

UG PHS-04

BLOCK-1



उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-04

वैद्युत एवं चुम्बकीय
परिघटनाएं

खंड

1

निर्वात में स्थिरविद्युतिकी

इकाई 1

विद्युत आवेश, बल और क्षेत्र

7

इकाई 2

गाउस नियम

31

इकाई 3

विद्युत विभव

54

इकाई 4

सतत आवेश वितरण से उत्पन्न विभव तथा ऊर्जा

81

वैद्युत एवं चुम्बकीय परिघटनाएं

प्राचीन काल से ही लोग विद्युत एवं चुंबकीय बलों से परिचित रहे हैं। प्राचीन यूनानी लोग लोडस्टोन के गुणधर्मों से परिचित थे, जो कि एक प्राकृतिक चुंबक है। वस्तुतः चुंबक के अंग्रेजी शब्द मैग्नेट (magnet) की व्युत्पत्ति ऐशिया माइनर के मैग्नेशिया नगर के नाम से हुई है, जिसके निकट लोडस्टोन पाया गया था। इसी प्रकार विद्युत बलों का उल्लेख यूनानी दार्शनिक थेल्स (thales) के लेखों में भी मिलता है। उन्होंने यह देखा था कि जब अम्बर (amber) को रगड़ा जाता है तो उसमें हल्की वस्तुओं को अपनी ओर आकर्षित करने का गुण आ जाता है। विद्युत के अंग्रेजी शब्द इलेक्ट्रिसिटी (electricity) की व्युत्पत्ति यूनानी शब्द इलेक्ट्रॉन से हुई है जिसका अर्थ है, अंबर। गुरुत्व बल की तरह ये बल भी उन बलों के उदाहरण हैं जो कुछ दूरी पर कार्य करते हैं।

फिर भी ये परिघटनाएं तब तक कुतूहल का विषय बनी रही, जब तक कि लगभग तीन सौ साल पहले तक विद्युत और चुंबकत्व के बारे में व्यवस्थित तरीके से अध्ययन शुरू नहीं कर दिया गया था। प्रारंभ में तो विद्युत और चुंबकत्व को बिल्कुल अलग-अलग विषय माना जाता था। जहां विद्युत में कांच की छड़, विल्ली की छाल, पिथ बॉल, बैटरी, धारा और तड़ित (lightning) के बारे में अध्ययन किया जाता था वहीं चुंबकत्व में दंड चुंबक, कम्पास सुई, लौह चूर्ण आदि के बारे में अध्ययन किया जाता था। पर धारा के चुंबकीय प्रभावों और विद्युत-चुंबकीय प्रेरण के संबंध में ओरस्टेड (Oersted) और फाराडे (Faraday) के आविष्कारों ने इनके अध्ययन में बिल्कुल ही एक नया मोड़ दे दिया। इन विकासों और आविष्कारों का परिष्कृत रूप मैक्सवेल (Maxwell) के शोध कार्य में उभर कर सामने आया जिसने यह स्पष्ट रूप से स्थापित किया था कि न केवल विद्युत और चुंबकत्व बल्कि समान बल के दो पहलू अर्थात् प्रकाश भी विद्युत-चुंबकीय परिघटनाओं की ही एक अभिव्यक्ति है। शायद ही पहले कभी ऐसी वैज्ञानिक उपलब्धि हुई हो जिसका इतना विशाल और दूरगामी परिणाम प्राप्त हुआ हो। हम सभी बिजली के अनेक उपकरणों और मशीनरी से परिचित हैं जिन पर कि अब हम निर्भर रहने लगे हैं। बिजली के उपयोग और विद्युत संचार के विकास ने हमारी जीवनशैली में इतना अधिक परिवर्तन ला दिया है जिसकी कल्पना सौ वर्ष पहले किसी ने नहीं की होगी। विज्ञान की दृष्टि से यदि देखें, तो विद्युत-चुंबकत्व के मैक्सवेल एकीकरण के बाद जो परमाण्वीय और न्यूक्लीय भौतिकी के विकास हुए हैं उनसे पता चलता है कि परमाणुओं तथा अधिक छोटे मूल कणों (elementary particles) की आधारभूत क्रियाविधि (basic mechanism) विद्युत-चुंबकीय बलों से नियंत्रित होती हैं।

“वैद्युत और चुंबकीय परिघटनाएं” के इस पाठ्यक्रम में हम विद्युत और चुंबकत्व की परिघटनाओं को अलग-अलग प्रस्तुत करेंगे और फिर दोनों के परस्पर संबंध और निकटता को विकसित और प्रदर्शित करेंगे।

यह स्नातक डिग्री कार्यक्रम के विद्यार्थियों के लिए भौतिकी में 4 क्रेडिट का वैकल्पिक पाठ्यक्रम है। यह पाठ्यक्रम उन विद्यार्थियों के लिए है, जिन्होंने 10+2 स्तर तक के भौतिकी पाठ्यक्रम को पढ़ा हो। इस पाठ्यक्रम का अध्ययन करने के लिए विद्यार्थी को चाहिए कि वह कोई गणित पाठ्यक्रम का भी अध्ययन करे जिसमें कैलकुलस (Calculus) का पाठ्यक्रम शामिल हो।

पूरा पाठ्यक्रम चार खंडों में बंटा है :

- 1) निर्वात में स्थिरविद्युतिकी
- 2) माध्यम में स्थिरविद्युतिकी: इसमें विद्युत क्षेत्र में द्रव्य के व्यवहार और धारिता की संकल्पना का अध्ययन किया गया है।
- 3) विद्युत धारा और चुंबकीय क्षेत्र
- 4) विद्युत-चुंबकत्व

प्रत्येक इकाई/खंड को अलग-अलग लेखकों ने लिखा है जो कि विषयों के अनुसार उनके प्रस्तुतिकरण के लिए कोई भी लेखन शैली अपनाने के लिए स्वतंत्र रहे हैं। साथ ही प्रत्येक इकाई में संकल्पना को भौतिक दृष्टि से समझाने पर अधिक बल दिया गया है। प्रारंभ में हमने पिछली कक्षाओं में पढ़ाई गई बातों का संक्षेप में विवरण दे दिया है जिससे कि विद्यार्थी अपने ज्ञान को फिर से ताजा कर लें तथा उनमें गणितीय विश्वास पैदा हो जाए। हमने सदृशों और कैलकुलस को अलग-अलग भागों में प्रस्तुत नहीं किया है, बल्कि जहां कहीं भी आवश्यक समझा गया है, भाषांश के साथ ही दे दिया है। महत्वपूर्ण सूत्रों और समीकरणों को चारों ओर घेर कर उन्हें प्रस्तुत किया गया है। प्रत्येक इकाई के अंत में बोध प्रश्नों (self assessment question) और अंत के प्रश्नों (terminal question) के उत्तर दिए गए हैं।

इकाई के एक भाग को पढ़ लेने के बाद आप स्वयं से प्रश्न करें – कि मैंने कितना सीखा है ? सभी बोध प्रश्नों को हल करें। किसी भी प्रश्न को न छोड़ें क्योंकि इन प्रश्नों को हल करने से ही यह पता चलेगा कि आप विषय को कितना समझ पाए हैं। परन्तु, बोध प्रश्नों और अंत के प्रश्नों को हल करने के दौरान आप इकाई के अंत में दिए गए उत्तर को देखने का लालच कभी न करें।

दुर्भाग्यवश अपने इस व्याख्यानों में हमने ऐतिहासिक और प्रायोगिक विकास की ओर विशेष ध्यान नहीं दिया है। इस कमी को आप विद्युत और चुंबकत्व की किसी भी पाठ्य-पुस्तक को पढ़कर पूरा कर सकते हैं। इन पुस्तकों को पढ़ने से आपको विषय के बारे में और भी जानकारी प्राप्त होगी और इस तरह विषय में आपकी रुचि बनी रहेगी।

खंड 1 निर्वात में स्थिरविद्युतिकी

पाठ्यक्रम के प्रथम खंड में स्थिरविद्युतिकी का आधारभूत परिचय दिया गया है। इसमें कूलॉम नियम तथा विद्युत क्षेत्र और विभव की आधारभूत संकल्पनाओं के बारे में चर्चा की गई है। आप इन संकल्पनाओं के बारे में पहले से ही परिचित हैं। अतः सही माने में पिछली कक्षाओं में विज्ञान के पाठ्यक्रम में जो कुछ पढ़ा है उसी को फिर से दोहराया गया है। अंतर केवल यही है कि इन संकल्पनाओं के अध्ययन में सदिश संकेतन (vector notation) का प्रयोग काफी करेंगे। इकाई 1 में आप विद्युत आवेश, कूलॉम नियम, अध्यारोपण नियम और विद्युत क्षेत्र के बारे में अध्ययन करेंगे।

इकाई 2 में वैद्युत अभिवाह (electric flux) की संकल्पना से आपको परिचित कराया गया है। इसकी सहायता से कूलॉम नियम को गाउस नियम के रूप में एक अति सुगम ढंग से प्रस्तुत किया जाता है और साथ ही विद्युत क्षेत्र के लिए क्षेत्र समीकरण प्राप्त हो जाते हैं। क्षेत्र समीकरणों से ही, जो कि आंशिक अवकल समीकरण है, विद्युत-चुंबकीय सिद्धांत के मुख्य परिणाम निगमित किए जा सकते हैं। गाउस नियम की सहायता से हम उन ओवश वितरणों के विद्युत क्षेत्र परिकलित कर सकते हैं जिनमें कुछ सरल सममिति (symmetry) होती है जैसे गोलीय सममित या बेलन सममित ओवश वितरणों से उत्पन्न क्षेत्र। इन प्रश्नों को यदि सीधे कूलॉम नियम लागू करके हल करते हैं तो इन्हें हल करने में काफी कठिनाई होती है।

इकाई 3 में हम इस बात का अध्ययन करेंगे कि किस प्रकार विद्युत क्षेत्र के विशेष गुणधर्म का उपयोग सदिश प्रश्न (विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना) को अधिक सरल अदिश प्रश्न (विद्युत विभव ज्ञात करना) में परिवर्तित करने में होता है। प्रारंभ में, आवेशों से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र में किसी आवेश को दिक् (space) में एक विशेष स्थिति तक लाने के लिए आवश्यक कार्य की मात्रा की संकल्पना पर विचार करेंगे। विभव की सहायता से विद्युत क्षेत्र का परिकलन विशेषकर द्विध्रुव और चतुर्ध्रुव द्वारा उत्पन्न विद्युत क्षेत्र का परिकलन किया जाता—इसकी भी चर्चा की गई है। इसी इकाई में ध्रुवी निर्देशांक पर एक परिशिष्ट भी दिया गया है। अपने ज्ञान को समृद्ध बनाने के लिए आप इसे पढ़ना चाह सकते हैं। हां, इस पर कोई प्रश्न आपसे नहीं पूछे जाएंगे।

अंत में अर्थात्, इकाई 4 में सतत आवेश वितरण से उत्पन्न विभव के बारे में बताया गया है। इस इकाई में समविभव पृष्ठ की संकल्पना से आपको परिचित कराया गया है। यहां हमने स्थितिज ऊर्जा के बारे में भी कुछ चर्चा की है। क्योंकि अधिकांश विद्यार्थियों ने 'यांत्रिकी' पाठ्यक्रम पढ़ा हुआ होगा इसलिए वे स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना से परिचित होंगे। अतः यहां स्थितिज ऊर्जा की चर्चा को समीक्षा के रूप में दिया गया है। ऊपर बतायी गई बातों से यह स्थापित किया गया है कि विद्युत क्षेत्र का स्वरूप संरक्षी (conservative) होता है। हमने पूरे पाठ में अनेक आंकिक उदाहरण दिए हैं जिन्हें समझ लेने पर भौतिक प्रश्नों को हल करने के लिए गणितीय विधि आसानी से लागू कर सकते हैं।

सभी इकाइयां समान लंबाई की नहीं हैं। प्रत्येक इकाई को पढ़ने में औसतन आपको कितना समय देना चाहिए उसका विवरण यहां हम दे रहे हैं : इकाई 1 के लिए 4 घंटे, इकाई 2 के लिए 5 घंटे, इकाई 3 के लिए 7 घंटे और इकाई 4 के लिए 5 घंटे। पर सही मानों में प्रत्येक इकाई पर आपको कितना समय देना चाहिए यह इस बात पर निर्भर करता है कि आपकी पृष्ठभूमि कैसी रही है। उदाहरण के लिए, यदि आपने बारहवीं कक्षा हाल ही में उत्तीर्ण की है, तो इन इकाइयों में प्रयुक्त गणित विशेष रूप से कैलकुलस को आप आसानी से समझ सकते हैं। पर, यदि आपने बारहवीं कक्षा कुछ वर्ष पहले उत्तीर्ण की है, तो कैलकुलस के ज्ञान को ताजा करने के लिए या तो आप "इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय" के "कैलकुलस" पर पाठ्यक्रम एम टी.ई.-01 का अध्ययन कर सकते हैं या एन.सी.ई.आर.टी. के गणित की पुस्तकों को पढ़ सकते हैं। ये सभी सामग्री आपको अपने अध्ययन केन्द्र में मिल जायेगी।

इस पाठ में प्रयुक्त कुछ संक्षेप रूप ये हैं : चित्र x. y का अर्थ है इकाई x का yवां चित्र, चित्र 2.3 का अर्थ है इकाई 2 का तीसरा चित्र। इसी प्रकार भाग 3.1 का अर्थ है इकाई 3 का पहला भाग और समीकरण 4.8 का अर्थ है, इकाई 4 का आठवां समीकरण।

आभार

सभी इकाइयों पर अपनी टिप्पणी देने के लिए प्रो. आर. एन. माथुर, डा. विजयश्री और श्री एस. एस. डूबे के हम आभारी हैं। शब्द संसाधन और टाइपिंग सहायता में सक्रिय योगदान के लिए श्री लक्ष्मण सिंह अन्यवाद के पात्र हैं।

इकाई 1 विद्युत आवेश, बल और क्षेत्र

इकाई की रूपरेखा

- 1.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 1.2 विद्युत आवेश के गुणधर्म
आवेश के प्रकार
आवेश का मात्रक
आवेश का संरक्षण
आवेश का क्वांटिकरण
- 1.3 कूलॉम का नियम
- 1.4 अध्यारोपण नियम
- 1.5 विद्युत क्षेत्र
विद्युत क्षेत्र का परिकल्पन
वैद्युत बल रेखाएं
- 1.6 तारांश
- 1.7 अंत में कुछ प्रश्न
- 1.8 हल और उत्तर
- 1.9 शब्दावली

1.1 प्रस्तावना

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि जब गर्मी अधिक होती है और साथ में उमस भी काफी होती है, तब बिजली की चमक और बादल के गरजने के साथ प्रायः वर्षा होने लगती है। क्या आप जानते हैं कि बिजली क्यों चमकने लगती है और क्यों बादल गरजने लगते हैं? बेन्जामिन फ्रैंक्लिन ही वह पहला व्यक्ति था जिसने प्रयोग करके यह सिद्ध किया था कि गरजते हुए बादलों में विद्युत आवेश होता है। जब ये आवेशित बादल वायुमंडल में विसर्जित होते हैं तब एक बहुत बड़ी चिनगारी निकलती है। इसी चिनगारी को तड़ित (lightning) अर्थात् बिजली कहा जाता है। क्या आप यह सोच सकते हैं कि बादल के विसर्जन के दौरान विद्युत धारा की मात्रा लगभग 20,000 एम्पीयर होती है !

जब विद्युत विसर्जन (electric discharge) के कारण बिजली चमकती है तब काफी मात्रा में गर्मी पैदा होती है। यहां तक कि सैंकड के दस लाखवें भाग में ही तापमान बढ़कर 15000°C हो जाता है जो कि सूर्य के तापमान के लगभग ढाई गुना होता है। बिजली की चमक लगभग 20 सेमी चौड़े क्षेत्र में होती है। इस क्षेत्र में बहुत अधिक गर्मी पैदा हो जाने के कारण हवा के अणु बहुत तेजी से गति करने लगते हैं जिसकी वजह से आवाज पैदा होती है। इस आवाज को ही गरज (thunder) कहा जाता है। जब यह आवाज बादलों, पहाड़ों या किसी अन्य अवरोध से परावर्तित होती है तब आपको बादलों का गर्जन सुनाई पड़ता है।

प्रकृति की इस मनमोहक घटना में, जिसने अधिकांश प्राचीन विद्वानों का ध्यान अपनी ओर आकर्षित किया है, आवेशन (charging) और विसर्जन (discharging) की परिघटनाएं (phenomena) होती रहती हैं। विद्युत आवेशों के संबंध में विशेष ध्यान देने वाली बात यह है कि इन आवेशों के बीच लगने वाला बल काफी अधिक होता है। इस बल को स्थिर वैद्युत बल (electrostatic force) कहा जाता है। परमाणुओं में इलेक्ट्रॉनों का नाभिकों से बंधे रहना इसी बल के कारण है तथा इसी बल के कारण ही कई परमाणु एक साथ बंध कर अणु, ठोस और द्रव बनाते हैं। इस इकाई में आप आवेशों की प्रकृति और इनके बीच लगने वाले स्थिर वैद्युत बल के बारे में अध्ययन करेंगे। प्रत्येक आवेशित पिंड के चारों ओर एक ऐसा क्षेत्र होता है जहां विद्युत बल की उपस्थिति का आभास है। इस क्षेत्र को विद्युत क्षेत्र कहा जाता है। इस इकाई में आप विभिन्न आवेश विन्यास (charge configuration) से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र को परिकल्पित करना सीखेंगे। अगली इकाई में विभिन्न आवेश वितरणों (charge distribution) से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए एक अधिक आसान और उत्तम विधि का अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

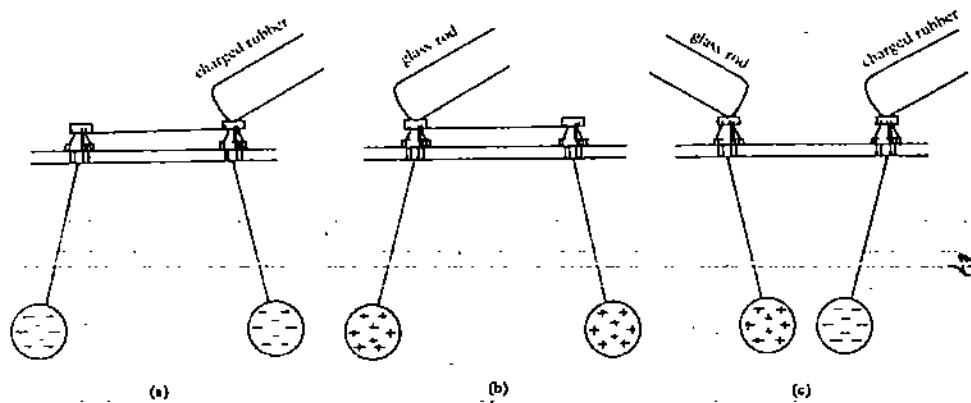
- दो प्रकार के विद्युत आवेशों में भेद कर सकेंगे,
- यह दिखा सकेंगे कि एक विलगित तंत्र में संपूर्ण विद्युत आवेश संरक्षित होता है,
- यह निष्कर्ष निकाल सकेंगे कि कोई भी आवेश सदा ही इलेक्ट्रॉन के आवेश का एक पूर्णांक गुणज (integral multiple) होता है,
- दो आवेशों के बीच स्थिर विद्युत बल ज्ञात करने के लिए कूलॉम नियम इस्तेमाल कर सकेंगे,
- बलों के अध्यारोपण नियम का कथन दे सकेंगे और दो से अधिक आवेशों से उत्पन्न परिणामी बल ज्ञात कर सकेंगे,
- किसी भी आवेश वितरण से उत्पन्न परिणामी विद्युत क्षेत्र ज्ञात कर सकेंगे,
- वैद्युत बल रेखाओं को खींच सकेंगे ।

1.2 विद्युत आवेश के गुणधर्म

अंग्रेजी शब्द 'electricity' (विद्युत) या 'electric' (विद्युत) की व्युत्पत्ति यूनानी शब्द 'elektron' से हुई है जिसका अर्थ है "अंबर" । लगभग 600 ई.पू. में यूनानी दार्शनिक थेल्स (Thales) ने यह पता लगाया कि जब अंबर (एक प्राकृतिक रेजिन) को एक फर से रगड़ा जाता है, तब अंबर द्रव्य के छोटे-छोटे कणों को अपनी ओर खींचने की शक्ति रखता है । 1600 ई. तक इस आविष्कार की ओर लोगों ने कोई विशेष ध्यान नहीं दिया, जब तक कि विलियम गिल्बर्ट ने यह नहीं दिखा दिया कि सीसा, एबोनाइट, रेजिन, आदि जैसे पदार्थों को सिल्क, फलानेल या अन्य उपयुक्त पदार्थ से रगड़ने पर उनके अंदर वही गुणधर्म आ जाता है जो कि फर से अंबर को रगड़ने पर उसके अंदर आ जाता है । ऐसी स्थिति में इन पदार्थों को विद्युतीकृत (electrified) या विद्युत आवेशित कहा जाता है, या इन्हें केवल आवेशित पिंड (charged bodies) कह दिया जाता है । इस भाग में उन बातों को ही जल्दी से दोहराएंगे जिन्हें आप अपने विद्यालय में पढ़ चुके हैं ।

1.2.1 आवेश के प्रकार

मान लीजिए कुछ दूरी पर स्थित धातु के आलंबों (supports) से बंधे धातु के तार से दो पिथ बॉल लटके हैं । एक अन्य धातु का तार इन दो आलंबों को जोड़ता है । रबड़ का एक टुकड़ा लेकर काँच की छड़ से इसे रगड़ दें जिससे कि दोनों आवेशित हो जाएं । जब आवेशित रबड़ को धातु के आलंब से स्पर्श कराया जाता है तो आवेश पिथ बॉलों पर स्वयं वितरित हो जाता है । परिणाम यह होता है कि बॉल एक दूसरे से दूर होने लगते हैं जैसा कि चित्र 1.1 क में दिखाया गया है । इसके बाद जब आवेशित कांच की छड़ को धातु के आलंब से स्पर्श कराया जाता है तो इस स्थिति में भी बॉल एक दूसरे से दूर होने लगते हैं । जैसा कि चित्र 1.1 ख में दिखाया गया है । पर, जब पिथ बॉलों के बीच के धातु संबंधन को हटा लिया जाए, जैसा कि चित्र 1.1 ग में दिखाया गया है और तब यदि एक आलंब को आवेशित कांच की छड़ से स्पर्श कराया जाए और दूसरे आलंब को आवेशित रबड़ से स्पर्श कराया जाए, तो दोनों बॉल एक दूसरे के निकट आने लगते हैं ।

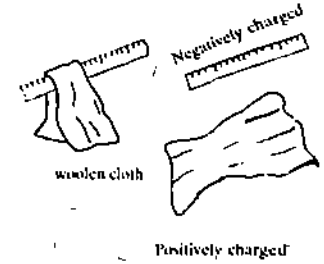


चित्र 1.1 : सजातीय आवेशों के प्रतिकर्षण और विजातीय आवेशों के आकर्षण को प्रदर्शित करने वाला प्रयोग । (क) आवेशित रबड़ को धातु के आलंब से स्पर्श कराने पर दो बॉलों के बीच उत्पन्न प्रतिकर्षण (ख) आवेशित कांच की छड़ को धातु के आलंब से स्पर्श कराने पर दो बॉलों के बीच उत्पन्न प्रतिकर्षण । (क) और (ख) में धातु का एक तार दोनों आलंबों को जोड़ता है । (ग) जब पिथ बॉलों के बीच के धातु संबंधन को हटा लिया जाता है और जब एक को आवेशित रबर से तथा दूसरे को आवेशित कांच की छड़ से स्पर्श कराया जाता है, तब दो बॉलों के बीच उत्पन्न आकर्षण ।

इन प्रेक्षणों (observations) से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं ? स्थिति (क) में दोनों बॉलों में समान प्रकार के आवेश आ जाते हैं और दोनों एक दूसरे से दूर होने लगते हैं। स्थिति (ख) में भी दोनों बॉलों में समान प्रकार के आवेश आ जाते हैं और दोनों एक दूसरे से दूर होने लगते हैं। स्थिति (ग) में दोनों बॉलों में समान प्रकार के आवेश नहीं हैं, क्योंकि यदि समान प्रकार के आवेश होते, तो वे एक दूसरे को प्रतिकर्षित (repel) करते जैसा स्थिति (क) और (ख) में हुआ है। इससे यह अर्थ निकलता है कि आलंब से लटक रहे बॉल को कांच की छड़ से स्पर्श कराने पर जो आवेश उस पर आता है, वह उस आवेश से भिन्न है जो कि आलंब से लटकते दूसरे बॉल पर आता है जिसे रबड़ से स्पर्श कराया गया है। दूसरे शब्दों में हम कहते हैं कि केवल दो प्रकार के विद्युत आवेश होते हैं। समान प्रकार के आवेश वाले पिंड एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं जबकि भिन्न प्रकार के आवेश वाले पिंड एक दूसरे को आकर्षित करते हैं। इन दो प्रकार के आवेशों के उद्गम का विवरण हम नीचे दे रहे हैं।

पिछली कक्षाओं में आप सभी यह पढ़ चुके हैं कि एक परमाणु (atom) में धन आवेशित न्यूक्लियस होता है जिसके चारों ओर ऋण आवेशित इलेक्ट्रॉन घूमते हैं। न्यूक्लियस में प्रोटॉन और न्यूट्रॉन होते हैं। न्यूट्रॉन अनावेशित (neutral) होते हैं जबकि इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन पर आवेश समान पर विपरीत क्रमशः ऋणात्मक और धनात्मक होते हैं। क्योंकि प्रोटॉन और न्यूट्रॉन न्यूक्लियस में होते हैं, इसलिए ये न्यूक्लीय बल से एक दूसरे से कस कर बंधे रहते हैं। यह बल इतना प्रबल होता है कि प्रोटॉन परमाणु के न्यूक्लियस से बाहर नहीं निकल पाते। जबकि इसके विपरीत, इलेक्ट्रॉनों को परमाणु के न्यूक्लियस से बांधे रखने वाला बल इतना अधिक दुर्बल होता है कि प्रोटॉन की तुलना में इलेक्ट्रॉन परमाणु में से हटने के लिए अधिक स्वतंत्र होते हैं।

जब दो अलग-अलग पदार्थों को एक दूसरे के संपर्क में लाकर रगड़ा जाता है तब इलेक्ट्रॉन अधिक स्वतंत्र होने के कारण एक पदार्थ से दूसरे पदार्थ में स्थानांतरित हो जाते हैं। और, क्योंकि कुछ पदार्थों की प्रवृत्ति अन्य पदार्थों की अपेक्षा अपने इलेक्ट्रॉनों को अधिक मजबूती से पकड़े रहने की होती है, इसलिए इलेक्ट्रॉनों की स्थानांतरण की दिशा संबंधित पदार्थ पर निर्भर करती है और यह सदा किन्हीं दो पदार्थों के लिए समान होती है। उदाहरण के लिए जब प्लास्टिक के स्केल को ऊनी कपड़े से रगड़ा जाता है, जैसा कि चित्र 1.2 में दिखाया गया है, तब इलेक्ट्रॉन ऊनी कपड़े से प्लास्टिक की ओर प्रवाहित होते हैं। इस प्रक्रम के दौरान प्लास्टिक पर इलेक्ट्रॉन अधिक हो जाते हैं जिससे कि वह अर्थात् प्लास्टिक ऋण आवेशित हो जाता है, जबकि इलेक्ट्रॉन की कुछ कमी हो जाने के कारण ऊनी कपड़ा समान मात्रा में धन आवेशित हो जाता है। इसी प्रकार अम्बर, एबोनाइट या रबड़ के छड़ को ऊन या फर से रगड़ने पर ये ऋण आवेशित हो जाते हैं, जबकि ऊन या फर धन आवेशित हो जाते हैं। एक दूसरे से रगड़ कर पिण्डों को आवेशित करने की इस विधि को घर्षण द्वारा आवेशन (charging by friction) कहा जाता है, हालांकि सही माने में आवेशन प्रक्रम में घर्षण का कोई योगदान नहीं होता। सारणी 1.1 में घर्षण विद्युत अनुक्रम (triboelectric series) के कुछ पदार्थ के नाम दिए गए हैं जिन्हें उनके द्वारा इलेक्ट्रॉन त्यागने की प्रवृत्ति के अनुसार सूची में लिखा गया है। सूची में ऊपर दिए गये पदार्थों को जब सूची में नीचे दिए गए किसी भी पदार्थों के संपर्क में लाया जाता है और रगड़ा जाता है तो यह पदार्थ (ऊपर दिये गये) धन आवेशित हो जाते हैं।



चित्र 1.2 : घर्षण द्वारा आवेशन। जब प्लास्टिक के एक छड़ को एक ऊनी कपड़े से रगड़ा जाता है, तो इलेक्ट्रॉन, ऊन से प्लास्टिक की ओर प्रवाहित होते हैं। इस प्रक्रम से प्लास्टिक पर अधिक इलेक्ट्रॉन हो जाते हैं जिससे यह ऋण आवेशित हो जाता है, जबकि इलेक्ट्रॉन की कुछ कमी हो जाने के कारण ऊनी कपड़ा समान मात्रा में धन आवेशित हो जाता है।

सारणी 1.1

खरगोश की फर (rabbits fur)
कांच
ऊन
विल्ली की फर
सिल्क
नयथा
ठई
तकड़ी
कमक
रबड़
तेलुसाइट

घर्षण विद्युत अनुक्रम :

बोध प्रश्न 1

दो आवेशित पिंड X और Y जो एक दूसरे को आकर्षित करते हैं। X एक तीसरे आवेशित पिंड Z को प्रतिकर्षित करता है। क्या Y को Z आकर्षित करेगा या प्रतिकर्षित ?

1.2.2 आवेश का मात्रक

अंतर्राष्ट्रीय मानक (SI) प्रणाली में, आवेश का मात्रक कूलॉम्ब (संक्षेप में C) होता है जिसे एम्पीयर की

सहायता से परिभाषित किया जाता है। आप सभी नीचे दी गई एम्पीयर की परिभाषा से अवश्य परिचित होंगे:

“एक एम्पीयर, वह धारा है जिसे निर्वात में एक मीटर की दूरी पर रखे दो सीधे समांतर तारों में बनाए रखने पर इन तारों के बीच $2 \times 10^{-7} \text{ N}$ प्रति मीटर लंबाई के बराबर बल उत्पन्न होता है।”

एम्पीयर की परिभाषा में धाराओं के बीच के बल का उल्लेख किया गया है इस विषय पर हम चर्चा खंड 3 में करेंगे।

एम्पीयर की सहायता से आवेश के मात्रक की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है।

“एक कूलॉम, आवेश की वह मात्रा है जो कि तार के किसी भी अनुप्रस्थ परिच्छेद (cross-section) में एक सेकंड में प्रवाहित होती है जबकि तार में एक एम्पीयर की अपरिवर्ती धारा (steady current) प्रवाहित हो रही हो।” प्रतीकों में

$$q = It \quad (1.1)$$

जहां q कूलॉम में है, जबकि I एम्पीयर में है और t सेकंड में है।

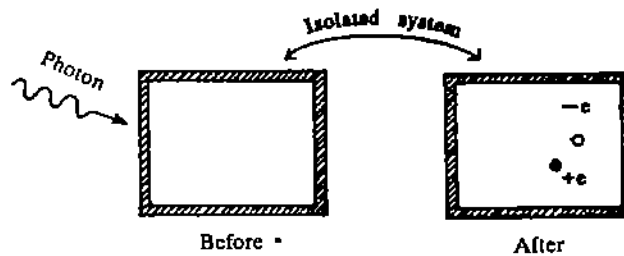
कूलॉम को एम्पीयर के रूप में परिभाषित करने का कारण यह है कि आवेश की मात्रा के अपेक्षा एक चालक में प्रवाहित धारा को बनाए रखना, नियंत्रित करना और मापना सरल होता है।

1.2.3 आवेश का संरक्षण

जैसा कि चित्र 1.2 में दिखाया गया है, जब एक ऊनी कपड़े से प्लास्टिक के स्केल को रगड़ते हैं, तब कोई नया आवेश उत्पन्न नहीं होता। इस स्थिति में नेट आवेश अर्थात् अलग-अलग आवेशों का बीजीय योगफल (algebraic sum) सदा ही अचर बना रहता है। आइए देखें कि ऐसे कैसे होता है? रगड़ने के पहले प्लास्टिक और ऊनी कपड़ा दोनों ही उदासीन (neutral) (आवेश रहित) होते हैं। अतः नेट आवेश शून्य है। रगड़ने पर प्लास्टिक का स्केल ऋण आवेशित और ऊनी कपड़ा समान मात्रा में धन आवेशित हो जाता है। अब, क्योंकि प्लास्टिक के स्केल और ऊनी कपड़े पर आवेश का बीजीय योगफल शून्य है, इसलिए नेट आवेश फिर से शून्य हो जाएगा।

इससे यह स्पष्ट है कि विद्युत आवेश एक संरक्षित राशि (conserved quantity) है। आवेश संरक्षण (conservation of charge) का अर्थ है कि एक विलगित तंत्र (isolated system) के संपूर्ण आवेश में कोई परिवर्तन नहीं होता। इसका अर्थ यह नहीं है कि एक तंत्र में धन या ऋण आवेश की कुल मात्रा नियत रहती है, बल्कि इसका अर्थ यह है कि उत्पन्न हुए प्रत्येक अतिरिक्त धन आवेश के संगत सदा ही समान मात्रा में ऋण आवेश उत्पन्न होता है। विद्युत आवेश संरक्षण का एक सुंदर उदाहरण “युगल उत्पादन” (pair production) नामक प्रक्रम द्वारा प्रदर्शित होता है, जैसा कि चित्र 1.3 में दिखाया गया है।

यहां विलगित तंत्र (Isolated system) का अर्थ यह है कि कोई भी पदार्थ तंत्र की परिधीमा से आर पार नहीं जा सकता है।



चित्र 1.3 : आवेश संरक्षण को प्रदर्शित करने वाला “युगल उत्पादन”। इस प्रक्रम में एक गामा किरण फोटॉन एक इलेक्ट्रॉन जो ऋण आवेशित होता है और जिसे $-e$ से प्रकट किया जाता है और एक पाजिट्रॉन (एक कण जिसकी संरक्ति ही होती है जो इलेक्ट्रॉन की है, पर जिसका आवेश $+e$ होती है) में रूपांतरित हो जाता है।

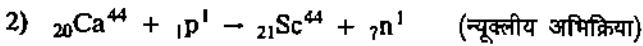
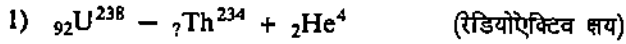
यहां, निर्वात में रखे पतली दीवार वाला बक्सा एक विलगित तंत्र है। जब इस बक्से को, एक गामा किरण फोटॉन (जिसमें कोई आवेश नहीं होता है) के सामने रखा जाता है, तब हमें बक्से के अंदर एक इलेक्ट्रॉन और पाजिट्रॉन (एक कण जिसकी संरक्ति वही होती है जो कि इलेक्ट्रॉन की होती है पर जिस पर आवेश इलेक्ट्रॉन के आवेश के बराबर और विपरीत होता है) प्राप्त होता है। हालांकि दो नए-नए विद्युत आवेशित कण उत्पन्न हुए हैं, पर बक्से के अंदर संपूर्ण आवेश में नेट परिवर्तन शून्य होता है।

आवेश संरक्षण नियम (charge conservation law) के कथन को इस प्रकार दिया जा सकता है :

एक विलगित तंत्र के संपूर्ण विद्युत आवेश में अर्थात् किसी भी समय विद्यमान धन और ऋण आवेश के बीजीय योगफल में कभी भी कोई परिवर्तन नहीं होता है।

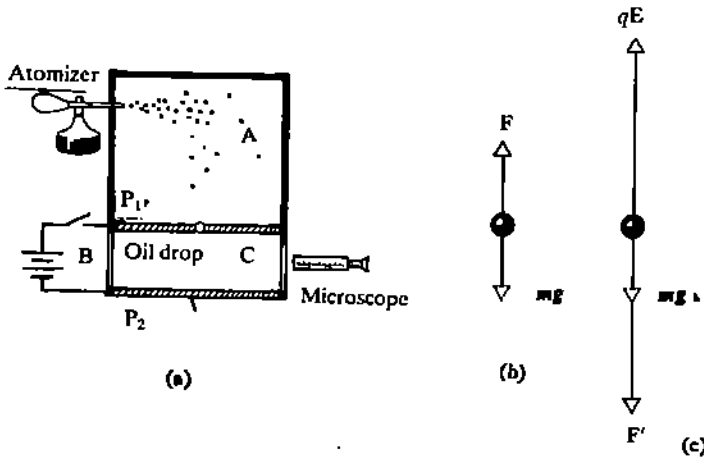
बोध प्रश्न 2

आवेश संरक्षण नियम की सहायता से निम्नलिखित समीकरणों को पूरा कीजिए। इन समीकरणों को लिखने की संकेतन पद्धति यह है : ${}_Z X^A$ जहां X तत्व के रासायनिक प्रतीक (chemical symbol) को निरूपित करता है, Z परमाणु संख्या (इलेक्ट्रॉनों की संख्या है) और A संहति संख्या (mass number) (प्रोटॉनों की संख्या + न्यूट्रॉनों की संख्या) को निरूपित करता है।



1.2.4 आवेश का क्वान्टीकरण (Quantization of charge)

प्रकृति में प्राप्त होने वाला छोटा से छोटा संभव आवेश, इलेक्ट्रॉन या प्रोटॉन का आवेश होता है। (इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन दोनों में आवेश का परिणाम समान होता है, पर इलेक्ट्रॉन ऋण आवेशित होता है जबकि प्रोटॉन धन आवेशित होता है)। इस आवेश के परिमाण को 'e' से प्रकट किया जाता है। इसे पहले पहल मिलिकां (Millikan) ने गुरुत्व क्षेत्र तथा बाहर से आरोपित किए गए विद्युत क्षेत्र के संयोजित प्रभाव के अधीन एक आवेशित तेल बूंद (oil drop) की गति का प्रेक्षण करके अपने सुप्रसिद्ध "तेल बूंद प्रयोग" (oil drop experiment) में मापा था। चित्र 1.4 (क) में मापन उपकरण दिखाया गया है।



चित्र 1.4

कणित्र (atomizer) द्वारा कक्ष A में डाली गई तेल की बूंदें या तो धन आवेशित होती हैं या ऋण आवेशित। आइए हम कक्ष (chamber) में एक बूंद लें जो कि प्लेट P_1 में बने एक छोटे छिद्र के जरिए अंदर आयी है। विद्युत क्षेत्र के न होने पर बूंद पर दो बल कार्य करते हैं, बूंद का भार mg और एक उपरिमुखी श्यान बल (viscous force) F जैसा कि चित्र 1.4 (ख) में दिखाया गया है। F का परिमाण गिरती हुई बूंद की चाल के समानुपाती होता है। जब गुरुत्व बल श्यान बल से ठीक-ठीक संतुलित हो जाता है तब बूंद की एक निश्चित चाल v हो जाती है। विद्युत क्षेत्र के होने पर बूंद पर एक तीसरा बल qE कार्य करता है। यदि q ऋणात्मक हो, तो यह बल उपरिमुखी कार्य करेगा और बूंद ऊपर की ओर जाएगी। नया कर्षण बल (drag force) नीचे की ओर कार्य करेगा क्योंकि इसे बूंद की गति की विपरीत दिशा में कार्य करना है। जैसा कि चित्र 1.4 (ग) में दिखाया गया है, जब उपरिमुखी विद्युत बल qE , भार mg और नए कर्षण बल F' से ठीक-ठीक संतुलित हो जाता है, तब बूंद की एक नई निश्चित चाल v' हो जाती है। v और v' ज्ञात कर लेने पर आवेश q का मान प्राप्त हो जाता है। मिलिकां ने अनेक बूंदों के वेगों का प्रेक्षण लेने पर यह पाया कि अलग-अलग बूंदों के आवेश, एक न्यूनतम आवेश के गुणज हैं। इस आवेश का मान $1.2 \times 10^{-19} \text{C}$ है जिसे इलेक्ट्रॉनिक आवेश भी कहते हैं। वास्तव में e से कम आवेश प्राप्त नहीं हुआ है (क्वार्क (quark) पर दी गयी टिप्पणी देखिए)। यदि किसी आवेशित वस्तु जैसे आवेशित गोला या आवेशित बूंद या आवेशित कण जैसे पाजिट्रॉन, α -कण या किसी आयन पर आवेश की मात्रा ज्ञात करें तो इसका मान सदा ही e का एक पूर्णांक गुणज (integral multiple) अर्थात् $e, 2e, 3e, 4e, \dots$ प्राप्त होता है। कोई भी आवेश, e का भिन्नात्मक गुणज जैसे $0.7e$ या $2.5e$ नहीं होगा। यह बात केवल ऋण आवेशों पर ही लागू नहीं होती है, बल्कि धन आवेशों पर भी लागू होती है। गणितीय रूप में इसे इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं।

$$q = ne \quad (1.2)$$

जहाँ n एक धन या ऋण पूर्णांक है। इस तरह, आवेश विविक्त (discrete) पैकटों में होता है न कि सतत

क्वार्क (quark) वे आवेशित कण हैं जिन

पर विद्युत आवेश का मान $\frac{e}{3}$ के गुणज

के बराबर होता है। क्वार्क के अस्तित्व से इस बात में कोई अंतर नहीं आता है कि आवेश क्वान्टीकृत होता है - इससे केवल मूल आवेश का मान e से घटकर

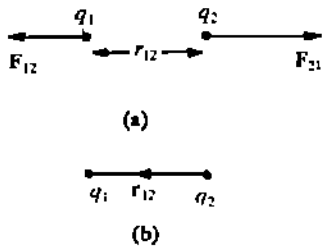
$\frac{e}{3}$ हो जाएगा।

(continuous) मात्राओं में। जब भी किसी भौतिक राशि का मान सतत न हो कर विविक्त होता है, तब उस भौतिक राशि को क्वाण्टीकृत कहा जाता है। अतः आवेश क्वाण्टीकृत (quantized) होता है।

बोध प्रश्न 3

एक चालक में 3.2×10^{-17} कूलाम धन आवेश है। इसमें कितने इलेक्ट्रॉनों की अधिकता (excess) या कमी (deficit) है ?

1.3 कूलॉम नियम



चित्र 1.5 : कूलॉम नियम से संबंधित राशियां और बल। (क) F_{12} , आवेश q_2 के कारण आवेश q_1 पर स्थिर वैद्युत बल है। आवेशों के बीच की दूरी r_{12} है। एकक सदिश \hat{r}_{12} से केवल दिशा का पता चलता है जिससे कि नियम को सदिश संकेतन पद्धति में लिखा जा सकता है। F_{21} , आवेश q_2 पर आवेश q_1 द्वारा लगाया गया बल है। (ख) \hat{r}_{12} एक सदिश है जो q_2 की स्थिति से प्रारंभ होता है और q_1 की स्थिति पर समाप्त होता है। इन दो आवेशों के बीच की दूरी इसके परिमाण को प्रकट करती है।

पिछले भाग में हम यह पढ़ चुके हैं कि सजातीय आवेश (like charges) एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं जबकि विजातीय आवेश (unlike charges) एक दूसरे को आकर्षित करते हैं। विरामावस्था में दो बिंदु आवेशों के बीच के आकर्षण या प्रतिकर्षण स्थिरवैद्युत बल का मात्रात्मक अध्ययन सबसे पहले सन् 1785 में फ्रांसिसी भौतिकीविद् चार्ल्स आगस्टिन कूलॉम ने किया। अध्ययन करने पर उन्होंने यह देखा कि स्थिरवैद्युत बल, आवेशों के परिमाण पर निर्भर करते हैं। विशेष रूप से यह बल, आवेशों के गुणनफल के समानुपाती होता है। यह बल, आवेशों के बीच के दूरी (separation) पर भी निर्भर करता है। यह आवेशों के बीच के दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती (inversely proportional) होता है। यहां आवेशों के बीच की दूरी उनकी विमाओं (dimensions) की तुलना में काफी अधिक है, इसलिए इन आवेशों को बिंदु आवेश माना जा रहा है।

इसे गणितीय रूप में व्यक्त करने के लिए मान लीजिए कि r_{12} की दूरी पर रखे दो बिंदु आवेश q_1 और q_2 हैं जैसा कि चित्र 1.5 में दिखाया गया है। कूलॉम नियम के अनुसार आवेश q_2 के कारण आवेश q_1 पर लग रहे बल F_{12} को इस रूप में लिखा जा सकता है।

$$|F_{12}| \propto \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \tag{1.3}$$

जहां $|F_{12}|$, बल F_{12} के परिमाण को निरूपित करता है और r_{12} बिंदु आवेशों के बीच की दूरी को प्रकट करता है। हम समीकरण (1.3) को एक सदिश समीकरण के रूप में लिख सकते हैं क्योंकि इसमें बल, जो कि एक सदिश राशि है, अंतर्निहित है। यह दिखाने के लिए कि समीकरण का दक्षिण पक्ष (right hand side) भी एक सदिश राशि है, हम एकक सदिश \hat{r}_{12} (जिसे r_{12} कैप पढ़ा जाता है) लिख देते हैं। यह एकक सदिश इकाई परिमाण वाला सदिश होता है और इसकी दिशा आवेश 2 की स्थिति को आवेश 1 की स्थिति से मिलाने वाले सदिश की दिशा की ओर होती है। गणितीय रूप में, यदि r_{12} आवेश 2 की स्थिति से प्रारंभ होकर आवेश 1 की स्थिति पर समाप्त होने वाले सदिश को प्रकट करता हो, तब

$$\hat{r}_{12} = \frac{r_{12}}{|r_{12}|}$$

जहां $|r_{12}|$ सदिश r_{12} का परिमाण है अर्थात् आवेशों के बीच की दूरी है। इस प्रकार एकक सदिश संकेतन का उपयोग कर हम समीकरण (1.3) को इस रूप में लिखते हैं :

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \tag{1.4}$$

धन x-, y- और z-अक्षों के अनुदिश एकक सदिशों को क्रमशः \hat{i} , \hat{j} और \hat{k} से प्रकट किया जाना है।

सामान्यतः अनुक्रमानुपाती नियतांक (constant of proportionality) को $1/4\pi \epsilon_0$ के रूप में लिखा जाता है जहां ϵ_0 को निर्वात की विद्युतशीलता (permittivity of free space) कहा जाता है। SI प्रणाली में $1/4\pi \epsilon_0$ का मान $9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$ होता है। अनुक्रमानुपाती नियतांक का मान मात्रक-प्रणाली पर निर्भर करता है। प्रायः उपयोग में लाए जाने वाले एक अन्य प्रणाली CGS- प्रणाली में नियतांक को 1 के बराबर मान लिया जाता है। यहां हम CGS-प्रणाली का प्रयोग नहीं करेंगे।

बोध प्रश्न 4

बल F_{21} के लिए समीकरण (1.4) के समरूप समीकरण लिखिए।

अनुक्रमानुपाती नियतांक की महत्वपूर्ण भौतिक सार्थकता है। यदि आवेशों को भिन्न-भिन्न माध्यमों में रखा जाए तो आप देखेंगे कि सदा ही समीकरण (1.4) लागू होता है केवल अनुक्रमानुपाती नियतांक (विद्युतशीलता)

का मान भिन्न-भिन्न होता है। यह देखा गया है कि एक नियत दूरी पर स्थित दो आवेशों के बीच अधिकतम स्थिर-वैद्युत बल तब होता है जब उन दो आवेशों को निर्वात (vacuum) में रखा जाता है और जब आवेशों को किसी अन्य माध्यम में रखा जाता है, तब बल कम होने लगता है। माध्यम की विद्युतशीलता और निर्वात के विद्युतशीलता के अनुपात को परावैद्युतांक (dielectric constant) या विशिष्ट परावैद्युतता (specific inductive capacitance) कहा जाता है। वायु के लिए यह अनुपात लगभग 1.005 होता है। किसी माध्यम में दिए गए स्थिर-वैद्युत प्रयोग के लिए कूलॉम नियम को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \quad (1.5)$$

जहाँ ϵ माध्यम का परावैद्युतांक है।

आइए हम कूलॉम नियम की सहायता से एक प्रश्न हल करें।

उदाहरण 1

एक आवेश $q_1 = 5.0 \mu\text{C}$ को एक अन्य आवेश $q_2 = -12 \mu\text{C}$ से पश्चिम की ओर 30 cm की दूरी पर रखा गया है। धन आवेश द्वारा ऋण आवेश पर लगाया गया बल क्या होगा और ऋण आवेश के कारण धन आवेश पर अनुभव किया गया बल भी ज्ञात कीजिए।

हल : चित्र 1.6 देखिए। कूलॉम नियमानुसार

$$\begin{aligned} F_{21} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21} \\ &= \frac{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}) (5 \times 10^{-6} \text{C}) (-12 \times 10^{-6} \text{C})}{(0.30 \text{m})^2} \hat{i} = -6 \hat{i} \text{ N.} \end{aligned}$$

जहाँ हम \hat{r}_{21} के लिए \hat{i} लिखते हैं, क्योंकि धन आवेश q_1 से ऋण आवेश q_2 की ओर का एकक सदिश (unit vector) धनात्मक x -दिशा में होता है। ऋण चिह्न यह बताता है कि बल कि दिशा ऋणात्मक x -दिशा में है अर्थात् पश्चिम की ओर है। इसका अर्थ यह है कि दोनों आवेशों के बीच आकर्षण बल है।

ऋण आवेश के कारण धन आवेश पर उत्पन्न बल को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12} \\ &= \frac{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}) (5 \times 10^{-6} \text{C}) (-12 \times 10^{-6} \text{C})}{(0.30 \text{m})^2} (-\hat{i}) \\ &= 6 \hat{i} \text{ N} \end{aligned}$$

यहाँ एकक सदिश \hat{r}_{12} , -1 हो जाता है, क्योंकि ऋण आवेश q_2 से धन आवेश q_1 की ओर एकक सदिश ऋणात्मक x -दिशा में होता है। दो ऋण चिह्नों को गुणा करने पर धन चिह्न प्राप्त होता है इससे यह पता चलता है कि बल धनात्मक x -दिशा में अर्थात् पूर्व की ओर है अर्थात् आकर्षण बल है।

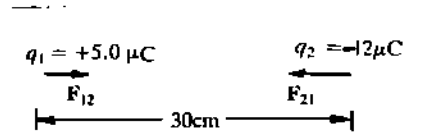
इस तरह न्यूटन का तृतीय नियम स्पष्ट रूप से संतुष्ट हो जाता है अर्थात् दो आवेश एक दूसरे पर समान किन्तु विपरीत बल लगाते हैं।

बोध प्रश्न 5

हाइड्रोजन के परमाणु में एक इलेक्ट्रॉन और एक प्रोटॉन होता है और इनके बीच की औसत दूरी $5.3 \times 10^{-11} \text{m}$ है। इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन के बीच का विद्युत बल ज्ञात कीजिए और इसकी तुलना इनके बीच कार्य कर रहे गुरुत्व बल से कीजिए। (इलेक्ट्रॉन पर आवेश $= 1.6 \times 10^{-19} \text{C}$, इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $= 9.1 \times 10^{-31} \text{kg}$, प्रोटॉन का द्रव्यमान $= 1.7 \times 10^{-27} \text{kg}$, $G = 6.7 \times 10^{-11} \text{N m}^2 \text{kg}^{-2}$, $1/4\pi\epsilon_0 = 9 \times 10^9 \text{N m}^2 \text{C}^{-2}$)

बोध प्रश्न 6

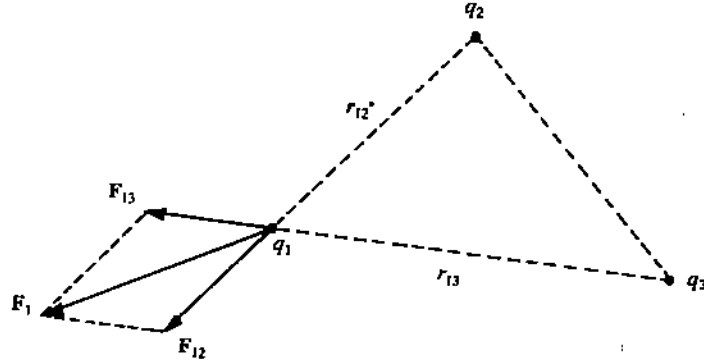
दो बिंदु आवेश Q_1 और Q_2 , 3m की दूरी पर हैं और इनका संयोजित अर्थात् कुल आवेश $20 \mu\text{C}$ है। यदि एक आवेश दूसरे आवेश को 0.075 N के बल से प्रतिकर्षित करता हो, तो दोनों आवेशों का मान ज्ञात कीजिए।



चित्र 1.6 :

1.4 अध्यारोपण नियम (Principle of superposition)

भाग 1.3 में हमने दो बिंदु आवेशों के बीच के स्थिरवैद्युत बल पर विचार किया है। मान लीजिए आवेश दो से अधिक हैं अर्थात् मान लीजिए कि तीन आवेश q_1 , q_2 और q_3 हैं, जो इस तरह रखे गए हैं जैसा कि चित्र 1.7 में दिखाया गया है।



चित्र 1.7 : अध्यारोपण नियम को प्रदर्शित करने वाला चित्र। आवेश q_1 से आवेश q_2 और आवेश q_3 क्रमशः r_{12} और r_{13} की दूरी पर हैं। F_{12} आवेश q_2 के कारण आवेश q_1 पर उत्पन्न बल है। क्योंकि q_1 और q_2 सजातीय आवेश हैं, इसलिए बल प्रतिकर्षी बल होगा और यह q_2 और q_1 को मिलाते वाली रेखा के अनुदिश q_2 से परे कार्य करेगा। इसी प्रकार q_3 के कारण q_1 पर उत्पन्न बल F_{13} , q_3 और q_1 को मिलाते वाली रेखा के अनुदिश और q_3 से परे कार्य करेगा। अध्यारोपण नियम के अनुसार q_1 पर कार्य कर रहा परिणामी बल (resultant force) F_1 , बलों F_{12} और F_{13} का सदिश योग होता है, जिसे बल-समांतरमुज खींचकर प्राप्त किया जा सकता है।

अब प्रश्न उठता है कि दो आवेशों के उपस्थिति के कारण किसी तीसरे आवेश, मान लीजिए q_1 पर लग रहा स्थिरवैद्युत बल हम किस प्रकार ज्ञात करेंगे? इस स्थिति में भी हम कूलॉम नियम को लागू कर विभिन्न आवेश युगल के बीच के बल को प्राप्त कर सकते हैं। q_1 पर लग रहा संपूर्ण बल, q_2 के कारण q_1 पर तथा q_3 के कारण q_1 पर लग रहे बलों का सदिश योग होगा। यही अध्यारोपण नियम है। इसके अनुसार किसी बिन्दु आवेश पर लग रहा बल अलग-अलग आवेशों द्वारा लगाये गये बल के सदिश योग के बराबर होता है।

अतः आवेश q_1 से क्रमशः दूरियों r_{12} और r_{13} पर आवेश q_2 और आवेश q_3 के उपस्थिति के कारण आवेश q_1 पर लग रहा संपूर्ण बल F_1 यह होगा :

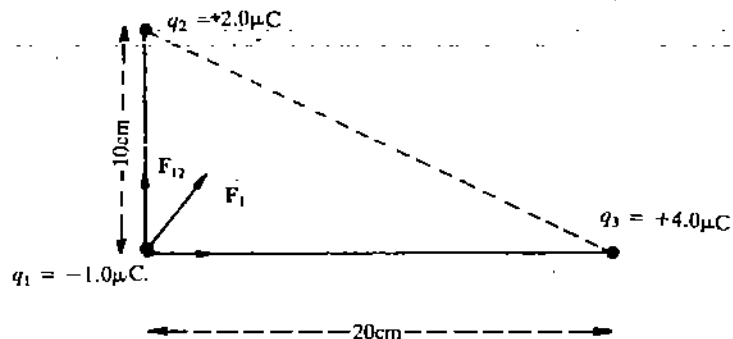
$$F_1 = F_{12} + F_{13}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} \right] \quad (1.6)$$

यहां F_{12} , q_2 के कारण q_1 पर लग रहा बल है और F_{13} , q_3 के कारण q_1 पर लग रहा बल है। एकक सदिश \hat{r}_{12} और \hat{r}_{13} की दिशाएं क्रमशः q_2 से q_1 की ओर तथा q_3 से q_1 की ओर हैं। इस नियम को और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम निम्नलिखित उदाहरण का हल प्राप्त करें।

उदाहरण 2

चित्र 1.8 में, $q_1 = -1.0\mu\text{C}$, $q_2 = 2.0\mu\text{C}$ और $q_3 = 4.0\mu\text{C}$ है। q_1 पर लग रहा स्थिरवैद्युत बल ज्ञात कीजिए, जहां $r_{12} = 10\text{cm}$ और $r_{13} = 20\text{cm}$ है। अपने उत्तर को एकक सदिश संकेतन (unit vector notation) में और परिमाण तथा दिशा (magnitude and direction) के रूप में व्यक्त करें।



चित्र 1.8 : $1.0\mu\text{C}$, $+2.0\mu\text{C}$ और $4.0\mu\text{C}$ वाले आवेश एक समकोण त्रिभुज के शीर्षों पर स्थित हैं।

हल: अध्यारोपण नियम को लागू कर इस प्रश्न को हल किया जा सकता है। आवेश q_2 के कारण आवेश q_1 पर लग रहा बल यह होगा :

$$\begin{aligned} F_{12} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12} \\ &= \frac{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2}) (-1.0 \times 10^{-6}\text{C}) (2.0 \times 10^{-6}\text{C})}{(0.10\text{m})^2} (-\hat{j}) \\ &= + 1.8\hat{j} \text{ N} \end{aligned}$$

यहां एकक सदिश \hat{r}_{12} , $(-\hat{j})$ हो जाता है, क्योंकि यह q_2 से q_1 की ओर ऋणात्मक y -दिशा में है। घन चिह्न यह बताता है कि बल F_{12} घनात्मक y -दिशा में है अर्थात् आकर्षण बल है। इसी प्रकार q_3 के कारण q_1 पर लग रहा बल यह होगा :

$$\begin{aligned} F_{13} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} \\ &= \frac{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2}) (-1.0 \times 10^{-6}\text{C}) (4.0 \times 10^{-6}\text{C})}{(0.20\text{m})^2} (-\hat{i}) \\ &= 0.90\hat{i} \text{ N} \end{aligned}$$

बल F_{13} घनात्मक x -दिशा में है अर्थात् आकर्षण बल है।

अध्यारोपण नियम के अनुसार q_1 पर कार्य कर रहा बल, q_2 और q_3 के कारण उत्पन्न बलों का सदिश योगफल होता है। अर्थात्

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{13} \\ \mathbf{F}_1 &= (0.90\hat{i} + 1.8\hat{j}) \text{ N} \end{aligned}$$

बल \mathbf{F}_1 का परिमाण यह है :

$$\sqrt{(0.90)^2 + (1.8)^2} = 2.01 \text{ N}$$

और यह घनात्मक x -अक्ष के साथ $\theta = \tan^{-1} \frac{1.8}{0.9} = \tan^{-1} 2 \approx 63.5^\circ$ का कोण बनाता है।

उत्तर

$\mathbf{F}_1 = (0.90\hat{i} + 1.8\hat{j}) \text{ N}$; $F_1 = 2.01 \text{ N}$ जो घनात्मक x -अक्ष से लगभग 63.5° का कोण बनाता है।

अब आप अध्यारोपण नियम पर आधारित एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 7

यदि पांच आवेशों के उपस्थिति के कारण एक दिए हुए आवेश पर लग रहे अलग-अलग बलों को एक पंद पंचभुज की भुजाओं से निरूपित करें तो दिये हुए आवेश पर परिणामी बल क्या होगा ?

(यह अध्यारोपण नियम से संबंधित एक ऐसा प्रश्न है कि यदि इस प्रश्न को हल करने में आपको 30 सेकंड से अधिक समय लग रहा है तो समझ लीजिए कि आप सही ढंग से इस प्रश्न को हल नहीं कर रहे हैं।)

1.5 विद्युत क्षेत्र

विद्युत क्षेत्र वह प्रदेश होता है जिसमें विद्युत आवेशों पर एक विद्युत बल लगता है। विद्युत क्षेत्र ज्ञात हो जाने पर विद्युत आवेशों पर लग रहे बलों को ज्ञात किया जा सकता है, और तब न्यूटन के नियम की सहायता से इन आवेशों की गति निर्धारित की जा सकती है। क्योंकि सभी द्रव्यों में विद्युत आवेशित कण होते हैं इसलिए विद्युत क्षेत्र की जानकारी हो जाने पर इसकी सहायता से आप द्रव्य की संरचना और व्यवहार के बारे में भी जानकारी प्राप्त कर सकते हैं। साथ ही कुछ ऐसी युक्तियां (devices) बनायी जा सकती है, जिनमें विद्युत क्षेत्र आवेशित कणों को उपयोगी ढंग से त्वरित कर देता है। उदाहरण के लिए, आपके टेलिविजन के टीवी ट्यूब में लगाये गये विद्युत क्षेत्र के कारण इलेक्ट्रॉन ट्यूब के सामने वाले भाग की ओर त्वरित होते हैं जहां इनकी ऊर्जा प्रकाश में रूपांतरित हो जाती है, जिसे कि हम टीवी के स्क्रीन पर देखते हैं।

इस भाग में एक बिंदु आवेश (single point charge) तथा सतत आवेश वितरण (continuous charge distribution) सहित अन्य साधारण आवेश वितरणों के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र का परिकलन करना सीखेंगे। सम्पूर्ण विद्युत क्षेत्र को चित्र रूप में प्रस्तुत करने के लिए विद्युत बल रेखाओं की संकल्पना के बारे में भी चर्चा करेंगे।

1.5.1 विद्युत क्षेत्र का परिकलन

भाग 1.3 में दो आवेशों, q_1 और q_2 के बीच लग रहे स्थिरविद्युत बल के बारे में पढ़ चुके हैं। यदि इनमें से कोई भी एक आवेश, मान लीजिए q_2 एकक आवेश (unit charge) हो तो आवेश q_1 के कारण इस एकक आवेश पर लग रहे बल को एकक आवेश के स्थान पर विद्यमान विद्युत क्षेत्र के रूप में परिभाषित किया जाता है।

दूसरे शब्दों में, यदि विद्युत क्षेत्र के किसी बिंदु पर स्थित परीक्षण आवेश (test charge) q पर लग रहा बल F हो, तो परिभाषा के अनुसार उस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र (जिसे विद्युत क्षेत्र प्रबलता (electric field intensity) भी कहा जाता है) E यह होता है :

$$E = \frac{F}{q} \text{ या } F = qE \quad (1.7)$$

वस्तुतः एक दिए हुए स्थान पर विद्युत क्षेत्र मापने के लिए उस स्थान पर एक परीक्षण आवेश लेना होता है और उस पर लग रहे बल को मापना होता है। यहां एक बात ध्यान देने योग्य है। परीक्षण आवेश उन आवेशों पर बल लगाता है, जिनसे विद्युत क्षेत्र उत्पन्न होता है, अतः यह इन आवेशों के विन्यास (configuration) में परिवर्तन ला सकता है। इसलिए, सिद्धांत रूप में परीक्षण आवेश इतना छोटा होना चाहिए जिससे कि विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करने वाले आवेश विन्यास पर इसका कोई प्रभाव न पड़े।

समीकरण (1.7) को देखने से यह पता चलता है कि विद्युत क्षेत्र को न्यूटन कूलाम⁻¹ (NC⁻¹) में मापा जाता है। क्योंकि F एक सदिश राशि है, इसलिए E भी एक सदिश होगा। यदि q धनात्मक है तो विद्युत क्षेत्र E की दिशा वही होगी जो कि आवेश पर लग रहे बल की दिशा है। और, यदि q ऋणात्मक है, तो E की दिशा बल F की दिशा के विपरीत होगी।

यदि आवेश बिंदु रूप में हो, तो विद्युत क्षेत्र का परिकलन अधिक सरल हो जाता है। कूलॉम नियम से हम यह जानते हैं कि यदि एक बिंदु आवेश q_1 को एक अन्य बिंदु आवेश q से r दूरी पर रखें, तो q_1 पर बल यह होगा :

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_1}{r^2} \hat{r} \quad (1.8)$$

जहां \hat{r} एकक सदिश है जिसकी दिशा q से q_1 की ओर होती है। क्योंकि विद्युत क्षेत्र, बल प्रति एकक आवेश के रूप में परिभाषित होता है, इसलिए q के कारण q_1 के स्थान पर उत्पन्न क्षेत्र को प्राप्त करने के लिए, हम समीकरण (1.8) में बल के व्यंजक को आवेश q_1 से भाग दे देते हैं। अर्थात्

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} \quad (\text{बिंदु आवेश का क्षेत्र}) \quad (1.9)$$

इस समीकरण के द्वारा आवेश q के कारण किसी बिंदु पर, जो कि q से r दूरी पर स्थित हो, उत्पन्न विद्युत क्षेत्र ज्ञात किया जा सकता है। समीकरण (1.9) में एकक सदिश \hat{r} की दिशा आवेश (जिसके कारण विद्युत क्षेत्र का अस्तित्व होता है) से उस बिंदु की ओर होती है जिस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात किया जा रहा है।

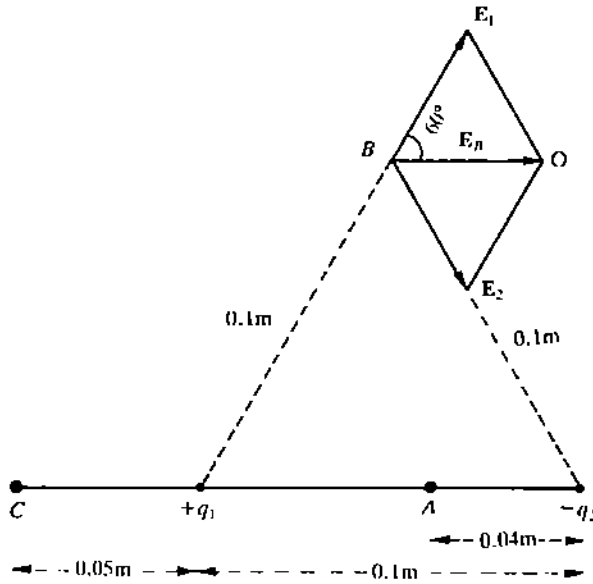
अब प्रश्न उठता है कि दो या दो से अधिक बिंदु आवेशों से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र क्या होगा? क्योंकि विद्युत बल अणुयोग्य नियम का पालन करता है, इसलिए विद्युत क्षेत्र भी इस नियम का पालन करेगा (क्योंकि विद्युत क्षेत्र बल प्रति एकक आवेश होता है)। अतः दो या दो से अधिक आवेशों के कारण एक दिए हुए बिंदु पर उत्पन्न क्षेत्र अलग-अलग आवेशों के क्षेत्रों का सदिश योग होता है। अलग-अलग बिंदु आवेशों के कारण उत्पन्न क्षेत्र समीकरण (1.9) से प्राप्त हो जाता है। अतः n आवेशों से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र E को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$E = E_1 + E_2 + \dots + E_n = \sum_{j=1}^n E_j = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_j^2} \hat{r}_j \quad (1.10)$$

जहां E_j उस बिंदु से, जहां हम क्षेत्र का मान ज्ञात कर रहे हैं, दूरी r_j पर स्थित बिंदु आवेश q_j से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र है।

दो बिंदु आवेशों q_1 और q_2 से उत्पन्न एक विद्युत क्षेत्र है, जहां $q_1 = -q_2 = 12 \times 10^{-9} \text{C}$ और इन दोनों के बीच की दूरी 0.1m है, जैसा कि चित्र 1.9 में दिखाया गया है।

बिंदु A और B पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात कीजिए।



चित्र 1.9

हल:

बिंदु A पर q_1 से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र E_1 का मान यह होगा :

$$\begin{aligned} E_1 &= (9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}) \frac{12 \times 10^{-9} \text{C}}{(0.06 \text{m})^2} \hat{i} \\ &= \frac{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}) (12 \times 10^{-9} \text{C})}{36 \times 10^{-4} \text{m}^2} \hat{i} \\ &= 3 \times 10^4 \hat{i} \text{ NC}^{-1} \end{aligned}$$

बिंदु A पर q_2 से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र E_2 यह होगा :

$$\begin{aligned} E_2 &= (9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}) \frac{12 \times 10^{-9} \text{C}}{(0.04 \text{m})^2} (-\hat{i}) \\ &= \frac{(9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}) (12 \times 10^{-9} \text{C})}{16 \times 10^{-4} \text{m}^2} \hat{i} = 6.75 \times 10^4 \hat{i} \text{ NC}^{-1}. \end{aligned}$$

अतः बिंदु A पर नेट विद्युत क्षेत्र E_A यह होगा :

$$\begin{aligned} E_A &= E_1 + E_2 \\ &= (3 + 6.75) \times 10^4 \hat{i} \text{ NC}^{-1} \\ &= 9.75 \times 10^4 \hat{i} \text{ NC}^{-1} \end{aligned}$$

बिंदु B पर q_1 से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र E_1 यह होगा :

$$E_1 = (9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}) \frac{12 \times 10^{-9} \text{C}}{(0.1 \text{m})^2} \hat{r}_+$$

(यहां \hat{r}_+ दायाँ ओर विकर्णतः उपरिमुखी होता है।) (\hat{r}_+ points diagonally upward to the right)

$$\therefore E_1 = 1.08 \times 10^4 \hat{r}_+ \text{ NC}^{-1}$$

E_1 की दिशा वही होती है जो \hat{r}_+ की दिशा है, जैसा कि आरेख में दिखाया गया है।

और q_2 से उत्पन्न क्षेत्र E_2 यह होगा

$$E_2 = (9 \times 10^9 \text{ N m}^2\text{C}^{-2}) \frac{-12 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0.1\text{m})^2} (\hat{r}_-)$$

(यहाँ \hat{r}_- बायीं ओर विकर्णतः उपरीमुखी होता है)
(\hat{r}_- points diagonally upward to the left).

$$\therefore E_2 = -1.08 \times 10^4 \hat{r}_- \text{ NC}^{-1}$$

ऋण चिह्न से यह पता चलता है कि विद्युत क्षेत्र बायीं ओर विकर्णतः उपरीमुखी है।

अब हम दो बलों को सदिश रूप में जोड़ेंगे। यदि हम E_1 और E_2 को x -अक्ष और y -अक्ष के अनुदिश घटकों (components) में वियोजित करें, तो चित्र 1.9 को देखने से यह स्पष्ट हो जाता है कि सदिश E_1 और E_2 के y -घटक एक दूसरे को काट देते हैं और x -अक्ष अर्थात् BO के अनुदिश घटक आपस में जुड़ जाते हैं। किसी भी सदिश E_1 अथवा E_2 और x -दिशा के बीच का कोण 60° का होता है, क्योंकि B , q_1 और q_2 से बना त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) है। अतः परिणामी क्षेत्र की दिशा BO के अनुदिश होगी और इसका परिमाण यह होगा :

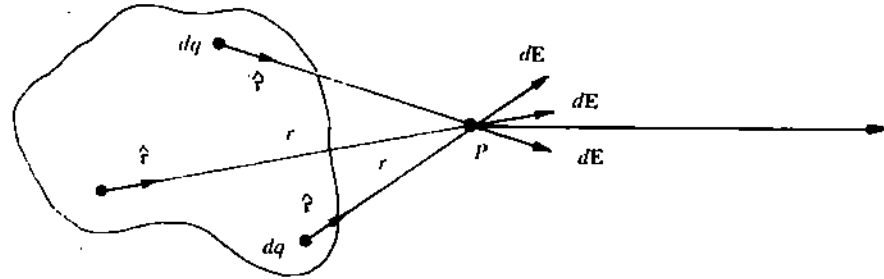
$$E_B = (1.08 \times 10^4 \cos 60^\circ + 1.08 \times 10^4 \cos 60^\circ) \text{ NC}^{-1}$$

$$= 1.08 \times 10^4 \text{ NC}^{-1}$$

अब आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करने का प्रयास करें जिससे कि आपमें अन्य प्रश्नों को स्वयं हल करने की क्षमता आ सके।

बोध प्रश्न 8

चित्र 1.9 देखिए। बिंदु C पर, जो कि q_1 से 0.05 m की दूरी पर है, विद्युत क्षेत्र ज्ञात कीजिए। अभी तक हमने साधारण प्रकार के आवेश वितरण अर्थात् एक विलगित बिंदु आवेश (isolated point charge) और दो या दो से अधिक बिंदु आवेशों के विन्यास से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र पर विचार किया है। अब मान लीजिए कि आवेश एक प्रदेश (region) पर सतत रूप से वितरित है, जैसा कि चित्र 1.10 में दिखाया गया है। ऐसी स्थितियाँ बार-बार देखने को मिलती हैं। उदाहरण के लिए, जब हम किसी धातु पिंड को कुछ आवेश देते हैं तो यह इसके सतह पर सतत रूप से वितरित हो जाता है।



charge distribution

चित्र 1.10 : सम्पूर्ण आवेश वितरण के सभी अलग-अलग आवेश अवयवों (charge element) dq से उत्पन्न dE का सदिश योग, बिंदु P पर विद्युत क्षेत्र को दर्शाता है। अलग-अलग आवेश अवयवों के लिए दूरी r और एकल सदिश \hat{r} दोनों ही अलग-अलग होते हैं।

आवेश के इस सतत वितरण (continuous distribution) के कारण बिंदु P पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र मालूम करने के लिए हम यह मान लेते हैं कि आवेशित प्रदेश में छोटे-छोटे अनेक आवेश अवयव (charge element) dq हैं। आवेश अवयव को इतना छोटा इसलिए माना जाता है, जिससे कि अवयव के प्रत्येक बिंदु को P से समदूरस्थ (equidistant) माना जा सके। अब प्रत्येक dq एक छोटा विद्युत क्षेत्र dE उत्पन्न करेगा जो कि समीकरण (1.9) के अनुसार यह होगा :

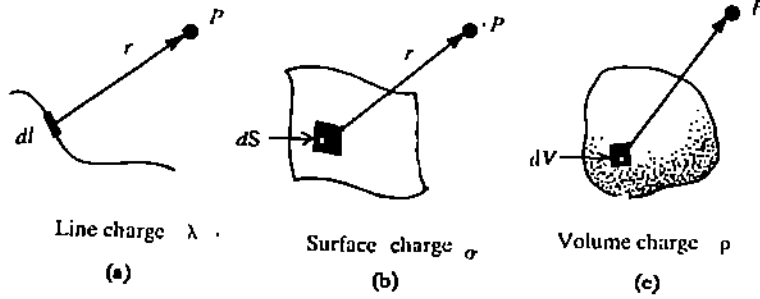
$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (1.11)$$

तब समीकरण (1.10) की भांति, सभी dE के सदिश योग से पूरे आवेशित प्रदेश के कारण उत्पन्न कुल विद्युत क्षेत्र E प्राप्त हो जाएगा। यहाँ हमने यह अनुमान लगाया है कि सभी आवेश अवयवों को एक साथ रखने पर हमें आवेशित प्रदेश प्राप्त होता है। अर्थात् यह समझा जा सकता है कि आवेश अवयव dq अत्यणु छोटा (infinitesimally small) है। ऐसी स्थिति में सतत वितरण के लिए सदिश योग एक समाकल (integral) हो जाएगा। इस तरह,

$$\mathbf{E} = \int d\mathbf{E} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (1.12)$$

इस समाकल की सीमाएं (limits) ऐसी ली जाती हैं, जिससे कि इसमें वह पूरा प्रदेश समाहित हो जाए, जिस पर आवेश वितरित है।

वह प्रदेश जिस पर आवेश का वितरण सतत होता है, एक रेखा या एक पृष्ठ या एक आयतन हो सकता है, जैसा कि चित्र 1.11 में दिखाया गया है।



चित्र 1.11 (क) रेखा आवेश (ख) पृष्ठ आवेश (ग) आयतन आवेश

ऐसे वितरणों के लिए हम आवेशों के स्थान पर आवेशों के घनत्व (density of charges) का प्रयोग करते हैं जैसे : रेखा आवेश घनत्व (line charge density) जिसे λ से प्रकट किया जाता है, पृष्ठ आवेश घनत्व (surface charge density) (σ) और आयतन आवेश घनत्व (ρ)। ये राशियां क्रमशः प्रति एकक लंबाई में आवेश की मात्रा, प्रति एकक क्षेत्रफल में आवेश की मात्रा और प्रति एकक आयतन में आवेश की मात्रा को प्रकट करती हैं। इनके मात्रक क्रमशः $C m^{-1}$, $C m^{-2}$ और $C m^{-3}$ होते हैं।

चित्र 1.11 (क) लीजिए। यहां आवेश एक रेखा के अनुदिश वितरित है। लंबाई का एक छोटा अवयव dl लीजिए। आवेश अवयव dq , λdl के बराबर होगा, जहां λ रेखा आवेश घनत्व है। समीकरण (1.12) में dq के स्थान पर λdl प्रतिस्थापित कीजिए। इस तरह, रेखा आवेश से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र यह होगा :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{रेखा}} \frac{\hat{r}}{r^2} \lambda dl \quad \dots (1.13)$$

अब चित्र 1.11 (ख) लीजिए। यहां पर आवेश एक पृष्ठ पर वितरित है। यदि dS एक पृष्ठ अवयव हो, तो आवेश अवयव dq , σdS होगा जहां σ पृष्ठ आवेश घनत्व है। समीकरण (1.12) में dq के स्थान पर σdS प्रतिस्थापित करने पर, पृष्ठ आवेश का विद्युत क्षेत्र यह होगा :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{पृष्ठ}} \frac{\hat{r}}{r^2} \sigma dS \quad (1.14)$$

इसी प्रकार चित्र 1.11 (ग) में, आवेश एक आयतन पर वितरित है, जहां आयतन आवेश घनत्व ρ है। यदि dV आयतन अवयव हो तो $dq = \rho dV$ होगा। अतः आयतन आवेश से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र यह होगा :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\text{आयतन}} \frac{\hat{r}}{r^2} \rho dV \quad (1.15)$$

समीकरण (1.13), समीकरण (1.14) और समीकरण (1.15) के सदिश समाकलों को क्रमशः रेखा समाकल (line integral), पृष्ठ समाकल (surface integral) और आयतन समाकल (volume integral), कहा जाता है। यदि आपने 'भौतिकी में सभिततीय विधियाँ-1' (PHE-04) का पाठ्यक्रम भी लिया है, तो ऊपर बताए गए शब्द आपके लिए कोई नए शब्द नहीं होंगे और आप इन शब्दों के अर्थ अच्छी तरह से समझते होंगे। फिर भी, इस पाठ्यक्रम में ये शब्द जहां कहीं भी आए हैं उनकी परिभाषा और व्याख्या हमने वहां दे दी है। उदाहरण के लिए, पृष्ठ समाकल और आयतन समाकल की व्याख्या इकाई 2 में की गई है। ध्यान रहे कि यह आवश्यक नहीं है कि आवेश घनत्व अर्थात् λ , σ या ρ अक्षर ही हो! अतः हम इन आवेश घनत्वों को स्थिति का फलन (function of position) मान सकते हैं। इस तरह, समीकरण (1.13), (1.14) और (1.15) में λ , σ और ρ स्वयं r पर निर्भर कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, आयतन V पर आयतन आवेश वितरण $\rho(\mathbf{r}')$ के कारण (चित्र (1.12)), r दूरी पर स्थित बिंदु P पर विद्युत क्षेत्र का व्यंजक यह होगा :

यदि आप कार्तीय निर्देशांक लें, तो रेखा आवेश वितरण x -या y -या z -अक्ष के अनुदिश समझा जा सकता है, इसलिए समीकरण (1.13) में समाकलन एक चर अर्थात् x या y या z के सापेक्ष होगा। क्योंकि पृष्ठ दो विमाओं द्वारा परिभाषित होता है, इसलिए समीकरण (1.14) में समाकलन किन्हीं दो चरों x और y , या y और z या z और x के सापेक्ष किया जाता है। इसी प्रकार, क्योंकि आयतन तीन विमाओं से परिभाषित होता है, इसलिए समीकरण (1.15) में समाकलन तीन चरों x , y और z के सापेक्ष किया जाता है।

निर्वात में स्थिरविद्युतिकी

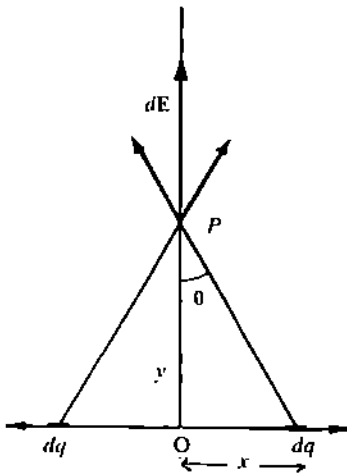
समीकरण (1.4) जैसे समीकरणों को सदिश रूप में व्यक्त करने का एक अन्य सामान्य तरीका यह है :

$$F_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2 r_{12}}{r_{12}^3}$$

जहाँ r_{12} एक सदिश है जिसका परिमाण r_{12} दूरी के बराबर है। उपर्युक्त समीकरण निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा प्राप्त हुआ है :

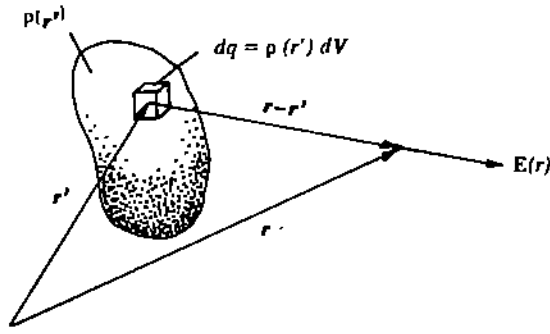
$$r_{12} = \frac{r_{12}}{|r_{12}|}$$

इसी कारण, समीकरण (1.4) के हर में r_{12}^2 को r_{12}^3 लिखा गया है। अतः उपर्युक्त समीकरण और समीकरण (1.4) दोनों समान हैं। वैसे हम एक-सदिश संकेतन का उपयोग करेंगे।



चित्र 1.13 : मूल बिंदु के दोनों ओर आवेश अवयव के युगल से y -दिशा में एक नेट क्षेत्र dE प्राप्त होता है।

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r') (r - r') dV'}{|r - r'|^3} \quad (1.16)$$



चित्र 1.12 : आयतन आवेश घनत्व $\rho(r')$ के कारण P पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र। समाकलन के दौरान सदिश r' में परिवर्तन होता है, पर r अचर रहता है।

यहां डैश (dash) लगे निर्देशांक स्रोत बिंदु को प्रकट करते हैं तथा r दूरी पर स्थित वह बिंदु है जहां क्षेत्र E का मान ज्ञात किया जा रहा है।

उदाहरण 4

चित्र 1.13 में दिखाया गया एक अनंत लंबा, एकसमान आवेशित छड़, x -अक्ष के अनुदिश है और यहां रेखा आवेश घनत्व $\lambda \text{ C m}^{-1}$ है। y -अक्ष के बिंदु P पर विद्युत क्षेत्र क्या होगा ?

हल

मान लीजिए बिंदु P छड़ के लंब अर्धक (perpendicular bisector) के अनुदिश y दूरी पर स्थित है। मूल बिंदु की बांयी ओर दूरी x पर, छड़ की एक छोटी लंबाई dx लीजिए जिसमें स्थित आवेश dq हो। तब

$$dq = \lambda dx$$

आवेश dq के इस अवयव के कारण P पर विद्युत क्षेत्र का परिमाण यह होगा :

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

P पर नेट क्षेत्र ज्ञात करने के लिए हम इस dE को इसके x -और y -घटकों में वियोजित करते हैं और तब प्रत्येक घटक को पूरी रेखा पर समाकलित करते हैं। ध्यान रहे कि मूल बिंदु की बांयी ओर प्रत्येक dq के लिए बांयी ओर समान दूरी पर एक संगत dq होता है। अतः ऐसे युगल से क्षेत्रों के x -घटक एक दूसरे को काट देते हैं, जबकि y -घटक समान बने रहते हैं।

dE का y -घटक यह होगा :

$$\begin{aligned} dE_y &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos\theta \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \frac{y}{r} \quad \left(\because \cos\theta = \frac{y}{r} \right) \end{aligned}$$

$$\text{जिससे कि } dE_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{y dq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{j}$$

तब दो बराबर y -घटकों को जोड़ने पर नेट विद्युत क्षेत्र dE_{net} प्राप्त होता है।

$$dE_{\text{net}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2y dq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{j}$$

पूरे छड़ के कारण नेट विद्युत क्षेत्र यह होगा :

$$E_{\text{net}} = \int dE_{\text{net}} = \int_{x=0}^{x=\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2y dq}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{j}$$

हालांकि रेखा $-\infty$ से $+\infty$ तक है, पर हम केवल अर्ध रेखा तक ही समाकलन करते हैं, क्योंकि जिस व्यंजक का समाकलन हम कर रहे हैं, वह आवेश युगल (pair) dq का क्षेत्र है। dq के स्थान पर λdx को प्रतिस्थापित करने और अचरों को समाकल के बाहर लाने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$E_{net} = \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \hat{j}$$

मान लीजिए, $x = y \tan \theta$ जिससे कि $dx = y \sec^2 \theta d\theta$.

क्योंकि छड़ काफी लंबी है, इसलिए x का मान 0 से ∞ तक लेने पर θ का मान 0 से $\frac{\pi}{2}$ तक होता है। तब हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} E_{net} &= \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{y \sec^2 \theta d\theta}{(y^2 \tan^2 \theta + y^2)^{3/2}} \hat{j} \\ &= \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon_0} \int_0^{\pi/2} \frac{y \sec^2 \theta d\theta}{y^3 \sec^3 \theta} \hat{j} \quad (\because \tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta) \\ &= \frac{\lambda y}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{y^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta \hat{j} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 y} [\sin \theta]_0^{\pi/2} \hat{j} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \hat{j} \end{aligned}$$

इस तरह, अनंततः लंबे धन आवेशित छड़ के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की दिशा छड़ से त्रिज्यतः बहिर्मुखी (radially outward) होती है और इसके परिमाण में दूरी के साथ प्रतिलोमतः कमी आती जाती है।

जैसा कि आपने देखा है, व्यवहार में ऊपर बतायी गई विधि से सतत आवेश वितरण से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र का निर्धारण करने में काफी कठिन परिकलन करने पड़ते हैं। ऐसे वितरण के लिए विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने की एक अधिक आसान और सुगम विधि है जिसकी चर्चा हम अगली इकाई में करेंगे।

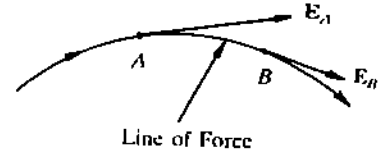
1.5.2 वैद्युत बल रेखाएं (Electric lines of force)

पिछले उपभाग में आपने यह देखा है कि किस प्रकार विभिन्न आवेश वितरण के कारण किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र (परिमाण और दिशा दोनों) परिकल्पित किया जाता है। वास्तव में विद्युत क्षेत्र पूरे प्रदेश में विद्यमान होता है। सम्पूर्ण विद्युत क्षेत्र को बल रेखाओं (lines of force) (जिसे वैद्युत क्षेत्र रेखा या वैद्युत बल रेखा भी कहा जाता है) की सहायता से दृश्य रूप में (visually) निरूपित करने की एक उपयोगी विधि है। हालांकि मात्रात्मक कार्यों (quantitative purposes) के लिए यह निरूपण उत्तम नहीं है पर इसकी सहायता से केवल देखकर ही पूरे प्रदेश में विद्युत क्षेत्र के व्यापक लक्षणों की जानकारी हमें प्राप्त हो जाती है। बल रेखा इस तरह खींची गई एक रेखा होती है जिससे कि इसके किसी बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा (tangent) उस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र की दिशा दर्शाती हो, जैसा कि चित्र 1.14 में दिखाया गया है। ये रेखाएं सतत होती हैं और ये पूरे स्थान में फैली रहती हैं तथा विद्युत क्षेत्र को निरूपित करती हैं।

आइए हम यह देखें कि किस प्रकार बल रेखाओं से विद्युत क्षेत्र की प्रबलता (strength) के बारे में हमें जानकारी प्राप्त होती है। चित्र 1.15 में धन बिंदु आवेश से उत्पन्न बल रेखाएं दिखाई गई हैं। धन आवेश के कारण किसी बिंदु पर क्षेत्र की दिशा सदैव आवेश से परे होती है, क्योंकि इस दिशा में धन परीक्षण आवेश प्रतिकर्षित होगा। अतः इस स्थिति में बल रेखाएं सरल रेखाएं एवं बिंदु आवेश से त्रिज्यतः बहिर्मुखी (radially outward) होती हैं। रेखाएं आवेश से प्रारंभ होती हैं और बाहर की ओर अनंत तक चली जाती हैं। इस बात की ओर आप अवश्य ध्यान दे रहे होंगे कि जैसे-जैसे बल रेखाएं आगे बढ़ती जाती हैं वैसे-वैसे उनके बीच की दूरी भी बढ़ती जाती है। जब आप यह जानते हैं कि कूलॉम नियम के अनुसार जैसे-जैसे आप दूर होते जाते हैं, वैसे-वैसे विद्युत क्षेत्र कम होता जाता है। अतः चित्र 1.16 में, प्रदेश B की तुलना में प्रदेश A पर विद्युत क्षेत्र अधिक प्रबल होगा, जिससे यह अर्थ निकलता है कि जहां बल रेखाएं एक दूसरे के निकट होंगी वहां विद्युत क्षेत्र अधिक प्रबल होगा और जहां बल रेखाएं एक दूसरे से दूर होंगी वहां विद्युत क्षेत्र दुर्बल होगा।

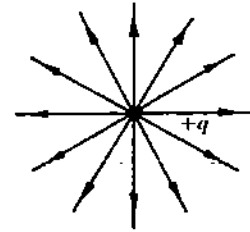
मान लीजिए एक आवेश q और एक अन्य आवेश $2q$ है और आपको इन दो आवेशों की बल रेखाएं

विद्युत आवेश, बल और क्षेत्र

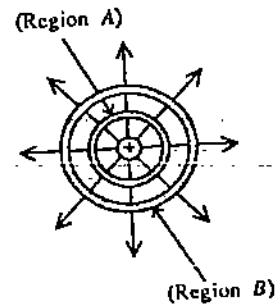


चित्र 1.14: वैद्युत बल रेखा

बल रेखा को वह पथ भी माना जाता है जिस पर एक मुक्त धन, बिंदु आवेश एक विद्युत क्षेत्र में गतिमान होता है। अतः बल रेखा के अग्रभाग पर सदा ही एक तीर लगा दिया जाता है, जो धन आवेश की गति की दिशा बताता है।

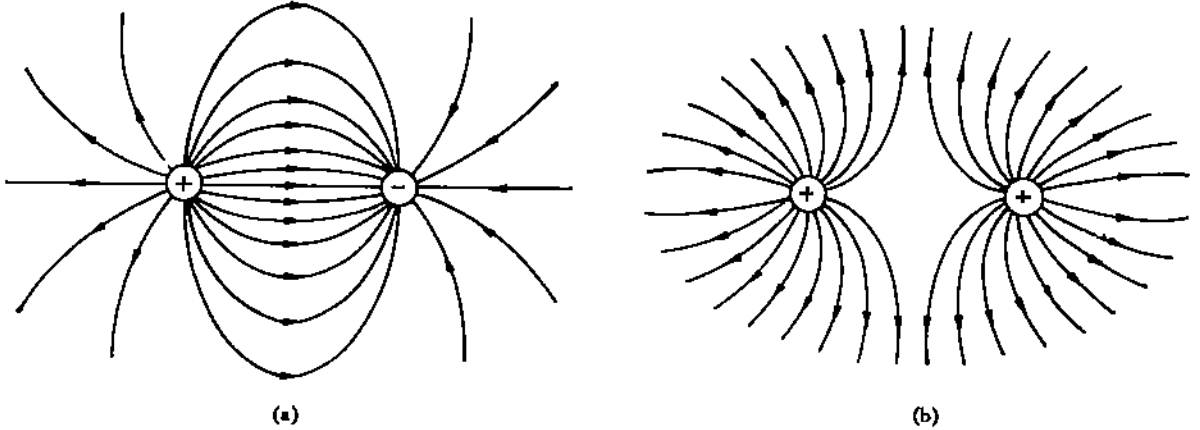


चित्र 1.15: धन आवेश से उत्पन्न बल रेखाएं



चित्र 1.16: B की तुलना में प्रदेश A पर क्षेत्र अधिक प्रबल होता है, क्योंकि प्रदेश A में बल रेखाएं एक दूसरे के निकट हैं, जबकि प्रदेश B में बल रेखाएं एक दूसरे से दूर हैं।

खींचने के लिए कहा गया है। तब आप जितनी बल रेखाएं खींचना चाहते हैं, उतनी बल रेखाएं आप खींच सकते हैं। पर, बात ऐसी नहीं है। बल रेखाओं के चित्र को उपयोगी बनाने के लिए हम दिए हुए परिमाण वाले आवेश के लिए एक निश्चित संख्या की बल रेखाएं ही खींचते हैं। अतः यदि यह माना जाये कि आवेश q से 6 बल रेखाएं निकलती हैं तो आवेश $2q$ को 12 बल रेखाओं से निरूपित किया जाएगा। ऊपर दिया गया कथन कूलॉम नियम के अनुकूल है। क्योंकि कूलॉम नियम से हम यह जानते हैं कि विद्युत क्षेत्र आवेश के परिमाण के समानुपाती होता है ($F \propto q$) इसलिए आवेशों से प्रारंभ होने या आवेशों पर अंत होने वाली (ऋण आवेश की स्थिति में) बल रेखाओं की संख्या प्रत्येक आवेश के परिमाण के समानुपाती होती है। चित्र 1.17 में दो समान विजातीय आवेशों (unlike charges) और दो समान सजातीय आवेशों (like charges) की बल रेखाएं दिखाई गई हैं। यह बात हमेशा ध्यान में रखनी चाहिए कि बल रेखाएं वास्तविक नहीं होती और इनका अस्तित्व वास्तव में निर्वात में धागे की तरह नहीं होता; ये केवल एक युक्ति है, जो क्षेत्र के बारे में जानकारी प्राप्त करने में सहायक होती है।



चित्र 1.17 : बल रेखाओं की प्रकृति। यहां हमने प्रति आवेश 18 रेखाएं खींची हैं। (क) दो विजातीय आवेश, (ख) दो सजातीय धन आवेश

बोध प्रश्न 9

एक दूसरे से 2 cm की दूरी पर $+3\mu\text{C}$ और $-1\mu\text{C}$ के दो आवेश रखे हैं। बल रेखाएं खींचिए। इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए उसका संक्षिप्त विवरण यहां हम दे दें।

1.6 सारांश

- केवल दो प्रकार के विद्युत आवेश होते हैं और उन्हें स्वेच्छता (arbitrarily) से धन आवेश और ऋण आवेश कहा जाता है। सजातीय आवेश एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं और विजातीय आवेश एक दूसरे को आकर्षित करते हैं।
- SI प्रणाली में आवेश का मात्रक कूलॉम (C) है।
- आवेश सदा ही संरक्षित होता है। अर्थात् एक बंद प्रदेश में आवेशों के बीजीय योग में कभी भी कोई परिवर्तन नहीं आता।
- विद्युत आवेश द्वान्तीकृत होता है अर्थात् आवेश केवल विविक्त मात्राओं में होता है।
- दो आवेशों के बीच का बल उन आवेश के परिमाणों के गुणनफल के समानुपाती होता है और उनके बीच की दूरी के वर्ग के प्रतिलोमानुपाती होता है। यह बल दो आवेशों को जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश कार्य करता है।

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

$1/4\pi \epsilon_0$ का मान $9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$ है।

- दो या दो से अधिक आवेशों के कारण किसी आवेश पर उत्पन्न विद्युत बल अलग-अलग आवेशों द्वारा उत्पन्न बलों का सदिश योग होता है। विद्युत बल के इस महत्वपूर्ण गुणधर्म को अध्यारोपण नियम कहा जाता है।

- किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र उस बिंदु पर रखे गए परीक्षण आवेश पर लगा हुआ विद्युत बल होता है।

$$E = \frac{F}{q}$$

- एक बिंदु आवेश पर विद्युत क्षेत्र यह होता है :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$$

जहाँ \hat{r} एकक सदिश है जिसकी दिशा बिंदु आवेश q से उस स्थान तक की ओर होती है जिस पर विद्युत क्षेत्र परिकल्पित किया जा रहा है।

- अध्यारोपण नियम के अनुसार आवेश वितरण से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र उस वितरण के अलग-अलग आवेशों के क्षेत्रों का सदिश योग होता है :

$$E = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_n}{r_n^2} \hat{r}_n$$

आवेश का सतत वितरण होने पर योगफल पूरे आवेश वितरण पर एक समाकल हो जाता है अर्थात्

$$E = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

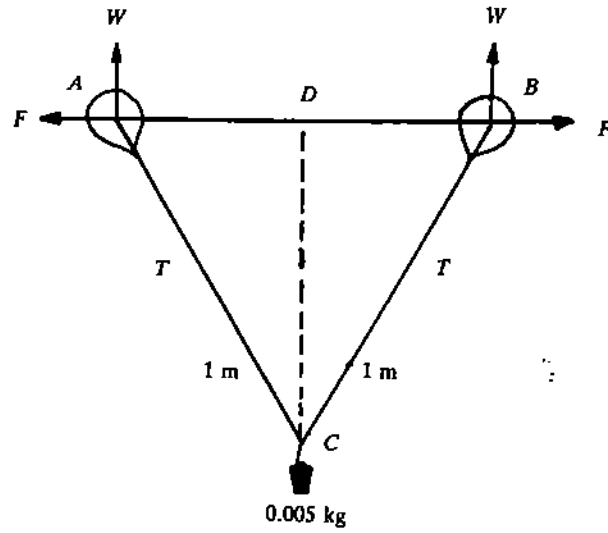
उदाहरण के लिए आयतन V' पर आयतन आवेश वितरण $\rho(r')$ के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र को इस प्रकार लिखा जाता है :

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(r')}{|r - r'|^3} (r - r') dV'$$

- वैद्युत बल रेखाओं द्वारा, विद्युत क्षेत्र को दृश्य रूप में निरूपित किया जाता है। विद्युत क्षेत्र में यह एक ऐसी रेखा होती है जिससे कि इसके किसी बिंदु पर खींची गई स्पर्श रेखा उस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र की दिशा दर्शाती है। जहाँ क्षेत्र प्रबल होता है, वहाँ रेखाएँ एक दूसरे के काफी निकट होती हैं। बल रेखाएँ सदा ही विद्युत आवेश से प्रारंभ होती हैं या विद्युत आवेश पर समाप्त होती हैं।

1.7 अंत में कुछ प्रश्न

- 1) दो बिंदु $+4e$ और $+e$, दूरी a पर रखे हुए हैं। एक तीसरा आवेश q ऊपर बताए गए दो आवेशों को मिलाने वाली सरल रेखा पर इस प्रकार रखा गया है जिससे कि q साम्यावस्था में रहे। q की स्थिति ज्ञात कीजिए। किन परिस्थितियों में यह साम्यावस्था "स्थायी" और "अस्थायी" होगी ?
- 2) $ABCD$, 0.04 मीटर की भुजा वाला एक वर्ग है। इसके शीर्ष बिंदु A , C और D पर क्रमशः 16×10^{-9} कूलॉम, -16×10^{-9} कूलॉम और 32×10^{-9} कूलॉम वाले आवेश रखे गए हैं। बिंदु B पर विद्युत क्षेत्र की प्रबलता ज्ञात कीजिए।
- 3) $-5 \times 10^{-9}C$ के आवेश वाली एक छोटी दस्तू को किसी विद्युत क्षेत्र के एक निश्चित बिंदु पर रखने पर उस पर ऋणात्मक x -दिशा में $20 \times 10^{-9}N$ का बल लगता है। (क) उस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र क्या है ? (ख) उस बिंदु पर रखे एक प्रोटॉन पर लग रहे बल का परिणाम और दिशा क्या होगी ?
- 4) ठीक एक ही आकार-प्रकार के विलियम से भरे दो गुब्बारों को 0.005 kg के भार से बांध कर उन्हें हवा में साम्यावस्था में लटका दिया गया है। यदि प्रत्येक गुब्बारे में q कूलॉम आवेश हो, तो q का मान ज्ञात कीजिए। प्रत्येक डोरी की संभार $1.0m$ है और उनके केन्द्रों के बीच की दूरी $0.5m$ है।



