[(\alpha + i\beta)x] + B \exp[(\alpha - i\beta)x] \\ &= \exp(\alpha x)[A \exp(i\beta x) + B \exp(-i\beta x)] \end{aligned} \qquad (2.21)$$

आप समझ गए होंगे कि यह हल संमिश्र है। अब प्रश्न उठता है कि क्या हम इसे एक वास्तविक हल के रूप में व्यक्त कर सकते हैं ?

इसके लिए हम ऑयलकर सूत्र (Euler's formula) का प्रयोग करते हैं :

$$\exp(\pm ix) = \cos x \pm i \sin x \qquad (2.22)$$

इससे हम उपर्युक्त समीकरण को निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp(\alpha x)[A(\cos\beta x + i\sin\beta x) + B(\cos\beta x - i\sin\beta x)] \\ &= \exp(\alpha x)[(A+B)\cos\beta x + (A-B)\, i\sin\beta x] \end{aligned}$$

अब $A + B = c_1$ और $(A - B)\, i = c_2$ लेकर हम लिख सकते हैं कि

$$y(x) = \exp(\alpha x)[c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x] \qquad (2.23 \text{ क})$$

यहाँ $c_1 = c\cos\phi$ और $c_2 = c\sin\phi$ लेकर हम इस समीकरण को इस रूप में लिख सकते हैं :

$$y(x) = c\exp(\alpha x)\cos(\beta x - \phi) \qquad (2.23 \text{ ख})$$

जहां c और ϕ स्वेच्छ अचर हैं। इनका c_1 और c_2 से संबंध निम्न व्यंजक द्वारा व्यक्त किया जा सकता हैं :

$$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \text{और} \quad \tan\phi = \frac{c_2}{c_1}$$

समीकरण (2.23 क, ख) से हम देखते हैं कि जब सहायक समीकरण के मूल संमिश्र होते हैं तब द्वितीय कोटि अवकल समीकरण का व्यापक हल चरघातांकी फलन (exponential function) और एक त्रिकोणमितीय फलन (trigonometric function) के गुणनफल के रूप में प्राप्त होता है। अतः हम कह सकते हैं कि

> यदि द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के संगत अभिलक्षणिक समीकरण के संमिश्र मूल $m = \alpha \pm i\beta$ के रूप में हों, तो व्यापक हल निम्नलिखित रूप का होता हैं:
>
> $$y(x) = c \ \exp(\alpha x) \ \cos(\beta x - \phi)$$

आप जानते हैं कि अनवमंदित कमानी-द्रव्यमान निकाय का गति अवकल समीकरण

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ होता है, जहां $\omega_0^2 = k/m$ है। इस अवकल समीकरण के संगत अभिलक्षणिक समीकरण

$$m^2 + \omega_0^2 = 0$$

के मूल $m_1 = i\,\omega_0$ और $m_2 = -i\,\omega_0$ हैं। अतः इस समीकरण का व्यापक हल

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t$$

है।

इस निकाय की दोलन गति (oscillatory motion) अनिश्चित काल तक बनी रहनी चाहिए। परन्तु अनेक कारणों से इस निकाय की ऊर्जा की हानि होती रहती है। परिणामस्वरूप दोलन धीरे-धीरे कम होने लगता है। उदाहरण 2 में हमने अवमंदित आवर्ती दोलक की गति का अध्ययन करने के लिए इस भाग में बतायी गई विधि को दर्शाया है।

उदाहरण 2

श्यान बल (viscous force) से अवमंदित एक कमानी-द्रव्यमान तंत्र की कल्पना कीजिए (चित्र 2.1)। यदि श्यान बल वेग के समानुपाती हो तो इसकी गति का अवकल समीकरण लिखिए और इसके मान्य हल ज्ञात कीजिए।

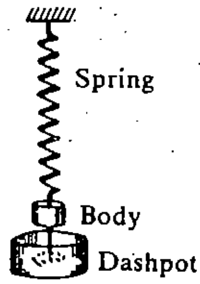


Fig. 2.1: एक अवमंदित कमानी द्रव्यमान तंत्र

हल

हम जानते हैं कि श्यान बल गति का विरोध करता है। अतः अवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र की गति निम्नलिखित अवकल समीकरण द्वारा निर्धारित की जा सकती है :

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + \gamma \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

या

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (2.24)$$

जहां $2b = \gamma/M$ और $\omega_0^2 = k/M$.

समीकरण (2.11) तथा (2.24) की तुलना करके हम अभिलक्षणिक समीकरण लिख सकते हैं :

$$m^2 + 2bm + \omega_0^2 = 0$$

इसके मूल $m_1 = -b + \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ और $m_2 = -b - \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ हैं।

ये मूल अवमंदन पर निर्भर करते हैं और दोलक की गति निर्धारित करते हैं। $(b^2-\omega_0^2)^{1/2}$ के मान के अनुसार तीन संभावनाएं हो सकती हैं :

स्थिति 1 : जब $b > \omega_0$ है तो $\sqrt{b^2-\omega_0^2}$ धनात्मक होगा तथा दोनों मूल वास्तविक एवं असमान होंगे।

स्थिति 2 : जब $b = \omega_0$ है तो $b^2-\omega_0^2 = 0$ तथा हमें वास्तविक पुनरावृत्त मूल प्राप्त होंगे।

स्थिति 3 : जब $b < \omega_0$ है तो $\sqrt{b^2-\omega_0^2}$ ऋणात्मक होगा तथा हमें संमिश्र संयुग्मी मूल युग्म प्राप्त होंगे।

आइए अब हम इन स्थितियों पर विस्तार में चर्चा करें।

स्थिति 1 :

जब मूल वास्तविक और असमान होते हैं, तब तंत्र अतिअवमंदित (over damped) होता है और समीकरण (2.24) का व्यापक हल निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$x(t) = \exp(-bt)\,[\,c_1 \exp(\beta t) + c_2 \exp(-\beta t)\,] \tag{2.25}$$

जहां $\beta = \sqrt{b^2-\omega_0^2}$ है।

यह अदोलायमान गति (non-oscillatory motion) को निरूपित करता है। ऐसी गति को **रूद्ध दोल** (dead beat) कहा जाता है।

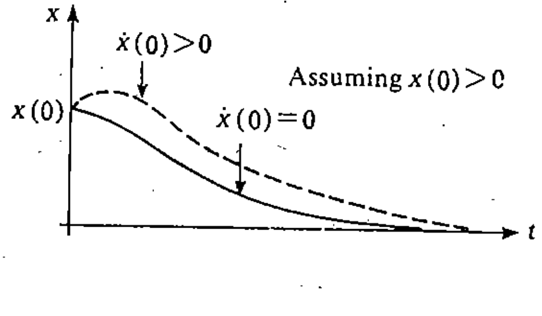
ऐसे किसी भी तंत्र का विस्थापन आदि प्रतिबंधों को इस्तेमाल करके ही प्राप्त होगा। इसे परिकलित करने के लिए हम चाहेंगे कि आप निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल करें।

बोध प्रश्न 3

एक अति अवमंदित दोलक को उसकी साम्य स्थिति से अचानक इस प्रकार विस्थापित किया जाता है कि $t = 0$ पर $x = 0$ और $\dfrac{dx(0)}{dt} = v_0$ है। इस दोलक के लिए विशेष हल ज्ञात कीजिए और विस्थापन के परिणामी व्यंजक की विवेचना कीजिए।

इस बोध प्रश्न को हल करने पर आप देखेंगे कि वर्धमान अतिपरवलयिक फलन (hyperbolic function) और ह्रसमान चरघातांकी फलन (decaying exponential), अति अवमंदित दोलक की गति निर्धारित करते हैं। परिणामस्वरूप, शुरू में विस्थापन में वृद्धि होती है तथा अधिकतम सीमा तक पहुंच जाता है। तत्पश्चात विस्थापन घटने लगता है। चित्र 2.2 में $\dfrac{dx(0)}{dt} > 0$ और $\dfrac{dx(0)}{dt} = 0$ के लिए ऐसी दो गतियां दिखाई गई हैं।

अतिपरवलयिक फलन इसलिए कहा जाता है क्योंकि $x = a\cosh\theta$, $y = a\sinh\theta$ समकोणिक अतिपरवलय $x^2-y^2 = a^2$ को परिभाषित करने वाला प्राचलिक समीकरण (parametric equation) है। इनकी तुलना $x = a\cos\theta$, $y = a\sin\theta$ से कीजिए जो कि वृत्त के प्राचलिक समीकरण $x^2+y^2 = a^2$ को परिभाषित करते हैं।



चित्र 2.2: अति अवमंदित दोलक की गति का चित्रण

स्थिति 2

जब सहायक समीकरण के वास्तविक एवं पुनरावृत्त मूल होते हैं तब समीकरण (2.24) का व्यापक हल

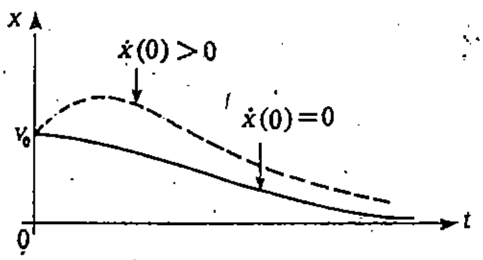
$$x(t) = (c_1 + c_2 t)\ \exp(-bt) \tag{2.26}$$

होता है।

यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि c_1 की विमा लंबाई की है और c_2 की विमाएं वेग की हैं। प्रारंभिक प्रतिबंध लागू करके इन अचरों को ज्ञात किया जा सकता है। बोध प्रश्न 3 में दिए गए प्रारंभिक प्रतिबंधों का इस्तेमाल करके आप आसानी से सत्यापित कर सकते हैं कि $c_1 = 0$ और $c_2 = v_0$ तथा

$$x(t) = v_0\, t\ \exp(-bt) \tag{2.27}$$

इस प्रकार के तंत्र को **क्रांतिकतः अवमंदित** (critically damped) कहा जाता है। $\frac{dx(0)}{dt} = 0$ और $\frac{dx(0)}{dt} > 0$ के संगत एक क्रांतिकतः अवमंदित तंत्र का आरेख चित्र 2.3 में दिखाया गया है।



चित्र 2.3: क्रांतिकतः अवमंदित तंत्र का आरेख

स्थिति 3

जब मूल अधिकल्पित (imaginary) होते हैं तो हम $\sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ को इस प्रकार से लिखते हैं :

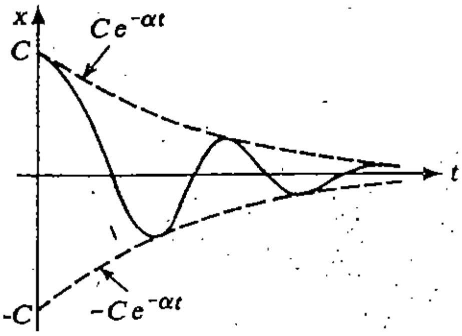
$$\sqrt{b^2 - \omega_0^2} = \sqrt{-1}\ (\omega_0^2 - b^2)^{1/2} = i\,\omega_d$$

जहां $i = \sqrt{-1}$ और $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ एक धन राशि है। अतः विस्थापन का व्यंजक निम्नलिखित रूप ले लेता है :

$$x(t) = \exp(-bt)\,[\,c_1 \exp(i\omega_d t) + c_2 \exp(-i\,\omega_d t)\,]$$
$$= c \exp(-bt) \cos(\omega_d t + \phi) \tag{2.28}$$

जहाँ $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ और $\phi = \cos^{-1}\left(\frac{c_1 + c_2}{2\sqrt{c_1 c_2}}\right)$ है।

समीकरण (2.28) एक दोलायमान गति को निरूपित करता है जिसके आयाम में चरघातांकी ह्रास की दर b द्वारा निर्धारित होती है। ऐसे तंत्र को **न्यून अवमंदित** (under damped) कहा जाता है। न्यून अवमंदित तंत्र के विस्थापन को चित्र 2.4 में दर्शाया गया है।



चित्र 2.4 : न्यून अवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र के आयाम का समय के साथ परिवर्तन

अभी तक आपने जो कुछ पढ़ा है आइए अब उसका संक्षिप्त विवरण दें।

1. हम चरघातांकी फलनों का प्रयोग करके अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात रैखिक साधारण अवकल समीकरण को हल कर सकते हैं। व्यापक हल का रूप सहायक समीकरण के मूलों पर निर्भर करता है।
2. जब सहायक समीकरण के मूल असमान तथा वास्तविक होते हैं तब $\exp(m_1 x)$ और $\exp(m_2 x)$ दो रैखिकतः स्वतंत्र हल होते हैं तथा व्यापक हल निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है:
$$y(x) = c_1 \exp(m_1 x) + c_2 \exp(m_2 x)$$
3. जब सहायक समीकरण के वास्तविक मूल पुनरावृत्त होते हैं तब व्यापक हल के दो एकघाततः स्वतंत्र फलन $\exp(mx)$ और $x\exp(mx)$ होते हैं, अर्थात्
$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\exp(mx)$$
4. जब सहायक समीकरण के मूल संमिश्र संयुग्मी युग्म होते हैं तब दो रैखिकतः स्वतंत्र हल $\exp(\alpha x)\sin\beta x$ और $\exp(\alpha x)\cos\beta x$ के रूप के होते हैं और व्यापक हल
$$y(x) = \exp(\alpha x)[c_1 \sin\beta x + c_2 \cos\beta x]$$
$$= c\exp(\alpha x)\cos(\beta x - \phi)$$

अभी तक हमने अचर (नियत) गुणांकों वाले समघात रैखिक समीकरणों पर विचार किया है। इन समीकरणों की मदद से हम प्रणोदित यांत्रिक और वैद्युत तंत्रों को भली-भांति मॉडल नहीं कर पाते। वस्तुतः इसके लिए हमें असमघात द्वितीय कोटि रैखिक समीकरणों का सहारा लेना पड़ता है। अतः अब हम असमघात समीकरणों के हल का अध्ययन करेंगे। अब प्रश्न उठता है कि क्या हम असमघात समीकरणों को हल करने के लिए उपर्युक्त विधि का उपयोग कर सकते है ? यह संभव नहीं है। उसके लिए हमें नई विधियां जाननी होंगी। आइए अब कुछ नई विधियों के बारे में जानकारी प्राप्त करें।

2.4 अचर गुणांकों वाले असमघात रैखिक समीकरण

भाग 2.2 से आपको याद होगा कि नियत गुणांकों वाले द्वितीय कोटि असमघात रैखिक अवकल समीकरण का व्यापक हल विशेष समाकल (particular integral) और पूरक फलन (complementary function) का योग होता है (समीकरण 2.10). इस तथ्य को आप समीकरण
$$ay'' + by' + cy = g(x)$$
में $y = y_p + y_c$ प्रतिस्थापित करके सरलतापूर्वक सत्यापित कर सकते हैं।

पिछले भाग में बतायी गई विधि द्वारा आप $y_c(x)$ प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, समीकरण
$$y'' - 2y' - 3y = \sin x$$

का पूरक फलन

$$y_c = c_1 \exp(-3x) + c_2 \exp(-x)$$

है ।

इसका अर्थ यह है कि विशेष समाकल प्राप्त करना ही असमघात समीकरण को हल करने की विधि का मुख्य अंग है । अब प्रश्न उठता है कि y_p को किस प्रकार प्राप्त किया जाए ? y_c ज्ञात करने की एक व्यवस्थित विधि कोटि समानयन विधि, जिसे आप इकाई 1 में पढ़ चुके हैं, पर आधारित है । पूरक फलन प्राप्त करने के लिए प्रयुक्त अन्य विधियों में **अनिर्धारित गुणांक विधि** और **प्राचल विचरण विधि** प्रमुख हैं । आइए अब हम इन विधियों को सीखें ।

2.4.1 अनिर्धारित गुणांक विधि

अनिर्धारित गुणांक विधि (method of undetermined multipliers) की आधारभूत संकल्पना प्रेरक फलन (forcing function) से विशेष समाकल का व्यापक रूप प्राप्त करना है । तत्पश्चात् हम y_p के उन गुणांकों को ज्ञात करते हैं जिनकी वजह से यह दिए हुए अवकल समीकरण का हल होता है । नीचे दिए गए उदाहरण में हमने इस संकल्पना को दर्शाया है ।

उदाहरण 3

समीकरण

$$y'' + 3y' + 2y = \exp(2x)$$

का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए ।

हल

यहां प्रेरक फलन $\exp(2x)$ है । अतः हम यह मान सकते हैं कि विशेष समाकल का रूप $y_p = A\exp(2x)$ है । दिए हुए समीकरण में इसे और इसके अवकलजों

$$y' = 2A\exp(2x)$$

और

$$y'' = 4A\exp(2x)$$

को प्रतिस्थापित करने और A के लिए हल करने पर आपको

$$A = \frac{1}{12}$$

प्राप्त होगा । अतः $y_p = \frac{1}{12}\exp(2x)$ दिए हुए समीकरण का विशेष समाकल है ।

अब आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि क्या यह विधि हमेशा लागू की जा सकती है ? इसका उत्तर है: नहीं । जब अवकल समीकरण का प्रेरक फलन कोटि n वाला एक बहुपद होता है, तब इस विधि में आपरिवर्तन (modification) करना पड़ता है । उदाहरणतया अवकल समीकरण

$$y'' + 3y' + 2y = 5x^2$$

में उपर्युक्त विधि के अनुसार आप

$$y_p = Ax^2$$

ले सकते हैं । y_p के इस मान और इसके अवकलजों को अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर आपको निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होगा :

$$2A + 6Ax + 2Ax^2 = 5x^2$$

इसे A के लिए हल करना असंभव है । इसका अर्थ यह है कि उदाहरण 3 में बतायी गई विधि के उपयोग करने से विशेष हल प्राप्त नहीं होता । तब आप y_p किस प्रकार ज्ञात करेंगे ? हमने $g(x)$ के

अनुरूप $y_p(x)$ के मान्य विशेष समाकल सारणी 2.1 में दिये हैं।

सारणी 2.1 : प्रेरक फलन के अनुरूप मान्य विशेष समाकल

प्रेरक फलन का रूप	सहायक समीकरण के मूलों की प्रकृति	विशेष समाकल का रूप
$A\exp(kx)$	जब k मूल नहीं हैं k एक मूल हैं k पुनरावृत्त मूल है	$c\exp(kx)$ $c\,x\exp(kx)$ $c\,x^2\exp(kx)$
बहुपद $A\,x^n (n = 0, 1, ...)$	$k = 0$ मूल नहीं है $k = 0$ एक मूल है $k = 0$ पुनरावृत्त मूल है	$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$ $x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...)$ $x^2(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...)$
$A\cos kx$ $A\sin kx$	ik मूल नहीं है ik मूल हैं	$C\cos kx + D\sin kx$ $x(C\cos kx + D\sin kx)$

इस सारणी से आप देख सकते हैं कि यदि $g(x)$ स्तंभ 1 में दिए गए व्यंजक के अनुरूप हों तो संगत विशेष समाकल स्तंभ 3 में दिए गए रूप का होगा। सहायक समीकरण के मूल की प्रकृति भी (जो स्तंभ 2 में दी गई है) विशेष समाकल के रूप को प्रभावित करती है। आप यह भी देखेंगे कि यदि $g(x)$ का एक पद दिए हुए असमघात साधारण अवकल समीकरण के संगत समघात समीकरण का एक हल हो, तो y_p के व्यंजक को निम्नलिखित रूप में आपरिवर्तित किया जा सकता है। यदि सहायक समीकरण का मूल एकल है तो y_p के व्यंजक को x से गुणा करते हैं और यदि सहायक समीकरण का मूल पुनरावृत्त है तो y_p के व्यंजक को x^2 से गुणा किया जाता है।

यदि $g(x)$ स्तंभ 1 में दिए गए फलनों का योग हो तो हम y_p प्राप्त करने के लिए संगत पंक्तियों के फलनों का योग लेते हैं।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 4

साधारण अवकल समीकरण

$$y'' - y' = x + \frac{x^2}{2}$$

का विशेष समाकल ज्ञात कीजिए।

आइए अब हम एक ऐसा उदाहरण लें जिसमें प्रेरक फलन त्रिकोणमितीय है।

उदाहरण 4

साधारण अवकल समीकरण

$$y'' + 4y = 2\sin 2x$$

का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

हल

दिए गए समीकरण के संगत समघात समीकरण का हल

$$y_c(x) = c_1\cos 2x + c_2\cos 2x$$

है। प्रेरक फलन समघात समीकरण का एक हल है, इसलिए आपरिवर्तन नियम (modification rule) अनुसार हम यह मान लेते हैं कि विशेष समाकल

$$y_p(x) = A\,x\cos 2x + B\,x\sin 2x$$

इसे मूल अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि :

$$-2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x$$
$$-4Ax\cos 2x - 4Bx\sin 2x + 4Ax\cos 2x + 4Bx\sin 2x = 2\sin 2x$$

विभिन्न त्रिकोणमितीय फलनों के गुणांकों की तुलना करने पर हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होते हैं :

$\sin 2x$ के गुणांक : $-2A - 2A = 2$

$\cos 2x$ के गुणांक : $2B + 2B = 0$

$x\sin 2x$ के गुणांक : $-4B + 4B = 0$

$x\cos 2x$ के गुणांक : $-4A + 4A = 0$

इन समीकरणों के लिए यह आवश्यक है कि $A = -\frac{1}{2}$ और $B = 0$ हों। अतः

$$y_p(x) = -\frac{1}{2}x\cos 2x$$

अतः $y(x) = y_c(x) + y_p(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \frac{1}{2}x\cos 2x$

दिए हुए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

हम आशा करते हैं कि आप अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों को हल करने की अर्निधारित गुणांक विधि को अच्छी तरह से समझ गये हैं।

अब हम इस विधि का संक्षिप्त विवरण यहां दे रहें हैं :

> **अर्निधारित गुणांक विधि**
> अनिर्धारित गुणांक विधि में, विशेष समाकल समीकरण को प्रेरक फलन से प्राप्त किया जाता है। स्वेच्छ अचरों को ज्ञात करने के लिए हम दिए हुए समीकरण में संकल्पित हल को प्रतिस्थापित करने से प्राप्त समीकरण के दोनों पक्षों के सदृश्य पदों (like terms) की तुलना करते हैं। इस प्रकार प्राप्त समीकरणों को हल किया जाता है।

आप उपर्युक्त विधि समझ गए हैं या नहीं इसके प्रति आश्वस्त होने के लिए हम चाहते हैं कि आप निम्नलिखित बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 5

निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरणों के व्यापक हल ज्ञात कीजिए :

(i) $y'' + y = x^2$

(ii) $y'' + 4y = 3\cos x$

(iii) $y'' + y' + 2y = 4\exp(x) + 2x^2$

PHE-02 पाठ्यक्रम की इकाई 4 से आपको याद होगा कि असमघाती रैखिक अवकल समीकरणों का अनुप्रयोग एक ऐसे अवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र में होता है जिस पर बाहरी बल लगा हुआ है। मान लीजिए कि बाहरी बल कमानी-द्रव्यमान तंत्र को उर्ध्वाधर तल में गति करने के लिए बाध्य करता है। यदि बाहरी बल का मान $F(t)$ है तो इस तंत्र की एक-विमीय गति को दर्शाने वाला अवकल समीकरण

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\,\frac{dx}{dt}+kx = F(t)$$

है । मान लीजिए कि प्रेरक फलन $F(t) = F_0 \cos \omega t$ है, जहां F_0 नियत आयाम (constant amplitude) और ω कोणीय आवृत्ति है । तब उपर्युक्त अवकल समीकरण नया रूप

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}+\gamma\,\frac{dx}{dt}+kx = F_0 \cos \omega t \qquad (2.29)$$

ले लेता है । क्योंकि इस समीकरण का हल अवमंदन बल (damping force) पर निर्भर करता है, इसलिए हमें दो स्थितियों $\gamma = 0$ (अनवमंदित) और $\gamma > 0$ (अवमंदित) पर अलग-अलग विचार करना होगा । आइए पहले हम अनवमंदित दोलक पर विचार करें ।

अनवमंदित प्रणोदित दोलन

यदि अवमंदन बल शून्य हो, तो कमानी-द्रव्यमान तंत्र की गति अवकल समीकरण

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2}+kx = F_0 \cos \omega t. \qquad (2.30)$$

द्वारा निरूपित की जा सकती है ।

मान लीजिए कि प्रारंभ में द्रव्यमान m विरामावस्था में है और $\omega \neq \omega_0\ (=\sqrt{k/m})$ है । अनिर्धारित गुणांक विधि से आप सिद्ध कर सकते हैं कि इस समीकरण का व्यापक हल

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \cos \omega t$$

है । प्रारंभिक प्रतिबंध $\frac{dx(0)}{dt} = x(0) = 0$ लगाने पर आप देखेंगे कि

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \text{ और } c_2 = 0$$

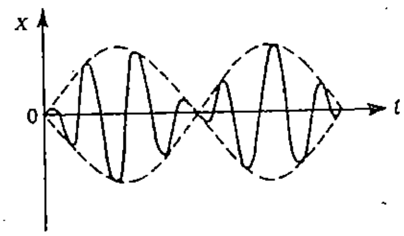
अतः दिए गए समीकरण का अभीष्ट हल

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

है । सर्वसमिका $\cos A - \cos B = -2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\left(\frac{A-B}{2}\right)$ को इस्तेमाल करके इस व्यंजक को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2-\omega^2)} \sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}\right)t\ \sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}\right)t \qquad (2.31)$$

चूंकि ज्या फलन अलग-अलग आवृत्तियों वाले हैं, $\omega \approx \omega_0$ के लिए ऐसी स्थिति भी आ सकती है जबकि उनके आयाम या तो एक दूसरे को आवर्धित (magnify) करते हों या एक दूसरे को निरस्त करते हों । (चित्र 2.5 देखिए) । आवर्धन और निरसन नियत अंतरालों पर होता रहता है ।



चित्र 2.5 : अनवमंदित प्रणोदित दोलनों का आवर्धन एवं निरसन

इन उच्चावचनों (fluctuations) को ध्वनिकी में स्पंद (beats) के रूप में लगभग बराबर-बराबर आवृत्तियों वाले दो स्वरित्रों को एक साथ कंपन करा कर सुना जा सकता है। इलेक्ट्रानिकी में इस परिघटना को **आयाम माड्लन** (amplitude modulation) कहा जाता है।

आपने ध्यान दिया होगा कि अनिर्धारित गुणांक विधि केवल उन समीकरणों पर लागू होती है जिनमें प्रेरक फलन विशेष रूप के होते हैं। आइए अब हम **प्राचल विचरण विधि** (variation of parameters) पर चर्चा करें जिसे अचर गुणांकों वाले सभी रैखिक अवकल समीकरणों के लिए प्रयुक्त किया जा सकता है।

2.4.2 प्राचल विचरण विधि

मान लीजिए कि y_1 और y_2 दिए हुए असमघात अवकल समीकरण के संगत समघात समीकरण के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं। विशेष समाकल ज्ञात करने के लिए आइए हम यह मान लें कि

$$y_p = u\,y_1 + vy_2 \qquad (2.32)$$

जहां u और v, x के अज्ञात फलन हैं। इन्हें ज्ञात करने के लिए हम समीकरण (2.32) को x के सापेक्ष अवकलित करते हैं :

$$y_p' = u'y_1 + u\,y_1' + v'y_2 + v\,y_2' \qquad (2.33)$$

हम एक ऐसा हल प्राप्त करना चाहते हैं जिसके लिए निम्नलिखित प्रतिबंध लागू होता है :

$$u'y_1 + v'y_2 = 0 \qquad (2.34)$$

समीकरण (2.33) में इस प्रतिबंध को प्रतिस्थापित करने पर आपको समीकरण

$$y_p' = u\,y_1' + v\,y_2' \qquad (2.35)$$

प्राप्त होगा। इस व्यंजक को पुनः अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$y_p'' = u\,y_1'' + v\,y_2'' + u'y_1' + v'y_2' \qquad (2.36)$$

समीकरण

$$ay'' + by' + cy = g(x)$$

में y, y' और y'' के स्थान पर क्रमशः y_p, y_p' और y_p'' प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$a\,(uy_1'' + vy_2'' + u'y_1' + v'y_2') + b\,(uy_1' + u\,y_2') + c\,(uy_1 + vy_2) = g(x)$$

इसे हम पुर्नव्यवस्थित कर निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$u\,(ay_1'' + by_1' + cy_1) + v\,(ay_2'' + by_2' + cy_2) + a\,(u'y_1' + v'y_2') = g(x) \qquad (2.37)$$

क्योंकि y_1 और y_2 समघात समीकरण के रैखिकतः हल हैं, इसलिए पहले दोनों कोष्ठकों के पदों का लोपन हो जाता है। अतः समीकरण (2.37) अत्यन्त संक्षिप्त रूप का हो जाता है :

$$a\,(u'y_1' + v'y_2') = g(x) \qquad (2.38)$$

इससे यह अर्थ निकलता है कि u' और v' समीकरण समुच्चय (2.34) और (2.38) के हल हैं। क्रेमर नियम (Cramer's rule) का उपयोग करने पर आप देखेंगे कि

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{g(x)}{a} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_2\,g(x)}{aW} \qquad (2.39a)$$

दो रैखिक समीकरण

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$

तथा

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$$

के लिए क्रेमर नियम के अनुसार हल

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{D}$$

तथा

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{D}$$

होते हैं जहां

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

एक शून्येत्तर सारणिक है,

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \dfrac{g(x)}{a} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}} = -\frac{y_1 g(x)}{aW} \qquad (2.39b)$$

आप देखेंगे कि इन समीकरणों का हर दो रैखिकतः स्वतंत्र फलनों y_1 और y_2 का रांसकियन है और शून्येतर है। इन समीकरणों को समाकलित करके u और v प्राप्त किये जा सकते हैं :

$$u = -\int \frac{y_2 g(x)}{aW}\, dx \text{ और } v = \int \frac{y_1 g(x)}{aW}\, dx \qquad (2.40)$$

तथा विशेष हल

$$y_p(x) = -y_1 \int \frac{y_2 g(x)}{aW}\, dx + y_2 \int \frac{y_1 g(x)}{aW}\, dx \qquad (2.41)$$

आप यह बात मानेंगे कि u और v को प्राप्त करने के लिए किए गए आवश्यक समाकलन के कारण इस विधि को लागू करना कठिन हो सकता है। अतः जहां तक संभव हो आपको अनिर्धारित गुणांक विधि द्वारा ही अवकल समीकरण को हल करने की चेष्टा करनी चाहिए।

बोध प्रश्न 5 में आपने अनिर्धारित गुणांक विधि द्वारा समीकरण

$$y'' + y = x^2$$

का विशेष समाकल प्राप्त किया था। आइए अब हम प्राचल विचरण विधि द्वारा इस समीकरण का विशेष हल प्राप्त करें।

चूंकि $y_1(x) = \sin x$ और $y_2(x) = \cos x$ दो रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं, इनका रांसकियन

$$W(x) = y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} = -\sin^2 x - \cos^2 x = -1$$

तथा विशेष समाकल

$$y_p = \sin x \int x^2 \cos x\, dx - \cos x \int x^2 \sin x\, dx$$

होगा। खंडशः समाकलन (integrating by parts) करने पर उपर्युक्त व्यंजक से हमें अभीष्ट हल प्राप्त होता है :

$$y_p(x) = x^2 - 2$$

परन्तु यह हल अद्वितीय नहीं है। दिए गए समीकरण के और भी हल हो सकते हैं।

इस भाग को समाप्त करने से पहले हम इस विधि का संक्षिप्त विवरण यहां दे रहे हैं।

प्राचल विचरण विधि

प्राचल विचरण विधि में हम विशेष समाकल, असमघात समीकरण के संगत समघात अवकल समीकरण के रैखिकतः स्वतंत्र हलों के संयोजन से प्रतिबंध $u'y_1 + v'y_2 = 0$ के अधीन प्राप्त करते हैं।

इसमें $u = -\int \frac{y_2 g(x)}{aW} dx$ तथा $v = \int \frac{y_1 g(x)}{aW} dx$

हैं, तथा W, y_1 और y_2 का रांसकियन है।

अब आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि क्या हम हर विधि को प्रत्येक द्वितीय कोटि अवकल समीकरण हल करने के लिए इस्तेमाल कर सकते हैं ? कौन सी विधि कब उपयोग में लायी जाए यह इस बात पर निर्भर करता है कि हम किस अवकल समीकरण को हल कर रहे हैं। फिर भी, प्राचल विचरण विधि अधिक व्यापक विधि है और अनिर्धारित गुणांक विधि संभवत: अधिक प्रचलित विधि है।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है अब हम उसका संक्षिप्त विवरण दे रहे हैं।

2.5 सारांश

- यदि y_1 और y_2 द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के हल हों, तो उनके एकघाततः स्वतंत्र होने के लिए उनका रांसकियन

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

शून्येतर होना चाहिये।

- अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात साधारण अवकल समीकरण को चरघातांकी फलनों का प्रयोग करके हल किया जा सकता है। हल का रूप सहायक समीकरण के मूलों की प्रकृति पर निर्भर करता है।

  जब वास्तविक मूल असमान हों तो $\exp(m_1 x)$ और $\exp(m_2 x)$ दो रैखिकतः स्वतंत्र फलन हैं और व्यापक हल

  $$y(x) = c_1 \exp(m_1 x) + c_2 \exp(m_2 x)$$

  होता है।

  जब सहायक समीकरण के वास्तविक मूल पुनरावृत्त होते हैं, तब व्यापक हल

  $$y(x) = (c_1 + c_2 x) \exp(mx)$$

  होता है।

  संमिश्र संयुग्मी मूल युग्म के लिए दो रैखिकत: स्वतंत्र हल $\exp(dx) \sin \beta x$ और $\exp(\alpha x) \cos \beta x$ होते हैं और व्यापक हल को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

  $$y(x) = \exp(\alpha x) \, [c_1 \sin \beta x + c_2 \cos \beta x]$$
  $$= c \exp(\alpha x) \cos(\beta x - \phi)$$

- अचर गुणांकों वाले असमघात द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण का हल विशेष समाकल और पूरक फलन का योग होता है।

- पूरक फलन दिए हुए असमघात समीकरण के संगत समघात समीकरण का व्यापक हल होता है।

- अनिर्धारित गुणांक विधि में विशेष समाकलन प्रेरक फलन से प्राप्त किया जाता है। प्रेरक फलन के रूप के अनुसार y_p निम्नलिखित सारणी के स्तंभ तीन के अनुसार चुना जा सकता है :

प्रेरक फलन का रूप	सहायक समीकरण के मूल	विशेष समाकल का रूप
$A \exp(kx)$	जब k मूल नहीं है k एक मूल है k पुनरावृत्त मूल है	$c \exp(kx)$ $c x \exp(kx)$ $c x^2 \exp(kx)$
बहुपद $A x^2 (n = 0, 1, \ldots)$	$k = 0$ मूल नहीं है $k = 0$ एक मूल है $k = 0$ पुनरावृत मूल है	$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$ $x(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)$ $x^2(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots)$
$A \cos kx$ $A \sin kx$	ik एक मूल नहीं है ik मूल है	$C \cos kx + D \sin kx$ $x(C \cos kx + D \sin kx)$

दिए हुए असमघात साधारण अवकल समीकरण के दो पक्षों के सदृश पदों के गुणांकों की तुलना

करने पर प्राप्त समीकरणों को हल करके स्वेच्छ अचर ज्ञात किए जा सकते हैं।

- प्राचल विचरण विधि में विशेष समाकल

$$y_p = u\,y_1 + v\,y_2$$

होता है जहाँ y_1 और y_2 दिए हुए अवकल समीकरण के संगत समघात समीकरण के रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं। फलन u और v को निम्नलिखित संबंधों द्वारा परिकलित किया जा सकता हैं :

$$u = -\int \frac{y_2\, g(x)}{aW}\, dx \quad \text{और} \quad v = \int \frac{y_1\, g(x)}{aW}\, dx$$

जहां W, y_1 और y_2 का रांसकियन है।

2.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. अवमंदित आवर्ती दोलक का गति समीकरण

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\,\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t$$

है। इसके लिए विशेष समाकल प्राप्त कीजिए।

2. निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरणों को हल कीजिए :

(i) $$\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$$

(ii) $$\frac{d^2y}{dx^2} - y = x\,e^x$$

2.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. इन फलनों का रांसकियन

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}$$

$$= -2\sin^2 2x - 2\cos^2 2x = -2$$

शून्येतर है। अतः $\sin 2x$ और $\cos 2x$ रैखिकतः स्वतंत्र हैं।

2. दिए गए साधारण अवकल समीकरण के संगत सहायक समीकरण

$$m^2 + 6m + 9 = 0$$

है जिसका एक पुनरावृत्त मूल $m = -3$ है। अतः स्वीकृत व्यापक हल

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)\exp(-3x) \tag{i}$$

है। प्रतिबंध $y(0) = 2$ से

$$c_1 = 2 \tag{ii}$$

प्राप्त होता है

x के सापेक्ष (i) का अवकलन करने पर आप देखेंगे कि

$$\frac{dy}{dx} = c_2 e^{-3x} - 3(c_1 + c_2 x)\,e^{-3x}$$

प्रतिबंध $\dfrac{dy(0)}{dx} = 1$ लगाने पर

$$c_2 - 3c_1 = 1$$

या

$$c_2 = 1 + 3c_1 = 1 + 6 = 7 \qquad \text{(iii)}$$

प्राप्त होता है।

अतः व्यापक हल

$$y(x) = (2 + 7x)\, e^{-3x}$$

है।

3.
$$x(t) = \exp(-bt)\,[\,c_1 \exp(\beta t) + c_2 \exp(-\beta t)\,] \qquad \text{(i)}$$

हम जानते हैं कि $t = 0$ पर $x = 0$. इस प्रतिबंध को (i) में इस्तेमाल करने पर आप देखेंगे कि

$$0 = c_1 + c_2$$

या

$$c_1 = -c_2 \qquad \text{(ii)}$$

समय के सापेक्ष (i) का अवकलन करने पर आप देखेंगे कि

$$\frac{dx}{dt} = -b \exp(-bt)\,[\,c_1 \exp(\beta t) + c_2 \exp(-\beta t)\,]$$
$$+ \exp(-bt)\,[\,\beta c_1 \exp(\beta t) - \beta c_2 \exp(-\beta t)\,]$$

इस व्यंजक में प्रतिबंध $\frac{dx(0)}{dt} = v_0$ को इस्तेमाल करने पर हम देखते हैं कि

$$v_0 = -b\,(c_1 + c_2) + \beta\,(c_1 - c_2)$$

या

$$c_1 = \frac{v_0}{2\beta} = -c_2$$

अतः

$$x(t) = \frac{v_0}{2\beta} \exp(-bt)\,[\,\exp(\beta t) - \exp(-\beta t)\,]$$
$$= \frac{v_0}{\beta} \exp(-bt) \sinh \beta t$$

इससे पता चलता है कि अति अवमंदित दोलक की परिणामी गति क्षयमान चरघातांकी फलन और अतिपरवलयिक फलन द्वारा निर्धारित की जाती है।

4. मान लीजिए कि विशेष समाकल

$$y_p = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \qquad \text{(i)}$$

के रूप का है। इसे और इसके द्वितीय अवकलज

$$\frac{d^2 y_p}{dx^2} = 2c_2$$

को दिये गए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें

$$2c_2 - (c_0 + c_1 x + c_2 x^2) = x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{(ii)}$$

प्राप्त होता है।

(i) मान्य हल हो, इसके लिए आवश्यक है कि (ii) एक सर्वसमिका हो। अतः

$$c_0 = -1$$

$$c_1 = -1$$

और

$$c_2 = -\frac{1}{2}$$

अतः

$$y_p(x) = -\frac{x^2}{2} - x - 1$$

5. (i) दिए गए समीकरण के संगत समघात समीकरण

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

का हल

$$y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

है।

मान लीजिए कि विशेष समाकल

$$y_p = A x^2 + B x + C$$

के रूप का है।

इसे मूल अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर आपको निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होगा :

$$2A + A x^2 + B x + C = x^2$$

x की विभिन्न घातों के गुणांकों की तुलना करने पर आप देखेंगे कि

x^0 का गुणांक : $2A + C = 0$

x^1 का गुणांक : $B = 0$

x^2 का गुणांक : $A = 1$

इन समीकरणों को युगपत रूप से हल करके हमें निम्नलिखित विशेष हल प्राप्त होता है :

$$y_p(x) = x^2 - 2$$

अत:

$$y(x) = y_c(x) + y_p(x)$$

$$= c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 2$$

दिए गए अवकल समीकरण का व्यापक हल है।

(ii) दिए गए समीकरण के संगत समघात समीकरण के लिए अभिलक्षणिक समीकरण

$$m^2 + 4m = 0$$

है तथा इसके मूल $\pm 2i$ हैं। अत: पूरक फलन

$$y_c(x) = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$$

है। दिए हुए समीकरण का विशेष समाकल मालूम करने के लिए हम यह मान लेते हैं कि y_p का व्यापक रूप

$$y_p = A \sin x + B \cos x$$

है। यह एक सही व्यंजक है, क्योंकि इन फलनों में से कोई भी फलन y_c में नहीं है। दिए हुए समीकरण में y_p और y_p'' के व्यंजक प्रतिस्थापित करने पर आप देखेंगे कि मूल समीकरण निम्नलिखित रूप ले लेता है :

$$(-A \sin x - B \cos x) + 4(A \sin x + B \cos x) = 3 \cos x$$

दोनों ओर सदृश पदों की तुलना करने पर आप देखेंगे कि

$$3A = 0 \text{ तथा } 3B = 3$$

अत: $A = 0$ और $B = 1$ हैं तथा $y_p = \cos x$. इस प्रकार आप दिए गए समीकरण का व्यापक हल निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x + \cos x$$

(iii) यह मान लीजिए कि विशेष समाकल

$$y_p(x) = A e^x + B x^2 + Cx + D$$

है। इसे दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$A e^x + 2B + A e^x + 2Bx + C + 2A e^x + 2Bx^2 + 2Cx + 2D = 4e^x + 2x^2$$

सदृश पदों के गुणांकों की तुलना करने पर आप देखेंगे कि

e^x का गुणांक : $A + A + 2A = 4$

x^0 का गुणांक : $2B + C + 2D = 0$

x^1 का गुणांक : $2B + 2C = 0$

x^2 का गुणांक : $2B = 2$

ऊपर्युक्त समीकरणों को हल करने से हमें $A = 1$, $B = 1$, $C = -1$ और $D = -1/2$ प्राप्त होता है। अतः

$$y_p = e^x + x^2 - x - \frac{1}{2}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. हम जानते हैं कि

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\,\frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t \qquad \text{(i)}$$

आपने इस समीकरण को PHE-02 पाठ्यक्रम की इकाई 4 में हल करना सीखा है। फिर भी हम हल को दोहरा रहे हैं। दिए गए समीकरण के संगत सभघात समीकरण

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + \gamma\,\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \text{(ii)}$$

ऐसे अवमंदित दोलक की गति को निरूपित करता है जिस पर कोई प्रेरक बल नहीं लगा है। इसका हल $\gamma^2 - 4\,mk$ के मान पर निर्भर करता है : यदि $\gamma^2 - 4\,mk > 0$ हो तो पूरक फलन

$$x_c(t) = c_1 \exp[-(\alpha - \beta)\,t] + c_2 \exp[-(\alpha + \beta)\,t] \qquad \text{(iii क)}$$

होता है। इसी प्रकार, यदि $\gamma^2 - 4\,mk = 0$ हो तो

$$x_c(t) = [\,c_1 t + c_2\,]\, \exp(-\alpha t) \qquad \text{(iii ख)}$$

तथा यदि $\gamma^2 - 4\,mk < 0$ हो तो

$$x_c(t) = \exp(-\alpha t)\,[\,c_1 \cos \omega' t + c_2 \cos \omega' t\,]$$

$$= c \exp(-\alpha t) \cos(\omega' t - \delta) \qquad \text{(iii ग)}$$

जहां $\alpha = \gamma/2m$, $\beta = \dfrac{1}{2m}\sqrt{\gamma^2 - 4\,mk}$, $\omega' = \dfrac{1}{2m}\sqrt{4\,mk - \gamma^2}$

$c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ तथा $\tan\,\delta = c_2/c_1$.

आप देखेंगे कि प्रेरक फलन $F_0 \cos \omega t$ का कोई नियत गुणक (constant multiple), पूरक फलन $x_c(t)$ के व्यंजक में नहीं है। इसलिए हम विशेष समाकल को निम्नलिखित रूप में ले सकते हैं :

$$x_p(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t \qquad \text{(iv)}$$

इसका समय के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर आप देखेंगे कि

$$\frac{dx_p(t)}{dt} = -\omega A \sin \omega t + \omega B \cos \omega t$$

तथा

$$\frac{d^2x_p(t)}{dt^2} = -\omega^2 A \cos \omega t - \omega^2 B \sin \omega t$$

इन्हें (i) में प्रतिस्थापित करके ज्या तथा कोसाइन फलनों के पदों को व्यवस्थित कर आप देखेंगे कि

$$[\,(k - m\,\omega^2)A + \omega\gamma B\,] \cos \omega t + [\,-\omega\gamma A + (k - m\,\omega^2)B\,] \sin \omega t = F_0 \cos \omega t$$

दोनों ओर के ज्या तथा को ज्या फलनों के गुणांकों की तुलना कर आप देखेंगे कि

$$-\omega\gamma A + (k - m\,\omega^2)B = 0$$

तथा

$$(k - m\omega^2)A + \omega\gamma B = F_0 \tag{v}$$

इन्हें A और B के लिए हल करने पर आप देखेंगे कि

$$A = \frac{F_0(k - m\omega^2)}{(k - m\omega^2)^2 + m^2\gamma^2} \quad \text{तथा} \quad B = \frac{\gamma\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

चूंकि $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, आप A तथा B के व्यंजकों को निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$A = \frac{m(\omega_0^2 - \omega^2)F}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \quad \text{तथा} \quad B = \frac{\gamma\omega F_0}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2} \tag{vi}$$

A तथा B के इन व्यंजकों को (iv) में प्रतिस्थापित कर आप देखेंगे कि विशेष समाकल

$$x_p(t) = C\cos(\omega t - \delta) \tag{vii}$$

जहां $C = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}}$ तथा $\tan\delta = \frac{\omega\gamma}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ हैं।

जब t का मान अधिक होता है तो गति मूलतः $x_p(t)$ द्वारा ही निर्धारित होती है। इस कारण $x_p(t)$ को **स्थायी अवस्था हल** (steady state solution) कहते हैं।

2. (i) क्योंकि संगत समघात समीकरण के दो रैखिकतः स्वतंत्र हल $\cos x$ और $\sin x$ हैं, इसलिए दिए हुए समीकरण का व्यापक हल

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + y_p$$

है। यहां $y_p = u\cos x + v\sin x$ और

$$\frac{du}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = -\tan x \quad \text{एवं} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \sec x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix}} = 1$$

अतः $u = \ln|\cos x|$ तथा $v = x$. तथा आप व्यापक हल को निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$y = c_1\cos x + c_2\sin x + \ln|\cos x|\cos x + x\sin x$$

ध्यान रहे कि y_p को प्राप्त करने के लिए अनिर्धारित गुणांक विधि को लागू नहीं किया जा सकता, क्योंकि $\sec x$ संगत समघात रैखिक अवकल समीकरण का हल नहीं होता।

(ii) दिए गए समीकरण के संगत समघात समीकरण

$$y'' - y = 0$$

का व्यापक हल $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ है। प्रेरक फलन की प्रकृति के कारण y_p को अनिर्धारित गुणांक विधि से प्राप्त नहीं किया जा सकता। प्राचल विचरण विधि में हम u' और v' के व्यंजकों में $y_1 = e^x$ और $y_2 = e^{-x}$ रखते हैं जिससे प्राप्त व्यंजकों को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-x} \\ xe^x & -e^{-x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix}} = \frac{x}{2} \quad \text{तथा} \quad v' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & xe^x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & e^{-x} \end{vmatrix}} = -\frac{xe^{2x}}{2}$$

अतः $u = \frac{x^2}{4}$ और $v = -\left(\frac{x e^{2x}}{4}\right) + \frac{e^{2x}}{8}$ तथा व्यापक हल

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} + \frac{1}{4} x^2 e^x - \frac{x}{4} e^x + \frac{1}{8} e^x$$

हैं। आप देखेंगे कि $c_1 e^x$ और $\frac{1}{8} e^x$ को $\left(c_1 + \frac{1}{8}\right) e^x = c e^x$

के रूप में संयोजित किया जा सकता है और व्यापक हल निम्न रूप ले लेता है :

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 e^{-x} - \frac{1}{4} x e^x + \frac{1}{4} x^2 e^x$$

2.8 शब्दावली

अनवमंदित	undamped
अनिर्धारित गुणांक	undetermined multipliers
अभिलक्षणिक समीकरण	characteristic equation
आवर्ती दोलक	harmonic oscillator
न्यून अवमंदित	weakly damped or underdamped
पूरक फलन	complementary function
प्राचल विचरण	variation of parameters
प्रेरक फलन	forcing function
रूद्ध दोल	dead beat
विशेष समाकल	particular integral
संमिश्र संयुग्मी मूल	complex conjngate roots
सहायक मूल	auxiliary equation

इकाई 3 चर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना

इकाई 2 में आपने अचर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करना सीखा। इन समीकरणों के हल साधारण चरघातांकी (exponentials), त्रिकोणमितीय या अतिपरवलयिक फलन होते हैं। पर, भौतिकी और अभियांत्रिकी में ऐसी अनेक स्थितियां होती हैं जिनके लिए हमें चर गुणांकों (variable coefficients) वाले द्वितीय कोटि अवकल समीकरणों को हल करना होता है। उदाहरण के लिए, ये समीकरण हमें एक आवेशित गोले या बेलन के इर्द-गिर्द क्षेत्र वितरण और रिएक्टर में ऊर्जा उत्पादन का अध्ययन करने के लिए हल करने होते हैं। इसी प्रकार, मान लीजिए कि हम यह मालूम करना चाहते हैं कि एक समान अनुप्रस्थ परिच्छेद (uniform cross-section) वाले एक ऊर्ध्वाधर स्तंभ (vertical column) की ऊंचाई कितनी हो कि खड़ा करने पर वह भार के कारण झुकें नहीं। इस स्थिति में भी हमें चर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण को हल करना पडता है जिनके हल सरल बीजीय या अबीजीय (transcendental) नहीं होते और इकाई 2 में बतायी गई विधियाँ काम नहीं करतीं। हमें इसके लिए अन्य विधियां प्रयुक्त करनी होती हैं।

चर गुणांकों वाले अवकल समीकरणों को हल करने की एक उत्तम और सक्षम विधि घात श्रेणी हल (power series solution) है। इसकी उपयोगिता का मूल कारण संख्यात्मक अभिकलन में सुविधा है। लेकिन यदि दिए हुए अवकलन समीकरण के गुणांक कुछ बिंदुओं पर सुपरिभाषित न हों तो घात श्रेणी विधि की उपयोगिता सीमित रह जाती है। ऐसी स्थिति में हम इस विधि के एक व्यापक रूप का उपयोग करते हैं, जिसे फ्रोबेनियस विधि (Frobenius method) कहा जाता है। आप इस इकाई में इन दो विधियों के बारे में अध्ययन करेंगे। इस इकाई के अंत में दिए गए परिशिष्ट में घात श्रेणी के गुणधर्म और कुछ अन्य गणितीय संकल्पनाएं दी गई हैं। अतः बेहतर होगा कि आप इस इकाई का अध्ययन करने से पहले परिशिष्ट को अच्छी तरह से पढ़ लें।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप

- साधारण (ordinary) और विचित्र (singular) बिंदुओं को परिभाषित कर सकेंगे
- विचित्रता (singularity) के प्रकार ढूंढ कर वर्गीकृत कर सकेंगे

- एक साधारण बिंदु के निकट द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण को हल करने के लिए घात श्रेणी विधि का उपयोग कर सकेंगे
- एक नियमित विचित्र बिंदु (regular singular point) के निकट चर गुणांक वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण को हल करने के लिए फ्रोबेनियस विधि का उपयोग कर सकेंगे

3.2 पदावली

पिछली इकाइयों में अचर गुणांकों वाले प्रथम और द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों का अध्ययन करते हुए आपने कुछ आधारभूत पदावली की जानकारी प्राप्त की। चर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों के अध्ययन में कुछ और पदावली की जानकारी अभी तक आपको नहीं है। इस भाग का उद्देश्य आपको इन संकल्पनाओं से परिचित कराना है।

वैश्लेषिक फलन (Analytic function)

जब एक फलन का मान $x = x_0$ पर परिमित होता है तो उसे इस बिन्दु पर **वैश्लेषिक** (analytic) कहा जाता है। गणितीय रूप में हम ऐसे फलन को एक अनंत घात श्रेणी (infinite power series) के रूप में व्यक्त करते हैं :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots \qquad (3.1)$$

जहां $a_0, a_1, \ldots$ आदि अचर हैं। (परिशिष्ट क भी देखिए।)

बिन्दु $x = 0$ पर वैश्लेषिक फलनों के कुछ सुपरिचित उदाहरण सारणी 3.1 में दिए गए हैं।

सारणी 3.1 : $x = 0$ पर कुछ वैश्लेषिक फलनों का घात श्रेणी निरूपण

फलन	घात श्रेणी	अभिसरण त्रिज्या
$\frac{1}{1-x}$	$\sum_{n=a}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \ldots$	$\|x\| < 1$
e^x	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots$	$\|x\| < \infty$
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$	$\|x\| < \infty$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$	$\|x\| < \infty$

साधारण और विचित्र बिंदु (ordinary and singular point)

यदि द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

$$y'' + p(x)\, y' + q(x)\, y = 0 \qquad (3.2)$$

में $p(x)$ और $q(x)$ फलन $x = x_0$ पर वैश्लेषिक (analytic) हों तो $x = x_0$ एक साधारण बिंदु (ordinary point) होता है। इसके विपरीत हम कहते हैं कि $x = x_0$ समीकरण (3.2) का एक विचित्र बिंदु (singular point) है, यदि बिन्दु $x = x_0$ फलन $p(x)$ या $q(x)$ का एक विचित्र बिंदु हो, अर्थात् जब $x = x_0$ पर फलन $p(x)$ या $q(x)$ वैश्लेषिक न हों। उदाहरण के लिए, $x = 0$, $1/x$ और $\ln x$ का विचित्र बिंदु है और समीकरण $x^2y'' + xy' - 2y = 0$ में $p(x)$ और $q(x)$ का $x = 0$ एक विचित्र बिंदु है। इसी प्रकार, समीकरण $(1-x^2)y'' - 2xy' + 6y = 0$ में $p(x)$ और $q(x)$ के विचित्र बिंदु +1 और -1 हैं।

नियमित विचित्रता (regular singularity)

अवकल समीकरण (3.2) के विचित्र बिंदु $x = 0$ को नियमित विन्दु (regular point) कहा जाता है जब $p(x)$ और/या $q(x)$ तो $x = 0$ पर अपसरित (diverge) होते हों, परन्तु $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)\, p(x)$ और $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x)$ परिमित रहें। यदि विचित्र बिंदु नियमित न हो तो उसे **अनियमित विचित्र बिंदु** (irregular singular point) कहते हैं। अर्थात् जब $x = x_0$ पर $(x - x_0)\, p(x)$ या $(x - x_0)^2 q(x)$ की विचित्रता बनी रहती है तो यह बिंदु अनियमित होता है। यह परिभाषा x_0 के परिमित मानों के लिए लागू होती हैं। ($x \to \infty$ के विश्लेषण से हाइपरज्योमेट्रिक श्रेणी (hypergeometric series) प्राप्त होती हैं।) नीचे दिए गए उदाहरण में इन संकल्पनाओं को दर्शाया गया है।

उदाहरण 1

समीकरण

$$(1 - x^2)\, y'' - 2xy' + n(n+1)\, y(x) = 0$$

के विचित्र बिंदुओं को निधार्रित कर, वर्गीकृत कीजिए। यहां n एक धन पूर्णांक है। इस समीकरण का प्रयोग क्वांटम यांत्रिकी में विशेष रूप से होता है जब परिसीमा-मान समस्याओं (boundary value problems) को गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त किया जाता है। इसे **लेजान्द्रे समीकरण** (Legendre's equation) के नाम से जाना जाता है।

हल : दिए हुए समीकरण की समीकरण (3.2) से तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$p(x) = -\dfrac{2x}{1 - x^2}$ और $q(x) = \dfrac{n(n+1)}{1 - x^2}$ हैं। अब प्रश्न उठता है कि क्या ये फलन $x = \pm 1$ पर वैश्लेषिक हैं ? आप समझ गए होंगे कि $x = +1$ और $x = -1$ समीकरण के विचित्र बिंदु हैं। यह जानने के लिए कि ये विचित्रताएं नियमित हैं या नहीं, आइए पहले हम $x_0 = 1$ पर $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)\, p(x)$ और $\lim\limits_{x \to x_0} (x - x_0)^2 q(x)$ ज्ञात करें :

$$\lim_{x \to 1} (x - 1)\, p(x) = -\frac{(x-1)\, 2x}{1 - x^2}$$

$$= \frac{2x}{1 + x} = 1 \qquad \text{(i)}$$

$$\lim_{x \to 1} (x - 1)^2 q(x) = \frac{(x-1)^2 n(n+1)}{1 - x^2}$$

$$= \frac{(x-1)\, n(n+1)}{1 + x} \qquad \text{(ii)}$$

(i) और (ii) को देखकर आप कह सकते हैं कि $x = +1$ एक नियमित विचित्रता है। $x = -1$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं ? यह भी एक नियमित विचित्रता है। फिर भी, आगे अध्ययन करने से पहले आपको इसके बारे में सुनिश्चित कर लेना चाहिए।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

यह सुनिश्चित करने के लिए कि आपने उपर्युक्त संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझ लिया है, हम चाहेंगे कि आप यह उत्तर ढूंढे कि निम्नलिखित समीकरणों में से कौन-कौन से समीकरणों के नियमित विचित्र बिंदु हैं :

(क) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

(ख) $x^3 y'' + y' + 2x^2 y = 0$

(ग) $2x^2y'' - xy' + (x-5)y = 0$

अब आप आधारभूत पदावली से परिचित हो चुके हैं, इसलिए आइए हम **घात श्रेणी विधि** (power series method) द्वारा चर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समघात साधारण अवकल समीकरणों को हल करना सीखें। हमें हल अनंत घात श्रेणी के रूप में प्राप्त होते हैं।

3.3 घात श्रेणी विधि (Power series method)

एक साधारण बिंदु के सापेक्ष चर गुणांकों वाले साधारण अवकल समीकरण को हल करने की घात श्रेणी विधि में निहित आधारभूत संकल्पना अति सरल है। आइए इस प्रक्रिया को कुछ उदाहरणों की सहायता से समझने की कोशिश करें।

जब हम घात श्रेणी विधि प्रयुक्त करते हैं तो सबसे पहले हम यह मानते हैं कि हल

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{3.3}$$

के रूप का है। यदि $x = 0$ द्वितीय कोटि के साधारण अवकल समीकरण का साधारण बिंदु हो, तो हमें केवल x के घातों में एक घात श्रेणी प्राप्त होती है :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

इसके बाद हम समीकरण (3.3) और इसके अवकलजों को दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करते हैं। इसके बाद x की प्रत्येक घात के गुणांकों को शून्य के बराबर रखकर हम a_n के मान प्राप्त करते हैं। इस विधि को निम्नलिखित उदाहरण में समझाया गया है।

उदाहरण 2

घात श्रेणी विधि द्वारा बिंदु $x = 0$ पर अवकल समीकरण $y'' + x^2 y = 0$ को हल कीजिए।

हल : दिए हुए अवकल समीकरण की समीकरण (3.2) के साथ तुलना करने पर आप देखेंगे कि $p(x) = 0$ और $q(x) = x^2$ है। अतः $x = 0$ उपर्युक्त अवकल समीकरण का एक साधारण बिंदु है। इसलिए हम यह मान सकते हैं कि

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \tag{i}$$

इसे x के सापेक्ष अवकलित करने पर आप देखेंगे कि

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

संकलन संकेतन पद्धति (summation notation) में हम इसे इस रुप में लिख सकते हैं :

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

आप देखेंगे कि संकलन सूचक (summation index) में हमने $x = 0$ की जगह $n = 1$ कर दिया है। ऐसा करने का कारण यह है कि (i) में $n = 0$ का संगत पद अचर है और x के सापेक्ष उसका अवकलज शून्य है। इसी प्रकार, हम लिख सकते हैं कि

$$y'' = 2a_2 + 6a_3 x + 12 \ldots {}^2 + \ldots$$

या

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\ a_n x^{n-2} \tag{ii}$$

दिए हुए समीकरण में y और y'' के मानों को प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$(2a_2 + 6a_3x + 12\,a_4x^2 + 20a_5\,x^3 + \dots) + (a_0\,x^2 + a_1x^3 + a_2\,x^4 + \dots) = 0$$

या

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\ a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} = 0$$

आइए अब हम x के समान घात वाले पदों को एक साथ रखें। ऐसा करने पर आप देखेंगे कि

$$2a_2 + 6a_3x + (12a_4 + a_0)\,x^2 + (20\,a_5 + a_1)\,x^3 + \dots = 0$$

क्योंकि दक्षिण पक्ष अभिन्नतः शून्य है, हम वाम पक्ष के x के प्रत्येक घात के गुणांक को शून्य के बराबर रखते हैं। ऐसा करने पर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता हैं :

x^0 का गुणांक : $2\,a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 0$

x^1 का गुणांक : $6a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 0$

x^2 का गुणांक : $12a_4 + a_0 = 0 \Rightarrow a_4 = -\dfrac{a_0}{12}$

x^3 का गुणांक : $20a_5 + a_1 = 0 \Rightarrow a_5 = -\dfrac{a_1}{20}$

x^4 का गुणांक : $30a_6 + a_2 = 0 \Rightarrow a_6 = 0$

x^5 का गुणांक : $42\,a_7 + a_3 = 0 \Rightarrow a_7 = 0$

$\vdots$

x^{n+2} का गुणांक: $(n+3)\,(n+4)\,a_{n+4} + a_n = 0$

$$\text{या } a \geq 0 \text{ के लिए } a_{n+4} = -\frac{1}{(n+3)\,(n+4)}a_n$$

$c_2 = 0$ होने के कारण इस संबंध से पता चलता है कि a_4 के बाद के एकांतर सम गुणांक (alternate even coefficients) शून्य होंगे। इसी प्रकार, $a_3 = 0$ होने के कारण आप कह सकते हैं कि $a_7 = a_{11} = \dots = 0$. अतः

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1x + a_4x^4 + a_5x^5 + a_8x^8 + a_9x^9 + \dots \\ &= a_0 + a_1x - \frac{a_0}{12}x^4 - \frac{a_1}{20}x^5 + \frac{a_0}{672}x^8 + \frac{a_1}{1440}x^9 + \dots \\ &= a_0\left(1 - \frac{x^4}{12} + \frac{x^8}{672} + \dots\right) + a_1\left(x - \frac{x^5}{20} + \frac{x^9}{1440} + \dots\right) \\ &= a_0\,y_1(x) + a_1\,y_2(x) \end{aligned}$$

अब प्रश्न उठता है कि क्या ये हल $y_1(x)$ और $y_2(x)$ रैखिकतः स्वतंत्र हैं ? आपको चाहिए कि इनका रांसकियन अभिकलित करके इसकी जांच करें।

अब आप सोच रहे होंगे कि क्या हम अचर गुणांकों वाले प्रथम अथवा द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने के लिए घात श्रेणी विधि का इस्तेमाल कर सकते हैं या नहीं ? इन समीकरणों पर भी हम चर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि समीकरणों के लिए बताए गए पदों का इस्तेमाल कर सकते हैं। नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करके आप इस बारे में आश्वस्त हो सकते हैं।

बोध प्रश्न 2

प्रश्न पर 15 मिनट लगाएं

घात श्रेणी विधि द्वारा निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए

(क) $y'' + \omega_0^2 y = 0$

(ख) $y' + xy = x^2 - 2x$

जैसा कि पहले बताया जा चुका है, उदाहरण 1 में दिए गए लेजान्द्रे समीकरण का भौतिकी और न्यूक्लीय अभियांत्रिकी में विशेष महत्व है। आइए हम घात श्रेणी विधि से इसके दो रैखिकतः हल ज्ञात करें।

उदाहरण 3

उदाहरण 1 में दिए गए लेजान्द्रे समीकरण

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + m(m+1)\,y = 0$$

का घात श्रेणी हल प्राप्त कीजिए।

हल

घात श्रेणी विधि से लेजान्द्रे समीकरण को हल करने के लिए पहले हम इसे समीकरण (3.2) के रूप में लिखते हैं :

$$y'' - \left(\frac{2x}{1-x^2}\right) y' + \frac{m(m+1)}{1-x^2}\, y = 0 \qquad \text{(i)}$$

उदाहरण 1 में आप देख चुके हैं कि फलन $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ ékw[$q(x) = \frac{m(m+1)}{1-x^2}$ की नियमित विचित्रताएँ $x = \pm 1$ पर स्थित हैं। लेकिन ये फलन $x=0$ पर वैश्लेषिक हैं। इसलिए हम घात श्रेणी विधि द्वारा लेजान्द्रे समीकरण का हल $-1 < x < 1$ अंतराल (range) में प्राप्त कर सकते हैं। अतः मान लीजिए कि

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots \qquad \text{(ii)}$$

इसे और इसके अवकलजों

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

तथा

$$y''(x) = 2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots$$

को लेजान्द्रे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$(1-x^2)\,[2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots] - 2x\,[a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots]$$
$$+\, k\,[a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots] = 0$$

संकलन संकेतन पद्धति में हम इसे निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$(1-x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + k\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

यहां $k = m(m+1)$ है ।

इसे हमं इस रूप में भी लिख सकते हैं :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + k\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \qquad \text{(iii)}$$

अथवा

$$(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + \ldots) - (2a_2x^2 + 6a_3x^3 + 12a_4x^4 + \ldots)$$

$$-2(a_1x + 2a_2x^2 + 3a_3x^3 + \ldots) + k(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots.) = 0$$

पहले की तरह, हम x की प्रत्येक घात के गुणांकों को एक साथ इकट्ठा करते हैं । ऐसा करने पर आप देखेंगे कि

$$(2a_2 + ka_0) + (6a_3 - 2a_1 + ka_1)\,x + (12a_4 - 2a_2 - 4a_2 + ka_2)x^2 + \ldots. = 0$$

x की प्रत्येक घात के गुणांकों को शून्य के बराबर रखने पर आप देखेंगे कि

x^0 का गुणांक : $\quad 2a_2 + ka_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\dfrac{k}{2}a_0 \qquad$ (iv)

x^1 का गुणांक : $\quad 6a_3 + (k-2)a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\dfrac{k-2}{6}a_1 \qquad$ (v)

x^2 का गुणांक : $\quad 12a_4 + (k-6)a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = -\dfrac{k-6}{12}a_2 \qquad$ (vi)

व्यापक रूप में x^n के लिए हम लिख सकते हैं कि

x^n AßK CknOkkg $(n+2)(n+1)\,a_{n+2} - n(n-1)\,a_n - 2na_n + ka_n = 0$

अतः
$$a_{n+2} = \frac{n(n-1) + (2n-k)}{(n+1)(n+2)}a_n$$
$$= \frac{n(n+1) - k}{(n+1)(n+2)}a_n\ ;\ n = 0, 1, 2, ,3, \ldots.$$

इस व्यंजक में $k = m(m+1)$ प्रतिस्थापित करने पर आप आसानी से सत्यापित कर सकते हैं कि इसका अंश $(n-m)(n+m+1)$ के रूप में लिखा जा सकता है । । अतः

$$a_{n+2} = -\frac{(m-n)(m+n+1)}{(n+1)(n+2)}a_n,\ n = 0, 1, \ldots \qquad \text{(vii)}$$

इस समता (equality) की सहायता से हम स्वेच्छ अचर a_0 और a_1 को छोड़कर, किसी भी प्रसार गुणांक को क्रमशः एकान्तर प्रसार गुणांक के पदों में ज्ञात कर सकते हैं । प्रसार गुणांकों के बीच इस संबंध को **पुनरावृत्ति संबंध** (recurrence relation) अथवा **प्रतिवर्तन या पुनरावृत्ति सूत्र** (recursion formula) कहते हैं । पुनरावृत्ति संबंध (vii) हमें बताता है कि सम पादांकों (subscripts) वाले गुणांकों को a_0 पदों में व्यक्त किया जा सकता है और विषम पादांकों वाले गुणाकों को a_1 के पदों में व्यक्त किया जा सकता है । अर्थात्

$$a_2 = -\frac{m(m+1)}{2!}a_0 \qquad a_3 = -\frac{(m-1)(m+2)}{3!}a_1$$

$$a_4 = -\frac{(m-2)(m+3)}{12}a_2 \qquad a_5 = -\frac{(m-3)(m+4)}{20}a_3$$

$$= \frac{(m-2)\,m\,(m+1)(m+3)}{4!}a_0 \qquad = \frac{(m-3)(m-1)(m+2)(m+4)}{5!}a_1$$

गुणांकों के इन मानों को (ii) में रखकर हम लिख सकते हैं कि

$$y(x) = a_0\, y_1(x) + a_1\, y_2(x) \qquad \text{(viii)}$$

जहां

$$y_1(x) = 1 - \frac{m(m+1)}{2!}x^2 + \frac{(m-2)\,m\,(m+1)}{4!}x^4 - \ldots + \ldots$$

और

$$y_2(x) = x - \frac{(m-1)\,(m+2)}{3!}x^3 + \frac{(m-3)\,(m-1)\,(m+2)\,(m+4)}{5!}x^5 - \ldots + \ldots$$

आपको ध्यान होना चाहिए कि ये दोनों हल केवल अंतराल $-1 < x < 1$ में ही मान्य हैं। आइए अब हम इस बात पर विचार करें कि क्या y_1 और y_2 रैखिकतः स्वतंत्र हैं ? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए हम यह देखते हैं कि y_1 में x की सम घात (even powers) वाले पद हैं जबकि y_2 में केवल विषम घात वाले पद हैं। परिणामस्वरूप अनुपात y_1/y_2 अचर नहीं होगा। इससे यह अर्थ निकलता है कि y_1 और y_2 रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं तथा (viii) लेजान्द्रे समीकरण का व्यापक हल है।

बोध प्रश्न 3

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

समीकरण

$$y'' - 2xy' + 2my = 0$$

सांख्यिकी में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। इसके रैखिकतः स्वतंत्र हलों को **हर्मिट बहुपद** (Hermite polynomials) कहा जाता है। हम चाहते हैं कि आप इस समीकरण के घात श्रेणी हल के गुणांक ज्ञात करें।

आगे बढ़ने से पहले हम घात श्रेणी विधि के उन चरणों का संक्षिप्त विवरण दे रहे हैं जो ऐसे सभी द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने के लिए अपनाने चाहिये जिनका $x = 0$ एक साधारण बिंदु है।

घात श्रेणी विधि

चरण 1: सर्वप्रथम $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ के रूप की एक घात श्रेणी हल की संकल्पना कीजिए।

चरण 2: संकल्पित हल और इसके अवकलजों को दिए हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए।

चरण 3: एक समघात समीकरण के लिए x की प्रत्येक घात के गुणांकों के योग को शून्य के बराबर रख दीजिए। इस प्रकार आपको **पुनरावृत्ति संबंध** प्राप्त होगा जिसकी सहायता से आप घात श्रेणी के गुणांकों को दो स्वेच्छ अचरों के पदों में व्यक्त कर सकते हैं।

चरण 4: घात श्रेणी गुणांकों को संकल्पित हल में प्रतिस्थापित करके घात श्रेणी हल को लिखें। यही दिए हुए समीकरण का हल है।

अभी तक हमने घात श्रेणी विधि की परिशुद्ध व्युत्पत्ति से अपने को दूर रखा है। यहां पर यह कहा जा सकता है कि घात श्रेणी विधि का गणितीय तर्क फ्यूक्स प्रमेय (Fuchs' theorem) में निहित है। अब हम इसका कथन बिना उपपत्ति दे रहे हैं।