चित्र 1.18

जैसा कि चित्र 1.18 में दिखाया गया है, साम्यावस्था में निकाय पर निम्नलिखित बल कार्य करते हैं :

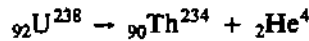
- i) उत्थावन बल (upward thrust) W (ii) स्थिरवैद्युत बल, F
- iii) तनाव, T (iv) भार

साम्यावस्था में इन तीन बलों का किसी भी बिंदु, जैसे बिंदु C के परितः बल आघूर्ण (moment of forces) शून्य होता है।

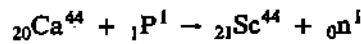
1.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

- 1) Z, Y को आकर्षित करेगा।
- 2) आवेश संरक्षण नियम के अनुसार रेडियोएक्टिव क्षय (या न्यूक्लीय अभिक्रिया) के प्रारम्भ में विद्यमान कुल आवेश की मात्रा क्षय के बाद विद्यमान कुल आवेश की मात्रा के बराबर होती है।
 - i) में क्षय के पहले विद्यमान आवेश $92e$ है और क्षय के बाद विद्यमान आवेश $2e$ हैं। अतः समीकरण (i) यह होगा



समीकरण (ii) यह होगा



यहां ${}_0\text{n}^1$ न्यूट्रॉन है।

- 3) क्योंकि चालक धन आवेशित है, इसलिए इसमें इलेक्ट्रॉनों की कमी है। यान लीजिए इसमें n इलेक्ट्रॉनों की कमी है।

तब संबंध $q = ne$ से, इलेक्ट्रॉनों की संख्या प्राप्त की जा सकती है। यहां $q = 3.2 \times 10^{-17}\text{C}$ और $e = 1.6 \times 10^{-19}\text{C}$

$$\therefore n = \frac{q}{e} = \frac{3.2 \times 10^{-17}\text{C}}{1.6 \times 10^{-19}\text{C}} = 200$$

चालक में 200 इलेक्ट्रॉनों की कमी है।

- 4) यदि q_2 पर लग रहे बल का व्यंजक प्राप्त करना हो, तो केवल यह आवश्यक रह जाता है कि समीकरण 1.4 में प्रत्येक पदांक (subscript) 1 के स्थान पर 2 और प्रत्येक पदांक 2 के स्थान पर 1 लिख दिया जाए।

$$\text{बल } F_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2 q_1}{r_{21}^2} F_{21}$$

जहाँ F_{21} , q_1 से q_2 की ओर एकक सदिश है।

- 5) कूलॉम नियम के अनुसार हवा में r दूरी पर स्थित दो आवेशों के बीच कार्य कर रहे विद्युत बल $F_{\text{electrical}}$ का परिणाम यह होता है :

$$F_{\text{electrical}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} N$$

$$\text{यहाँ } \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}$$

$$q_1 = q_2 = 1.6 \times 10^{-19} \text{C} \text{ (क्योंकि इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन पर आवेशों का परिणाम बराबर है)}$$

$$r = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$F_{\text{electrical}} = (9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}) \times \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{C}) \times (1.6 \times 10^{-19} \text{C})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

न्यूटन नियम के अनुसार इलेक्ट्रॉन और प्रोटॉन के बीच गुरुत्वीय बल $F_{\text{gravitational}}$ यह होता है।

$$F_{\text{gravitational}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} N$$

$$\text{यहाँ } m_1 = \text{इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान} = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$m_2 = \text{प्रोटॉन का द्रव्यमान} = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$r = 5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$G = 6.6 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$$

$$F_{\text{gravitational}} = \frac{(6.6 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}) \times (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}) \times (1.7 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$= 3.7 \times 10^{-47} \text{ N}$$

$$\frac{F_{\text{electrical}}}{F_{\text{gravitational}}} = \frac{8.2 \times 10^{-8}}{3.7 \times 10^{-47}} = 2.2 \times 10^{39}$$

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि विद्युत बल गुरुत्वीय बल से 10^{39} गुना प्रबल है। अतः ऐसे प्रश्नों में गुरुत्वीय बलों की उपेक्षा की जा सकती है।

- 6) $Q_1 + Q_2 = 20 \mu\text{C}$ या $Q_2 = (20 - Q_1) \mu\text{C}$

क्योंकि बल प्रतिकर्षी है, इसलिए दोनों आवेश समान प्रकार के होंगे।

कूलॉम नियम के अनुसार,

$$0.075 \text{ N} = (9 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{C}^{-2}) \times \frac{Q_1 Q_2}{(3\text{m})^2}$$

$$\text{या } Q_1 Q_2 = 75 \times 10^{-12} \text{C}^2$$

$$\text{या } Q_1 Q_2 = 75 \times (10^{-6} \text{C})^2$$

$$\text{या } Q_1 Q_2 = 75 \mu\text{C}^2$$

Q_2 के मान को प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$Q_1 (20 - Q_1) = 75$$

$$\text{या } Q_1 - 20 Q_1 + 75 = 0$$

$$\text{या } Q_1 = 5 \text{ और } 15.$$

अतः आवेश 5 और 15 μC है।

- 7) अध्यारोपण नियम लागू कर इस प्रश्न का हल प्राप्त होता है। इसका यह अर्थ है कि परीक्षण आवेश पर

छोटे पैमाने की संरचना पर विद्युत बल का प्रभुत्व होता है, जबकि बड़े पैमाने की संरचना पर गुरुत्वीय बल का प्रभुत्व होता है।

बल ज्ञात करने के लिए आप केवल एक आवेश से उत्पन्न बल F_1 परिकल्पित करें (अन्य सभी आवेशों की उपेक्षा कर), फिर केवल दूसरे आवेश से उत्पन्न बल F_2 परिकल्पित करें। और इसी तरह अन्य आवेशों से उत्पन्न बल परिकल्पित करें। अंत में, आप अलग-अलग सभी बलों का सदिश योग अर्थात् $F_1 + F_2 + F_3 + \dots$ लेते हैं जिससे परीक्षण आवेश पर लग रहा परिणामी बल प्राप्त हो जाता है। यह दिया हुआ है कि इन अलग-अलग बलों को एक बंद पंचभुज की भुजाओं से निरूपित किया गया है। आप जानते हैं कि यदि विभिन्न बलों को निरूपित करने वाले सदिशों से एक बंद ज्यामितीय आकृति बनती हो, तो इन सदिशों का परिणामी (resultant) शून्य होता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि इन बलों का परिणामी शून्य है। अतः परीक्षण आवेश पर लग रहा परिणामी बल शून्य होगा।

8) q_1 के कारण बिन्दु C पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र यह है :

$$E_1 = 4.03 \times 10^4 (-\hat{i}) \text{ NC}^{-1}$$

q_2 के कारण बिन्दु C पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र यह है :

$$E_2 = 0.48 \times 10^4 \hat{i} \text{ NC}^{-1}$$

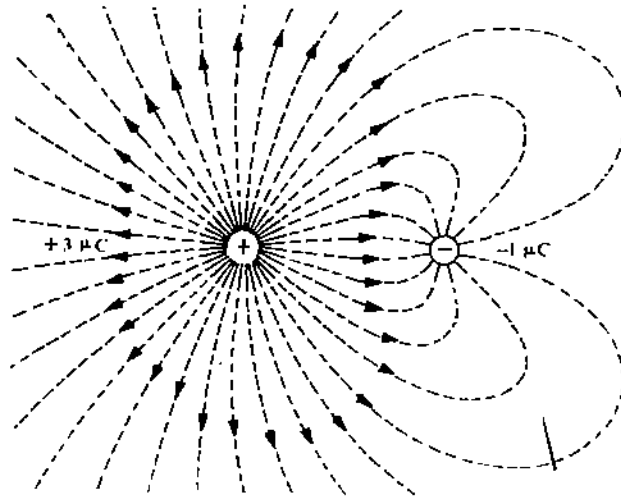
क्योंकि विद्युत क्षेत्र की दिशाएं एक दूसरे के विपरीत हैं, इसलिए C पर नेट विद्युत क्षेत्र E_C यह होगा

$$E_C = E_1 - E_2 \text{ जहां } E_1 \text{ और } E_2 \text{ विद्युत क्षेत्रों के परिमाण हैं।}$$

$$\begin{aligned} \therefore E_C &= (4.03 - 0.48) \times 10^4 \text{ NC}^{-1} \\ &= 3.55 \times 10^4 \text{ NC}^{-1} \end{aligned}$$

यह ऋणात्मक x -दिशा की ओर होगा।

9)

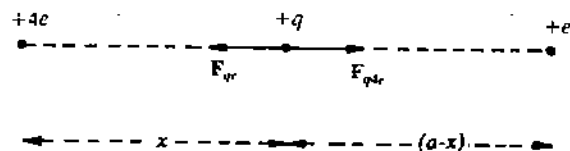


चित्र 1.19

चित्र 1.19 में दो आवेशों $+3\mu\text{C}$ और $-1\mu\text{C}$ से उत्पन्न बल रेखाएं दिखाई गई हैं। हमने यहां यह निश्चित कर लिया है कि 12 बल रेखाएं $1\mu\text{C}$ से निकलती हैं। तब कुल 36 रेखाएं $+3\mu\text{C}$ से निकलेंगी और इनमें से 12 रेखाएं $-1\mu\text{C}$ आवेश पर समाप्त होंगी। प्रत्येक आवेश के काफी निकट की बल रेखाएं त्रिज्यतः दिष्ट (radially directed) होती हैं, जो धन आवेश के बहिर्मुखी (outward) और ऋण आवेश के अंतर्मुखी (inward) होती हैं। प्रतिरूप (pattern) को पूरा करने के लिए धन आवेश से निकल रही 12 रेखाओं को ऋण आवेश पर समाप्त होने वाली 12 बल रेखाओं से इस तरह जोड़ा जाता है, ताकि कोई भी रेखा एक दूसरे को न काटती हो। जोड़ने वाली रेखाओं को बिंदुकित रेखाओं से दिखाया गया है। 24 बल रेखाएं अनंत तक चली जाती हैं। अतः इस आवेश वितरण से काफी अधिक दूरी पर क्षेत्र प्रतिरूप वही होता है जो कि $+2\mu\text{C}$ के आवेश से उत्पन्न क्षेत्र का प्रतिरूप होता है।

अंत में कुछ प्रश्न

1)



चित्र 1.20

मान लीजिए आवेश q धनात्मक है। जैसा कि चित्र 1.20 में दिखाया गया है, आइए हम इस आवेश को $4e$ के दायीं ओर किसी बिंदु x पर रखें जिससे कि $x < a$ हो। इस बिंदु पर आवेश q , e से $(a - x)$ की दूरी पर है जिससे कि $+e$ के कारण q पर उत्पन्न बल यह होगा :

$$F_{qe} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \times q}{(a - x)^2} (-\hat{i})$$

जहां $(-\hat{i})$, आवेश e से आवेश q की ओर का एकक सदिश है और यह ऋणात्मक x -दिशा में है।

आवेश q , $4e$ से दूरी x पर स्थित है, जिससे कि $+4e$ के कारण q पर उत्पन्न बल यह है :

$$F_{q4e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4e \times q}{x^2} \hat{i}$$

जहां \hat{i} , आवेश $+4e$ से आवेश q की ओर का एकक सदिश है और यह धनात्मक x -दिशा में है। q , साम्यावस्था में रहे, इसके लिए यह आवश्यक है कि दोनों बल एक दूसरे को अवश्य काट दें, अर्थात्

$$F_{qe} + F_{q4e} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e \times q}{(a - x)^2} (-\hat{i}) + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{4e \times q}{x^2} \hat{i} = 0$$

अर्थात्

$$\frac{4}{x^2} = \frac{1}{(a - x)^2}$$

$$\text{या } 4(a - x)^2 = x^2$$

$$\text{या } 2(a - x) = \pm x$$

यदि $+$ चिह्न लिया जाए तो

$$x = \frac{2a}{3}$$

और यदि $-$ चिह्न लिया जाए तो

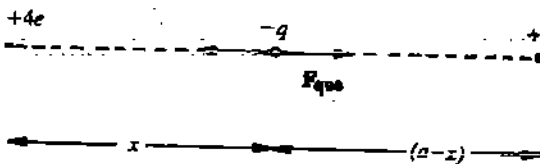
$$x = 2a$$

यहां केवल $\frac{2a}{3}$ ही x का संभव माना है, क्योंकि आवेश q को मूल बिंदु की दायीं ओर रखा गया

है और $x < a$ है अतः साम्यावस्था में रखने के लिए आवेश q को $+4e$ से $2a/3$ की दूरी पर रखना होगा।

हमने यहां यह मान लिया है कि q धनात्मक है। यदि q को अपनी साम्य स्थिति से, मान लीजिए दायीं ओर, किंचितमात्र विस्थापित किया जाए, तो F_{q4e} के मान में कमी आएगी और F_{qe} के मान में वृद्धि होगी। यह इसलिए होता है क्योंकि दो आवेशों के बीच का स्थिरवैद्युत बल इन दोनों के बीच की दूरी के वर्ग के प्रतिलोमानुपाती होता है। अतः नेट बल $(F_{qe} - F_{q4e})$, q पर दायीं ओर लगेगा जिसकी वजह से आवेश अपनी साम्य स्थिति पर पुनः लौट आएगा। अतः यह स्पष्ट है कि q की साम्यावस्था स्थायी है।

यदि q ऋणात्मक हो, तो F_{q4e} और F_{qe} आकर्षी बल होंगे और इनकी दिशा वही होगी, जैसा कि चित्र 1.21 में दिखाया गया है।



चित्र 1.21

आवेश q भी $+4e$ से $2a/3$ की दूरी पर साम्यावस्था में होगा। यदि $-q$ को, मान लीजिए, दायीं ओर, किंचितमात्र विस्थापित किया जाए तो F_{q4e} में कमी आ जाएगी जबकि F_{qe} में वृद्धि हो जाएगी। अतः दायीं ओर को लगने वाला नेट बल $(F_{qe} - F_{q4e}) - q$ पर दायीं ओर लगेगा। अतः $-q$ दायीं ओर अधिक गतिमान होगा। अतः यह स्पष्ट है कि $-q$ की साम्यावस्था अस्थायी है।

1.9 शब्दावली

अध्यारोपण	Superposition
आवेश	Charge
क्वान्टीकरण	Quantization
घर्षण विद्युत अनुक्रम	Tribo-electric series
परावैद्युतांक	Permittivity
परिणामी	Resultant
प्रतिर्षण	Repulsion
प्रबलता	Strength
विजातीय आवेश	Unlike Charges
संरक्षण	Conservation
सजातीय आवेश	Like Charges

त वि
E_A

हे :

इकाई 2 गाउस नियम

इकाई की रूपरेखा

- 2.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 2.2 गाउस नियम क्या है ?
बल रेखाओं का गणन
वैद्युत अभिवाह
- 2.3 गाउस नियम
- 2.4 गाउस नियम — कुछ अनुप्रयोग
गोलीय सममिति
रेखीय सममिति
समतलीय सममिति
आवेशित विलगित चालक
- 2.5 गाउस नियम का अवकल रूप
- 2.6 सारांश
- 2.7 अंत में कुछ प्रश्न
- 2.8 हल और उत्तर
- 2.9 शब्दावली

2.1 प्रस्तावना

माइकल फ़ाराडे (Michael Faraday) ने एक रोचक प्रयोग किया था। इस प्रयोग में धातु के बने एक बड़े बक्से को विद्युतरोपी आधार (insulated support) पर रखकर वह स्वयं इस बक्से के अंदर चला गया और बक्से को एक शक्तिशाली स्थिरवैद्युत जनित्र (electrostatic generator) से आवेशित होने दिया। बक्से के आवेशित होने के बावजूद भी वह बिलकुल सुरक्षित रहा। क्या आप इस पर विश्वास कर सकते हैं? आप विश्वास तो नहीं कर सकते, पर वास्तविकता यही रही है। आइए हम इस अद्भुत परिघटना के कारण का पता लगाएं। इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप स्वयं कारण का पता लगा सकते हैं, क्योंकि इस परिघटना को समझने में गाउस नियम से सहायता मिलती है जिसकी चर्चा हम इस इकाई में करेंगे।

गाउस नियम कूलॉम नियम का ही परिणाम है। अतः हालांकि इस नियम में कोई अतिरिक्त जानकारी नहीं दी गई है, फिर भी इसके गणितीय रूप की सहायता से विद्युत क्षेत्र से संबंधित अनेक प्रश्नों को कूलॉम नियम की तुलना में आसानी से हल किया जा सकता है। पिछली इकाई में आपने यह पढ़ा है कि किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र उस बिंदु पर रखे एकक धन आवेश (unit positive charge) पर लग रहे बल से प्राप्त हो जाता है। इस इकाई में हम विद्युत क्षेत्र के अभिवाह (flux) की संकल्पना को विकसित करेंगे और तब गाउस नियम पर चर्चा करेंगे। इस इकाई में हम यह भी देखेंगे कि किस प्रकार कूलॉम नियम की तुलना में इस नियम से विद्युत क्षेत्र को अधिक आसानी से परिकल्पित किया जा सकता है।

जिस प्रकार, यांत्रिकी (mechanics) में हम बल की संकल्पना के अतिरिक्त कार्य और ऊर्जा की संकल्पनाओं पर भी चर्चा करते हैं, ठीक उसी प्रकार स्थिरवैद्युत परिघटनाओं में हम कार्य और ऊर्जा की अभिधारणाओं पर भी चर्चा करेंगे। इसके लिए विद्युत विभव (electric potential) की संकल्पना पर चर्चा करना आवश्यक है जो कि हमें विद्युत क्षेत्र तथा कार्य और ऊर्जा के बीच की एक कड़ी को उपलब्ध कराता है। अतः अगली इकाई में हम विद्युत विभव पर चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप :

- स्वयं यह देख सकेंगे कि एक बंद पृष्ठ (closed surface) को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या उस पृष्ठ से परिवद्ध (enclosed) नेट आवेश के समानुपाती होती है,
- किसी पृष्ठ से गुजरने वाले वैद्युत अभिवाह का संबंध (i) क्षेत्र प्रबलता, (ii) पृष्ठ क्षेत्रफल और (iii) क्षेत्र के सापेक्ष पृष्ठ के अभिविन्यास (orientation) के साथ स्थापित कर सकेंगे,

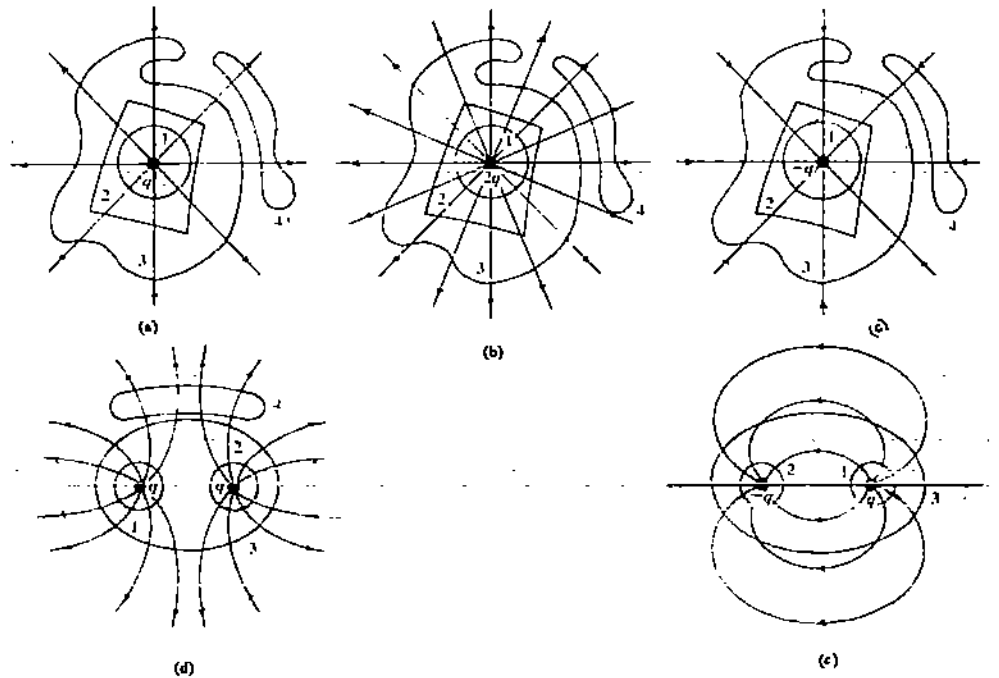
- वैद्युत अभिवाह और पृष्ठ से परिवद्ध आवेश के बीच के संबंध को सिख सकेंगे,
- विद्युत क्षेत्र में रखे किसी बंद पृष्ठ से होकर जाने वाले वैद्युत अभिवाह का परिकलन कर सकेंगे,
- गोलीय, रैखिक और समतलीय सममिति के लिए विद्युत क्षेत्रों का परिकलन करने के लिए गाउस नियम का प्रयोग कर सकेंगे,
- यह पता लगा सकेंगे कि पिछली इकाई में बतायी गई विधि की तुलना में किस्त प्रकार गाउस नियम को लागू कर अधिक आसानी से अनंततः लंबे आवेशित तार से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र का परिकलन किया जा सकता है,
- यह बता सकेंगे कि यदि एक चालक में एक नेट आवेश हो, तो यह आवेश उसके पृष्ठ पर वितरित हो जाएगा तथा धातु के बंद बक्से के अंदर कोई विद्युत क्षेत्र नहीं होता है,
- यह दिखा सकेंगे कि गाउस नियम को विद्युत क्षेत्र के डाइवर्जेंस के पदों में लिखा जा सकता है।

2.2 गाउस नियम क्या है ?

गाउस नियम, किसी विद्युत आवेश और उस आवेश से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र के बीच के संबंध को व्यक्त करता है। पिछली इकाई में आपने यह पढ़ा है कि किसी भी आवेश वितरण के कारण उत्पन्न विद्युत क्षेत्र पूरे स्थान में विद्यमान होता है। वहां आपने यह भी देखा है कि किस प्रकार वैद्युत बल रेखाओं की सहायता से दृश्य रूप में विद्युत क्षेत्र को निरूपित किया जाता है। संभवतः यह बात आपके मन में अवश्य आयी होगी कि आवेश और बल रेखाओं की संख्या के बीच कोई न कोई संबंध अवश्य होगा। क्या आपको याद है कि इकाई 1 में हमने यह बताया था कि “बल रेखाओं की संख्या” एक अस्पष्ट वाक्यांश है क्योंकि जितनी चाहें उतनी बल रेखाएं हम खींच सकते हैं? यहां हम विद्युत क्षेत्र के अभिवाह को परिभाषित करेंगे जो कि परिशुद्ध गणितीय अभिव्यक्ति (precise mathematical notion) है तथा जिसकी भौतिक दृष्टि से बल रेखाओं के रूप में कल्पना की जा सकती है। अतः जहां बल रेखाओं की संकल्पना विद्युत क्षेत्र को चित्र रूप में प्रस्तुत करने में उपयोगी सिद्ध होती है, वहीं वैद्युत अभिवाह की अभिव्यक्ति विद्युत क्षेत्र के नियमों के निर्माण में काफी उपयोगी सिद्ध होती है।

2.1.1 बल रेखाओं का गणन

आगे बढ़ने से पहले आइए हम कुछ वैश्लेषिक अभ्यास (analytical exercise) करें। चित्र 2.1 में कुछ आवेश वितरण दिखाये गये हैं।



उन पृष्ठों को बंद पृष्ठ माना जाता है जिनमें यह बिल्कुल स्पष्ट होता है कि कौन-कौन से बिंदु पृष्ठ के अंदर हैं तथा कौन-कौन से बिंदु पृष्ठ पर हैं एवं कौन-कौन से पृष्ठ के बाहर हैं। दूसरे शब्दों में, बंद पृष्ठ का एक परिवद्ध आयतन होता है। ऐसे पृष्ठों के लिए बाहर और अंदर में स्पष्ट अंतर रहता है, इसमें कोई संदिग्धता नहीं रहती है।

प्रत्येक वितरण के लिए बंद पृष्ठ से निकलने वाली बल रेखाओं की रंगीन रेखाओं से दिखाया गया है। बल रेखाओं की गिनती कर लीजिए और देखिए कि कितनी बल रेखाएं प्रत्येक पृष्ठ को प्रतिच्छेद करती हैं। गिनती करते समय आप यह मान लीजिए कि अंदर से बाहर की ओर पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखा धनात्मक है और बाहर से अंदर की ओर पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखा ऋणात्मक है। यहां हमने यह भी माना है कि आवेश q से निकलने वाली 8 रेखाएं हैं, $2q$ से निकलने वाली 16 रेखाएं हैं आदि।

चित्र 2.1क लीजिए। पृष्ठों 1 और 2 के लिए तो उत्तर 8 है। पृष्ठ 3 थोड़ा संदिग्ध (ambiguous) अवश्य है, पर इस पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या भी 8 है। इसका कारण यह है कि एक बल रेखा (जिसे मोटे रूप में दिखाया गया है) जो पृष्ठ को तीन बार प्रतिच्छेद करती है, वास्तव में दो बार बाहर जाते समय और एक बार अंदर आते समय प्रतिच्छेद करती है और इस तरह केवल एक बार ही प्रतिच्छेद किया हुआ माना जाएगा। वास्तव में, आवेश q को परिवर्द्ध करने के लिए आप जो भी बंद पृष्ठ खींचेंगे, उन पृष्ठों को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या आठ ही होगी। पृष्ठ 4 के लिए, अंदर जाते समय दो रेखाएं इसे प्रतिच्छेद करती हैं और बाहर जाते समय दो बल रेखाएं इसे प्रतिच्छेद करती हैं और इस तरह नेट प्रतिच्छेद शून्य हो जाता है। अतः पृष्ठ 4 को कोई भी बल रेखा प्रतिच्छेद नहीं करती है। हालांकि पृष्ठ 4 आवेश q के क्षेत्र में स्थित है, पर q पृष्ठ के अंदर नहीं है।

चित्र 2.1ख ठीक वैसे ही है, जैसा कि चित्र 2.1क है, अंतर केवल यही है कि इसमें पृष्ठ 1, 2 और 3 आवेश $2q$ को परिवर्द्ध करते हैं और इस तरह इन पृष्ठों को सोलह बल रेखाएं प्रतिच्छेद करती हैं। यहां भी पृष्ठ 4 का, जो आवेश को परिवर्द्ध नहीं करता है, नेट प्रतिच्छेद शून्य है। चित्र 2.1ग वैसे ही है, जैसा कि चित्र 2.1क है, अंतर केवल आवेश के चिह्न में है। अतः यहां आवेश $-q$ को परिवर्द्ध करने वाले पृष्ठों को -8 बल रेखाएं प्रतिच्छेद करती हैं।

चित्र 2.1घ में, पृष्ठ 1 और पृष्ठ 2 प्रत्येक आवेश q को परिवर्द्ध करता है, अतः प्रत्येक पृष्ठ को आठ बल रेखाएं प्रतिच्छेद करती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि पृष्ठ 3 को कितनी बल रेखाएं प्रतिच्छेद करती हैं? आपका उत्तर सोलह होना चाहिए। आप देखें कि पृष्ठ 3 से परिवर्द्ध कुल आवेश क्या है। यहां आवेश $q + q = 2q$ है, जैसा कि आशा थी। पृष्ठ 4 के लिए बल रेखाओं का नेट प्रतिच्छेद शून्य है। यह उत्तर तो स्पष्ट था क्योंकि यह पृष्ठ किसी भी आवेश को परिवर्द्ध नहीं करता है।

आइए हम चित्र 2.1ङ देखें जिसमें समान परिमाण किन्तु विपरीत चिह्न वाले दो आवेश दिखाए गए हैं, पृष्ठ 1 को आठ बल रेखाएं प्रतिच्छेद करती हैं। यह स्पष्ट है क्योंकि यह आवेश q को परिवर्द्ध करता है। इसी प्रकार, क्योंकि पृष्ठ 2, आवेश $-q$ को परिवर्द्ध करता है इसलिए इसे -8 बल रेखाएं प्रतिच्छेद करती हैं। पृष्ठ 3 एक रोचक पृष्ठ है। यह दोनों आवेश q और $-q$ को परिवर्द्ध करता है। नेट परिवर्द्ध आवेश शून्य है। बल रेखाओं की गिनती कीजिए। इसमें जितनी बल रेखाएं बाहर जाती हैं उतनी ही बल रेखाएं अंदर आती हैं, अतः पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या शून्य है।

विभिन्न वितरणों के लिए पृष्ठों को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की गिनती से संबंधित इस सरल अभ्यास से आपको विद्युत क्षेत्र के बारे में एक सरल कथन मिल जाता है। यह कथन इस प्रकार है — एक बंद पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या उस पृष्ठ द्वारा परिवर्द्ध नेट आवेश के समानुपाती होती है।

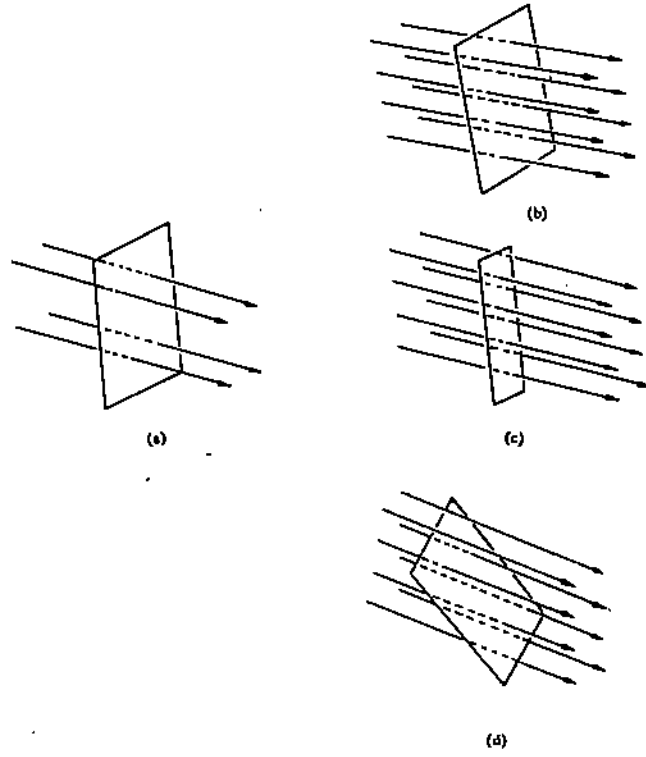
बोध प्रश्न 1

यदि आप चित्र 2.1ङ में दिखाए गए पृष्ठ 3 के निकट एक विशाल आवेश Q लाएं तो क्या होगा? कितनी बल रेखाएं पृष्ठ 1, 2 और 3 को प्रतिच्छेद करेंगी?

पृष्ठ को प्रतिच्छेद कर रही बल रेखाओं के बारे में विस्तृत जानकारी देने के लिए हम एक नई संकल्पना अर्थात् विद्युत अभिवाह की संकल्पना को विकसित करेंगे।

2.2.2 विद्युत अभिवाह (Electric flux)

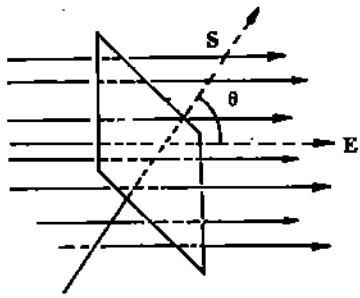
पिछले उपभाग में हमने बंद पृष्ठ लिया था। आइए अब हम एकसमान विद्युत क्षेत्र E में, क्षेत्रफल S वाला एक सपाट शीट जैसा एक खुला पृष्ठ लें, जैसा कि चित्र 2.2क में दिखाया गया है। मान लीजिए विद्युत क्षेत्र E चार बल रेखाओं से निरूपित किया गया है।



चित्र 2.2 : (क) एक सपाट पृष्ठ (शीट) को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या (ख) क्षेत्र प्रबलता (ग) पृष्ठ क्षेत्रफल तथा (घ) क्षेत्रदिशा के सापेक्ष पृष्ठ के अभिविन्यास (orientation) पर निर्भर करती है।

चित्र 2.2 में दिखाए गए पृष्ठ खुले पृष्ठ है क्योंकि ये किसी परिवर्तन आयतन को परिभाषित नहीं करते हैं।

यदि यहां एक अन्य एकसमान विद्युत क्षेत्र $2E$ हो, तो इस क्षेत्र को आठ बल रेखाओं से निरूपित किया जाएगा क्योंकि हमने यह माना है कि E चार बल रेखाओं द्वारा निरूपित हो रहा है। अब उसी सपाट शीट को इस क्षेत्र में लाएं (जिसे चित्र 2.2ख में दिखाया गया है) और इस क्षेत्र को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की गिनती कर लें। उत्तर आठ होगा। चित्र 2.2ग में क्षेत्र तो वही है जो कि चित्र 2.2ख में है, पर शीट का क्षेत्रफल आधा है। अतः शीट को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या आधी हो जाती है। यदि चित्र 2.2ख के सपाट शीट को घुमाकर उस स्थिति में कर दिया जाए जैसा कि चित्र 2.2घ में दिखाया गया है, तो यह बल रेखाओं पर लंब नहीं रह जाता और इस तरह शीट को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या कम हो जाती है।



चित्र 2.3 : क्षेत्र को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या $\cos \theta$ के समानुपाती होती है, जहां θ , क्षेत्र और पृष्ठ के लंब के बीच का कोण है।

यहां हम यह पाते हैं कि किसी भी पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या निम्नलिखित तीन बातों पर निर्भर करती है : क्षेत्र प्रबलता E , पृष्ठ क्षेत्रफल S और क्षेत्र के सापेक्ष पृष्ठ का अभिविन्यास। पृष्ठ का अभिविन्यास बताने के लिए हम पृष्ठ पर एक लंब डालते हैं। यदि विद्युत क्षेत्र और लंब के बीच का कोण θ हो, जैसा कि चित्र 2.3 में दिखाया गया है, तब पृष्ठ से होकर जाने वाली बल रेखाओं की संख्या θ के मान पर निर्भर करती है अर्थात्

जब $\theta = 0^\circ$; तब पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाएं अधिकतम होती हैं।

जब $\theta = 90^\circ$; तब पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या शून्य होती है।

स्पष्ट है कि पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या पृष्ठ पर डाले गए लंब पर क्षेत्र के प्रक्षेप, अर्थात् $\cos \theta$ के समानुपाती होती है (ध्यान रहे कि $\cos 0^\circ = 1$ और $\cos 90^\circ = 0$ है)। उन तीन राशियों को, जिन पर बल रेखाओं की संख्या निर्भर करती है, एक साथ लेने पर हमें यह प्राप्त होता है:

पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या $\propto ES \cos \theta$

अदिश गुणनफल (dot product) में $\cos \theta$ शामिल कर लेने पर हम यह लिख सकते हैं :

$$\text{पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या} \propto E \cdot S \quad (2.1)$$

जहां E विद्युत क्षेत्र सदिश है और S एक ऐसा सदिश है जिसका परिमाण पृष्ठ के क्षेत्रफल के बराबर है और जिसकी दिशा, पृष्ठ के लंब की दिशा की ओर है।

समीकरण 2.1 के वाम पक्ष की राशि एक अस्पष्ट पद है, क्योंकि जितनी चाहे उतनी बल रेखाएं हम खींच सकते हैं। पर, समीकरण के दक्षिण पक्ष की राशि का एक निश्चित मान होता है। इसे विद्युत अभिवाह (electric flux) कहा जाता है और Φ से प्रकट किया जाता है।

अतः $\Phi = E \cdot S$

(2.2)

गाउस नियम

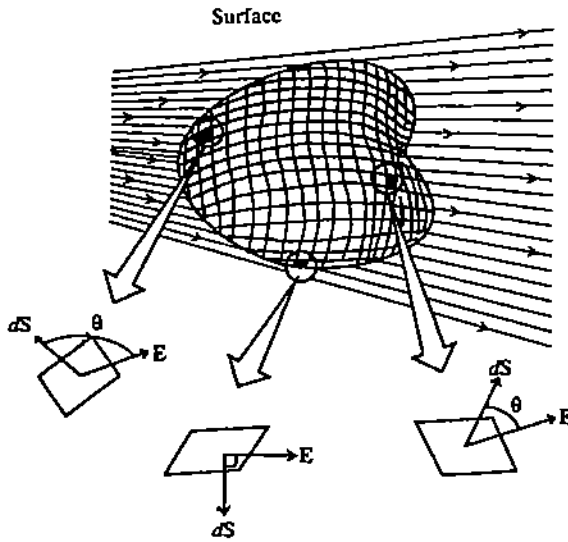
समीकरण (2.2) को देखने से यह पता चलता है कि दो सदिशों का अदिश गुणनफल होने के कारण अभिवाह स्वयं एक अदिश राशि है। क्योंकि E को NC^{-1} में मापा जाता है, इसलिए अभिवाह का SI मात्रक $Nm^{-2} C^{-1}$ होता है।

दो सदिश राशियों A और B का अदिश गुणनफल $A \cdot B = AB \cos\theta$ होता है। जहाँ θ , सदिशों A और B के बीच का कोण है।

एक नैकसमान (non-uniform) विद्युत क्षेत्र में रखे किसी बंद पृष्ठ से, जैसा कि चित्र 2.4 में दिखाया गया है, संपूर्ण अभिवाह को ज्ञात करने के लिए हम पृष्ठ को छोटे-छोटे अल्पांशों में बांट देते हैं जिससे कि प्रत्येक अल्पांश पर विद्युत क्षेत्र लगभग एक समान रहे। तब समीकरण (2.2) के अनुसार प्रत्येक अल्पांश से होकर जाने वाले अभिवाह को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$d\Phi = E \cdot dS \quad (2.3)$$

जहाँ E अल्पांश पर विद्युत क्षेत्र है और dS एक सदिश है जिसका परिमाण, क्षेत्रफल dS के बराबर है और दिशा पृष्ठ पर बहिर्मुखी खींचे गए अभिलंब की ओर है।



चित्र 2.4 : (क) एक विद्युत क्षेत्र में स्वेच्छ आकार (arbitrary shaped) का एक बंद पृष्ठ। पृष्ठ को dS क्षेत्रफल वाले छोटे-छोटे अल्पांशों में बांट दिया गया है। (ख) x , y और z से चिह्नित तीन प्रतिनिधि अल्पांशों के लिए विद्युत क्षेत्र सदिश E और क्षेत्रफल सदिश dS ।

सभी अल्पांशों से होकर जाने वाले अभिवाहों को जोड़ने पर सम्पूर्ण-पृष्ठ से होकर जाने वाला संपूर्ण अभिवाह प्राप्त हो जाएगा। यदि प्रत्येक अल्पांश की संख्या काफी अधिक हो तो योगफल एक पृष्ठ समाकल (surface integral) हो जाता है। अतः संपूर्ण अभिवाह यह होता है :

$$\Phi = \iint E \cdot dS$$

यदि पृष्ठ बंद हो, तो इसे प्रायः निम्नलिखित समाकल के रूप में व्यक्त किया जाता है

$$\Phi = \oiint E \cdot dS = \oint E \cdot dS \quad (2.4)$$

समाकल चिह्न पर बने वृत्त से यह पता चलता है कि समाकलन पूरे बंद पृष्ठ पर किया जा रहा है। इस बात को बताने से पहले कि किस प्रकार ऊपर दिए गए व्यंजक से गाउस नियम प्राप्त होता है, आप यह जानना चाहेंगे कि पृष्ठ समाकल होता क्या है।

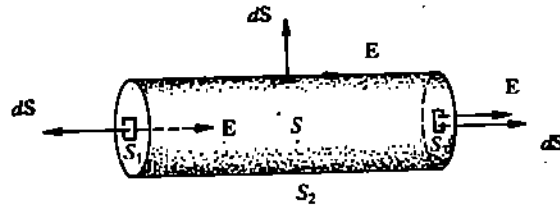
पृष्ठ S पर किसी सदिश फलन F के पृष्ठ समाकलन (surface integral) का अर्थ केवल यह होता है : S को छोटे-छोटे अल्पांशों अर्थात् पृष्ठ अल्पांशों (surface elements) में बांट दीजिए। प्रत्येक अल्पांश एक सदिश राशि होती है, जिसकी दिशा बहिर्मुखी अभिलंब की ओर होती है तथा परिमाण, अल्पांश के क्षेत्रफल के बराबर होता है। प्रत्येक अल्पांश के लिए क्षेत्रफल सदिश और सदिश फलन F का अदिश गुणनफल लीजिए। इन सभी गुणनफलों को जोड़ दीजिए। यदि अल्पांश बहुत ही छोटे हो जायें तो इस योगफल की सीमा पृष्ठ समाकल होती है।

समाकलों को सरल ढंग से लिखने के लिए पृष्ठ समाकलों को केवल एक समाकल चिह्न के साथ लिखा जाता है। अतः यह बात ध्यान में रखनी होगी कि जब समाकल एक क्षेत्र dS पर लेना होता है तो उसका अर्थ होता है पृष्ठ समाकल या द्विक समाकल (double integral)।

आइए हम यह देखें कि किस प्रकार बंद पृष्ठ से गुजरने वाले संपूर्ण अभिवाह को ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण 1

चित्र 2.5 में एकसमान विद्युत क्षेत्र E में त्रिज्या R वाले, एक बेलन के रूप में, बंद पृष्ठ S को दिखाया गया है। बेलन का अक्ष क्षेत्र के समांतर है। इस बंद पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र का अभिवाह Φ ज्ञात कीजिए।



चित्र 2.5 : एक बेलनाकार पृष्ठ, जो तिर्रे पर सगी टोपी से बंद है, एकसमान विद्युत क्षेत्र में विद्यमान है। बेलन का अक्ष क्षेत्र-दिशा के समांतर है।

हल :

हम पृष्ठ S पर संपूर्ण वैद्युत अभिवाह को निम्नलिखित तीन पदों के योगफल के रूप में लिख सकते हैं : पृष्ठ S_1 अर्थात् बायीं बेलन-टोपी पर एक समाकल, S_2 अर्थात् बेलनाकार पृष्ठ पर एक समाकल और S_3 अर्थात् दायीं-बेलन टोपी पर एक समाकल। इस तरह, समीकरण (2.4) से हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} \Phi &= \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

बायीं टोपी के सभी बिंदुओं के लिए कोण θ , 180° का है, E अचर है और सभी सदिश $d\mathbf{S}$ समांतर है। अतः

$$\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int E (\cos 180^\circ) dS = -E \int dS = -\pi ER^2,$$

क्योंकि πR^2 टोपी का क्षेत्रफल है। इसी प्रकार, दायीं टोपी के लिए

$$\int_{S_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = +\pi ER^2,$$

क्योंकि यहां सभी बिंदुओं के लिए कोण θ शून्य है। अंत में, पृष्ठ S_2 के लिए

$$\int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0,$$

क्योंकि यहां बेलनाकार पृष्ठ के सभी बिंदुओं के लिए कोण θ , 90° है। अतः बेलनाकार पृष्ठ S पर संपूर्ण अभिवाह यह हो जाता है :

$$-\pi ER^2 + 0 + \pi ER^2 = 0$$

अतः इस बंद पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र का नेट बहिर्मुखी अभिवाह शून्य है।

2.3 गाउस नियम

पिछले भाग में हमने दो सरल परिणाम प्राप्त किए हैं : (i) किसी बंद पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल-रेखाओं की संख्या उस पृष्ठ से परिबद्ध नेट आवेश के समानुपाती होती है और (ii) अभिवाह की संकल्पना, जो एक पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की भौतिक अभिव्यक्ति को व्यक्त करती है। नेट परिणाम यह है : किसी बंद पृष्ठ पर वैद्युत अभिवाह उस पृष्ठ से परिबद्ध नेट आवेश के समानुपाती होता है। गणितीय रूप में इस प्रकार लिखते हैं :

$$\Phi \propto q_{\text{सीध}} \quad (2.5)$$

$$\text{या } \Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \propto q_{\text{सीध}} \quad (2.6)$$

समीकरण (2.5) या (2.6) का अनुक्रमानुपाती नियतांक (proportionality constant) ज्ञात करने के लिए निर्वर्त में रखा गया एक धन बिंदु आवेश q को केन्द्र मानकर त्रिज्या R वाला एक गोलीय पृष्ठ लीजिए (चित्र 2.6 देखें)। किसी भी पृष्ठ पर अभिवाह का मान समीकरण (2.4) की सहायता से निम्न प्रकार लिखा जाता है :

$$\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \oint E dS \cos\theta \quad (2.7)$$

जहाँ θ विद्युत क्षेत्र की दिशा और पृष्ठ पर बाहर की ओर खींचे गए अभिलंब के बीच का कोण है। आप इकाई 1 में यह देख चुके हैं कि बिंदु आवेश के कारण R दूरी पर उत्पन्न विद्युत क्षेत्र का परिमाण यह होता है :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2}$$

जहाँ ϵ_0 निर्वर्त का परावेद्यतांक है।

क्षेत्र की दिशा त्रिज्यतः बहिर्मुखी (radially outward) होती है अर्थात् सर्वत्र पृष्ठ पर डाले गए बहिर्मुखी अभिलंब के समांतर होती है। इस स्थिति में $\theta = 0$ अर्थात् $\cos\theta = 1$ है। समीकरण (2.7) में E और $\cos\theta$ के मान प्रतिस्थापित करने पर त्रिज्या R वाले गोलीय पृष्ठ पर अभिवाह यह हो जाता है :

$$\Phi = \oint_{\text{गोला}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} \oint dS$$

विद्युत क्षेत्र के परिमाण वाले व्यंजक को समाकल चिह्न के बाहर लिया गया है, क्योंकि गोलीय पृष्ठ पर सर्वत्र इसका मान समान रहता है। (या दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि यह अचर होता है।) शेष समाकल गोले के पृष्ठ पर सभी अल्पगु अल्पांशों dS के क्षेत्रफलों का जोड़ है - दूसरे शब्दों में, शेष समाकल गोले का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल अर्थात् $4\pi R^2$ है। तब अभिवाह यह हो जाता है :

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{R^2} 4\pi R^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (2.8)$$

समीकरण (2.8) को समीकरण (2.5) से तुलना करने पर यह पता चलता है कि अनुक्रमानुपाती नियतांक $1/\epsilon_0$ है। ϵ_0 का मान $8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ M}^{-2}$ है। अतः समीकरण (2.6) यह हो जाता है

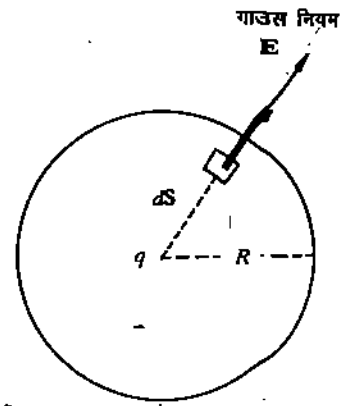
$$\Phi = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{सीध}}}{\epsilon_0} \quad (2.9)$$

इसे गाउस नियम (Gauss's law) कहा जाता है। इस नियम के अनुसार गोले पर वैद्युत अभिवाह आवेश के समानुपाती होता है और पृष्ठ की त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता है। किसी स्वेच्छ बंद पृष्ठ के लिए समीकरण (2.9) को सिद्ध करने के लिए पहले हम घन कोण (solid angle) को परिभाषित करेंगे।

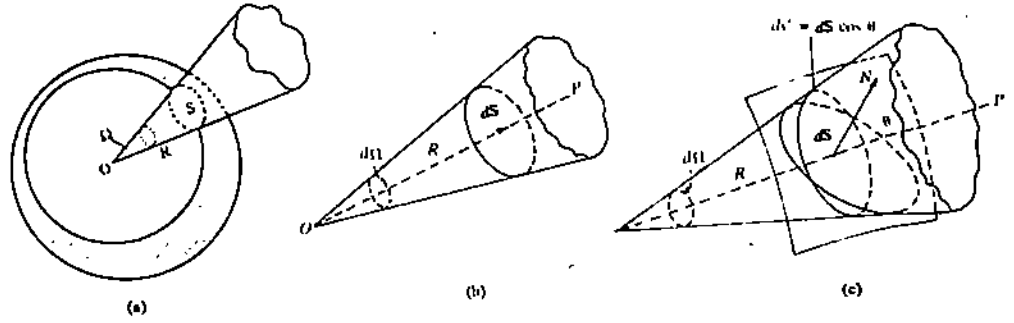
घन कोण एक शंक्वाकार (conical) पृष्ठ से घिरा हुआ क्षेत्र (space) होता है जैसा कि चित्र 2.7क में दिखाया गया है। इसके मान को स्टेरेडियन (संक्षेप में sr) में व्यक्त किया जाता है। R का कोई भी मान और शीर्ष O को केन्द्र लेकर एक गोलीय पृष्ठ खींच कर तब निम्नलिखित संबंध को लागू कर घन कोण का मान प्राप्त किया जाता है

$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$

जहाँ S , घन कोण द्वारा अंतःखंडित (intercepted) गोलीय टोपी का क्षेत्रफल है। क्योंकि गोले का पृष्ठ क्षेत्रफल $4\pi R^2$ है, इसलिए यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि एक बिंदु के परितः पूर्ण घन कोण 4π स्टेरेडियन होता है।



चित्र 2.6 : बिंदु आवेश q द्वारा उत्पन्न विद्युत क्षेत्र का मान, किसी गोलीय पृष्ठ पर, जिसके केन्द्र पर यह q हो, समान होता है तथा सर्वत्र पृष्ठ के संव होता है।



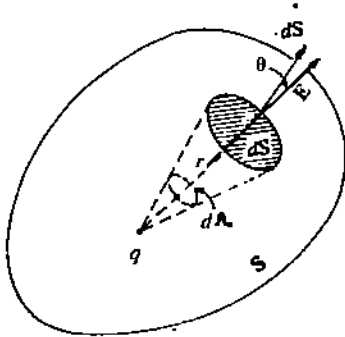
चित्र 2.7 : घन कोण

जब घन कोण बहुत छोटा होता है (चित्र 2.7ख) तब पृष्ठ क्षेत्रफल S , dS हो जाता है और यह आवश्यक नहीं रहता कि यह गोलीय टोपी ही हो, बल्कि यह OP पर लंब एक छोटा समतल पृष्ठ हो सकता है, जिससे कि

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$

कुछ स्थितियों में पृष्ठ dS , OP पर लंब नहीं होता है, बल्कि इसका अभिलंब N , OP के साथ कोण θ बनाता है, जैसा कि चित्र 2.7ग में दिखाया गया है। तब dS को उस समतल पर प्रक्षिप्त करना आवश्यक हो जाता है जो OP के लंब हों जिससे कि क्षेत्रफल $dS' = dS \cos \theta$ हो जाता है। अतः

$$d\Omega = \frac{dS \cos \theta}{R^2}$$



चित्र 2.8 : एक आवेश को परिवर्तन करने वाले बंद पृष्ठ पर समुत् अभिवाह, पृष्ठ के आकार पर निर्भर नहीं करता है।

घन कोण की परिभाषा में शंकु के आकार का कोई महत्व नहीं होता। इसकी परिभाषा में प्रक्षिप्त क्षेत्र के आकार का भी कोई महत्व नहीं होता बल्कि महत्व होता है तो केवल प्रक्षिप्त पृष्ठ के क्षेत्रफल का।

आइए हम किसी भी बंद पृष्ठ S के अंदर एक आवेश q लें, जैसा कि चित्र 2.8 में दिखाया गया है। पृष्ठ के प्रत्येक बिंदु पर विद्युत क्षेत्र E , आवेश से त्रिज्यतः बहिर्मुखी (radially outward) होता है। आइए हम पृष्ठ पर एक काफी छोटा क्षेत्रफल dS लें जिससे कि dS के प्रत्येक बिंदु पर E को समान परिमाण और दिशा वाला माना जा सके। यदि E और पृष्ठ dS पर बहिर्मुखी अभिलंब के बीच का कोण θ हो, तो समीकरण (2.3) के अनुसार क्षेत्रफल dS पर अभिवाह $d\Phi$ यह होता है :

$$d\Phi = E \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \theta dS$$

यहां $dS \cos \theta / r^2$, आवेश q से देखने पर पृष्ठ अल्पांश dS द्वारा अंतरित घन कोण $d\Omega$ है। अतः

$$d\Phi = E \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega$$

पृष्ठ S पर संपूर्ण अभिवाह प्राप्त करने के लिए पूरे बंद पृष्ठ पर निम्न प्रकार से समाकलन किया जाता है

$$\int d\Phi = \oint E \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int d\Omega$$

किसी बिंदु के परितः संपूर्ण घन कोण 4π होता है। अतः

$$\Phi = \oint E \cdot dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

यह परिणाम वही है जो कि आवेश को केन्द्र मानकर लिए गए गोलीय पृष्ठ के लिए प्राप्त किया गया परिणाम था। अतः समीकरण (2.9) से व्यक्त संबंध किसी भी बंद पृष्ठ के लिए मान्य होता है चाहे पृष्ठ के अंदर आवेश की स्थिति कुछ भी क्यों न हो।

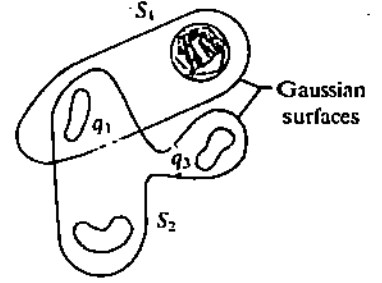
बोध प्रश्न 2

क्या हम चित्र 2.2 में दिखाए गए पृष्ठ पर गाउस नियम लागू कर सकते हैं? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

ध्यान दीजिए कि यदि आवेश के चिह्न को ध्यान में रखा जाये तो समीकरण (2.9) का q नेट आवेश को व्यक्त करता है। यदि पृष्ठ समान और विपरीत आवेशों को परिवर्द्ध करता हो; तो अभिवाह शून्य होता है। q के मान पर पृष्ठ के बाहर स्थित आवेश का कोई प्रभाव नहीं होता। हालांकि समीकरण (2.9) के वाम पक्ष का E पृष्ठ के अंदर और पृष्ठ के बाहर स्थित सभी आवेशों से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र है।

बोध प्रश्न 3

चित्र 2.9 में तीन वस्तुएं दिखाई गई हैं, जिनमें प्रत्येक पर विद्युत आवेश है तथा एक आवेश रहित सिक्का भी है। दो पृष्ठों के अनुप्रस्थ परिच्छेद दिखाए गए हैं। इन पृष्ठों में से प्रत्येक पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र का अभिवाह क्या है? यहां यह मान लीजिए कि $q_1 = +3.1 \text{ nC}$, $q_2 = -5.9 \text{ nC}$ और $q_3 = -3.1 \text{ nC}$.



चित्र 2.9 : तीन वस्तुएं जिनमें प्रत्येक पर विद्युत आवेश है तथा एक आवेश रहित सिक्का।

यह न मानकर कि बंद पृष्ठ में बिंदु आवेश है, आइए हम यह मान लें कि पृष्ठ से परियद्ध पूरे आयतन पर आवेश सतत रूप से वितरित है। यदि dV एक छोटा आयतन अल्पांश हो, तो इस आयतन अल्पांश में विद्यमान आवेश ρdV होगा। अतः पूरे आयतन में परिवर्द्ध कुल आवेश $\iiint \rho dV$ होता है। तब गाउस नियम को इस रूप में व्यक्त किया जाता है

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint \rho dV$$

सरलता के लिए इसे इस रूप में भी लिखा जाता है

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \tag{2.10}$$

सरलता के लिए, बहुत समाकल (multiple integral) चिह्न लिखने के स्थान पर समाकलन को एक समाकल चिह्न से निरूपित किया जाता है जब समाकल को आयतन dV पर लिया जाए, तो इसका अर्थ होगा आयतन समाकल या त्रिक समाकल (triple integral)।

जहां \int_V बंद पृष्ठ से परिवर्द्ध क्षेत्र पर आयतन समाकल (volume integral) को व्यक्त करता है।

समीकरण (2.10) गाउस नियम के क्यन का समाकल रूप (integral form) है।

अब आप यह जानना चाहेंगे कि आयतन समाकल (volume integral) क्या होता है। मान लीजिए बंद पृष्ठ में परिवर्द्ध क्षेत्र V है। यह त्रिविम आकाश (three dimensional space) वाला एक क्षेत्र है। क्षेत्र V को n अल्पांश आयतनों dV_1, dV_2, \dots, dV_n में बांट दीजिए। तब राशियों जैसे ρ और dV_1 का गुणनफल, अल्पांश आयतन dV_1 में परिवर्द्ध आवेश को व्यक्त करेगा। इन सभी गुणनफलों को जोड़िए, अर्थात्

$$\sum_{r=1}^n \rho dV_r$$

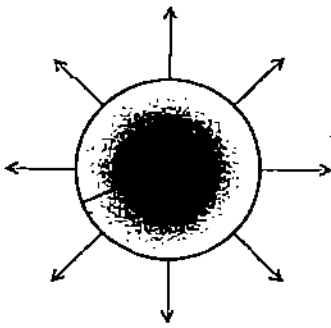
यदि n अनंत की ओर प्रवृत्त होए और प्रत्येक अल्पांश आयतन शून्य की ओर प्रवृत्त होए तो इस योगफल की सीमा (limit of this sum) को क्षेत्र V पर ρ का आयतन समाकल कहा जाता है। यह पूरे क्षेत्र V से परिवर्द्ध संपूर्ण आवेश को निरूपित करता है और इसे $\iiint \rho dV$ से प्रकट किया जाता है।

हालांकि गणितीय रूप में गाउस नियम का भौतिक अर्थ अधिक स्पष्ट होता है, पर गणितीय ढंग से समीकरण (2.10) का हल प्राप्त करना अधिक कठिन होता है। अनेक प्रश्नों के हल में गाउस नियम का अवकल रूप (differential form) अधिक उपयोगी होता है। हम गाउस नियम के इस रूप को बाद में भाग 2.5 में प्राप्त करेंगे। आइए अब हम यह देखें कि सममिति ज्यामिति वाली वस्तुओं से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए गाउस नियम किस प्रकार उपयोगी होता है। ऐसी कुछ स्थितियों पर चर्चा हम अगले भाग में करेंगे।

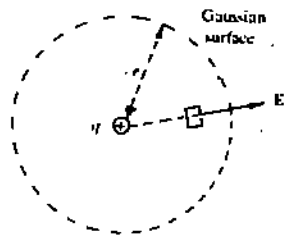
2.4 गाउस नियम - कुछ अनुप्रयोग

गाउस नियम, किसी भी आवेश वितरण को परिवर्द्ध करने वाले किसी भी काल्पनिक बंद पृष्ठ, जिसे गाउसीय पृष्ठ (Gaussian surface) कहा जाता है, पर लागू होता है। फिर भी पृष्ठ समाकल का मान निकालना केवल तभी सरल होता है जब आवेश वितरण में पर्याप्त सममिति (symmetry) हो। ऐसी स्थिति में, कूलॉम नियम की तुलना में गाउस नियम को लागू कर विद्युत क्षेत्र को अधिक आसानी से परिकल्पित किया जा सकता

निर्वात में स्थिरविद्युतिकी



चित्र 2.10 : गोलाकार सममित आवेश वितरण के लिए एक ही हुई त्रिज्या के गोलीय पृष्ठ पर सभी विद्युत क्षेत्र सदिश समान परिमाण के होते हैं एवं उनकी दिशा त्रिज्या दिशा की ओर होती है।



चित्र 2.11 : बिंदु आवेश पर केन्द्रित एक गोलीय गाउसीय पृष्ठ

है। क्योंकि गाउस नियम किसी भी बंद पृष्ठ के लिए मान्य होता है, इसलिए पृष्ठ समाकल का मान ज्ञात करने के लिए आवेश वितरण की सममिति के जैसा ही सममिति वाला कोई भी पृष्ठ लिया जा सकता है। यहां हम तीन महत्वपूर्ण सममितियों के लिए गाउस नियम के उपयोग को प्रदर्शित करेंगे।

2.4.1 गोलीय सममिति (spherical symmetry)

एक आवेश वितरण, गोलाकार सममित (spherically symmetric) तब होता है जब किसी बिंदु पर आवेश घनत्व (अर्थात् आवेश प्रति एकक आयतन) का मान केन्द्रीय बिंदु (जिसे सममिति केन्द्र (centre of symmetry) भी कहा जाता है) से इस बिंदु तक की दूरी पर ही केवल निर्भर करता हो तथा दिशा पर निर्भर न करता हो। चित्र 2.10 में आवेश के गोलाकार सममित वितरण को इस तरह निरूपित किया गया है कि केन्द्र पर आवेश घनत्व काफी अधिक और r से परे आवेश घनत्व शून्य हो। आवेश वितरण के उदाहरण हैं : (i) बिंदु आवेश (ii) एक समान रूप से आवेशित गोला, और (iii) एक समान रूप से आवेशित पतला गोलीय कोश (spherical shell)।

i) बिंदु आवेश का E

चित्र 2.11 में एक घन बिंदु आवेश q दिखाया गया है। गाउस नियम की सहायता से आइए हम आवेश q से r दूरी पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करें। इसके लिए r त्रिज्या का एक संकेन्द्रीय गोलीय गाउसीय पृष्ठ खींचिए। सममिति से हम यह जानते हैं कि E त्रिज्यतः बहिर्मुखी होता है। यदि हम गाउसीय पृष्ठ को अवकल क्षेत्रों (differential areas) dS में बांट दें तो E और dS दोनों ही पृष्ठ पर लंब होंगे। E और dS के बीच का कोण θ शून्य है। इस तरह, राशि $E \cdot dS$ केवल $E dS$ हो जाती है और गाउस नियम (समीकरण 2.9 देखिए) यह हो जाता है :

$$\epsilon_0 \oint E \cdot dS = \epsilon_0 \oint E dS = q$$

क्योंकि गाउसीय पृष्ठ के सभी बिंदुओं के लिए E का परिमाण समान होता है, इसलिए इसे हम समाकल के बाहर निकाल सकते हैं। तब हमें यह प्राप्त होता है

$$\epsilon_0 E \oint ds = q \quad (2.11)$$

चूंकि, समीकरण (2.11) में समाकल गोलीय पृष्ठ के क्षेत्रफल अर्थात् $4\pi r^2$ को निरूपित करता है, अतः समीकरण यह हो जाता है

$$\epsilon_0 E (4\pi r^2) = q$$

या

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (2.12)$$

समीकरण (2.12) कूलॉम नियम है जिसे कि हमने इकाई-1 में लिखा है। इससे यह पता चलता है कि गाउस नियम और कूलॉम नियम दो अलग-अलग भौतिक नियम नहीं हैं, बल्कि अलग-अलग तरीकों से व्यक्त किये गये एक ही नियम हैं।

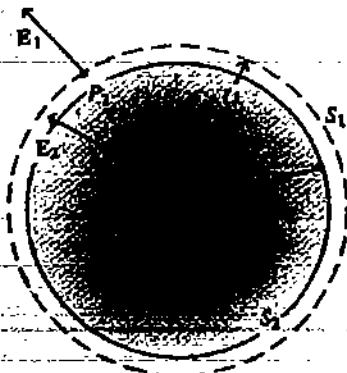
ii) गोलीय आवेश वितरण का E

मान लीजिए संपूर्ण आवेश Q त्रिज्या R वाले गोले के पूरे भाग पर एक समान रूप से वितरित है, जैसा कि चित्र 2.12 में दिखाया गया है। आइए हम वितरण के बाहर स्थित P_1 जैसे बिंदु और वितरण के अंदर स्थित P_2 जैसे बिंदु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करें। यदि क्षेत्र ज्ञात करने के लिए आप कूलॉम नियम लागू करें, तो आपको एक समाकलन करना पड़ेगा जो कि आवेश वितरण के प्रत्येक अल्पांश आयतन (volume element) से उत्पन्न P_1 बिंदु पर विद्युत क्षेत्र सदिशों के योग को व्यक्त करेगा। आइए हम गाउस नियम की सहायता से एक अन्य विधि अपनायें।

क) आवेश वितरण से बाहर स्थित बिंदुओं पर क्षेत्र

बिंदु P_1 , जहां हम विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना चाहते हैं, से होते हुए त्रिज्या r वाला एक काल्पनिक गाउसीय पृष्ठ S_1 खींचें। मान लीजिए क्षेत्र के परिमाण को E से प्रकट किया गया है। गोलीय सममिति होने के कारण इस गाउसीय पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर विद्युत क्षेत्र समान होता है। और, गाउसीय पृष्ठ के किसी भी बिंदु पर क्षेत्र त्रिज्यतः दिष्ट (radially directed) होता है अर्थात् पृष्ठ पर लंब होता है जिससे कि $\cos\theta = 1$ । तब इस गाउसीय गोले S_1 पर अभिवाह यह हो जाता है :

(यहां यह मान लिया गया है कि गोले पर नेट घन आवेश है, यदि नेट ऋण आवेश हो तो उस स्थिति में क्षेत्र अंतर्मुखी होगा और $\cos\theta = -1$ होगा)



चित्र 2.12 : गोलीय आवेश वितरण का विद्युत क्षेत्र। पृष्ठ S_1 पूरे आवेश को परिवेष्ट करता है जबकि पृष्ठ S_2 केवल कुछ आवेश को ही परिवेष्ट करता है।

$$\begin{aligned}\Phi &= \int \mathbf{E}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = \oint E_1 \cos\theta \, dS_1 \\ &= E_1 \oint dS_1 \\ &= 4\pi r_1^2 E_1\end{aligned}\quad (2.13)$$

क्योंकि $\oint dS_1$ गोले S_1 का कुल पृष्ठ क्षेत्रफल है अर्थात् $4\pi r_1^2$ है।

गाउस नियम के अनुसार गोला S_1 पर अभिवाह $\frac{q}{\epsilon_0}$ होता है, जहाँ q , गोला S_1 से परिवद्ध नेट आवेश है। समीकरण (2.13) के अभिवाह को Q/ϵ_0 के बराबर रखने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$4\pi r_1^2 E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{क्योंकि गोला } S_1 \text{ से परिवद्ध आवेश } Q \text{ है})$$

जिससे कि

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r_1^2} \quad (2.14)$$

इससे यह पता चलता है कि पृष्ठ S_1 के सभी बिंदुओं पर क्षेत्र समान रहता है और ऐसा मालूम पड़ता है, जैसे कि पृष्ठ S_1 के अंदर के सभी आवेश केन्द्र पर विद्यमान हो।

ख) आवेश वितरण के अंदर स्थित बिंदुओं के लिए क्षेत्र

आवेश वितरण के अंदर का क्षेत्र आवेश के वितरण पर निर्भर करता है। ऐसा इसलिए है, क्योंकि चित्र 2.12 के पृष्ठ S_2 जैसा कोई भी गाउसीय गोला जिसकी त्रिज्या $r < R$ हो, वह पूरे आवेश Q को परिवद्ध नहीं करता है। परिवद्ध आवेश, आवेश-वितरण पर निर्भर करता है। मान लीजिए बिंदु P_2 से होते हुए, जहाँ हम विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना चाहते हैं, त्रिज्या r_2 वाला एक गाउसीय गोला S_2 खींचा गया है। मान लीजिए बिन्दु P_2 पर स्थित क्षेत्र को E_2 से प्रकट किया गया है। गोला S_2 के लिए अभिवाह से संबंधित समीकरण (2.9) लागू तो होता है, पर, अब परिवद्ध आवेश Q न होकर Q का कुछ भिन्नात्मक

भाग होता है। आवेशित गोले का आयतन $\frac{4\pi R^3}{3}$ है और यह कुल आवेश Q आविष्ट करता है। क्योंकि

पूरे गोले पर आवेश एक समान रूप से वितरित है, इसलिए आयतन आवेश घनत्व का मान निश्चित होगा अर्थात्

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

अतः गोला S_2 से परिवद्ध आवेश उस गोले के आयतन और आयतन आवेश घनत्व का गुणनफल होगा अर्थात्

$$q_{\text{परिवद्ध}} = \frac{4\pi}{3} r_2^3 \times \frac{Q}{\frac{4\pi}{3} R^3} = Q \frac{r_2^3}{R^3}$$

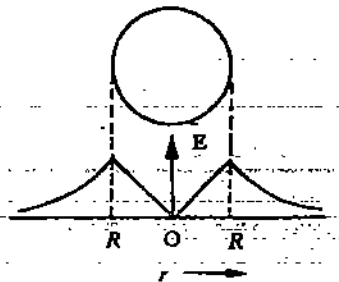
समीकरण (2.9) से हमें यह प्राप्त होता है

$$4\pi r_2^2 E_2 = Q \frac{r_2^3}{R^3}$$

जिससे कि

$$E_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q r_2}{R^3} \quad (2.15)$$

आवेश वितरण के अंदर, विद्युत क्षेत्र में दूरी के साथ रैखिकतः (linearly) वृद्धि होती है ($E \propto r$) जबकि आवेश वितरण के बाहर विद्युत क्षेत्र में $\frac{1}{r^2}$ के अनुसार कमी आती जाती है जैसा कि समीकरण (2.14) से स्पष्ट है। चित्र 2.13 में गोले के अंदर और बाहर विद्युत क्षेत्रों के संयोजित परिणाम दिखाए गए हैं।



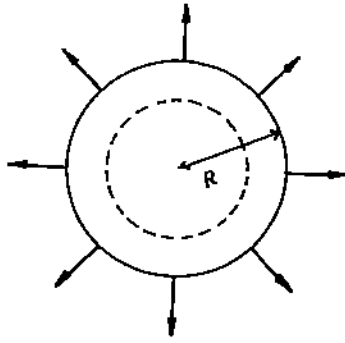
चित्र 2.13 : त्रिज्या R वाले एक समान आवेशित गोले के लिए क्षेत्र प्रबलता और त्रिज्य दूरी के बीच खींचा गया ग्राफ। $r > R$ के लिए क्षेत्र त्रिज्य दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है।

iii) पतले गोलीय कोश का क्षेत्र (Field of a thin spherical shell)

त्रिज्या R वाला एक पतला गोलीय कोश लीजिए जिस पर संपूर्ण आवेश Q है एवं जो पृष्ठ पर एक समान रूप से वितरित है जैसा कि चित्र 2.14 दिखाया गया है। क्योंकि यह वितरण गोलतः सममित (spherically symmetric) है, अतः हम पहले से जानते हैं कि कोश के बाहर स्थित बिन्दु पर विद्युत क्षेत्र समीकरण (2.14) का बिन्दु आवेश क्षेत्र होता है। कोश के अंदर का विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए कोश के अंदर एक गाउसीय गोला खींचा जाता है। इस गाउसीय पृष्ठ में परिवद्ध आवेश शून्य होता है। समीकरण (2.13) से प्राप्त अभिवाह को इस शून्य परिवद्ध आवेश के बराबर रखने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$4\pi r^2 E = 0$$

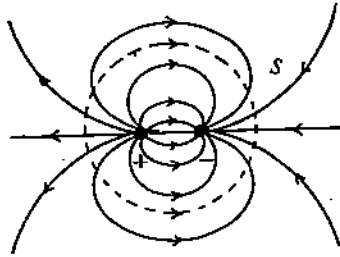
क्योंकि $r \neq 0$ इसलिए कोश के अंदर क्षेत्र सर्वत्र शून्य होगा। ध्यान रखें कि कोश के अंदर क्षेत्र का शून्य होना केवल इस कारण से ही नहीं होता कि परिवद्ध आवेश शून्य है, बल्कि गोलीय सममिति की वजह से भी संभव होता है जिससे समीकरण (2.13) प्राप्त होता है। अब एक द्विध्रुव (dipole) के चारों ओर एक गोलीय पृष्ठ लीजिए जैसा कि चित्र 2.15 में दिखाया गया है। यहां पृष्ठ से परिवद्ध नेट आवेश शून्य है पर पृष्ठ के अंदर का क्षेत्र शून्य नहीं है। ऐसा इसलिए है, क्योंकि यहां आवेश वितरण - एक द्विध्रुव - गोलतः सममित नहीं है। अतः समीकरण (2.13) प्राप्त नहीं किया जा सकता, हालांकि पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाला अभिवाह (अर्थात् बल रेखाओं की नेट संख्या) शून्य है।



चित्र 2.14 : एक आवेशित गोलीय कोश। इस कोश के अंदर जहाँ कोई भी गाउसीय गोला शून्य नेट आवेश को परिवद्ध करता है और अंदर का क्षेत्र शून्य होता है।

ऊपर दिए गए उदाहरणों से यह पता चलता है कि गाउस नियम की सहायता से विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चरण अपनाने होते हैं।

- 1) सममिति का अच्छी तरह से अध्ययन कर यह देखें कि आप एक ऐसा गाउसीय पृष्ठ बना सकते हैं अथवा नहीं, जिस पर कि क्षेत्र का परिमाण एवं पृष्ठ के सापेक्ष क्षेत्र की दिशा अचर रहे। यदि ऐसा करना संभव न हो, तो मान्य होने के बावजूद भी गाउस नियम की सहायता से क्षेत्र का परिकलन आसानी से नहीं किया जा सकता है। गाउसीय पृष्ठ किसी भी आकर प्रकार का हो सकता है बशर्ते कि पृष्ठ बंद हो।
- 2) अभिवाह का मान ज्ञान करें। उपयुक्त गाउसीय पृष्ठ लेने से पद $E \cos \theta$ अचर हो जाता है जिससे कि इस पद को अभिवाह-समाकल के बाहर लाया जा सकता है। तब केवल एक समाकल शेष रह जाता है जो कि पृष्ठ क्षेत्रफल के बराबर होता है।
- 3) परिवद्ध आवेश का मान ज्ञात करें। यदि गाउसीय पृष्ठ आवेश वितरण के अंदर हो तो परिवद्ध आवेश पूर्ण आवेश के बराबर नहीं होगा।
- 4) अभिवाह को q/ϵ_0 के बराबर लिखें और E के लिए हल करें। सममिति से E की दिशा ज्ञात की जा सकती है।



चित्र 2.15 : गोला से परिवद्ध नेट आवेश शून्य होता है, पर गोले के अंदर का क्षेत्र शून्य नहीं होता है। यहां आवेश वितरण द्विध्रुव (dipole)-गोलतः सममित नहीं है। अतः अभिवाह के व्यंजक के लिए समीकरण (2.13) मान्य नहीं है।

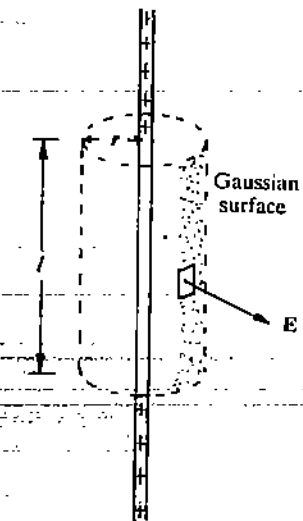
2.4.2 रेखीय सममिति (Line symmetry)

एक आवेश वितरण की रेखीय सममिति तब होती है जब वह अनंततः लंबा (infinitely long) हो और आवेश घनत्व इस प्रकार का हो कि वह किसी रेखा (जिसे सममिति अक्ष कहते हैं) से लंब दूरी पर ही केवल निर्भर करता हो (चित्र 2.16)। सममिति के कारण विद्युत क्षेत्र की दिशा अक्ष के त्रिज्यतः बहिर्मुखी (radially outward) होगी और इसका परिमाण अक्ष से इसकी लंब दूरी पर ही केवल निर्भर करेगा (यहां हमने यह मान लिया है कि आवेश धनात्मक है, क्योंकि यदि आवेश ऋणात्मक होता, तो क्षेत्र की दिशा अंतर्मुखी होती)। आइए रेखा आवेश (मान लीजिए एक तार) से r दूरी पर E का व्यंजक प्राप्त करें।

एक गाउसीय पृष्ठ खींचिए जो कि त्रिज्या r और लंबाई l वाला एक वृत्तीय बेलन (circular cylinder) हो और जिसका प्रत्येक सिरा, अक्ष पर अभिलंब एक समतल टोपी से बंद हो, जैसा कि चित्र 2.16 में दिखाया गया है। अभिवाह का परिकलन करने के लिए इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि विद्युत क्षेत्र की भी बेलनाकार सममिति है जिससे यह अर्थ निकलता है कि किसी बिन्दु पर इसका परिमाण, सममिति अक्ष से इस बिन्दु की लंब दूरी पर ही केवल निर्भर करता है और इसकी दिशा त्रिज्यतः बहिर्मुखी होती है। (आपको क्षेत्र दिशा की अन्य संभावनाओं का पता लगाने का प्रयास करना चाहिए और अपने को संतुष्ट कर लेना चाहिए कि केवल एक ही संभावना होती है जो कि बेलनाकार सममिति के संगत (compatible) होती है।) बेलनाकार पृष्ठ पर अभिवाह यह होता है :

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int E dS = E \int dS = 2\pi r l E \quad (2.16)$$

जहां $2\pi r l$ वक्र पृष्ठ (curved surface) का क्षेत्रफल है। बेलन के सिरों पर अभिवाह शून्य होगा क्योंकि क्षेत्र रेखाएं गाउसीय पृष्ठ की समतल टोपियों के समांतर हैं। क्योंकि सदिश E और dS एक दूसरे पर लंब



चित्र 2.16 : लंबाई l और त्रिज्या r वाला बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ है। यह अनंततः लंबे रेखा आवेश के एक भाग को परिवद्ध करता है।

हैं, इसलिए इनके अदिश गुणनफल (dot product) में $\cos\theta = 0$ होगा। अतः केवल बेलन के वक्र भाग पर ही अभिवाह होता है जिसका मान समीकरण (2.16) से प्राप्त होता है। गाउस नियम के अनुसार अभिवाह, बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ में परिवद्ध आवेश के समानुपाती होता है अर्थात्

$$2\pi r l E = \frac{q_{\text{परिवद्ध}}}{\epsilon_0}$$

जिससे कि

$$E = \frac{q_{\text{परिवद्ध}}}{2\pi \epsilon_0 r l} \quad (2.17)$$

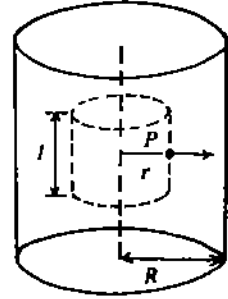
यदि रेखा आवेश घनत्व λ हो तो लंबाई l वाले गाउसीय बेलन से परिवद्ध आवेश λl होगा। समीकरण (2.17) में $q_{\text{परिवद्ध}}$ के स्थान पर इस व्यंजक को प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$E = \frac{\lambda l}{2\pi \epsilon_0 r l} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} \quad (2.18)$$

यह वही परिणाम है जिसे कि हमने कूलॉम नियम की कठिन विधि को लागू करके इकाई 1 के उदाहरण 4 में प्राप्त किया था। आप यहां यह देख सकते हैं कि गाउस नियम को लागू कर विद्युत क्षेत्र कितनी आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

तार के अंदर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए हम दो स्थितियों पर विचार करते हैं :

- i) मान लीजिए कि तार के अंदर आवेश एक समान रूप से वितरित है और आवेश घनत्व ρ है। मान लीजिए तार की त्रिज्या R है। तार के अक्ष से r दूरी पर स्थित एक आंतरिक बिंदु (inner point) P पर E ज्ञात करने के लिए त्रिज्या r और लंबाई l वाला एक गाउसीय-बेलन बनाइए जो P से होकर गुजरता हो जैसा कि चित्र 2.17 में दिखाया गया है। जैसा कि पहले बताया जा चुका है, कि अभिवाह केवल वक्र पृष्ठ के कारण ही होता है। अतः गाउस नियम के अनुसार



चित्र 2.17 : अंदर स्थित किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए तार को वृद्ध रूप में दिखाया गया है।

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = E 2\pi r l = \frac{q'}{\epsilon_0}$$

इस गाउसीय पृष्ठ के अंदर आवेश $q' = \pi r^2 \rho l$ है

$$\text{अर्थात् } E 2\pi r l = \frac{\pi r^2 \rho l}{\epsilon_0}$$

$$\text{या } E = \frac{r\rho}{2\epsilon_0} \quad (2.19)$$

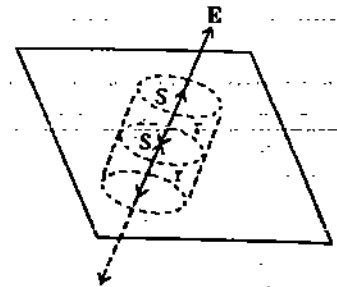
इस तरह हम यह पाते हैं कि एक समान रूप से आवेशित एक अनंत तार के अंदर किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र त्रिज्यतः दिष्ट (radially directed) होता है और इसका परिमाण अक्ष से उस बिंदु तक की दूरी के अनुसार बदलता रहता है।

- ii) जब आवेश केवल तार के सतह पर होता है तो इसके अंदर के किसी भी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है, क्योंकि इस बिंदु से होकर जाने वाले गाउसीय पृष्ठ में नेट आवेश शून्य होता है।

समीकरणों (2.18) और (2.19) को देखने से यह पता चलता है कि आवेशित तार या बेलन से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र तार या बेलन की त्रिज्या पर निर्भर नहीं करता। अतः हम कह सकते हैं कि तार या बेलन पर का आवेश अपने अक्ष के अनुदिश एक रेखा में केन्द्रित है। ('अंत में कुछ प्रश्न' नं. 4 को हल करते समय इस बात को ध्यान में रखें।)

2.4.3 समतलीय सममिति (Plane symmetry)

जब आवेश घनत्व, समतल से लंब दूरी पर ही केवल निर्भर करता है, तब यह कहा जाता है कि आवेश वितरण की समतलीय सममिति है। हर जगह विद्युत क्षेत्र, समतल शीट पर अभिलंब होता है, जैसा कि चित्र 2.18 में दिखाया गया है, जो कि घन आवेशित होने पर बहिर्मुखी होता है और ऋण आवेशित होने पर अंतर्मुखी। समतल शीट के सामने r दूरी पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करने के लिए एक गाउसीय पृष्ठ बनाना होता है। एक सुविधाजनक गाउसीय पृष्ठ, अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल S और लंबाई $2r$ वाला एक बंद बेलन है। गाउसीय पृष्ठ के पार्श्व सतह सममिति समतल पर लंब होती हैं जबकि पृष्ठ के सिरे इसके समान्तर होते हैं। क्योंकि कोई भी बल-रेखा पार्श्व सतह को प्रतिच्छेद नहीं करती इसलिए पार्श्व सतह पर अभिवाह शून्य होता है। पर, सिरों को बल रेखाएं लंब रूप में प्रतिच्छेद करती हैं जिससे कि \mathbf{E} और सिरों के क्षेत्रफल अल्पांश सदिश (area element vector) समांतर होते हैं। दोनों सिरों पर गुणनफल $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ में $\cos\theta$, 1 के



चित्र 2.18 : समतलीय सममिति वाला आवेश वितरण। गाउसीय पृष्ठ से परिवद्ध शीट का क्षेत्रफल वही है जो कि इसके सिरों का क्षेत्रफल S है।

बराबर होता है। (यदि आवेश ऋणात्मक हो, तो $\cos\theta$, -1 के बराबर होगा)। पार्श्व सतह पर अभिवाह शून्य है, इसलिए गाउसीय पृष्ठ पर संपूर्ण अभिवाह यह हो जाता है:

$$\Phi = \int_{\text{दोनों सिरों}} E dS = 2ES,$$

यहां संख्या 2 इसलिए है, क्योंकि सिरों दो हैं। तब गाउस नियम से यह प्राप्त होता है।

$$2ES = \frac{q_{\text{भीतर}}}{\epsilon_0}$$

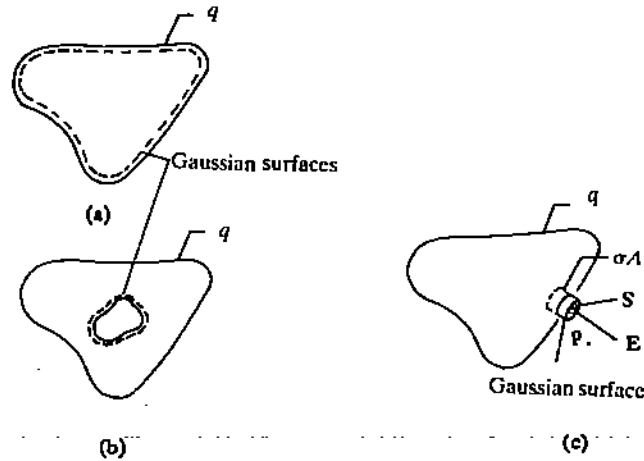
यदि σ , पृष्ठ आवेश घनत्व हो, तो परिवद्ध आवेश σS होता है और तब

$$E = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \quad (2.20)$$

2.2.4 आवेशित विलगित चालक (Charged isolated conductor)

गाउस नियम की सहायता से हम विलगित चालकों से संबंधित एक महत्वपूर्ण प्रमेय को सिद्ध कर सकते हैं "यदि किसी चालक पर असंतुलित (unbalanced), स्थैतिक (static) आवेश हो, तो वे चालक के पृष्ठ पर स्थित होंगे।"

धातु का बना एक ठोस चालक लीजिए जिस पर आवेश q हो जैसा कि चित्र 2.19 में दिखाया गया है। बिन्दुकित रेखा (dotted line) उस गाउसीय पृष्ठ को प्रदर्शित कर रही है जो चालक के वास्तविक पृष्ठ के ठीक नीचे है।



चित्र 2.19 : धातु का बना एक विद्युत रोधी (Insulated) ठोस चालक जिस पर आवेश q है। (क) धातु के अंदर वास्तविक पृष्ठ के ठीक नीचे एक गाउसीय पृष्ठ खींचा गया है (ख) चालक में एक अतिरिक्त गुहिका (cavity) है। गाउसीय पृष्ठ, गुहिका दीवार के निकट धातु के अंदर स्थित है। (ग) चालक के पृष्ठ को पार करता हुआ एक बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ। इस पृष्ठ पर आवेश σS है।

इस प्रमेय को सिद्ध करने से पहले आपको यह समझ लेना चाहिए कि धातु की आवेशित वस्तु के अंदर हर स्थान पर विद्युत क्षेत्र शून्य होता है। कोई औपचारिक परिकल्पना किए बिना ही हम यह देख सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है। मान लीजिए वस्तु के अंदर एक विद्युत क्षेत्र है। तब वस्तु के अंदर के आवेश, जो मुक्त रूप से घूम सकते हैं (जैसे धातु में इलेक्ट्रॉन), क्षेत्र के प्रभाव में मुक्त रूप से घूमने लगेंगे जिस कारण आंतरिक धाराएं स्थापित हो जाएंगी। पर, आवेशित चालकीय वस्तु पर कभी भी धारा नहीं पाई जाती है। धारा यदि दिखाई भी पड़ती है तो केवल थोड़े समय के लिए ही जब उस पर आवेश रखा जाता है। क्योंकि विद्युत धारा को बनाए रखने के लिए कुछ ऊर्जा की आवश्यकता होती है, इसलिए ऐसी वस्तु में धारा को बनाए रखने के लिए ऊर्जा देते रहना आवश्यक होता है। इससे केवल यह निष्कर्ष निकलता है कि एक विलगित चालकीय वस्तु का आंतरिक भाग सदा ही विद्युत क्षेत्र से मुक्त होता है।

यदि चालक के अंदर, प्रत्येक स्थान पर, विद्युत क्षेत्र शून्य हो तो यह गाउसीय पृष्ठ के सभी बिंदुओं के लिए भी शून्य होगा, क्योंकि गाउसीय पृष्ठ चालक के पृष्ठ के निकट होने के बावजूद भी निश्चित रूप से उसके

अंदर होता है। इसका यह अर्थ हुआ कि गाउसीय पृष्ठ से होकर जाने वाला अभिवाह शून्य है। तब गाउस नियम के अनुसार गाउसीय पृष्ठ के अंदर का आवेश भी शून्य होगा। इससे यह पता चलता है कि यदि पिंड (वस्तु) पर एक नेट आवेश हो, तो इसे केवल पिंड के पृष्ठ-परत पर ही वितरित किया जा सकता है।

क्योंकि ठोस चालक के आंतरिक भाग में कोई असंतुलित आवेश नहीं होता, इसलिए हम उस ठोस चालक में से कुछ पदार्थ को हटा सकते हैं जिससे कि वहां पर एक खोखली गुहिका (hollow cavity) बन जाती है जैसा कि चित्र 2.19ख में दिखाया गया है। एक गाउसीय पृष्ठ ऐसा बनाइए जो कि गुहिका के चारों ओर हो किन्तु चालक के अंदर हो। इस नए गाउसीय पृष्ठ से होते हुए कोई भी अभिवाह नहीं हो सकता, क्योंकि चालक के अंदर $E = 0$ है। अतः गाउस नियम के अनुसार यह पृष्ठ कोई भी नेट आवेश परिवर्द्ध नहीं कर सकता। तब हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि गुहिका के दीवारों पर कोई आवेश नहीं होता, चालक के बाहरी पृष्ठ पर ही आवेश बना रहता है जैसा कि चित्र 2.19क में दिखाया गया है।

इस परिणाम का काफी व्यावहारिक अनुप्रयोग है। इससे यह पता चलता है कि किसी वस्तु को केवल एक चालक आच्छद (conductor sheath) के अंदर परिवर्द्ध कर उसे स्थिरवैद्युत क्षेत्रों के प्रभाव से बचाया जा सकता है।

बोप प्रश्न 4

इस इकाई की प्रस्तावना को फिर से पढ़िए और उसमें बतायी गई अद्भुत परिघटना के होने का कारण बताइए।

अब आप आवेशित चालक के बाहर स्थित विद्युत क्षेत्र के बारे में जानकारी प्राप्त करना चाहेंगे। आइए हम इस पर चर्चा करें।

एक आवेशित चालक के निकट विद्युत क्षेत्र

मान लीजिए आवेशित चालक के ठीक बाहर स्थित एक बिंदु P पर विद्युत क्षेत्र का परिमाण E है। जैसा कि चित्र 2.19ग में दिखाया गया है एक ऐसा बेलनाकार गाउसीय पृष्ठ खींचिए कि उसके सिरे की टोपियां, पृष्ठ के समांतर हों। इनमें एक सिरा तो पूरी तरह से चालक के अंदर हो और दूसरा पूरी तरह से बाहर तो हो, पर पृष्ठ के काफी निकट हो। इसके दो सिरे की टोपियों का क्षेत्रफल S है और जिस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना है, वह टोपी के अंदर है। बेलनाकार दीवारों चालक के पृष्ठ पर लंब है। आवेशित विलगित चालक के बाहर स्थित बिंदु पर विद्युत क्षेत्र की दिशा पृष्ठ पर लंब की ओर होगी। ऐसा इसलिए है, क्योंकि यदि E का एक घटक पृष्ठ के समांतर हो, तो पृष्ठ पर के इलेक्ट्रॉन निरंतर गति में रहेंगे। पर, क्योंकि वे इलेक्ट्रॉन निरंतर गति में नहीं होते, इसलिए E पृष्ठ पर लंब होगा। गाउसीय पृष्ठ के बाहरी सिरे की टोपी से होकर जाने वाला अभिवाह ES होगा। आंतरिक सिरे की टोपी से होकर जाने वाला अभिवाह शून्य होगा, क्योंकि चालक के सभी आंतरिक बिंदुओं के लिए $E = 0$ है। बेलनाकार दीवारों से होकर जाने वाला अभिवाह भी शून्य होगा, क्योंकि E की दिशा, पृष्ठ के समांतर होती है, इसलिए ये इसे भेद नहीं सकते। गाउसीय पृष्ठ से परिवर्द्ध आवेश σS होता है, जहां σ उस बिंदु पर पृष्ठ-आवेश-घनत्व है जिसके निकट हमें विद्युत क्षेत्र ज्ञात करना है।

अतः जोड़ने पर पूरे गाउसीय पृष्ठ से होकर जाने वाला संपूर्ण अभिवाह ES होगा और उस पृष्ठ से परिवर्द्ध आवेश σS होगा। तब गाउस नियम के अनुसार

$$\epsilon_0 \oint E \cdot d\mathbf{A} = q_{\text{अंदर}}$$

या

$$\epsilon_0 ES = \sigma S$$

$$\therefore E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

(2.21)

भाग 2.3 के अंत में हमने यह बताया था कि गाउस नियम का कथन दो रूपों में दिया जा सकता है : समाकल (integral) और अवकल (differential)। उस भाग में गाउस नियम को समाकल के रूप में लिखा गया था। इस इकाई को समाप्त करने से पहले आइए हम देखें कि किस प्रकार गाउस नियम का अवकल रूप प्राप्त किया जाता है।

∇ की परिभाषा में, समीकरण (2.27) में एकक सदिश को बायीं ओर न लिखकर दायीं ओर लिखा जाता है, क्योंकि कोई

हमें और $\frac{\partial f}{\partial x}$ को एक न समझ जाए, जो कि शून्य होगा, क्योंकि f अचर है।

तेजी से परिवर्तन हो रहा है जबकि चर x , जिस पर कि राशि f निर्भर होती है, में किंचित मात्र परिवर्तन हो रहा हो। मान लीजिए f एक राशि है, जो x , y और z पर निर्भर है तब आंशिक अवकलज सिद्धांत के अनुसार

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz \quad (2.26)$$

इस नियम से यह पता चलता है कि बिंदु (x, y, z) से थोड़ी दूरी (dx, dy, dz) तक जाने में f में किस प्रकार परिवर्तन होता है। यदि dx, dy और dz क्रमशः x -अक्ष, y -अक्ष और z -अक्ष के अनुदिश सदिश $d\mathbf{l}$ के घटक को व्यक्त करते हों तो समीकरण (2.26) एक अदिश गुणनफल की याद दिलाता है अर्थात्

$$\begin{aligned} df &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}\right) \cdot (dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j} + dz \mathbf{k}) \\ &= (\nabla f) \cdot (d\mathbf{l}) \end{aligned}$$

$$\text{जहां } \nabla \text{ (जिसे del कहा जाता है)} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \text{ है।} \quad (2.27)$$

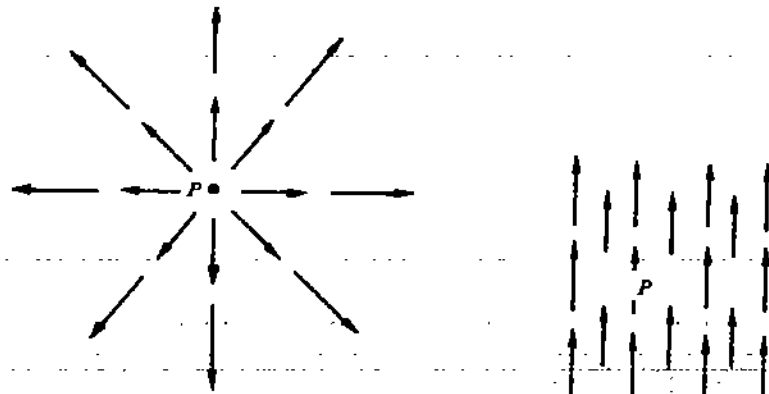
∇ एक सदिश संकारक (Vector operator) है, जो अदिश गुणनफल या सदिश गुणनफल के जरिए एक अदिश या सदिश फलन पर कार्य करता है। मान लीजिए हम अदिश गुणनफल के जरिए एक सदिश फलन \mathbf{E} पर ∇ की संकिया लागू करना चाहते हैं, तब ∇ की परिभाषा से, जैसा कि समीकरण (2.27) में दिया गया है, हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \left(\mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (E_x \mathbf{i} + E_y \mathbf{j} + E_z \mathbf{k}) \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right) \end{aligned} \quad (2.28)$$

$\nabla \cdot \mathbf{E}$ को डाइवर्जेंस E कहा जाता है। $\nabla \cdot \mathbf{E}$ को $\text{div } \mathbf{E}$ भी लिखा जाता है। सदिश फलन (यहां यह विद्युत क्षेत्र है) का डाइवर्जेंस एक अदिश राशि होती है और यह इस बात को मापता है कि बिंदु विशेष से सदिश \mathbf{E} कितना फैलता (या अपसरित होता) है। यदि किसी बिंदु P पर सदिश फलन \mathbf{E} का डाइवर्जेंस अधिक घनात्मक हो, जैसा कि चित्र 2.21क में दिखाया गया है तब \mathbf{E} को फैलता हुआ माना जायेगा। (यदि तीर के निशान अन्दर की ओर हो, तो वृहत् ऋणात्मक डाइवर्जेंस होगा) इसके विपरीत, चित्र 2.21ख में दिए गए विद्युत क्षेत्र का बिंदु P पर डाइवर्जेंस शून्य है, जिससे यह अर्थ निकलता है कि यह बिल्कुल नहीं फैल रहा है।

अब समीकरण (2.28) की सहायता से हम समीकरण (2.29) को इस रूप में लिख सकते हैं :

$$\text{आयतन अल्पांश } \Delta V \text{ से होते हुए संपूर्ण वैद्युत अभिवाह} = (\text{div } \mathbf{E}) \Delta V \quad (2.29)$$



चित्र 2.21 : (क) P पर धन डाइवर्जेंस (ख) P पर शून्य डाइवर्जेंस

इस तरह, समीकरण (2.25) के अनुसार एक लघु आयतन से गुजरने वाले अभिवाह को $(\text{div } \mathbf{E}) \Delta V$ से प्राप्त किया जा सकता है। समीकरण (2.4) में दी गई अभिवाह की मूल परिभाषा की सहायता से हम यह लिख सकते हैं :

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \Delta V \text{ div } \mathbf{E} \quad (2.30)$$

यदि ρ आयतन आवेश घनत्व हो, तो आयतन अल्पांश ΔV में परिवर्द्ध संपूर्ण आवेश यह होगा :

$$q = \rho \Delta V \quad (2.31)$$

अब भाग 2.3 से समीकरण (2.9) लीखिए

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_{\text{दीर्घ}}}{\epsilon_0}$$

समीकरण (2.30) और (2.31) से प्राप्त $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ और $q_{\text{दीर्घ}}$ के मान को प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\Delta V \text{ div } \mathbf{E} = \frac{\rho \Delta V}{\epsilon_0}$$

या

$$\boxed{\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (2.32)$$

समीकरण (2.32) गाउस नियम का एक वैकल्पिक कथन है। यह समीकरण गाउस नियम को अवकल रूप (differential form) में परिभाषित करता है। विद्युत क्षेत्र का डाइवर्जेंस, एकक आयतन अल्पांश से गुजर रहे अभिवाह की नेट मात्रा को निरूपित करता है। यदि किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र का डाइवर्जेंस घनात्मक या ऋणात्मक हो, तो वैद्युत अभिवाह उस बिंदु पर आवेश को परिवर्द्ध करने वाले बंद पृष्ठ से (या पर) प्रारंभ (या समाप्त) होते हैं। और, कोई नेट आवेश न होने के कारण $\text{div } \mathbf{E}$ शून्य होता है। इस तरह, एक बिंदु पर डाइवर्जेंस का परिमित घन मान का होना यह बताता है कि बिंदु विशेष पर घन आवेश अवश्य होगा।

गाउस प्रमेय (Gauss's theorem)

पृष्ठ S से परिवर्द्ध किसी भी आयतन पर समीकरण (2.32) को इस प्रकार समाकलित किया जा सकता है :

$$\int_V \text{div } \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV \quad (2.33)$$

समीकरण (2.10) को लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\int_V \text{div } \mathbf{E} dV = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.34)$$

समीकरण (2.34) डाइवर्जेंस प्रमेय (या गाउस नियम से भिन्न गाउस प्रमेय) को परिभाषित करता है। एक सदिश के पृष्ठ समाकल को आयतन समाकल के रूप में और आयतन समाकल को पृष्ठ समाकल के रूप में व्यक्त करने में यह प्रमेय सहायक होता है। गाउस नियम के अवकल रूप का आगे चल कर काफी महत्व है।

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है आइए उसका संक्षिप्त विवरण यहां हम दे दें।

2.6 सारांश

- एक बंद पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या उस पृष्ठ से परिवर्द्ध नेट आवेश के समानुपाती होती है।
- वैद्युत अभिवाह की संकल्पना "पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की संख्या" की अभिव्यक्ति को व्यक्त करती है। अभिवाह Φ , किसी पृष्ठ पर विद्युत क्षेत्र \mathbf{E} के पृष्ठ समाकल के रूप में इस प्रकार परिभाषित होती है :

$$\Phi = \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}.$$

जहां $d\mathbf{S}$ अत्यणु सदिश है। किसी बिंदु पर $d\mathbf{S}$ की दिशा पृष्ठ के उस बिंदु पर खींचे गए बहिर्मुखी अभिलंब की ओर होती है और इसका परिमाण पृष्ठ के क्षेत्रफल के बराबर होता है।