यदि समीकरण

$$y'' + p(x)\,y' + q(x)\,y = 0$$

का एक साधारण बिंदु $x = x_0$ हो तो इस बिंदु के सापेक्ष समीकरण का हल $y(x)$ ऐसा अद्वितीय वैश्लेषिक फलन है जो दिए गए प्रतिबंधों $y(x_0) = a_0$ और $y'(x_0) = a_1$ को संतुष्ट करता है। यहां

a_0 और a_1 दो स्वेच्छ अचर हैं।

भौतिकी में ऐसे अनेक चर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण होते हैं जिनके गुणांक फलन वैश्लेषिक नहीं होते। विशेषतया बिंदु $x = x_0$ इन समीकरणों या फलनों का एक नियमित विचित्र बिंदु होता है। इनके लिए घात श्रेणी हल समीकरण (3.2) भौतिक दृष्टि से मान्य नहीं होता। तब प्रायः हम व्यापक घात श्रेणी (extended power series) का प्रयोग करते हैं। यह सदैव नियमित विचित्र बिंदु पर कम से कम एक हल अवश्य उपलब्ध कराती है :

$$y(x) = (x-x_0)^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x-x_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (x-x_0)^{n+r} \tag{3.4}$$

इस श्रेणी को सूचक r वाली फ्रोबेनियस श्रेणी (Frobenius series with index r) भी कहा जाता है। यहां r कोई वास्तविक या संमिश्र संख्या हो सकती है ताकि $a_0 \neq 0$ रहे। आप देखेंगे कि जब r एक ऋणेत्तर (non-negative) पूर्णांक होता है तो समीकरण (3.4) एक घात श्रेणी को ही निरूपित करता है। आइये अब चर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण को फ्रोबेनियस विधि द्वारा हल करना सीखें।

3.4 फ्रोबेनियस विधि

हम फ्रोबेनियस विधि का उपयोग उस स्थिति में करते हैं जब $x = 0$ समीकरण (3.2)

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

का एक नियमित विचित्र बिंदु होता है। चूंकि $p(x)$ और $q(x)$, $x = 0$ पर वैश्लेषिक नहीं हैं, इसलिए पहले हम इस समीकरण को $b(x) = xp(x)$ और $c(x) = x^2 q(x)$ के पदों में लिखते हैं। ये गुणांक $x = 0$ पर वैश्लेषिक होंगे।

अतः हम उपर्युक्त समीकरण को x^2 से गुणा करते हैं :

$$x^2 y'' + x^2 p(x)\, y' + x^2 q(x)\, y = 0$$

या

$$x^2 y'' + x\, b(x) y' + c(x) y = 0 \tag{3.5}$$

क्योंकि $b(x)$ और $c(x)$, $x = 0$ पर वैश्लेषिक हैं, इसलिए हम लिख सकते हैं कि

$$b(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{3.6क}$$

और

$$c(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{3.6}$$

आप देखेंगे कि यदि $b_0 = c_0 = c_1 = 0$ हों तो $x = 0$ एक नियमित विचित्र बिंदु को परिभाषित करने की बजाय एक साधारण बिंदु को परिभाषित करता है।

$x_0 = 0$ लेकर समीकरण (3.4) में दिए गए श्रेणी प्रसार के प्रत्येक पद को अवकलित करने पर आपको निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होते हैं :

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^{n+r-1}$$

और

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^{n+r-2}$$

$b(x), c(x), y(x)$ और इसके अवकलजों $y'(x)$ तथा $y''(x)$ के मानों को समीकरण (3.5) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$x^r \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1)\, a_n x^n + x^r \left[\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)\, a_n x^n \right] \left[\sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m \right] + x^r \left(\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = 0$$

पहले की तरह, अब हम x की प्रत्येक घात के गुणांकों के योग को शून्य के बराबर रखते हैं। ऐसा करने से हमें a_n अज्ञात गुणांकों वाला एक समीकरण निकाय प्राप्त होता है। x की निम्नतम घात x^r का गुणांक, $n = 0$ वाले पद से प्राप्त होता है। इस गुणांक को शून्य के बराबर रख देने से हमें यह व्यंजक मिलता है :

x^r का गुणांक : $\quad [r(r-1) + rb_0 + c_0]\, a_0 = 0$

क्योंकि $a_0 \neq 0$, इसलिए यह समता तभी संतुष्ट होगी जबकि

$$r^2 + (b_0 - 1)r + c_0 = 0 \tag{3.7}$$

इस समीकरण को दिए हुए अवकल समीकरण का **घातांकी समीकरण** (indicial equation) कहा जाता है। घातांकी समीकरण द्विघाती है, इसलिए इसके दो मूल होंगे। इसका अर्थ यह है कि दिए गए अवकल समीकरण में दो फ्रोबेनियस श्रेणी हल होने चाहियें। क्या ये हल सदैव रैखिकतः स्वतंत्र होंगे ? यह आवश्यक नहीं है। वस्तुतः घातांकी समीकरण के मूलों से हमें साधारण अवकल समीकरण के हल की प्रकृति के बारे में कुछ संकेत अवश्य मिल जाता है। व्यवहारिक दृष्टि से घात श्रेणी विधि के लिए बताए गए चरणों को उपयोग में लाते हुए अपेक्षित हल प्राप्त किए जा सकते हैं। इन पर विस्तार से चर्चा करने से पहले हम चाहते हैं कि आप निम्नलिखित उदाहरण को ध्यान से पढ़ लें।

उदाहरण 4

अवकल समीकरण

$$x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right) y = 0$$

के लिए $x = 0$ पर घातांकी समीकरण के मूल ज्ञात कीजिए।

हल

दिए हुए अवकल समीकरण को मानक रूप में लिखने के लिए हम पूरे समीकरण को x^2 से भाग करते हैं। ऐसा करने से यह समीकरण निम्नलिखित रूप ले लेता है :

$$y'' + \frac{1}{x} y' + \left(\frac{x^2 - (1/9)}{x^2} \right) y = 0 \tag{i}$$

इस समीकरण को देखकर आप यह बता सकते हैं कि $x = 0$ इसका एक विचित्र बिंदु है। अब प्रश्न उठता है कि क्या यह विचित्रता नियमित है? आप देखेंगे कि $p(x) = \dfrac{1}{x}$ और $q(x) = \dfrac{x^2 - (1/9)}{x^2}$

अतः $b(x) = xp(x) = 1$ और $c(x) = x^2 q(x) = x^2 - (1/9)$ लेने पर $xp(0) = 1$ और $x^2 q(0) = -1/9$ प्राप्त होता है। अर्थात् $x = 0$ पर $b(x)$ और $c(x)$ वैश्लेषिक हैं तथा $x = 0$ एक नियमित विचित्र बिंदु है ! अतः हम संकलित हल को घात श्रेणी के रूप में लिख सकते हैं :

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$$

x के सापेक्ष इसके अवकलज

$$y'(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+r)\, x^{m+r-1}$$

तथा

$$y''(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+r)(m+r-1)\, x^{m+r-2}$$

हैं ।

दिए हुए समीकरण में इन्हें प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$\sum_{m=0}^{\infty} (m+r)(m+r-1)\; a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} (m+r)\, a_m x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} - \frac{1}{9} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

घातांकी समीकरण प्राप्त करने के लिए हम x के निम्नतम घात वाले गुणांकों के योग को शून्य के बराबर रखते हैं । ऐसा करने से यह व्यंजक प्राप्त होता है :

$$a_0 \left[r(r-1) + r - \frac{1}{9} \right] = 0$$

यदि $a_0 \neq 0$ हो तो घातांकी समीकरण निम्नलिखित रूप ले लेता है :

$$r^2 - \frac{1}{9} = 0$$

जिसके मूल $r = \pm 1/3$ हैं । अर्थात् घातांकी समीकरण के मूल अलग-अलग हैं और इनमें पूर्णांक का अंतर भी नहीं है ।

आइए अब कुछ क्षण ठहरें और पूछें : क्या घातांकी समीकरण के मूल सदा ही अलग-अलग होंगे? इसका उत्तर "नहीं" में है । फिर भी जब ये अलग-अलग है तो इनमें एक पूर्णांक का अंतर हो सकता है । वस्तुतः तीन संभावनाएं हो सकती हैं । घातांकी समीकरण के (i) अलग-अलग मूल हो सकते हैं जिनमें एक पूर्णांक का अंतर न हो, (ii) पुनरावृत्त या द्विक मूल (double root) हो सकते हैं, और (iii) मूल अलग-अलग तो हों परन्तु इनमें एक पूर्णांक का अंतर हो सकता है । इसका पता लगाने के लिए आप निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल करें ।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 4

$x = 0$ के सापेक्ष निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरणों के संगत घातांकी समीकरणों के मूल मालूम कीजिए :

(क) $x(x-1)\, y'' + (3x-1)\, y' + y = 0$

(ख) $x^2 (x^2 - 1) y'' - (x^2 + 1)\, xy' + (x^2 + 1)\, y = 0$

अब आप जानते हैं कि तीन संभव स्थितियां हो सकती हैं । पर, भौतिकी में इनमें से केवल वह स्थिति जिसमें घातांकी समीकरण के मूल अलग-अलग होते हैं और उनमें एक पूर्णांक का अंतर भी नहीं है अधिक महत्वपूर्ण है । अतः यहां हम केवल इसी स्थिति पर विस्तार से चर्चा करेंगे । समान मूलों तथा ऐसे मूल जिनमें एक पूर्णांक का अंतर है, के लिए हम केवल परिणाम ही बताएंगे । **(सत्रीय कार्यों और अंतिम परीक्षा में इन पर प्रश्न नहीं दिए जाएगें ।)** आइए अब हम इनके हल प्राप्त करने की विधि सीखें ।

स्थिति 1: घातांकी समीकरण के भिन्न-भिन्न मूलों में एक पूर्णांक का अंतर नहीं है

जब घातांकी समीकरण के दो भिन्न-भिन्न मूलों (r_1, r_2) में एक पूर्णांक का अंतर नहीं होता तब हमें निम्नलिखित रूप के दो रैखिकतः स्वतंत्र फ्रोबेनियस श्रेणी हल प्राप्त होते हैं :

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{3.8a}$$

और

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n \tag{3.8b}$$

वस्तुतः यह एक सरल स्थिति है। हमने निम्नलिखित उदाहरण में फ्रोबेनियस विधि की सहायता से दो रैखिकतः स्वतंत्र हल प्राप्त करने की प्रक्रिया का उल्लेख किया है। आप इसे ध्यानपूर्वक पढ़ें और समझें।

उदाहरण 5

साधारण अवकल समीकरण

$$x^2 y'' + \left(x^2 + \frac{5}{36}\right) y = 0$$

के लिए $x = 0$ पर दो फ्रोबेनियस श्रेणी हल ज्ञात कीजिए।

हल

आइए पहले हम x^2 से भाग देकर दिए हुए साधारण अवकल समीकरण को मानक रूप में लिखें:

$$y'' + \left(\frac{x^2 + (5/36)}{x^2}\right) y = 0 \tag{i}$$

यहां $p(x) = 0$ और $q(x) = \dfrac{x^2 + (5/36)}{x^2}$ हैं। अब आप देख सकते हैं कि बिंदु $x = 0$ एक विचित्रता है। और, क्योंकि $\lim_{x \to 0} x^2 q(x) = 5/36$ है, आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि $x = 0$ दिए हुए अवकल समीकरण का नियमित बिंदु है। अब

$$y(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r}$$

के रूप का एक हल लें और इसे (i) में प्रतिस्थापित करने पर आपको निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होगा :

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+r)(m+r-1) x^{m+r} + \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r+2} + \frac{5}{36} \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{m+r} = 0$$

घातांकी समीकरण प्राप्त करने के लिए हम x^r के गुणांकों के योग को शून्य के बराबर करते हैं। ऐसा करने पर निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$a_0 \left[r(r-1) + \frac{5}{36} \right] = 0$$

a_0 शून्येतर रहे इसके लिए आवश्यक है कि

$$r(r-1) + \frac{5}{36} = 0$$

हो। यह अभीष्ट घातांकी समीकरण है। आप यह आसानी से सत्यापित कर सकते हैं कि 5/6 और 1/6 इसके दो मूल हैं और इनमें एक पूर्णांक कर अतर भी नहीं है।

$r_1 = \dfrac{5}{36}$ के सगंत a_n मालूम करने के लिए हम x^{r+1}, x^{r+2}.... , ... ; x^{n+r} के गुणांकों के योगफल को शून्य के बराबर रखते हैं :

x^{r+1} का गुणांक : $$a_1\left[r(r-1)+\frac{5}{36}\right] = 0$$

क्योंकि $r = r_1 = 5/36$ के लिए कोष्ठक के अंदर के पद शून्येतर हैं। इसलिए यह समता केवल तभी सत्य होगी जबकि हम $a_1 = 0$ लें।

x^{r+2} का गुणांक : $$a_2(r+1)(r+2)+a_0+\frac{5}{36}a_2 = 0$$

या $$a_2 = -\frac{a_0}{(r+1)(r+2)+\dfrac{5}{36}}$$

⋮

x^{m+r} का गुणांक : $$a_m(m+r)(m+r-1)+a_{m-2}+\frac{5}{36}a_m = 0$$

या $$a_m\left[(m+r)(m+r-1)+\frac{5}{36}\right] = -a_{m-2}$$

$r = r_1 = \dfrac{5}{36}$ प्रतिस्थापित करने पर आप देखेंगें कि

$$a_m\left[\left(m+\frac{5}{36}\right)\left(m-\frac{1}{6}\right)+\frac{5}{36}\right] = -a_{m-2}$$

या $$a_m = -\frac{a_{m-2}}{m\left(m+\dfrac{2}{3}\right)} \qquad \text{(ii)}$$

क्योंकि $a_1 = 0$ है इसलिए यह पुनरावृत्ति संबंध बताता है कि सभी विषम गुणांक शून्य ही होंगे।

सम गुणांक ज्ञात करने के लिए आइए हम $m = 2p$ रखें। इसका अर्थ यह है कि

$$a_{2p} = -\frac{a_{2p-2}}{2p\left(2p+\dfrac{2}{3}\right)} = -\frac{3}{4}\frac{a_{2p-2}}{p(3p+1)}$$

अतः

$$p = 1 \;:\; a_2 = -\frac{3}{4}\left(\frac{a_0}{4}\right)$$

$$p = 2 \;:\; a_4 = -\frac{3}{4}\left(\frac{a_2}{14}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{a_0}{56} = \left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{a_0}{2!\,4\times7}$$

इसी प्रकार आप लिख सकते हैं कि

$$p = 3 \;:\; a_6 = -\left(\frac{3}{4}\right)^3\frac{a_0}{3!\,4\times7\times10}$$

⋮

$$a_{2p} = (-1)^p\left(\frac{3}{4}\right)^p\frac{a_0}{p!\,1\times4\times7\times10\times\ldots(3p+1)}$$

अतः दिए हुए समीकरण का एक हल

$$y_1(x) = a_0x^{5/6}\left[1-\frac{3}{16}x^2+\frac{9}{16}\frac{x^4}{2\times4\times7}-\ldots+(-1)^p\left(\frac{3}{4}\right)^p\frac{x^{2p}}{p!\;1\times4\times7\times(2p+1)}\right]$$

है। संहत रूप (compact form) में इसे हम निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$y_1(x) = a_0x^{5/6}\left[1+\sum_{p=1}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{3}{4}\right)^p\frac{x^{2p}}{p!\;1\times4\times7\times..(3p+1)}\right] \qquad \text{(iii)}$$

$r = r_2 = \frac{1}{6}$ के लिए भी सभी विषम गुणांक शून्य होंगे तथा यह सत्यापित करने के लिए कि

$$y_2(x) = d_0 x^{1/6} + \sum_{p=1}^{\infty} d_{2p}\, x^{2p+1/6}$$

जहां $d_{2p} = (-1)^p \left(\frac{3}{4}\right)^p \frac{d_0}{p!\ 2 \times 5 \times 8 \times \dots (3p-1)}$ है, एक प्रश्न के रूप में आपके लिए हम छोड़ रहे हैं ।

स्थिति 2 : घातांकी समीकरण के द्विक मूल

जब घातांकी समीकरण के मूल बराबर होते हैं तब ऊपर बतायी गई प्रक्रिया से हम दो रैखिकतः स्वतंत्र हल प्राप्त नहीं कर सकते । वस्तुतः इसका केवल एक फ्रोबेनियस श्रेणी हल हो सकता है । इस हल को मालूम करने के लिए पहले हम समीकरण (3.7) से r ज्ञात करते है :

$$r = \frac{-(b_0-1) \pm \sqrt{(b_0+1)^2 - 4c_0}}{2}$$

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ पुनरावृत्त मूल का प्रतिबंध $b^2 - 4ac = 0$ है ।

बराबर मूल वाले प्रतिबंध को लागू करने पर आप देखेंगे कि पुनरावृत्ति मूल $-\frac{b_0-1}{2} = \frac{1-b_0}{2}$ है क्योंकि करणी चिन्ह (radical sign) के अंदर का व्यंजक लुप्त हो जाता है । अतः समीकरण (3.4) हमें बताता है कि एक हल

$$y_1(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= x^{(1-b_0)/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (3.9)$$

के रूप का होगा । यहां a_n अज्ञात अचर है ।

दूसरा रैखिकतः स्वतंत्र हल

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}\right)\left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m x^m\right)$$

$$= y_1(x) \ln x + x^r \sum_{i=1}^{\infty} A_i x^i \qquad (3.10)$$

है जहां A_i एक अन्य अचर है ।

स्थिति 3: घातांकी समीकरण के पूर्णांक अंतर वाले मूल

जब घातांकी समीकरण के मूल (r_1, r_2) अलग-अलग हों और उनमें एक पूर्णांक का अंतर हो तो ऊपर बतायी गई विधि द्वारा आप केवल एक फ्रोबेनियस श्रेणी हल प्राप्त कर सकते हैं । यदि $r_1 (= r)$ और $r_2 (= r-p$, जहां p एक धन पूर्णांक है) दो मूल हों तो दूसरा रैखिकतः स्वतंत्र फ्रोबेनियस हल

$$y_2(x) = k_p\, y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{m=0}^{\infty} D_m x^m \qquad (3.11)$$

होगा । इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए अब उसका संक्षिप्त विवरण दें ।

3.5 सारांश

- चर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

का $x = x_0$ एक साधारण बिंदु होता है, यदि $x = x_0$ पर $p(x)$ और $q(x)$ वैश्लेषिक हों। अन्यथा बिंदु $x = x_0$ विचित्र बिंदु होता है। यदि $x = x_0$ पर $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)\,p(x)$ और $\lim_{x \to x_0} (x-x_0)^2\,q(x)$ परिमित हों तो विचित्रता नियमित होती है।

- $x = 0$ एक साधारण बिंदु हो तो चर गुणांकों वाले द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण को हल करने के लिए $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ के रूप का एक घात श्रेणी हल लेते हैं। पुनरावृत्ति संबंध की सहायता से अज्ञात अचरों (a_n) को ज्ञात किया जा सकता है।

- यदि $x = 0$ एक नियमित विचित्रता हो तो द्वितीय कोटि अवकल समीकरण का हल ज्ञात करने के लिए हम फ्रोबेनियस विधि का उपयोग कर सकते हैं। इससे हम $y(x)$ को व्यापक घात श्रेणी में व्यक्त करते हैं :

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

- घातांकी समीकरण प्राप्त करने के लिए x के निम्नतम घात के गुणांकों के योगफल को शून्य के बराबर रखा जाता है।

- घातांकी समीकरण के मूलों से हमें साधारण अवकल समीकरण के हल की प्रकृति के बारे में संकेत मिल जाता है। घातांकी समीकरण के मूल अलग-अलग, समान या पूर्णांकों से अंतर वाले हो सकते हैं।

- अलग-अलग मूलों के लिए दो रैखिकतः स्वतंत्र हल

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

और $$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n$$

होते हैं।

3.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. लेजान्द्रे समीकरण की तरह भौतिकी और गणित के उच्च अध्ययन में जिस द्वितीय कोटि अवकल समीकरण का काफी इस्तेमाल होता है, वह है **बेसल समीकरण:** $x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)\,y = 0$. उदाहरण 4 में आप कोटि 1/3 वाले बेसल समीकरण को हल कर चुके हैं। फ्रोबेनियस विधि द्वारा व्यापक बेसल समीकरण को हल कीजिए।

2. बिंदु $x = 0$ पर साधारण अवकल समीकरण

$$y'' + y = \exp(x)$$

को हल कीजिए।

3.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. (क) $x^2 y'' + 3xy' + y = 0$

मानक समीकरण $(y'' + p(x)y' + q(x)y = 0)$ से तुलना करने के लिए हम इस समीकरण को x^2 से भाग देते हैं। ऐसा करने पर हमें

$$y'' + \frac{3}{x}y' + \frac{1}{x^2}y = 0$$

प्राप्त होता है। अतः $p(x) = \frac{3}{x}$ और $q(x) = \frac{1}{x^2}$ हैं। ये दोनों फलन $x = 0$ पर

अपसरित होते हैं। अर्थात् ये दोनों फलन विचित्रता दर्शाते हैं। विचित्रता नियमित है कि नहीं, यह ज्ञात करने के लिए आइए हम $\lim_{x \to 0} xp(x)$ और $\lim_{x \to 0} x^2 q(x)$ ज्ञात करें। ये क्रमशः 3 और 1 के बराबर हैं। अतः हम यह कह सकते हैं कि $x = 0$ दिए गए समीकरण की एक नियमित विचित्रता है।

ख) $$x^2 y'' - y' + 2x^2 y = 0$$

x^2 से भाग देने पर आप देखेंगे कि $y' - \frac{1}{x^2} y' + 2y = 0$. इससे पता चलता है कि $x = 0$ पर $p(x)$ वैश्लेषिक नहीं है। वस्तुतः $\lim_{x \to 0} xp(x) = -\frac{1}{x}$ और $x = 0$ पर फलन अपसरित होता है। अतः $x = 0$ दिए हुए समीकरण की एक अनियमित विचित्रता है।

ग) $$2x^2 y'' - xy' - (x-5)y = 0$$

$2x^2$ से भाग देने पर आप देखेंगे कि

$$y'' - \frac{1}{2x} y' + \frac{x-5}{2x^2} y = 0$$

मानक समीकरण से तुलना करने पर आप देखेंगे कि $p(x) = -\frac{1}{2x}$ और $q(x) = \frac{x-5}{2x^2}$ जो $x = 0$ पर अपसरित होते हैं। लेकिन $\lim_{x \to 0} xp(x) = -\frac{1}{2}$ और $\lim_{x \to 0} x^2 q(x) = -\frac{5}{2}$ हैं। अतः $x = 0$ एक नियमित विचित्रता है।

2. क) $$y'' + \omega_0^2 y(x) = 0$$

मान लीजिए कि

$$y(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^n$$

x के सापेक्ष इनके अवकलज ज्ञात कीजिए। आप देखेंगे कि

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

और $$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}$$

दिए हुए समीकरण में इन्हें प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \omega_0^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

प्रसारित करके इसे हम निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \ldots) + \omega_0^2 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) = 0$$

x के विभिन्न घातों के गुणांकों को इकट्ठा कर उपर्युक्त समीकरण को हम निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$(2a_2 + \omega_0^2 a_0) + (6a_3 + \omega_0^2 a_1)x + (12a_4 + \omega_0^2 a_2)x^2 + \ldots = 0$$

x के प्रत्येक घात के गुणांक को शून्य के बराबर रखने पर आप देखेंगे कि

x^0 का गुणांक : $\quad 2a_2 + \omega_0^2 a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{\omega_0^2}{2!} a_0$

x^1 का गुणांक : $\quad 6a_3 + \omega_0^2 a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = -\frac{\omega_0^2}{6} a_1 = -\frac{\omega_0^2}{3!} a_1$

x^2 का गुणांक : $\quad 12a_4 + \omega_0^2 a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{\omega_0^2}{12} a_2 = \frac{\omega_0^4}{4!} a_0$

अर्थात् $a_2, a_4, \ldots$ को a_0 के पदों में व्यक्त किया जा सकता है और $a_3, a_5, \ldots$ आदि को a_1 के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। अतः

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$
$$= a_0 + a_1 x - \frac{\omega_0^2}{2!} a_0 x^2 - \frac{\omega_0^2}{3!} a_1 x^3 + \frac{\omega_0^4}{4!} a_0 x^4 + \ldots$$

a_0 और a_1 के गुणांकों को एक साथ लेने पर हम देखते हैं कि

$$y(x) = a_0\left(1 - \frac{\omega_0^2}{2!}x^2 + \frac{\omega_0^4}{4!}x^4 - \ldots\right) + a_1\left(x - \frac{\omega_0^2}{3!}x^3 + \frac{\omega_0^5}{5!}x^5 - \ldots\right)$$

आप देखेंगे कि a_0 का गुणांक $\cos \omega_0 x$ को परिभाषित करता है जबकि a_1 का गुणांक $\sin \omega_0 x$ को परिभाषित करता है। अतः हम व्यापक हल को निम्नलिखित रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$y(x) = a_0 \cos \omega_0 x + a_1 \sin \omega_0 x$$
$$= a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

इकाई 2 में आप पढ़ चुके हैं कि $\cos \omega_0 x$ और $\sin \omega_0 x$ रैखिकतः स्वतंत्र हल हैं।

ख) दिए हुए अवकल समीकरण का $x = 0$ एक साधारण बिंदु हैं। अतः आप घात श्रेणी हल की संकल्पना कर सकते हैं :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

जहां $a_0 \neq 0$ है। दिए हुए समीकरण में y और y' की घात श्रेणियों को प्रतिस्थापित करने पर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2 - 2x$$

या
$$\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = x^2 - 2x$$

प्रसारित रूप में

$$\left(a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots\right) + \left(a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots\right) = x^2 - 2x$$

x की प्रत्येक घात के गुणांकों को इकट्ठा करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$a_1 + (a_0 + 2a_2)x + (a_1 + 3a_3)x^2 + \ldots = x^2 - 2x$$

गुणांक a_0 स्वेच्छ अचर है। अन्य गुणाकों को ज्ञात करने के लिए हम इस समीकरण के दोनों पक्षों में x की समान घात वाले गुणांकों की तुलना करते हैं :

x^0 का गुणांक : $a_1 = 0$

x^1 का गुणांक : $2a_2 + a_0 = 1 \Rightarrow a_2 = -\frac{a_0 + 2}{2}$

x^2 का गुणांक : $3a_3 + a_1 = 1 \Rightarrow a_3 = \frac{1 - a_1}{3} = \frac{1}{3}$

x^3 का गुणांक : $4a_4 + a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = -\frac{a_2}{4} = \frac{a_0 + 2}{8}$

x^{n-1} का गुणांक: $n\, a_n + a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = -\frac{1}{n} a_{n-2} \quad n \geq 4$

$n \geq 4$ के लिए इस सूत्र की पुनरावृत्ति से आप देखेंगे कि

$$a_4 = -\frac{1}{4}a_2 = -\frac{1}{4}\left(-\frac{a_0 + 2}{2}\right) = \frac{a_0 + 2}{8}$$
$$a_5 = -\frac{1}{5}a_3 = -\left(\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{15}$$
$$a_6 = -\frac{1}{6}a_4 = -\frac{a_0 + 2}{6 \times 4 \times 2} = -\frac{a_0 + 2}{48}$$
$$a_7 = \frac{1}{7}a_5 = \frac{1}{7 \times 5 \times 3}$$

अतः दिए गए अवकल समीकरण के हल को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$= a_0 - \frac{a_0+2}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{a_0+2}{8}x^4 - \frac{1}{15}x^5 - \frac{a_0+2}{48}x^6 + \frac{1}{7\times5\times3}x^7 + \dots$$

$$= a_0 - (a_0+2)\left(\frac{x^2}{2} - \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{48}x^6 + \dots\right) + \frac{1}{3}\left(x_3 - \frac{x^5}{15} + \frac{1}{7\times5\times3}x^7 - \dots\right)$$

3. आप देख सकते हैं कि $x = 0$ दिए हुए समीकरण का एक साधारण बिंदु है। अतः हम

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

के रूप का एक घात श्रेणी हल लेकर इसके अवकलज परिकलित करते हैं। अत:

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

और

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}$$

दिए हुए समीकरण में इन्हें प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता हैं :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^n + 2m \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = 0$$

प्रसारित रूप में

$$(2a_2 + 6a_3 x + 12a_4 x^2 + \dots + n(n-1)\, a_n x^{n+2} + \dots)$$
$$-2(a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + \dots + n\, a_n x^n + \dots)$$
$$+ 2m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots) = 0$$

x की प्रत्येक घात के गुणांकों को एक साथ लेने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$(2a_2 + 2ma_0) + (6a_3 - 2a_1 + 2ma_1)x + (12a_4 - 4a_2 + 2ma_2)x^2 + \dots$$
$$+ \left[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 2na_n + 2ma_n\right]x^n + \dots = 0$$

अब हम x की प्रत्येक घात के गुणांकों को शून्य के बराबर रखते हैं :

x^0 का गुणांक : $2a_2 + 2ma_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\frac{2m}{2}a_0$

x^1 का गुणांक : $6a_3 + (2m-2)\, a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = \frac{2(1-m)}{3}a_1$

x^2 AßK CknOkkgAß : $12a_4 + (2m-4)a_2 = 0 \Rightarrow a_4 = \frac{2-m}{6}a_2 = -\frac{2m(2-m)}{12}a_0$

x^n AßK CknOkkgAß : $(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 2(n-m)\, a_n = 0$

या $$a_{n+2} = \frac{2(n-m)}{(n+2)(n+1)}a_n$$

4. (क) आइए पहले हम दिए हुए समीकरण को $x(x-1)$ से भाग देकर मानक रूप में लिखें :

$$y'' + \frac{3x-1}{x(x-1)}y' + \frac{1}{x(x-1)}y = 0$$

आप आसानी से देख सकते हैं कि फलन

$p(x) = \left[\frac{3x-1}{x(x-1)}\right]$ और $q(x) = \left[\frac{1}{x(x-1)}\right]$ $x = 0$ पर और $x = 1$ पर अपसरित होते हैं। परन्तु $\lim_{x\to 0} xp(x) = 1$, $\lim_{x\to 0} x^2 q(x) = 0$, $\lim_{x\to 1}(x-1)p(x) = 2$ और $\lim_{x\to 0}(x-1)^2 q(x) = 0$. अतः $x = 0$ और $x = 1$ दिए गए समीकरण की नियमित विचित्रताएं हैं। अब हम $x = 0$ के लिए यह मानते हैं कि हल का रूप

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

है। x के सापेक्ष इसके अवकलज

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

और

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

दिए हुए समीकरण में $y(x)$, $y'(x)$ और $y''(x)$ के मानों को प्रतिस्थापित करने पर आप देखेंगे कि

$$x(x-1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2} + (3x-1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

या

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-1}$$

$$+ 3 \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

आप देखेंगे कि x की निम्नतम घात x^{r-1} है। इसके गुणांकों के योगफल को शून्य के बराबर रखने पर प्राप्त परिणाम

$$[-r(r-1)-r]\, a_0 = 0$$

हैं। क्योंकि $a_0 \neq 0$, इसलिए

$$r^2 = 0$$

होना चाहिए। अतः इस घातांकी समीकरण का $r = 0$ एक द्विक मूल है।

ख) $$(x^2-1)x^2y'' - (x^2+1)xy' + (x^2+1)y = 0$$

इसे मानक रूप में रखने के लिए हम $(x^2-1)x^2$ से भाग देते हैं :

$$y'' - \frac{x^2+1}{x(x^2-1)} y' + \frac{x^2+1}{x^2(x^2-1)} y = 0$$

आप यह देख सकते हैं कि $x = 0$ एक नियमित विचित्र बिंदु है। अतः हम यह मानते हैं दिए गए समीकरण के हल का रूप

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r}$$

है। अतः

$$y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r-1}$$

और

$$y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r-2}$$

दिए हुए समीकरण में इन्हें प्रतिस्थापित करने पर आप देखेंगे कि

$$(x^2-1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r} - (x^2+1) \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r}$$

$$+ (x^2+1) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

या

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) a_n x^{n+r}$$

$$- \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} = 0$$

पहले, तीसरे और पांचवें पदों में x की घात एक समान है दूसरे और अंतिम पद में x की घात एक है। अतः आप उपर्युक्त समीकरण को निम्न रूप में भी लिख सकते है:

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)-(n+r)+1]\,a_n x^{n+r+2}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-1]\,a_n x^{n+r} = 0$$

या

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)^2 a_n x^{n+r-2} - \sum_{n=0}^{\infty}(n+r-1)(n+r+1)\,a_n x^{n+r} = 0$$

इस समीकरण में x की निम्नतम घात x^r है। इसके गुणांक को शून्य के बराबर रखने पर हमें अभीष्ट घातांकी समीकरण प्राप्त होता है :

$$(r+1)(r-1) = 0$$

जिसके मूल $r_1 = -1$ और $r_2 = 1$ हैं। इन मूलों में एक पूर्णांक का अंतर हैं।

अंत में कुछ प्रश्न

1. साधारण अवकल समीकरण

$$x^2y''+xy'+(x^2-m^2)\,y = 0$$

को **बेसल समीकरण** कहा जाता है। इसमें प्राचल m वास्तविक और धनात्मक है। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि $x = 0$ इस समीकरण का एक नियमित विचित्र बिंदु है।

अतः हम यह मान लेते हैं कि

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad \text{(i)}$$

$y(x)$ और इसके अवकलजों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त होने वाला समीकरण

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)\,a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)\,a_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r+2}$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} m^2 a_n x^{n+r} = 0$$

तीसरे संकलन से हम x की घात को इस प्रकार परिवर्तित करते हैं कि यह $n+r$ हो जाए। तत्पश्चात् आप इस समीकरण को निम्नलिखित रुप में लिख सकते हैं :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\Big[(n+r)(n+r-1)+(n+r)-m^2\Big]a_n x^{n+r} + \sum_{n=2}^{\infty} a_{n-2} x^{n+r} = 0 \qquad \text{(ii)}$$

इसमें x की निम्नतम घात $x^r (n = 0)$ है। x^r के गुणाकं को शून्य के बराबर रखने पर आप देखेंगे कि

$$\Big[r(r-1)+r-m^2\Big]a_0 = 0$$

क्योंकि $a_0 \neq 0$ इसलिए घातांकी समीकरण

$$r^2-m^2 = 0 \qquad \text{(iii)}$$

है जिसके मूल $r_1 = m$ और $r_2 = -m$ हैं। m के मान के अनुसार हलों में काफी अतंर हो सकता हैं :

$$y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+m} \qquad \text{(iv)}$$

और

$$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^{n-m} \qquad \text{(v)}$$

y_1 ज्ञात करने के लिए आइए हम (ii) को प्रसारित रूप में लिखें

$$x^r\Big[(r^2-m^2)\,a_0+\{(r+1)^2-m^2\}\,a_1x+\{(r+2)^2-m^2\}\,a_2x^2+\ldots$$
$$\{(n+r)^2-m\}\,a_nx^n+\ldots\Big]+x^r\left[a_0x^2+a_1x^3+\ldots+a_{n-2}x^n+\ldots\right]=0$$

x की प्रत्येक घात के गुणांक को शून्य के बराबर कर देने पर आप देखेंगें कि

x^r का गुणांक : $\quad (r^2-m^2)\,a_0 = 0$

x^{r+1} का गुणांक : $\quad \left[(r+1)^2-m^2\right]a_1 = 0$

x^{r+2} का गुणांक : $\quad \left[(r+2)^2-m^2\right]a_2+a_0 = 0 \Rightarrow a_2 = -\dfrac{1}{(r+2)^2-m^2}\,a_0$

$\vdots$

x^{r+n} का गुणांक : $\left[(n+r)^2-m^2\right]a_n+a_{n-2} = 0 \Rightarrow a_n = -\dfrac{1}{(n+r)^2-m^2}\,a_{n-2}$

$r = m$ पर $a_1 = 0$ होता है क्योंकि कोष्ठक के अंदर की राशि लुप्त नही होती । तब पुनरावर्तन संबंध से यह पता चलता है कि $a_3 = a_5 = a_7 = 0 = \ldots$ अर्थात् सभी विषम पादांकित गुणांकों (odd subscripted coefficients) शून्य हैं । सम पादांकित गुणांकों के संबंध में हम देखते हैं कि

$$a_2 = -\frac{1}{(m+2)^2-m^2}\,a_0$$
$$= -\frac{a_0}{(m+2-m)(m+2+m)}$$
$$= -\frac{a_0}{2^2(m+1)}$$

इसी प्रकार,

$$a_4 = -\frac{a_2}{2^2\times 2(m+2)} = \frac{a_0}{2^4\times 2(m+1)(m+2)}$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{2^2\times 3(m+3)} = -\frac{a_0}{2^6\times 3\times 2(m+1)(m+2)\,m+3)}$$

व्यापक रूप में आप लिख सकते हैं कि

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n}\,n!\,(m+1)(m+2)\ldots(m+n)} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

यदि m पूर्णांक न हो तो $r_2 = -m$ के संगत हल प्राप्त करने के लिए हमें केवल m के स्थान पर $-m$ प्रतिस्थापित करना होगा ।

2. $$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{(i)}$$

लेने पर हम यह पाते हैं कि

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$$

और

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n x^{n-2} \qquad \text{(ii)}$$

सारणी 3.1 से आप देख सकते हैं कि e^x का श्रेणी प्रसार

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \qquad \text{(iii)}$$

होता है ।(i), (ii) और (iii) को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर आप देखेंगे कि

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

पदों को व्यवस्थित करने पर इस समीकरण का निम्नलिखित रूप हो जाता है :

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{n!} \right) x^n = 0$$

क्योंकि इस समीकरण का दक्षिण पक्ष शून्य है, इसलिए हम वाम पक्ष में x की प्रत्येक घात के गुणांक को शून्य के बराबर रख सकते हैं। a_n को ज्ञात करने के लिए दोनों श्रेणियों के घातों को समान बनाना होगा। इसलिए हम द्वितीय संकलन में सूचक n के स्थान पर $n - 2$ प्रतिस्थापित करते हैं। अतः

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(a_{n-2} - \frac{1}{(n-2)!} \right) x^{n-2} = 0$$

दोनों श्रेणियों को संयोजित करने पर आप देखेंगे कि

$$\sum_{n=2}^{\infty} x^{n-2} \left[n(n-1)\, a_n + a_{n-2} - \frac{1}{(n-2)!} \right] = 0$$

जब $n \geq 2$ होगा तो x^{n-2} के गुणांक शून्य के बराबर होंगे। अतः

$$n(n-1)a_n + a_{n-2} - \frac{1}{(n-2)!} = 0$$

इसे a_n के लिए हल करने पर हमें निम्नलिखित पुनरावर्तन सूत्र प्राप्त होता है :

$$a_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{n(n-1)} a_n \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

इस सूत्र की पुनरावृत्ति से आप a_2, a_3 आदि गुणांकों को a_0 और a_1 पदों में व्यक्त कर सकते हैं:

$$a_2 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2!} - \frac{1}{2!} a_0$$

$$a_3 = \frac{1}{3!} - \frac{1}{6} a_1 = \frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} a_1$$

$$a_4 = \frac{1}{4!} - \frac{1}{12} a_2 = \frac{1}{4!} a_0$$

$$a_5 = \frac{1}{5!} - \frac{1}{20} a_3 = \frac{1}{5!} a_1$$

क्योंकि $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ तथा a_0 और a_1 स्वेच्छ है, इसलिए

$$\begin{aligned}
y(x) &= a_0 + a_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n \\
&= a_0 + a_1 x + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{2!} a_0 \right) x^2 + \left(\frac{1}{3!} - \frac{1}{3!} a_1 \right) x_3 \\
&\qquad + \frac{1}{4} a_0 x^4 + \frac{1}{5!} a_1 x^5 + \ldots. \\
&= a_0 \left(1 - \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{4!} x^4 + \ldots \right) + a_1 \left(x - \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{5!} x^5 + \ldots \right) + \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \ldots. \\
&= a_0\, y_1(x) + a_2\, y_2(x) + y_p
\end{aligned}$$

जहां y_1 और y_2 अनंत श्रेणी के क्रमशः सम और विषम पद हैं तथा

$$y_p = \frac{1}{2!} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{6!} x^6 + \frac{1}{7!} x^7 + \frac{1}{10!} x^{10} + \ldots.$$

क्योंकि यह द्वितीय कोटि अवकल समीकरण रैखिक है, इसलिए हल का रूप $y = y_c + y_p$ होगा, जहां y_c दो रैखिकतः स्वतंत्र फलनों का एक रैखिक संयोजन है और y_p दिए हुए असमघात समीकरण का एक विशेष हल है।

परिशिष्ट क : घात श्रेणी

बिन्दु x_0 के सापेक्ष एक घात श्रेणी

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \qquad \text{(क.1)}$$

के रूप की एक अनंत श्रेणी होती है। यहां $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m \ldots$ आदि घात श्रेणी के गुणांक हैं। घात श्रेणी में ऋणात्मक या भिन्नात्मक घात वाले पद नहीं होते।

किसी घात श्रेणी के अभिसरित होने का प्रतिबंध

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{n=0}^{k} a_n (x-x_0)^n \qquad \text{(क.2)}$$

का परिमित होना है। इस सीमा के मान को $x = x_0$ पर घात श्रेणी का योगफल कहा जाता है। यदि सीमा का अस्तित्व न हो तो हम कहते हैं कि घात श्रेणी उपसरित हो रही है। x के मान के जिस अंतराल में घात श्रेणी अभिसरित होती है, **अभिसरण अंतराल** (interval of covergence) कहा जाता है। इसे $|x-x_0| < R$ से प्रकट किया जाता है, जहां x_0 को घात श्रेणी का केन्द्र कहा जाता है और R को **अभिसरण त्रिज्या** (radius of convergence) कहते हैं। यदि $R = 0$ हो तो श्रेणी केवल x_0 पर अभिसरित होती है। यदि $R = \infty$ हो तो x के सभी मानों के लिए श्रेणी अभिसरित होती है।

एक उभयनिष्ठ अभिसरण अंतराल में दो घात श्रेणियों का एकघात संचय हो सकता है, अर्थात्

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n + b_n\right) x^n \qquad \text{(क.3)}$$

अभिसरण अंतराल में घात श्रेणी एक ऐसे फलन को निरुपित करती है जिसके अवकलज और समाकल को पदशः अवकलन और समाकलन द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। अर्थात् यदि

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

हो तो

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n\, a_n (x-x_0)^{n-1} \qquad \text{(क.4)}$$

तथा

$$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1} \qquad \text{(क.5)}$$

$x = 0$ के सापेक्ष $f(x)$ के घात श्रेणी प्रसार को **मैक्लारिन श्रेणी** कहा जाता है। $f(x)$ की मैक्लारिन श्रेणी

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^n(0)\, \frac{x^n}{n!}$$

होती है। यहां $f^n(0)$, $x = 0$ पर f के nवें अवकलज का मान है। आप यह जानते हैं कि $f^0 = f$ और $0! = 1$.

3.8 शब्दावली

अनियमित विचित्र बिंदु	: irregular singular point
अपसरण	: divergence
अभिसरण	: convergence
अभिसरण त्रिज्या	: radius of convergence
घात श्रेणी	: power series
घातांकी समीकरण	: indicial equation
नियमित विचित्रता	: regular singularity
पादांक	: subscript
पुनरावृत्ति सूत्र	: recurrence formula
पुनरावृत्ति संबंध	: recurrence relation
विचित्रता	: singularity
विचित्र बिंदु	: singular point
वैश्लेषिक फलन	: analytic function
साधारण बिंदु	: ordinary point

इकाई 4 भौतिकी में साधारण अवकल समीकरणों के कुछ अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

इकाई 1 से 3 में आपने प्रथम और द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियां सीखी हैं। आपने इन विधियों को इसलिए सीखा है जिससे कि आप वास्तविक जीवन से जुड़े अनेक प्रश्नों के उत्तर दे सकें: जैसे कि रॉकेट द्वारा जलायी गई ईंधन की मात्रा का रॉकेट के वेग पर क्या प्रभाव पड़ेगा? मानव-निर्मित प्रदूषण को एक बार रोक देने के बाद प्रदूषित खाड़ी को अपनी स्वाभाविक अवस्था में आने में कितना समय लगेगा ? एक एल सी आर विद्युत् परिपथ (*L C R* electrical circuit) पर विद्युत् सिग्नल लगाने पर उसकी क्या अनुक्रिया (response) होती है ? अब आप इन प्रश्नों का उत्तर दे सकने की स्थिति में पहुंच गए हैं। साधारण अवकल समीकरणों के अनुप्रयोगों पर आधारित यह इकाई इस काम में आपके लिए काफ़ी सहायक सिद्ध होगी।

इस इकाई का **ध्येय महज़ गणित करने पर** नहीं बल्कि **भौतिक समस्याएं सुलझाने के लिए गणित का उपयोग करने पर है**। आपने जो गणितीय विधियां अब तक सीखी हैं, यहां आप उनको लागू करके विविध वास्तविक समस्याओं को हल करना सीखेंगे। इन समस्याओं के उद्गम और हल दोनों ही गणित के परिक्षेत्र से बाहर हैं। इन समस्याओं का हल करने में गणित का प्रयोग **गणितीय निदर्शन** (mathematical modelling) की प्रक्रिया का एक छोटा हिस्सा भर है, किंतु यह हिस्सा महत्वपूर्ण है। आज जैसे-जैसे प्रकृति के बारे में वैज्ञानिकों की खोजबीन बढ़ रही है, वैसे वैसे इस भौतिक जगत की परिघटनाओं को गणितीय भाषा में निरूपित कर पाने की तकनीकें, विज्ञान

के लिए एक अमूल्य साधन बन गई है। वस्तुतः गणित की भाषा में वास्तविकता को अभिव्यक्त कर पाना गणितीय निदर्शन का एक महत्वपूर्ण हिस्सा है। संक्षेप में यह बात लोलक के उदाहरण द्वारा हम इस खंड की प्रस्तावना में भी समझा चुके हैं :

इस इकाई में आप पहले यह समझेंगे कि गणितीय निदर्शन की प्रक्रिया में क्या क्या निहित है। यह बात आप विशेष रूप से साधारण अवकल समीकरणों के संदर्भ में समझेंगे। इस इकाई को पढ़ते हुए आप देखेंगे कि भौतिकी के विभिन्न क्षेत्रों में साधारण अवकल समीकरण से संबंधित गणितीय निदर्शन का काफ़ी प्रयोग होता है। हम आशा करते हैं कि इस इकाई को पढ़ कर आप ऊपर दिए गए प्रश्नों का उत्तर दे सकेंगे। हमें यह भी उम्मीद है कि भविष्य में भौतिकी का गहन अध्ययन करते समय जो अनेकानेक प्रश्न आपके सामने आएंगे, इस इकाई को पढ़कर आप में उनके उत्तर ढूंढने की क्षमता विकसित होगी।

इस खंड में आपने प्रथम और द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों को हल करने की विभिन्न विधियां और भौतिकी में उनके अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ा है। अगले खंड में हम आंशिक अवकल समीकरणों (partial differential equations) के बारे में चर्चा करेंगे। वहां आप भौतिक तंत्रों का आंशिक अवकल समीकरणों द्वारा निदर्शन करके उनसे संबद्ध समस्याओं को हल करने की विभिन्न विधियां सीखेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- प्रथम और द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों का प्रयोग करके ज्ञात भौतिक परिघटनाओं का गणितीय निदर्शन कर सकेंगे
- वैद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों में आवेशित कणों की गति, युग्मित वैद्युत् परिपथ और युग्मित दोलनों से संबंधित अवकल समीकरणों को हल कर सकेंगे।

4.2 गणितीय निदर्शन

क्या आप गणितीय निदर्शन (mathematical modelling) की प्रक्रिया से अच्छी तरह परिचित हैं? अगर ऐसा है तो आप आगे की गई चर्चा को छोड़ भी सकते हैं। केवल चित्र 4.1 देखकर और उदाहरण 1 पढ़ कर आप आगे बढ़ जाएं। लेकिन अगर आप गणितीय निदर्शन नहीं जानते तो हम आपको यह प्रक्रिया एक उदाहरण द्वारा समझाना चाहेंगे। यह उदाहरण आपको बहुत आसान लग सकता है। लेकिन हमने इसे जान कर ही चुना है क्योंकि इसमें आप अपना ध्यान मुख्यतः निदर्शन प्रक्रिया पर केंद्रित कर सकेंगे। आइए हम वास्तविक जगत की एक छोटी सी समस्या पर विचार करें।

मान लीजिए कि आप और आपके दो मित्र अध्ययन केन्द्र पर परामर्श सत्र में भाग लेने बस से जा रहे हैं। अब जिस बस में आप जा रहे हैं वह एक रेल के फ़ाटक पर रुक जाती है जबकि अभी आपको 25 km और आगे जाना है और आपका सत्र 45 min में शुरू होने वाला है। अब समस्या है कि फ़ाटक पर बस के कितनी देर रुके रह जाने के बाद आपका परामर्श सत्र में भाग लेने जाना व्यर्थ साबित होगा? आप यह भी जानते हैं कि लगभग 5 km आगे रास्ते के किनारे एक रेस्तरां है। देरी होने पर, क्या उसी रेस्तरां में अपने साथियों के साथ बैठकर अपनी दिक्कतें विचार-विमर्श द्वारा सुलझाना ज़्यादा सही न होगा?

आइए अब हम इस समस्या पर ग़ौर करें। शायद सबसे पहले आप यही सवाल करेंगे कि आपको कितने समय तक फ़ाटक पर रुकी हुई बस में बैठे रहना चाहिए जिसके बाद वहां से आगे जाना बेकार रहेगा। दरअसल यही वास्तविक समस्या है। इस तरह **वास्तविक समस्या को स्पष्ट करके** आपने गणितीय निदर्शन की प्रक्रिया का **पहला चरण** पूरा कर लिया है।

इसके बाद आप यह जानने की कोशिश कर सकते हैं कि फ़ाटक खुलने पर जब भी बस चल पड़ेगी तो तब आप अपने अध्ययन केंद्र पर समय से पहुंच सकेंगे या नहीं। इस बारे में आप बस के ड्राइवर से पूछताछ कर सकते हैं। मान लीजिए कि ड्राइवर अंदाज़ा लगाता है कि बस औसतन लगभग 50 km की चाल से चलेगी और बीच में पड़ने वाले स्टॉपों पर कुल मिलाकर लगभग 10 min रुकेगी। इस तरह, आप बस की यात्रा को दो भागों में बांट सकते हैं। एक भाग वह जिसमें कि बस वास्तव में चलती है और दूसरा भाग वह जिसमें बस, स्टॉपों पर रुकती है। यहां हमने दोनों भागों के लिए ड्राइवर के अंदाज़े के आधार पर चाल और समय के कोई संख्यात्मक मान ले लिए हैं। इस तरह हमने ड्राइवर द्वारा लगाए गए अंदाज़े के आधार पर शेष यात्रा का एक **निदर्श** (model) तैयार कर लिया है।

अतः हमारा **दूसरा चरण** एक **निदर्श बनाना** है।

आप यह देख सकते हैं कि इस निदर्श की मदद से हम वास्तविक परिस्थिति (शेष यात्रा) को एक सरल ढंग से निरुपित कर पाए हैं और अब हम अपनी वास्तविक समस्या को हल कर सकते हैं। यानि उपयुक्त निदर्श द्वारा हम वास्तविक जगत के किसी भी पहलू को सरलता से निरुपित कर सकते हैं। कोई भी निदर्श एक विशेष उद्देश्य के लिए बनाया जाता है, जिनमें से एक है वास्तविक जगत की समस्याओं को हल करना।

इस तरह अपनी समस्या का सरल निदर्शन कर लेने पर वास्तविक समस्या को हम इस गणितीय समस्या के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं : शेष यात्रा को पूरा करने में कितना समय लगेगा ?

अतः गणितीय निदर्शन का **तीसरा चरण** है : **वास्तविक भौतिक समस्या को गणितीय रूप में लिखना।**

स्पष्ट है कि अगला चरण इस निदर्श के आधार पर शेष यात्रा को पूरा करने में लगने वाले समय को मालूम करना है : 50 km h^{-1} की चाल से 25 km की यात्रा तय करने में लगने वाला समय $= 60 \text{ min} \times \dfrac{25\text{km}}{50\text{km}} = 30 \text{ min}$ होगा और बीच में स्टॉपों पर रुकने का समय $= 10$ min। इस तरह हमारे निदर्श के अनुसार शेष यात्रा को तय करने में कुल 40 min लगेगा।

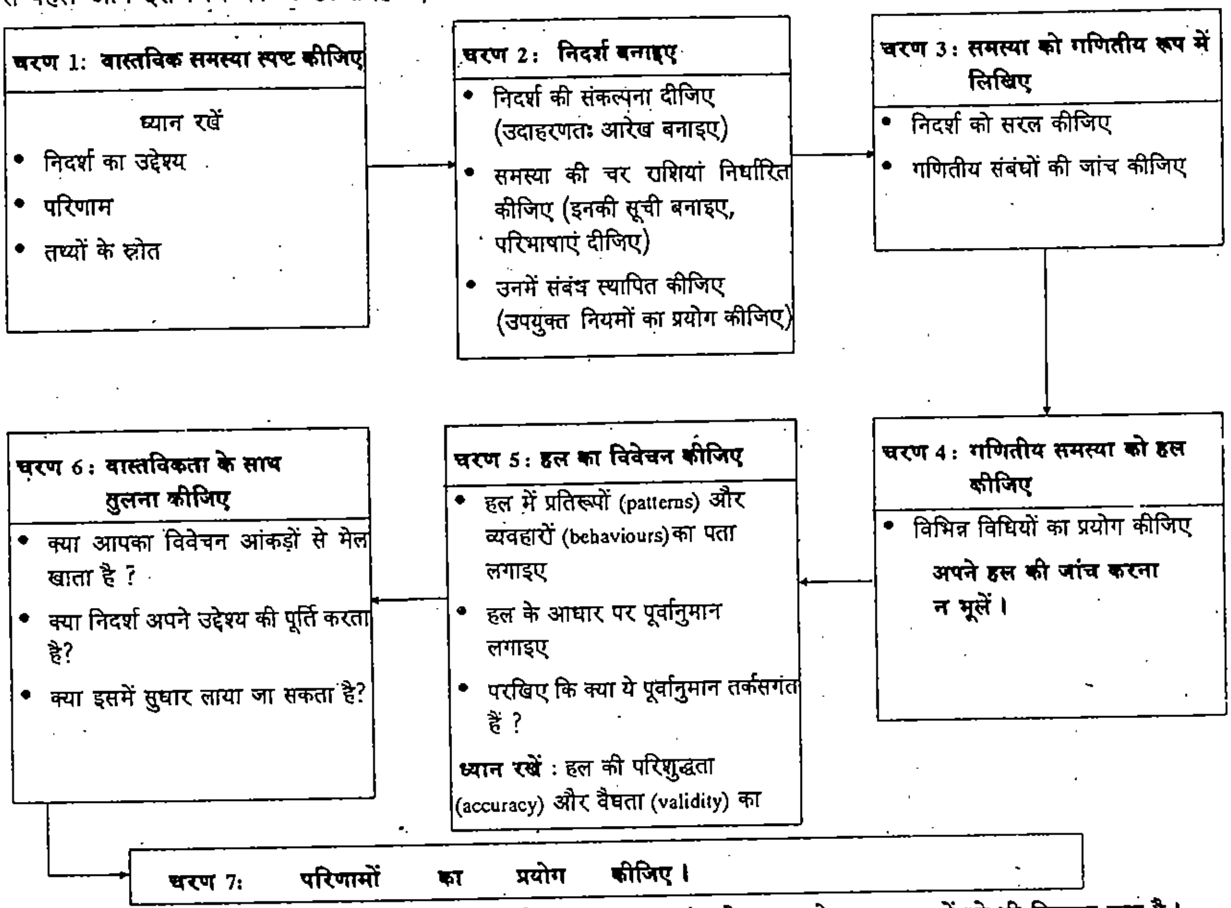
यानि निदर्शन का **चौथा चरण, गणितीय समस्या को हल करना** है।

अब आप इस गणितीय परिणाम का विवेचन करना चाहेंगे। अगर आप परामर्श सत्र में समय पर पहुँचना चाहते हैं तो आप रुकी हुई बस में 5 min और प्रतीक्षा कर सकते हैं। और यदि आप कुछ देर से (लगभग 10 min) देर से पहुँचने के लिए तैयार हैं तो आप फाटक पर 15 min तक प्रतीक्षा कर सकते हैं। अतः अगर बस 5 min से (या आप 10 min देरी से भी पहुँचना चाहें तो 15 min से) अधिक समय तक फ़ाटक पर न रुकी रहे, तभी आपके लिए यात्रा को जारी रखना ठीक रहेगा। यानि **पांचवा चरण, परिणाम का विवेचन करना** है।

इसके बाद आप इस निदर्श पर आधारित अपने हल की वास्तविक से तुलना करना चाहेंगे। क्या चाल और दूरी के संख्यात्मक अनुमान सही हैं ? आप निदर्श के संबंध में यह प्रश्न कर सकते हैं: क्या ड्राइवर बस को कुछ तेज़ नहीं चला सकता और क्या वह बस-स्टॉपों पर और भी कम समय तक नहीं रुक सकता ? क्या इस निदर्श के ये अनुमान उपयुक्त हैं ? आप इन अनुमानों को दोहरा सकते हैं और अलग आंकड़े लेकर इस प्रक्रिया को दोहरा सकते हैं। अतः हमारा **छठा चरण** है **वास्तविकता के साथ हल की तुलना करना।**

अंत में, जब बस वास्तव में चलना शुरू कर देती है, तो आप अपने परिणामों के आधार पर यह निर्णय ले सकते हैं कि आपको अध्ययन केंद्र तक जाना चाहिए कि नहीं। यदि आपको 5 min (या 15 min) से कम समय तक फ़ाटक पर रुकना पड़ा हो, तब तो आप अध्ययन केंद्र जा सकते हैं। मगर निर्णय करने के लिए आपके पास केवल 6 min का ही समय होगा ! अतः निदर्शन का **अंतिम चरण, परिणामों का प्रयोग करना** है।

इस निदर्शन प्रक्रिया को चित्र 4.1 में दिखाया गया है । **इस चित्र में निदर्शन प्रक्रिया के प्रत्येक चरण के मुख्य लक्षण भी दिए गए हैं, जिन्हें आपको हमेशा ध्यान में रखना चाहिए ।** आगे पढ़ने से पहले आप इस चित्र को अच्छी तरह पढ़ें और समझ लें ।



चित्र 4.1: गणितीय निदर्शन की प्रक्रिया के प्रमुख चरण जहां प्रत्येक चरण के प्रमुख लक्षणों को भी दिखाया गया है ।

हम आशा करते हैं कि गणितीय निदर्शन प्रक्रिया के विभिन्न चरणों को आपने अच्छी तरह से अवश्य समझ लिया होगा । क्योंकि यहां हम साधारण अवकल समीकरणों के अनुप्रयोगों पर विचार कर रहे हैं, इसलिए हम निदर्शन में अवकल समीकरणों का प्रयोग करेंगे । यानि हम वे ही भौतिक समस्याएँ लेंगे जिनमें निदर्शन प्रक्रिया के चरण 3 में गणितीय समस्याओं को अवकल समीकरणों के रूप में लिखा जा सके । आइए हम अपने दैनिक जीवन से जुड़ा भौतिकी का एक उदाहरण लेकर निदर्शन प्रक्रिया को समझें । इस उदाहरण को हल करने के लिए हम चित्र 4.1 में दिखाए गए चरणों को लागू करेंगे ।

उदाहरण 1: भवनों का तापन और शीतलन

सीमेंट रखने के लिए एक गोदाम बनाना है । इसमें कोई भी बाहरी तापन (heating) या शीतलन (cooling) व्यवस्था नहीं होगी । इसको कैसे बनाया जाए, ताकि एक दिए हुए समय में इसके तापमान में एक नियत मात्रा में परिवर्तन होता हो?

हल

आइए हम वास्तविक जगत की इस समस्या को हल करने के लिए निदर्शन को लागू करें ।

चरण 1: वास्तविक समस्या स्पष्ट करना

हमें निम्नलिखित प्रश्न का उत्तर देना है : भवन के तापमान में एक नियत मात्रा में परिवर्तन होने में कितना समय लगता है?

चरण 2: निदर्श बनाना

अपने निदर्श द्वारा हमें समय और बाहरी तापमान के फलन के रूप में भवन के अंदर 24 घंटे के तापमान का विवरण देना है । सरलतम निदर्श में हम पूरे भवन को एक इकाई के रूप में मान

सकते हैं। यानि इस निदर्श में हमें अलग-अलग कमरों के बारे में सोचने की ज़रूरत नहीं है। अब चित्र 4.1 के चरण 2 से आप जानते हैं कि हमें उन चरों को चुनना है जो हमारी समस्या के लिए महत्वपूर्ण हैं। आप तुरन्त यह देख सकते हैं कि इस समस्या के दो मुख्य चर हैं : भवन के अंदर का तापमान T और समय t। हमें फलन $T(t)$ अर्थात् किसी समय t पर भवन के अंदर का तापमान निकालना है। अब प्रश्न उठता है कि $T(t)$ को प्रभावित करने वाले कारक (factors) कौन से हैं ? इस संबंध में जो कारक हमारे दिमाग में तुरन्त आते हैं वे इस प्रकार हैं:

निदर्श बनाने में आपको उन चरों को नहीं लेना होता जो प्रक्रिया को या तो बिल्कुल प्रभावित नहीं करते या बहुत कम प्रभावित करते हैं। उदाहरण के लिए एक गिरते हुए पिंड की गति में, उसके रंग का कोई महत्व नहीं होता।

1. भवन के अंदर काम करने वाले लोगों, प्रकाश व्यवस्था और मशीनों के कारण $T(t)$ में वृद्धि हो जाएगी। मान लीजिए इस कारण से $T(t)$ में वृद्धि दर $H(t)$ है।
2. $T(t)$ पर बाहरी तापमान $T_s(t)$ का प्रभाव।

इस समस्या के लिए महत्वपूर्ण चरों की पहचान करने के बाद अब हमें उनके परस्पर संबंध को मालूम करना होगा। $T(t)$ पर $T_s(t)$ का प्रभाव जानने के लिए हम न्यूटन का शीतलन नियम (Newton's law of cooling) लागू कर सकते हैं, जबकि दिया हो कि हर समय $T_s(t) < T(t)$। इस नियम के अनुसार भवन के अंदर के तापमान $T(t)$ का परिवर्तन दर, $T(t)$ और बाहर के तापमान $T_s(t)$ के अंतर के समानुपाती होता है। इस तरह, $T_s(t)$ के कारण समय के सापेक्ष $T(t)$ की परिवर्तन दर $-k[T(t)-T_s(t)]$ होती है जहां k धन अचर है जो भवन के विविध भौतिक गुणधर्मों पर निर्भर करता है, जैसे कि भवन में दरवाज़ों और खिड़कियों की संख्या, भवन के रंग, भवन के इंसुलेशन (insulation) के प्रकार आदि पर। T_s, T या t, पर k निर्भर नहीं करता। ध्यान दीजिए कि k की विमा (dimension) समय के व्युत्क्रम (reciprocal) की विमा है। यहां हमने ऋण चिह्न का प्रयोग इसलिए किया है क्योंकि शीतलन की स्थिति में समय के साथ भवन का तापमान घटेगा। अब हम समस्या को गणितीय समस्या रूप में लिख सकते हैं और उसे हल कर सकते हैं।

न्यूटन के शीतलन नियम के अनुसार एक ठंडी हो रही वस्तु के तापमान की परिवर्तन दर वस्तु के तापमान और आस-पास के तापमान के अंतर के समानुपाती होती है, बशर्ते यह अंतर बहुत अधिक न हो।

चरण 3 : समस्या को गणितीय रूप में लिखना

अपने निदर्श से हमें निम्नलिखित प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण मिलता है :

$$\frac{dT(t)}{dt} = k[T_s(t) - T(t)] + H(t) \tag{4.1}$$

चरण 4 : गणितीय समस्या को हल करना

समीकरण (4.1) एक प्रथम कोटि रैखिक असमघात साधारण अवकल समीकरण है। इसे इकाई 1 के भाग 1.6 की विधि से हल किया जा सकता है। हम समीकरण (4.1) को निम्नलिखित मानक रूप में लिखते हैं

$$\frac{dT(t)}{dt} + P(t)T(t) = Q(t) \tag{4.2 क}$$

जहां

$$P(t) = k, \quad Q(t) = kT_s(t) + H(t) \tag{4.2 ख}$$

यहां समाकलन गुणक $\exp(\int k\,dt) = e^{kt}$ है। अतः समीकरण (4.2 क) का हल है :

$$T(t) = e^{-kt}\left[\int e^{kt}\{kT_s(t) + H(t)\}\,dt + C\right] \tag{4.3}$$

आइए हम समीकरण (4.3) को हल करने के लिए अपने निदर्श को और सरल करें। मान लीजिए कि $H(t)$ नगण्य है और $T_s(t)$ नियत रहता है। माना कि $T_s(t) = T_{s0}$ जहां T_{s0} अचर है। अतः निदर्श में $H(t) = 0$ और $T_s(t) = T_{s0}$ लेने पर हमें मिलता है

$$\begin{aligned} T(t) &= e^{-kt}\left[\int e^{kt}(kT_{s0})\,dt + C\right] \\ &= e^{-kt}[T_{s0}e^{kt} + C] = T_{s0} + Ce^{-kt} \end{aligned} \tag{4.4 क}$$

समीकरण (4.4 क), हमारे सरलीकृत निदर्श में समीकरण (4.1) का एक व्यापक हल है। समीकरण (4.4 क) को समीकरण (4.1) में प्रतिस्थापित करके, (जहां $H(t) = 0, T_s = T_{s0}$) आप हल की जांच कर सकते हैं। आइए अब हम C मालूम करने के लिए आदि प्रतिबंध लागू

करें और एक विशेष हल प्राप्त करें। मान लीजिए $t = 0$ पर $T = T_0$, तब

$$T_0 = T_{s0} + C \text{ या } C = T_0 - T_{s0}$$

इस तरह,

$$T(t) = T_{s0} + (T_0 - T_{s0})\, e^{-kt} \tag{4.4 ख}$$

आइए, अब हम इस हल का विवेचन करें।

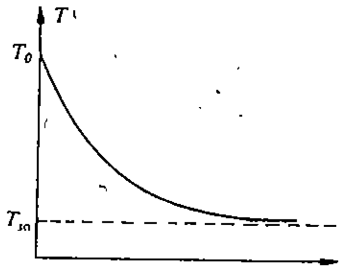
हल की जांच करना
समीकरण (4.4 क) को लेने पर, समीकरण (4.1) का वाम पक्ष $\frac{dT}{dt} = -kCe^{-kt}$ हो जाता है। और समीकरण (4.1) का दक्षिण पक्ष है $kT_{s0} - kT_{s0} - kCe^{-kt} = -kCe^{-kt}$ इस तरह वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

चरण 5 : हल का विवेचन करना

क्योंकि $T_{s0} < T_0$, इसलिए T_0 के प्रारंभिक मान से $T(t)$ में चरघातांकीय (exponential) रूप से कमी आती जाती है। t में वृद्धि होने पर चरघातांकीय पद शून्य की ओर और $T(t)$, T_{s0} की ओर प्रवृत्त होता है (चित्र 4.2 देखिए)। अब चरण 1 में दी गई समस्या को फिर से देखिए। आइए हम वह समय मालूम करें जिसमें कि तापमान अंतर $(T - T_{s0})$ का मान $(T_0 - T_{s0})$ से घटकर $\left(\frac{T_0 - T_{s0}}{e}\right)$ हो जाता है। इस समय को भवन का **कालांक** (time constant) कहा जाता है। समीकरण (4.4 ख) से

$$t = 0 \text{ पर } T - T_{s0} = T_0 - T_{s0}$$

और
$$t = 1/k \text{ पर } T - T_{s0} = \frac{T_0 - T_{s0}}{e}$$



चित्र 4.2

अतः भवन का कालांक $1/k$ है। इस तरह हम हल का विवेचन इस प्रकार कर सकते हैं : भवन के तापमान में कालांक $1/k$ के साथ चरघातांकीय रूप से कमी आती जाती है।

भवन के कालांक का प्रतिरूपी मान (typical value) 2 से 4 h होता है। यदि खिड़कियां खुली हुई हों या भवन में लगे पंखों के चलने से हवा का संचरण हो रहा हो, तो इसका मान और भी कम हो सकता है। आइए अब हम प्रक्रिया के अंतिम दो चरणों पर विचार करें।

चरण 6 : वास्तविकता के साथ तुलना करना

इस प्रकार के अनेक भवनों के आंकड़े इकट्ठे करके और अलग अलग कालांकों पर इस निदर्श के परिणामों की तुलना करके, वास्तविकता से इसकी तुलना की जा सकती है।

चरण 7 : परिणाम का प्रयोग करना

इस सरल निदर्श का प्रयोग भंडार, गोदाम या गैरेज जैसे भवनों के बनाने में किया जा सकता है। अंदर की गर्मी और समय के साथ बाहर के तापमान के परिवर्तन को ध्यान में रखकर इस निदर्श में और सुधार लाया जा सकता है। इसमें बाहरी तापन (हीटर) और शीतलन (कूलर या एयर कंडीशनर) के प्रभाव को भी शामिल किया जा सकता है।

इस भाग में आपने जो कुछ पढ़ा है, अब हम उसका एक संक्षिप्त विवरण यहां दे रहे हैं। हमने आपको गणितीय निदर्शन से परिचित कराया है जिसमें किसी समस्या विशेष को हल करने के लिए वास्तविकता का सरल गणितीय निरूपण किया जाता है। इस प्रक्रिया को सात चरणों में बांटा जा सकता है जैसा कि चित्र 4.1 में दिखाया गया है। फिर भी **यह आवश्यक नहीं है कि प्रत्येक निदर्शन प्रक्रिया में इस प्रकार का सात चरणों वाला तर्कसंगत अनुक्रम हमेशा ही मौजूद हो।** इन चरणों से केवल इस बात का पता चलता है कि आप चाहे जैसे भी गणितीय निदर्शन करें वह सदा ही एक तर्कसंगत अनुक्रम (logical sequence) में होना चाहिए। सबसे अच्छा तो यही रहता है कि शुरूआत हम एक सरल निदर्श से करें जिससे कि एक ऐसी गणितीय समस्या मिलती हो जिसे हल किया जा सके। निदर्शन प्रक्रिया को फिर से देखें और अपने निदर्श का परिशोधन तब तक करें जब तक कि वास्तविकता के साथ की गई तुलना संतोषजनक न हो जाए और आप परिणामों का प्रयोग कर सकें।

इन संकल्पनाओं की सहायता से अब आप अवकल समीकरणों पर आधारित गणितीय निदर्शन पर एक बोधप्रश्न को हल करने का प्रयास करें। परिकलन के लिए आपको एक लॉग टेबल या

कैलकुलेटर की सहायता लेनी पड़ सकती है ।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

स्टील के एक ढांचे को, जिसका तापमान $20^\circ C$ है, एक भट्टी में रखा गया है जिसका तापमान $200^\circ C$ है। एक मिनट के बाद ढांचे का तापमान $30^\circ C$ हो जाता है। समय के फलन के रूप में ढांचे का तापमान मालूम कीजिए। ढांचे के तापमान को $190^\circ C$ तक पहुंचने में कितना समय लगेगा ? (संकेत : जिस दर से स्टील का ढांचा ऊष्मा को अवशोषित करता है, वह ढांचे के तापमान और आसपास के तापमान अंतर के समानुपाती होती है।)

अब तक की चर्चा से आपने निदर्शन प्रक्रिया को अच्छी तरह समझ लिया होगा। और अब आप इसे भौतिकी की कुछ और समस्याओं पर लागू करना चाहेंगे। आइए हम कुछ ऐसे अनुप्रयोगों को लें जिनमें प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण आते हैं।

4.3 भौतिकी में प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण

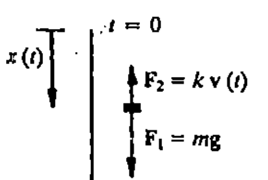
इकाई 1 में आप भौतिकी में प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण के दो सरल अनुप्रयोगों का अध्ययन कर चुके हैं। उदाहरण के लिए, आप रेडियोऐक्टिव क्षय और उदाहरण 5 में एल आर परिपथ (LR circuit) के बारे में पढ़ चुके हैं। भाग 4.2 के उदाहरण 1 में आपने न्यूटन के शीतलन नियम की सहायता से एक प्रक्रिया को निदर्शित किया है जिसमें प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण आता है। न्यूटनी यांत्रिकी (Newtonian mechanics), वैद्युत् परिपथ ऐसे अन्य क्षेत्र हैं जिनके गणितीय निदर्शन में प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों का प्रयोग किया जाता है। आइए हम इन क्षेत्रों में प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के अनुप्रयोगों का अध्ययन करें।

4.3.1 न्यूटनी यांत्रिकी में अनुप्रयोग

जैसा कि आप जानते हैं कि यांत्रिकी में वस्तुओं की गति और वस्तुओं पर लग रहे बलों के प्रभाव का अध्ययन किया जाता है। न्यूटनी यांत्रिकी (Newtonian mechanics) में उन वस्तुओं की गति का अध्ययन किया जाता है जो कि परमाणु की तुलना में काफ़ी बड़ी होती हैं और जो प्रकाश की चाल से काफ़ी कम चाल पर गतिमान होती हैं। न्यूटनी यांत्रिकी का निदर्श न्यूटन के गति नियमों पर आधारित होता है। इन नियमों और न्यूटनी यांत्रिकी की अन्य संकल्पनाओं की विस्तृत जानकारी पाने के लिए आप 'प्रारंभिक यांत्रिकी' (PHE-01) के भौतिकी पाठ्यक्रम का अध्ययन कर सकते हैं। यहां हम (i) वेग पर निर्भर प्रतिरोधी बलों के अधीन गति, और (ii) पलायन वेग (escape velocity) से संबंधित दो विशेष उदाहरणों पर विचार करेंगे।

वेग-आश्रित प्रतिरोधी बलों के अधीन गति

PHE-01 की इकाई 2 में हमने अवकल समीकरण को हल किए बिना इस समस्या पर गुणात्मक (quantitative) रूप से चर्चा की है (देखें उस इकाई का भाग 2.2.2)। प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों की जानकारी के आधार पर अब हम इसे हल कर सकते हैं। आइए हम निम्नलिखित समस्या पर विचार करें।



चित्र 4.3 : किसी क्षण t पर पैकेट पर लग रहे बल

750 m की ऊंचाई से एक हेलिकॉप्टर से, जो लगभग स्थिर रहता है, 60 kg के एक पैकेट को गिराया जाता है। गुरुत्वाकर्षण के कारण वह पृथ्वी की ओर गिरता है। पैकेट पर वायु प्रतिरोध के कारण एक बल गुरुत्व बल की विपरीत दिशा में लगता है (चित्र 4.3)। यह पैकेट के वेग के समानुपाती होता है, जहां आनुपातिकता अचर k है। बताइए कि जब वह ज़मीन पर गिरता है, उस समय उस का वेग क्या होता है ?

आइए इसे हम गणितीय निदर्शन की प्रक्रिया का प्रयोग करके चरणशः हल करें।

चरण 1

यहां विशेष समस्या है पैकेट का वेग और समय के फलन के रूप में उसकी स्थिति मालूम करना। तब हम इन फलनों में संख्याओं को प्रतिस्थापित करके अभीष्ट उत्तर प्राप्त कर सकते हैं।

चरण 2

इस स्थिति के निदर्शन के लिए हम न्यूटन के द्वितीय गति नियम को लागू कर सकते हैं। ऊर्ध्वाधर दिशा में पैकेट पर दो बल लग रहे हैं, एक अचर गुरुत्व बल $\mathbf{F}_1\ (= m\,\mathbf{g})$, जहां m पैकेट का द्रव्यमान है और दूसरा वायु प्रतिरोध के कारण वेग-आश्रित बल $\mathbf{F}_2\ (= k\,\mathbf{v})$। आइए हम ऊपर से नीचे की ओर की ऊर्ध्वाधर दिशा में धनात्मक x– अक्ष लें (चित्र 4.3)। क्योंकि $\mathbf{F}_2$, $\mathbf{F}_1$ की विपरीत दिशा में लग रहा है, इसलिए पैकेट पर लग रहे नेट बल का परिमाण (magnitude) होगा

$$F = mg - k\,v(t)$$

चरण 3

न्यूटन के दूसरे नियम के अनुसार पैकेट का गति समीकरण होगा

$$ma = m\,\frac{d^2x}{dt^2} = mg - kv$$

या

$$m\,\frac{dv}{dt} = mg - kv, \quad \left[\because\ v(t) = \frac{dx}{dt}\right] \tag{4.5}$$

समीकरण (4.5) एक प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण है और आप चर पृथक्करण विधि से (इकाई 1 का भाग 1.5.1) इसे हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 2

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

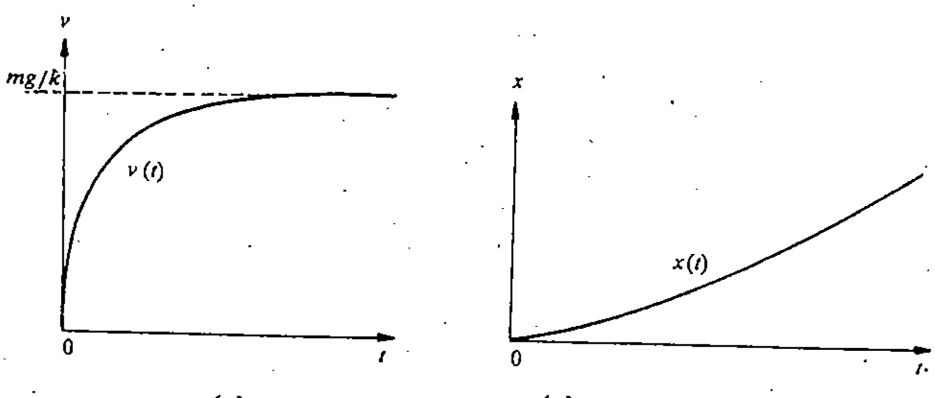
दिखाइए कि दिए हुए आदि प्रतिबंधों के संगत समीकरण (4.5) का विशेष हल $v(t)$ है

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}\exp(-kt/m) \tag{4.6 क}$$

चरण 4

$v = \dfrac{dx}{dt}$ का समाकलन करके $x(t)$ मालूम कीजिए और दिखाइए कि इसका विशेष हल है

$$x(t) = \frac{mg}{k}\,t - \frac{m^2 g}{k^2}\,(1 - \exp(-kt/m)) \tag{4.6 ख}$$



(क) (ख)

चित्र 4.4 : समय के एक फलन के रूप में गिरते हुए पैकेट की (क) चाल और (ख) स्थिति।

चरण 5

आइए अब हल का विवेचन इस विशिष्ट समस्या के संदर्भ में करें। समीकरण (4.6 क) और (4.6 ख) में दिए गए हल को चित्र 4.5 में दिखाया गया है। 750 m ऊंचाई से गिरने पर पैकेट द्वारा लिया गया समय t_1 मालूम करने के लिए हम $x(t_1) = 750\text{m}$ और $g = 9.81\ \text{m s}^{-2}$ लेते हैं। आइए हम k को कोई मान दे दें। मान लीजिए $k = 60\ \text{kg s}^{-1}$। इन मानों को समीकरण (4.6 ख) में रखने पर हमें मिलता है

$$750\ \text{m} = \frac{60\ \text{kg} \times 9.81\ \text{m s}^{-2}}{60\ \text{kg s}^{-1}}\,t_1\,\text{s} - \frac{(60)^2\,\text{kg}^2 \times 9.81\ \text{m s}^{-2}}{(60)^2\,\text{kg}^2\,\text{s}^{-2}}\left(1 - e^{-60\,\text{kg s}^{-1}\,t_1\,\text{s}/60\,\text{kg}}\right)$$

या $$750\text{m} = (9.81\,\text{ms}^{-1})t_1\,\text{s} - 9.81\,\text{m}\,(1 - e^{-t_1})$$

या $$750 = 9.81\,t_1 - 9.81\,(1 - e^{-t_1})$$

या $$t_1 + e^{-t_1} = \frac{750}{9.81} + 1 = \frac{759.81}{9.81} = 77.5$$

हम t_1 के लिए इस समीकरण को स्पष्ट रूप से हल नहीं कर सकते। पर, हम सन्निकटन विधि (approximation method) लागू कर सकते हैं। क्योंकि $t_1 \approx 77.5$ के लिए e^{-t_1} बहुत छोटा (~शून्य) होता है, इसलिए हम इस पद की उपेक्षा कर सकते हैं और अपने सन्निकटन में $t_1 = 77.5$s प्राप्त कर सकते हैं। $t_1 = 77.5$s पर पैकेट की चाल होगी

$$v(77.5\text{s}) = \frac{60\,\text{kg} \times 9.81\,\text{m s}^{-2}}{60\,\text{kg}\,s^{-1}} = 9.81\,\text{m s}^{-1}$$

चरण 6 और 7

वास्तविकता के साथ तुलना करने पर हमें वास्तविक स्थितियों के संगत k का कोई और मान लेना पड़ सकता है। इस प्रकार के अभ्यास का उपयोग बिना किसी नुकसान के पैकेट को सुरक्षित गिराने में किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, बाढ़ वाले क्षेत्रों में फंसे लोगों को राहत पहुंचाने के लिए खाने और दवाई के पैकेट गिराने, या सुदूर क्षेत्रों में उपकरण गिराने में यह अभ्यास काफ़ी उपयोगी सिद्ध हो सकता है।

आइए हम निम्नलिखित उदाहरण में, यांत्रिकी में प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के एक अन्य अनुप्रयोग पर विचार करें।

उदाहरण 2 : पृथ्वी से पलायन वेग

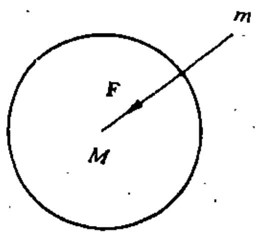
आपको याद होगा कि PHE-01 की इकाई 5 में हमने एक अन्य विधि लागू करके पलायन वेग का व्यंजक निकाला है।

पृथ्वी से एक प्रक्षेप्य (projectile) को त्रिज्य दिशा में छोड़ा जाता है। प्रक्षेप्य का निम्नतम आदि वेग मालूम कीजिए जिससे कि वह पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण से पलायन कर सके। वायु प्रतिरोध और अन्य खगोलीय पिंडों के गुरुत्वाकर्षण की उपेक्षा कर दीजिए।

हल

न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम से आप यह जानते हैं कि प्रक्षेप्य पर गुरुत्व बल होता है

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} = m\,a(r)\hat{\mathbf{r}}$$



चित्र 4.5 : पृथ्वी के केंद्र से दूरी r पर गुरुत्व बल $\mathbf{F}$

जहां $\mathbf{r}\,(= r\hat{\mathbf{r}})$ पृथ्वी के केन्द्र से प्रक्षेप्य का विस्थापन है। यहां M और m क्रमशः पृथ्वी और प्रक्षेप्य के द्रव्यमान हैं (चित्र 4.5)। अतः प्रक्षेप्य के त्वरण (acceleration) का परिमाण होगा

$$a(r) = \frac{dv(r)}{dt} = -\frac{GM}{r^2} \tag{4.7 क}$$

जहां v प्रक्षेप्य की चाल है।

आइए अब हम $a(r)$ को वेग के परिमाण और दूरी के पदों में व्यक्त करें। चूंकि v भी r का एक फलन है, इसलिए हम यह लिख सकते हैं कि

$$a(r) = \frac{dv(r)}{dt} = \frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}, \quad \left(\because\ v = \frac{dr}{dt}\right) \tag{4.7 ख}$$

समीकरण (4.7 ख) प्राप्त करने के लिए हमने यह श्रृंखला नियम (chain rule) लागू किया है कि अगर f, y का एक संतत, अवकलनीय (continuous, differentiable) फलन हो और y, x का एक संतत अवकलनीय फलन हो, तो

$$\frac{df}{dx} = \left(\frac{df}{dy}\right)\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

अतः समीकरण (4.7 क) हो जाता है

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2} \tag{4.8}$$

चर पृथक्करण विधि लागू करने पर हमें मिलता है

$$\int v\,dv = -GM\int\frac{dr}{r^2} + C'$$

अतः व्यापक हल होगा

$$v^2 = \frac{2GM}{r} + C \qquad (4.9\text{ क})$$

मान लीजिए कि $r = R$ पर प्रक्षेप्य का आदि वेग $v = v_0$ है। इस तरह $C = v_0^2 - \frac{2GM}{R}$ और विशेष हल हो जाता है

$$v^2 = \frac{2GM}{r} + v_0^2 - \frac{2GM}{R}$$

अब, प्रक्षेप्य पृथ्वी से पलायन कर जाए, इसके लिए यह आवश्यक है कि r के सभी मानों के लिए v धनात्मक बना रहे। समीकरण (4.9 ख) के दक्षिण पक्ष की जांच करने पर हम यह पाते हैं कि सदा ही $v = 0$ बना रहता है, यदि और केवल यदि

$$v_0^2 - \frac{2GM}{R} \geq 0 \qquad (4.10)$$

हम यहां समीकरण (4.9 ख) का ऋणात्मक मूल नहीं लेते, क्योंकि इससे भौतिक दृष्टि से सार्थक हल प्राप्त नहीं होता।

क्योंकि यदि $v_0^2 - \frac{2GM}{R} < 0$ हो तो r का एक ऐसा मान ज़रूर होगा जिसके लिए $v = 0$। ऐसी स्थिति में एक बिंदु पर प्रक्षेप्य रुक जाएगा, वेग v धनात्मक से ऋणात्मक हो जाएगा और प्रक्षेप्य पृथ्वी की ओर लौट आएगा।

मान लीजिए

$v_0^2 - \frac{2GM}{R} = v_1$

यदि $v_1 < 0$ तो समीकरण (4.9 ख) से

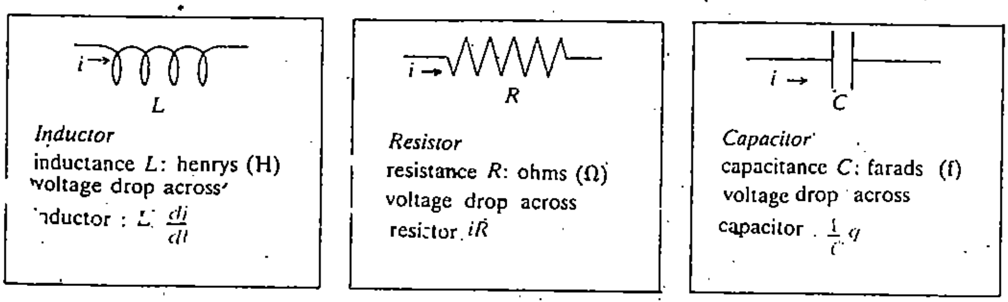
$v_1 = \frac{2GM}{r}$ के लिए $v = 0$.

इस तरह हम यह पाते हैं कि यदि प्रक्षेप्य को आदि वेग v_0 से छोड़ा जाए, जहां $v_0 \geq \sqrt{2GM/R}$ तो यह पृथ्वी से पलायन कर जाएगा। निम्नतम प्रक्षेप वेग (जिसका परिमाण $v_e = \sqrt{2GM/R}$ है) को **पलायन वेग** (velocity of escape) कहा जाता है।

अब हम सरल वैद्युत् परिपथों में प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों के अनुप्रयोग की चर्चा करेंगे।

4.3.2 सरल वैद्युत् परिपथ

आप अपने स्कूली पाठ्यक्रम में कुछ सरल वैद्युत् परिपथों के बारे में पढ़ चुके हैं जिनमें एक emf स्रोत, और प्रतिरोधक (resistor), संधारित्र (capacitor) या प्रेरक (inductor) होते हैं। यदि $i(t)$ समय t पर परिपथ में धारा को प्रकट करता हो तो एक वैद्युत् परिपथ में प्रतिरोधक, संधारित्र और प्रेरक पर वोल्टता ह्रास (voltage drops) को चित्र 4.6 में दिखाया गया है। यहां $q(t)$, किसी समय t पर संधारित्र पर आवेश है।



चित्र 4.6 : एक वैद्युत् परिपथ के अवयव

इस तरह, प्रतिरोधक पर वोल्टता ह्रास, $V_R = iR$

प्रेरक पर वोल्टता ह्रास, $V_L = L\frac{di}{dt}$

और

संधारित्र पर वोल्टता ह्रास, $V_C = \frac{q(t)}{C}$

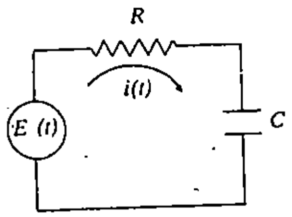
यहां R प्रतिरोधक का प्रतिरोध (resistance) है, L प्रेरक का स्वप्रेरकत्व (self-inductance) और C संधारित्र की धारिता (capacitance) है ।

आप जानते हैं कि किसी भी वैद्युत् परिपथ को एक अवकल समीकरण से निर्दर्शित किया जा सकता है जो कि किरखोफ के वोल्टता नियम (Kirchoff's voltage law) से प्राप्त होता है । आइए इन आधारभूत संकल्पनाओं को हम एक ए सी परिपथ (ac circuit) पर लागू करें जिसमें एक संधारित्र और प्रतिरोधक उपस्थित हों । इस परिपथ को आर सी परिपथ (RC circuit) के नाम से जाना जाता है ।

किरखोफ का वोल्टता नियम: किसी भी समय पर एक बंद परिपथ में वोल्टता ह्रास का बीजीय जोड़ शून्य होता है । यानी एक बंद परिपथ पर आरोपित वोल्टता, शेष परिपथ में वोल्टता ह्रासों के जोड़ के बराबर होती है ।

उदाहरण 3: आर सी परिपथ

emf के एक ज्यावक्रीय परिवर्ती (sinusoidally varying) स्रोत को एक श्रेणी आर सी परिपथ में लगाया गया है (चित्र 4.7)। समय के एक फलन के रूप में परिपथ की धारा मालूम कीजिए ।



चित्र 4.7: एक श्रेणी आर सी परिपथ जिसमें प्रतिरोधक और संधारित्र श्रेणी में संबंधित हैं ।

हल

किरखोफ नियम को लागू करके हम निम्नलिखित अवकल समीकरण से परिपथ का निदर्शन कर सकते हैं

$$Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E(t) \qquad (4.11\text{क})$$

क्योंकि $E(t)$ में ज्यावक्रीय परिवर्तन होता है, इसलिए

$$E(t) = E_0 \sin \omega t$$

क्योंकि $i(t) = \frac{dq}{dt}$ इसलिए समीकरण (4.11क) को R से भाग देकर इसे हम इस रूप में लिख सकते हैं

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{E_0}{R} \sin \omega t \qquad (4.11\text{ख})$$

आप इकाई 1 में (भाग 1.6.1 में उदाहरण 5) समीकरण (4.11 ख) के अनुरूप एक समीकरण को हल कर चुके हैं । अतः आप समीकरण (4.11ख) के हल को इस रूप में लिख सकते हैं

$$q(t) = \frac{E_0}{R} e^{-t/RC} \int e^{t/RC} \sin \omega t \, dt + C' e^{-t/RC}$$

या $$q(t) = \frac{E_0 C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \sin(\omega t - \theta) + C_1 e^{-t/RC} \qquad (4.12\text{क})$$

जहां $$\theta = \tan^{-1}(\omega C R) \qquad (4.12\text{ख})$$

अतः $$i(t) = \frac{dq}{dt} = \frac{E_0 \omega C}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} \cos(\omega t - \theta) + C_2 e^{-t/RC} \qquad (4.13)$$

t में वृद्धि होने पर समीकरण (4.13) के दक्षिण पक्ष के दूसरे पद में चरघातांकीय रूप से कमी आती जाती है । इसे **क्षणिक पद** (transient term) कहा जाता है । पहला पद अपरिवर्ती (steady-state) धारा को निरूपित करता है, और यह ज्यावक्रीय (sinusoidal) होता है ।

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 3

मान लीजिए कि चित्र 4.7 के परिपथ में $E(t)$ शून्य है । इस परिपथ में संधारित्र प्रतिरोधक के ज़रिए आवेश को विसर्जित करता है । मान लीजिए इसका आदि आवेश q_0 है । q_0, C और t के

पदों में इस पर आवेश $q(t)$ ज्ञात कीजिए ।

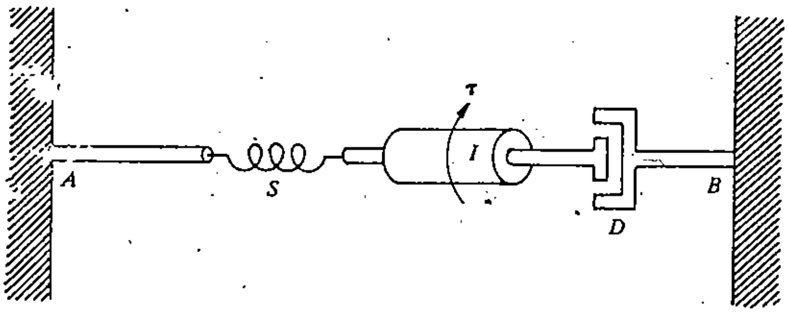
इस भाग में आपने भौतिकी में प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरण के कुछ अनुप्रयोगों का अध्ययन किया है । आइए अब हम कुछ ऐसी स्थितियों पर विचार करें जिनमें हमें भौतिक परिघटनाओं का निदर्शन करने के लिए द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों की आवश्यकता होती है ।

4.4 भौतिकी में द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण

इकाई 2 में आपने द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों की सहायता से स्प्रिंग-द्रव्यमान तंत्र (spring-mass system) की प्राकृतिक (natural), अवमंदित (damped) और प्रणोदित (forced) गति को निदर्शित किया है । आपने "प्रारंभिक यांत्रिकी" (PHE-01) और दोलन और तरंगें" (PHE-02) नामक भौतिकी पाठ्यक्रमों में द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के कुछ और अनुप्रयोग भी पढ़े हैं । इस भाग में हम द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों के कुछ ऐसे अनुप्रयोगों पर विचार करेंगे, जिनका अध्ययन शायद आपने अभी तक न किया हो ।

4.4.1 घूर्णी यांत्रिक तंत्र

आइए हम एक ऐसा यांत्रिक तंत्र लें जिसमें केवल एक नियत् अक्ष के प्रति घूर्णी गति संभव हो यानि कि जिसमें कोई स्थानांतरी गति न हो । इस तंत्र में एक रैखिक कमानी S, अचर जड़त्व आघूर्ण (moment of inertia) I वाला एक जड़त्वीय बेलनाकार अवयव (cylindrical element) और एक रैखिक अवमंदक D हैं (चित्र 4.8) । मोटर गाड़ियों के ब्रेकों और निलंबित कुंडली गैल्वेनोमीटरों (suspended coil galvanometer) को इसी प्रकार के तंत्रों से निदर्शित किया जा सकता है । इस तंत्र की गति के अध्ययन में हमें केवल कोणीय राशियों का ही प्रयोग करना होगा ।



चित्र 4.8 : घूर्णी यांत्रिक तंत्र, जिसमें हुक नियम (Hooke's law) **से नियंत्रित एक कमानी** (S), **एक जड़त्वीय बेलनाकार अवयव** (I) **और एक अवमंदन अवयव** (D) **हैं । यहां** AB **घूर्णन अक्ष है ।**

आइए हम एक नियत घूर्णन अक्ष AB के प्रति एक निर्देश तंत्र लें । मान लीजिए कि नियत अक्ष AB पर $\theta = 0$. अब मान लीजिए कि जड़त्वीय अवयव (बेलन) पर एक बाह्य बलआघूर्ण (torque) τ लगाया जाता है, जैसा कि चित्र में दिखाया गया है ।

न्यूटन के द्वितीय नियम के घूर्णी अनुरूप के अनुसार बेलन पर नेट बाह्य बलआघूर्ण उसके कोणीय संवेग (angular momentum) के परिवर्तन दर के बराबर है, अर्थात्

$$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I\frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}\left[\because \mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega} = I\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}\right] \qquad (4.14 \text{ क})$$

जड़त्वीय अवयव पर नेट बाह्य बलआघूर्ण है

$$\boldsymbol{\tau}_{ext} = \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau}_K + \boldsymbol{\tau}_B \qquad (4.14 \text{ ख})$$

जहां $\boldsymbol{\tau}_K$ कमानी द्वारा लगाया गया बलआघूर्ण है और $\boldsymbol{\tau}_B$ अवमंदक द्वारा लगाया गया बलआघूर्ण है ।

ये क्रमशः निम्नलिखित होते हैं

$\boldsymbol{\tau}_K = -K\boldsymbol{\theta}$ जहां K कमानी का कमानी स्थिरांक (spring constant) है। (4.14 ग)

और $\boldsymbol{\tau}_B = -B\boldsymbol{\omega} = -B\dfrac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$

तब,
$$I\,\frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2} = \boldsymbol{\tau} - B\frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt} - K\boldsymbol{\theta} \qquad (4.15\text{ क})$$

क्योंकि $\boldsymbol{\theta} = \theta\,\hat{\mathbf{AB}}$ और $\hat{\mathbf{AB}}$ घूर्णन अक्ष की दिशा में एक अचर सदिश है, इसलिए हम समीकरण (4.15 क.) को अदिश रूप में इस प्रकार भी लिख सकते हैं

$$I\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + B\frac{d\theta}{dt} + K\theta = \tau \qquad (4.15\text{ ख})$$

यह एक असमघात रैखिक द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण है। यदि हम निम्न प्रकार के दो आदि प्रतिबंधों को निर्धारित कर दें तो तंत्र का गणितीय निदर्श पूरा हो जाता है :

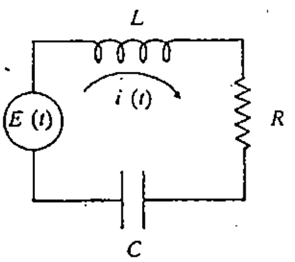
$$\theta(t_0) = C_0,\ \theta'(t_0) = C_1$$

अब आप दिए हुए प्रतिबंधों के अधीन इस समीकरण को हल करना चाहेंगे। नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

प्रश्न पर 15 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 4

समीकरण (4.15 ख) को हल कीजिए, जबकि यह दिया है कि $\tau = \tau_0 \cos\omega t$, $\theta(0) = 0$, $\theta'(0) = 0$. यदि $B = 0$ हो तो तंत्र की अनुनाद आवृत्ति (resonance frequency) ω_0 और हल $\theta(t)$ क्या होगा ? [संकेत : इकाई 2 के भाग 2.4.1 में बतायी गई विधि को लागू कीजिए]



चित्र 4.9 : एक सिग्नल $E(t)$ को एक एल सी आर परिपथ पर आरोपित किया गया है जो कि एक प्रेरक (L), प्रतिरोध (R) और संधारित्र (C) के अवयवों वाला एक वैद्युत् परिपथ है। यह अवयव एक दूसरे से श्रेणी में जुड़े हैं।

अब, क्योंकि आपने बोध प्रश्न 4 हल कर लिया है इसलिए आप घूर्णी तंत्र और एक एल सी आर परिपथ (*LCR* circuit) जिस पर ज्यावक्रीय ए सी सिग्नल आरोपित किया गया है, के बीच अनुरूपता देख सकते हैं और एल सी आर परिपथ का गणितीय निदर्शन भी कर सकते हैं (चित्र 4.9)। किरखोफ के वोल्टता नियम को लागू करके आप निम्नलिखित अचर गुणांकों वाले असमघात द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण द्वारा परिपथ का निदर्शन कर सकते हैं :

$$\frac{q}{C} + Ri + L\frac{di}{dt} = E(t) = E_0\cos\omega t$$

या
$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E_0\cos\omega t, \quad \left[\because\ i(t) = \frac{dq(t)}{dt}\right] \qquad (4.16)$$

आप यह देख सकते हैं कि इसका व्यापक हल समीकरण (4.15 ख) के व्यापक हल के अनुरूप होगा जो आपने बोध प्रश्न 4 में प्राप्त किया है। आइए अब हम यांत्रिकी में द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के एक अन्य अनुप्रयोग पर विचार करें।

4.4.2 ग्रहीय कक्षाएं

हम चाहेंगे कि आप इस भाग को पढ़ने से पहले भौतिकी के पाठ्यक्रम "प्रारंभिक यांत्रिकी" (PHE-01) की इकाईयां 4,6 और 7 पढ़ लें।

आइए हम द्रव्यमान M वाले सूर्य के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र में द्रव्यमान m वाले ग्रह की गति पर विचार करें। आइए हम यह मान लें कि सूर्य स्थिर है और यह भी मान लें कि इस ग्रह पर अन्य ग्रहों के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र का प्रभाव उपेक्षणीय (negligible) है। आपने PHE-01 की इकाई 6 में इस प्रश्न को दूसरी विधि से हल किया है। PHE-01 की इकाई 7 से आप यह जानते हैं कि हम ऊपर जो भी मान कर चले हैं वे अनुमान सही हैं। हम न्यूटन के द्वितीय नियम से इस तंत्र का निदर्शन

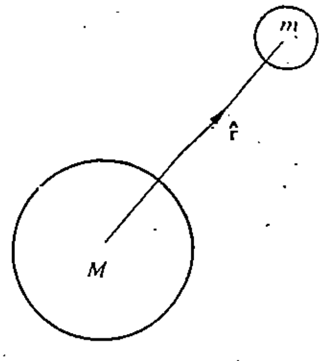
कर सकते हैं जिसके अनुसार

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

या
$$-\frac{GMm}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = m\,\mathbf{a} \qquad (4.17\,\text{क})$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}$ एकक सदिश (unit vector) है जिसकी दिशा सूर्य से ग्रह की ओर है (चित्र 4.10) । चूंकि $\mathbf{F}$ एक केन्द्रीय बल है, इसलिए ग्रह का कोणीय संवेग $\mathbf{L}$ अचर होगा । अतः इसकी गति एक समतल तक ही सीमित रहेगी और तब इस स्थिति में इस समीकरण को हल करने के लिए समतल ध्रुवी निर्देशांकों (plane polar coordinates) का प्रयोग अधिक सुविधाजनक होगा (PHE-04 की इकाई 3 या PHE-01 की इकाई 4 देखिए) । समतल ध्रुवी निर्देशांकों में त्वरण का व्यंजक होता है :

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$



चित्र 4.10: सूर्य के कारण पृथ्वी पर गुरुत्व बल है :

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

समीकरण (4.17 क) में $\mathbf{a}$ को प्रतिस्थापित करने पर हमें दो अवकल समीकरण मिलते हैं

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\frac{GMm}{r^2} \qquad (4.17\,\text{ख})$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \qquad (4.17\,\text{ग})$$

हम समीकरण (4.17 ग) को r से गुणा कर सकते हैं और इसे इस रूप में लिख सकते हैं

$$\frac{d}{dt}(mr^2\dot{\theta}) = 0$$

जिसका समाकलन करने पर हमें मिलता है

$$mr^2\dot{\theta} = \text{अचर}$$

यहां आप सिद्ध कर सकते हैं कि $mr^2\dot{\theta}$ सूर्य के प्रति ग्रह के कोणीय संवेग का परिमाण है । आप जानते हैं कि $\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = mr\,\hat{\mathbf{r}}\times(\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}) = mr^2\dot{\theta}\,(\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}}) = mr^2\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{k}}$ जहां $\hat{\mathbf{k}}$ एक एकक सदिश है, जो $\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ दोनों पर अभिलंब है । इस तरह,

$$mr^2\dot{\theta} = L$$

अब हमें अंतरिक्ष में ग्रह का पथ यानि इसकी कक्षा (orbit) का आकार मालूम करने के लिए समीकरण (4.17 ख) को हल करना होगा ।

अतः हमें θ के एक फलन के रूप में r ज्ञात करना होगा । इसके लिए पहले हमें समीकरण (4.17 ख) और (4.17 ग) से t का निरसन करना पड़ेगा । आइए यहां हम इन समीकरणों में निम्नलिखित प्रतिस्थापन करें

$$r = \frac{1}{u} \text{ और } \frac{d\theta}{dt} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{m}u^2$$

तब t के सापेक्ष r का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt} = -\frac{1}{u^2}\left(\frac{du}{d\theta}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{L}{m}\left(\frac{du}{d\theta}\right)$$

इसका फिर से अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{L}{m}\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = -\frac{L^2}{m^2}u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

इस तरह, समीकरण (4.17 ख) हो जाता है

$$-\frac{L^2}{m}u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2} + u\right) = -\frac{GMm}{r^2} = -GMm\,u^2$$

या $$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GMm^2}{L^2} = A \tag{4.18 क}$$

यह भी एक असमघात रैखिक द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण है। पर, यहां $u' = u - A$ प्रतिस्थापित करके हम इस समीकरण की असमघातता को दूर कर सकते हैं। तब समीकरण (4.18 क) हो जाता है

$$\frac{d^2u'}{d\theta^2} + u' = 0 \tag{4.18 ख}$$

इसका व्यापक हल है

$$u' = B\cos(\theta - \theta_0)$$

या $$u' = A + B\cos(\theta - \theta_0)$$

यहां θ_0 कला पश्चता (phase lag) को प्रदर्शित करता है। अतः अक्ष के मूल बिंदु का उपयुक्त विस्थापन करके हम $\theta_0 = 0$ ले सकते हैं। इस तरह, हमें मिलता है

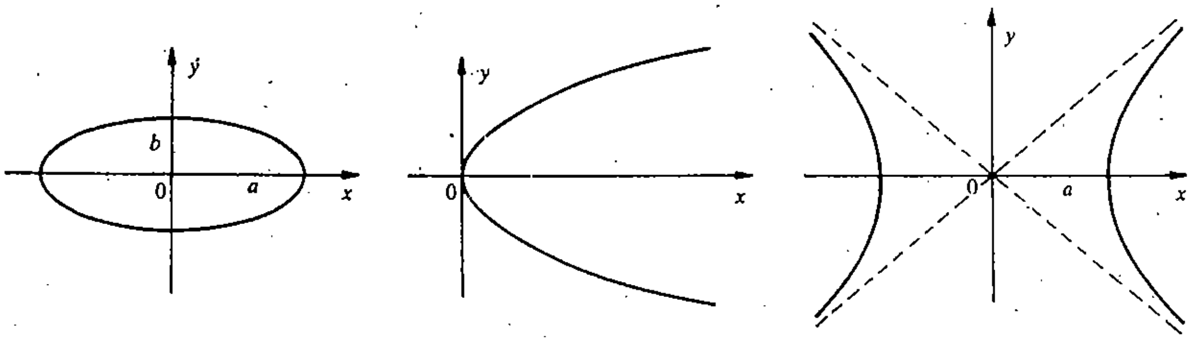
$$u = A + B\cos\theta \text{ या } \frac{1}{r} = A + B\cos\theta \tag{4.19}$$

यह एक शांकव परिच्छेद (conic section, यानि कि दीर्घवृत्त, परवलय या अतिपरवलय) का समीकरण है जिसकी नाभि (focus) $r = 0$ पर है (चित्र 4.11). A और B के बीच के संबंध से कक्षा का आकार मालूम हो जाता है।

यदि $A > B$, तो कक्षा एक दीर्घवृत्त (ellipse) होती है.

$A = B$ तो कक्षा एक परवलय (parabola) होती है

$0 < A < B$ तो कक्षा, एक अतिपरवलय (hyperbola) होती है



(क) (ख) (ग)
चित्र 4.11 : (क) दीर्घवृत्त; (ख) परवलय; (ग) अतिपरवलय

ऊर्जा संबंधी तथ्यों का प्रयोग करके ग्रहीय कक्षाओं के लिए अचर B का मान निकाला जा सकता है। B का मान PHE-01 की इकाई 6 में एक अलग तरीक़े से निकाला गया है, जिसके अनुसार

$$B^2 = \frac{m^2(GmM)^2}{L^4} + \frac{2mE}{L^2}$$

अभी तक हमने द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण के संदर्भ में केवल आदि-मान समस्या (initial-value problem) पर विचार किया है अर्थात् आदि प्रतिबंध निर्धारित करके इन अवकल समीकरणों को हल किया है। कुछ भौतिक स्थितियों में हमें परिसीमा-मान समस्याएं (boundary-value problems) देखने को मिलती हैं। अभी तक आपने जो कुछ पढ़ा है उसके आधार पर इस

प्रकार की समस्या को आप स्वयं हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 5

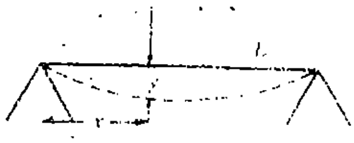
प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

लंबाई L वाला एक दंड (beam) अपने सिरों के सहारे टिका हुआ है और इसका प्रति एकक लंबाई भार w kg है (चित्र 4.12)। दंड के विक्षेपण (deflection) को निर्धारित करने वाला साधारण अवकल समीकरण है :

$$C \frac{d^2y}{dx^2} = w\left(\frac{x^2}{2} - \frac{Lx}{2}\right),$$

जहां C एक अचर है, जो दंड के पदार्थ की प्रत्यास्थता (elasticity) और उसकी बनावट (geometry) पर निर्भर करता है।

इस समीकरण को हल कीजिए, जबकि दिया हुआ है कि जब $x = 0$ तब $y = 0$ और जब $x = L$ तब $y = 0$.



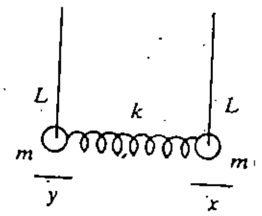
चित्र 4.12 : दंड का विक्षेपण

अभी तक हमने साधारण अवकल समीकरणों के उन अनुप्रयोगों पर विचार किया है जिनमें एक एकल (single) अवकल समीकरण, निदर्शित किए जाने वाले तंत्र को निरूपित करता है। अब मान लीजिए हम ऐसे तंत्र की गति का अध्ययन करना चाहते हैं जिसमें दो से अधिक गतिमान पिंड उपस्थित हों। ऐसी स्थितियों में हमें एक से अधिक चरों में श्रृंखलित (linked) यानि युग्मित अवकल समीकरणों (coupled differential equations) को हल करना पड़ेगा। आइए अब हम इस इकाई के अंतिम भाग में ऐसे कुछ अनुप्रयोगों पर विचार करें।

4.5 युग्मित अवकल समीकरणें

अनेक भौतिक समस्याओं के गणितीय निदर्शन में युग्मित अवकल समीकरण आते हैं। आइए हम युग्मित अवकल समीकरणों द्वारा निदर्शन के कुछ ऐसे अनुप्रयोगों पर विचार करें जो भौतिकी में आम तौर पर पाए जाते हैं। ये अनुप्रयोग यांत्रिकी में युग्मित दोलकों से, युग्मित वैद्युत् परिपथों से, और वैद्युत् तथा चुंबकीय क्षेत्रों में इलेक्ट्रानों की गति से संबंधित हैं।

4.5.1 युग्मित दोलक



चित्र 4.13 : कमानी स्थिरांक k वाली एक कमानी से युग्मित, ठीक एक जैसे दो गोलक। प्रत्येक गोलक, जिसका द्रव्यमान m है, लंबाई L वाले हल्के दृढ़ दंड से लटका है जिसे भारहीन माना जा सकता है। कमानी की प्राकृतिक लंबाई शून्य विस्थापन पर द्रव्यमानों के पृथकरण के बराबर है।

अगर आपने "दोलन और तरंगें" पाठ्यक्रम पढ़ा है तो आप युग्मित दोलकों के (coupled oscillators) के बारे में ज़रूर जानते होंगे। चित्र 4.13 में ठीक एक जैसे दो लोलक (pendulums) दिखाए गए हैं, जिनमें से प्रत्येक के गोलक (bob) का द्रव्यमान m है। प्रत्येक गोलक लंबाई L वाले एक दृढ़ भारहीन दंड से लटका है। ये गोलक, कमानी स्थिरांक k वाली एक कमानी से जुड़े हुए हैं। कमानी की प्राकृतिक लंबाई उस स्थिति में द्रव्यमानों के बीच की दूरी के बराबर होती है, जबकि दोनों द्रव्यमान साम्यावस्था (equilibrium) की स्थिति में हों। ऐसे तंत्र का प्रयोग एक क्रिस्टल लैटिस (crystal lattice) में दो परमाणुओं के कंपनों (vibrations) के निदर्शन में किया जा सकता है। इन परमाणुओं पर परस्पर युग्मन बल (mutual coupling force) लगता है।

आइए हम यह मान लें कि दोलनों का आयाम (amplitude) काफ़ी कम है और इन्हें कागज़ के समतल में सीमित रखा गया है। यदि x और y द्रव्यमानों के विस्थापन हों, तो युग्मित दोलकों के गति समीकरण (PHE-02 का खंड 1 देखिए) होंगे :

$$m\ddot{x} = -mg\frac{x}{L} - k(x-y) \qquad (4.20\text{क})$$

और

$$m\ddot{y} = -mg\frac{y}{L} + k(x-y) \qquad (4.20\text{ख})$$

साधारण अवकल समीकरण

ये अवकल समीकरण प्रत्येक लोलक की सामान्य सरल आवर्त गति (simple harmonic motion) और कमानी से संबंधित एक युग्मन पद (coupling term) $k(x-y)$ के जोड़ को निरूपित करते हैं। $\omega_0 = \sqrt{g/L}$ लिखने पर, जहां ω_0 प्रत्येक लोलक की प्राकृतिक कोणीय आवृत्ति है, हमें मिलता है

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{k}{m}(x-y) \tag{4.20 ग}$$

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = \frac{k}{m}(x-y) \tag{4.20 घ}$$

आप यहां यह देख सकते हैं कि इन साधारण अवकल समीकरणों में से x के अवकल समीकरण में चर y मौजूद है और y के अवकल समीकरण में चर x मौजूद है यानि कि ये समीकरणें एक दूसरे से युग्मित हैं। चूंकि प्रत्येक समीकरण में x और y दोनों ही उपस्थित हैं, इसलिए इन्हें स्वतंत्र रूप से हल नहीं किया जा सकता। हां, हम इन समीकरणों का वियुग्मन (decoupling) करके इन्हें हल कर सकते हैं। इसके लिए हम दो अन्य उपयुक्त निर्देशांक x और y लेकर जहां

$$X = x+y, \quad Y = x-y$$

X और Y में दो स्वतंत्र समीकरणें प्राप्त कर सकते हैं।

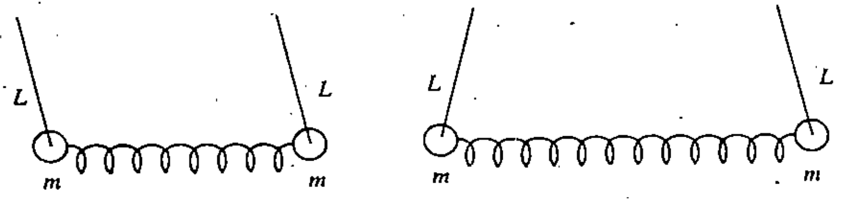
अब क्यों न आप स्वयं ही इस प्रतिस्थापन की मदद से वियुग्मन करके इन्हें हल करें?

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 6

समीकरण (4.20 ग) और (4.20 घ) से नए चरों X और Y में दो अवकल समीकरण प्राप्त कीजिए और उन्हें हल कीजिए। [संकेत : समीकरणों को जोड़िए और एक समीकरण में से दूसरे समीकरण को घटाइए।]

अपने हल से आप यह देख सकते हैं कि यदि $Y = 0$ तो प्रत्येक समय पर $x = y$ होता है अर्थात् लोलक सदा ही समकला दोलन (in-phase oscillations) करते हैं। तब समीकरण $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ से गति पूरी तरह से निर्धारित हो जाती है। इस पर युग्मन का कोई प्रभाव नहीं होता और दोलन की आवृत्ति वही होती है जो अकेले ही किसी लोलक के दोलन की होती है।



(क) (ख)

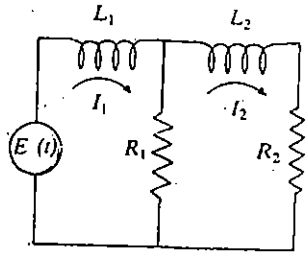
चित्र 4.14 : (क) $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ **द्वारा निर्धारित 'समकला विधा'** (in-phase mode) **में दोलन जहां** X **सामान्य निर्देशांक** (normal coordinate) $X = x+y$ **है**, $\omega_0^2 = g/L$ **और (ख)** $\ddot{Y} + (\omega_0^2 + 2k/m)Y = 0$ **द्वारा निर्धारित 'कला बाह्य विधा'** (out of phase mode) **में दोलन जहां** Y **सामान्य निर्देशांक** $Y = x-y$ **है।**

यदि $X = 0$ तो प्रत्येक क्षण पर $x = -y$ और लोलक सदा ही कला बाह्य (out of phase) होते हैं, तथा गति समीकरण $\ddot{Y} + \left(\omega_0^2 + \frac{2k}{m}\right) Y = 0$ होता है। इस पर अब युग्मन का प्रभाव होता है, और कमानी या तो सिकुड़ जाती है या फैल जाती है (चित्र 4.14 ख) और तब दोलन की आवृत्ति ω_0 से अधिक हो जाती है।

आइए अब वैद्युत् परिपथों से संबंधित एक उदाहरण पर विचार करें जिसमें युग्मित समीकरण आते हैं।

4.5.2 युग्मित वैद्युत् परिपथ

एक वैद्युत् परिपथ में दो पाश (loops) एक प्रतिरोधी युग्मन (resistive coupling) के ज़रिए एक दूसरे से जुड़े हुए हैं (चित्र 4.15)। बाएं और दाएं पाशों पर किरखोफ नियम लागू करने पर हमें मिलता है, क्रमशः



चित्र 4.15 : प्रतिरोध द्वारा युग्मित आर एल वैद्युत् परिपथ

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 (I_1 - I_2) = E(t) \tag{4.21 क}$$

$$L_2 \frac{dI_2}{dt} + R_2 I_2 + R_1 (I_2 - I_1) = 0 \tag{4.21 ख}$$

यहां हमने इस बात का प्रयोग किया है कि R_1 में प्रवाहित धारा बांए पाश के सापेक्ष $(I_1 - I_2)$ होती है और दांए पाश के सापेक्ष $(I_2 - I_1)$ होती है। यहां भी ये समीकरणें युग्मित हैं। हम इन समीकरणों से या तो I_1 का या I_2 का निरसन कर सकते हैं। आइए हम समीकरणों (4.21 क) और (4.21 ख) को इस प्रकार लिखें

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1 I_1 - R_1 I_2 = E(t) \tag{4.21ग}$$

और

$$-R_1 I_1 + L_2 \frac{dI_2}{dt} + (R_1 + R_2) I_2 = 0 \tag{4.21 घ}$$

समीकरण (4.21 ग) को R_1 से गुणा करने और समीकरण (4.21 घ) पर $\left(L_1 \frac{d}{dt} + R_1\right)$ की संक्रिया लागू करने पर हमें मिलता है

$$R_1 L_1 \frac{dI_1}{dt} + R_1^2 I_1 - R_1^2 I_2 = R_1 E(t)$$

और

$$-R_1 L_1 \frac{dI_1}{dt} - R_1^2 I_1 + L_1 L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + R_1 L_2 \frac{dI_2}{dt}$$

$$+ (R_1 + R_2) L_1 \frac{dI_2}{dt} + R_1 (R_1 + R_2) I_2 = 0$$

इन दो समीकरणों को जोड़ने पर हमें मिलता है

$$L_1 L_2 \frac{d^2 I_2}{dt^2} + (R_1 L_1 + R_1 L_2 + R_2 L_1) \frac{dI_2}{dt} + R_1 R_2 I_2 = R_1 E(t) \tag{4.22}$$

समीकरण (4.22) अचर गुणांकों वाला एक द्वितीय कोटि असमघात रैखिक साधारण अवकल समीकरण है। आप क्यों नही L_1, L_2, R_1, R_2 और $E(t)$ के कुछ दिए हुए मानों के लिए इसे हल करते ?

बोध प्रश्न 7

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

यदि $L_1 = L_2 = 2$ H, $R_1 = 3\,\Omega$, $R_2 = 8\Omega$ और $E(t) = 6$ V तो $I_2(t)$ के लिए समीकरण (4.22) को हल कीजिए। यहां यह मान लीजिए कि शुरू में परिपथ धारा शून्य है। समीकरण (4.21 घ) से $I_1(t)$ ज्ञात कीजिए।

4.5.3 वैद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों में आवेशित कणों की गति

आपने विद्यालय के भौतिकी के पाठ्यक्रम में लोरेन्ट्स बल (Lorentz force) के बारे में अवश्य पढ़ा होगा। आप जानते हैं कि वैद्युत् क्षेत्र $\mathbf{E}$ और चुंबकीय क्षेत्र $\mathbf{B}$ में गतिमान आवेश q पर निम्नलिखित बल लगता है

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (4.23\text{क})$$

अतः न्यूटन के द्वितीय गति नियम से इसका गति समीकरण होगा

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (4.23\text{ ख})$$

यहां हम केवल नियत (constant) विद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों पर विचार करेंगे, अर्थात् हम केवल उन क्षेत्रों पर विचार करेंगे जो समय के साथ बदलते नहीं और समष्टि के हर उस बिंदु पर, जहां उनका अस्तित्व है, उनका मान समान रहता है। आइए हम कुछ विशिष्ट स्थितियों के लिए इस गति समीकरण (समीकरण 4.23 ख) को हल करें।

एकसमान स्थिर वैद्युत क्षेत्र

आइए पहले उस स्थिति पर विचार करें जिसमें बाह्य चुंबकीय क्षेत्र शून्य है यानि आवेश केवल एकसमान स्थिर वैद्युत क्षेत्र (uniform electrostatic field) $\mathbf{E}$ में गतिमान है। तब, समीकरण (4.23 ख) हो जाएगा

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}\mathbf{E} \qquad (4.24\text{ क})$$

चूंकि $\mathbf{E}$ अचर है, इसलिए उत्तरोत्तर समाकलन (successive integration) करने पर हमें मिलता है

$$\mathbf{v}(t) = \frac{q\mathbf{E}}{m}t + \mathbf{v}_0 \qquad (4.24\text{ख})$$

और $$\mathbf{r}(t) = \frac{q\mathbf{E}}{2m}t^2 + \mathbf{v}_0 t + \mathbf{r}_0 \qquad (4.24\text{ ग})$$

यहां $\mathbf{v}_0$ और $\mathbf{r}_0$ समाकलन अचर हैं जिन्हें दिए हुए आदि प्रतिबंधों को लागू करके निकाला जा सकता है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि आवेशित कण अचर त्वरण $q\mathbf{E}/m$ से $\mathbf{E}$ की दिशा में (जबकि $q > 0$) और $\mathbf{E}$ की विपरीत दिशा में (जबकि $q < 0$) गतिमान होता है।

एकसमान स्थिर चुंबकीय क्षेत्र

जब वैद्युत् क्षेत्र शून्य होता है, तब समीकरण (4.23 ख) से एकसमान स्थिर चुंबकीय क्षेत्र (uniform magnetostatic field) में गतिमान आवेश का गति समीकरण हो जाता है

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \qquad (4.25)$$

आइए हम इस समीकरण को हल करने के लिए कार्तीय निर्देश तंत्र (Cartesian coordinate system) का प्रयोग करें। मान लीजिए z-अक्ष $\mathbf{B}$ के अनुदिश है, अर्थात् $\mathbf{B} = B\hat{\mathbf{k}}$। हम समीकरण (4.25) को इस रूप में लिख सकते हैं

$$m\frac{d}{dt}(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}) = q(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}) \times B\hat{\mathbf{k}}$$
$$= -q v_x B\hat{\mathbf{j}} + qBv_y\hat{\mathbf{i}}$$

प्रत्येक घटक (component) को अलग अलग लेने पर हमें मिलता है

$$m\frac{dv_x}{dt} = qBv_y \qquad (4.26 क)$$

$$m\frac{dv_y}{dt} = -qBv_x \qquad (4.26 ख)$$

$$m\frac{dv_z}{dt} = 0 \qquad (4.26 ग)$$

यहां भी समीकरण (4.26 क) और (4.26 ख) युग्मित हैं। हम इन्हें वियुग्मित (decouple) करके हल कर सकते हैं। समीकरणों (4.26 क) और (4.26 ख) का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$m\frac{d^2v_x}{dt^2} = qB\frac{dv_y}{dt} = -\frac{q^2B^2}{m}v_x$$

या $$\frac{d^2v_x}{dt^2} + \omega_C^2 v_x = 0 \text{ जहां } \omega_C = \frac{qB}{m}$$

आप इस समीकरण के हल से अच्छी तरह से परिचित हैं। यह है

$$v_x = C_1 \sin \omega_C t + C_2 \cos \omega_C t$$

C_1 और C_2 की विमाएं वहीं हैं जो कि चाल की हैं। सुविधा के लिए हम v_x को इस रूप में लिख सकते हैं

$$v_x = v_\perp \sin(\omega_C t + \phi)$$

जहां $C_1 = v_\perp \cos\phi$, $C_2 = v_\perp \sin\phi$। अब समीकरण (4.26क) से v_y के लिए हमें मिलता है

$$v_y = \frac{1}{\omega_C}\frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\omega_C}\omega_C v_\perp \cos(\omega_C t + \phi) = v_\perp \cos(\omega_C t + \phi)$$

ध्यान दीजिए कि $v_x^2 + v_y^2 = v_\perp^2$. v_z का मान समीकरण (4.26 ग) का समाकलन करने से मिलता है :

$$v_z = v_{\parallel}$$

जहां $v_{\parallel}$ एक स्वेच्छ अचर (arbitrary constant) है जिसकी विमा वही है जो चाल की है। आप यहां यह देख सकते हैं कि यह z-अक्ष के समांतर $\mathbf{v}$ का घटक है। इस तरह,

$$\mathbf{v} = v_\perp[\sin(\omega_C t + \phi)\hat{\mathbf{i}} + \cos(\omega_C t + \phi)\hat{\mathbf{j}}] + v_{\parallel}\hat{\mathbf{k}} \qquad (4.27 क)$$

क्योंकि $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, इसलिए t के सापेक्ष $\mathbf{v}$ का समाकलन करने पर हमें मिलता है

$$\mathbf{r} = \frac{v_\perp}{\omega_C}[-\cos(\omega_C t + \phi)\hat{\mathbf{i}} + \sin(\omega_C t + \phi)\hat{\mathbf{j}}] + v_{\parallel} t\hat{\mathbf{k}} + \mathbf{R}_0 \qquad (4.27 ख)$$

जहां $\mathbf{R}_0$ एक समाकलन अचर सदिश है। यह समीकरण (4.25 क) का एक व्यापक हल है। अब आप दिए हुए आदि प्रतिबंधों के अधीन इसका विशेष हल (particular solution) निकालिए। इस प्रक्रिया में आपको कुछ दिलचस्प जानकारी मिलेगी।

बोध प्रश्न 8

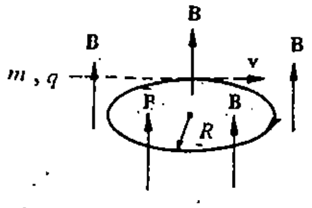
प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

$\mathbf{v}$ और $\mathbf{r}$ के लिए विशेष हल प्राप्त कीजिए जबकि यह दिया हुआ है कि $B = 10^{-2}$ tesla, $q = 1.6 \times 10^{-19}$ C, $m = 1.6 \times 10^{-24}$ kg और

(i) $\mathbf{v}(0) = (2000\ \text{ms}^{-1})\hat{\mathbf{i}}$, $\mathbf{r}(0) = 2\ \text{m}\ \hat{\mathbf{j}}$

(ii) $\mathbf{v}(0) = (2000\ \text{ms}^{-1})(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}})$, $\mathbf{r}(0) = 2\ \text{m}\ \hat{\mathbf{j}}$

अब, जबकि आपने विशेष हल प्राप्त कर लिया है, आप इस हल का विवेचन कर सकते हैं। स्थिति (i) में आप यह पाते हैं कि $\mathbf{v}(0)$, $\mathbf{B}$ के लंबवत् है अर्थात् चुंबकीय क्षेत्र $\mathbf{B}$ में प्रवेश के क्षण पर



चित्र 4.16 : एक एकसमान चुंबकीय क्षेत्र B में एक आवेशित कण की गति जबकि कण चुंबकीय क्षेत्र B में, B के लंबवत् प्रवेश करता है।

कण **B** के लंबवत् गतिमान है। इस स्थिति में $\mathbf{r}(t)$ के द्वारा दिया गया कण की स्थिति का समीकरण xy समतल में वृत्त का समीकरण है। यानि कि जब आवेशित कण चुंबकीय क्षेत्र में, क्षेत्र की दिशा के लंबवत् एक समतल में प्रवेश करता है तो वह उस समतल में वर्तुल पथ में गतिमान होता है (चित्र 4.16)।

स्थिति (ii) में, $\mathbf{v}(0)$, **B** के लंबवत् नहीं है, अर्थात् जब कण क्षेत्र में प्रवेश करता है तब वह क्षेत्र से एक कोण ($\neq 90°$) बनाते हुए गतिमान होता है। $\mathbf{v}(t)$ के विशेष हल में उसका z घटक अर्थात् **B** के समान्तर अचर घटक उपस्थित होता है। **v** के **B** पर अभिलंबवत् घटक [अर्थात् $\mathbf{v}_\perp = (v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}})$] से त्रिज्या $R = \frac{v_\perp}{\omega_c} = \frac{mv_\perp}{qB}$ वाली वर्तुल गति प्राप्त होती है। अतः चुंबकीय क्षेत्र **B** में कण की संयोजित गति, कुंडली (helix) के आकार के पथ में होती है। बोध प्रश्न 8 को हल कर लेने और इसके परिणामों का विवेचन कर लेने के कारण अब आप समीकरण (4.27 क) और (4.27 ख) का व्यापक विवेचन आसानी से समझ सकेंगे। हम यह विवेचन ज्ञान वृद्धि की दृष्टि से संक्षेप में दे रहे हैं। **इस पर आपसे सत्रीय कार्य या परीक्षा में कोई प्रश्न नहीं पूछे जाएंगे।**

मान लीजिए $t = 0$ पर $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 = x_0\hat{\mathbf{i}} + y_0\hat{\mathbf{j}} + z_0\hat{\mathbf{k}}$

तब आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि

$$\mathbf{R}_0 = \mathbf{r}_0 + \frac{v_\perp}{\omega_C}\cos\phi\,\hat{\mathbf{i}} - \frac{v_\perp}{\omega_C}\sin\phi\,\hat{\mathbf{j}}$$

या

$$\mathbf{R}_0 = \left(x_0 + \frac{v_\perp}{\omega_C}\cos\phi\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(y_0 - \frac{v_\perp}{\omega_C}\sin\phi\right)\hat{\mathbf{j}} + z_0\hat{\mathbf{k}}$$

अतः $\mathbf{r}(t)$ के कार्तीय घटक होंगे

$$x(t) = -\frac{v_\perp}{\omega_C}\cos(\omega_C t + \phi) + X_0$$

$$y(t) = \frac{v_\perp}{\omega_C}\sin(\omega_C t + \phi) + Y_0$$

$$z(t) = v_\parallel t + z_0$$

जहां $X_0 = x_0 + \frac{v_\perp}{\omega_C}\cos\phi$ और $Y_0 = y_0 - \frac{v_\perp}{\omega_C}\sin\phi$

$x(t)$ और $y(t)$ के लिए इन समीकरणों को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

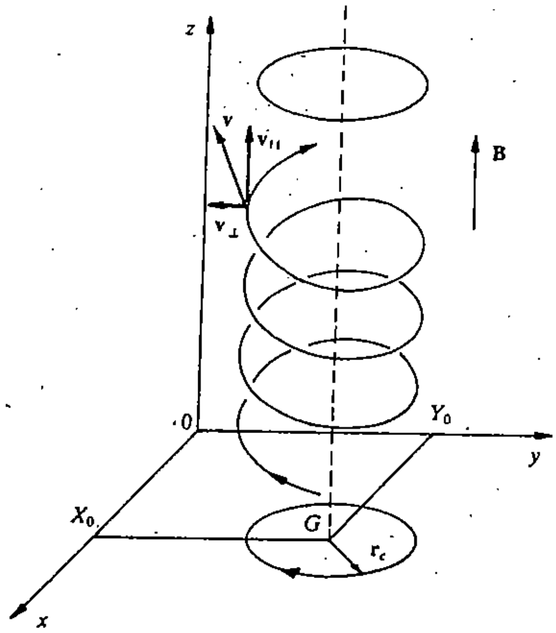
$$(x - X_0) = -\frac{v_\perp}{\omega_C}\cos(\omega_C t + \phi)$$

$$(y - Y_0) = \frac{v_\perp}{\omega_C}\sin(\omega_C t + \phi)$$

इन समीकरणों को जोड़ने और वर्ग करने पर हमें मिलता है

$$(x - X_0)^2 + (y - Y_0)^2 = \frac{v_\perp^2}{\omega_C^2} = r_C^2$$

इस तरह, आवेशित कण का पथ (trajectory), **B** के लंबवत् समतल में एक वृत्त होता है, जिसका केन्द्र (X_0, Y_0) पर है और जिसकी त्रिज्या r_C है। बिंदु (X_0, Y_0) अर्थात् कण से दूरी r_C पर स्थित बिंदु G को **निर्देशक केन्द्र** (guiding centre) कहा जाता है (चित्र 4.17 देखिए)। कक्षा की त्रिज्या $\left(r_C = \frac{v_\perp}{\omega_C} = \frac{mv_\perp}{qB}\right)$ को **परिभ्रमण त्रिज्या** (radius of gyration) या **लारमोर त्रिज्या** (Larmor radius) कहा जाता है। कोणीय आवृत्ति $\omega_C\left(= \frac{qB}{m}\right)$ को **परिभ्रमण आवृत्ति** (gyrofrequency) या **लारमोर आवृत्ति** (Larmor frequency) कहा जाता है। चूंकि **B** के समांतर भी कण के वेग का एक घटक होता है, इसलिए यह एक कुंडलिनी पथ (helical path) में गतिमान होता है।



चित्र 4.17 : एकसमान चुंबकीय क्षेत्र में गतिमान एक आवेशित कण का कुंडलिनी पथ ।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है, अब हम उसका संक्षिप्त विवरण देंगे ।

4.6 सारांश

- **गणितीय निदर्शन** वास्तविकता का एक सरल गणितीय निरूपण है, जिसे वास्तविक जगत की किसी समस्या विशेष को हल करने के लिए इस्तेमाल किया जाता है । गणितीय निदर्शन की प्रक्रिया को निम्नलिखित सात चरणों में बाँटा जा सकता है : वास्तविक समस्या को स्पष्ट करना, उसका निदर्श बनाना, समस्या को गणितीय रूप में लिखना, गणितीय समस्या को हल करना, हल का विवेचन करना, वास्तविकता के साथ हल की तुलना करना, और अंततः परिणाम का प्रयोग करना ।

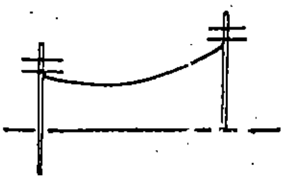
- प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों की सहायता से अनेक भौतिक परिघटनाओं को निदर्शित किया जा सकता हैं । इस इकाई में ऊष्मीय भौतिकी, न्यूटनी यांत्रिकी और वैद्युत् परिपथों के संबंध में **प्रथम कोटि साधारण अवकल समीकरणों** के कुछ विशेष अनुप्रयोगों पर विचार किया गया है ।

- इस इकाई में न्यूटनी यांत्रिकी और वैद्युत् परिपथों से संबद्ध कुछ भौतिक परिघटनाओं का गणितीय निदर्शन **द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों** की सहायता से भी किया गया है ।

- युग्मित दोलक, युग्मित वैद्युत् परिपथ, वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों में आवेशित कणों जैसे भौतिक तंत्रों के लिए **युग्मित अवकल समीकरणों** को भी इस इकाई में हल किया गया है ।

4.7 अंत में कुछ प्रश्न

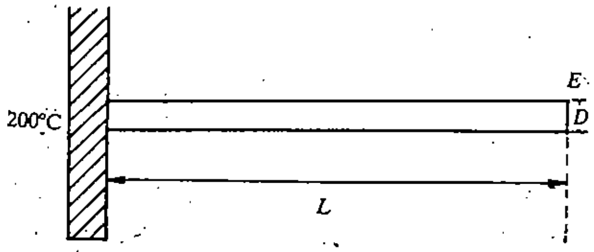
1. दो खंभों के बीच, केवल अपने भार के कारण लटके, टेलीफ़ोन के एक लंबे तार (चित्र 4.18) का आकार निर्धारित करने के लिए एक अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए और उसका व्यापक हल प्राप्त कीजिए । [संकेत : तार के निम्नतम बिंदु P और किसी स्वेच्छ बिंदु Q के बीच स्थित तार का एक अंश लीजिए । साम्यावस्था में PQ पर लग रहे बलों के समीकरण लिखिए और



चित्र 4.18 : दो खंभों के बीच लटका हुआ एक टेलिफोन का तार। तार का आकार आपको कैसा दिखाई देता है? अपने अनुमान की प्रश्न के हल से मिले आकार से तुलना करने पर शायद आपको कुछ नई जानकारी मिले ।

इस बात को लागू कीजिए कि $\frac{dy}{dx}$, Q पर तार की प्रवणता होती है । इस प्रश्न को हल करने के लिए आपको कैलकुलस के गणितीय पाठ्यक्रम को फिर से देखना पड़ सकता है ।]

2. चित्र 4.19 में भट्टी की दीवार से जुड़ी, चौड़ाई D और लंबाई L वाली एक बहुत लंबी लोहे की पतली पट्टी (strip) दिखाई गई है । दीवार का तापमान 200°C है । पट्टी में ऊष्मा अपरिवर्ती (steady) रूप से प्रवाहित होती है और पट्टी के पार्श्वों से आसपास की हवा में संवाहित (convect) होती है ।



चित्र 4.19

यह मान कर कि किसी बिंदु पर पट्टी का तापमान θ दीवार से उस बिंदु की दूरी x पर निर्भर करता है, पट्टी के तापमान θ को निम्नलिखित अवकल समीकरण से निदर्शित किया जा सकता हैं

$$C\frac{d^2\theta}{dx^2} = 2H(\theta - \theta_{\text{वायु}})$$

जहां C और H अचर हैं और $\theta_{\text{वायु}} = 70°C$ । दिया है कि पट्टी की लंबाई इतनी अधिक है कि उसके सिरे E का तापमान, उस सिरे के आसपास की वायु के तापमान के बराबर है । इस तरह इस समस्या के लिए परिसीमा प्रतिबंध होते हैं : $\theta = 200°C$ जबकि $x = 0$, और $\theta = 70°C$ जबकि $x \to \infty$ । दिए हुए परिसीमा प्रतिबंधों के लिए समीकरण को हल कीजिए । ($x \to \infty$ के परिसीमा प्रतिबंध के प्रति सतर्क रहिए !)