- हालांकि गाउस-नियम और कूलॉम नियम अलग-अलग रूपों में व्यक्त होते हैं, पर ये दोनों ही आवेश और विद्युत क्षेत्र के संबंध को प्रस्तुत करने की विधियां हैं। याद रहे कि कूलॉम नियम से तो गाउस नियम को व्युत्पन्न किया जा सकता है, पर गाउस नियम से कूलॉम नियम को व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता। अतः गाउस नियम कूलॉम नियम का पूर्ण पुनर्कथन नहीं है।

- गाउस नियम यह है : $\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ जहां q , एक काल्पनिक बंद पृष्ठ (जिसे गाउसीय पृष्ठ कहा जाता है) के अन्दर नेट आवेश है और ϵ_0 निर्वात की विद्युतशीलता है। गाउस नियम विद्युत क्षेत्र के एक महत्वपूर्ण गुणधर्म को व्यक्त करता है। कूलॉम नियम के प्रतिकूल गाउस नियम सभी स्थितियों में विद्युत क्षेत्र को ज्ञात करने के लिए पर्याप्त नहीं है।

- गाउस नियम का समाकल रूप यह है :

$$\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV$$

जहां ρ , आयतन आवेश घनत्व है और dV एक अत्यन्तु आयतन अल्पांश है।

- त्रिज्या R और कुल आवेश q वाले एक गोलातः सममित कोश के बाहर का विद्युत क्षेत्र त्रिज्यतः दिष्ट होता है और इसका परिमाण यह होता है :

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \quad (r > R)$$

आवेश इस तरह का व्यवहार करता है जैसे कि वह गोले के केन्द्र पर केन्द्रित हो।

- एकसमान आवेशित गोलीय कोश के अंदर का क्षेत्र ठीक शून्य होता है

$$E = 0 \quad (r < R)$$

- एकसमान आवेश प्रति एकक लंबाई, λ , वाली एक अनंत आवेश रेखा से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र, आवेश रेखा की लंब दिशा में होता है और इसका परिमाण यह होता है :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

- एक अनंत आवेशित शीट से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र शीट के समतल पर लंब होता है और उसका परिमाण यह होता है :

$$E = \frac{\rho}{2\epsilon_0}$$

जहां ρ पृष्ठ आवेश घनत्व है।

- साम्यावस्था में, एक विद्युतरोधी चालक पर अतिरिक्त (excess) आवेश पूरी तरह से उसके बाहरी पृष्ठ पर होते हैं।

- एक आवेशित चालक के पृष्ठ के निकट विद्युत क्षेत्र, पृष्ठ पर लंब होता है और इसका परिमाण यह होता है :

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

- गाउस नियम का अवकल रूप यह है :

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- गाउस प्रमेय का कथन यह है :

$$\int_V \text{div } \mathbf{E} dV = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

2.7 अंत में कुछ प्रश्न

- 1) विद्युत क्षेत्र $E = 200 \text{ i}$ है। क्षेत्रफल A से कितना अभिवाह गुजरता है यदि यह (क) xy -समतल, (ख) xz -समतल, (ग) yz -समतल का एक भाग हो।
- 2) गोलीय गाउसीय पृष्ठ के केन्द्र पर एक बिंदु आवेश रखा गया है। क्या अभिवाह में परिवर्तन होता है, यदि (क) गोले के स्थान पर समान आयतन वाला एक घन लिया गया हो, (ख) गोले के स्थान पर उसके आयतन का एक दसवां भाग वाला घन लिया गया हो, (ग) पहले रखे गये गोले में आवेश को केन्द्र से दूर ले जाया गया हो, परन्तु उसके अंदर ही हो, (घ) आवेश गोले के ठीक बाहर हो, (ङ) एक दूसरे आवेश को गोले के निकट और बाहर रखा गया हो और यदि (च) एक दूसरा आवेश गाउसीय पृष्ठ के अंदर रखा गया हो ?
- 3) मान लीजिए एक गाउसीय पृष्ठ किसी नेट आवेश को परिवर्द्ध नहीं करता। (क) क्या गाउस नियम से यह अपेक्षित है कि पृष्ठ के सभी बिंदुओं के लिए E शून्य हो ? यदि इस कथन का विलोम सही हो, अर्थात् यदि E पृष्ठ पर सर्वत्र शून्य हो, तो क्या गाउस नियम से यह अपेक्षित है कि अंदर कोई भी नेट आवेश न हो ?
- 4) 30.0m लंबी और 2 cm के व्यास वाली तांबे की पतली दीवार वाली पाइप पर एक नेट आवेश $q = 5.8 \mu\text{C}$ है जो एकसमानरूप से वितरित है। पाइप के अक्ष से 5.00mm की दूरी पर विद्युत क्षेत्र क्या होगा ? अक्ष से 8 cm की दूरी पर विद्युत क्षेत्र क्या होगा ? दोनों स्थितियों में यह मान लिया गया है कि बिंदु, जहां आप क्षेत्र का मान ज्ञात कर रहे हैं, पाइप के सिरों के काफी निकट नहीं है ($\epsilon_0 = 8.9 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ M}^{-2}$)।
- 5) 50 cm^2 क्षेत्रफल वाली एक सपाट शीट पर एकसमान पृष्ठ आवेश घनत्व σ है। शीट के केन्द्र के निकट के एक बिंदु से 1.5 cm की दूरी पर स्थित इलेक्ट्रॉन पर $1.8 \times 10^{-12} \text{ N}$ का बल लग रहा है जिसका दिशा शीट से परे है। शीट पर संपूर्ण आवेश ज्ञात कीजिए।
- 6) क्या एक समबाहु त्रिभुज के कोनों पर स्थित तीन समान आवेशों से उत्पन्न क्षेत्र का परिकलन करने में गाउस नियम उपयोगी होता है। इसकी व्याख्या कीजिए।

2.8 हल और उत्तर

बोझ प्रश्न

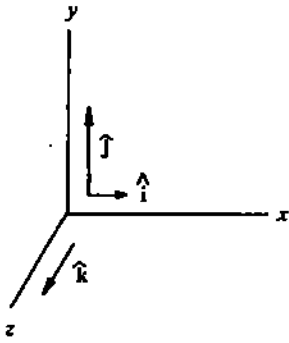
- 1) बल रेखाओं के प्रतिरूप में निश्चित रूप से परिवर्तन आएगा। आवेश Q का, किसी भी पृष्ठ को प्रतिच्छेद करने वाली बल रेखाओं की कुल संख्या में कोई योगदान नहीं होता क्योंकि Q सभी तीन पृष्ठों के बाहर स्थित है।
- 2) नहीं, गाउस नियम का संबंध केवल बंद पृष्ठों से है। चित्र 2.2 में दिखाए गए पृष्ठ खुले पृष्ठ है, क्योंकि ये एक परिवर्द्ध आयतन को परिभाषित नहीं करते हैं।
- 3) पृष्ठ S_1 के लिए नेट परिवर्द्ध आवेश q है। अनावेशित सिक्के का कोई भी योगदान नहीं होता, हालांकि इसमें विद्यमान धन और ऋण आवेशों को उस क्षेत्र के द्वारा जिसमें सिक्का स्थित है, अलग किया जा सकता है। आवेश q_2 और q_3 पृष्ठ S_1 के बाहर है। तब समीकरण (2.8) से हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{q_{\text{निष्क}}}{\epsilon_0} = \frac{q_1}{\epsilon_0} = \frac{+3.1 \times 10^{-9} \text{ C}}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}} \\ &= +350 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-1} \end{aligned}$$

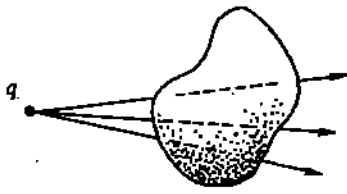
धन चिह्न से यह पता चलता है कि पृष्ठ के अंदर नेट आवेश घनात्मक है और पृष्ठ से होकर जाने वाला नेट अभिवाह बहिर्मुखी है।

पृष्ठ S_2 के लिए, नेट परिवर्द्ध आवेश $q_1 + q_2 + q_3$ है जिससे कि

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{q_{\text{निष्क}}}{\epsilon_0} = \frac{q_1 + q_2 + q_3}{\epsilon_0} \\ &= \frac{+3.1 \times 10^{-9} \text{ C} - 5.9 \times 10^{-9} \text{ C} - 3.1 \times 10^{-9} \text{ C}}{8.85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}} \\ &= -670 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-1} \end{aligned}$$



चित्र 2.22



चित्र 2.23 : आयतन के बाहर स्थित किसी आवेश के कारण आयतन से निकल रही रेखाओं की नेट संख्या शून्य होती है (अंदर जा रही रेखाओं की संख्या बाहर निकल रही संख्या के ठीक बराबर होगी।)

ऋण चिह्न से यह पता चलता है कि पृष्ठ के अंदर नेट आवेश ऋणात्मक है और पृष्ठ से होकर जाने वाला नेट अभिवाह अंतर्मुखी है।

- 4) धातु के बक्से का आवेशन करने पर पूरा आवेश पृष्ठ के बाहरी पृष्ठ पर आ गया था और इस तरह फाराडे सुरक्षित रखा था।

अंत में कुछ प्रश्न

- 1) चित्र 2.22 देखिए।

(क) $\Phi = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = 200A (\hat{i} \cdot \hat{k}) = 0$ (dA की दिशा \hat{j} की ओर है)

(ख) $\Phi = 200A (\hat{i} \cdot \hat{j}) = 0$

(ग) $\Phi = 200A (\hat{i} \cdot \hat{i}) = 200A$

- 2) (क) नहीं (ख) नहीं (ग) नहीं (घ) हां। (ङ) नहीं (च) हां।

अभिवाह $\Phi = \frac{q}{\epsilon_0}$ होता है। अभिवाह केवल परिवद्ध आवेश पर निर्भर करता है।

यह आवेश (या आवेशों) की स्थिति पर निर्भर नहीं करता है। यदि $q = 0$, तो $\Phi = 0$ होगा। याद रहे कि पृष्ठ में जितना अभिवाह जाता है उतना ही अभिवाह पृष्ठ से बाहर निकलता है जैसा कि चित्र 2.23 में दिखाया गया है।

- 3) क) जब गाउसीय पृष्ठ पर कोई आवेश नहीं होता, तब गाउस नियम $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$ हो जाता है, जिसका अर्थ यह नहीं है कि $\mathbf{E} = 0$ यहाँ \mathbf{E} और $d\mathbf{S}$ समकोण पर हो सकते हैं।

ख) जब पृष्ठ पर हर जगह \mathbf{E} शून्य के बराबर होता है, तब गाउस नियम से यह अपेक्षित होता है कि अंदर कोई भी नेट आवेश नहीं होगा।

- 4) यहाँ वास्तव में कोई अनंत रेखा नहीं है। पर, पाइप के निकट और सिरों से काफी दूर वाले बिंदुओं के सुदूर आवेशों का क्षेत्र पर प्रभाव बहुत कम पड़ता है, जिससे कि क्षेत्र लगभग एक अनंत रेखा द्वारा उत्पन्न क्षेत्र जैसा ही हो जाता है। अक्ष से 5.0mm की दूरी पर स्थित बिंदु, 20cm व्यास वाली पाइप के अंदर होगा। पाइप के अंदर पूरी तरह से स्थित गाउसीय बेलन शून्य नेट आवेश को परिवद्ध करता है। अतः पाइप के अंदर हर जगह क्षेत्र शून्य होता है।

पाइप के बाहर स्थित किसी बिंदु के लिए गाउसीय बेलन पूरी पाइप को परिवद्ध करेगा। इसलिए समीकरण (2.17) में लंबाई $l = 30.0 \text{ m}$ और परिवद्ध आवेश $q = 5.8 \mu\text{C}$ है। $r = 8.0 \text{ cm}$ लेने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$E = \frac{q_{\text{परिद्ध}}}{2\pi\epsilon_0 r l} = \frac{5.8 \times 10^{-6}\text{C}}{(2\pi) 8.9 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-1} \text{m}^{-2} (8 \times 10^{-2} \text{m}) (30.0 \text{m})}$$

$$= 4.3 \times 10^4 \text{NC}^{-1}$$

- 5) यह शीट उस बिंदु के लिए अनंत जैसा दिखाई पड़ेगा जो इससे 1.5 cm की दूरी पर है तथा इसके कोर से काफी दूरी पर है। अतः समीकरण (2.20) से क्षेत्र प्राप्त हो जाता है। विद्युत क्षेत्र की परिभाषा से (इकाई 1 का समीकरण (1.17) देखिये) इलेक्ट्रॉन पर बल F ठीक $-eE$ के बराबर होता है। यहाँ e इलेक्ट्रॉनिक आवेश है। तब हम यह लिख सकते हैं :

$$F = -eE = -e \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{-eq}{2\epsilon_0 A}$$

(क्योंकि σ शीट पर कुल आवेश q और शीट क्षेत्रफल A का अनुपात है।)

जिससे कि

$$q = \frac{2\epsilon_0 A F}{e} = \frac{2(8.9 \times 10^{-12} \text{C}^2 \text{N}^{-2} \text{m}^{-2})(0.50 \text{m}^2)(1.8 \times 10^{-12} \text{N})}{-1.6 \times 10^{-19} \text{C}} = -50 \mu\text{C}$$

ऋण चिह्न से यह पता चलता है कि शीट पर ऋण आवेश है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि शीट से इलेक्ट्रॉन प्रतिकर्षित होते हैं।

- 6) एक समबाहु त्रिभुज के कोने पर स्थित तीन बराबर आवेशों से उत्पन्न क्षेत्र का परिकलन करने में गाउस नियम उपयोगी नहीं हो सकता है क्योंकि उपयुक्त सममिति वाला एक ऐसा पृष्ठ प्राप्त करना काफी कठिन होता है जिस पर विद्युत क्षेत्र को अचर माना जा सके और इस तरह समाकल का मान ज्ञात किया जा सके।

2.9 शब्दावली

अधिश गुणनफल	dot product
अभिवाह	flux
अभिविन्दात	orientation
अस्पांत	element
गोसत: सममित	spherically symmetric
घन कोण	solid angle
त्रिज्यत: बहिर्मुखी	radially outward
परिबद्ध	enclosed
पृष्ठ समाकल	surface integral
फलक	face
संकारक	operator
सममिति	symmetry

इकाई 3 विद्युत विभव

इकाई की सपरिखा

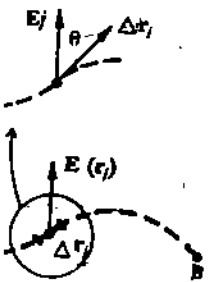
- 3.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 3.2 गणितीय पृष्ठभूमि
अदिश का ग्रेडिएण्ट
सदिश का रेखा समाकल
- 3.3 आवेश को ले जाने में किया गया कार्य
विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल
विद्युत क्षेत्र के रेखा समाकल का पथ स्वातन्त्र्य
पथ स्वातन्त्र्य के परिणाम
- 3.4 विद्युत विभव
आवेश निकष से उत्पन्न विभव
विभवांतर
- 3.5 विद्युत क्षेत्र और विद्युत विभव के बीच संबंध
- 3.6 वैद्युत द्विध्रुव और चतुर्ध्रुव का विद्युत क्षेत्र और विभव
- 3.7 विद्युत क्षेत्र में द्विध्रुव
- 3.8 सारांश
- 3.9 अंत में कुछ प्रश्न
- 3.10 हल और उत्तर
- 3.11 परिशिष्ट
- 3.12 शब्दावली

3.1 प्रस्तावना

इस खंड की इकाई 1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि किन्हीं दो आवेशों के बीच का बल कूलॉम नियम से परिभाषित होता है। एकक धन आवेश पर लग रहे बल से किसी भी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र E की प्रबलता परिभाषित होती है। इस खंड की पहली दो इकाइयों में सीधे या गाउस नियम की सहायता से E का मान ज्ञात करने के बारे में चर्चा की गई है।

स्थिरविद्युतिकी से संबंधित अधिकांश प्रश्नों में हमें E का परिकलन करना होता है। क्योंकि E एक सदिश राशि है, इसलिए इसके परिकलन में इसके प्रत्येक घटक का परिकलन करना होता है। इस परिकलन को और अधिक सरल बनाने के लिए हम एक अदिश राशि का परिकलन करते हैं। इस राशि को स्थिरवैद्युत विभव (electrostatic potential) ϕ कहते हैं। तत्पश्चात् एक सरल संबंध की सहायता से E का परिकलन किया जा सकता है। क्योंकि ϕ एक अदिश राशि है, इसलिए अधिकांश स्थितियों में इसका परिकलन विद्युत क्षेत्र की अपेक्षा अधिक सरल होता है। विभव की संकल्पना का इसलिए भी काफी महत्व है, क्योंकि आवेशित कणों द्वारा किये गये कार्य तथा उनकी ऊर्जाओं के साथ विभव का निकट का संबंध होता है। इस इकाई में मुख्यतः विभव, किन्हीं दो बिंदुओं के बीच इसके अंतर और E के साथ इसके संबंध के बारे में चर्चा की जाएगी। ϕ की संकल्पना को विकसित करने और E के साथ इसके संबंध को प्राप्त करने के लिए इस इकाई में दो नई गणितीय संकल्पनाओं पर भी विचार किया जाएगा। ये संकल्पनाएँ हैं (i) अदिश फलन (scalar function) का ग्रेडिएण्ट (gradient) और (ii) सदिश का रेखा समाकल (line integral)।

अगली इकाई में हम सतत आवेश-वितरणों (continuous charge distributions) से उत्पन्न विभव, समविभव पृष्ठ (equipotential surface) और स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा (electrostatic potential energy) जैसे विभिन्न विषयों पर चर्चा करेंगे।



ए क्षेत्र का रेखा
 Δr की दिशा वहन के
सीवी गई स्पष्टिखा के
।



3.3 आवेश को ले जाने में किया गया कार्य

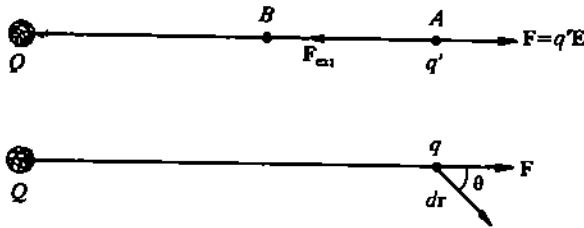
इकाई 1 में हमने यह देखा है कि एक आवेश (या आवेशों का समूह) अपने आस पास एक विद्युत क्षेत्र उत्पन्न करता है। किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र E का मान उस बिंदु पर रखे एकक धन आवेश द्वारा अनुभव किये गए बल के बराबर होता है। यदि उस बिंदु पर एकक धन आवेश के स्थान पर हम कोई आवेश q' रखें, तो विद्युत क्षेत्र E में आवेश q' द्वारा अनुभव किया गया बल F समीकरण $F = q'E$ से प्राप्त हो जाता है। यदि हम इस आवेश q' को बल F के विरुद्ध बिंदु A से बिंदु B की ओर लघु दूरी dr तक ले जायें, जैसा कि चित्र 3.3 में दिखाया गया है, तो हमें इस बल के विरुद्ध कार्य करना होता है। किए गए इस कार्य को हम इस रूप में लिख सकते हैं

$$dW = -F \cdot dr = -|F| |dr| \cos\theta \quad (3.8)$$

और

$$W = - \int_A^B F \cdot dr \quad (3.9)$$

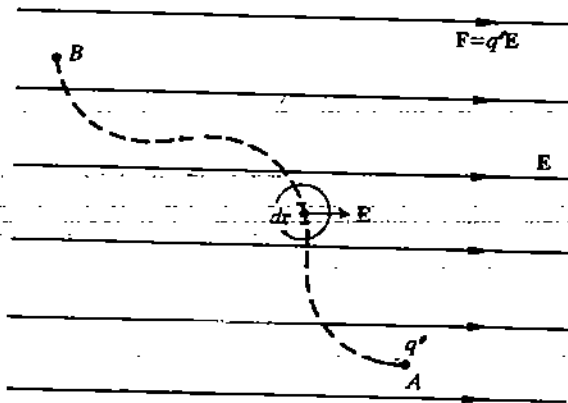
यहां $F \cos\theta$ विस्थापन सदिश dr के अनुदिश, F का घटक है। ध्यान दीजिए कि एक अन्य आवेश से उत्पन्न बल F के विरुद्ध आवेश q' को ले जाने के लिए एक बाह्य बल F_{ext} लगाना पड़ता है। यह बल F_{ext} परिमाण में F के बराबर होता है, पर विपरीत चिह्न का होता है अर्थात् $F_{\text{ext}} = -F$



चित्र 3.3 : आवेश q द्वारा उत्पन्न विद्युत क्षेत्र में आवेश की गति

3.3.1 विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल

ऊपर की गई चर्चा को और आगे बढ़ाते हुए आइए अब हम आवेश q को चित्र 3.4 में दिखाए गए पथ के अनुदिश A से B तक ले जायें। पथ AB विद्युत क्षेत्र E में स्थित हैं। इस पथ को dr लंबाई के अनंत छोटे-छोटे खंडों में बांट दीजिए। सदिश dr पथ के किसी भी खंड की दिशा एवं उसकी लंबाई को निरूपित करता है। आवेश q' को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य (चित्र 3.4 देखिए) बल F और विस्थापन सदिश dr का शून्यात्मक अदिश गुणनफल अर्थात् $-F \cdot dr$ होता है।



चित्र 3.4 : विद्युत क्षेत्र E में A से B तक आवेश q' की गति

यदि A और B के बीच सभी अत्यणु खंडों (infinitesimal segments) में किए गए कार्यों को जोड़ दें, तो हमें आवेश q' को A से B तक ले जाने में किया गया कुल कार्य प्राप्त हो जाएगा। जब इन खंडों की

संख्या अनंत की ओर प्रवृत्त होती है तब आवेश q' को A से B तक ले जाने में किए गए कार्य W को इस रूप में लिखा जाता है :

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -q' \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.10)$$

अब प्रश्न उठता है कि यदि हम आवेश q' के स्थान पर एकक धन आवेश को A और B के बीच गतिमान करें, तो क्या होता है ? आप यह आसानी से देख सकते हैं कि इस स्थिति में W को q' से भाग दे देने पर ही किया गया कार्य W' प्राप्त हो जाता है अर्थात्

$$W' = \frac{W}{q'} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.11)$$

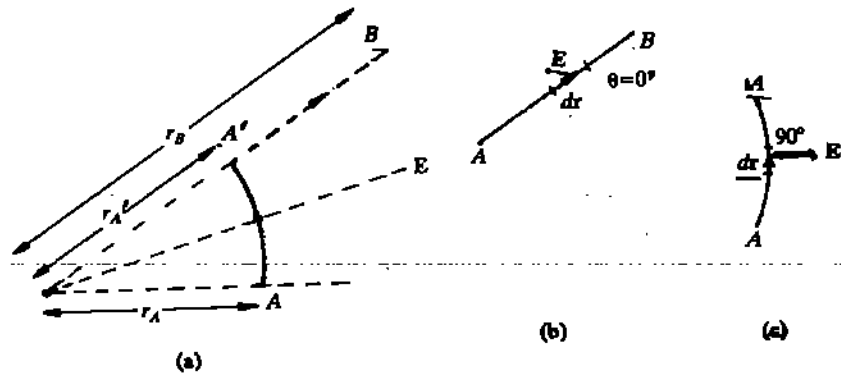
दक्षिण पक्ष के समाकल को विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल कहा जाता है। अतः किसी भी पथ के अनुदिश विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल उस पथ के अनुदिश एकक धन आवेश को ले जाने में किए गए कार्य के परिमाण के बराबर होता है।

आइए अब हम यह देखें कि समीकरण (3.11) में दिया गया समाकल A और B के बीच के पथ पर निर्भर करता है या नहीं। इस बात को हम क्यों जानना चाहते हैं, यह आपको भाग 3.4 और 3.5 में स्पष्ट हो जाएगा।

3.3.2 विद्युत क्षेत्र के रेखा समाकल का पथ स्वातन्त्र्य (Path independence of line integral of electric field)

आइए हम आवेश q से उत्पन्न क्षेत्र पर विचार करें। मान लीजिए इस क्षेत्र में दो बिंदु A और B हैं। जो आवेश q से r_A और r_B की दूरियों पर है। आइए हम चित्र 3.5 (क) में रंगीन रेखा द्वारा दिखाए गए पथ के अनुदिश A से B तक एकक धन आवेश को ले जाने का प्रयास करें। इस स्थिति में समीकरण (3.11) को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$W' = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \int_A^{A'} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{A'}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.12)$$



चित्र 3.5 : रंगीन रेखा द्वारा दिखाए गए पथ के अनुदिश एकक धन आवेश को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य।

दक्षिण पक्ष का पहला समाकल-त्रिज्या r_A -वाले वृत्त के चाप (arc) के अनुदिश एकक आवेश को A से A' तक ले जाने में किए गए कार्य को निरूपित करता है। और, दूसरा समाकल बड़े वृत्त की त्रिज्या के अनुदिश इस आवेश को A' से B तक ले जाने में किए गए कार्य को निरूपित करता है। पहला समाकल $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ शून्य के बराबर है, क्योंकि \mathbf{E} और $d\mathbf{r}$ एक दूसरे पर लंब हैं, जैसा कि चित्र 3.5 (ख) में दिखाया गया है। और, क्योंकि $A'B$ के अनुदिश \mathbf{E} और $d\mathbf{r}$ दोनों ही एक दूसरे के समांतर हैं, इसलिए दूसरा समाकल

$$\int_{A'}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_{A'}^B |\mathbf{E}| |d\mathbf{r}| \text{ है। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है? ऐसा इसलिए है, क्योंकि पहले}$$

समाकल में $\cos\theta = 0$ और दूसरे समाकल में $\cos\theta = 1$ है।

आइए अब हम दूसरे समाकल को विस्तार से हल करें। इकाई 1 में हमने यह देखा है कि दूरी r पर आवेश

q से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र \mathbf{E} का मान $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ होता है, जहाँ \hat{r} , r की दिशा में एकक सदिश है।

E का यह मान और dr के स्थान पर $\hat{r} \cdot dr$ प्रतिस्थापित करने पर (क्योंकि dr , \hat{r} की दिशा में एक सदिश अंश (vector elements) है। हमें यह प्राप्त होता है :

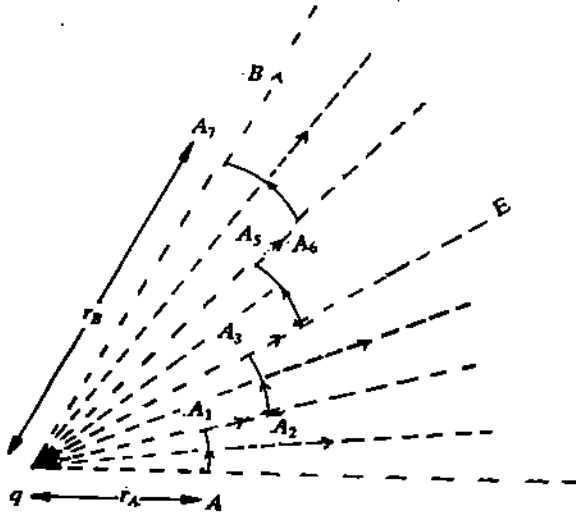
$$-\int_{A'}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{r_A'}^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{r} \cdot \hat{r}}{r^2} (dr) = -\int_{r_A'}^{r_B} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r^2} \quad \text{क्योंकि } r_{A'} = r_A$$

$$= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right]$$

अतः समीकरण (3.12) से, A और B के बीच दिखाए गए पथ के लिए

$$W' = -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right] \quad (3.13)$$

आइए अब हम एकक धन आवेश को बिंदु A से बिंदु B तक ले जाने के लिए एक अन्य पथ (जिसे रंगीन दिखाया गया है) लें जैसा कि चित्र 3.6 में दिखाया गया है।



चित्र 3.6 : एकक धन आवेश को A और B के बीच दिखाए गये पथ (जिसे रंगीन दिखाया गया है) के अनुदिश ले जाने में किया गया कार्य

इस पथ के अनुदिश किया गया कार्य भी ऊपर बताई गई विधि द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। पथ के अनुदिश एकक आवेश कुछ समय तक वृत्त के चाप के अनुदिश जाता है, इसके बाद कुछ समय के लिए त्रिज्यतः जाता है, इसके बाद फिर चाप के अनुदिश और फिर इसके बाद त्रिज्यतः जाता है और इसी प्रकार प्रक्रिया चलती रहती है। हम यहां यह देख सकते हैं कि जब भी एकक आवेश चाप के अनुदिश चलता है, तब कोई कार्य नहीं होता। और, जब भी एकक आवेश त्रिज्य पथ के अनुदिश चलता है तब कार्य होता है। अतः हम यह सिख सकते हैं :

$$-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{A_1}^{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{A_1}^{A_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{A_2}^{A_4} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_{A_3}^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.14)$$

इन त्रिज्य पथों में से प्रत्येक पथ के अनुदिश किया गया कार्य समीकरण (3.13) के अनुसार यह होता है

$$-\int_{A_1}^{A_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_{A_2}} \right]$$

$$-\int_{A_1}^{A_3} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_{A_2}} - \frac{1}{r_{A_3}} \right]$$

और यदि आवेश ऋणात्मक है तो परीक्षण आवेश का अनंत से लाने में विद्युत क्षेत्र को कार्य करना होता है। किया गया यह कार्य ऋणात्मक होता है।

चर्चा के दौरान इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि जब बल (इस स्थिति में विद्युत क्षेत्र) के विरुद्ध कार्य किया जाता है, तब तंत्र की विभव (ऊर्जा) में वृद्धि होती है। गुरुत्वीय क्षेत्र से संबंधित एक उदाहरण लेकर इसे आसानी से समझा जा सकता है। जब अधोमुखी (downwards) कार्य कर रहे गुरुत्व बल के विरुद्ध कोई त्वरण (acceleration) दिए बिना द्रव्यमान m वाले पिंड को ऊंचाई h तक उठाया जाता है, तब पिंड की स्थितिज ऊर्जा में वृद्धि हो जाती है। यह गुरुत्व के विरुद्ध कार्य किया गया है। जब गुरुत्व बल (force of gravity) द्वारा कार्य किया जाता है, जैसा कि पिंड के मुक्त रूप से गिरने में होता है, तो स्थितिज ऊर्जा में कमी आती है। स्थितिज ऊर्जाओं का अंतर मुक्त रूप से गिर रही वस्तु की स्थितिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाता है।

3.4.1 आवेश निकाय से उत्पन्न विभव (Potential due to a system of Charges)

यदि एक आवेश के स्थान पर आवेशों का एक निकाय हो तो हमें अध्यारोपण नियम लागू करना चाहिए। अर्थात् आवेश निकाय q_1, q_2, \dots, q_N के कारण बिंदु P पर परिणामी विभव उस बिंदु पर अलग-अलग आवेशों से उत्पन्न विभवों के जोड़ के बराबर होता है। यदि r_1, r_2, \dots, r_N बिंदु P से आवेशों क्रमशः q_1, q_2, \dots, q_N की दूरियां हों, तो बिंदु P पर विभव यह होगा

$$\phi_P = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2} + \dots + \frac{q_N}{4\pi\epsilon_0 r_N}$$

आप यहां यह देख सकते हैं कि प्रत्येक आवेश कुछ इस तरह कार्य कर रहा होता है, जैसे कि अन्य आवेश वहां विद्यमान है ही नहीं। बिंदु P पर के विभव को संकलन रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\phi_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{r_i} \quad (3.20)$$

यहां यह बात ध्यान में रखिए कि समीकरण (3.20) में दिया गया योगफल एक बीजीय (algebraic) योगफल है न कि सदिश योगफल है क्योंकि विभव एक अदिश राशि है।

उदाहरण 3

निम्नलिखित बिंदु आवेशों को x -अक्ष पर रखा गया है :

$x = 20\text{cm}$ पर $2 \mu\text{C}$, $x = 30\text{cm}$ पर $-3\mu\text{C}$ तथा

$x = 40\text{cm}$ पर $-4\mu\text{C}$ बिंदु $x = 0$ पर विभव ज्ञात कीजिए।

हल

हम जानते हैं कि विभव एक अदिश है और अध्यारोपण नियम लागू करके इसे इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^3 \frac{q_i}{r_i}$$

इसमें q_i और r_i के संख्यात्मक मानों को प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} \phi &= 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} \left[\frac{2 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.20\text{m}} - \frac{3 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.30\text{m}} - \frac{4 \times 10^{-6} \text{ C}}{0.40\text{m}} \right] \\ &= 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2} [10^{-5} \text{ C m}^{-1} - 10^{-5} \text{ C m}^{-1} - 10^{-5} \text{ C m}^{-1}] \\ &= -9 \times 10^4 \text{ Nm C}^{-1} = -9 \times 10^4 \text{ V} \end{aligned}$$

यदि आवेश वितरण विभिन्न आवेशों का संग्रह न होकर आवेशित गोले पर, सतत हो, तो समीकरण (3.20) के योगफल के स्थान पर एक समाकल का प्रयोग किया जाता है। ऐसी स्थिति में हम यह लिख सकते हैं।

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho dV}{r} \quad (3.21)$$

जहाँ ρ आवेश का आयतन घनत्व है, dV आयतन का अल्पांश (Volume element) है और r एक चर है जो कि आयतन अल्पांश के प्रत्येक बिंदु की उस बिंदु से दूरी होती है, जहाँ विभव का परिकलन किया जा रहा है। फिर भी, व्यंजक (3.21) का मान तभी निकाला जा सकता है जबकि आवेश घनत्व के स्पष्ट व्यंजक (explicit expressions) हों और पूरे आवेश वितरण की स्थिति उपलब्ध हो।

3.4.2 विभवान्तर (Potential difference)

जिस तरह हमने एक बिंदु पर विभव को परिभाषित किया है उसी तरह हम एक अन्य अति उपयोगी राशि को परिभाषित कर सकते हैं जिसे दो बिंदुओं के बीच का विभवान्तर कहा जाता है।

आइए हम आवेश q द्वारा उत्पन्न क्षेत्र में एकक धन आवेश को पहले अनंत से बिंदु A तक और फिर बिंदु B तक (चित्र 3.8 देखिए) लाने में किए गए कार्य को ह्रात करें। समीकरण (3.18) से हमें यह प्राप्त होता है :

$$\phi_A = W_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_A}$$

और

$$\phi_B = W_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_B}$$

इन दोनों का अंतर (अर्थात् $\phi_B - \phi_A$) एकक आवेश को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य है और इसे दो बिंदुओं A और B के बीच का विभवान्तर कहा जाता है। इसे इस रूप में लिखा जाता है :

$$\begin{aligned} \phi_{BA} &= \phi_B - \phi_A = W_2 - W_1 \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right] \end{aligned} \quad (3.22)$$

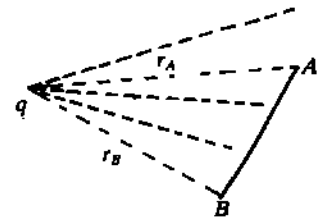
ऐसा इसलिए है, क्योंकि किसी विद्युत क्षेत्र में आवेश को ले जाने में किया गया कार्य पथ पर निर्भर नहीं करता है। इसी पथ स्वातन्त्र्य की सहायता से हम विभव की संकल्पना को परिभाषित कर सकते हैं। यदि हम एकक धन आवेश के स्थान पर A और B के बीच एक आवेश q को ले जायें, तो किया गया कार्य W यह होता है :

$$W = q' \phi_{BA} = q' (\phi_B - \phi_A) \quad (3.23)$$

स्थिरविद्युतिकी (electrostatics) और विद्युत धारा (current electricity) में विभवान्तर का काफी महत्व है। इसकी जानकारी होने पर हम उस धारा का ठीक-ठीक मान प्राप्त कर सकते हैं जो एक विद्युत परिपथ में किन्हीं दो बिंदुओं के बीच प्रवाहित होती है, यदि इन दो बिंदुओं के बीच का प्रतिरोध ह्रात हो।

बोध प्रश्न 5

एक 12V की बैटरी के धन टर्मिनल से ऋण टर्मिनल तक एक इलेक्ट्रॉन को ले जाने में कितने कार्य की आवश्यकता होती है ?



चित्र 3.8 : एकक आवेश को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य

3.5 विद्युत क्षेत्र और विद्युत विभव के बीच संबंध

समीकरण (3.17) में हमने यह देखा है कि एक रेखा समाकल के जरिए विद्युत विभव ϕ और विद्युत क्षेत्र E के बीच संबंध स्थापित किया जा सकता है। इस तरह विद्युत क्षेत्र का ज्ञान होने और रेखा समाकल का मान निकालने पर, किसी बिंदु पर विभव प्राप्त किया जा सकता है। अब हम एक विपरीत संबंध का पता लगाना चाहते हैं, जहाँ यदि ϕ ह्रात हो तो E प्राप्त किया जा सकता हो। इसे हम नीचे दी गई चर्चा में प्राप्त करेंगे।

समीकरण (3.22) में हमने यह देखा है कि आवेश q के क्षेत्र में दो बिंदुओं A और B के बीच का विभवान्तर यह होता है :

$$\phi_{BA} = \phi_B - \phi_A = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right]$$

इस समीकरण का दक्षिण पक्ष उन्हीं दो बिंदुओं के बीच विद्युत क्षेत्र E के ऋणात्मक रेखा समाकल के भी बराबर होता है। अतः हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं :

$$\phi_{BA} = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.24)$$

अब समीकरण (3.8) की सहायता से हम $d\mathbf{r}$ की दूरी पर स्थित किन्हीं दो बिंदुओं के बीच के विभवान्तर को इस रूप में लिख सकते हैं

$$d\phi = - \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (3.25)$$

$$\text{या } d\phi = - E \cos \theta |d\mathbf{r}|$$

$$\text{या } -E \cos \theta = \frac{d\phi}{|d\mathbf{r}|} \quad (3.26)$$

इस समीकरण में $\cos \theta$ के होने के कारण हम यह पाते हैं कि विद्युत क्षेत्र, विभव का एक विशेष प्रकार का अवकलज (derivative) है। इसे हम दिक् अवकलज (directional derivative) कहते हैं।

उप-भाग 3.2.1 में आपने यह देखा है कि अलग-अलग दिशाओं में अलग-अलग स्थानों पर कपरे के तापमान विचरण को किस प्रकार ग्रेडिएण्ट संकारक की सहायता से हम लिखते हैं। इसी प्रकार, एक विद्युत क्षेत्र में दो प्रतिवेशी बिंदुओं (neighbouring points) के बीच विद्युत विभव के अंतर $d\phi$ को ग्रेडिएण्ट संकारक के पदों में हम लिख सकते हैं। तत्पश्चात् इसका संबंध किसी बिंदु पर के विद्युत क्षेत्र \mathbf{E} के साथ किया जा सकता है। अतः

$$\begin{aligned} d\phi &= \phi(x + dx, y + dy, z + dz) - \phi(x, y, z) \\ &= \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \\ &= \left(\hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \cdot (\hat{i} dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz) \\ &= \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} \end{aligned} \quad (3.27)$$

समीकरण (3.25) के साथ इस समीकरण की तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\mathbf{E} = - \nabla \phi = - \left(\hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \quad (3.28)$$

$$\text{जहाँ } E_x = - \frac{\partial \phi}{\partial x}, E_y = - \frac{\partial \phi}{\partial y} \text{ और } E_z = - \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (3.29)$$

क्रमशः x, y, z दिशाओं में \mathbf{E} के घटक हैं।

इस तरह, विद्युत क्षेत्र \mathbf{E} किसी भी बिंदु पर विभव ϕ का ऋण ग्रेडिएण्ट होता है। क्योंकि ग्रेडिएण्ट का अर्थ है प्रवणता (slope), इसलिए क्षेत्र की दिशा में विभव (अदिश) का परिवर्तन दर ज्ञात कर विद्युत क्षेत्र (सदिश) का मान प्राप्त किया जाता है।

समतल ध्रुवी निर्देशांक तंत्र (plane polar coordinate system) में हम (r, θ) निर्देशांकों का प्रयोग करते हैं। अगले भाग में इस निर्देशांक तंत्र का प्रयोग द्विध्रुव से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र को मासूम करने में किया जायेगा। अतः इस इकाई के अंत में दिए गए परिशिष्ट में इस निर्देशांक तंत्र में ग्रेडिएण्ट डेल संकारक को ज्ञात किया जायेगा। आपके लिए यह उचित होगा कि आप इसे अच्छी तरह से समझ लें, वैसे इस विषय पर आपसे परीक्षा में प्रश्न नहीं पूछे जायेंगे।

उदाहरण 4

किसी बिंदु पर विद्युत विभव $\phi = Ax + By - Cz$ है

जहाँ A, B और C अचर हैं। इस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिए।

हल

क्योंकि $\phi = Ax + By - Cz$

$$\text{और } \mathbf{E} = -\left(\hat{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

$$\therefore \mathbf{E} = -[A\hat{i} + B\hat{j} - C\hat{k}]$$

अब आप बोध प्रश्न 6 को हल करने के लिए स्वयं इस विधि को लागू कीजिए।

बोध प्रश्न 6

किसी भी बिंदु पर विभव $\phi = x(y^2 - 4x^2)$ है। उस बिंदु पर विद्युत क्षेत्र \mathbf{E} ज्ञात कीजिए।

विद्युत क्षेत्र और विद्युत विभव के बीच के संबंध को और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम द्विध्रुव और चतुर्ध्रुव (quadrupole) के संबंध में विस्तार से चर्चा करें।

3.6 वैद्युत द्विध्रुव और चतुर्ध्रुव का विद्युत क्षेत्र और विभव

सदिश दूरी a पर स्थित समान एवं विपरीत आवेशों के युगल (pair) को द्विध्रुव कहा जाता है (चित्र 3.9)। सदिश a की दिशा द्विध्रुव के अक्ष के अनुदिश ऋण आवेश से धन आवेश की ओर होती है। घनात्मक और ऋणात्मक आयन वाला अणु प्रकृति में पाए जाने वाला वैद्युत द्विध्रुव का एक उदाहरण है। क्योंकि परमाणु में समान मात्रा में धन और ऋण आवेश होते हैं तथा इनके केन्द्र संपाती होते हैं, इसलिए परमाणु के बाहर स्थित सभी बिंदुओं के लिए यह उदासीन (neutral) होता है। बाह्य विद्युत क्षेत्र के होने पर परमाणु के धन और ऋण आवेशों के केन्द्र संपाती नहीं रह जाते, बल्कि अलग-अलग हो जाते हैं। इस स्थिति में तब यह एक द्विध्रुव हो जाता है। किसी बाह्य विद्युत क्षेत्र के प्रभाव में परावैद्युत (dielectrics) के व्यवहार को समझने में द्विध्रुव के आस पास के विद्युत क्षेत्र और विभव काफी सहायक सिद्ध होते हैं। दो विपरीतदिश द्विध्रुवों को एक रेखा में रखने पर हमें एक रेखिक चतुर्ध्रुव प्राप्त होता है। द्विध्रुव की तुलना में इसके क्षेत्र और विभव अधिक जटिल (complicated) होते हैं। आइए पहले हम एक द्विध्रुव से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र और विभव पर चर्चा करें।

क) द्विध्रुव के अक्ष पर स्थित बिंदु P पर विद्युत क्षेत्र

मान लीजिए द्विध्रुव के मध्य बिंदु और बिंदु P जो कि अक्ष पर स्थित है, के बीच की दूरी r है (चित्र 3.9 देखिए)। हमें P पर विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात करना है। $+q$ से उत्पन्न P पर विद्युत क्षेत्र यह होता है :

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r - a/2)^2}$$

और $-q$ से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र यह होता है

$$E_- = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r + a/2)^2}$$

P पर परिणामी क्षेत्र यह होता है

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-$$

$$= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r - a/2)^2} - \frac{1}{(r + a/2)^2} \right]$$

$$= \frac{q a^2}{4\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2/4)^2}$$

$$\mathbf{E} = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad r \gg a \text{ के लिए}$$

(3.30क)

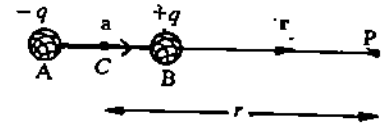
$$\text{जहाँ } p = qa^2$$

(3.30ख)

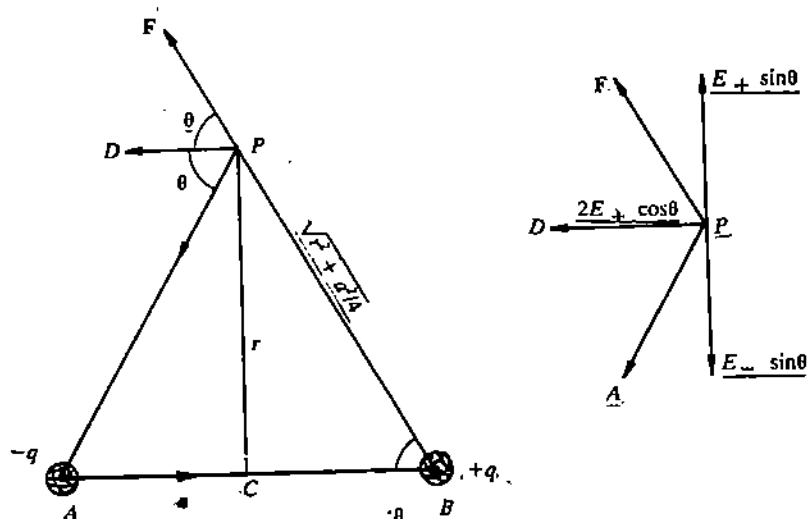
यहाँ हमने हर (denominator) में r^2 की तुलना में $a^2/4$ की उपेक्षा कर दी है, क्योंकि वास्तविक भौतिक समस्याओं (actual physical problems) में $a \ll r$ होता है। समीकरण (3.30 क) में qa^2 के स्थान पर p रखा गया है, जिसे द्विध्रुव आघूर्ण (dipole moment) कहा जाता है। परमाणु और अणु द्विध्रुवों में $a \approx 10^{-10}\text{m}$ और $r \gg a$ होता है।

ख) द्विध्रुव अक्ष के संबन्ध अर्धक रेखा पर स्थित बिंदु P पर विद्युत क्षेत्र

मान लीजिए इस स्थिति में द्विध्रुव के केन्द्र और बिंदु P के बीच की दूरी r है। चित्र 3.10 देखिए।



चित्र 3.9 : केन्द्र c और अक्ष a (धन और ऋण आवेशों की बीच की दूरी) वाला वैद्युत द्विध्रुव AB । बिन्दु P अक्ष पर स्थित है।



चित्र 3.10 : बिंदु P पर द्विध्रुव से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र

P पर +q से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र, PF के अनुदिश होता है और इसका परिमाण यह होता है :

$$E_+ = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{(r^2 + a^2/4)} \right]$$

P पर, -q से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र PA के अनुदिश होता है और इसका परिमाण यह होता है :

$$E_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + a^2/4)}$$

परिणामी विद्युत क्षेत्र मालूम करने के लिए CP पर लंब PD खींचिए। अब, यदि आप इन दो विद्युत क्षेत्रों को PD के एवं PD के लंब दिशा के अनुदिश वियोजित करें, तो आप पायेंगे कि घटक $E_+ \sin\theta$ और $E_- \sin\theta$ एक दूसरे को काट देते हैं, जबकि $E_+ \cos\theta$ और $E_- \cos\theta$, PD के अनुदिश जुड़ जाते हैं (जैसा कि चित्र 3.10 में दिखाया गया है)। क्योंकि ये दोनों घटक परिमाण में बराबर हैं इसलिए परिणामी क्षेत्र, PD के अनुदिश होता है और इसका परिमाण

$$2E_+ \cos\theta = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos\theta}{(r^2 + a^2/4)} \right] \text{ होता है।}$$

$$\text{चूँकि } \cos\theta = \frac{a/2}{(r^2 + a^2/4)^{1/2}} \text{ तथा}$$

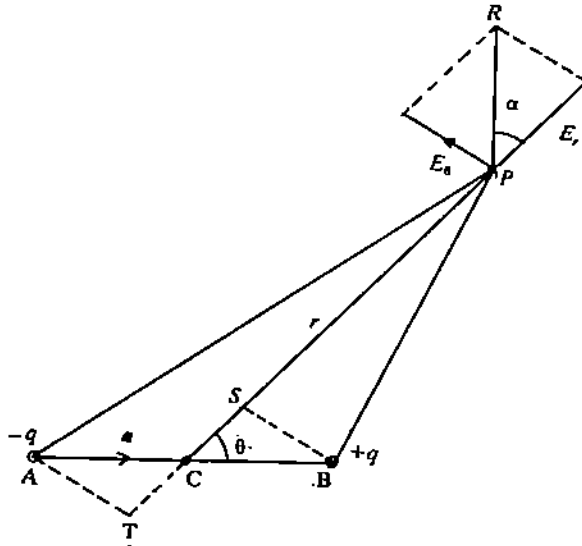
P पर परिणामी क्षेत्र PD के अनुदिश है, जो कि p के प्रति समांतर (antiparallel) हैं, अतः सदिश क्षेत्र को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\mathbf{E} = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(r^2 + a^2/4)^{3/2}} \quad (3.31)$$

$$\approx -\frac{p}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} \text{ जहाँ } r \gg a$$

ग) द्विध्रुव से उत्पन्न विभव

विद्युत क्षेत्र का मान स्थिरविद्युत विभव ϕ से भी ज्ञात किया जा सकता है। इसके लिए आइए हम द्विध्रुव के मध्य बिंदु C से दूरी r पर स्थित बिंदु P पर विभव ϕ ज्ञात करें (चित्र 3.11 देखिए)। P और C को मिलाने वाली रेखा a के साथ कोण θ बनाती है। समीकरण (3.19) की सहायता से द्विध्रुव के आवेशों -q और +q के कारण P पर विभव ज्ञात किया जाता है।



चित्र 3.11 : विद्युत द्वारा उत्पन्न विभव और क्षेत्र का परिकल्पन। BS और AT, PC पर संब है। AB = a है।

$-q$ और $+q$ से P की दूरियां क्रमशः AP और BP हैं, ज्यामिति से आप ये देखेंगे कि

$$BP = SP = PC - CS = r - \frac{a}{2} \cos\theta$$

$$\text{और } AP = TP = TC + CP = r + \frac{a}{2} \cos\theta$$

इस तरह, P पर विभव यह होता है

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\left(r - \frac{a}{2} \cos\theta\right)} - \frac{1}{\left(r + \frac{a}{2} \cos\theta\right)} \right] \\ &= \frac{q a \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 (r^2 - a^2/4 \cos^2\theta)} \end{aligned}$$

जब P काफी दूर है, तब $\frac{a^2}{4} \cos^2\theta$ की तुलना में r^2 काफी बड़ा होता है और तब हर में $\frac{a^2}{4} \cos^2\theta$ की उपेक्षा करने पर हम यह लिख सकते हैं

$$\phi = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{f}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{या } \phi = \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left[\because \mathbf{p} \cdot \mathbf{f} = qa \mathbf{f} \cdot \mathbf{f} = qa \cos\theta \right] \quad (3.32)$$

P पर विद्युत क्षेत्र मालूम करने के लिए हम घुवीय निर्देशांकों में ग्रेडिएण्ट संकारक (Operator) का प्रयोग करते हैं। (इस इकाई के अंत में दिया गया परिशिष्ट देखिए।) इस तरह,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\left[\mathbf{f} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right]$$

$$\text{या } \mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \left[\mathbf{f} (2\cos\theta) + \theta \sin\theta \right] \quad (3.33)$$

परिणामी \mathbf{E} , PR की दिशा में है जैसा कि चित्र 3.11 में दिखाया गया है और इसका परिमाण

$$|\mathbf{E}| = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \sqrt{3 \cos^2\theta + 1} \quad \text{है।}$$

\mathbf{f} के साथ \mathbf{E} कोण α बनाता है जिसका मान है :

$$\tan\alpha = \frac{1}{2} \tan\theta \quad (3.34)$$

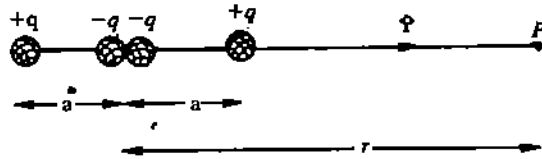
जब $\theta = 0$ है तब बिंदु P द्विध्रुव के अक्ष पर होता है, इस स्थिति में केवल त्रिज्य घटक (radial component) विद्यमान होता है और हमें वही परिणाम प्राप्त होता है जो कि हमें समीकरण (3.30)

में प्राप्त हुआ था। जब $\theta = \frac{\pi}{2}$ है तब बिंदु P द्विध्रुव अक्ष के लंब अर्धक रेखा पर होता है, त्रिज्य घटक शून्य होता है, $\cos \frac{\pi}{2} = 0$ और हमें वही परिणाम प्राप्त होता है जो कि हमें समीकरण (3.31) में प्राप्त हुआ था, क्योंकि $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ और इस बिंदु पर θ , p के प्रतिसमांतर होता है। इन तथ्यों से आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

- 1) द्विध्रुव के लिए विभव, $\frac{1}{r^2}$ के अनुसार और क्षेत्र $\frac{1}{r^3}$ के अनुसार परिवर्तित होता है। जबकि बिंदु आवेश के लिए विभव $\frac{1}{r}$ के अनुसार और क्षेत्र $\frac{1}{r^2}$ के अनुसार परिवर्तित होता है। अतएव हम यह पाते हैं कि बिंदु आवेश की तुलना में द्विध्रुव के लिए r के साथ विभव और क्षेत्र में काफी तेजी से कमी आती है।
- 2) द्विध्रुव विभव का मान उन बिंदुओं पर शून्य होता है जो कि द्विध्रुव अक्ष के लंब अर्धक रेखा पर स्थित होते हैं, अतः परीक्षण आवेश को लंब अर्धक रेखा के अनुदिश ले जाने में कोई कार्य नहीं होता।

आइए अब हम चतुर्ध्रुव से उत्पन्न विद्युत विभव और विद्युत क्षेत्र ज्ञात करें।

चित्र 3.12 में दिखाई गई 4 आवेशों की व्यवस्था को देखिए।



चित्र 3.12 : चतुर्ध्रुव से उत्पन्न P पर विभव

यह चतुर्ध्रुव का एक रूप है। इस चतुर्ध्रुव से उत्पन्न बिन्दु P पर विभव को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r+a} - \frac{2}{r} + \frac{1}{r-a} \right] \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{2a^2}{r(r^2 - a^2)} \right] \end{aligned}$$

हर में r^2 की तुलना में a^2 को नगण्य माना जा सकता है यदि $r \gg a$ हो। अतः

$$\phi = \frac{2qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3.35)$$

क्योंकि इस स्थिति में विद्युत क्षेत्र का केवल त्रिज्य घटक होता है। इसलिए

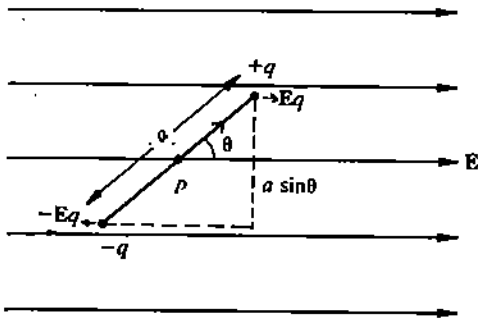
$$E = -r \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{4qa^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} r \quad (3.36)$$

तीचे परिकलन करके भी इसे सिद्ध किया जा सकता है। द्विध्रुव और बिंदु आवेश की तुलना में, चतुर्ध्रुव के लिए विभव में $\frac{1}{r^3}$ के अनुसार और क्षेत्र में $\frac{1}{r^4}$ के अनुसार तेजी से कमी आती है।

3.7 विद्युत क्षेत्र में द्विध्रुव

द्विध्रुव से उत्पन्न क्षेत्र और विभव पर चर्चा कर लेने के बाद हम द्विध्रुव पर बाह्य विद्युत क्षेत्र के प्रभाव के बारे में चर्चा करेंगे।

मान लीजिए कि एक द्विध्रुव एकसमान बाह्य विद्युत क्षेत्र E में रखा हुआ है। एकसमान विद्युत क्षेत्र वह होता है जिसका परिमाण और दिशा हर जगह समान होते हैं। मान लीजिए p क्षेत्र दिशा के साथ θ कोण बनाता है जैसा कि चित्र 3.13 में दिखाया गया है।



चित्र 3.13 : एक समान विद्युत क्षेत्र में रखे द्विध्रुव पर लग रहा बल आघूर्ण (torque)।

बाह्य विद्युत क्षेत्र के कारण आवेश $+q$ पर बल $F = Eq$ लगता है, जबकि आवेश $-q$ पर बराबर और विपरीतदिश बल $-Eq$ लगता है। क्योंकि क्षेत्र एकसमान है, इसलिए द्विध्रुव पर परिणामी बल (resultant force) शून्य होगा, अर्थात्

$$F_{\text{कुल}} = Eq - Eq = 0 \quad (3.37)$$

क्योंकि परिणामी बल शून्य है, इसलिए द्विध्रुव त्वरित नहीं होता अर्थात् इसकी स्थानांतरीय गति (translatory motion) पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। क्या इससे यह अर्थ निकलता है कि बाह्य विद्युत क्षेत्र का द्विध्रुव पर कोई प्रभाव नहीं होता। नहीं, बात ऐसी नहीं है।

द्विध्रुव पर लग रहे बल आघूर्ण (torque) के कारण वह घूमने लगता है। द्विध्रुव पर बल आघूर्ण इसलिए लग रहा होता है, क्योंकि दो बराबर और विपरीतदिशा वाले बल, जो एक दूसरे को मुक्त सदिश के रूप में निरसन (cancel) कर देते हैं, वास्तव में, अलग-अलग बिंदुओं पर लग रहे होते हैं। चित्र 3.13 से आप यह देख सकते हैं कि इस बल आघूर्ण का परिमाण (magnitude) $|F|a \sin\theta = q|E|a \sin\theta$ होता है। क्योंकि इसका प्रभाव दक्षिणावृत्त (clockwise) घुमने का होता है, इसलिए इसे $p \times E$ के रूप में लिखा जा सकता है। इस तरह, द्विध्रुव पर लग रहा बल आघूर्ण τ यह होता है :

$$\tau = p \times E \quad (3.38)$$

बल आघूर्ण का मात्रक न्यूटन मीटर (Nm) होता है। बल आघूर्ण लगने पर द्विध्रुव स्वयं क्षेत्र E की दिशा में आ जाता है। इस स्थिति में, द्विध्रुव आघूर्ण सदिश p सदिश E के समांतर होता है। तथा द्विध्रुव पर लगने वाले बल आघूर्ण का मान शून्य होता है। क्योंकि निकाय स्थायी (stable) स्थिति में होता है, इसलिए द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा निम्नतम होती है। अतः इस स्थिति से द्विध्रुव का घूर्णन कराने में एक बाह्य बल द्वारा किया गया कार्य द्विध्रुव में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित होता है। आइए हम यह मान लें कि एक बाह्य विद्युत क्षेत्र में जब कोण $\theta = 90^\circ$ है तब द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा शून्य है।

ऐसा हमने केवल अंतिम परिणाम को सरल बनाने के लिए किया है। अतः कोण θ के लिए द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा यह होती है :

$$U(\theta) = W(\theta) = \int_{90^\circ}^{\theta} |\tau| d\theta = \int_{90^\circ}^{\theta} pE \sin\theta d\theta \quad (3.39)$$

जहां $W(\theta)$ द्विध्रुव को क्षेत्र में θ कोण से घुमाने पर किया गया कार्य है। इस समाकल का मान ज्ञात करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$U(\theta) = -pE [\cos\theta]_{90^\circ}^{\theta} = -pE \cos\theta$$

इसे सदिश रूप (vector form) में लिखने पर द्विध्रुव की ऊर्जा यह होती है

$$U(\theta) = -p \cdot E \quad (3.40)$$

समीकरण (3.40) से यह पता चलता है कि U निम्नतम (अधिकांशतः ऋणात्मक) होता है जब द्विध्रुव क्षेत्र दिशा के अनुदिश अर्थात् ($\theta = 0^\circ$) हो और अधिकतम (अधिकांशतः धनात्मक) होता है जबकि यह क्षेत्र दिशा की विपरीत दिशा अर्थात् ($\theta = 180^\circ$) में हो।

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए उसका संक्षिप्त विवरण हम यहां दे दें।

3.8 सारांश

- विद्युत क्षेत्र E का रेखा समाकल $-\int_A^B E \cdot dr$ एकक धन आवेश को बिंदु A से बिंदु B तक ले जाने में किए गए कार्य W के बराबर होता है अर्थात्

$$W = - \int_A^B E \cdot dr$$

- किसी विद्युत क्षेत्र में एकक धन आवेश को एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ले जाने में किया गया कार्य दो बिंदुओं के बीच के पथ पर निर्भर नहीं करता है।
- किसी विद्युत क्षेत्र के विरुद्ध एकक धन आवेश को अनंत से किसी बिंदु तक ले जाने में किया गया कार्य उस बिंदु पर के विभव (potential) के नाम से जाना जाता है।
- विद्यु आवेश q से r दूरी पर स्थित बिंदु पर विभव ϕ , यह होता है :

$$\phi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

- दो बिंदुओं B और A के बीच का विभवान्तर ϕ_{BA} एकक धन आवेश को A से B तक ले जाने में किए गए कार्य के बराबर होता है

$$W = q \phi_{BA} = q(\phi_B - \phi_A)$$

- विभवान्तर का मात्रक वोल्ट है। बिंदुओं A और B के बीच का विभवान्तर एक वोल्ट होता है, यदि एकक धन आवेश को इन दो बिंदुओं के बीच ले जाने में किया गया कार्य एक जूल के बराबर हो।
- किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र E उस बिंदु पर विभव ϕ की ऋण प्रवणता (negative gradient) के बराबर होता है :

$$E = - \nabla \phi$$

- द्विध्रुव के अक्ष पर स्थित किसी बिंदु पर द्विध्रुव का विद्युत क्षेत्र यह होता है।

$$E = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{जहां } r \gg a$$

और द्विध्रुव अक्ष के लंब अर्धक (perpendicular bisector) रेखा पर किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र यह होता है :

$$E = \frac{-p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{जहां } r \gg a$$

जहां r द्विध्रुव के केन्द्र से उस बिंदु की दूरी है जहां विद्युत क्षेत्र ज्ञात किया जा रहा है; और p द्विध्रुव आघूर्ण सदिश है।

- द्विध्रुव के अक्ष के साथ θ कोण बनाने वाली रेखा के किसी भी बिंदु P पर विभव का मान

$$\phi = \frac{p \cdot f}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{होता है}$$

जहां f एकक सदिश है जिसकी दिशा द्विध्रुव के केन्द्र से उस बिंदु P तक है जहां क्षेत्र ज्ञात करना है।

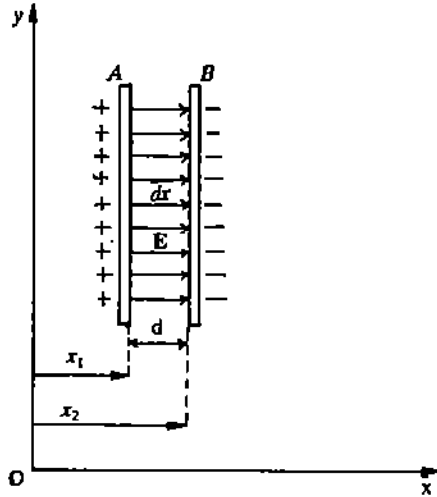
- एकसमान विद्युत क्षेत्र में एक द्विध्रुव पर वर्तन प्रभाव (turning effect) पड़ता है। द्विध्रुव पर लग रहा बल आघूर्ण τ यह होता है

$$\tau = p \times E$$

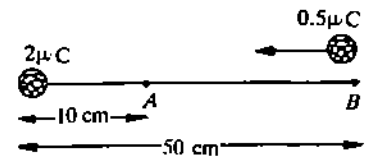
द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा $U = -p \cdot E$ होती है। जब p , E के समांतर होता है, तब यह निम्नतम होती है।

3.9 अंत में कुछ प्रश्न

- 1) दिखाइए कि एक बंद पथ के लिए विद्युत क्षेत्र E का रेखा समाकल शून्य के बराबर होता है।
- 2) दिखाइए कि घन तथा ऋण आवेशित दो समतल समांतर प्लेटों के बीच विद्युत क्षेत्र E का मान, उन प्लेटों के बीच विभवान्तर तथा उनके बीच की दूरी के अनुपात के बराबर होता है। यहां आप यह मान सकते हैं कि विद्युत क्षेत्र, प्लेटों के बीच के स्थान में ही सीमित है, जैसा कि चित्र 3.14 में दिखाया गया है।

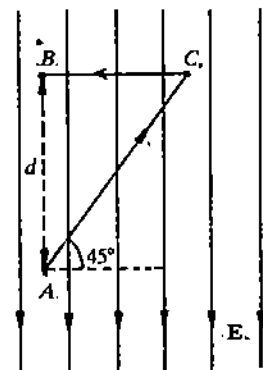


चित्र 3.14



चित्र 3.15

- 3) जैसा कि चित्र 3.15 में दिखाया गया है, $2 \mu\text{C}$ के आवेश से 10 cm और 50 cm की दूरियों पर स्थित दो बिंदुओं A और B पर विभव ज्ञात कीजिए। $0.05 \mu\text{C}$ के आवेश को B से A तक ले जाने के लिए आवश्यक कार्य भी ज्ञात कीजिए।
- 4) यह मान कर कि परीक्षण आवेश q_0 बिना किसी त्वरण के, चित्र 3.16 में दिखाए गए पथ, के अनुदिश A से B तक जाता है, बिंदुओं A और B के बीच का विभवान्तर ज्ञात कीजिए।



चित्र 3.16

3.10 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

- 1) चित्र 3.17 देखिए। बिंदु A से एक अन्य बिंदु B तक आवेश q से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र E का रेखा समाकल यह होता है :

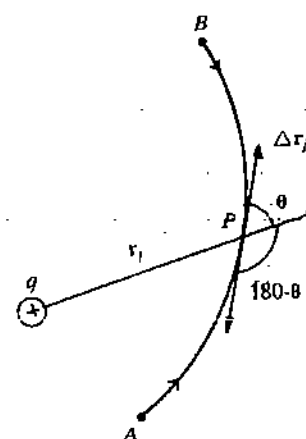
$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(r_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j$$

जहां $\Delta \mathbf{r}_j$, A से B तक के पथों की स्पर्शरेखाओं के अनुदिश है। किसी बिंदु P पर $\mathbf{E}(r_j)$ और $\Delta \mathbf{r}_j$ के अदिश गुणनफल को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\mathbf{E}(r_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j = |\mathbf{E}(r_j)| |\Delta \mathbf{r}_j| \cos \theta$$

जहां θ , $\mathbf{E}(r_j)$ और $\Delta \mathbf{r}_j$ के बीच का कोण है। जब, यदि B से A तक रेखा समाकल का मान ज्ञात करना हो, तो अदिश गुणनफल A से B तक के रेखा समाकल के संगत अदिश गुणनफलों का ऋणात्मक होगा। ऐसा इसलिए है, क्योंकि (चित्र 3.17 देखें) एक विशेष रेखा खंड के लिए A से B तक का रेखा समाकल ज्ञात करते समय यदि \mathbf{E} और r_j के बीच का कोण θ होता है तो B से A तक का रेखा समाकल ज्ञात करते वक्त \mathbf{E} और r_j के बीच का कोण $180^\circ - \theta$ हो जाता है। अतः

$$\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = - \sum_{j=1}^n \mathbf{E}(r_j) \cdot \Delta \mathbf{r}_j = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$



चित्र 3.17

- 2) बल
- F
- द्वारा किया गया कार्य

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_C (xy \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j}) \cdot (\mathbf{i} dx + \mathbf{j} dy) \\ &= \int_C (xy dx - y^2 dy)\end{aligned}$$

जहाँ C $(0, 0)$ से $(2, 1)$ तक के परवलयिक पथ $y = \frac{x^2}{4}$ को दर्शाता है। x और dx के पदों में y और dy के लिए प्रतिस्थापन करने पर निम्नलिखित समाकल प्राप्त होता है

$$\int_0^2 \left(\frac{x^2}{4} - \frac{x^5}{32} \right) dx = \left[\frac{x^4}{16} - \frac{x^6}{192} \right]_0^2 = \frac{2}{3}$$

यहाँ चर x के लिए 0 से 2 सीमाओं के बीच समाकल का मान ज्ञात किया गया है।

- 3) मान लीजिए विद्युत क्षेत्र
- E
- है और पथ लंबाई का अल्पांश (element of path length)
- dr
- है। क्योंकि
- E
- और
- dr
- दोनों समांतर हैं। इसलिए इन दोनों सदिशों के बीच का कोण
- θ
- शून्य होगा। तब किया गया कार्य

$$\begin{aligned}W &= - \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_C E (\cos 0^\circ) dr \\ &= - \int_C E dr \\ \therefore W &= -Ed \quad \left(\because \int_C dr = d \right)\end{aligned}$$

- 4) न्यूक्लियस पर आवेश
- $q = Ze = 79 \times 1.6 \times 10^{-19}C$
- और
- $r = 6.6 \times 10^{-15}m$

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} = \frac{(9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}) (79 \times 1.6 \times 10^{-19}C)}{6.6 \times 10^{-15}m} \\ &= 1.7 \times 10^7 \text{ NmC}^{-1} = 1.7 \times 10^7 \text{ V} \quad (\because \text{NmC}^{-1} = \text{JC}^{-1})\end{aligned}$$

- 5) एक बैटरी के धन टर्मिनल से ऋण टर्मिनल तक जाने में इलेक्ट्रॉन (एक ऋण आवेशित कण) उच्च विभव वाले बिंदु से निम्न विभव वाले बिंदु की ओर जाता है। क्योंकि

$$q = -1.6 \times 10^{-19}C$$

$$\text{और } \phi_A - \phi_B = -12V$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{किया गया कार्य } W &= q (\phi_A - \phi_B) \\ &= (-1.6 \times 10^{-19}C) (-12V) = 1.92 \times 10^{-16}J\end{aligned}$$

$$6) \mathbf{E} = - \left[\mathbf{i} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \phi}{\partial z} \right]$$

$$\text{जहाँ } \phi = x(y^2 - 4x^2)$$

$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} [xy^2 - 4x^3] = y^2 - 12x^2$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} [xy^2 + 4x^3] = 2xy$$

और

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{\partial \phi}{\partial z} [xy^2 - 4x^3] = 0$$

$$\therefore \mathbf{E} = -[\mathbf{i}(y^2 - 12x^2) + \mathbf{j}(2xy) + \mathbf{k}(0)] \\ = (12x^2 - y^2)\mathbf{i} - 2xy\mathbf{j}$$

अंत में कुछ प्रश्न

- 1) आइए हम A से प्रारंभ और A पर ही समाप्त होने वाला एक बंद पथ लें, जैसा कि चित्र 3.18 में दिखाया गया है। मान लीजिए B इस बंद पथ पर एक बिंदु है। यदि ϕ_A और ϕ_B क्रमशः A और B पर विभव हों, तो हम यह लिख सकते हैं

$$-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \phi_B - \phi_A \quad (3.41)$$

 L के अनुदिश

$$\text{और } -\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \phi_B - \phi_A \quad (3.42)$$

 L' के अनुदिश

क्योंकि

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

 L' के अनुदिश L' के अनुदिश

$$\therefore -\int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \phi_A - \phi_B \quad (3.43)$$

 L' के अनुदिश

समीकरणों (3.41) और (3.43) को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$$-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \phi_B - \phi_A + \phi_A - \phi_B = 0$$

 L के अनुदिश L' के अनुदिश

अर्थात् बंद पथ के अनुदिश विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल शून्य के बराबर होता है।

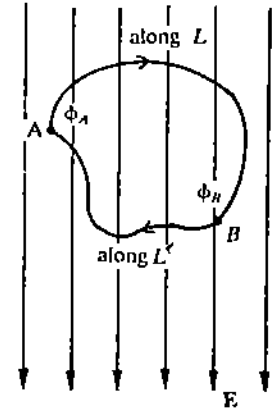
वैकल्पिक विधि

- 1) पथ स्वातन्त्र्य की संकल्पना (Concept of path independence) का भी उपयोग किया जा सकता है:

$$\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

 L के अनुदिश L' के अनुदिश

$$\text{या } \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

 L के अनुदिश L' के अनुदिश

चित्र 3.18

$$\text{या } \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} + \int_B^A \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

L के अनुदिश L' के अनुदिश

($L + L'$ का अर्थ बंद पथ है।)

- 2) मान लीजिए A और B , d दूरी पर धन तथा ऋण आवेशित दो प्लेटें हैं। मान लीजिए E दोनों प्लेटों के बीच एकसमान विद्युत क्षेत्र है। तब हमें यह प्राप्त होता है:

$$-\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = (\phi_B - \phi_A)$$

जहां ϕ_A और ϕ_B क्रमशः प्लेट A और B के विभव हैं।

इस स्थिति में $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ को $\int_{x_1}^{x_2} \mathbf{E} \cdot \hat{i} dx$, के रूप में लिख कर और इस बात की ओर ध्यान देकर

कि E और $\hat{i} dx$ दोनों समांतर हैं, हम यह लिख सकते हैं

$$\begin{aligned} \phi_B - \phi_A &= - \int_{x_1}^{x_2} E dx = -E |x|_{x_1}^{x_2} \\ &= -E (x_2 - x_1) = -E d \end{aligned}$$

या

$$\phi_A - \phi_B = Ed$$

$$\therefore E = \frac{\phi_A - \phi_B}{d}$$

अर्थात् धन तथा ऋण आवेशित दो समांतर प्लेटों के बीच विद्युत क्षेत्र का परिमाण इन दोनों के बीच के विभवान्तर तथा उनके बीच की दूरी के अनुपात के बराबर होता है।

- 3) आवेश q से r दूरी पर स्थित बिंदु पर विभव ϕ_r , यह होता है :

$$\phi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (3.19)$$

जहां $q = 2\mu\text{C} = 2 \times 10^{-6}\text{C}$, $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}$ और $r = 0.10\text{m}$ और 0.50m है।

समीकरण (3.19) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\phi_{0.10} = (9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}) \frac{2 \times 10^{-6}\text{C}}{0.10\text{m}} = 1.8 \times 10^5 \text{V}$$

$$\phi_{0.50} = (9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 \text{ C}^{-2}) \frac{2 \times 10^{-6}\text{C}}{0.50\text{m}} = 0.36 \times 10^5 \text{V}$$

किया गया कार्य $W = q' (\phi_{0.10} - \phi_{0.50})$, जहां $q' = 0.05 \times 10^{-6}\text{C}$,

$$\begin{aligned} \therefore W &= (0.05 \times 10^{-6}\text{C}) (1.8 \times 10^5 - 0.36 \times 10^5) \text{V} \\ &= 7.2 \times 10^{-3} \text{J}. \end{aligned}$$

- 4) हम यह लिख सकते हैं

$$\begin{aligned} \phi_B - \phi_A &= (\phi_B - \phi_C) + (\phi_C - \phi_A) \\ &= - \int_C^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} - \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \end{aligned}$$

C से B तक के पथ के लिए E और dr एक दूसरे पर लंब होते हैं। इसलिए,

$$\int_C^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = E \, dr \cos 90^\circ = 0. \text{ अतः } - \int_C^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

इससे निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\phi_B - \phi_A = - \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

A से C तक के पथ के लिए E और dr के बीच का कोण 135° है।

$$\begin{aligned} \therefore \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} &= \int_A^C E \, dr \cos 135^\circ \\ &= \int_A^C E \, dr \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \\ &= -\frac{E}{\sqrt{2}} \int_A^C dr = -\frac{E}{\sqrt{2}} (AC) = -\frac{E}{\sqrt{2}} \sqrt{2} d \\ &= -Ed \end{aligned}$$

क्योंकि $AC = d/\cos 45^\circ = \sqrt{2}d$

$$\begin{aligned} \therefore \phi_B - \phi_A &= - \int_A^C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \\ &= Ed \end{aligned}$$

यदि परीक्षण आवेश बिंदु A से सीधे बिंदु B तक जाये तो भी विभवान्तर का यही मान प्राप्त होगा।

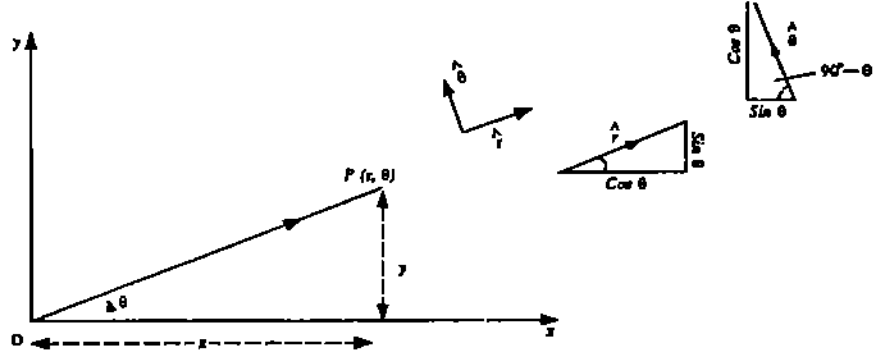
3.11 परिशिष्ट

ध्रुवीय निर्देशांक (Polar coordinates)

कार्तीय निर्देशांकों (cartesian co-ordinates) के अलावा आप ध्रुवीय निर्देशांकों का भी प्रयोग करेंगे। वृत्तीय सममिति से संबंधित प्रश्नों को हल करने में ध्रुवीय निर्देशांक काफी सहायक होते हैं। यांत्रिकी में आपने वृत्तीय गति के बारे में अवश्य पढ़ा होगा। वृत्तीय गति से संबंधित प्रश्नों को गणितीय रूप में हल करने के लिए कार्तीय निर्देशांकों के उपयोग की अपेक्षा ध्रुवीय निर्देशांकों का उपयोग करना अधिक सहज रहता है।

ध्रुवीय निर्देशांक में किसी बिंदु $P(x, y)$ को (r, θ) के रूप में लिखा जाता है। यहां r मूल बिंदु O से बिंदु P तक की दूरी को व्यक्त करता है तथा θ घनात्मक x -अक्ष एवं O से बिंदु P को मिलाने वाली सरल रेखा के बीच के कोण को व्यक्त करता है। चित्र A.1 देखें।

A.1



चित्र A.1 : ध्रुवीय निर्देशांकों एवं एकक सदिश \hat{r} तथा $\hat{\theta}$ दो सदिशों के योगफल के रूप में।

OP को P का स्थिति सदिश कहते हैं। x -अक्ष पर OP का प्रक्षेप P का x निर्देशांक तथा y -अक्ष पर OP का प्रक्षेप P का निर्देशांक व्यक्त करता है। (x, y) और (r, θ) में निम्न संबंध होता है।

$$x = r \cos \theta \quad y = r \sin \theta \quad (\text{A.1})$$

सदिश OP (r) को दो सदिशों के योगफल के रूप में निम्न प्रकार लिखा जाता है :

$$\mathbf{r} = \hat{i} x + \hat{j} y \quad (\text{A.2})$$

आइए हम बिंदु P पर एकक सदिश \hat{r} और $\hat{\theta}$ को इस प्रकार परिभाषित करें कि \hat{r} की दिशा उस ओर हो जिस ओर r के मान में वृद्धि हो रही हो तथा $\hat{\theta}$ की दिशा उस ओर हो जिस ओर θ के मान में वृद्धि हो रही हो, जैसा कि चित्र A.1 में दिखाया गया है। $\hat{\theta}$ की दिशा वहीं होती है जो कि केन्द्र O और त्रिज्या r वाले वृत्त के बिंदु P पर स्पर्शरेखा की होती है। \hat{r} और $\hat{\theta}$ एकक सदिश हैं। इन्हें दो सदिशों के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है। \hat{r} को x -दिशा में प्रक्षिप्त करने पर \hat{r} के x -घटक के रूप में $\cos \theta$ प्राप्त होता है और y -दिशा में प्रक्षिप्त करने पर \hat{r} के y -घटक (component) के रूप में $\sin \theta$ प्राप्त होता है। चित्र A.1 देखिए। अतः

$$\hat{r} = \hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta \quad (\text{A.3})$$

इसी प्रकार $\hat{\theta}$ को x -दिशा और y -दिशा में प्रक्षिप्त करने पर x -घटक के रूप में $\sin \theta$ और y -घटक के रूप में $\cos \theta$ प्राप्त होता है। चित्र A.1 देखिए, अतः

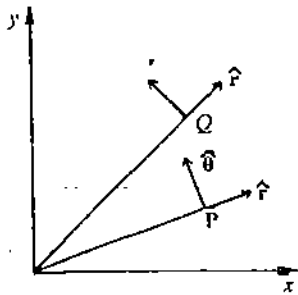
$$\hat{\theta} = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta \quad (\text{A.4})$$

ध्यान दीजिए कि $\hat{r} \cdot \hat{\theta} = 0$, $\hat{r} \cdot \hat{r} = 1 = \hat{\theta} \cdot \hat{\theta}$ है। चित्र A.2 को देखने पर आप पायेंगे कि P पर के एकक सदिश \hat{i} और $\hat{\theta}$, Q पर के एकक सदिश \hat{r} और $\hat{\theta}$ के बराबर नहीं हैं। जब भी आप एक बिंदु से दूसरे बिंदु की ओर जाते हैं तो इन एकक सदिशों की दिशाएं बदल जाती हैं। यदि आप समीकरण (A.3) और (A.4) को θ के सापेक्ष आंशिकतः अवकलित करें, तो आपको यह प्राप्त होगा :

$$\frac{\partial \hat{r}}{\partial \theta} = -\hat{i} \sin \theta + \hat{j} \cos \theta = \hat{\theta}$$

और

$$\frac{\partial \hat{\theta}}{\partial \theta} = -(\hat{i} \cos \theta + \hat{j} \sin \theta) = -\hat{r}$$



चित्र A.2 : दो अलग-अलग बिन्दुओं पर एकक सदिश।

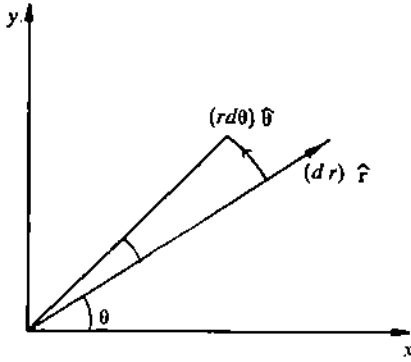
(x, y) निर्देशांक में सदिश \mathbf{A} को x, y -दिशाओं के अनुदिश इसके घटकों के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\mathbf{A} = \hat{i} A_x + \hat{j} A_y$$

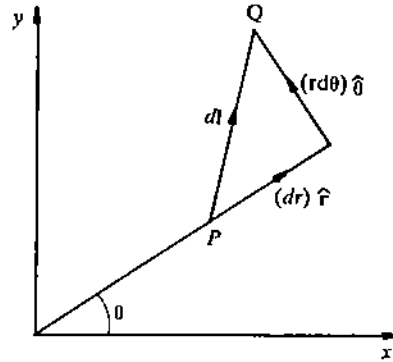
इसी प्रकार यदि A_r और A_θ (r, θ) निर्देशांक में घटक हो तो हम \mathbf{A} को इस रूप में लिख सकते हैं

$$\mathbf{A} = \hat{r} A_r + \hat{\theta} A_\theta$$

(r, θ) निर्देशांक में डेल (∇) संकारक (operator) को लिखने के लिए हमें r और θ की दिशाओं में लंबाई में अत्यणु परिवर्तन करने की आवश्यकता होती है। r -दिशा में लंबाई में अत्यणु परिवर्तन dr होता है और θ -दिशा में यह $rd\theta$ होता है। यहां $d\theta$ को, जो कि केवल कोण में हुये परिवर्तन को व्यक्त करता है, r से गुणा करना होता है जिससे कि $P(r, \theta)$ पर θ दिशा में लंबाई में अत्यणु परिवर्तन प्राप्त किया जा सके।



(a)



(b)

चित्र A.3 : (क) r और θ दिशाओं में लंबाई के अत्यांस (ख) विस्थापन $d\mathbf{l}$ को $\hat{r}(dr)$ और $\hat{\theta}(rd\theta)$ के योगफल के रूप में व्यक्त किया है।

(x, y) निर्देशांक में अत्यणु विस्थापन $d\mathbf{l}$ को इस रूप में लिखा जाता है।

$$d\mathbf{l} = \hat{i} dx + \hat{j} dy$$

इसी प्रकार (r, θ) निर्देशांक में (चित्र A.3 ख देखिए) $d\mathbf{l}$ को इस रूप में लिखा जा सकता है।

$$d\mathbf{l} = \hat{r} dr + \hat{\theta} (rd\theta)$$

अब (r, θ) निर्देशांकों में डेल संकारक प्राप्त किया जा सकता है। इसके लिए एक अदिश फलन (scalar function) ϕ लीजिए। मान लीजिए बिन्दु $P(r_1, \theta_1)$ पर इसका मान $\phi_1(r_1, \theta_1)$ है और बिन्दु $Q(r_2, \theta_2)$ पर इसका मान $\phi_2(r_2, \theta_2)$ है। यदि $PQ = d\mathbf{l}$ एक अत्यणु विस्थापन हो, तो

$$\phi_2(r_2, \theta_2) - \phi_1(r_1, \theta_1) = d\phi$$

क्योंकि बिन्दु (r_1, θ_1) और (r_2, θ_2) एक दूसरे के निकट है, इसलिए हम $d\phi$ को इस रूप में लिखते हैं

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta \quad (\text{A.5})$$

$$= (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{l}$$

$\nabla \phi$ को (r, θ) निर्देशांक में लिखने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$(\nabla \phi) = \hat{r} (\nabla \phi)_r + \hat{\theta} (\nabla \phi)_\theta \quad (\text{A.6})$$

जहां $(\nabla \phi)_r$ और $(\nabla \phi)_\theta$ क्रमशः r -घटक और θ -घटक हैं। अतः

$$\begin{aligned} (\nabla \phi) \cdot d\mathbf{l} &= [\hat{r} (\nabla \phi)_r + \hat{\theta} (\nabla \phi)_\theta] \cdot (\hat{r} dr + \hat{\theta} rd\theta) \\ &= (\nabla \phi)_r dr + (\nabla \phi)_\theta rd\theta \end{aligned}$$

$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} dr + \frac{\partial \phi}{\partial \theta} d\theta$, के साथ इसकी तुलना करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$(\nabla \phi)_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad \text{तथा} \quad (\nabla \phi)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (\text{A.7})$$

अतः ध्रुवी निर्देशांक (polar coordinates) में डैल संकारक यह होता है

$$\nabla = \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right\} \quad (\text{A.8})$$

उदाहरण

ध्रुवी निर्देशांकों का उपयोग कर किसी प्रश्न को हल करने में कितनी आसानी होती है, इसे समझने के लिए आइए हम एक वृत्त में अचर चाल से चल रहे एक कण की गति पर विचार करें। मान लीजिए मूल बिंदु, त्रिज्या r वाले वृत्त के केन्द्र पर है और कण की चाल v है। तब हम यह लिख सकते हैं

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 = \text{अचर}$$

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v^2 = \text{अचर}$$

इनमें से पहले समीकरण को समय के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 0 \quad \text{या} \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$$

और दूसरे समीकरण का अवकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$2\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 0 \quad \text{or} \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} = 0 \quad \text{जहाँ} \quad \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

इन्हें देखने से पता चलता है कि प्रत्येक बिंदु पर वेग \mathbf{v} , \mathbf{r} पर समकोण बनाता है और त्वरण \mathbf{a} , \mathbf{v} पर समकोण बनाता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि त्वरण \mathbf{a} या तो \mathbf{r} के समांतर है या \mathbf{r} के प्रति समांतर। समय के सापेक्ष $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$ का अवकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\therefore v^2 = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = -r a \cos\theta$$

क्योंकि v^2 धनात्मक है, इसलिए $\cos\theta < 0$ है, जिसका अर्थ $\theta = \pi$ है, क्योंकि \mathbf{r} और \mathbf{a} या तो समांतर हैं या प्रति समांतर है। इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि त्वरण \mathbf{a} , \mathbf{r} के विपरीत दिशा में होती है और इसका परिमाण

$$a = \frac{v^2}{r} \quad \text{होता है।}$$

अतः त्वरण की दिशा केन्द्र की ओर होती है।

3.12 शब्दावली

अत्यणु	Infinitesimal
अदिश	Scalar
अभिदिन्यास	Orientation
घटक	Component
त्रिज्य	Radial
द्विध्रुव	Dipole
परावैद्युत	Dielectric
प्रतिवेश	Neighbourhood
प्रतिसमांतर	Antiparallel
बल-आघूर्ण	Torque
रेखा समाकल	Line integral
संकारक	Operator
संक्रिया	Operation
सदिश	Vector
समविभव	Equipotential
स्थानिक निर्देशांक	Space coordinates

इकाई 4 सतत आवेश वितरण से उत्पन्न विभव तथा ऊर्जा

इकाई की रूपरेखा

- 4.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 4.2 सतत आवेश वितरण से उत्पन्न विभव
रेखीय आवेश
आवेशित कृतीय डिस्क
- 4.3 सभ विभव पृष्ठ
- 4.4 स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा
- 4.5 स्थिरवैद्युत बल का स्वरूप
- 4.6 प्रतिबिंब विधि
- 4.7 सारांश
- 4.8 अंत में कुछ प्रश्न
- 4.9 हल और उत्तर
- 4.10 शब्दावली

4.1 प्रस्तावना

पिछली इकाइयों में आपने विद्युत क्षेत्र E और विविक्त (discrete) आवेश वितरण से उत्पन्न विभव ϕ परिकल्पित किया है। E से ϕ का परिकल्पन करने में आपको रेखा समाकल का मान निकालना पड़ा था। इसके विपरीत, सरल अवकलज करके आप ϕ से E का परिकल्पन कर सकते हैं। इस इकाई में हम इन संकल्पनाओं को सतत आवेश वितरणों द्वारा उत्पन्न ϕ का मान निकालने में लागू करेंगे। कुछ चुने हुए सतत आवेश वितरणों से उत्पन्न विभव और विद्युत क्षेत्र का अभिकलन कर लेने के बाद आप इस इकाई में सभ विभव पृष्ठों का अध्ययन करेंगे।

इकाई 3 में आप विभव और विभवान्तर की संकल्पना से परिचित हो चुके हैं। घरों में इस्तेमाल किए जाने वाले हमारे उपकरण 220 वोल्ट विभवान्तर पर कार्य करते हैं। इस संकल्पना का महत्व इसलिए भी है, क्योंकि उच्च वोल्टता वाले स्रोतों की सहायता से भौतिकीविद् अनेक रोचक प्रयोग करते हैं। यदि एक आवेशित कण किसी विभवान्तर से गुजरता है तो वह त्वरित हो जाता है और इसकी गतिज ऊर्जा बढ़ जाती है। ऐसे अनेक उपकरण बनाये गये हैं, जिन्हें कण त्वरित्र (particle accelerator) कहा जाता है और जिनकी सहायता से उच्च ऊर्जा वाले आवेशित कण उत्पन्न किए जाते हैं। इन उच्च ऊर्जा वाले कणों का उपयोग न्यूक्लीय संरचना (nuclear structure) का अध्ययन करने के लिए परमाणु स्मैशिंग (atom smashing) जैसे प्रयोगों में किया जाता है। इस इकाई में आप स्थिरवैद्युत ऊर्जा की संकल्पना और स्थिरवैद्युत बल के स्वरूप के बारे में भी अध्ययन करेंगे। ये आधारभूत संकल्पनाएँ हैं जो कि न केवल न्यूक्लीय भौतिकी (Nuclear physics) के पाठ्यक्रम को समझने में, बल्कि अनेक अन्य स्नातकपूर्व स्तर के पाठ्यक्रमों को समझने में सहायक सिद्ध होती हैं।

इस पाठ्यक्रम के अगले खंड में आप विद्युत क्षेत्र में परावैद्युत पदार्थों (dielectrics) के स्थूल (macroscopic) गुणधर्मों और सूक्ष्म गुणधर्मों (microscopic properties) के बारे में अध्ययन करेंगे। वहाँ आपको परावैद्युत पदार्थों के विभवों और विद्युत क्षेत्रों से संबंधित अनेक प्रश्न देखने और हल करने को मिलेंगे।

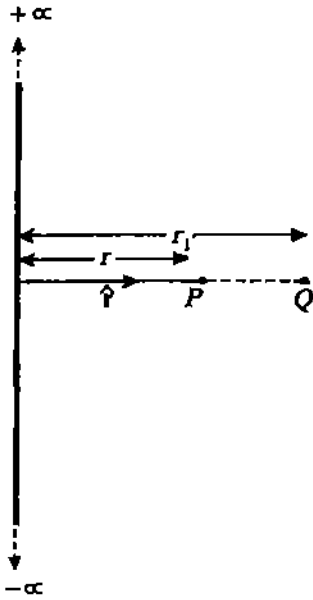
उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- सतत सममित (continuous symmetric) आवेश वितरण से उत्पन्न विभव के व्यंजक प्राप्त कर सकेंगे,

- सम विभव पृष्ठ ज्ञात होने पर वैद्युत बल रेखाएं खींच सकेंगे,
- एक दिए हुए आवेश वितरण के लिए स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कर सकेंगे,
- यह सिद्ध कर सकेंगे कि स्थिरवैद्युत बल संरक्षी (conservative) होता है।

4.2 सतत आवेश वितरण से उत्पन्न विभव (Potential due to continuous charge distributions)



चित्र 4.1 : एक अपरिमित रूप से लंबे आवेशित तार से उत्पन्न किसी बिन्दु पर विभव

पिछली इकाई में आप स्थिरवैद्युत विभव और विद्युत क्षेत्र E के साथ इसके संबंध के बारे में पढ़ चुके हैं। स्थिरवैद्युत विभव (electrostatic potential) और विद्युत क्षेत्र दोनों ही अति महत्वपूर्ण राशियां हैं। स्थिरविद्युतिकी (electrostatics) में प्रायः इन दोनों राशियों में से एक राशि को परिकल्पित करना होता है, क्योंकि यदि एक राशि ज्ञात हो जाए तो दूसरी राशि को आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। इस भाग में हम अनंत रेखीय आवेश और एकसमान आवेशित वृत्तीय डिस्क से उत्पन्न विभव का मान ज्ञात करेंगे।

4.2.1 रेखीय आवेश (Line Charge)

इस खंड की इकाई 2 में हमने एक अपरिमित रूप से लंबे आवेशित तार (या रेखीय आवेश) के निकट स्थित बिंदु पर विद्युत क्षेत्र परिकल्पित किया है। उसका मान यह है :

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \hat{r} \quad (4.1)$$

यहां λ तार पर प्रति एकक लंबाई आवेश है, r तार से बिंदु की लंब दूरी है और \hat{r} एकक सदिश है जिसकी दिशा उस ओर है जिस ओर r का मान बढ़ रहा है (चित्र 4.1 देखें)। अब प्रश्न यह उठता है कि किसी बिंदु P पर इस तार से उत्पन्न विभव कितना होता है? इस खंड की इकाई 3 में आपने यह देखा है कि दिये हुए बिंदु और अनंत के बीच के विद्युत क्षेत्र का ऋणात्मक रेखा समाकल ही उस बिंदु पर विभव के मान को व्यक्त करता है, अर्थात्

$$\phi_r = - \int_{\infty}^r E \cdot dr \quad (4.2)$$

इस समाकल का मान मालूम करने के लिए पहले अनंत के स्थान पर परिमित दूरी r_1 लेंगे और फिर r_1 को अनंत तक बढ़ायेंगे। यहां r_1 तार से बिंदु Q की दूरी है (चित्र 4.1 देखिए)। तब हमें इस समाकल से P और Q के बीच का विभवान्तर प्राप्त हो जाएगा, अर्थात्

$$\phi_r - \phi_{r_1} = - \int_{r_1}^r E \cdot dr$$

समीकरण (4.1) से E के व्यंजक को इसमें प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\phi_r - \phi_{r_1} = - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^r \frac{\hat{r} \cdot dr}{r}$$

और, क्योंकि \hat{r} और dr एक ही दिशा में हैं, इसलिए हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} \phi_r - \phi_{r_1} &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^r \frac{dr}{r} \\ &= - \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r}{r_1} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_1}{r} \end{aligned} \quad (4.3)$$

आइए अब हम r_1 के स्थान पर अनंत रख कर अनंत के सापेक्ष विभव ज्ञात करने की कोशिश करें !

समीकरण (4.3) से हम यह पाते हैं कि रेखीय आवेश वितरण (linear charge distribution) के सापेक्ष पास कहीं भी (r के परिमित मान के लिए) ϕ_r का मान अनंत तक हो जाता है। ऐसा इसलिए होता है, क्योंकि एक अनंत लंबाई वाली रेखा पर एकसमान (uniform) एवं परिमित (finite) आवेश का अर्थ है, अनंत मात्रा में आवेश। फिर भी, इससे कोई समस्या खड़ी नहीं होती, क्योंकि व्यावहारिक स्थितियों में केवल विभवान्तर का ही प्रयोग होता है। यहां केवल सुविधा को ध्यान में रखकर शून्य विभव के स्थान को अनंत

पर माना गया है। यहां इस बात पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है कि वास्तव में केवल विभवान्तर का ही महत्व होता है। विभव के निरपेक्ष (absolute) मान का कोई भौतिक महत्व नहीं है। ध्यान दीजिए कि समीकरण (4.3) से परिमित दूरियों r और r_1 के बीच विभवान्तरों के परिमित मान प्राप्त होते हैं।

सतत आवेश वितरण से उत्पन्न विभव तथा ऊर्जा

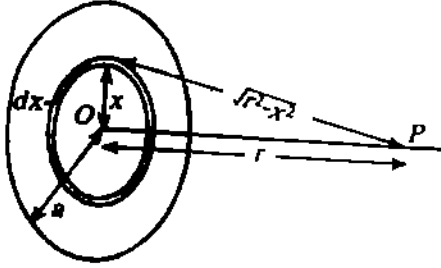
4.2.2 आवेशित वृत्तीय डिस्क

पिछले उपभाग में की गई चर्चा में हमने E के मान के सहायता से और इसका रेखा समाकल ज्ञात कर एक अपरिमित रूप से लंबे आवेशित तार के निकट स्थित बिंदु पर विभव को परिकलित किया है। तार एक-विम तंत्र (one dimensional system) है। आइए अब हम दो विमाओं वाले सतत आवेश वितरण अर्थात् एकसमान रूप से आवेशित वृत्तीय डिस्क लें। ऐसे डिस्क के अक्ष के किसी बिंदु पर विभव क्या होता है? इसे परिकलित करने के लिए पिछली हंकाई में प्राप्त किए गए बिंदु आवेश द्वारा उत्पन्न विभव के निम्नलिखित व्यापक सूत्र का सीधे प्रयोग करेंगे :

$$\phi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad (4.4)$$

विभव का परिकलन करने के लिए हम डिस्क को अनेक संकेन्द्रीय (concentric) वृत्तीय डिस्कों में बांट देंगे और तब इनमें से प्रत्येक से उत्पन्न विभव का योग करेंगे।

त्रिज्या 'a' वाला एकसमान आवेशित पतला वृत्तीय डिस्क लीजिए जिसका पृष्ठ आवेश घनत्व (surface charge density) (आवेश प्रति एकक क्षेत्रफल) σ है, जैसा कि चित्र 4.2 में दिखाया गया है।



चित्र 4.2 : त्रिज्या 'a' वाले एकसमान आवेशित वृत्तीय डिस्क के अक्ष पर स्थित बिंदु P पर विभव

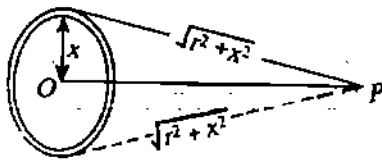
आइए अब हम अक्ष के किसी बिंदु P पर विभव ज्ञात करें। बिंदु P डिस्क के केन्द्र O से r दूरी पर स्थित है तथा P और O को मिलाने वाली रेखा डिस्क के समतल पर लंब है। विभव ज्ञात करने के लिए पहले केन्द्र से x दूरी पर छोटाई dx वाली एक पतली वृत्तीय पट्टी लेते हैं और इस पट्टी से उत्पन्न बिंदु P पर विभव का मान लिख लेते हैं।

मान लीजिए इस पट्टी पर आवेश dQ है, जहां

$$dQ = (2\pi x dx) \sigma \quad (4.5)$$

यहां समीकरण (4.5) में $2\pi x dx$ पट्टी का क्षेत्रफल है। चित्र 4.3 में, पट्टी के सभी भाग बिंदु P से समदूरस्थ (equidistant) हैं। इस पट्टी पर के आवेश dQ को हम अनेक बिंदु आवेशों δq_i के योगफल

के रूप में लिख सकते हैं, जिससे कि $dQ = \sum_{i=1}^n \delta q_i$, जहां n काफी बड़ा है।



चित्र 4.3 : बिंदु P से पट्टी के भिन्न-भिन्न भागों की दूरी।

बिंदु P और इस पट्टी के सभी बिंदु आवेशों के बीच की दूरी $\sqrt{r^2 + x^2}$ होती है। समीकरण (4.4) और अध्यारोपण नियम (principle of superposition) का उपयोग करने पर आवेश dQ से उत्पन्न (पूरी पट्टी से उत्पन्न) बिंदु P पर विभव $d\phi$ यह होता है :

$$d\phi = \frac{\sum_{i=1}^n \delta q_i}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}} = \frac{dQ}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}}$$

$$= \frac{(2\pi x dx)\sigma}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{r^2 + x^2}} \quad \dots(4.6)$$

जैसा कि पहले बताया जा चुका है डिस्क को अनेक समरूप संकेन्द्रीय पट्टियों में बाँटकर और उनसे उत्पन्न विभवों का योगफल लेकर पूरे डिस्क से उत्पन्न बिंदु P पर कुल विभव प्राप्त किया जाता है। क्योंकि इस योगफल में बहुत संख्या में अत्यन्त (infinitesimal) पद होते हैं, इसलिए संकलन (summation) के स्थान पर समाकलन (integration) का प्रयोग किया जा सकता है।

इस तरह सभी संकेन्द्रीय पट्टियों पर समीकरण (4.6) का समाकलन करने पर हमें डिस्क पर स्थित सभी आवेशों से उत्पन्न निम्नलिखित कुल विभव प्राप्त होता है :

$$\phi = \int d\phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_0^a \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} dx \quad (4.7)$$

वृत्तीय पट्टी का क्षेत्रफल परिधि और मोटाई का गुणनफल होता है

मान लीजिए $x^2 + r^2 = y$
 अवकलन करने पर हमें $2x dx = dy$
 प्राप्त होता है। अतः

$$\int_0^a \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}} dx = \int_r^{\sqrt{a^2 + r^2}} \frac{y^{-1/2}}{2} dy$$

$$= |y^{1/2}|_r^{\sqrt{a^2 + r^2}}$$

$$= \sqrt{a^2 + r^2} - r$$

समीकरण (4.7) में दिए हुए आवेश घनत्व (अर्थात् डिस्क) और बिंदु P के लिए क्रमशः σ और r अचर है। जब हम डिस्क के केन्द्र, जहाँ $x = 0$ है, से डिस्क के कोर, जहाँ $x = a$ की ओर जाते हैं तब x की सीमाएं 0 से a होती हैं। समाकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + r^2} - r \right) \quad (4.8)$$

समीकरण (4.8) से यह स्पष्ट पता चलता है कि डिस्क के केन्द्र पर स्थित बिंदु के लिए जहाँ $r = 0$ है,

ϕ का मान, $\frac{\sigma a}{2\epsilon_0}$ हो जाता है।

केन्द्र से दूर स्थित बिंदुओं के लिए, जहाँ $r \gg a$ है, द्विपद प्रसार की सहायता से राशि $\sqrt{a^2 + r^2}$ का सन्निकट मान निम्नलिखित तरीके से प्राप्त किया जा सकता है :

$$\sqrt{a^2 + r^2} = r \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^{1/2}$$

$$= r \left(1 + \frac{1}{2} \frac{a^2}{r^2} + \dots \right)$$

$$= r + \frac{a^2}{2r} \quad (4.9)$$

इसी तरह समीकरण (4.8) में समीकरण (4.9) को रखने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(r + \frac{a^2}{2r} \right) - r = \frac{\sigma a^2}{4\epsilon_0 r}$$

हर और अंश दोनों को r से गुणा करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\phi = \frac{\sigma a^2}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi \epsilon_0 r} \quad (4.10)$$

जहाँ $q = \sigma \pi a^2$ डिस्क पर कुल आवेश है। समीकरण (4.10) का समीकरण (4.4) के साथ तुलना करके आप यह देख सकते हैं कि अक्ष के दूर स्थित बिंदुओं के लिए डिस्क एक बिंदु आवेश की तरह व्यवहार करता है। और, आप यह भी देख सकते हैं कि किसी बिंदु पर विभव ϕ , r के प्रतिलोमानुपाती (inversely proportional) होता है अर्थात् r में वृद्धि होने पर ϕ में कमी आती है।

क्या आप जानते हैं कि हमने बिंदुओं को क्यों केवल सममिति अक्ष पर लिया है ? इसका कारण यह है कि

अक्ष से दूर स्थित बिंदुओं के लिए समीकरण (4.7) का निश्चित समाकल का मान ज्ञात करना काफी कठिन होता है और यह हमारे इस पाठ्यक्रम से परे है।

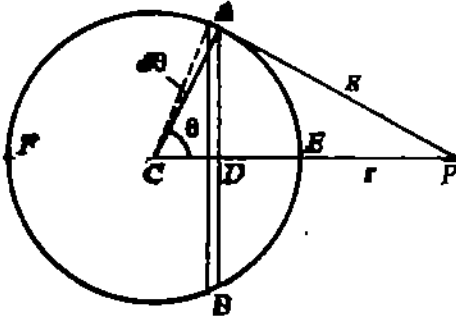
नीचे दिए गए दो बोध प्रश्नों को हल करने पर आप यह सुनिश्चित कर लेंगे कि ऊपर बतायी गई बातों का उपयोग करके आप इनसे संबंधित कोई भी प्रश्न हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 1

विभव के व्यंजक से अर्थात् ऊपर दिए गए समीकरण (4.8) से एक आवेशित वृत्तीय डिस्क के निकट विद्युत क्षेत्र का मान ज्ञात कीजिए। इसके आधार पर अपरिमित रूप से आवेशित एक समतल घादर के समीप विद्युत क्षेत्र ज्ञात करें।

बोध प्रश्न 2

नगण्य मोटाई वाले एकसमान आवेशित खोखले गोलीय कोश (spherical shell) के बाहर और अंदर स्थित बिंदुओं पर विभव के व्यंजक प्राप्त कीजिए। चित्र 4.4 देखिए।



चित्र 4.4 : गोलीय कोश

[संकेत : कोश को AB जैसे अनेक समांतर वलयों (rings) में बांट दीजिए, जैसा कि चित्र 4.4 में दिखाया गया है। वलय का तल, कोश के केन्द्र C और बिंदु P (जहां विभव ज्ञात करना है) को मिलाने वाली रेखा पर लंब है। बिंदु P पर इन समांतर वलयों के कारण उत्पन्न विभवों के योगफल को समाकलन द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। समाकलन के लिए वलय AB के कारण उत्पन्न विभव को एक घर अर्थात् x के पदों में व्यक्त कीजिए।]

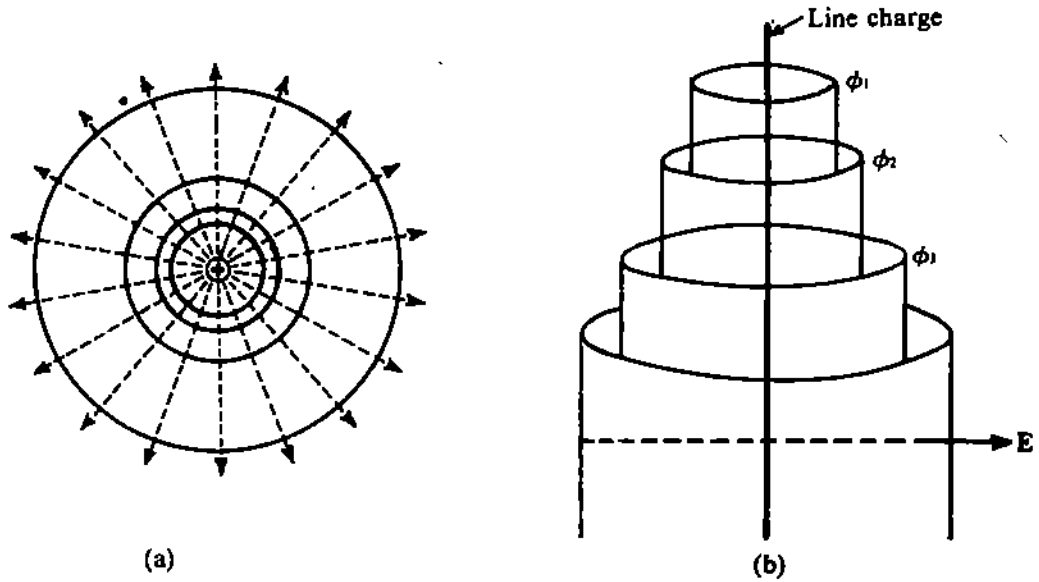
अभी तक हमने विद्युत क्षेत्र और विभव पर चर्चा की है जिनसे हमें स्थिरवैद्युत बलों का एक विस्तृत परिमाणात्मक (quantitative) विवरण प्राप्त होता है। गुणात्मक (qualitative) विवरण के लिए बल रेखाओं और समविभव पृष्ठों (equipotential surfaces) की संकल्पनाएं काफी उपयोगी होती हैं। इन संकल्पनाओं से हम क्षेत्र का ज्यामितीय विवेचन कर सकते हैं। अगले भाग में हम समविभव पृष्ठों पर चर्चा करेंगे।

4.3 समविभव पृष्ठ (Equipotential surface)

समान विभव वाले सभी बिंदुओं के बिंदु-पथ (locus) को समविभव पृष्ठ कहा जाता है। किसी बिंदु आवेश द्वारा r दूरी पर स्थित किसी बिंदु पर विभव ϕ_r के मान को इस प्रकार लिखा जाता है :

$$\phi_r = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r} \right)$$

इसे देखने से यह पता चलता है कि यदि किसी पृष्ठ पर r का मान अचर हो, तो इस पृष्ठ पर सर्वत्र ϕ समान होगा। अतः r के समान मान वाले बिंदुओं का बिंदु-पथ एक गोलीय पृष्ठ (जिसके लिए r अचर है) होता है। जिसके केन्द्र पर बिंदु आवेश होता है। r के भिन्न मान के लिए हमें एक भिन्न गोलीय पृष्ठ प्राप्त होता है चित्र 4.5 (क) देखिए। ध्यान दीजिए कि सभी जगह विद्युत क्षेत्र रेखाएं समविभव पृष्ठ पर लंब होती हैं।



चित्र 4.5 (क) : बिंदु आवेश $+q$ के समविभव पृष्ठ। बाहू रेखाएं त्रिज्य (रेडिअस) हैं। जैसे पृष्ठ कायम के समान पर समविभव पृष्ठों के प्रतिच्छेद हैं। (ख) एकसमान अनंत रेखीय आवेश के समविभव पृष्ठ (बेलनाकार पृष्ठ)।

एकसमान अनंत रेखीय आवेश के लिए आवेशित रेखा से समान दूरी पर स्थित बिंदुओं पर विद्युत विभव समान होता है। अतः समविभव पृष्ठ बेलनाकार पृष्ठ होते हैं जिनका अक्ष आवेशित रेखा होती है। चित्र 4.5 (ख) देखिए। समविभव पृष्ठ का एक अन्य उदाहरण चालकीय पृष्ठ (conducting surface) है। एक आदर्श चालकीय पृष्ठ एक समविभव पृष्ठ अवश्य होगा, क्योंकि यदि विभवान्तर होता है, तो आवेश उच्च विभव वाले बिंदु से निम्न विभव वाले बिंदु की ओर तब तक जाते रहेंगे जब तक कि हर जगह विभव समान नहीं हो जाता। आप आगे चलकर संधारित्रों (capacitors) पर लिखी गई इकाई 6 में यह देखेंगे कि इस गुणधर्म की सहायता से संधारित्र के प्लेटों के बीच के स्थान में क्षेत्र और विभव का परिकल्पन आसानी से किया जा सकता है।

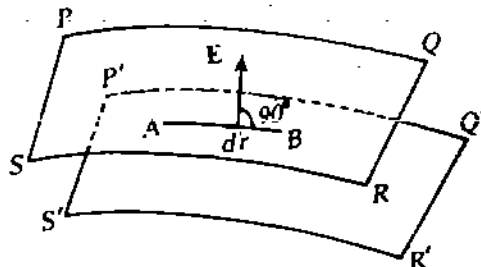
क्योंकि समविभव पृष्ठ “अचर विभव” पृष्ठ होते हैं, इसलिए इन पृष्ठों के किन्हीं दो बिंदुओं के बीच का विभवान्तर शून्य होता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि इस प्रकार के पृष्ठ पर एक आवेश को एक बिंदु से दूसरे बिंदु तक ले जाने में किया गया कार्य भी शून्य होता है।

इकाई 3 में की गई चर्चा के आधार पर अब आप यह कह सकते हैं कि समविभव पृष्ठ के किन्हीं दो बिंदुओं के बीच के विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल भी शून्य के बराबर होगा क्योंकि इस पृष्ठ के किन्हीं दो बिंदुओं के बीच का विभवान्तर शून्य होता है। चित्र 4.6 देखिए। इस कथन को गणितीय रूप में लिखने पर यह ज्ञात होता है कि

$$\phi_A - \phi_B = - \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0 \quad (4.11)$$

जहां ϕ_A और ϕ_B क्रमशः A और B पर विभव हैं।

यह केवल तभी सही होता है जब विद्युत क्षेत्र \mathbf{E} और लघु विस्थापन सदिश $d\mathbf{r}$ एक दूसरे पर लंब हों क्योंकि $d\mathbf{r}$ सम विभव पृष्ठ पर एक अत्यणु विस्थापन (infinitesimal displacement) है, इसलिए इस प्रकार के पृष्ठ के सभी बिंदुओं पर \mathbf{E} लंब होता है (चित्र 4.6 देखिए)।

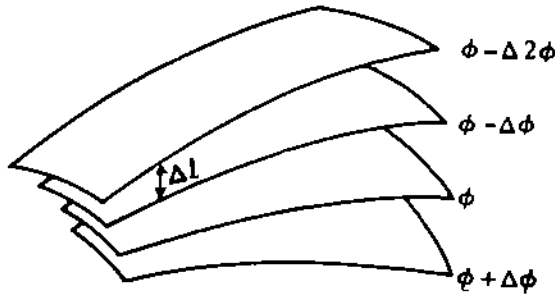


चित्र 4.6 : समविभव पृष्ठ के सापेक्ष विद्युत क्षेत्र सदिश \mathbf{E} की दिशा। $PQRS$ और $P'Q'R'S'$ समविभव पृष्ठ के भाग हैं।

यही कारण है कि हमने चित्र 4.5 में विद्युत बल रेखाओं को समविभव पृष्ठ पर लंबवत खींचा है। किसी भी आवेश वितरण के लिए समविभव पृष्ठ उसी तरह के दिखाई पड़ते हैं, जैसा कि चित्र 4.7 में दिखाया गया है।

समतल आवेश वितरण से उत्पन्न विभव तथा ऊर्जा

समविभव पृष्ठों को इस प्रकार खींचने की परम्परा रही है, जिससे कि संलग्न पृष्ठों के बीच एक अचर विभवान्तर, मान लीजिए, $\Delta\phi$ रहे (चित्र 4.7 देखिए)।



चित्र 4.7 : किसी भी आवेश वितरण के लिए समविभव पृष्ठों की बीच की दूरियाँ। यहाँ चार समविभव पृष्ठों के पाग दिखाए गए हैं।

ये पृष्ठ एक दूसरे के समांतर हो भी सकते हैं और नहीं भी हो सकते हैं। जहाँ $|E|$ अधिक प्रबल होता है, वहाँ ये एक दूसरे के निकट होते हैं और जहाँ $|E|$ कम प्रबल है वहाँ ये एक दूसरे से दूर होते हैं। ऐसा होने का कारण यह है कि किसी भी बिंदु पर समविभव पृष्ठों के बीच का अंतराल Δl यह होता है :

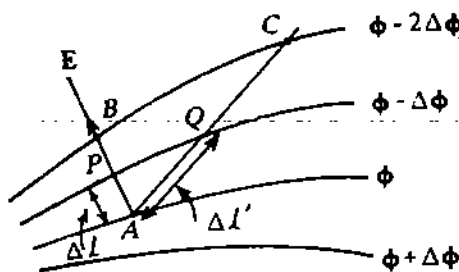
$$\Delta l = \frac{\Delta\phi}{|E|} \quad (4.12)$$

जहाँ Δl समविभव पृष्ठ के अभिलंब की दिशा की ओर है।

आप इकाई 3 में यह देख चुके हैं कि किसी बिंदु पर विद्युत क्षेत्र E और विभव ϕ के बीच निम्नलिखित संबंध होता है :

$$E = - \text{grad}\phi \quad (4.13)$$

विद्युत क्षेत्र E का सदा ही समविभव पृष्ठ पर लंब होना तथा समीकरण (4.13) में ऋण चिह्न का होना यह दिखाता है कि E की दिशा सदा ही हासमान ϕ वाले समविभवों की ओर होती है। इस बात को चित्र 4.8 में दिखाया गया है।

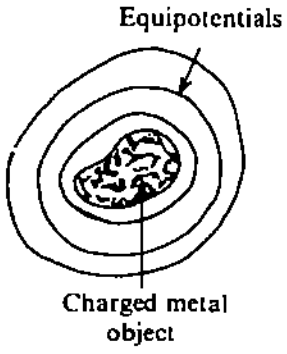


चित्र 4.8 : समविभव पृष्ठों के सापेक्ष विद्युत क्षेत्र E की दिशा

चित्र 4.8 में दिखाए गए समविभवों के संबंध में हम यह पाते हैं कि परिणामी विद्युत क्षेत्र सदिश E , AB के अनुदिश होता है, क्योंकि इस दिशा में ϕ में कमी तेजी से होती है जैसा कि निम्नलिखित सापेक्ष अनुपातों (relative ratios) से स्पष्ट है :

$$\frac{\Delta\phi}{\Delta l} \text{ और } \frac{\Delta\phi}{\Delta l'}$$

अतः आप यह याद रख सकते हैं कि E सदा ही ϕ के अधिकतम या तीव्रतम हास (decrease) की दिशा में होता है। AC की दिशा में विद्युत क्षेत्र का परिमाण $|E| \cos\theta$ होता है जहाँ θ , AB और AC के बीच का कोण है।



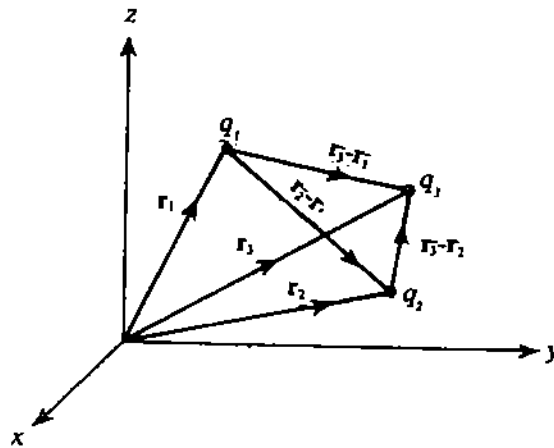
ऊपर की गई चर्चा से आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किसी आवेश, आवेश समूह या किसी रूप या आकार के आवेश वितरण वाले क्षेत्र में समविभव पृष्ठों के आरेख से E की दिशा और परिमाण दोनों का एक दृश्य चित्र प्राप्त होता है। अभी तक हमने विद्युत क्षेत्र सदिश E , विभव और समविभव पृष्ठों के पदों में स्थिरवैद्युत क्षेत्र का वर्णन किया है। अगले भाग में हम विविक्त (discrete) और सतत दोनों प्रकार के आवेशों द्वारा निकाय की रचना करने में प्रयुक्त ऊर्जा के बारे में चर्चा करेंगे पर, अगले भाग का अध्ययन करने से पहले आप एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 3

- क) मान लीजिए एक आवेश समूह से उत्पन्न विद्युत बल रेखाओं का एक चित्र दिया गया है और आपसे समविभव पृष्ठ खींचने के लिए कहा गया है। बताइए कि समविभव पृष्ठ खींचते समय आपको किन-किन बातों को ध्यान में रखना होगा।
- ख) धातु की बनी एक आवेशित ठोस वस्तु के समविभव पृष्ठ चित्र 4.9 में दिखाए गए हैं। इसके लिए विद्युत बल रेखाएं खींचिए।

4.4 स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा (Electrostatic potential energy)

आवेशों द्वारा निकाय (system) की रचना करने में किया गया कार्य आवेशों की स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित होती है। मान लीजिए q_1 और q_2 दो आवेश हैं जो प्रारम्भ में एक दूसरे से काफी दूरी पर स्थित हैं। मान लीजिए q_1 , r_1 पर स्थित है और q_2 को अनंत से स्थिति r_2 तक लाया जाता है (चित्र 4.10 देखिए)।



चित्र 4.10 : तीन आवेशों q_1 , q_2 और q_3 द्वारा निकाय की रचना

अब आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि अनंत से स्थिति r_2 तक q_2 को लाने में कितना कार्य करना होता है। हकई 3 से आप यह जानते हैं कि यह कार्य आवेश q_2 तथा आवेश q_1 के कारण बिंदु r_2 पर उत्पन्न विभव के गुणनफल के बराबर होता है। अर्थात्

$$dW = q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_2 - r_1} \quad (4.14)$$

यह वस्तुतः दो बिंदु आवेशों q_1 और q_2 को बिंदु r_1 और r_2 तक एक दूसरे के निकट लाने में किए गए कार्य के बराबर होता है। किया गया कार्य निकाय (system) में संचित होता है और इसे दो आवेशों के निकाय का स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा (या केवल स्थितिज ऊर्जा) कहा जाता है। यदि इन आवेशों को एक दूसरे से दूर कर दिया जाए जिससे कि q_2 पुनः अनंत पर पहुंच जाए तो निकाय द्वारा समान मात्रा में ऊर्जा की आपूर्ति की जाती है।

आपको इस बात पर आश्चर्य हो रहा होगा कि यह स्थितिज ऊर्जा कहां पर संचित होती है। क्या q_1 की स्थिति r_1 पर या q_2 की स्थिति r_2 पर। यह ऊर्जा न तो r_1 पर होती है और न ही r_2 पर बल्कि पूरे निकाय में संचित होती है। यह किसी विशेष बिंदु पर स्थित नहीं होती है।

जब दोनों आवेश या तो घनात्मक होते हैं या ऋणात्मक, तो ये एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं। इस स्थिति में निकाय की रचना के लिए कार्य करना होता है। इस कार्य की पुनः प्राप्ति की जा सकती है यदि आवेशों

को प्रतिकर्षण की वजह से एक दूसरे से दूर जाने दिया जाये। इस स्थिति में संचित स्थितिज ऊर्जा आवेशों की गतिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है। यदि एक आवेश धनात्मक हो और दूसरा ऋणात्मक हो तो इन आवेशों को एक दूसरे से दूर करने में कार्य करना होता है। किन्तु यदि आकर्षण की वजह से आवेशों को एक दूसरे के निकट आने दिया जाये तो किए गए कार्य की पुनः प्राप्ति की जा सकती है।

यदि दो आवेशों q_1 और q_2 का गुणनफल धनात्मक हो अर्थात् उनकी ध्रुवताएं (polarities) समान हो, तो स्थितिज ऊर्जा धनात्मक होती है। धनात्मक स्थितिज ऊर्जा का अर्थ यह होता है कि सजातीय आवेशों (like charges) द्वारा निकाय की रचना करने में कार्य करना होता है। यदि गुणनफल $q_1 \times q_2$ ऋणात्मक हो अर्थात् उनकी ध्रुवताएं एक दूसरे के विपरीत हों, तो स्थितिज ऊर्जा ऋणात्मक होती है। ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा का अर्थ यह होता है कि आवेशों को एक दूसरे से दूर ले जाने में कार्य करना होता है। इस स्थिति में तब यह आसानी से कहा जा सकता है कि धनात्मक स्थितिज ऊर्जा प्रतिकर्षी विद्युत बल के संगत होती है। जबकि ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा आकर्षी विद्युत बल के संगत होती है।

यदि दो आवेशों के स्थान पर अनेक आवेशों द्वारा निकाय की रचना हो रही हो, तो कल्पना कीजिए कि ऐसी स्थिति में क्या होगा। शुरू में, आइए, पहले हम केवल तीन आवेश q_1 , q_2 और q_3 लें जिन्हें स्थितियों r_1 , r_2 और r_3 पर लाना है, जैसा कि चित्र 4.10 में दिखाया गया है। पहले q_1 को r_1 पर और q_2 को r_2 पर लाइए। इस के लिए जो कार्य किया जायेगा उसे समीकरण (4.14) के अनुसार लिखा जा सकता है। अब q_3 को, q_1 और q_2 द्वारा लगाए गए बल के विरुद्ध, r_3 पर लाइए। इस स्थिति में किया गया कार्य यह होगा :

$$dW' = q_3 \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_3 - r_1} + q_3 \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r_3 - r_2} \quad (4.15)$$

ऐसा इसलिए है, क्योंकि q_3 पर लगा कुल बल दो अलग-अलग बलों के योगफल के बराबर होता है। तब पहले चरण सहित किया गया कुल कार्य यह होता है:

$$\begin{aligned} W &= dW + dW' \\ &= q_2 \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 |r_2 - r_1|} + q_3 \frac{q_1}{4\pi \epsilon_0 r_3 - r_1} + q_3 \frac{q_2}{4\pi \epsilon_0 r_3 - r_2} \\ &= \sum_{\text{सभी युग्म}} \frac{q_j q_k}{4\pi \epsilon_0 r_j - r_k} \quad \text{जहां } j = 1 \text{ से } 3 \text{ और } k = 1 \text{ से } 3 \text{ किन्तु } j \neq k \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^3 \frac{q_j q_k}{4\pi \epsilon_0 r_j - r_k} \end{aligned} \quad (4.16)$$

समीकरण (4.16) के अंतिम चरण में संकलन चिह्न (summation sign) के पहले गुणनखंड $1/2$ को यह दर्शाने के लिए लिखा जाता है कि प्रत्येक आवेश युग्म (pair of charges) के योगदान को केवल एक बार शामिल किया गया है। उदाहरण के लिए, $j = 1$ और $k = 2$, तथा $k = 1$ और $j = 2$, दोनों ही स्थितियों के लिए युग्म q_1 और q_2 के लिए, हमें योगदान प्राप्त होता है। इस तरह गुणनखंड $1/2$ इस दोहरे योगदान को एक योगदान में बदल देता है। आप यहां यह देख सकते हैं कि हमने $j \neq k$ को द्वितीय संकलन चिह्न के नीचे लिखा है। ऐसा इसलिए किया है जिससे कि आवेश और उसके स्वयं के बीच के बल का व्यंजक न शामिल हो।

q_1, q_2, \dots, q_N आवेशों को r_1, r_2, \dots, r_N बिंदुओं पर लाने पर, ऊपर की गई चर्चा का व्यापकीकरण करके, स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा (P.E.) को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$\text{P.E.} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \sum_{\substack{k=1 \\ j \neq k}}^N \frac{q_j q_k}{4\pi \epsilon_0 r_j - r_k} \quad (4.17)$$

आप समीकरण (4.17) में यह देख सकते हैं कि j के प्रत्येक मान के लिए (जैसा कि प्रथम संकलन द्वारा निश्चित किया गया है) k के उस मान को नहीं लिया जाता है जो j के बराबर है। इसका यह अर्थ है कि स्वयं को छोड़कर अन्य सभी आवेशों द्वारा आवेश q_j के स्थिति पर विभव लिया जाता है। आवेश q_j की स्थिति पर विभव ϕ_j के पदों में समीकरण (4.17) को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$\text{P.E.} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \phi_j$$

(4.18)

इस समीकरण को देखने से यह पता चलता है कि बिंदु आवेश समूह के लिए स्थिरविद्युत स्थितिज ऊर्जा का परिकलन करने के लिए किसी एक आवेश तथा उस आवेश को छोड़कर अन्य सभी आवेशों के कारण उत्पन्न स्थिति के संगत विभव के मान की आवश्यकता होती है।

अब, मान लीजिए हम एक विलगित चालक पर बिंदु आवेशों को, चरणों में, धीरे धीरे रख रहे हैं, तब किए गए कार्य का मान इस प्रकार ज्ञात किया जा सकता है:

मान लीजिए एक दिए हुए समय में चालक पर आवेश q है। तब इस आवेश का विभव ϕ , q के समानुपाती होगा। q पर एक अतिरिक्त आवेश δq को लाने में किया गया कार्य δW यह होगा:

$$\delta W = \phi \delta q.$$

हम ϕ को इस रूप में लिख सकते हैं:

$$\phi = kq$$

जहां k अनुक्रमानुपाती नियतांक है। अतः

$$\delta W = kq \delta q.$$

जैसे-जैसे इस चालक में हम और आवेशों को लाते जाते हैं वैसे-वैसे किया गया कुल कार्य इस आवेशित पिंड में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित होता जाता है। इस दौरान, किए गए कुल कार्य को समाकलन करके (जो कि संकलन के तुल्य है) प्राप्त किया जा सकता है।

अतः स्थितिज ऊर्जा को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है: (यदि पिंड पर अंतिम आवेश Q हो)

$$\begin{aligned} \text{स्थितिज ऊर्जा} &= \int \delta W = \int kq \delta q = k \left[\frac{q^2}{2} \right]_0^Q \\ &= k \frac{Q^2}{2} = \frac{Q}{2} \phi_f \end{aligned}$$

जहां $\phi_f = kQ$, आवेशित पिंड का अंतिम विभव है।

यदि आवेश वितरण सतत हो, तो संकलन के स्थान पर समाकलन का प्रयोग होता है। यदि एक अत्यणु आयतन (infinitesimal volume) dV में हम बिंदु आवेशों की रचना इस प्रकार करें कि आयतन आवेश घनत्व ρ हो और विभव ϕ हो, तो स्थितिज ऊर्जा को इस रूप में लिखा जा सकता है:

$$\text{स्थितिज ऊर्जा} = \frac{1}{2} \int_{\text{आयतन}} \rho \phi dV$$

पृष्ठ पर आवेश वितरण के लिए, यदि σ , पृष्ठ क्षेत्रफल के अंश dS पर, प्रति एकक क्षेत्रफल आवेश हो,

$$\text{तो स्थितिज ऊर्जा} = \frac{1}{2} \int_{\text{पृष्ठ}} \sigma \phi dS$$

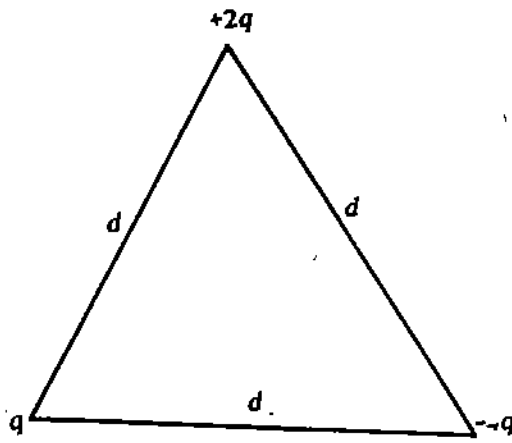
रेखीय आवेश वितरण के लिए, यदि λ प्रति एकक लंबाई आवेश-हो, तो स्थितिज ऊर्जा यह होती है:

$$\text{स्थितिज ऊर्जा} = \frac{1}{2} \int_{\text{रेखा}} \lambda \phi dl$$

उदाहरण 1

तीन आवेशों को इस तरह रखा गया है, जैसा कि चित्र 4.11 में दिखाया गया है। इनकी स्थिरविद्युत स्थितिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए। यहां यह मान लीजिए कि

$$q = 1.0 \times 10^{-5} \text{C और } d = 0.1 \text{m है}$$



चित्र 4.11

हल

निकाय की कुल स्थितिज ऊर्जा सभी आवेश युग्मों (pair of charges) की स्थितिज ऊर्जाओं का बीजीय योगफल होती है, अर्थात्

$$\begin{aligned} \text{P.E.} &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{(+q)(-4q)}{d} + \frac{(+q)(+2q)}{d} + \frac{(-4q)(+2q)}{d} \right] \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left[\frac{-10q^2}{d} \right] \\ &= \frac{-(9.0 \times 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2})(10) \times (1.0 \times 10^{-3} \text{ C})^2}{0.1 \text{ m}} \\ &= -90 \text{ J} \end{aligned}$$

बोध प्रश्न 4

एक आरेख खींचकर बताइए कि पांच बिंदु आवेशों के निकाय की स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा में कितने पदों का योगदान होगा।

अभी तक हमने स्थिरवैद्युत विभव, समविभव पृष्ठ और स्थिरवैद्युत ऊर्जा पर चर्चा की है। अब हम स्थिरवैद्युत बल के स्वरूप पर चर्चा करेंगे।

4.5 स्थिरवैद्युत बल का स्वरूप

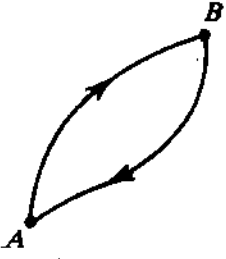
इकाई 3 में आप यह देख चुके हैं कि विद्युत क्षेत्र E में A से B तक आवेश q को ले जाने में किये गये कार्य को इस रूप में लिखा जाता है :

$$W = - \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -q \int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} \quad (4.20)$$

जहाँ q पर स्थिरवैद्युत बल F लग रहा है। उसी इकाई में आप यह भी देख चुके हैं कि विद्युत क्षेत्र का रेखा समाकल अर्थात् $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$, A और B के बीच के पथ पर निर्भर नहीं करता है। इससे यह अर्थ निकलता है

कि स्थिरवैद्युत बल का रेखा समाकल अर्थात् $\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ भी A और B के बीच के पथ से स्वतंत्र होता है।

अर्थात् स्थिरवैद्युत बल F के विरुद्ध आवेशित कण को ले जाने में किया गया कार्य A और B के बीच के पथ से स्वतंत्र होता है और केवल अन्त्य बिंदुओं (end points) A और B पर निर्भर करता है। इससे यह भी



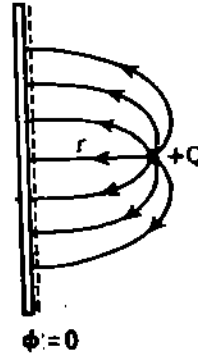
चित्र 4.12

अर्थ निकलता है कि एक बंद लूप (closed loop) के पथ पर से जाने में किया गया कार्य शून्य होता है (चित्र 4.12)। यदि ऐसा नहीं होता, तो एक ऐसा लूप अवश्य होता जिसके अनुदिश विपरीत दिशा में चलने पर ऋणात्मक कार्य होता अर्थात् हमें ऊर्जा प्राप्त होती। और, इस तरह लूप के पथ पर चल कर जितनी चाहे उतनी ऊर्जा पुनः प्राप्त की जा सकती थी। ऐसा न होने का कारण है ऊर्जा संरक्षण (conservation of energy) नियम। इस तरह, हम यह पाते हैं कि एक स्थिरवैद्युत क्षेत्र में किए गए कार्य का पथ पर निर्भर न करना तथा विभव की संकल्पना, ऊर्जा संरक्षण से ही संबंधित है। अतः गुरुत्व बल की तरह स्थिरवैद्युत बल भी संरक्षित (conserved) होता है। संरक्षी बल (conservative force) के लिए ऊर्जा संरक्षण का नियम लागू होता है।

4.4 प्रतिबिंब विधि (Method of Images)

आवेशों और चालकीय पृष्ठों (conducting surfaces) से संबंधित कुछ प्रश्नों को हल करने में समविभव पृष्ठ की संकल्पना काफी उपयोगी सिद्ध होती है। यह तथ्य प्रतिबिंब विधि में अच्छी तरह से प्रदर्शित होती है। एक अपरिमित रूप से लम्बे (infinitely large), भूसंपर्कित (grounded) चालक प्लेट के सामने रखे एक आवेश Q पर लग रहे बल का मान निकालने के दौरान इस पर हम चर्चा करेंगे। भूसंपर्कन (grounding) का अर्थ है चालक प्लेट को शून्य विभव पर रखना।

एक अपरिमित रूप से लम्बे, भूसंपर्कित चालक प्लेट से दूरी r पर रखे आवेश Q पर, चालक प्लेट पर प्रेरित आवेशों (induced charges) के कारण एक बल लगता है (चित्र 4.13 देखिए)। अब आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि आवेश Q के सामने वाले चालक पृष्ठ पर प्रेरित आवेश क्यों आ जाते हैं? चालक के अंदर

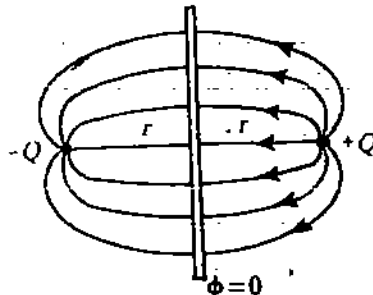


चित्र 4.13 : एक बिंदु आवेश Q के कारण भूसंपर्कित चालक प्लेट पर प्रेरित आवेश

विद्युत क्षेत्र न हों इसके लिए आवश्यक है कि चालक प्लेट पर ये प्रेरित आवेश अवश्य हों। यदि आवेश Q घनात्मक है, तो प्रेरित आवेश ऋणात्मक होंगे।

Q पर लग रहे बल का मान ज्ञात करने के लिए हमें चालक प्लेट पर प्रेरित आवेशों के वितरण की जानकारी अवश्य होनी चाहिए। एक बार चालक प्लेट पर प्रेरित आवेशों का घनत्व ज्ञात हो जाए तो हम Q पर लग रहे बल को ज्ञात करने के लिए कूलॉम नियम को लागू कर सकते हैं।

फिर भी एक अति सरल ढंग से हम हल प्राप्त कर सकते हैं। मान लीजिए हम चालक प्लेट के दूसरी ओर प्लेट से समान दूरी r पर समान और विपरीत आवेश $-Q$ रखते हैं, जैसा कि चित्र 4.14 में दिखाया गया है। यदि चालक प्लेट को एक दर्पण मान लिया जाये तो यह आवेश $-Q$, Q के एक दर्पण प्रतिबिंब की तरह लगता है। क्योंकि चालक प्लेट का प्रत्येक बिंदु दो आवेशों से समान दूरी पर होता है, इसलिए यह एक



चित्र 4.14 : विद्युत क्षेत्र : इसके कारण चालक प्लेट की बायीं ओर समरूप क्षेत्र है।

समविभव समतल (equipotential plane) है। जहाँ तक चालक प्लेट की दायीं ओर उत्पन्न क्षेत्र का संबंध है, इस द्विध्रुव द्वारा उत्पन्न क्षेत्र एवं बिंदु आवेश Q तथा प्लेट पर प्रेरित आवेशों द्वारा उत्पन्न क्षेत्र बिल्कुल समान है।

बिंदु आवेश Q से देखने पर घातु प्लेट पर प्रेरित आवेशों से ठीक वही क्षेत्र उत्पन्न होता है, जो कि Q से $2r$ दूरी पर रखे एक बिंदु आवेश $-Q$ से उत्पन्न होता है। अतः आवेशों Q और $-Q$ के बीच कूलॉम नियम लागू कर चालक प्लेट और आवेश Q के बीच का बल प्राप्त किया जाता है। यह बल निम्नलिखित होता है :

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 (2r)^2}$$

इसी प्रकार की अनेक स्थितियों में प्रतिबिंब विधि का प्रयोग किया जा सकता है। यदि प्रतिबिंब विधि लागू करने के स्थान पर हम चालक प्लेट के सभी बिंदुओं पर आवेश घनत्व परिकल्पित करने और फिर बल ज्ञात करने के लिए कूलॉम नियम लागू करते, तो इस स्थिति में प्रश्न को हल करना एक कष्टसाध्य कार्य हो जाता। जब आपके मन में यह प्रश्न अवश्य उठे होगा कि ऊपर के प्रश्न में हमने चालक प्लेट को भूसंपर्कित क्यों किया था। भूसंपर्कित करके हम इस बात से सुनिश्चित हो जाते हैं कि चालक प्लेट के विभव को निश्चित रखा गया है और प्लेट तथा बिंदु आवेश Q के बीच के बल पर केवल प्रेरित आवेश का योगदान है।

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए अब हम उसका संक्षिप्त विवरण यहां दे दें।

4.7 सारांश

- अपरिमित रूप से लंबे आवेशित तार से r और r_1 दूरियों पर स्थित दो बिंदुओं के बीच का विभवान्तर यह होता है :

$$\phi_r - \phi_{r_1} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{r_1}{r} \right)$$

जहाँ λ तार के प्रति एकक लंबाई पर आवेश है।

- त्रिज्या " a " वाले आवेशित वृत्तीय डिस्क के अक्ष पर r दूरी पर स्थित बिंदु पर विभव ϕ यह होता है :

$$\phi = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0} (\sqrt{a^2 + r^2} - r)$$

जहाँ σ डिस्क के प्रति एकक क्षेत्रफल पर आवेश है।

- समविभव पृष्ठ वे पृष्ठ हैं जिनके प्रत्येक बिंदु पर विभव अचर होता है।
- विद्युत क्षेत्र E सदा ही समविभव पृष्ठ की लंब दिशा में होता है। यह सदा ही विद्युत विभव ϕ के तीव्रतम हास (fastest decrease) की दिशा में होता है।
- प्रबल विद्युत बल के प्रदेश में समविभव पृष्ठ एक दूसरे के निकट होते हैं और दुर्बल विद्युत क्षेत्र के प्रदेश में ये दूर-दूर होते हैं।
- आवेश निकाय में संचित ऊर्जा ही स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा होती है। यह आवेशों को अनंत से लाकर निकाय की रचना करने में किए गए कार्य की मात्रा के बराबर होती है। यदि प्रतिकर्षण के कारण आवेश एक दूसरे से दूर होते जाएं तो आवेशों की गतिज ऊर्जा के रूप में इस ऊर्जा की पुनः प्राप्ति की जा सकती है।
- एक आवेश समूह की स्थिरवैद्युत स्थितिज ऊर्जा को इस रूप में लिखा जाता है :

$$P.E. = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N q_j \phi_j$$

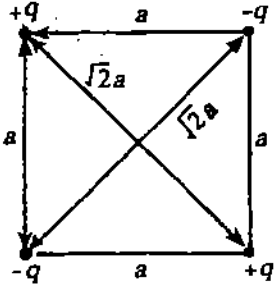
जहाँ ϕ_j , q_j को छोड़कर अन्य सभी आवेशों से उत्पन्न आवेश q_j की स्थिति पर विभव है।

- स्थिरवैद्युत बल संरक्षी होता है क्योंकि एक बंद पथ पर किसी आवेश को ले जाने में किया गया कार्य शून्य होता है।

4.8 अंत में कुछ प्रश्न

- 1) यदि एक दिए हुए बिंदु पर विद्युत क्षेत्र E शून्य के बराबर हो, तो क्या उस बिंदु के लिए ϕ (विभव) भी शून्य के बराबर होगा ? अपने उत्तर की पुष्टि के लिए एक उदाहरण दीजिए ।
- 2) एक अपरिमित रूप से आवेशित शीट (sheet) का पृष्ठ आवेश घनत्व $\sigma = 1.0 \times 10^{-7} \text{ Cm}^{-2}$ है । उन समविभव पृष्ठों के बीच कितनी दूरी होगी यदि उनके विभवों में 5.0 वोल्ट का अंतर हो ?
- 3) दिखाइए कि त्रिज्या a वाले आवेशित बलय के अक्ष पर दूरी x पर स्थित बिंदु पर विद्युत विभव यह होता है :

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$



चित्र 4.15

- 4) जैसा कि चित्र 4.15 में दिखाया गया है, चार आवेशों को एक साथ रखने के लिए आवश्यक कार्य का व्यंजक प्राप्त कीजिए ।
- 5) Q आवेश एवं R त्रिज्या वाली बूंद $Q/2$ आवेश और R' त्रिज्या वाली समान आकार की दो बूंदों में बंट जाती है । इस प्रक्रिया में स्थिरविद्युत ऊर्जा (electrostatic energy) में हुई लाभ या हानि को ज्ञात कीजिए । यहां यह मान लीजिए कि स्थिरविद्युत प्रतिकर्षण के कारण बूंदे R' की तुलना में अधिक दूरी तक प्रतिकर्षित हो जाती हैं ।
- 6) त्रिज्या a और त्रिज्या b वाले दो आवेशित चालक गोले हैं । मान लीजिए इन गोलों को एक चालक तार से जोड़ दिया गया है । इस व्यवस्था से प्राप्त परिणाम की सहायता से इस बात की व्याख्या कीजिए कि क्यों चालक के तीव्र और नुकीले सिरे पर आवेश घनत्व इसके सपाट भागों के आवेश घनत्व से अधिक होता है ।

[संकेत : आवेश तब तक वितरित होते रहते हैं जब तक कि विभव बराबर नहीं हो जाते । तीव्र सिरों की त्रिज्याएं कम होती हैं, जबकि सपाट सिरों की त्रिज्याएं अधिक होती हैं ।]

- 7) कुछ दूरियों पर स्थित तीन बिंदु आवेशों की एक ऐसी व्यवस्था प्राप्त कीजिए जिसकी स्थितिज ऊर्जा शून्य हो ।
- 8) एकसमान आवेशित अचालक के बाहर और अंदर स्थित बिंदुओं पर विभवों के व्यंजक प्राप्त कीजिए ।
[संकेत : गोले को संकेन्द्रीय कोशों में विभाजित कीजिए और गोलीय कोश के परिणामों का उपयोग कीजिए ।]

4.8 हल और उत्तर

बोप प्रश्न

$$1) \phi = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + r^2} - r \right]$$

$$E = - \text{grad } \phi = - \hat{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}$$

$$= - \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\sqrt{a^2 + r^2} - r \right] \right\}$$

$$= - \hat{r} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left\{ \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} - 1 \right\}$$

$$\therefore E = \hat{r} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{r}{\sqrt{a^2 + r^2}} \right]$$

समझने से यह आसानी से जाना जा सकता है कि अपरिमित रूप से सभ्य आवेशित तार के लिए में विद्युत क्षेत्र, r के अनुदिश होता है । अतः समीकरण

$$E = - \hat{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} \text{ का प्रयोग करना होता}$$

है । इस खंड की इकाई 3 के अन्त में दिया गया परिशिष्ट देखिये ।





$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(q)(-q)}{a} + \frac{(-q)(q)}{a} + \frac{(-q)(q)}{a} + \frac{(-q)(q)}{a} \right. \\ & \left. + \frac{(-q)(-q)}{\sqrt{2}a} + \frac{(q)(q)}{\sqrt{2}a} \right] \\ & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-4q^2}{a} + \frac{2q^2}{\sqrt{2}a} \right] \\ & = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-4 + \sqrt{2}) \frac{q^2}{a} \end{aligned}$$

5) विभाजन के बाद दो बूंदों का कुल आयतन = $2 \times \frac{4}{3} \pi R'^3$

मूल बिंदु का आयतन = $\frac{4}{3} \pi R^3$

क्योंकि आयतनों का मान बराबर होना चाहिए, इसलिए

$$2 \times \frac{4}{3} \pi R'^3 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\therefore R' = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3} R \quad (1)$$

आवेश Q वाली मूल बूंद की स्थिरवैद्युत ऊर्जा

$$= \frac{1}{2} Q \phi = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \text{ हे।} \quad (2)$$

विभाजन के बाद 2 बूंदों की कुल स्थिरवैद्युत ऊर्जा

$$= 2 \times \frac{1}{2} \frac{Q}{2} \frac{Q/2}{4\pi\epsilon_0 R'} = \frac{Q^2/2}{8\pi\epsilon_0 R'} \text{ हे।}$$

समीकरण (1) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\text{स्थिरवैद्युत ऊर्जा} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{1}{2}\right)^{2/3} \quad (3)$$

$$\therefore \text{विभाजन के बाद स्थिरवैद्युत ऊर्जा में हानि} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 R} \left[1 - \frac{1}{(2)^{2/3}} \right]$$

6) जब दो आवेशित चालकीय गोलों (conducting spheres) को एक तार से जोड़ा जाता है, जैसा कि चित्र 4.19 में दिखाया गया है, तो आवेशों का तब तक पुनर्वितरण होता रहता है, जब तक कि दोनों गोले समान विभव पर नहीं आ जाते, अर्थात्

$$\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{a} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{b} \text{ हो जाता है,}$$

जहाँ q_1 और q_2 क्रमशः त्रिज्याएँ a और b वाले गोले पर आवेश हैं। इससे यह प्राप्त होता है :

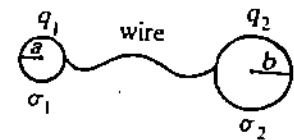
$$\frac{q_1}{a} = \frac{q_2}{b} \quad (1)$$

इन गोलों पर पृष्ठ आवेश घनत्व σ_1 और σ_2 निम्नलिखित हैं :

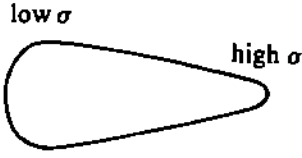
$$\sigma_1 = \frac{q_1}{4\pi a^2} \text{ and } \sigma_2 = \frac{q_2}{4\pi b^2}$$

एक को दूसरे से भाग देने पर हमें यह प्राप्त होता है :

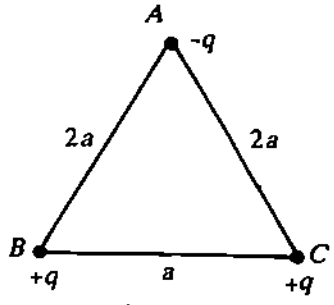
$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{b^2}{a^2} \quad (2)$$



चित्र 4.19



चित्र 4.20



चित्र 4.21

समीकरणों (1) और (2) को संयोजित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{a}{b} \times \frac{b^2}{a^2} = \frac{b}{a}$$

अर्थात् पृष्ठ आवेश घनत्व इनकी त्रिज्याओं के प्रतिलोमानुपाती होते हैं ।

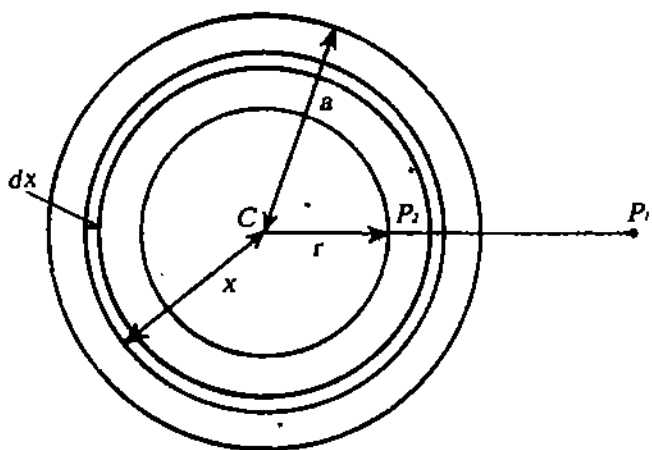
तीव्र और नुकीले सिरों की त्रिज्याएं कम होती हैं, जिसकी वजह से पृष्ठ आवेश घनत्व उच्च होता है । सपाट सिरों की त्रिज्याएं अधिक होती हैं, जिसकी वजह से पृष्ठ आवेश घनत्व निम्न होता है । (चित्र 4.20 देखिए)

7) यदि हम एक ऐसी व्यवस्था लें, जैसा कि चित्र 4.21 में दिखाया गया है, तो स्थितिज ऊर्जा (P.E.) शून्य होगी ।

$$P.E. = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{(-q)q}{2a} + \frac{(-q)(q)}{2a} + \frac{(q)(q)}{a} = 0$$

8) अचालक गोले (एकसमान आवेशित) से उत्पन्न विभव

मान लीजिए एकसमान आवेशित अचालक गोले का आवेश घनत्व (प्रति एकक आयतन आवेश) ρ है । गोले की त्रिज्या "a" के बराबर है । चित्र 4.22 देखिए ।



चित्र 4.22 : अचालक गोले से उत्पन्न विभव

गोले के बाहर स्थित बिंदुओं के लिए

गोले के बाहर स्थित P (केन्द्र C से r दूरी पर) जैसे बिंदुओं के लिए पूरा आवेश, केन्द्र पर स्थित एक बिंदु आवेश की तरह व्यवहार करता है । इसे, गोलीय कोश से उत्पन्न विभव के व्यंजक को प्राप्त करने की विधि से आसानी से निगमित किया जा सकता है । हम अचालक गोले को अनेक पतली संकेन्द्रीय कोशों में बांट सकते हैं । इन कोशों में से प्रत्येक कोश के लिए तथा कोश के बाहर स्थित बिंदुओं के लिए आवेश को केन्द्र C पर संकेन्द्रित माना जा सकता है । इस तरह, पूरे आवेश को केन्द्र C पर स्थित एक बिंदु आवेश की तरह माना जा सकता है । अतः गोले से बाहर स्थित बिंदुओं के लिए विभव ϕ यह होता है :

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

जहां Q संपूर्ण आवेश है और r केन्द्र से उस बिन्दु की दूरी है जिस बिन्दु पर विभव ज्ञात किया जा रहा है ।

गोले के अंदर स्थित बिंदुओं के लिए

मान लीजिए कोई बिंदु (चित्र 4.22 में P₂) केन्द्र C से r दूरी पर है । यदि हम पहले की तरह गोले को केन्द्र C वाले अनेक संकेन्द्रीय कोशों में बांट दें, तो त्रिज्याओं $\leq r$ वाले कोश के लिए बिन्दु P₂ बाहर स्थित होता है और उन कोशों के लिए जिनकी त्रिज्याएं r और a के बीच होती हैं, बिंदु P₂ अंदर स्थित होता है । उन कोशों के लिए जिनकी त्रिज्याएं r के बराबर या हसते कम होती हैं, बिंदु P₂ पर विभव ϕ_1 यह होता है :-

$$\phi_1 = \frac{4\pi}{3} \frac{r^3 \rho}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$$

उन कोशों द्वारा उत्पन्न विभव ज्ञात करने के लिए, जिनके लिए P अन्दर होता है, त्रिज्या x और मोटाई dx

वाला एक कोश लीजिए। चित्र 4.22 देखिए। इस कोश के लिए कुल आवेश : आयतन और आवेश घनत्व का गुणनफल अर्थात् $4\pi x^2 dx \rho$ होता है। इस आवेश द्वारा किसी बिन्दु पर उत्पन्न विभव $d\phi$ यह होता है :

$$d\phi = \frac{4\pi x^2 dx \rho}{4\pi \epsilon_0 x} = \frac{\rho x dx}{\epsilon_0}$$

ऐसे सभी कोशों से उत्पन्न विभवों के योगदानों को जोड़ने के लिए हम इस व्यंजक का $x = r$ से $x = a$ तक समाकलन करते हैं।

इस प्रकार जिन कोशों के लिए P_2 अंदर है उन कोशों द्वारा P_2 बिंदु पर उत्पन्न विभव ϕ_2 का मान यह है :

$$\phi_2 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \int_r^a x dx = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2 - r^2}{2} \right)$$

इस तरह पूरे अचालकीय गोले से उत्पन्न P_2 पर विभव यह होता है।

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} r^2 + \frac{\rho}{\epsilon_0} \left(\frac{a^2 - r^2}{2} \right) \\ &= \frac{\rho}{3\epsilon_0} \left(\frac{3a^2 - r^2}{2} \right) \\ &= \frac{4\pi a^3}{3 \cdot 4\pi \epsilon_0} \left(\frac{3a^2 - r^2}{2a^3} \right) \\ &= \frac{Q (3a^2 - r^2)}{4\pi \epsilon_0 2a^3} \end{aligned}$$

जहाँ Q गोले पर का कुल आवेश है।

समतल आवेश वितरण से
उत्पन्न विभव तथा ऊर्जा

4.10 शब्दावली

अल्पगु	infinitesimal
अध्वारोपण	superposition
आवेश	charge
वाहकीय पृष्ठ	conducting surface
निकाय	system
प्रेरण	induction
भूसंपर्कन	grounding
युगल	pair
समविभव	equipotential
हास	decrease



उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-04

वैद्युत् और चुंबकीय
परिघटनाएं

खंड

2

माध्यम में स्थिर विद्युत्

इकाई 5	
डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के स्थूल लक्षण	5
इकाई 6	
संधारित्र	28
इकाई 7	
डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के सूक्ष्म गुणधर्म	52

मध्यम में स्थिर विद्युत

ले खंड में आपने निर्वात में विद्युत के विषय में अध्ययन किया था। इस खंड में आप माध्यम में स्थिर विद्युत के प्रभाव बारे में अध्ययन करेंगे। यहां पर आप केवल अचालक पदार्थों पर स्थिर के प्रभाव के बारे में अध्ययन करेंगे।

कि आप जानते हैं, एक अचालक पदार्थ के अंदर कोई भी मुक्त आवेश नहीं होता ऐसी दशा में, पदार्थ पर विद्युत लगाने पर उसके अंदर कोई भी आवेश चल नहीं सकता। विद्युत क्षेत्र की मौजूदगी में संभव गति केवल घनात्मक और ऋण आवेशों में विपरीत दिशा में विस्थापन से हो सकती है। आणविक विभाजों की तुलना में विस्थापन का मान बहुत कम होता है। किसी भी अचालक पदार्थ जिसका सापेक्ष परवैद्युतांक ϵ_r हो, को डाइलेक्ट्रिक कहते हैं। शायद, यह अधिकांश उचित है क्योंकि हरेक अचालक एक प्रभाव को प्रदर्शित करता है जिसे डाइलेक्ट्रिक प्रभाव कहते हैं, जो बहुत ही प्रयोगशाला नाम है। इस खंड में जिस धारणा का विकास किया है, वे खंड 1 की तुलना में अधिक मुश्किल माने यह कोशिश की है कि इन धारणाओं का विकास बहुत ही सरल तरीके से करें ताकि आपको इस खंड को समझने समय ज्यादा मुश्किलों का सामना न करना पड़े। कुछ सही स्थानों पर हमने बोध प्रश्न दिए हैं ताकि आप अपनी प्रगति जांच कर सकें और धारणाओं को अच्छी प्रकार से समझ सकें। यदि आप किसी बोध प्रश्न को हल करने में असमर्थ हैं आप इससे पहले वाले उपभाग को अच्छी प्रकार से पढ़ें और फिर बोध प्रश्न को दुबारा से हल करने की कोशिश। बोध प्रश्न को हल करने के पश्चात् आप उसकी जांच इकाई के अंत में दिए उत्तर से कर सकते हैं। हमने इकाई के अंत में अंत के कुछ प्रश्न दिए हैं। पूरी इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप इन प्रश्नों को हल करें। ये अंत के प्रश्न पूरी से संबंधित हैं और इनका हल भी इकाई के अंत में दिया गया है। वर्तमान खंड में इकाई 5 से इकाई 8 तक है।

5 में हमने डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के साधारण प्रतिमान की व्याख्या की है और डाइलेक्ट्रिक प्रतिमान की व्याख्या की है डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के विद्युत क्षेत्र में व्यवहार के बारे में बतलाया गया है। इकाई 2 में आपने निर्वात में गाउस के के बारे में पढ़ा था। यहां, हम एक डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए गाँस के नियम को परिवर्तित करेंगे। इसके पश्चात् एक नए सदिश का परिचय करेंगे, जिसे हम स्थानांतरण सदिश के नाम से जानते हैं और स्थानांतरण सदिश D और क्षेत्र E के बीच में एक संबंध स्थापित करेंगे। इसके पश्चात् हम D और E के सीमा शर्त समस्याओं को हल करेंगे। इन इकाई के अंतिम भाग में आप डाइलेक्ट्रिक शक्ति एवं डाइलेक्ट्रिक विभग के बारे में पढ़ेंगे।

6 में आप एक धारणा का विकास करेंगे जो कि आवेश और विभानांतर को आपस में जोड़ती है। इसे हम धारिता कहेंगे और एक युक्ति जिसके अंदर विद्युत क्षेत्र इस प्रकार से संयोजित होता है जिससे कि यह आवेश को इकट्ठा कर संघारित्र कहते हैं।

में आपको यह स्पष्ट हो जायेगा कि प्रभावी संघारित्र के लिए चालक की प्लेटों का क्षेत्रफल बहुत अधिक होना चाहिए उनके बीच की दूरी कम होनी चाहिए। हमने यह भी बतलाया है कि एक संघारित्र और डाइलेक्ट्रिक माध्यम में कितनी जमा हो सकती है। इसे आप चौथे खंड में प्रयोग में लायेंगे। इस इकाई के अंतिम भाग में आप रोजमर्याद में प्रयोग वाले संघारित्रों के बारे में पढ़ेंगे।

खंड की अंतिम इकाई में आप डाइलेक्ट्रिकस के सूक्ष्म गुणधर्मों के बारे में पढ़ेंगे। यहां पर आप एकसमान विद्युत क्षेत्र इलेक्ट्रिक के सूक्ष्म चित्रण के बारे में अध्ययन करेंगे, गाँस के लिए क्लासियस - मोसोटी समीकरण तथा स्थानीय क्षेत्र काल सकेंगे। इसके पश्चात् आप ध्रुवणता, सापेक्ष परवैद्युतांक और अपवर्तनांक में संबंध स्थापित करेंगे। इस इकाई अंतिम भाग में आप प्रत्यावर्ती क्षेत्र में डाइलेक्ट्रिक के स्वभाव के बारे में पढ़ेंगे।

खंड में सभी इकाइयों की लंबाई बराबर नहीं है लेकिन इनका अध्ययन समय बराबर है। एक इकाई को पढ़ने का लगभग पांच घंटे हैं। लेकिन अध्ययन करने का वास्तविक समय प्रत्येक इकाई के लिए अलग अलग है और यह भी से विद्यार्थी बदलता है। इस खंड को पढ़ने से पहले आप खंड 1 को भली भाँति पढ़ लें और उसमें विकसित की धारणाओं को अच्छी प्रकार से समझ लें।

1 और 2 में आपने स्थिर आवेश के संबंधित परिघटनाओं के बारे में पढ़ा। वर्तमान विषय की इकाई 3 में आप उन त घटनाओं के बारे में पढ़ेंगे जिसमें आवेश गतिशील होगा।

आभार

डा. विजयश्री, डा. शुभा गुप्ता, डा. श्री निवासन और प्रो. आर.एन.माधुर इकाईयों पर टिप्पणी के लिए। शब्द संसाधन में महत्वपूर्ण योगदान के लिए हम श्री लक्ष्मण सिंह शर्मा के प्रति आभार प्रकट करते हैं।

काई 5: डाइलैक्टिक पदार्थ के स्थूल लक्षण

काई की रूपरेखा

प्रस्तावना

उद्देश्य

डाइलैक्टिक पदार्थ का साधारण प्रतिमान

डाइलैक्टिक पदार्थ का विद्युत क्षेत्र में व्यवहार

डाइलैक्टिक माध्यम में गाऊस का नियम

स्थानांतरण सदिश

D और E की सीमायें

डाइलैक्टिक शक्ति एवं डाइलैक्टिक विभंग

सारांश

अंत में कुछ प्रश्न

0 उत्तर

प्रस्तावना

ने खंड 1 के इकाई 4 में विद्युत क्षेत्र की संकल्पना, विद्युत स्थैतिक ऊर्जा और स्थैतिक विद्युत शक्ति वभाव के विषय में पढ़ा है। जहां पर सरलता के लिए हमने आपका ध्यान केवल निर्वात में रखे आवेश वितरित किया था। उदाहरण के लिए आवेशों के वितरण के विद्युत क्षेत्र के लिए इकाई 4 में दिया गया सूत्र का स्थैतिक विद्युत बल का नियम उस स्थिति के लिए है जिसमें आवेशों को निर्वात में रखे गया है। वह परिस्थिति भी उतनी ही महत्वपूर्ण है जिसमें कि विद्युत प्रक्रिया किसी माध्यम में होती है। यहां हमें इन दो परिस्थितियों के अंतर को स्पष्ट करना होगा क्योंकि इन दोनों परिस्थितियों की भौतिकी अलग-अलग है। पहली परिस्थिति वह है जिसमें माध्यम अचालक पदार्थ से बना है अचालक वे होते हैं जिनमें विद्युत का संचरण नहीं होता जबकि दूसरी परिस्थिति में माध्यम संचालक पदार्थ से है। संचालक वे पदार्थ होते हैं जिनमें विद्युत का संचरण होता है, जैसे धातु। चालक पदार्थों में इलेक्ट्रॉन होते हैं जो स्वतंत्र रूप से पदार्थ में धूम सकते हैं। ये इलेक्ट्रॉन एक विद्युत क्षेत्र के प्रभाव में आते हैं और धारा उत्पन्न करते हैं। जिसका अध्ययन हम बाद में करेंगे।

इकाई में आप अचालक की उपस्थिति में एक विद्युत क्षेत्र का अध्ययन करेंगे। अचालक पदार्थों में स्वतंत्र इलेक्ट्रॉन नहीं होते हैं और अगर होते भी हैं तो इतने कम होते हैं कि उनके द्वारा संचालन संभव नहीं होता। 837 में फेराडे द्वारा प्रायोगिक रूप से यह पाया गया कि जब अचालक पदार्थों को डाइलैक्टिक कहा जाता है, (जैसे — माइका, ग्लास या पोलिस्टीन आदि) और जब इन पदार्थों को संधारित्र की दो प्लेटों के बीच में डाला जाये तब यह उसकी धारिता बढ़ जाती है, जिसका मान एक से अधिक होता है। कारक को डाइलैक्टिक नियतांक (K) के नाम से जाना जाता है। यह भी पाया गया कि, यह नियतांक, पदार्थ के आकार और आयतन पर निर्भर नहीं करती परन्तु विभिन्न पदार्थों के लिए अलग-अलग है। उदाहरण के लिए ग्लास का डाइलैक्टिक नियतांक का मान 6 है, जबकि पानी के लिए 80 है।

इन पदार्थों में सभी इलेक्ट्रॉन अपने अपने परमाणु के साथ बंधे होते हैं।

जब किसी अचालक पदार्थ पर विभवांतर को लगाया जाता है तो उसमें वैद्युत धारा का संचालन नहीं है लेकिन इन पदार्थों के वैद्युत क्षेत्र की उपस्थिति में व्यवहार के बारे में अध्ययन करने पर हमें बहुत उपयोगी जानकारी हासिल होती है। संधारित्र में अनुकूल डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का चयन, क्वार्ट्ज या कैल्साइट क्रिस्टलों के दोहरे अपवर्तन का ज्ञान, इत्यादि इस अध्ययन पर आधारित है। प्राकृतिक पदार्थ जैसे लकड़ी, प्राकृतिक रबर, माइका कुछ लोकप्रिय अचालकों के उदाहरण हैं। विभिन्न प्रकार के प्लास्टिक भी अचालक पदार्थ हैं।

इस इकाई में हम सबसे पहले डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के एक सरल प्रतिमान के विषय में पढ़ेंगे, तथा अनुप्रयोगिक क्षेत्र E तथा परमाणु/अणु के द्विध्रुव आघूर्ण p के बीच में संबंध स्थापित करेंगे। डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में वैद्युत ध्रुवणता के विषय में पढ़ेंगे तथा ध्रुवणता सदिश D को परिभाषित करेंगे। इस इकाई 2 में आप निर्वात के लिए गॉस के नियम के बारे में पढ़ चुके हैं। अब आप इसका डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के लिए अनुप्रयोग करेंगे। यहां पर हम आपको एक नये सदिश, वैद्युत स्थानांतरण सदिश, D भी विदित कराएंगे। इसके पश्चात् हम दो डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के बीच की सतह पर D और E के सांत की चर्चा करेंगे।

पिछले कुछ सालों से डाइलेक्ट्रिक पदार्थों की महत्वता कुछ बढ़ गई है। विशेषतः उनके, वैद्युत तंत्रों में इलेक्ट्रॉनिक यंत्रों में बड़े पैमाने पर इस्तेमाल के कारण ऐसा हुआ है। इन यंत्रों की संक्रियात्मक आस्था बढ़ाने की बहुत मांग है। इन यंत्रों की विश्वसनीयता बहुत हद तक इनकी वैद्युत अचालकता के गुणों पर आधारित मापी जाती है। अंतिम भाग में आप डाइलेक्ट्रिक शक्ति तथा डाइलेक्ट्रिक विभाग के बारे में पढ़ेंगे।

अगली इकाई में आप संधारित्रों की विस्तारपूर्वक जानकारी हासिल करेंगे। विषय: संधारित्र की धारिता, संधारित्र में संचित ऊर्जा, डाइलेक्ट्रिक वाला संधारित्र तथा संधारित्रों के विभिन्न प्रकार, इत्यादि।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप

- विद्युत क्षेत्र में एक डाइलेक्ट्रिक के व्यवहार को समझा सकेंगे,
- डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए गाउस सिद्धांत को बता सकेंगे,
- डाइलेक्ट्रिक ध्रुवण को परिभाषित कर सकेंगे तथा डाइलेक्ट्रिक्स को ध्रुवीय और अध्रुवीय में विभाजित कर सकेंगे,
- स्थानांतरण वेक्टर (D) की व्याख्या कर सकेंगे और विद्युत क्षेत्र (E) शक्ति के साथ इसका संबंध जोड़ सकेंगे,
- डाइलेक्ट्रिक नियतांक को परिभाषित कर सकेंगे,
- E और D की सीमाओं को व्युत्पन्न कर सकेंगे और उसका वर्णन कर सकेंगे,
- डाइलेक्ट्रिक शक्ति और डाइलेक्ट्रिक विभंग की व्याख्या कर सकेंगे।

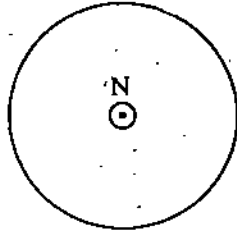
5.2 डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का साधारण प्रतिमान

आप यह अवश्य जानते हैं कि

* प्रत्येक पदार्थ बहुत से अणुओं/परमाणुओं से मिलकर बनता है।

- * एक परमाणु में धनात्मक और ऋणात्मक आवेशित कण होते हैं और इलेक्ट्रान केंद्र के चारों ओर घूमते रहते हैं।
- * परमाणु के केंद्र का संपूर्ण धनात्मक आवेश इलेक्ट्रॉनों के ऋणात्मक आवेश से संतुलित होता है इस प्रकार एक परमाणु के किसी भी बाहरी बिंदु के लिए विद्युतीय निरपेक्ष होता है।
- * एक अणु एक ही प्रकार के अथवा विभिन्न प्रकार के परमाणुओं से मिलकर बनता है।

ध्रुवणता को समझने के लिए हमें परमाणु के कूड प्रतिमान पर विचार करना चाहिए। परमाणु का साधारण कूड प्रतिमान चित्र 5.1 में दिखाया गया है।

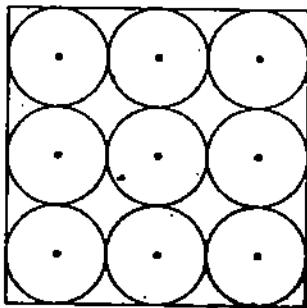


चित्र 5.1 अणु का प्रतिमान

गति इसके केंद्र में होती है और विभिन्न इलेक्ट्रॉन इसके चारों ओर घूमते हैं। इनको ज्यामितीय सममित समूह इलेक्ट्रान के रूप में भी समझा जा सकता है। परमाणु के बाहरी बिंदुओं के लिए इलेक्ट्रान ज्यामितीय समूह को परमाणु के केंद्र में स्थित बिंदु आवेश के रूप में समझा जा सकता है।

सामान्यतः अधिकतर अणु/परमाणु में धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केंद्र एक दूसरे के अनुरूप होते हैं। जबकि कुछ अणुओं में इन दो आवेशों के केंद्र अलग अलग होते हैं। इस प्रकार के अणुओं को ध्रुवीय अणु के नाम से जानते हैं।

इसके अतिरिक्त हम यह भी देखते हैं कि डाइलेक्ट्रिक में सभी इलेक्ट्रान अपने अपने परमाणुओं के साथ निश्चित रूप से बंधे होते हैं और ये स्वतंत्र घूमने में असमर्थ होते हैं। विद्युत क्षेत्र के अभाव में अणु/परमाणु के अंदर आवेश साम्य की स्थिति में होता है। एक डाइलेक्ट्रिक में अणुओं की व्यवस्था चित्र 5.2 में दिखाई गई है।

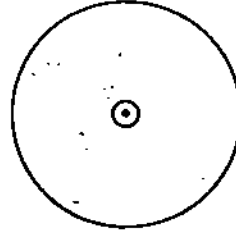


चित्र 5.2 डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में अणुओं की व्यवस्था

आवेश केंद्र परिधि के केंद्र के अनुरूप है। इस चित्र को ध्यान में रखते हुए हम विद्युत क्षेत्र में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का अध्ययन अगले भाग में करेंगे।

5.3 डाइलेक्ट्रिक का विद्युत क्षेत्र में व्यवहार

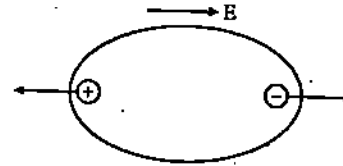
अनुच्छेद 5.2 में आप देख चुके हैं कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में इसके परमाणु में धनात्मक आवेश और ऋणात्मक आवेश का केंद्र परिधि के केंद्र के अनुरूप होता है। चित्र 5.3 में इसको दिखाया गया है।



चित्र 5.3 अणु जिसमें आवेश केंद्र के साथ अनुरूप है।

प्रति इकाई आयतन के विद्युत आयतन के वैद्युत द्विध्रुवीय आघूर्ण को ध्रुवणता कहते हैं।

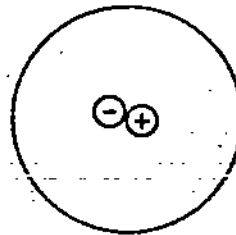
इकाई 1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि विद्युत क्षेत्र की उपस्थिति में आवेश एक बल का अनुभव करता है। अतः जब एक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को विद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तब इसके परमाणु के घनात्मक आवेश विद्युत क्षेत्र की दिशा में एक बल का अनुभव करते हैं, जबकि इसके परमाणुओं के ऋणात्मक आवेश उसके विपरीत दिशा में बल का अनुभव करते हैं। इसके द्वारा अणु/परमाणु का आवेश केंद्र स्थानांतरित हो जाता है। यह उन अणुओं के लिए भी सत्य है जिनके आवेशित केंद्र विद्युत क्षेत्र की अनुपस्थिति के अनुरूप नहीं होते हैं। प्रयुक्त क्षेत्र (E) के कारण शक्ति केंद्र ने विभाजन को चित्र 5.4 में दिखाया गया है।



चित्र 5.4 प्रयुक्त क्षेत्र E में आवेश केंद्रों का विभाजन

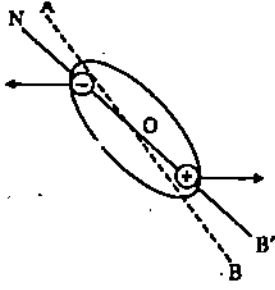
इस परिघटना को ध्रुवण के नाम से जाना जाता है। अतः जब एक विद्युत निरपेक्ष अणु को विद्युत क्षेत्र में रखा जाता है तब इसमें ध्रुवण हो जाता है, जिससे घनात्मक आवेश एक दिशा में गति करते हैं और ऋणात्मक आवेश दूसरी दिशा में गति करते हैं। इस प्रकार निरपेक्ष परमाणु द्विध्रुवीय हो जाते हैं और इनमें द्विध्रुवीय गति प्रारंभ हो जाती है जो विद्युत क्षेत्र के समानुपाती होती है। द्विध्रुवण और द्विध्रुवीय गति को इकाई 3 में विवेचित किया गया है।

अब हम दूसरे प्रकार के अणु पर विचार करेंगे, जिसमें शक्ति केंद्र उस तरह से अनुरूप नहीं है जिस तरह चित्र 5.5 में दिखाए गए हैं।



चित्र 5.5 एक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ जिसमें शक्ति केंद्र अनुरूप नहीं होते।

इस कारण से अणु में पहले से ही द्विध्रुवीय आघूर्ण होता है। इस प्रकार के पदार्थों को ध्रुवीय पदार्थों के नाम से जाना जाता है। मान लीजिये कि पदार्थों के लिए द्विध्रुवीय अक्ष का प्राथमिक अनुकूलन $A \parallel B$ है। जिसे चित्र 5.6 में दिखाया गया है।



चित्र 5.6 द्विध्रुवीय आघूर्ण वाला अणु

अब एक विद्युत क्षेत्र E का अनुप्रयोग किया जाता है। यह विद्युत क्षेत्र आवेश केंद्रों को अपनी दिशा के समानान्तर खींचता है। अतः विद्युत क्षेत्र द्विध्रुव पर बल आघूर्ण को निष्पादित करता है, जिसके कारण द्विध्रुव का विद्युत क्षेत्र की दिशा में पुनः अनुस्थापन होता है। इकाई 3 में द्विध्रुव पर बल आघूर्ण के विषय में की गई चर्चा को पुनः प्रतिपादित कीजिए। विद्युत क्षेत्र की अनुपस्थिति में इन ध्रुवीय पदार्थों में परिणामी द्विध्रुवीय आघूर्ण नहीं होता क्योंकि विभिन्न अणुओं के द्विध्रुव ऊष्मीय उत्तेजना के कारण विभिन्न दिशाओं में अनुस्थापित होता है। जब एक विद्युत क्षेत्र का अनुप्रयोग किया जाता है तब इनमें से प्रत्येक अणु अपने आप को विद्युत क्षेत्र की दिशा में पुनः अनुस्थापित करता है, जिसके कारण उस पदार्थ में ध्रुवण हो जाता है। ऊष्मीय उत्तेजना के कारण माध्यम का पुनः स्थापन ध्रुवण पूर्ण नहीं होता है अतः ध्रुवण क्षेत्र (रैखिक) और तापमान दोनों पर निर्भर करता है।

5.3.1 अध्रुवीय और ध्रुवीय अणु

सबसे पहले हम दो प्रकार के अणुओं पर विचार कर चुके हैं, पहले वह अणु जिनमें धनात्मक आवेश का केंद्र ऋणात्मक आवेश के अनुरूप होता है। ऐसे अणु अपने आप कोई आवेश नहीं रखते। इस प्रकार के अणुओं को अध्रुवीय अणु कहा जाता है। अध्रुवीय अणुओं के उदाहरण हैं हवा, हाइड्रोजन, बेनजाइन, कार्बन ट्राक्लोराइड आदि। दूसरे वो जिनमें धनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के केंद्र अनुरूप नहीं होते हैं। इस प्रकार के अणुओं में स्थाई द्विध्रुवीय आघूर्ण पाया जाता है। इस प्रकार के अणुओं को ध्रुवीय अणु के नाम से जाना जाता है। ध्रुवीय अणुओं के उदाहरण हैं, पानी, ग्लास आदि।

इस प्रकार हम देखते हैं कि एक अध्रुवीय अणु केवल विद्युत क्षेत्र की उपस्थिति में ही द्विध्रुवीय आघूर्ण को रखता है। जबकि ध्रुवीय अणु में पहले से ही उपस्थित द्विध्रुवीय आघूर्ण अपने आपको और बाहरी विद्युत क्षेत्र की दिशा में स्थापित करता है। ध्रुवीय अणुओं में भी आवेशों के बीच में दूरी होने की वजह से अतिरिक्त रित द्विध्रुवीय आघूर्ण होता है, परंतु यह मात्रा में इतना कम होता है कि ध्रुवीय अणु के पुनः स्थापन पर सका कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

5.3.2 ध्रुवीय सदिश P

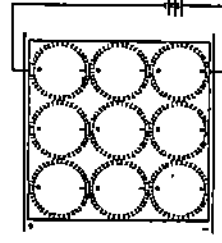
अब हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ पर विद्युत क्षेत्र के प्रभाव के विषय में अध्ययन करेंगे। इसके लिए हम दो समानान्तर प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक स्लैब को रखकर उस पर वैद्युत का प्रभाव देखेंगे, उस पर वैद्युत का प्रभाव देखेंगे, जैसा कि चित्र 5.7 में दिखाया गया है। प्लेटों को बैटरी से जोड़कर विद्युत क्षेत्र को उत्पन्न किया जाता है। हम अपनी बातचीत को सजातीय और समदैशिक डाइलेक्ट्रिक तक ही सीमित रखेंगे हैं। सजातीय और समदैशिक डाइलेक्ट्रिक उनको कहा जाता है जिसमें वैद्युत गुण सभी दिशाओं तथा सभी बिंदुओं पर समान होते हैं। अनुप्रयोग किया गया विद्युत क्षेत्र डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को बनाने वाले अणुओं में आवेश केंद्रों को विस्थापित करता है। आवेश केंद्रों का विस्थापन चित्र 5.7 में दिखाया गया है। हम कह पाते हैं कि एक अणु के ऋणात्मक आवेश अपने पड़ोसी अणु के धनात्मक आवेशों का सामना करते हैं। इस प्रकार डाइलेक्ट्रिक के अंदर आवेश निरपेक्ष हो जाता है। परंतु डाइलेक्ट्रिक की परत पर उपस्थित आवेश निरपेक्ष नहीं हो पाते। इस प्रकार के आवेशों को ध्रुवीय सतह आवेश के नाम से जाना जाता है। ध्रुवण के संपूर्ण प्रभाव का आधार उन आवेशों का माना जा सकता है जो पदार्थ के सिरा पर प्रकट होते हैं। परंतु नैट सतह आवेश बाध्य होता है तथा आवेशों के पारस्परिक विस्थापन पर निर्भर करता है। यह

ये इस प्रकार के अणु हैं जिनमें विद्युत निरपेक्षता पाई जाती है। ऋणात्मक और धनात्मक केंद्र एक ही बिंदु पर होते हैं।

इस प्रकार के अणुओं में आवेश केंद्र अलग अलग बिंदुओं पर होते हैं। इन अणुओं द्विध्रुवीय आघूर्ण अंतर्निहित होता है।

ये वो आवेश हैं जो डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के परत पर, बाहरी बल अनुप्रयोग करने पर, प्रकट होता है यह केवल उन परतों पर पाए जाते हैं जो क्षेत्र की दिशा के लंबवत् होती हैं।

अपेक्षा करना उचित ही होगा कि घनात्मक और ऋणात्मक आवेशों का पारस्परिक विस्थापन के अंदर उपस्थित औसत विद्युत क्षेत्र E के समानुपाती होता है।



चित्र 5.7 डाइलेक्ट्रिक पदार्थ पर विद्युत क्षेत्र का प्रभाव

चित्र 5.7 से हमें पता चलता है कि ये ध्रुवीय आवेश आवेश डाइलेक्ट्रिक की उन परतों पर ही प्रकट होते हैं जो विद्युत क्षेत्र की दिशा के लंबवत् होती हैं। जो परतें विद्युत क्षेत्र के समानान्तर होती हैं उन पर कोई सतह आवेश प्रकट नहीं होता। ऐसी परिस्थिति केवल एक विशेष स्थिति में होती है जब डाइलेक्ट्रिक पदार्थ एक आयताकार खंड को एक समानांतर प्लेटों वाले संधारित की प्लेटों के बीच में रखा गया हो। इस भाग में आगे यह दिखाया गया है कि बाध्य आवेशों का सतह घनत्व डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के आकार पर निर्भर करता है।

पदार्थ के ध्रुवण पर मात्रात्मक रूप में, विद्युत क्षेत्र द्वारा उसमें उत्पन्न होने वाले प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण, के आधार पर चर्चा की जा सकती है। स्मरण कीजिए कि दो आवेशों q और $-q$ जिनमें आपसी दूरी d है, से बने द्विध्रुव का आघूर्ण $p = q \times d$ होगा। यह प्रयोगों द्वारा ज्ञात है कि अणु का प्रेरित द्विध्रुवीय आघूर्ण (p) औसत क्षेत्र E के बढ़ने से बढ़ता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि p , E के समानुपाती है।

$$p = \alpha E$$

जहां पर α औसत नियतांक है, जिसको अणु/परमाणु ध्रुवणीय के नाम से जाना जाता है। अब हम एक नई सदिश राशि को परिभाषित करते हैं जिसको हम P से अंकित करेंगे, इसको डाइलेक्ट्रिक का ध्रुवण या केवल ध्रुवण कहेंगे। ध्रुवण P को डाइलेक्ट्रिक की प्रति इकाई, विद्युत द्विध्रुवी आघूर्ण के रूप में परिभाषित किया जाता है यह नोट करना महत्वपूर्ण है कि ध्रुवण को सामान्य रूप से प्रयोग किया जाता है यह बताने के लिए कि किसी डाइलेक्ट्रिक पर जब बाहरी विद्युत क्षेत्र का प्रभाव पड़ता है तब उस में क्या होता है। इसको विशेष रूप से ध्रुवीय आघूर्ण प्रति इकाई आयतन के रूप में प्रयोग किया जाता है।

अब सबसे पहले हम ध्रुवित अणुओं पर विचार करेंगे। जहां प्रति इकाई आयतन में उपस्थित प्रत्येक अणु का द्विध्रुवीय आघूर्ण p है, तथा सभी द्विध्रुवी आघूर्ण एक दूसरे के समानान्तर है। अतः P की परिभाषा के अनुसार

$$P = n p$$

उपरोक्त परिभाषा से P की इकाई निम्न है

$$\text{इकाई } P = \text{कूलम्ब } m/m^3, \text{ कुलम्ब}/m^2 = \text{C.m.}^2$$

साधारणतया P एक बिंदु फलन है जो निर्देशांकों पर निर्भर करता है। इस प्रकार की स्थिति में जिनमें उपरोक्त आदर्श परिस्थितियों उपस्थित नहीं हैं वहां हम अत्यणु आयतन ΔV पर विचार करेंगे जिसके अंदर के सभी p के समानान्तर माना जा सकता है और समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$P = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{V} \quad (5.1a)$$

यह के सापेक्ष अणु के प्रेरित द्विध्रुवीय आघूर्ण और अनुप्रयोगी विद्युत क्षेत्र की का अनुपात होता है।

यहां पर N आयतन में V स्थित द्विध्रुवों की संख्या है।)

हां पर ΔV अणु के आयतन की तुलना में अधिक है लेकिन जो साधारण आयतन की तुलना में कम। इस प्रकार यद्यपि P एक बिंदु फलन है यह p का दिक् औसत् है। P की दिशा आयतन में स्थित अणुओं के द्विध्रुवी आघूर्ण के सदिशों के सदिशिय योग के समानान्तर होगी जो आयतन V में स्थित हैं। न पदार्थों के लिए जिनमें समानान्तर नहीं है, जैसा कि ध्रुवीय अणुओं वाले भी समीकरण (5.1. a) में P का परिभाषिक समीकरण माना जाता है।

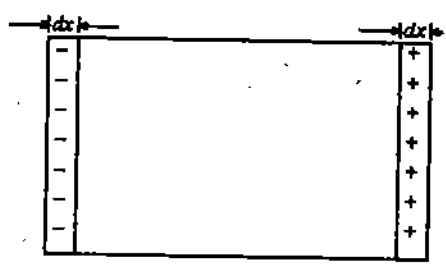
प्रश्न - 2

इसकीजिए कि अणु के ध्रुवी आघूर्ण p और प्रति इकाई आयतन के द्विध्रुवी आघूर्ण में निम्नलिखित संबंध होता है।

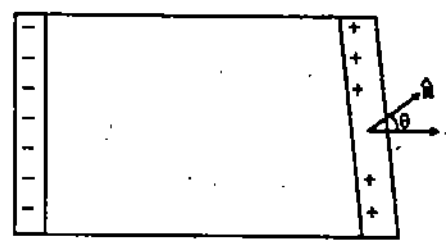
$$p = nP$$

जहाँ पर n डाइलेक्ट्रिक के प्रति इकाई आयतन में उपस्थित अणुओं की संख्या है।

का भौतिक अर्थ समझने के लिए हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के आयताकार टुकड़े पर विचार करेंगे जिसकी



चित्र 5.8 : डाइलेक्ट्रिक के आयताकार टुकड़े पर तलीय ध्रुवण शक्ति



चित्र 5.8.अ. तलीय ध्रुवण आवेश। (आवेश की θ दायीं तरफ वास्तविक विस्थापन होगा $dx \cos \theta$)
 बाई L है और अनुप्रस्थ परिच्छेदित क्षेत्र A है चित्र 5.8 इस प्रकार के टुकड़े को प्रदर्शित करता है।
 गर σ_p ध्रुवणता शक्ति का तलीय घनत्व है, यानि प्रतिक इकाई क्षेत्रफल में आवेशों की संख्या या
 गई क्षेत्रफल एक सतह पर उपस्थित आवेश। तब सतह पर प्रकट होने वाले ध्रुवण आवेशों की कुल
 ल्या $A \sigma_p$ होगी।

प्रेरित करने वाला द्विध्रुवी आघूर्ण = $A \sigma_p L$

$$\text{स्लैब का आयतन} = AL$$

$$\text{परिभाषानुसार प्रति इकाई आयतन द्विध्रुवी आघूर्ण} = P$$

$$\text{प्रेरित द्विध्रुवी आघूर्ण} = P_A L \quad (5.3)$$

अब हम ध्रुवीकरण सदिश, P का मान मान प्राप्त करने के लिए समीकरण (5.2) और समीकरण (5.3) की तुलना कर सकते हैं।

$$P = \sigma_P \quad (5.4)$$

इस प्रकार आवेशों का तलीय घनत्व जो उस परत पर प्रकट होता है जो क्षेत्र के अभिलम्ब है, P यानि ध्रुवण सदिश के मान के बराबर होता है।

समीकरण 5.4 विशेष ज्यामितीय के लिए सत्य है जब डाइलेक्ट्रिक पदार्थ आयताकार टुकड़े में होता है। इस प्रकार का टुकड़ा जो चित्र 5.8. a में दिखाया गया है, की दायीं परत P के लंबवत् नहीं होती। परत की ओर सामान्य इकाई सदिश (n), P के साथ कोण बनाता है। यदि आवेशों को dx दूरी से विस्थापित किया जाता है तब दायीं सतह पर प्रभावी विस्थापन होगा $dx \cos \theta$ अगर आवेशित कणों की संख्या n है और प्रत्येक कण पर आवेश q है तब तलीय आवेश घनत्व σ_P निम्नलिखित होगा,

$$\sigma_P = nq \cos \theta = P \cdot n = P_n \quad (5.5)$$

जहां पर q प्रत्येक परमाणु/अणु पर घनात्मक आवेश है और P_n का घटक है जो दायें P तल के लंबवत् है। इससे यह भी स्पष्ट होता है कि अनुप्रयोगी विद्युत क्षेत्र के समांतर परत $\theta = 90^\circ$ और बायीं परत पर आवेश क्यों प्रकट नहीं होता। P और n सतह की ओर इकाई लंबवत् सदिश के बीच का कोण 180° होता है और फलीय आवेश घनत्व ऋणात्मक है।

एक आदर्श, सजातीय और समदैशिक डाइलेक्ट्रिक के लिए ध्रुवण P ओसत क्षेत्र E के समानुपाती होता है। यानि

$$P = \chi \epsilon_0 E \quad (5.6)$$

जहां पर $\chi = \frac{P}{\epsilon_0 E}$ को विद्युतीय प्रवणता के नाम से जाना जाता है। वहां यह संबंध समीकरण 5.1 से संबंधित है समीकरण 5.1 एक अणु के लिए है जबकि समीकरण 5.6 पूरे पदार्थ के लिए है। यानि समीकरण 5.6, समीकरण 5.1 का स्थूल रूप है।

स्थिरक ϵ_0 को बाद के संबंधों को आसान करने के लिए शामिल किया गया है।

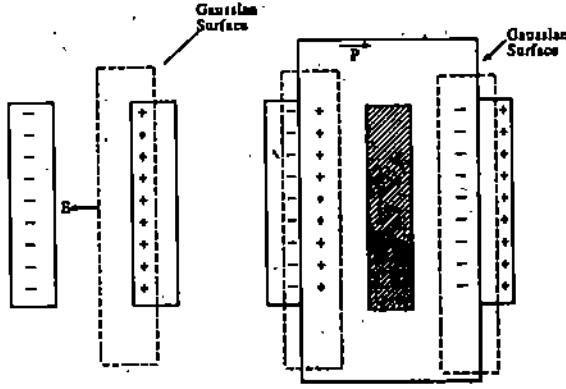
संबंध (5.6) की आवश्यकता है कि P और औसत स्थूल क्षेत्र में रेखिक संबंध हों। यह औसत क्षेत्र, तलीय ध्रुवण आवेशों द्वारा प्रभावित बाह्य अनुप्रायोगिक क्षेत्र के बराबर होगा। प्रवणता χ प्रत्येक पदार्थ का एक लक्षण है और जो किसी भी पदार्थ के आसानी से ध्रुवण होने का माप दर्शाता है, अध्रुवीय पदार्थों के लिए प्रवणता, χ , α से सामान्य रूप से संबंधित है।

5.4 डाइलैक्ट्रिक माध्यम में गाऊस का नियम

इकाई 2 में आप शून्य में गाऊस का नियम पढ़ चुके हैं। अब हम इसे कुछ परिवर्तित करके डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के लिए और सामान्य बनाएंगे। चित्र 5.9 में दी गई दो धातु की प्लेटों पर विचार कीजिए।

मान लीजिए कि इन दोनों प्लेटों के बीच में विद्युत क्षेत्र E_0 है। अब हम इन प्लेटों के बीच में एक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रख देते हैं। जब डाइलेक्ट्रिक को अंदर ले जाया जाता है तो विद्युत क्षेत्र में, हास होता है जिसका अर्थ है, प्रति इकाई क्षेत्र में आवेश का हास। प्लेटों से आवेश बिल्कुल भी बाहर नहीं जाता, अतः इस प्रकार का हास डाइलेक्ट्रिक की दो प्लेटों की सतहों पर प्रकट होने वाले प्रेरित आवेशों के कारण ही हो सकता है। अतः घनात्मक प्लेट से संलग्न इस कारण से, डाइलेक्ट्रिक की सतह को पर ऋणात्मक प्रेरित आवेश में होना चाहिए, तथा घनात्मक प्लेट से संलग्न सतह पर उतने ही मान का घनात्मक प्रेरित

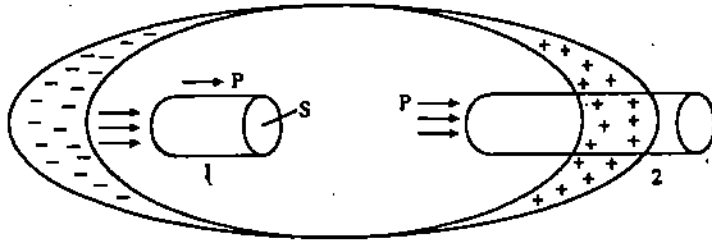
बोध प्रश्न - 1 से $P = n p$ समीकरण 5.4 का प्रयोग करने पर $\sigma_P = n p$ इस स्थिति में प्रत्येक अणु में द्विध्रुवण आघूर्ण $p = q \cdot dx \cos \theta$.



5.9 अनुप्रयोगी क्षेत्र में डाइलेक्ट्रिक पर प्रेरित शक्ति।

आवेश होना चाहिए यह चित्र 5.9 में दिखाया गया है।

भासांनी के लिए, आप डाइलेक्ट्रिक पदार्थ की परत पर स्थित आवेश पर विचार कीजिए। जैसा कि चित्र



चित्र 5.9 a : डाइलेक्ट्रिक के अंदर 1 और 2 पर गाउस आयतन। प्रायोगिक क्षेत्र के लंबवत सतह पर आवेशों के विस्थापन को दिखाया गया है।

9. a में दिखाया गया है। अब हम गाउस के प्रमेय को उस क्षेत्र पर अनुप्रयोग करते हैं जो कि पूरी तरह इलेक्ट्रिक के अंदर है, उसी प्रकार जैसा कि चित्र 5.9 a के क्षेत्र 1 पर गाउस आयतन में है।

स आयतन के अंदर कुल आवेश शून्य है जबकि यह पदार्थ ध्रुवित है। घनात्मक और ऋणात्मक आवेश प्रार है। इस आयतन के लिए परत से क्षेत्र का प्रवाह शून्य है। इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं-

$$\int_{S_1} E_o ds = \int_{S_1} \epsilon_o \chi P \cdot ds = 0 \quad (5.7)$$

परोक्त प्रदर्शित करता है कि सतह पर P की रेखाएं E की रेखाओं के समान हैं नियतांक $\epsilon_o \chi$ के तिरिक्त इस गाउसियन आयतन के अलावा, अगर हम एक दूसरा क्षेत्र 2 में लेते हैं। इस गाउसियन आयतन की एक परत डाइलेक्ट्रिक के अंदर है और दूसरी परत डाइलेक्ट्रिक के बाहर है। वक्र परत क्षेत्र 2 या P) की रेखाओं के समानांतर है। इस गाउसियन आयतन की पदार्थ के बाहर वाली परत के लिए शून्य है। जबकि P की रेखाएं गाउसियन आयतन के अंदर समाप्त करनी चाहिए। अतः P का कुल प्रवाह सीमित और ऋणात्मक है जैसे कि चित्र 5.9. a में दिखाया गया है। क्योंकि परत के लंबवत P का प्रवाह P_n और σ_p परती आवेश घनत्व, मात्रा में बराबर है, इसलिए परत समाकलन निम्नलिखित होगा,

$$\int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{s} = P_n \cdot ds = - \int \sigma_p ds \quad (5.8)$$

$$= -q_p$$

यहां पर q_p गाउसियन आयतन के अंदर का आवेश है। अतः P का फलस्क गाउसियन आयतन में स्थित आवेश के ऋणात्मक के बराबर है। P और E के फलस्क के अंतर पर ध्यान दीजिए।

टः गाउसन नियम के संबंध में और अधिक जानकारी के लिए किप की पुस्तक देखिए।

अब हम गाउस के प्रवाह प्रमेय को सामान्य रूप से बता सकते हैं। ध्रुवीय पदार्थ के प्रभाव का मूल्यांकन ध्रुवण सतह आवेशों से किया जा सकता है। किसी भी क्षेत्र में उपस्थित विद्युत क्षेत्र को स्वतंत्र और ध्रुवण आवेशों के जोड़ से संबंधित किया जा सकता है। अतः सामान्यतः

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\epsilon_0} (q_f + q_p) \quad (5.9)$$

जहाँ पर q_f स्वतंत्र आवेश और q_p ध्रुवीय आवेश को दर्शाता है

बोध प्रश्न 3

100 m² अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल वाली दो समानांतर प्लेटों को 1.0×10^{-7} Coul समान और विपरीत आवेश दिया गया है। प्लेटों के मध्य की जगह डाइलेक्ट्रिक पदार्थ से भरी गई है और डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के मध्य विद्युत क्षेत्र 3.3×10^5 V/m है। डाइलेक्ट्रिक का डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक क्या होगा और प्लेट पर परती आवेश घनत्व क्या होगा ?