4.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. संकेत में बताए गए नियम की सहायता से इस समस्या का गणितीय निदर्शन किया जा सकता है । विद्यालय के अपने पाठ्यक्रम से आप यह जानते हैं कि जिस दर से वस्तु ऊष्मा को अवशोषित करती है वह $\frac{dQ}{dt} = ms\frac{dT}{dt}$ होती है, जहां m वस्तु का द्रव्यमान है और s उसकी विशिष्ट ऊष्मा (specific heat) है । अगर क्षण t पर वस्तु का तापमान T हो, तो $\frac{dT}{dt}$ तापमान का समय परिवर्तन दर होता है । इस तरह, संकेत में दिए हुए नियम के अनुसार

$$\frac{dQ}{dt} \propto (T_s - T)$$

या
$$ms\frac{dT}{dt} = C'(T_s - T)$$

या
$$\frac{dT}{dt} = \frac{C'}{ms}(T_s - T) = K(T_s - T)$$

जहां K^{-1} की विमा समय की विमा है ।

अब, क्योंकि भट्टी के तापमान और ढांचे के तापमान का अंतर $(200 - T)$°C है, इसलिए दिए हुए तंत्र को निर्धारित करने वाला प्रथम कोटि साधारण अवकल होगा

ध्यान दें कि इस साधारण अवकल समीकरण को हल करने में इस बात से कोई फ़र्क नहीं पड़ता कि हम ताप की इकाई (°C) या (K) का इस्तेमाल कर रहे हैं क्योंकि तापमान T समीकरण के सभी पदों में उपस्थित है ।

$$\frac{dT}{dt} = K(200 - T)$$

इसके परिसीमा प्रतिबंध ये होंगे

(i) जब $t = 0$ min तब $T = 20°C$ और

(ii) जब $t = 1$ min तब $T = 30°C$

इस समीकरण का हल इस प्रकार प्राप्त होता है :

$$\int \frac{dT}{200 - T} = K \int dt + C$$

या $-\ln|200 - T| = Kt + C$

या $200 - T = C_1 \exp(-Kt)$

या $T°C = 200°C - (C_1°C) \exp(-Kt)$

हल की जांच : दक्षिण पक्ष $= K(200 - T) = KC_1 e^{-Kt}$

वाम पक्ष $= \frac{dT}{dt} = KC_1 e^{-Kt}$

अतः हल सही है, क्योंकि वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

C_1 एक समाकलन अचर है जिसकी विमा वही है जो तापमान की है। परिसीमा प्रतिबंधों को लागू करने पर हमें मिलता है

(i) $t = 0$ min पर $20°C = 200°C - C_1$

$$\therefore C_1 = 180°C$$

(ii) $t = 1$ min पर $30°C = 200°C - 180°C \exp[-K\,\text{min}^{-1} \times 1\,\text{min}]$

या $e^{-K} = \frac{170}{180} = \frac{17}{18}$, $\therefore K = -\ln\left|\frac{17}{18}\right| = 0.057$

अतः विशेष हल होगा

$$T°C = 200°C - 180°C \exp[(-0.057)t]$$

वह समय t मालूम करने के लिए, जिस पर $T = 190°C$ हमें निम्नलिखित समीकरण को हल करना होगा

$$190°C = 200°C - 180°[\exp(-0.057\,t)]$$

या $\exp(-0.057\,t) = \frac{1}{18}$ या $t = \frac{\ln|1/18|}{-0.057}$ min $= 5$ min

2. चर पृथक्करण विधि लागू करने पर हमें मिलता है

$$\int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \int dt + C$$

$w = g - \frac{k}{m}v$ लेने पर हमें मिलता है, $dw = -\frac{k}{m}dv$ और

$$\int \frac{dw}{w} = -\int dt + C'$$

या $w = C_1 \exp\left(\frac{-k}{m}t\right)$

या $v = \frac{mg}{k} - \frac{m}{k}C_1 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$

हल की जांच : समीकरण (4.5) का वाम पक्ष $= m\frac{dv}{dt} = -\frac{m^2}{k}C_1\left(-\frac{k}{m}\right)\exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$

$$= mC_1 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$$

समीकरण (4.5) का दक्षिण पक्ष $= mg - kv = mg - mg + mC_1 \exp\left(-\frac{k}{m}t\right)$

$$= mC_1 \exp\left(\frac{-k}{m}t\right)$$

आदि प्रतिबंध $t = 0$ पर $v = 0$ लागू करके हमें मिलता है

परिसीमा प्रतिबंधों को लागू करने पर हमें मिलता है

$$C_2 = 0$$

और $w\left[\frac{L^4}{24}-\frac{L^4}{12}\right]+C_1L = 0$

या $C_1 = \frac{1}{L}\left(\frac{wL^4}{24}\right) = \frac{wL^3}{24}$

इस तरह $Cy = w\left[\frac{x^4}{24}-\frac{Lx^3}{12}\right]+\frac{wL^3}{24}x$

अभीष्ट हल है।

6. समीकरणों (4.20 क) और (4.20 ख) को जोड़ने पर हमें मिलता है

$$(\ddot{x}+\ddot{y})+\omega_0^2(x+y) = 0$$

चूंकि $X = x+y$, इसलिए $\dot{X} = \dot{x}+\dot{y}$ और $\ddot{X} = \ddot{x}+\ddot{y}$

इस तरह, उपरोक्त अवकल समीकरण हो जाता है

$$\ddot{X}+\omega_0^2X = 0$$

जिसका हल निम्न रूप का होता है

$X = A\cos\omega_0t+B\sin\omega_0t$ जहां $\omega_0^2 = g/L$

दिए हुए आदि प्रतिबंधों से A और B के मान निकाले जा सकते हैं। समीकरण (4.20 ग) से समीकरण (4.20 घ) को घटाने पर हमें मिलता है

$$(\ddot{x}-\ddot{y}) = -\omega_0^2(x-y)-\frac{2k}{m}(x-y)$$

और, क्योंकि $Y = x-y$ इसलिए $\dot{Y} = \dot{x}-\dot{y}$ और $\ddot{Y} = \ddot{x}-\ddot{y}$

$$\therefore\ \ddot{Y} = -\omega_0^2Y-\frac{2k}{m}Y$$

या $\ddot{Y}+\left(\omega_0^2+\frac{2k}{m}\right)Y = 0$

इस समीकरण का हल है

$$Y = C\cos\omega t+D\sin\omega t$$

जहां $\omega^2 = \omega_0^2+\frac{2k}{m}$

7. आइए पहले हम समीकरण (4.22) में L_1, L_2 आदि के मान प्रतिस्थापित करें। तब यह समीकरण हो जाता है

$$4\frac{d^2I_2}{dt^2}+(6+6+16)\frac{dI_2}{dt}+24I_2 = 18$$

या $$\frac{d^2I_2}{dt^2}+7\frac{dI_2}{dt}+6I_2 = \frac{9}{2}$$

जहां हमने साधारण अवकल समीकरण में इकाइयों को स्पष्ट रूप से नहीं लिखा है। हम $I' = I_2-\frac{3}{4}$ का प्रतिस्थापन करके इस साधारण अवकल समीकरण की असमघातता को दूर कर सकते हैं। इस तरह, हमें मिलता है

$$\frac{d^2I'}{dt^2}+7\frac{dI'}{dt}+6I' = 0$$

इस समघात द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण का अभिलक्षणिक समीकरण (characteristic equation) यह है

$$\lambda^2+7\lambda+6 = 0$$

जिसके मूल $\lambda_1 = -6, \lambda_2 = -1$ है। अतः इसका हल है

$$I' = C_1e^{-6t}+C_2e^{-t}$$

या $$I_2 = \frac{3}{4}+C_1e^{-6t}+C_2e^{-t}$$

हम समीकरण (4.21 घ) से I_1 मालूम कर सकते हैं

$$-3I_1 + \frac{2dI_2}{dt} + 11I_2 = 0$$

I_2 के लिए प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है

$$-3I_1 + 2\left(-6\,C_1\,e^{-6t} - C_2\,e^{-t}\right) + 11\left(\frac{3}{4} + C_1\,e^{-6t} + C_2\,e^{-t}\right) = 0$$

या $$I_1 = \frac{11}{4} - \frac{C_1}{3}e^{-6t} + 3\,C_2\,e^{-t}$$

आइए हम जल्दी से I_1 और I_2 के व्यापक हलों की जांच कर लें :

समीकरण (4.21 ग) का वाम पक्ष है

$$2\frac{dI_1}{dt} + 3I_1 - 3I_2$$

$$= 2\left(2C_1\,e^{-6t} - 3C_2\,e^{-t}\right) + \frac{33}{4} - C_1\,e^{-6t} + 9C_2\,e^{-t} - \frac{9}{4} - 3C_1\,e^{-6t} - 3C_2\,e^{-t}$$

$$= 6 + 4C_1\,e^{-6t} - 6C_2\,e^{-t} - 4C_1e^{-6t} + 6C_2\,e^{-t} = 6 = \text{दक्षिण पक्ष}$$

इसी प्रकार, समीकरण (4.21 घ) का वाम पक्ष है

$$-3I_1 + 2\frac{dI_2}{dt} + 11I_2 = -\frac{33}{4} + C_1\,e^{-6t} - 9C_2\,e^{-t} - 12C_1\,e^{-6t} - 2C_2\,e^{-t} + \frac{33}{4}$$
$$+ 11C_1\,e^{-6t} + 11C_2\,e^{-t}$$
$$= 0 = \text{दक्षिण पक्ष}$$

यह दिया हुआ है कि $t = 0$ पर $I_1(t) = 0,\ I_2(t) = 0$

इन आदि प्रतिबंधों से हमें C_1 और C_2 में दो समीकरण मिलते हैं :

$$C_1 + C_2 + \frac{3}{4} = 0$$

$$-\frac{C_1}{3} + 3C_2 + \frac{11}{4} = 0$$

इस तरह $C_1 = \frac{3}{20}$ और $C_2 = -\frac{9}{10}$

एम्पीयर में I_1 और I_2 के लिए विशेष हल हैं

$$I_1 = (2.75 - 0.05\,e^{-6t} - 2.7\,e^{-t})$$

$$I_2 = (0.75 + 0.15\,e^{-6t} - 0.9\,e^{-t})$$

8. q, B और m के दिए हुए मानों से हम निकाल सकते हैं

$$\omega_C = \frac{qB}{m} = \frac{(1.6\times10^{-19}\,\text{C})\,(10^{-2}\,\text{tesla})}{1.6\times10^{-24}\,\text{kg}} = 10^3\,\text{rad s}^{-1}$$

(i) $\mathbf{v}(0) = (2000\,\text{ms}^{-1})\,\hat{\mathbf{i}},\ \mathbf{r}(0) = (2\,\text{m})\,\hat{\mathbf{j}}$

$\mathbf{v}$ के आदि प्रतिबंध को समीकरण (4.27 क) में लागू करने पर हमें मिलता है

$$\mathbf{v}(0) = (2000\,\text{ms}^{-1})\,\hat{\mathbf{i}} = v_\perp \sin\phi\,\hat{\mathbf{i}} + v_\perp\cos\phi\,\hat{\mathbf{j}} + v_{||}\,\hat{\mathbf{k}}$$

अब, सदिश बीजगणित (vector algebra) से आप यह जानते हैं कि $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ यदि और केवल यदि

$$a_x = b_x,\ a_y = b_y,\ a_z = b_z$$

इससे हमें मिलता है

$$v_\perp \sin\phi = 2000\,\text{m s}^{-1},\ v_\perp\cos\phi = 0,\ v_{||} = 0$$

चूंकि $v_\perp$ को शून्येतर (non-zero) होना चाहिए

इसलिए हमें $\phi = 90°$ और $v_\perp = 2000\,\text{ms}^{-1}$ प्राप्त होता है।

इस तरह

$$\mathbf{v}(t) = (2000\,\text{ms}^{-1})\,(\cos\omega_C t\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\omega_C t\,\hat{\mathbf{j}}),\ \omega_C = 10^3\,\text{rad s}^{-1}$$

इसके बाद हम $\mathbf{r}$ के आदि प्रतिबंध को समीकरण (4.27 ख) में लागू करते हैं और इसे लागू

करते समय यह बात ध्यान में रखते हैं कि $\phi = 90°$.

$$\mathbf{r}(0) = 2\,\mathrm{m}\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{v_\perp}{\omega_C}\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{R_0} = \frac{2000\ \mathrm{ms^{-1}}}{10^3\ \mathrm{rad\ s^{-1}}}\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{R_0} = 2\mathrm{m}\,\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{R_0}$$

$$\therefore\ \mathbf{R_0} = \mathbf{0}$$

इस तरह $\mathbf{r}(t) = 2\mathrm{m}\,(\sin\omega_C t\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\omega_C t\,\hat{\mathbf{j}}),\ \omega_C = 10^3\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$

यह 2m त्रिज्या वाले वृत्त में दक्षिणावर्त घूर्णन कर रहे कण का स्थिति सदिश है (चित्र 4.16)।

(ii) अब $\mathbf{v}(0) = 2000\ \mathrm{ms^{-1}}\,(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) = v_\perp(\sin\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}) + v_\parallel\hat{\mathbf{k}}$

समीकरण (4.27 क) से हमें मिलता है

$$\mathbf{v}(0) = 2000\ \mathrm{ms^{-1}}\,(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}) = v_\perp(\sin\phi\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\,\hat{\mathbf{j}}) + v_\parallel\hat{\mathbf{k}}$$

$$\therefore\ \phi = 90°,\ v_\perp = 2000\ \mathrm{ms^{-1}},\ v_\parallel = 2000\ \mathrm{ms^{-1}}$$

इस तरह $\mathbf{v}(t) = (2000\ \mathrm{ms^{-1}})(\cos\omega_C t\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\omega_C t\,\hat{\mathbf{j}}) + 2000\ \mathrm{ms^{-1}}\,\hat{\mathbf{k}}$

समीकरण (4.27 ख) से हमें मिलता है

$$\mathbf{r}(0) = 2\mathrm{m}\,\hat{\mathbf{j}} = \frac{v_\perp}{\omega_c}\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{R_0} = \frac{2000\ \mathrm{ms^{-1}}}{10^3\ \mathrm{rad\ s^{-1}}}\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{R_0}$$

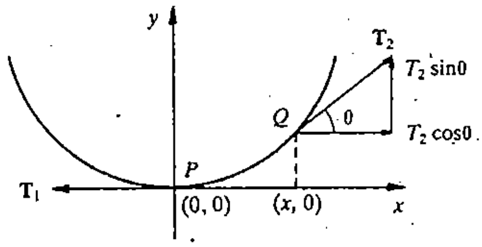
$$\therefore\ \mathbf{R_0} = \mathbf{0}$$

इस तरह, $\mathbf{r}(t) = 2\mathrm{m}\,(\sin\omega_C t\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\omega_C t\,\hat{\mathbf{j}}) + (2000\ \mathrm{ms^{-1}})\,t\,\hat{\mathbf{k}}$

इस स्थिति में कण के स्थिति सदिश और वेग का एक z-घटक भी होता है, जो कि अचर है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. चित्र 4.20 देखिए। निम्नतम बिंदु P, और P के निकट के बिंदु Q के बीच तार का भाग लीजिए। आइए हम एक द्विविम कार्तीय निर्देशांक तंत्र लें जिसका मूल बिंदु P पर हो और खंड PQ,xy समतल में स्थित हो (चित्र 4.20)।



चित्र 4.20

तार के खंड PQ पर तीन बल लग रहे हैं : गुरुत्व बल $\mathbf{F} = (m\,g)$ और क्रमशः P तथा Q पर तार में तनाव $\mathbf{T}_1$और $\mathbf{T}_2$। यदि $\mathrm{kg\,m^{-1}}$ में मापा गया तार का रैखिक द्रव्यमान घनत्व (linear mass density) λ_m हो और s खंड की लंबाई हो तो $m = \lambda_m s$ और $\mathbf{F} = \lambda_m sg$.

हम $\mathbf{T_2}$ को दो घटकों $T_2\cos\theta$ और $T_2\sin\theta$ में वियोजित कर सकते हैं। चूंकि तार साम्यावस्था में है, इसलिए इस पर कार्य कर रहा नेट बल शून्य होगा। बलों की साम्यावस्था के प्रतिबंध से हमें मिलता है

$$T_1 = T_2\cos\theta$$
$$\lambda_m sg = T_2\sin\theta$$

जिससे $\tan\theta = \dfrac{\lambda_m sg}{T_1}$ मिलता है।

चूंकि Q पर वक्र की प्रवणता dy/dx से दी जाती है, इसलिए हम यह भी लिख सकते हैं कि

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\lambda_m sg}{T_1} \qquad \text{(i)}$$

(i) का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda_m g}{T_1}\frac{ds}{dx}$$

हम ds का dx और dy के साथ संबंध स्थापित कर सकते हैं । Q के प्रति अत्यणु चाप खंड ds होता है

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$$

या $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \qquad \text{(ii)}$$

(i) का अवकलन करने और (ii) का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित अवकल समीकरण मिलता है

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda_m g}{T_1}\left(\frac{ds}{dx}\right)$$

या $$\frac{d^2y}{dx^2} = K\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$ जहां $K = \frac{\lambda_m g}{T_1}$

अब, मान लीजिए $\frac{dy}{dx} = u$ जिससे कि

$$\frac{du}{dx} = K\sqrt{1 + u^2}$$

चर पृथक्करण विधि लागू करने पर हमें मिलता है

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = K\int dx + C_1$$

या $$\sinh^{-1} u = Kx + C_1$$

या $$u = \sinh(Kx + C_1)$$

या $$\frac{dy}{dx} = \sinh(Kx + C_1)$$

इस तरह

$$y = \int \sinh(Kx + C_1)dx + C_2$$

या $$y = K\cosh(Kx + C_1) + C_2$$

क्या आपको यह समस्या रोचक लगी ? वास्तव में आपसे इस प्रकार का प्रश्न हल करवाने के पीछे कुछ कारण है । एक कारण यह है कि इससे यह पता चलता है कि भौतिक तंत्रों का गणितीय निदर्शन करने के लिए आपको प्रायः विभिन्न क्षेत्रों से विभिन्न प्रकार की सूचनाएं इकट्ठी करनी पड़ सकती है और उनमें संबंध स्थापित करना पड़ सकता है । इस समस्या का एक अन्य रोचक पहलू भी है । क्या प्रश्न को हल करने से पहले आपने यह पूर्वानुमान लगाया था कि टेलीफोन के तार का आकार क्या होगा ? कहीं आपका अनुमान यह तो नहीं था कि तार परवलयाकार है ?

पर अपने हल से आप यह जान गए हैं कि दो खंभों के बीच केवल अपने भार पर लटका तार अतिपरवलयिक कोसाइन (hyperbolic cosine) के आकार का होता है । अतिपरवलयिक कोसाइन के ग्राफ़ को कैटनरी (catenary) भी कहा जाता है, जो कि लेटिन शब्द "कैटिना" (catena) से निकला है । कैटिना का मतलब है ज़ंजीर । इस चर्चा से आपको क्या नसीहत मिली? वह यह है कि मात्र किसी चीज़ को देख कर किसी नतीजे पर मत पहुंचिए । इससे आप भ्रमित हो सकते हैं ।

2. यह एक असमघात द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण है । हम $\phi = \theta - \theta_{\text{वायु}}$ लेकर इसकी असमघातता को दूर कर सकते हैं । तब हमें मिलता है

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} - k^2\phi = 0, \; k^2 = 2H/C$$

आप इस समीकरण का हल निम्न रूप में लिख सकते है

$$\phi = C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx}$$

या $$\theta = \theta_{\text{वायु}} + C_1 e^{kx} + C_2 e^{-kx} \qquad \text{(i)}$$

आइए अब हम परिसीमा प्रतिबंधों को लागू करें। $x = 0$ पर $\theta = 200°C$

$$\therefore\ C_1 + C_2 = 200°C - 70°C = 130°C$$

$x \to \infty$ होने पर, $\theta = 70°C$

अब $x \to \infty$ होने पर, $e^{kx} \to \infty$ अर्थात् $x \to \infty$ होने पर, θ का हल अनंत की ओर प्रवृत्त होता है। पर हकीक़त में तो $x \to \infty$ होने पर पतली पट्टी का तापमान एक परिमित मान (70°C) की ओर प्रवृत्त होता है। अतः (i) के व्यापक हल में e^{kx} वाला पद भौतिक दृष्टि से अस्वीकार्य है। अतः (i) में हम $C_1 = 0$ लेते हैं। इस तरह,

$$C_1 = 0,\ C_2 = 130°C.$$

और विशेष हल होगा

$$\theta = 70°C + 130°C\, e^{-kx}$$

4.9 शब्दावली

अतिपरवलयिक कोसाइन : hyperbolic cosine

कक्षा : orbit

कला : phase

कालांक : time constant

गणितीय निदर्शन : mathematical modelling

जड़त्व आघूर्ण : moment of inertia

निदर्श : model

निर्देशक केंद्र : guiding centre

परिभ्रमण त्रिज्या : radius of gyration

पलायन वेग : escape velocity

प्रतिरोध : resistor

प्रेरक : inductor

बलआघूर्ण : torque

युग्मित दोलक : coupled oscillators

लारमोर त्रिज्या : Larmor radius

लोलक : pendulum

संधारित्र : capacitor

संवेग : momentum

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-10

भौतिकी में गणितीय विधियां-II

खंड

2

आंशिक अवकल समीकरण

खंड 2 आंशिक अवकल समीकरण

प्रस्तावना

खंड 1 में आपने साधारण अवकल समीकरणों का प्रयोग उन भौतिक परिघटनाओं या निकायों का निदर्श बनाने के लिए किया है जिनमें केवल एक चर आता है। पर, भौतिकी में हमें प्राय: ऐसी राशियों के समय और स्थान के साथ परिवर्तन का निदर्श बनाना होता है जो एक से अधिक राशियों पर निर्भर करती है, जैसे, स्थिरवैद्युत, गुरुत्वीय और चुंबकीय क्षेत्र। इनसे संबंधित समस्याओं को केवल **आंशिक अवकल समीकरणों** में, अर्थात् एक से अधिक चर वाले फलनों से संबद्ध अवकल समीकरणों में, व्यक्त किया जा सकता है।

आंशिक अवकल समीकरणों का प्रयोग तरंग गति, ऊष्मा चालन, स्थिर विद्युतिकी, चुंबकत्व, द्रवगतिकी (hydrodynamics), वायुगतिकी (aerodynamics), न्यूक्लीय भौतिकी आदि जैसे विभिन्न क्षेत्रों में होता है। दिए हुए परिसीमा-प्रतिबंधों (boundary conditions) के साथ एक आंशिक अवकल समीकरण को हल कर पाना, सही मायने में अठारहवीं शताब्दी और उन्नीसवीं शताब्दी में विकसित गणित का एक महत्त्वपूर्ण अंश है। इस विषय का प्रादुर्भाव तब हुआ जब ऑयलर, लग्रांज, प्वासों, कोशी, बर्नौली, फूरिए जैसे अनेक महान गणितज्ञों ने विभिन्न प्राकर की भौतिक परिघटनाओं से संबंधित कुछ रोचक प्रश्नों के उत्तर ढूँढ़ने का प्रयास किया।

आंशिक अवकल समीकरणों द्वारा पहले पहल जिन भौतिक परिघटनाओं का निदर्शन किया गया उनमें से एक थी—तरंग गति (wave motion), क्योंकि यह अनेक प्रकार की प्राकृतिक परिघटनाओं में दिखाई पड़ती है। तरंग गति के अनेकों उदाहरण दैनिक जीवन में दिखते हैं— जैसे कि सितार, गिटार, पियानो आदि के कंपन करते तार, तबले की कंपायमान झिल्ली, भूकंप के समय पृथ्वी जैसे ठोस माध्यम में तरंगों का चलना, पानी में उठती लहरें, मशीनों में कंपायमान शैफ्ट, विद्युतचुंबकीय तरंगें (जो रेडियो, टी वी, रडार आदि में प्रयुक्त होती हैं), आदि। पर, चाहे वह कस कर तने हुए तार का विस्थापन हो, तनी हुई झिल्ली का कंपन हो, मुक्त आकाश में विद्युतचुंबकीय तरंगों का संचरण (propagation) हो या टेलीफोन या बिजली लाइन में धारा का संचरण हो, ये सभी एक ही आंशिक आवकल समीकरण द्वारा निदर्शित किए जा सकते हैं—जिसे हम **तरंग समीकरण** (wave equation) कहते हैं।

अनेक महत्त्वपूर्ण भौतिक परिघटनाओं में विसरण (diffusion) की प्रक्रिया उपस्थित होती है। विसरण प्रक्रिया का मतलब है पदार्थों का प्रसार, प्रवाह या मिश्रण, आदि। एक अति सामान्य विसरण प्रक्रिया है, ऊष्मा के रूप में ऊर्जा का प्रवाह—उदाहरणत: लोहे की छड़ के एक सिरे को गर्म करने पर उसका दूसरा सिरा भी गर्म हो जाता है। न्यूक्लीय रिएक्टर के ईंधन छड़ों (fuel rods) में ऊष्मा का प्रवाह इसका एक अन्य असामान्य उदाहरण है। उच्च सांद्रण (concentration) वाले प्रदेश से निम्न सांद्रण वाले प्रदेश में कणों के प्रसार के औद्योगिक और रासायनिक प्रक्रियाओं, जैसे कि वाष्पन, आसवन (distillation), शर्करा सांद्रण (sugar concentration), उत्पादों के औद्योगिक शुष्कन (drying) आदि, में काफ़ी अनुप्रयोग हैं। ऐसी तमाम परिघटनाओं के निदर्शन के लिए जिस आंशिक अवकल समीकरण का प्रयोग किया जाता है वह **विसरण समीकरण** (diffusion equation) कहलाता है।

लाप्लास समीकरण एक अन्य महत्त्वपूर्ण आंशिक अवकल समीकरण है जिसके भौतिकी में काफ़ी अनुप्रयोग हैं। यह भी विविध भौतिक परिघटनाओं के निदर्शन में प्रयुक्त होता है जैसे कि पदार्थ (या आवेश) रहित क्षेत्रों में गुरुत्वीय (या स्थिरवैद्युत) विभव निकालने में, विभिन्न पिंडों में ऊष्मा के अपरिवर्ती (समय-निरपेक्ष) प्रवाह का अध्ययन करने में, एक तरल पर पृष्ठ तरंगों (surface waves) का निदर्शन करने में, एक असंपीड्य तरल (incompressible fluids) की अघूर्णी गति (irrotational motion) का विवरण देने आदि के लिए। वस्तुत: इन तीनों आंशिक अवकल समीकरणों (तरंग समीकरण, विसरण समीकरण और लाप्लास समीकरण) के भौतिकी में इतने अधिक अनुप्रयोग हैं कि इन्हें प्राय: 'भौतिकी के अवकल समीकरण' कहा जाता है। वास्तविकता तो यह है कि इनके अतिरिक्त कुछ अन्य महत्त्वपूर्ण आंशिक अवकल समीकरण भी हैं, जिनका अनुप्रयोग काफ़ी होता है, जैसे—क्वांटम यांत्रिकी में तरंग समीकरण, आपेक्षिकीय क्वांटम यांत्रिकी में डिराक समीकरण, क्वांटम क्षेत्र सिद्धांत में क्लाइन-गॉर्डन समीकरण, आदि। पर, इन अधिक जटिल आंशिक अवकल समीकरणों को समझने के लिए भी ऊपर बताए गए तीनों आंशिक अवकल समीकरणों का ज्ञान होना ज़रूरी है।

मुख्यत: इन्हीं कारणों से इकाई 5 में आंशिक अवकल समीकरणों का संक्षिप्त परिचय देने के बाद हमने इकाई 6 में इन्हीं तीनों समीकरणों द्वारा निदर्शित भौतिक समस्याओं को हल करने पर विशेष ध्यान दिया है।

ऐसी समस्याओं को हल करने में बहुत मदद मिली फूरिए के शोध से। फूरिए की विधि से किसी भी फलन को त्रिकोणमितीय श्रेणी के योगफल के रूप में निरूपित किया जा सकता है और यह विधि आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने में बहुत उपयोगी है। अत: इकाई 7 में हम फूरिए-विधि से आपको परिचित कराएंगे। इकाई 8 में हम भौतिक समस्याओं से संबद्ध आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने के लिए फूरिए-विधि के कुछ अनुप्रयोगों की

चर्चा करेंगे। एक बार फिर हम आंशिक अवकल समीकरणों के विस्तृत क्षेत्र से केवल उस विषयवस्तु को ले रहे हैं जो भौतिकी की दृष्टि से हमारे काम की है।

इससे पहले कि आप इस खंड का अध्ययन शुरू करें, एक आखिरी बात और हम आपसे कहना चाहते हैं। आप खंड 1 की अध्ययनदर्शिका को फिर से पढ़ लें। इससे आपको इस खंड को समझने में भी काफ़ी आसानी होगी। इस खंड की प्रत्येक इकाई को पढ़ने में लगभग 5 से 6 घंटे लग सकते हैं यानि कि पूरे खंड के अध्ययन के लिए लगभग 24 घंटे लगेंगे।

हम आशा करते हैं कि इस खंड को पढ़ने और इसमें दिए गए प्रश्नों को हल करने में आपको आनन्द आएगा। हमारी शुभकामनाएँ आपके साथ हैं।

इकाई 5 आंशिक अवकल समीकरण—एक परिचय

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

खंड 1 में आपने साधारण अवकल समीकरणों का अध्ययन किया और इन्हें हल करने की विभिन्न विधियाँ सीखीं। साथ ही आपने गणितीय निदर्शन की प्रक्रिया की भी कुछ जानकारी हासिल की और इसका प्रयोग भौतिकी से संबंधित वास्तविक जीवन के कुछ सरल प्रश्नों को हल करने में किया।

लेकिन, वास्तविक जगत में बहुतेरी ऐसी समस्याएं हैं जिन्हें केवल साधारण अवकल समीकरणों की जानकारी से हल नहीं किया जा सकता। उदाहरण के लिए, मान लीजिए सितार के तार को किसी स्थान पर छेड़ा जाता है। ऐसा करने से किस प्रकार की ध्वनि निकलती है? सितार बजाने वाला कोई भी व्यक्ति आपको यह बता सकता है कि (अन्य बातों के अलावा) सितार से निकलने वाली ध्वनि इस बात पर निर्भर करती है कि सितार के तार को कहाँ छेड़ा गया है। अब, अगर आप सितार के तार की गति निदर्शन करना चाहें तो आप उन विधियों को लागू नहीं कर सकते जिन्हें आपने खंड 1 में पढ़ा है। इसी प्रकार अगर एक भट्ठी में आप किसी सांचे को गर्म करते हैं और किसी दिए हुए समय पर उसका तापमान-वितरण जानना चाहते हैं, तो इसके लिए आपको नई विधियों की आवश्यकता होगी।

वास्तविक जगत की ऐसी समस्याओं को हल करने के लिए हमें **आंशिक अवकल समीकरणों** (partial differential equations) का अध्ययन करना होगा। चूँकि यह इकाई आंशिक अवकल समीकरणों से संबंधित पहली इकाई है, इसलिए यहाँ हम इन समीकरणों से संबंधित कुछ आधारभूत संकल्पनाओं पर चर्चा करेंगे।

आप खंड 1 की इकाई 1 में पढ़ चुके हैं कि विभिन्न भौतिक समस्याओं के संबंध में आंशिक अवकल समीकरणों का प्रयोग तब होता है, जबकि उन समस्याओं में उपस्थित फलन दो या अधिक चरों पर निर्भर करता है। आपको याद होगा कि साधारण अवकल समीकरणों के अध्ययन के दौरान हमने आपसे कैलकुलस का अध्ययन करने के लिए कहा था। इसीलिए भौतिक निकायों को साधारण अवकल समीकरणों से निरूपित करते समय आप यह जाँचने की स्थिति में थे कि किसी साधारण अवकल समीकरण में उपस्थित एक चर वाला फलन विचाराधीन प्रांत (domain) में संतत (continuous) और अवकलनीय (differentiable) है या नहीं।

आंशिक अवकल समीकरणों का अध्ययन करने से पहले आपको एक से अधिक चर वाले फलनों के संबंध में भी ये गणितीय संकल्पनाएं समझनी होंगी। अतः इस इकाई के प्रारंभ में हम एक से अधिक चरों वाले फलन की परिभाषा देंगे और इन फलनों की सीमाओं, सांतत्य और अवकलनीयता की संकल्पनाओं की व्याख्या करेंगे। इस संबंध में आप आंशिक अवकलन के बारे में भी सीखेंगे। फिर अगर आप इन संकल्पनाओं के बारे में अधिक विस्तार से जानकारी पाना चाहें तो आप एम टी ई-07 के उच्चस्तरीय कलन नामक गणितीय पाठ्यक्रम की 1 से 8 तक की इकाइयों का अध्ययन कर सकते हैं।

जब आप इन आधारभूत संकल्पनाओं को समझ लेंगे, तब हम आपको आंशिक अवकल समीकरणों से परिचित कराएंगे : आप देखेंगे कि भौतिक समस्याओं का निदर्शन आंशिक अवकल समीकरणों द्वारा कैसे किया जाता है। साधारण अवकल समीकरणों की तरह ही आप आंशिक अवकल समीकरणों का वर्गीकरण भी सीखेंगे। आप यह भी समझेंगे कि आंशिक अवकल समीकरण के हल का क्या अर्थ होता है।

इन संकल्पनाओं को समझने के बाद ही आप भौतिकी की समस्याओं से संबद्ध आंशिक अवकल समीकरणों को हल कर सकेंगे। इकाई 6 में चर्चा का विषय यही होगा।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

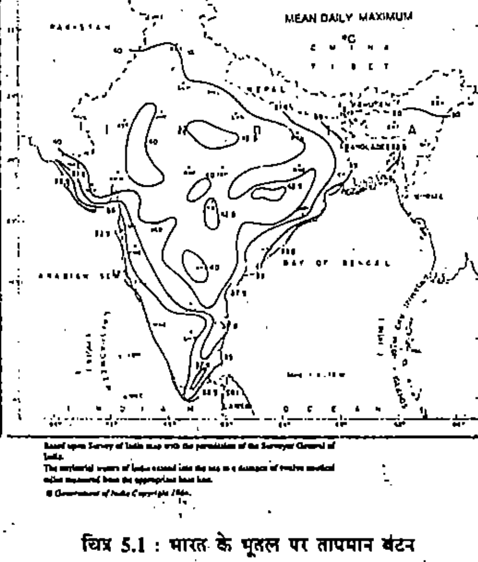
- जाँच कर सकेंगे कि एक से अधिक चर वाला कोई फलन संतत और अवकलनीय है या नहीं,
- अनेक चरों वाले फलन के प्रथम और उच्च कोटि आंशिक अवकलन ज्ञात कर सकेंगे,
- कोटि और घात के अनुसार, रैखिकता/अरैखिकता के अनुसार, समघातता/असमघातता के अनुसार आंशिक अवकल समीकरणों का वर्गीकरण कर सकेंगे,
- जाँच कर सकेंगे कि कोई दिया हुआ फलन, दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण का हल है या नहीं।

5.2 एक से अधिक चर वाले फलन

अभी तक इस पाठ्यक्रम में आपने एक चर वाले फलनों से संबंधित साधारण अवकल समीकरणों का अध्ययन किया है। पर, ऐसी अनेक भौतिक राशियाँ हैं, जो अनेक चरों पर निर्भर करती हैं। उदाहरण के लिए, चित्र 5.1 में एक दिवस किसी समय पर भारत में तापमान-वितरण दिखाया गया है। चित्र में ठोस रेखाएं उन स्थानों को मिलाती हैं जहाँ एक समय पर भूतल-तापमान समान था। इन रेखाओं को समतापी रेखाएं (isotherms) कहते हैं। इस तरह के चित्र आपने अक्सर ही रात को टी०वी० पर राष्ट्रीय कार्यक्रम के समाचारों में दी गई मौसम संबंधी जानकारी के दौरान देखे होंगे। अब, मान लीजिए हम एक निर्देशांक तंत्र (coordinate system) लेते हैं जिसका मूल बिन्दु दिल्ली पर हो और x-अक्ष तथा y-अक्ष क्रमशः पूर्व और उत्तर दिशाओं में हों। तब हम भारत के प्रत्येक स्थान को इसके निर्देशांक (x, y) से निरूपित कर सकते हैं। अतः दिए हुए एक क्षण पर किसी भी स्थान के तापमान को निरूपित करने वाला चर T दो चरों, x और y, का फलन होता है, अर्थात् $T = T(x, y)$.

अब, मान लीजिए एक दिन के अलग-अलग समयों पर भारत में तापमान वितरण का रिकार्ड हमें उपलब्ध है। अब T कितने चरों पर निर्भर करेगा? इस स्थिति में T, x, y और t का एक फलन होगा अर्थात् $T = T(x, y, t)$ जहाँ t, समय को निरूपित करता है। आप एक बार फिर समतापी रेखाओं से $T(x, y, t)$ को निरूपित कर सकते हैं। पर, अब समय के साथ समतापी रेखाओं में भी परिवर्तन होता रहेगा। इस स्थिति में चित्र 5.1 की ठोस रेखाएँ लगातार बदलती रहेंगी।

आप जानते हैं कि पृथ्वी की सतह समतल नहीं है, अतः यह उदाहरण पृथ्वी की सतह, के एक छोटे क्षेत्र पर ही लागू होता है। हम इस प्रकार के फलन $T(x, y)$ से बड़े क्षेत्र पर (उदाहरण के लिए चीन या अमरीका के क्षेत्र पर) तापमान-वितरण को निरूपित नहीं कर सकते।



चित्र 5.1 : भारत के भूतल पर तापमान बंटन

क्या आप एक से अधिक चरों वाले फलनों के कुछ और उदाहरण बता सकते हैं? याद कीजिए कि आप भौतिकी में गणितीय विधियाँ—I नामक पाठ्यक्रम की इकाई 2 में ऐसे फलनों के बारे में पढ़ चुके हैं। आगे पढ़ने से पहले आप ऐसे फलनों के कुछ और उदाहरण हाशिए में लिखना चाहेंगे।

इस खंड में हमारा मुख्य उद्देश्य है—अनेक चरों वाले फलनों, जो एक दिए हुए प्रांत में संतत और अवकलनीय हैं, के एक या अधिक अवकलजों वाले अवकल समीकरणों को स्थापित करना और उन्हें हल करना। अत: इस प्रकार के अवकल समीकरणों को पढ़ने से पहले आपको ऐसे फलनों की सीमा और सांतत्य, उनकी अवकलनीयता और आंशिक अवकलन जैसी कुछ गणितीय संकल्पनाओं की जानकारी होनी चाहिए।

5.2.1 सीमाएं और सांतत्य

कैलकुलस के पाठ्यक्रम में आपने एक चर के वास्तविक, एकमानी फलन (real, single-valued function of one variable) की सीमा और सांतत्य की संकल्पनाओं के बारे में पढ़ा है। आइए, हम इन संकल्पनाओं को एक से अधिक चरों के फलनों पर विस्तारित करें। पहले हम दो चरों के फलन लेंगे और उनकी सीमा का अर्थ समझेंगे।

आपको याद होगा कि एक चर वाले फलन की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है :

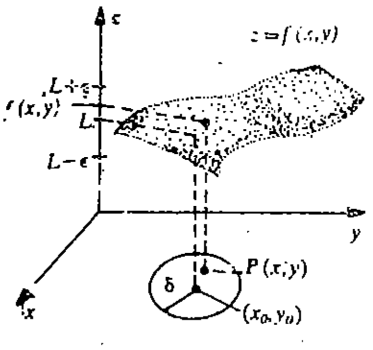
यदि A और B दो समुच्चय हों तो A से B पर फलन f एक नियम है जो A के प्रत्येक सदस्य का संबंध B के एक अद्वितीय सदस्य के साथ स्थापित करता है। समुच्चय A को f का प्रांत (domain) कहा जाता है और B को f का सह-प्रांत (co-domain) कहा जाता है। $f(x)$, B के उस अद्वितीय अवयव को प्रकट करता है जो कि A के अवयव x के साथ संबंधित है।

यदि A और B दोनों ही वास्तविक संख्या समुच्चय R के उपसमुच्चय (subset) हों, तो $f(x)$ को वास्तविक मान फलन (real-valued function) कहा जाता है।

मान लीजिए $f(x, y)$, x और y का एक वास्तविक एकमानी फलन (single-valued function) है। L को, बिन्दु (x, y) के बिन्दु (x_0, y_0) की ओर प्रवृत्त होने पर, $f(x, y)$ की **सीमा** (limit) तब कहा जाता है, जबकि (x, y) के (x_0, y_0) की ओर प्रवृत्त होने पर $f(x, y)$, L की ओर प्रवृत्त होता हो। इसे इस रूप में लिखा जाता है,

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L \tag{5.1}$$

अब बिन्दु (x, y), बिन्दु (x_0, y_0) की ओर, (x_0, y_0) से होकर जाने वाले अनंत वक्रों में से किसी वक्र के अनुदिश प्रवृत्त हो सकता है। फलन $f(x, y)$ की सीमा (L) का **अस्तित्व** (existence) केवल तब होता है, जबकि फलन सदा ही मान L की ओर प्रवृत्त होता हो, चाहे बिन्दु (x, y), बिन्दु (x_0, y_0) की ओर किसी भी वक्र के अनुदिश क्यों न प्रवृत्त होता हो। साधारण रूप से हम यह कह सकते हैं कि (x, y) के (x_0, y_0) की ओर प्रवृत्त होने पर $f(x, y)$ की सीमा L तब होती है, जबकि बिन्दु (x, y) और बिन्दु (x_0, y_0) के काफ़ी निकट होने पर, $f(x, y)$ भी L के बहुत निकट आ जाता हो। इस संबंध में आप चित्र 5.2 का अध्ययन भी कर सकते है जो इस सीमा को ज्यामितीय रूप में दिखाता है।



चित्र 5.2

इस संकल्पना को तीन या अधिक चरों वाले फलनों पर भी लागू किया जा सकता है। साधारण रूप से हम यह कह सकते हैं कि (x, y, z) के (x_0, y_0, z_0) की ओर प्रवृत्त होने पर $f(x, y, z)$ की सीमा L होती है, जबकि (x, y, z) के (x_0, y_0, z_0) के काफ़ी निकट होने पर, $f(x, y, z)$ भी L के बहुत निकट आ जाता हो। इस सीमा को चित्र रूप में प्रस्तुत नहीं किया जा सकता, क्योंकि इसके लिए चार विमाओं की आवश्यकता होती है।

अब एक स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि हम कब यह कह सकते हैं कि फलन f की सीमा का अस्तित्व नहीं है? आइए, हम इस प्रश्न का उत्तर मालूम करने की कोशिश करें। मान लीजिए f, दो चरों वाला एक फलन है और मान लीजिए

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

तब ऊपर बताई गई सीमा की संकल्पना में यह बात निहित है कि भले ही (x_0, y_0) से होकर जाने वाली किसी भी रेखा (या वक्र) के अनुदिश बिन्दु (x, y), बिन्दु (x_0, y_0) की ओर प्रवृत्त होता हो, $f(x, y)$ सदैव L की ओर प्रवृत्त होगा। अत: यह दिखाने के लिए कि $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$ का अस्तित्व नहीं है, यह दिखाना ही काफ़ी होगा कि जब बिन्दु (x, y), बिन्दु (x_0, y_0) से होकर जाने वाली अलग-अलग रेखाओं (या वक्रों) के अनुदिश, बिन्दु (x_0, y_0) की ओर प्रवृत्त होता है, तब $f(x, y)$, अलग-अलग संख्याओं की ओर प्रवृत्त होता है। इस संकल्पना को भी दो से अधिक चरों वाले फलनों पर लागू किया जा सकता है।

ध्यान दीजिए कि सीमाएँ

$$\lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y) \right)$$

और

$$\lim_{y \to y_0} \left(\lim_{x \to x_0} f(x, y) \right)$$

जिन्हें पुनरावृत्त सीमाएँ (repeated limits) कहा जाता है, वे नहीं हैं जो कि

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$$

है, जिसे युगपत सीमा (simultaneous limit) कहा जाता है। इसके बारे में विस्तृत जानकारी पाने के लिए आप उच्च-स्तरीय कलन नामक गणित के पाठ्यक्रम एम०टी०ई०-07 के खंड 2 का अध्ययन कीजिए।

इन संकल्पनाओं का परिशुद्ध गणितीय विवरण इस इकाई के एक परिशिष्ट में दिया गया है। इन संकल्पनाओं के गणितीय आधार को समझने के लिए आपको चाहिए कि आप इस परिशिष्ट में दी गई बातों को अच्छी तरह से समझ लें। **लेकिन, इस परिशिष्ट में दी गई सामग्री पर आपसे परीक्षा में प्रश्न नहीं किए जाएंगे।**

अब हम एक उदाहरण ले रहे है जिसे करके आप अभी तक दी गई संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझ सकेंगे।

उदाहरण . 1

क) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ का मान निकालिए

हल

परिशिष्ट के समीकरण (क-1) में दिए गए परिणामों को लागू करने पर हमें मिलता है

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x = -1 \quad \text{और} \quad \lim_{(x,y)\to(-1,2)} y = 2$$

गुणनफल-सूत्रों [परिशिष्ट के समीकरण (क-3)] को लागू करने पर हमें मिलता है

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x^3 = -1 \quad \text{और} \quad \lim_{(x,y)\to(-1,2)} y^3 = 8$$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} x^2 = 1 \quad \text{और} \quad \lim_{(x,y)\to(-1,2)} y^2 = 4$$

योगफल और भागफल सूत्रों (समीकरणों (क-2) और (क-4)) को संयोजित करने पर हमें मिलता है

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} x^3 + \lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} y^3}{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} x^2 + \lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} y^2} = \frac{-1+8}{1+4} = \frac{7}{5}.$$

ख) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,1,-1)} \dfrac{2x^2y-xz^2}{y^2-xz}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,1,-1)} x = 2, \quad \lim_{(x,y,z)\to(2,1,-1)} y = 1, \quad \lim_{(x,y,z)\to(2,1,-1)} z = -1$$

योगफल, गुणनफल और भागफल सूत्रों को लागू करने पर हमें मिलता है

$$\lim_{(x,y,z)\to(2,1,-1)} \frac{2x^2y-xz^2}{y^2-xz} = \frac{2.4.1-2(-1)^2}{1^2+2.1} = \frac{8-2}{3} = 2.$$

इन उदाहरणों से आपको यह आभास अवश्य होगा कि प्राय: बिन्दु (x_0, y_0) या (x_0, y_0, z_0) पर हम इन फलनों की सीमाएं इन बिन्दुओं पर फलन का मान मालूम करके ही निकाल सकते हैं। इस विधि में अपवाद के रूप में केवल वही फलन होंगे जिनकी सीमा का एक बिन्दु पर अस्तित्व नहीं होता। आइए, हम इसी प्रकार का एक फलन लें और यह जानने की कोशिश करें कि उस बिन्दु पर फलन की सीमा का अस्तित्व है या नहीं।

ग) दिखाइए कि फलन $f(x,y) = \dfrac{y^2-x^2}{y^2+x^2}$ के लिए $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है।

हल

मान लीजिए $y = mx$ तब

$$\frac{y^2-x^2}{y^2+x^2} = \frac{m^2x^2-x^2}{m^2x^2+x^2} = \frac{m^2-1}{m^2+1}$$

m के अलग-अलग मानों के लिए $\dfrac{m^2-1}{m^2+1}$ का मान अलग-अलग होगा। इससे यह अर्थ निकलता है कि m के अलग-अलग मानों की संगत रेखाओं के अनुदिश, (x, y) के $(0, 0)$ की ओर प्रवृत्त होने पर, $f(x, y)$, अलग-अलग मानों की ओर प्रवृत्त होता है। अत: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ का अस्तित्व नहीं है।

इन संकल्पनाओं को और अच्छी तरह से समझने के लिए अब आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 1

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

क) दिखाइए कि $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \dfrac{x^2+2xy^2+y^4}{1+y^2} = 0$

ख) दिखाइए कि $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{(x^2+y^2)}$ का अस्तित्व नहीं है।

क्योंकि आपने अनेक चरों वाले फलनों की सीमाओं की संकल्पना को अच्छी तरह से समझ लिया है, इसलिए अब हम इन फलनों के सांतत्य (continuity) को परिभाषित करेंगे।

- दो चरों वाला फलन f बिन्दु (x_0, y_0) पर संतत होता है, यदि

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

- तीन चरों वाला फलन f बिन्दु (x_0, y_0, z_0) पर संतत होता है, यदि

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x,y,z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

- अनेक चरों वाला फलन संतत होता है, यदि वह अपने प्रांत के प्रत्येक बिन्दु पर संतत हो।
- संतत फलनों के योगफल, गुणनफल, भागफल संतत होते हैं।
- संतत फलनों का संयोजन (composite) संतत होता है।

आपने जो भी परिभाषाएं और नियम अभी तक पढ़े हैं, उनके साथ-साथ आपको इन फलनों के लिए प्रतिस्थापन नियम (substitution rule) की जानकारी भी होनी चाहिए।

एक फलन-युग्म (pair of functions) f और g लीजिए। मान लीजिए f का सह-प्रांत g का प्रांत है अर्थात्

$f : X \to Y$ और

$g : Y \to Z$

तब समीकरण

$h(x) = g(f(x))$

से परिभाषित फलन

$h : X \to Z$

को f और g का संयुक्त फलन (composite function) कहा जाता है। फलन

$g(f(x, y))$

भी दो चरों वाले फलनों f और g का संयुक्त फलन है।

प्रतिस्थापन नियम

दो चरों के फलन के लिए मान लीजिए कि

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

मान लीजिए g, एक चर t का फलन है और मान लीजिए $t = L$ पर g संतत है। तब प्रतिस्थापन नियम से

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(f(x,y)) = g(L)$$

आइए, हम इन संकल्पनाओं को एक उदाहरण से समझने की कोशिश करें।

उदाहरण 2

क) दिखाइए कि फलन $\ln(x/y)$ बिन्दु $(e, 1)$ पर संतत है।

हल

वास्तव में, हमें यहाँ यह दिखाना है कि

$$\lim_{(x,y)\to(e,1)} \ln(x/y) = \ln(e/1) = 1.$$

मान लीजिए $f(x, y) = \frac{x}{y}$ और $g(t) = \ln t$.

सीमाओं के भागफल सूत्रों को लागू करने पर हमें मिलता है

$$\lim_{(x, y) \to (e, 1)} (x/y) = e$$

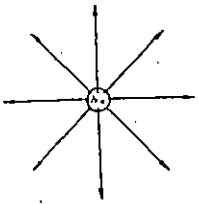
क्योंकि $\lim_{t \to e} g(t) = \ln(e) = 1 = g(e)$, इसलिए $t = e$ पर g संतत है। इस तरह, प्रतिस्थापन नियम लागू करने पर हमें मिलता है

$$\lim_{(x, y) \to (e, 1)} \ln(x/y) = g(e) = 1$$

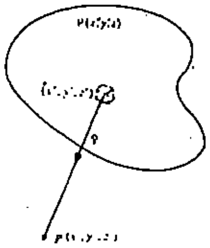
अतः फलन $\ln (x/y)$ बिन्दु $(e, 1)$ पर संतत है।

ख) अब हम भौतिकी का एक उदाहरण लेते हैं। बिन्दु आवेश q के कारण बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र होता है,

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$



(क)



(ख)

चित्र 5.3 : (क) बिन्दु आवेश का E, उस बिन्दु पर संतत नहीं है, जहाँ आवेश स्थित है; (ख) $\rho(x', y', z')$ का प्रत्येक अवयव बिन्दु (x, y, z) पर क्षेत्र में एक योगदान करता है। इस बिन्दु पर कुल क्षेत्र ऐसे सभी योगदानों का जोड़ होता है।

बिन्दु आवेश के लिए $\mathbf{E}$ को चित्र 5.3 क में दिखाया गया है। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि $r \to 0$ होने पर विद्युत क्षेत्र का परिमाण अनंत की ओर प्रवृत्त होता है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि बिन्दु आवेश का विद्युत क्षेत्र बिन्दु $r = 0$ पर अर्थात् आवेश की स्थिति पर संतत नहीं है। यही कारण है कि हम उस बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र के बारे में कुछ नहीं कहते जहाँ आवेश स्थित है।

पर, परिमित संतत आवेश वितरण से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र संतत होता है। बिन्दु $P(x, y, z)$ पर संतत बंटन $\rho(x', y', z')$ (चित्र 5.3 ख) से उत्पन्न क्षेत्र होता है

$$\mathbf{E}(x, y, z) = \int_V \frac{\rho(x', y', z')\, \hat{\mathbf{r}}\, dV}{r^2}$$

यहाँ $\hat{\mathbf{r}}$ की दिशा (x', y', z') से (x, y, z) की ओर है। आप PHE-04 की इकाई 3 से यह जानते हैं कि गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों (spherical polar coordinates) में

$$dV = r^2 dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

यानी $\mathbf{E}(r, \theta, \phi) = \int_V \rho(r', \theta', \phi')\, \hat{\mathbf{r}}\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\phi$

यह समाकल आकाश के प्रत्येक बिन्दु पर परिमित है और r के आकाश के किसी भी बिन्दु की ओर प्रवृत्त होने पर यह समाकल उस बिन्दु पर $\mathbf{E}$ के मान की ओर प्रवृत्त होता है। अतः जब तक ρ परिमित बना रहता है, तब तक आवेश वितरण की परिसीमा (boundary) पर या उसके अंदर $\mathbf{E}$ सर्वत्र संतत (continuous) होता है।

अब आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करें।

इस पर 5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 2

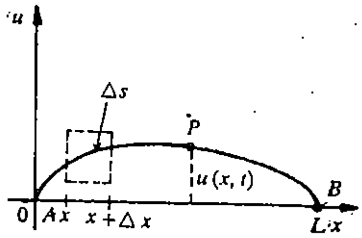
दिखाइए कि

$$f(x, y) = \sin \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}$$

एक संतत फलन है।

अभी तक आपने अनेक-चरों वाले फलनों की सीमाओं और सांतत्य की आधारभूत संकल्पनाओं का अध्ययन किया है। अब हम इस प्रश्न पर विचार कर सकते हैं : इन फलनों का अवकलन कैसे किया जाता है? उदाहरण के लिए, समय t पर गिटार का एक कंपन कर रहा तार लीजिए जिसकी लंबाई L है (चित्र 5.4)। इस तार के सिरे A और B नियत हैं और यह xy समतल में इस प्रकार कंपन कर रहा है कि इसका प्रत्येक बिन्दु x-अक्ष की लंबवत् दिशा में गतिमान होता है। यह अनुप्रस्थ कंपन (transverse vibration) का उदाहरण है। मान लीजिए $u(x, t)$, समय $t > 0$ पर तार के बिन्दु P का x-अक्ष के प्रति ऊर्ध्वाधर विस्थापन (vertical displacement) है। अब हमारी दिलचस्पी

यह मालूम करने में हो सकती है कि बिन्दु P कितनी तेजी से गति कर रहा है। यानी भुजा x वाली उर्ध्वाधर रेखा के अनुदिश तार का वेग क्या है। साथ ही हम चित्र 5.4 में दिए गए वक्र की बिन्दु P पर प्रवणता (slope) भी निकालना चाह सकते हैं। इन दो स्थितियों में से पहली स्थिति में हम x को नियत रखते हैं और u को t के सापेक्ष अवकलित करते हैं। और, दूसरी स्थिति में हम t को नियत रखते हैं और u को x के सापेक्ष अवकलित करते हैं। इस तरह, हम यह देखते हैं कि अन्य चरों को नियत रखकर अनेक चरों वाले फलन को एक चर के सापेक्ष अवकलित किया जा सकता है।



चित्र 5.4 : किसी समय $t > 0$ पर गिटार के कंपायमान तार का विस्थापन $u(x, t)$

इस उदाहरण से हमें स्वाभाविक रूप से यह जानकारी मिलती है कि अनेक चरों वाले फलन का परिवर्तन दर केवल एक फलन से निर्धारित नहीं होता। ऐसा इसलिए है क्योंकि स्वतंत्र चर अलग-अलग तरह से परिवर्तित हो सकते हैं। n-चरों वाले फलन के तमाम परिवर्तन-दर n-फलनों से निर्धारित होते हैं जो इस फलन के आंशिक अवकलज (partial derivatives) कहलाते हैं। आइए, अब हम आंशिक अवकलन के बारे में कुछ विस्तार से जानकारी हासिल करें।

5.2.2 आंशिक अवकलन

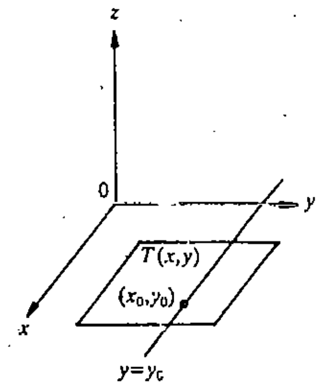
इस भाग में हम आंशिक अवकलज को परिभाषित करेंगे और उसे परिकलित करने की विधि बताएंगे। दो चरों वाला एक फलन $f(x, y)$ लीजिए। और मान लीजिए (x_0, y_0), f के प्रांत में है। परिभाषा से (x_0, y_0) पर x के सापेक्ष f का प्रथम कोटि आंशिक अवकलज होता है

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \qquad (5.2 \text{ क})$$

जबकि इस सीमा का अस्तित्व हो। इसी प्रकार, (x_0, y_0) पर y के सापेक्ष f का प्रथम कोटि आंशिक अवकलज होता है

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \qquad (5.2 \text{ ख})$$

जबकि इस सीमा का अस्तित्व हो।



चित्र 5.5

अतः यदि किसी दिए हुए बिन्दु पर किसी फलन की इन सीमाओं का अस्तित्व न हो, तो इसके आंशिक अवकलजों का भी अस्तित्व नहीं होता। आंशिक अवकलनों से प्राप्त फलनों f_x और f_y को, जिनकी परिभाषा इस प्रकार दी जाती है,

$$f_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \qquad (5.3\text{क})$$

और

$$f_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \qquad (5.3\text{ख})$$

क्रमशः x और y के सापेक्ष f का आंशिक अवकलज कहा जाता है। इन्हें क्रमशः $\frac{\partial f}{\partial x}$ और $\frac{\partial f}{\partial y}$ से भी प्रकट किया जाता है। तीन या अधिक चरों वाले फलनों के प्रथम कोटि आंशिक अवकलजों को भी इसी प्रकार परिभाषित किया जाता है।

आंशिक अवकलजों की एक संकेत पद्धति $(\partial z/\partial x)_y$ भी है जिसका प्रयोग अनेक क्षेत्रों में (विशेष रूप से ऊष्मागतिकी में) प्रायः होता है। यह x के सापेक्ष $z(x, y)$ के आंशिक अवकलज को निरूपित करता है, जबकि y को अचर माना जाता हो। उदाहरण के लिए ऊष्मागतिकी में संकेतों

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V, \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_U$$

आदि का प्रयोग किया जाता है, जहाँ T, P, V और U ऊष्मागतिकीय चर, क्रमशः तापमान, दाब, आयतन और आंतरिक ऊर्जा है। आप यहाँ यह देख सकते है कि ये दो आंशिक अवकलज अलग-अलग हैं।

हम $f_x(x_0, y_0)$ को (x_0, y_0) पर x के सापेक्ष $f(x, y)$ का परिवर्तन-दर मान सकते हैं जबकि y को अचर रखा गया हो। उदाहरण के लिए, मान लीजिए $T(x, y)$, xy समतल में स्थित धातु के सपाट प्लेट के किसी बिन्दु (x, y) का तापमान है तब $T_x(x_0, y_0)$ वह दर है जिससे रेखा $y = y_0$ के अनुदिश (चित्र 5.5) (x_0, y_0) पर तापमान में परिवर्तन होता है। इसी प्रकार आंशिक अवकलज $T_y(x_0, y_0)$ वह दर है जिससे रेखा $x = x_0$ के अनुदिश (x_0, y_0) पर तापमान में परिवर्तन होता है।

इस तरह, एक चर के फलनों के अवकलज मालूम करने की तुलना में एक से अधिक चर वाले फलनों के आंशिक अवकलज प्राप्त करना कुछ अधिक कठिन नहीं है। निम्नलिखित नियम लागू करके आप आंशिक अवकलजों का परिकलन आसानी से कर सकते हैं :

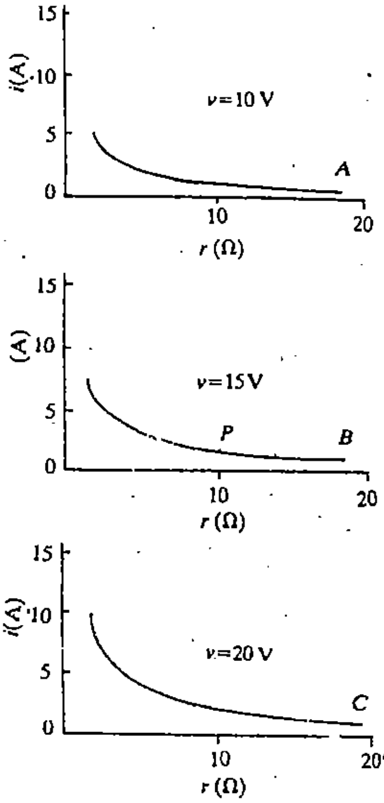
> अनेक चरों के फलन f का एक चर के सापेक्ष आंशिक अवकलज प्राप्त करने के लिए,
> - शेष चरों को अचर मान लीजिए,
> - एक चर कैलकुलस के नियमों को लागू करके सामान्य रूप से f का अवकलन कीजिए।

साधारण अवकलजों के योगफल, गुणनफल और भागफल नियम की तरह आंशिक अवकलजों के भी इसी प्रकार के नियम होते हैं। इस तरह, यदि $f(x, y)$ और $g(x, y)$ के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो, तो

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \pm g) = \frac{\partial f}{\partial x} \pm \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{और} \quad \frac{\partial}{\partial y}(f \pm g) = \frac{\partial f}{\partial y} \pm \frac{\partial g}{\partial y} \qquad (5.4\text{क})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(fg) = \frac{\partial f}{\partial x} g + f\frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{और} \quad \frac{\partial}{\partial y}(fg) = \frac{\partial f}{\partial y} g + f\frac{\partial g}{\partial y} \qquad (5.4\text{ख})$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} g - f\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2} \quad \text{और} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial y} g - f\frac{\partial g}{\partial y}}{g^2} \qquad (5.4\text{ग})$$



चित्र 5.6 : लागू की गई वोल्टता के अलग-अलग मानों के लिए प्रतिरोध के साथ प्रतिरोधी परिपथ अवयव में धारा का परिवर्तन।

उदाहरण के लिए $f(x, y) = x^2y^3 - x^3y^2$ लीजिए। यहाँ y को अचर मानकर x के सापेक्ष f का आंशिक अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} x^2y^3 - \frac{\partial}{\partial x} x^3y^2 = 2xy^3 - 3x^2y^2$$

इसी प्रकार x को अचर मानकर y के सापेक्ष फलन f का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} x^2 y^3 - \frac{\partial}{\partial y} x^3 y^2 = 3x^2y^2 - 2x^3y$$

आइए, इन संकल्पनाओं को और अच्छी तरह से समझने के लिए भौतिकी का उदाहरण लें।

उदाहरण 3

आरोपित वोल्टता v के अलग-अलग मानों के लिए, प्रतिरोध r में परिवर्तन करने पर एक परिपथ में धारा i में हो रहे परिवर्तन पर विचार कीजिए (चित्र 5.6)। इन राशियों के बीच के संबंध को सुपरिचित ओम नियम $i = \frac{v}{r}$ से दिया जाता है।

अब मान लीजिए हमें वक्र B (चित्र 5.6 ख) के बिन्दु P पर वक्र की प्रवणता (slope) मालूम करनी है। v को अचर मान लेने पर हमें मिलता है

$$\frac{\partial i}{\partial r} = -\frac{v}{r^2}$$

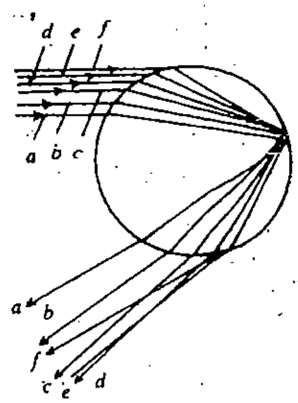
वक्र B के लिए $v = 15$V और बिन्दु P पर $r = 10\Omega$

इसी तरह, $\left.\frac{\partial i}{\partial r}\right|_P = -\frac{15}{100} \text{A}\,\Omega^{-1} = -0.15 \text{ A}\,\Omega^{-1}$

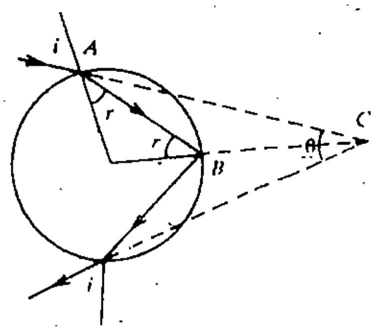
तब हम कह सकते हैं कि 0.15 एम्पीयर प्रति ओम के ऋणात्मक दर से प्रतिरोध के साथ धारा में परिवर्तन हो रहा है, जबकि अन्य प्राचल (parameters) समान हों।

आपको भौतिकी में आंशिक अवकलज के अन्य अनेक अनुप्रयोग देखने को मिलेंगे। उदाहरण के लिए, "ऊष्मागतिकी और सांख्यिकीय यांत्रिकी" (thermodynamics and statistical mechanics) नामक भौतिकी के पाठ्यक्रम PHE-06 में आप ऊष्मागतिकीय विभवों (thermodynamic potentials) के बारे में पढ़ेंगे जिसमें आंशिक अवकलजों का काफ़ी प्रयोग होता है।

लेकिन आप इस बात का ध्यान ज़रूर रखें कि ऐसे अपवाद भी होते हैं जिनके लिए इस विधि से फलनों के आंशिक अवकलज प्राप्त कर पाना संभव नहीं होता। उन स्थितियों में हमें सीमा प्राप्त करने की प्रक्रिया को लागू करना होता है। ऐसी स्थितियों पर हम तभी विचार करेंगे जब हमारा वास्ता उनसे पड़ेगा। आंशिक अवकल समीकरणों के अध्ययन के दौरान उच्च कोटि आंशिक अवकलज भी आएंगे जिनके बारे में भी आपको जानकारी होनी चाहिए।



(क)



(ख)

चित्र 5.7 : (क) आसमान में जो मुख्य इंद्रधनुष आप देखते हैं वह विभिन्न एकवर्णी किरणों के कारण बनता है, जो कि पानी की बूंदों द्वारा अपवर्तित, परावर्तित और फिर अपवर्तित होती हैं; (ख) एकवर्णी किरण के बूंद में प्रवेश करने से पहले के पथ और बूंद से निकलने के बाद के पथ से बना कोण θ, i और μ दोनों पर निर्भर करता है।

उच्च कोटि आंशिक अवकलज

क्योंकि किसी फलन के आंशिक अवकलज स्वयं फलन होते हैं, इसलिए उच्च कोटि आंशिक अवकलज प्राप्त करने के लिए हम इनके आंशिक अवकलज ले सकते हैं। हम निम्नलिखित तरीकों से $f(x, y)$ के द्वितीय अवकलज प्राप्त कर सकते हैं :

$$f_{xx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad f_{yy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad f_{yx}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \qquad (5.5)$$

f_{xy} और f_{yx} को मिश्रित आंशिक अवकलज (mixed partial derivatives) कहा जाता है।

यदि $f(x, y)$ के संतत द्वितीय अवकलजों का अस्तित्व हो, तो मिश्रित आंशिक अवकलज बराबर होंगे, अर्थात्

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{या} \quad f_{yx} = f_{xy} \qquad (5.6)$$

अब आपको चाहिए कि आप कुछ प्रथम और द्वितीय आंशिक अवकलज परिकलित करें।

बोध प्रश्न 3

प्रश्न पर 15 मिनट लगाएं

क) $f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y^2z^2 + 3yz^4$ और $h(x, y, t) = xe^t - y^2e^{2t}$ के सभी प्रथम कोटि आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1)$ और $\frac{\partial h}{\partial t}(4, 1, 0)$ के मान मालूम कीजिए।

ख) दिखाइए कि फलन $z = \ln(x^2 + y^2)$ समीकरण

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

को संतुष्ट करता है।

ग) बरसात के दिनों में आपने आकाश में इंद्रधनुष तो देखा ही होगा। वातावरण में उपस्थित जल कणों द्वारा सूर्य के प्रकाश की विभिन्न एकवर्णी (monochromatic) किरणों के अपवर्तन (refraction), परावर्तन (reflection) और पुन: अपवर्तन के कारण आकाश में इंद्रधनुष बनता है (चित्र 5.7 क)। किसी एकवर्णी किरण के लिए चित्र 5.7 ख में दिखाया गया कोण θ होता है,

$$\theta(\mu, i) = 4\sin^{-1}\left(\frac{\sin i}{\mu}\right) - 2i$$

जहाँ μ किरण के लिए जल का अपवर्तनांक (index of refraction) है और i इसका आपतन कोण (angle of incidence) है। किसी दिए हुए μ के लिए वह कोण i_μ ज्ञात कीजिए जिसके लिए

$$\frac{\partial \theta}{\partial i_\mu}(\mu, i_\mu) = 0$$

घ) एक गैस की एन्ट्रॉपी S यह है

$$S = C_v \ln P + C_p \ln V + A \qquad \text{(i)}$$

जहाँ C_p, C_v और A अचर हैं। आदर्श गैस नियम $PV = RT$ से V का मान प्रतिस्थापित करके हम लिख सकते हैं,

$$S = (C_v - C_p)\ln P + C_p \ln T + B \qquad \text{(ii)}$$

जहाँ B एक अचर है। (i) और (ii) से $\partial S/\partial P$ परिकलित कीजिए। ये दो व्यंजक अलग-अलग क्यों हैं?

अभी तक की चर्चा से हमें कुछ परिणाम तर्कसंगत रूप से मिलते हैं। यहाँ हम उनका केवल कथन देंगे, और उन्हें सिद्ध नहीं करेंगे। **किसी अनेक चरों वाले फलन के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो भी, तो यह आवश्यक नहीं कि वह फलन संतत हो। साथ ही यह भी आवश्यक नहीं है कि यदि किसी बिन्दु पर एक अनेक चरों वाला फलन संतत हो तो उस बिन्दु पर उसके किसी भी आंशिक अवकलज का अस्तित्व हो।** आप इन संकल्पनाओं के बारे में गणित के पाठ्यक्रम एम०टी०ई०–07 के खंड 2 में विस्तार से पढ़ सकते हैं। इस पृष्ठभूमि में अब हम इन प्रश्नों पर विचार करना चाहेंगे : हम यह कब कह सकते हैं कि अनेक चरों वाला कोई फलन "अवकलनीय" (differentiable) है? क्या संतत फलन $f(x, y)$, किसी बिन्दु पर अवकलनीय होता है? या कि $f(x, y)$ एक बिन्दु पर तब अवकलनीय होता है, जबकि उस बिन्दु पर उसके आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो? अब हम इन प्रश्नों के उत्तर संक्षेप में देंगे।

5.2.3 अवकलनीयता

आप जानते हैं कि **यह आवश्यक नहीं है कि एक चर वाला वास्तविक–मान संतत फलन अवकलनीय भी हो।** यही बात अनेक चरों वाले फलनों पर भी लागू होती है। इसी प्रकार, क्योंकि किसी फलन के आंशिक अवकलजों के अस्तित्व होने भर से ही वह संतत नहीं होता, इसलिए यह ज़रूरी नहीं है कि वह अवकलनीय भी हो। अत: फलन के अवकलनीय होने के लिए हमें अतिरिक्त प्रतिबंध चाहिए। पर यहाँ हम अवकलनीय फलन की औपचारिक गणितीय परिभाषा नहीं देंगे। यहाँ हम केवल उन पर्याप्त प्रतिबंधों (sufficient conditions) का कथन देंगे जिनके संतुष्ट होने से अनेक चरों वाला कोई फलन अवकलनीय होता है :

> यदि एक डिस्क पर, जिसका केन्द्र (x_0, y_0) पर है, $f(x, y)$ के आंशिक अवकलजों का अस्तित्व हो, और यदि f_x और f_y बिन्दु (x_0, y_0) पर संतत हों, तो बिन्दु (x_0, y_0) पर f अवकलनीय होता है।

पर, ये प्रतिबंध आवश्यक प्रतिबंध (necessary conditions) नहीं है। यानी उस स्थिति में भी कोई फलन एक बिन्दु पर अवकलनीय हो सकता है जबकि उसका कोई भी आंशिक अवकलज उस बिन्दु पर संतत न हो।

इन संकल्पनाओं को समझने से आपको यह तो मालूम हुआ होगा कि अनेक चरों वाले वास्तविक मान संतत अवकलनीय फलन का क्या अर्थ है। यह गणितीय जानकारी पा लेने के बाद हम आंशिक अवकल समीकरणों अर्थात् अनेक चरों वाले फलनों के आंशिक अवकलज से संबंधित समीकरणों पर चर्चा कर सकते हैं।

5.3 आंशिक अवकल समीकरण

पहले हम ऐसे कुछ उदाहरण लेंगे जिनसे आपको समझ आएगा कि किस प्रकार भौतिक स्थिति में कुछ विशेष आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं। इसके बाद हम आंशिक अवकल समीकरणों का वर्गीकरण करेंगे और यह समझेंगे कि इनके हल का क्या अर्थ होता है। तो पहले अपरिवर्ती (steady) रूप से प्रवाहित हो रही जल की धारा का उदाहरण लेते हैं जिसका वेग क्षेत्र $\mathbf{v} = v_1\,\hat{\mathbf{i}} + v_2\,\hat{\mathbf{j}} + v_3\,\hat{\mathbf{k}}$ है। मान लीजिए यह वेग क्षेत्र असंपीड्य (incompressible) और अघूर्णी (irrotational) है। तब भौतिकी में गणितीय विधियाँ-1 (PHE-04) के पाठ्यक्रम की इकाई 2 (भाग 2.4) से आप यह जानते हैं कि इस वेग क्षेत्र के लिए $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$ और $\nabla \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$, अर्थात् $\mathbf{v} = \nabla\phi$ जहाँ ϕ एक अदिश क्षेत्र (scalar field) है। अब आप इन संबंधों को कार्तीय निर्देशांक तंत्र (Cartesian coordinate system) में उनके अवकल रूप में व्यक्त करने के लिए डाईवर्जेन्स और ग्रेडिएण्ट की परिभाषाओं का प्रयोग कर सकते हैं :

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0 \qquad \text{(5.7क)}$$

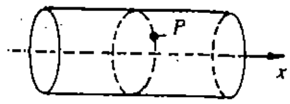
$$\mathbf{v} = \nabla\phi, \text{ अर्थात्, } v_1 = \ldots\ldots, \quad v_2 = \ldots\ldots, \quad v_3 = \ldots\ldots \qquad \text{(5.7ख)}$$

तब समीकरण (5.7 ख) को समीकरण (5.7 क) में प्रतिस्थापित करने पर आपको निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होगा :

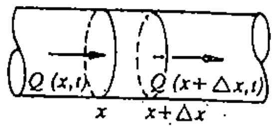
$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \qquad (5.8)$$

इस तरह, आपने भौतिकी के एक सुप्रसिद्ध आंशिक अवकल समीकरण को स्थापित कर लिया है, जिसे **लाप्लांस समीकरण** (Laplace equation) कहते हैं। यह समीकरण किसी भी असंपीड्य और अघूर्णी प्रवाह के वेग विभव फलन (velocity potential function) से संतुष्ट होता है। इसका अनुप्रयोग गुरुत्वाकर्षण, स्थिर वैद्युतिकी, प्रत्यास्थता (elasticity) और अपरिवर्ती-अवस्था ऊष्मा चालन, जैसे विविध क्षेत्रों में होता है। आइए, अब हम एक और उदाहरण लें।

मान लीजिए धातु के एक बेलनाकार छड़ में ऊष्मा प्रवाहित हो रही है। यहाँ हम बेलन के अक्ष को x-अक्ष मान लेते हैं। हम यह भी मान लेते हैं कि ऊष्मा केवल x-अक्ष की समांतर दिशा में प्रवाहित हो सकती है। इसका यह अर्थ है कि किसी भी क्षण t पर तापमान T अनुप्रस्थ परिच्छेद (cross-section) x = अचर, के सभी बिन्दुओं पर समान रहता है (चित्र 5.8 क देखिए)। तब $T(x, t)$ समय t पर छड़ के किसी बिन्दु $P(x)$ के तापमान को व्यक्त करता है। यहाँ हम यह भी मान लेते हैं कि छड़ के अन्दर कोई ऊष्मा जनित नहीं होती। अब हम प्रायोगिक रूप से सत्यापित दो नियमों—फूरिए नियम (Fourier's law) और ऊष्मा-संरक्षण नियम (principle of conservation of heat) के अनुसार छड़ में ऊष्मा-प्रवाह को निदर्शित कर सकते हैं। फूरिए नियम यह है : प्रवाह की लंब दिशा में प्रति एकक क्षेत्रफल ऊष्मा-प्रवाह की दर $Q(x, t)$, तापमान-प्रवणता के समानुपाती होती है। क्या आप इस नियम को गणितीय रूप में व्यक्त करना चाहेंगे? कोशिश कीजिए।



(क)



(ख)

चित्र 5.8 : धातु के बेलनाकार छड़ में ऊष्मा का प्रवाह

क्योंकि प्रवाह एकविम (one-dimensional) है, इसलिए आपको निम्नलिखित संबंध प्राप्त होना चाहिए :

$$Q(x, t) = -AK \frac{\partial T}{\partial x}(x, t), \qquad (5.9)$$

जहाँ $Q(x, t)$ समय t पर धनात्मक x-दिशा में परिच्छेद x = अचर से होते हुए ऊष्मा-प्रवाह की दर है। यहाँ K धातु की ताप-चालकता (thermal conductivity) है और A छड़ का अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल है। यहाँ ऋण चिह्न इसलिए लगाया गया है, क्योंकि ऊष्मा गर्म क्षेत्र से ठंडे क्षेत्र की ओर प्रवाहित होती है, जिससे कि जब तापमान प्रवणता ऋणात्मक होती है तो Q धनात्मक होता है और जब तापमान-प्रवणता धनात्मक होती है तो Q ऋणात्मक होता है।

ऊष्मा-संरक्षण नियम के अनुसार ऊष्मा स्रोत-रहित क्षेत्र में जिस दर से ऊष्मा संचित होती है वह उस नेट दर के बराबर होती है जिससे ऊष्मा उस क्षेत्र की परिसीमाओं से होते हुए उसमें प्रवेश करती है। आइए, हम इस नियम को x और $x + \Delta x$ के बीच छड़ के एक छोटे भाग पर लागू करें (चित्र 5.7 ख देखिए)। जिस दर से ऊष्मा इस भाग में समय t पर संचित होती है, वह है

$$Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)$$

अब आप t और $t + \Delta t$ के बीच के लघु समय-अंतराल में इस भाग में संचित ऊष्मा के लिए व्यंजक लिख सकते हैं :

.... (5.10क)

आप जानते हैं कि द्रव्यमान m और विशिष्ट ऊष्मा (specific heat) s वाले पिंड के औसत तापमान को T_1 से बढ़ाकर T_2 करने के लिए आवश्यक ऊष्मा होती है $ms(T_2 - T_1)$। छड़ के छोटे भाग $A\,\Delta x$ के लिए $m = \rho A \Delta x$, जहाँ ρ धातु का घनत्व है। मान लीजिए समय t और $(t + \Delta t)$ पर इस भाग के औसत तापमान क्रमशः $T(x, t)$ और $T(x, t + \Delta t)$ हैं और मान लीजिए धातु की विशिष्ट ऊष्मा s है। तब आप इन समयों के बीच इस भाग में वर्धित ऊष्मा ऊर्जा को लिख सकते हैं :

.... (5.10ख)

ऊष्मा संरक्षण नियम के अनुसार समीकरण (5.10 क) और समीकरण (5.10 ख) के व्यंजक बराबर होने चाहिए।

इस तरह,

$$[Q(x, t) - Q(x + \Delta x, t)]\,\Delta t = (\rho A \Delta x)s\,[T(x, t + \Delta t) - T(x, t)] \qquad (5.10ग)$$

अब दोनों पक्षों को $(\Delta x\ \Delta t)$ से भाग दीजिए और इनकी एक साथ सीमा लीजिए जबकि Δx और Δt शून्य की ओर प्रवृत्त होते हों। इससे आपको क्या मिलेगा ? परिणाम को लिखें :

.... (5.10घ)

समीकरण (5.9) को समीकरण (5.10घ) में प्रतिस्थापित करने पर आपको यह मिलना चाहिए।

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[AK\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right] = \rho As\,\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) \tag{5.10ङ}$$

इस समीकरण को सरल करने पर हमें मिलता है

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0, \tag{5.11}$$

जहाँ $k = \dfrac{K}{\rho s}$ को उस धातु की (जिससे छड़ बना है) तापीय विसरणशीलता (thermal diffusivity) कहा जाता है। ध्यान रहे कि समीकरण (5.11) को लिखने में हमने k को एक अचर माना है, जो सदा ही सत्य नहीं होता।

समीकरण (5.11) को **एकविम विसरण समीकरण** (one-dimensional diffusion equation) कहा जाता है। इसे ऐसा इसलिए कहा जाता है क्योंकि यह उन विभिन्न भौतिक राशियों के विसरण या धीमे परिवर्तन को निदर्शित करता है जो कि एक विमा में दिक्काल निर्देशांकों (time and space coordinates) के संतत फलन हैं। इस समीकरण का प्रयोग द्रव या गैस सांद्रणों के विसरण को निर्धारित करने में भी किया जाता है। समीकरण (5.11) का एक परिवर्तित रूप न्यूक्लीय रिएक्टर में न्यूट्रॉनों के विसरण को निदर्शित करता है। उन स्थितियों में जबकि समीकरण (5.11) एक-विम वस्तु में, जैसा कि उदाहरण में लिया गया है, ऊष्मा प्रवाह को निदर्शित करता है, इसे एक-विम ऊष्मा प्रवाह समीकरण (one-dimensional heat flow equation) भी कहा जाता है।

समीकरण (5.8) और समीकरण (5.11) दो आंशिक अवकल समीकरण हैं जिनके भौतिकी में अनेक अनुप्रयोग हैं। इस पाठ्यक्रम की इकाई 6 में और भौतिकी के अन्य पाठ्यक्रमों में अन्य कई तरह के आंशिक अवकल समीकरण आपको देखने को मिलेंगे। यहाँ हमारा मुख्य उद्देश्य उन आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधियाँ सीखना है जिनका प्रयोग भौतिकी में होता है। पर, इन विधियों को सीखने से पहले आपको इस बात की जानकारी होनी चाहिए कि आंशिक अवकल समीकरणों का वर्गीकरण किस प्रकार किया जाता है। आपको इस बात की भी जानकारी होनी चाहिए कि आंशिक अवकल समीकरण के हल का क्या अर्थ होता है? अगले दो उपभागों में हम इन्हीं पर चर्चा करेंगे।

5.3.1 आंशिक अवकल समीकरणों का वर्गीकरण

हम आंशिक अवकल समीकरणों का वर्गीकरण लगभग उसी तरह करते हैं जिस तरह कि साधारण अवकल समीकरणों का। यानि कि इनका वर्गीकरण भी हम इनकी कोटि, घात और रैखिकता/अरैखिकता के अनुसार करते हैं। रैखिक अवकल समीकरणों को समघात/असमघात, और दीर्घवृत्तीय, परवलयिक और अतिपरवलयिक आंशिक अवकल समीकरणों में वर्गीकृत करते हैं। आइए, हम देखें कि इन शब्दों के अर्थ क्या हैं।

कोटि और घात

ठीक साधारण अवकल समीकरणों की तरह आंशिक अवकल समीकरण की **कोटि** (order) भी समीकरण के उच्चतम अवकलज की कोटि होती है।

उदाहरण के लिए समीकरण

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \tag{5.12}$$

प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण है। फलन $f(x, y)$ के प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण में आंशिक अवकलजों $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ में से कम से कम एक आंशिक अवकलज अवश्य होता है, पर एक से अधिक कोटि वाला कोई भी आंशिक अवकलज नहीं होता। $f(x, y)$ के द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण में f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} या f_{yx} अवश्य होता है, पर दो से अधिक कोटि वाला कोई आंशिक अवकलज नहीं होता। समीकरण (5.8) और (5.11) द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण हैं। द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरणों में समीकरण (5.11) की तरह $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ जैसे प्रथम कोटि आंशिक अवकलज भी हो सकते हैं।

आंशिक अवकल समीकरण का **घात** (degree) समीकरण के उच्चतम अवकलज का घात होता है।

उदाहरण के लिए, समीकरण (5.8), (5.11) और (5.12) घात एक वाले आंशिक अवकल समीकरण हैं। आंशिक अवकल समीकरण

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^3 + \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \tag{5.13}$$

घात 3 वाला प्रथम कोटि आंशिक अवकल समीकरण है। अब आप चाहें तो बोध प्रश्न 4 में दिए गए आंशिक अवकल समीकरणों की कोटि और घात लिख सकते हैं।

रैखिक और अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण

ठीक साधारण अवकल समीकरणों की तरह यहाँ भी आंशिक अवकल समीकरण **रैखिक** (linear) होता है यदि

i) इसका अज्ञात फलन (आश्रित चर) और उसके आंशिक अवकलज प्रथम घात के हों,

ii) इसमें अज्ञात फलनों और किसी भी आंशिक अवकलज के गुणनफल न हों, और

iii) इसमें कोई भी अबीजीय फलन न हों।

अन्यथा, यह **अरैखिक** (nonlinear) आंशिक अवकल समीकरण होता है। उदाहरण के लिए, समीकरणों (5.8), (5.11), (5.12) के आंशिक अवकल समीकरण और निम्नलिखित अवकल समीकरण रैखिक हैं :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{5.14}$$

और

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y) \tag{5.15}$$

समीकरण (5.13) का आंशिक अवकल समीकरण अरैखिक है क्योंकि इसका घात 3 है।

रैखिक आंशिक अवकल समीकरण को **समघात** (homogeneous) या **असमघात** (nonhomogeneous) समीकरणों में भी वर्गीकृत किया जा सकता है।

समघात और असमघात रैखिक आंशिक अवकल समीकरण

यदि आंशिक अवकल समीकरण के प्रत्येक पद में या तो अज्ञात फलन या इसका एक आंशिक अवकलज हो, तो इसे **समघात** (homogeneous) कहा जाता है, अन्यथा इसे **असमघात** कहा जाता है। बताइए कि समीकरणों (5.8), (5.11), (5.12), (5.14) और (5.15) में कौन-कौन से समीकरण समघात हैं और कौन-कौन से असमघात? आपने सही पहचाना। समीकरण (5.15) को छोड़कर अन्य सभी समीकरण समघात हैं।

अब बोध प्रश्न 4 को हल करके आप आंशिक अवकल समीकरणों को वर्गीकृत करने का अभ्यास कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 4

नीचे दिए गए आंशिक अवकल समीकरणों में से प्रत्येक की कोटि और घात बताइए। यह भी बताइए कि कौन-कौन से आंशिक अवकल समीकरण रैखिक हैं और कौन-कौन से अरैखिक। रैखिक आंशिक अवकल समीकरणों को समघात और असमघात समीकरणों में वर्गीकृत कीजिए।

i) $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

ii) $xy \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} + y \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^2 + y^2$

iii) $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^3 + \frac{\partial v}{\partial t} = 0$

iv) $x^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = e^{xy}$

v) $\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + 2 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} - 6\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^4 = 0$

इस पाठ्यक्रम में हम केवल रैखिक द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरणों पर ही चर्चा करेंगे क्योंकि भौतिकी में इनका प्रयोग काफ़ी अधिक होता है। फलन $u(x, y)$ के लिए ऐसे समीकरण का अति व्यापक रूप है

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = g(x, y) \tag{5.16}$$

जहाँ a, b, c, d, e और f, (x, y) के फलन हैं। यदि गुणांक a, b, c, d, e, f अचर हों, तो समीकरण (5.16) को **रैखिक, द्वितीय कोटि, अचर गुणांक आंशिक अवकल समीकरण** कहा जाता है। अचर गुणांक वाले (5.16) के रूप के समीकरणों को **दीर्घवृत्तीय** (elliptical), **अतिपरवलयिक** (hyperbolic) और **परवलयिक** (parabolic) समीकरणों में भी वर्गीकृत किया जाता है, जो कि द्वितीय कोटि गुणांकों a, b, c के बीच के संबंध पर निर्भर करता है

यदि $ac - b^2 > 0$ तो समीकरण दीर्घवृत्तीय होता है,

यदि $ac - b^2 < 0$ तो समीकरण **अतिपरवलयिक** होता है,

यदि $ac - b^2 = 0$ तो समीकरण **परवलयिक** होता है।

आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि **लाप्लास समीकरण** (समीकरण 5.8) और समीकरण (5.15), जिसे **प्वासों समीकरण** (Poisson equation) कहते हैं, **दीर्घवृत्तीय** हैं। **विसरण समीकरण** (समीकरण (5.11)) **परवलयिक** है और समीकरण (5.14), जिसे **तरंग समीकरण** कहते हैं, **अतिपरवलयिक** है। और आगे पढ़ने से पहले आप इन बातों की जाँच कर लीजिए।

अभी तक हमने आपको कई आंशिक अवकल समीकरणों (समीकरण 5.8, 5.11, 5.14, 5.15) से परिचित कराया है जिनका प्रयोग भौतिकी में काफ़ी होता है। आप इकाई 6 में निर्दिष्ट परिसीमा और आदि प्रतिबंधों के अंतर्गत इन आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने की विधियाँ सीखेंगे। पर इसके पहले आपको यह जानकारी भी होनी चाहिए कि आंशिक अवकल समीकरण के हल का क्या अर्थ है। हम भाग 5.3.2 में इसी विषय पर चर्चा करेंगे। साथ ही हलों के कुछ व्यापक गुणधर्मों के बारे में भी बताएंगे।

5.3.2 आंशिक अवकल समीकरण के हल का क्या अर्थ है?

बोध प्रश्न 3 के भाग (ख) में आपने सत्यापित किया है कि फलन $u = \ln(x^2 + y^2)$ आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{5.17}$$

को संतुष्ट करता है।

फलन $\ln(x^2 + y^2)$ इस आंशिक अवकल समीकरण का एक हल (solution) है। आंशिक अवकल समीकरण को हल करने की प्रक्रिया में उन सभी फलनों को ज्ञात करना होता है जो इसे संतुष्ट करते हैं। हल की एक औपचारिक परिभाषा यह है :

> स्वतंत्र चरों की समष्टि के किसी प्रदेश R में आंशिक अवकल समीकरण का **हल** एक ऐसा फलन होता है, जिसके (समीकरण में आने वाले) सभी आंशिक अवकलजों का R को आविष्ट करने वाले प्रांत में अस्तित्व होना है, और जो आंशिक अवकल समीकरण को R में सर्वत्र संतुष्ट करता है।

सामान्यतः एक आंशिक अवकल समीकरण के अनेक हल हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, फलन $u = x^2 - y^2$ और $u = e^x \cos y$ भी समीकरण (5.17) के हल हैं। उपयुक्त आदि प्रतिबंधों और परिसीमा प्रतिबंधों को लागू करके एक दी हुई भौतिक समस्या के संगत एक आंशिक अवकल समीकरण का अद्वितीय हल (unique solution) प्राप्त किया जाता है।

आइए, अब हम यह प्रश्न करें : आंशिक अवकल समीकरण को हल करने के लिए क्या करना होता है? यह जानने के लिए निम्नलिखित सरल आंशिक अवकल समीकरण पर विचार करें :

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = 1 \tag{5.18क}$$

$u(x, t)$ मालूम करने के लिए हम t को अचर मानकर x के सापेक्ष समाकलन कर सकते हैं। तब हमें मिलता है

$$u(x, t) = x + C \tag{5.18ख}$$

यहाँ C केवल तभी अचर है, जबकि t को नियत रखा गया हो। t के अलग-अलग मानों के लिए C अलग-अलग होगा अर्थात् C, t का एक फलन है। इस तरह, समीकरण (5.17 क) का अति व्यापक हल होता है

$$u(x, t) = x + f(t) \tag{5.18ग}$$

जहाँ f, t का एक स्वेच्छ फलन है। आप यह जाँच कर सकते हैं कि समीकरण (5.18 ग) का $u(x, t)$, समीकरण (5.18 क) को संतुष्ट करता है।

इस तरह, आप यह देखते हैं कि जहाँ साधारण अवकल समीकरण के हल में स्वेच्छ अचर (arbitrary constants) होते हैं, वहीं **आंशिक अवकल समीकरण के हल में स्वेच्छ फलन** (arbitrary functions) **होते हैं**। आंशिक अवकल समीकरण के आंशिक अवकलजों की कोटि में वृद्धि होने पर हमें स्वेच्छ फलनों की संख्या में भी वृद्धि करनी होती है।

आपको याद होगा कि एक साधारण अवकल समीकरण के रैखिकत: स्वतंत्र हलों का रैखिक संयोजन भी इसका एक हल होता है। यही नियम रैखिक समघात आंशिक अवकल समीकरण के हल पर भी लागू होता है। इस तरह, यदि u_1 और u_2 किसी प्रदेश में रैखिक समघात आंशिक अवकल समीकरण के रैखिकत: स्वतंत्र चर हों, तो

$$u = C_1u_1 + C_2u_2$$

जहाँ C_1 और C_2 स्वेच्छ अचर हैं, भी उस प्रदेश में उस समीकरण का एक हल होता है। इस नियम को **अध्यारोपण नियम** (principle of superposition) कहा जाता है और इसे उस स्थिति में भी लागू किया जा सकता है, जहाँ आंशिक अवकल समीकरण के हलों का अस्तित्व हो।

सारांश रूप में हम यह कह सकते हैं कि इस भाग में हमने आंशिक अवकल समीकरणों, उनके वर्गीकरण और उनके हल के अर्थ को समझा है। अब हम आपके लिए एक प्रश्न देकर इस भाग को यहाँ समाप्त करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 5

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

क) सत्यापित कीजिए कि $u_1 = \cos x \cos cy$ और $u_2 = \sin x \sin cy$ दोनों ही फलन आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

के हल हैं। यह भी दिखाइए कि $\cos(x + cy)$ और $\cos(x - cy)$ भी इस आंशिक अवकल समीकरण के हल हैं।

ख) दिखाइए कि प्रत्येक पूर्णांक n के लिए, फलन

$$u_n = e^{-kn^2 y} \sin nx$$

आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial u}{\partial y} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

का एक हल है।

इससे स्थापित कीजिए कि किसी धन पूर्णांक N और वास्तविक संख्याओं $a_1, a_2, \ldots, a_N$ के लिए फलन

$$\sum_{n=1}^{N} a_n \exp^{-kn^2 y} \sin nx$$

भी आंशिक अवकल समीकरण का एक हल है।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है, अब हम उसका संक्षिप्त विवरण दे रहे हैं।

5.4 सारांश

हम दो चरों वाले फलन की संकल्पनाओं का संक्षिप्त विवरण नीचे दे रहे हैं। इन्हें दो से अधिक चरों वाले फलनों पर भी लागू किया जा सकता है।

- दो चरों x और y वाला फलन $f(x, y)$ वह फलन होता है जिसका मान x और y के मानों से निर्धारित होता है। हम x और y को **स्वतंत्र** चर कहते हैं। उस चर को, जो $f(x, y)$ के बराबर है, **आश्रित चर** (dependent variable) कहते हैं।

- सीमा $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ होता है जबकि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए एक ऐसा $\delta > 0$ होता है जिससे कि यदि $0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$ तो $|f(x, y) - L| < \varepsilon$

- दो चरों वाला फलन, f, बिन्दु, (x_0, y_0) पर **संतत** होता है, यदि

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

- सीमाओं

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \quad \text{और} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

  को, यदि इनका अस्तित्व हो, क्रमशः x और y के सापेक्ष $f(x, y)$ का **प्रथम कोटि आंशिक अवकलज** कहा जाता है।

- एक चर के सापेक्ष अनेक चरों वाले फलन का आंशिक अवकलज अन्य चरों को अचर मानकर केवल उस चर के सापेक्ष फलन का अवकलन करके प्राप्त किया जाता है।

- फलन $f(x, y)$ को (x_0, y_0) पर **अवकलनीय** कहा जाता है जबकि इसके आंशिक अवकलजों का अस्तित्व (x_0, y_0) पर केंद्रित एक डिस्क पर हो और जबकि (x_0, y_0) पर f के आंशिक अवकलज संतत हों।

- एक से अधिक चर वाले फलनों से संबंधित अवकल समीकरणों को **आंशिक अवकल समीकरण** कहा जाता है।

- आंशिक अवकल समीकरणों का प्रयोग भौतिकी में प्रायः होता है। इस इकाई में हमने **लाप्लास समीकरण** और **एक-विम विसरण समीकरण** को स्थापित किया है।

प्रश्नों पर 20 मिनट लगाएं

5.5 अंत में कुछ प्रश्न

1) न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण नियम के अनुसार द्रव्यमान m वाले दो कणों के बीच के आकर्षण बल का परिमाण

$$F = -\frac{Gm^2}{r^2}$$

होता है, जहाँ $r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$ दो कणों के बीच की दूरी है। मालूम कीजिए कि आकाश के सभी बिन्दुओं पर F संतत और अवकलनीय है या नहीं। इस गुरुत्वाकर्षण बल का विभव होता है,

$$f(x, y, z) = -\frac{Gm^2}{r} \quad (r > 0)$$

दिखाइए कि f समीकरण

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

को संतुष्ट करता है।

2) भौतिकी में प्राय: प्रयुक्त होने वाले कुछ आंशिक अवकल समीकरण नीचे दिए गए हैं। इन्हें कोटि और घात, रैखिकता/अरैखिकता, समघातता/असमघातता के अनुसार वर्गीकृत कीजिए।

i) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} + \alpha u = 0$ (टेलीग्राफ़ समीकरण)

ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ (तरंग समीकरण)

iii) $-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}\right) + V(r)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}$ (श्रोडिंजर कालाश्रित समीकरण)

iv) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = 0$ (सांतत्य समीकरण)

v) $\frac{\partial u}{\partial t} - k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0$ (द्विविम विसरण समीकरण)

vi) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{\varepsilon_0}\,\rho(x, y, z)$ (प्वासों समीकरण)

5.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1) क) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^4}{1 + y^2}$

परिशिष्ट के समीकरण (क-1) और योगफल, गुणनफल, भागफल नियमों को लागू करने पर हमें मिलता है

$$\lim_{(x,y)\to(-1,1)} \frac{x^2 + 2xy^2 + y^4}{1 + y^2}$$

$$= \frac{\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} x^2 + 2 \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} x \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} y^2 + \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} y^4}{1 + \lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} y^2}$$

$$= \frac{(-1)^2 + 2[-1]\,[1]^2 + 1^4}{1 + 1^2} = \frac{1 - 2 + 1}{2} = 0$$

ख) मान लीजिए $y = mx$। तब $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} = \frac{mx^2}{x^2 + m^2x^2} = \frac{m}{1 + m^2}$। m के भिन्न-भिन्न मानों के लिए इसके मान भी भिन्न-भिन्न होंगे। इसका अर्थ यह है कि (x, y) के $(0, 0)$ की ओर प्रवृत्त होने पर m के भिन्न-भिन्न मानों के संगत रेखाओं के अनुदिश, $f(x, y)$ भिन्न-भिन्न मानों की ओर प्रवृत्त होता है। अत: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ का अस्तित्व नहीं है।

2) मान लीजिए $g(x, y) = \left(\frac{xy}{1 + x^2 + y^2}\right)$ और $u(t) = \sin t$. तब $f(x, y) = u(g)$ अर्थात् $f(x, y)$, $g(x, y)$ और u का संयुक्त फलन है। हमने परिशिष्ट के समीकरण (क-1) में यह दिखाया है कि $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$ और $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$। क्योंकि x_0 और y_0, x और y के प्रांत के कोई भी बिन्दु हो सकते है, इसलिए $p(x, y) = x$ और $q(x, y) = y$ संतत होंगे। संतत फलनों के योगफल, गुणनफल और भागफल संतत होते हैं। अत: $g(x, y)$ संतत होगा। इसी प्रकार आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि $u(t)$ संतत है। अत: इनका संयुक्त फलन $f(x, y)$ भी संतत होगा।

3) क) $f(x, y, z) = x^4 - 2x^2y^2z^2 + 3yz^4$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4xy^2z^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -4x^2yz^2 + 3z^4 \,;\; \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1, 1) = -4 + 3 = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = -4x^2y^2z + 12yz^3$$

$$h(x, y, t) = xe^t - y^2e^{2t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = e^t$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = -2ye^{2t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = xe^t - 2y^2e^{2t}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(4,1,0) = 4.1 - 2.1^2.1 = 2$$

ख) $z = \ln(x^2 + y^2)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2},\; \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

इसी तरह

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{4y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2y^2 - 2x^2 + 2x^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0$$

इस तरह, $z = \ln(x^2 + y^2)$, समीकरण $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ को संतुष्ट करता है।

ग) $\theta(\mu, i) = 4 \sin^{-1}\left(\frac{\sin i}{\mu}\right) - 2i$

$$\frac{\partial \theta}{\partial i} = \frac{4}{\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{\mu^2}}} \cdot \frac{\cos i}{\mu} - 2$$

$$= \frac{4\mu}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i}} \cdot \frac{\cos i}{\mu} - 2$$

$$= \frac{4\cos i}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i}} - 2$$

$i = i_\mu$ पर, $\frac{\partial \theta}{\partial i} = 0$

या $\frac{4\cos i_\mu}{\sqrt{\mu^2 - \sin^2 i_\mu}} = 2$

या $4\cos^2 i_\mu = \mu^2 - \sin^2 i_\mu$

या $4\cos^2 i_\mu + 1 - \cos^2 i_\mu = \mu^2$

या $3\cos^2 i_\mu = \mu^2 - 1$

या $\cos i_\mu = \sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{3}}$

$\therefore\ i_\mu = \cos^{-1}\left(\sqrt{\frac{\mu^2 - 1}{3}}\right)$

घ) (i) से

$\frac{\partial S}{\partial P} = \frac{C_v}{P}$

और (ii) से

$\frac{\partial S}{\partial P} = \frac{C_v - C_p}{P}$

(i) से $\frac{\partial S}{\partial P}$ मालूम करने के लिए हम V को अचर रखते हैं जबकि (ii) से $\frac{\partial S}{\partial P}$ का परिकलन करने के लिए हम T को अचर रखते हैं। अत: ये दो आंशिक अवकलज अलग-अलग हैं।

4) निम्नलिखित हलों में पहला पद प्रत्येक आंशिक अवकल समीकरण की कोटि को और दूसरा पद घात को स्पष्ट करता है :

i) 2, 1, रैखिक, समघात

ii) 2, 1, रैखिक, असमघात

iii) 1, 2, अरैखिक

iv) 2, 1, रैखिक, असमघात

v) 3, 1, अरैखिक

5) क) $u_1 = \cos x \cos cy$ और $u_2 = \sin x \sin cy$ के आंशिक अवकलज हैं

$\frac{\partial u_1}{\partial x} = -\sin x \cos cy, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = -\cos x \cos cy$

$\frac{\partial u_1}{\partial y} = -c \cos x \sin cy, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = -c^2 \cos x \cos cy$

और

$\frac{\partial u_2}{\partial x} = \cos x \sin cy, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = -\sin x \sin cy$

$\frac{\partial u_2}{\partial y} = c \sin x \cos cy, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = -c^2 \sin x \sin cy$

दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण में u_1 और u_2 के प्रासंगिक आंशिक अवकलजों को प्रतिस्थापित करने पर हमें दो सर्वसमिकाएं (identities) प्राप्त होती हैं जिनसे यह अर्थ निकलता है कि u_1 और u_2 दोनों ही इसके हल हैं। अब अध्यारोपण नियम के अनुसार आंशिक अवकल समीकरण के रैखिकत: स्वतंत्र हलों का रैखिक संयोजन भी इसका हल होता है। क्योंकि u_1 और u_2 रैखिकत: स्वतंत्र हैं, इसलिए उनके निम्नलिखित रैखिक संयोजन

$\cos(x + cy) = \cos x \cos cy - \sin x \sin cy = u_1 - u_2$

और $\cos(x - cy) = \cos x \cos cy + \sin x \sin cy = u_1 + u_2$

भी आंशिक अवकल समीकरण के हल हैं।

ख) आइए पहले हम u_n के आंशिक अवकलज ज्ञात करें :

$\frac{\partial u_n}{\partial y} = -kn^2 e^{-kn^2 y} \sin nx$

$$\frac{\partial u_n}{\partial x} = n\, e^{-kn^2 y} \cos nx$$

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = -n^2 e^{-kn^2 y} \sin nx$$

आंशिक अवकल समीकरण में $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ और $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$ को प्रतिस्थापित करने पर हमें एक सर्वसमिका प्राप्त होती है। अत: u_n आंशिक अवकल समीकरण का एक हल है। और, क्योंकि $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ रैखिकत: स्वतंत्र फलन हैं, इसलिए अध्यारोपण नियम से हम यह पाते हैं कि इनका रैखिक संयोजन अर्थात् $u = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_nu_n$ भी आंशिक अवकल समीकरण का एक हल है।

संक्षिप्त रूप में हम यह लिख सकते हैं कि

$$u = \sum_{n=1}^{N} a_n u_n = \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-kn^2 y} \sin nx$$

अन्त में कुछ प्रश्न

1) $$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{Gm^2}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2(x-x_0)\,Gm^2}{\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\}^{3/2}} = \frac{(x-x_0)Gm^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{3}{4}\frac{4(x-x_0)^2Gm^2}{\left\{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right\}^{5/2}} + \frac{Gm^2}{r^3} = -\frac{3(x-x_0)^2Gm^2}{r^5} + \frac{Gm^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -\frac{3(y-y_0)^2Gm^2}{r^5} + \frac{Gm^2}{r^3} \text{ और } \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{3(z-z_0)^2Gm^2}{r^5} + \frac{Gm^2}{r^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -\frac{3Gm^2}{r^5}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right] + \frac{3Gm^2}{r^3}$$

$$= -\frac{3Gm^2}{r^5}r^2 + \frac{3Gm^2}{r^3} = 0$$

अत: $f = -\frac{Gm^2}{r}$, $(r > 0)$ दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है।

2) i) 2, 1, रैखिक, समघात

ii) 2, 1, रैखिक, समघात

iii) 2, 1, रैखिक, समघात

iv) 1, 1, रैखिक, समघात

v) 2, 1, रैखिक, समघात

vi) 2, 1, रैखिक, असमघात

परिशिष्ट क : एक से अधिक चरों वाले फलन की सीमाएँ

यहाँ हम दो या अधिक चरों वाले फलन की सीमाओं की औपचारिक गणितीय परिभाषाएँ देंगे और इस प्रकार के फलनों की सीमाएँ मालूम करने के नियम बताएँगे।

आपको याद होगा कि एक समतल में दो बिन्दुओं (x, y) और (x_0, y_0) के बीच की दूरी, δ से कम होती है, यदि

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

मान लीजिए $f(x, y)$ एक वास्तविक फलन है जो एक डिस्क को, जिसका केन्द्र (x_0, y_0) पर है, आविष्ट करने वाले पूरे समुच्चय पर (बिन्दु (x_0, y_0) को छोड़कर) परिभाषित है। (चित्र 5.2 देखिए)। मान लीजिए L एक वास्तविक संख्या है। तब L बिन्दु (x_0, y_0) पर f की सीमा होती है, जबकि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए एक ऐसा $\delta > 0$ होता हो कि

यदि $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$, तब $| f(x, y) - L | < \varepsilon$

तब हम यह लिखते हैं

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = L$$

और कहते हैं कि $\lim\limits_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y)$ का अस्तित्व है।

चित्र 5.2 में सीमा का ज्यामितीय विवेचन दिखाया गया है।

हम इस परिभाषा को तीन चरों वाले फलन पर भी लागू कर सकते हैं।

आपको याद होगा कि बिन्दुओं (x, y, z) और (x_0, y_0, z_0) के बीच की दूरी, δ से कम होती है यदि

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

तब $f(x, y, z)$ की सीमा की औपचारिक परिभाषा इस प्रकार दी जाती है :

मान लीजिए f संभवतः बिन्दु (x_0, y_0, z_0) को छोड़कर उस गोले को आविष्ट करने वाले पूरे समुच्चय में, जिसका केन्द्र (x_0, y_0, z_0) पर है, परिभाषित है। तब L बिन्दु (x_0, y_0, z_0) पर f की सीमा होती है, जबकि प्रत्येक $\varepsilon > 0$ के लिए एक ऐसा $\delta > 0$ होता हो कि

यदि $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$, तब $| f(x, y, z) - L | < \varepsilon$

तब हम यह लिखते हैं

$$\lim_{(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z) = L$$

और कहते हैं कि $\lim\limits_{(x, y, z) \to (x_0, y_0, z_0)} f(x, y, z)$ का अस्तित्व है।

आइए, हम इन आधारभूत परिभाषाओं को लागू करके सीमाएँ मालूम करने से संबंधित एक सरल उदाहरण लें। आइए हम यह दर्शाएं कि

$$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} x = x_0 \quad \text{और} \quad \lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} y = y_0 \qquad \text{(क-1)}$$

मान लीजिए $\varepsilon > 0$. अब $(x - x_0)^2 \le (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ अतः, यदि हम $\delta = \varepsilon$ लें, तो उससे मिलता है कि

यदि $0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$ तो $| f(x, y) - L | = | x - x_0 | = \sqrt{(x - x_0)^2} < \varepsilon$ ($\because \delta = \varepsilon$).

इससे यह सिद्ध हो जाता है कि $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$। इसी प्रकार आप दूसरी सीमा को भी सिद्ध कर सकते हैं।

समीकरण (क-1) के परिणाम और अनेक चरों वाले फलनों के योगफल, गुणनफल और भागफल वाले निम्नलिखित सूत्रों की सहायता से आप विभिन्न प्रकार के फलनों की सीमाएँ मालूम कर सकते है। यहाँ हम दो चरों वाले फलनों के सूत्र दे रहें हैं। इसी प्रकार के सूत्र तीन और अधिक चरों वाले फलनों पर लागू होंगे

यदि $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ और $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$ का अस्तित्व हो, तो

i) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (af \pm bg) = a \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \pm b \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \quad (\text{क-2})$$

जहाँ a और b अचर हैं।

ii) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (fg) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \quad (\text{क-3})$$

iii) $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f/g) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \Big/ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \quad (\text{क-4})$$

उदाहरण 1 में हमने इन सूत्रों को लागू करके कुछ फलनों की सीमाएं मालूम की हैं।

5.7 शब्दावली

अघूर्णी गति	irrotational motion
अध्यारोपण	superposition
अरैखिक	nonlinear
असमघात	nonhomogeneous
असंपीड्य	incompressible
आंशिक अवकल समीकरण	partial differential equation
आदि प्रतिबंध	initial condition
कोटि	order
घात	degree
निदर्श	model
परिघटना	phenomenon
परिसीमा प्रतिबंध	boundary conditions
रैखिक	linear
विसरण	diffusion
समघात	homogeneous
साधारण अवकल समीकरण	ordinary differential equation

इकाई 6 भौतिकी में आंशिक अवकल समीकरण

इकाई की रूपरेखा

6.1 प्रस्तावना

इकाई 5 में आप आंशिक अवकल समीकरणों की कोटि, घात, रैखिकता और प्रकार की आधारभूत संकल्पनाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। ये समीकरण उन निकायों पर लागू होते हैं जिनके व्यवहार के लिए एक से अधिक चरों की ज़रूरत होती है। मौसम विज्ञान, संरचना इंजीनियरी, तरल यांत्रिकी, प्रत्यास्थता, ऊष्मा-प्रवाह, प्रदूषक विसरण, न्यूट्रॉन विसरण, तरंग संचरण, वायुगतिकी, विद्युत चुंबकीय और न्यूक्लीय भौतिकी जैसे विविध क्षेत्रों में हम आंशिक अवकल समीकरणों का इस्तेमाल करते हैं। भौतिकी में अधिकांश अनुप्रयुक्त समस्याएं द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरणों के पदों में निरूपित होती हैं। दोलन और तरंग नामक पी एच ई-02 पाठ्यक्रम में आप तरंग संचरण समीकरण से परिचित हैं। तरंग संचरण के कारण हम देख और सुन पाते हैं। संगीत का आनन्द लेते हैं और विश्व से सम्पर्क बनाए रखते हैं। वैद्युत और चुंबकीय परिघटनाएं नामक पाठ्यक्रम में आप लाप्लास समीकरण और प्वासों समीकरण पढ़ेंगे। ये समीकरण गुरुत्वीय विभव (gravitational potential), स्थायी अवस्था तापमान (steady state temperature) आदि ज्ञात करने में भी किया जाता है।

इस पाठ्यक्रम की इकाई 2 में प्रयुक्त शब्द चर पृथक्करण का प्रयोग एक बिल्कुल अलग अर्थ में किया गया है।

अनेक द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने के लिये चर पृथक्करण (method of separation of variables) विधि का इस्तेमाल किया जाता है। स्वतंत्र चरों की संख्या के आधार पर इस विधि द्वारा रैखिक आंशिक अवकल समीकरण को दो या दो से अधिक साधारण अवकल समीकरणों में व्यक्त कर सकते हैं। तथा इन्हें हल करना आप पहले से ही जानते हैं। इस विधि को भाग 6.2 में बताया गया है। भौतिकी की परिसीमा मान समस्याएं एक या अधिक दिशाओं में आयताकार, गोलीय या बेलनी सममिति प्रदर्शित करती हैं। भाग 6.3 में हमने उपर्युक्त विधि का आदि-प्रतिबंध और परिसीमा प्रतिबंधों के परिप्रेक्ष्य में अद्वितीय हल प्राप्त करने के लिए उपयोग किया है। हम जानते हैं कि एक आंशिक अवकल समीकरण अनेक भौतिक समस्याओं के लिए उपयुक्त हो सकता है, इसलिए जिस विधि के बारे में यहाँ चर्चा की गई है, उसे यहाँ बताई गई समीकरणों के अतिरिक्त अन्य समस्याओं को हल करने में भी लागू किया जा सकता है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप :

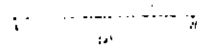
- चर प्रथक्करण विधि द्वारा दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण को हल कर सकेंगे
- दी हुई भौतिक समस्या का अद्वितीय हल प्राप्त कर सकेंगे।

6.2 चर पृथक्करण विधि

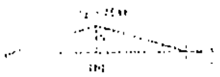
अरैखिक आंशिक अवकल समीकरण प्राय: प्रघाती तरंग परिघटना, वायुमंडलीय भौतिकी और प्रक्षोभ के अध्ययन में प्राप्त होते हैं। उच्चकोटि आंशिक अवकल समीकरण श्यान तरल (viscous fluids) और प्रत्यास्थता के अध्ययन में प्राप्त होते हैं।

रैखिक द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण भौतिकी का आधार हैं। लाप्लास समीकरण और प्वासों समीकरण के अलावा हेल्महोल्ट्स समीकरण, टेलीग्राफ़ समीकरण, तरंग समीकरण, क्लाइन गॉर्डन समीकरण, श्रौडिंगर समीकरण और डिराक समीकरण आदि महत्वपूर्ण समीकरण हैं।

इस संबंध में जो पहला प्रश्न आपके मन में उठ सकता है वह यह है कि हम आंशिक अवकल समीकरण को किस प्रकार हल कर सकते हैं ? इस संबंध में हमारा पहला कदम दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण को कुछ कम चरों वाले अवकल समीकरणों में बदलना है। (इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखा जाता है जब तक कि साधारण अवकल समीकरणों का एक समुच्चय प्राप्त नहीं हो जाता।) इस प्रकार प्राप्त साधारण अवकल समीकरणों को इस पाठ्यक्रम के खंड 1 में बताई गई विधियों द्वारा आसानी से हल किया जा सकता है। भौतिक दृष्टि से महत्त्वपूर्ण एवं व्यापक आंशिक अवकल समीकरणों को हल करने की एक सरलतम और बहु-प्रचलित विधि चर पृथक्करण विधि है। आओ इस विधि के बारे में जानकारी प्राप्त करें।



(क)



(ख)

चित्र 6.1 : एक कर्षित तार की (क) विरामावस्था एवं (ख) तात्कालिक अवस्था

चर पृथक्करण विधि को समझाने के लिए हम लंबाई L वाली एक परिमित तार लेते हैं जिसके दोनों सिरे बंधे हुए हैं, जैसा कि चित्र 6.1 क में दिखाया गया है।

मान लीजिए कि रस्सी को विरामावस्था से कर्षित कर (प्रारंभिक विस्थापन $h(x)$) छोड़ दिया जाता है, जैसा कि चित्र 6.1 ख में दिखाया गया है। यदि हम तार की लंबाई के अनुदिश x-अक्ष ले लें, तो पी एच ई-02 पाठ्यक्रम "दोलन और तरंग" की इकाई 5 से आपको याद होगा कि इस तार की गति निम्नलिखित एक-विम तरंग समीकरण द्वारा निर्धारित होती है

[illegible] में आप आंशिक अवकल [illegible] [illegible] में पढ़ेंगे।

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (6.1)$$

इस समीकरण में $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ या $\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t}$ जैसे मिश्रित आंशिक पद नहीं हैं। इसका कारण यह है कि इस समीकरण को न्यून विस्थापन सीमा में प्राप्त किया गया है।

अब हम परिकल्पना करते हैं कि समीकरण (6.1) के हल को निम्नलिखित गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है:

$$f(x, t) = X(x)\ T(t) \qquad (6.2)$$

भौतिक दृष्टि से इसका अर्थ यह है कि अज्ञात फलन की एक चर पर आश्रितता किसी भी स्थिति में दूसरे चर पर इसकी निर्भरता को प्रभावित नहीं करती। क्या इससे यह अर्थ निकलता है कि X और T के बीच कोई संबंध नहीं है ? इसका उत्तर है : ऐसा नहीं है। इससे केवल यह अर्थ निकलता है कि फलन X की t पर निर्भरता नहीं है तथा फलन T की x पर निर्भरता नहीं है। उदाहरण के लिए फलन

$$f(x, t) = x \sin \omega t \qquad (6.3\text{क})$$

x और t में पूरी तरह से पृथक्करणीय है जबकि फलन

$$f(x, t) = x + t \qquad (6.3\text{ख})$$

इस अर्थ में अपृथक्करणीय है कि इसे दो फलनों के गुणनफल के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता।

इस विधि को और बेहतर ढंग से समझाने के लिए समीकरण (6.2) को x के सापेक्ष दो बार अवकलित करते हैं। ऐसा करने पर हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होते हैं :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = X'T$$

तथा

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = X''T \qquad (6.4)$$

जहाँ X पर लगी शिखाएं (primes), x के सापेक्ष इसके साधारण अवकलन को प्रकट करती हैं। इसका तात्पर्य यह है कि X का अवकलज पूर्ण अवकलज (total derivative) है और X केवल x का फलन है। इसी प्रकार, यदि हम समीकरण (6.2) को t के सापेक्ष अवकलित करें तो निम्न व्यंजक प्राप्त होते हैं :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = XT$$

तथा

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = X\ddot{T} \qquad (6.5)$$

यहाँ T के ऊपर लगे बिंदु, t के सापेक्ष इसके साधारण अवकलज को प्रकट करते हैं। समीकरण (6.4) और (6.5) में निहित परिणामों को समीकरण (6.1) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न व्यंजक प्राप्त होता है :

$$X(x)\ddot{T}(t) = v^2 X''(x)T(t)$$

दोनों पक्षों को $v^2 X(x)T(t)$ से भाग देने पर हम देखते हैं कि

$$\frac{\ddot{T}(t)}{v^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (6.6)$$

इस समीकरण के वाम पक्ष में केवल वे फलन निहित हैं जिनकी t पर आश्रितता है जबकि दक्षिण पक्ष वाला व्यंजक केवल x का फलन है। अतः यदि हम x को अचर रख कर t में परिवर्तन करें तो एक पक्ष में कोई परिवर्तन नहीं हो सकता। इसका अर्थ यह है कि t के समस्त मानों के लिए $\ddot{T}(t)/v^2T(t)$ अचर बना रहेगा। इसी प्रकार t को अचर रख कर यदि हम x में परवर्तन करें तो वाम पक्ष में कोई परिवर्तन नहीं आएगा। अर्थात् x के सभी मानों के लिए राशि $X''/X(x)$ अचर रहेगी। गणितीय रूप से हम इस बात को यह कह कर व्यक्त करते हैं कि दोनों पक्ष एक अचर, मान लीजिए k के बराबर होंगे। क्या इस तर्क में कोई बल है? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए आइए हम समीकरण (6.6) के दोनों पक्षों को k के बराबर रखें। अर्थात्

$$\frac{\ddot{T}(t)}{v^2 T(t)} = k = \frac{X''(x)}{X(x)} \qquad (6.7)$$

वास्तव में यही पद चर पृथक्करण प्रक्रिया की कुंजी है।

इस व्यंजक के द्वितीय एवं तृतीय पदों को t के सापेक्ष अवकलित करने पर आपको निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा :

$$\frac{\partial}{\partial t}(k) = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{X''(x)}{X(x)}\right]$$

प्रथम एवं द्वितीय पदों को x के सापेक्ष अवकलित करने पर इसी तरह आप देखेंगे कि

$$\frac{\partial}{\partial x}(k) = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\ddot{T}(t)}{v^2 T}\right] = 0$$

क्योंकि t या x के सापेक्ष k का प्रथम कोटि आंशिक अवकलज शून्य है, इसलिए हम कह सकते हैं कि k अचर है। इसे पृथक्करण नियतांक (separation constant) कहा जाता है।

इसका अर्थ है कि यदि $y = a_0 \sin \omega t$ साधारण अवकल समीकरण $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ का एक हल है, तो कल्पित हल को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें एक सर्वसमिका (identity) प्राप्त होनी चाहिए जो t के सभी मानों के लिए मान्य होगी ।

इस तरह आप दिए हुए समीकरण को निम्नलिखित दो साधारण अवकल समीकरणों के रूप में लिख सकते हैं :

$$X'' - k\,X(x) = 0 \qquad (6.8\text{क})$$

तथा

$$\ddot{T}(t) - k\,v^2\,T(t) = 0 \qquad (6.8\text{ख})$$

अब आप कह सकते हैं कि पृथक्करणीय हल लेकर हमने आंशिक अवकल समीकरण को दो साधारण अवकल समीकरणों में विभक्त कर दिया है।

17

इस पर 15 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

चर पृथक्करण विधि से निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरणों को साधारण अवकल समीकरणों के रूप में लिखिए :

i) $$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$$

ii) $$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial V}{\partial \theta}\right) = 0$$

iii) $$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0$$

इनमें से पहला समीकरण रिएक्टर कोड में नियंत्रक/ईंधन छड़ों जैसे बेलनाकार पिंड में स्थायी अवस्था तापमान वितरण की व्याख्या करता है। दूसरा आंशिक अवकल समीकरण एक गोलीय पृष्ठ (spherical surface) के इर्द-गिर्द क्षेत्र में विभव का बोध कराता है। तीसरा आंशिक अवकल समीकरण एक-विम श्रौडिंगर समीकरण है।

इस पाठ्यक्रम के खंड 1 की इकाई 2 में बतायी गई विधियों द्वारा आप आसानी से इन समीकरणों को हल कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, k के शून्येतर मान (non-zero value) के लिए समीकरण (6.7) और समीकरण (6.8) के हल क्रमश: $\exp(mx)$ और $\exp(nt)$ होते हैं। इनके संगत अभिलक्षणिक समीकरण (characteristic equation)

$$m^2 - k = 0 \qquad (6.9\text{क})$$

और

$$n^2 - k v^2 = 0 \qquad (6.9\text{ख})$$

हैं जिनके मूल

$$m_1 = \sqrt{k} = \mu, \; m_2 = -\sqrt{k} = -\mu \qquad (6.10\text{क})$$

और

$$n_1 = v\sqrt{k} = v\mu, \; n_2 = -v\sqrt{k} = -\mu v \qquad (6.10\text{ख})$$

हैं। अत: परिणामी हलों को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$X(x) = A\exp(\mu x) + B\exp(-\mu x) \qquad (6.11\text{क})$$

और

$$T(t) = C\exp(\mu v t) + D\exp(-\mu v t) \qquad (6.11\text{ख})$$

जो कि वर्धमान (growing) और क्षयमान (decaying) चरघातांकों के योग के बराबर हैं। यदि आप $T(t)$ का काल अवकलज परिकलित करें तो आपको वेग प्राप्त होगा जिसका मान t समय पर वर्धमान एवं क्षयमान चरघातांकों द्वारा निर्धारित होगा। इसका अर्थ यह हुआ कि तार के एक अवयव की गतिज ऊर्जा में समय के सापेक्ष एक साथ ही वृद्धि और कमी हो सकती है जो कि भौतिक दृष्टि से मान्य नहीं है।

अब आप व्यापक हल को निम्न रूप में लिख सकते हैं

$$f(x, t) = X(x)\,T(t) = [A\exp(\mu x) + B\exp(-\mu x)]$$
$$[C\exp(\mu v t) + D\exp(-\mu v t)] \qquad (6.12)$$

समीकरण (6.12) से पहले दिए गए तर्क को ध्यान में रखकर हम कह सकते हैं कि इस हल से हमें अपेक्षित तरंग गति प्राप्त नहीं होती। अत: k का धनात्मक मान नहीं हो सकता। इसी प्रकार मान $k = 0$ के लिए एक तुच्छ हल (trivial solution) प्राप्त होता है तथा यह भी मान्य नहीं है। लेकिन $k < 0$ के लिए $\sqrt{k}$ अधिकल्पित (imaginary) होगा तथा हम यह लिख सकते हैं कि

$$\sqrt{k} = i\beta$$

जहाँ β एक वास्तविक संख्या (real number) और $i = \sqrt{-1}$ है। इस प्रतिस्थापन से समीकरण (6.11) निम्न रूप ले लेता है :

$$X(x) = A\exp(i\beta x) + B\exp(-i\beta x) \qquad (6.13क)$$

तथा

$$T(t) = C\exp(i\beta vt) + D\exp(-i\beta vt) \qquad (6.13ख)$$

आयलर संबंध की सहायता से हम समीकरण (6.13 क) और समीकरण (6.13 ख) को इन रूपों में लिख सकते हैं :

आयलर संबंध $\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$

$$X(x) = A_1\sin\beta x + A_2\cos\beta x \qquad (6.14क)$$

और

$$T(t) = G_1\sin\beta vt + G_2\cos\beta vt \qquad (6.14ख)$$

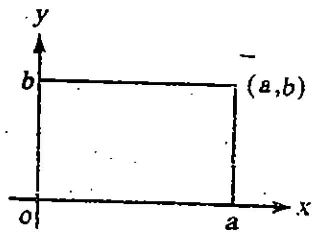
जहाँ A_1, A_2, G_1 और G_2 स्वेच्छ नियतांक हैं। आप आसानी से सत्यापित कर सकते हैं कि

$$A_1 = i(A-B),\quad A_2 = A+B,\quad G_1 = i(C-D) \text{ and } G_2 = C+D$$

समीकरण (6.14 क, ख) द्वारा निरूपित हल दिक्काल (space and time) में आवर्ती (periodic) हैं। आप एक-विम तरंग समीकरण के व्यापक हल को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$f(x,t) = (A_1\sin\beta x + A_2\cos\beta x)(G_1\sin\beta vt + G_2\cos\beta vt) \qquad (6.15)$$

उपर्युक्त उदाहरण में हमने चर पृथक्करण विधि की दो चरों वाले आंशिक अवकल समीकरण के लिए विवेचना की है। क्या आप किसी ऐसी भौतिक स्थिति की कल्पना कर सकते हैं जहाँ दो से अधिक चरों वाले आंशिक अवकल समीकरण प्रयुक्त होते हैं? आपने लोक नर्तकों को ढोल पर मधुर ताल लगाते देखा या सुना होगा। यह संगीत ढोल की गोल झिल्ली के कंपनों से उत्पन्न होता है। इसमें संचरित तरंग गति द्विविम (two dimensional) है और आंशिक अवकल समीकरण में तीन चर (r, θ, t) होते हैं। इसी प्रकार, एक आयताकार प्लेट में ऊष्मा प्रवाह को समझने के लिए तीन स्वतंत्र चरों (x, y, t) की ज़रूरत होती है। रिएक्टर भौतिकविदों एवं संरचना अभियन्ताओं के लिए इसका काफ़ी महत्त्व है, क्योंकि रिएक्टर क्रोड में प्लेटनुमा नियंत्रक छड़ तथा पुल निर्माण में गार्टर आदि का उपयोग किया जाता है। अत: हमें चर पृथक्करण विधि को तीन (या अधिक) चरों के लिए भी भली-भाँति जानना चाहिए। सुविधा की दृष्टि से पहले हम एक ऐसी आयताकार प्लेट या झिल्ली लेते हैं जिसके कोर $x = 0$, $x = a$ $y = 0$ और $y = b$ पर बंधे हैं जैसा कि चित्र 6.2 में दिखाया गया है।



चित्र 6.2 : कोरों पर बंधी आयताकार झिल्ली

आयताकार झिल्ली

आयताकार झिल्ली के लिए फलन $f(x, y, t)$ निम्नलिखित तरंग समीकरण द्वारा निर्धारित होता है :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x,y,t) \qquad (6.16)$$

चर पृथक्करण विधि द्वारा हम इस आंशिक अवकल समीकरण को ऐसे तीन द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों में बदलते हैं जिनके दिक्काल हल आवर्ती हैं। ऐसा हम निम्नलिखित दो विधियों द्वारा कर सकते हैं :

i) समीकरण (6.16) के आंशिक पृथक्करण द्वारा : इस विधि में स्थानिक चरों को एक साथ रखते हैं और काल चर को अलग रखा जाता है :

$$f(x,y,t) = F(x,y)\,T(t) \qquad (6.17क)$$

जहाँ $F(x, y)$ एक स्थानिक फलन है और T केवल समय पर आश्रित है।

इससे t के लिए एक साधारण अवकल समीकरण और स्थानिक चरों में आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होगा। इसके x और y में पुन: पृथक्करण द्वारा साधारण अवकल समीकरण प्राप्त किये जाते हैं। यह द्विपद प्रक्रिया गणितीय दृष्टि से सरल सिद्ध होती है।

ii) तीनों चरों के पृथक्करण द्वारा :

$$F(x,y,t) = X(x)\,Y(y)\,T(t) \qquad (6.17\text{ ख})$$

अब प्रश्न उठता है कि हम यह कैसे जान सकते हैं कि यह मान्य है या नहीं? इसका उत्तर काफी सरल है। हम यह नहीं कहते कि यह मान्य है। हम तो केवल यह पता लगाना चाहते हैं कि यह प्रयुक्त हो सकता है या नहीं। लेकिन हमारा अनुमान है कि दोनों प्रतिस्थापनों से हमें एक ही परिणाम प्राप्त होने चाहिए। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों हो? इसका कारण यह है कि साधन साध्य को अर्थात् गणितीय तकनीक भौतिकी को प्रभावित नहीं कर सकती। अब हम दोनों प्रतिस्थापनों द्वारा समीकरण (6.16) को हल करके इस तथ्य को सत्यापित करेंगे।

पहले की तरह, आइए एक पृथक्करणीय हल लें :

$$f(x, y, t) = F(x, y)\, T(t)$$

जहाँ $F(x, y)$ केवल (x, y) का फलन है और $T(t)$ केवल समय का फलन है। इसे समीकरण (6.16) में प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि

$$F\ddot{T} = v^2 T\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) F(x, y)$$

दोनों पक्षों को v^2FT से भाग देने पर हमें निम्नलिखित समता प्राप्त होती है :

$$\frac{\ddot{T}}{v^2 T} = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) F(x, y) \tag{6.18}$$

समीकरण (6.16) से इस समीकरण की तुलना करने पर हम कह सकते हैं कि वाम पक्ष का व्यंजक केवल t पर आश्रित है जबकि दक्षिण पक्ष का व्यंजक स्थानिक चरों पर आश्रित है। दो चरों वाले तरंग समीकरण के संबंध में दिए गए तर्क का उपयोग करके हम कह सकते है कि दोनों पक्ष एक नियतांक के बराबर हैं और, हम जानते हैं कि इस अचर के केवल ऋणात्मक मान से ही एक अतुच्छ हल प्राप्त होगा। यदि हम इस अचर को $-p^2$ से प्रकट करें, तो हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{\ddot{T}}{v^2 T} = \frac{1}{F}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) F(x, y) = -p^2 \tag{6.19}$$

इसे हम दो अवकल समीकरणों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$\ddot{T} + p^2 v^2 T = 0 \tag{6.20}$$

तथा

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + p^2 F = 0 \tag{6.21}$$

जहाँ समीकरण (6.20) एक साधारण अवकल समीकरण है। समीकरण (6.21) में अभी भी x और y के आंशिक अवकलज निहित हैं। कहने का अर्थ है कि हालांकि हमने स्थानिक चर और काल चर को तो अलग-अलग कर दिया है, पर अभी हमें स्थानिक आश्रितता को अलग करना है। ऐसा करने के लिए हम लिखते हैं कि

$$F(x, y) = X(x)\, Y(y) \tag{6.22}$$

इसे समीकरण (6.21) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न व्यंजक प्राप्त होता है :

$$Y\frac{d^2X}{dx^2} = -X\left(\frac{d^2Y}{dy^2} + p^2 Y\right)$$

दोनों पक्षों को XY से भाग देने पर हम देखते हैं कि

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\left(\frac{d^2Y}{dy^2} + p^2 Y\right) \tag{6.23}$$

इस समीकरण के वामपक्ष का व्यंजक केवल x का फलन है, जबकि दक्षिण पक्ष का व्यंजक केवल y का फलन है। अत: दोनों पक्ष एक अचर, मान लीजिए $-q^2$ के बराबर होंगे :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -\frac{1}{Y}\left(\frac{d^2Y}{dy^2} + p^2 Y\right) = -q^2 \tag{6.24}$$

इससे आपको निम्नलिखित दो साधारण समीकरण प्राप्त हो जाते हैं :

$$\frac{d^2X}{dx^2} + q^2X = 0 \qquad (6.25)$$

और

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + \alpha^2Y = 0 \qquad (6.26)$$

जहाँ $\alpha^2 = p^2 - q^2$

इस तरह, हम देखते है कि समीकरण (6.16) जिसमें तीन स्वतंत्र चरों के सापेक्ष अवकलज आविष्ट हैं, तीन द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरणों (समीकरण (6.20) (6.25) और (6.26)) में व्यक्त किया जा सकता है। अत: द्विचरण चर पृथक्करण प्रक्रिया में हमने पहले काल आश्रितता को स्थानिक आश्रितता से अलग करने के लिए इन्हें एक फलन $F(x, y)$ के रूप में लिया। तत्पश्चात इन पदों को भी पृथक्करण विधि द्वारा अलग किया है।

आइए अब $f(x, y, t)$ को तीन फलनों के गुणनफल के रूप में समीकरण (6.17 ख) की तरह लेकर समीकरण (6.16) को सरल अवकल समीकरणों के रूप में लिखें। ऐसा करने पर हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = XY\ddot{T}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = X''YT$$

और

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = XY''T$$

समीकरण (6.16) में इन्हें प्रतिस्थापित करने पर आपको निम्न व्यंजक प्राप्त होगा :

$$XY\ddot{T} = v^2 [YTX'' + XY''(y)T]$$

दोनों पक्षों को XYT से भाग देने पर यह समीकरण संक्षिप्त रूप ले लेता है :

$$\frac{\ddot{T}}{v^2T} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} \qquad (6.27)$$

इस सर्वसमिका (identity) का वाम पक्ष केवल समय का फलन है और दक्षिण पक्ष केवल स्थानिक चरों का फलन है। अत: हम यह लिख सकते हैं

$$\frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} = -k^2$$

या

$$\ddot{T} + k^2v^2T = 0 \qquad (6.28\text{क})$$

और

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = -k^2$$

या

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dt^2} = -k^2 - \frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} \qquad (6.28\text{ख})$$

यहाँ हमने x के फलन को y के फलन के रूप में व्यक्त किया है। पहले की ही तरह हम दोनों पक्षों को एक अचर, $-m^2$ के बराबर रखते हैं। इस प्रकार हम समीकरण (6.28 ख) को निम्नलिखित दो साधारण अवकल समीकरणों के रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -m^2 \tag{6.29क}$$

और

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -k^2 + m^2 = -n^2 \tag{6.29ख}$$

जहाँ हमने सममित समीकरण समुच्चय (symmetric set of equations) प्राप्त करने के लिए एक नए अचर का प्रयोग किया है।

इस तरह, हम देखते हैं कि समीकरण (6.16) के स्थान पर तीन साधारण अवकल समीकरण (समीकरण (6.28 क), (6.29 क) और (6.29 ख)) प्राप्त होते हैं।

यदि आप p को k, m को q और n को α से अभिनिर्धारित करें तो समीकरण (6.28 क), (6.29 क) और (6.29 ख) समीकरण (6.20), (6.25) और (6.26) के सर्वसम होंगे। हम आशा करते हैं कि अब आप पृथक्करण की दोनों प्रक्रियाओं को अच्छी तरह से समझ गए हैं। इसकी पुष्टि के लिए आप एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

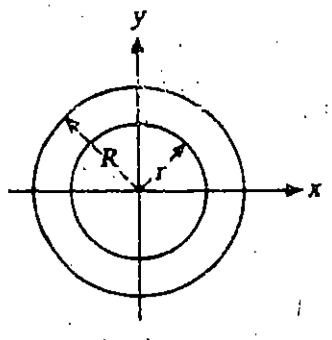
बोध प्रश्न 2

प्रश्न पर 15 मिनट लगाएं

कार्तीय निर्देशांकों में हेल्महोल्ट्ज़ समीकरण को निम्न रूप में लिखा जाता है :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f(x, y, z) + k^2 f(x, y, z) = 0$$

एक उपयुक्त प्रक्रिया द्वारा इसे तीन साधारण अवकल समीकरणों के रूप में लिखिए।



चित्र 6.3 : एक वृत्तीय झिल्ली

अभी तक हम कोरों पर बंधी एक आयताकार झिल्ली में संचरित तरंग गति पर विचार कर रहे थे। आंशिक अवकल समीकरण में इसके कंपनों को व्यक्त करने वाले स्थानिक चर कार्तीय निर्देशांक थे। पर आप देखेंगे कि ढोल और झांझ जैसे वाद्य यंत्रों के लिए गोलीय ध्रुवीय निर्देशांक अधिक उपयुक्त होते हैं। आप इन वाद्य यंत्रों में तरंग संचरण को वृत्तीय झिल्ली के कंपनों की गणितीय मॉडलिंग द्वारा निरूपित कर सकते हैं। आइए अब गोलीय निर्देशांकों में व्यक्त तरंग समीकरण का पृथक्करण करना सीखें।

वृत्तीय झिल्ली

परिमाप (perimeter) पर बंधी वृत्तीय झिल्ली, जिसे चित्र 6.3 में दिखाया गया है, का तरंग समीकरण निम्न रूप का होता है :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) f(r, \theta, t) \tag{6.30}$$

इसके हल को पृथक्करणीय रूप

$$f(r, \theta, t) = F(r, \theta)\, T(t) \tag{6.31}$$

में लेकर आप यह आसानी से दिखा सकते हैं कि समीकरण (6.30) निम्नलिखित संक्षिप्त रूप ले लेता है :

$$\ddot{T} + \lambda^2 T = 0 \tag{6.32क}$$

और

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + k^2 F(r, \theta) = 0;$$

PHE-02 पाठ्यक्रम में आप पढ़ चुके हैं कि त्रिविम तरंग समीकरण

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

है जहाँ ∇^2 लाप्लासियन है। PHE-04 पाठ्यक्रम की इकाई 3 में आप इसके रूपों को अलग-अलग निर्देश-तंत्रों में पढ़ चुके हैं।

जहाँ $\lambda = vk$ एक नियतांक है तथा k पृथक्करण अचर है। आप देखेंगे कि अभी भी समीकरण (6.32 ख) में दो चर हैं। इन्हें अलग करने के लिए हम $F(r, \theta)$ को दो फलनों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं :

$$F(r, \theta) = R(r)\,\Theta(\theta) \tag{6.33}$$

समीकरण (6.32 ख) में इसे प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{R}\left(r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + r^2k^2R\right) = -\frac{1}{\Theta}\,\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = p^2$$

अत: समीकरण (6.32 ख) दो साधारण अवकल समीकरणों के रूप में लिखा जा सकता है जिनमें से एक में R और दूसरे में Θ फलन निहित है :

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + (r^2k^2 - p^2)\,R = 0 \tag{6.34क}$$

और

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + p^2\,\Theta = 0 \tag{6.34ख}$$

बोध प्रश्न 3

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

समीकरण (6.30) में

$$f(r, \theta, t) = R(r)\,\Theta(\theta)\,T(t)$$

प्रतिस्थापित करके सिद्ध कीजिए कि इसे तीन साधारण अवकल समीकरणों के रूप में लिखा जा सकता है।

समीकरण (6.34 क) को सुपरिचित रूप में रखने के लिए हम निम्नलिखित चर परिवर्तन करते हैं :

$$s = kr$$

उपर्युक्त समीकरण को s के पदों में लिखने के लिए पहले हमें r के सापेक्ष R के अवकलज को s के पदों में लिखना होगा :

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{ds}\frac{ds}{dr} = k\frac{dR}{ds}$$

तथा

$$\frac{d^2R}{dr^2} = k^2\frac{d^2R}{ds^2}$$

इन्हें समीकरण (6.34 क) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$s^2\frac{d^2R}{ds^2} + s\frac{dR}{ds} + (s^2 - p^2)\,R = 0 \tag{6.35}$$

जो कोटि p का **बेसल समीकरण** (Bessel's equation) है।

अभी तक हमने आप को आंशिक अवकल समीकरणों को साधारण अवकल समीकरणों के समुच्चय में लिखने के लिए अनुप्रयुक्त आधारभूत चर पृथक्करण विधि के बारे में बताया है। आप इन समीकरणों को खंड 1 में बतायी गई विधियों द्वारा हल कर सकते हैं। भौतिकी में हमें प्राय : आंशिक अवकल समीकरणों के आदि और परिसीमा प्रतिबंधों के संगत अद्वितीय हल प्राप्त करने होते हैं।

चर पृथक्करण विधि द्वारा आंशिक अवकल समीकरणों को आदि और परिसीमा प्रतिबंधों के संगत हल करने के लिए हम जिन चरणों का क्रमश : उपयोग करते हैं उनका संक्षिप्त विवरण नीचे दिया गया है :

चर पृथक्करण विधि

1) दो (या अधिक) चरों वाले अज्ञात फलन को दो (या अधिक) फलनों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करें ताकि एक फलन की स्वतंत्र चर पर आश्रितता दूसरे फलन की दूसरे चर पर आश्रितता से किभी भी रूप में प्रभावित न हो।

2) हल के कल्पित रूप को दिये हुए अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करें। ऐसा करने पर दो चरों वाला एक द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरण दो साधारण अवकल समीकरणों में विभक्त हो जाता है। यदि स्वतंत्र चरों की संख्या दो से अधिक हो तो हमें स्वतंत्र चरों की संख्या के समान साधारण अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं।

3) इस तरह प्राप्त साधारण अवकल समीकरणों को खंड 1 में बतायी गई विधियों से हल करें। हल चरघातांकी फलन, त्रिकोणमितीय फलन या घात श्रेणी हो सकते हैं।

4) साधारण अवकल समीकरणों के हलों का गुणनफल लेने पर दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण का व्यापक हल प्राप्त होगा।

हमें विश्वास है कि अब आप किसी आंशिक अवकल समीकरण को चर पृथक्करण विधि द्वारा साधारण अवकल समीकरणों में बदल सकते हैं। (साधारण अवकल समीकरणों की संख्या दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण में स्वतंत्र चरों की संख्या के बराबर होती है।) इस इकाई के शेष भाग में हम विशिष्ट आदि और परिसीमा प्रतिबंधों के अंतर्गत विभिन्न भौतिक स्थितियों में तरंग समीकरण, ऊष्मा समीकरण और लाप्लास समीकरण के अद्वितीय हल ज्ञात करना सीखेंगे।

6.3 भौतिकी की आदि और परिसीमा-मान समस्याओं के हल

आंशिक अवकल समीकरण के हलों की संख्या प्राय: काफ़ी अधिक होती है। उदाहरण के लिए, यदि आप लाप्लास समीकरण

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

को लें, तो आप सरलतापूर्वक सत्यापित कर सकते हैं कि

$$f = x^2 - y^2, \qquad f = \exp(x)\cos y \text{ और } f = \ln(x^2 + y^2)$$

इत्यादि फलनों में से प्रत्येक फलन दिये हुए समीकरण का हल हो सकता है यद्यपि ये सभी हल एक दूसरे से बिलकुल भिन्न हैं। इनके अतिरिक्त ऐसे और अनेक फलन हो सकते हैं जो ऊपर दिए गए समीकरणों को संतुष्ट करते हों। क्या इसका यह अर्थ है कि हम आंशिक अवकल समीकरण का व्यापक हल प्राप्त ही नहीं कर सकते ? भौतिकी में, तो हमें शायद ही कभी व्यापक हल की आवश्यकता होती है। यदि हम व्यापक हल प्राप्त भी कर लेते हैं, तो उसमें स्वेच्छ राशियों की संख्या अधिक होती है। अर्थात् कोई भी व्यापक हल अद्वितीय नहीं होता। अब आप पूछ सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है ? इसका कारण यह है कि यदि आंशिक अवकल समीकरण के प्रत्येक स्वतंत्र चर के लिए द्वितीय कोटि साधारण अवकल समीकरण का एक हल है तो x और t पर दो-दो प्रतिबंधों की आवश्यकता होती है (यदि x का मान परिसीमा पर निर्दिष्ट हो, तो हम **परिसीमा प्रतिबंध** की बात करते हैं। प्राय: समय के ऊपर प्रतिबंध प्रेक्षण शुरू करते क्षण व्यक्त किया जाता है। इन प्रतिबंधों को **आदि प्रतिबंध** कहा जाता है।) अत : आप यह निष्कर्ष निकाल सकते है कि

खंड 1 में परिभाषित आदि और परिसीमा प्रतिबंधों को देखें।

एक दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण का अद्वितीय हल प्राप्त करने के लिए हमें विशेष भौतिक समस्या के संगत आदि पतिबंधों और परिसीमा प्रतिबंधों को निर्दिष्ट करना पड़ता है।

आइए अब भौतिकी में प्रयुक्त होने वाले आंशिक अवकल समीकरणों को आदि-मान समस्याओं और परिसीमा-मान समस्याओं के संगत हल करें।

एक-विम तरंग समीकरण

आइए एक तार में तरंग संचरण पर विचार करें। तार के कणों को इंगित करने के लिए हम बराबर-बराबर दूरी पर निशान लगा देते हैं। हम इन अंकित चिन्हों में से किसी एक चिन्ह पर विद्यमान कण का तात्क्षणिक विस्थापन मालूम करना चाहते हैं। गणितीय भाषा में हमें दो स्वतंत्र चरों पर आश्रित एक फलन $f(x, t)$ मालूम करना है। इस परिघटना को अभिव्यक्ति करने वाले आंशिक अवकल समीकरण को हल करने के लिए हमें परिसीमा प्रतिबंध भी ज्ञात होने चाहिए। (स्वतंत्र चरों के) जिस क्षेत्र पर हल प्राप्त करना है, उसे परिबद्ध करने वाले वक्र (परिसीमा) पर परिसीमा प्रतिबंधों में f या इसके अवकल या दोनों ही निहित होंगे।

अध्ययन को आगे बढ़ाने के लिए हम देखते हैं कि हमें L लंबाई वाले गिटार, एकतारा या वायलिन के तार, जिसे चित्र 6.1 में दिखाया गया है, के लिए निम्नलिखित एक-विम समीकरण को हल करना है :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \qquad (6.36\text{क})$$

जहाँ v तरंग चाल है। क्योंकि तार $x = 0$ और $x = L$ पर सदैव बंधी रहती है, इसलिए $t > 0$ के लिए परिसीमा प्रतिबंधों का निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$f(0, t) = 0$$

और

$$f(L, t) = 0 \qquad (6.36\text{ ख})$$

चूंकि तरंग समीकरण का हल t पर भी निर्भर करता है, इसलिए हमें यह भी जान लेना चाहिए कि $t = 0$ पर क्या होता है ? अर्थात् $t = 0$ पर हमें विस्थापन और वेग पर आदि प्रतिबंध लगाने चाहिए। यदि तार को विरामावस्था से विस्थापित किया जाता है तो आदि वेग शून्य होगा। गणितीय भाषा में हमें एक ऐसा फलन प्राप्त करना है जो निम्नलिखित आदि प्रतिबंधों को संतुष्ट करता हो :

$$f(x, 0) = h(x) \qquad 0 < x < L$$

और

$$\left.\frac{\partial f(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \qquad (6.37)$$

तरंग समीकरणों के चरों का पृथक्करण करने पर आपको निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरण प्राप्त होंगे :

$$X'' + \mu^2 X(x) = 0$$

और

$$\ddot{T} + \mu^2 v^2 T(t) = 0.$$

जिनके हल समीकरण (6.11) में दिए हुए हैं :

$$X(x) = A \cos \mu x + B \sin \mu x$$

और

$$T(t) = C \cos \mu v t + D \sin \mu v t$$

हम जानते हैं कि $t > 0$ के लिए प्रतिबंध $f(0, t) = X(0)\, T(t) = 0$ और $f(L, t) = X(L)\, T(t) = 0$ तभी सत्यापित हो सकते हैं जबकि $X(0) = 0$ और $X(L) = 0$ हों। इन प्रतिबंधों में से पहले प्रतिबंध को लगाने पर हमें $A = 0$ प्राप्त होता है। अतः