सदिशों के लिए गाउस के प्रमेय का प्रयोग करके हम इस तल समाकलन को आयतन समाकलन में परिवर्तित कर सकते हैं। इस प्रकार उपरोक्त समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) dV = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f + \rho_p) dV \quad (5.10)$$

जहाँ पर ρ_f और ρ_p स्वतंत्र और सीमित आवेश (bound charge density) है। जिस प्रकार यह किसी भी आयतन के लिए सत्य है, समाकलन को बराबर किया जा सकता है। इस प्रकार

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f + \rho_p \quad (5.11)$$

\mathbf{P} का तल बंद प्रवाह के द्वारा दिया गया है देखिए समीकरण 5.8

$$\int \mathbf{P} \cdot d\mathbf{S} = -\rho_p dV$$

इसे समीकरण में गाउस प्रवाह प्रमेय का प्रयोग करते हुए निम्न प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{P} &= -\rho_p \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} &= \rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P} \\ \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E} + \nabla \cdot \mathbf{P} &= \rho_f \end{aligned} \quad (5.12)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f \quad \text{where } \mathbf{D} = (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P})$$

$$\text{जहाँ } \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

\mathbf{D} को विद्युत स्थानांतरण सदिश के नाम से जानते हैं। (यह भी नोट कीजिए कि समीकरण (5.12) गाउस सिद्धांत ही है)

बोध प्रश्न 4

यह यह सिद्ध कीजिए कि जब $P = 0$ तब समीकरण (5.12) घटकर समीकरण (5.11) में बराबर हो जाता है।

D का परिमाण वही है जो P का है D की इकाई $C.m^{-2}$ है।

समीकरण (5.12) और (5.10) से हमें पता चलता है कि D का स्रोत स्वतंत्र आवेश घनत्व ρ_f है; जबकि E का स्रोत पूर्ण आवेश घनत्व $\rho_f + \rho_p$ है। जब हम यह लिखते हैं कि $P = \epsilon_0 \chi E$ समीकरण (5.5) देखिए हम रखते हैं $D = (1 + \chi) \epsilon_0 E$

$$= \epsilon_r \epsilon_0 E$$

जहां पर $\epsilon_r = (1 + \chi)$ को सापेक्ष पैराविद्युतांक (relative permittivity) द्वारा जानते हैं।

विद्युत स्थानांतरण सदिश दूसरा एक अन्य व्यावहारिक रूप निम्नलिखित है,

$$D = \epsilon E \tag{5.14}$$

जहां पर $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$

समीकरण 5.14 विद्युत स्थानांतरण D और विद्युत क्षेत्र E के मध्य संबंध को दर्शाता है।

बोध प्रश्न 5

दो आयताकार प्लेटों पर विचार कीजिए जिनका अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल $6.45 \times 10^{-4} m^2$ है, तथा जो एक दूसरे के समानांतर रखी हुई है। दोनों के बीच की दूरी $2 \times 10^{-3} m$ है और इन प्लेटों पर 10 V का विभवांतर किया गया है। अगर एक पदार्थ, जिसका डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक 6.0 है, इन प्लेटों के अंदर प्रयुक्त किया जाता है। तब परिकलन कीजिए -

- 1) धारिता
- 2) प्रत्येक प्लेट में संग्रहित आवेश का परिमाण
- 3) डाइलेक्ट्रिक स्थानांतरण D
- 4) ध्रुवणता

5.5 स्थानांतरण सदिश D

भाग 5.4 में हमारा एक नए सदिश D से परिचय हुआ है। इसे विद्युत स्थानांतरण या स्थानांतरण सदिश नाम दिया गया है।

हमने देखा कि अनुच्छेद 5.4 देखिए विद्युत स्थानांतरण को $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ द्वारा परिभाषित किया गया है। डाइलेक्ट्रिक के लिए गाउस का नियम $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \int \rho_f dV$ द्वारा दिया गया है। एक एकल आवेश q को r त्रिज्या वाले डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के गोले के केन्द्र में रखा गया है। हम पाते हैं कि क्षेत्र गाउस प्रवाह प्रमेय द्वारा हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है,

$$(4 \pi r^2) (D) = q$$

जिससे हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है,

$$\mathbf{D} = \frac{q \mathbf{r}}{4 \pi r^2 \epsilon}$$

$\therefore \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ हम प्राप्त करते हैं

$$\mathbf{E} = \frac{q \mathbf{r}}{4 \pi \epsilon r^2}$$

समीकरण 5.16 से हम पाते हैं कि दो आवेशों q_1 और q_2 के मध्य बल \mathbf{F} जो डाइलेक्ट्रिक माध्यम में दूरी r पर रखे गए हैं निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\mathbf{F} = \frac{q_1 q_2}{4 \pi \epsilon r^2} \mathbf{r} \quad (5.17)$$

और q से r दूरी पर विभव Φ के लिए निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होगा :

$$\Phi = \frac{q}{4 \pi \epsilon r} \quad (5.18)$$

जब हम समीकरण (5.16) की तुलना स्वतंत्र दिक्स्थान के लिए \mathbf{E} के व्यंजक साथ करते हैं तब समीकरण (5.17) और (5.18) कुलम्ब बल और विभव के लिए समतुल्य व्यंजकों को दर्शाते हैं (इकाई 3 देखिए)। हम पाते हैं कि इन सभी व्यंजकों में डाइलेक्ट्रिक माध्यम में ϵ_0 को ϵ में बदल दिया जाता है।

बोध प्रश्न 6

दो बड़ी धातु की प्लेटें जिसमें से प्रत्येक का क्षेत्रफल 1 वर्ग मीटर है, कुछ दूरी पर एक दूसरे के सामने रखी गयी है। (एक मीटर की दूरी है व समान और विरोधी आवेश उनकी परतों पर है)। अगर प्लेटों के मध्य विद्युत तीव्रता 50 न्यूटन प्रति कुलम्ब है तो प्लेट पर स्थित आवेश का परिकलन कीजिए।

इस पूर्व पीढिका के साथ हम गलत निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि एक डाइलेक्ट्रिक माध्यम के लिए \mathbf{D} उसी प्रकार है। जैसे स्वतंत्र दिक् स्थान के लिए \mathbf{E} है। अतः यह आवश्यक एवं महत्वपूर्ण है कि इन दोनों की सदिश राशियों में स्पष्टतः अंतर किया जाए।

\mathbf{E} को इकाई आवेश पर कार्य करने वाले बल के रूप में परिभाषित किया गया है। यह ध्यान रखे बिना कि डाइलेक्ट्रिक माध्यम उपस्थित है अथवा नहीं। इसका परिकलन करते हुए इमें माध्य के स्वतंत्र अथवा बाहरी है तथा प्रेरित आवेशों को ध्यान में रखना चाहिए। इसके साथ ही \mathbf{D} को समीकरण 5.10 द्वारा इस प्रकार परिभाषित किया गया है $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, और यह विद्युत क्षेत्र के समान एक सदिश है, परन्तु यह केवल स्वतंत्र या बाहरी आवेश द्वारा ही निश्चित किया जाता है। समीकरण 5.15 और 5.16 से नोट कीजिए कि \mathbf{D} का मान डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक पर निर्भर नहीं करता जबकि \mathbf{E} का मान और आवेशों का मध्य बल ϵ पर निर्भर करता है।

प्रायः राशि $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ को माध्यम के dS क्षेत्रफल से विद्युत प्रवाह के रूप में बताया जाता है। इसी कारण \mathbf{D} को विद्युत प्रवाह घनत्व के नाम से भी जाना जाता है। डाइलैक्ट्रिक पदार्थ के लिए गाऊस सिद्धांत के समाकल स्वरूप से हम पाते हैं कि उस क्षेत्रफल से, जिससे आवेश q घिरा हुआ है, पूर्ण प्रवाह q होता है और यह प्रवाह डाइलैक्ट्रिक माध्यम की उपस्थिति में अपरिवर्तनीय होता है। विद्युत तीव्रता के पूर्ण प्रवाह के लिए यह सत्य नहीं है क्योंकि-

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \left(\frac{q}{\epsilon} \right)$$

चूंकि \mathbf{D} एक सदिश है, इसलिए जिस प्रकार हम बल की रेखाएं खींचते हैं, उसी प्रकार हम स्थानांतरण की रेखाएं भी खींच सकते हैं। एक इकाई क्षेत्रफल के मध्य से जाने वाली रेखाओं की संख्या \mathbf{D} के समानुपाती होती है। इन स्थानांतरण रेखाओं का आदि और अंत केवल स्वतंत्र आवेशों पर ही होता है, क्योंकि \mathbf{D} का स्रोत चालन आवेश या आवेश घनत्व है अनुच्छेद 5.4 देखिए।

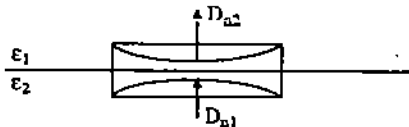
गाऊस के नियम का प्रयोग करते हुए यह आसानी से दिखाया जा सकता है कि स्थानांतरण रेखाएं उस दिक् स्थान में सतत होती हैं जहां कोई स्वतंत्र आवेश नहीं है। दूसरे शब्दों में, दो डाइलैक्ट्रिक की सीमाओं पर यदि स्वतंत्र आवेश नहीं है तो वहां पर \mathbf{D} की स्वतंत्र आवेश रेखाएं निरंतर हैं, जबकि \mathbf{E} की रेखाएं निरंतर नहीं हैं, क्योंकि विद्युत बल की रेखाएं स्वतंत्र अथवा ध्रुवण आवेश दोनों पर ही समाप्त हो सकती हैं। \mathbf{D} और \mathbf{E} का यह व्यवहार अगले अध्याय में विस्तार से बताया गया है। ये नियम दो डाइलैक्ट्रिक माध्यमों के अंतरापृष्ठ की सीमा शर्तों (boundry conditions) में जुड़े हुए हैं।

5.6 \mathbf{D} और \mathbf{E} की सीमा शर्तें

हम \mathbf{E} और \mathbf{D} के उन संबंधों को निश्चित करना चाहते हैं जो दो डाइलैक्ट्रिक पदार्थों के मध्य अंतरापृष्ठ पर इन्हें संतुष्ट करने चाहियें। यहां हम यह मान कर चलेंगे कि अंतरापृष्ठ में केवल ध्रुवण आवेश है। चूंकि डाइलैक्ट्रिक आर्दश है, इसलिए वे स्वतंत्र इलेक्ट्रॉन नहीं रखते, अतः अंतरापृष्ठ पर कोई भी चालन आवेश नहीं है। बाद में ये सीमा शर्तें विद्युत चुम्बकीय तरंग के नियमों को सिद्ध करने में सहायक होंगी। अब हम सदिश \mathbf{D} के लिए सीमा शर्तें तय करेंगे।

\mathbf{D} के लिए सीमा शर्त : हम डाइलैक्ट्रिक के लिए गाऊस नियम को, एक छोटे सिलेंडर जिसका आकार एक डिंबिया के समान है तथा जो दो डाइलैक्ट्रिक माध्यमों की सीमा को प्रतिच्छेद करता है और जिसका अक्ष अंतरापृष्ठ के लंबवत् है, के लिए प्रयोग करते हैं। चित्र 5.10 सिलेंडर को दिखाता है, अगर डिंबिया की ऊंचाई को इसके अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल की अपेक्षा बहुत कम रखें तो समाकलक $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$ को सीमा की और सामान्य \mathbf{D} के केवल उन घटकों से योगदान प्राप्त होता है जो अंतरापृष्ठ के लंबवत् है। इस प्रकार

$$\int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D_{n2} ds - - D_{n1} ds \quad (5.19)$$



चित्र 5.10 दो डाइलैक्ट्रिक माध्यमों के अंतरापृष्ठ पर \mathbf{D} की सीमा शर्तें

$$\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = D \cdot n \, dS$$

जहां पर n , क्षेत्रफल dS के लंबवत् बाह्य दिशा में इकाई सदिश है। इस निरूपण से हमें निम्न लिखित सीमा शर्तें प्राप्त होती हैं

$$n \cdot D_1 = n \cdot D_2$$

जिससे समीकरण 5.20 प्राप्त होता है। अथवा सीमा शर्त होगी,

$$D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$$

जहां θ_1 व θ_2 क्रमशः n और D_1 तथा n और D_2 के बीच के कोण हैं

जहाँ पर D_{n1} , D_{n2} क्रमशः माध्यम 1 और 2 में D के लंबवत् घटक हैं।

D_{n1} की दिशा, माध्यम (ϵ_1) में क्षेत्रफल dS , के लंबवत् दिशा के विपरीत दिशा में है।

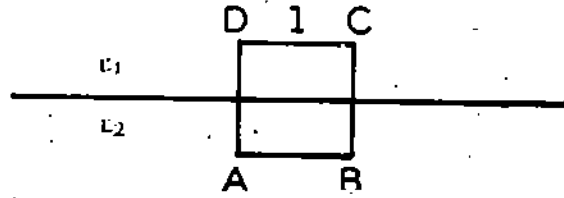
आगे $\int \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = 0$ चूँकि सीमा परत पर कोई स्वतंत्र आवेश नहीं है।

$$D_{n1} = D_{n2} \quad (5.20)$$

इस प्रकार विद्युत स्थानांतरण सदिश के लंबवत् घटक सीमा को पार करते हैं स्वतंत्र आवेश नहीं रखते।

E के लिए सीमा शर्त : हम इस मामले में विद्युत क्षेत्र के संरक्षणीय प्रकृति का प्रयोग करेंगे। E की सीमा शर्त प्राप्त करने के लिए हम एक आवेश को एक आयताकार लूप ABCDA के चारों ओर घुमाने में किए गए कार्य का परिकल्पन करते हैं। चित्र 5.11 इस प्रकार के इकाई लूप को दिखाता है। लूप की भुजाएँ BC और AC की बहुत छोटी हैं। एक बंद पथ के चारों ओर एक इकाई आवेश ले जाने में किया गया कार्य शून्य है संरक्षणीय बल

$$\int_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$



चित्र 5.11 दो डाइलेक्ट्रिक माध्यम के बीच E के लिए सीमा शर्त,

अब मान लीजिए माध्यम 1 और 2 में क्रमशः E_{11} और E_{22} , E के स्पर्श रेखीय घटक है। जैसा चित्र 5.11 में दिखाया गया है। तब

$$\begin{aligned} \int_{ABCD} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= \int_{AB} E_{11} \cdot dl - \int_{CD} E_{22} \cdot dl \\ &= E_{11} \cdot l - E_{22} \cdot l \end{aligned}$$

$$\text{जहाँ } l = AB = CD$$

समीकरण (5.21) को समीकरण (5.22) में प्रयोग करने पर हम प्राप्त करते हैं

$$E_{11} = E_{22}$$

समीकरण (5.23) यह बताता है कि विद्युत क्षेत्र के स्पर्श रेखीय घटक सीमा के पार सतत हैं। कार्य को मापने के लिए हमें उस बल की आवश्यकता है, जो विद्युत क्षेत्र के साथ संबंधित है।

समीकरण (5.23) में जो सीमा शर्त दी गई है, उसको सदिश रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_2 \quad (5.23. a)$$

जहाँ पर E_1 और E_2 एक दूसरे के अनुरूप विद्युत क्षेत्र हैं और \mathbf{n} इकाई सदिश है, जो अंतरापृष्ठ के लंबवत् है।

बोध प्रश्न 7

समीकरण (5.23) का प्रयोग करते हुए समीकरण (5.23. a) को सिद्ध कीजिए। और आप निम्नलिखित सदिश तादात्म्य का प्रयोग कर सकते हैं।

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{सतह}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \cdot dS = - \int \nabla \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) dS$$

समीकरण 5.23. a पर टिप्पणी

इस समीकरण 5.23. a को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2$$

जहाँ पर θ_1 और θ_2 क्रमशः पदार्थ 1 में \mathbf{n} और \mathbf{E}_1 तथा पदार्थ 2 में \mathbf{n} और \mathbf{E}_2 के बीच के कोण हैं।

यह सीमा शर्त का एक दूसरा रूप है। हम समीकरण 5.23 को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\frac{D_1}{\epsilon_1} \sin \theta_1 = \frac{D_2}{\epsilon_2} \sin \theta_2$$

या

$$\frac{D_1 \sin \theta_1}{D_2 \sin \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

इस प्रकार समीकरण 5.23 यह समाविष्ट करती है कि \mathbf{D} का स्पर्शज्या घटक सीमा के पार सतत नहीं है।

प्रश्न 8

सिद्ध कीजिए कि \mathbf{E} के लंबवत् घटक का डाइलैक्ट्रिक सीमा के साथ अविच्छिन्न संपर्क है।

5.7 डाइलैक्ट्रिक शक्ति एवं डाइलैक्ट्रिक विभंग

जैसे ही हम देख चुके हैं कि बाहरी विद्युत क्षेत्र के प्रभाव में आवेश केन्द्रों का स्थानांतरण होता है, जिसके कारण घुबल होता है। इस तथ्य पर प्रत्यक्ष विधि के रूप में हम विचार कर चुके हैं। हमारे मन में एक प्रश्न यह उठता है कि अगर अनुप्रायोगिक क्षेत्र को लगातार बढ़ाया जाए तो क्या होगा ? एक बात जो निश्चित है कि आवेश केन्द्र (charge centre) एक प्रभावशाली खिंचाव बल का अनुभव करेगा। अगर खिंचाव बल आवेश केन्द्रों के बंधित बल से कम है तब पदार्थ डाइलैक्ट्रिक गुण बनाये रखेगा। और अनुप्रायोगिक क्षेत्र जो हटाने के पश्चात् आवेश केन्द्र अपनी सामय अवस्था में आ जाएंगे। अगर खिंचाव बंधित बल के बराबर है तब आवेश केन्द्र खिंचाव बल के दबाव से मुक्त होने में सफल हो जाएंगे परन्तु थोड़ा सा प्रसंतुलित होने पर ही इलेक्ट्रॉन और केन्द्र (nuclears) के बीच का बंधन कमजोर पड़ जायेगा। प्रायोगिक क्षेत्र को और अधिक बढ़ाने से आवेश केन्द्र अलग अलग हो जाएंगे। एक बार ऐसा होने के पश्चात् इलेक्ट्रॉन गतिशील हो जाएंगे। तब तेज गति से घूमते हुए इलेक्ट्रॉन दूसरे परमाणु के साथ टकराएंगे और संख्या में कई गुणा हो जाएंगे। इसका परिणाम, चालन धारा का प्रवाह होगा। वह न्यूनतम विभव जिसके कारण आवेश का विभाजन होता है, उसे विभंग विभव के नाम से जाना जाता है। इस विधि को डाइलैक्ट्रिक विभंग के रूप में जाना जाता है।

विभंग विभव अलग-अलग पदार्थों में अलग होती है। यह डाइलैक्ट्रिक की मोटाई पर भी निर्भर करता है (मोटाई को क्षेत्र की दिशा में मापा जाता है)। वह क्षेत्र शक्ति जिस पर डाइलैक्ट्रिक टूटने को होते हैं, उसे डाइलैक्ट्रिक शक्ति के नाम से जाना जाता है। इसकी इकाई किलो वोल्ट/मीटर होती है। प्रयोगात्मक

जब डाइलैक्ट्रिक पर प्रयुक्त विद्युत विभव को लगातार बढ़ाते हैं तब एक स्थिति ऐसी आती है जब उस अणु के इलेक्ट्रॉन नाथि से अलग हो जाते हैं। अब डाइलैक्ट्रिक विभंग होता है। ये अपने डाइलैक्ट्रिक गुण को खो देता है और विद्युत का सुचालक बन जाता है।

यह डाइलैक्ट्रिक पदार्थ की प्रति इकाई मोटाई पर उस समय प्रयुक्त विभवांतर है जब वह विभंग होने वाला होता है

परिस्थिति के लिए विभंग विभव का ज्ञान होना अत्यंत आवश्यक है जैसे कि विद्युत परिपथों में संधारित्र का प्रयोग।

5.8 सारांश

- * जब एक प्रतिरोधी पदार्थ पर एक विद्युत क्षेत्र को प्रयुक्त किया जाता है तो वह ध्रुवित हो जाता है इसका अर्थ है कि पदार्थ में द्विध्रुवी आघूर्ण उत्पन्न हो जाता है। इस द्विध्रुवी आघूर्ण को सतह आवेश घनत्व के रूप में भी दिखाया जाता है।
- * प्रति इकाई आयतन के द्विध्रुवीय आघूर्ण को ध्रुवण के नाम से जानते हैं।
- * परमाणु स्तर पर माध्यम का ध्रुवण दो प्रकार से होता है क्योंकि अणु दो प्रकार के होते हैं, ध्रुवीय और अध्रुवीय। आध्रुवीय अणु में घनात्मक और ऋणात्मक आवेश केन्द्र एक बिंदु पर होते हैं और उनका निहित द्विध्रुवी आघूर्ण शून्य होता है।
- * ध्रुवीय अणु में घनात्मक और ऋणात्मक आवेश केन्द्र अलग अलग बिंदुओं पर होते हैं, और इन अणुओं में निहित द्विध्रुवी आघूर्ण होता है, जबकि अणुओं का कुल आवेश शून्य होता है।
- * सरलता के लिए डाइलेक्ट्रिक माध्यम को एक नए सदिश से परीमित किया गया है जो E और P के साथ संबंधित है। इसको स्थानांतरण सदिश D के रूप में परिभाषित किया गया है।

$$D = \epsilon_0 E + P$$

- * डाइलेक्ट्रिक के व्यवहार के विश्लेषण के लिए ध्रुवण सदिश P और कुल विद्युत क्षेत्र E का संबंध महत्वपूर्ण है। एक आदर्श सजातीय और समदिक डाइलेक्ट्रिक के लिए संबंध को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है,

$$P = \epsilon_0 \chi_e E$$

स्थिरांक χ_e को माध्यम की चुंबकीय प्रवृत्ति के रूप में जाना जाता है।

- * चुंबकीय प्रवृत्ति χ को निरूपित करने वाले स्थिरांक α को तब परमाणविक ध्रुवणीय के नाम से जाना जाता है जब हम एक परमाणु/अणु पर विचार करते हैं।
- * डाइलेक्ट्रिक के एक ध्रुवित भाग में आयतन आवेश घनत्व $\rho_p (= -\text{div } P)$ होता है और परत आवेश घनत्व σ_p को $P \cdot n$ या P_n के रूप में लिखा जाता है।
- * डाइलेक्ट्रिक की उपस्थिति में गाऊस नियम में कुछ परिवर्तन हो जाता है। जो इस प्रकार है:

$$\oint_S D \cdot n \cdot ds = q$$

जहाँ q कुल स्वतंत्र अथवा बाहरी आवेश है

$$\text{या } \text{div } D = \rho$$

जहाँ D केवल स्वतंत्र आवेश की मात्रा और बंटन पर निर्भर करता है।

- * सदिश D , E और P के साधारण संबंध को डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक K और ϵ_r को परिभाषित करने के लिए किया जा सकता है। ϵ_r का प्रयोग करके D , P और E के संबंध को रेखिक रूप में इस प्रकार निरूपित किया जा सकता है।

$$D = \epsilon E$$

$$P = \epsilon_0 (K - 1) E = (\epsilon - \epsilon_0) E$$

सदिश E और D दो डाइलेक्ट्रिक माध्यमों के अंतरापृष्ठ पर कुछ सीमाशर्तों को पूरा करते हैं। ये शर्तें हैं,

(i) E का स्पर्श रेखीय घटक सीमा अंतरापृष्ठ के दोनों तरफ बराबर होता है, यानि

$$E_{t1} = E_{t2}$$

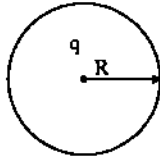
(ii) D का लंबवत् घटक सीमा अंतरापृष्ठ के दोनों तरफ बराबर होता है, यानि

$$D_{1n} = D_{2n}$$

डाइलेक्ट्रिक की प्रति इकाई मोटाई पर उस समय प्रयुक्त विभवांतर, जब वह विभंग होने वाले हों, को डाइलेक्ट्रिक शक्ति कहते हैं।

9 अंत में कुछ प्रश्न

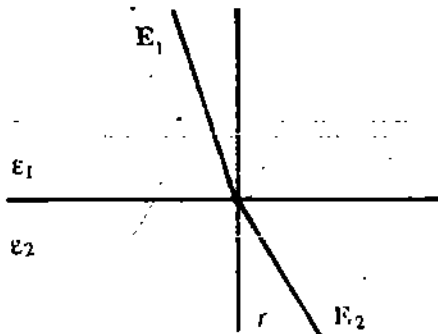
चित्र 5.12 में दिए गए अणु के नमूने वृत्ताकार समानुपाती अणु के आधार पर न्युकिलियस के विस्थापन को ज्ञात करो, जब यह बाहरी विद्युत क्षेत्र में अर्थात् उसकी ध्रुवीकरण क्षमता में रखा हो।



चित्र 5.12 अणु का नमूना।

मान लीजिए कि दो धातु प्लेटों को चित्र 5.13 की तरह रखा गया है : प्रत्येक प्लेट का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 2.0 m^2 है और यह 10^{-2} m की दूरी पर है। निर्वात में उनके मध्य विभवांतर (V_0) 3000 वोल्ट है और यह घट कर 1000 वोल्ट हो जाता है, जब डाइलेक्ट्रिक की एक सें.मी. मोटी परत को इन दोनों प्लेटों के बीच में रखा जाता है निम्नलिखित परिकलन कीजिए:

a) डाइलेक्ट्रिक के K सापेक्ष पैराविद्युतांक

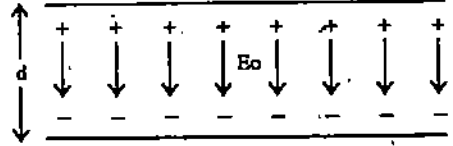


अ) बिना डाइलेक्ट्रिक के दो धातु प्लेट

ब) डाइलेक्ट्रिक सहित दो धातु प्लेट

चित्र 5.14 : दो धातु की प्लेट अ) बिना डाइलेक्ट्रिक के साथ ब) डाइलेक्ट्रिक के साथ

- इसका पैराविद्युतांक
 - इसकी चुंबकीय प्रवृत्ति χ
 - निर्वात में प्लेटों के मध्य विद्युत तीव्रता (यहां पर दिया गया है,
तीव्रता = प्लेट पर प्रयुक्त विभवांतर/अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल)
 - डाइलेक्ट्रिक में परीणामी विद्युत तीव्रता
 - बंधित आवेशों द्वारा उत्पन्न विद्युत तीव्रता
3. चित्र 5.14 में दिखाए गए चित्र के अनुसार दो आवेश मुक्त सीमा रेखा द्वारा विभाजित समदिक डाइलेक्ट्रिक माध्यमों 1 और 2 पर विचार कीजिए।



चित्र 5.13 दो डाइलेक्ट्रिक के बीच सीमा के पार बल की रेखाओं के विद्युत सदिश

अब एक विद्युत सदिश 1 माध्यम से माध्यम 2 में प्रवेश करता है। अगर i आयतन कोण है और r परावर्तन कोण है तो सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\tan i}{\tan r} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$$

4. यह सिद्ध कीजिए कि दो डाइलेक्ट्रिक के अंतरापृष्ठ ध्रुवण शक्ति घनत्व निम्नलिखित होगा,

$$\sigma'_P = \epsilon_0 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1} n \cdot E_1$$

5.10 उत्तर

बोध प्रश्न

- पाठ में देखिए
- प्रत्येक अणु का द्विध्रुवी आघूर्ण $\parallel P$
प्रत्येक इकाई आयतन में अणुओं की संख्या = n
 \therefore प्रत्येक इकाई आयतन का द्विध्रुवी आघूर्ण = np
परिभाषा द्वारा, प्रति इकाई आयतन द्विध्रुवी आघूर्ण = ध्रुवणता P
 $P = n \cdot p$
- डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक k निम्न प्रकार से दिया गया है

$$K = \frac{E}{E_0}$$

डाइलेक्ट्रिक के बिना विद्युत क्षेत्र होगा

डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के स्थूल लक्षण

$$E_0 = \frac{q}{\epsilon_0 A}$$

$$= \frac{1.0 \times 10^{-7} C}{(8.85 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^2) (100 \times 10^{-4} m^2)}$$

$$= 1.13 \times 10^6 Vm^{-1}$$

डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक = $\frac{1.13 \times 10^6 Vm^{-1}}{3.3 \times 10^{-5} Vm^{-1}} = 3.42$

प्लेट पर परत आवेश घनत्व निम्न है :

$$= \frac{q}{A} = \frac{10 \times 10 C}{100 \times 10^{-4} m^2} = 1.0 \times 10^{-5} c.m.^2$$

i. समीकरण 5.12 से हम जानते हैं

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_f$$

हम विदित हैं कि

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

समीकरण(i) \mathbf{D} का मान रखने पर

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

जब $\mathbf{P} = 0$, तब उपरोक्त समीकरण होगा:

$$\nabla \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho_f$$

$$\nabla \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0}$$

समीकरण 5.11 है

$$\epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho_f + \rho_p$$

तब है, तब उपरोक्त समीकरण घटकर निम्न हो जाता है

$$\epsilon_0 \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho_f$$

और $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0}$

समीकरण(i) और समीकरण (ii) समान है, इसलिए यह परिणाम को सिद्ध करती हैं।

i.(i) धारिता निम्न से प्राप्त करते हैं

$$C = \epsilon \frac{A}{l}$$

धारिता का परिकलन करने से पूर्व, हम डाइलेक्ट्रिक माध्यम की पेरविद्युतांक का परिकलन इस प्रकार करेंगे-

$$\epsilon = \epsilon_r \cdot \epsilon_0$$

$$= (6.0) (8.85) \times 10^{-12} \text{ farad/m}$$

$$= 5.31 \times 10^{-11} \text{ farad/m}$$

अतः $C = \epsilon \frac{A}{l} = 5.31 \times 10^{-11} \text{ farad/m}$

(ii) हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned} Q &= CV \\ &= (1.71 \times 10^{-11} \text{ farad}) (10 \text{ V}) \\ &= 1.71 \times 10^{-10} \text{ coulomb} \end{aligned}$$

(iii) डाइलेक्ट्रिक स्थानांतरण का परिकलन इस प्रकार किया जाता है,

$$\begin{aligned} D &= \epsilon E = \epsilon \frac{V}{l} \\ &= \frac{(5.31 \times 10^{-11} \text{ farad/m}) (10 \text{ V})}{2 \times 10^{-3} \text{ m}} \end{aligned}$$

(iv) ध्रुवीकरण होगा,

$$\begin{aligned} P &= D - \epsilon_0 E = D - \epsilon_0 \frac{V}{l} \\ &= 2.66 \times 10^{-7} \text{ Coul/m}^2 \\ &= \frac{(8.85 \times 10^{-12} \text{ farad/m}) (10 \text{ V})}{2 \times 10^{-3} \text{ m}} \\ &= 2.22 \times 10^{-7} \text{ Coul/m}^2 \end{aligned}$$

6. मान लीजिए प्लेटों की सतह पर आवेश घनत्व σ है। प्रत्येक प्लेट को अपरिमित समतल शीट आवेश मानने पर, उनके मध्य एक बिंदु पर घनात्मक आवेश के कारण तीव्रता होगी, $\frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$ ऋणात्मक आवेश के कारण भी तीव्रता होगी, $\frac{\sigma}{2 \epsilon_0}$ जो उसी दिशा में होगी। अतः बिंदु पर परिमाणक तीव्रता होगी -

$$\frac{\sigma}{2 \epsilon_0} + \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

चूंकि

$$E = 50 \text{ न्यूटन / कुलम्ब}$$

और

$$\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ n}^{-1} \text{ m}^2$$

$$\frac{\sigma}{E_0} = 50$$

$$\therefore \sigma = E_0 \times 50 = 8.854 \times 10^{-12} \times 50$$

$$= 442.7 \times 10^{-12} \text{ C/S meter}$$

प्रत्येक प्लेट पर कुल आवेश है

$$= \epsilon_0 \times \text{प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल}$$

$$= 442.7 \times 10^{-12} \times 1$$

$$= 442.7 \times 10^{-10} \text{ Coulomb}$$

7. समीकरण 5.21 से हम जानते हैं

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

सदिश विश्लेषण से हम पाते हैं

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_{\text{सतह}} (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} \, ds = - \int \nabla \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \, ds = 0$$

के लिए $\int \nabla \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) \, dS$ शून्य होगा। समाकल्प $\nabla \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E})$ को शून्य होना चाहिए। और $\nabla \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{E})$ आकाशीय अवकलज संक्रिया को प्रस्तुत करता है। अतः $(\mathbf{n} \times \mathbf{E})$ को हम या तो स्थिरांक अथवा शून्य लगाते हैं। अगर हम $(\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = 0$ लगाते हैं तब सतही परिणाम आता है। अतः यह चुनना अच्छा होगा

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = q \quad \text{स्थिरांक}$$

इसको समीकरण (5.1) में प्रयुक्त करने पर हम पाते हैं

$$\mathbf{n}_1 \times \mathbf{E}_1 = \mathbf{n}_2 \times \mathbf{E}_2$$

जो समीकरण (5.23 a) है।

8. गाऊस नियम में समाकल स्वरूप डाइलेक्ट्रिक में है

$$\int_{\text{सतह}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{s} = \text{पूर्ण स्वतंत्र शक्ति सतह (चित्र 10 को देखिए)}$$

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{n2} - \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{n1}) \, dS = \sigma_f \, dS$$

जहाँ पर σ_f डाइलेक्ट्रिक के मध्य अंतरापृष्ठ पर, सतह आवेश घनत्व है और n इकाई सदिश सतह के साथ बाह्य पर \mathbf{D}_{n2} और \mathbf{D}_{n1} स्थानांतरण सदिश के, माध्यम 2 और माध्यम 1 सामान्य घटक है

जबकि $\sigma_f = 0$ हम पाते हैं $\mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{n2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}_{n1}$

$$\text{अब } \mathbf{D}_{n1} = \epsilon_1 \mathbf{E}_{n1} \quad \text{और} \quad \mathbf{D}_{n2} = \epsilon_2 \mathbf{E}_{n2}$$

$$\therefore \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\therefore \epsilon_{1n} \mathbf{E}_{n1} = \epsilon_{2n} \mathbf{E}_{n2}$$

$$\text{or } \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{n1}}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_{n2}} = \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}$$

अतः हम पाते हैं कि \mathbf{E} के सामान्य घटक विच्छिन्न है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. यदि प्रायोगिक विद्युत क्षेत्र \mathbf{E} है, तब संबंधित नाभिकीय विस्थापन x है, R इलेक्ट्रॉन की त्रिज्या है और q इलेक्ट्रॉन का आवेश है। इलेक्ट्रॉन बादल एक समान क्षेत्र के बराबर है, इसके साथ आवेश घनत्व दिया गया है।

$$\text{इस आवेश के घनत्व} = \frac{-q}{\left(\frac{4}{3}\right) \pi R^3}$$

$$\text{इलेक्ट्रॉन घरे का कुल आवेश} = -q$$

एक दूरी पर एक क्षेत्र x पाते हैं (गाऊस के नियम का प्रयोग करके इकाई 2 देखिए) यह देता है

$$\epsilon_0 \cdot 4 \pi x^2 \mathbf{E}_x = \frac{4}{3} \pi x^3 \frac{-q}{\left(\frac{4}{3}\right) \pi R^3}$$

$$E_x = \frac{-qx}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

नाभि पर बल $F = qE_x$ जब इसको x मात्रा से विस्थापित किया जाता है। नाभि पर F कुलम्ब प्रत्यानयन बल है। अब

$$F = \frac{-q^2x}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

$$\text{नाभि पर बाहरी बल} = Eq$$

यह कोलम्ब प्रत्यानयन बल को संतुलित करता है

$$\therefore Eq = -F$$

अथवा

$$Eq = \frac{q^2x}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

और

$$x = \frac{4\pi\epsilon_0 R^3}{q} E$$

परिणामगत प्रति अणु द्विध्रुवीय गति

$$\begin{aligned} P &= qx \\ &= 4\pi\epsilon_0 R^3 E \end{aligned}$$

द्विध्रुवीय गति E के समानुपाती है

$$\text{अणु घ्रवण} (\alpha) = 4\pi\epsilon_0 R^3$$

2. डाइलेक्ट्रिक स्थिरांक K को हम निम्न प्रकार से निकाल सकते हैं :-

$$a) \quad K = \frac{E}{E_0} = \frac{V}{V_0} = \frac{3000 V}{1000 V} = 3$$

$$b) \quad \epsilon_2 = k\epsilon_0 = 3\epsilon_0$$

$$c) \quad \chi = \epsilon - \epsilon_0 = 3\epsilon_0$$

$$d) \quad E_0 = \frac{V_0}{A} = \frac{3 \times 10^3 V}{10^{-2} m} = 3 \times 10^5 V/m$$

डाइलेक्ट्रिक पर परिबंध आवेश आयोजित हो जाते हैं जो कि विद्युत क्षेत्र E_0 पर प्लेट के आवेश के कारण विद्यमान होते हैं। नया विद्युत क्षेत्र E दो के परिणामी क्षेत्रों के बराबर होगा।

$$f) \quad E_b = \epsilon_0 - \epsilon = 2 \times 10^5 V/m$$

3. सीमा पर E की स्पर्शज्यीय घटक निरंतर है। इस प्रकार:

$$D_1 \sin i = D_2 \sin r$$

D का सामान्य घटक निरंतर है। यहां पर हम कम प्रयोग करने पर इस प्रकार लिखेंगे:

$$\epsilon_1 E_1 \cos i = \epsilon_2 E_2 \cos r$$

$$\text{अथवा} \quad \frac{\tan i}{\epsilon_1} = \frac{\tan r}{\epsilon_2}$$

4. ध्रुवीकृत आवेश डाइलेक्ट्रिक की परत पर दिखाई देता है जो विद्युत क्षेत्र की दिशा के समानांतर है। हम समीकरण 5.4 को $\sigma_p = P$ सदिश रूप में इस प्रकार लिखते हैं:

$$\sigma_P = n \cdot P$$

जहाँ पर n इकाई सदिश है, उस दिशा की ओर सामान्य है। जिस ओर ध्रुवण और शक्ति प्रकट होती है। और P ध्रुवण सदिश है। अगर दो माध्यमों में P_1 और P_2 ध्रुवण सदिश है। दो डाइलेक्ट्रिक के मध्य अतिकरण पर दो ध्रुवण आवेश का तल सतह σ_p है।

$$\sigma_P = n \cdot (p_2 - p_1) \quad (i)$$

D के लिए सीमा शर्त पर हम पाते हैं

$$n \cdot D_1 = n \cdot D_2 \quad (ii)$$

अथवा

$$\epsilon_1 n \cdot E_1 = \epsilon_2 n \cdot E_2 \quad (iii)$$

$D = \epsilon_0 E - P$ हम रखते हैं

$$P = \epsilon_0 E - D$$

$$\therefore P_1 = \epsilon_0 E_1 - D_1 \quad P_2 = \epsilon_0 E_2 - D_2 \quad (iv)$$

मीकरण (iv) को (i) में प्रयोग करने पर हम पाते हैं

$$\begin{aligned} \sigma_P &= n \cdot (\epsilon_0 E_2 - D_2) - (\epsilon_0 E_1 - D_1) \\ &= \epsilon_0 (n \cdot E_2 - n \cdot E_1) \\ &= \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} n \cdot E_1 - n \cdot E_1 \right) = \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} - 1 \right) n \cdot E \\ &= \epsilon_0 \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2} \right) n \cdot E \end{aligned}$$

इकाई 6 : संधारित्र

- 6.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 6.2 धारिता
- 6.3 संधारित्र में संचित ऊर्जा
- 6.4 समानांतर प्लेट का संधारित्र जिसके प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक विद्यमान हो।
संधारित्र का अनुमतांक विभव
- 6.5 सिलिंडरकार संधारित्र की धारिता
- 6.6 संधारित्रों का श्रेणी और पाश्च क्रम में संयोजन
संधारित्रों का पार्श्व संबंध
संधारित्रों का श्रेणी संबंध
- 6.7 डाइलेक्ट्रिकल माध्यम में ऊर्जा का संचयन
- 6.8 व्यावहारिक संधारित्र
स्थिर मान के संधारित्र
सिरेमिक संधारित्र
विद्युत अपघटनी संधारित्र
परिवर्तनशील वायु संधारित्र, गुम्फित संधारित्र
रक्षक वलयी संधारित्र
- 6.9 सारांश
- 6.10 अंत में कुछ प्रश्न
- 6.11 हल/ उत्तर

6.1 प्रस्तावना

इकाई 4 में आपने यह अध्ययन किया है कि जब किसी चालक को आवेश दिया जाता है, तब उसका विभव बढ़ जाता है। गणितीय रूप में हम उसे इस प्रकार से लिख सकते हैं।

$$Q \propto \Phi \text{ or } Q = C\Phi \quad (6.1)$$

जहां पर C को हम सह समानुपाती स्थिरांक कहते हैं।

इस नियतांक C को हम धारिता या संधारिता कहते हैं। हम ऐसी किसी भी युक्ति को जो संधारिता का कार्य करें, संधारित्र कहते हैं। इस युक्ति से आप पहले से ही परिचित हैं।

आप रेडियो या ट्रांजिस्टर में समस्वरण खूटी को घुमा कर संधारिता को बदलते हुए अपनी इच्छानुसार रेडियो स्टेशन का समस्वरण प्राप्त कर लेते हैं। संधारित्रों को हम बहुत से विद्युत और इलेक्ट्रॉनिकी परिपथों के लिए उपयोग में लाते हैं। ये, प्रवर्धकों के बीच में युग्मन के लिए भी प्रयोग में लाये जाते हैं। विद्युत

खोतों के निर्गम के मसृणन (smooth) करने के कार्य में भी ये प्रयोग में लाये जाते हैं। इनको हम मोटर, पंखों तथा प्रेरकों के साथ दोलन उत्पन्न करने के लिए प्रयोग में लाते हैं, इन्हें हम रेडियो व दूर संचार संदेशों के प्रसारण के लिए भी प्रयोग में लाते हैं। इसके अलावा संधारित्रों का विद्युत् ऊर्जा संचारण में भी बहुत उपयोग होता है।

इस इकाई में, हम संधारित्रता, विभिन्न प्रकार के संधारित्रों, संधारित्र में ऊर्जा संचयन, तथा संधारित्र की कार्यविधि के बारे में पढ़ेंगे। इकाई 5 में आपने डाइलेक्ट्रिक्स के असूक्ष्म गुणधर्मों के बारे में अध्ययन किया है। यहां पर हम एक संधारित्र की धारिता पर उस स्थिति के प्रभाव के बारे में पढ़ेंगे, जब इसके बीच में कोई डाइलेक्ट्रिक पदार्थ विद्यमान हो। इसके बाद आपको कुछ व्यावहारिक संधारित्रों से परिचय कराएँगे।

अगली इकाई में आप डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के सूक्ष्मपरिमापी गुणधर्मों के बारे में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- एक संधारित्र की संधारिता को परिभाषित कर सकेंगे,
- विभिन्न ज्यामिति के संधारित्रों की व्याख्या, और उनके संधारिताओं के गणितीय समीकरणों की व्याख्या कर सकेंगे।
- एक संधारित्र की संचित ऊर्जा को निकाल सकेंगे,
- एक संधारित्र के बीच में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ की मौजूदगी से जो प्रभाव पड़ता है, उसकी व्याख्या कर सकेंगे,
- जब संधारित्रों को श्रेणीक्रम और समानांतर क्रम में जोड़ा गया हो, तब आप उनके प्रभावी संधारिता के समीकरणों को स्थापित कर सकेंगे,
- प्रयोगिक संधारित्रों की व्याख्या कर सकेंगे, जैसे — रक्षक बलयी संधारित्र तथा विद्युत् - अपघटनी संधारित्र।

6.2 संधारिता

संधारित्र एक इलेक्ट्रॉनिक युक्ति है, जिसमें धातु की प्लेटों पर आवेश के संचित हो जाने पर विद्युत् ऊर्जा जमा हो जाती है। फिर जब, प्लेटों से इस आवेश को उस परिपथ में बहने दिया जाता है, जिसमें संधारित्र जुड़ा होता है, तब यह संचित ऊर्जा हमें फिर से प्राप्त होती है। ऐसी कोई भी युक्ति जिसमें आवेश को संचित किया जा सकता हो, उसे संधारित्र कहते हैं। उदाहरण के लिए, एक R मान वाले अर्धव्यास का अंचालक वृत्तीय चालक कोश, आवेश का संचय कर सकता है, इसलिए उसे संधारित्र के रूप में इस्तेमाल किया जा सकता है। आइए देखें, कि यह किस प्रकार एक संधारित्र का काम करता है। यदि इसमें आवेश Q रखा जाए, तो कोश की बाहरी सतह एक समविभव सतह हो जाती है। सेल की बाहरी सतह का विभव निम्न होगा (भाग 4 देखें)।

$$\Phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} \quad (6.2)$$

यहां अनंत पर शून्य विभव होगा। अनंत की जगह हम भूसंपर्कित विभव को शून्य विभव मान सकते हैं। तब भूसंपर्कित विभव के सापेक्ष कोश की संधारित्र निम्न होगी

$$C = \frac{Q}{\Phi} = 4\pi\epsilon_0 R \frac{\text{कूलम्ब}}{\text{वोल्ट}} \quad (6.3)$$

एस.आई.निकाय में संधारित्र C को मापने की इकाई फेरेड होती है।

$$\text{फेरेड} = \text{कूलम्ब} / \text{वोल्ट} \quad (6.4)$$

यदि उपरोक्त कोश का अर्धव्यास $R = 100$ सें.मी. हो तो उस की संधारिता, फेरेड में, निम्न होगी।

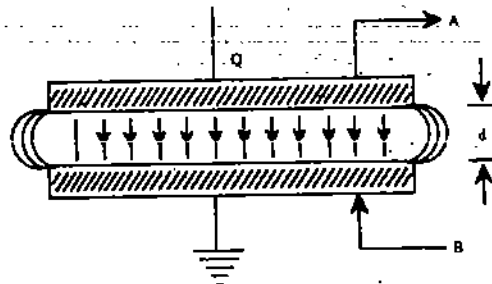
$$(4 \pi \epsilon_0) 100 = 1.1 \times 10^{10} \text{ फेरेड}$$

अब यह स्पष्ट है कि यदि एक फेरेड धारिता वाला संधारित्र बनाना हो तो उसका आकार बहुत बड़ा होगा। (इस स्थिति में लगभग 10 मी. होगा)। आम तौर पर प्रयोग में आने वाले संधारित्र छोटे आकारों के व कम धारिता वाले होते हैं जैसे पीकोफेरेड (10^{-12} फेरेड) तथा माइक्रोफेरेड (10^{-6} फेरेड)। संधारित्र को इस चिन्ह (o—|—o) से दर्शाया जाता है।

उपरोक्त उदाहरण में वृत्तीय चालक को संधारित्र के रूप में प्रयोग, साधारण को समझने के लिए किया गया है। जबकि आमतौर पर इस्तेमाल होने वाले संधारित्र में धातु की दो कोश, का एक निकाय होता है (गोलाकार, सिलिंडरकार या आयताकार), जो बहुत नजदीक रखी गयी होती है तथा उनके बीच में एक अचालक रखा हुआ होता है। इस प्रकार के निकाय में, छोटे आकार में ही अधिक धारिता रखने की क्षमता होती है। अगले भाग में आपको इनके विषय में और अधिक जानकारी प्राप्त होगी।

6.3 समानांतर प्लेट संधारित्र

यह सबसे सरल और सबसे अधिक प्रयोग में लाये जाने वाले प्रकार का संधारित्र है। इस समानांतर प्लेट वाले संधारित्र में धातु की आयताकार या गोलाकार दो प्लेटें होती हैं, जो एक दूसरे के समानांतर होती हैं और उनके बीच की दूरी d के बराबर होती है। अधिकांश d का मान बहुत कम होता है और सामान्यतः एक अचालक पदार्थ को दोनों प्लेटों के बीच में रख दिया जाता है। इसके लिए आप चित्र 6.1 को देख सकते हैं। एक धनात्मक आवेश Q को ऊपर वाली प्लेट के ऊपर दिया जाता है। यह आवेश पूरी प्लेट में समान रूप से फैल जाता है और इस प्रकार यह प्लेट एक समावेशित सतह बन जाती है। नीचे वाली प्लेट को भूसंपर्कित कर दिना जाता है भूमि से जोड़ दिया जाता है जिसे इस चिन्ह \equiv से दर्शाया जाता है। इसलिए नीचे वाली प्लेट शून्य विभव पर होती है। स्थिर वैद्युत प्रेरण (Electrostatic induction) की वजह से नीचे वाली प्लेट के ऊपरी भाग में बराबर मान का ऋणात्मक आवेश, ऊपर वाली प्लेट के पूरे धनात्मक आवेश को ऊपरवाली प्लेट के निचले भाग की तरफ खींच लेता है। इस प्रकार अब वैद्युत क्षेत्र दोनों प्लेटों के बीच की जगह में सीमित हो जाता है। धनात्मक आवेश एक स्रोत की भांति काम करता है व ऋणात्मक आवेश एक सिंक की भांति बल-रेखा धनात्मक आवेश से निकलती है तथा ऋणात्मक आवेश में खत्म होती है। प्रेरित ऋणात्मक आवेश धनात्मक आवेश के मान के बराबर होगा क्योंकि चालक पदार्थ के अंदर वैद्युत क्षेत्र शून्य होता है। इसके अतिरिक्त धातु की दोनों पत्तियां समविभव पर होती हैं। बल-रेखा किनारों को छोड़कर बाकि जगह इन पत्तियों के लंब पर होती है चित्र 6.1 देखें। सभी क्षेत्र रेखाएँ ऊपर वाली प्लेट से निकलती हैं तथा नीचे वाली प्लेट पर खत्म होती हैं। वैद्युत क्षेत्र E का मान किनारों के मान छोड़कर पत्तियों के बीच की जगह में एक जैसा होता है, चित्र 6.1 देखें। क्योंकि सभी रेखाएँ ऊपरी प्लेट से निकलती हैं तथा निचली प्लेट में खत्म होती हैं, इसलिए दोनों प्लेटों के बीच के क्षेत्र में वैद्युत क्षेत्र का मान एक समान होता है, किन्तु प्लेटों के किनारों पर ऐसा नहीं होता। यदि प्लेटों का क्षेत्रफल,



चित्र 6.1 समानांतर प्लेट वाला संधारित्र। A व B धातु की प्लेट है जिनके बीच की दूरी 'd' है।

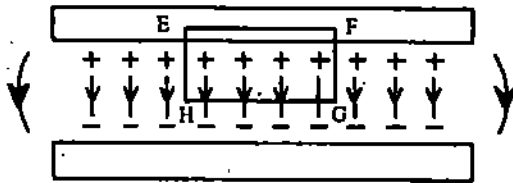
A दोनों प्लेटों के बीच की दूरी से बहुत अधिक हो तो कोर प्रभाव बहुत कम होता है। क्योंकि E एक समान है इसलिए ऊपरी व निचली प्लेटों के बीच विभवांतर का मान निम्नलिखित होगा :-

$$\Phi_2 - \Phi_1 = - \int E dl = E \cdot d \quad (6.4)$$

जहाँ Φ_2 व Φ_1 क्रमशः ऊपरी व निचली प्लेटों के विभव को निर्देशित करते हैं। जब निचली प्लेट को भूसंपर्कित कर दें, तब

$$\Phi_1 = 0 ; \Phi_2 = E \cdot d \quad (6.5)$$

का मान ज्ञात करने के लिए हम गॉस का प्रमेय इस्तेमाल करते हैं। मान लें कि हम एक बंद सिलिंडराकार सतह EFGH, जिसका मूल क्षेत्रफल S है तथा जिसका अक्ष प्लेट के लंब पर है, के वैद्युत फलस्क का परिकलन करते हैं, चित्र 6.2 देखें।



चित्र 6.2 गॉशियन बंद बेलन EFGH.

एक समतल किनारा घातु के अंदर है तथा दूसरा किनारा प्लेटों के बीच की जगह में है। वक्र पर बल क्षेत्रिय रेखाओं के समानांतर है। E F से कोई फलस्क नहीं मिलता क्योंकि चालक सतह के अंदर वैद्युत क्षेत्र का मान शून्य होता है। इसी प्रकार E H व F G से भी कोई फलस्क नहीं मिलता क्योंकि गॉशियन के वक्रों पर बल क्षेत्रिय रेखाओं के समानांतर है। H G जिसका क्षेत्रफल S है, से हमें ES फलस्क प्राप्त होगा क्योंकि E की दिशा क्षेत्रफल के लंब की दिशा में है। अतः गॉस प्रमेय के अनुसार,

$$ES = \frac{S}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (6.6)$$

जहाँ σ संघारित्र की प्लेटों में स्थित, प्रति इकाई क्षेत्रफल का आवेश है। ऊपरी प्लेट का विभव Φ_2 समीकरण (6.5) के अनुसार Ed के बराबर होगा। कुल आवेश Q , σ, A के बराबर होगा।

$$C = \frac{Q}{\Phi} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad (6.7)$$

यदि d का मान कम रखें तो धारिता, C को बढ़ाया जा सकता है। उपरोक्त व्युत्पन्न में हमने दोनों प्लेटों के बीच के माध्यम को निर्वात माना है। उपरोक्त समंजन में यह फायदा है कि इसमें संघारित्र के नजदीक किसी और चालक या आवेश की उपस्थिति का, दोनों प्लेटों के बीच के वैद्युत क्षेत्र पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इसके अलावा यदि प्लेटों का क्षेत्रफल A उनके बीच की दूरी d से बहुत अधिक हो तो किनारों पर वैद्युत क्षेत्र के असमान होने की वजह से धारिता का संशोधन गुणक भी बहुत कम होता है।

बोध प्रश्न 1

यदि हम प्लेटों के बीच की दूरी को घटा कर आधा कर दें तो संधारित्र की धारिता पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

बोध प्रश्न 2

एक 1000 μF धारिता वाले संधारित्र, जिसका विभव 24 V है, का आवेश ज्ञात कीजिए।

अगले भाग में आप संधारित्र में संचित ऊर्जा के विषय में पढ़ेंगे।

6.3.1 संधारित्र में संचित ऊर्जा

तीसरी इकाई में यह बताया गया था कि आवेश की छोटी छोटी इकाइयों को जोड़ कर कुल आवेश Q को जमा करने में किया गया कार्य W निम्नलिखित होगा :-

$$W = \frac{1}{2} Q \Phi \quad (6.8)$$

जहां Φ आवेशित पिंड का कुल विभव है। धारिता C वाले संधारित्र के लिए भी, संधारित्र में आवेश Q जमा करने के लिए किया गया कार्य भी इसी प्रकार के व्यंजनों से दर्शाया जायेगा यानि

$$W = \frac{1}{2} Q \Phi \quad (6.9)$$

इसे हम धारिता $C = \frac{Q}{\Phi}$ का प्रयोग करते हुए निम्न रूप से लिख सकते हैं,

$$W = \frac{1}{2} C \Phi^2 = \frac{Q^2}{2C} \text{ J} \quad (6.10)$$

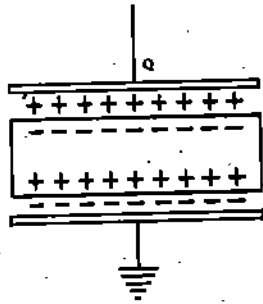
यह कार्य, वैद्युत क्षेत्र में विभव ऊर्जा के रूप में संचित रहता है।

बोध प्रश्न 3

सिद्ध करें कि एक समानांतर प्लेटों वाले संधारित्र, जिसकी प्लेटों का क्षेत्रफल A है, उनके बीच की दूरी d है तथा उनको बीच की जगह निर्वात है, उसकी प्लेटों के बीच में स्थित वैद्युत क्षेत्र का मान $1/2Q\Phi$ होगा।

6.4 समानांतर प्लेट वाला संधारित्र जिसके प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक विद्यमान हो।

जब संधारित्र की समानांतर प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक की सिली (slab) रखी जाती है तो उसकी धारिता बढ़ जाती है। ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक की सिली ABCD (चित्र 6.3 देखें) डाइलेक्ट्रिक के भीतर के वैद्युत क्षेत्र E को गुणक $\left(\frac{1}{\epsilon_r}\right)$ के अनुसार कम कर देती है, जहाँ पर ϵ_r डाइलेक्ट्रिक का सापेक्ष परावैद्युतांक है, जैसा कि पिछली इकाई में बताया गया है। यह, डाइलेक्ट्रिक ABCD के भीतर विद्यमान वैद्युत क्षेत्र का, वैद्युत विस्थापन D के लिए गॉस के नियम का इस्तेमाल करते हुए, परिकलन करके, सिद्ध किया जा सकता है। भाग 6.2 में, E का परिकलन करने के लिए इस्तेमाल किए गए गॉशियन सिलिंडर का ध्यान करें। अब D का फलस्क निम्नलिखित होगा, (यह केवल मुक्त आवेशों से ही प्राप्त होता है)



चित्र 6.3 संधारित्र की प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक की सिली मौजूद।

$$DS = \sigma S \quad (6.11)$$

क्योंकि परिबंध आवेशों से फलस्क नहीं प्राप्त होता, तथा

$$D = \epsilon_0 \epsilon_r E \quad (6.12)$$

(एक समस्थानिक समरूप से ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक के लिए) इसलिए वैद्युत क्षेत्र का मान :-

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \quad (6.13)$$

दोनों प्लेटों के बीच का विभवांतर होगा $E.d$ जहाँ d उस सिली की मोटाई है जो दोनों प्लेटों के बीच की संपूर्ण जगह में विद्यमान है। अब धारिता, निम्नलिखित होगी,

$$C = \frac{Q}{\Phi} = \frac{\sigma A}{Ed} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d} \quad (6.14)$$

हम देखते हैं कि धारिता C का मान ϵ_r के गुणक से बढ़ जाता है। यहाँ ϵ_r डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का सापेक्ष परावैद्युतांक है।

समीकरण (6.14) से हमें पता चलता है कि समानांतर प्लेटों वाले संधारित्र की धारिता प्लेटों के क्षेत्रफल A को बढ़ाने से तथा प्लेटों के बीच की दूरी को कम करने से बढ़ जाती है।

प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक की सिली डालने से संधारित्र की धारिता बढ़ जाती है (क्योंकि $\epsilon_r > 1$)। डाइलेक्ट्रिक डालने से, प्लेटों के बीच में एक नियत विभवांतर के लिए, संधारित्र की आवेश धारण करने की क्षमता बढ़ जाती है।

समीकरण (6.14) को हम निम्न प्रकार से भी लिख सकते हैं :

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d/\epsilon_r} \quad (6.15)$$

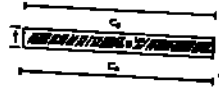
इसकी समीकरण (6.7) के साथ तुलना कीजिए। हम देखते हैं कि d मोटाई वाला डाइलेक्ट्रिक d/ϵ_r मुक्त दिक् स्थान मोटाई के बराबर है। यह प्रेक्षण बाद में हमारे काम में आयेगा जब हम ऐसे संधारित्र के विषय में पढ़ेंगे, जिसकी प्लेटों के बीच की जगह में आंशिक रूप से डाइलेक्ट्रिक विद्यमान होगा।

बोध प्रश्न 4

एक ऐसे संधारित्र की धारिता ज्ञात कीजिए, जिसकी प्रत्येक प्लेट का क्षेत्रफल 0.04 m^2 है व जो कि मुक्त दिक् स्थान में 10^{-3} मी. की दूरी पर स्थित है।

चित्र 6.4 में एक ऐसा संधारित्र दर्शाया गया है, जिसकी प्लेटों के बीच की दूरी d है तथा उनके बीच में l मोटाई वाली डाइलेक्ट्रिक की सिलि रखी गई है। इस संधारित्र की धारिता को हम डाइलेक्ट्रिक की तुल्य मुक्त दिक् स्थान मोटाई के आधार पर लिखते हैं। हम देखते हैं कि प्लेटों के बीच मुक्त दिक् स्थान की मोटाई $(d - l)$ के बराबर है, जहां l डाइलेक्ट्रिक की सिलि की मोटाई है। यह l मुक्त दिक् स्थान मोटाई l/ϵ_r के तुल्य है। चित्र 6.4 में दर्शाया गया संधारित्र एक ऐसे संधारित्र के तुल्य है जिसकी प्लेटों के बीच में मुक्त दिक् स्थान हो तथा जिनकी आपसी दूरी $(d - l + l/\epsilon_r)$ हो। धारिता के व्यंजक को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :-

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{(d - l + l/\epsilon_r)} \quad (6.16)$$



चित्र 6.4 में तुल्य संधारित्र दिखाया गया है।

अब हम समीकरण (6.16) को एक दूसरे तरीके से निकालेंगे। मान लो कि चित्र 6.4 में दिखाये गए संधारित्र का विभव V है। अब संधारित्र की दोनों प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक डाला जाता है जिसकी मोटाई l है। मान लो कि संधारित्र की धनात्मक प्लेट और डाइलेक्ट्रिक की ऊपरी सतह के बीच की दूरी d_1 है तथा डाइलेक्ट्रिक की निचली सतह व ऋणात्मक प्लेट के बीच की दूरी d_2 है। अब यह मान लें कि धनात्मक प्लेट व डाइलेक्ट्रिक की ऊपरी सतह के बीच का विभवांतर V_1 है, डाइलेक्ट्रिक की निचली सतह व ऋणात्मक प्लेट के बीच का विभवांतर V_2 है। संधारित्र की प्लेटों के बीच का कुल विभवांतर इन तीनों विभवांतरों का बीजीय योग होगा, यानि

$$V = V_1 + V_2 + V_3$$

मान लो कि डाइलेक्ट्रिक के भीतर वैद्युत क्षेत्र का मान E है तब

$$V_1 = d_1 E, V_2 = \frac{E \cdot t}{\epsilon_r} \text{ and } V_3 = d_2 E$$

$$V = (d_1 + d_2) E + \frac{E \cdot t}{\epsilon_r}$$

से ज्ञात होता है कि

$$d = d_1 + d_2 + t$$

$$d_1 + d_2 = (d - t)$$

उक्त समीकरण के आधार पर हम लिख सकते हैं,

$$V = (d - t) E + \frac{E \cdot t}{\epsilon_r}$$

करण (6.5) का इस्तेमाल करते हुए, हमें इस स्थिति के लिए निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$d = \left[(d - t) + \frac{t}{\epsilon_p} \right]$$

करण (6.15) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है -

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

यह भी ज्ञात होता है कि, प्लेटों के बीच डाइलेक्ट्रिक की उपस्थिति में संघारित्र की धारिता का प्लेटों बीच मुक्त दिक् स्थान होने पर संघारित्र की धारिता से अनुपात, सापेक्ष परावैद्युतांक के बराबर होता है।

$$\epsilon_r = \frac{\text{प्लेटों की डाइलेक्ट्रिक की उपस्थिति में धारिता}}{\text{प्लेटों के बीच मुक्त दिक् स्थान होने पर धारिता}}$$

आम इस्तेमाल में आने वाले पदार्थों के सापेक्ष परावैद्युतांक तालिका 6.1 में दिए गए हैं।

तालिका 6.1 : कुछ आम पदार्थों के सापेक्ष परावैद्युतांक

कैसटर तेल	4.7
माइका	5-9
कांच	4.5 - 7.00
बैकेलाइट	4.5 - 7.5
कागज	2 - 2.3
पोरसीलीन (चीनि)	5.5
क्वार्ट्ज (quartz)	1.5
पानी	81

प्रश्न 5

घारित्र की प्लेटों के बीच की जगह में, सापेक्ष परावैद्युतांक 3 वाला डाइलेक्ट्रिक रखा गया है। परिकल्पना जिए कि यदि डाइलेक्ट्रिक, केवल 3/4 जगह में रखा गया हो तो धारिता कितनी बढ़ जायेगी।

6.4.1 संधारित्र का अनुप्रतांक विभव

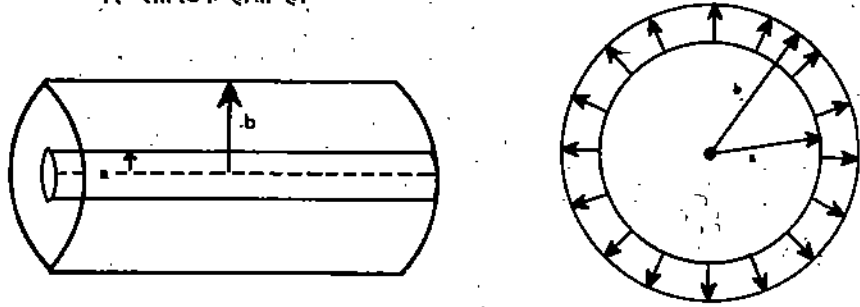
संधारित्रों का डिजाइन व निर्माण इस तरह से किया जाता है कि वे एक अधिकतर विभवान्तर तक ठीक से (बिना किसी क्षति के) काम कर सकें। यह अधिकतम विभवान्तर संधारित्र की प्लेटों के बीच की दूरी पर निर्भर करता है। यदि विभवान्तर को इससे अधिक कर दिया जाये तो इलेक्ट्रॉन बीच की जगह को लांघ कर पहुंच जाते हैं जिससे संधारित्र को स्थायी क्षति भी पहुंच सकती है। अधिकतम विभवान्तर, जिससे संधारित्र सुरक्षित रहता है, कार्यकारी विभव कहा जाता है। बड़े संधारित्रों में, उनकी धारिता तथा कार्यकारी विभव (WV) लिखी रहती है। कम धारिता वाले छोटे संधारित्रों में यह वर्ण कोड द्वारा अंकित की जाती है। यह कोड प्रतिरोधकों के वर्ण जैसा ही होता है।

6.5 सिलिंडराकार संधारित्र की धारिता

चित्र 6.6.b में रेडियल क्षेत्र की दिशा, सिलिंडर की सतह के नार्मल होगी। दो सिलिंडरों के बीच की छोटी रेखाएं स्थिर रेखा की दिशा को प्रदर्शित करती हैं।

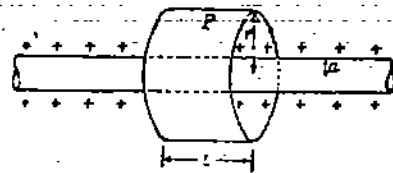
भाग 6.3 में हमने समानान्तर प्लेट वाले संधारित्र की धारिता का परिकलन किया है। एक और महत्वपूर्ण आकार वाला संधारित्र होता है सिलिंडराकार संधारित्र। यह चित्र 6.6. a में दिखाया गया है। चित्र 6.6. b में इसका एक भाग दिखाया गया है। यह दो खाली समाक्ष सिलिंडराकार चालकों से बना होता है जिनका अर्धव्यास a व b होता है। सिलिंडरों के बीच की जगह में, ϵ_r सापेक्ष परावैद्युतांक वाला डायैलेक्ट्रिक रखा होता है। ऐसे संधारित्रों के आम प्रयोग में आने वाले प्रकार होते हैं :-

- (i) अक्षीय केबिल इसमें भीतरी चालक एक तार होती है तथा बाहरी चालक आम तौर पर चालक तारों की जाली होती है तो भीतरी चालक से एक अचालक द्वारा अलग रहती है। यह अचालक आमतौर पर प्लास्टिक होता है।



चित्र 6.6 (a) सिलिंडराकार संधारित्र (b) सिलिंडराकार संधारित्र का अनुप्रख काट

- (ii) अंतः समुद्री केबल इसमें तांबे के चालक पदार्थ पॉलीस्टीरिन से ढका रहता है तथा समुद्र का पानी बाहरी चालक का काम करता है। क्योंकि भीतरी व बाहरी दोनों सिलिंडर चालक होते हैं इसलिए वे समविभव पर होते हैं (इकाई 4 देखें)। क्षेत्र रेडियल होता है (यानि सिलिंडर की सतह के लंब पर होता है) सिलिंडराकार सममित की वजह से हम यह मान लेते हैं कि धारिता का मान सिलिंडर की लंबाई के अनुपात में होता है जैसे ही लंबाई बढ़ेगी, प्लेट का क्षेत्रफल भी बढ़ेगा। अब हम संधारित्र की प्रति इकाई लंबाई की धारिता का परिकलन करेंगे।



चित्र 6.7 गॉशियन सतह ABCD ।

धारित्र के भीतरी सिलिंडर में प्रति इकाई लंबाई का आवेश λ मान लें। बाहरी सिलिंडर को भूसंपर्कित किया गया है। बाहरी सिलिंडर की भीतरी सतह पर विपरीत चिन्ह का परन्तु बराबर मान का आवेश प्रकट होता है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि चालक के भीतर क्षेत्र का मान शून्य होता है। क्षेत्र का परिकलन करने के लिए हम एक अक्षीय बंद सिलिंडरकार सतह ABCD को लेते हैं, जिसकी लंबाई एक इकाई तथा अर्धव्यास r है। चित्र 6.7 देखें। वैद्युत क्षेत्र भीतरी सिलिंडरकार सतह के लंब पर होगा तथा दोनों सिलिंडरों के बीच की जगह में सीमित होता है। वैद्युत विस्थापन सदिश, \mathbf{D} का फ्लक्स गॉशियन सिलिंडर ABCD की ऊपरी व निचली सतहों से शून्य होता है क्योंकि \mathbf{D} इन सतहों के समानांतर होता है। \mathbf{D} का फ्लक्स केवल ABCD के चक्र सतह से मिलता है, क्योंकि \mathbf{D} सभी बिंदुओं पर इसके लंब पर होता है। इस बंद गॉशियन सतह से प्राप्त होने वाला फलस्फुट निम्नलिखित होगा,

$$\mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = (2\pi r) \cdot D \cdot S_1 \quad (6.17)$$

व एक जैसे समस्थानिक ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक्स के लिए $D = \epsilon_0 \epsilon_r E$ गांस के नियम का प्रयोग करके में निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$2\pi r D = (2\pi r) \epsilon_0 \epsilon_r E = \lambda \quad (6.18)$$

हां पर λ मुक्त आवेश है जो कि गाउस पृष्ठ है। इसलिए

$$E = \frac{\lambda}{2\pi r \epsilon_0 \epsilon_r} \quad (6.19)$$

धारिता का मान निकालने के लिए, हमें दो सिलिंडरों के बीच विभवांतर की जरूरत है। इकाई 3 में, आपने विभवांतर के व्यंजन के बारे में पढ़ा है जिसमें उस का व्यंजन निम्न प्रकार से दिया गया है।

$$\Phi = -\int_b^a E \cdot dr \quad (6.20)$$

धारे केश की अवस्था में, समीकरण (6.20) निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :-

$$\Phi_a - \Phi_b = -\int_b^a E \cdot dr \quad (6.21)$$

$$= \int_b^a \frac{\lambda}{2r \epsilon_0 \epsilon_r} \cdot dr = \frac{\lambda}{2r \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{dr}{r}$$

$$= \frac{\lambda}{2r \epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\therefore \Phi_b - \Phi_a = \frac{\lambda}{2r \epsilon_0 \epsilon_r} \ln\left(\frac{b}{a}\right) \quad (6.22)$$

सा कि बाहर वाले सिलिंडर को भूसंपर्कित कर दिया गया है इसलिए $\Phi_b = 0$

व इकाई लंबाई की धारिता C को निम्न प्रकार से लिखा जाता है:-

$$= \frac{\lambda}{a} = \frac{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(b/a)}$$

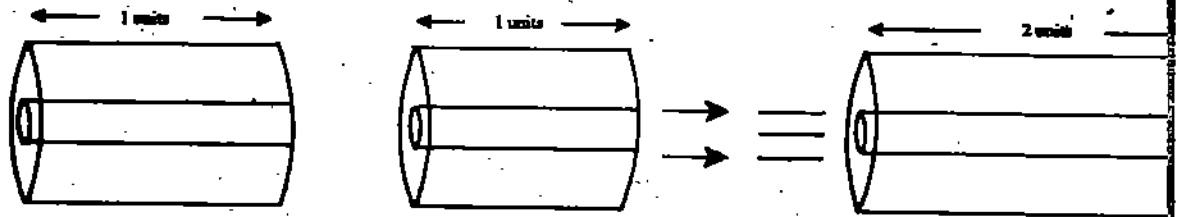
केत: सिलिंड्रिकल संघारित्र की इकाई लंबाई की धारिता के व्यंजक समीकरण (6.23) में दर्शाया गया है। इसमें हमने यह पाया कि धारिता अर्धव्यास के अनुपात पर निर्भर करती है न कि उसके निरपेक्ष मान पर।

बोध प्रश्न 6

दो सिलिंडरकार संधारित्रों की लंबाई बराबर है और उनके बीच में एक जैसा डाइइलेक्ट्रिक पदार्थ रखा है। उसमें से एक का भीतरी और बाहरी अर्धव्यास क्रमशः 8 और 10 सें.मी. है, और दूसरे का क्रमशः 4 और 5 सें.मी. है। उनकी धारिता का अनुपात निकालिए।

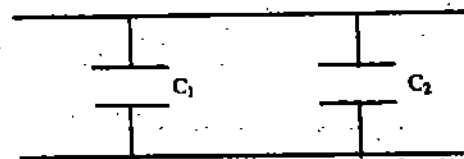
6.6 संधारित्रों का श्रेणी और पार्श्व क्रम में संयोजन

भाग 6.5 में, हमने एक सिलिंड्रिकल संधारित्र की इकाई लंबाई की धारिता निकालने का तरीका बतलाया है। हम इकाई लंबाई की धारिता को संधारित्र की लंबाई से गुणा करके उसकी कुल धारिता को निकालते हैं। अब हम एक सिलिंडरकार संधारित्र की धारिता जिसकी लंबाई 2 इकाई है तथा जो इकाई लंबाई के दो सिलिंडरों को सिरे से सिरा जोड़ कर इस तरह से बनाया गया है कि अंदर वाले सिलिंडरों के एक ओर तथा बाहर वाले सिलिंडरों को एक स्थान पर जोड़ दिया गया है। इसे सचित्र 6.8 में दर्शाया गया है।



चित्र 6.8. एक लम्बा सिलिंडरिकल संधारित्र जिसे कई इकाई सिलिंडरिकल वाले संधारित्रों से मिला कर बनाया गया है

हम इसे तुरंत प्राप्त करेंगे और इस प्रकार के संयोजन से संधारित्र पर आवेश दुगुना और उसकी धारिता भी दुगुनी हो जाती है, क्योंकि उसका विभवांतर अचर रहता है। दो संधारित्रों के श्रेणी क्रम के प्रतीकात्मक निरूपण चित्र 6.8. a में दर्शाया गया है।

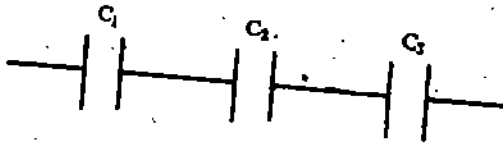


चित्र 6.8. a दो संधारित्रों का पार्श्व संबंधन।

इस संयोजन में हम यह प्राप्त करेंगे कि

- * दो प्लेटों के बीच में विभवांतर हमेशा एक ही रहना चाहिए।
- * प्रत्येक संधारित्र पर आवेश जमा हो जाता है (आवेश को जमा करने के लिए अधिक धरातल मिला जाता है)।

में एक तुल्य धारिता का संधारित्र प्राप्त होगा, जिस पर उसका तब तक बराबर आवेश होगा जब तक कि विभवांतर वैसा ही रहे जैसा कि संधारित्रों के संयोजन में दिखाया गया है। उस संधारित्र की धारिता को हम संयोजन की प्रभावकारी धारिता कहते हैं। इससे पहले कि हम कुछ और सोचें, हमें यह ध्यान रखना होगा कि संधारित्रों का संयोजन हम दूसरे तरीके से भी कर सकते हैं। यहां पर हम पहले संधारित्र की एक प्लेट को दूसरी संधारित्र प्लेट और दूसरे संधारित्र की एक प्लेट को तीसरे संधारित्र से जोड़ देते हैं। इस प्रकार संयोजन को हम संधारित्रों का श्रेणी क्रम में संयोजन कहते हैं। इस संयोजन को चित्र 6.9 में दर्शाया गया है।



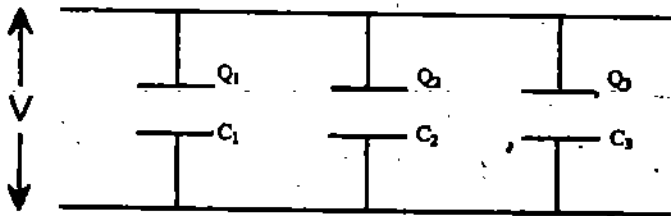
चित्र 6.9 संधारित्रों का श्रेणी क्रम में संयोजन।

दि एक विभव स्रोत को पहले संधारित्र की पहली प्लेट और आखिरी संधारित्र की दूसरी प्लेट के बीच श्रेणी क्रम में जोड़ दिया जाए, तो प्रत्येक संधारित्र पर बराबर मात्रा का स्वप्रेरित आवेश उत्पन्न होगा, बकि प्रत्येक संधारित्र पर विभवांतर इसकी धारिता पर निर्भर करेगा।

इसके लिए हमें गणितीय सूत्र प्राप्त होगा, जिससे कि हम संधारित्रों के पार्श्व और श्रेणी क्रम में संयोजनों के समतुल्य धारिता को निकाल सकते हैं।

6.1 समानांतर पार्श्व क्रम में संधारित्रों का संयोजन

चित्र 6.10 में तीन संधारित्रों के श्रेणी क्रम के संयोजन को दिखलाया गया है।



चित्र 6.10 संधारित्रों का समानांतर क्रम में संयोजन।

इस पर C_1 , C_2 और C_3 में प्रत्येक संधारित्र की धारिता है। उनके ऊपर Q_1 , Q_2 और Q_3 आवेश है। प्रत्येक संधारित्र की प्लेटों के बीच में विभवांतर Φ है। धारिता C को हम यहां संयोजन की प्रभावकारी धारिता कहते हैं। समानांतर क्रम के संयोजन से कुल आवेश को निम्न प्रकार से दर्शाया गया है।

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 \quad (6.24)$$

के इस समतुल्य संधारित्र की धारिता C के लिए Φ का मान एक ही है। इसलिए अब

$$C = \frac{Q}{\Phi} = \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{\Phi}$$

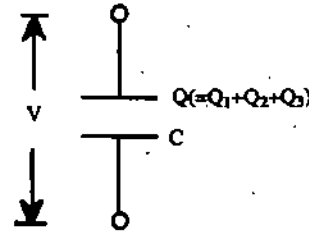
$$= \frac{Q_1}{\Phi} + \frac{Q_2}{\Phi} + \frac{Q_3}{\Phi}$$

$$= C_1 + C_2 + C_3$$

इस प्रकार संधारित्रों के समानांतर क्रम के संयोजन की प्रभावकारी धारिता, प्रत्येक संधारित्र की धारिता के जोड़ के बराबर होती है।

6.6.2 संधारित्रों का श्रेणी क्रम में संयोजन

चित्र 6.11 में तीन संधारित्रों का श्रेणी क्रम के संयोजन को दर्शाया गया है।



चित्र 6.11 संधारित्रों का श्रेणी क्रम में संयोजन और समतुल्य संधारित्र

संधारित्रों की धारिता C_1 , C_2 और C_3 है। विभवान्तर को संधारित्र में लगाने पर, पहली प्लेट पर आवेश $+Q$ आ जाता है और स्वप्रेरण के कारण संधारित्र की दूसरी प्लेट पर आवेश $-Q$ आ जाता है। प्रत्येक संधारित्र की प्लेटों के बीच विभवान्तर उसकी धारिता के व्युत्क्रमानुपाती होता है क्योंकि $C = \frac{Q}{\Phi}$ से हमें

$\Phi = \frac{Q}{C}$ प्राप्त होता है (चूंकि Q का मान स्थिर है)। इसलिए $Q \propto \frac{1}{C}$ इसलिए संधारित्रों के ऊपर

विभवान्तर Φ_1 , Φ_2 और Φ_3 है तथा $\Phi_1 \propto \frac{1}{C_1}$ और $\Phi_2 \propto \frac{1}{C_2}$ अब हम संधारित्रों की धारिता को

एक संधारित्र की धारिता में परावर्तित कर सकते हैं, जिसके ऊपर आवेश Q है जबकि उसके बीच में विभवान्तर $\Phi (= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3)$ है। इस C धारिता को हम संयोजन की प्रभावी धारिता कहते हैं।

अब हम $C = \frac{Q}{\Phi}$ या $\frac{1}{C} = \frac{\Phi}{Q}$ लिख सकते हैं। लेकिन $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3$ इसलिए

$$\frac{1}{C} = \frac{\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3}{Q} \quad (6.25)$$

i.e.
$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

इस प्रकार जब संधारित्रों को एक श्रेणी क्रम में जोड़ दिया जाता है, तब उसकी प्रभावी धारिता के मान का उल्टा, प्रत्येक संधारित्र के मान के उल्टे के योग के बराबर होता है।

पौथ प्रश्न 7

स्र 6.12 में दिए गए परिपथ की समतुल्य धारिता निकालिए और श्रेणी में लगे हुए प्रत्येक संधारित्र के च विभवान्तर निकालिए।

पौथ प्रश्न 8

न संधारित्रों की प्रभावशाली धारिता-निकालिए, जिन्हें इस प्रकार जोड़ा गया है कि संधारित्र C_1 और C_2 श्रेणी में हो और संधारित्र C_3 श्रेणी में लगे संधारित्र के समानांतर में जुड़ा हुआ हो।

7 डाइलेक्ट्रिकल माध्यम में ऊर्जा का संचयन

पने अनुच्छेद 6.3.1 में पढ़ा है कि एक समानांतर प्लेट वाले संधारित्र में जमा की गई ऊर्जा निम्नलिखित ञक से प्रदर्शित कि जा सकती है।

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

जानते हैं कि $C = \frac{\epsilon_0 A}{D}$ और $V = E \cdot d$ इसका मान उपरोक्त समीकरण में लिखने पर हम निम्नलिखित समीकरण प्राप्त करते हैं

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} E^2 \cdot d^2$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 (Ad) \cdot E^2$$

$$\text{और} \quad \frac{U}{v} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (Ad = v)$$

प्रति इकाई आयतन में ऊर्जा है।

संधारित्र की दो प्लेटों के बीच के स्थान को एक डाइलेक्ट्रिक जिसका सापेक्ष परावैद्युतांक ϵ_r है, भर या जाता है, तब इसकी प्रभावी धारिता को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$C_{die} = \frac{\epsilon_0 \epsilon_r A}{d}$$

डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के द्वारा जमा की गई ऊर्जा को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$U = \frac{1}{2} CV^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 \epsilon_p A}{d} (d \cdot E)^2$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 (A \cdot d)$$

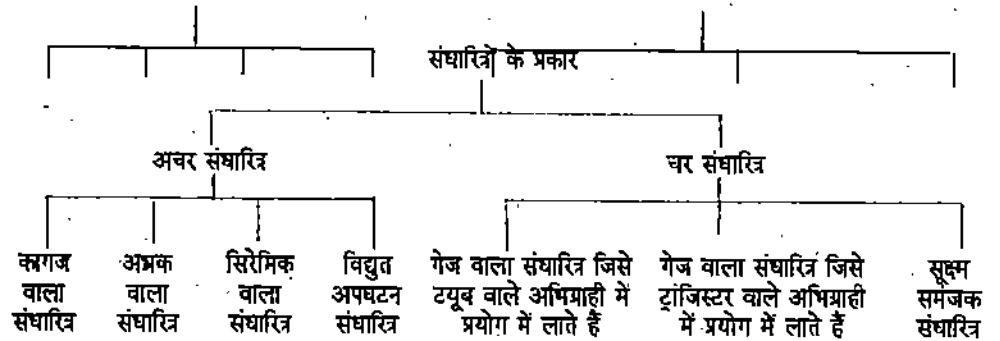
$$\frac{U}{V} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 (A \cdot d = V)$$

समानांतर प्लेट वाले संधारित्र में किसी दिशा में, इकाई आयतन में अवशोषित ऊर्जा $\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ है जो कि डाइलेक्ट्रिक माध्यम की मौजूदगी से $\frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2 = \frac{1}{2} E \cdot D$ जूल/m³ हो जाती है। यहां पर डाइलेक्ट्रिक में विद्युत विस्थापन है। यहां पर हमने रेखीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ को लिया है जहां पर E और D एक ही दिशा में है। इसलिए, दूसरे डाइलेक्ट्रिक पदार्थ भी है जिसमें और एक ही दिशा में है। इसलिए, दूसरे डाइलेक्ट्रिक पदार्थ भी है जिसमें E और D एक कही दिशा में नहीं होते। इस प्रकार से डाइलेक्ट्रिक माध्यम के द्वारा इकाई आयतन में जमा की गई ऊर्जा को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है:

$$\frac{1}{2} E \cdot D \text{ जूल/मी}^3 \quad (6.26)$$

6.8 प्रायोगिक संधारित्र

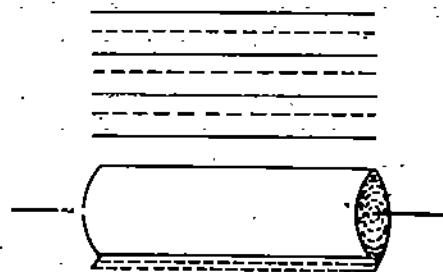
यहां पर हम कुछ संधारित्रों के बारे में पढ़ेंगे जिन्हें हमने आमतौर पर प्रयोग में लाते हैं। मौटे तौर पर हम संधारित्रों को दो समूहों में बाट सकते हैं अचर और चर संधारित्र। इनके आगे हम इनकी ज्योमितीय और प्रयोग में आने के आधार पर फिर से वर्गीकृत कर सकते हैं। नीचे संधारित्रों का वर्गीकरण दिया गया है।



अब हम प्रत्येक प्रकार के संधारित्र के बारे में एक-एक करके पढ़ेंगे

6.8.1 अचर संधारित्र

इनकी धारिता का मान अचर रहता है। मुख्यतौर से इस वर्ग में समानांतर प्लेट वाले संधारित्र होते हैं, लेकिन इन संहत किया गया होता है ताकि ये बहुत कम जगह लें। इनकी बनावट में, इन्हें धातु की दो पतली-प्लेटें जिनके धरातल पर अभ्रक से या पेपर जिसे ऊपर पेरॉफिन की एक जैसी परत का लेपन किया हो। अभ्रक या पेपर डाइलेक्ट्रिक की भांति कार्य करता है। इसे चित्र 6.13 में दर्शाया गया है।



चित्र 6.13 अचर संधारित्र।

संयोजन को मोड कर बेलन की तरह से संहत किया जाता है। आमतौर पर इन्हें समानांतर पुंज संचित या जाता है ताकि अधिक धारिता प्राप्त हो। यद्यपि पेरॉफिन-मौम वाला कागज का संधारित्र सस्ता होता है एक अच्छी मान की शक्ति को अवशोषित कर लेता है। इसलिए इस प्रकार के संधारित्रों को हम शक्ति धारा परिपथों रेडियो-स्रोत आदि में प्रयोग में लाते हैं।

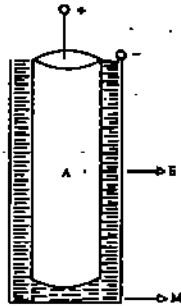
8.2 अभ्रक वाला संधारित्र

सभी आवृत्तियों पर कम ह्रास वाले संधारित्र हैं। अभ्रक पदार्थों से बहुत अधिक सापेक्ष परावैद्युतांक में ण में लाते हैं। उदाहरण के तौर पर टिफ्लोन का $\epsilon_r = 8$ है, लेकिन टाइटेनियम के मिलाने से इसके का मान 100 हो जाता है और बेरियम टाइटेनेट के डालने से इसका मान 5,000 हो जाता है। इस ण से इस प्रकार के प्रत्येक डाइलेक्ट्रिक को दो सतहों के ऊपर सिलवर की परत चिपका दी जाती है र इसे हम एक बहुत अधिक मान वाले संधारित्र के रूप में प्रयोग में ला सकते हैं। लेकिन इन डाइलेक्ट्रिस दूसरा सहूलियत यह है कि इनका ऋणात्मक तापमान गुणांक होता है। अभ्रक वाले संधारित्रों को मुख्यतौर ट्रांजिस्टर के परिपथों में प्रयोग में लाते हैं।

8.3 विद्युत अपघटन वाला संधारित्र

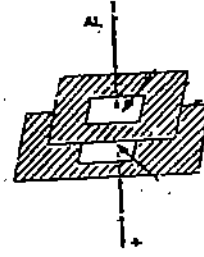
द्युत अपघटन वाला संधारित्र में एल्युमिनियम के दो इलेक्ट्रोड होते हैं, उसमें एक धनात्मक तथा दूसरा णात्मक होता है। धनात्मक प्लेट विद्युत अपघटन के नियम के अनुसार, एल्युमिनियम ऑक्साइड की एक ली परत का लेप कर दिया जाता है। इस प्रकार ये लेप का एक प्रकार से डाइलेक्ट्रिकों की भांति कार्य ता है। इन दो डाइलेक्ट्रिक को विद्युत अपघटक के द्वारा संपर्क में रखा जाता है, जो ग्लिसरीन और डियम का घोल या बोरैटस का पेस्ट है। उदाहरणार्थ अमोनियम बोरैटस। इलेक्ट्रोलाइटिक संधारित्र दो ण के होते हैं : एक गीले और दूसरा सूखे प्रकार के।

रे संधारित्रों में धनात्मक प्लेट A बेलन के आकार की होती है, जो सबसे अधिक घरातल के क्षेत्रफल प्रदर्शित करती है। इसे इलेक्ट्रोलाइट के भीतर डाल दिया जाता है जो धातु के बर्तन के अंदर मौजूद ण है। इसे चित्र 6.14 में दर्शाया गया है।



चित्र 6.14 गीले प्रकार का संधारित्र विद्युत अपघटित।

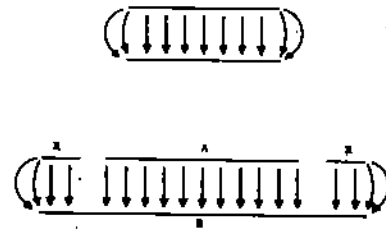
रे प्रकार के संधारित्रों में दोनों प्लेट एल्युमीनियम की लंबी पत्तियों के रूप में होती है। दोनों में से एक (A) पर एल्युमीनियम ऑक्साइड की परत विद्युत अपघटन के द्वारा जमाई जाती है। इसे दूसरी त (B) से विद्युत अपघटन से भीगी हुई रुई (C) द्वारा अलग रखा जाता है। इन पत्तियों को सिलिंडर आकार में लपेट दिया जाता है। एल्युमीनियम पर जमाई गई आक्साइड की परत, धारा के लिए एक णा में बहुत कम प्रतिबाधा देती है और दूसरी दिशा में बहुत अधिक प्रतिबाधा देती है। इसलिए एक द्युत अपघटन वाले संधारित्र को दिष्टधारा (D.C.) परिपथ में इस प्रकार जोड़ना चाहिए कि ऑक्साइड ती प्लेट का विभव दूसरी प्लेट की तुलना में सदैव धनात्मक हो। यह चित्र 6.15 में दिखाया गया है।



चित्र 6.15. सुखे विद्युत अपघटक वाला संधारित्र

6.8.4 परिवर्तनशील वायु संधारित्र/ गुम्फित संधारित्र

एक आम इस्तेमाल में आने वाला संधारित्र, जिसकी धारिता को लगातार परिवर्तित किया जा सकता है, जैसा कि रेडियो में विभिन्न स्टेशनों को पकड़ने के लिए इस्तेमाल होने वाला संधारित्र। इस संधारित्र के समरूप से, एक घुंडी को घुमाकर बदला जा सकता है। इसी प्रकार का किन्तु भिन्न आकार का संधारित्र चित्र 6.16 में दिखाया गया है।

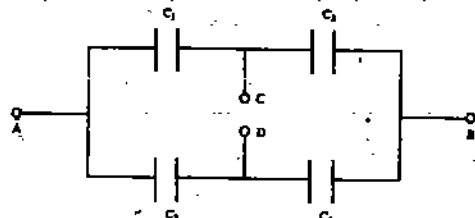


चित्र 6.16 : परिवर्तनशील वायु संधारित्र।

इस प्रकार के संधारित्र में अर्धगोलाकार ऐल्युमिनियम की प्लेटों के दो समूह होते हैं। एक समूह स्थिर होता है तथा प्लेटों के दूसरे समूह को एक घुंडी की मदद से घमाया जा सकता है। घुंडी को घुमाने पर प्लेटों का अस्थिर समूह, प्लेटों के स्थिर समूह के बीच की जगह के या दो अंदर चला जाता है या बाहर की तरफ आ जाता है। इस प्रकार प्लेटों के दोनों समूहों के अतिव्यापन के क्षेत्रफल को समरूपता से परिवर्तित किया जा सकता है। इससे संधारित्र की धारिता परिवर्तित हो जाती है। प्लेटों के बीच में स्थित हवा डायलेक्ट्रिक काम करती है। आम तौर पर इसमें दो संधारित्रों को एक ही घुंडी से जोड़ा जाता है। जब घुंडी को घुमाते हैं तो दोनों संधारित्रों की धारिता, एक साथ परिवर्तित होती है। यह संधारित्र ज्यादातर वायरलेस तथा इलेक्ट्रॉनिक परिपथों में इस्तेमाल किये जाते हैं। विभिन्न प्रकार के संधारित्रों के विभव परिसर की तुलना के लिए तालिका 6.1 को देखें।

6.8.5 रक्षक वलयी संधारित्र

भाग 6.2 में हमने समानांतर प्लेट वाले संधारित्र की धारिता का आकलन किया था। तब हम ने किनारों पर वैद्युत क्षेत्र की असमरूपता को नजरअंदाज कर दिया था। रक्षक वलयी संधारित्र के इस्तेमाल से कोर प्रभाव की समस्या को दूर किया जा सकता है। इस प्रकार के संधारित्र में, समानांतर प्लेट वाले संधारित्र की उपरी प्लेट के गिर्द एक वलयी का इस्तेमाल किया जाता है। यह चित्र 6.17 में दिखाया गया है।



चित्र 6.17 रक्षक वलयी संधारित्र।

तयरी R का भीतरी व्यास, संधारित्र की प्लेट A के व्यास से थोड़ा सा बड़ा होता है। संधारित्र की प्लेट A व्यास वलयी के बाहरी व्यास के बराबर होता है। इस प्रकार के समंजन में प्लेट A व B के लिए प्रभाव नहीं होता। रक्षक वलयी संधारित्र की धारिता का परिकलन करने के लिए, हम प्लेटों का क्षेत्रफल, प्लेट A के क्षेत्रफल तथा A और R के बीच के स्थान के क्षेत्रफल के आधे भाग के योग के बराबर लेते हैं। तालिका 6.1 में विभिन्न प्रकार के संधारित्रों के धारिता परिसर, अधिकतम विभव अनुमतांक व योग को दर्शाया गया है।

तालिका 6.1

गैललेक्टिक का प्रकार	धारिता परिसर	अधिकतम विभव अनुमतांक	टिप्पणी
कागज	250 Pf - 10 μ f	150 KV	सस्ता, उन परिपथों में इस्तेमाल होता है जहाँ हास ज्यादा महत्वपूर्ण नहीं होते
माइका	25 Pf - .25 μ f	2 KV	उत्तम गुण, कम धारिता वाले परिपथ में इस्तेमाल
सिरेमिक	0.5 Pf - .01 μ f	500 KV	उत्तम गुण हास परि शुद्धि, परिपथों में इस्तेमाल जहाँ लघु रूपण महत्वपूर्ण होती है।
ऐलोमीनियम ऑक्साइड	1 μ f - 100 μ f	600 KV	जहाँ बहुत अधिक धारिता की जरूरत हो वहाँ इस्तेमाल होता है।

9 सारांश

कोई भी युक्ति जिसमें आवेश संचित किया जा सकता है, उसे संधारित्र कहते हैं। संधारित्र की धारिता निम्नलिखित होती है,

$$C = \frac{Q}{\Phi} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

जहाँ सभी चिन्हों की राशियाँ अंकित करते हैं जिनके लिए उन्हें आम तौर पर इस्तेमाल किया जाता है।

संधारित्र में संचित ऊर्जा, निम्नलिखित होती है-

$$W = \frac{1}{2} C \Phi = \frac{Q^2}{2C} \text{ जूल}$$

यहाँ पर भी सभी चिन्ह वही राशियाँ अंकित करते हैं जिनके लिए उन्हें आम तौर पर इस्तेमाल किया जाता है।

यदि संधारित्र की दोनों प्लेटों के बीच l मोटाई वाला अचालक डाल दिया जाये, तो उसकी परिणामी धारिता निम्नलिखित होगी,

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{(d - l + l/\epsilon_r)}$$

वह अधिकतम विभव, जहाँ संधारित्र सुरक्षित रहता है यानि क्षतिग्रस्त नहीं होता उसे संधारित्र का अनुमतांक विभव कहते हैं।

सिलिंडराकार संधारित्र की, प्रति इकाई लंबाई, की धारिता निम्नलिखित होती है,

$$\frac{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(b/a)}$$

- * यदि दो संधारित्रों C_1 व C_2 को पार्श्व श्रेणी संबंधन में जोड़ा जाये तो उनकी परिणामी धारिता निम्नलिखित होगी,

$$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

- * यदि दो संधारित्र C_1 और C_2 को पार्श्व संबंधन में जोड़ा जाये तो उनकी परिणामी धारिता निम्नलिखित होगी

$$C = C_1 + C_2$$

- * डाइलेक्ट्रिक माध्यम में संचित ऊर्जा निम्नलिखित होगी,

$$\frac{1}{2} E \cdot D$$

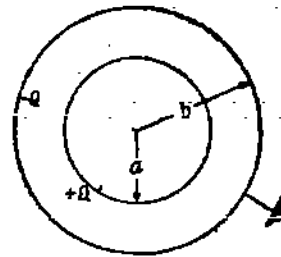
प्रायोगिक संधारित्र उनके विभिन्न अनुप्रयोगों के आधार पर कई प्रकार से बनाए जाते हैं। चालक पत्तियों और कागज को लपेट कर बनाये गए संधारित्र बहुत सस्ते बन जाते हैं, माइका और धातु की पत्तियाँ अधिक वैद्युत क्षेत्र तक काम कर सकती हैं, किन्तु वह संधारित्र महंगे पड़ते हैं। विद्युत अपघटन संधारित्र, जिनमें विद्युत अपघटन जमाई गई पतली ऑक्साइड की परत डाइलेक्ट्रिक का काम करती है, बहुत अधिक धारिता वाले होते हैं। सिरेमिक संधारित्र ट्रांजिस्टर परिपथों में इस्तेमाल होते हैं, जहाँ बहुत कम विभव की आवश्यकता होती है। साथ ही छोटा आकार व कम जगह घेरना बहुत ही वांछनीय होता है।

अंत के प्रश्न

1. एक संधारित्र में समान दूरी पर n प्लेटें हैं व एकांतर प्लेटों को आपस में जोड़ा गया है। प्रमाणित कीजिए की उसकी धारिता निम्नलिखित होगी,

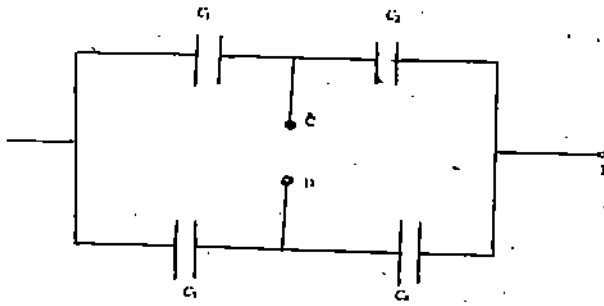
$$(n - 1) \epsilon_0 \epsilon_r A/D$$

2. एक 0.5 सें.मी. दूरी वाली समानांतर प्लेटों के बीच क्या विभवांतर होना चाहिए। जिससे कि एक प्रोटोन पर, वैद्युत क्षेत्र के प्रभाव से पड़ने वाली शक्ति, उस पर पड़ने वाली गुरुत्वीय बल के बराबर हो। प्रोटोन का भार, 1.67×10^{-27} kg किलो. होता है।
3. एक संधारित्र दो खाली समकेन्द्रित, धातु के गोलों से बना है। जिनके अर्धव्यास a व b है ($b > a$) बाहरी गोलों भू संपर्कित है, चित्र 6.18 देखें। इसकी धारिता का परिकलन कीजिए।



चित्र 6.18

4. चित्र 6.19 में दिखाये गए समायोजन के लिए, धारिताओं के उन मानों का परिकलन कीजिए जिनसे A व B सिरों के बीच में विभवांतर देने पर C व D सिरों के बीच में कोई विभवांतर न हो



चित्र 6.19

दो संघारित्रों, जिनमें से एक आवेशित है व दूसरा अनावेशित है, को पार्श्व-संबंधन में जोड़ा गया है। प्रमाणित करें कि अंतिम ऊर्जा प्रारंभिक ऊर्जा से कम होगी। ऊर्जा हानि के लिए एक सूत्र निकालिए जो कि संघारित्रों की प्रारंभिक धारिता व आवेश पर आधारित हो।

घ प्रश्नों के उत्तर

प्लेट के बीच का विभवांतर परिवर्तित नहीं होता। किन्तु प्लेटों के बीच का वैद्युत क्षेत्र है $\frac{V}{(d/2)} = \frac{2V}{d}$ वैद्युत क्षेत्र E से दोगुना वैद्युत क्षेत्र के दोगुना होने से प्रत्येक प्लेट का आवेश भी दुगना हो जायेगा। इसलिए $C = (Q/V)$ भी दुगना हो जायेगी। इस तरह जब हम प्लेटों के बीच की दूरी को आधा कर दें, तो संघारित्र की धारिता दुगुनी हो जाती है।