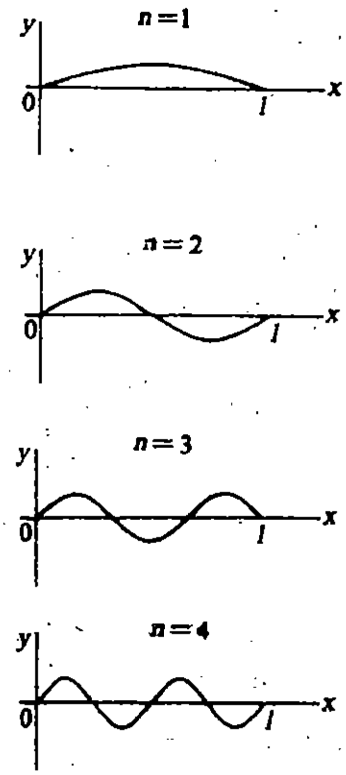
$$X(x) = B \sin \mu x$$

अब दूसरे प्रतिबंध को लगाने का अर्थ यह है कि

$$X(L) = B \sin \mu L = 0$$

इस समिका की मान्यता के लिए या तो $B = 0$ या फिर $\sin \mu L = 0$ होना चाहिए। यदि हम $B = 0$ लेते हैं तो $X = 0$ हो जायेगा तथा $f = 0$ एक तुच्छ हल प्राप्त होगा। अत: B को शून्येतर मानकर इसके विकल्प के लिए हम $\sin \mu L = 0$ रखते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि $n = 0, 1, 2, \ldots$ आदि के लिए $\mu L = n\pi$ या $\mu = n\pi/L$ होगा। $n = 0$ पर एक तुच्छ हल प्राप्त होता है। अत: B के स्वेच्छ मान के लिए हमें निम्न रूप के अनंत हल प्राप्त होते हैं :

$$X(x) = X_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{6.38}$$



चित्र 6.4 : समीकरण (6.38) का आरेख : $n = 1, 2, 3, 4$ दिखाएं

$n = 1, 2, 3 \ldots$ आदि के लिए $\mu = n\pi/L$ को समीकरण (6.2) का आइगेन मान (eigenvalue) कहा जाता है। $B = 1$ लेकर $n = 1, 2, 3$ और 4 के लिए समीकरण (6.38) को चित्र 6.4 में चित्रित किया गया है। अत: दिए हुए परिसीमा प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए समीकरण (6.36 क) के हल को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$f_n(x, t) = \left[C \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + D \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)\right] B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

$$= \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.39}$$

यहाँ हमने $CB = a_n$ और $DB = b_n$ रखा है, क्योंकि n के प्रत्येक मान के लिए अलग-अलग अचरों की आवश्यकता पड़ सकती है। आपने गौर किया होगा कि $f(x, t)$ पर भी हमने पदाक्षर (subscript) n लगा दिया है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों किया गया है? यह n के प्रत्येक मान के लिए एक अलग फलन को व्यक्त करने के लिए किया गया है। वर्तमान स्थिति में n का प्रत्येक मान तार की $\nu = n v/2L$ Hz आवृत्ति वाली आवर्त गति को परिभाषित करता है। जहाँ $n = 1$ मूल विधा को परिभाषित करता है, $n > 1$ अधिस्वरक (overtones) को अभिलक्षित करता है।

आप यह मानेंगे कि $f_n(x, t)$ दी हुई आदि एवं परिसीमा-मान समस्या का अद्वितीय हल नहीं है, क्योंकि अभी तक हमने आदि प्रतिबंध तो लगाया ही नहीं है। और फिर क्योंकि तरंग समीकरण रैखिक और समघात है, इसलिए दिए हुए परिसीमा प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाला अति-व्यापक हल अध्यारोपण नियम से प्राप्त होता है :

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{6.40}$$

आदि प्रतिबंध के लिए हम ऊपर दिए गए समीकरण में $t = 0$ रखते हैं। इससे हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता है:

$$f(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = h(x) \tag{6.41}$$

अब यह प्रश्न उठता है कि a_n का मान किस प्रकार से ज्ञात किया जाए? इसके लिए हमें फलन $h(x)$ के रूप को जानना आवश्यक है। आइए $h(x) = \xi_0 \sin \frac{\pi x}{L}$ लेकर समीकरण (6.41) के दोनों पक्षों की तुलना करें। इससे हमें निम्न परिणाम प्राप्त होता है :

$$a_1 = \xi_0$$

और

$$a_2 = a_3 = \ldots = 0 \tag{6.42}$$

$h(x)$ के किसी भी व्यापक रूप के लिए हमें फूरिये श्रेणी (Fourier Series) की आवश्यकता होगी जिसे आप इकाई 7 में पढ़ेंगे।

स्वेच्छ अचर b_n मालूम करने के लिए हमें समीकरण (6.40) को t के सापेक्ष अवकलित करने पर निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[-a_n \left(\frac{n\pi v}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi vt}{L}\right) + b_n \left(\frac{n\pi v}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)\right] \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

इस व्यंजक में $t = 0$ रखने पर आप देखेंगे कि

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{n\pi v}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

इस व्यंजक को देखकर आप तुरन्त यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि n के प्रत्येक मान के लिए

$$b_n = 0 \tag{6.43}$$

अत: दिए हुए आदि और परिसीमा प्रतिबंधों के संगत दोनों सिरों पर बंधी तार पर एक-विम तरंग समीकरण के अद्वितीय हल को निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं :

$$f(x, t) = \xi_0 \cos \omega t \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \tag{6.44}$$

जहाँ $\omega = \frac{\pi v}{L}$ कोणीय आवृत्ति और ξ_0 आयाम है।

बोध प्रश्न 4

प्रश्न पर 2 मिनट लगाएं

$$h(x) = \xi_0 \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]$$

लेकर समीकरण (6.40) में निहित स्वेच्छ अचर a_n ज्ञात कीजिए।

बोध प्रश्न 4 की परिसीमा-मान समस्या कार्तीय ज्यामितीय से संबंधित है। आप ऐसी अनेक भौतिक समस्याओं को जानते हैं जिनमें गोलीय और बेलनी निर्देशांकों का उपयोग होता है। इनके बारे में आप भौतिकी में गणितीय विधियाँ-1 नामक पी एच ई-04 पाठ्यक्रम के खंड 1 की इकाई 3 में पढ़ चुके हैं। इस संबंध में हम तबला या ढोलक की झिल्ली पर तरंग संचरण, धारा-वाहक लंबी तार के आस पास वैद्युत क्षेत्र, न्यूक्लीय रिऐक्टर में उत्पादित ऊर्जा आदि का उल्लेख कर सकते हैं। नीचे दिए गए उदाहरणों में हम ध्रुवीय और बेलनी निर्देशांकों से संबंधित भौतिक समस्याओं पर विचार करेंगे।

उदाहरण 1 : वृत्तीय झिल्ली

परिमाप पर बंधी त्रिज्या r_0 वाली वृत्तीय झिल्ली में तरंग समीकरण का त्रिज्य भाग (radial part) निम्न रूप का होता है :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right)$$

परिसीमा प्रतिबंध लिखकर एक अद्वितीय हल ज्ञात कीजिए।

हल

इस स्थिति में हम परिसीमा प्रतिबंधों को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$r = r_0 \quad \text{के लिए सभी } t \text{ पर} \quad f(r, t) = 0$$

तथा

$$t = 0 \quad \text{के लिए सभी } r \text{ पर} \quad f(r, t) = 0$$

अपने परिमाप पर बंधी वृत्तीय झिल्ली की गति निर्धारित करने वाले तरंग समीकरण को निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरणों में विभक्त किया जा सकता है :

$$\ddot{T} + \lambda T = 0 \quad \text{जहाँ} \quad \lambda = \nu^2 \tag{i}$$

और

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + k^2R = 0 \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (ii) को जाने पहचाने रूप में लिखने के लिए निम्न संबंध द्वारा चर परिवर्तन करते हैं :

$$s = kr$$

हमें $\frac{dR}{dr}$ को $\frac{dR}{ds}$ के पदों में व्यक्त करना होगा। इसके लिए हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{dR}{ds} = \frac{dR}{dr}\frac{dr}{ds} = \frac{1}{k}\frac{dR}{dr}$$

और

$$\frac{d^2R}{ds^2} = \frac{1}{k}\frac{d}{dr}\left(\frac{dR}{dr}\right)\frac{dr}{ds}$$

$$= \frac{1}{k^2}\frac{d^2R}{dr^2}$$

इन्हें (ii) में प्रतिस्थापित करने पर आप लिख सकते हैं कि

$$k^2\frac{d^2R}{ds^2} + \frac{k^2}{s}\frac{dR}{ds} + k^2R = 0$$

या

$$\frac{d^2R}{ds^2} + \frac{1}{s}\frac{dR}{ds} + R = 0 \qquad \text{(iii)}$$

क्या आप इस समीकरण को पहचानते हैं? यह $\nu = 0$ कोटि का बेसल समीकरण है। इसके व्यापक हल को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$R(s) = c_1 J_0(s) + c_2 Y_0(s)$$

r के पदों में हम लिख सकते हैं कि

$$R(r) = c_1 J_0(kr) + c_2 Y_0(kr) \qquad \text{(iv)}$$

जहाँ J_0 और Y_0 क्रमशः प्रथम और द्वितीय प्रकार के शून्य कोटि बेसल फलन हैं।

द्वितीय प्रकार का बेसल फलन $r \to 0$ के लिए $-\infty$ की ओर प्रवृत्त होता है। अत: मान्य हल के लिए हमें $c_2 = 0$ रखना होगा। इस प्रकार (iv) संक्षिप्त रूप ले लेता है :

$$R(r) = c_1 J_0(kr) \qquad \text{(v)}$$

हम जानते हैं कि $(r = r_0)$ पर झिल्ली बंधी हुई है, इसलिए परिसीमा प्रतिबंध में यह निहित है कि

$$r = r_0 \quad \text{पर} \quad R(r) = 0$$

अब यदि हम $c_1 = 0$ लें तो हमें एक तुच्छ हल प्राप्त होगा। अत: हम c_1 को शून्येतर रख कर $J_0(kr_0) = 0$ लेते हैं। यदि हम $J_0(kr_0)$ के शून्यकों को $\alpha_1, \alpha_2, \ldots.$ से प्रकट करें तो हम लिख सकते हैं कि

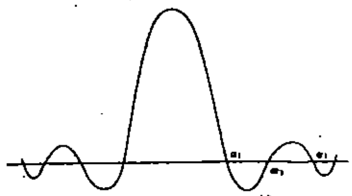
$$kr_0 = \alpha_m$$

या $$k = k_m = \frac{\alpha_m}{r_0} \qquad \text{(vi)}$$

अत: समीकरण (v) निम्न रूप का हो जाता है :

$$R(r) = c_1 J_0\left(\frac{\alpha_n}{r_0}\right)$$

इस हल को चित्र 6.5 में चित्रित किया गया है।



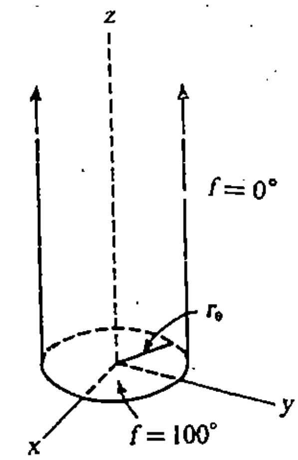
चित्र 6.5 : बेसल फलन का आरेख

उदाहरण 2

एक शीतलन मीनार की कल्पना कीजिए। इसे चित्र 6.6 में दिखाई गई बेलनाकार आकृति द्वारा मॉडल किया जा सकता है। इसमें स्थायी-अवस्था तापमान वितरण लाप्लास समीकरण $\nabla^2 T = 0$ का हल है। चित्र देखकर

i) परिसीमा प्रतिबंध बताइए और

ii) इनके संगत स्थायी-अवस्था तापमान ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.6 : बेलनाकार शीतलन मीनार

हल

i) चित्र 6.6 को देखकर हम परिसीमा प्रतिबंधों को निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$T(2, z) = 0, \qquad 0 < z < 4,$$

$$T(\rho, 0) = 0, \qquad T(\rho, 4) = T_0, \qquad 0 < \rho < 2 \qquad \text{(i)}$$

ii) स्थायी-अवस्था तापमान मालूम करने के लिए हम लाप्लासियन को बेलनी ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त करते हैं। क्योंकि दी हुई ज्यामिति वृत्तीय सममित है, इसलिए हम लिख सकते हैं :

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

अत:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial T}{\partial\rho} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \qquad 0 < \rho < 2 \qquad 0 < z < 4$$

फलन T को $R(\rho)\, Z(z)$ गुणनफल के रूप में लिखकर चर पृथक्करण विधि द्वारा आपको निम्नलिखित सर्वसमिका मिलेगी :

$$\frac{R'' + \frac{1}{\rho}R''}{R} = -\frac{Z''}{Z} = -\lambda^2$$

इसे हम दो सरल अवकल समीकरणों के रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$\rho R'' + R' + \lambda^2 \rho R = 0 \qquad \text{(ii)}$$

और

$$Z'' - \lambda^2 Z = 0 \qquad \text{(iii)}$$

यहाँ ऋणात्मक पृथक्करण नियतांक का प्रयोग इसलिए किया गया है कि हल z में आवर्ती नहीं होगा।

समीकरण (ii) शून्य कोटि का बेसल समीकरण है। आप जानते हैं कि इसका व्यापक हल

$$R = c_1 J_0(\lambda\rho) + c_2 Y_0(\lambda\rho)$$

है। यहाँ J_0 और Y_0 शून्य कोटि प्रथम और द्वितीय प्रकार के बेसल फलन हैं।

क्योंकि (iii) का हल परिमित अंतराल (0, 2) पर परिभाषित है, इसलिए हम लिख सकते हैं कि

$$Z = c_3 \cosh\lambda z + c_4 \sinh\lambda z.$$

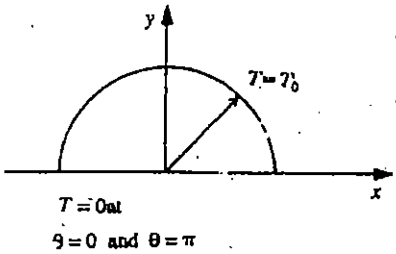
$\rho = 0$ पर परिबद्ध तापमान $T(\rho, z)$ के लिए यह आवश्यक है कि हमें c_2 को इस प्रकार परिभाषित करना चाहिए कि इसका मान शून्य हो। प्रतिबंध $T(2, z) = 0$ में निहित है कि $R(2) = 0$ है। अत:

$$J_0(2\lambda) = 0 \tag{iv}$$

यह समीकरण $\lambda_1 = \alpha_1/2,\ \lambda_2 = \alpha_2/2,\ \ldots,\ \lambda_n = \alpha_n/2$ आदि के लिए लागू होगा जहाँ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ बेसल फलन के शून्यक हैं। अंत में, $Z(0) = 0$ से हम कह सकते हैं कि $c_3 = 0$ होना चाहिए। अत:
$R = c_1 J_0(\lambda_n \rho)$, $Z = c_4 \sinh \lambda_n z$ और $u_n = A_n \sinh \lambda_n z\ J_0(\lambda_n \rho)$.

अत: हम व्यापक हल को निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं :

$$y(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sinh \lambda_n z\ J_0(\lambda_n \rho)$$



चित्र 6.7 : अर्धवृत्ताकार प्लेट

उदाहरण 3

चित्र 6.7 में दिखाई गई अर्ध वृत्ताकार प्लेट में स्थायी-अवस्था तापमान $T(r, \theta)$ ज्ञात कीजिए।

हल

हमें समीकरण

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \qquad 0 < \theta < \pi;\ \ 0 < r < a_0$$

को निम्नलिखित परिसीमा प्रतिबंधों के अंतर्गत हल करना होगा :

$$T(a_0, \theta) = T_0 \sin \theta \qquad 0 < \theta < \pi$$

$$T(r, 0) = T(r, \pi) = 0 \qquad 0 < r < a_0$$

यदि हम $T = R(r)\,\Theta(\theta)$ परिभाषित करें तो चर पृथक्करण विधि से हमें यह परिणाम प्राप्त होता है :

$$\frac{r^2 R'' + rR'}{R} = \lambda^2 = \frac{\Theta''}{\Theta}$$

अत: मूल आंशिक अवकल समीकरण निम्नलिखित समीकरणों में विभक्त हो जाता है :

$$r^2 R'' + rR' - \lambda^2 R = 0 \tag{i}$$

और

$$\Theta'' + \lambda^2 \Theta = 0 \tag{ii}$$

समीकरण (ii) के हल $\Theta = c_1 \cos \lambda\theta + c_2 \sin \lambda\theta$ पर परिसीमा प्रतिबंध $\Theta(0) = 0$ और $\Theta(\pi) = 0$ लागू करने पर आप देखेंगे कि $c_1 = 0$ और $\lambda = n$ जहाँ $n = 1, 2, 3, \ldots$ प्राप्त होता है। अत: $\Theta = c_2 \sin n\theta$.
$\lambda = n$ के लिए समीकरण (i) कॉशी आयलर समीकरण के समरूप हो जाता है। आप इसे इकाई 3 में बतायी गई विधियों से हल कर सकते हैं। ऐसा करने पर आपको निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा :

$$R = c_3 r^n + c_4 r^{-n}$$

$r \to 0$ सीमा में परिमित हल प्राप्त हो, इसके लिए यह आवश्यक है कि हम c_4 को शून्य लें। अत:

$$T_n = A_n r^n \sin n\theta$$

और

$$T(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n r^n \sin n\theta$$

परिसीमा प्रतिबंध $r = a$ से आप लिख सकते हैं कि

$$T_0 \sin\theta = \sum_{n=1}^{\infty} A_n a^n \sin n\theta$$

अतः दोनों पक्षों में ज्या फलन के पदों की तुलना करने पर आप देखेंगे कि

$$A_1 = \frac{T_0}{a_0},\ A_2 = A_3 = 0 = \ldots\ldots = 0 = A_n$$

तथा

$$T(r, \theta) = \frac{T_0}{a_0} r \sin\theta$$

आइए अब इस इकाई का संक्षिप्त सारांश दें।

6.4 सारांश

- दो चरों वाले रैखिक आंशिक अवकल समीकरण को हल करने के लिए हम f को XY गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हैं जहाँ X केवल x का फलन है और Y केवल y का फलन है। इस चर पृथक्करण विधि से दो साधारण अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं।
- परिसीमा-मान समस्या में हम एक ऐसा फलन ज्ञात करते हैं जो आंशिक अवकल समीकरण तथा परिसीमा और आदि प्रतिबंधों को संतुष्ट करता हो।
- चर पृथक्करण विधि द्वारा परिसीमा-मान समस्या का हल निम्नलिखित मूल चरणों को क्रमशः लागू करने पर प्राप्त होता है :

  i) फलन f को स्वतंत्र चरों पर आश्रित दो या अधिक फलनों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं। अर्थात् $f(x, y) = X(x)\,Y(y)$ लेकर दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित कीजिए। ऐसा करने से हमें एक साधारण अवकल समीकरण समुच्चय प्राप्त होता है। दो चरों वाला आंशिक अवकल समीकरण दो साधारण अवकल समीकरणों में विभक्त हो जाता है। यदि स्वतंत्र चरों की संख्या अधिक हो, तो जो साधारण अवकल समीकरण हमें प्राप्त होते हैं उनकी संख्या स्वतंत्र चरों की संख्या के बराबर होती है।

  ii) प्राप्त साधारण अवकल समीकरणों के हल चरघातांकी फलन, त्रिकोणमितीय फलन, या घात श्रेणी हो सकते हैं।

  iii) इस तरह प्राप्त हलों को अभिकल्पित गुणनफल में प्रतिस्थापित कीजिए।

  iv) परिसीमा और/या आदि प्रतिबंधों को लागू कीजिए और श्रेणी के गुणांकों के लिए मान ज्ञात कीजिए।

6.5 अंत में कुछ प्रश्न

प्रश्नों पर 25 मिनट लगाएं

1. i) एक गोलीय कोश (spherical shell) के बाहरी और अंदरूनी भाग में एक स्थिर वैद्युत विभव को लाप्लास समीकरण $\nabla^2 f = 0$ की सहायता से परिकलित किया जा सकता है। चर पृथक्करण विधि से इसे तीन साधारण अवकल समीकरणों में विभक्त कीजिए।

   (**संकेत** : ∇^2 को गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों में व्यक्त कीजिए।)

   ii) त्रिविम तरंग समीकरण

$$\nabla^2 f(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\mathbf{r}, t)$$

को कार्तीय निर्देशांकों में व्यक्त करके दिखाइए कि इसे निम्नलिखित चार साधारण अवकल समीकरणों के समुच्चय में बदला जा सकता है :

$$\ddot{T} + \omega^2 T = 0$$

$$X'' + l^2 X = 0$$

$$Y'' + m^2 Y = 0$$

और

$$Z'' + n^2 Z = 0$$

जहाँ $\omega = vk$ और l, m, n पृथक्करण नियतांक है।

2. मुक्त आकाश में वैद्युत चुंबकीय तरंग संचरण के लिए एक-विम तरंग समीकरण (जब $E_y \parallel \hat{\mathbf{y}}$) को हम निम्नलिखित रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0$$

इस समीकरण को $x = 0$ और $x = L$ पर $E_y = 0$ लेकर हल करें तथा आइगेन आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

3. एक ऐसी छड़ की कल्पना कीजिए जिसके सिरे अचर तापमान पर हैं और जिसका पार्श्व पृष्ठ ऊष्मारोधी है। निम्नलिखित प्रतिबंधों के अधीन ऊष्मा प्रवाह को एक-विम ऊष्मा समीकरण व्यक्त करता है

$$f(0, t) = 0, \quad f(L, t) = 0 \qquad t > 0$$

और

$$f(x, t) = f(x) \qquad 0 < x < L$$

ऊष्मा समीकरण का अद्वितीय हल ज्ञात कीजिए।

6.6 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1. i) हम

$$T(r, z) = R(r)\, Z(z) \qquad \text{(i)}$$

लेकर r और z के सापेक्ष अवकलज परिकलित करते हैं :

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \frac{dR}{dr} Z$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = \frac{d^2 R}{dr^2} Z$$

और

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = R \frac{d^2 Z}{dz^2} \qquad \text{(ii)}$$

दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण में इन्हें प्रतिस्थापित करने पर हमें यह समीकरण प्राप्त होता है :

$$Z\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{Z}{r}\frac{dR}{dr} + R\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

इसें ZR से भाग देने पर हमें निम्न समता प्राप्त होती है :

$$\frac{1}{R}\left[\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr}\right] = -\frac{1}{Z}\frac{d^2 Z}{dz^2} \qquad \text{(iii)}$$

इसके वाम पक्ष में केवल r पर आश्रित फलन है जबकि दक्षिण पक्ष का व्यंजक केवल z का फलन है। इसलिए, दोनों पक्ष एक अचर, k, के बराबर होने चाहिए। अतः दिया हुआ समीकरण निम्नलिखित दो साधारण अवकल समीकरणों में विभक्त हो जाता है :

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - kR = 0 \qquad \text{(iv)}$$

और

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + kZ = 0 \qquad \text{(v)}$$

ii) दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण को इस रूप में लिखा जा सकता है

$$r^2\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial V}{\partial r} + \tan\theta\,\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0 \qquad \text{(i)}$$

आइए अब v को r और θ के फलनों के गुणनफल के रूप में व्यक्त करें :

$$V(r, \theta) = R(r)\,\Theta(\theta) \qquad \text{(ii)}$$

r के सापेक्ष अवकलन करने पर आप देखेंगे कि

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{dR}{dr}\Theta$$

तथा

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{d^2R}{dr^2}\Theta \qquad \text{(iii)}$$

इसी प्रकार, θ के सापेक्ष अवकलन करने पर आप लिख सकते हैं कि

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = R\frac{d\Theta}{d\theta}$$

और

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = R\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} \qquad \text{(iv)}$$

दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण में इन परिणामों को प्रतिस्थापित करने पर हमें यह समीकरण प्राप्त होता है :

$$r^2\Theta\frac{d^2R}{d\theta^2} + 2r\,\Theta\frac{dR}{dr} + \tan\theta\,R\frac{d\Theta}{d\theta} + k\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = 0$$

पहले की तरह, पूरे समीकरण को $R\,\Theta$ से भाग देने पर निम्न समता प्राप्त होती है :

$$\frac{1}{R}\left[r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr}\right] = -\frac{1}{\Theta}\left[\tan\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right] \qquad \text{(v)}$$

वाम पक्ष r केवल का फलन है जबकि दक्षिण पक्ष केवल θ का फलन है। अत: इन दोनों को एक अचर के बराबर रखने पर हमें अभीष्ट अवकल समीकरण समुच्चय प्राप्त होता है :

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + 2r\frac{dR}{dr} - kR = 0$$

या

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - kR = 0 \qquad \text{(vi)}$$

तथा

$$\tan\theta\frac{d\Theta}{d\theta} + \frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + k\Theta = 0$$

या

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)+k\Theta=0 \qquad \text{(vii)}$$

iii) दिए हुए समीकरण

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\alpha\frac{\partial\psi}{\partial t}=0$$

में $\psi(x, t)$ को दो फलनों के गुणनफल के रूप में व्यक्त कीजिए :

$$\psi(x, t)=X(x)\,T(t)$$

इसे दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर आपको यह प्राप्त होगा

$$X''(x)\,T(t)+\alpha X(x)\,\dot{T}(t)=0$$

पूरे समीकरण को $X(x)\,T(t)$ से भाग देने पर प्राप्त व्यंजक को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{X''}{X}=-\alpha\frac{\dot{T}}{T}=-k^2$$

अत: श्रोडिंगर अवकल समीकरण निम्नलिखित दो समीकरणों में विभक्त हो जाता है :

$$X''+k^2X=0$$

तथा

$$\dot{T}-\lambda^2T=0$$

जहाँ $\lambda^2=k^2/\alpha$.

2. हेल्महोल्ट्स समीकरण

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x,y,z)+k^2f(x,y,z)=0 \qquad \text{(i)}$$

में फलन f को हम निम्नलिखित गुणनफल के रूप में व्यक्त करते हैं :

$$f(x,y,z)=X(x)\,Y(y)\,Z(z) \qquad \text{(ii)}$$

दिए हुए आंशिक अवकल समीकरण में इसे प्रतिस्थापित करने पर हमें यह परिणाम प्राप्त होता है :

$$YZ\frac{d^2X}{dx^2}+XZ\frac{d^2Y}{dy^2}+XY\frac{d^2Z}{dz^2}+k^2XYZ=0 \qquad \text{(iii)}$$

पूरे समीकरण को XYZ से भाग देने और पदों को व्यवस्थित करने पर हमें यह समता प्राप्त होती है :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k^2-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \qquad \text{(iv)}$$

इस सर्वसमिका का वाम पक्ष केवल x का फलन है जबकि दक्षिण पक्ष y और z पर निर्भर करता है। अत: यदि हम मान लें कि

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-l^2 \qquad \text{(v)}$$

तो उपर्युक्त सर्वसमिका के दक्षिण पक्ष को ऐसे भी लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}=-k^2+l^2-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \qquad \text{(vi)}$$

यहाँ y के एक फलन का व्यंजक, z के फलन के व्यंजक से संबंधित है। अब यदि हम मान लें कि

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = -m^2 \qquad \text{(vii)}$$

तो आप देखेंगे कि

$$\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} = -k^2 + l^2 + m^2 = -n^2 \qquad \text{(viii)}$$

यहाँ हमने $k^2 = l^2 + m^2 + n^2$ रख दिया है। समीकरण (iv), (vi) और (vii) अभीष्ट साधारण अवकल समीकरण का यह समुच्चय है जिनमें हेल्महोल्ट्स समीकरण विभक्त होता है।

3. हम जानते हैं कि

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = v^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) f(r, \theta, t) \qquad \text{(i)}$$

यहाँ

$$f(r, \theta, t) = R(r)\,\Theta(\theta)\,T(t) \qquad \text{(ii)}$$

लेकर आप लिख सकते हैं, कि

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \ddot{T} R \Theta$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{d^2R}{dr^2}\Theta T$$

तथा

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = RT\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} \qquad \text{(iii)}$$

इन परिणामों को (i) में प्रतिस्थापित करने पर आपको यह परिणाम प्राप्त होगा :

$$R\Theta\ddot{T} = v^2\left(\Theta T\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{\Theta T}{r}\frac{dR}{dr} + \frac{RT}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right)$$

अब सभी आंशिक अवकलज साधारण अवकलज बन गए हैं। पूरे समीकरण को $R\,\Theta\,T$ से भाग देने पर आप देखेंगे कि

$$\frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} = \frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{rR}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} \qquad \text{(iv)}$$

वामपक्ष में t का फलन r और θ के फलन के बराबर है। अब यदि यह मान लें कि

$$\frac{1}{v^2}\frac{\ddot{T}}{T} = -l^2 \qquad \text{(v)}$$

तो हम लिख सकते हैं कि

$$\ddot{T} + v^2 l^2 T = 0$$

या $\ddot{T} + \lambda^2 T = 0$ (vi)

जहाँ $\lambda = vl$. इसी प्रकार (iv) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{1}{R}\frac{dR}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = -l^2$$

या

$$-\frac{1}{\Theta}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} = r^2 l^2 + \frac{r}{R}\frac{dR}{dr} + \frac{r^2}{R}\frac{d^2R}{dr^2}$$

यदि हम वाम पक्ष को m^2 के बराबर रखते हैं तो हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं :

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + m^2\Theta = 0 \qquad \text{(vii)}$$

और

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2} + r\frac{dR}{dr} + (r^2 l^2 - m^2)R = 0 \qquad \text{(viii)}$$

यदि हम l के स्थान पर k और m के स्थान पर p रख दें तो समीकरण (vi), (vii) और (viii) समीकरण (6.32 क), (6.34 ख) और (6.34 क) के सर्वसम हो जाते हैं।

4. एक-विम तरंग समीकरण का हल समीकरण (6.40) में निहित है। अज्ञात अचरों को ज्ञात करने के लिए $h(x)$ के दिए हुए रूप को समीकरण (6.41) में प्रतिस्थापन कीजिए। ऐसा करने पर आपको यह प्राप्त होगा :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = \xi_0\left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right]$$

इस समीकरण के दोनों पक्षों के सदृश पदों की तुलना करने पर हम देखते हैं कि

$$a_1 = \xi_0 = a_2$$

और

$$a_3 = a_4 = \ldots\ldots = a_n = 0.$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. i) गोलीय ध्रुवीय निर्देशांकों में लाप्लास समीकरण को निम्न रूप में लिखा जाता है :

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right] = 0$$

इस पृथक्करण विधि में हम लिखते हैं कि

$$f(r, \theta, \phi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\phi)$$

इसे दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने और $R\,\Theta\,\Phi$ से भाग देने पर हम देखते हैं कि

$$\frac{1}{Rr^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) + \frac{1}{\Theta r^2\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) + \frac{1}{\Phi r^2\sin^2\theta}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = 0$$

पूरे समीकरण को $r^2\sin\theta$ से गुणा करके हम ϕ पर आश्रित पद को अलग कर सकते हैं :

$$-\frac{1}{R}\sin^2\theta\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right) - \frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right) = \frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2}$$

पहले की तरह आप यहाँ भी देख सकते हैं कि यह सर्वसमिका ϕ के फलन का संबंध r और θ के फलनों के साथ स्थापित करती हैं। क्योंकि r, θ, ϕ स्वतंत्र चर हैं, इसलिए हम समीकरण के प्रत्येक पक्ष को एक अचर के बराबर रख सकते हैं। इस अचर को $-m^2$ मान कर हमें निम्न समीकरण प्राप्त होते हैं :

$$\frac{1}{\Phi}\frac{d^2\Phi}{d\phi^2} = -m^2 \qquad \text{(i)}$$

तथा

$$\frac{1}{R}\sin^2\theta\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{\sin\theta}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)=m^2$$

या

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)=\frac{m^2}{\sin^2\theta}-\frac{1}{\sin\theta}\frac{1}{\Theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)$$

इस समता के दोनों पक्षों को एक अचर के बराबर रखने पर हमें अपेक्षित परिणाम प्राप्त हो जाता है :

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-nR=0 \qquad \text{(ii)}$$

और

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{d\Theta}{d\theta}\right)-\frac{m^2}{\sin\theta}\Theta+n\Theta=0 \qquad \text{(iii)}$$

जहाँ n पृथक्करण अचर है।

ii) त्रिविम तरंग समीकरण

$$\nabla^2 f(\mathbf{r},t)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} \qquad \text{(i)}$$

में निहित लाप्लासियन को कार्तीय निर्देशांकों में इस रूप में लिखते हैं :

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2} \qquad \text{(ii)}$$

अतः

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)f(x,y,z,t)=\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad \text{(iii)}$$

फलन f चार चरों पर आश्रित है। अतः हम इसे इस रूप में लिखते हैं :

$$f(x,y,z,t)=X(x)\,Y(y)\,Z(z)\,T(t)$$

दिए हुए समीकरण में इसे प्रतिस्थापित करने और $XYZT$ से भाग देने पर निम्न व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}=\frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2} \qquad \text{(iv)}$$

इस समीकरण का वाम पक्ष स्थानिक चरों का फलन है जबकि दक्षिण पक्ष केवल समय का फलन है। आइए हम इन्हें एक नियतांक, $-k^2$, के बराबर रखें। ऐसा करने पर आप देखेंगे कि

$$\frac{1}{v^2}\frac{1}{T}\frac{d^2T}{dt^2}=-k^2$$

या

$$\frac{d^2T}{dt^2}+\omega_0^2T=0 \qquad \text{(v)}$$

जहाँ $\omega_0=kv$.

तब सर्वसमिका के वाम पक्ष को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}=-k^2-\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}-\frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2} \qquad \text{(vi)}$$

अब वाम पक्ष केवल x का फलन है, जबकि दक्षिण पक्ष y और z पर आश्रित है। अतः हम उपर्युक्त प्रक्रिया को पुनः दोहराते हैं, यानि

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -l^2$$

रखने पर आप देखेंगे कि

$$\frac{d^2X}{dx^2} + l^2X = 0 \qquad \text{(vii)}$$

और

$$\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2} = l^2 - k^2 - \frac{1}{Z}\frac{d^2Z}{dz^2}$$

उपर्युक्त विधि द्वारा आप यह दिखा सकते हैं कि

$$\frac{d^2Y}{dy^2} + m^2Y = 0$$

और

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + n^2Z = 0$$

जहाँ $n^2 = k^2 - l^2 - m^2$

2. दिया हुआ समीकरण मुक्त आकाश में वैद्युत चुंबकीय तरंग संचरण को व्यक्त करता है :

$$\frac{\partial^2E_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2E_y}{\partial t^2} = 0$$

अब हम $E_y = X(x)\,T(t)$

लेकर उपर्युक्त समीकरण में प्रतिस्थापित करते हैं। ऐसा करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$X''T - \frac{1}{c^2}X\ddot{T} = 0$$

इसे XT से भाग देने पर आप देखेंगे कि

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}}{T} = -k^2$$

इस समता से निम्नलिखित दो समीकरण प्राप्त होते हैं

$$X'' + k^2X = 0$$

तथा

$$\ddot{T} + \omega_0^2 T = 0$$

जहाँ $\omega_0 = ck$.

इन समीकरणों के हल निम्न रूप के हैं :

$$X(x) = A\cos kx + B\sin kx$$

और

$$T(t) = C\cos\omega_0 t + D\sin\omega_0 t$$

$x = 0$ और $x = L$ पर प्रतिबंध $X(x)T(t) = E_y = 0$ में यह निहित है कि सभी $t > 0$ के लिए इन दोनों बिंदुओं पर $X(x) = 0$ होगा। $X(0) = 0$ के कारण हम देखते हैं कि $A = 0$ होना चाहिए। $x = L$ पर दिये गए प्रतिबंध

$$X(L) = B \sin kL = 0$$

से अतुच्छ हल प्राप्त करने के लिए हमें B को शून्येतर लेना होगा। अत: निम्न आइगन मानों के लिए स्वीकार्य हल प्राप्त होता है :

$$k_n L = n\pi$$

या

$$k_n = (n\pi/L)$$

इनके संगत आइगेन फलन

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}\right)x$$

3. हमें एक-विम ऊष्मा समीकरण

$$\frac{1}{\nu}\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad \text{(i)}$$

को परिसीमा एवं आदि प्रतिबंध

$$f(0, t) = 0, \quad f(L, t) = 0$$

तथा

$$f(x, 0) = f(x) \qquad 0 < x < L \qquad \text{(ii)}$$

के लिए हल करना है। अत: पहले हम लिखते हैं कि

$$f(x, t) = X(x)\,T(t)$$

इसे दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित कर XT से भाग देने पर हमें निम्न समता प्राप्त होती है :

$$\frac{1}{\nu T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}$$

आप देखेंगे कि वाम पक्ष केवल t पर आश्रित है और दक्षिण पक्ष केवल x पर आश्रित है। अत: हम लिखते हैं कि

$$\frac{1}{\nu T}\frac{dT}{dt} = \frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2} = -k^2 \qquad \text{(iii)}$$

सर्वसमिका को दो साधारण अवकल समीकरणों में विभक्त कर सकते हैं :

$$\frac{dT}{dt} + k^2 \nu T = 0 \qquad \text{(iv)}$$

तथा

$$\frac{d^2X}{dx^2} + k^2 X = 0 \qquad \text{(v)}$$

जिनके हल निम्न रूप के हैं :

$$T(t) = Ae^{-k^2 \nu t}$$

तथा

$$X(x) = B \cos kx + C \sin kx$$

अत:

$$f(x, t) = X(x) \cdot T(t) = (P \cos kx + Q \sin kx)\, e^{-k^2 \nu t}$$

6.8 शब्दावली

अतुच्छ हल	non-trivial solution
अभिलक्षणिक समीकरण	characteristic equation
आदि प्रतिबंध	initial condition
आदि-मान समस्या	inital-value problem
आवर्ती	periodic
चर पृथक्करण विधि	method of separation of variables
तरंग समीकरण	wave equation
परिसीमा प्रतिबंध	boundary condition
पृथक्करणीय	separable
सर्वसमिका	identity

इकाई 7 फूरिए श्रेणी

इकाई की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना

इकाई 6 में आपने भौतिक परिघटनाओं के अध्ययन से संबंधित द्वितीय कोटि आंशिक अवकल समीकरणों को हल करना सीखा है। भाग 6.4 में एक परिसीमा -मान समस्या को हल करने के दौरान आपको एक ऐसी नई विधि को सीखने की आवश्यकता जान पड़ी थी जिसकी सहायता से भौतिकी की परिसीमा-मान समस्याओं को पूरी तरह से हल किया जा सके। इस इकाई में आप फूरिए श्रेणी पर आधारित इस विधि को सीखेंगे। शुरू में अर्थात् भाग 7.2 में हम इस बात पर फिर से विचार करेंगे कि परिसीमा-मान समास्याओं को हल करने लिए इस प्रकार की विधि की आवश्यकता क्यों पड़ती है। इस संदर्भ में आइए हम इस विधि के ऐतिहासिक विकास पर एक नज़र डालें।

न्यूटन और लाइब्नीत्ज द्वारा कैलकुलस का आविष्कार करने के बाद गणितीय भौतिकी में कैल्कुलस संबंधी कार्यकलापों की एक बाढ़-सी आ गई। उस अवधि में जिस समस्या की ओर वैज्ञानिकों का ध्यान विशेष रूप से गया वे थीं वाद्य यंत्रों के कँपनों से संबंधित समस्याएँ। इन समस्याओं को डोरियों, प्रत्यास्थ छड़ों (elastic bars) और वायु स्तंभों (air columns) के कंपनों (vibrations) से संबंधित परिसीमा-मान समस्यायों (boundary-value problems) से निर्दिशित किया गया। सन् 1750 ई. के आस-पास द एलम्बर्ट, बर्नौली आर ऑयलर ने कंपायमान डोरी के लिए आंशिक अवकल समीकरण को स्थापित किया, इसका व्यापक हल (general solution) प्राप्त किया (जैसा कि इकाई 6 के समीकरण (6.15) में दिखाया गया है) और डोरियों के लिए दी गई परिसीमा-मान समस्या का हल प्राप्त किया। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि इकाई 6 के समीकरण (6.40) द्वारा दिया गया हल त्रिकोणमितीय फलनों की श्रेणी का योगफल है। इस बात ने इन गणितज्ञों को यह सोचने के लिए प्रेरित किया कि स्वेच्छ फलनों को त्रिकोणमितीय श्रेणी से निरूपित किया जा सकता है। बाद में चलकर, ऑयलर ने इन श्रेणियों के गुणांकों के व्यंजक प्राप्त किए। फिर भी, इन सभी बातों के होने के बावजूद भी उस समय स्वेच्छ फलनों को इन श्रेणियों से निरूपित करने की बात को पूर्णतः मान्यता प्रदान नहीं की गई थी।

बाद में ऊष्मा चालन से संबंधित परिसीमा-मान समस्याओं पर किए गए अपने कार्य में फ्रांसीसी वैज्ञानिक जीन बाप्तीस्ते-फूरिए (1768-1830) ने साइन और कोसाइन पदों वाली अनंत श्रेणियों (infinite series) के योगफल द्वारा स्वेच्छ फलनों के निरूपण के अनेक उदाहरण प्रस्तुत किए। फूरिए द्वारा किया गया यह शोध कार्य ही था

जिसने इस प्रकार की श्रेणी द्वारा फलनों को निरूपित करने की ओर गणितज्ञों में रूचि पैदा की। इसीलिए इस विशेष श्रेणी को उस महान वैज्ञानिक के नाम पर ही फूरिए श्रेणी कहा जाता है। इस इकाई के 7.3 से 7.5 तक के भागों में आप फूरिए श्रेणी द्वारा एक फलन को निरूपित करने की तकनीक सीखेंगे और इसे विभिन्न प्रकार के फलनों पर लागू करेंगे। इस संदर्भ में एक प्रश्न यह भी उठता है : एक फलन की फूरिए श्रेणी कितनी परिशुद्धता तक इसे निरूपित करती है? भाग 7.6 में आप उन प्रतिबंधों को जानेंगे जिनके अंतर्गत फलन की फूरिए श्रेणी से एक बिन्दु पर वही मान प्राप्त होता है जो कि स्वयं फलन से प्राप्त होता है।

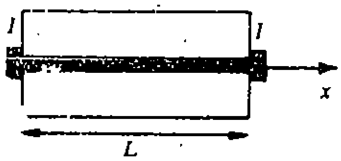
इकाई 8 में आप भौतिकी की कुछ महत्त्वपूर्ण परिसीमा-मान समस्याओं को हल करने में फूरिए-श्रेणी के अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- अंतराल $(-L, L)$ पर परिभाषित फलन की फूरिए श्रेणी के गुणांक मालूम कर सकेंगे,
- $(0, L)$पर परिभाषित फलनों के अर्ध-परिसर प्रसार प्राप्त कर सकेंगे,
- यह सुनिश्चित कर सकेंगे कि एक दिए हुए अंतराल पर फलन का फूरिए श्रेणी निरूपण मान्य है या नहीं।

7.2 फूरिए श्रेणी की आवश्यकता



चित्र 7.1 : लंबाई L वाला एक छड़ जो ऊष्मारोधी पदार्थ से घिरा है और जिसके दोनों सिरे बर्फ़ में रखे हैं। छड़ की लंबाई के अनुदिश x-अक्ष को लिया गया है और इसके बाएँ सिरे पर मूल बिन्दु स्थित है।

आइए, हम आंशिक अवकल समीकरण से संबंधित इकाई 6 में दी गई भौतिकी की एक विशिष्ट समस्या पर विचार करें। ऊष्मारोधी पदार्थ से घिरी एक समांग छड़ में ऊष्मा-प्रवाह को लीजिए (चित्र 7.1)। छड़ के दोनों सिरों को बर्फ में रखा गया है। हम समय t पर छड़ का तापमान-वितरण मालूम करना चाहते हैं। आप जानते हैं कि छड़ में ऊष्मा-प्रवाह को निम्नलिखित ऊष्मा-प्रवाह समीकरण से निदर्शित किया जा सकता है।

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \qquad (7.1\text{क})$$

जहाँ $T(x, t)$ समय t पर बाएँ सिरे से दूरी x पर छड़ का (K में मापा गया) तापमान है। यहाँ $k = \frac{s\rho}{K}$, जहाँ ρ छड़ की धातु का घनत्व है, s इसकी विशिष्ट ऊष्मा है और K इसकी ताप चालकता है। इस विशिष्ट प्रश्न के लिए $t > 0$ पर $0 < x < L$ है। क्योंकि छड़ के दोनों सिरों को 0°C (अर्थात् 273 K) के तापमान पर रखा गया है इसलिए हमें निम्नलिखित परिसीमा प्रतिबंध (boundary conditions) प्राप्त होते हैं,

$$T(0, t) = T(L, t) = 273\text{ K},\ \text{जहाँ}\ t \geq 0 \qquad (7.1\text{ख})$$

मान लीजिए छड़ का आदि तापमान है,

$$T(x, 0) = (60\text{K})\left(\sin\frac{2\pi x}{L} + \sin\frac{3\pi x}{L}\right) \qquad (7.1\text{ग})$$

समीकरण (7.1ख) और (7.1ग) द्वारा निर्दिष्ट परिसीमा और आदि प्रतिबंधों के अंतर्गत समीकरण (7.1क) का हल क्या है?

आपको याद होगा कि आपने इकाई 6 में इसी प्रकार का प्रश्न हल किया था। आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि फलन

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (7.1\text{घ})$$

ऊष्मा प्रवाह समीकरण और इन परिसीमा प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है। यहाँ गुणाँक b_n की विमाएँ वही हैं जो कि तापमान की हैं। समीकरण (7.1घ) पर आदि प्रतिबंध लागू करने पर हमें मिलता है,

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L}$$

समीकरण (7.1ग) में $T(x, 0)$ के मान को प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है,

$$b_1 \sin\frac{\pi x}{L} + b_2 \sin\frac{2\pi x}{L} + b_3 \sin\frac{3\pi x}{L} + b_4 \sin\frac{4\pi x}{L} + \ldots = 60\text{K}\left(\sin\frac{2\pi x}{L} + \sin\frac{3\pi x}{L}\right) \quad (7.1\text{ङ})$$

यह समीकरण केवल तभी संतुष्ट होता है जबकि

$$b_1 = 0,\ \ b_2 = 60\text{ K},\ \ b_3 = 60\text{ K},\ \ b_4 = b_5 = b_6 = \ldots = 0$$

इस तरह, हल यह होगा,

$$T(x, t) = (60\text{K})\exp\left(-\frac{4\pi^2 kt}{L^2}\right)\sin\frac{2\pi x}{L} + (60\text{K})\exp\left(-\frac{9\pi^2 kt}{L^2}\right)\sin\frac{3\pi x}{L} \quad (7.1\text{च})$$

यह एक बहुत ही सीधा प्रश्न था, था न? अब मान लीजिए $T(x, 0)$, x का स्वेच्छ फलन है जैसे कि $T(x, 0) = \frac{100}{L}x$। अब प्रश्न उठता है कि हम गुणांक b_n किस प्रकार मालूम करेंगे? दूसरे शब्दों में, हम b_n के लिए निम्नलिखित समीकरण को किस प्रकार हल करेंगे?

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} = \frac{100}{L}x, \qquad 0 < x < L \quad (7.1\text{छ})$$

समीकरण (7.1 घ) और समीकरण (7.1 ङ) को देखकर आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि हम समीकरण (7.1) से b_n प्राप्त कर सकते हैं, अगर हम फलन $\frac{100x}{L}$ का प्रसार साइन पदों वाली श्रेणी में कर सकते हों। अब सवाल यह है कि इसे हम कैसे करें? इसके लिए हम फूरिए विधि का प्रयोग करते हैं।

फूरिए विधि में फलन को निरूपित करने के लिए एक अनंत श्रेणी का प्रयोग होता है जिसमें साइन और कोसाइन पद होते हैं, अर्थात् श्रेणी

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nax + b_n \sin nax)$$

द्वारा फलन को निरूपित किया जाता है। इस श्रेणी को **फूरिए श्रेणी** कहा जाता है।

उन आदि-मान समस्याओं और परिसीमा-मान समस्याओं को, जिनमें साधारण अवकल समीकरण और आंशिक अवकल समीकरण आते हों, हल करने में फूरिए श्रेणी एक महत्त्वपूर्ण भूमिका निभाती है। अत: यह आवश्यक हो जाता है कि विभिन्न फलनों को निरूपित करने के लिए आप फूरिए-श्रेणी को ज्ञात करना और उसे प्रयोग करना जान जाएँ।

7.3 फूरिए श्रेणी

फूरिए विधि से संबंधित आधारभूत संकल्पना यह है कि अनेक फलनों को त्रिकोणमितीय पदों वाली श्रेणी के योगफल के रूप में निरूपित किया जा सकता है। अंतराल $-L < x < L$ पर संतत फलन $f(x)$ की फूरिए श्रेणी होती है,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (7.2)$$

अब अगर इस तरह का फलन $f(x)$ दिया हो तो हम समीकरण (7.2) की श्रेणी के गुणांक a_n और b_n जानना चाहेंगे। इसके लिए हमें समाकलन गणित (integral calculus) के कुछ परिणामों का प्रयोग करना होगा। तुरंत संदर्भ के लिए हम इनकी सूची नीचे दे रहे हैं।

आपको याद होगा कि संतत फलनों के निरूपण के लिए आपने खंड 1 में घात श्रेणी (power series) का प्रयोग किया था। फूरिए श्रेणी और घात श्रेणी दोनों ही इस विचार पर आधारित हैं कि एक संतत फलन को कुछ फलनों की श्रेणी के योगफल द्वारा निरूपित किया जा सकता है। फूरिए श्रेणी का अतिरिक्त लाभ यह भी है कि इससे उन फलनों का भी निरूपण संभव है जो कुछ बिन्दुओं पर संतत नहीं होते।

आप जानते हैं कि साइन और कोसाइन फलन आवर्ती (periodic) होते हैं, यानि इनके आलेख में एक पैटर्न बार-बार दोहराया जाता है। गणितीय रूप से एक फलन को आवर्ती कहते हैं यदि

$$f(x + T) = f(x)$$

जहाँ T फलन का आवर्त काल है। उदाहरणत: $\sin x$ और $\cos x$ आवर्त काल 2π वाले आवर्ती फलन हैं क्योंकि

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$

$\sin\frac{n\pi x}{L}$

और

$\cos\frac{n\pi x}{L}$

के आवर्तकाल क्या है ? यह है,

$T = 2L$, क्योंकि

$$\sin\frac{n\pi}{L}(x + 2L) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) = \sin\frac{n\pi x}{L}$$

और

$$\cos\frac{n\pi}{L}(x + 2L) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + 2n\pi\right) = \cos\frac{n\pi x}{L}$$

सामान्यत: $\sin\frac{2\pi nx}{T}$ और $\cos\frac{2\pi nx}{T}$ का आवर्त काल T होता है। इस प्रकार समीकरण (7.2) की फूरिए श्रेणी वस्तुत: किसी भी फलन को $2L$ आवर्तकाल वाले आवर्ती फलनों की श्रेणी के योगफल द्वारा निरूपित करती है।

- $\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0$ (7.3 क)

- $\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0 \quad (m \neq n)$ (7.3 ख)

- $\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0 \quad (m \neq n)$ (7.3ग)

- $\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx = 0$ (7.3घ)

- $\int_{-L}^{L} \sin^2 \frac{m\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{m\pi x}{L}\, dx = L$ (7.3ङ)

अब हम अगले भाग में बताई गई विधि से गुणांक a_n और b_n मालूम कर सकते हैं।

7.3.1 गुणांक मालूम करना

आइए, पहले हम a_0 मालूम करें। समीकरण (7.2) के दोनों पक्षों का $-L$ से L तक समाकलन करने पर हमें मिलता है,

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} a_0\, dx + \int_{-L}^{L} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx \tag{7.4}$$

समीकरण (7.3 घ) की सहायता से आप समीकरण (7.4) को स्वयं पदशः (term by term) समाकलित करना चाहेंगे। इसके लिए नीचे दिया बोध प्रश्न हल कीजिए।

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 1

दिखाइए कि

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx} \tag{7.5क}$$

इस तरह समीकरण (7.5 क) हमारा पहला परिणाम है। इसी तरह हम $a_1, a_2, \ldots a_n$ और $b_1, b_2, \ldots b_n$ मालूम कर सकते हैं। आइए, हम पूरे समीकरण (7.2) को $\sin \frac{m\pi x}{L}$ से गुणा करें और दोनों पक्षों को $-L$ से L तक समाकलित करें। ऐसा करने से हमें मिलता है

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \left[a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \right) \right] dx$$

इस समीकरण के दक्षिण पक्ष को और भी सरल किया जा सकता है,

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = a_0 \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

संबंध

$$\int_a^b f_m(x) f_n(x)\, dx \begin{cases} = 0, & m \neq n \\ \neq 0, & m = n \end{cases}$$

को संतुष्ट करने वाले फलनों को अंतराल (a, b) पर लांबिक फलन (orthogonal function) कहा जाता है। आप यह देख सकते हैं कि फलन $\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots \sin nx$ अंतराल $(-L, L)$ पर लांबिक हैं और यही बात फलनों $\cos x, \cos 2x, \ldots \cos nx$ पर लागू होती है। वास्तव में फूरिए श्रेणी की सहायता से हमने एक स्वेच्छ फलन को लांबिक फलनों की अनंत श्रेणी से निरूपित किया है। व्यवहार में किसी भी लांबिक फलन-समुच्चय की सहायता से फूरिए श्रेणी के अनुरूप अन्य श्रेणियों द्वारा फलनों का निरूपण किया जा सकता है।

अब हम समीकरणों (7.3 घ), (7.3 ख) और (7.3 ङ) का प्रयोग करते हैं। समीकरण (7.3 घ) के अनुसार ऊपर दिए गए समीकरण के दक्षिण पक्ष का पहला पद शून्य है। समीकरण (7.3 क) के अनुसार दक्षिण पक्ष की प्रथम श्रेणी के सभी पदों पर समाकल शून्य है। द्वितीय श्रेणी में केवल एक ही ऐसा पद ($m = n$ पर) है जो बचा रहता है। समीकरण (7.3 ख) के अनुसार शेष पद शून्य हैं। इस तरह,

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx = 0 + 0 + b_m \int_{-L}^{L} \sin^2 \frac{m\pi x}{L}\, dx$$

$$= b_m L, \qquad \text{समीकरण (7.3 ङ) का प्रयोग करने पर।}$$

चूँकि a_n और b_n अचर है, इसलिए उन्हें x के समाकल से बाहर निकाला जा सकता है।

अत:

$$\boxed{b_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{m\pi x}{L}\, dx, \qquad m = 1, 2, 3, \ldots} \qquad (7.5\ \text{ख})$$

a_m भी आप इसी प्रकार प्राप्त कर सकते हैं। इस स्थिति में आपको समीकरण (7.2) को $\cos \frac{m\pi x}{L}$ से गुणा करना होगा और $-L$ से L तक समाकलित करना होगा। इसे एक प्रश्न के रूप में हम आपके लिए प्रस्तुत कर रहे हैं।

बोध प्रश्न 2

प्रश्न पर 5 मिनट लगाए

दिखाइए कि

$$\boxed{a_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{m\pi x}{L}\, dx \qquad m = 1, 2, 3, \ldots} \qquad (7.5\ \text{ग})$$

आइए, हम a_n और b_n के इन सभी परिणामों को एक साथ लिखें। इन्हें ऑयलर सूत्र (Euler formulas) कहा जाता है।

i) $$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx \qquad (7.5\text{क})$$

ii) $$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7.5\text{ख})$$

iii) $$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (7.5\text{ग})$$

समीकरणों (7.5 क, ख, ग) में दी गई संख्याओं a_0, a_n और b_n को $f(x)$ का **फ़ूरिए गुणांक** (Fourier coefficients) कहा जाता है। श्रेणी

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

को, जिसके गुणांक समीकरणों (7.5 क, ख, ग) में दिए गए हैं, अंतराल $-L < x < L$ पर फलन $f(x)$ की **फ़ूरिए श्रेणी** कहा जाता है। ध्यान दीजिए कि a_0, a_n, b_n आदि को प्राप्त करने के लिए समीकरणों (7.5 क, ख, ग) के समाकलनों (integrals) का अस्तित्व होना आवश्यक है। निश्चित समाकल (definite integral) की परिभाषा से आप यह जानते हैं कि यदि इस अंतराल पर फलन $f(x)$ संतत या केवल खंडश: संतत (piecewise continuous) हो, तो समीकरणों (7.5 क, ख, ग) के समाकलों का अस्तित्व होता है। अत: यदि एक दिए हुए अंतराल पर $f(x)$ संतत या खंडश: संतत फलन हो, तो इन समीकरणों की सहायता से इसके फ़ूरिए गुणांक परिकलित किए जा सकते हैं।

खंडश: संतत फलनों की जानकारी पाने के लिए आप इस इकाई का भाग 7.6 पढ़ सकते हैं

भाग 7.1 में आपने यह पढ़ा कि किसी फलन को त्रिकोणमितीय श्रेणी से निरूपित करने की संकल्पना कंपायमान तंत्रों (vibrating systems) से संबंधित परिसीमा-मान समस्याओं के संबंध में स्थापित हुई थी। इन तंत्रों से संबंधित

समस्याओं के आवर्ती हल (periodic solution) होते हैं। यही कारण है कि अनेक पाठ्य-पुस्तकों में इस विषय की चर्चा का प्रारंभ स्वेच्छ आवर्ती फलनों (arbitrary periodic functions) की फूरिए श्रेणी से किया जाता है। फिर भी, फूरिए श्रेणी का प्रयोग भौतिकी की समस्याओं से संबंधित अनेकानेक फलनों को, जिनमें अनावर्ती फलन भी होते हैं, निरूपित करने में किया जा सकता है। हाँ, यह बात अवश्य है कि कुछ प्रतिबंधों के अधीन ही यह श्रेणी मान्य होती है। इस इकाई के भाग 7.6 में हम एक दिए हुए फलन की फूरिए श्रेणी की मान्यता (validity) से संबंधित इन प्रतिबंधों पर चर्चा करेंगे जबकि आप विभिन्न प्रकार के फलनों की फूरिए श्रेणी प्राप्त कर चुके होंगे और फूरिए गुणांक परिकलित कर चुके होंगे।

आइए अब हम अनावर्ती (non-periodic) और आवर्ती (periodic) दोनों ही फलनों की फूरिए श्रेणी मालूम करने से संबंधित एक उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : चरघातांकी फलन (exponential function) और वर्ग तरंग (square wave) की फूरिए श्रेणी

क) अंतराल $-1 < x < 1$ पर फलन $e^{\alpha x}$ की फूरिए श्रेणी ज्ञात कीजिए।

हल

यहाँ $L = 1$। समीकरण (7.5 क) का प्रयोग करने पर हमें मिलता है

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{2\alpha}\,(e^{\alpha} - e^{-\alpha})$$

$$a_n = \int_{-1}^{1} e^{\alpha x} \cos n\pi x\, dx$$

खंडश: समाकलन (integration by parts) करके आप यह दिखा सकते हैं कि

$$c_n = \frac{\alpha(e^{\alpha} - e^{-\alpha})\,(-1)^n}{\alpha^2 + n^2\pi^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

यहाँ हमने लिखा है $\cos n\pi = (-1)^n$

इसी प्रकार आप b_n का मान मालूम कर सकते हैं,

$$b_n = \int_{-1}^{1} e^{\alpha x} \sin n\pi x\, dx = \frac{-n\pi(e^{\alpha} - e^{-\alpha})(-1)^n}{\alpha^2 + n^2\pi^2}$$

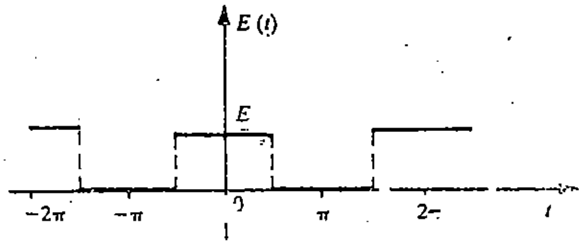
यहाँ हमने यह दिखाने के लिए जानबूझकर लंबी समाकलन प्रक्रिया वाला उदाहरण लिया है कि फूरिए-श्रेणी का अभिकलन एक प्रकार से समाकलन का ही अभ्यास है। अत: यदि आप समाकलन का मान निकालना जान जाएं तो आप अंतराल $-L < x < L$ पर किसी भी फलन की फूरिए श्रेणी ज्ञात कर सकते हैं। इस तरह, अंतराल $-1 < x < 1$ पर फलन $e^{\alpha x}$ की फूरिए श्रेणी होगी,

$$\frac{1}{2\alpha}\,(e^{\alpha} - e^{-\alpha}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(e^{\alpha} - e^{-\alpha})(-1)^n}{\alpha^2 + n^2\pi^2} \cos n\pi x - \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \frac{(e^{\alpha} - e^{-\alpha})}{\alpha^2 + n^2\pi^2} (-1)^n \sin n\pi x$$

$$= (e^{\alpha} - e^{-\alpha}) \left[\frac{1}{2\alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\alpha^2 + n^2\pi^2} (\alpha \cos n\pi x - n\pi \sin n\pi x)\right]$$

ख) आवर्तकाल 2π वाले आवर्ती वर्ग तरंग (चित्र 7.2) को निरूपित करने वाले फलन $E(t)$ जो निम्न रूप में परिभाषित है, की फूरिए श्रेणी ज्ञात कीजिए।

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{यदि} \quad -\pi < x < -\pi/2 \\ E & \text{यदि} \quad -\pi/2 < x < \pi/2 \\ 0 & \text{यदि} \quad \pi/2 < x < \pi \end{cases} \qquad \text{(i)}$$



चित्र 7.2 : आवर्त काल 2π की वर्ग तरंग

इस प्रकार के स्पंदन विद्युत परिपथों पर लगी वोल्टताओं को निरूपित करते हैं।

हल

यहाँ $L = \pi$। इसलिए समीकरण (7.5 क) से हमें मिलता है

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E(t)\, dt$$

या
$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{-\pi/2} (0)\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} E\, dt + \frac{1}{2\pi}\int_{\pi/2}^{\pi} (0)\, dt = \frac{E}{2\pi}\pi = \frac{E}{2}$$

और, समीकरण (7.5 ख) से

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E(t)\cos nt\, dt = \frac{E}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos nt\, dt$$

$$= \frac{E}{n\pi}\left[\sin nt\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2E}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

इस तरह $a_n = 0$, यदि n सम हो

$$a_n = \frac{2E}{n\pi}, \qquad \text{यदि } n = 1, 5, 9, \ldots$$

और
$$a_n = -\frac{2E}{n\pi}, \qquad \text{यदि } n = 3, 7, 11, \ldots$$

इसी प्रकार, समीकरण (7.5 ग) से

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} E(t)\sin nt\, dt = \frac{E}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin nt\, dt$$

$$= \frac{E}{\pi}\left[-\frac{\cos n\pi}{n}\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{E}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - \cos\frac{n\pi}{2}\right] = 0.$$

इस तरह, सभी n के लिए $b_n = 0$.

अतः (i) के स्पंदन $E(t)$ द्वारा निरूपित आवर्त काल 2π वाले आवर्ती वर्ग तरंग की फूरिए श्रेणी होगी,

$$E(t) = \frac{E}{2} + \frac{2E}{\pi}\left[\cos t - \frac{1}{3}\cos 3t + \frac{1}{5}\cos 5t + \ldots\right]$$

अब हम अंतराल $-L < x < L$ पर परिभाषित किसी फलन $f(x)$ की फूरिए श्रेणी मालूम करने की तकनीक का संक्षिप्त विवरण यहाँ दे रहें हैं।

फूरिए श्रेणी मालूम करना

1) अंतराल $-L < x < L$ पर परिभाषित फलन $f(x)$ की फूरिए श्रेणी को इस रूप में लिखिए,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \sin\frac{n\pi x}{L}\right)$$

2) ज्ञात कीजिए

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx$$

3) ज्ञात कीजिए

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

और

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

जैसा कि आपने देखा है, फूरिए श्रेणी में अनंत पद होते हैं। आजकल आंशिक अवकल समीकरणों की अधिकतर आदि-मान समस्याओं और परिसीमा-मान समस्याओं को कंप्यूटरों से संख्यात्मक रूप में हल किया जाता है। स्पष्ट है, संख्यात्मक परिकलन में हम केवल परिमित संख्या में लिए गए पदों का प्रयोग कर सकते हैं। अब प्रश्न उठता है कि मूल फलन का "उत्तम" सन्निकटन पाने के लिए हमें फूरिए-श्रेणी में कितने पद लेने चाहिए? आइए, हम संक्षेप में इस प्रश्न पर विचार करें। यहाँ इस बात पर हम विस्तार से चर्चा नहीं करेंगे।

7.3.2 एक सन्निकटन के रूप में फूरिए श्रेणी का प्रयोग

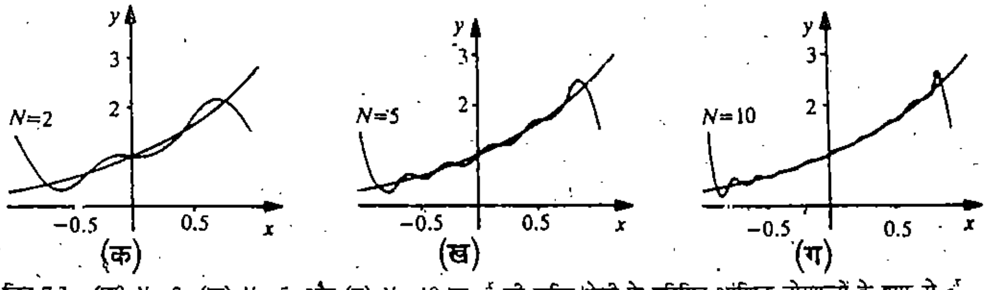
इस बात को समझने के लिए आइए, हम फलन e^x की फूरिए श्रेणी (जो उदाहरण 1 के में $\alpha = 1$ रखने पर प्राप्त होती है) को देखें। इसके लिए हम फूरिए श्रेणी में बढ़ती हुई संख्या में पदों को जोड़ने पर प्राप्त फलनों के ग्राफ़ से e^x के ग्राफ़ की तुलना करेंगे। उदाहरण 1 (क) से दिए हुए अंतराल पर e^x की फूरिए श्रेणी है,

$$(e - e^{-1})\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\cos n\pi x - n\pi \sin n\pi x)\right]$$

आइए, हम इस श्रेणी के प्रथम N पदों का योगफल, जिसे Nवाँ आंशिक योगफल (Nth partial sum) S_N कहा जाता है, लें :

$$S_N = (e - e^{-1})\left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{1+n^2\pi^2}(\cos n\pi x - n\pi \sin n\pi x)\right]$$

चित्र 7.3 में, हमने e^x की फूरिए श्रेणी के आंशिक योगफलों S_2, S_5 और S_{10} अर्थात् क्रमशः प्रथम दो, प्रथम पांच और प्रथम दस पदों के योगफलों के ग्राफ़ से e^x के ग्राफ़ की तुलना की है।



चित्र 7.3 : (क) $N = 2$, (ख) $N = 5$, और (ग) $N = 10$ पर e^x की फूरिए श्रेणी के परिमित आंशिक योगफलों के ग्राफ़ से e^x के ग्राफ़ की तुलना

चित्र 7.3 में आप इस बात की ओर ध्यान दें कि $N = 2$ या $N = 5$ की तुलना में $N = 10$ पर हमें सभी बिन्दुओं पर e^x के बेहतर सन्निकटन मिलते हैं। हाँ, यहाँ अंत्य बिन्दु $x = \pm 1$ इसका अपवाद है। इस समय हमें इस बात की चिंता नहीं है, क्योंकि ये बिन्दु इस अंतराल $-1 < x < 1$ में शामिल नहीं है जिस पर हमने e^x की फूरिए श्रेणी का परिकलन किया है।

हम कहते हैं कि जैसे-जैसे N बढ़ता है, मूल फलन की फूरिए-श्रेणी x के सभी मानों पर, जहाँ $-1 < x < 1$, मूल फलन की ओर **अभिसारी** (converging) होती है। हम भाग 7.6 में फूरिए श्रेणी के **अभिसरण** (convergence) के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे। वहाँ आप यह बात ठीक तरह से समझ पाएँगे कि किन फलनों को फूरिए श्रेणी से सन्निकटित किया जा सकता है। यह तो स्पष्ट है कि कितने पदों तक फूरिए श्रेणी ली जाएगी यह इस बात पर निर्भर करता है कि मूल फलन का कितना उत्तम सन्निकटन हम चाहते हैं।

अब आपको चाहिए कि निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल करके फूरिए श्रेणी मालूम करने का अभ्यास करें।

बोध प्रश्न 3

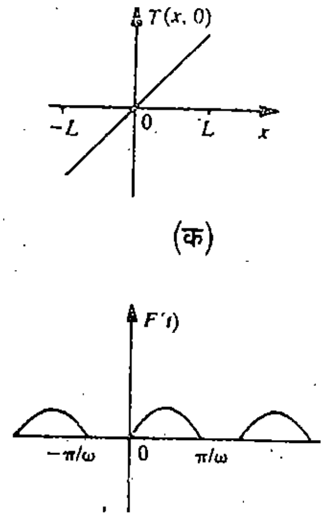
प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

क) अंतराल $-L < x < L$ पर फलन $T(x, 0) = \frac{100}{L} x$ का फूरिए श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए। चित्र 7.4 क देखिए।

ख) निम्नलिखित आवर्ती फलन की फूरिए श्रेणी मालूम कीजिए,

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{यदि} \quad -T/2 < t < 0 \\ E \sin \omega t & \text{यदि} \quad 0 < t < T/2 \end{cases} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

यह फलन अर्ध तरंग रेक्टिफायर (half-wave rectifier) के निर्गम (output) को निरूपित करता है (चित्र 7.4 ख)।



(क)

(ख)

चित्र 7.4

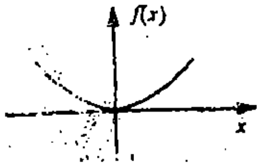
उदाहरण 1 के भाग (ख) में आपने यह देखा है कि वर्ग-तरंग के सभी साइन गुणांक $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ शून्य हैं। इसी प्रकार बोध प्रश्न 3 के भाग (क) में आपने यह देखा होगा कि a_0 और सभी कोसाइन गुणांक $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ शून्य हैं। अब एक स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है : क्या हम इन गुणांकों के परिकलन से अपने को बचा सकते हैं, जो कि शून्य होते हैं?

यदि हम कुछ ऐसे प्रतिबंध मालूम कर सकें जिनके अधीन यह गुणांक शून्य होते हैं तो हम काफ़ी कुछ परिकलनों से बच सकते हैं और साथ ही-साथ त्रुटियों की गुंजाइश भी कम हो सकती है। हम इसी बात पर अगले भाग में चर्चा करने जा रहे हैं।

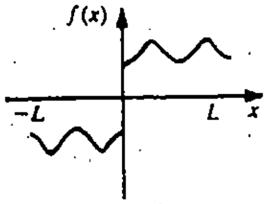
7.4 सम और विषम फलनों की फूरिए श्रेणी

आवर्ती वर्ग तरंग और फलन $T(x, 0)$ को निरूपित करने वाले चित्रों 7.2 और 7.4 क को देखिए। क्या आप इन फलनों के ग्राफ़ में मूल बिन्दु के प्रति कोई सममिति (symmetry) देख रहे हैं? ध्यान दीजिए कि वर्ग तरंग का ग्राफ ऊर्ध्वाधर अक्ष के प्रति सममित है। इसी प्रकार, $T(x, 0)$ का ग्राफ़ मूल बिन्दु के प्रति सममित है। आपको याद होगा कि वर्ग तरंग की फूरिए श्रेणी में कोई साइन पद नहीं होता और $T(x, 0)$ की फूरिए श्रेणी में कोई कोसाइन पद नहीं होता। तो, क्या इन फलनों की सममिति और इनकी फूरिए-श्रेणी के स्वरूप के बीच कोई संबंध है? और, क्या हम इस संकल्पना को किसी भी ऐसे फलन $f(x)$ पर लागू कर सकते हैं जिसमें मूल बिन्दु के प्रति किसी प्रकार की सममिति हो?

वस्तुत: उन फलनों की सममिति और उनकी फूरिए-श्रेणी के बीच एक संबंध होता है, जिन्हें "सम" (even) या "विषम" (odd) फलनों के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है। वास्तव में, जब हमने फूरिए-श्रेणी का अध्ययन शुरू किया था तो हमने अंतराल $-L < x < L$ लिया था जो कि मूल बिन्दु के प्रति सममित है। इस प्रकार का अंतराल लेने का लाभ यह है कि हम इस बात का प्रयोग कर सकते हैं कि मूल बिन्दु के प्रति कुछ फलन विषम होते हैं और कुछ सम। अत: आइए, पहले हम यह समझ लें कि सम फलन और विषम फलन क्या होते हैं?



(क)



(ख)

चित्र 7.5 : (क) सम फलन; (ख) विषम फलन

7.4.1 सम और विषम फलन

अंतराल $-L \le x \le L$ पर परिभाषित फलन सम होता है, यदि

$$f(-x) = f(x) \quad \text{सभी } x \in [-L, L] \text{ के लिए}$$

और विषम होता है, यदि

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{सभी } x \in [-L, L] \text{ के लिए}$$

आप यह देख सकते हैं कि चित्र 7.2 का वर्ग तरंग एक सम फलन है जबकि चित्र 7.4 क का फलन $T(x, 0)$ विषम फलन है। आप यह भी जाँच कर सकते हैं कि फलन x^2, $\cos nx$ सम हैं जबकि फलन x और $\sin nx$ विषम हैं। आप देखेंगे कि एक **सम फलन के ग्राफ़ को, ऊर्ध्वाधर अक्ष (vertical axis) की दायीं ओर के उसके ग्राफ़ को ऊर्ध्वाधर अक्ष में परावर्तित (reflect) करके प्राप्त किया जा सकता है।** इसी प्रकार, **विषम फलन के ग्राफ़ को, ऊर्ध्वाधर अक्ष की दायीं ओर के उसके आधे भाग को पहले ऊर्ध्वाधर अक्ष में परावर्तित करके और फिर उसे क्षैतिज अक्ष (horizontal axis) में परावर्तित करके प्राप्त किया जा सकता है।** आगे अध्ययन करने से पहले आपको चाहिए कि आप चित्र 7.2 और 7.4 क और 7.5 की सहायता से इन बातों को समझ लें।

किसी भी फलन को सम फलन और विषम फलन के योगफल के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

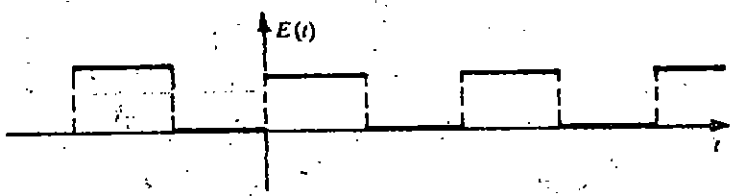
$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)]$$

दक्षिण पक्ष का पहला भाग सम है और दूसरा भाग विषम है। उदाहरण के लिए,

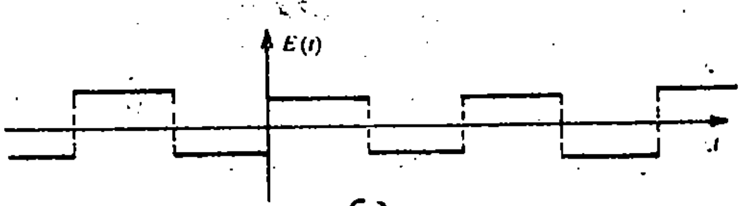
$$e^x = \frac{1}{2}[e^x + e^{-x}] + \frac{1}{2}[e^x - e^{-x}]$$

$$= \cosh x + \sinh x$$

जहाँ $\cosh x$ सम है और $\sinh x$ विषम है।



(क)



(ख)

चित्र 7.6 : (क) यह आवर्ती वर्ग तरंग न तो सम है न विषम; (ख) t-अक्ष को विस्थापित करने से यह एक विषम फलन बन जाता है।

फलन का सम या विषम होना, या दोनों ही न होना केवल मूल बिन्दु और निर्देश-अक्ष के चयन पर भी निर्भर कर सकता है। उदाहरण के लिए, चित्र 7.6 क में दिखाया गया वर्ग तरंग, t का न तो विषम फलन है और न ही सम फलन। फिर भी, यदि हम तरंग के आधे आयाम से t-अक्ष को ऊपर की ओर विस्थापित करें, तो हमें एक विषम फलन प्राप्त होगा जैसा कि चित्र 7.6 (ख) में दिखाया गया है।

सम और विषम फलनों को परिभाषित कर लेने के बाद अब हम इन फलनों की फूरिए श्रेणी ज्ञात करना चाहेंगे। सम और विषम फलनों के कुछ ऐसे गुणधर्म होते हैं जो कि इन फलनों के फूरिए गुणांक मालूम करने में काफ़ी उपयोगी होते हैं। यहाँ हम इन गुणधर्मों के केवल कथन देंगे और उनकी उपपत्ति नहीं देंगे। इनकी उपपत्तियाँ काफ़ी सरल हैं जिन्हें आप स्वयं प्राप्त कर सकते हैं।

सम और विषम फलनों के गुणधर्म

1) यदि $f(x)$ और $g(x)$ सम (विषम) फलन हों, तो

   क) $f(x) + g(x)$ एक सम (विषम) फलन होता है-

   ख) $f(x) - g(x)$ एक सम (विषम) फलन होता है

2) यदि $f(x)$ और $g(x)$ दोनों ही या तो सम फलन हों या दोनों ही विषम फलन हों, तो $f(x)\, g(x)$ एक सम फलन होता है।

3) यदि $f(x)$ एक सम फलन हो और $g(x)$ एक विषम फलन हो, तो $f(x)\, g(x)$ एक विषम फलन होता है।

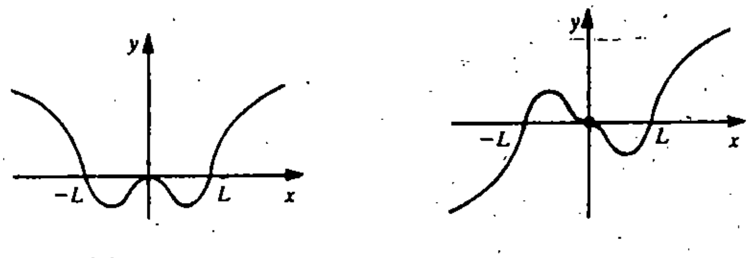
4) यदि $f(x)$ एक सम फलन हो, तो

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 2 \int_{0}^{L} f(x)\, dx \qquad (7.6\text{क})$$

5) यदि $f(x)$ एक विषम फलन हो, तो

$$\int_{-L}^{L} f(x)\, dx = 0 \qquad (7.6\text{ख})$$

चित्र 7.7 में एक दिए हुए फलन $f(x)$ के गुणधर्मों (4) और (5) को दिखाया गया है।



चित्र 7.7 : आप देख सकते हैं कि (ख) में वक्र द्वारा आविष्ट क्षेत्रफल शून्य है जबकि (क) में वक्र द्वारा आविष्ट क्षेत्रफल उसके आधे भाग द्वारा आविष्ट क्षेत्रफल का दुगुना है।

अब आप सम और विषम फलनों की संकल्पना से बेहतर तौर से परिचित होने के लिए एक प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 3

इस प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

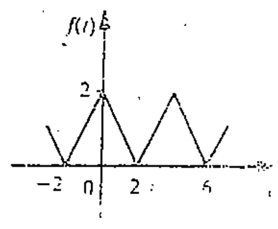
क) एक विद्युत परिपथ में त्रिकोणीय तरंग रूप (चित्र 7.8) के आकार का एक ए सी सिग्नल (ac signal) लगाया गया है। बताइए कि यह विषम फलन है या सम?

ख) चित्र 7.8 का तरंग रूप विषम होता है या सम, जबकि इसे

   i) ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर एक इकाई ले जाया जाता है।

   और

   ii) एक इकाई ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर और एक इकाई बायीं ओर ले जाया जाता है।



चित्र 7.8 : त्रिकोणीय तरंग रूप

ग) बताइए कि निम्नलिखित फलनों में से कौन-कौन से फलन सम हैं, विषम हैं, न तो विषम हैं और न ही सम हैं

   (i) $|x|$, (ii) $x \sin x$, (iii) e^x, (iv) x^{2n+1}, (v) $\sin nx + \cos nx$, (vi) $(\cos x)/x$

घ) निम्नलिखित फलनों में से प्रत्येक फलन को एक सम और विषम फलन के योगफल के रूप में व्यक्त करें :

   (i) $x\, e^x$, (ii) $(1 + x)(\sin x + \cos x)$

सम और विषम फलनों की इन संकल्पनाओं की सहायता से हम वर्ग तरंग तथा फलन $T(x, 0)$ के लिए प्राप्त परिणामों का व्यापकीकरण कर सकते हैं। इस प्रकार हमें सम फलनों को निरूपित करने वाली **फूरिए कोसाइन श्रेणी**, और विषम फलनों को निरूपित करने वाली **फूरिए साइन श्रेणी** प्राप्त होती है।

7.4.2 फूरिए साइन और कोसाइन श्रेणी

मान लीजिए $f(x)$ एक सम फलन है। तब गुणनफल $f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}$ एक सम फलन है। सम फलन के गुणधर्म 4 (समीकरण 7.6 क) को लागू करने पर हमें मिलता है,

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx$$

और
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

अब प्रश्न उठता है कि b_n का मान क्या होगा? इसके लिए आप गुणधर्म 5 (समीकरण 7.6 ख) को लागू करें और निम्न चरण में b_n का मान लिखें :

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि **सम फलन की फूरिए श्रेणी में केवल अचर पद और कोसाइन पद होते हैं। इसे फूरिए कोसाइन श्रेणी** (Fourier cosine series) कहा जाता है। यदि $f(x)$ एक विषम फलन हो तो आप कौन-सा परिणाम प्राप्त करने की आशा करेंगे? गुणधर्मों 4 और 5 (समीकरण 7.6 क और ख) को एक बार फिर लागू कीजिए और निम्नलिखित समाकलों को हल कीजिए :

$$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

इस तरह, आपने पाया कि **विषम फलन की फूरिए श्रेणी में केवल साइन पद होते हैं।** इसे **फूरिए साइन श्रेणी** (Fourier sine series) कहा जाता है। इन्हीं परिणामों का संक्षिप्त विवरण यहाँ प्रस्तुत है।

फूरिए साइन और कोसाइन श्रेणी

अंतराल $-L < x < L$ पर **सम फलन** $f(x)$ की फूरिए श्रेणी निम्नलिखित **फूरिए कोसाइन श्रेणी** होती है,

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \qquad (f \text{ सम}) \qquad (7.7\text{क})$$

जिसके गुणांक हैं

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{0}^{L} f(x)\,dx, \quad a_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \qquad (7.7\text{ख})$$

अंतराल $-L < x < L$ पर **विषम फलन** $f(x)$ की फूरिए श्रेणी निम्नलिखित **फूरिए साइन श्रेणी** होती है,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (f \text{ विषम}) \qquad (7.7\text{ग})$$

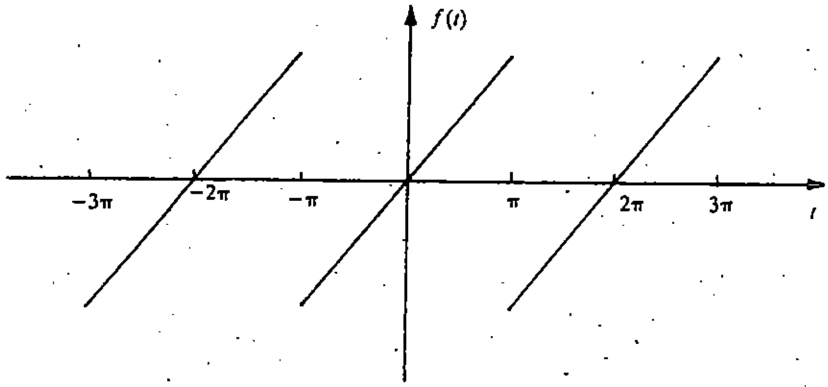
जिसके गुणांक हैं

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \qquad (7.7\text{घ})$$

अतः जब भी कभी आपको किसी फलन की फूरिए श्रेणी मालूम करनी हो तो इसके लिए पहले आप यह मालूम करें कि फलन सम है या विषम। यदि फलन सम या विषम हो तो इसके अनुसार आप फूरिए कोसाइन श्रेणी या फूरिए साइन श्रेणी निकाल सकते हैं। ऐसा करने से आप गणितीय परिकलन काफ़ी कम कर सकते हैं। आइए, हम इन संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझने के लिए एक उदाहरण लें और फिर आप एक प्रश्न हल करें।

उदाहरण 2 : आरादंती तरंग (sawtooth wave) की फूरिए श्रेणी

आरादंती तरंग की, जिसे चित्र 7.9 में दिखाया गया है, फूरिए श्रेणी मालूम कीजिए।



चित्र 7.9 : एसी परिपथों में कुछ सिग्नल आरादंती फलन के रूप के होते हैं। ध्यान दीजिए कि यह फलन $t = \ldots -\pi, \pi, 3\pi, \ldots$ पर परिभाषित नहीं है। आरादंती सिग्नल के अनेक अनुप्रयोग हैं जिनमें से एक कैथोड किरण ऑसिलोस्कोप (cathode ray oscilloscope) में सिग्नलों का तुल्यकालन (synchronisation) करने के लिए होता है।

हल

इस फलन को बीजीय रूप में इस प्रकार व्यक्त किया जाता है :

$$f(t) = \frac{t}{\pi} \qquad -\pi < t < \pi$$

और

$$f(t + 2\pi) = f(t)$$

अत: यह फलन विषम और आवर्ती है जिसका आवर्त-काल 2π है। इसे निम्नलिखित फूरिए साइन श्रेणी से निरूपित किया जा सकता है

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi t}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt$$

जहाँ $$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt\, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{t}{\pi} \sin nt\, dt$$

खंडश: समाकलन (integration by parts) करके आप यह दिखा सकते हैं कि

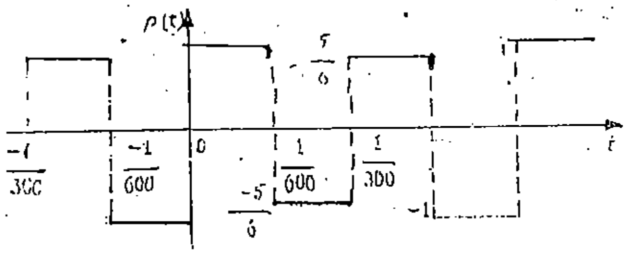
$$b_n = -\frac{2}{n\pi} (-1)^n = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

इस तरह, $$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin nt$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\sin t - \frac{1}{2} \sin 2t + \frac{1}{3} \sin 3t - \frac{1}{4} \sin 4t + \ldots \right]$$

बोध प्रश्न :

आप जानते हैं कि जब ध्वनि तरंग हवा से होकर जाती है और आप इसे सुनते हैं तो आपके आसपास के वायु दाब में समय के साथ परिवर्तन होता है। चित्र 7.10 में एक ध्वनि तरंग के कारण उत्पन्न दाब और वायुमण्डलीय दाब के अन्तर को दिखाया गया है। इसकी फूरिये श्रेणी ज्ञात कीजिए और इस तरह जब आप इस ध्वनि को सुन रहे होते हैं उस समय की इसकी आवित्तीय मालूम कीजिए।



चित्र 7.10 ध्वनि तरंग संचरण के कारण वायुमण्डलीय दाब में परिवर्तन (x,t) का मात्रक (t)$^{-6}$ ऐटमास्फेयर है और t सेकंडों में है।

अभी तक हमने $-L < x < L$ जैसे अंतरालों पर परिभाषित फलनों की फूरिएं श्रेणी मालूम करने की विधि पर विचार किया है। आइए हम समीकरणों 7.1 क, ख और ग में दी गई मूल समस्या की ओर फिर से देखें। आपको याद होगा कि उस समस्या का फलन $T(x, t)$ एक अलग अंतराल $0 \le x \le L$, जहाँ $t > 0$, पर परिभाषित था। आंशिक अवकल समीकरणों के हल से संबंधित भौतिक समस्याओं में हमें प्राय: किसी स्वेच्छ अंतराल (arbitrary internal) पर परिभाषित फलन देखने को मिलते हैं। अब प्रश्न यह है कि हम किस प्रकार ऐसे फलनों की फूरिए श्रेणी मालूम करें? ऐसा देखा गया है कि इन फलनों को निरूपित करने के लिए फूरिए श्रेणी के कार्य-क्षेत्र को बढ़ाया जा सकता है। आइए देखें कि ऐसा कैसे किया जाता है।

7.5 फूरिए श्रेणी के कार्य-क्षेत्र का विस्तार

आइए हम समीकरण (7.1 क) के हल पर फिर से विचार करें जबकि दिया हुआ आदि प्रतिबंध हो

$$T(x, 0) = f(x) \qquad (0 < x < L)$$

जहाँ $f(x)$ एक स्वेच्छ फलन है। क्योंकि समीकरण (7.1 क) का हल समीकरण (7.1 घ) के रूप का है इसलिए यह आदि प्रतिबंध केवल तभी संतुष्ट होगा जबकि हम $f(x)$ को एक फूरिए साइन श्रेणी के रूप में व्यक्त कर सकें अर्थात्

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (0 < x < L) \qquad (7.23)$$

अभी आपने भाग 7.3.2 में यह देखा है कि किसी फलन की इस प्रकार की फूरिएं श्रेणी केवल तभी हो सकती है जबकि फलन $f(x)$ अंतराल $-L < x < L$ पर, जोकि अंतराल $0 < x < L$ से भिन्न है, विषम फलन हो। अत: समस्या अब यह है कि अंतराल $0 < x < L$ पर $f(x)$ को एक फूरिए श्रेणी के रूप में व्यक्त करने के लिए हमें क्या करना चाहिए? इसके लिए हम फलन की परिभाषा को पूरे x-अक्ष पर इस तरह लागू करते हैं कि विस्तरित फलन (extended function) अंतराल $-L < x < L$ पर परिभाषित हो। विस्तरित फलन आवर्ती (periodic) या अनावर्ती (non-periodic) दोनों में से कोई भी हो सकता है। तब हम विस्तरित फलन की फूरिए श्रेणी मालूम कर सकते हैं, पर इसका प्रयोग हम केवल उसी परिसर (range) पर करते हैं जिसमें मूल फलन परिभाषित है। आइए अब हम इस विधि को सीखें।

7.5.1 अर्ध-परिसर प्रसार

इस समस्या पर विचार कीजिए : हम $0 < x < L$ पर परिभाषित फलन $f(x)$ को इस तरह विस्तरित करना चाहते हैं कि इसे हम एक फूरिए साइन श्रेणी के रूप में निरूपित कर सकें। इसके लिए हम $f(x)$ का प्रयोग करके विस्तरित अंतराल $-L < x < L$ पर एक नया विषम फलन $g(x)$ परिभाषित करते हैं :

$$g(x) = \begin{cases} -f(-x) & -L < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ f(x) & 0 < x < L \end{cases}$$

इस प्रकार परिभाषित फलन $g(x)$ को $f(x)$ का **विषम विस्तार** (odd extension) कहा जाता है। यदि $g(x)$ आवर्ती हो तो इसे **विषम आवर्ती विस्तार** (odd periodic extension) कहा जाता है। फलन $g(x)$ अंतराल $0 < x < L$ पर फलन $f(x)$ ही होता है। ग्राफ़ीय रूप में, $f(x)$ का विषम विस्तार, $f(x)$ के ग्राफ को पहले ऊर्ध्वाधर अक्ष में परावर्तित करने से और फिर क्षैतिज अक्ष में परावर्तित करने से मिलता है। चित्र 7.11 ख में चित्र 7.11 क के फलन $f(x)$ के विषम विस्तार को दिखाया गया है।

क्योंकि $g(x)$ अंतराल $-L < x < L$ पर विषम है, इसलिए इसके फूरिए श्रेणी के कोसाइन गुणांक शून्य हैं और साइन गुणांक है

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

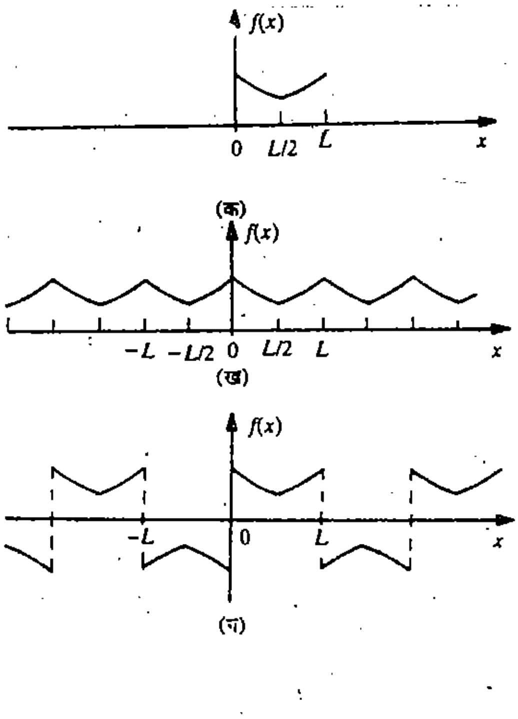
लेकिन $0 < x < L$ पर, $g(x) = f(x)$ होता है। अतः

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{7.8ख}$$

परिणामी श्रेणी अंतराल $0 < x < L$ पर फलन $f(x)$ की फूरिए साइन श्रेणी है। समीकरण (7.8 ख) द्वारा दिए गए गुणांकों के साथ समीकरण (7.8 क) द्वारा दी गई श्रेणी को दिए हुए फलन का **अर्ध-परिसर प्रसार** (half-range expansion) कहा जाता है।

अब मान लीजिए हम अंतराल $0 < x < L$ पर परिभाषित फलन $f(x)$ की फूरिए कोसाइन श्रेणी विकसित करना चाहते हैं। तब हम अंतराल $-L < x < L$ पर फलन $f(x)$ के **सम विस्तार** (even extension) को इस प्रकार परिभाषित करते हैं :

$$g(x) = \begin{cases} f(-x) & -L < x < 0 \\ f(x) & 0 < x < L \end{cases}$$



चित्र 7.11 : (क) एक दिया हुआ फलन $f(x)$; (ख) आवर्तकाल $2L$ वाला एक विषम आवर्ती फलन जो $f(x)$ का विषम प्रसार है और (ग) आवर्तकाल $2L$ वाला एक आवर्ती फलन जो $f(x)$ का सम प्रसार है।

फिर से अंतराल $0 < x < L$ में $g(x)$ और $f(x)$ एक ही हैं। ग्राफ़ीय रूप से $f(x)$ के सम विस्तार को पाने के लिए ऊर्ध्वाधर अक्ष में $f(x)$ के ग्राफ़ को परावर्तित करें (चित्र 7.11 ग)। यदि $g(x)$ आवर्ती है, तो इसे $f(x)$ का सम आवर्ती विस्तार (even periodic extension) कहा जाता है। क्योंकि $g(x)$ सम है, इसलिए हमें $f(x)$ की केवल फूरिए कोसाइन श्रेणी मिलती है :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{L} \qquad (7.8ग)$$

जहाँ $$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L g(x)\,dx = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,dx, \text{ क्योंकि } 0 < x < L \text{ के लिए } g(x) = f(x) \qquad (7.8घ)$$

इसी प्रकार,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots$$

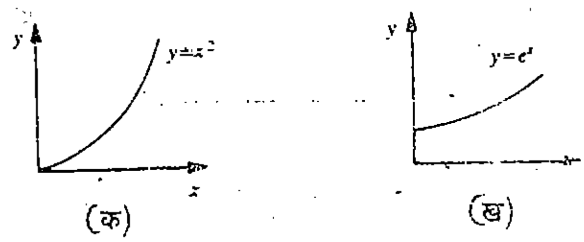
$$= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx, \qquad n = 1, 2, \ldots \qquad (7.8ङ)$$

समीकरण (7.8 घ) और (7.8 ङ) के साथ परिणामी फूरिए कोसाइन श्रेणी (7.8 ग) को भी $f(x)$ का अर्ध-परिसर प्रसार (half-range expansion) कहा जाता है। अब आप कुछ दिए हुए फलनों के अर्ध-परिसर प्रसार मालूम करें।

बोध प्रश्न 6

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

चित्र 7.12 (क) के फलन के सम विस्तार और चित्र 7.12 (ख) के फलन के विषम विस्तार का ग्राफ़ खीचिए।



चित्र 7.12

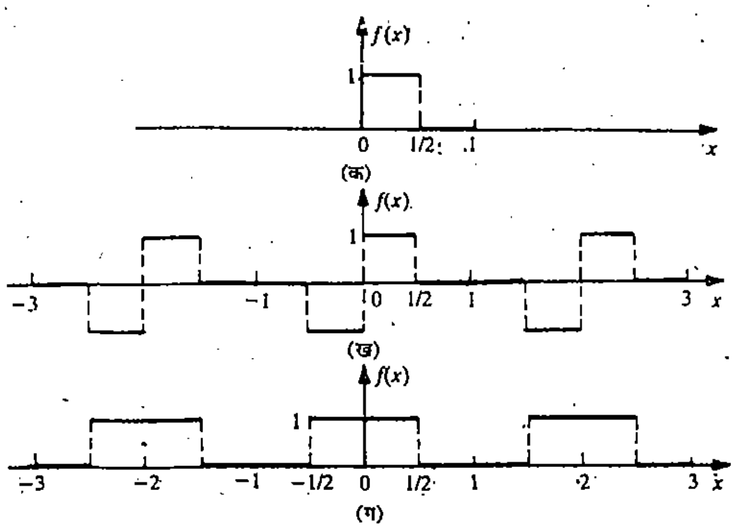
आइए, अब हम इस भाग की संकल्पना को और अच्छी तरह से समझने के लिए एक उदाहरण हल करें।

उदाहरण 3

चित्र 7.13 क में दिखाए गए फलन

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

को (क) फूरिए साइन श्रेणी और (ख) फूरिए कोसाइन श्रेणी द्वारा निरूपित कीजिए।



चित्र 7.13 : भाग (ख) और (ग), (क) में दिखाए गए फलन $f(x)$ के क्रमशः विषम और सम विस्तार को दर्शाते हैं।

हल

क) पहली स्थिति में हमें अंतराल $-1 < x < 1$ पर $g(x)$ का विषम विस्तार करना है। इसके लिए हम निम्नलिखित फलन को परिभाषित करते हैं,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & -1 < x < -\frac{1}{2} \\ -1 & -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

फलन $g(x)$ को चित्र 7.13 (ख) में दिखाया गया है। क्योंकि यह विषम है, इसलिए केवल गुणांक b_n बच रहेंगे। समीकरण (7.8 ख) का प्रयोग करने पर हमें मिलता है,

$$b_n = \frac{2}{1}\int_0^1 f(x)\sin n\pi x\,dx = 2\int_0^{1/2} \sin n\pi x\,dx = -\frac{2}{n\pi}\left[\cos n\pi x\right]_0^{1/2}$$

$$= -\frac{2}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right)$$

या $b_1 = \frac{2}{\pi}$, $b_2 = \frac{4}{2\pi}$, $b_3 = \frac{2}{3\pi}$, $b_4 = 0, \ldots$

अतः $f(x)$ की फूरिए साइन श्रेणी है,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\left[\sin \pi x + \frac{2\sin 2\pi x}{2} + \frac{\sin 3\pi x}{3} + \frac{\sin 5\pi x}{5} + \frac{2\sin 6\pi x}{6} + \ldots\right]$$

ख) अंतराल $-1 \le x \le 1$ पर $f(x)$ का सम विस्तार $h(x)$ जो चित्र 7.13 (ग) में दिखाया गया है, यह है,

$$h(x) = \begin{cases} 0 & -1 \le x < -\frac{1}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$$

यहाँ समीकरणों (7.8 घ) और (7.8 ङ) का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित गुणांकों वाली फूरिए कोसाइन श्रेणी प्राप्त होती है

$$a_0 = 2\int_0^1 f(x)\,dx = 2\int_0^{1/2} dx = 1$$

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\,dx = 2\int_0^{1/2}\cos n\pi x\,dx = \frac{2}{n\pi}[\sin n\pi x]_0^{1/2} = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

इस तरह $$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left[\cos\pi x - \frac{1}{3}\cos 3\pi x + \frac{1}{5}\cos 5\pi x - \ldots\right]$$

टिप्पणी : हम दिए हुए फलन को इस तरह भी विस्तारित कर सकते हैं कि हमें साइन और कोसाइन दोनों पदों वाली फूरिए श्रेणी मिल सके। यह जानकर आपको आश्चर्य हो सकता है कि एक ही फलन को अनेक अलग-अलग तरह की त्रिकोणमितीय श्रेणियों से निरूपित किया जा सकता है। यहाँ आपको यह जरूर समझ लेना चाहिए कि भले ही दिए हुए अंतराल में ये सभी श्रेणियाँ दिए हुए फलन को निरूपित करती हैं, पर विस्तारित अंतराल में ये सभी श्रेणियाँ अलग-अलग फलनों को निरूपित करती हैं।

आगे बढ़ने से पहले, आइए, हम संक्षेप में एक परिमित अंतराल पर परिभाषित फलन की फूरिए श्रेणी मालूम करने की विधि को दोहरा लें।

> हम एक परिमित अंतराल (मान लीजिए $0 < x < L$) पर परिभाषित फलन $f(x)$ को एक फूरिए श्रेणी से निरूपित कर सकते हैं। इसके लिए हम $-L < x < L$ पर परिभाषित एक अन्य फलन $g(x)$ की फूरिए श्रेणी मालूम करते हैं जो कि $f(x)$ का या तो विषम या सम विस्तार होता है। अंततः $f(x)$ की फूरिए श्रेणी लिखते समय हम स्वतंत्र चर के मानों को मूल अंतराल तक ही सीमित रखते हैं।

इस भाग की संकल्पना को आप अच्छी तरह से समझ पाए हैं कि नहीं, यह जानने के लिए अब आप एक प्रश्न हल कीजिए।

बोध प्रश्न 7

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

अंतराल $0 < x < 1$ पर e^x की फूरिए साइन श्रेणी मालूम कीजिए। $x = 0$ पर श्रेणी के मान की $x = 0$ पर e^x के मान के साथ तुलना करें। क्या ये दोनों मान एक ही हैं?

बोध प्रश्न 7 हल करने पर आपको $x = 0$ पर e^x की फूरिए साइन श्रेणी के मान निकालने में एक असंगति (anomaly) का पता लगा है। आपने यह देखा है कि फलन को निरूपित करने वाली श्रेणी बिन्दु $x = 0$ पर फलन के उस बिन्दु पर मान की ओर अभिसरण नहीं करती। फिर भी ध्यान दें कि यह श्रेणी उस बिन्दु पर विस्तारित फलन के मान की ओर अभिसरण करती है। भाग 7.3.2 में आपने यह भी देखा है कि अंतराल $-L < x < L$ पर e^x की फूरिए श्रेणी अंत्य बिन्दुओं (end points) $x = \pm L$ पर $e^{\pm L}$ की ओर अभिसरण नहीं करती। इससे एक प्रश्न यह उठता है कि फूरिए श्रेणी से एक दिए हुए फलन का निरूपण कहाँ तक मान्य है? यदि अंतराल के सभी बिन्दुओं पर फलन $f(x)$ की फूरिए श्रेणी, उन बिन्दुओं पर फलन के मानों की ओर अभिसरण करती हो, तब क्या हम कह सकते हैं कि यह श्रेणी $f(x)$ का एक **मान्य निरूपण** (valid representation) है? यह बात हमें **फूरिए श्रेणी के अभिसरण** (convergence) के प्रश्न पर ले आती है।

7.6 फूरिए श्रेणी का अभिसरण

फूरिए श्रेणी के अभिसरण का अध्ययन करने से पहले आपको संतत फलन और खंडशः संतत फलन (piece-wise continuous function) की परिभाषाएँ समझनी होंगी। आप यह जानते हैं कि अंतराल $a < x < b$ पर फलन $f(x)$ संतत होता है, यदि अंतराल (a, b) के प्रत्येक बिन्दु x_0 पर $f(x)$ एक परिमित सीमा $f(x_0)$ की ओर प्रवृत्त होता है, जबकि x, x_0 की ओर प्रवृत्त होता हो, अर्थात्

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

(यदि यह समता (equality) एक बिन्दु x_0 पर लागू होती हो, तो हम कहते हैं कि $f(x)$ उस बिन्दु x_0 पर संतत है)। स्पष्ट है कि $f(x)$ का ग्राफ एक अविच्छेदित वक्र (unbroken curve) होता है, और, यदि अंतराल $a \le x < b$ पर फलन परिभाषित हो, तो हम कहते हैं कि यह अंतराल $a \le x \le b$ पर संतत है, यदि यह अंतराल $a < x < b$ पर संतत हो और यदि $f(x)$ परिमित सीमाओं $f(a)$ और $f(b)$ की ओर प्रवृत्त होता हो, जबकि x अंतराल के अंदर से अंत्य बिन्दुओं a और b की ओर प्रवृत्त होता हो। इसे हम इस प्रकार लिखते हैं

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \quad \text{और} \quad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

सीमा $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a+h)$ जहाँ h धनात्मक है, को $x = a$ पर $f(x)$ की दक्षिण सीमा (right-hand limit) कहते हैं। फलन $f(x)$ इस सीमा की ओर प्रवृत्त होता है जब x दायीं ओर से बिंदु $x = a$ की ओर प्रवृत्त होता है। इसी तरह

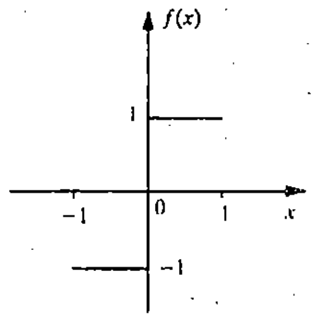
$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{h \to 0} (b-h)$$

जहाँ h धनात्मक है, को $x = b$ पर $f(x)$ की वाम सीमा (left-hand limit) कहते हैं। जब x बिंदु $x = b$ की ओर बायीं तरफ से प्रवृत्त होता है, तब $f(x)$ इस सीमा की ओर प्रवृत्त होता है।

उदाहरण के लिए, फलन $f(x) = x$ या कोई भी बहुपद फलन (polynomial function) किसी भी अंतराल पर संतत होता है। पर फलन $f(x) = \frac{1}{x}$ और $f(x) = \ln|x|$ अंतराल $0 \le x < 1$ पर संतत नहीं हैं क्योंकि इन दोनों में से कोई भी फलन $x = 0$ पर परिभाषित नहीं है और, न तो $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ और न ही $\lim_{x \to 0} \ln x$ का अस्तित्व है। एक और उदाहरण लें जैसा कि चित्र 7.14 में दिखाया गया है। बीजीय रूप में निरूपित फलन

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < \frac{\pi}{2} \end{cases} \tag{7.9}$$

$x = 0$ पर संतत नहीं है भले ही यह $x = 0$ पर परिभाषित है क्योंकि सीमाएँ $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ और $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$ समान नहीं हैं। स्पष्ट है कि $\lim_{x \to 0} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है। इस उदाहरण के द्वारा हम खंडशः संतत फलन (piecewise continuous function) की संकल्पना तक पहुँचते हैं।



चित्र 7.14 : इस फलन को पग फलन (step function) कहते हैं। यह एक इलैक्ट्रॉनिक स्विच का निर्गम निरूपित करता है।

खंडशः संतत फलन

इस नाम को देखकर ही यह स्पष्ट है कि एक फलन को खंडशः संतत कहा जा सकता है, अगर उसके ग्राफ़ में **परिमित** संख्या में संतत खंड हों (चित्र 7.14 और 7.15 देखिए)। एक फलन $f(x)$ अंतराल $a \le x \le b$ पर खंडशः संतत होता है यदि कि परिमित संख्या में ऐसे बिन्दु

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \ldots < x_n = b$$

हों, जिससे कि

i) प्रत्येक उप-अंतराल (subinterval)

$$x_0 < x < x_1, \quad x_1 < x < x_2, \ldots, x_{j-1}\ x < x_j, \ldots, x_{n-1} < x < x_n$$

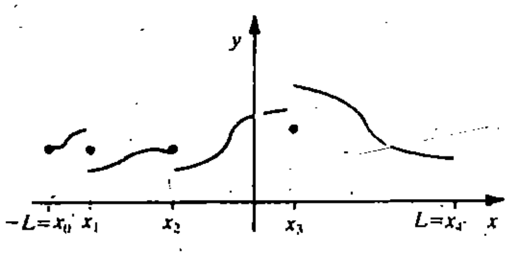
पर f संतत हो और

ii) जब x प्रत्येक उप-अंतराल के अंदर से उसके अंत्य बिन्दुओं की ओर प्रवृत्त होता हो तो f परिमित सीमाओं की ओर प्रवृत्त होता हो।

अंतराल में किसी बिंदु x_0 के लिए और $h > 0$ के लिए $f(x_0^+) = \lim_{h \to 0} f(x_0 + h)$

$f(x_0^-) = \lim_{h \to 0} f(x_0 - h)$

चित्र 7.15 में एक खंडशः संतत फलन f का ग्राफ़ दिखाया गया है। ग्राफ़ पर दिखाए गए मोटे काले गोले प्रत्येक विच्छेद बिन्दु (break point) पर फलन के मान को निरूपित करते हैं।



चित्र 7.15 : अंतराल $(-L, L)$ पर एक खंडशः संतत फलन f का ग्राफ़।

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक विच्छेद बिन्दु पर फलन f का मान अपनी वाम या दक्षिण सीमा के बराबर हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है। उदाहरण के लिए चित्र 7.15 से आप यह देख सकते हैं कि

$$f(x_1^-) \neq f(x_1) \neq f(x_1^+), \quad \text{जबकि} \quad f(x_2^-) = f(x_2) \neq f(x_2^+)$$

अब हम फूरिए श्रेणी के अभिसरण पर चर्चा कर सकते हैं। इसके लिए आइए हम अंतराल $-L < x < L$ पर परिभाषित फलन $f(x)$ की श्रेणी के प्रथम N पदों के योगफल को लें :

$$S_N = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{7.10}$$

अगर N अनंत की ओर प्रवृत्त होता हो, तो क्या होगा? परिभाषा के अनुसार, बिन्दु $x = x_0$ पर फूरिए श्रेणी f की ओर अभिसरण करती है यदि समीकरण (7.10) द्वारा दिया गया आंशिक योगफल (जिसमें $x = x_0$ रखा गया हो) परिमित सीमा $f(x_0)$ की ओर प्रवृत्त होता हो, जबकि $N \to \infty$, अर्थात्

$$\lim_{N \to \infty} S_N(x_0) = f(x_0)$$

फूरिए श्रेणी के अभिसरण को परिभाषित कर लेने के बाद आपको वे प्रतिबंध भी जान लेने चाहिए जिनके अंतर्गत फूरिए श्रेणी अपने फलन की ओर अभिसरित होती है। हम नीचे इन प्रतिबंधों से संबंधित प्रमेय का (उपपत्ति दिए बिना) कथन दे रहे हैं। इन प्रतिबंधों को डिरिश्ले प्रतिबंध (Dirichlet conditions) कहा जाता है।

> मान लीजिए फलन f और उसका अवकलज f' अंतराल $-L < x < L$ पर खंडश: संतत है। तब f की फूरिए श्रेणी $(-L, L)$ के उन सभी बिन्दुओं पर जिन पर f संतत है, f की ओर अभिसरित होती है और उन बिन्दुओं पर जिन पर f संतत नहीं है, f की फूरिए श्रेणी प्रत्येक बिन्दु पर फलन के माध्यमान
>
> $$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$
>
> की ओर अभिसरित होती है। अंत्य बिन्दुओं $-L$ और L पर फूरिए श्रेणी
>
> $$\frac{[f(-L^+) + f(L^-)]}{2}$$
>
> की ओर अभिसरित होती है।

इन प्रतिबंधों से यह पता चलता है कि फलन f की फूरिए श्रेणी उन सभी बिन्दुओं पर f की ओर अभिसरित होती है जिन पर f संतत होता है। यह श्रेणी प्रत्येक विच्छेद बिन्दु पर वाम और दक्षिण सीमाओं (left and right-hand limits) के औसत मान की ओर अभिसरित होती है। अंत्य बिन्दुओं पर फूरिए श्रेणी,

$$\frac{[f(-L^+) + f(L^-)]}{2}$$

की ओर अभिसरित होती है, जो कि फलन की दो अंत्य बिन्दु सीमाओं का औसत होता है।

इस प्रमेय द्वारा परिभाषित, अंत्य बिन्दुओं पर श्रेणी का व्यवहार काफी भ्रम में डालने वाला लग सकता है (चित्र 7.3 फिर से देखिए)। यह जानने के लिए कि ऐसा क्यों होता है, आइए, हम देखें कि अंतराल $-L < x < L$ के बाहर श्रेणी क्या निरूपित करती है। आपको याद होगा कि फूरिए श्रेणी आवर्ती फलनों $\sin \frac{n\pi x}{L}$ और $\cos \frac{n\pi x}{L}$ $(n = 1, 2, 3 \ldots)$ जिनका आवर्त काल $T = 2L$ है, का योगफल होती है। अत: स्वयं फूरिए श्रेणी का आवर्त काल $2L$ होगा।

कुछ पुस्तकों में समीकरण (7.11) में प्रतीक = के स्थान पर प्रतीक ~ का प्रयोग किया जाता है। यह बात ध्यान में रखकर कि भौतिक अनुप्रयोगों में आने वाले अधिकांश फलन इस प्रकार के होते हैं, जो श्रेणी के अभिसरण को सुनिश्चित करते हैं, हमने हर जगह प्रतीक = का प्रयोग किया है।

इस तरह यदि फलन $f(x)$ डिरिश्ले प्रतिबंधों को संतुष्ट करता हो, तो अंतराल $-L < x < L$ पर $f(x)$ की फूरिए श्रेणी वास्तव में सभी x के लिए आवर्त काल $2L$ वाले आवर्ती फलन $F(x)$ को परिभाषित करती है। इस तरह, फलन F इस प्रकार परिभाषित होता है,

$$F(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{7.11}$$

अब, यदि आवर्ती फलन $f(x)$ की फूरिए श्रेणी, अंतराल $(-L, L)$ में $f(x)$ की ओर अभिसरित होती हो, तो यह लगभग सर्वत्र अभिसरित होती है, क्योंकि श्रेणी स्वयं आवर्ती है, जिसका आवर्त-काल $2L$ है। यदि $f(x)$ स्वयं अनावर्ती (non periodic) हो, तो इसकी फूरिए श्रेणी $f(x)$ की ओर नहीं, बल्कि इसके विस्तार की ओर अभिसरित होती है, जो कि आवर्ती अथवा अनावर्ती हो सकता है।

आइए, हम एक उदाहरण लेकर इन संकल्पनाओं को और अच्छी तरह से समझने की कोशिश करें।

उदाहरण 4

चित्र 7.14 में दिखाए गए फलन को लीजिए। यह एक विषम फलन है और आप यह सत्यापित कर सकते हैं (जैसा कि हाशिए में दिखाया गया है) कि इसकी फूरिए श्रेणी है,

$$F_0(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi x}{2n+1}$$

दिए हुए फलन के फूरिए-गुणांक b_n है

$$b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \sin n\pi x \, dx$$

$$= -\int_{-1}^{0} \sin n\pi x \, dx + \int_{0}^{-1} \sin n\pi x \, dx$$

$$= \frac{1}{n\pi} [\cos n\pi x]_{-1}^{0}$$

$$- \frac{1}{n\pi} [\cos n\pi x]_{0}^{1}$$

$$= \frac{1}{n\pi} [1 - \cos n\pi - \cos n\pi + 1]$$

$$= \frac{2}{n\pi} \left[1 - (-1)^n\right]$$

इस तरह $b_n = 0$ यदि n सम हो, और

$b_n = \frac{4}{n\pi}$, यदि n विषम हो

इस तरह हम यह लिख सकते हैं कि

$b_{2n} = 0$,

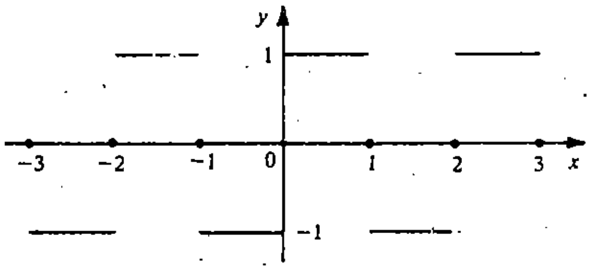
$b_{2n+1} = \frac{4}{(2n+1)\pi}$

$n = 0, 1, 2, \ldots$

और फूरिए श्रेणी है

$$F_0(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)}{(2n+1)}$$

अंतराल $-1 < x < 1$ पर $f(x)$ की फूरिए श्रेणी द्वारा परिभाषित आवर्ती फलन $F_0(x)$ का ग्राफ़, अंतराल $-3 \le x \le 3$ के लिए चित्र 7.16 में दिखाया गया है।



चित्र 7.16 : चित्र 7.14 में दिखाए गए फलन $f(x)$ के लिए अंतराल $-3 \le x \le 3$ में $F_0(x)$ का ग्राफ़। ध्यान दीजिए कि प्रत्येक विच्छेद बिन्दु पर $F_0(x)$ औसत मान (शून्य) की ओर अभिसरित होता है।

x के प्रत्येक पूर्णांक मान पर $F_0(x) = 0$ होता है। अत: $f(x)$ की फूरिए श्रेणी प्रत्येक विच्छेद बिन्दु पर औसत मान (शून्य) की ओर अभिसरित होती है।

इसी प्रकार, आरादंती तरंग की फूरिए श्रेणी स्वयं फलन की ओर अभिसरित होती है जैसाकि चित्र 7.9 में दिखाया गया है।

इन संकल्पनाओं को आपने अच्छी तरह से समझ लिया है कि नहीं—यह जानने के लिए आप एक प्रश्न हल कीजिए।

बोध प्रश्न 8

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

क) बोध प्रश्न 7 के हल में प्राप्त $x = 0$ पर फलन और उसकी फूरिए श्रेणी के मानों के अंतर की व्याख्या कीजिए।

ख) अंतराल $-1 < x < 1$ पर e^x को निरूपित करने वाली श्रेणी बिन्दुओं $x = \pm 1$ पर किन मानों की ओर अभिसरित होती है? क्या ये मान $x = \pm 1$ पर e^x के वास्तविक मानों से मेल खाते हैं?

इस भाग में की गई चर्चा का उद्देश्य आपको उन प्रतिबंधों से परिचित कराना है जिनके अधीन एक फलन का फूरिए श्रेणी निरूपण मान्य होता है। ये प्रतिबंध फलनों के एक बड़े वर्ग पर लागू होते हैं जिन्हें फूरिए श्रेणी से निरूपित किया जा सकता है। इस तरह के निरूपण की उपयोगिता यह है कि अधिकांश स्थितियों में स्वयं फलन की अपेक्षा ज्यावक्रीय पदों (sinusoidal terms) की श्रेणी का गणितीय एवं संख्यात्मक उपचार अधिक सरल होता है। परिसीमा-मान समस्याओं को हल करने में यह शक्तिशाली विधि बहुत उपयोगी है। परिणाम यह हुआ है कि आज इस विधि का उपयोग भौतिकविद, इंजीनियर और गणितज्ञ बहुत अधिक करते हैं। यह बात आपको अच्छी तरह समझ में तब आएगी जब आप इकाई 8 में आंशिक अवकल समीकरणों पर फूरिए श्रेणी के अनुप्रयोगों को पढ़ेंगे।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है, अब हम उसका संक्षिप्त विवरण यहाँ दे रहे हैं।

7.7 सारांश

- अंतराल $(-L, L)$ पर परिभाषित फलन $f(x)$ को निम्नलिखित **फूरिए श्रेणी** से निरूपित किया जा सकता है :

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

जहाँ

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

- यदि अंतराल $(-L, L)$ पर $f(x)$ एक सम फलन हो, तो $b_n = 0$ जहाँ $n = 1, 2, 3, \ldots$ और परिणामी श्रेणी निम्नलिखित गुणांकों वाली **फूरिए कोसाइन श्रेणी** होती है,

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{0}^{L} f(x)\, dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

- यदि अंतराल $(-L, L)$ पर $f(x)$ एक विषम फलन हो, तो $a_n = 0$ जहाँ $n = 0, 1, 2, \ldots$ और परिणामी श्रेणी निम्नलिखित गुणांकों वाली **फूरिए साइन श्रेणी** होती है,

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

- जब $f(x)$ अंतराल $(0, L)$ पर परिभाषित होता है तब इसे अंतराल $(-L, L)$ पर इस तरह विस्तारित किया जा सकता है कि विस्तारित फलन $g(x)$ या तो सम होता है या विषम। यदि $g(x)$ **विषम विस्तार** है, तो हमें एक **फूरिए साइन श्रेणी** प्राप्त होती है और यदि यह **सम विस्तार** है, तो हमें एक **फूरिए कोसाइन श्रेणी** प्राप्त होती है। ऐसी श्रेणियों को $f(x)$ का **अर्ध-परिसर प्रसार** कहा जाता है।

- किसी भी फलन को, जो कि एक दिए हुए अंतराल $(-L, L)$ पर खंडशः संतत हो और जिसका अवकलज भी खंडशः संतत हो, एक फूरिए श्रेणी से निरूपित किया जा सकता है। असांतत्य बिन्दु पर फूरिए श्रेणी माध्यमान,

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}$$

की ओर अभिसरित होती है, जहाँ $f(x_0^+)$ और $f(x_0^-)$, x_0 पर f की क्रमशः दक्षिण सीमा और वाम सीमा प्रकट करती हैं। अंत्य बिन्दु पर f की फूरिए श्रेणी अंत्य बिन्दु सीमाओं के माध्यमान

$$\frac{f(-L^+) + f(L^-)}{2}$$

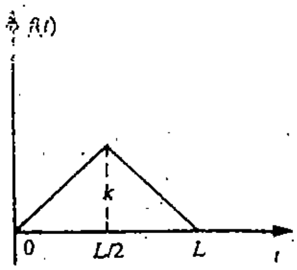
की ओर अभिसरित होती है।

7.8 अंत में कुछ प्रश्न

प्रश्नों पर 25 मिनट लगाएं

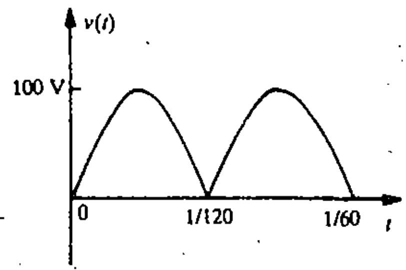
1) निम्नलिखित रूप से परिभाषित त्रिकोणीय स्पंद (चित्र 7.17) की फूरिए कोसाइन श्रेणी प्राप्त कीजिए

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2k}{L}\, t & \text{जब} \quad 0 < t < \dfrac{L}{2} \\[2ex] \dfrac{2k}{L}\,(L - t) & \text{जब} \quad \dfrac{L}{2} < t < L \end{cases}$$



चित्र 7.17

2) चित्र 7.18 में दिखाए गए पूर्ण-तरंग रेक्टिफायर के निर्गम का फूरिए श्रेणी प्रसार प्राप्त कीजिए। वक्र का आकार साइन फलन का निरपेक्ष मान है। अधिकतम वोल्टता 100V है।



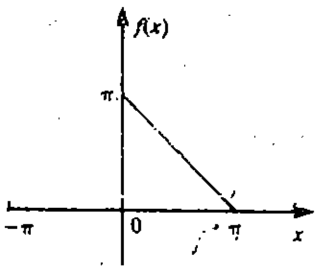
चित्र 7.18

3)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ \pi - x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

को फूरिए श्रेणी में प्रसारित कीजिए (चित्र 7.19 देखिए)।

जाँच कीजिए कि इस फलन का फूरिए श्रेणी निरूपण मान्य है या नहीं।



चित्र 7.19

7.9 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1) समीकरण (7.3 घ) का प्रयोग करने पर हम यह पाते हैं कि समीकरण (7.4) के दक्षिण पक्ष की द्वितीय श्रेणी और तृतीय श्रेणी के सभी पद शून्य हैं क्योंकि

$$\int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\, dx = \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\, dx = 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

इस तरह हमें मिलता है

$$\int_{-L}^{L} a_0\, dx = a_0 \int_{-L}^{L} dx = 2L\, a_0 = \int_{-L}^{L} f(x)\, dx$$

या $\quad a_0 = \dfrac{1}{2L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$

2) समीकरण (7.2) को $\cos\dfrac{m\pi x}{L}$ से गुणा करने और इसे $-L$ से L तक समाकलित करने पर हमें मिलता है,

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\, dx = a_0 \int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi x}{L}\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\, dx$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin\frac{n\pi x}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\, dx$$

समीकरणों (7.3 घ), (7.3 ख), (7.3 ग) और (7.3 ङ) का प्रयोग करने पर हमें मिलता है,

क्योंकि $n = m$ वाले पद के अलावा दक्षिण पक्ष की प्रथम श्रेणी के सभी पद समीकरण (7.3 ग) के कारण शून्य हैं, और समीकरण (7.3 क) के कारण दक्षिण पक्ष की द्वितीय श्रेणी के सभी पद शून्य हैं।

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\, dx = 0 + a_m \int_{-L}^{L} \cos^2\frac{m\pi x}{L}\, dx + 0,$$

$$= a_m L$$

या $\quad a_m = \dfrac{1}{L} \displaystyle\int_{-L}^{L} f(x)\cos\frac{m\pi x}{L}\, dx$

3) $T(x, 0) = \frac{100x}{L}$ का फूरिए श्रेणी निरूपण है,

$$T(x, 0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$$

जहाँ $a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} T(x, 0)\, dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \frac{100x}{L} = \frac{100}{2L^2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-L}^{L} = 0,$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} T(x, 0) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{100}{L^2} \int_{-L}^{L} x \cos \frac{n\pi x}{2}\, dx$$

$$= \frac{100}{L^2} \left(\left[x \cdot \frac{L}{n\pi} \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_{-L}^{L} - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^{L} \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx \right)$$

$$= \frac{100}{L^2} [0 - 0] = 0$$

और $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} T(x, 0) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{100}{L^2} \int_{-L}^{L} x \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$

$$= \frac{100}{L^2} \left(\left[-x \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{L} \right]_{-L}^{L} + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \right)$$

$$= -\frac{100}{L^2} \cdot \frac{L}{n\pi} \; [2L \cos n\pi] + 0 \qquad \text{(समीकरण 7.3 घ का प्रयोग करने पर)}$$

$$= -\frac{200}{n\pi} (-1)^n, \qquad n = 1, 2, \ldots\ldots \; (\because \cos n\pi = (-1)^n)$$

$$= \frac{200}{n\pi} (-1)^{n+1}$$

अत: $T(x, 0)$ की फूरिए श्रेणी है,

$$T(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{200}{n\pi} (-1)^{n+1} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{200}{\pi} \left[\sin \frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi x}{L} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{L} - \sin \frac{4\pi x}{L} + \ldots \right]$$

ध्यान दीजिए कि पद की आवृत्ति जितनी अधिक है, उसका आयाम उतना ही कम है।

यहाँ a_n के मान निकालने की विधि और बोध प्रश्न 2 में जहाँ हमने समीकरण 7.3 क का प्रयोग करके

$\int_{-L}^{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx = 0.$

लिखा है, b_n का मान निकालने की विधि में भ्रम न कीजिए। ध्यान दीजिए कि दोनों स्थितियों में समाकलन अंतराल अलग-अलग है। अत: हमें अलग-अलग परिणाम प्राप्त होते हैं।

ख) $E(t)$ की फूरिए श्रेणी यह है,

$$E(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} (\because L = T/2)$$

$$= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \left(\because \omega = \frac{2\pi}{T} \right)$$

यहाँ $a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} E(t)\, dt = \frac{E}{T} \int_{0}^{T/2} \sin \omega t\, dt \quad \left(\because E(t) = 0 \text{ for } \frac{-T}{2} < t < 0 \right)$

$$= \frac{E}{T}\left[-\frac{\cos\omega T}{\omega}\right]_0^{T/2} = \frac{E}{T\omega}\left(-\cos\frac{\omega T}{2} + \cos 0\right)$$

$$= \frac{E}{2\pi}(2) = \frac{E}{\pi}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\cos n\omega t\, dt$$

$$= \frac{2E}{T}\int_0^{T/2} \sin\omega t\cos n\omega t\, dt$$

$$= \frac{2E}{2T}\int_0^{T/2} [\sin(1+n)\omega t + \sin(1-n)\omega t]\, dt$$

$$\left(\because \sin x\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]\right)$$

हम a_1 का मान अलग से निकालते हैं। $n = 1$ पर समाकल शून्य है।

$\therefore a_1 = 0 \quad n = 2, 3, \ldots\ldots$ पर

$$a_n = \frac{E}{T}\left[-\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega} - \frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\right]_0^{T/2}$$

$$= \frac{E}{\omega T}\left[-\frac{\cos(1+n)\pi}{(1+n)} - \frac{\cos(1-n)\pi}{(1-n)} + \frac{1}{1+n} + \frac{1}{1-n}\right]$$

$$= \frac{E}{2\pi}\left[\frac{-(-1)^{n+1}+1}{n+1} + \frac{-(-1)^{1-n}+1}{1-n}\right]$$

$a_n = 0$, जहाँ $n = 3, 5, 7, 9, \ldots\ldots$

और $a_n = \frac{E}{2\pi}\left[\frac{2}{n+1} + \frac{2}{1-n}\right] = \frac{2E}{(n+1)(1-n)\pi}$, $n = 2, 4, 6, \ldots\ldots,$

इसी तरह

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\sin n\omega t\, dt = \frac{2E}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \sin\omega t\sin n\omega t\, dt$$

समीकरण (7.3 ख) और समीकरण (7.3ग) में केवल b_1 शून्येतर (non-zero) है। अत:

$b_1 = E/2,\ b_n = 0$ जहाँ $n = 2, 3, 4, \ldots\ldots$

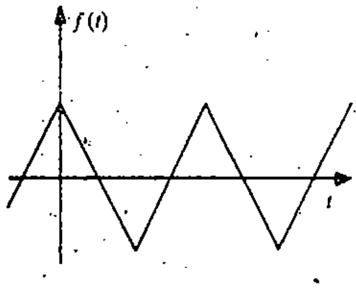
अत: $E(t)$ का फूरिए श्रेणी निरूपण है

$$E(t) = \frac{E}{\pi} + \frac{E}{2}\sin\omega t - \frac{2E}{\pi}\left(\frac{1}{1.3}\cos 2\omega t + \frac{1}{3.5}\cos 4\omega t + \ldots\right)$$

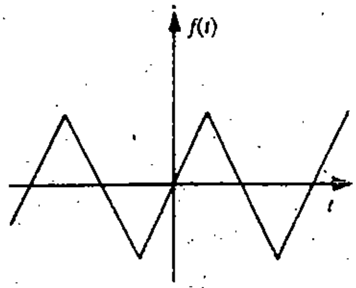
4) क) यह सम है, क्योंकि $f(t) = f(-t)$

ख) (i) चित्र 7.20 क देखिए। यह एक सम फलन है। (ii) चित्र 7.20 ख देखिए। यह एक विषम फलन है।

ग) (i) सम (ii) सम (iii) न तो विषम और न ही सम (iv) विषम (v) न तो विषम और न ही सम (vi) विषम



(क)



(ख)

चित्र : 7.20

घ) (i) $\frac{xe^x - xe^{-x}}{2} + \frac{1}{2}[xe^x + xe^{-x}] = \frac{x}{2}[\sinh x + \cosh x]$

(ii) $\frac{1}{2}[(1+x)(\sin x + \cos x) + (1-x)(-\sin x + \cos x)]$

$+\frac{1}{2}[(1+x)(\sin x + \cos x) - (1-x)(-\sin x + \cos x)]$

5) चित्र 7.10 में दिखाया गया फलन एक विषम फलन है, जहाँ $L = \frac{1}{300}$। अत: हमें केवल फूरिए साइन श्रेणी प्राप्त होती है जिसके गुणांक ये हैं,

$$b_n = 2(300)\int_0^{1/300} p(t)\sin 300\, n\pi t\, dt.$$

$$= 600\int_0^{1/600} \sin 300\, n\pi t\, dt - \frac{5}{6}(600)\int_{1/600}^{1/300} \sin 300\, n\pi t\, dt$$

$$\left[\because p(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < \frac{1}{600} \\ \frac{5}{6}, & \frac{1}{600} < t < \frac{1}{300} \end{cases}\right]$$

$$= 600\left(-\frac{\cos\frac{n\pi}{2} - 1}{300\, n\pi} + \frac{5}{6}\,\frac{\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}}{300\, n\pi}\right) = \frac{2}{n\pi}\left(-\frac{11}{6}\cos\frac{n\pi}{2} + 1 + \frac{5}{6}\cos n\pi\right)$$

इससे यह प्राप्त होता है

$$b_1 = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{3}, \qquad b_5 = \frac{2}{5\pi}\cdot\frac{1}{3}$$

$$b_2 = \frac{2}{2\pi}\left(\frac{11}{6} + 1 + \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{22}{3}, \qquad b_6 = \frac{1}{6\pi}\cdot\frac{22}{3}$$

$$b_3 = \frac{2}{3\pi}\left(1 - \frac{5}{6}\right) = \frac{1}{3\pi}\cdot\frac{1}{3}, \qquad b_7 = \frac{1}{7\pi}\cdot\frac{1}{3}$$

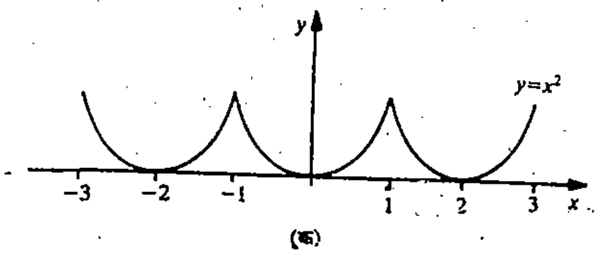
$$b_4 = \frac{2}{4\pi}\left(-\frac{11}{6} + 1 + \frac{5}{6}\right) = 0, \qquad b_8 = 0, \ldots \text{etc.}$$

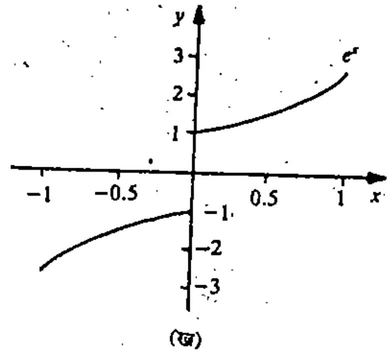
इस तरह,

$$p(t) = \frac{1}{3\pi}\left(\frac{\sin 300\,\pi t}{1} + \frac{22\sin 600\,\pi t}{2} + \frac{\sin 900\,\pi t}{3} + \frac{\sin 1500\,\pi t}{5} + \frac{22\sin 1800\,\pi t}{6} + \frac{\sin 2100\,\pi t}{7} + \ldots\right)$$

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि 300 cps की आवृत्ति पर द्वितीय हार्मोनिक का आयाम अधिकतम होता है। क्योंकि तीव्रता तरंग के आयाम के वर्ग के समानुपाती होती है, इसलिए हम मुख्यत: द्वितीय हार्मोनिक को ही सुनते हैं।

6) चित्र 7.21 क और चित्र 7.21 ख देखिए।





चित्र 7.21

7) क्योंकि हमें अंतराल $0 < x < 1$ पर e^x की फूरिए साइन श्रेणी मालूम करनी है, इसलिए हमें e^x का विषम विस्तार करना होगा (चित्र 7.21 ख देखिए)। ध्यान दीजिए कि परिभाषा के अनुसार $g(0) = 0$। तब गुणांक b_n ये होंगे,

$$b_n = 2\int_0^1 e^x \sin n\pi x\, dx$$

$$= 2\left[\frac{-e^x \cos n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 + \frac{2}{n\pi}\int_0^1 e^x \cos n\pi x\, dx$$

$$= \frac{-2e \cos n\pi + 2}{n\pi} + \frac{2}{n\pi}\left[\frac{e^x \sin n\pi x}{n\pi}\right]_0^1 - \frac{2}{n^2\pi^2}\int_0^1 e^x \sin n\pi x\, dx$$

$$= \frac{-2e(-1)^n + 2}{n\pi} + 0 - \frac{b_n}{n^2\pi^2}$$

या $$b_n\left(1 + \frac{1}{n^2\pi^2}\right) = \frac{2 - 2e(-1)^n}{n\pi}$$

या $$b_n = \frac{2n\pi\,(1 - e(-1)^n)}{1 + n^2\pi^2}$$

अतः अंतराल $0 < x < 1$ पर e^x की फूरिए साइन श्रेणी है,

$$2\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\,[1 - (-1)^n e]}{1 + n^2\pi^2} \sin n\pi x$$

$x = 0$ पर फूरिए साइन श्रेणी का मान शून्य है। पर $e^0 = 1$। इस तरह e^x की फूरिए साइन श्रेणी से $x = 0$ पर फलन e^x का मान प्राप्त नहीं होता। लेकिन इससे $x = 0$ पर e^x के विषम विस्तार का मान प्राप्त होता है।

8) क) बोध प्रश्न 7 में आपने पाया कि अंतराल $0 < x < 1$ पर e^x की फूरिए साइन श्रेणी $x = 0$ पर शून्य की ओर अभिसरित होती है। यह बात अभिसरण प्रमेय के संगत है, क्योंकि साइन श्रेणी, e^x के विषम विस्तार $g(x)$ की फूरिए श्रेणी है और

$$g(0^+) = +1, \qquad g(0^-) = -1,$$

अर्थात् असांतत्य बिन्दु $x = 0$ पर श्रेणी शून्य की ओर अभिसरित होती है।

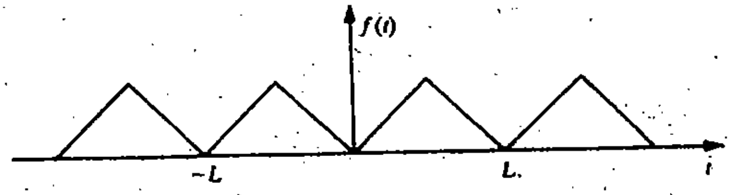
ख) अभिसरण प्रमेय के अनुसार, अंतराल $-1 < x < 1$ पर e^x की फूरिए श्रेणी बिन्दुओं $x = \pm 1$ पर

$$\frac{e^1 + e^{-1}}{2} = 1.5$$

की ओर अभिसरित होती है। जैसाकि आप देख सकते हैं कि $x = \pm 1$ पर यह मान e^x के वास्तविक मान से मेल नहीं खाता (चित्र 7.3 देखिए)।

अंत में कुछ प्रश्न

1) त्रिभुजीय स्पंद का सम विस्तार चित्र 7.22 में दिखाया गया है।



चित्र 7.22

समीकरणों (7.8 घ) और (7.8 ङ) से दिए हुए फलन की फूरिए कोसाइन श्रेणी के गुणांक हैं

$$a_0 = \frac{1}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} t\,dt + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-t)\,dt\right]$$

$$= \frac{1}{L}\cdot\frac{2k}{L}\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{L/2} + \left[Lt - \frac{t^2}{2}\right]_{L/2}^{L}$$

$$= \frac{2k}{L^2}\left(\frac{L^2}{8} + L^2 - \frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{2} + \frac{L^2}{8}\right)$$

$$= \frac{k}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\left[\frac{2k}{L}\int_0^{L/2} t\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt + \frac{2k}{L}\int_{L/2}^{L}(L-t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{L}\cdot\frac{2k}{L}\left(\left[\frac{L}{n\pi}\,t\sin\frac{n\pi t}{L}\right]_0^{L/2} - \frac{L}{n\pi}\int_0^{L/2}\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt + \left[(L-t)\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi t}{L}\right]_{L/2}^{L} + \frac{L}{n\pi}\int_{L/2}^{L}\sin\frac{n\pi t}{L}\,dt\right)$$

$$= \frac{4k}{L^2}\left(\frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi}{2} - 1\right] - \frac{L^2}{2n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right]\right)$$

$$= \frac{4k}{n^2\pi^2}\left(2\cos\frac{n\pi}{2} - \cos n\pi - 1\right)$$

इस तरह

$$a_1 = 0,\ a_2 = -\frac{16k}{2^2\pi^2},\ a_3 = 0,\ a_4 = 0,\ a_5 = 0,$$

$$a_6 = -\frac{16k}{6^2\pi^2},\ a_7 = 0,\ a_8 = 0,\ a_9 = 0,\ a_{10} = -\frac{16k}{10^2\pi^2},\ \ldots$$

इस तरह, $a_n \neq 0$, जबकि $n = 2, 6, 10, 14, \ldots$ त्रिभुजीय स्पंद का अपेक्षित अर्ध परिसर प्रसार है

$$f(t) = \frac{k}{2} - \frac{16k}{\pi^2}\left(\frac{1}{2^2}\cos\frac{2\pi t}{L} + \frac{1}{6^2}\cos\frac{6\pi t}{L} + \ldots\right)$$

2) पूर्ण-तरंग रेक्टिफ़ायर (चित्र 7.18) के निर्गम को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है,

$$v(t) = \begin{cases} 100\sin\omega t & 0 < \omega t < \pi/\omega \\ -100\sin\omega t & -\pi/\omega < \omega t < 0 \end{cases}$$

क्योंकि $v(t)$ सम है, इसलिए इसे हम एक फूरिए कोसाइन श्रेणी से निरूपित कर सकते हैं। यहाँ $L = \pi/\omega$ अत: समीकरण (7.7 ख) से,

$$a_0 = \frac{100\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t \, dt = -\frac{100}{\pi}\left[\cos \omega t\right]_0^{\pi/\omega} = \frac{200}{\pi}$$

$$a_n \quad \frac{200}{\pi}\int_0^{\pi/\omega} \sin \omega t \cos n\omega t \, dt$$

हमने इसी प्रकार का समाकल बोध प्रश्न 3 (ख) में हल किया है। हम उन परिणामों का प्रयोग कर सकते हैं और यह लिख सकते हैं कि

$$a_n = -\frac{400}{(n-1)(n+1)\pi}, \qquad n = 2, 4, 6, \ldots.$$

इस तरह,

$$v(t) = \frac{200}{\pi} - \frac{400}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\omega t}{4m^2-1},$$ जहाँ हमने $n = 2m$ रखा है।

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि मूल आवृत्ति ω का निरसन हो गया है। बचे हुए निम्नतम हार्मोनिक की आवृत्ति 2ω और आयाम $400/3\pi$ है। आवृत्तियों $4\omega, 6\omega, \ldots, 2m\omega, \ldots$ वाले उच्च हार्मोनिक के आयामों में $1/m^2$ के अनुसार कमी आएगी। इस तरह, पूर्ण-तरंग रेक्टिफ़ायर का निर्गम, दिष्ट धारा का अच्छा सन्निकटन होता है।

3) यहाँ $L = \pi$ और फूरिए श्रेणी के गुणांक हैं

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{4}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\cos nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\sin nx}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{n^2\pi}\left[\cos nx\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{n^2\pi}(\cos n\pi - 1) = \frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi - x)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(\pi - x)\frac{\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{\pi}$$

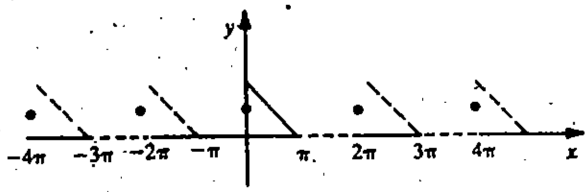
$$= \frac{1}{n}$$

इसलिए $f(x) = \dfrac{\pi}{4} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1-(-1)^n}{n^2\pi}\cos nx + \frac{1}{n}\sin nx\right\}$