हम जानते हैं कि

$$C = \frac{Q}{V}$$

$$C = 1000 \mu\text{f}$$

$$= \frac{1000}{10^6} \text{ f} = 1000 \times 10^{-6} \text{ f}$$

$$= .001 \text{ f}$$

तथा $V = 24 \text{ V}$

$$Q = CV = .0001 \times 24 = .024$$

संघारित्र में संचित ऊर्जा होती है,

$$W = \frac{1}{2} C \Phi^2$$

के निम्न रूप में भी लिखा जा सकता है,

$$W = \frac{1}{2} C \Phi \times \Phi \quad (i)$$

हम जानते हैं कि

$$Q = C \Phi \quad (ii)$$

मीकरण (ii) का समीकरण (i) में इस्तेमाल करते हुए, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$W = \frac{1}{2} Q \Phi$$

त: परिणाम प्रमाणित है।

$$4. \quad C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$$

$$\text{यहाँ/यहां} \quad \epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$$

$$A = 4 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$d = 10^{-3} \text{ m}$$

इसलिए

$$C = \frac{8.85 \times 10^{-12} \times 4 \times 10^{-2}}{10^{-3}} = 3.54 \times 10^{-10} \text{ f}$$

जहां C वह आवेश है जो विभवांतर को एक इकाई से बढ़ाता है, या आवेश संचय की क्षमता यानि धारिता है।

5. हमें ज्ञात है कि

$$\epsilon_r = \frac{\text{डाइलेक्ट्रिक सहित धारिता}}{\text{मुक्त दिक् स्थान में धारिता}}$$

यहां $\epsilon_r = 3$ इसलिए संधारित्र की धारिता तीन गुनी हो जाएगी। यदि उसके प्लेटों के बीच की संपूर्ण जगह को डाइलेक्ट्रिक ($\epsilon_r = 3$) से भर दिया जाये।

अब एक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ संधारित्र में डाला जाता है, जिसकी मोटाई t है। अब संधारित्र की धारिता होगी।

$$C_{\text{हवा}} = \frac{\epsilon_0 A}{d} \quad C_{\text{डाइलेक्ट्रिक}} = \frac{\epsilon_0 A}{(d-t) + t/\epsilon_r}$$

$$\frac{C_{\text{डाइलेक्ट्रिक}}}{C_{\text{हवा}}} = \frac{\epsilon_0 A / [(d-t) + t/\epsilon_r] \times d}{\epsilon_0 A}$$

$$= \frac{d}{(d-t) + t/\epsilon_r}$$

$$\text{यहां } t = \frac{3}{4} d \quad \text{तथा } \epsilon_r = 3$$

$$\text{इसलिए } \frac{C_{\text{डाइलेक्ट्रिक}}}{C_{\text{हवा}}} = \frac{d}{d/2} = 2$$

यानि धारिता दो गुनी हो जाएगी।

$$6. \quad C_1 = \frac{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(10/8)}$$

$$\text{व } C_2 = \frac{2 \pi \epsilon_0 \epsilon_r}{\ln(5/4)}$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\ln(5/4)}{\ln(10/8)} = 1$$

$$\text{या } C_1 = C_2$$

7. जब संधारित्र श्रेणी संबंधन में जोड़े गए हों, तो तुल्य धारिता होगी

$$\frac{1}{C_T} = \frac{1}{.05} + \frac{1}{.02} + \frac{1}{.10} + \frac{1}{.05}$$

$$C_T = .01 \mu f$$

$$Q = C_T V$$

$$= 220 \times .01 \times 10^{-6} = 2.2 \times 10^{-6}$$

$$V_1 = V_4 = \frac{Q}{C_1} = \frac{2.2 \times 10^{-6}}{.05 \times 10^{-6}} = 44 V$$

$$V_2 = \frac{Q}{C_2} = \frac{2.2 \times 10^{-6}}{.02 \times 10^{-6}} = 110 V$$

$$V_3 = \frac{Q}{C_3} = \frac{2.2 \times 10^{-6}}{.01 \times 10^{-6}} = 22 V$$

चित्र 6.20 में समायोजन दिखाया गया है। C_1 और C_2 की तुल्य धारिता को C_4 मान लें। संधारित्रों के श्रेणी संबंधन सूत्र का इस्तेमाल करते हुए

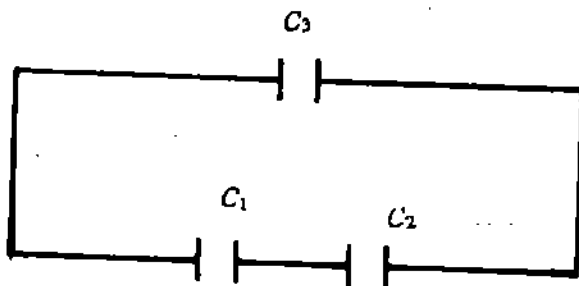
$$\frac{1}{C_4} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

यानि
$$C_4 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

धारिता C_4 और C_3 का योग, संयोजन की कुल धारिता के बराबर होगा। यानि,

$$C = C_4 + C_3$$

या
$$C = C_3 + \frac{C_1 C_2}{(C_1 + C_2)}$$



चित्र 6.20

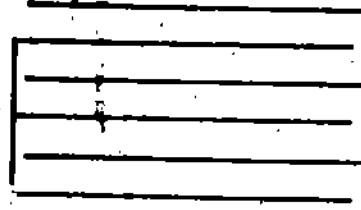
n में प्रश्नों के उत्तर

जैसा कि चित्र 6.21 से ज्ञात होता है, n प्लेटों से हमें $(n - 1)$ पार्श्व संबंधन में जुड़े हुए संधारित्र प्राप्त होते हैं। $(n - 1)$ समान धारिता वाले संधारित्रों की तुल्य धारिता होगा

$$= \text{प्रत्येक धारिता का योग}$$

$$= (n - 1) \text{ प्रत्येक इकाई की धारिता}$$

$$= \frac{(n - 1) \epsilon_r \epsilon_0 A}{d}$$



चित्र 6.21

उदाहरण के लिए पहली तीन प्लेटों A, B व C से हमें दो संघारित्र प्राप्त होते हैं AB व CB आदि।

2. आवश्यक विभव को Φ के बराबर मान लें। तब $E = \frac{\Phi}{d}$

$$\frac{\Phi}{5 \times 10^{-3}} \text{ वोल्ट प्रति मी.}$$

प्रोटोन पर स्थित विद्युत बल

$$= qE$$

$$= 2 \times 10^2 \Phi q$$

$$= 2 \times 10^2 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \Phi \text{ न्यूटन}$$

$$\text{गुरुत्वाकर्षण बल} = 1.67 \times 10^{-27} \times 9.8 \text{ न्यूटन}$$

दोनों की तुलना करते हुए हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\Phi = \frac{1.67 \times 10^{-27} \times 9.8}{2 \times 10^{-2} \times 1.6 \times 10^{-19}}$$

$$\Phi = 5 \times 10^{-10}$$

3. यदि भीतरी a अर्धव्यास वाले गोले पर q आवेश दिया जाए तो बाहरी गोले के भीतरी पार्श्व पर बराबर किन्तु विपरीत चिन्ह का आवेश प्रकट हो जाएगा। वैद्युत क्षेत्र दोनों समकेन्द्रित गोले के बीच की जगह में सीमित हो जाएगा। E का परिकलन करने के लिए एक गॉशियन सतह पर ध्यान दें। समस्या की सममिति से यह संकेत मिलता है कि गॉशियन सतह, r अर्धव्यास वाला समकेन्द्रित गोले ही होना चाहिए। वैद्युत क्षेत्र E , इस सतह के लंब पर होगा, इसलिए E का फलक निम्नलिखित होगा,

$$4 \pi r^2 E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

शून्य विभव वाले बाहरी गोले के सापेक्ष भीतरी गोले का विभव निम्नलिखित होगा,

$$\Phi_a - \Phi_b = - \int_a^b \frac{q dr}{4 \pi r^2 \epsilon_0}$$

$$= \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \right]_b^a$$

$$\Phi_a = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \text{ क्योंकि}$$

$$\Phi_b = 0$$

अतः धारिता निम्नलिखित होगी,

$$C = \frac{q}{\Phi} = \frac{4 \pi \epsilon_0 b a}{(b - a)}$$

1. बिंदु C से जुड़ी हुई दोनों प्लेटों का विभव बराबर है। अतः यदि इनमें से एक का आवेश q_1 दिया जाए तो दूसरी में स्वाभाविकतः ही बराबर किन्तु विपरीत चिन्ह का आवेश प्रकट हो जाएगा। मान लो कि जब A और B के बीच विभवांतर दिया जाता है तो C_1 पर आवेश q_1 प्रकट हो जाता है तथा C_2 पर आवेश q_2 तब विभिन्न संघारित्रों की प्लेटों के बीच का विभवांतर (P.d) निम्नलिखित होगा ७३ -

$$\frac{q_1}{C_1}, \frac{q_2}{C_2}, \frac{q_2}{C_3} \text{ and } \frac{q_2}{C_4}$$

अब $\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1}{C_2} = \frac{q_2}{C_3} + \frac{q_2}{C_4}$, AB के बीच का विभवांतर

यदि C व D के बीच का विभवांतर शून्य हो, तब

$$\frac{q_1}{C_2} = \frac{q_2}{C_4} \quad \text{तथा} \quad \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_3}$$

इसके विलोपन से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है-

$$\frac{C_2}{C_4} = \frac{C_1}{C_3}$$

यह C व D के बीच शून्य विभवांतर होने के लिए आवश्यक स्थिति है।

मान लो कि C_1 धारिता वाले संघारित्र पर आरंभिक आवेश q है। जब इस संघारित्र को एक C_2 धारिता वाले अनावेशित संघारित्र से जोड़ दिया जाता है तब आवेश q दोनों में इस प्रकार बंट जाता है कि उनके विभव बराबर रहें क्योंकि दोनों का पारस्परिक संबंधन से जोड़ा गया है। मान लो कि आवेश q , आवेशित संघारित्र से अनावेशित संघारित्र, में आ जाता है। इसके परिणामस्वरूप आवेशित संघारित्र में बाकि आवेश रह जाता है। क्योंकि दोनों संघारित्रों के विभव $q - q_2$ बराबर हैं, अतः आवेशित संघारित्र की आरंभिक ऊर्जा आवेश बंटने से पहले निम्नलिखित होगी

$$\frac{q - q_2}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

खर में ऊर्जा को निम्न समीकरण से प्रदर्शित किया जा सकता है

$$E_f = \frac{1}{2} \frac{(q - q_2)}{C_1} + \frac{1}{2} \frac{q_2}{C_2}$$

दोनों संघारित्रों की E ऊर्जा होगी,

$$E_{\text{initial}} = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_1} = E_i$$

उपरोक्त समीकरण से इसमें प्रतिस्थापित करके हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \frac{C_1 q^2}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{1}{2} \frac{C_2 q^2}{(C_1 + C_2)^2} \\ &= \frac{q^2}{2(C_1 + C_2)} \end{aligned}$$

अतः ऊर्जा का हास

$$= \frac{q^2}{2} \cdot \frac{1}{C_1} - \frac{1}{C_1 + C_2} = \frac{q^2 C_2}{2C_1(C_1 + C_2)}$$

इकाई 7: डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के सूक्ष्म गुणधर्म

- 7.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 7.2 एकसमान विद्युत क्षेत्र में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का सूक्ष्म चित्रण- समीक्षा
स्थानीय क्षेत्र की परिभाषा
- 7.3 डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में स्थित गुहाओं के स्थानीय क्षेत्र का परिकलन
- 7.4 क्लॉसियस मॉसोटी समीकरण
गैस में ध्रुवण
ध्रुवणता और सापेक्ष परावैद्युतांक में संबंध
- 7.5 ध्रुवणता और अपवर्तनांक में संबंध
- 7.6 परिवर्तनशील अथवा प्रत्यावर्ती क्षेत्रों में डाइलेक्ट्रिक का स्वभाव
- 7.7 व्यावहारिक जीवन में डाइलेक्ट्रिक पदार्थों का स्थान
- 7.8 सारांश
- 7.9 अंत में कुछ प्रश्न
- 7.10 हल/उत्तर

7.1 प्रस्तावना

आप को याद होगा कि इकाई - 5 में हम विद्युत क्षेत्र में स्थित डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के असूक्ष्म औसत व्यवहार के विषय में पढ़ चुके हैं। हमें यह ज्ञात हुआ है कि इस स्थिति में डाइलेक्ट्रिक के अंदर का क्षेत्र बदल जाता है। यही कारण है कि समदैशिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ पर जब विद्युत क्षेत्र लगाया जाता है तब उसकी सतह पर आवेश प्रकट हो जाता है। इकाई - 6 में आपने डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के असूक्ष्म व्यवहार का प्रयोग एक ऐसे संधारित्र की धारिता में होने वाली वृद्धि को ज्ञात करने के लिए किया था जिसकी दोनो प्लेटों के बीच में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ स्थित हो।

इस इकाई में, हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के सूक्ष्म चित्रण की व्याख्या करते हुए स्थानीय क्षेत्र (E_{loc}) और औसत असूक्ष्म क्षेत्र (E_a) को परिभाषित करेंगे। साथ ही स्थानीय क्षेत्र तथा औसत क्षेत्र के बीच के संबंध को भी निकालेंगे। हम ध्रुवित तथा अध्रुवित अणुओं पर ध्रुवता के प्रभाव के विषय में पढ़ेंगे तथा इन अणुओं के ध्रुवण से संबंधित क्लॉसियस मॉसोटी समीकरण को परिकलित करेंगे। इसके पश्चात् हम गैस के लिए क्लॉसियस मॉसोटी समीकरण को परिकलित करेंगे।

हम ध्रुवणता तथा सापेक्ष परावैद्युतांक के बीच के संबंध के विषय में भी पढ़ेंगे। इसके पश्चात् हम ध्रुवणता तथा परावर्तनांक के बीच के संबंध को भी निकाल करेंगे। आप जानते हैं कि प्रत्यावर्ती क्षेत्र में संधारित्रों का प्रयोग किया जाता है। इसलिए हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ पर प्रत्यावर्ती क्षेत्र से पड़ने वाले प्रभाव के विषय में भी पढ़ेंगे। इस इकाई के अंतिम भाग में हम व्यावहारिक जीवन में डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के स्थान के विषय में पढ़ेंगे।

ले खंड में हम गतिशील आवेश से उत्पन्न होने वाली वैद्युत धारा के विषय में पढ़ेंगे।

इस

इकाई का अध्ययन करने के बाद आप :

स्थानीय क्षेत्र को परिभाषित कर सकेंगे तथा इसका ध्रुवणता से संबंध स्थापित कर सकेंगे।

डाइलेक्ट्रिक के अंदर के औसत विद्युत क्षेत्र का आकलन कर सकेंगे तथा उसका ध्रुवणता से संबंध स्थापित कर सकेंगे।

डाइलेक्ट्रिक के अंदर के औसत विद्युत क्षेत्र, स्थानीय क्षेत्र तथा सूक्ष्म क्षेत्र के बीच में संबंध स्थापित कर सकेंगे।

गैस तथा द्रव के लिए क्लॉसियस - मोसोटी समीकरण को लिख सकेंगे।

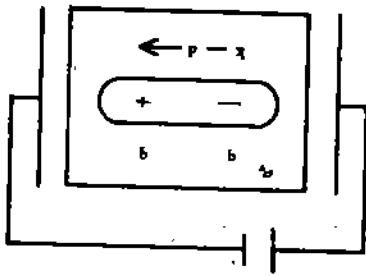
अपवर्तनांक तथा ध्रुवणता के बीच में संबंध स्थापित कर सकेंगे।

आम जीवन में डाइलेक्ट्रिक के स्थान पर चर्चा कर सकेंगे।

समावेशित विद्युत क्षेत्र में रखे डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का

सूक्ष्म चित्रण - समीक्षा

ई 5 में आप ने डाइलेक्ट्रिक पदार्थों के औसत स्वभाव के विषय में पढ़ा है। इस भाग में हम एक विशेषित विद्युत क्षेत्र में रखे डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के सूक्ष्म चित्रण के बारे में पढ़ेंगे। आइए हम एक समावेशित त क्षेत्र में रखे डाइलेक्ट्रिक पदार्थ पर विचार करें जैसा कि चित्र 7.1 में दिखाया गया है।



चित्र 7.1 डाइलेक्ट्रिक माध्यम में एक अणु

विद्युत क्षेत्र में, डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के इलेक्ट्रॉन तथा अणुओं के न्यूक्लियस विपरीत दिशाओं में शक्ति प्राप्त करते हैं। हमें यह विदित है कि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में इलेक्ट्रॉन उस स्वतंत्रता से नहीं चल सकते कि वे चालक में चल सकते हैं। अतः प्रत्येक अणु एक छोटे द्विध्रुव में परिवर्तित हो जाता है, जिसमें ऋण तथा ऋणात्मक आवेशों के केन्द्रों के बीच कुछ दूरी होती है। आवेश केन्द्रों के बीच की दूरी को आवेशों को q तथा अणु या परमाणु से संलग्न क्षेत्र की दिशा में द्विध्रुव आघूर्ण को $\langle \rangle$ मानते हुए हम समीकरण लिख सकते हैं,

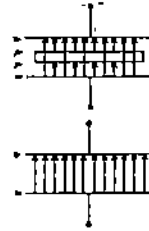
$$P = qa$$

करण 7.1 विद्युत क्षेत्र द्वारा अणु/परमाणु में प्रेरित होने वाले द्विध्रुव आघूर्ण को दर्शाता है। अतः हम प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण कहते हैं। यदि किसी पदार्थ के आयतन V में n ऐसे द्विध्रुव हों तो उसके ध्रुवणता P को हम (डाइलेक्ट्रिक) द्विध्रुव आघूर्ण प्रति इकाई आयतन के रूप में परिभाषित कर सकते हैं,

$$P = \frac{n P v}{V}$$

डाइलेक्ट्रिक के अंदर के आवेश एक दूसरे का निराकरण कर देते हैं। एक अणु/परमाणु का घनात्म आवेश अपने पड़ोसी अणु/परमाणु के ऋणात्मक आवेश का निराकरण कर देता है। अतः पदार्थ के अंदर विद्युत क्षेत्र से कोई आवेश घनत्व नहीं उत्पन्न होता बल्कि सिर्फ द्विध्रुव आधूर्ण घनत्व ही उत्पन्न होता है क्योंकि, पदार्थ की सतहों पर यह पूरी तरह से नहीं हो पाता, इसलिए क्षेत्र के लंबवत्, दोनों सतहों ध्रुवणता आवेश घनत्व प्राप्त होता है। जिनकी दिशा एक दूसरे के विपरीत होती है। ध्रुवणता आवेशों प्रकट होने का क्या परिणाम होता है ?

इसका परिणाम यह होता है कि डाइलेक्ट्रिक के अंदर के विद्युत क्षेत्र का मान, उस विद्युत क्षेत्र के मान कम होता है जो ध्रुवणता उत्पन्न कर रहा है। ध्रुवणता आवेशों से विपरीत दिशा में एक विद्युत क्षेत्र विरोध करता है। यह चित्र 7.2 में दिखाया गया है।

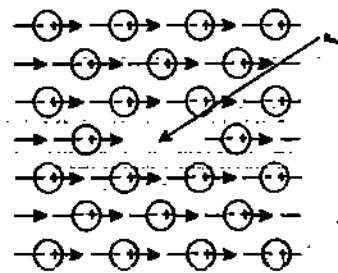


चित्र 7.2 डाइलेक्ट्रिक के अंदर का विद्युत क्षेत्र।

अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि डाइलेक्ट्रिक के अंदर का औसत विद्युत क्षेत्र का मान ध्रुवणता उत्पन्न करने वाले विद्युत क्षेत्र से कम होता है। जबकि, औसत क्षेत्र, उस स्थानीय क्षेत्र का संतोषजनक नाप न होता, जो प्रत्येक परमाणु का ध्रुवण करने का उत्तरदायी होता है। हम अणु या परमाणु के किसी भी स्थान पर उपस्थित विद्युत क्षेत्र से निर्देशित करते हैं। अगले भाग में हम डाइलेक्ट्रिक के अंदर, स्थानीय क्षेत्र का आकलन करने की विधि सीखेंगे।

7.2.1 स्थानीय क्षेत्र की परिभाषा

इस भाग में हम डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के अंदर स्थानीय क्षेत्र (E_{loc}) को परिभाषित करेंगे। यह इकाई घनात्म आवेश का क्षेत्र है, जिसे उस स्थान या परमाणु को इस प्रकार हटा दिया गया है जिससे दूसरे आवेशों से कोई प्रभाव न पड़े। चित्र 7.3 में एक समध्रुवित माध्यम को दर्शाया गया है, जिसमें एक स्थान से एक अणु/परमाणु को हटा दिया है जबकि दूसरे सभी आवेश अपने अपने स्थान पर स्थित हैं।



चित्र 7.3 एक समध्रुवित माध्यम का स्थल।

विेशों के बीच की दूरी का मान स्थानीय क्षेत्र पर निर्भर करता है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते कि प्रेरित द्विध्रुव आघूर्ण, p , का मान स्थानीय क्षेत्र E_{loc} के समानुपाती होता है। इस प्रकार हम म्नलिखित को प्राप्त करते हैं।

$$p = \alpha E_{loc}$$

हां पर α समानुपाती स्थिरांक है और इसे आणविक/परमाणविक ध्रुवणता कहते हैं तथा E_{loc} स्थानीय क्षेत्र है। समीकरण 7.3 का प्रयोग करके हम E_{loc} के मान को ज्ञात कर सकते हैं।

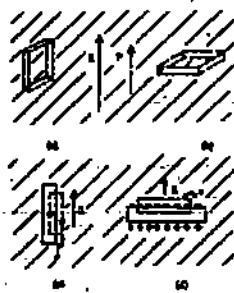
7.3 डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में स्थित गुहाओं के स्थानीय क्षेत्र का परिकलन

घन पदार्थों, जैसे द्रव्य और बहुत से ठोस में घुवीकरण होने से पदार्थ का भीतरी क्षेत्र बदल जाता है। लेक अणु/परमाणु द्वारा महसूस किया गया क्षेत्र, उसके सबसे नजदीकी अणुओं के घुवीकरण पर निर्भर करता है। क्षेत्र का सही मान बिंदु से बिंदु पर बहुत तेजी से बदलता रहता है। न्यूक्लियस के बहुत नजदीक का मान सबसे अधिक होता है और इसके सापेक्ष अणु/परमाणु के बीच में कम होता है। उस स्थान पर हां अणु बहुत अधिक संख्या में हों। हां उनके विद्युत क्षेत्र का औसत लेने पर, हम उसका औसत विद्युत क्षेत्र निकाल सकते हैं।

बोध प्रश्न 1

यह दर्शाए कि एक हवा भरी हुई गोलाकार गुहा के केन्द्र पर क्षेत्र शून्य होता है।

लेक अणु/परमाणु के ऊपर लगने वाले क्षेत्र को स्थानीय क्षेत्र कह सकते हैं, जो कि औसत क्षेत्र से अलग ता है। स्थानीय क्षेत्र वह क्षेत्र है, जिसके कारण अणु में घुवीकरण होता है। औसत क्षेत्र को हम $\frac{\Phi}{d}$ से दर्शा सकते हैं। जहां पर Φ डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में उन दो बिंदुओं के बीच में विभवान्तर है, जो क दूसरे से d दूरी पर स्थित है। वैसे ही जैसा कि समानांतर प्लेट वाले संधारित्र में विद्युत क्षेत्र को काला था। स्थानीय क्षेत्र का आकलन करना इतना सरल नहीं है। सघन माध्यम में स्थानीय क्षेत्र को निकालने लिए हम तीन गुहिकाओं को लेते हैं जो एकसमान रूप से घुवित हैं चित्र 7.4 को देखिए।



चित्र 7.4 डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के खांचा कर्तन के अंदर का क्षेत्र उसकी आकृति और खांचे के अभिविन्यास पर निर्भर करता है। औसत क्षेत्र को E से प्रदर्शित किया गया है।

विद्युत क्षेत्र E औसत और P की दिशा को चित्र 7.4 में दर्शाया गया है। मान लीजिए कि हम एक आयताकार खांचा ABCDEFGH लेते हैं, जिसे कि चित्र 7.4 में दिखलाया गया है। क्षेत्र E और ध्रुवीकरण P सतह ABCD व EFGH के समानांतर है। खांचे के अंदर के विद्युत क्षेत्र का मूल्यांकन हम E की और वक्र C का रेखीय समाकल निकाल कर कर सकते हैं, इसे चित्र 7.4. b में दिखलाया गया है। क्योंकि $\int E \cdot dl$ का मान, एक बंद वक्र C के लिए शून्य होगा, इसलिए खांचे के अंदर और बाहर के विद्युत क्षेत्र बराबर होंगे। इसलिए एक विद्युत क्षेत्र के समानांतर पतले खांचे कर्तन के औसत क्षेत्र के बराबर होगा।

अब आप एक पतले आयताकार खांचे को लीजिए, जिसकी सतह औसत क्षेत्र के लंबवत् दिशा में है जैसा कि चित्र 7.4. c में $A'B'C'D'E'F'G'H'$ में दिखलाया गया है। इस खांचे के अंदर के क्षेत्र को निकालने के लिए हम सतह S पर, गॉस के फ्लक्स के नियम का प्रयोग करेंगे, जिसका एक फलक खांचे के बाहर है और दूसरा फलक खांचे के अंदर है। चित्र 7.4 को देखिये। उन फलकों पर जो विद्युत क्षेत्र E के समानांतर है फलक्स शून्य होगा। E के फलक्स की जगह हम विद्युत विस्थापन D के फलक्स को लेते हैं। माना कि खांचे के अंदर का विद्युत क्षेत्र E_{loc} है, तब खांचे के अंदर का विद्युत विस्थापन D_1 , $\epsilon_0 E_{loc}$ के बराबर होगा। खांचे के बाहर सदिश D का मान $\epsilon_0 E + P$ होगा। अब बंद सतह S से D का फलक्स शून्य होगा गॉसियन सतह पर कोई भी मुक्त आवेश नहीं है। हमें निम्नलिखित प्राप्त होगा,

$$\epsilon_0 E_{loc} = \epsilon_0 E + P$$

$$E_{loc} = \frac{E + P}{\epsilon_0}$$

इस दिशा में खांचे के अंदर का क्षेत्र खांचे के बाहर के क्षेत्र से अलग होगा, क्योंकि सतह $\frac{P}{\epsilon_0}$ अलग होगा, क्योंकि सतह ABCD पर ध्रुवीय आवेश प्रकट होंगे, जैसा कि चित्र 7.4 में दिखलाया गया है। दूसरे प्रकार का संभव खांचा वृत्तीय छिद्र है, जैसे कि अणु तथा तरल और ठोस पदार्थ में मिलते हैं। हम यह मान सकते हैं कि एक अणु औसत रूप से दूसरे अणुओं से इस प्रकार घिरा हुआ है कि उसका एक गोलीय छेद से अच्छा सन्निकटन हो सकता है। एक वृत्तीय छेद में स्थानीय क्षेत्र क्या होगा ? मान लीजिए कि समान ध्रुवित पदार्थ में ध्रुवण का संतुलन होने पर हम एक छोटा सा वृत्तीय छेद काट देते हैं। यदि हम इस छेद के अंदर केन्द्र बिंदु के विद्युत क्षेत्र को E_{loc} कहें तथा एक समान ध्रुवित वृत्तीय डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के वृत्तीय प्लग के केन्द्र पर जो क्षेत्र है, उसे E_p कहें, तब E_{loc} और E_p को जमा करने पर हमें डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का भीतरी प्राप्त होगा। चित्र 7.5 को देखिए। अध्यारोपण के नियम के अनुसार यह ठीक है अर्थात्

$$E = E_{loc} + E_p$$

और अपेक्षित क्षेत्र होगा।

$$E_{loc} = E - E_p$$

E_p एकसमान ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक के द्वारा उत्पन्न क्षेत्र को इस प्रकार से निकाला जा सकता है। क्षेत्र E_p , परिवर्द्ध आवेशों के घनत्व $\sigma = \rho n = P \cos \theta$ के कारण उत्पन्न होता है। इसलिए क्षेत्र dS पर आवेशों की वजह से जो विद्युत क्षेत्र है, उसे निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है:

$$dE_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\cos \theta) dS}{r^2} \hat{r}$$

जहां पर r सतह से केन्द्र की ओर एक इकाई सदिश है जहां पर हमें विद्युत क्षेत्र को निकालना है। dE_p को P के समानांतर और लम्बवत् दिशा के घटकों में विभाजित करने वाले, सममिति की दिशा से यह स्पष्ट है कि केवल वही घटक जो कि P की दिशा के समानांतर है, कुल क्षेत्र E_p में सहयोग देंगे। इसलिए

$$E_P = \int dE_p \cdot \cos \theta$$

ध्यान देने की बात है कि E_p की दिशा, P के समानांतर है, और हमें प्राप्त होगा:

$$E_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} P \int \frac{\cos^2 \theta}{r^2} dS$$

अब $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\Phi$

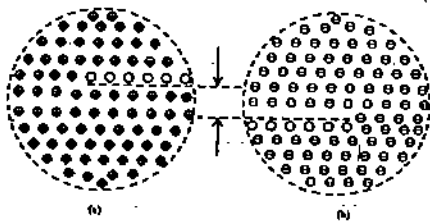
र θ की सीमा 0 से π तक है तथा Φ की सीमा 0 से 2π तक है। इसलिए

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \cdot \sin \theta d\theta \\ &= \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\Phi \left| -\frac{\cos^3 \theta}{3} \right|_0^\pi \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{P}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} d\Phi \\ &= \frac{P}{3\epsilon_0} \end{aligned}$$

वृत्तीय छेद में स्थित अणु के ऊपर लगा हुआ विद्युत क्षेत्र निम्नलिखित होगा,

$$E_{loc} = E - \frac{P}{3\epsilon_0}$$

डाइलेक्ट्रिक वृत् के अंदर, किसी यादृच्छिक बिंदु r पर विद्युत क्षेत्र E_p को निकालने के लिए, हम मान लेते हैं कि एक घुवित वृत् को घनात्मक और ऋणात्मक आवेश वाले गोलों के अध्यारोपण से त होता है, जो अपने स्थान से थोड़े से हिला दिए गये हैं। इसे चित्र 7.6 में दर्शाया गया है। आगे यह ध्यान देने की बात है कि बिंदु r पर, विद्युत क्षेत्र का मान पूर्णतः उन आवेशों से निकाला जा सकता जो कि अर्धव्यास r के गोले के अंदर है।



चित्र 7.6

त्मक आवेश के गोले को हम एक बिंदु आवेश के रूप में मान सकते हैं जो कि उसके केन्द्र में है। आवेश घनत्व है, तब घनात्मक आवेश गोला केन्द्र पर आवेश $\frac{4\pi}{3} r^3 \rho$ के बराबर माना जा सकता इसी प्रकार से ऋणात्मक आवेश वाला गोला इसके केन्द्र पर एक बिंदु आवेश के बराबर है। इस बिंदु वेश का परिमाण $\frac{4\pi}{3} r^3 \rho$ के बराबर है। यदि किसी अणु में घनात्मक और ऋणात्मक आवेशों के बीच

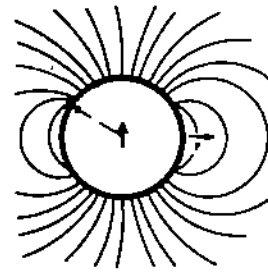
की दूरी d हो, तब एकसमान ध्रुवित डाइलेक्ट्रिक एक द्विध्रुव के बराबर है जिसका आघूर्ण $\frac{4\pi}{3} r^3 \rho d$ है। यदि एक इकाई आयतन में n द्विध्रुव हों, प्रत्येक ध्रुव के ऊपर आवेश q हों, तब $\sigma_p = q \cdot n$ ऊपर लिए गए गोलों में इकाई आयतन में घनात्मक या ऋणात्मक आवेशों की संख्या भी होगी। गोले के द्विध्रुव आघूर्ण को हम नीचे दिए गए तरीके से लिख सकते हैं।

$$\frac{4\pi}{3} r^3 n \cdot q a = \frac{4\pi}{3} r^3 P$$

ध्रुवित गोला, द्विध्रुव आघूर्ण $\frac{4\pi}{3} r^3 P$ के बराबर है, जिसे उसके केन्द्र पर रखा गया है। इस द्विध्रुव के कारण बिंदु r , जो कि सतह पर है, के विभव को इस प्रकार से लिखा जा सकता है:

$$\frac{4\pi}{3} \frac{r^3 P \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{P \cos \theta r}{3 \epsilon_0}$$

जहां r , r और θ को चित्र 7.7 में दिखलाया गया है।



चित्र 7.7 एक समान ध्रुवित वृत्त के बाहर का क्षेत्र।

ध्रुवण E की दिशा में है, और यदि हम इसको z की दिशा में मानें इसके मूल बिंदु को केन्द्र पर मानें तब T पर विभव को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$\Phi = \frac{Pz}{3\epsilon_0}$$

ऊपर का समीकरण यह प्रदर्शित करता है कि किसी भी बिंदु पर विभव केवल z निर्देशांक पर निर्भर करता है इसलिए विद्युत क्षेत्र दिशा में है और इसको हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं इससे यह पता चलता है कि गोलीय डाइलेक्ट्रिक के अंदर विद्युत क्षेत्र एक समान होता है और ध्रुवित सदिश की दिशा में होता है। इस प्रकार वृत्तीय छेद में एक अणु के ऊपर लगा हुआ क्षेत्र निम्नलिखित होगा,

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

वृत्तीय छेद के अंदर का विद्युत क्षेत्र, औसत क्षेत्र से $\frac{P}{3\epsilon_0}$ से अधिक है।

बोध प्रश्न 2

यह सिद्ध कीजिए कि एक समान वृत्तीय समित आवेश वितरण जिसका आवेश घनत्व ρ है, के अंदर विद्युत क्षेत्र $\frac{r}{3\epsilon_0}$ के बराबर है जहां r एक बिंदु का स्थान सदिश है जिसका मूल बिंदु केन्द्र पर है।

4 क्लासियस मोसोटी समीकरण

आशा करते हैं कि एक द्रव्य के अंदर व्यष्टिगत अणु वृत्तीय गुहिका से प्राप्त क्षेत्र से ध्रुवित होते हैं, क औसत क्षेत्र से। अतः समीकरण (7.8) और समीकरण (7.3) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$P = n \alpha E_{loc}$$

$$P = n \alpha \left(E + \frac{P}{3 \epsilon_0} \right)$$

हम पुनः इस प्रकार लिख सकते हैं

$$P = \frac{n \alpha}{1 - \frac{n \alpha}{3 \epsilon_0}} E$$

ई 5 में चुंबकीय प्रवृत्ति (χ) को निम्न समीकरण से परिभाषित किया गया है :

$$P = \epsilon_0 \chi E$$

अतः

$$\chi = \frac{n \alpha / \epsilon_0}{1 - n \alpha / 3 \epsilon_0}$$

करण (7.11) से हमें चुंबकीय प्रवृत्ति (χ) और आण्विक/ परमाण्विक ध्रुवण में संबंध का पता चलता है। क्लासियस-मोसोटी समीकरण का एक रूप है।

1.1 गैस में ध्रुवण

या द्रव पदार्थों के अणु/परमाणु के गुणों से विपरीत हम यह मान सकते हैं कि गैस के अणु/परमाणु दूसरे से बहुत दूर तथा प्रभावहीन होते हैं। हम एक अणु के नजदीक, दूसरे अणुओं को बने द्विध्रुवों भाव को नजरअंदाज कर सकते हैं। अतः ध्रुवण उत्पन्न करने वाला स्थानीय क्षेत्र औसत क्षेत्र E के र होगा। इसे हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$P = \epsilon_0 \chi E = n p$$

पर n इकाई आयतन में अणुओं की संख्या है। यदि हम केवल एक ही अणु/परमाणु को लें तो द्विध्रुव र्ण को हम इस प्रकार से लिख सकते हैं :-

$$P = \epsilon_0 \alpha E$$

पर α आण्विक ध्रुवण है, इसकी विभाएं आयतन की है। तथा इसका मान लगभग अणु के आयतन रबर होता है।

χ या χ का अणु/परमाणु के अंदर के इलेक्ट्रॉनों के दोलन की मूल आवृत्ति से संबंध निकाल सकते दि अणु को किसी दोलनी क्षेत्र E में रख दें, तब इलेक्ट्रॉनों का आवेश केन्द्र निम्नलिखित समीकरण लन करेगा:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + m \omega_0^2 \cos^2 x = qE$$

यहाँ m इलेक्ट्रॉन का भार है, जिसका आवेश q है, $m_e x$ प्रत्यानयन बल है और qE बाहरी क्षेत्र द्वारा लगाया गया बल है — यह समीकरण प्रदोणित कम्पन के समीकरण जैसी ही है। यदि विद्युत क्षेत्र कोणित आवृत्ति ω के अनुरूप बदलता है, तब

$$x = \frac{qE}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

स्थिर विद्युत क्षेत्र की दिशा में $\omega = 0$, जिसका मतलब यह है कि

$$x = \frac{qE}{\epsilon_o m \omega_o^2}$$

और द्विध्रुव आघूण p को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।

$$p = qx = \frac{q^2 E}{m \omega_o^2}$$

समीकरण 7.12 से, हम आणविक ध्रुवण को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$\alpha = \frac{q^2}{\epsilon_o m \omega_o^2}$$

$$\text{और} \quad \frac{P}{E} = \epsilon_o \chi = \epsilon_o (\epsilon_r - 1) = \epsilon_o n \alpha$$

$$\epsilon_r - 1 = n \alpha \frac{n q^2}{\epsilon_o m \omega_o^2}$$

हाइड्रोजन गैस के लिए, हम ω_o के मान का परिकलन कर सकते हैं। हाइड्रोजन के अणु का आयनीकरण करने के लिए हमें 13.6 eV ऊर्जा की आवश्यकता होती है। इसे $\frac{h \omega_o}{2\pi}$ के बराबर लेने पर जहाँ h प्लैंक नियतांक है, हमें निम्न प्राप्त होगा

$$\begin{aligned} \omega_o &\approx \frac{13.6 \times 1.6 \times 10^{-19} \times 2\pi}{6.62 \times 10^{-34}} \\ &\approx 20.65 \times 10^{15} \end{aligned}$$

इसे समीकरण 7.13. a में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होगा

$$\epsilon_r \approx 1 + \frac{nq^2}{\epsilon_o m \omega_o^2} = 1.00020$$

प्रायोगिक रूप से ϵ_r का निकाला गया मान 1.00026 है।

7.4.2 ध्रुवणता और सापेक्ष परावैद्युतांक के बीच संबंध निकालना

इकाई - 5 में, हमने यह पढ़ा है कि P को हम इस प्रकार से लिख सकते हैं

$$P = \epsilon_o (\epsilon_r - 1) E \quad (7.14)$$

जहाँ पर ϵ_r सापेक्ष परावैद्युतांक है।

समीकरण (7.14) को समीकरण (7.8) में प्रयोग करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3 \epsilon_o} = \frac{(\epsilon_o + 2) E}{3} \quad (7.15)$$

समीकरण (7.14) और (7.15) का प्रयोग करने पर, हम यह लिख सकते हैं

कीकरण (7.14) और (7.15) का प्रयोग करने पर, हम यह लिख सकते हैं

$$P = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E = n \alpha \frac{(\epsilon_r + 2)}{3} E$$

इसे हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\alpha = \frac{3 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{n (\epsilon_r + 2)} \quad (7.16)$$

कीकरण (7.16) से हमें अणु/परमाणु ध्रुवणता तथा सापेक्ष परावैद्युतांक के बीच में संबंध प्राप्त होता है।

कीकरण (7.16) क्लासियस मोसोटी समीकरण का एक दूसरा रूप है।

प्रश्न 3

कीकरण (7.14) से शुरु करके समीकरण (7.15) को निकालिए।

5 ध्रुवणता और अपवर्तनांक में संबंध

डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के लिए, अपवर्तनांक μ को इस प्रकार से परिभाषित किया जा सकता है कि यह तब प्रकाश के वेग और डाइलेक्ट्रिक में प्रकाश के वेग का अनुपात है। इसका मान $\sqrt{\epsilon_r}$ के बराबर गणित किया जा सकता है यानि

$$\mu^2 = \epsilon_r$$

कीकरण (7.15) का (7.14) में प्रयोग करते हुए निम्न प्राप्त होता है।

$$\alpha = \frac{3 \epsilon_0 (\mu^2 - 1)}{n (\mu^2 + 2)}$$

कीकरण 7.17 ध्रुवणता और अवर्तनांक के बीच के संबंध को प्रदर्शित करती है। इस समीकरण को हम लॉरेन्ज सूत्र भी कहते हैं।

सभी समीकरणों में जिनका हमने ऊपर चर्चा की है, n अणु और परमाणु के घनत्व को प्रदर्शित करती है या $N_A d/W$ के बराबर है जहां पर N_A एवोंगाड्रो नंबर है, d द्रव्यमान घनत्व है तथा आणविक भार है। गैसों के लिए हमारे पास एक गैस समीकरण है जो दाब P आयतन, V और मूल तापमान में संबंध स्थापित करता है, जिसे हम निम्न प्रकार से लिखते हैं,

$$P'V = RT = qN_A kT$$

पर q अणु संख्या है और

$$P' = \frac{qN_A kT}{V} = nkT$$

इसलिए
$$n = \frac{P'}{kT}$$

यदि हम एक गैस के लिए विभिन्न दाबों पर ϵ_r का मान निकालें, तब हम एक गैस की आणविक/ध्रुवणता को निकाल सकते हैं। इसके लिए हम समीकरण (7.16) को इस प्रकार से लिखते हैं,

अतः यदि हम एक गैस के लिए विभिन्न दाबों पर ϵ_r का मान निकालें, तब हम एक गैस की आप्विक परमाण्विक ध्रुवणता को निकाल सकते हैं। इसके लिए हम समीकरण (7.16) को इस प्रकार से लिखते

$$\alpha = \frac{3 \epsilon_0 k T (\epsilon_r - 1)}{p (\epsilon_r + 2)}$$

$$\text{या} \quad \frac{(\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)} = \frac{\alpha}{3 \epsilon_0 k} \left(\frac{p}{T} \right)$$

समीकरण (7.18), $\frac{(\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)}$ और $\left(\frac{p}{T} \right)$ में एक रेखीय समीकरण को निरूपित करता है। यदि

ग्राफ में $\frac{(\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)}$ को Y-अक्ष पर और $\left(\frac{p}{T} \right)$ को X-अक्ष, तो हमें एक सीधी रेखा प्राप्त होती

इस रेखा की प्रवणता $\left(\frac{\alpha}{3 \epsilon_0 k} \right)$ होगी।

7.6 परिवर्तनशील अथवा प्रत्यावर्ती क्षेत्रों में डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का स्वभाव

अभी तक हमने पदार्थों में स्थिर क्षेत्र पर विचार किया है। अब हम उस विद्युत क्षेत्र के प्रभाव के बारे में अध्ययन करेंगे जो कि समय के साथ बदल जाता है। जैसा कि एक संधारित्र के बीच में रखे डाइलेक्ट्रिक का क्षेत्र, जिसे हमने प्रत्यावर्ती धारा परिपथ में इस्तेमाल किया था।

क्या क्षेत्र के बदलने से, ध्रुवणा में कुछ बदलाव आता है क्या ध्रुवणता, P और E का अनुपात कि भी समय वैसा ही पाया गया जैसा कि स्थिर विद्युत क्षेत्र में था ?

बहुत कम बदलाव या कम आवृत्तियों पर हमें कुछ भी बदलाव की आशा नहीं है अपितु, अधिक आवृत्ति और अधिक बदलाव में, हमें ध्रुवणता के अनुक्रिया काल को देखना पड़ता है। हम दो अलग अलग ध्रुव क्रियाओं पर विचार करेंगे। जैसे-प्रेरित ध्रुवणा और स्थायी द्विध्रुव का अभिविन्यास। हम यह जानते हैं कि स्थायी ध्रुवणा इलेक्ट्रॉनिक विन्यास में विकृतियों के कारण होता है। विकृति में जो द्रव्यमान हैं, वह इलेक्ट्रॉन का होता है और विकृति बहुत कम होती है। अभिप्रायः यह है कि संरचना दृढ़ है। हमारे दोलन गति ज्ञान (दोलन और तरंग वाला खंड देखें) के आधार पर दोलनों की मूल आवृत्ति बहुत अधिक होती दूसरी तरह से, अणु और परमाणु में इलेक्ट्रॉन की गति के अभिलक्षण जैसे आवर्तकाल दृश्य प्रकाश (आवर्तकाल 10^{-16}) सेकंड के तुल्य होता है। अतः इलेक्ट्रॉनिक संरचना में पुनः व्यवस्था अर्थात् ध्रुव की अभिक्रिया बहुत तीव्रता से होती है जिसके होने में 10^{-14} सेकंड लगते हैं। इस कारण से अध्रुवी पदार्थों की डी सी से दृश्य प्रकाश के नजदीक की आवृत्तियों तक एक जैसा ही व्यवहार करते हैं।

हम समीकरण (7.15) के आधार पर इस स्थिति की जांच करेंगे, जहां पर हमने क्लॉसियस-मोसोटी सूत्र को परावैद्युतांक के पदों में प्रदर्शित किया है। हम यह जानते हैं कि अपवर्तनांक, तरंगदैर्घ्य या आवृत्ति, पर निर्भर करता है। अतः एक प्रकार से समीकरण (7.13) आवृत्ति के बदलने से ध्रुवण के बदलाव को निरूपित करती है।

प्रायोगिक रूप से डी सी के लिए ϵ_r के मान को प्राप्त किया जा सकता है। उसी पदार्थ का अपवर्तनांक स्पेक्ट्रोमीटर की सहायता से प्रकाशिक तरीकों से निकाला जा सकता है। परीक्षण से अध्रुवी पदार्थों के लिए अपवर्तनांक और ϵ_r के बीच सही संबंध पाया गया लेकिन ध्रुवी पदार्थों के लिए ϵ_r आवृत्ति के साथ बदलता है, यह आवृत्ति को बढ़ाने से कम हो जाता है। अधिक आवृत्तियों पर ϵ_r के मान में कमी के कारण यह है कि स्थायी द्विध्रुव विद्युत क्षेत्र में तेजी से होने वाले बदलाव के साथ बदल नहीं पाते। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि ध्रुवी पदार्थों के अणुओं में ध्रुवण अनुक्रिया बहुत धीरे धीरे होती है। अतः

दृश्य प्रकाश की आवृत्तियों के परिसर में अपवर्तनांक और ϵ_r के मान में एक अच्छा संबंध है, जैसा कि अधुवी पदार्थों में सूचित किया गया है।

7.7 व्यावहारिक जीवन में डाइलेक्ट्रिक पदार्थों का स्थान

डाइलेक्ट्रिक के बहुत से उपयोग हैं। डाइलेक्ट्रिक अधिकांश संधारित्रों में उपयोग में लाया जाता है। यद्यपि इसकी सही जरूरत इसके उपयोग पर निर्भर करती है। इसकी कुछ ऐसी विशेषताएँ हैं, जो संधारित्र के लिए वांछनीय हैं। संधारित्र का आकार छोटा होना चाहिए, प्रतिरोध का मान अधिक होना चाहिए और इसका योग्य होना कि उसे अधिक तापमान पर तथा लंबे समय तक काम में लाया जा सके। औद्योगिक दृष्टिकोण से, यह सस्ता होना चाहिए। शक्ति संधारित्रों में, एक विशेष प्रकार के क्राफ्ट कागज का उपयोग होता है, जो कि छेदों तथा चालित कणों से मुक्त होता है क्योंकि इनमें अधिक विभव पर काम करना डाइलेक्ट्रिक हास की तुलना में अधिक जरूरी है। इसके अलावा, क्राफ्ट कागज को उचित द्रव में अंतरभरित करते हैं जैसे क्लोरोनेटित डाइफिनाइल में होता है। इससे डाइलेक्ट्रिक नियतांक का मान बढ़ जाता है अतः संधारित्र का आकार छोटा हो जाता है। इसके अलावा इसकी भंजन शक्ति भी बढ़ जाती है।

कागज वाले संधारित्रों के अलावा दूसरे कई प्रकार के संधारित्रों को भी प्रयोग में लाया जाता है। परत वाले संधारित्रों में, टेफ्लोन, माइलर या पोलिइथेन की पतली झिल्ली को प्रयोग में लाया जाता है। यह न केवल संधारित्र के आकार को छोटा करते हैं अपितु उसके प्रतिरोध को भी बढ़ा देते हैं। टेफ्लोन में हास कम होता है, इसलिए इसे अधिक आवृत्तियों पर प्रयोग में लाया जाता है। विद्युत अपघटन संधारित्रों में विद्युत अपघटक को अंतरभरित कागज के ऊपर जमा देते हैं। इस प्रकार के संधारित्र का आकार छोटा होता है, क्योंकि इसमें परत की चौड़ाई बहुत कम होती है। ध्वुणता और सुचारु रूप से कार्य करने की अधिकतम वेभव क्षमता की जानकारी इन संधारित्रों को इस्तेमाल करने के लिए बहुत जरूरी है।

कुछ अभ्रकों को हम इलेक्ट्रॉनिक परिपथों में तापमान प्रतिकारित्र के रूप में इस्तेमाल कर सकते हैं। अधिक डाइलेक्ट्रिक नियतांक वाले पदार्थ जिनमें तापमान के सापेक्ष डाइलेक्ट्रिक नियतांक में बदलाव बहुत कम होता है, संधारित्रों के आकार को छोटा करने में बहुत सहायक होते हैं। बोरियम टाइटेनेट और उसके र्पांतरण इस प्रकार के पदार्थों के अच्छे उदाहरण हैं।

7.8 सारांश

- * डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के अंदर का औसत विद्युत क्षेत्र ध्वुण उत्पन्न करने वाले विद्युत क्षेत्र से कम होता है।
- * डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का प्रेरित द्विध्रुव आधूर्ण P स्थानीय क्षेत्र के समानुपाती होता है तथा गणितीय रूप में हम उसे निम्न रूप से लिख सकते हैं :-

$$P = \alpha E_{loc}$$

जहां पर सभी चिन्ह वही रूशियां दर्शाते हैं, जैसा कि पहले अंकित किया गया है।

- * एक गोलाकार छेद के अंदर का विद्युत क्षेत्र, निम्नलिखित होता है,

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

जो यह दर्शाता है कि गोलाकार छेद के अंदर का क्षेत्र औसत विद्युत क्षेत्र से अधिक होता है।

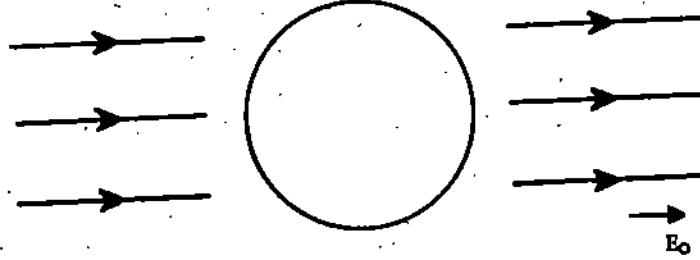
- * आप्विक/परमाण्विक ध्वुणता तथा चुंबकीय प्रवृत्ति के बीच के संबंध को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है,

आण्विक/परमाण्विक ध्रुवणता तथा चुंबकीय प्रवृत्ति के बीच के संबंध को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है,

$$\chi = \frac{n \alpha \epsilon_0}{1 - \frac{n \alpha}{3 \epsilon_0}}$$

7.9 अंत में कुछ प्रश्न

1. रेखिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ का एक गोला, समावेशित विद्युत क्षेत्र में रखा गया है चित्र TQ-1 देखें। बाहरी क्षेत्र E_{loc} के पदों में गोले के अंदर के विद्युत क्षेत्र तथा ध्रुवणता का आकलन कीजिए।



चित्र TQ-1 एक समरूप चुंबकीय क्षेत्र में स्थित रेखिक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ।

2. एक ध्रुवित गोले के अंदर का विद्युत क्षेत्र समरूप से आवेशित होता है तथा इसका मान $-P/3 \epsilon_0$ होता है। इसे दो ऐसे गोलों के भीतरी कक्षेत्र के अध्यारोपण के आधार पर प्रमाणित करें, जिनके केन्द्र अलग अलग हैं।
3. यह प्रमाणित कीजिए कि तश्तरी के आकार की गुहिका में रखे इकाई आवेश द्वारा महसूस की गई शक्ति को ϵ_r से गुणा करने पर, हमें ठोस डाइलेक्ट्रिक पदार्थ के विद्युत विस्थापन का मान प्राप्त होगा।
4. एक डाइलेक्ट्रिक पदार्थ में अणुओं या परमाणुओं को में रखे होते हैं। दो अणुओं/परमाणुओं के बीच (x, y व z) अक्षों की दिशाओं में, d होती है। यह z अक्ष की दिशा में लगने वाले विद्युत क्षेत्र E_{loc} से प्रभावित होते हैं। सभी द्विध्रुवों से उत्पन्न होने वाले औसत क्षेत्र का आकलन कीजिए।

7.10 हल/उत्तर

बोध प्रश्न

1. हम केन्द्र से समदूरी पर स्थित द्विध्रुवों को अंकित करते हैं। इकाई 3 से हम जानते हैं कि द्विध्रुव क्षेत्र, दूरी के साथ $\frac{1}{r^3}$ के अनुपात में कम होता जाता है। क्योंकि समदूरी पर स्थित जोड़ों के द्विध्रुव आघूर्ण P की दिशाएं विपरीत होती हैं, इसलिए केन्द्र पर जोड़ों के प्रभाव से पड़ने वाला कुल क्षेत्र शून्य होता है। यह बात प्रत्येक जोड़ के लिए लागू होती है। अतः

$$E_{in} = 0$$

2. गॉस के नियम के समाकलक रूप के आधार पर

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n}_s ds = \int_V \frac{1}{\epsilon_0} dv$$

$$\text{अतः } E \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4}{3}\pi r^3$$

यदि $E = \frac{1}{3 \epsilon_0} r$

दिश के रूप में

$$E(r) = (r) \frac{r}{3 \epsilon_0}$$

$$\begin{aligned} E_{loc} &= E + \frac{P}{3 \epsilon_0} \\ &= E + \frac{\epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E}{3 \epsilon_0} \\ &= \frac{3 E + (\epsilon_r - 1) E}{3} \\ &= \frac{(\epsilon_r + 2) E}{3} \end{aligned}$$

अंत में कुछ प्रश्न

गोले की ध्रुवणता की वजह से उसके निकट का परिणामी क्षेत्र समावेशित नहीं होगा। गोले के अंदर के प्रति इकाई आयतन के द्विध्रुव आघूर्ण को P मान लेते हैं। हम यह अपेक्षा करते हैं कि P समावेश होगा क्योंकि डाइलेक्ट्रिक पदार्थ रैखिक है। तब गोले के अंदर P , विद्युत क्षेत्र E_{in} के समानुपाती होगा। यदि χ पदार्थ की चुंबकीय प्रवृत्ति हो, तो हम P को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं,

$$P = \epsilon_0 \chi E_{in}$$

ह ध्रुवणता, P गोले के अंदर एक क्षेत्र उत्पन्न करती है जो $-\frac{P}{3 \epsilon_0}$ के बराबर होता है।

गोले के अंदर के विद्युत क्षेत्र E_{in} को, ध्रुवित द्विध्रुव आवेशों के क्षेत्र तथा समावेशित क्षेत्र, E_{loc} के अध्यारोपण का परिणामी क्षेत्र माना जा सकता है। अतः

$$E_{in} = E_{loc} - \frac{P}{3 \epsilon_0}$$

को E_{in} के रूप में लिखते हुए

$$E_{in} = E_{loc} - \frac{\epsilon_0 \chi E_{in}}{3 \epsilon_0}$$

यानि

$$E_{in} = \frac{3 E_{loc}}{3} = \frac{3}{(\epsilon_r + 2)} E_{loc}$$

क्योंकि

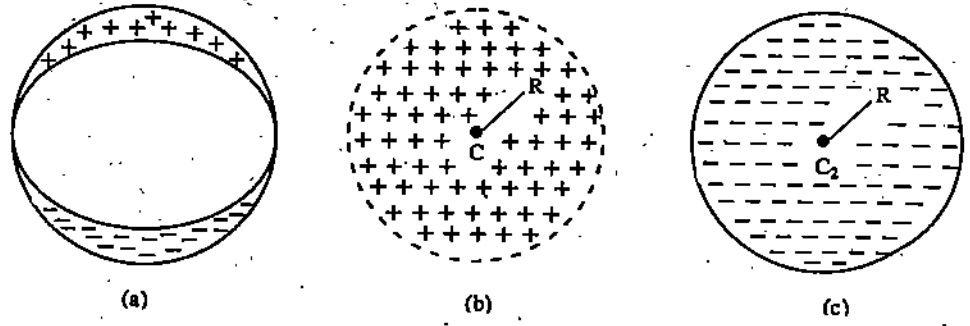
$$(1 + \chi) = \epsilon_r$$

तथा

$$\begin{aligned} P &= \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) E_{in} \\ &= \frac{3 \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)}{(\epsilon_r + 2)} E_{loc} \end{aligned}$$

से यह पता चलता है कि समावेश ध्रुवणता वाली धारणा अपने में स्वसंगत है।

चित्र $TQ - 2$ में दिखाए गए ध्रुवणित डाइलेक्ट्रिक गोले को, दो समावेशित गोलों के अध्यारोपण के रूप में माना जा सकता है। जहां एक में धनात्मक आवेश है $[TQ2(b)]$ तथा दूसरे में ऋणात्मक आवेश है $[TQ2(c)]$ । दोनों गोलों के केन्द्र C_1 तथा C_2 हैं जो z -अक्ष की दिशा में एक दूसरे से दूरी d पर स्थित हैं। इसका मतलब यह है कि ध्रुवणता P , z -अक्ष की दिशा में होगी। धनात्मक



चित्र TQ - 2 रैखिक आणविक द्विध्रुवों का गोला।

आवेश वाले गोले के कारण, R , पर क्षेत्र का मान निम्नलिखित होगा,

$$E_+ = \frac{4\pi}{3} r^3 \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

जहाँ $r = C_1 R$ तथा ρ आवेश घनत्व है। इसी प्रकार R पर ऋणात्मक आवेशित गोले के क्षेत्र का मान निम्नलिखित होगा,

$$E_- = -\frac{\rho r'}{3\epsilon_0}$$

जहाँ $r' = C_2 R$ । अब ρ , z -अक्ष की दिशा में है तथा $C_2 C_1 = d$ भी z -अक्षा की दिशा में है। तथा E_+ का सदिशिय योग लेते हुए हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$E_- + E_+ = -\frac{1}{3\epsilon_0} (\rho r - \rho r') = \frac{\rho a}{3\epsilon_0}$$

क्योंकि ρ प्रति इकाई घनात्मक या ऋणात्मक आवेशों के मान के बराबर है।

3. हम यह मान लेते हैं कि गुहिका का अर्धव्यास उसकी मोटाई से अधिक है, जब कि इन्हें क्षेत्र के समानांतर दिशा में नापा जा रहा है। चित्र TQ - 3 देखें। इस धारणा की वजह से A आर B के समीप का क्षेत्र E के बराबर होगा। गुहिका के केन्द्र का क्षेत्र, E_c , A के नजदीक के क्षेत्र E_A

के समानांतर होगा। यह $D (D = \epsilon_0 E)$ के लंबवत् घटक की सीमा शर्त के अनुसार है। यानि,

$$\epsilon_0 E_A - E_c = (D)_n$$

यहाँ लंबवत् घटक संपूर्ण सदिश n को नापता है।

लेए हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि प्रति इकाई आवेश E जो कि तश्तरी के आकार की गुहिका का गया है, पर लगने वाली शक्ति को ϵ_0 से गुण करने पर हमें विद्युत विस्थापन (D) का मान प्राप्त है।

बिंदु (x', y', z') पर आवृण p वाले द्विध्रुव के कारण अदिश विभव होगा,

$$(x, y, z) = \frac{p \cos \theta}{4 \pi \epsilon_0 R^2} = \frac{p (z - z')}{4 \pi \epsilon_0 R^2}$$

के $(z - z') = R \cos \theta$ और $R^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$

का z -घटक होगा।

$$E = -\frac{P}{z} = -\frac{p}{4 \pi \epsilon_0 R^3} + \frac{3p(z - z')}{4 \pi \epsilon_0 R^3}$$

$$E = \frac{p}{4 \pi \epsilon_0} \frac{2(z - z')^2 - (x - x')^2 - (y - y')^2}{[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2]^{3/2}}$$

हम मान लेते हैं कि द्विध्रुव मूल बिंदु पर स्थित है। क्षेत्र का औसत मान निकालने के लिए हम क्षेत्र का अलन करते हैं। समाकलन को एक सैल के आवटैन्ट पर लिया जाता है। एक सैल का इकाई आयतन है d^3 अतः

$$E = \frac{8p}{4 \pi \epsilon_0 d^3} \cdot \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} dx dy dz$$

$$= \frac{p}{3 \epsilon_0 d} \quad \therefore \langle E \rangle = \frac{p}{3 \epsilon_0}$$

$$P = \frac{p}{d^3}$$

NOTES



उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-04

वैद्युत और चुंबकीय परिघटनाएं

खंड

3

विद्युत् धारा और चुंबकीय क्षेत्र

इकाई 8	
विद्युत् धारा	5
इकाई 9	
चुंबकीय क्षेत्र	25
इकाई 10	
विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र में आवेश की गति	56
इकाई 11	
पदार्थों का चुंबकत्व — I	77
इकाई 12	
पदार्थों का चुंबकत्व — II	96

खंड 3 विद्युत् धारा और चुंबकीय क्षेत्र

पिछले दो खंडों का संबंध मुख्यतः, स्थिरविद्युतिकी अर्थात् विरामावस्था में आवेशों के व्यवहार से था। इस खंड में हम अपना ध्यान उन परिस्थितियों पर केन्द्रित करेंगे, जिनमें आवेश गतिशील होते हैं। इसलिए हमारी चर्चाओं में कुछ मूलभूत विद्युत परिघटनाओं जैसे विद्युत् धाराएं, विद्युत् धाराओं के बीच उत्पन्न बल और विद्युत् धारा के चुंबकीय प्रभावों आदि पर विशेष जोर दिया जाएगा। विद्युत् धारा के चुंबकीय प्रभाव ही विद्युत् चुंबकत्व का सार है। अंत में द्रव्य के चुंबकीय गुणधर्मों की विस्तृत चर्चा की जाएगी जो ठोस अवस्था भौतिकी (solid state physics) के पाठ्यक्रम के लिए मार्ग प्रशस्त करेगा।

यदि आपने बारहवीं कक्षा की परीक्षा हाल ही में उत्तीर्ण की है तो आप इस खंड की पाठ्य सामग्री से काफी परिचित होंगे। अपितु इस खंड को छोड़ देने का प्रयत्न न करें क्योंकि इस पाठ्यक्रम के खंड 4 के अंतर्गत “विद्युत चुंबकत्व” के अध्ययन को आरंभ करने से पहले मूल पाठ्य सामग्री का पूर्ण ज्ञान अत्यंत आवश्यक है। आप देखेंगे कि इसमें पाठ्य सामग्री का अधिक व्यापक और गंभीर विवेचन किया गया है।

इकाई 8 विद्युत् धारा, धारा घनत्व और विद्युत चालकता की मूल परिभाषाएं स्थापित करता है। यहाँ परमाणु-स्तर पर चालकता की क्रियाविधि की व्याख्या की गई है। इसके अलावा सांतत्य-समीकरण (equation of continuity) की व्युत्पत्ति की गई है और उसका उपयोग अन्-ओमीय चालक में धारा के व्यवहार की चर्चा करने के लिए किया गया है। इस इकाई में कुछ गणित भी शामिल है, अतः इस इकाई को पढ़ने में पांच घंटे का समय लगेगा।

इकाई 9 में आप पढ़ेंगे कि गतिशील आवेशों के कारण चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है। आप देखेंगे कि गतिशील आवेशों और धारावाही तारों पर लग रहे बल के आधार पर किस प्रकार चुंबकीय क्षेत्र को परिभाषित किया जाता है। इसके अलावा चुंबकीय क्षेत्र में धारावाही लूप पर लगने वाले बल-आघूर्ण (torque) के व्यंजक की व्युत्पत्ति की जाएगी जो गैल्वेनोमीटर का कार्यकारी सिद्धांत है। इस इकाई में बायो-सावर्ट नियम पर भी विचार किया जाएगा जिसकी सहायता से स्थिर धारा से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र का अभिकलन किया जा सकता है। विशेष स्थिति में, सामान्य सममिति होने पर चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात करने के लिए ऐम्पियर नियम का उपयोग किया जाता है। किसी सोलिनाइड एवं टोरॉइड तथा किसी धारावाही तार के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात कर ऐम्पियर नियम की उपयोगिता को स्पष्ट किया गया है। अंत में ऐम्पियर नियम के अवकल रूप को विकसित करते हुए सदिश संकारक (vector operator) कर्ल की चर्चा की गई है। आपको लगभग छः घंटे में इस इकाई का अध्ययन समाप्त कर देना चाहिए।

इकाई 10 में विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र में स्थित आवेश की गति पर विचार किया गया है, कैथोड किरण दोलनदर्शी के कार्यकारी सिद्धांत की व्याख्या भी की गई है। वेग वरणकारी और साइक्लोट्रॉन जैसी युक्तियों में प्रयुक्त संयुक्त विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों की उपस्थिति में आवेशित कणों की गति से संबंधित कुछ प्रश्नों को भी लिया गया है। इस इकाई के अध्ययन के लिए लगभग पांच घंटे की आवश्यकता है।

इकाई 11 और 12 का संबंध द्रव्य के चुंबकीय गुणधर्मों से है। इकाई 11 में हम पढ़ेंगे कि चुंबकीय क्षेत्र में, विभिन्न पदार्थ किस प्रकार व्यवहार करते हैं। पदार्थ के चुंबकीय गुणधर्मों को समझने के लिए यहां परमाणु के चुंबकीय गुणधर्मों का अध्ययन किया जाएगा। आप देखेंगे कि परमाणु किस प्रकार चुंबकीय आघूर्ण उत्पन्न करता है और चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में चुंबकीय आघूर्ण का पुरस्सरण (precession) होता है। क्लासिकल भौतिकी की दृष्टि से अनुचुंबकत्व और प्रतिचुंबकत्व की व्याख्या की गई है। आशा है आप इस इकाई को लगभग छः घंटे में समाप्त कर देंगे।

इकाई 12, इकाई 11 का ही विस्तार है, इसमें लोह चुंबकत्व का अध्ययन किया गया है। इसमें चुंबकीय प्रेरकत्व B के अतिरिक्त, सहायक चुंबकीय क्षेत्र H का परिचय भी दिया गया है। अंत में

चुंबकीय परिपथों के विश्लेषण पर विचार किया गया है। अनुमान है कि इसके अध्ययन में छः घंटे लग जाएंगे।

इकाई 8 विद्युत् धारा

इकाई की रूपरेखा

- 8.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 8.2 विद्युत् धारा और धारा घनत्व
- 8.3 चालन की प्रक्रिया
अपवाह वेग और ओम का नियम
प्रतिरोधकता पर तापमान का प्रभाव
ओम नियम का मंग होना
- 8.4 डायोड (अन्-ओमीय चालक) के लिए धारा-वोल्टता संबंध
- 8.5 सारांश
- 8.6 अंत में कुछ प्रश्न
- 8.7 हल और उत्तर
- 8.8 शब्दावली

8.1 प्रस्तावना

जिस प्रकार नदी में प्रवाहित जल के अणुओं से जल धारा बनती है, ठीक उसी प्रकार किसी तार में प्रवाहित हो रहे विद्युत् आवेशों से विद्युत् धारा बनती है। रेडियो, बिजली का हीटर और टार्च जैसे बिजली के सभी उपकरण विद्युत् आवेश (electric charge) के प्रवाह पर निर्भर करते हैं। इस प्रकार की आवेशों की गति प्रायः चालकों (conductors) में होती है जिनमें मुक्त इलेक्ट्रॉन (free electrons) होते हैं; प्रतिदिप्ति लैंपों (fluorescent lamps) की आयनित गैसों (ionized gases) में जिनमें धन और ऋण दोनों प्रकार के आवेश होते हैं तथा निर्वात (evacuated region) में भी होती है, उदाहरण के लिए टीवी पिकचर ट्यूब में इलेक्ट्रॉन की गति।

पिछले दो खंडों में हम स्थिरविद्युतिकी (electrostatics) के बारे में अध्ययन करते रहे हैं, जहां आवेश स्थिर अवस्था में रहते हैं। इसी पृष्ठभूमि में, अब हम विद्युत् आवेश के एक स्थान से दूसरे स्थान को गतिमान या प्रवाहित होने की अवस्था का अध्ययन करेंगे। यहां हम यह देखेंगे कि यदि आवेश गति करने के लिए स्वतंत्र है, तो प्रयुक्त विद्युत् क्षेत्र के कारण वह गति करने लगता है और विद्युत् धारा प्रवाहित होने लगती है। विद्युत् धारा के अध्ययन का एक मुख्य कारण यह है कि खंड 3 और खंड 4 में वर्णित विद्युत् चुंबकत्व (electromagnetism) का अध्ययन इसी के आधार पर किया जाता है।

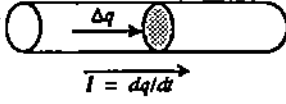
इस पाठ्यक्रम के खंड 2 में विद्युत् क्षेत्र में रखे पदार्थ के व्यवहार के कुछ पहलुओं का वर्णन उस पदार्थ के वैद्युत् प्रवृत्ति (electric susceptibility) के आधार पर किया है। इस इकाई में हम पदार्थ के एक अन्य महत्वपूर्ण गुणधर्म, जिसे वैद्युत् चालन (electric conduction) कहते हैं, के बारे में चर्चा करेंगे। यह गुणधर्म भी पदार्थ को विद्युत् क्षेत्र में रखने के कारण ही होता है। इन दो प्रकार की स्थितियों में अंतर यह है कि पहली स्थिति में आवेश परिबद्ध (bound) है जिससे कि उनका केवल थोड़ा सा ही विस्थापन होता है जबकि दूसरी स्थिति में आवेश के मुक्त होने के कारण विद्युत् क्षेत्र के अंतर्गत आवेश गतिमान होते हैं, जिसकी वजह से धारा उत्पन्न होती है।

विद्युत् धारा की संकल्पनाएं हमारे लिए काफी उपयोगी सिद्ध होंगी। अगली इकाई में हम यह देखेंगे कि आवेश की गति के कारण एक नया बल क्षेत्र, अर्थात् चुंबकीय क्षेत्र (magnetic field) उत्पन्न होता है। उस इकाई में हम धारा और चुंबकीय क्षेत्र के बीच के प्रायोगिक संबंध के बारे में भी चर्चा करेंगे और स्थिर चुंबकीय (magnetostatics) के आधारभूत नियमों अर्थात् गाउस का चुंबकत्व नियम और एम्पीयर नियम को स्थापित करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- विद्युत् धारा की संकल्पना की व्याख्या कर सकेंगे और अपवाह वेग के पदों में धारा घनत्व का व्यंजक प्राप्त कर सकेंगे,
- सूक्ष्मस्तरीय रूप से चालन की प्रक्रिया की व्याख्या कर सकेंगे,
- ओमी और अन्-ओमी व्यवहार में भेद कर सकेंगे,
- डायोड में प्रवाहित धारा के स्वरूप को ज्ञात करने के लिए सांतत्य समीकरण (continuity equation) का प्रयोग कर सकेंगे।



चित्र 8.1: तार अक्ष के संबन्ध में समतल से गुजरते हुए आवेश प्रवाह की दर को तात्क्षणिक धारा कहते हैं।

8.2 विद्युत् धारा और धारा घनत्व

खंड 1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि जब आवेश को एक विद्युत् क्षेत्र में रखा जाता है तो उस पर एक बल लगता है और वह बल रेखाओं की दिशा में गतिमान होने लगता है। यदि किसी चालक, मानलीजिए तांबे के तार, के सिरों को एक बैटरी से जोड़ दिया जाए, तो चालक के प्रत्येक बिंदु पर एक विद्युत् क्षेत्र E स्थापित हो जाएगा। इस क्षेत्र के कारण तार में उपस्थित इलेक्ट्रॉन, क्षेत्र की दिशा के विपरीत गतिमान होने लगेंगे जिसकी वजह से तार में विद्युत् धारा प्रवाहित होने लगेगी। जब कभी आवेश गतिमान होते हैं, विद्युत् धारा प्रवाहित होने लगती है (यहां तांबे की तार में इलेक्ट्रॉनों के प्रवाह से विद्युत् धारा उत्पन्न होती है)। किसी तार के दिए हुए अनुप्रस्थ परिच्छेद में से इकाई समय में प्रवाहित हो रहे आवेश की मात्रा को विद्युत् धारा कहते हैं। उदाहरण के लिए, यदि q आवेश, चित्र 8.1 में दिखाए गए, अनुप्रस्थ परिच्छेद (cross section) से t समय में गुजरता है तो औसत धारा I यह होती है :

$$I = \frac{\text{स्थानांतरित नेट आवेश}}{\text{लिया गया समय}} = \frac{q}{t} \quad (8.1)$$

जब धारा का मान अचर नहीं होता है, अर्थात्, जब समय के साथ धारा में परिवर्तन हो तो हम धारा का तात्क्षणिक मान (instantaneous value) परिभाषित करते हैं। इसे $I(t)$ से प्रदर्शित करते हैं। यदि नेट आवेश Δq चित्र 8.1 में दिखाये गये छात्रित (shaded) क्षेत्र को Δt समय में पार करें तो तात्क्षणिक धारा यह होती है :

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt} \quad (8.2)$$

समीकरण (8.1) या समीकरण (8.2) से यह पता चलता है कि धारा का मात्रक कूलॉम प्रति सेकंड (C s^{-1}) होता है। SI मात्रक प्रणाली में इसे एम्पीयर (संक्षेप में A) कहा जाता है। खंड 1 की इकाई 1 में हमने एम्पीयर की परिभाषा दी है।

क्योंकि q और t दोनों ही अदिश (scalar) हैं, इसलिए धारा एक अदिश राशि (scalar quantity) है। और, क्योंकि यह सदिश नियमों का पालन नहीं करती, इसलिए यह सदिश राशि (vector quantity) नहीं होती। प्रायः तार में प्रवाहित हो रही धारा को एक तीर के चिन्ह से प्रदर्शित किया जाता है। परन्तु ध्यान रहे कि ये तीर के चिन्ह सदिश को प्रकट नहीं करते, बल्कि केवल चालक में आवेश के प्रवाह की दिशा को दर्शाते हैं।

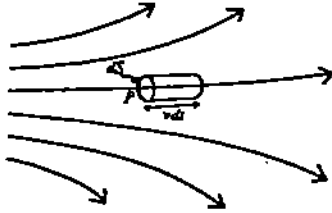
बोध प्रश्न 1

धारा जैसी कुछ अन्य भौतिक राशियाँ बताइए जो कि अदिश है और जिनकी दिशा को चित्र (diagram) में एक तीर से प्रकट करते हैं।

विद्युत् धारा या तो केवल एक प्रकार के आवेश के गति के कारण या फिर धन और ऋण दोनों प्रकार के आवेशों के गति के कारण होती है। परंपरा यह रही है कि धारा की दिशा वह होती है जिस ओर धन आवेश प्रवाहित होता है। यदि गतिमान आवेश ऋणात्मक हो, जैसा कि धातुओं में इलेक्ट्रॉन, तो धारा की दिशा आवेशों के वास्तविक प्रवाह के विपरीत होती है। जब धारा धन और ऋण दोनों प्रकार के आवेशों के कारण होती है, तब इसे नेट आवेश के प्रवाह अर्थात् दोनों प्रकार के आवेशों के कारण धाराओं के बीजीय योग (algebraic sum) द्वारा ज्ञात किया जाता है। उदाहरण के लिए, जब लवण (NaCl) पानी में घुलता है, तब यह Na^+ आयन और Cl^- आयन में टूट जाता है। सोडियम आयन धन आवेशित होता है और क्लोरीन आयन ऋण आवेशित होता है। दो इलेक्ट्रोडों के बीच स्थापित विद्युत् क्षेत्र के अंतर्गत ये आयन द्रव में विपरीत दिशा में गतिमान होते हैं। इस तरह, हम यह देखते हैं कि धन आयन और ऋण आयन दोनों की गति के कारण धारा एक ही दिशा में प्रवाहित होती है।

जैसा कि पहले बताया जा चुका है, इकाई समय में तार के किसी अनुप्रस्थ परिच्छेद से गुजरने वाले कुल आवेश को धारा कहते हैं। अतः तार में प्रवाहित कुल आवेश से धारा का निर्धारण होता है — चाहे तार के अनुप्रस्थ परिच्छेद के प्रत्येक अल्पांश (element) से होकर गुजरने वाला आवेश समान हो या नहीं। यही कारण है कि धारा एक स्थूलस्तरीय राशि (macroscopic quantity) होती है। यदि तार के अनुप्रस्थ परिच्छेद के विभिन्न अल्पांशों से होकर जाने वाला आवेश समान न हो, तो चालक के प्रत्येक बिंदु पर एक राशि को परिभाषित करना आवश्यक हो जाता है। इस राशि को धारा घनत्व (current density) कहा जाता है, जो कि एक सूक्ष्मस्तरीय (microscopic) राशि है और जिसे \mathbf{J} से प्रकट किया जाता है। इकाई समय में तार के लम्बवत् इकाई क्षेत्रफल में प्रवाहित होने वाले आवेश को धारा घनत्व कहते हैं तथा इसकी दिशा धन आवेश के प्रवाहित होने की दिशा की ओर होती है।

मान लीजिए q आवेश वाले कई कण दांयी ओर गतिमान हो रहे हैं, जैसा कि चित्र 8.2 में दिखाया गया है।



चित्र 8.2: अपवाह वेग (drift velocity) के आधार पर धारा का परिच्छेद।

बिंदु P के चारों ओर एक ऐसे लघु क्षेत्र dS की कल्पना कीजिए जिससे कि इस क्षेत्र से होकर जाने वाले सभी कणों के वेग v समान हों। आइए हम लंबाई vdt वाले एक बेलन की भी कल्पना करें, जैसा कि चित्र 8.2 में दिखाया गया है। तब आयतन $dSvdt$ में स्थित सभी कण dt समय में, dS क्षेत्रफल से गुजरेंगे। यदि प्रति एकांक आयतन में आवेशित कणों की संख्या n हो तो इस आयतन में आवेशित कणों की संख्या $n dSvdt$ होगी।

अतः वह औसत दर जिससे आवेश dS क्षेत्र से होकर गुजर रहा है, अर्थात्, dS क्षेत्र से प्रवाहित हो रही धारा यह है:

$$I = \frac{q (n dS v dt)}{dt} = n dS v q \quad (8.3)$$

क्योंकि धारा घनत्व तार के प्रति एकांक अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल में से गुजरने वाली धारा होती है इसलिए :

$$J = \frac{I}{dS} = nqv \quad (8.4)$$

क्योंकि \mathbf{J} की दिशा आवेशित कणों के प्रवाह की दिशा की ओर होती है, इसलिए ऊपर दिए गए समीकरण को सदिश रूप (vector form) में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\mathbf{J} = nq\mathbf{v} \quad (8.5)$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि \mathbf{J} एक सदिश राशि है। मात्रकों की SI प्रणाली में \mathbf{J} को एम्पीयर प्रति वर्ग मीटर में व्यक्त किया जाता है। जब धारा वाहक इलेक्ट्रॉन होते हैं, तब $q = -e$ और समीकरण (8.5) इस रूप का हो जाता है

$$\mathbf{J} = -ne\mathbf{v} \quad (8.6)$$

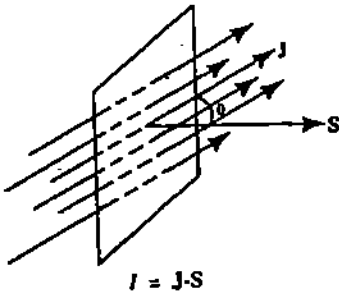
समीकरण (8.5) में गुणनफल nq , धारा वाहकों के आयतन आवेश घनत्व ρ को प्रकट करता है। अतः ρ के पदों में धारा घनत्व को इस प्रकार व्यक्त किया जाता है :

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v} \quad (8.7)$$

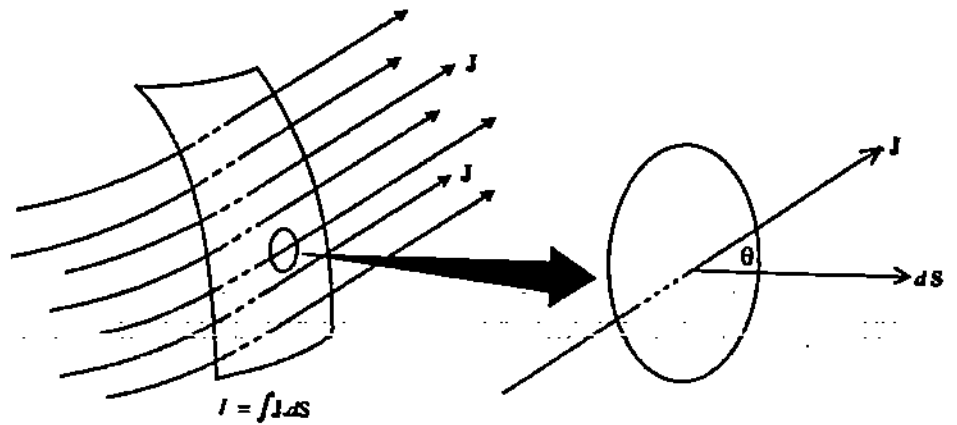
यदि तार के अनुप्रस्थ परिच्छेद S पर धारा घनत्व एक समान हो, तो धारा घनत्व को तार के अनुप्रस्थ परिच्छेद से गुणा करके हम कुल धारा प्राप्त कर सकते हैं। यदि धारा घनत्व अनुप्रस्थ परिच्छेद के लम्बवत् न हो, तब हम \mathbf{J} के केवल उस घटक (component) को लेते हैं, जो कि परिच्छेद पर अभिलंब होता है। यदि हम एक ऐसा सदिश \mathbf{S} लें, जिसका परिमाण अनुप्रस्थ परिच्छेद के क्षेत्रफल के बराबर हो और उसकी दिशा क्षेत्र की लंब दिशा की ओर हो, तो एकसमान धारा घनत्व \mathbf{J} से कुल धारा $I = \mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$ प्राप्त होती है (चित्र 8.3)। जब प्रत्येक बिंदु पर धारा घनत्व और I या पृष्ठ अभिविन्यास (surface orientation) भिन्न-भिन्न हों, तब छोटे छोटे अनेक क्षेत्रफलों dS के लिए ऊपर बतायी गयी विधि द्वारा धारा ज्ञात करते हैं और इन धाराओं के योग से कुल धारा का मान प्राप्त करते हैं (चित्र 8.4)। क्षेत्रफल dS से होकर गुजरने वाली धारा $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ होती है, अतः संपूर्ण पृष्ठ से होकर जाने वाली कुल धारा I यह होगी :

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} \quad (8.8)$$

जहां समाकल की सीमाएं ऐसी ली जाती है, जिसके कि संपूर्ण पृष्ठ का समावेश हो जाए। समीकरण (8.8) को देखकर आपको खंड 1 की इकाई 2 में दी गई विद्युत अभिवाह (electric flux) की परिभाषा याद आ गयी होगी। (समीकरण 2.4 के साथ समीकरण (8.8) की तुलना कीजिए।) वास्तव में, पृष्ठ से होकर जाने वाली विद्युत धारा उस पृष्ठ से होकर जाने वाले धारा घनत्व का अभिवाह ही होता है। समीकरण (8.8) से यह भी पता चलता है कि धारा एक अदिश राशि है, क्योंकि समाकल $\mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ एक अदिश है।



चित्र 8.3: S क्षेत्रफल वाले पृष्ठ से होकर जाने वाली धारा $J\mathbf{S} \cos \theta$ या $\mathbf{J} \cdot \mathbf{S}$ होती है, जहां θ सदिशों \mathbf{S} और \mathbf{J} के बीच का कोण है।



चित्र 8.4: जब प्रत्येक बिंदु पर धारा और I या पृष्ठ अभिविन्यास भिन्न-भिन्न हो, तो कुल धारा को $I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ के रूप में लिखा जा सकता है।

चित्र 8.4 में हमने पृष्ठ S को एक खुला पृष्ठ (open surface) लिया है। ऐसी स्थिति में, सदिश $d\mathbf{S}$ की उस दिशा को घनात्मक लिया जाता है जिस दिशा में S से होकर धारा प्रवाहित होती है। जब S

एक बंद पृष्ठ (closed surface) होता है, जैसा कि चित्र 8.5 में दिखाया गया है, तो प्रत्येक dS सदिश की दिशा पृष्ठ के लंबवत् बाहर की ओर होती है। ऐसे पृष्ठों के लिए, S पर लिए गए, J के समाकल से वह दर प्राप्त होता है जिस दर से, आवेश, पृष्ठ S से परिवद्ध आयतन, से बाहर जा रहा होता है। अब, भौतिकी का एक आधारभूत नियम यह है विद्युत आवेश अविनाशी होता है : यह न तो कभी नष्ट होता है और न ही कभी उत्पन्न होता है। विद्युत आवेश एक स्थान से दूसरी स्थान को जा तो सकते हैं, पर वह कहीं से उत्पन्न नहीं हो सकते। हम यह कहते हैं कि आवेश संरक्षित (conserved) होता है।

अतः यदि बंद पृष्ठ से बाहर की ओर एक नेट धारा प्रवाहित हो रही हो, तो यह उस दर के बराबर होगी जिस दर से आयतन V के अंदर का कुल आवेश का ह्रास हो रहा है। आयतन को परिवद्ध करने वाले बंद पृष्ठ S से बाहर की ओर प्रवाहित हो रही विद्युत धारा, I यह होती है :

$$I = \int J \cdot dS \quad (8.9)$$

अतः हम आवेश के संरक्षण-नियम (law of conservation) को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\int_S J \cdot dS = -\frac{d}{dt} (q_{\text{अंदर}}) \quad (8.10)$$

आयतन के अंदर के आवेश ($q_{\text{अंदर}}$) को, आवेश घनत्व ρ के आयतन समाकल के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$q_{\text{अंदर}} = \int_V \rho dV \quad (8.11)$$

जहाँ V पृष्ठ S से परिवद्ध आयतन है।

समीकरण (8.10) में समीकरण (8.11) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\int_S J \cdot dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV \quad (8.12)$$

यहाँ आयतन (V) का मान निश्चित है, इसलिए समय अवकलज (time derivative) केवल फलन ρ पर ही लागू होता है। ρ स्थानिक निर्देशांक (spatial coordinates), और समय दोनों का ही फलन होता है, इसलिए ρ के समय अवकलज को, समाकल के अंदर लिखने के लिए उसे समय के सापेक्ष आंशिक अवकलज (partial derivative) के रूप में लिखा जाता है। अतः

$$\int_S J \cdot dS = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV \quad (8.13)$$

समीकरण (8.13) के, वाम पक्ष के पृष्ठ समाकल को डाइवर्जेंस प्रमेय (खंड 1 की इकाई 2 देखिए) की सहायता से आयतन समाकल (volume integral) में रूपांतरित किया जा सकता है। ऐसा करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

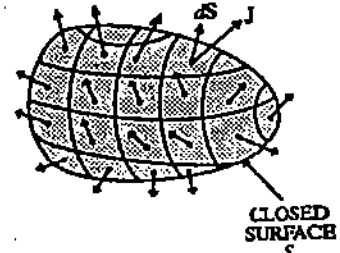
$$\int_V \nabla \cdot J dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

$$\int_V \left(\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dV = 0 \quad (8.14)$$

यहाँ, V पूरी तरह से स्वेच्छ (arbitrary) है और समीकरण (8.14) एक स्वेच्छ आयतन अल्पांश के लिए केवल तभी लागू होगा जबकि समाकल्य (integrand) शून्य हो। इस तरह,

$$\nabla \cdot J + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (8.15)$$

विद्युत धारा



चित्र 8.5: एक बंद पृष्ठ के लिए समाकल $\int J \cdot dS$ का मान पृष्ठ के भीतर के कुल आवेश q के परिवर्तन दर के मान के बराबर होता है।

इस अवकल समीकरण को सांतत्य समीकरण (continuity equation) कहा जाता है। यह समीकरण, आवेश के संरक्षण को, अवकल रूप में व्यक्त करता है। समीकरण (8.14), इसको अधिक स्पष्ट रूप में व्यक्त करता है। इस समीकरण के अनुसार, किसी भी बंद पृष्ठ के आयतन में, आवेश के मात्रा में हो रहे परिवर्तन के साथ-साथ, उस पृष्ठ से अंदर या बाहर की ओर आवेश का नेट प्रवाह अवश्य होना चाहिए। यदि अपरिवर्ती धाराओं (steady currents) पर विचार किया जाये तो

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ऐसा इसलिए होता है क्योंकि अपरिवर्ती धारा का अर्थ है समय के साथ प्रत्येक बिंदु पर \mathbf{J} का अंश होना। दूसरे शब्दों में, यह कहा जा सकता है कि परिच्छेद के बाहर और अंदर की ओर समान आवेश प्रवाहित होते हैं। अतः तंत्र के किसी भी बिंदु पर आवेश का जमाव नहीं हो सकता। इसलिए, इस स्थिति में सांतत्य समीकरण (continuity equation) यह हो जाता है :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (8.16)$$

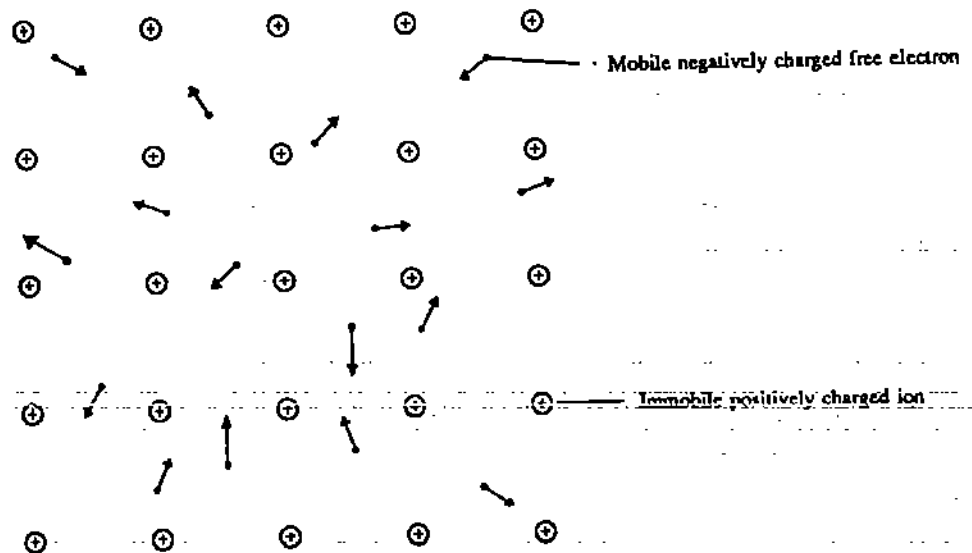
बोध प्रश्न 2

अपरिवर्ती धारा तंत्र का एक उदाहरण दीजिए और समीकरण (8.16) की सहायता से इसके लक्षण बताइए।

सांतत्य समीकरण का उपयोग डायोड वाल्व में धारा वितरण पर चर्चा करने में किया जा सकता है। पर, इस पर चर्चा करने से पहले आइए हम यह समझें कि धातुओं में विद्युत्-चालन क्यों होता है और वे कौन से कारक हैं, जो धातु की चालकता को प्रभावित करते हैं।

8.3 चालन की प्रक्रिया (CONDUCTION MECHANISM)

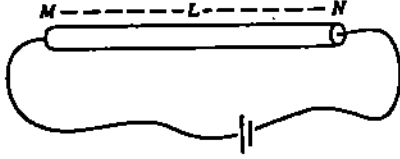
इस इकाई में हम धातु के तारों में प्रवाहित हो रही धाराओं पर चर्चा करेंगे। धातु में धातु-आयन एक नियमित व्यूह (regular array) में, जिसे जालक (lattice) कहते हैं, स्थिर होते हैं जिसकी



चित्र 8.6: एक धातु की क्रिस्टल संरचना का व्यवस्थित चित्र। धातु के धन आयन एक बृहद जालक पर स्थिर होते हैं। आयन बनने में प्रत्येक परमाणु एक या अधिक इलेक्ट्रॉन त्यागता है, जो कि क्रिस्टल में मुक्त रूप से भ्रमण करते रहते हैं।

वजह से ये सापेक्ष रूप से अगतिशील होते हैं। धातु आयन घन आवेशित होते हैं, क्योंकि धातु के परमाणुओं से एक या एक से अधिक इलेक्ट्रॉन निकल जाते हैं। ये इलेक्ट्रॉन, आयन-जालक में भ्रमण करने के लिए मुक्त होते हैं, जैसा कि चित्र 8.6 में दिखाया गया है। इन ऋण आवेशों की गति के कारण ही धातुओं में विद्युत् चालन होता है।

जब धातु के एक तार MN के सिरों को एक बैटरी से जोड़ दिया जाता है, जैसा कि चित्र 8.7 में दिखाया गया है, तब हम पाते हैं कि M से N की ओर धारा प्रवाहित होती है (श्रेणी में आमीटर लगाकर इस बात का पता लगाया जा सकता है कि तार में धारा प्रवाहित हो रही है या नहीं)।

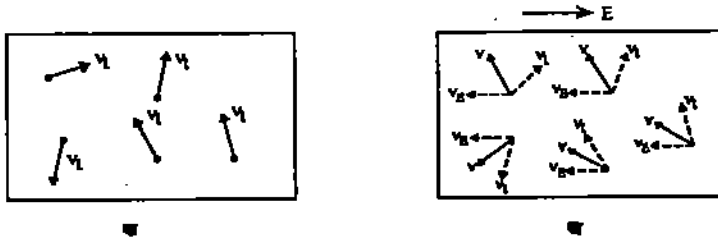


चित्र 8.7: एक बैटरी (वि. बा. व. का स्रोत) चालकीय तार में विद्युत क्षेत्र को बनाए रख सकती है।

सूक्ष्मस्तरीय रूप में आइए हम यह ज्ञात करें कि क्यों और कैसे एक विशेष दिशा में धारा प्रवाहित होने लगती है।

8.3.1 अपवाह वेग (drift velocity) और ओम नियम

जब धात्विक-चालक एक बैटरी से जुड़ा नहीं होता है, तब धातु में उपस्थित मुक्त इलेक्ट्रॉन अपनी तापीय ऊर्जा (thermal energy) के कारण अचर गति में रहते हैं। इस स्थिति में इलेक्ट्रॉनों का वेग यादृच्छिक (random) होता है, जैसा कि चित्र 8.8 क में दिखाया गया है।



चित्र 8.8: कुछ मुक्त इलेक्ट्रॉनों की गति : (क) बाह्य क्षेत्र के न होने पर (ख) बाह्य क्षेत्र के होने पर (जिनमें दोस रेखाओं से दिखाया गया है)। v_t तापीय वेग, v_E केवल विद्युत क्षेत्र के उपस्थिति के कारण वेग तथा v इलेक्ट्रॉन का नेट वेग है।

इस अवस्था में घन आयनों और अशुद्ध परमाणुओं (यदि कोई हो) से मुक्त इलेक्ट्रॉन बार-बार टकराते रहते हैं। प्रत्येक टक्कर पर वेग के परिमाण और दिशा में परिवर्तन हो जाता है। क्योंकि गति पूर्णतः यादृच्छिक है, इसलिए किसी भी क्षण, चालक के आयतन में, किसी भी दिशा में औसत वेग (average velocity) का मान शून्य होता है। अतः धारा प्रवाहित नहीं होती है। पर स्मरण रहे कि किसी भी क्षण, इन मुक्त इलेक्ट्रॉनों की औसत चाल शून्य नहीं होती। इसका मान 10^5 ms^{-1} कोटि (order) का होता है।

जब धातु के तार के सिरों को एक बैटरी से जोड़ दिया जाता है तब तार के प्रत्येक बिंदु पर एकसमान विद्युत क्षेत्र E स्थापित हो जाता है। इलेक्ट्रॉनों पर लगने वाले बल की दिशा, लागू किए गए विद्युत क्षेत्र की दिशा के विपरीत होती है। इस बल के कारण, तापीय वेग v_t के अतिरिक्त, इलेक्ट्रॉन एक अचर त्वरण $a = eE/m_e$ का अनुभव करते हैं, जहां, m_e इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान है। आपको आश्चर्य हो रहा होगा और आप यह जानना भी चाहेंगे कि विद्युत क्षेत्र की उपस्थिति में इलेक्ट्रॉन के वेग v_E में क्या लगातार वृद्धि होती रहती है। प्रयोगों से यह पता चलता है कि इस प्रकार वेग v_E में वृद्धि नहीं होती है। जैसे ही विद्युत क्षेत्र के कारण इलेक्ट्रॉन की चाल में बढ़ोतरी होती है, यह धातु में दोलन कर रहे आयन या अशुद्ध परमाणु से टकराता है। इस टक्कर का

परिणाम यह होता है कि इलेक्ट्रॉन, क्षेत्र में त्वरण के फलस्वरूप अर्जित वेग को खो देता है। दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि प्रत्येक टक्कर पर इलेक्ट्रॉन का वेग यादृच्छिकृत (randomised) हो जाता है और यह नए त्वरण से गतिमान होना शुरू करता है। यदि टक्कर के ठीक बाद इलेक्ट्रॉन का वेग u हो तो अगले टक्कर के ठीक पहले इसका वेग v यह होगा :

$$v_E = u + \frac{e E}{m_e} t \quad (8.17)$$

जहां t टक्करों के बीच का समय है। टक्कर के पहले सभी इलेक्ट्रॉनों के औसत वेग को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\langle v_E \rangle = \langle u \rangle + \frac{e E}{m_e} \langle t \rangle \quad (8.18)$$

जहां $\langle \rangle$ चिन्ह, प्राचल (parameter) के औसत मान को व्यक्त करता है।

प्रत्येक टक्कर का प्रभाव, वेग को घटाकर शून्य करना है और यादृच्छिक तापीय गति पुनः प्राप्त करना है, इसलिए हम $\langle u \rangle$ को $\langle v_r \rangle$ के रूप में लिख सकते हैं, जो कि शून्य होता है, जैसा कि पहले बताया जा चुका है। यदि $\langle t \rangle$ को τ से प्रकट करें, तो हमें यह प्राप्त होगा :

$$\langle v_E \rangle = \frac{e E}{m_e} \tau \quad (8.19)$$

यही कारण है कि समय के साथ v_E में लगातार वृद्धि नहीं होती बल्कि इसका एक औसत मान $\langle v_E \rangle$ होता है (देखिये समीकरण 8.19)। यहां τ दो लगातार टक्करों के बीच का औसत समय अर्थात् उस समय को प्रकट करता है, जिसमें विद्युत क्षेत्र के कारण इलेक्ट्रॉन मुक्त रूप से त्वरित हुआ था। इसे माध्य मुक्त समय (mean free time) कहते हैं। इसलिए मुक्त इलेक्ट्रॉनों की तापीय गति आपरिवर्तित (modified) हो जाती है, जैसा कि चित्र 8.8 (ख) में दिखाया गया है। चित्र से यह स्पष्ट है कि किसी भी क्षण परिणामी वेग (resultant velocity) $v_r + v_E$ होता है और प्रत्येक इलेक्ट्रॉन का परिणामी वेग भिन्न होता है। सभी इलेक्ट्रॉनों के औसत वेग को इस रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$\langle v \rangle = \langle v_r + v_E \rangle = \langle v_r \rangle + \langle v_E \rangle$$

जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि $\langle v_r \rangle$ का मान शून्य है, पर $\langle v_E \rangle$ शून्य नहीं होता, क्योंकि सभी मुक्त इलेक्ट्रॉनों के लिए v_E समान दिशा में होता है। अतः $\langle v \rangle = \langle v_E \rangle$ । इस प्रकार धात्विक तार के मुक्त इलेक्ट्रॉनों का एक औसत वेग होता है जो केवल लगाए गए विद्युत क्षेत्र के कारण ही होता है। इस वेग को इलेक्ट्रॉनों का **अपवाह वेग (drift velocity)** कहा जाता है और इसे v_d से प्रकट किया जाता है। अर्थात्

$$v_d = \frac{e E}{m_e} \tau \quad (8.20)$$

यह बंद वेग है जो कि समीकरण (8.5) में दिया गया है। अतः चालक में धारा घनत्व को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है :

$$J = nq v_d \quad (8.21)$$

प्रयोगों द्वारा यह पाया गया है कि अधिकांश पदार्थों में तथा विद्युत क्षेत्र के एक व्यापक परिसर में, धारा घनत्व, इसे उत्पन्न करने वाले विद्युत क्षेत्र की प्रबलता (strength) के समानुपाती होता है। इस संबंध को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$J = \sigma E \quad (8.22)$$

जहां σ आनुपातिकता स्थिरांक (proportionality constant) है और इसे पदार्थ की चालकता (conductivity) कहा जाता है। समीकरण (8.23) ओम नियम का एक कथन है। यह एक आनुभविक नियम है, अर्थात् एक व्यापकीकरण है जो कुछ प्रतिबंधों के अधीन कुछ पदार्थों पर किए

गए प्रयोग से प्राप्त हुआ है। यह एक प्रमेय नहीं है जिसका कि सार्वत्रिक रूप से पालन होना आवश्यक हो। σ का मान धातु चालकों के लिए काफी अधिक होता है और अच्छे अचालकों (insulators) के लिए काफी कम होता है। यह पदार्थ की भौतिक अवस्था, उदाहरण के लिए उसके तापमान पर भी निर्भर करता है जिसके बारे में आप अगले भाग में पढ़ेंगे। पर दिए हुए प्रतिबंधों के अधीन अधिकांश सामान्य चालकों के लिए यह E के परिमाण पर निर्भर नहीं करता। इस प्रकार के पदार्थों को ओमी (ohmic) या रेखिक (linear) पदार्थ कहा जाता है, और इस प्रकार के पदार्थों के लिए समीकरण 8.22 से यह पता चलता है कि J की दिशा सदा ही E की दिशा की ओर होती है। इससे यह पता चलता है कि चालकता का मात्रक $(Am^{-2})/(Vm^{-1})$ या $AV^{-1}m^{-1}$ है। पर एक VA^{-1} ओम को (जिसका प्रतीक symbol Ω है) कहा जाता है। अतः चालकता का SI मात्रक Ωm^{-1} है। धारा घनत्व और विद्युत क्षेत्र के बीच के संबंध को व्यक्त करने के लिए चालकता के स्थान पर इसके व्युत्क्रम (reciprocal) जिसे प्रतिरोधकता ρ कहा जाता है, का प्रयोग इस प्रकार कर सकते हैं:

$$E = \rho J \quad (8.23)$$

प्रतिरोधकता का मात्रक Ωm है। क्योंकि E और J दोनों ही सूक्ष्मस्तरीय प्राचल (microscopic parameters) हैं, इसलिए ρ , चालक के एक सूक्ष्मस्तरीय गुणधर्म को परिभाषित करता है। चित्र 8.7 में, दिखाये गये तार में, विद्युत क्षेत्र की दिशा MN दिशा की ओर है और इसका मान सर्वत्र $E = V/L$ $ckvPk cw \text{ \AE Zkckg } V$, तार के दोनों सिरों के बीच का विभवांतर है। इस तरह,

$$J = \sigma \frac{V}{L}$$

और कुल धारा $I = JS = \frac{\sigma SV}{L}$, जहां S तार का अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल है। इससे यह प्राप्त होता है :

$$\frac{V}{I} = \frac{L}{\sigma S} = \frac{\rho L}{S} \quad (8.24)$$

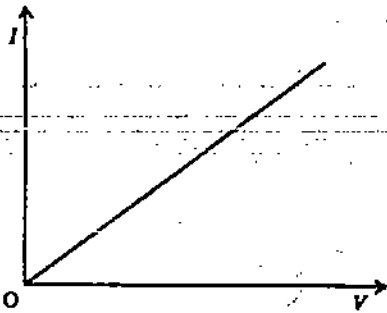
अनुपात V/I को तार का प्रतिरोध R कहा जाता है और समीकरण 8.24 को इस रूप में लिखा जाता है :

$$V = IR \quad (8.25)$$

जहां

$$R = \rho L/S \quad (8.26)$$

यह ओम नियम का और भी अधिक सुपरिचित ब्यंजक व्यक्त करता है। इस समीकरण से यह पता चलता है कि चालक का प्रतिरोध R लगाए गए विभवांतर (potential difference) पर निर्भर नहीं करता। इसलिए, रेखिक चालकों (वे चालक जो ओम-नियम का पालन करते हैं) के लिए $V-I$ का ग्राफ एक सरल रेखा होती है, जैसा कि चित्र 8.9 में दिखाया गया है।



चित्र 8.9: रेखिक चालक का $V-I$ अभिलक्षण

प्रतिरोधकता ρ चालक के पदार्थ की प्रकृति पर निर्भर करती है, जबकि प्रतिरोध न केवल माध्यम की प्रकृति पर निर्भर करता है, बल्कि इसकी भौतिक विमाओं (physical dimensions) पर भी निर्भर

विद्युत धारा

आप यह अवश्य जानते होंगे कि निर्वात में मुक्त रूप से गिर रहे पिंड का वेग $v = gt$ होता है जिसमें समय के साथ लगातार वृद्धि होती रहती है। पर, यदि पिंड एक श्यान (viscous) तरल में गिर रहा हो, तो वह एक अचर वेग, जिसे सीमांत वेग (limiting velocity) कहते हैं, से गिरने लगता है। ठीक इसी प्रकार, क्रिस्टल जालक के प्रभाव को एक श्यान बल से निरूपित किया जा सकता है, जो कि चालन इलेक्ट्रॉन पर कार्य कर रहा होता है जबकि उनकी प्राकृतिक गति विद्युत क्षेत्र से प्रभावित हो रही होती है।

समीकरण 8.22 केवल समदैशिक (isotropic) पदार्थों जिनमें विद्युत गुणधर्म सभी दिशाओं में समान होते हैं, के लिए लागू होता है।

प्रायः ρ का प्रयोग प्रतिरोधकता के प्रतीक के रूप में किया जाता है और σ का प्रयोग चालकता के प्रतीक के रूप में किया जाता है, हालांकि इनका प्रयोग क्रमशः आयतन आवेश घनत्व और पृष्ठ आवेश घनत्व के मात्रकों के रूप में भी किया जाता है। अतः यदि कोई विशेष उल्लेख न हो तो शेष इकाई में ρ का प्रयोग प्रतिरोधकता के रूप में और σ का प्रयोग चालकता के मात्रक के रूप में किया जायेगा।

करता है। उन लोगों के लिए प्रतिरोधकता का विशेष महत्व है, जो परमाण्विक दृष्टिकोण से चालक के व्यवहार का अध्ययन करना चाहते हैं। समीकरण (8.20) को समीकरण (8.21) पर लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$J = nev_d = \frac{ne^2\tau}{m_e} E \text{ (यहाँ हमने } q \text{ के स्थान पर } e \text{ लिखा है)}$$

समीकरण (8.22) से इसकी तुलना करने पर हमें चालकता का निम्न व्यंजक प्राप्त होता है:

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m_e} \quad (8.27)$$

तथा प्रतिरोधकता का निम्न व्यंजक प्राप्त होता है :

$$\rho = \frac{m_e}{ne^2\tau} \quad (8.28)$$

इस समीकरण को देखने से यह पता चलता है कि धातु की प्रतिरोधकता, मुक्त इलेक्ट्रॉनों के घनत्व, इनके द्रव्यमान और आवेश तथा माध्य मुक्त समय (mean free time) पर निर्भर करता है। तापमान पर प्रतिरोधकता का निर्भर होने का कारण तापमान के साथ τ का परिवर्तन है। अगले भाग में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि किस प्रकार प्रतिरोधकता तापमान पर निर्भर करती है।

बोध प्रश्न 3

समीकरण (8.22) और समीकरण (8.25) ओम-नियम के गणितीय व्यंजक है। समीकरण (8.25) से समीकरण (8.22) प्राप्त कीजिए।

8.3.2 प्रतिरोधकता पर तापमान का प्रभाव

अभी तक हम एक सरल क्लासिकल मॉडल (classical model) पर विचार कर रहे थे जिसमें इलेक्ट्रॉनों को आवेशित कणों के एक गैस के रूप में माना गया है जो कि बाह्य विद्युत क्षेत्र के प्रभाव में त्वरित होते रहते हैं। इसी आधार पर हमने प्रतिरोधकता का व्यंजक प्राप्त किया था। पर, यदि हम तापमान पर ρ की निर्भरता या दूसरे शब्दों में, तापमान पर τ की निर्भरता के बारे में अच्छी जानकारी प्राप्त करना चाहते हों, तो हमें एक अन्य मॉडल लेना होगा। भाग्यवश, इसकी व्याख्या क्वांटम यांत्रिक मॉडल (quantum mechanical model) के आधार पर की जा सकती है। इसके अनुसार अब हमें इलेक्ट्रॉन को एक छोटा आवेशित कण नहीं मानना चाहिए, बल्कि इसे, धातु के बड़े हिस्से के साथ-अन्योन्यक्रिया (interacting) करते हुए, एक तरंग के समान व्यवहार करते हुए मानना चाहिए।

यदि धातु का तापमान बहुत कम, मान लीजिए शून्य, हो तो सभी आयन अपने नियमित जालक स्थितियों पर दृढ़ रूप से स्थिर होते हैं। इसकी वजह से इलेक्ट्रॉन और आयन के बीच क्लासिकल टक्कर होने की संभावना नहीं होती। इसका अर्थ यह है कि ऐसी स्थितियों में टक्करों के बीच का समय काफी अधिक या अनंत होता है। इलेक्ट्रॉन तरंग की प्रगति में रुकावट का कारण आयनों की नियमित व्यवस्था नहीं है, बल्कि व्यवस्था की अनियमितता है। तापमान में वृद्धि करने पर आयन कंपन करने लगते हैं और इसकी वजह से ठोस उस स्थिति की तुलना में, जबकि आयन विरामावस्था में थे, कम नियमित व्यवस्था वाले ठोस की तरह दिखायी पड़ते हैं। इसके कारण टक्करों के बीच का समय कम हो जाता है। इसलिए तापमान में की गई वृद्धि के साथ माध्य मुक्त समय τ में कमी आती है। यही कारण है कि तापमान में वृद्धि के साथ प्रतिरोधकता में वृद्धि होती है।

8.3.3 ओम नियम का भंग होना (Breakdown of Ohm's Law)

आप यह सोच रहे होंगे कि धातु सदा ही रैखिक चालक की तरह व्यवहार करते हैं। पर, बात ऐसी है नहीं। कुछ प्रतिबंधों के अधीन धातु रैखिक चालक के रूप में व्यवहार नहीं करता। ऊपर किए

गये विश्लेषण में हमने यह माना है कि धातु पर लगाया गया विद्युत् क्षेत्र का मान इतना कम है कि यह धातु में स्थित इलेक्ट्रॉन के वेग पर कोई विशेष प्रभाव नहीं डालता। आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि यदि विद्युत् क्षेत्र के मान में बहुत अधिक वृद्धि कर दी जाएगी, तो क्या होगा। आइए पहले हम यह देखें कि जब प्रयुक्त विद्युत् क्षेत्र का मान बहुत कम होता है तो टकराओं के बीच का समय क्या होता है। ऐसी स्थिति में यदि अगली टकरा से पहले एक इलेक्ट्रॉन द्वारा तय की गई दूरी को λ से प्रकट करें, जिसे इलेक्ट्रॉन का माध्य मुक्त पथ (mean free path) कहा जाता है, तो दो टकराओं के बीच का औसत समय τ यह होगा :

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle |v_r + v_d| \rangle} \quad (8.29)$$

जहां $\langle |v_r + v_d| \rangle$ दो टकराओं के बीच की औसत चाल है, न कि औसत वेग। प्रयोगशाला में सामान्यतः प्रयुक्त किए जाने वाले विद्युत् क्षेत्रों के लिए v_r ($\approx 10^8 \text{ cm s}^{-1}$) की तुलना में v_d ($\approx 10^{-2} \text{ cm s}^{-1}$) बहुत छोटा होता है। अतः समीकरण (8.29) को इस रूप में लिखा जा सकता है।

$$\tau = \frac{\lambda}{\langle |v_r| \rangle} \quad (8.30)$$

जब हम बहुत अधिक विद्युत् क्षेत्र लगाते हैं, तब इलेक्ट्रॉनों की अपवाह चाल अर्थात् v_d की तुलना, v_r के साथ की जा सकती है। तब टकराओं के बीच लगने वाला समय क्षेत्र लगाने से पहले टकराओं के बीच लगने वाले समय की तुलना में कम हो जाएगा। इस प्रभाव को हमने अपने सिद्धांत में शामिल नहीं किया है। इस स्थिति में, ρ में, प्राचल v_d भी होगा जो कि प्रबल रूप से क्षेत्र आश्रित है। अतः इन परिस्थितियों में धातु, ओम नियम का पालन नहीं करेंगे।

जब क्षेत्र का मान बहुत ही अधिक होता है तो एक अन्य घटना भी घटती है - मुक्त इलेक्ट्रॉन इतने अधिक त्वरित हो जाते हैं कि उनमें पर्याप्त ऊर्जा आ जाती है। इन ऊर्जाओं से इलेक्ट्रॉन परमाणु से इतना तेज टकराते हैं कि वह अपनी परमाणु के एक अन्य इलेक्ट्रॉन को बाहर निकाल देते हैं। इस तरह अतिरिक्त इलेक्ट्रॉन मुक्त हो कर त्वरित हो जाते हैं। जब ये त्वरित अतिरिक्त इलेक्ट्रॉन अन्य परमाणुओं से टकराते हैं तो ये, और आवेश मुक्त करते हैं। इस तरह, इस प्रक्रिया से मुक्त आवेश वाहकों का एक तूफान (avalanche) आ जाता है। इस स्थिति में तेजी से बढ़ती हुई धारा उत्पन्न होती है और यदि किसी प्रकार तूफान को सीमित नहीं किया जाता तो इस प्रक्रिया से पदार्थ नष्ट हो सकता है। यहां ओम-नियम पूरी तरह भंग हो जाता है।

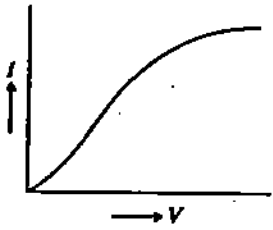
इस इकाई के अंत में हम निर्वात नलिका (vacuum tube) पर संक्षिप्त चर्चा करेंगे। यहां हम विद्युत् धारा की संकल्पनाओं को अर्थात् अभी तक आपने जो कुछ पढ़ा है, उसे निर्वात नलिका पर लागू करेंगे और यह पता लगायेंगे कि निर्वात नलिका, ओम-नियम का पालन नहीं करते।

8.4 डायोड (अन-ओमीय चालक) के लिए धारा-वोल्टता संबंध

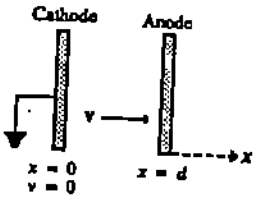
ऐसे अनेक चालक हैं जो ओम-नियम का पालन नहीं करते। ऐसे चालकों को अरैखिक चालक (non-linear conductors) कहा जाता है। ऐसे चालकों का $V-I$ अभिलक्षण एक सरल रेखा नहीं होती है। आप यह अवश्य जानते होंगे कि ऐसे अरैखिक चालकों के उदाहरण हैं: निर्वात नलिका, डायोड और विद्युत् अपघट्य (electrolytics)। निर्वात डायोड के लिए अभिलक्षण के रूप को चित्र 8.10 में दिखाया गया है। इस भाग में हम सांतत्य समीकरण (continuity equation) की सहायता से एक निर्वात डायोड में धारा और वोल्टता के बीच के संबंध को ज्ञात करेंगे।

डायोड में, मुख्यतया, दो इलेक्ट्रॉड होते हैं। एक इलेक्ट्रॉड पर, जिसे कैथोड कहा जाता है, एक ऐसे पदार्थ का लेप लगाया जाता है जो गर्म होने पर इलेक्ट्रॉन उत्सर्जित (emits) करता है। दूसरा इलेक्ट्रॉड, जिसे एनोड कहा जाता है, एक धातु का प्लेट होता है। एक बैटरी की सहायता से कैथोड के सापेक्ष एनोड को एक ऋण विभव पर रखा जाता है। इन दोनों इलेक्ट्रॉडों को प्रायः एक कांच की

विद्युत धारा और चुंबकीय क्षेत्र



चित्र 8.10: निर्वात डायोड का धारा वोल्टता अभिलक्षण



चित्र 8.11: समतल समांतर कैथोड और एनोड वाला एक निर्वात डायोड

द्यूब में रखा जाता है जिसे बहुत कम दाब (10^{-5} cm पारा) तक निर्वात किया जाता है। गर्म कैथोड से बहुत कम वेग वाले इलेक्ट्रॉन निकलते हैं जो ऋण आवेशित होने के कारण कैथोड और एनोड के बीच के क्षेत्र में स्थापित विद्युत क्षेत्र की वजह से धन एनोड की ओर त्वरित होते हैं। कैथोड और एनोड के बीच के क्षेत्र में विद्युत धारा इन्हीं इलेक्ट्रॉनों की गति के कारण होती है।

इस डायोड में, स्थानीय आवेश घनत्व ρ (यहां और इस भाग में ρ , आवेश घनत्व को प्रकट करता है) nq के बराबर होता है, जहां n , इलेक्ट्रॉनों का स्थानीय घनत्व है। समीकरण (8.4) के अनुसार स्थानीय धारा घनत्व J का मान ρv होता है, जहाँ v विचाराधीन क्षेत्र में इलेक्ट्रॉनों का वेग है। (ऐसा इसलिए होता है क्योंकि इस स्थिति में वास्तविक वेग ही अपवाह वेग होता है।) यदि यह मान लिया जाए कि J का कोई y -या z -घटक नहीं है, जैसा कि चित्र 8.11 में दिखाया गया है और यदि धारा घनत्व अपरिवर्ती हो तो $\text{div } J = 0$ अर्थात् $\frac{dJ_x}{dx} = 0$ होता है। इसका अर्थ यह है

कि यदि केवल x दिशा में इलेक्ट्रॉन गतिमान हो रहें हो तो कैथोड और एनोड के बीच के किसी भी तल को प्रति सेकंड पार करने वाले इलेक्ट्रॉनों की संख्या समान होती है। इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि ρv अचर है। पर, यहां आप यह देख सकते हैं कि v अचर नहीं है, x के साथ इसमें परिवर्तन होता रहता है क्योंकि क्षेत्र द्वारा इलेक्ट्रॉन त्वरित होते हैं अतः ρ भी अचर नहीं है। कैथोड के समीप ऋण आवेश घनत्व अधिक होता है, तथा एनोड के समीप कम होता है - यह बात ठीक उसी प्रकार होती है जैसे कि राजमार्ग पर ट्रैफिक सिग्नल के समीप वाहनों का घनत्व अधिक होता है और जहां ट्रैफिक तेज रफतार से चल रही होती है वहां वाहनों का घनत्व कम होता है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि कैथोड से उत्सर्जित इलेक्ट्रॉन एक स्थानिक आवेश (space charge) बनाते हैं जो निम्न एनोड वोल्टता के लिए कैथोड से और अधिक इलेक्ट्रॉनों के उत्सर्जन (emission) को रोकते हैं (दो इलेक्ट्रोडों के बीच इलेक्ट्रॉनों का निम्न त्वरण होना)।

ऊपर निकाले गए निष्कर्ष से आइए हम डायोड-धारा ज्ञात करें। गणित को सरल बनाने के लिए हम यह मान लेते हैं कि :

- i) कैथोड पर विभव शून्य होता है जबकि एनोड पर विभव V_0 है।
- ii) कैथोड और एनोड के बीच की दूरी 'd' है जो कि इतनी कम है कि क्षेत्र को एकसमान एवं इलेक्ट्रॉनों के पृष्ठों पर अभिलंब माना जा सकता है।
- iii) कैथोड से उत्सर्जित होने के तुरंत बाद इलेक्ट्रॉनों का वेग (v) शून्य होता है और कैथोड से x दूरी पर वेग को v_x से और विभव को $V(x)$ से प्रकट किया जाता है।

कैथोड से दूरी x पर विभव $V(x)$ यह होता है :

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8.31)$$

जहां ρ , बिंदु x पर आवेश घनत्व है।

$$\text{या} \quad \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{J}{\epsilon_0 v_x} \quad (8.32)$$

क्योंकि $J = \rho v$ और x पर $v = v_x$ है।

मान लीजिए कि इलेक्ट्रॉन का प्रारंभिक वेग शून्य है। तब किसी भी बिंदु पर इसका वेग v , विभव V से, जिससे इलेक्ट्रॉन स्थानांतरित होता है, निम्नलिखित संबंध से संबंधित होता है :

$$\frac{1}{2} m v_x^2 = qV(x) \quad (8.33)$$

समीकरण (8.32) में समीकरण (8.33) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है:

$$\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} V(x)^{-1/2}$$

गाउस-नियम का अवकल रूप यह होता है:

$$\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

जहां ρ आवेश घनत्व है। इसे समकोणिक निर्देशांक (rectangular co-ordinates) में इस रूप में लिखा जाता है

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

क्योंकि $E_x = -\frac{\partial V(x)}{\partial x}$, आदि।

जैसाकि इकाई 3 में दिखाया गया है प्रतिस्थापन पर हमें यह प्राप्त होगा

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(y)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V(z)}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (8.31)$$

दोनों पक्षों को $2 \frac{dV(x)}{dx}$ से गुणा करने पर हमें यह प्राप्त होता है:

$$2 \frac{dV(x)}{dx} \frac{d^2V(x)}{dx^2} = 2 \frac{J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} V(x)^{-1/2} \frac{dV(x)}{dx}$$

या

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{dV(x)}{dx} \right)^2 = \frac{4J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} \frac{d}{dx} (V(x))^{1/2}$$

ऊपर वाले समीकरण को x के सापेक्ष समाकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है:

$$\left(\frac{dV(x)}{dx} \right)^2 = \frac{4J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} V^{1/2}(x) + C_1$$

जहाँ C_1 समाकलन अचर है। क्योंकि $x = 0$ पर $V(x)$ और $\frac{dV(x)}{dx}$ दोनों शून्य होते हैं,

इसलिए $C_1 = 0$ है।

$$\therefore \frac{dV(x)}{dx} = 2 \left[\frac{J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} \right]^{1/2} V^{1/4}(x)$$

या

$$V^{-1/4}(x) dV(x) = 2 \left[\frac{J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} \right]^{1/2} dx$$

x के सापेक्ष पुनः समाकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\frac{4}{3} V^{3/4}(x) = 2 \frac{J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} x + C_2$$

यहाँ भी समाकलन अचर $C_2 = 0$ है, क्योंकि $x = 0$ पर $V(x) = 0$ होता है। ऊपर दिए गए समीकरण का वर्ग करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$V^{3/2}(x) = \frac{9}{4} \frac{J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} x^2 \quad (8.34)$$

क्योंकि एनोड पर $x = a$ है, इसलिए समीकरण (8.34) से हमें यह प्राप्त होता है.

$$V_a^{3/2} = \frac{9}{4} \frac{J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} a^2 \quad (8.35)$$

या

$$J = \frac{4}{9} \epsilon_0 \left(\frac{2q}{m} \right)^{1/2} \frac{V_a^{3/2}}{a^2} \quad (8.36)$$

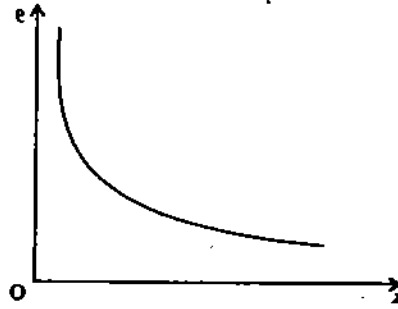
यह सुप्रसिद्ध चाइल्ड-लॉंगम्यूर (Child-Langmuir) या तीन अर्ध घात नियम (three-halves power law) है। इस समीकरण को देखने से यह पता चलता है कि डायोड में धारा घनत्व J या धारा I , एनोड और कैथोड के बीच लगाए गए विभवांतर के तीन अर्ध घात के समानुपाती होता है।

न 4

समीकरण 8.31 से निम्नलिखित संबंध प्राप्त कीजिए :

$$\rho(x) = -\frac{4 \epsilon_0}{9} \frac{V_a}{a^{4/3}} x^{-2/3} \quad (8.37)$$

समीकरण (8.37) से, कैथोड से दूरी के साथ आवेश घनत्व का परिवर्तन प्राप्त होता है। इस परिवर्तन को चित्र 8.12 में दिखाया गया है :



चित्र 8.12: आवेशों में, केंद्र से दूरी के एक फलन के रूप में आवेश घनत्व का परिवर्तन

बोध प्रश्न 5

आप जानते हैं कि चालक के भीतर विद्युत् क्षेत्र का मान शून्य होता है। इसलिए, यदि एक आवेश को चालक के भीतर रखा जाए, तो यह पृष्ठ की ओर गतिमान होगा और स्वयं को इस प्रकार वितरित करेगा कि पृष्ठ के भीतर क्षेत्र शून्य हो जाता है। महत्व इस बात का है कि यह घटना कितनी तेजी से घटती है, और रोचक बात यह है कि इस समय को ज्ञात करने में सांतत्य समीकरण सहायक होता है। चालक के भीतर आवेश के क्षय (decay) का अभिलक्षणिक समय (characteristic time) ज्ञात कीजिए। (यहां यह मान लीजिए प्रारंभिक आवेश घनत्व ρ_0 है।)

8.5 सारांश

- आवेश के प्रवाह को धारा कहते हैं। धारा का मात्रक एम्पीयर है। किसी दिए हुए बिंदु से इकाई समय में प्रवाहित हो रहे आवेश की मात्रा को धारा कहते हैं।

$$I = \frac{dq}{dt}$$

- धारा घनत्व \mathbf{J} एक सदिश राशि है जो प्रति इकाई क्षेत्रफल में प्रवाहित धारा को निर्धारित करता है। किसी भी बिंदु पर \mathbf{J} की दिशा वह दिशा होती है जिस ओर, उस बिंदु पर रखा गया धन आवेश, गतिमान होता है।

$$\mathbf{J} = nq \mathbf{v}_d$$

- एक पृष्ठ से होकर गुजरने वाली कुल धारा का मान, इस पृष्ठ पर धारा घनत्व के अभिवाह के मान के बराबर होती है :

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

जहां $d\mathbf{S}$ पृष्ठ क्षेत्र का अल्पांश है और समाकल को पृष्ठ पर लिया गया है।

- इकाई समय में पृष्ठ S से गुजर रहा कुल आवेश $\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ होता है। यदि S , आयतन V को परिवर्द्ध करने वाला एक बंद पृष्ठ हो, तो S से गुजरने वाले आवेश की हानि दर वही होगी जो कि V में आविष्ट आवेश की ह्रास दर है, अर्थात् :

$$\int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV$$

ऊपर दिए गए समीकरण का अवकल रूप निम्नलिखित सांतत्य समीकरण होता है :

विद्युत धारा

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

ये दोनों ही कथन आवेश के संरक्षण नियम को व्यक्त करते हैं।

- किसी पदार्थ की चालकता σ , वह गुणधर्म है जो पदार्थ में धारा घनत्व और विद्युत क्षेत्र के अनुपात के बराबर होती है :

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

प्रतिरोधकता ρ , चालकता की व्युत्क्रम होती है।

- प्रतिरोध R , पदार्थ के एक विशेष भाग का गुणधर्म होता है। यह विभवान्तर तथा धारा के अनुपात के बराबर होता है :

$$R = \frac{V}{I}$$

पदार्थ के किसी भाग का प्रतिरोध उसकी प्रतिरोधकता और भौतिक विमाओं पर निर्भर करता है। लंबाई L , एक-समान अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल S और प्रतिरोधकता ρ वाले पदार्थ का प्रतिरोध यह होता है :

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

- मुक्त इलेक्ट्रॉनों के होने के कारण धातुओं में चालन होता है। धातुओं में, लगाए गए विद्युत क्षेत्र के कारण मुक्त इलेक्ट्रॉनों का त्वरण तथा इलेक्ट्रॉनों का धातु आयनों और अशुद्धताओं के साथ टक्कर के संयोजित प्रभाव के कारण ही अपवाह वेग होता है। इस आधार पर प्रतिरोधकता का व्यंजक यह होता है:

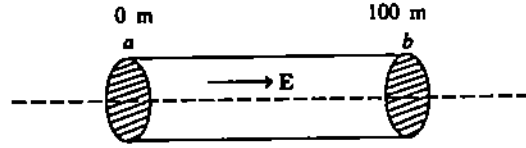
$$\rho = \frac{m_e}{ne^2 \tau}$$

अतः प्रतिरोधकता प्रति एकांक आयतन में मुक्त इलेक्ट्रॉनों की संख्या, उनके द्रव्यमान और आवेश तथा माध्य मुक्त समय पर निर्भर करती है।

8.6 अंत में कुछ प्रश्न

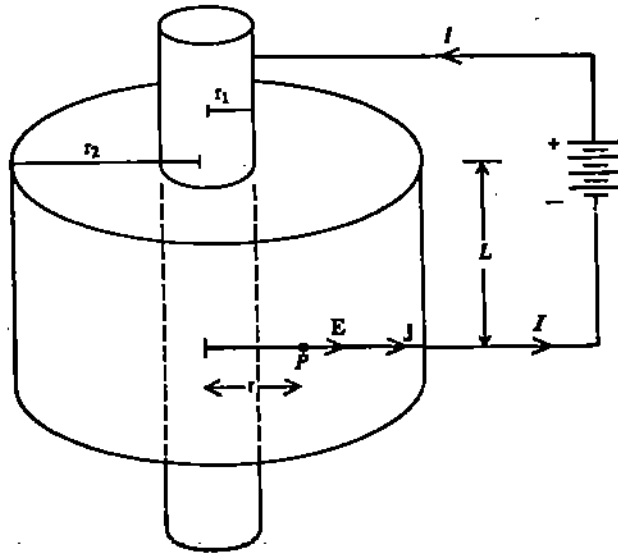
- 1) टी. वी. में, इलेक्ट्रॉन किरण पुंज शूट (shoot) होते हैं। किरण पुंज धारा $10 \mu\text{A}$ के बराबर है। बताइए कि एक सेंकड में कितने इलेक्ट्रॉन टी. वी. स्क्रीन पर टकरा रहे हैं। यह भी बताइए कि एक मिनट में कितना आवेश स्क्रीन पर टकरा रहा है।
- 2) बोर मॉडल (Bohr model) में हाइड्रोजन परमाणु का इलेक्ट्रॉन $5.3 \times 10^{-11} \text{m}$ त्रिज्या वाली एक वृत्तीय कक्षा में $2.2 \times 10^6 \text{ms}^{-1}$ की चाल से घूमता है। कक्षा में इसकी आवृत्ति और धारा I ज्ञात कीजिए।
- 3) 2.00A वाली धारा 1.00mm^2 के अनुप्रस्थ परिच्छेद वाले एक तांबे के तार में प्रवाहित हो रही है। इस तार में इलेक्ट्रॉनों का अपवाह वेग क्या है? इन परिस्थितियों में इस तार में 10.0cm (लगभग तापदिस (incandescent) बल्ब तंतु की लंबाई) दूरी तय करने में एक इलेक्ट्रॉन कितना समय लेता है? यहां यह मान लीजिए कि एक घन मीटर में चालन इलेक्ट्रॉनों की संख्या 8.43×10^{28} है।
- 4) व्यास d और लंबाई L वाले एक तांबे के तार पर विभवांतर लगाया गया है। (क) V को दूना, (ख) L को दूना और (ग) d को दूना करने पर इलेक्ट्रॉन की अपवाह चाल पर क्या प्रभाव पड़ता है?

- 5) i) चित्र 8.13 देखिए। प्रतिरोधकता $\rho = 1.72 \times 10^{-8} \Omega\text{m}$ और धारा घनत्व $J = 2.54 \times 10^6 \text{ amp m}^{-2}$ वाले तांबे के चालक में विद्युत क्षेत्र क्या होगा ?



चित्र 8.13

- ii) तांबे के तार में 100m की दूरी पर स्थित दो बिंदुओं के बीच विभवान्तर क्या होगा ?
- 6) जैसा कि चित्र 8.14 में दिखाया गया है, r_1 त्रिज्या वाला एक धातु दंड (rod) r_2 त्रिज्या और L लंबाई वाले धातु के एक बेलनाकार कोश (shell) के साथ संकेन्द्री है। दंड और बेलन के बीच के खाली स्थान को प्रतिरोधकता ρ वाले एक उच्च प्रतिरोध पदार्थ से अच्छी तरह से भर दिया गया है। टर्मिनल वोल्टता V वाली एक बैटरी इससे जोड़ दी गई है, जैसा की चित्र में दिखाया गया है। दंड और बेलन के प्रतिरोधों की उपेक्षा करते हुए (क) कुल धारा I (ख) दंड और बेलन के बीच के किसी बिंदु P पर धारा घनत्व J और विद्युत क्षेत्र E तथा (ग) दंड और बेलन के बीच के प्रतिरोध R के व्यंजक प्राप्त कीजिए।



चित्र 8.14

8.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

- 1) धारा जैसी अन्य भौतिक राशियां ये हैं :

i) ऊष्मा-चालन-में तापीय-धारा

ii) धारा रेखी गति (stream line motion) में पानी या किसी असंपीड्य द्रव की प्रवाह धारा (flow current)।

- 2) अचर धारा ले जाने वाला तार, अपरिवर्ती धारा का एक उदाहरण है। जैसा कि हम देख चुके हैं, अपरिवर्ती धारा तंत्र वह तंत्र होता है जिसमें प्रत्येक बिंदु पर J समय के साथ अचर रहे। ऐसे तंत्र में किसी भी बिंदु पर आवेश का कोई जमाव नहीं हो सकता। इसका अर्थ यह है कि धारा प्रवाह के किसी भी क्षेत्र में धारा का कोई स्रोत या अभिगम नहीं होता है।

धारा का स्रोत (source) या अभिगम (sink) वह होता है जिससे, एक चालन क्षेत्र, में धारा अंदर दी जा सकती हो या जिससे धारा निकाली जा सकती हो। उदाहरण के लिए, इलेक्ट्रोड।

3) समीकरण 8.25 से हमें यह प्राप्त है : $\frac{V}{L} = R$

दोनों पक्षों को (A/L) से गुणा करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{V}{L} \times \frac{A}{L} = R \frac{A}{L}$$

पदों को व्यवस्थित करने पर हम इस प्रकार लिखते हैं:

$$\frac{V}{L} \frac{1}{L/A} = \frac{AR}{L} = \rho = \frac{1}{\sigma}$$

क्योंकि

$$\frac{V}{L} = E \text{ और } \frac{I}{A} = J$$

$$\therefore E \cdot \frac{1}{J} = \frac{1}{\sigma} \text{ or } J = \sigma E \quad \text{जो कि समीकरण 8.22 है।}$$

4) समीकरण (8.31) के अनुसार $\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

उपर्युक्त समीकरण से हम पहले ही समीकरण (8.34) प्राप्त कर चुके हैं, अर्थात्

$$V^{3/2}(x) = \frac{9}{4} \frac{J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} x^2$$

तथा समीकरण (8.35) भी प्राप्त कर चुके हैं अर्थात्

$$V_a^{3/2} = \frac{9}{4} \frac{J}{\epsilon_0} \left(\frac{m}{2q} \right)^{1/2} a^2$$

एक को दूसरे से भाग देकर और पदों को व्यवस्थित करने पर हमें यह प्राप्त होता है:

$$V^{3/2}(x) = \left(\frac{V_a^{3/2}}{a^2} \right) x^2 \quad (1)$$

$$\text{या} \quad V(x) = V_a \left(\frac{x}{a} \right)^{4/3}$$

$$\text{या} \quad \frac{dV(x)}{dx} = \frac{V_a}{a^{4/3}} \frac{4}{3} x^{1/3}$$

$$\text{या} \quad \frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{V_a}{a^{4/3}} \frac{4}{9} x^{-2/3} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$$

$$\therefore \rho(x) = -\frac{4\epsilon_0}{9} \frac{V_a}{a^{4/3}} x^{-2/3}$$

3) सांतत्य समीकरण के अनुसार,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{d\rho}{dt}$$

एक चालक में $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ होता है, जहाँ σ चालकता है। गाउस नियम के अनुसार $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon$ जहाँ ϵ चालक का परावैद्युतांक (permittivity) है। इस तरह,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot \sigma \mathbf{E} = \sigma \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma \rho}{\epsilon} = -\frac{d\rho}{dt}$$

इन्हें व्यवस्थित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{\sigma}{\epsilon} dt$$

समाकलन करने पर

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{d\rho'}{\rho'} = -\int_0^t \frac{\sigma}{\epsilon} dt$$

या
$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = -\frac{\sigma t}{\epsilon}$$

तब
$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

जहाँ ρ_0 प्रारंभिक आवेश घनत्व है और t समय के बाद आवेश घनत्व ρ है। राशि $\frac{\epsilon}{\sigma} = \tau$ को अभिलक्षणिक समय कहा जाता है।

बहुत ही अच्छे चालकों के लिए τ काफी कम होगा और अचालकों के लिए τ अधिक होगा।

τ को प्रायः विश्रान्ति काल (relaxation) कहा जाता है।

अंत में कुछ प्रश्न

- 1) मान लीजिए प्रति सेकंड इलेक्ट्रॉनों की संख्या n है।

$$\text{तब } n = \frac{I}{e} = \frac{10 \times 10^{-6} \text{ Cs}^{-1}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} = 6.3 \times 10^{13} \text{ इलेक्ट्रॉन प्रति सेकंड।}$$

स्क्रीन पर टकराने वाले आवेश Q का मान यह है :

$$Q = It = (10 \mu \text{ Cs}^{-1})(60 \text{ s}) = 600 \mu \text{C}$$

क्योंकि आवेश इलेक्ट्रॉन है, इसलिए वास्तविक आवेश यह होगा

$$Q = -600 \mu \text{C}$$

- 2) $f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{2.2 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}}{2\pi (5.3 \times 10^{-11} \text{ m})} = 6.6 \times 10^{15} \text{ rev s}^{-1}$

कक्षा में घूमते हुए इलेक्ट्रॉन को लूप के चारों ओर आवेश q के घूमने के तुल्य माना जा सकता है। लूप के किसी बिंदु से गुजर रहा प्रति सेकंड आवेश, अर्थात्, धारा यह होती है :

$$\begin{aligned} \text{धारा } I &= eqf = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(6.6 \times 10^{15} \text{ s}^{-1}) \\ &= 1.06 \mu \text{A} \end{aligned}$$

ध्यान दीजिए कि धारा के प्रवाहित होने की दिशा इलेक्ट्रॉन, जो कि ऋण आवेशित है, के प्रवाह के दिशा के विपरीत होती है।

- 3) v_d के लिए समीकरण (8.21) को हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$v_d = \frac{I}{nqS} \quad (\text{क्योंकि } I = JS)$$

$$\begin{aligned} \therefore v_d &= \frac{2.00 \text{ A}}{(8.43 \times 10^{28})(-1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(10^{-6} \text{ m}^2)} \\ &= -1.48 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-1} \end{aligned}$$

(इसमें ऋण चिन्ह इसलिए आ गया है क्योंकि इलेक्ट्रॉनिक आवेश ऋणात्मक है, और इसलिए v_d की दिशा धारा के विपरीत दिशा में है।)

इस चाल से, 10.0 cm की दूरी तय करने में लगने वाला समय यह है:

$$\begin{aligned} t &= \frac{0.100 \text{ m}}{1.48 \times 10^{-4} \text{ ms}^{-1}} \\ &= 0.674 \times 10^3 \text{ s} = 11 \text{ min } 14 \text{ s.} \end{aligned}$$

यह काफी लंबा समय है। फिर भी हम यह जानते हैं कि स्विच को बंद करते ही परिपथ में आवेश प्रवाहित होने लगता है और बत्ती जल जाती है। परिपथ में धारा के प्रभाव को देखने के लिए हमें काफी मिनट या कहिए कुछ सेंकड भी प्रतीक्षा नहीं करनी पड़ती है तथा यह भी देखा गया है कि दीवार पर लगे स्विच तथा लाइट फिक्सचर के बीच की दूरी पर, जो सामान्यतः 10 cm से अधिक होती है, पर यह प्रभाव निर्भर नहीं करता है।

कहने का अर्थ यह है कि बल्ब के तन्तु में धारा प्रवाहित होने के लिए हमें तब तक प्रतीक्षा नहीं करनी होती जब तक कि बैटरी टर्मिनल का एक विशेष इलेक्ट्रॉन बत्ती तक नहीं पहुंच जाता। जैसे ही स्विच ऑन कर दिया जाता है, तब लगभग तुरन्त ही चालक के अन्दर का पूरा आवेश वितरण गति में आ जाता है और यह क्रिया ठीक उसी तरह होती है, जिस तरह कि टोंटी को खोलते ही लंबी पाइप से पानी बहने लगता है।

- 4) क) अपवाह वेग दूना हो जाएगा
 ख) अपवाह वेग आधा हो जाएगा
 ग) अपवाह वेग में कोई अंतर नहीं आयेगा
- 5) i) परिभाषा के अनुसार विद्युत क्षेत्र E और धारा घनत्व में निम्नलिखित संबंध होता है:

$$E = \frac{J}{\sigma}$$

पर क्योंकि $\sigma = \frac{1}{\rho}$ इसलिए

$$\begin{aligned} |E| &= \rho |J| \\ &= (1.72 \times 10^{-8} \text{ ohm m}) (2.54 \times 10^6 \text{ amp m}^{-2}) \\ &= 4.37 \times 10^{-2} \text{ volt m}^{-1} \end{aligned}$$

ii) E और V में निम्नलिखित संबंध होता है:

$$V_b - V_m = \int_a^b E \cdot dl \quad (1)$$

चित्र 8.13 के अनुसार E बेलनाकार तार के अक्ष के समांतर है। यदि बेलन अक्ष के समांतर, E की दिशा में किसी रेखा के अनुदिश (1) का मान निकालें तो हमें यह प्राप्त होता है:

$$V_b - V_a = E(a - b)$$

या $V_b - V_a = (4.37 \times 10^2 \text{ volt})(0 - 100 \text{ m})$

$$\therefore V_b - V_a = -4.37 \text{ volts.}$$

इसलिए, V_a की तुलना में V_b निम्न विभव पर होता है

- 6) a) यदि यह मान लिया जाए कि डंड और बेलन के बीच आवेश का विद्युत् प्रवाह हो रहा है तो P बिंदु पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$J = \frac{I}{2\pi rL} \text{ और } E = \rho J = \frac{\rho I}{2\pi rL} \text{ जहां } \rho \text{ प्रतिरोधकता है।}$$

J और E दोनों ही r की दिशा में हैं।

तब, विभव की परिमाणा के अनुसार

$$dV = -E \cdot d\mathbf{l} = -E dr = -\frac{\rho I}{2\pi L} \frac{dr}{r}$$

अतः V_i की ध्रुवता (polarity) लेने पर

$$-V_i = \int_{r_1}^{r_2} dV = \frac{\rho I}{2\pi L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = -\frac{\rho I}{2\pi L} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

के लिए हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$I = \frac{2\pi L V_i}{\rho \ln(r_2/r_1)}$$

ख) से $J = \frac{I}{2\pi rL} = \frac{V_i}{\rho r \ln(r_2/r_1)}$ और $E = \rho J = \frac{V_i}{r \ln(r_2/r_1)}$

ग) ओम नियम से $R = \frac{V_i}{I} = \frac{\rho \ln(r_2/r_1)}{2\pi L}$

8.8 शब्दावली

अपरिबर्ती धारा	steady current
अप्रवाह वेग	drift velocity
अभिवाह	flux
अल्पांश	element
आवेश	charge
उत्सर्जन	emission
चालक	conductor
जालक	lattice
तात्क्षणिक	instantaneous
धारा घनत्व	current density
प्रतिरोधकता	resistivity
भंगन	breakdown
मुक्त इलेक्ट्रॉन	free electron
रेखिक	linear
वाहक	carrier
संरक्षण	conservation
सांतत्य समीकरण	continuity equation
स्वेच्छ	arbitrary

इकाई 9 चुंबकीय क्षेत्र

इकाई की रूपरेखा

- 9.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 9.2 चुंबकीय क्षेत्र
चुंबकीय क्षेत्र का स्रोत
चुंबकीय क्षेत्र की परिभाषा
- 9.3 गाउस का चुंबकत्व नियम
- 9.4 बायो और सावर्ट नियम
- 9.5 दो समांतर चालकों के बीच बल (एम्पीयर की परिभाषा)
- 9.6 एम्पीयर-नियम
एम्पीयर नियम के अनुप्रयोग
एम्पीयर नियम का अवकल रूप
- 9.7 धारा लूप पर बल-आघूर्ण
- 9.8 सारांश
- 9.9 अंत में कुछ प्रश्न
- 9.10 हल और उत्तर
- 9.11 शब्दावली

9.1 प्रस्तावना

इस पाठ्यक्रम के खंड 1 में आपको विद्युत-आवेश की संकल्पना से परिचित कराया गया था और आपने विरामावस्था में आवेशों के कुछ गुणधर्मों का अध्ययन किया था। वहां आपने यह देखा था कि आवेश के स्थैतिक वितरण से एक स्थैतिक विद्युत-क्षेत्र उत्पन्न होता है। ठीक इसी प्रकार, आवेश के अपरिवर्ती (steady) प्रवाह (अर्थात् अपरिवर्ती धारा) से एक स्थैतिक चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है। इस इकाई में हम इसी चुंबकीय क्षेत्र पर चर्चा करेंगे। इस इकाई में आप देखेंगे कि स्थैतिक विद्युत-क्षेत्र और स्थैतिक चुंबकीय क्षेत्र में कुछ विशेष अंतर होता है।

अपनी स्कूली शिक्षा के दौरान विज्ञान के प्रयोगशाला में चुंबकों को देखकर आपको अवश्य आनन्द आता होगा। आपको याद होगा कि जब दो चुंबकों के समान ध्रुवों वाले सिरों को पास लाया जाता है तो एक अद्भुत बल महसूस होता है जिसके कारण चुंबक एक-दूसरे के नज़दीक नहीं आते, बल्कि परस्पर दूर भागने की कोशिश करते हैं। वास्तव में, प्राचीन काल से ही, जबकि प्रकृति में पाए जाने वाले स्थायी चुंबक (Fe_3O_4) के प्रभाव का पहले-पहल पता लगाया गया, चुंबकीय क्षेत्रों या इन क्षेत्रों के प्रभाव से लोग परिचित रहे हैं। इन पदार्थों के उत्तर और दक्षिण अन्वेषी गुणधर्म (north and south seeking properties) प्राचीन काल के नौचालन (navigation) और अन्वेषण (exploration) में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते थे। इस अनुप्रयोग के अतिरिक्त चुंबकत्व के विषय में 19-वीं शताब्दी तक बहुत कम जानकारी थी, जब ओर्स्टेड (Oersted) ने यह खोज की कि तार में प्रवाहित विद्युत धारा कंपास की सुई को विक्षेपित करती है। जब भी किसी कम्पास-सुई को चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाता है तो सुई विक्षेपित होती है और वह उत्तर-दक्षिण दिशा में ठहरती है। ओर्स्टेड की खोज से स्पष्ट है कि तार में विद्युत धारा बहने से इसके चारों ओर एक चुंबकीय क्षेत्र स्थापित हो जाता है।

इस इकाई में हम अपरिवर्ती धाराओं से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्रों और उन बलों के बारे में विस्तार से चर्चा करेंगे जो चुंबकीय क्षेत्र में रखे अपरिवर्ती धाराएं ले जाने वाले परिपथों (circuits) और उस क्षेत्र में गतिमान एक अकेले (isolated) आवेश पर आरोपित होते हैं।

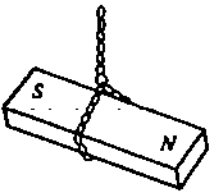
क्षेत्रों की प्रकृति को अच्छी तरह से समझने के लिए यह जानना आवश्यक है कि ये क्षेत्र आवेशित कणों को किस प्रकार प्रभावित करते हैं। इसलिए, अगली इकाई में, विद्युत् और चुंबकीय दोनों ही प्रकार के क्षेत्रों में आवेशित कणों के व्यवहार के बारे में अध्ययन किया जाएगा।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- समझ सकेंगे कि चुंबकीय क्षेत्र, दक्षिणहस्त नियम, बायो-सावर्ट नियम, दक्षिणहस्त विधि, एम्पीयर नियम क्या है,
- अपरिवर्ती धारावाही चालक के एक अल्पांश और गतिमान आवेशित कण पर लगने वाले बल के आधार पर किसी बिन्दु पर चुंबकीय क्षेत्र को परिभाषित कर सकेंगे,
- चुंबकीय क्षेत्र द्वारा किसी आवेशित कण पर या अपरिवर्ती धारावाही चालक के एक अल्पांश पर लग रहे बल के सूत्र को लागू कर किसी सरल धारावाही परिपथों पर लग रहे बल को ज्ञात कर सकेंगे, तथा कुछ सरल प्रश्नों को हल कर सकेंगे,
- दिखा सकेंगे कि B के डाइवर्जेंस (divergence) का मान शून्य होता है,
- एक सरल धारा प्रवाह से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र का निर्धारण और परिकलन करने के लिए बायो-सावर्ट नियम को लागू कर सकेंगे,
- पास-पास रखे गये दो लम्बे, समान्तर व सीधे धारावाही तारों के बीच लगने वाले बल की प्रकृति को (आकर्षण अथवा प्रतिकर्षण) पहचान सकेंगे,
- सरल ज्यामितीय चित्रों वाले अपरिवर्ती धारा-वितरणों से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र का परिकलन करने के लिए एम्पीयर-नियम लागू कर सकेंगे,
- स्टोक्स प्रमेय (stokes theorem) की सहायता से एम्पीयर नियम को उसके अवकल रूप में व्यक्त कर सकेंगे,
- अपरिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र द्वारा किसी धारा-लूप पर लगने वाले बल-आघूर्ण को परिकलित कर सकेंगे,
- बता सकेंगे कि किस प्रकार एक चुंबकीय क्षेत्र में रखे धारावाही चालकों पर लग रहे बलों के आधार पर गैल्वानोमीटरों और मोटरों की कार्य-प्रणाली को समझा जाता है।

9.2 चुंबकीय क्षेत्र (Magnetic Field)



चित्र 9.1: जब चुंबक को मुक्त रूप से लटकाया जाता है तो इसका एक विशेष सिरा उत्तर की ओर इंगित करता है। इस सिरे को चुंबक का उत्तर ध्रुव कहा जाता है।

जब कभी हम चुंबकीय क्षेत्र के बारे में कुछ कहते हैं, तब हमारा तात्पर्य दंड-चुंबक (bar magnet) के क्षेत्र के बारे में ही होता है, क्योंकि इसी विधि से पहले पहल चुंबकीय क्षेत्रों का अध्ययन किया गया था। आप अपनी स्कूली शिक्षा में चुंबकीय क्षेत्र के आधारभूत लक्षणों से अवश्य परिचित हुए होंगे। उदाहरण के लिए, हम यह जानते हैं कि एक चुंबकीय क्षेत्र में किसी दंड-चुंबक को रखने पर उसके ध्रुवों (poles) पर बल लगता है। यदि एक बारीक धागे से दंड-चुंबक को लटकाया जाए, जैसाकि चित्र 9.1 में दिखाया गया है, तो चुंबक का एक विशेष सिरा सदा ही उत्तर की ओर इंगित करता है। चुंबक के इस सिरे को चुंबक का उत्तर-ध्रुव (north pole) कहा जाता है। दूसरे सिरे को दक्षिण ध्रुव (south pole) कहा जाता है। एक साधारण कंपास में इस व्यवस्था को आपने अवश्य देखा होगा। दो चुंबकों के उत्तर-ध्रुव एक-दूसरे को प्रतिकर्षित (repel) करते हैं। एक चुंबक का दक्षिण ध्रुव सदा ही दूसरे चुंबक के उत्तर-ध्रुव से आकर्षित होता है।

यदि हम किसी दंड चुंबक को बीच में से दो भागों में तोड़ दें तो इसके उत्तर व दक्षिण ध्रुव अलग-अलग नहीं हो जाएंगे, बल्कि प्रत्येक भाग एक पूर्ण चुंबक होगा जिसमें दोनों ध्रुव होंगे। इससे स्पष्ट है कि एक अकेले चुंबकीय ध्रुव का कोई अस्तित्व नहीं होता है।

एक दंड चुंबक से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र को आलेखित करने के लिए हमें केवल कंपास-सुई की आवश्यकता होती है। किसी भी बिन्दु पर कंपास की सुई जिस दिशा को इंगित करती है उसे उस

बिन्दु पर चुंबकीय क्षेत्र की दिशा माना जाता है। आपने बारहवीं कक्षा के दौरान, ऊपर बताए गये कथन का उपयोग एक दंड-चुंबक के आस-पास के चुंबकीय क्षेत्र को आलेखित करने के लिए अवश्य किया होगा, जैसाकि चित्र 9.2क में दिखाया गया है। चुंबकीय क्षेत्र की बल रेखाएं इस तरह खींची गई हैं कि कम्पास की सुई बल रेखा के प्रत्येक बिन्दु पर स्पर्श रेखा बनाएगी। चित्र 9.2 ख में दंड-चुंबक के चुंबकीय क्षेत्रों (typical magnetic fields) को दिखाया गया है। ध्यान दीजिए कि क्षेत्र-रेखाएं उत्तर ध्रुव से निकलती हैं तथा दक्षिण ध्रुव में प्रवेश करती हैं। ये कुछ गुणात्मक लक्षण हैं जिन्हें हम सभी जानते हैं।

9.2.1 चुंबकीय क्षेत्र का स्रोत (Source)

जैसाकि आप जानते हैं कि जब कांच की छड़ को रबर या खरगोश के फ़र (rabbit's fur) से रगड़ते हैं तो छड़ के आस-पास के स्थान में एक विद्युत क्षेत्र होता है जिसे E से प्रकट किया जाता है। इसी प्रकार, चुंबक के आसपास के चुंबकीय क्षेत्र को प्रतीक B से प्रकट किया जा सकता है। स्थिरविद्युतिकी में विद्युत-क्षेत्र E और विद्युत् आवेश के संबंध को इस प्रकार प्रकट किया जाता है:

$$\text{विद्युत आवेश} \Rightarrow E \Rightarrow \text{विद्युत आवेश} \quad (9.1)$$

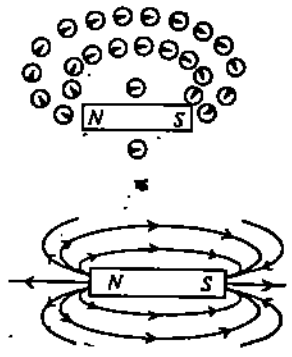
अर्थात् विद्युत आवेशों से एक विद्युत क्षेत्र स्थापित होता है और इस विद्युत क्षेत्र में यदि अन्य विद्युत आवेश हो, तो यह आवेश, क्षेत्र के कारण विद्युत बल अनुभव करता है। इसी प्रकार, अब आप चुंबकत्व के लिए एक ऐसा ही संबंध स्थापित कर सकते हैं अर्थात् चुंबकीय क्षेत्र और चुंबकीय आवेश में निम्नलिखित संबंध होगा :

$$\text{चुंबकीय आवेश} \Rightarrow B \Rightarrow \text{चुंबकीय आवेश} \quad (9.2)$$

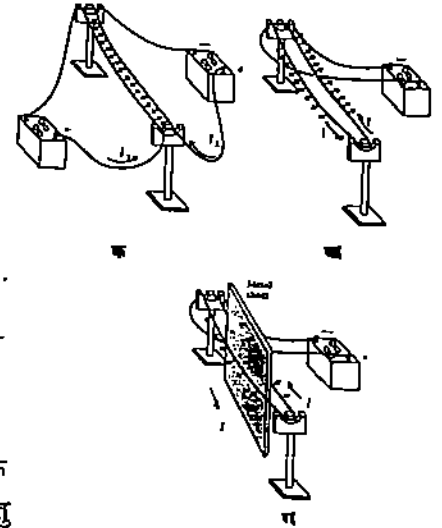
आप जानते हैं कि दोनों ध्रुव-उत्तर ध्रुव और दक्षिण ध्रुव-सदा ही एक साथ होते हैं। कभी भी एक अकेले ध्रुव का अस्तित्व नहीं होता। इसका अर्थ यह है कि चुंबकीय आवेश जिन्हें चुंबकीय एकध्रुव (monopole) भी कहा जाता है, का अस्तित्व नहीं है। तब प्रश्न यह उठता है कि किस प्रकार चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है? इस प्रश्न का उत्तर आपको नीचे दिए गए विवरण में मिल जाएगा। जैसाकि चित्र 9.3 क में दिखाया गया है, दो समांतर तारों को लेते हैं। ज्योंही परिपथ को बंद किया जाता है, दोनों तारों में धारा एक ही दिशा में प्रवाहित होने लगती है और तार एक-दूसरे को आकर्षित करने लगते हैं। यदि एक तार में धारा की दिशा उलट दी जाए, तो तार एक-दूसरे को प्रतिकर्षित करने लगेंगे। इस तरह चित्र 9.3 ख में दिखाए गए एक ही तार के दो भागों की, जो कि एक ही परिपथ के अंग हैं, प्रवृत्ति एक-दूसरे से दूर हो जाने की होती है। यदि दो तारों के बीच धातु की एक चादर रख दी जाए तो दोनों तारों के बीच लगने वाला आकर्षण या प्रतिकर्षण बल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है (चित्र 9.3 ग)। इसकी व्याख्या आप किस प्रकार करेंगे। क्या समांतर धाराओं का आकर्षण और प्रतिसमांतर (anti-parallel) धाराओं का प्रतिकर्षण स्थिरवैद्युत बल के कारण है? इस प्रश्न का उत्तर है "नहीं", तारों के बीच लग रहा बल, स्थिरवैद्युत बल या कूलॉम बल नहीं है। ऐसा इसलिए है क्योंकि (i) चालक पर कोई नेट आवेश नहीं होता (चालन इलेक्ट्रॉन का आवेश घनत्व जालक-आयनों (lattice ions) पर घन आवेश के बराबर होता है), (ii) किसी भी धारा की दिशा को उलट देने पर बल की दिशा भी बदल जाती है, (iii) परिपथ के टूटने पर बल का अस्तित्व समाप्त हो जाता है, (iv) एक साधारण माध्यम की उपस्थिति में भी बल अप्रभावित रहता है, (v) विद्युत धाराओं का आकर्षण और प्रतिकर्षण विद्युत आवेशों के आकर्षण या प्रतिकर्षण के विपरीत होता है।

चित्र 9.3 के प्रयोगों से यह पता चलता है कि गतिमान आवेश से सम्बद्ध एक अतिरिक्त बल होता है जो कि स्थिरवैद्युत बल से भिन्न होता है। इस नए बल को, जो कि तब अनुभव होता है जब आवेश गतिमान होते हैं, चुंबकीय बल (magnetic force) कहा जाता है। एक आवेश चाहे वह विरामावस्था में हो या गतिमान हो सदैव एक विद्युत क्षेत्र स्थापित करता है। पर, आवेश द्वारा चुंबकीय क्षेत्र केवल तब ही स्थापित होता है जब आवेश गति अवस्था में रहता है। अब आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि एक दंड-चुंबक अपने आसपास एक चुंबकीय क्षेत्र स्थापित करता है, पर

चुंबकीय क्षेत्र



चित्र 9.2: क) एक कम्पास सुई चुंबकीय क्षेत्र की दिशा की ओर द्रुगित करती है। ख) चुंबक के चुंबकीय बल रेखाओं का आलेखन इस तथ्य पर किया गया है कि कम्पास सुई, बल रेखाओं के अनुदिश ही घूमती है।



चित्र 9.3: क) दो समांतर तारों में एक ही दिशा में धारा प्रवाहित होने पर आकर्षण। ख) दो समांतर तारों में धारा प्रवाहित न होने पर प्रतिकर्षण। ग) दो तारों के बीच रखे धातु की चादर इन बलों को प्रभावित नहीं करती।

दंड-चुंबक में गतिमान विद्युत आवेश कहां है ? वास्तव में, चुंबकीय पदार्थ का चुंबकत्व पदार्थ के लोह-परमाणुओं में परिचक्रण (spinning) और परिसंचरण (circulation) कर रहे इलेक्ट्रॉनों के कारण ही होता है। इसके बारे में आप और अधिक जानकारी इस खंड की इकाई 11 और 12 में प्राप्त करेंगे।

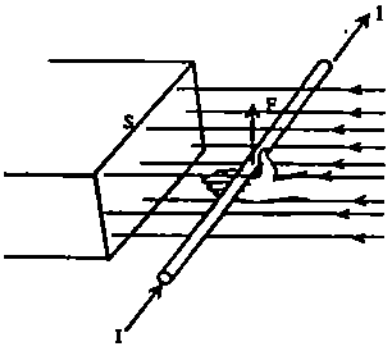
अतः चुंबकत्व के लिए हम निम्नलिखित संबंध लिख सकते हैं :

$$\text{गतिमान विद्युत आवेश} \Rightarrow \mathbf{B} \Rightarrow \text{गतिमान विद्युत आवेश} \quad (9.3)$$

क्योंकि किसी तार में गतिमान आवेश ही विद्युत् धारा कहलाती है, इसलिए समीकरण (9.3) को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$\text{विद्युत धारा} \Rightarrow \mathbf{B} \Rightarrow \text{विद्युत धारा} \quad (9.4)$$

समीकरण (9.3) या समीकरण (9.4) से हमें यह पता चलता है कि (i) गतिमान आवेश या धारा से एक चुंबकीय क्षेत्र स्थापित होता है और (ii) यदि हम चुंबकीय क्षेत्र में एक गतिमान आवेश या धारावाही तार रखें, तो उस पर बल कार्य करेगा। आइए, अब हम चुंबकीय क्षेत्र परिभाषित करें। पर, इससे पहले आप निम्नलिखित बोध प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने का प्रयास करें।



चित्र 9.4: चुंबकीय क्षेत्र में एक सीधे धारावाही तार पर लग रहा बल।

बोध प्रश्न 1

अपने विद्यालय में संभवतः वैद्युत मोटर (electric motor) के बारे में आपने अवश्य पढ़ा होगा और उस सिद्धांत से अवश्य परिचित होंगे जिस पर यह मोटर कार्य करता है। अतः बताइए कि किस प्रकार वैद्युत मोटर समीकरण (9.4) का पालन करता है।

9.2.2 चुंबकीय क्षेत्र की परिभाषा

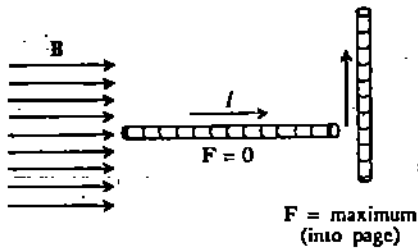
हमने खंड 1 में किसी बिन्दु पर रखे परीक्षण आवेश q पर लगने वाले बल F_E के आधार पर विद्युत क्षेत्र E को निम्न प्रकार परिभाषित किया था,

$$\mathbf{F}_E = q\mathbf{E} \quad (9.5)$$

जैसाकि समीकरण (9.3) से पता चलता है, एक गतिमान विद्युत आवेश पर लगने वाले चुंबकीय बल के आधार पर चुंबकीय क्षेत्र को परिभाषित किया जा सकता है। एक धारा (current) पर लग रहे बल के आधार पर भी चुंबकीय क्षेत्र को परिभाषित कर सकते हैं। क्योंकि धारा विद्युत आवेश का प्रवाह है, इसलिये ये दोनों परिभाषाएं एक-दूसरे से संबंधित हैं। आइए, पहले हम धारावाही तार पर लग रहे बल के आधार पर चुंबकीय क्षेत्र की परिभाषा दें।

(क) धाराओं पर बल

प्रयोगों से पता चलता है कि चुंबकीय क्षेत्र में रखे धारावाही तार पर एक बल कार्य करता है। चित्र 9.4 में एक चुंबक से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र से गुजरने वाला धारावाही तार दिखाया गया है जिसमें धारा I प्रवाहित हो रही है। क्योंकि क्षेत्र रेखाएं उत्तर ध्रुव से निकलती हैं और दक्षिण ध्रुव में प्रवेश करती हैं इसलिए क्षेत्र की दिशा दायीं से बायीं ओर को है। यह देखा गया है कि तार पर जो बल लगता है वह धारा और चुंबकीय क्षेत्र की प्रबलता के समानुपाती होता है। जब तार को क्षेत्र-रेखाओं के समांतर (या प्रतिसमांतर) रखा जाता है, तब इस पर कोई बल कार्य नहीं करता। पर, जब तार को क्षेत्र की लंब-दिशा में रखा जाता है, तब तार पर लग रहा बल अधिकतम होता है। चित्र 9.5 में इन दो स्थितियों को दिखाया गया है। इससे यह पता चलता है कि तार पर लग रहा बल क्षेत्र के उस घटक के कारण है जो तार के लंब दिशा की ओर है। दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि लग रहा बल तार और क्षेत्र-रेखाओं के सापेक्ष अभिविन्यास (relative orientation) पर भी निर्भर करता है। मान लीजिए, चित्र 9.6 में क्षेत्र-रेखाओं जिन्हें \mathbf{B} से निरूपित किया गया है और धारावाही तार के बीच का कोण θ है। जैसाकि ऊपर बताया जा चुका है, लंबाई L वाले तार पर लग रहा बल, \mathbf{B} के उस घटक के कारण है जो तार के लंब दिशा की ओर होता है। इसलिए



चित्र 9.5: तार पर लगने वाला बल क्षेत्र के उस घटक के कारण है जो तार के लंब दिशा की ओर है।

B के इस घटक, जिसे B_{\perp} से निरूपित (चित्र 9.6 देखिए) करते हैं, का मान यह है :

$$B_{\perp} = B \sin \theta$$

लंबाई L वाले तार पर लग रहा बल स्वयं L पर और तार में प्रवाहित धारा पर भी निर्भर करता है। प्रयोग से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि तार की लंबाई L पर लग रहा बल F यह होता है :

$$F = LIB \sin \theta \quad (9.6)$$

आपको याद होगा कि सदिश गुणनफल $A \times B$ से $AB \sin \theta$ के परिमाण वाला सदिश प्राप्त होता है जो A और B से परिभाषित समतल पर लंब होता है। समीकरण (9.6) में इसे लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$F = I(L \times B) \quad (9.7)$$

यहां L एक सदिश है जिसका परिमाण तार की लंबाई L है और जिसकी दिशा धारा की दिशा की ओर है। समीकरण (9.6) या समीकरण (9.7) को देखने से यह पता चलता है कि B का SI मात्रक $NA^{-1}m^{-1}$ है। इस मात्रक को वेबर प्रति वर्गमीटर या टेस्ला (जिसका संक्षिप्त रूप T है) भी कहा जाता है। एक टेस्ला एक प्रबल चुंबकीय क्षेत्र होता है, इसलिए प्रायः एक छोटे मात्रक का, जिसे गाउस कहा जाता है, प्रयोग किया जाता है।

$$1 \text{ टेस्ला} = 10^4 \text{ गाउस} \quad (9.8)$$

क्योंकि गाउस एक SI मात्रक नहीं है, इसलिए समीकरणों में प्रयोग करने से पहले इसे सदा ही टेस्ला में बदल देना चाहिए। राशि B को अनेक नामों से जाना जाता है। इसका सही नाम चुंबकीय प्रेरण (magnetic induction) है। इसे चुंबकीय क्षेत्र तीव्रता (magnetic field intensity) भी कहा जाता है। हालांकि एक अन्य राशि को भी यही नाम दिया जाता है जिसके बारे में आप इस खंड की इकाई 12 में अध्ययन करेंगे।

तार पर लग रहे बल की दिशा सदा ही B और I से परिभाषित समतल पर लम्ब की ओर होती है। बल की दिशा हम दक्षिण हस्त नियम (right hand rule) की सहायता से ज्ञात करते हैं, जैसाकि चित्र 9.7 में दिखाया गया है। दक्षिण हस्त नियम के अनुसार, यदि हम अपने दाएं हाथ का पंजा पूरा फैलाकर इस प्रकार रखें कि फैली हुई अंगुलियां बाह्य चुंबकीय क्षेत्र की दिशा में तथा अंगूठा धारा की दिशा में हो, तो चालक पर लगने वाला बल हथेली के लम्बवत् हथेली से धक्का देने की दिशा में होगा।

आइए, अब हम समीकरण (9.6) या समीकरण (9.7) को एक सरल स्थिति पर लागू करें जिससे कि इसके अर्थ को हम अच्छी तरह से समझ सकें।

उदाहरण 1

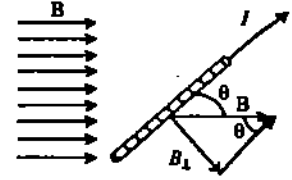
एक क्षैतिज तार में धारा पूर्व से पश्चिम की ओर प्रवाहित हो रही है। इस धारा पर बल की दिशा क्या होगी जबकि यह मान लिया गया हो कि इस स्थान पर पृथ्वी का चुंबकीय क्षेत्र उत्तर की ओर है? यदि तार में 20 A की धारा प्रवाहित होती हो, तो पृथ्वी के चुंबकीय क्षेत्र के कारण, जो कि लगभग 1.0G है, तार के प्रति एकांक लंबाई पर आरोपित बल ज्ञात कीजिए।

हल

दक्षिण हस्त नियम को लागू करने पर हम देखते हैं कि जब दाएं हाथ का अंगूठा पश्चिम की ओर और अंगुलियां उत्तर की ओर इंगित करती हों, तो हथेली नीचे की ओर इंगित करेगी अर्थात् तार पर लग रहे बल की दिशा नीचे की ओर होगी (कागज के तल के लम्बवत् "नीचे की ओर")।

पृथ्वी की चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं तार के लंब-दिशा की ओर हैं। यहां

चुंबकीय क्षेत्र

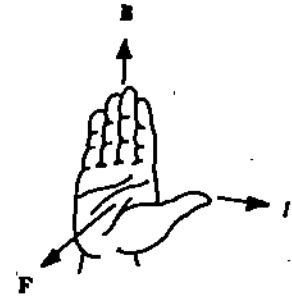


यदि किसी एकसमान चुंबकीय क्षेत्र B के लम्बवत् कोई क्षेत्रफल हो, तो चुंबकीय क्षेत्र B तथा क्षेत्रफल का गुणनफल एक महत्वपूर्ण भौतिक राशि है जिसे क्षेत्रफल A से गुजरने वाला चुंबकीय अभिवाह (magnetic flux) कहते हैं। इसे Φ से प्रकट किया जाता है

$$\Phi = BA$$

$$\text{या } B = \frac{\Phi}{A}$$

चुंबकीय अभिवाह का मात्रक वेबर है। अतः B का मात्रक वेबर प्रति वर्ग मीटर भी है। इसे टेस्ला (T) भी कहा जाता है।

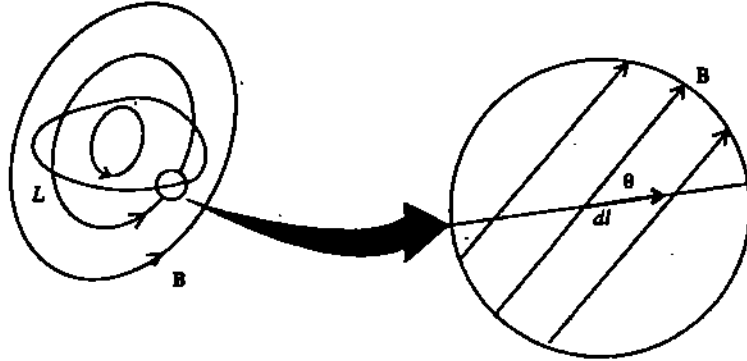


चित्र 9.7: दक्षिण हस्त नियम

$$F = ILB \sin 90^\circ$$

$$\therefore \frac{F}{L} = IB = 20\text{A} \times 10^{-4}\text{T} = 2 \times 10^{-3}\text{Nm}^{-1}$$

यदि धारावाही तार सीधा नहीं है तो इसके प्रत्येक बिन्दु पर क्षेत्र के सापेक्ष इसका अभिविन्यास भिन्न-भिन्न होगा या यदि चालक के प्रत्येक बिन्दु पर क्षेत्र के परिमाण / दिशा में परिवर्तन हो तो भी तार पर आरोपित बल ज्ञात करने के लिए हम समीकरण (9.7) का प्रयोग कर सकते हैं। इसके लिए यह कल्पना कर लीजिए कि तार बहुत से अल्पांशों में विभक्त हैं जिससे कि प्रत्येक अल्पांश को सीधा माना जा सके और उस पर क्षेत्र अचर रहे। चित्र 9.8 देखिए। अब तार के प्रत्येक अल्पांश पर समीकरण (9.7) लागू किया जा सकता है।



चित्र 9.8: (क) एक असमान चुंबकीय क्षेत्र में रखा वक्र चालक (curved conductor) (ख) तार के एक अल्पांश को एकसमान क्षेत्र में रखा सीधा तार माना जा सकता है।

यदि एक अल्पांश की लंबाई dl हो, तब इस पर लग रहे बल को इस रूप में लिख सकते हैं:

$$dF = I(dl \times B) \quad (9.9)$$

असमान चुंबकीय क्षेत्र B में किसी भी आकार वाले धारावाही तार पर लग रहे कुल बल को ऊपर दिए गए समीकरण (9.9) में dF के व्यंजक को पूरे तार के लिए जोड़कर प्राप्त कर सकते हैं।

$$F = \sum dF = \sum I dl \times B$$

यदि अल्पांश की लंबाई dl का मान इतना कम हो कि वह शून्य की ओर प्रवृत्त हो, तो योगफल एक समाकल हो जाता है और हम ऊपर दिए गए व्यंजक को इस रूप में लिख सकते हैं :

$$F = I \int dl \times B \quad (9.10)$$

जहां, समीकरण (9.10) के दाएं पक्ष में तार की लंबाई के लिए लिया गया रेखा समाकल (line integral) है और I को, जो कि अचर है, समाकल के बाहर लिया गया है। विशेष रूप से, यदि चुंबकीय क्षेत्र एकसमान हो, अर्थात् तार के सभी बिन्दुओं पर परिमाण और दिशा दोनों में B अचर हो, तो समीकरण (9.10) को इस रूप में लिखा जा सकता है :

$$F = I \left(\int dl \right) \times B$$

इस व्यंजक में, $\int dl$ तार के प्रारंभिक बिन्दु को अंतिम बिन्दु से मिलाने वाला सदिश है। और, यदि धारावाही तार सीधा हो और उसकी लंबाई L हो, तो

$$F = I(L \times B)$$

यह वही समीकरण है जो कि समीकरण (9.7) है।

अभी तक हमने एक तार में प्रवाहित हो रही धारा पर लग रहे बल पर विचार किया है। विद्युत धारा - एक ही दिशा में गतिमान आवेशित कण का समूह होता है, इसलिए चुंबकीय क्षेत्र की

उपस्थिति में आवेश पर एक बल लगना चाहिए। इस तरह, हम चुंबकीय क्षेत्र को एक अन्य रूप में भी परिभाषित कर सकते हैं।

(ख) गतिमान आवेश पर बल

उस बल को, जो कि चुंबकीय क्षेत्र एक गतिमान आवेश पर आरोपित करता है, समीकरण (9.7) से प्राप्त किया जा सकता है। इकाई 8 में आपने यह पढ़ा है कि अनुप्रस्थ परिच्छेद A वाले तार में प्रवाहित विद्युत धारा I तथा आवेश q के अपवाह वेग (drift velocity) के बीच, समीकरण (8.3) के अनुसार, निम्नलिखित संबंध होता है :

$$I = qnAv$$

जहां n प्रति एकांक आयतन में आवेश की संख्या है। I के इस व्यंजक को समीकरण (9.9) में प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$dF = (dL)Anqv \times B \tag{9.11}$$

यहां $(dL)A$, लंबाई (dL) वाले तार-खंड के आयतन को प्रकट करता है। अतः $(dL)An$ तार के उस भाग में गतिमान आवेशों की संख्या है जिसके लिए हम बल का व्यंजक लिख रहे हैं। अतः एक आवेश पर लग रहा बल $dF/(dL)An$ होता है।

अर्थात्

$$F = qv \times B \tag{9.12}$$

बल का परिमाण $qvB \sin \theta$ होता है।

गतिमान आवेश पर लग रहे बल की दिशा दक्षिण हस्त नियम से प्राप्त की जा सकती है। (चित्र 9.7 में I के स्थान पर v लेकर) ध्यान दीजिए कि यदि कण ऋण आवेशित हो, तो F की दिशा उलट जाएगी।

बोध प्रश्न 2

समीकरण $F = qv \times B$ के तीन सदिशों में कौन-कौन-से युग्म (pairs) सदा समकोण पर होते हैं ? और कितने बीच कोई भी कोण हो सकता है।

नीचे दिए गए उदाहरण को अच्छी तरह से समझ लीजिए जिससे कि आप यह अच्छी तरह से जान सकें कि किस प्रकार आवेशित कण पर लग रहा बल परिकल्पित किया जाता है। इस उदाहरण से आप बल की दिशा मालूम करने के लिए दक्षिण हस्त नियम लागू करना सीख सकेंगे।

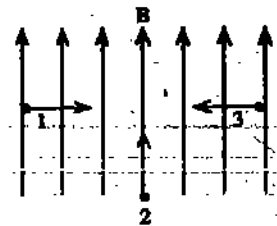
उदाहरण 2

किसी क्षेत्र में 0.10 T वाला चुंबकीय क्षेत्र उर्ध्वाधरतः उपरिमुखी (vertically upward) है। इस क्षेत्र में तीन प्रोटॉन प्रवेश करते हैं। जिनमें से दो क्षैतिजतः और एक उर्ध्वाधरतः प्रवेश करते हैं, जैसाकि चित्र 9.9 में दिखाया गया है। ये तीनों प्रोटॉन $2.0 \times 10^3 \text{ ms}^{-1}$ से गतिमान हो रहे हैं। प्रत्येक प्रोटॉन पर चुंबकीय बल क्या होगा ?

इस

प्रोटॉन 2 उर्ध्वाधरतः अर्थात् क्षेत्र के समांतर गतिमान हो रहा है। इसका अर्थ है समीकरण (9.12) में $(\sin \theta = 0)$ है। इसलिए इस पर कोई बल नहीं लगता। और, क्योंकि प्रोटॉन 1 और 3 क्षेत्र के लंब-दिशा में गतिमान हो रहे हैं इसलिए समीकरण (9.12) में $\sin \theta = 1$ और इस तरह इन दोनों प्रोटॉनों पर निम्नलिखित समान परिमाण वाले बल लग रहे हैं :

$$F = qvB = (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2.0 \times 10^3 \text{ ms}^{-1})(0.10 \text{ T}) = 3.2 \times 10^{-17} \text{ N.}$$



चित्र 9.9: उदाहरण 2

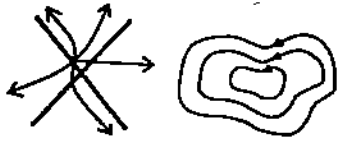
क्योंकि प्रोटॉन धन आवेशित होते हैं, इसलिए बल की दिशा सदिश $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ की दिशा की ओर होती है। दायीं ओर गतिमान प्रोटॉन 1 के लिए सदिश $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ की दिशा कागज के लम्बवत् ऊपर की ओर है। बायीं ओर गतिमान प्रोटॉन 3 के लिए बल की दिशा कागज के लम्बवत् नीचे की ओर है। इस उदाहरण से यह स्पष्ट है कि चुंबकीय बल केवल चुंबकीय क्षेत्र से निर्धारित नहीं होता है क्योंकि एक ही चुंबकीय क्षेत्र में भिन्न-भिन्न वेग से गतिमान समान कणों (identical particles) पर बल अलग-अलग लगता है। यदि कण इलेक्ट्रॉन हो, तो इलेक्ट्रॉन आवेश का ऋण चिह्न, यह बताता है कि इस पर लग रहे बल की दिशा सदिश $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ की दिशा के विपरीत होगी।

समीकरण (9.12) और समीकरण (9.7), दोनों ही समान हैं इसलिए इनमें से किसी से भी \mathbf{B} को परिभाषित किया जा सकता है। व्यवहार में हम समीकरण (9.7) से \mathbf{B} को परिभाषित करते हैं, क्योंकि एक गतिमान आवेश की तुलना में एक तार पर लग रहे बल को अधिक आसानी से मापा जा सकता है।

इस भाग में आपने यह पढ़ा कि गतिमान आवेश से एक चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है। अब, मान लीजिए कि एक धारावाही तार है और आपसे किसी बिन्दु पर तार द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र परिकल्पित करने के लिए कहा गया है, तब इसके लिए आपको निश्चित ही कूलॉम नियम और गाउस-नियम के अनुरूप नियम ज्ञात होने चाहिए। आइए, पहले हम गाउस का चुंबकत्व नियम (Gauss's law for magnetism) ज्ञात करें।

9.3 गाउस का चुंबकत्व नियम

मान लीजिए कि चुंबकीय आवेश एकध्रुव (monopole) का अस्तित्व है, तब विद्युत आवेश से उत्पन्न विद्युत क्षेत्रों की तरह इनसे भी चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होंगे। तब गाउस नियम के अनुरूप नियमों से इन चुंबकीय क्षेत्रों और चुंबकीय आवेश वितरणों का वर्णन किया जा सकता है। विशेष रूप से हम यह ज्ञात करेंगे कि किसी बंद पृष्ठ (closed surface) पर चुंबकीय क्षेत्र का अभिवाह केवल परिवद्ध चुंबकीय आवेश पर निर्भर करता है। हम गाउस के चुंबकत्व-नियम को इस प्रकार लिख सकते हैं :



$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 g \quad (9.13)$$

जहाँ वाम पक्ष का समाकल चुंबकीय आवेश या एकध्रुवों (monopoles) (जिन्हें g से प्रकट किया गया है) को परिवद्ध करने वाले बंद पृष्ठ पर \mathbf{B} के अभिवाह को दर्शाता है तथा μ_0 कोई अचर है। पर यह बात निश्चित नहीं है कि चुंबकीय एकध्रुवों का अस्तित्व है या नहीं और यदि इनका अस्तित्व है भी, तो भी हमारे जगत में ये कोई भी महत्वपूर्ण भूमिका नहीं निभाते। चुंबकीय एकध्रुव का अस्तित्व नहीं है, इसलिए हमें $g = 0$ लेना चाहिए और इस प्रकार किसी बंद पृष्ठ पर चुंबकीय अभिवाह का मान शून्य होगा। इसे हम गणितीय रूप में गाउस का चुंबकत्व नियम कहते हैं और इसे इस रूप में लिखते हैं :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (9.14)$$

गाउस के चुंबकत्व-नियम का एक परिणाम यह होता है कि चुंबकीय क्षेत्र रेखाओं का न तो आदि होता है और न ही अंत होता है (चित्र 9.10)। विद्युत क्षेत्र रेखाओं के विपरीत चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं बंद लूप (या पथ) बनाती हैं। डाइवर्जेंस प्रमेय (divergence theorem) की सहायता से ऊपर दिए गए समीकरण (9.14) के पृष्ठ समाकल को आयतन सामकल में रूपांतरित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\int \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0 \quad (9.15)$$

यहाँ समाकलन, समीकरण (9.14) के बंद पृष्ठ द्वारा परिवद्ध आयतन पर होता है। क्योंकि

चित्र 9.10: यदि चुंबकीय एकध्रुव न हो, तो बंद पृष्ठ पर चुंबकीय अभिवाह शून्य होगा। (क) इसका अर्थ यह है कि ऐसा कोई भी बिन्दु नहीं हो सकता जहाँ से चुंबकीय क्षेत्र रेखाओं का आदि या अंत होता हो। ऐसे बिन्दु को परिवद्ध करने वाले बंद पृष्ठ से गुजरने वाले नेट अभिवाह का मान शून्य होगा। (ख) अपितु सामान्यतः चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं बंद पथ बनाती हैं।

समीकरण (9.15) किसी भी स्वेच्छ समाकलन-आयतन (arbitrary volume of integration) पर लागू होता है, इसलिए

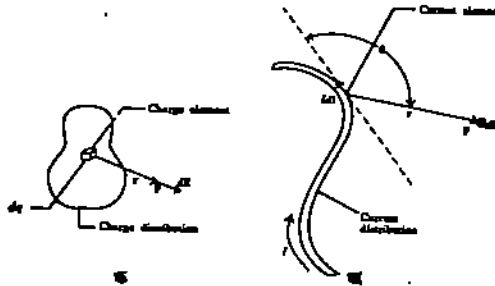
$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (9.16)$$

यह समीकरण तब भी सही होता है जब समय के साथ \mathbf{B} में परिवर्तन हो रहा हो, वास्तव में यह समीकरण मैक्सवेल समीकरणों में से एक है। समीकरण (9.14) या समीकरण (9.16) के अनुसार यदि चुंबकीय क्षेत्र का अस्तित्व है तो ये बिन्दु आवेशों के क्षेत्रों से भिन्न हैं। अगले भाग में हम कूलॉम-नियम के अनुरूप नियम मालूम करेंगे।

9.4 बॉयो और सावर्ट नियम

क्या हम धारा से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र परिकलित कर सकते हैं? क्या हम यह दिखा सकते हैं कि धारा लूप द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र, एक द्विध्रुव द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र के समान होता है? उपरोक्त प्रश्नों में रुचि लेने के कारण फ्रांसिसी वैज्ञानिक जीन बाप्टिस्टे बॉयो (Jean Baptiste Biot) और फेलिक्स सावर्ट (Felix Savart) ने अपरिवर्ती धारा (steady current) से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र के स्वरूप को मालूम करने के लिए प्रयोग किए। इनके द्वारा किए गए प्रयोगों से धारावाही चालक के एक अल्पांश से उत्पन्न किसी बिन्दु पर चुंबकीय क्षेत्र का मान प्राप्त होता है, जिसे बॉयो-सावर्ट नियम कहा जाता है।

इकाई 1 में, हमने दिए हुए आवेश-वितरण के आसपास के स्थान में स्थापित विद्युत क्षेत्र को परिकलित करना सीखा था। इसके लिए हमने आवेश वितरण को आवेश-अल्पांशों dq में बांट दिया था, जैसा कि चित्र 9.11 क में दिखाया गया है।



चित्र 9.11: (क) आवेश अल्पांश dq बिन्दु P पर विद्युत क्षेत्र स्थापित करता है। (ख) धारा अल्पांश Idl बिन्दु P पर चुंबकीय क्षेत्र $d\mathbf{B}$ स्थापित करता है। प्रतीक (ख) एक तार की पूंछ) यह दर्शाता है कि अल्पांश $d\mathbf{B}$ की दिशा चुनात्मक \mathbf{z} -अक्ष के अनुदिश, कागज के तल के सम्बन्ध नीचे की ओर है।

तब हमने दिए गए एक आवेश अल्पांश द्वारा किसी बिन्दु P पर स्थापित क्षेत्र $d\mathbf{E}$ परिकलित किया था। अंत में, हमने पूरे आवेश-वितरण के कारण $d\mathbf{E}$ का समाकलन करके बिन्दु P पर \mathbf{E} परिकलित किया था।

$d\mathbf{E}$ का परिमाण यह होता है :

$$dE = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{dq}{r^2}$$

जहाँ r , आवेश-अल्पांश से बिन्दु P की दूरी है।

चुंबकीय स्थिति के संबंध में भी हमारा दृष्टिकोण यही होगा। चित्र 9.11 ख में एक स्वेच्छ आकार वाले धारावाही तार को दिखाया गया है। इस तार के समीप कोई भी बिन्दु P पर चुंबकीय क्षेत्र \mathbf{B} क्या होगा? पहले हम चित्र 9.11 क के आवेश-अल्पांश dq के संगत तार को अवकल धारा अल्पांशों (differential current elements) Idl में विभक्त कर देते हैं। यहाँ अवकल लम्बाई अल्पांश $d\mathbf{l}$ एक सदिश है जिसकी दिशा तार के स्पर्श रेखा के अनुदिश धारा की ओर है। ध्यान दीजिए कि अवकल आवेश अल्पांश dq एक अदिश है जबकि अवकल धारा-अल्पांश Idl एक सदिश है।

तब बॉयो-सावर्ट नियम के अनुसार एक दिए हुए धारा-अल्पांश द्वारा बिन्दु P पर स्थापित चुंबकीय क्षेत्र का परिमाण यह होता है :

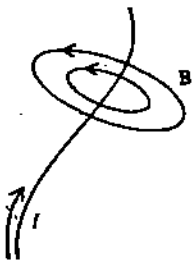
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \theta}{r^2} \quad (9.17)$$

यहां μ_0 एक अचर है, जिसे निर्वात (free space) की चुंबकशीलता स्थिरांक (permeability constant) कहा जाता है। इसका मान $4\pi \times 10^{-7} \text{ TmA}^{-1}$ है। स्थिरविद्युति की संबंधी प्रश्नों में परावैद्युतांक (permittivity constant) जो भूमिका निभाता है, ठीक उसी प्रकार की भूमिका यह स्थिरांक चुंबकीय सम्बन्धी प्रश्नों में निभाता है। सदिश रूप में dB का पूर्ण व्यंजक यह होता है :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \times \hat{r}}{r^2} \quad (\text{बॉयो-सावर्ट नियम}) \quad (9.18)$$

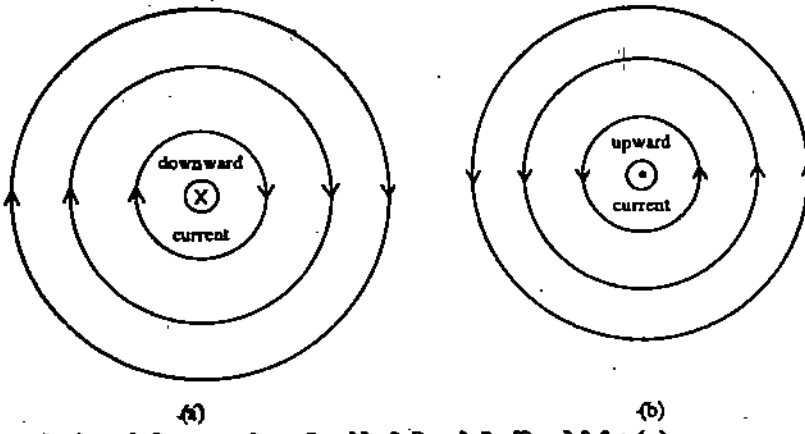
यहां \hat{r} जिसकी दिशा एकक सदिश (unit vector) है की dl से P की ओर है। समीकरण (9.18) कूलॉम नियम के अनुरूप है और इसे बॉयो और सावर्ट नियम कहा जाता है। चित्र 9.11 ख में dB की दिशा सदिश $dl \times \hat{r}$ की दिशा की ओर होती है, जहां \hat{r} एक एकक सदिश है, जिसकी दिशा धारा-अल्पांश से बिन्दु P , जिस पर आप क्षेत्र मालूम करना चाहते हैं, की ओर होती है। चित्र 9.11 ख में दिए गए प्रतीक (x) (जो एक तीर के पूंछ को निरूपित करता है) यह दर्शाता है कि बिन्दु P पर dB की दिशा कागज के तल के लम्बवत् नीचे की ओर है।

कूलॉम नियम किसी बिन्दु आवेश द्वारा उत्पन्न विद्युत क्षेत्र को, आवेश तथा आवेश से उस बिन्दु तक की दूरी, जिस पर कि क्षेत्र ज्ञात किया जा रहा है, के रूप में व्यक्त करता है। विद्युत क्षेत्र का मान दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती (inverse square of the distance) होता है तथा इसकी दिशा आवेश से क्षेत्र बिन्दु को मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होती है। ठीक उसी प्रकार, बॉयो-सावर्ट नियम धारा-अल्पांश द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र को धारा अल्पांश (जो कि क्षेत्र का स्रोत है) तथा चालक से क्षेत्र बिन्दु की दूरी के रूप में व्यक्त करता है। बिन्दु आवेश के विद्युत क्षेत्र की तरह एक धारा-अल्पांश के कारण चुंबकीय क्षेत्र का मान भी दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। पर, यहीं समरूपता समाप्त हो जाती है। कूलॉम नियम के विद्युत आवेश के विपरीत धारा अल्पांश Idl की दिशा और परिमाण दोनों ही होते हैं। अतः धारा अल्पांश का चुंबकीय क्षेत्र अल्पांश के परितः सममित (symmetric) नहीं होता, बल्कि धारा-अल्पांश की दिशा के सापेक्ष बिन्दु की स्थिति पर निर्भर करता है। इस दिशात्मक लक्षण (directional characteristics) को समीकरण (9.18) में सदिश गुणनफल (cross product) द्वारा व्यक्त किया गया है। जैसा कि चित्र 9.11 ख में दिखाया गया है चुंबकीय क्षेत्र, दोनों धारा-अल्पांश तथा धारा-अल्पांश से क्षेत्र बिन्दु तक के दूरी सदिश पर लंब होता है। पिछले भाग में आपने यह भी देखा है कि विद्युत क्षेत्र-रेखाओं (जिनका विद्युत आवेशों पर आदि या अन्त होता है) के विपरीत चुंबकीय रेखाओं का कोई स्रोत नहीं होता बल्कि वे सतत (continuous) होते हैं और स्वयं में पुनः मिल जाते हैं। आइए, हम यह देखें कि किस प्रकार समीकरण (9.18) और चित्र 9.11 ख से यह पता चलता है कि उपरोक्त कथन सही है। मान लीजिए अक्ष से एक नियत दूरी पर एक बिन्दु धारा-अक्ष के चारों ओर घूमता है। समीकरण (9.18) के अनुसार इस पथ के लिए dB का परिमाण अचर होता है और प्रत्येक बिन्दु पर इसकी दिशा पथ पर स्पर्शरेखीय होती है। ये बल रेखाओं को धारा के चारों ओर संकेन्द्रीय वृत्त (concentric circles) के रूप में होने के लिए आवश्यक हैं। अतः चुंबकीय क्षेत्र-रेखाएं धारा को घेर लेती हैं, जैसाकि चित्र 9.12 में दिखाया गया है। वृत्तीय क्षेत्र रेखाओं की दिशा, धारा प्रवाहित होने की दिशा पर निर्भर करती है। यदि धारा-प्रवाह की दिशा उलट दी जाए तो क्षेत्र-रेखा की दिशा भी उलट जाती है, जैसाकि चित्र 9.13 में दिखाया गया है।



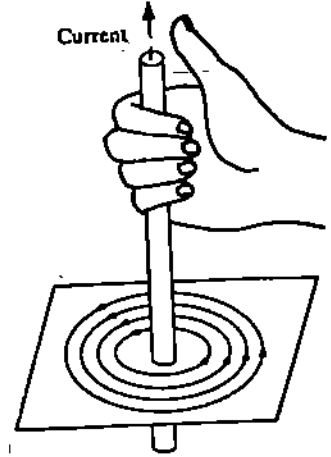
चित्र 9.12: सामान्यतः चुंबकीय क्षेत्र-रेखाएं एक धारा को घेर लेती हैं।

इन दिशाओं को याद रखने की एक सरल विधि है। आप अपने दाएं हाथ की हथेली को बंद कीजिए और अपने अंगूठे को धारा की दिशा में कर दीजिए, जैसाकि चित्र 9.14 में दिखाया गया है। किसी भी स्थिति में आप यह देखेंगे कि आपकी अंगुलियां स्वाभाविक रूप से चुंबकीय क्षेत्र-रेखाओं की दिशा में मुड़ गई हैं।



चित्र 9.13: क्षेत्र-रेखा की दिशा, धारा के प्रवाहित होने की दिशा से निर्धारित होती है। (क) जब धारा कागज के तल के लम्बवत् नीचे की ओर प्रवाहित होती है, तब क्षेत्र-रेखाएं दक्षिणावर्त (clockwise) वृत्त बनाते हैं। (ख) जब धारा कागज के तल के लम्बवत् ऊपर की ओर प्रवाहित होती है, तब क्षेत्र-रेखाएं वामावर्त (anticlockwise) वृत्त बनाते हैं।

चुंबकीय क्षेत्र की दिशा को याद करने की इस सरल विधि को चित्र 9.14 में दर्शाया गया है। इस विधि को **दक्षिण हस्त विधि (right hand method)** कहा जाता है। इस विधि को चित्र 9.7 में दिखाए गए सदिश गुणनफलों का दक्षिण हस्त नियम मत समझ लीजिए।



चित्र 9.14: अपने बायें हाथ से धारावाही चालक को पकड़ कर आप चुंबकीय क्षेत्र की दिशा मालूम कर सकते हैं। जब आपका अंगूठा धारा-प्रवाह की दिशा में होता है तब आपकी अंगुलियां चुंबकीय क्षेत्र की दिशा को इंगित करती हैं।

बोध प्रश्न 3

एक क्षैतिज तार में पूर्व से पश्चिम की ओर धारा प्रवाहित होती है। तार के ठीक ऊपर और ठीक नीचे इस धारा से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र की दिशा क्या होगी ?