यह श्रेणी पूरे x-अक्ष पर $f(x)$ के आवर्ती विस्तार की ओर अभिसरित होती है (चित्र 7.23)। असांतत्य बिन्दुओं ($x = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi \ldots$) पर श्रेणी निम्नलिखित मान की ओर अभिसरित होती है :

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi}{2}$$

चित्र में इन्हें मोटे-मोटे बिन्दुओं से दिखाया गया है।



चित्र 7.23

$n = \pm\pi, \pm 3\pi, \pm 5\pi, \ldots$ पर श्रेणी निम्नलिखित मान की ओर अभिसरित होगी,

$$\frac{f(\pi^-) + f(-\pi^+)}{2} = 0$$

जो कि इन बिन्दुओं पर फलन का मान है।

7.10 शब्दावली

अनंत श्रेणी	infinite series
अनावर्ती	nonperiodic
अभिसरण	convergence
अर्ध-परिसर प्रसार	half-range expansion
आवर्ती	periodic
कोसाइन श्रेणी	cosine series
खंडशः संतत फलन	piecewise continuous function
फूरिए श्रेणी	Fourier series
विच्छेद बिन्दु	break point
विषम फलन	odd function
विस्तार	extension
सम फलन	even function
साइन श्रेणी	sine series

इकाई 8 आंशिक अवकल समीकरणों पर फूरिए श्रेणी के अनुप्रयोग

इकाई की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना

इकाई 7 में आपने फूरिए श्रेणी के रूप में एक स्वेच्छ फलन को निरूपित करने की विधि सीखी है। इस इकाई में हम इस विधि का प्रयोग भौतिकी की कुछ महत्त्वपूर्ण परिसीमा-मान समस्याओं को हल करने में करेंगे। विशेष रूप से यहाँ हम फूरिए श्रेणी विधि का प्रयोग विसरण समीकरण (diffusion equation), तरंग समीकरण और लाप्लास समीकरण से संबंधित परिसीमा-मान समस्याओं को हल करने में करेंगे। उदाहरण के लिए, विसरण समीकरण की सहायता से हम एक बेलनाकार छड़ में ऊष्मा-चालन और कणों के विसरण का अध्ययन करेंगे। इस प्रकार की परिसीमा-मान समस्याएँ इंजीनियरिंग और औद्योगिक अनुप्रयोगों में, जैसे कि न्यूक्लीय रिऐक्टर में ईंधन छड़ों में ऊष्मा प्रवाह के निदर्शन में, जल के वाष्पन, पदार्थों के शुष्कन आदि में आती हैं।

तरंग समीकरण की सहायता से हम "कर्षित तार" (plucked string) समस्या को हल करेंगे जो कि सितार, गिटार, वायलिन आदि जैसे विभिन्न वाद्य यंत्रों में तार की गति को निदर्शित करती है। यहाँ हम मरोड़ी कंपनों (torsional vibrations) का भी अध्ययन करेंगे जो कि कार की धुरी, जहाज के नोदक (propellor), तेल के कुएं के ड्रिल पाइप आदि जैसे घूर्णी शैफ्ट (rotating shaft) युक्त अनेक यांत्रिक तंत्रों में होते हैं।

हम आयताकार प्लेट में स्थायी-अवस्था ऊष्मा प्रवाह (steady-state heat flow) के लिए लाप्लास-समीकरण को हल करेंगे। इसका प्रयोग रेफ्रिजरेटर के दरवाज़े में ऊष्मा-प्रवाह के निदर्शन में किया जा सकता है। अंत में, हम एक वृत्ताकार डिस्क से एक बिन्दु पर उत्पन्न विभव मालूम करने के लिए लाप्लास समीकरण को हल करेंगे। इस समस्या को हल करने से आपको यह भी पता चलेगा कि फूरिए श्रेणी का प्रयोग अकार्तीय ज्यामिति से संबंधित समस्याओं को हल करने में भी किया जा सकता है। हम आशा करते हैं कि इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस बात को अच्छी तरह समझ पाएंगे कि वास्तविक जगत की विभिन्न समस्याओं को हल करने में फूरिए श्रेणी विधि कितनी उपयोगी है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप फूरिए श्रेणी का प्रयोग करके

- एक दी हुई परिसीमा-मान समस्या के लिए विसरण समीकरण, तरंग-समीकरण और लाप्लास-समीकरण को हल कर सकेंगे।
- अन्य आंशिक अवकल समीकरणों से संबंधित इसी प्रकार की परिसीमा-मान समस्याओं को हल कर सकेंगे।

8.2 विसरण समीकरण

आप इकाई 5 में (ऊष्मा प्रवाह के लिए) एक-विम विसरण समीकरण (one-dimensional diffusion equation) का अध्ययन कर चुके हैं। आप इसे इकाई 6 में एक दी हुई भौतिक समस्या के लिए विशिष्ट आदि और परिसीमा प्रतिबंधों के अंतर्गत हल भी कर चुके हैं। आप इकाई 6 में द्विविम ऊष्मा प्रवाह समीकरण (two-dimensional heat flow equation) को भी हल कर चुके हैं।

अपने अति व्यापक रूप में विसरण समीकरण को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है

$$\nabla^2 u + G(x, y, z, t) = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} \qquad (8.1 \text{ क})$$

जहाँ $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ लाप्लासियन है और G, x, y, z और t का एक स्वेच्छ फलन (arbitrary function) है। जैसा कि आप जानते हैं कि फलन $u(x, y, z, t)$ एक पिंड के तापमान को निरूपित कर सकता है जिससे कि समीकरण (8.1 क) उस पिंड में ऊष्मा प्रवाह को निर्दशित कर सके। उदाहरण के लिए, समीकरण (5.10 ग) द्वारा एक धारा-वाहक धातु-तार के तापमान T को निर्दशित किया जा सकता है अगर उसमें धारा चालन से उत्पन्न ऊष्मा से संबंधित पद और बढ़ा दिया जाए। यदि I तार में धारा हो और R उसका प्रतिरोध (resistance) हो, तो x और $x + \Delta x$ के बीच वाले तार के भाग में जमा अतिरिक्त ऊष्मा होगी $I^2R\Delta x$ । इस तरह, आप समीकरण (5.10 ग) में पद $I^2R\Delta x$ बढ़ा सकते हैं और धारा-वाहक तार के लिए इकाई 5 की समीकरण (5.10 ग) के बाद के चरणों को फिर से लागू करके निम्नलिखित ऊष्मा प्रवाह समीकरण प्राप्त कर सकते हैं :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{I^2 R}{KA}, \qquad (8.1 \text{ ख})$$

जहाँ k तार की तापीय विसरणशीलता (thermal diffusivity) है और K तार की तापीय चालकता (thermal conductivity) है। जब समीकरण (8.1 क) का प्रयोग एक घोल में घुले हुए पदार्थों के विसरण को निर्दशित करने के लिए किया जाता है, तब $u(x, y, z, t)$ द्रव के सांद्रण को निरूपित करता है। उदाहरण के लिए आंशिक अवकल समीकरण

द्विविम विसरण समीकरण के लिए हमें स्वेच्छ फलन $u(x, y)$ को दो चरों से निरूपित करना होता है। यह निम्नलिखित रूप का होता है :

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi}{b}x \sin\frac{n\pi}{c}y$$

यह इस पाठ्यक्रम के अध्ययन क्षेत्र से बाहर है।

$$\nabla^2 u = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u \qquad (8.1 \text{ ग})$$

का प्रयोग एक सरंध्र वस्तु (porous object) की सतह से नमी की हानि (विसरण) को निर्दशित करने के लिए किया जा सकता है। यहाँ γ अचर है और u आर्द्रता-सांद्रण (moisture concentration) को निरूपित करता है। यहाँ आप यह देख सकते हैं कि समीकरण (8.1 क) एक असमघात आंशिक अवकल समीकरण है। लेकिन इकाई 6 में आपने केवल समघात आंशिक अवकल समीकरणों को हल करना सीखा है। और इकाई 7 में आपने केवल एक चर वाली फूरिए श्रेणी (हाशिए में दी गई टिप्पणी देखिए) का प्रयोग करना सीखा है। अतः इस भाग में हम फूरिए-श्रेणी को केवल एक-विम समघात विसरण समीकरण पर लागू करेंगे। आइए, हम इस समीकरण के दो विशिष्ट अनुप्रयोगों पर अर्थात् ऊष्मा-चालन और कणों के विसरण पर विचार करें।

8.2.1 ऊष्मा चालन

इकाई 7 में हमने आपको एक-विम विसरण समीकरण को हल करते हुए फूरिए-श्रेणी की संकल्पना से परिचित कराया है। वहाँ आपने एक दी हुई परिसीमा-मान समस्या को हल भी किया था। आइए, यहाँ हम ऊष्मा प्रवाह से संबंधित एक अन्य उदाहरण लें, जहाँ फूरिए श्रेणी को लागू किया जा सकता है। यह थोड़ा-सा अलग अनुप्रयोग है।

उदाहरण 1

लंबाई L वाले एक समांग छड़ में प्रवाहित हो रही ऊष्मा पर विचार कीजिए जो ऊष्मारोधी पदार्थ से घिरी है। जैसा कि आप जानते हैं कि छड़ का तापमान निम्नलिखित विसरण-समीकरण से निर्दशित होता है

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = k\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \quad (0 < x < L, \ t > 0) \qquad (8.2 \text{ क})$$

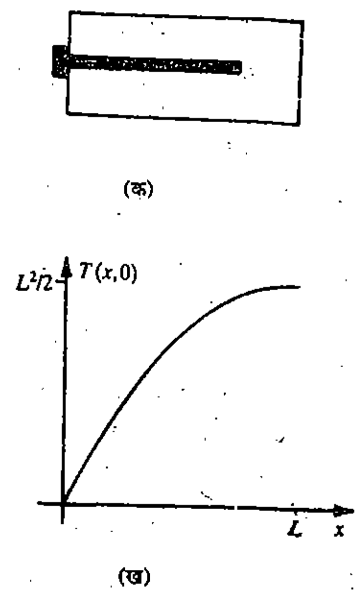
इस छड़ के एक सिरे को बर्फ में रखा जाता है जिसके कारण उस सिरे का तापमान 0°C बना रहता है (चित्र 8.1 क)। इससे निम्नलिखित परिसीमा प्रतिबंध प्राप्त होते हैं :

$$T(0, t) = 0 \quad \text{और} \quad \frac{\partial T(L, t)}{\partial x} = 0, \qquad t \geq 0 \qquad (8.2\ \text{ख})$$

यदि आदि तापमान-वितरण यह हो

$$T(x, 0) = \frac{x}{2}(2L - x) \qquad (8.2\ \text{ग})$$

(चित्र 8.1 ख देखिए), तो ऊष्मा समीकरण (8.2 क) हल कीजिए। सत्यापित कीजिए कि भौतिक दृष्टि से आदि प्रतिबंध, $x = 0$ और $x = L$ पर के परिसीमा प्रतिबंधों के संगत है।



चित्र 8.1: (क) ऊष्मारोधी पदार्थ से घिरा एक छड़ जिसका बायां सिरा बर्फ़ में रखा गया है; (ख) छड़ का आदि-तापमान वितरण

हल

चर पृथक्करण विधि लागू करके हम $T(x, t)$ को दो पदों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं :
$T(x, t) = X(x)\, Y(t)$। $-\lambda^2$ को पृथक्करण अचर लेने पर हमें मिलता है

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y'}{kY} = -\lambda^2 \qquad (i)$$

या $\quad X'' + \lambda^2 X = 0 \qquad (ii)$

और $\quad Y' + k\lambda^2 Y = 0 \qquad (iii)$

$X(x)$ और $Y(t)$ के लिए (ii) और (iii) के हल को आप भली भांति जानते हैं :

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x \qquad (iv)$$

और $\quad Y(t) = C_3\, e^{-k\lambda^2 t} \qquad (v)$

$T(x, t)$ के परिसीमा प्रतिबंधों से हमें मिलता है

$$T(0, t) = X(0)\, Y(t) = 0$$

और $\quad \dfrac{\partial T}{\partial x}(L, t) = \left[\dfrac{dX(L)}{dx}\right] Y(t) = 0$

क्योंकि $Y(t) \neq 0$, इसलिए X निम्नलिखित प्रतिबंधों को अवश्य संतुष्ट करेगा :

$$X(0) = X'(L) = 0$$

इन प्रतिबंधों में से पहले प्रतिबंध को लागू करने पर $C_1 = 0$ हो जाता है। इस तरह

$$X(x) = C_2 \sin \lambda x$$

दूसरे परिसीमा प्रतिबंध से

$$X'(L) = C_2 \cos \lambda L = 0$$

अतुच्छ हल (non-trivial solution) के लिए, जहाँ $C_2 \neq 0$

$$\cos \lambda L = 0$$

या $\quad \lambda L = \left(n + \dfrac{1}{2}\right)\pi, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$

हम λ के इन मानों को λ_n कहते हैं। अत: इन हलों को इस रूप में लिखा जा सकता है—

$$X_n(x) = C_{2n} \sin\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L} x\right], \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots.$$

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में आदि प्रतिबंध, $x = 0$ और $x = L$ पर परिसीमा प्रतिबंधों के साथ मेल नहीं खाता। वास्तव में जब छड़ के सिरों को बर्फ़ में रखा जाता है तो पहले सिरों के तापमान से मेल खाने के लिए बर्फ़ पिघलने लगता है। बर्फ़ में रखे होने के कारण छड़ के सिरे बहुत तेज़ी से ठंडे हो जाते हैं और कुछ समय बाद ही $T(0, t) = 0$ का प्रतिबंध संतुष्ट होता है।

और समीकरण (v) से

$$Y_n(t) = C_{3n} \exp\left[-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 k\,t\right]$$

इस तरह,

$$T_n(x, t) = X_n(x)\, Y_n(t) = b_n \exp\left[-\left(\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right)^2 k\,t\right] \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right],$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ \ldots$$

जहाँ हमने $b_n = C_{2n}\, C_{3n}$ लिया है। अध्यारोपण-नियम (principle of superposition) के अनुसार अति व्यापक हल है :

ध्यान दीजिए कि समीकरण (8.4) के $f(x)$ को इकाई 7 में बताई गई फूरिए-श्रेणी के रूप में प्रसारित नहीं किया जा सकता क्योंकि यहाँ साइन फलन का कोणांक अलग है। पर, हम इसी विधि का प्रयोग करके दिए हुए फलन को किसी ज्यावक्रीय श्रेणी (sinusoidal series) में प्रसारित कर सकते हैं; शर्त केवल यही है कि श्रेणी के पद लांबिकता प्रतिबंध (orthogonality conditions) को संतुष्ट करते हैं।

$$T(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \exp\left(-\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right]^2 kt\right) \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] \qquad (8.3)$$

आदि प्रतिबंध (8.2 ग) को लागू करने पर हमें मिलता है :

$$T(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] = f(x), \quad 0 < x < L \qquad (8.4\text{ क})$$

जहाँ $\quad f(x) = \frac{x}{2}(2L - x).$

हम $f(x)$ के अर्ध-परिसर प्रसार का प्रयोग करके समीकरण (8.4) के b_n निकाल सकते हैं। क्योंकि $f(x)$ अंतराल $0 < x < L$ पर परिभाषित है और $T(x, 0)$ साइन श्रेणी का योगफल है, इसलिए हम $g(x)$ को $f(x)$ का विषम विस्तार मान सकते हैं। समीकरण (8.4 क) को $\sin\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right]$ से गुणा करने और $-L$ से L तक समाकलित करने पर हमें मिलता है

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n \int_{-L}^{L} \sin\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right] \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] dx = \int_{-L}^{L} g(x) \sin\left[\frac{(2m+1)\pi x}{2L}\right] dx$$

भाग 7.2 में बताई गई विधि को लागू करके हम b_n के मान निकाल सकते हैं :

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L \frac{x}{2}(2L - x) \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] dx$$

इन्हें दो बार खंडशः समाकलित (integration by parts) करके आप यह दिखा सकते हैं कि

$$b_n = \frac{16L^2}{(2n+1)^3\pi^3}$$

इस तरह,

$$T(x, t) = \frac{16L^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} \exp\left(-\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right]^2 kt\right) \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] \qquad (8.4\text{ ख})$$

अब आप समघात समीकरण पर फूरिए श्रेणी लागू करके स्वयं एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 1

प्रश्न का 10 मिनट लगाएं

उदाहरण 1 में, मान लीजिए छड़ का आदि तापमान एक अचर T_0°C है। तब विसरण समीकरण (8.2 क) हल कीजिए जहाँ

$$T(0, t) = \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0,$$

और $$T(x, 0) = T_0, \qquad (0 < x < L)$$

$T(x, t)$ का व्यंजक मालूम कीजिए और समय के वृहत (large) मानों पर इसके व्यवहार की चर्चा कीजिए।

आइए, अब हम विसरण समीकरण को हल करने के लिए फूरिए श्रेणी के एक अन्य अनुप्रयोग पर विचार करें।

8.2.2 कणों का विसरण

हमारे दैनिक अनुभवों में अनेकों बार हमें कणों का विसरण देखने को मिलता है। उदाहरण के लिए, जब चाय के प्याले में चीनी डाली जाती है, तो वह घुलने लगती है और पूरी चाय में विसरित हो जाती है। तालाबों से पानी का वाष्पन होता रहता है और इससे वहाँ की हवा में आर्द्रता (moisture) बढ़ती जाती है। अनेक औद्योगिक अनुप्रयोगों में भी कणों का विसरण एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। इसके कुछ उदाहरण हैं : संयंत्रों से विसर्जित जल धारा से प्रदूषकों को हटाना, अपशिष्ट जल से गैसों को हटाना, अम्ल-सांद्रण, नमक उत्पादन, और चीनी के घोल का सांद्रण, कंक्रीट स्लैब, लकड़ी आदि जैसे औद्योगिक उत्पादों का शुष्कन। यहाँ हम सरंध्र (porous) पदार्थ के शुष्कन से संबंधित एक विशेष उदाहरण पर विसरण समीकरण को लागू करेंगे।

एक सरंध्र नम छड़ को, जिसका एक सिरा (जिसके लिए $x = 0$) सीलबंद है, सुखाया जाता है। छड़ का दूसरा सिरा एक शुष्क माध्यम (dry medium) के संपर्क में है और उसकी सतह से उसकी नमी में कमी आती जाती है। आर्द्रता का सांद्रण (concentration) निम्नलिखित परिसीमा-मान समस्या को संतुष्ट करता है :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{k}\frac{\partial u}{\partial t} + \gamma^2 u, \qquad 0 < x < L, \quad t > 0 \tag{8.5 क}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0, \qquad t > 0 \tag{8.5 ख}$$

$$u(x, 0) = u_0, \qquad 0 < x < L. \tag{8.5 ग}$$

आइए, हम $u(x, t)$ ज्ञात करें और $x = 0$ पर सांद्रण अर्थात् स्पष्ट रूप से $u(0, t)$ मालूम करें।

चर-पृथक्करण विधि को लागू करके हम $u(x, t) = X(x)\,T(t)$ के रूप का हल प्राप्त करेंगे। इस स्थिति में आंशिक अवकल समीकरण होगा

$$X''(x)\,T(t) = \frac{1}{k}X(x)\,T'(t) + \gamma^2 X(x)\,T(t)$$

इसे $X(x)T(t)$ से भाग देने पर हमें मिलता है

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t) + k\gamma^2\,T(t)}{k\,T(t)} = -\lambda^2$$

इस तरह, हमें निम्नलिखित दो साधारण अवकल समीकरण मिलते हैं

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0, \qquad 0 < x < L \tag{i}$$

$$T'(t) + k(\gamma^2 + \lambda^2)\,T = 0, \qquad t > 0 \tag{ii}$$

(i) का हल यह है

$$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$$

परिसीमा प्रतिबंधों को लागू करने पर हमें मिलता है

$$X'(0) = 0, \quad X(L) = 0$$

$$X'(0) = \lambda C_2 = 0, \text{ अर्थात् } C_2 = 0$$

और $\quad X(L) = C_1 \cos \lambda L = 0$

क्योंकि $C_1 \neq 0$, इसलिए

$$\cos \lambda L = 0$$

या $\quad \lambda_n L = \dfrac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

या $\quad \lambda_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$

इस तरह $X_n(x) = C_{1n} \cos \lambda_n x$, जहाँ $\lambda_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2L}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

(ii) का हल यह है

$$T_n(t) = C_{3n} \exp\left[-k(\gamma^2 + \lambda_n^2)t\right] = C_{3n}\, e^{-\gamma^2 kt}\, e^{-\lambda_n^2 kt}$$

अत: समीकरण (8.5 क) का व्यापक हल होगा

$$u(x, t) = e^{-\gamma^2 kt} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x e^{-\lambda_n^2 kt}$$

जहाँ हमने $a_n = C_{1n} C_{3n}$ लिया है। इन अज्ञात चरों को मालूम करने के लिए हम आदि प्रतिबंध लागू करते हैं :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x = u_0, \qquad 0 < x < L$$

अब गुणांक a_n निकालने के लिए हम इसके फूरिए श्रेणी प्रसार का, अर्थात् u_0 के सम विस्तार (भाग 7.5.1) का, प्रयोग कर सकते हैं :

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L u_0 \cos \lambda_n x \, dx$$

$$= \frac{2u_0}{L}\left(\frac{\sin \lambda_n L}{\lambda_n}\right) = \frac{4u_0 \sin \lambda_n L}{(2n+1)\pi}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

इस तरह,

$$u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi} e^{-\gamma^2 kt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)} \sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right] \cos\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] e^{-(2n+1)^2 \pi^2 kt/4L^2}$$

$$u(0, t) = \frac{4u_0}{\pi} e^{-\gamma^2 kt} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left[(2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n+1)} e^{-(2n+1)^2 \pi^2 kt/4L^2}$$

$$= \frac{4u_0}{\pi} e^{-\gamma^2 kt} \left[e^{-\tau} - \frac{e^{-9\tau}}{3} + \frac{e^{-25\tau}}{5} - \ldots + \ldots\right]$$

जहाँ $\tau = \pi^2 kt/4L^2$.

एक-विम विसरण समीकरण पर फूरिए श्रेणी को लागू करने की विधि आप अच्छी तरह से समझ गए हैं कि नहीं, यह जानने के लिए अब आप एक बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 2

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

निम्नलिखित [illegible] ऊष्मा/विसरण समस्या को हल कीजिए।

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad 0 < x < 1, \qquad t > 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 0, \qquad t > 0$$

$$u(x, 0) = 1 + 2x, \qquad 0 < x < 1.$$

आइए, अब हम तरंग समीकरण पर फूरिए श्रेणी को लागू करें।

8.3 तरंग समीकरण

सरलता के लिए यहाँ हम अपनी चर्चा निम्नलिखित एक-विम तरंग समीकरण के हल तक ही सीमित रखेंगे।

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad 0 < x < L, \qquad t > 0 \tag{8.6}$$

आइए, हम (i) कंपन कर रहे तारों और (ii) मरोड़ी तरंगों (torsional vibrations) से संबंधित दो विशेष समस्याओं को फूरिए श्रेणी लागू करके हल करें।

8.3.1 कंपायमान तार

जब सितारवादक सितार के तार को छेड़ता है, तो मूलभूत आवृत्ति के साथ-साथ अनेक अधिस्वरक (overtones) या संनादी (harmonics) स्वर भी उत्पन्न होते हैं (इकाई 6 का समीकरण (6.39) देखिए)। सितार से निकले संगीत की ध्वनि उन संनादियों की संख्या पर निर्भर करती है। प्रत्येक संनादी का आयाम जितना अधिक होगा उसके सुनाई देने की संभावना उतनी ही अधिक होगी और, प्रत्येक संनादी का आयाम ठीक-ठीक उस स्थान पर निर्भर करता है, जहाँ तार को छेड़ा गया हो। अतः यदि हम यह जान जाएं कि किस स्थान पर सितार के तार को छेड़ा गया है, तो तार छेड़ने से उत्पन्न ध्वनि के बारे में काफ़ी कुछ जाना जा सकता है। इस भौतिक स्थिति के गणितीय निदर्शन के लिए हमें समीकरण (8.6) का अद्वितीय हल निकालना होगा। इसके लिए हम "कर्षित तार" समस्या (plucked-string problem) पर विचार करेंगे।

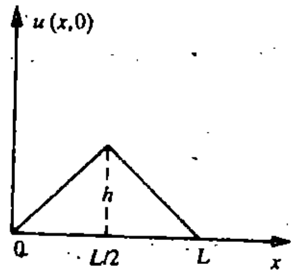
उदाहरण 2 : "कर्षित तार" समस्या

एक तार को उसके मध्य बिन्दु पर ख़ींचकर विरामावस्था से छोड़ दिया जाता है (चित्र 8.2)। परिणामी कंपन निम्नलिखित परिसीमा और आदि प्रतिबंधों सहित समीकरण (8.6) से निदर्शित होते हैं :

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0$$

$$u(x, 0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L}, & 0 < x < \dfrac{L}{2} \\[2ex] 2h\left(1 - \dfrac{x}{L}\right), & \dfrac{L}{2} \le x < L \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0$$



चित्र 8.2

जहाँ h एक धन अचर है जो कि L की तुलना में छोटा है।

ये प्रतिबंध आदि त्रिभुजीय विचलन (triangular deflection) और शून्य आदि वेग के संगत हैं।

इकाई 6 में आप दिए हुए परिसीमा-प्रतिबंधों के लिए तरंग समीकरण का व्यापक हल प्राप्त कर चुके हैं। समीकरण (6.10) द्वारा दिया गया व्यापक हल है

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi vt}{L} + b_n \sin \frac{n\pi vt}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{i}$$

आइए, अब हम (i) पर आदि प्रतिबंध लागू करें :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L}, & 0 < x < \dfrac{L}{2} \\ \\ 2h\left(1 - \dfrac{x}{L}\right), & \dfrac{L}{2} \le x < L \end{cases} \tag{ii}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left(-a_n \frac{n\pi v}{L} \sin \frac{n\pi vt}{L} + b_n \frac{n\pi v}{L} \cos \frac{n\pi vt}{L} \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \right]_{t=0}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{n\pi v}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} = 0 \tag{iii}$$

समीकरण (iii) केवल तभी संतुष्ट होगा, जबकि सभी n के लिए $b_n = 0$, जैसाकि आप समीकरण (6.43) में प्राप्त कर चुके हैं। अत: अब आपको a_n मालूम करना है अर्थात् आपको $u(x, 0)$ को एक फ़ूरिए साइन श्रेणी में प्रसारित करना है। इसके लिए आपको $u(x, 0)$ का विषम आवर्ती विस्तार प्राप्त करना होगा और इस तरह फ़ूरिए साइन श्रेणी में इसका अर्ध-परिसर प्रसार (half-range expansion) मालूम करना होगा। आपको याद होगा कि आपने इकाई 7 के अंत में दिए गए प्रश्न 1 में इसी फलन के सम आवर्ती विस्तार को प्राप्त किया है।

अब आप इस प्रश्न के बाकी भाग को स्वयं हल करें।

बोध प्रश्न 3

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

दिखाइए कि समीकरण (8.6) द्वारा निर्दिष्ट "कंपित तार" समस्या का हल यह है

$$u(x, t) = \frac{8h}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi vt}{L} - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi x}{L} \cos \frac{3\pi vt}{L} + \ldots \right]$$

पियानो के तार जैसे किसी तार को कंपित करने के लिए उस पर आघात करना होता है। इस स्थिति में $t = 0$ पर आदि प्रतिबंध $u(x, t) = 0$ होगा और वेग $\frac{\partial u}{\partial t}$, x का एक फलन होगा (अर्थात् तार के प्रत्येक बिन्दु का वेग $t = 0$ पर दिया गया है)। अब क्योंकि आपको फ़ूरिए श्रेणी मालूम करने का काफ़ी अभ्यास हो गया है, इसलिए आपके अंदर इतना विश्वास अवश्य आ गया होगा कि आप कंपायमान तारों से संबंधित इस प्रकार की किसी भी परिसीमा-मान समस्या को हल कर सकें।

तरंग समीकरण का एक अन्य रोचक अनुप्रयोग है मरोड़ी कंपनों (torsional vibrations) में। इस प्रकार के कंपन कार, हवाई जहाज, टर्बाइन, रेल इंजन आदि विभिन्न प्रकार की मशीनों में लगे शैफ्टों पर असंतुलित बल आघूर्ण के कारण उत्पन्न होते हैं। आप जानते होंगे कि शैफ्ट प्राय: बेलनाकार और ठोस होते हैं। इनका प्रयोग मशीनों में घूर्णन कर रहे पुर्जों को आलंब देने में और घूर्णन द्वारा शक्ति या गति संचरित करने में किया जाता है। कुछ सामान्य प्रकार के शैफ्ट हैं : कार के पहियों को जोड़ने वाली धुरी, चरखे का तकुआ, जहाज के नोदक में प्रयुक्त शैफ्ट और बेल्ट घिरनी व्यवस्था में प्रयुक्त शैफ्ट। अत: आइए अब हम शैफ्ट के मरोड़ी कंपनों से संबंधित एक विशेष समस्या पर विचार करें।

8.3.2 मरोड़ी कंपन

परिमित लंबाई वाला एक समांग, अनवमंदित (uniform, undamped) मरोड़ी कंपन कर रहा शैफ्ट लीजिए जिसके कोणीय वेग के लिए आदि प्रतिबंध दिए हुए हैं (चित्र 8.3)। इसका अर्थ यह है कि हमें समीकरण

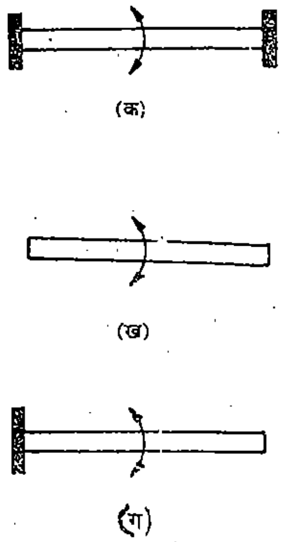
$$\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} \qquad (8.7)$$

के हल निकालने हैं, जहाँ θ शैफ्ट का ऐंठन कोण है और $v^2 = E_s/\rho$। यहाँ E_s अपरूपण (shear) का प्रत्यास्थता गुणांक (modulus of elasticity) है और ρ शैफ्ट का प्रति एकक आयतन द्रव्यमान है। यहाँ हम फिर चर पृथक्करण विधि का प्रयोग करके $\theta(x, t)$ को निम्नवत् लिखते हैं :

$$\theta(x, t) = X(x)\,T(t)$$

कंपन कर रहे तार की तरह ही (इकाई 6 का समीकरण 6.15) यहाँ भी हमें निम्नलिखित दो साधारण अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं

$$T'' = -\frac{\lambda^2}{v^2}T, \qquad X'' = -\lambda^2 X$$



चित्र 8.3: एक मरोड़ी कंपमान शैफ्ट जिसके (क) दोनों सिरे नियत हैं; (ख) दोनों सिरे मुक्त हैं; (ग) एक सिरा नियत है और दूसरा सिरा मुक्त है।

जहाँ $(-\lambda^2)$ पृथक्करण अचर है। इन साधारण अवकल समीकरणों के हल हैं

$$T = A\cos\lambda vt + B\sin\lambda vt$$

और $$X = C\cos\lambda x + D\sin\lambda x$$

इस तरह, हल यह होगा

$$\theta(x, t) = X(x)\,T(t) = (C\cos\lambda x + D\sin\lambda x)(A\cos\lambda vt + B\sin\lambda vt)$$

आप देख सकते हैं कि यह हल आवर्ती है, और इसका आवर्त काल $\frac{2\pi}{\lambda v}$ है।

अब हमें λ, A, B, C और D के मान मालूम करने हैं। λ के मान तो दिए हुए परिसीमा प्रतिबंधों से मालूम हो जाते हैं जो इस पर निर्भर करते हैं कि शैफ्ट के सिरे किस प्रकार अवरोधित हैं। ऐसी तीन स्थितियाँ हैं जो भौतिक तंत्रों में प्राय: पाई जाती हैं :

1) शैफ्ट के दोनों सिरे नियत होते हैं जिससे कि उसमें कोई ऐंठन नहीं आ सकती (चित्र 8.3 क)।

2) शैफ्ट के दोनों सिरे मुक्त होते हैं (चित्र 8.3 ख)।

3) शैफ्ट का एक सिरा नियत होता है जबकि दूसरा सिरा मुक्त होता है (चित्र 8.3 ग)।

आइए, हम इन स्थितियों पर एक एक करके विचार करें।

स्थिति 1

इस स्थिति में परिसीमा प्रतिबंध ये हैं

$$\theta(0, t) = \theta(L, t) = 0, \qquad t > 0$$

इन प्रतिबंधों को लागू करने पर हमें व्यापक हल प्राप्त होता है जो कि कंपन कर रहे तार के लिए प्राप्त एक सुपरिचित परिणाम जैसा ही है (इकाई 6 का समीकरण 6.4) :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi vt}{L} + b_n\sin\frac{n\pi vt}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}$$

इस हल को कोणीय विस्थापन और कोणीय वेग पर दिए गए आदि प्रतिबंधों को संतुष्ट करना होता है। यदि हम $\theta(x, t)$ के समीकरण और इसके अवकलज में $t = 0$ लें, तो हमें मिलता है,

$$\theta(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

और $\quad \left.\frac{\partial \theta}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi v}{L} b_n\right) \sin \frac{n\pi x}{L}$

जहाँ $f(x)$ और $g(x)$, x के कोई फलन हैं, जो शैफ्ट के प्रारंभिक कोणीय विस्थापन और कोणीय वेग को निरूपित करते हैं। तब हम $f(x)$ और $g(x)$ के अर्ध-परिसर साइन प्रसारों का प्रयोग कर सकते हैं। इससे हमें मिलता है

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

और

$$b_n = \frac{L}{n\pi v} \frac{2}{L} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx = \frac{2}{n\pi v} \int_0^L g(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$$

इस तरह, एक समांग शैफ्ट (uniform shaft) जिसके दोनों सिरों को घूमने से रोक दिया गया हो अनंत प्राकृतिक आवृत्तियों में से किसी एक आवृत्ति पर मरोड़ी कंपन करता है :

$$f_n = \frac{nv}{2L} \text{ चक्र प्रति एकक समय, } n = 1, 2, 3, \ldots$$

स्थिति 2

जब शैफ्ट के दोनों सिरे मुक्त होते हैं, तो उन दोनों ही सिरों पर (अर्थात् $x = 0$ और $x = L$ पर) कोई भी बलआघूर्ण (torque) नहीं लगता, क्योंकि इन बिन्दुओं के बाद कोई भी पदार्थ होता ही नहीं। अत: इन सिरों के जरिए संचरित बलआघूर्ण शून्य होता है, अर्थात्

$$\tau = E_s I \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{\text{अन्त्य बिंदु}} = 0$$

मरोड़े गए शैफ्ट के किसी भी परिक्षेत्र पर बलआघूर्ण, उसके प्रति एकक लंबाई ऐंठन कोण के समानुपाती होती है, अर्थात् वह उस परिक्षेत्र के लिए (θ, x) वक्र की प्रवणता के समानुपाती होता है, यानि कि

$\tau \propto \frac{\partial \theta}{\partial x}$

ठोस शैफ्टों के लिए, आनुपातिकता गुणांक $E_s I$ होता है, जहाँ E_s प्रत्यास्थता का गुणांक है, और I शैफ्ट का जड़त्व आघूर्ण है।

जहाँ I छड़ का जड़त्व-आघूर्ण है, और E_s अपरूपण का प्रत्यास्थता गुणांक (shear modulus of elasticity) है। E_s और I दोनों ही शून्येतर (non-zero) हैं। इस तरह, मुक्त सिरे के लिए, परिसीमा प्रतिबंध है

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \qquad x = 0 \text{ और } x = L \text{ पर}$$

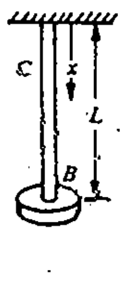
प्रश्न का शेष हल पहले जैसे ही किया जा सकता है। अत: अब आप एक दी हुई समस्या के लिए यह बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 4

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

प्रत्येक सिरे पर मुक्त, एक समांग शैफ्ट को इस तरह ऐंठा गया है कि यह $(2x - L)/2$ के समानुपाती कोण से घूम जाता है। यदि इस स्थिति से विरामावस्था से शैफ्ट को छोड़ दिया जाए, तो x और t के एक फलन के रूप में इसका कोणीय विस्थापन (angular displacement) क्या होगा?

क्या इस बात की ओर आपने ध्यान दिया है कि स्थितियों (1) और (2) में कंपमान शैफ्टों की प्राकृतिक आवृत्तियाँ समान होती हैं? फिर भी कंपन के आयाम (amplitude) समान नहीं होते। दोनों सिरों पर नियत शैफ्ट के लिए शैफ्ट के अनुदिश आयाम $\sin \frac{n\pi x}{L}$ के समानुपाती होते हैं, जबकि मुक्त सिरों वाले शैफ्ट के लिए आयाम $\cos \frac{n\pi x}{L}$ के समानुपाती होते हैं।



चित्र 8.4

स्थिति 3

एक ऐसे शैफ्ट का विशेष उदाहरण, जिसका एक सिरा नियत है और दूसरा सिरा मुक्त है, तेल के कुंओं में इस्तेमाल होने वाले ड्रिल पाइप हैं। ड्रिल कालर (C), जिसमें कटिंग बिट (B) होता है, पाइप के निचले सिरे से जुड़ा होता है (चित्र 8.4)। इस प्रकार के शैफ्ट के परिसीमा प्रतिबंध ये हैं—

$$\theta(0, t) = 0 \text{ और } \left.\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|_{L,t} = 0, \quad t > 0$$

जब हम इन प्रतिबंधों को समीकरण (i) पर लागू करते हैं तो हमें मिलता है

$$C = 0, \qquad \cos\lambda L = 0,$$

जिससे

$$\lambda_n L = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \qquad n = 1, 2 \ldots$$

और

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}, \qquad n = 1, 2 \ldots$$

अत: व्यापक हल होगा

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (\sin\lambda_n x)(A_n \cos\lambda_n vt + B_n \sin\lambda_n vt)$$

अब मान लीजिए कि आदि प्रतिबंध ये हैं

$$\theta(x, 0) = f(x) \quad \text{और} \quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|_{x,0} = g(x)$$

इन आदि प्रतिबंधों से

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right]$$

और

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(2n-1)\pi v}{2L} B_n\right] \sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right]$$

होता है। आपको याद होगा कि हमने ऊष्मा चालन समस्या में गुणांक A_n और B_n निकाले थे। अब आसानी से यह सत्यापित कर सकते हैं कि $f(x)$ और $g(x)$ के अर्ध परिसर साइन प्रसारों से मिलता है

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right]dx$$

और

$$B_n = \frac{4}{(2n-1)\pi v}\int_0^L g(x)\sin\left[\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\right]dx$$

किसी भी फलन $f(x)$ और $g(x)$ के लिए ये गुणांक प्राप्त किए जा सकते हैं जो कि अंतराल $0 < x < L$ पर समाकलनीय (integrable) हों।

आपको याद होगा कि उदाहरण 1 में हमने $\lambda_n L = (2n+1)\frac{\pi}{2}$ लिखा है, पर n मान 0, 1, 2 .... ग्रहण करता है। इस स्थिति में $\lambda_n L = (2n-1)\frac{\pi}{2}$, जहाँ $n = 1, 2 \ldots$ अत: दोनों स्थितियों में λ_n का व्यंजक समान होता है।

अंत में हम लाप्लास समीकरण पर फूरिए श्रेणी को लागू करने के बारे में चर्चा करेंगे।

8.4 लाप्लास समीकरण

आप त्रिविम लाप्लास समीकरण $\nabla^2 u = 0$ से परिचित हैं। फलन u अनेक भौतिक राशियों को निरूपित कर सकता है। यह उस प्रदेश में गुरुत्वीय विभव (gravitational potential) हो सकता है, जहाँ कोई पदार्थ न हो या यह

आवेश मुक्त प्रदेश (charge-free region) में स्थिर वैद्युत विभव (electrostatic potential) हो सकता है। एक ऐसे प्रदेश में जहाँ ऊष्मा का कोई स्रोत न हो, स्थायी अवस्था तापमान (अर्थात् वह तापमान जिसमें समय के साथ परिवर्तन न होता हो) भी लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है। इकाई 5 में हमने असंपीड्य और अघूर्णी (incompressible and irrotational) तरल के लिए वेग विभव (velocity potential) का यह समीकरण प्राप्त किया है। इन सभी विविध क्षेत्रों में से, जहाँ लाप्लास समीकरण लागू होता है, हमने फूरिए श्रेणी के अनुप्रयोग को दर्शाने के लिए दो क्षेत्रों को चुना है। ये क्षेत्र हैं—स्थायी अवस्था में ऊष्मा का प्रवाह और विभव समस्या। यहाँ बताई गई विधि को आप अन्य विशिष्ट समस्याओं पर भी लागू कर सकते हैं।

8.4.1 स्थायी-अवस्था ऊष्मा प्रवाह

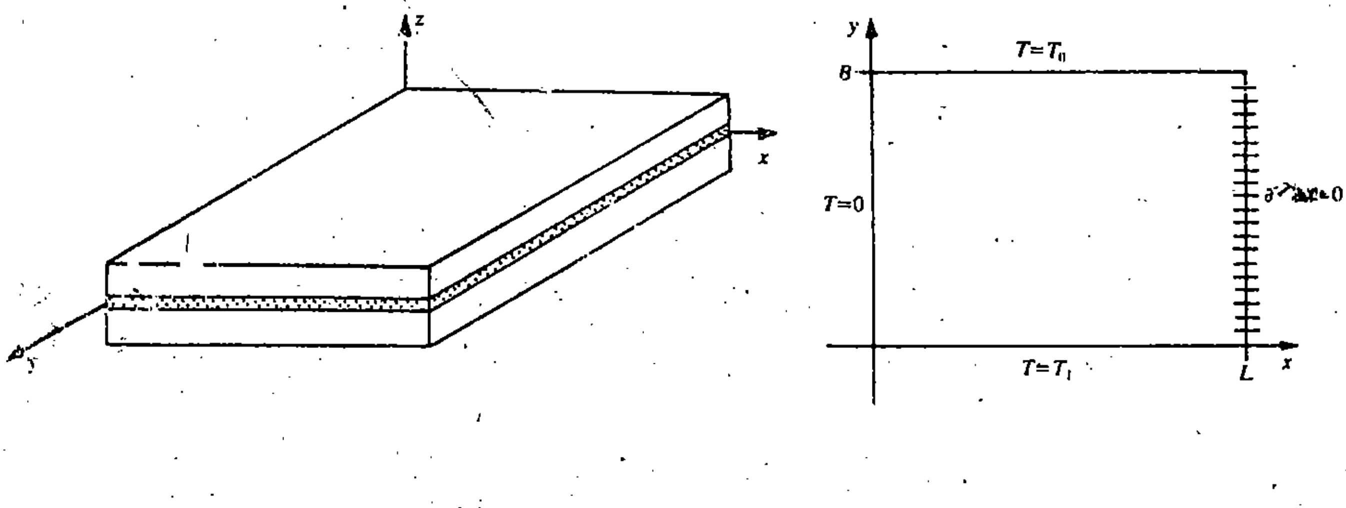
इकाई 6 में आपने वृत्तीय बेलन (उदाहरण 2) और अर्ध वृत्तीय प्लेट (उदाहरण 3) का स्थायी अवस्था तापमान मालूम करने के लिए लाप्लास समीकरण को हल किया है। पर, इन दोनों उदाहरणों में विशेष हल मालूम करने के लिए हमें फूरिए श्रेणी की आवश्यकता नहीं पड़ी थी। अत: आइए, हम फूरिए श्रेणी के प्रयोग से संबंधित लाप्लास समीकरण की एक विशेष परिसीमा-मान समस्या पर विचार करें। इस समस्या के हल के संशोधित रूप का प्रयोग रेफ्रिजरेटर के दरवाजे में ऊष्मा प्रवाह को निदर्शित करने के लिए किया जा सकता है।

उदाहरण 3 : एक आयताकार धातु प्लेट का स्थायी-अवस्था तापमान

ऊष्मारोधी पदार्थ की चादरों के बीच एक पतला आयताकार धातु-प्लेट रखा गया है (चित्र 8.5 क)। क्योंकि प्लेट काफ़ी पतला है और इसके दो सतह ऊष्मारोधी पदार्थ से घिरे हैं, अत: यह माना जा सकता है कि z-दिशा में तापमान में कोई परिवर्तन नहीं होता। स्थायी-अवस्था में प्लेट का तापमान निम्नलिखित द्विविम लाप्लास समीकरण का पालन करता है :

$$\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T(x,y)}{\partial y^2}=0, \quad 0<x<L, \quad 0<y<B \tag{8.8}$$

जहाँ L प्लेट की लंबाई और B प्लेट की चौड़ाई है।



(क) (ख)

चित्र 8.5 : (क) ऊष्मारोधी चादरों के बीच रखा गया धातु का एक पतला प्लेट; (ख) $T(x,y)$ के लिए परिसीमा प्रतिबंध

मान लीजिए प्लेट के ऊपरी कोर (edge) पर तापमान T_0°C है, निचले कोर पर T_1°C और बायीं कोर पर 0°C है। प्लेट की दायीं ओर की कोर ऊष्मारोधी है जिससे कि उस दिशा में कोई ऊष्मा प्रवाहित नहीं होती और x-दिशा में T का आंशिक अवकलज शून्य होता है (चित्र 8.5 ख देखिए)। क्या आप इन परिसीमा प्रतिबंधों को गणितीय रूप में लिख सकते हैं? ये निम्नलिखित हैं :

i) $T(0,y)=0;\quad \dfrac{\partial T(L,y)}{\partial x}=0, \quad 0<y<B$

ii) $T(x,0)=T_1, \quad T(x,B)=T_0, \quad 0<x<L$

हम इन परिसीमा प्रतिबंधों के अंतर्गत लाप्लास समीकरण को हल करके $T(x,y)$ ज्ञात करना चाहते हैं।

हल

अतुच्छ हल के लिए हम लिखते हैं :

$$T(x, y) = X(x)\,Y(y)$$

और चर-पृथक्करण विधि लागू करते हैं जिससे हमें मिलता है

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0$$

क्योंकि परिसीमाओं पर $X(x)$ विलुप्त हो जाता है, इसलिए अनुपात $\frac{X''(x)}{X(x)}$ धनात्मक नहीं हो सकता। अतः हमें निम्नलिखित दो साधारण अवकल समीकरण मिलते हैं :

$$X'' + \lambda^2 X = 0$$

और $$Y'' - \lambda^2 Y = 0$$

इनके हल हैं :

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x$$

और $$Y(y) = C\cosh\lambda y + D\sinh\lambda y$$

परिसीमा प्रतिबंधों (i) और (ii) को लागू करने पर हमें मिलता है

$$A = 0,\ \cos\lambda L = 0$$

या $$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L},\quad n = 1, 2, \ldots,$$

जिससे $X_n(x) = B_n \sin\lambda_n x$

और $Y_n(y) = C'_n \cosh\lambda_n y + D'_n \sinh\lambda_n y$

$T(x, y)$ का व्यापक हल है

$$T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cosh\lambda_n y + D_n \sinh\lambda_n y)\sin\lambda_n x$$

जहाँ $$\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L},\quad n = 1, 2, \ldots$$

और $$C_n = C'_n B_n,\quad D_n = D'_n B_n.$$

C_n और D_n परिसीमा प्रतिबंध (ii) को लागू करके प्राप्त किए जाते हैं। $y = 0$ पर

$$T(x, 0) = C_n \sin\lambda_n x = T_1,\qquad 0 < x < L$$

जिससे आप C_n का निम्नलिखित मान निकाल सकते हैं

$$C_n = \frac{2}{L}\int_0^L T_1 \sin\lambda_n x\,dx = \frac{4T_1}{(2n-1)\pi}$$

$y = B$ पर

$$T(x, B) = \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cosh\lambda_n B + D_n \sinh\lambda_n B)\sin\lambda_n x = T_0,\qquad 0 < x < L$$

अब हमें ऐसा D_n चुनना है जिससे कि कोष्ठक के अंदर की राशि दिए हुए परिसीमा मान (जो इस स्थिति में T_0 है) को निरूपित करने वाले फलन का फूरिए साइन गुणांक हो। आइए हम

$$C_n \cosh \lambda_n B + D_n \sinh \lambda_n B = G_n$$

लें। तब गुणांक G_n निम्नलिखित संबंध से प्राप्त होता है

$$G_n = \frac{2}{L}\int_0^L T_0 \sin \lambda_n x \, dx = \frac{4T_0}{(2n-1)\pi}\,.$$

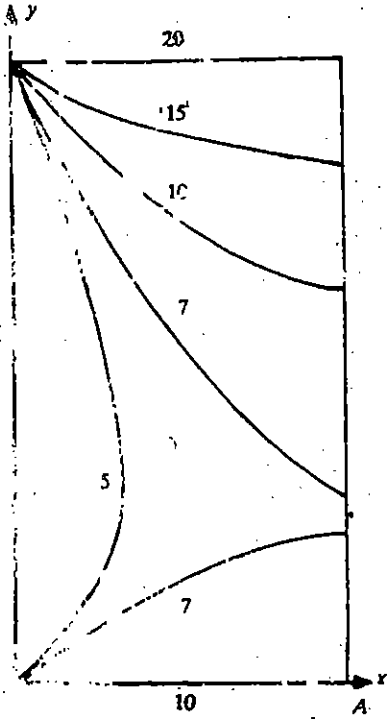
इससे ज्ञात गुणांकों C_n और G_n के पदों में गुणांक D_n प्राप्त हो जाते हैं :

$$D_n = \frac{G_n - C_n \cosh \lambda_n B}{\sinh \lambda_n B} = \frac{4}{(2n-1)\pi}\,\frac{T_0 - T_1 \cosh \lambda_n B}{\sinh \lambda_n B}\,.$$

इस तरह, इस प्रश्न का अद्वितीय हल होता है

$$T(x,y) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T_1 \cosh \lambda_n y}{2n-1} + \frac{T_0 - T_1 \cosh \lambda_n B}{(2n-1)\sinh \lambda_n B}\sinh \lambda_n y\right)\sin \lambda_n x$$

स्थिति $B = 2L$, $T_1 = 10°C$, $T_0 = 20°C$ पर हल चित्र 8.6 में दिखाया गया है। T के विभिन्न मानों पर दिखाए गए वक्र, समतापी वक्र $T(x, y) = T_c$ हैं।



चित्र 8.6: T के विभिन्न मानों के लिए समतापी वक्र $T(x, y) = T_c$ जबकि $B = 2L$, $T_1 = 10°C$ $T_0 = 20°C$.

इस प्रश्न को आप तब भी हल कर सकते थे जबकि ऊपरी और निचले कोर पर $T(x, y)$ के परिसीमा प्रतिबंध अचर होने के बजाय खंडशः संतत फलन होते या जबकि बायीं और दायीं कोरों पर परिसीमा प्रतिबंध अलग-अलग होते। इस संबंध में आप एक प्रश्न क्यों नहीं हल करते?

इस पर 15 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 5

चित्र 8.5 क की आयताकार प्लेट का स्थायी-अवस्था तापमान मालूम कीजिए, जबकि दिए हुए परिसीमा प्रतिबंध निम्नलिखित हों :

$$u(0, y) = \frac{U_0 y}{B}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = -S, \qquad 0 < y < B$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(x, B) = 0, \qquad 0 < x < L$$

चालकों से संबंधित कुछ प्रकार की समस्याओं में आवेश उनके सतह पर ही उपस्थित होता है। चालक से बाहर स्थित सभी बिन्दुओं पर का विभव लाप्लास समीकरण को संतुष्ट करता है। आइए, अब हम एक चालक के स्थिर वैद्युत विभव के लिए लाप्लास समीकरण को हल करें।

अभी तक हमने जितनी समस्याओं पर विचार किया है, उनमें कार्तीय निर्देश तंत्र अपेक्षित था। इस इकाई के अंतिम भाग में हम अकार्तीय ज्यामिति में विभव समस्या पर फूरिए श्रेणी को लागू करने पर विचार करेंगे।

8.4.2 वृत्ताकार डिस्क के कारण एक बिन्दु पर विभव

आइए, हम एक धातु की बनी वृत्ताकार डिस्क के कारण उत्पन्न विभव के लिए लाप्लास समीकरण को हल करें। डिस्क के लिए समतल ध्रुवी निर्देशांकों (r, θ) का प्रयोग करना अधिक उचित होगा :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right) = 0, \; 0 \le r < L, \; -\pi < \theta \le \pi \qquad (8.9 \text{ क})$$

$$u(L, \theta) = f(\theta), \quad -\pi < \theta \le \pi \qquad (8.9 \text{ ख})$$

इस समस्या के निम्नलिखित दो विशेष लक्षण हैं :

(i) बिन्दु $\theta = \pi$ और $\theta = -\pi$ संपाती (coincident) होते हैं। अत: इन बिन्दुओं पर u के मान और इसके कोणीय अवकलज के मान एक ही होने चाहिए :

$$u(r, -\pi) = u(r, \pi), \qquad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi), \qquad 0 \le r < L$$

ii) बिन्दु $r = 0$ विचित्र बिन्दु (singular point) है; समीकरण (8.9 क) के $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ का गुणांक 1 है, जबकि अन्य पदों के गुणांक $1/r$ और $1/r^2$ हैं। अत: यहाँ हमें एक परिबद्धता प्रतिबंध (condition for boundedness) को अवश्य लागू करना होगा :

जैसे-जैसे r, शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, $u(r, \theta)$ एक परिमित मान की ओर प्रवृत्त होता है अर्थात् $r \to 0$ पर यह परिबद्ध (bounded) होता है।

इन विशेष लक्षणों को ध्यान में रखकर हम चर-पृथक्करण विधि से विभव समस्या को हल कर सकते हैं :

मान लीजिए $\qquad u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$

समीकरण (8.9 क) में $u(r, \theta)$ को प्रतिस्थापित करने और विशेष सांतत्य प्रतिबंध को ध्यान में रखने पर हमें मिलता है

$$\frac{1}{r}[rR'(r)]'\Theta(\theta) + \frac{1}{r^2}R(r)\Theta''(\theta) = 0, \qquad 0 \le r < L, \ -\pi < \theta \le \pi \qquad \text{(i)}$$

और

$$R(r)\,\Theta(-\pi) = R(r)\,\Theta(\pi), \quad R(r)\,\Theta'(-\pi) = R(r)\,\Theta'(\pi) \quad 0 \le r < L \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (i) को r^2 से गुणा करने और इसे $R(r)\,\Theta\,(\theta)$ से भाग देने पर तथा (ii) से $R(r)$ का निरसन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{r[rR'(r)]'}{R(r)} = -\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = \lambda^2 \qquad 0 \le r < L, \quad -\pi < \theta \le \pi$$

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi) \ \text{ और } \ \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi), \qquad \text{(iii)}$$

इस तरह,

$$\Theta'' + \lambda^2\Theta = 0$$

जिससे

$$\Theta(\theta) = A\cos\lambda\theta + B\sin\lambda\theta$$

Θ के सांतत्य प्रतिबंध (ii) से हमें मिलता है

$$A\cos\lambda\pi - B\sin\lambda\pi = A\cos\lambda\pi + B\sin\lambda\pi$$

$$A\lambda\sin\lambda\pi + B\lambda\cos\lambda\pi = -A\lambda\sin\lambda\pi + B\lambda\cos\lambda\pi$$

या $\qquad 2B\sin\lambda\pi = 0$

और $\qquad 2\lambda A\sin\lambda\pi = 0$

जिससे $\lambda_n = n$ प्राप्त होता है, जहाँ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

इस तरह,

$$\Theta_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$R_n(r)$ का समीकरण है

$$\frac{r(rR'_n)'}{R_n} = \lambda_n^2 \quad \text{या} \quad r^2 R''_n + r R'_n - \lambda_n^2 R_n = 0 .$$

यह एक ऑयलर-कॉशी समीकरण है जिसके रैखिकत: स्वतंत्र हल (इकाई 6 का उदाहरण 3 देखिए) हैं :

$$R_n(r) = r^n \quad \text{और} \quad R_n(r) = r^{-n}$$

इनमें से दूसरे को भौतिक दृष्टि से स्वीकार नहीं किया जा सकता, क्योंकि $r \to 0$ पर यह ∞ की ओर प्रवृत्त होता है। अत: $u(r, \theta)$ का व्यापक हल होगा :

$$u(r, \theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

$r = L$ के परिसीमा प्रतिबंध से मिलता है

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} L^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta), \quad -\pi < \theta \le \pi$$

यह एक फूरिए श्रेणी समस्या है और श्रेणी के गुणांक ये हैं

$$A_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$

$$L^n A_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta$$

$$L^n B_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta \, d\theta$$

आप किसी भी फलन $f(\theta)$ के लिये इन तीन समाकलनों को हल कर सकते हैं, जबकि इनका अस्तित्व हो।

इस इकाई में हमने विशिष्ट भौतिक समस्याओं में आने वाली कुछ आंशिक अवकल समीकरणों जैसे विसरण समीकरण, तरंग समीकरण और लाप्लास समीकरण से संबंधित फूरिए श्रेणी के अनुप्रयोगों की चर्चा की है। यहाँ दिए गए अनुप्रयोग फूरिये श्रेणी पर आधारित इस शक्तिशाली विधि के कुछ ही उदाहरण हैं। यह विधि विभिन्न प्रकार की अनेकानेक समस्याओं पर व्यापक रूप से लागू होती है जिन पर समयाभाव के कारण यहाँ चर्चा नहीं की जा सकती। फिर भी हमें विश्वास है कि इकाई 7 और 8 में आपने जो भी पढ़ा उससे आपको फूरिए विधि की उपयोगिता अवश्य समझ में आई होगी।

पर इस इकाई का अंत हम इस बात पर नहीं करना चाहेंगे कि फूरिए विधि आंशिक अवकल समीकरणों की रैखिक परिसीमा-मान समस्याओं को हल करने की एकमात्र विधि है। इन समस्याओं को हल करने की इतनी ही महत्वपूर्ण अन्य विधियां भी हैं : जैसे, लाप्लास रूपांतरों (Laplace transforms), फूरिए रूपांतरों (Fourier transforms) और अन्य समाकल रूपांतरों (integral transforms) पर आधारित विधियाँ, ग्रीन संख्यात्मक विधियाँ (numerical methods)। वास्तव में परिसीमा-मान समस्याओंलिए नई विधियों का विकास आज के गणितीय अनुसंधान का एक सक्रिय क्षेत्र है। प्राय: इनमें से अधिकांश विधियों पर चर्चा पूर्व स्नातक और स्नातकोत्तर स्तर पर भौतिकी की गणितीय विधियों से संबद्ध पाठ्यक्रमों या अवकल समीकरणों के उच्च स्तरीय पाठ्यक्रमों में की जाती है।

अब प्रस्तुत है इस इकाई की सामग्री का एक संक्षिप्त विवरण।

8.5 सारांश

इस इकाई में आपने विभिन्न परिसीमा-मान समस्याओं को हल करने के लिए फूरिए श्रेणी को लागू करना सीखा है :

- विसरण समीकरण, सरंध्र ठोस पदार्थों में द्रवों के विसरण और ऊष्मा चालन की समस्याएँ

- तरंग समीकरण, कंपायमान तारों और मरोड़ी कंपनों की समस्याएं
- लाप्लास समीकरण, स्थायी-अवस्था ऊष्मा प्रवाह समस्या और विभव समस्या।

8.6 अंत में कुछ प्रश्न

प्रश्नों पर 20 मिनट लगाएं

1. प्राकृतिक लंबाई L वाला एक बेलनाकार प्रत्यास्थ छड़ (जैसे कि एक इस्पात छड़) को प्रारंभ में दूरी cL से खींचकर विरामावस्था में रखा जाता है। छड़ के किसी परिच्छेद (section) का प्रारंभिक अनुदैर्घ्य विस्थापन (longitudinal displacement) नियत सिरे $x = 0$ से दूरी के समानुपाती होता है। समय $t = 0$ पर दोनों सिरों को मुक्त छोड़ दिया जाता है। छड़ का अनुदैर्घ्य विस्थापन $y(x, t)$ निम्नलिखित परिसीमा-मान समस्या को संतुष्ट करता है :

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

जहाँ $v^2 = E/\rho$, E प्रत्यास्थता गुणांक है और ρ छड़ के पदार्थ का घनत्व है। क्योंकि सिरे मुक्त हैं, इसलिए छड़ के सिरों पर प्रति एकक क्षेत्रफल बल शून्य होगा और हमें प्राप्त होगा :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0, t) = 0, \qquad \frac{\partial y}{\partial x}(L, t) = 0$$

साथ ही दिया है

$$y(x, 0) = cx, \qquad \frac{\partial y}{\partial t}(x, 0) = 0$$

परिसीमा-मान समस्या को हल कीजिए और $y(x, t)$ का मान प्राप्त कीजिए।

2. टेलीफ़ोन के तारों में या बिजली की लाइनों में विद्युत धारा के प्रवाह और [illegible] विद्युतवाहक बल (electromotive force) को विसरण समीकरण की तरह के समीकरणों से निर्धारित किया जा सकता है, जबकि धारा की लीकेज के कारण हो रही हानि नगण्य हो और तारों का प्रेरकत्व (inductance) नगण्य हो :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = RC\frac{\partial i}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = RC\frac{\partial v}{\partial t}$$

जहाँ R दो तारों का प्रति एकक लंबाई प्रतिरोध है और C प्रति एकक लंबाई धारिता (capacitance) है। निम्नलिखित परिसीमा और आदि प्रतिबंधों के लिए लंबाई L वाले केबिल के लिए इस समीकरण को हल कीजिए।

$$v(0, t) = 0\text{V}, \quad v(L, t) = 0\text{V}, \quad t \geq 0$$

$$v(x, 0) = (6x/L)\text{V}.$$

8.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

1) इस प्रश्न का व्यापक हल समीकरण (8.3) से प्राप्त हो जाता है। आदि प्रतिबंध को लागू करने पर हमें मिलता है,

$$T(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] = T_0, \qquad 0 < x < L$$

$T(x, 0)$ के अर्ध-परिसर प्रसार का प्रयोग करने पर हमें मिलता है,

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L T_0 \sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right] dx$$

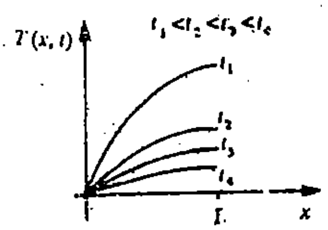
$$= \frac{2T_0}{L}\left[-\frac{2L}{(2n+1)\pi}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]_0^L$$

$$= -\frac{4T_0}{(2n+1)\pi}\left[\cos(2n+1)\frac{\pi}{2}-1\right]$$

$$= \frac{4T_0}{(2n+1)\pi}$$, क्योंकि n के सभी मानों के लिए $\cos(2n+1)\frac{\pi}{2} = 0$

अत:

$$T(x,t) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\exp\left(-\left[\frac{(2n+1)\pi}{2L}\right]^2 kt\right)\sin\left[\frac{(2n+1)\pi x}{2L}\right]$$



चित्र 8.7

क्योंकि t में वृद्धि होने के साथ सभी चरघातांकी पद शून्य की ओर प्रवृत्त होते हैं, इसलिए $T(x, t)$ भी शून्य की ओर प्रवृत्त होता है। चित्र 8.7 में t के बहुत ही बड़े मानों के लिए x के साथ $T(x, t)$ के प्रत्याशित ग्राफ़ों के प्रकार को दिखाया गया है।

2) इस प्रश्न में $k = 1$ और $L = 1$ हैं। उदाहरण 1 की तरह हम $X(x)$ पर दिए हुए परिसीमा प्रतिबंधों को लागू करते हैं :

$$X'(0) = X'(1) = 0$$

इससे हमें मिलता है

$$C_2 = 0 \quad \text{और} \quad C_1 \sin\lambda = 0$$

क्योंकि अतुच्छ हल के लिए $C_1 \neq 0$, इसलिए $\sin\lambda = 0$ या $\lambda_n = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \ldots$

$T(t)$ का हल, उदाहरण 1 की तरह प्राप्त होता है और व्यापक हल होता है

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp[-n^2\pi^2 t]\cos n\pi x,$$

$t = 0$ पर

$$u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x = 1 + 2x, \qquad 0 < x < 1$$

अत: गुणांक है

$$a_0 = \int_0^1 (1+2x)\,dx = \left[x + x^2\right]_0^1 = 2$$

$$a_n = 2\int_0^1 (1+2x)\cos n\pi x\,dx$$

$$= \frac{4}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

इस तरह, विशेष हल होता है

$$u(x,t) = 2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos n\pi - 1}{n^2\pi^2}\right)\exp(-n^2\pi^2 t)\cos n\pi x$$

$$= 2 - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\pi x\, e^{-\pi^2 t} + \frac{1}{9}\cos 3\pi x\, e^{-9\pi^2 t} + \frac{1}{25}\cos 5\pi x\, e^{-25\pi^2 t} + \ldots\right)$$

3) फूरिए साइन श्रेणी में $u(x, 0)$ का अर्ध-परिसर प्रसार करने पर मिलता है,

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,0)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^{L/2}\frac{2hx}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} 2h\left(1-\frac{x}{L}\right)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{4h}{L^2}\left(\left[-\frac{xL}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^{L/2}\right)$$

$$- \frac{4h}{L}\cdot\frac{L}{n\pi}\left[\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} - \frac{4h}{L^2}\left(\left[-\frac{xL}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L} + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_{L/2}^{L}\right)$$

$$= -\frac{4h}{L^2}\frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2} + \frac{4h}{L^2}\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2} - \frac{4h}{n\pi}\left(\cos n\pi - \cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$+ \frac{4h}{L^2}\left(\frac{L^2}{n\pi}\cos n\pi - \frac{L^2}{2n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{4h}{n^2\pi^2}\left(\sin n\pi - \sin\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{8h}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}$$

इस तरह, ''कर्षित तार'' समस्या का हल है.

$$u(x,t) = \frac{8h}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\cos\frac{n\pi vt}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{8h}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi vt}{L} - \frac{1}{3^2}\sin\frac{3\pi x}{L}\cos\frac{3\pi vt}{L} + \ldots\right]$$

4) कंपन कर रहे शैफ्ट के आंशिक अवकल समीकरण का हल है

$$\theta(x,t) = X(x)\,T(t) = (C\cos\lambda x + D\sin\lambda x)$$
$$(A\cos\lambda vt + B\sin\lambda vt)$$

इस स्थिति में परिसीमा प्रतिबंध है

$$x = 0 \text{ और } x = L \text{ पर } \frac{\partial\theta}{\partial x} = 0$$

जिनमें यह निहित है कि सभी $t > 0$ के लिए

$$x = 0 \text{ और } x = L \text{ पर } \frac{\partial X}{\partial x} = 0$$

इससे $D = 0$ और $C\sin\lambda L = 0$

जिससे कि

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

इस तरह, $\theta(x, t)$ का व्यापक हल होगा

$$\theta(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\lambda_n vt + b_n\sin\lambda_n vt)\cos\lambda_n x$$

जहाँ $a_n = A_n C_n$ और $b_n = B_n C_n$.

$t = 0$ पर $\theta(x, 0)$, $(2x - L)/2$ के समानुपाती है; यानी

$$\therefore\ \theta(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \lambda_n x = k\,\frac{(2x - L)}{2}, \qquad 0 < x < L$$

अर्ध परिसर विधि को लागू करने पर हमें मिलता है

$$a_n = \frac{2k}{L}\int_0^L \left(x - \frac{L}{2}\right)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2k}{L}\int_0^L x\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx - k\int_0^L \cos\frac{n\pi x}{L}\,dx$$

$$= \frac{2k}{L}\left(\left[\frac{L}{n\pi}x\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L + \frac{L^2}{n^2\pi^2}\left[\cos\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L\right) - \frac{Lk}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi x}{L}\right]_0^L$$

$$= \frac{2k}{L}\,\frac{L^2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

$$= \frac{2Lk}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1)$$

क्योंकि शैफ्ट विरामावस्था से कंपन करना प्रारंभ करता है, इसलिए इसका आदि वेग शून्य होगा, जिससे निम्नलिखित प्रतिबंध प्राप्त होगा

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}(x, 0) = 0$$

या $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \lambda_n v \cos\lambda_n x = 0$

यह केवल तभी संतुष्ट होगा जबकि सभी n के लिए $b_n = 0$. इस तरह, दी हुई परिसीमा-मान समस्या का हल यह होगा,

$$\theta(x, t) = \frac{2Lk}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\cos n\pi - 1)\cos\frac{n\pi vt}{L}$$

$$= -\frac{2kL}{\pi^2}\left[\frac{1}{1^2}\cos\frac{\pi vt}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi vt}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi vt}{L} + \dots\right]$$

5) हम अतुच्छ हलों को $u(x, y) = X(x)\,Y(y)$ के गुणनफल के रूप में पाना चाहते हैं। चर-पृथक्करण विधि को लागू करने पर हमें मिलता है,

$$\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = 0, \qquad 0 < x < L, \qquad 0 < y < B$$

जहाँ परिसीमा प्रतिबंध हैं

$$X(x)\,Y(0) = 0, \qquad X(x)\,Y(B) = 0, \qquad 0 < x < L$$

या $Y(0) = 0$, $Y(B) = 0$.

क्योंकि परिसीमाओं $Y = 0$ और $Y = B$ पर Y शून्य हो जाता है, इसलिए अनुपात $\frac{Y''}{Y}$ धनात्मक नहीं हो सकता। इस तरह, हमें निम्नलिखित साधारण अवकल समीकरण मिलते हैं :

$$X'' - \lambda^2 X = 0, \quad Y'' + \lambda^2 Y = 0$$

जहाँ

$$X(x) = A\cosh\lambda x + B\sinh\lambda x$$

$$Y(y) = C\cos\lambda y + D\sin\lambda y$$

Y पर परिसीमा प्रतिबंधों से C और λ के निम्नलिखित मान प्राप्त होते हैं :

$$C = 0, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{B}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

इस तरह,

$$Y_n(y) = D_n \sin \frac{n\pi y}{B}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

अतः व्यापक हल होगा

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cosh \lambda_n x + b_n \sinh \lambda_n x) \sin \lambda_n y$$

जहाँ $a_n = A_n D_n$, $b_n = B_n D_n$.

शेष परिसीमा प्रतिबंधों को लागू करने पर हमें मिलता है

$$x = 0 \text{ पर } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \lambda_n y = \frac{U_0 y}{B}, \; 0 < y < B$$

अर्ध परिसर प्रसार विधि को लागू करने पर

$$a_n = \frac{2}{B} \int_0^B \frac{U_0 y}{B} \sin \lambda_n y \, dy$$

$$= \frac{2U_0}{B^2} \left(\left[-\frac{y}{\lambda_n} \cos \lambda_n y \right]_0^B + \frac{1}{\lambda_n} \left[\frac{\sin \lambda_n y}{\lambda_n} \right]_0^B \right)$$

$$= \frac{2U_0}{B^2} \left(-\frac{B^2}{n\pi} \cos n\pi + 0 \right)$$

$$= -\frac{2U_0 \cos n\pi}{n\pi}$$

$$x = L \text{ पर } \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = -S, \; 0 < y < B$$

$u(x, y)$ की श्रेणी का पदशः (term by term) अवकलन करने और दिए हुए प्रतिबंधों को लागू करने पर हमें मिलता है

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (a_n \sinh \lambda_n L + b_n \cosh \lambda_n L) \sin \lambda_n y = -S, \qquad 0 < y < B$$

अतः हमें ऐसा b_n चुनना होगा जिससे कि $\sin \lambda_n y$ का गुणांक हो,

$$C_n = \lambda_n (a_n \sinh \lambda_n L + b_n \cosh \lambda_n L)$$

जहाँ $$C_n = \frac{2}{B} \int_0^B (-S \sin \lambda_n y) \, dy$$

$$= \frac{2S}{B} \left[\frac{\cos \lambda_n y}{\lambda_n} \right]_0^B = \frac{2S}{B\lambda_n} [\cos n\pi - 1]$$

$$= \frac{2S}{n\pi} (\cos n\pi - 1)$$

NOTES