चित्र 9.11 ख को फिर से देखिए। क्योंकि चुंबकीय क्षेत्र अध्यारोपण नियम (superposition principle) का पालन करते हैं, इसलिए पूरे परिपथ के कारण, जिसका कि तार एक भाग है, P पर उत्पन्न नेट क्षेत्र अलग-अलग धारा-अल्पांशों के क्षेत्रों का सदिश योगफल (vector sum) या रेखा समाकल (line integral) होगा अर्थात्

$$\mathbf{B} = \int d\mathbf{B} = \int \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad (9.19)$$

जहां समाकलन को पूरे पथ पर, जिसमें धारा I प्रवाहित होती है, लिया गया है।

आइए, हम एक सरल स्थिति में चुंबकीय क्षेत्र को ज्ञात करने के लिए बॉयो-सावर्ट नियम लागू करें।

क) एक लंबे सीधे धारावाही तार से उत्पन्न B का परिकलन

चित्र 9.15 में एक लंबा सीधा तार दिखाया गया है जिसमें धारा I प्रवाहित हो रही है। तार से r दूरी पर स्थित बिन्दु P पर चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात करना है।

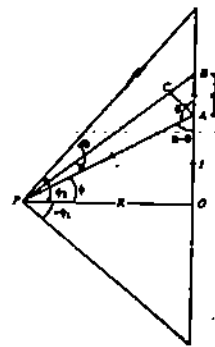
धारा अल्पांश $I dl$ द्वारा बिन्दु P पर स्थापित अवकल चुंबकीय क्षेत्र का परिमाण समीकरण (9.17) अर्थात्

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dl \sin \theta}{r^2} \quad (9.17)$$

से प्राप्त होता है।

$d\mathbf{B}$ की दिशा दक्षिण हस्त नियम विधि से मालूम की जाती है। यहां इसकी दिशा कागज के तल के लम्बवत् ऊपर की ओर है। $d\mathbf{B}$ की दिशा हमेशा यही होती है चाहे dl को तार पर हम कहीं भी ले, इसलिए बिन्दु P पर सभी धारा-अल्पांशों से उत्पन्न $d\mathbf{B}$ की दिशा एक ही ओर होती है; अतः बिन्दु P पर कुल चुंबकीय क्षेत्र B ज्ञात करने के लिए समीकरण (9.17) को समाकलित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{dl \sin \theta}{r^2}$$



चित्र 9.15: एक लंबे सीधे तार में प्रवाहित धारा I द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र परिकलित करना। धारा अल्पांश $I dl$ से उत्पन्न क्षेत्र $d\mathbf{B}$ की दिशा तूट के तल के लम्बवत् ऊपर की ओर होती है, वैसाकि दिखाया गया है।

जहां θ , \hat{r} और $d\mathbf{l}$ के बीच का कोण है।

लंबे सीधे तार के सभी अल्पांशों के योगदानों को जोड़ने के लिए हम θ और r चरों (variables) को ϕ में परिवर्तित कर देते हैं (चित्र देखिए)।

$$\text{अब } \sin \theta = \sin(\pi - \theta) = \cos \phi. \text{ चित्र} \quad (9.20)$$

$$AC \text{ पर } PB \text{ लम्ब डालिए, तब } \frac{AC}{AB} = \frac{rd\phi}{dl} = \cos \phi \quad (9.21)$$

[क्योंकि AC और AB के बीच का कोण PA और PO के बीच के कोण के बराबर हैं]

$$\therefore \frac{dl \sin \theta}{r^2} = \frac{dl \cos \phi}{r^2} \quad (\text{समीकरण 9.20 से})$$

$$= \frac{r d\phi}{r^2} \quad (\text{समीकरण 9.21 से})$$

$$\therefore B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\phi}{r}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_{-\phi_1}^{\phi_2} \cos \phi d\phi \quad \left(\because \cos \phi = \frac{R}{r} \right)$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} [\sin \phi_2 + \sin \phi_1]$$

एक अनंततः लंबे सीधे तार के लिए

$$\phi_1 = \phi_2 \Rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (9.22)$$

इस तरह B का परिमाण दूरी के व्युत्क्रमानुपाती होता है। समीकरण (9.22) से यह स्पष्ट है कि चुंबकीय क्षेत्र की रेखाएं तार के चारों ओर संकेन्द्रीय वृत्त (concentric circles) बनाती हैं। यह समीकरण एक लंबे आवेशित तार से उत्पन्न E के व्यंजक $\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{2\lambda}{r} \right)$ के सदृश है और इस प्रकार यह इसकी स्थिरविद्युतिकी जैसी प्रकृति को प्रदर्शित करता है।

ख) धारा-लूप के अक्ष के अनुविश B का परिकलन

आइए, हम त्रिज्या a वाला एक वृत्ताकार लूप लें जिसमें धारा I प्रवाहित हो रही है, जैसाकि चित्र 9.16 में दिखाया गया है, केन्द्र से दूरी b पर इसके अक्ष पर एक बिन्दु P लीजिए। P पर लंबाई dl वाले धारा-अल्पांश से उत्पन्न क्षेत्र dB यह होता है :

$$dB = \frac{\mu_0 I dl \times \hat{r}}{4\pi r^2} \quad (9.18)$$

लूप के सभी अल्पांशों के लिए r, dl पर लंब होता है, अतः यहां सदिश गुणनफल में $\sin \theta$ का मान 1 है, इसलिए

$$dB = \frac{\mu_0 I dl}{4\pi r^2}$$

क्योंकि $\mathbf{r} \perp d\mathbf{l}$ इसलिए dB सदा ही उस समतल पर लंब होता है जिसमें \mathbf{r} और $d\mathbf{l}$ है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि बिन्दु P पर dB , \mathbf{r} के लंब होता है, जैसाकि चित्र 9.16 में दिखाया गया है। dB को दो घटकों (components) में वियोजित किया जा सकता है - घटक $dB \sin \phi$ जो अक्ष

के अनुदिश और दूसरा घटक $dB \cos \phi$ जो अक्ष के लंब दिशा में है। यहां ϕ , r और लूप के अक्ष के बीच का कोण है। आप dl के सम्मुख एक अल्पांश से उत्पन्न क्षेत्र को लेकर यह आसानी से देख सकते हैं कि अक्ष के लम्ब दिशा में dB के घटक एक-दूसरे को काट देते हैं। इसलिए, परिणामी (resultant) B अक्ष की दिशा में होता है और यह केवल घटकों $dB \sin \phi$ को जोड़ने पर प्राप्त होगा। इस तरह, B यह होता है :

$$\begin{aligned} B &= \int dB \sin \phi \\ &= \int \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} dl \sin \phi \\ &= \frac{\mu_0 I \sin \phi}{4\pi r^2} \int dl \end{aligned}$$

क्योंकि हम धारा-लूप पर समाकलन कर रहे हैं, जहां ϕ और r दोनों अचर हैं, इसलिए इन्हें समाकलन-चिह्न से बाहर लिया गया है। लूप पर समाकलित लंबाई $2\pi a$ जिससे कि

$$B = \frac{\mu_0 I \sin \phi}{4\pi r^2} 2\pi a$$

$\sin \phi$ और r -को अचर a और b के पदों में व्यक्त करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{a^2}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \quad (9.23)$$

जब हम बिन्दु P को लूप से काफी दूर लेते हैं ($b \gg a$), तब B के समीकरण को हम इस प्रकार लिखते हैं:

$$B = \frac{\mu_0 2IA}{4\pi r^3} \quad (9.24)$$

यहाँ हमने $A = \pi a^2$ लूप का क्षेत्रफल लिया है। इस संबंध को देखने से यह पता चलता है कि धारा लूप स्वयं चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न करता है। ध्यान दीजिए कि अधिक दूरी पर लूप का चुंबकीय क्षेत्र द्विध्रुव के अक्ष पर विद्युत क्षेत्र $\left[E = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{2p}{r^3} \right) \right]$ की तरह होता है।

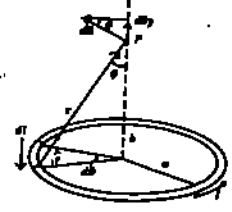
(इकाई 3 का भाग 3.6 देखिए।) इससे यह पता चलता है कि पद (IA) विद्युत द्विध्रुव के विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण p के संगत होता है। अतः पद IA को लूप का चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण कहा जाता है और इसे μ से प्रकट किया जाता है।

इससे पता चलता है कि दंड-चुंबक और धारा-लूप में काफी समानता है। धारा-लूप के चारों ओर चुंबकीय क्षेत्र का आलेखन (plotting) करके भी इस समानता को दर्शाया जा सकता है। जब कंपास द्वारा चुंबकीय क्षेत्र का आरेखन किया जाता है, तब चित्र 9.17 क और 9.17 ख में दिखाए गए आरेख प्राप्त होते हैं। लूप के किसी भी भाग पर दक्षिण हस्त विधि (right hand method) लागू कर आप स्वयं यह जांच कर सकते हैं कि धारा लूप का चुंबकीय क्षेत्र चित्र 9.17 क और ख द्वारा ही प्रदर्शित होते हैं। चित्र 9.17 ग को देखकर आप यह समझ सकते हैं कि धारा लूप के चुंबकीय क्षेत्र और दंड-चुंबक के चुंबकीय क्षेत्र काफी मिलते-जुलते से हैं। यह माना जा सकता है कि धारा-लूप में उत्तर-ध्रुव और दक्षिण-ध्रुव दोनों होते हैं। बाद में, एक भाग में हम यह देखेंगे कि यह दंड-चुंबक और धारा-लूप में महत्वपूर्ण समानताओं का एक पहलू है।

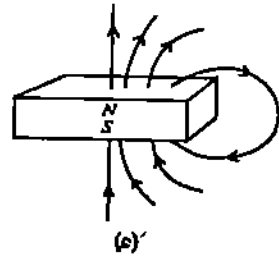
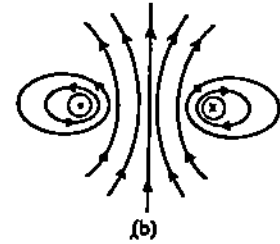
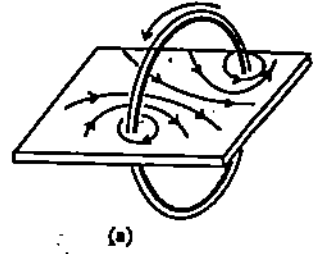
हम आशा करते हैं कि इस भाग का अध्ययन कर लेने के बाद आप यह बता सकते हैं कि चित्र 9.3 में दिखाए गए दो तार क्यों पहली स्थिति में एक-दूसरे को आकर्षित करते हैं जबकि दूसरी स्थिति में एक-दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं। यदि आप इसे नहीं बता सकते हैं तो आप नीचे दिए गए भाग का अध्ययन कीजिए। इससे आपको मात्रक : एम्पीयर को परिभाषित करने में भी सहायता मिलेगी जिसका प्रयोग अभी तक हम परिभाषित किए बिना ही करते आ रहे हैं।

पर, एम्पीयर को परिभाषित करने से पहले आप निम्नलिखित बोध प्रश्न-हल कीजिए।

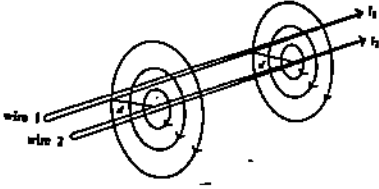
चुंबकीय क्षेत्र



चित्र 9.16: धारा लूप के अक्ष के अनुदिश चुंबकीय क्षेत्र



चित्र 9.17: (क) और (ख) में दिखाये गये धारा लूप द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र। (ग) में दिखाये गये पद के चुंबकीय क्षेत्र के समान है।



चित्र 9.18: दो समांतर तारों में यदि धाराएँ एक ही दिशा में हैं तो वे एक-दूसरे को आकर्षित करते हैं।

9.5 दो समांतर चालकों के बीच बल (एम्पीयर की परिभाषा)

इस भाग में हम यह देखेंगे कि चित्र 9.3 में दिए गए तारों में से एक तार दूसरे तार पर कितना बल आरोपित करता है। यहां हमने यह मान लिया है कि तार सीधे, समांतर और बहुत लंबे हैं। यहां एक धारावाही चालक दूसरे धारावाही चालक से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र के कारण बल का अनुभव करता है।

चित्र 9.18 में दो लंबे और समांतर तार दिखाए गए हैं जिनके बीच की दूरी d है और जिनमें समान दिशा में धाराएँ I_1 और I_2 प्रवाहित हो रही हैं। तार 2 में धारा प्रवाहित होने के कारण उसके चारों ओर चुंबकीय क्षेत्र B_2 उत्पन्न होता है। समीकरण (9.22) से तार 1 के किसी बिन्दु पर B_2 का परिमाण यह होता है :

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \quad (9.25)$$

दक्षिण हस्त विधि से यह पता चलता है कि तार 1 के किसी बिन्दु पर, B_2 की दिशा कागज के तल के लम्बवत् ऊपर की ओर है, जैसाकि चित्र 9.18 में दिखाया गया है।

अब तार 1, जिसमें धारा I_1 प्रवाहित हो रही है, एक बाह्य चुंबकीय क्षेत्र B_2 में स्थित है। यदि इस तार की लंबाई L हो, तो समीकरण (9.7) के अनुसार इस पर लगने वाले बल का परिमाण यह होता है :

$$F_1 = I_1 L B_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} \quad (9.26)$$

क्या आप बता सकते हैं कि इस बल की दिशा क्या होगी? दक्षिण हस्त नियम के अनुसार F_1 की दिशा तार 2 की ओर होती है। अर्थात् तार 1, तार 2 की ओर आकर्षित होता है।

इसी प्रकार, विपरीत दिशा में प्रवाहित हो रही धाराओं के लिए भी आप यह दिखा सकते हैं कि तार एक-दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं। नियम यह है कि समांतर धाराएँ (parallel currents) आकर्षित (attract) करती हैं और प्रतिसमांतर धाराएँ (anti parallel currents) प्रतिकर्षित (repel) करती हैं।

दो समांतर धारावाही चालकों के बीच लगने वाले बल के आधार पर एम्पीयर की परिभाषा दी जाती है। एक एम्पीयर विद्युत् धारा वह अचर धारा है जो कि निर्वात में एक मीटर की दूरी पर स्थित दो सीधे लंबे व समांतर चालकों में प्रवाहित होने पर, चालकों के बीच प्रति मीटर लंबाई पर 2×10^{-7} न्यूटन का बल उत्पन्न करती है।

दूसरे शब्दों में, मान लीजिए निर्वात में एक मीटर की दूरी पर स्थित उपेक्षणीय वृत्तीय अनुप्रस्थ परिच्छेद के एवं अनंत लंबाई वाले दो सीधे और समांतर चालक हैं। जब दोनों चालकों में अचर धारा प्रवाहित की जाती है तो प्रत्येक चालक पर बल लगता है। यदि चालक के प्रति मीटर लंबाई पर 2×10^{-7} न्यूटन का बल लगे तो धारा का मान 1 एम्पीयर कहलाता है।

9.6 एम्पीयर-नियम

स्थिरविद्युतिकी में हमने कूलॉम नियम का उपयोग स्वेच्छ आवेश वितरणों से उत्पन्न विद्युत् क्षेत्र को परिकल्पित करने के लिए किया था। क्या आपको याद है कि खंड 1 की इकाई 2 में हमने गाउस-नियम का उपयोग उच्च सममिति (high symmetry) वाले विद्युत्-क्षेत्रों से संबंधित प्रश्नों को सरलता और सुचारु रूप से हल करने में किया था। वहां हमने यह देखा था कि एक बन्द पृष्ठ (closed surface) से कितनी बल-रेखाएँ निकलती हैं और तत्परचात् हमने गाउस-नियम प्रतिपादित किया था।

चुंबकत्व में भी स्थिति इसी प्रकार की है। बॉयो और सावर्ट नियम लागू कर हम किसी भी धारा-वितरण से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र परिकलित कर सकते हैं। अब प्रश्न उठता है कि क्या हम गाउस-नियम के अनुरूप एक नियम प्रतिपादित कर सकते हैं। जिसकी सहायता से अधिक परिशुद्धता और सरलता से चुंबकीय क्षेत्र परिकलित कर सकें। विद्युत क्षेत्र के लिए गाउस-नियम किसी पृष्ठ से परिवद्ध आवेश की मात्रा और उस पृष्ठ से गुजरने वाली "बल-रेखाओं की संख्या" के बीच संबंध स्थापित करता है। "बल रेखाओं की संख्या" का परिमाण निर्धारित करने के लिए हमने अभिवाह (flux) की संकल्पना प्रस्तुत की थी। क्या इससे मिलती-जुलती कोई और संकल्पना है जो कि धारा से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र को निर्धारित करने में उपयोगी सिद्ध होती हो? हाँ, चुंबकीय क्षेत्र-रेखाओं का धारावाही चालक के चारों ओर बन्द लूप बनाना उपरोक्त प्रकार की संकल्पना की प्रकृति की ओर संकेत करता है।

एक लंबे धारावाही तार द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र पर विचार करें, जिसे चित्र 9.19 में दिखाया गया है। जैसाकि समीकरण (9.22) से स्पष्ट है कि इस क्षेत्र के परिमाण में दूरी के अनुसार प्रतिलोमतः कमी आती है। तार के चारों ओर किसी भी प्रकार का एक बंद लूप खींचिए। जो राशि अधिक उपयोगी सिद्ध होगी वह है लूप की लंबाई, जिसे प्रत्येक बिन्दु पर चुंबकीय क्षेत्र के उस घटक से भरित किया गया है जो लूप की दिशा की ओर है। इस राशि को लूप के परितः परिसंचरण (circulation around the loop) कहा जाता है। आइए, हम वृत्ताकार लूप 1 के परितः परिसंचरण परिकलित करें। यह लूप क्षेत्र-रेखा के साथ संपाती है, जैसाकि चित्र 9.19 में दिखाया गया है। वृत्त 1 के सभी बिन्दुओं पर चुंबकीय क्षेत्र का परिमाण समीकरण (9.22) अर्थात्

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}$$

से प्राप्त हो जाता है, जहाँ I तार में प्रवाहित धारा है और r_1 इस वृत्त की त्रिज्या है। क्योंकि वृत्ताकार लूप की दिशा सदा ही क्षेत्र की दिशा की ओर होती है (चूंकि यह क्षेत्र-रेखा के साथ संपाती होती है) इसलिए परिसंचरण का मान लूप की परिधि और क्षेत्र-प्रबलता (field strength) के गुणनफल के बराबर होता है।

$$\text{परिसंचरण लूप 1} = 2\pi r_1 B_1 = 2\pi r_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} = \mu_0 I \quad (9.27)$$

इससे स्पष्ट है कि परिसंचरण का मान लूप की त्रिज्या r_1 पर निर्भर नहीं करता है। आइए, हम त्रिज्या r_2 वाले एक अन्य लूप 2 के लिए परिसंचरण परिकलित करें। यह लूप भी क्षेत्र-रेखा के साथ संपाती है। अतः

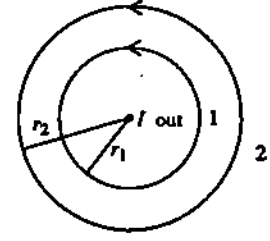
$$\text{परिसंचरण लूप 2} = 2\pi r_2 B_2 = 2\pi r_2 \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} = \mu_0 I \quad (9.28)$$

यह दर्शाता है कि लंबे सीधे तार द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र में किसी भी क्षेत्र-रेखा के परितः परिसंचरण समान होता है। इससे यह भी ज्ञात होता है कि क्षेत्र-रेखा के संपाती किसी भी लूप के परितः परिसंचरण उस क्षेत्र-रेखा द्वारा परिवद्ध तार में प्रवाहित धारा के समानुपाती होता है।

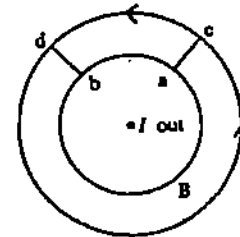
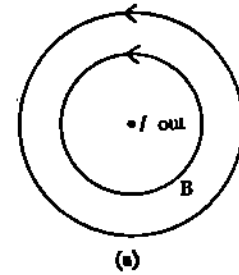
अब प्रश्न उठता है कि उस बन्द लूप के परितः परिसंचरण क्या होगा जो क्षेत्र-रेखा के साथ संपाती नहीं है? चित्र 9.20 क में दो क्षेत्र-रेखाएं दिखाई गई हैं। आइए हम एक ऐसा बन्द लूप (जिसे चित्र 9.20 ख में रंगीन रेखा से दिखाया गया है) लें जो तार को तो परिवद्ध करता है, पर किसी एक क्षेत्र-रेखा के साथ संपाती नहीं है। इस लूप के परितः परिसंचरण का परिकलन करने के लिए हम तय की गई दूरी और गति की दिशा में क्षेत्र के घटक का गुणनफल लेते हुए लूप के अनुदिश गतिमान होते हैं। हम जब लूप के सीधे भाग ca और bd के अनुदिश गतिमान होते हैं, तो लूप के परितः परिसंचरण में इन भाग का कोई भी योगदान नहीं होता, क्योंकि जब हम क्षेत्र की लंब-दिशा में गतिमान होते हैं तो इस स्थिति में गति की दिशा में क्षेत्र के घटक का मान शून्य होता है।

चाप ab का, जो कि आंतरिक क्षेत्र-रेखा का हिस्सा है, परिसंचरण में क्या योगदान है? इसका योगदान वही होगा जो कि चाप cd का होता है, यदि हम इसके अनुदिश गतिमान हों हालांकि चाप

चुंबकीय क्षेत्र



चित्र 9.19: धारावाही तार के चारों ओर चुंबकीय क्षेत्र-रेखाएँ



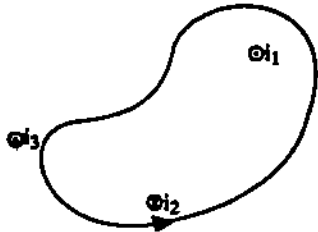
(क) (ख)

चित्र 9.20: क) धारावाही तार से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र-रेखाएँ। ख) एक बन्द लूप जो एक क्षेत्र-रेखा के साथ संपाती नहीं है। इस लूप के परितः परिसंचरण वही होता है जो क्षेत्र-रेखा के परितः परिसंचरण है।

cd दिए गए लूप का हिस्सा नहीं हैं। ऐसा इसलिए होता है, क्योंकि (i) आंतरिक और बाह्य क्षेत्र-रेखाओं के परितः परिसंचरण समान रहता है, जैसाकि समीकरण (9.27) या समीकरण (9.28) से स्पष्ट है तथा (ii) चाप ab आंतरिक क्षेत्र-रेखा का उतना ही अंश है जितना कि चाप cd बाह्य क्षेत्र-रेखा का है। अतः समीकरण (9.28) के अनुसार परिसंचरण का मान $\mu_0 I$ है। इससे स्पष्ट है कि एक सीधे अपरिवर्ती धारावाही चालक को परिवर्द्ध करने वाले किसी बन्द लूप के परितः परिसंचरण उसी लूप द्वारा परिवर्द्ध धारा I के समानुपाती होता है और इसका मान $\mu_0 I$ होता है।

उपरोक्त कथन एम्पीयर-नियम का ही एक सरल रूप है। यह नियम किसी भी प्रकार की धारा और किसी भी बन्द लूप के लिए सत्य होता है, बशर्ते परिवर्द्ध धारा अपरिवर्ती (धारा जिसका समय के साथ परिवर्तन नहीं हो रहा हो) हो। यदि धारा केवल एक तार में प्रवाहित न होकर अनेक तारों में प्रवाहित हो रही हो, तो लूप द्वारा परिवर्द्ध नेट धारा प्राप्त करने के लिए हम सभी धाराओं का योग लेते हैं। यदि धाराएं विपरीत दिशाओं में प्रवाहित हो रही हों तो धारा की विपरीत दिशाओं के लिए हम विपरीत चिन्ह लेते हैं। धाराओं का बीजीय योग ही लूप द्वारा परिवर्द्ध नेट धारा होता है जो लूप के परितः परिसंचरण निर्धारित करता है।

लूप की वामावर्त स्थिति के लिए लूप के बाहर की ओर इंगित करने वाली धाराओं को धनात्मक माना जाता है और अंदर की ओर इंगित करने वाली धाराओं को ऋणात्मक माना जाता है। दक्षिण हस्त विधि से इसे इस प्रकार याद रखा जा सकता है। यदि आपके दाएं हाथ की अंगुलियां (मुड़ने वाला अवयव) लूप के अनुदिश चलने की दिशा को प्रकट करती हों, तो आपका निकला हुआ अंगूठा (सीधा अवयव) लूप से परिवर्द्ध धाराओं की धन दिशा को प्रकट करता है।



Amperian loop

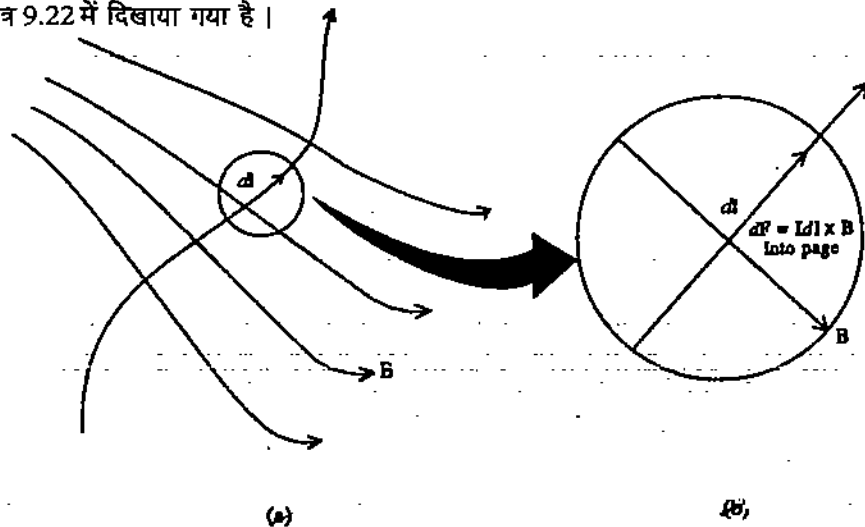
चित्र 9.21: एम्पीयर-नियम को एक स्पष्ट एम्पीयरी लूप पर लागू किया गया है जो दो लंबे सीधे तार को तो परिवर्द्ध करते हैं पर तीसरे तार को परिवर्द्ध नहीं करते। धाराओं की दिशाओं पर ध्यान दें।

बोध प्रश्न 5

चित्र 9.21 में उन तीन लंबे सीधे तार के अनुप्रस्थ-परिच्छेद दिखाए गए हैं जो कागज के तल पर लम्बवत् है। तार में प्रवाहित धाराएं i_1 , i_2 और i_3 है जिनकी दिशाएं चित्र में दिखाई गई हैं। एम्पीयरी लूप में परिवर्द्ध नेट धारा ज्ञात कीजिए।

परिसंचरण के बारे में चर्चा करते समय हमें यह स्पष्ट होना चाहिए कि लूप दक्षिणावर्त है या वामावर्त है। जब हम अपने दाएं हाथ की अंगुलियों को लूप के अनुदिश मोड़ते हैं, तब यदि दाएं हाथ का अंगूठा लूप द्वारा परिवर्द्ध नेट धारा की दिशा की ओर इंगित करे तो इस स्थिति में परिसंचरण धनात्मक होता है।

आइए, हम एक चुंबकीय क्षेत्र में एक विषम लूप के परितः परिसंचरण का मान ज्ञात करें, जैसाकि चित्र 9.22 में दिखाया गया है।



चित्र 9.22: (a) एक चुंबकीय क्षेत्र में विषम लूप (b) आर्पित रूप को देखने से स्पष्ट है कि लूप के एक अत्यंत बंद से परिसंचरण के लिए योगदान केवल $B \cdot \Delta l$ होता है।

आइए, हम लूप के एक अति लघु खंड पर विचार करें। ऐसा करने से यह सुनिश्चित हो जाएगा कि विचाराधीन भाग रेखिक है और इस पर चुंबकीय क्षेत्र का परिमाण और दिशा दोनों ही अचर हैं। लूप के इस लघु खंड को $d\mathbf{l}$ से प्रकट किया जाता है। सदिश $d\mathbf{l}$ का परिमाण $d\mathbf{l}$ है जो कि खंड की लम्बाई है तथा इसकी दिशा लूप की स्थानिक दिशा है। माना इस $d\mathbf{l}$ खंड के कारण परिसंचरण dC है। dC का मान $d\mathbf{l}$ लम्बाई और चुंबकीय क्षेत्र के उस घटक के गुणनफल के बराबर है जो कि $d\mathbf{l}$ की दिशा की ओर है। अर्थात्

$$dC = d\mathbf{l}B \cos \theta = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.29)$$

जहां θ , क्षेत्र और खंड $d\mathbf{l}$ को दिशा के बीच का कोण है।

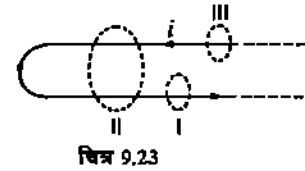
लूप के परितः परिसंचरण सभी $d\mathbf{l}$ खंडों से प्राप्त dC के योगदानों का योग होता है, अर्थात् $C = \sum dC$ । जैसे ही खंड स्वेच्छया छोटे होते जाते हैं, वैसे ही योग एक समाकल हो जाता है, अर्थात्

$$C = \oint dC = \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} \quad (9.30)$$

इस पाठ्यक्रम के खंड 1 में विद्युत विभव को परिभाषित करते समय इसी के समान रेखा समाकल (line integral) का अध्ययन आपने अवश्य किया होगा। यहां रेखा-समाकल का अर्थ है—चुंबकीय क्षेत्र और लूप के खंडों $d\mathbf{l}$ के अनेक अदिश गुणनफलों (dot products) का योग। समाकलन चिन्ह पर लगाया गया वृत्त यह बताता है कि हम बंद लूप का अध्ययन कर रहे हैं।

अतः गणितीय रूप में एम्पीयर-नियम को इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I_{\text{परिबद्ध}} \quad (9.31)$$



यह कथन किसी भी लूप कि लिए सही है बशर्ते धारा I अपरिवर्ती हो तथा लूप द्वारा परिबद्ध नेट धारा हो।

बोध प्रश्न 6

चित्र 9.23 में दिखाए गए तीन विभिन्न पथों पर गुणात्मक रूप में एम्पीयर नियम लागू कीजिए।

स्थिर विद्युतिकी में हमने गाउस-नियम की सहायता से विभिन्न आवेश वितरणों से उत्पन्न विद्युत क्षेत्र की प्रबलता ज्ञात की थी। हालांकि विद्युत क्षेत्र में उपर्युक्त बन्द पृष्ठ लेकर केवल कुछ ही सममित आवेश-वितरणों के लिए ही हम गाउस-नियम लागू कर सकते थे। यहां हम यह मान लेते हैं कि अपरिवर्ती अवस्था के चुंबकत्व में एम्पीयर-नियम ठीक वैसी ही भूमिका निभाती है, जैसाकि स्थिरविद्युतिकी में गाउस-नियम निभाता है। यहां हम यह देखेंगे कि एम्पीयर-नियम का उपयोग केवल सममित धारा-वितरणों से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्रों को ज्ञात करने में किया जा सकता है। इसके लिए, हमें चुंबकीय क्षेत्र में उपर्युक्त बन्द लूप, जिसे एम्पीयरी लूप (amperian loop) कहा जाता है,

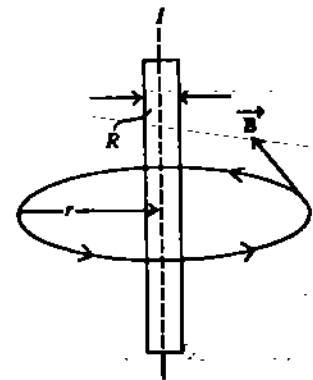
लेना होता है जिस पर रेखा समाकल $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$ का मान निकालना होता है। हम कुछ उदाहरण

लेकर इस संकल्पना को अच्छी तरह से समझने की कोशिश करेंगे।

9.6.1 एम्पीयर नियम के अनुप्रयोग

1. लंबे सीधे धारावाही तार से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र

जैसाकि चित्र 9.24 में दिखाया गया है एक लंबे सीधे तार में धारा I प्रवाहित हो रही है। हमें तार से दूरी r पर चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात करना है। तार, बेलन रूप में सममित है, इसलिए चुंबकीय क्षेत्र का



चित्र 9.24: लंबे सीधे तार से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र

दक्षिण हस्त-विधि: यदि हम तार को दाएं हाथ से इस तरह पकड़ें जिससे कि अंगूठा धारा की दिशा को इंगित करता हो, तो अंगुलियां B की दिशा में तार के परितः मुड़ जाएंगी।

परिमाण तार के सापेक्ष कोणीय स्थिति पर निर्भर नहीं कर सकता। क्योंकि तार पर कोई चुंबकीय एकध्रुव (monopole) नहीं है, इसलिए तार पर चुंबकीय क्षेत्र-रेखाओं का न तो आदि होता है और न ही अंत होता है। ये रेखाएं त्रिज्यतः (radially) बाहर की ओर जाती हैं। अतः चुंबकीय क्षेत्र-रेखाएं बन्द लूप बनाएंगी। वे क्षेत्र रेखाएं जो कि बन्द लूप हो ओर बेलनाकार सममिति भी प्रदर्शित करती हो, केवल तार के साथ संकेन्द्रीय वृत्त ही हो सकती है। B की दिशा ज्ञात करने के लिए दक्षिण हस्त विधि को याद रखना चाहिए: आपकी सुविधा के लिए इसी विधि को हम दाएं हासिए में फिर से दे रहे हैं।

अब हम एम्पीयर नियम की सहायता से I एम्पीयर की धारा ले जाने वाले, तथा R त्रिज्या ($r > R$) वाले लंबे सीधे तार के अक्ष से r मीटर की दूरी पर B का परिमाण ज्ञात करेंगे। यहां हमने यह मान लिया है कि तार की लंबाई की तुलना में r छोटा है जिससे कि तार को अनंततः लंबा माना जा सके।

एम्पीयर-नियम में रेखा-समाकल का मान निकालने के लिए हमें एक एम्पीयरी लूप निर्धारित करना होगा। यहां क्षेत्र-रेखाएं स्वयं ही उपयुक्त लूप हैं। हम त्रिज्या r वाला एक वृत्तीय पथ लेते हैं जिसका केन्द्र तार के अक्ष पर है। सममिति के कारण, इस वृत्तीय पथ (या रेखा) पर क्षेत्र का परिमाण अचर होता है। यहां एम्पीयरी लूप, क्षेत्र-रेखा के साथ संपाती है। इसलिए प्रत्येक बिन्दु पर क्षेत्र की दिशा वही होती है जो कि लूप की है। अतः

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint B dl = B \oint dl = B \cdot 2\pi r$$

जिससे कि

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$$

$$\text{या } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (9.32)$$

उदाहरण 3

त्रिज्या R वाले एक लंबे बेलनाकार तार में एक अपरिवर्ती धारा I प्रवाहित होती है जो कि इसके अनुप्रस्थ-परिच्छेद क्षेत्र पर एकसमान रूप से वितरित हैं। तार के अक्ष से दूरी $r (< R)$ पर चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

हल

पहले हम यह ध्यान दें कि दूरी $r < R$ पर स्थित बिन्दु तार के अंदर है। इस स्थिति में हम यह पाते हैं कि सममिति के कारण उस पथ के सभी बिन्दुओं पर B का परिमाण अचर है, जो कि त्रिज्या r वाला एक वृत्त है जिसका केन्द्र तार के अक्ष पर है और जिसका समतल तार के अक्ष पर लंब है। इस वृत्त के प्रत्येक बिन्दु पर B की दिशा उस बिन्दु पर वृत्त की स्पर्शरेखा की दिशा होती है। एम्पीयर नियम में इस वृत्त को रेखा-समाकल का समाकलन पथ मानते हैं।

$$\text{अतः } \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = B 2\pi r.$$

इस पथ से परिवद्ध धारा का मान I नहीं होता, बल्कि धारा का वह भाग होता है जो क्षेत्रफल πr^2 वाले अनुप्रस्थ परिच्छेद से प्रवाहित हो रहा होता है।

अतः धारा = $\pi r^2 \times$ प्रति इकाई अनुप्रस्थ-परिच्छेद क्षेत्रफल में धारा का मान

$$= \pi r^2 \times \frac{I}{\pi R^2} = I \frac{r^2}{R^2}$$

$$B 2\pi r = \mu_0 I \frac{r^2}{R^2}$$

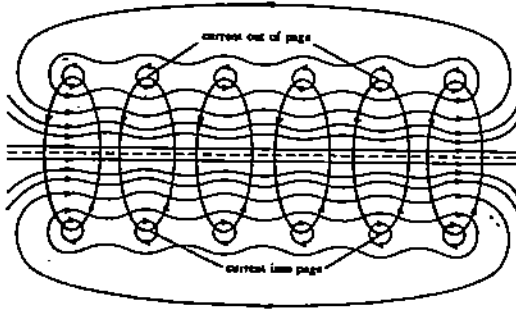
$$\text{या } B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} r \quad (9.33)$$

बोध प्रश्न 7

बाहर की ओर कुछ दूरी तक तार (त्रिज्या R वाले) के अक्ष से r दूरी के एक फलन के रूप में B को आरेखित कीजिए। (r को तार के बाहर भी कुछ दूरी तक लें।)

2. परिनालिका (solenoid) से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र

खंड 2 में हमने यह देखा है कि एक संधारित्र के दो आवेशित चालक-प्लेटों के बीच हम एकसमान विद्युत क्षेत्र उत्पन्न कर सकते हैं। क्या इसी प्रकार की कोई अन्य युक्ति (device) है, जो एकसमान चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न कर सके? हां, यह युक्ति परिनालिका है। आइए, हम यह देखें कि यह किस प्रकार एकसमान चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न करता है। आप जानते हैं कि जब एक वृत्तीय लूप में धारा प्रवाहित होती है, तब चुंबकीय क्षेत्र की दिशा वही होती है, जैसाकि चित्र 9.17 में दिखाया गया है। दक्षिण हस्त विधि को लागू करके क्षेत्र-रेखाएं खींची गई हैं। यहाँ आप यह देखते हैं कि क्षेत्र-रेखाएं तार को घेरे हुई हैं। परिनालिका को ऐसा समझा जा सकता है जैसे कि धारावाही तार के बहुत से फेरे (turns) एक दूसरे से सटाकर लपेटे हुए हों।



चित्र 9.25: डीली तरह से लिपटी हुई तार की कुंडली (coil of wire)। तार में प्रवाहित धारा से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र कुंडली के भीतर प्रबलतम होता है। चुंबकीय क्षेत्र की बल-रेखाओं को केवल कागज के तल पर दिखाया गया है। डॉट रे विन्दु हैं जहाँ धारा कागज से बाहर की ओर निकल रही है तथा क्रॉस का निशान कागज के अंदर प्रवेश करती हुई धारा का प्रतीक है।

चित्र 9.25 में चार फेरों (turns) वाली एक परिनालिका दिखायी गई है। सामान्य परिनालिकाओं की तुलना में यहाँ फेरे ढीले लपेटे गए हैं। तार के किसी भी भाग के समीप, चारों ओर घेरे हुए चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं होती हैं। हमने इन क्षेत्र-रेखाओं को कुंडली के ऊपरी और निचले सिरे पर दिखाया है, जहाँ तार कागज के तल के लम्बवत् है। किसी भी स्थान पर नेट चुंबकीय क्षेत्र लूप के अलग-अलग भागों के कारण उत्पन्न क्षेत्रों का सदिश योग होता है। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि कुंडली के भीतर, ऊपरी और निचले सिरे के तार के अंशों (elements) से चुंबकीय क्षेत्रों की दिशा दायीं ओर है - अतः इनकी प्रवृत्ति प्रबल (reinforce) होने की होती है। कुंडली के ऊपरी सिरे के ऊपर, ऊपरी सिरे के अंशों से उत्पन्न क्षेत्रों की दिशा बायीं ओर है, जबकि निचले सिरे के अंशों से उत्पन्न क्षेत्र की दिशा दायीं ओर को है, जिस कारण नेट क्षेत्र दुर्बल होता है। इसी प्रकार कुंडली के निचले सिरे के नीचे भी चुंबकीय क्षेत्र दुर्बल होता है। अतः कुंडली के भीतर नेट क्षेत्र प्रबल होता है तथा दायीं ओर होता है जबकि कुंडली के बाहर नेट क्षेत्र दुर्बल होता है और बायीं ओर होता है, जैसाकि चित्र 9.25 में दिखाया गया है।

मान लीजिए कि कुंडली को कसकर लपेट कर बनाया गया है और व्यास की तुलना में इसकी लंबाई अधिक है, जैसाकि चित्र 9.26 में दिखाया गया है। ऐसी स्थिति में भी परिनालिका की कुंडली के

भीतर चुंबकीय क्षेत्र प्रबल होता है और जैसे-जैसे फेरे एक-दूसरे के निकट आते जाते हैं, तब क्षेत्र में जो कुछ भी अनियमितताएं होती हैं, वे समाप्त हो जाती हैं और परिनालिका के भीतर सीधी क्षेत्र-रेखाएं प्राप्त होती हैं।

अब प्रश्न उठता है कि परिनालिका के बाहर क्षेत्र-रेखाएं कैसी होती हैं? क्योंकि क्षेत्र-रेखाओं, का न तो आदि होता है और न ही अंत होता है, इसलिए ये बाह्य क्षेत्र-रेखाएं परिनालिका की दायीं ओर से निकल रही क्षेत्र-रेखाओं को बायीं ओर को प्रवेश कर रही क्षेत्र-रेखाओं के साथ जोड़ देती हैं। परिनालिका अक्ष के निकट की क्षेत्र-रेखाएं काफी धीरे-धीरे झुकती जाती हैं और दूसरे सिरे पर लौटने से पहले परिनालिका से दूर फैल जाती हैं।

एम्पीयर-नियम की सहायता से परिनालिका के भीतर B का मान ज्ञात करने के लिए हमें दो बातों की ओर ध्यान देना होता है: (i) चुंबकीय क्षेत्र की दिशा कसकर लपेटे गए एक लंबे परिनालिका के अक्ष के अनुदिश होती है। (ii) यदि परिनालिका की लंबाई अधिक है, तो उसके सिरे से निकल रही क्षेत्र-रेखाएं दूसरे सिरे में प्रवेश करने से पहले काफी फैल जाती हैं। इससे यह पता चलता है कि परिनालिका के बाहर का चुंबकीय क्षेत्र भीतर के चुंबकीय क्षेत्र की तुलना में काफी दुर्बल होता है। परिणाम यह होता है कि हम परिनालिका के बाहर के क्षेत्र को उपेक्षणीय मान लेते हैं।

हम परिनालिका के भीतर के क्षेत्र का परिकलन करने के लिए एम्पीयर-नियम लागू करेंगे। एक बन्द रैखिक पथ PQRS लीजिए, जैसाकि चित्र 9.27 में दिखाया गया है। इन पथ के लिए,

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_P^Q \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \oint_Q^R \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \oint_R^S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} + \oint_S^P \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

QR और SP पर समाकल शून्य है क्योंकि इन पथों के कुछ भाग (जो कि परिनालिका के बाहर हैं) के लिए $\mathbf{B} = 0$ है और एक अन्य भाग (जो कि परिनालिका के अंदर हैं) के लिए \mathbf{B} , $d\mathbf{l}$ पर लंब है। RS पर समाकल शून्य है क्योंकि परिनालिका के बाहर इस पथ के अनुदिश $\mathbf{B} = 0$ है। वह समाकल जो शून्य नहीं है वह है PQ पर का समाकल।

अतः

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \oint_P^Q \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l}$$

इस पथ के लिए, \mathbf{B} , PQ के अनुदिश है, जिसका अर्थ है कि $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \int_P^Q B dl$ जिससे कि

$$\begin{aligned} \oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \int_P^Q B dl = B \int_P^Q dl \\ &= BL \end{aligned}$$

जहां L पथ PQ की लंबाई है। यदि इस पथ में परिनालिका के तार के N फेरे हो, जिनमें से प्रत्येक में धारा I प्रवाहित होती हो, तो एम्पीयर-नियम का दक्षिण पक्ष $\mu_0 NI$ होगा। अंत में,

$$BL = \mu_0 NI$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 NI}{L} = \mu_0 nI \quad (9.34)$$

जहां n परिनालिका की प्रति इकाई लंबाई में फेरों की संख्या है।

एक अनंततः लंबे परिनालिका के लिए प्राप्त किया गया सूत्र, जिसे समीकरण (9.34) के रूप में दिया गया है, वास्तविक परिनालिका के अंदर के सभी बिन्दुओं के लिए, जो सिरों से दूर हैं, भी लागू होता है। ध्यान दीजिए कि B , तब तक परिनालिका के अंदर के बिन्दु की स्थिति पर निर्भर नहीं करता,

जब तक कि हम परिनालिका के सिरों से दूर रहते हैं। अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि B परिनालिका के अनुप्रस्थ-परिच्छेद पर एकसमान (uniform) होता है। प्रायोगिक कार्यों के लिए, ज्ञात एकसमान चुंबकीय क्षेत्र स्थापित करने की यह एक व्यवहारिक विधि है।

3. टोरोइड के भीतर चुंबकीय क्षेत्र

यदि परिनालिका को एक वृत्त के रूप में मोड़ दिया जाए जिससे कि इसके दोनों सिरे जुड़ जाएं, तो एक टोरोइड बन जाता है, जैसाकि चित्र 9.28 में दिखाया गया है। सममित होने के कारण टोरोइड के भीतर B की क्षेत्र-रेखाएं वृत्तीय होंगी जिनका केन्द्र टोरोइड का केन्द्र होगा और किसी भी क्षेत्र रेखा के अनुदिश क्षेत्र का परिमाण अचर होगा। यदि हम एम्पीयर लूप को त्रिज्या r वाला एक वृत्त लें, जो एक क्षेत्र रेखा के साथ संपाती हो, तो इस लूप के अनुदिश हम परिसंचरण (circulation) तुरंत इस प्रकार परिकलित कर सकते हैं :

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r B.$$

यहां हम रेखा-समाकल का मान आसानी से निकाल सकते हैं, क्योंकि एम्पीयर लूप का क्षेत्र-रेखा के साथ संपाती होने के कारण इस पर B का मान अचर होता है। परिणाम यह होता है कि समाकल केवल क्षेत्र-प्रबलता और लूप की परिधि $2\pi r$ का गुणनफल ही रह जाता है। अब प्रश्न उठता है कि लूप में कितना धारा परिवर्द्ध होती है? यदि टोरोइड में N फेरे हों और इसमें धारा I प्रवाहित होती हो, तो टोरोइड कुंडली के अंदर का एम्पीयर लूप कुल NI धारा परिवर्द्ध करेगा। ऐसा होने का कारण यह है कि पथ के प्रत्येक फेरो में धारा समान दिशा में प्रवाहित होती हैं। इस धारा और परिसंचरण के बीच संबंध स्थापित करने के लिए एम्पीयर-नियम को लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$2\pi r B = \mu_0 NI,$$

जिससे कि

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \quad (9.35)$$

यह परिणाम तब लागू होता है जबकि एम्पीयर लूप टोरोइड के भीतर होता है। इसके विपरीत यदि एम्पीयर लूप टोरोइडी कुंडलियों के अंतः कोर (inner edge) के अंदर होता है, तो कोई भी धारा परिवर्द्ध न होने के कारण चुंबकीय क्षेत्र शून्य होता है। और, यदि एम्पीयर लूप कुंडलियों के बाह्य कोर के बाहर होता है, तो यह समान, पर विपरीत दिशा में प्रवाहित धाराएं परिवर्द्ध करता है और इस तरह शून्य क्षेत्र प्राप्त होता है। समीकरण (9.35) से स्पष्ट है कि एक सीधे परिनालिका की भांति एक टोरोइड के अनुप्रस्थ परिच्छेद पर B का मान अचर नहीं होता है।

9.6.2 एम्पीयर-नियम का अवकल रूप

एम्पीयर-नियम को एक अन्य विधि से भी व्यक्त किया जा सकता है। समीकरण (9.33) में इस नियम का समाकल रूप दिया गया है। इस भाग में हम समाकल रूप को निम्नलिखित अवकल रूप में रूपांतरित करते हैं :

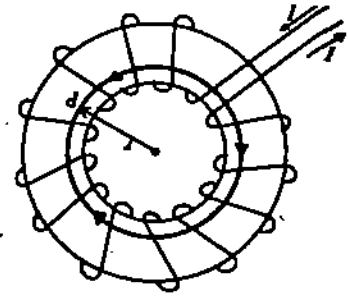
$$\text{Curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (9.36)$$

जहां \mathbf{J} धारा-घनत्व (current density) है।

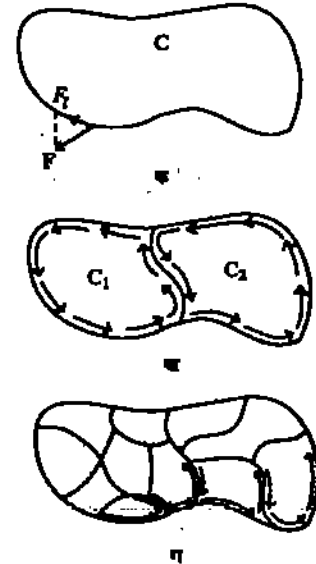
आइए, हम बन्द पथ C के अनुदिश रेखा समाकल $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ लें, जैसाकि चित्र 9.29 में दिखाया गया है। यहां हमने चुंबकीय क्षेत्र \mathbf{B} के स्थान पर एक सदिश क्षेत्र \mathbf{F} लिया है। बन्द पथ C को किसी पृष्ठ S की परिसीमा (boundary) माना जा सकता है। समाकल (integrand) में $d\mathbf{l}$, पथ का अल्पांश है जो कि एक अत्यणु सदिश (infinitesimal vector) है और C पर स्पर्श रेखा बनाता है।

अब बंद पथ C को दो भागों में बांटा जाता है जिससे दो लूप C_1 और C_2 प्राप्त होते हैं (चित्र

चुंबकीय क्षेत्र



चित्र 9.28: सममिति के लिए यह आवश्यक है कि क्षेत्र-रेखाएं वृत्तीय हों। यहां क्षेत्र के परिकलन के लिए एम्पीयर लूप (मोटी) भी दिखाया गया है।



चित्र 9.29: क) बंद पथ C के परितः \mathbf{F} का परिसंचरण $\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$ का रेखा-समाकल होता है जहां \mathbf{F} , \mathbf{F} का स्पर्श घटक है।

ब) पूरे लूप के परितः परिसंचरण दो लूपों के परितः परिसंचरणों का योग होता है।

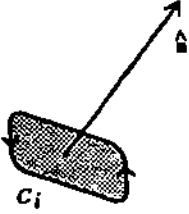
ग) जब पूरे लूप को छोटे-छोटे अनेक लूपों में बांटा जाता है तो पूरे लूप के परितः परिसंचरण छोटे-छोटे लूपों के परितः परिसंचरणों का योग होता है।

9.29 ख) एक ही दिशा में, इन में से प्रत्येक लूप के अनुदिश रेखा-समाकल लीजिए। C_1 और C_2 के परितः परिसंचरणों का योग वही होगा, जो कि C के परितः परिसंचरण है। ऐसा होने का कारण यह है कि मूल पृष्ठ के क्षेत्रफल को दो भागों में विभाजित करने वाले सेतु का योगदान शून्य हो जाता है क्योंकि सेतु पर दो रेखा-समाकल समान, पर विपरीत दिशा में होते हैं। मूल पृष्ठ के क्षेत्रफल के चाहे कितने भी उपविभाजन क्यों न हो, ऊपर दिया गया तर्क हमेशा लागू होता है। अनेक लूपों $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$ (चित्र 9.29) में उप-विभाजन के बावजूद उनके योग में कोई अंतर नहीं आता है। अर्थात्

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_1 + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_2 + \dots$$

$$= \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_i \quad (9.37)$$

यहां मूल पृष्ठ के क्षेत्रफल के उप-क्षेत्रफलों के परितः परिनालिका के योगफल में प्रत्येक पद को पादाक्षर (subscript) i के एक विशेष मान से प्रकट किया गया है। यदि हम पूरे लूप को इसी तरह अनंततः उपविभाजित करते जाएं, तो सीमा (limit) लेने पर हमें एक ऐसी राशि मिलती है, जो कि स्थानीय प्रतिवेश (neighbourhood) में क्षेत्र F की विशिष्टता (characteristic) होती है। जब हम लूपों को उपविभाजित करते हैं, तब लूप केवल छोटे परिसंचरण वाले ही नहीं बल्कि छोटे क्षेत्रफल वाले भी बनते हैं। इसलिए, जिस तरह हमने खंड 1 की इकाई 2 में अभिवाह (flux) और आयतन का अनुपात लिया था ठीक उसी प्रकार यहां हम लूप-परिसंचरण और लूप-क्षेत्रफल का अनुपात लेते हैं। एक छोटे से लूप C_i से घिरा हुआ छोटा क्षेत्रफल a_i एक सदिश राशि होता है, अतः पृष्ठ क्षेत्रफल का आकाश (space) में एक अभिविन्यास होता है। जब हम किसी प्रतिवेश (neighbourhood) में लूप को छोटा से छोटा करते जाते हैं, तब हमें अपेक्षित दिशा में एक लूप प्राप्त होता है।



चित्र 9.30: पृष्ठ अभिलंब तथा उस दिशा के बीच, दक्षिण हस्त स्क्रू संबंध, जिसमें परिसंचरण रेखा समाकल लिया गया है।

लूप को अंतिम रूप से उपविभाजित करने के बाद, आइए हम लूप का एक विशेष दिग्ग्विन्यास (orientation) लें। यदि एकक सदिश \hat{n} लूप पर के अभिलंब (normal) को प्रकट करता हो तो लूप, जो कि एक विशेष बिन्दु P को परिवर्द्ध करता है, के सिकुड़ कर शून्य आकार के होने पर भी एकक सदिश को एक दिशा में स्थिर बना रहना होगा। \hat{n} की दिशा दक्षिण हस्त स्क्रू विधि के अनुसार दी जाती है, जैसाकि चित्र 9.30 में दिखाया गया है। परिसंचरण और लूप-क्षेत्र के अनुपात की सीमा यह होगी :

$$\lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_i}{a_i} \quad (9.38)$$

समीकरण (9.38) में प्राप्त की गई सीमा एक अदिश राशि (scalar quantity) है जिसका संबंध सदिश क्षेत्र \mathbf{F} के बिन्दु P तथा दिशा \hat{n} से हैं। यदि दिशाएं \hat{x} , \hat{y} और \hat{z} की ओर हों, तो हमें तीन अलग-अलग संख्याएं प्राप्त होती हैं। यह देखा गया है कि इन राशियों को एक सदिश, जिसे कर्ल \mathbf{F} कहा जाता है, के घटक के रूप में माना जा सकता है। कहने का तात्पर्य यह है कि \hat{n} के किसी विशेष दिशा के लिए ली गई सीमा से जो संख्या प्राप्त होती है, वह उस दिशा में, सदिश कर्ल \mathbf{F} का, घटक होती है।

$$(\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{n} = \lim_{a_i \rightarrow 0} \frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_i}{a_i} \quad (9.39)$$

आइए, हम मूल पथ के परितः परिसंचरण का व्यंजक फिर से लिखें

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \sum_{i=1}^N \int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_i = \sum_{i=1}^N a_i \left(\int \frac{\mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{l}_i}{a_i} \right) \quad (9.40)$$

अंतिम चरण में हमने केवल a_i से गुणा किया है और भाग दिया है। मान लीजिए के दक्षिण पथ में

N का मान काफी अधिक है और सभी a_i काफी छोटे हैं। तब, समीकरण (9.40) के अनुसार कोष्ठक की राशि $(\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$ के बराबर हो जाती है, जहां $\hat{\mathbf{n}}_i$ एकक सदिश है जो कि i वें लूप पर अभिलंब है। अतः दक्षिण पक्ष "लूप क्षेत्रफल और कर्ल \mathbf{F} के घटक के गुणनफल" का योग है। यह योग उन सभी लूपों पर होता है, जो कि पूरे पृष्ठ S में समाहित हैं। यह योग S पर सदिश-कर्ल \mathbf{F} के पृष्ठ समाकल के बराबर होता है। इस तरह,

$$\sum_{i=1}^N a_i \left(\frac{\int_{C_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}_i}{a_i} \right) = \sum_{i=1}^N a_i (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \hat{\mathbf{n}}_i$$

$$= \int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.41)$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.42)$$

जहां $d\mathbf{S}$, बन्द पथ से परिवद्ध क्षेत्रफल है। अब समीकरण (9.42) का उपयोग करके हम समीकरण (9.31) को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 I = \int \text{curl } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (9.43)$$

क्योंकि

$$I = \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

अतः समीकरण (9.43) को इस रूप में लिखते हैं

$$\int \text{curl } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} - \mu_0 \int \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

$$\text{या } [\text{curl } \mathbf{B} - \mu_0 \mathbf{J}] \cdot d\mathbf{S} = 0$$

क्योंकि $d\mathbf{S}$ शून्येतर (non zero) है, इसलिए कोष्ठक में लिखी गई राशि अवश्य शून्य होगी।

$$\boxed{\text{curl } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}} \quad (9.44)$$

जो कि एम्पीयर-नियम का अवकल रूप है। समीकरण (9.42) द्वारा दिए गए संबंध को स्टोक्स-प्रमेय कहा जाता है।

अब हम कार्तीय निर्देशांकों के पदों में कर्ल का व्यंजक प्राप्त करने के लिए कर्ल (समीकरण 9.39) की परिभाषा को लायू करेंगे। यहां हम देखेंगे कि किस प्रकार कर्ल \mathbf{F} परिकलित किया जाता है यदि सदिश फलन $\mathbf{F}(x, y, z)$ स्पष्ट रूप से दिया गया हो। क्योंकि एक सदिश का कर्ल स्वयं एक सदिश राशि होती है, इसलिए इसके तीन परस्पर लांबिक घटक ज्ञात करके इसका व्यंजक प्राप्त करेंगे।

आइए, पहले हम xy -समतल के एक आयतीय पैच (patch) के क्षेत्रफल को परिवद्ध करने वाले एक सरल आकार के पथ के परितः परिसंचरण का परिकलन करें, जैसाकि चित्र 9.31 में दिखाया गया है। अर्थात् यहां $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ हैं। पैच को बहुत छोटा लिया गया है जिससे कि आयत की किसी भी एक भुजा के अनुदिश सदिश \mathbf{F} में बहुत अधिक परिवर्तन न हो। चित्र 9.32 में हम ऊपर से आयतीय पैच को नीचे की ओर देखते हैं। यहां हम यह पाते हैं कि पैच के अनुदिश समाकलन की दिशा दक्षिणावर्त (clockwise) हैं यदि हम उसे $\hat{\mathbf{n}}$ की दिशा में देखते हैं। परिसंचरण का परिकलन करने के लिए हम बिन्दु (x, y) से - जो कि चित्र में बायीं ओर का निचला कोना है - चलना शुरू करते हैं और तीर द्वारा दिखाई गई दिशा में चलते जाते हैं। पहली भुजा के अनुदिश, जिसे (1) से अंकित किया गया है, स्पर्शरेखीय घटक $F_x(1)$ होता है और दूरी Δx होती है। इसलिए समाकल का पहला भाग $F_x(1) \Delta x$ होता है। दूसरी भुजा के अनुदिश, जिसे (2) से अंकित किया गया है, हमें $F_y(2) \Delta y$ प्राप्त होता है। तीसरी भुजा के अनुदिश चलने से हमें $F_x(3) \Delta x$ प्राप्त होता है और चौथी दिशा के अनुदिश से हमें $-F_y(4) \Delta y$ प्राप्त होता है। यहां ऋण-चिह्न का प्रयोग इसलिए किया गया है, क्योंकि स्पर्शरेखीय घटक को चलने की दिशा में होना चाहिए।

तब कुल रेखा-समाकल यह होता है :

$$\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F_x(1)\Delta x + F_y(2)\Delta y - F_x(3)\Delta x - F_y(4)\Delta y \quad (9.45)$$

आइए, अब हम पहला और तीसरा पद लें। एक साथ लेने पर ये निम्नलिखित होते हैं :

$$[F_x(1) - F_x(3)]\Delta x \quad (9.46)$$

क्योंकि हमने मान लिया है कि पैच अत्युणतः छोटा है, इसलिए अंतर शून्य होगा। यह प्रथम सन्निकटन (first approximation) तक सही है। पर, F_x के परिवर्तन-दर को ध्यान में रखकर हम और अधिक परिशुद्ध मान प्राप्त कर सकते हैं। ऐसा करने पर हम यह लिखते हैं :

$$F_x(3) = F_x(1) + \frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta y \quad (9.47)$$

(खंड 1 की इकाई 2 भी देखिए।)

यदि हम अगला सन्निकटन लेते, तो उसमें $(\Delta y)^2$ जैसे पद भी शामिल होते। पर, क्योंकि हम $\Delta y \rightarrow 0$ पर सीमा ज्ञात करना चाहते हैं, इसलिए इस प्रकार के पदों की उपेक्षा की जा सकती है। समीकरण(9.46) में समीकरण (9.47) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$[F_x(1) - F_x(3)]\Delta x = -\frac{\partial F_x}{\partial y} \Delta x \Delta y \quad (9.48)$$

इसी प्रकार, परिसंचरण के अन्य पदों के लिए हम यह लिख सकते हैं

$$F_y(2)\Delta y - F_y(4)\Delta y = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Delta x \Delta y \quad (9.49)$$

इस तरह, पूरे आयत के अनुदिश रेखा समाकल यह होता है :

$$\int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \Delta x \Delta y \quad (9.50)$$

यहां $\Delta x \Delta y$ परिवर्द्ध आयत के क्षेत्रफल का परिमाण है, जिसे हमने z -दिशा में एक सदिश से निरूपित किया है। अतः

राशि $\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right)$ अनुपात

पैच के अनुदिश रेखा-समाकल
पैच का क्षेत्रफल

की सीमा होती है, जबकि पैच सिकुड़ कर शून्य आकार का हो जाता है। यदि आयताकार पैच का दिग्बिन्द्यास इस तरह का होता, कि इसका अभिलंब घनात्मक y -दिशा में हो, जैसाकि चित्र 9.33 में दिखाया गया है, तो हमें निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होता :

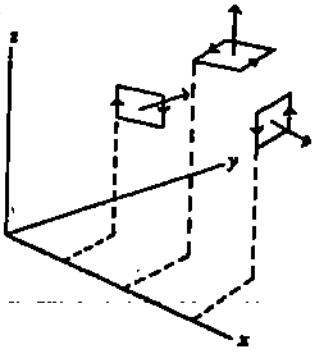
$$\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right)$$

यदि पैच का दिग्बिन्द्यास ऐसा होता कि इसका अभिलंब घनात्मक x -दिशा में होता, जैसाकि चित्र (9.33) में दिखाया गया है, तो हमें निम्नलिखित प्राप्त होता :

$$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right)$$

अतः $\text{curl } \mathbf{F}$ का व्यंजक निम्नलिखित है :

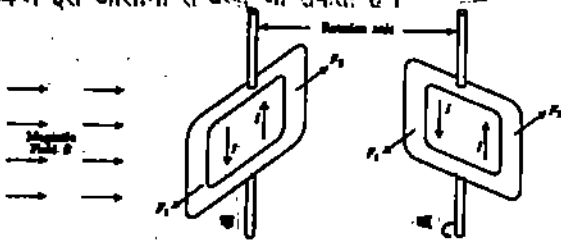
$$\text{curl } \mathbf{F} = \hat{x} \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \quad (9.51)$$



चित्र 9.33: प्रत्येक दिग्बिन्द्यास के लिए, परिसंचरण/क्षेत्रफल के अनुपात की सीमा से हमें उस बिन्दु पर $\text{curl } \mathbf{F}$ का घटक प्राप्त होता है। यहाँ पैचों (patches) को अलग-अलग दिखाया गया है। वास्तविकता में सभी पैच उस बिन्दु के आसपास होने चाहिए जहाँ $\text{curl } \mathbf{F}$ ज्ञात किया जा रहा है।

अब, क्योंकि हमने अपरिवर्ती धारा से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र पर अपनी चर्चा समाप्त कर ली है, इसलिए अब हम धारावाही चालकों पर लगने वाले बलों पर फिर से विचार करेंगे। अनेक व्यावहारिक युक्तियों में, जिनमें बिजली के वे मोटर भी शामिल हैं जो ऑटोमोबाइल को स्टार्ट करते हैं और रेफ्रिजरेटर्स को चलाते हैं, धारावाही तार पर लग रहा बल, एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। इस भाग में आप यह देखेंगे कि गैल्वेनोमीटर, जो कि धारा मापने का एक महत्वपूर्ण यंत्र है, की कार्य-प्रणाली चुंबकीय क्षेत्र के कारण धारा-लूप पर लग रहे बल-आघूर्ण (torque) पर निर्भर करती है।

अनेक विद्युत यांत्रिक युक्तियों में इस तथ्य का उपयोग होता है। धारावाही तार की कुंडली कि चुंबकीय क्षेत्र के कारण घूर्णन करने लगती है। जब एक धारा-लूप को एकसमान चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाता है, जैसाकि चित्र 9.34 में दिखाया गया है, तब इस पर समान और विपरीत दिशा में बल लगते हैं तथा इनकी एक ही क्रिया रेखा होती है। इसलिए धारा लूप पर नेट बल शून्य होता है। परन्तु इस प्रकार की कुंडली पर एक बल-आघूर्ण लगता है जिसके कारण कुंडली घूर्णन कर सकती है। चित्र 9.34 में इसे आसानी से देखा जा सकता है।



चित्र 9.34: चुंबकीय क्षेत्र के कारण कुंडली अपने अक्ष के चारों ओर घूर्णन करती है।

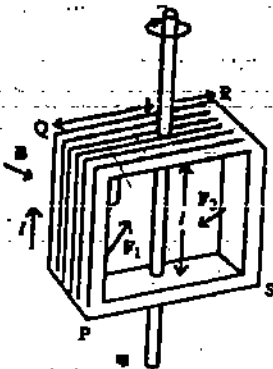
यदि आप चित्र 9.34 में दिखाए गए लूप की भुजाओं पर दक्षिण हस्त नियम लागू करें तो आपको निम्नलिखित बातें देखने को मिलेंगी। लूप की ऊपरी और निचली भुजाओं पर लग रहे बल घूर्णन-अक्ष के समांतर बराबर और विपरीत दिशा में होते हैं। इनकी वजह से किसी प्रकार का भी घूर्णन नहीं हो सकता। पर, लूप की शेष दो भुजाओं पर लग रहे बल के कारण लूप अपनी स्थिति से घूम सकता है। चित्र 9.34 क में दिखाए गए लूप की स्थिति के लिए बल-आघूर्ण शून्य होता है, पर चित्र 9.34 ख में दिखाए गए लूप की स्थिति के लिए एक बल-आघूर्ण होता है। हालांकि दोनों स्थितियों में बलों F_1 और F_2 के परिमाण समान होते हैं, पर अक्ष से उत्तोलक भुजा (lever arm) का मान (क) में शून्य होता है जबकि (ख) में शून्येत्तर (non-zero) होता है। आइए, अब हम बल-आघूर्ण का परिमाणात्मक संबंध (quantitative relation) ज्ञात करें।

एक आयताकार लूप PQRS लिया गया है जिसमें धारा I प्रवाहित हो रही है और जो एकसमान चुंबकीय क्षेत्र B में स्थित है, जैसाकि चित्र 9.35 क में दिखाया गया है।

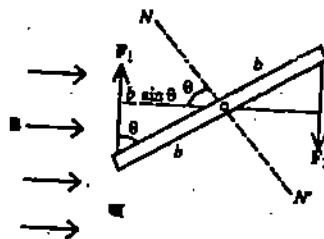
मान लीजिए $PQ = RS = l$ और $QR = SP = b$ है। लूप की ऊर्ध्वाधर भुजाएं PQ और RS चुंबकीय क्षेत्र पर लंब हैं। इसलिए इन भुजाओं पर बल का परिमाण यह होता है :

$$F_1 = F_2 = IlB.$$

ये दोनों बल समान, समांतर और विपरीत दिशा में हैं। अतः इनसे एक बल-युग्म (couple) प्राप्त होता है।



(a) Perspective view



(b) Top view

मान लीजिए किसी भी क्षण पर लूप का अक्ष NN' (लूप के समतल पर अभिलंब) चुंबकीय क्षेत्र के साथ कोण θ बनाता है , जैसाकि चित्र 9.35 ख में दिखाया गया है । तब इस क्षण पर बलों F_1 और F_2 से उत्पन्न बल-आघूर्ण τ' का परिमाण यह होता है :

$$\begin{aligned}\tau' &= F_1 (= F_2) \times \text{लांबिक दूरी} \\ &= lB \times b \sin \theta\end{aligned}$$

लेकिन $l \times b = A$ (लूप का क्षेत्रफल)

$$\therefore \tau' = IAB \sin \theta \quad (9.52)$$

यह बल-आघूर्ण कुंडली के प्रत्येक फेरे पर कार्य करता है । यदि फेरों की संख्या N हो तो कुल बल-आघूर्ण τ यह होता है

$$\tau = N\tau' = (NIA) B \sin \theta \quad (9.53)$$

कोष्ठक में दी गई राशियों को एक साथ लिया गया है, क्योंकि ये सभी कुंडली के गुणघर्म (फेरों की संख्या, इसका क्षेत्रफल और धारा का प्रवाह) है । समीकरण (9.53) से यह पता चलता है कि चुंबकीय क्षेत्र में रखी धारावाही तार की कुंडली की प्रवृत्ति घूर्णन करने की होती है । बल-आघूर्ण को सदिश-संकेतन में व्यक्त किया जा सकता है यदि A को एक ऐसे सदिश के रूप में परिभाषित किया जाए कि इसका परिमाण लूप के क्षेत्रफल ab के बराबर हो और दिशा लूप के समतल पर खींचे गये लंब की ओर हो । A की दिशा दक्षिण हस्त नियम से प्राप्त होती है : यदि आप अपनी अंगुलियां को लूप के चारों ओर प्रवाहित धारा की दिशा में मोड़कर रखें तो अंगुठा A की दिशा को इंगित करेगा । तब हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\tau = NIA \times B \quad (9.54)$$

समीकरण (9.54) को देखकर समीकरण (3.40) अवश्य याद आ रहा होगा जो कि विद्युत क्षेत्र में रखे एक विद्युत द्विध्रुव पर लग रहे बल-आघूर्ण का समीकरण है । समीकरण (3.40) यह है:

$$\tau = p \times E$$

जहां p विद्युत द्विध्रुव आघूर्ण है और E विद्युत क्षेत्र है । समीकरण (9.54) से इसकी तुलना करने पर यह पता चलता है कि चुंबकीय क्षेत्र में धारा लूप उसी तरह का व्यवहार करता है जिस प्रकार का व्यवहार विद्युत क्षेत्र में विद्युत द्विध्रुव करता है । राशि NIA को धारा लूप का चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण μ कहा जाता है । अर्थात्

$$\mu = NIA \quad (9.55)$$

चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण एक सदिश राशि है और धारा लूप के लिए इसकी दिशा, A की दिशा की ओर होती है । समीकरण (9.55) का उपयोग कर धारा-लूप-पर लग रहे बल-आघूर्ण को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\tau = \mu \times B \quad (9.56)$$

बल-आघूर्ण की प्रवृत्ति चुंबकीय आघूर्ण की दिशा को क्षेत्र की ओर करने की होती है ।

बोध प्रश्न 8

3.0 cm-त्रिज्या वाले एक वृत्तीय लूप में तार के 10 फेरे हैं । तार में 3.0 A की धारा प्रवाहित हो रही है । लूप के चुंबकीय आघूर्ण का परिमाण क्या होगा ? मान लीजिए कि प्रारंभ में चुंबकीय आघूर्ण चुंबकीय क्षेत्र की ओर इंगित कर रहा है । अब लूप को अपने मूल स्थिति से 90° घुमाया जाता है । लूप को अपने नए स्थिति में रहने के लिए कितने बल-आघूर्ण की आवश्यकता होगी ?

समीकरण (9.56) को देखने से यह पता चलता है कि यदि धारावाही तार के लूप को एक नियत

चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाए तो इस पर लगने वाला बल-आघूर्ण लूप में प्रवाहित धारा पर निर्भर करेगा। यही गैल्वेनोमीटर का सिद्धांत है।

चुंबकीय क्षेत्र

9.8 सारांश

- एकसमान चुंबकीय क्षेत्र B में स्थित एक लंबे, सीधे तार, पर जिसमें धारा I प्रवाहित हो रही हो, गतिमान विद्युत आवेशों पर, जिनसे धारा बनती है, क्षेत्र की क्रिया के कारण एक बल लगता है। लंबाई l वाले तार पर लगने वाला बल यह होता है :

$$F = Il \times B$$

जहां I , एक सदिश है, जिसका परिमाण I है तथा दिशा तार में प्रवाहित धारा की ओर होती है।

- किसी क्षेत्र में चुंबकीय क्षेत्र का होना तब कहा जाता है जब उस क्षेत्र में गतिमान आवेश पर लग रहा बल उसके आवेश, वेग v और चुंबकीय क्षेत्र B पर निर्भर करता है। यदि B और v के बीच का कोण θ हो, तो गतिमान आवेश पर लग रहा बल यह होता है

$$F = qv \times B$$

$$F = qvB \sin \theta$$

- धाराओं और गतिमान आवेशों पर लग रहे बल की दिशा दक्षिण हस्त-नियम से ज्ञात की जाती है, जैसाकि चित्र 9.7 में दिखाया गया है। इस नियम के अनुसार, यदि दाएं हाथ का पंजा पूरा फैलाकर इस प्रकार रखें कि अंगूठा चालक में बहने वाली धारा की दिशा में और फैली हुई अंगुलियों बाह्य चुंबकीय क्षेत्र की दिशा में हो तो चालक पर लगने वाला बल हथेली के लम्बवत् हथेली से घुमा देने की दिशा में होगा।
- गाउस का चुंबकत्व-नियम किसी बन्द पृष्ठ से निकल रही चुंबकीय क्षेत्र-रेखाओं की संख्या और परिवर्द्ध नेट चुंबकीय एकध्रुव में संबंध स्थापित करता है। क्योंकि चुंबकीय एकध्रुव का अस्तित्व नहीं होता है, इसलिए गाउस के चुंबकत्व नियम के अनुसार किसी भी बन्द पृष्ठ में चुंबकीय अभिवाह शून्य होता है।

$$\oint B \cdot dS = 0$$

इससे स्पष्ट है कि चुंबकीय रेखाओं का न तो कोई आदि होता है न ही कोई अंत, बल्कि ये बन्द लूप बनाते हैं।

- धारा के कारण चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है। धारावाही चालक द्वारा स्थापित क्षेत्र को बायो-सॉबर्ट नियम द्वारा प्राप्त किया जा सकता है :

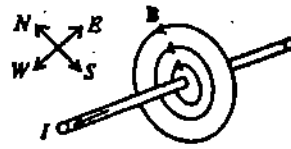
$$dB = \frac{\mu_0 I dl \times \hat{r}}{4\pi r^2}$$

जहां dB , अत्यणु सदिश dl के अनुदिश प्रवाहित हो रही धारा I द्वारा किया गया क्षेत्र का योगदान है। μ_0 एक अचर है जिसका मान $4\pi \times 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$ और \hat{r} एकक सदिश है जिसकी दिशा धारा अत्यांश dl के उस बिन्दु की ओर, जहां क्षेत्र का परिकलन किया जा रहा है।

दक्षिण हस्त विधि से चुंबकीय क्षेत्र की दिशा प्राप्त हो जाती है, जैसाकि चित्र 9.13 में दिखाया गया है।

- धारा I ले जाने वाले एक लंबे सीधे तार से r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर चुंबकीय क्षेत्र का मान यह होता है :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

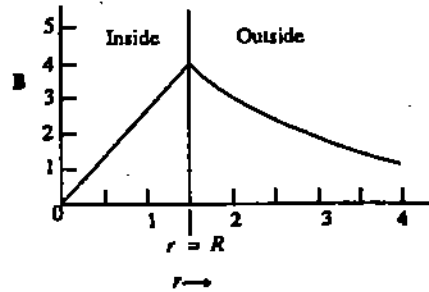


चित्र 9.37

- 4) दोनों ही व्युत्क्रम वर्ग नियम हैं। कूलॉम-नियम में, स्थैतिक आवेश पर विद्युत बल r के अनुदिश कार्य करता है। बॉयो-सावर्ट नियम में चुंबकीय बल r के लंब दिशा की ओर कार्य करता है।
- 5) नेट धारा $i = i_1 + i_2$
- धारा i_3 लूप के बाहर है तथा लूप से परिवद्ध नहीं है। इसलिए i का परिकलन करने के लिए i_3 को शामिल नहीं किया गया है।
- 6) पथ नं० 2 के लिए $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = 0$ क्योंकि नेट धारा शून्य हैं।

पथ नं० 1 और नं०3 के लिए $\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$

- 7) तार के भीतर, तार-अक्ष से दूरी के अनुसार क्षेत्र में रेखिक रूप में वृद्धि होती है। तार के सतह पर दूरी के साथ क्षेत्र में प्रतिलोमतः कमी आनी शुरू हो जाती है। चित्र 9.38 में तार के भीतर और बाहर चुंबकीय क्षेत्र की प्रबलता को दर्शाया गया है।



चित्र 9.38: तार के भीतर और बाहर चुंबकीय क्षेत्र। अधिकतम क्षेत्र तार के सतह पर होता है।

- 8) समीकरण (9.55) के अनुसार चुंबकीय आघूर्ण μ यह होता है

$$\begin{aligned} \mu &= NIA = (10)(3.0 \text{ A})\pi(0.050 \text{ m})^2 \\ &= 0.24 \text{ Am}^2 \end{aligned}$$

नई स्थिति में बने रहने के लिए आवश्यक बल-आघूर्ण का परिमाण समीकरण (9.56) से प्राप्त हो जाता है

$$\begin{aligned} \tau &= \mu B \sin \theta = (0.24 \text{ Am}^2)(0.010 \text{ T})(\sin 90^\circ) \\ &= 2.4 \times 10^{-2} \text{ Nm.} \end{aligned}$$

अंत में कुछ प्रश्न

- 1) \mathbf{B} का ऊर्ध्वघर घटक धारा के समांतर होता है और बल में इसका कोई योगदान नहीं है। इसलिए,

$$F = ILB_H = (30 \text{ A})(1 \text{ m})(3.6 \times 10^{-5} \text{ wbm}^{-2}) = 10.8 \times 10^{-4} \text{ N, (पश्चिम की ओर)}$$

- 2) तार के प्रत्येक सीधे भाग के लिए $F = IL \times B$ जहाँ L रेखा-खंड है। भागों AB और DE के लिए L और B समांतर हैं। अतः $\sin \theta = 0$ और $F = 0$ है। भाग BC के लिए $F = ILB = (5 \text{ A})(0.16 \text{ m})(0.15 \text{ T}) = 0.12 \text{ N}$ है तथा यह कागज के तल के लम्बवत् नीचे की ओर है। भाग CD के लिए $F = (5 \text{ A})(0.20 \text{ m})(0.15 \text{ T}) \sin 65^\circ = 0.136 \text{ N}$, तथा यह कागज के तल के लम्बवत् ऊपर की ओर है।

- 3) अध्यारोपण नियम के अनुसार कुल क्षेत्र अलग-अलग धाराओं से उत्पन्न क्षेत्रों का योग होता है। $r = 10 \text{ cm}$ पर सभी क्षेत्र या तो समांतर होते हैं या प्रतिसमांतर क्योंकि धाराएं समांतर या प्रतिसमांतर हैं। अतः

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi r} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5) = (2 \times 10^7 \text{ NA}^{-2}) 37 \text{ A} / 0.10 \text{ m} = 74 \times 10^{-6} \text{ T}$$

- 4) क) क्योंकि आवेश-प्रत्येक परिक्रमण (revolution) में एक बार किसी बिन्दु से होकर अवश्य जाता है, इसलिए $I = e/T$, जहाँ $T = (2\pi r)/v$, जिसे कि $I = (ev)/(2\pi r)$ ।
ख) द्विध्रुव आघूर्ण का परिमाण यह है :

$$\mu = IA = \frac{ev}{2\pi r} (\pi r^2) = \frac{e}{2m} (mvr) = \frac{e}{2m} L.$$

और क्योंकि इलेक्ट्रॉन ऋण आवेशित होता है, इसलिए μ , L के प्रतिसमांतर होता है।

9.11 शब्दावली

अपरिवर्ती प्रवाह	steady flow
अभिविन्यास	orientation
अस्थांश	element
घटक	component
दक्षिण हस्त नियम	right hand rule
धारा वाहक	current carrier
परिसंचरण	circulation
प्रतिकर्षण	repel
प्रति-समांतर	anti-parallel
बल आघूर्ण	torque
रेखा समाकल	line integral
स्रोत	source

इकाई 10 विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र में आवेश की गति

इकाई की रूपरेखा

- 10.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 10.2 विद्युत् क्षेत्र में गति
प्रारंभिक वेग क्षेत्र की दिशा में
प्रारंभिक वेग किसी भी दिशा में
- 10.3 चुंबकीय क्षेत्र में गति
प्रारंभिक वेग क्षेत्र के लम्बवत् दिशा में
प्रारंभिक वेग किसी भी दिशा में
- 10.4 कैथोड किरण दोलनदर्शी (CRO)
स्थिरविद्युत् विचलन
चुंबकीय विचलन
- 10.5 लारेंज बल और उसके अनुप्रयोग
वेग वरणकारी
साहक्योद्घोन
- 10.6 सारांश
- 10.7 अंत में कुछ प्रश्न
- 10.8 हल और उत्तर
- 10.9 शब्दावली

10.1 प्रस्तावना

अभी तक आप तीन प्रकार के बलों अर्थात् गुरुत्वीय बल, विद्युत बल और चुंबकीय बल के बारे में पढ़ चुके हैं। इन बलों की व्याख्या उनके क्षेत्रों के रूप में की गई है। सभी बलों का एक गुणघर्म होता है जिसके अनुसार वह क्षेत्र में स्थित एक उपयुक्त प्रकार के कण पर कार्य करता है। एक बार जब आप यह ठीक-ठीक समझ जाते हैं, कि उन कणों पर क्षेत्रों का क्या प्रभाव पड़ता है, जिन पर वे कार्य करते हैं, तब आप क्षेत्र की प्रकृति को और इस तरह बल की प्रकृति को अच्छी तरह से समझ सकते हैं।

आप सभी उस नियम से परिचित हैं, जिसके अनुसार वस्तुएं एक गुरुत्व क्षेत्र में गतिमान होती हैं। ऐसे क्षेत्रों में जब वस्तु को हवा में ऊपर की ओर फेंका जाता है तो वह एक परवलयिक पथ (parabolic path) में गतिमान होती है। अब प्रश्न उठता है कि जब विद्युत क्षेत्र या चुंबकीय क्षेत्र में कण गतिमान होता है, तब वह किस पथ का अनुसरण करता है? विद्युत और चुंबकीय क्षेत्र में कण का व्यवहार कैसा होता है? इस इकाई में इन प्रश्नों का उत्तर ढूँढ़ने का प्रयास किया गया है। आगे चल कर इस इकाई में आप यह देखेंगे कि किस प्रकार विद्युत और चुंबकीय क्षेत्र में आवेशित कण के व्यवहार के अनेक अनुप्रयोग होते हैं।

इस इकाई के साथ ही स्थिरचुंबकीय (Magnetics) अपरिवर्ती धाराओं से सम्बद्ध चुंबकीय क्षेत्र और अन्य धाराओं पर तथा एक अकेले गतिमान आवेश पर इसके प्रभावों से संबंधित हमारा अध्ययन पूरा हो जाता है। अभी तक हमने निर्वात (vacuum) में स्थित चुंबकीय क्षेत्र पर विचार किया है। अगली दो इकाइयों में हम उस स्थिति में चुंबकीय क्षेत्रों के बारे में अध्ययन करेंगे जब उन क्षेत्रों में पदार्थ उपस्थित रहता है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- एकसमान विद्युत् क्षेत्र में आवेशित कण की गति से संबंधित कुछ सरल परिकलन कर सकेंगे,
- एक चुंबकीय क्षेत्र में आवेश की गति के मुख्य विशेषताओं की व्याख्या कर सकेंगे और शब्द साइक्लोट्रॉन आवृत्ति को परिभाषित कर सकेंगे,
- एकसमान चुंबकीय क्षेत्र में गतिमान आवेशित कण के कुंडलिनी प्रक्षेप-पथ (helical trajectory) की व्याख्या कर सकेंगे,
- कैथोड किरण दोलनदर्शी (oscilloscope) के कार्यकारी नियम की व्याख्या कर सकेंगे,
- एक-दूसरे के लम्बवत् दिशा में कार्य कर रहे संयोजित विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के अनुप्रयोग समझ सकेंगे।

10.2 विद्युत् क्षेत्र में गति

हमने खंड 1 में किसी बिन्दु पर स्थित विद्युत् क्षेत्र को उस बिन्दु पर प्रति इकाई आवेश पर लग रहे बल के रूप में परिभाषित किया था। इस परिभाषा से यह स्पष्ट हो जाता है कि विद्युत् क्षेत्रों का महत्व इसलिए है क्योंकि ये आवेशित कणों को प्रभावित करते हैं। इस भाग में हम इस प्रश्न का उत्तर ढूँढने का प्रयास करेंगे कि यदि आवेशों को ज्ञात विद्युत् क्षेत्र में रखा जाए तो उन पर क्या प्रभाव पड़ता है? इस भाग में एकसमान विद्युत् क्षेत्र में गतिमान कण की गति के बारे में चर्चा करेंगे।

आप उस महत्वपूर्ण प्रयोग से अवश्य परिचित होंगे जो कि एकसमान विद्युत् क्षेत्र में आवेशित कण की गति से संबंधित है। यह मिलिकन का तेल-बूंद प्रयोग (Millikan's oil drop experiment) है जिसे आप अपने स्कूल के भौतिकी पाठ्यक्रम में अवश्य पढ़ चुके होंगे और जिसका उल्लेख इकाई 1 में भी किया गया है। इस प्रयोग में दो आवेशित धातु प्लेटों के बीच एकसमान विद्युत् क्षेत्र के कारण उत्पन्न विद्युत् बल का उपयोग गुरुत्व के अधीन गिर रहे तेल के आवेशित बूंद को रोकने में किया जाता है। आइए, अब हम देखें ऐसी बूंद या कोई अन्य आवेशित कण किस प्रकार का व्यवहार करता है यदि गुरुत्वीय बल न हो और यदि प्रारंभ में आवेशित कण क्षेत्र की दिशा में गतिमान हो रहा हो।

10.2.1 प्रारंभिक वेग क्षेत्र की दिशा में

मान लीजिए दो आवेशित प्लेटों के बीच एकसमान विद्युत् क्षेत्र E है, जैसाकि चित्र 10.1 में दिखाया गया है। आइए, हम क्षेत्र की दिशा में v वेग से गतिमान, q आवेश वाला एक कण लें। इकाई 1 के समीकरण (1.7) के अनुसार इस कण पर लग रहा बल यह होगा:

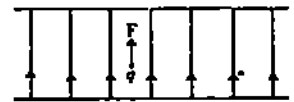
$$F = qE \quad (10.1)$$

समीकरण (10.1) को देखने से यह पता चलता है कि बल का मान कण के वेग और उसके स्थिति पर निर्भर नहीं करता है। उस अचर बल के कारण कण में अचर त्वरण (constant acceleration) उत्पन्न हो जाता है। न्यूटन के द्वितीय नियम ($F = ma$) के अनुसार अचर त्वरण यह होता है:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} \quad (10.2)$$

जहाँ m कण का द्रव्यमान है।

समीकरण यह दर्शाता है कि त्वरण उसी दिशा में होता है जिस दिशा में विद्युत् क्षेत्र है। इस समीकरण से यह पता चलता है कि किसी दिए हुए विद्युत् क्षेत्र में कण का त्वरण उसके आवेश और द्रव्यमान के अनुपात से निर्धारित होता है। इससे यह स्पष्ट है कि प्रोटॉन के बराबर आवेश वाला, किन्तु इसकी तुलना में बहुत कम भारी (लगभग 2000 गुना) इलेक्ट्रॉन विद्युत् क्षेत्रों में तुरंत त्वरित हो जाते हैं। इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी (microscope), टी. वी. ट्यूब जैसे अनेक व्यावहारिक उपकरणों में सामान्य प्रबलता वाले विद्युत् क्षेत्र में भी इलेक्ट्रॉनों के उच्च त्वरणों का प्रयोग किया जाता है।



चित्र 10.1: विद्युत् क्षेत्र में एक घन आवेशित कण पर लग रहा बल। कण के वेग का बल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ रहा है।

विद्यालय में पढ़ाए गए यांत्रिकी पाठ्यक्रम से आप यह जानते हैं कि अचर त्वरण से संबंधित प्रश्नों को किस प्रकार हल किया जाता है। पृथ्वी की सतह के समीप एकसमान गुरुत्वीय क्षेत्र में गतिमान वस्तु की गति पर चर्चा के दौरान इस प्रकार के प्रश्न प्राप्त हुए थे। ऐसे प्रश्नों में अचर त्वरण गुरुत्व-त्वरण होता है, वस्तु के वेग और दिए हुए समय में वस्तु द्वारा तय की गई दूरी को तीन सरल समीकरणों में से किसी भी एक या अधिक समीकरणों का प्रयोग कर परिकलित किया जाता है। यह तीन सरल समीकरण अचर (या एकसमान) त्वरण समीकरण के नाम से जाने जाते हैं। ये तीन समीकरण निम्नलिखित हैं :

$$v = u + at \quad (10.3)$$

$$s = ut + \frac{1}{2} at^2 \quad (10.4)$$

$$v^2 = u^2 + 2as \quad (10.5)$$

समीकरण (10.2) से यह पता चलता है कि एक दिए हुए विद्युत क्षेत्र के कारण, कण में अचर त्वरण उत्पन्न होता है। अतः विद्युत क्षेत्र में कणों की गति का अध्ययन करने के लिए समीकरण (10.3), (10.4) और (10.5) का प्रयोग किया जा सकता है। नीचे दिए गए बोध प्रश्नों को हल करने के बाद आप यह देखेंगे कि गुरुत्व से उत्पन्न अचर त्वरण और एकसमान विद्युत क्षेत्र से उत्पन्न त्वरण में कुछ अंतर होता है।

बोध प्रश्न 1

मान लीजिए चित्र 10.1 में दिखाए गए विद्युत क्षेत्र की प्रबलता 2.0 NC^{-1} है। इस क्षेत्र में एक इलेक्ट्रॉन को छोड़ा गया है। बताइए कि वह इलेक्ट्रॉन $1.0 \mu\text{s}$ में कितनी दूर और किस दिशा में जाता है ?

बोध प्रश्न 2

नीचे दिए गए उत्तरों में से सही उत्तर पर (✓) का निशान लगाइए और अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

ऊपर दिए गए प्रश्न में यदि इलेक्ट्रॉन के स्थान पर प्रोटॉन छोड़ा गया होता, तो इसके द्वारा तय की हुई दूरी होती -

- क) इलेक्ट्रॉन द्वारा तय की गई दूरी से अधिक
- ख) इलेक्ट्रॉन द्वारा तय की गई दूरी से कम
- ग) इलेक्ट्रॉन द्वारा तय की गई दूरी के बराबर
- घ) प्रोटॉन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ेगा।

प्रोटॉन किस दिशा में जाएगा ?

विद्युत क्षेत्र में रखे अलग-अलग वस्तुओं में उत्पन्न त्वरण का मान भिन्न-भिन्न होता है क्योंकि यह वस्तु के आवेश और द्रव्यमान के अनुपात पर निर्भर करता है, जबकि गुरुत्व में सभी वस्तुओं का त्वरण समान रहता है चाहे वस्तु का द्रव्यमान कुछ भी क्यों न हो। यह एक उपयोगी परिघटना (phenomenon) है क्योंकि आवेशित वस्तुओं (आयनों) को उनके आवेश-द्रव्यमान अनुपातों के अनुसार हम अलग कर सकते हैं।

10.2.2 प्रारंभिक वेग किसी भी दिशा में

अभी तक हमने उन आवेशित कणों पर विद्युत क्षेत्र के प्रभाव का अध्ययन किया है जो या तो विरामावस्था में हैं या जिसकी गति की दिशा विद्युत क्षेत्र की दिशा की ओर है। आइए, अब हम

उस स्थिति पर विचार करें जिसमें, एक विद्युत् क्षेत्र में, आवेशित कण एक वेग से चित्र 10.2 में दिखाए गये दिशा में गतिमान हो रहा है।

आप यह जानते हैं कि जब कोई कण (या प्रक्षेप्य) (projectile) पृथ्वी के गुरुत्व क्षेत्र के अधीन अचर त्वरण से गतिमान होता है, तब वह एक परवलयिक पथ (parabolic path) का अनुसरण करता है। इसी प्रकार की घटना यहां घटती है (चित्र 10.3)। ऐसी स्थितियों में वेग v को दो अन्य वेगों का योग माना जाता है। जिनमें से एक वेग क्षेत्र के समांतर होता है जिसे v_{\parallel} से प्रकट किया जाता है और दूसरा वेग क्षेत्र पर लंब दिशा की ओर होता है जिसे v_{\perp} से प्रकट किया जाता है। अतः कुल वेग v को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$v = v_{\parallel} + v_{\perp}$$

किसी भी समय t पर आवेशित कण की क्षैतिज स्थिति (horizontal position) यह होती है :

$$x = v_{\perp} t \quad (10.6)$$

आवेशित कण की ऊर्ध्वाधर स्थिति (vertical position) यह होती है :

$$y = v_{\parallel} t + \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 \quad (10.7)$$

समीकरण (10.6) से प्राप्त t के मान को समीकरण (10.7) में प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$y = \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} x + \frac{1}{2} \frac{qE}{m v_{\perp}^2} x^2 \quad (10.8)$$

यह विद्युत् क्षेत्र में कण का समीकरण है। क्योंकि यहां v , q , E और m अचर हैं, इसलिए समीकरण (10.8) $y = ax + bx^2$ के रूप का समीकरण है, जहां a और b अचर हैं। यह समीकरण परवलय का समीकरण है। मान लीजिए बिन्दु A से, v_A वेग से गतिमान होने वाला कण एक परवलयिक पथ $ABCD$ निर्धारित करता है, जैसाकि चित्र 10.3 में दिखाया गया है। ऐसे कण की गति को समझने के लिए यह आवश्यक है कि हम परवलयिक पथ के किसी भी बिन्दु पर कण के वेग को परिकल्पित कर सकें। आइए, हम बिन्दु B पर वेग v_B ज्ञात करें। यहां भी v_B दो अन्य सदिशों $v_{\parallel B}$ और $v_{\perp B}$ का योग है। क्योंकि v_{\perp} को इस तरह परिभाषित किया गया है कि यह त्वरण के लम्बवत् होता है, इसलिए यह विद्युत् क्षेत्र से अप्रभावित रहता है। अतः

$$v_{\perp B} = v_{\perp A} \quad (10.9)$$

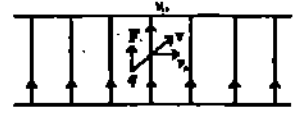
ऐसा होने का कारण यह है कि कण के गतिमान होने पर उसके v_{\perp} घटक में कोई परिवर्तन नहीं आता, क्योंकि इस दिशा में कोई त्वरण कार्य नहीं करता है। यह बात पथ के किसी भी बिन्दु के लिए सही होती है।

दूसरे शब्दों में यह कहा जा सकता है कि कण की सम्पूर्ण गति के दौरान वेग के लंब-घटक का परिमाण (magnitude) और दिशा दोनों ही अचर बने रहते हैं। क्योंकि $v_{\perp B}$, विद्युत् क्षेत्र अर्थात् अचर त्वरण की दिशा में होता है, इसलिए इस पर विद्युत् क्षेत्र का प्रभाव पड़ेगा। समीकरण (10.3), (10.4) और (10.5) में से किसी भी एक समीकरण को लागू करे $v_{\parallel B}$ का परिमाण ज्ञात किया जा सकता है। यदि चित्र 10.3 में दिखाए गए बिन्दु A से B तक की दूरी s_1 करने में लगा समय t हो और E के समांतर भागी गई A से B तक की दूरी s_1 हो, तो

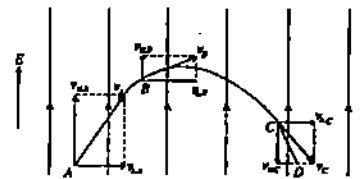
$$v_{\parallel B} = v_{\parallel A} + \left(\frac{qE}{m} \right) t \quad (10.10)$$

$$v_{\parallel B}^2 = v_{\parallel A}^2 + 2 \left(\frac{qE}{m} \right) s_1 \quad (10.11)$$

$$s_1 = v_{\parallel A} t + \frac{1}{2} \left(\frac{qE}{m} \right) t^2 \quad (10.12)$$



चित्र 10.2: विद्युत् क्षेत्र में घन आवेशित कण के प्रारंभिक वेग की दिशा विद्युत् क्षेत्र की दिशा की ओर नहीं है।



चित्र 10.3 एकसमान विद्युत् क्षेत्र में घुम आवेशित कण का परवलयिक प्रक्षेप-पथ।

समीकरणों (10.9), (10.10), (10.11) और (10.12) की सहायता से आप एकसमान विद्युत क्षेत्र में किसी आवेशित कण की गति से संबंधित अनेक प्रश्नों को हल कर सकते हैं। इस प्रकार के प्रश्न आपको भाग 10.4 में कैथोड किरण दोलनदर्शी (oscilloscope) का अध्ययन करने के दौरान देखने को मिलेंगे, जहाँ इलेक्ट्रॉन विद्युत क्षेत्र से गुजरता हुआ प्रतिदीप्त स्क्रीन (Fluorescent screen) पर पड़ता है। फिर भी, इस बात से सुनिश्चित होने के लिए कि इस भाग में बताई गई सभी बातें आपके समझ में आ गई हैं, आप नीचे दिए गये बोध प्रश्न के सभी भागों को हल करने का प्रयास कीजिए।

बोध प्रश्न 3

एक इलेक्ट्रॉन $4.0 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$ की चाल से, क्षैतिज में, दाईं ओर को गतिमान हो रहा है। यह 2.0 cm की लंबाई वाले एक ऐसे प्रदेश में जाता है, जिसमें नीचे की ओर इंगित $1.0 \times 10^3 \text{ NC}^{-1}$ वाला एक विद्युत क्षेत्र है, जैसाकि चित्र 10.4 में दिखाया गया है। निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए

- A से B तक जाने में इलेक्ट्रॉन कितना समय लेता है ?
- जब इलेक्ट्रॉन विद्युत क्षेत्र से बाहर निकलता है, तो वह किस दिशा में एवं कितना विचलित होता है? विद्युत क्षेत्र में इसकी गति निर्धारित कीजिए और पथ की एक मोटी रूपरेखा खींचिए।
- जिस समय इलेक्ट्रॉन विद्युत क्षेत्र से बाहर निकलता है, उस समय उसके वेग के ऊर्ध्वाधर घटक का परिमाण क्या होता है ?
- जिस समय इलेक्ट्रॉन विद्युत क्षेत्र से बाहर निकलता है, उस समय उसकी चाल क्या होती है ?
- विद्युत क्षेत्र से बाहर निकलते समय इलेक्ट्रॉन कितने कोण से विचलित होता है ?
- इसकी बाद की गति निर्धारित कीजिए और उसकी मोटी रूपरेखा खींचिए।
- इसी परिस्थिति में, इलेक्ट्रॉन के बराबर आवेश और द्रव्यमान वाले धन आवेशित कण का व्यवहार क्या होगा ?
- इस प्रकार की व्यवस्था किस प्रयोजन के लिए उपयोगी सिद्ध होगी ?

10.3 चुंबकीय क्षेत्र में गति

हम एकसमान विद्युत क्षेत्र में कण की गति के बारे में चर्चा कर चुके हैं। आइए, अब हम एकसमान चुंबकीय क्षेत्र में इसके गति के प्रश्न पर विचार करें। यदि एक चुंबकीय क्षेत्र में एक आवेशित कण क्षेत्र के अनुदिश गतिमान हो रहा हो, तो यह इसी प्रकार गतिमान होता रहेगा, क्योंकि इस स्थिति में कण पर कोई भी बल कार्य नहीं करता है। आइए, अब हम उस स्थिति पर विचार करें, जब प्रारंभ में कण चुंबकीय क्षेत्र के अभिलंब स्थित समतल में गतिमान हो रहा हो।

10.3.1 क्षेत्र की लंब-दिशा में प्रारंभिक वेग

पिछली इकाई में आपने यह पढ़ा कि चुंबकीय क्षेत्र \mathbf{B} में, वेग \mathbf{v} से गतिमान q आवेश वाले कण पर लग रहा चुंबकीय बल यह होता है :

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (10.13)$$

समीकरण (10.13) से यह पता चलता है कि चुंबकीय बल सदा ही गति की लंबवत् दिशा में कार्य करता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि आवेशित कण (charged particle) पर चुंबकीय क्षेत्र कोई भी कार्य नहीं कर सकता। और, क्योंकि कोई भी कार्य नहीं होता, इसलिए कण की गतिज ऊर्जा (kinetic energy) में कोई भी परिवर्तन नहीं हो सकता। अर्थात् चाल v और गतिज ऊर्जा

$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ दोनों ही अचर बनी रहती हैं। अतः चुंबकीय बल के कारण केवल कण की गति की दिशा में परिवर्तन होता है और उसकी चाल में कोई परिवर्तन नहीं आता।

यह जानने के लिए कि किस प्रकार कण की गति की दिशा में परिवर्तन होता है, आइए हम एकसमान चुंबकीय क्षेत्र के लम्बवत् गतिमान आवेश q वाले एक कण लें, जैसा कि चित्र 10.5 में दिखाया गया है। मान लीजिए किसी भी समय बिन्दु A पर वेग v दायीं ओर को इंगित करता है, तब, क्योंकि क्षेत्र कागज के तल के ऊपर की ओर को इंगित करता है, इसलिए दक्षिण हस्त-नियम (इकाई 9 देखिए) के अनुसार सदिश गुणनफल $v \times B$ नीचे की ओर इंगित होगा। यदि कण धन आवेशित है, तो इस पर अधोमुखी बल (downward force) लगेगा। इस बल के कारण कण की गति की दिशा में तो परिवर्तन आ जाता है, पर उसकी चाल में कोई परिवर्तन नहीं होता है। थोड़े समय के बाद यह कण नीचे की ओर तथा दायीं ओर को गतिमान होने लगता है और अब बल की दिशा बायीं ओर को नीचे की ओर हो जाती है। क्योंकि अभी कण की चाल v बनी रहती है और वेग क्षेत्र के लम्बवत् होता है, इसलिए बल का परिमाण समान बना रहता है। इस तरह, कण जिस पथ को निर्धारित करता है, उसमें सदा ही बल का समान परिमाण रहता है और सदा ही गति के लम्बवत् होता है। हर बार, इस बल के अधीन कण कृजुरेखीय पथ (rectilinear path) से विचलित होकर एक सरलतम संभव वक्र पथ, अर्थात् एक वृत्त के अनुदिश गतिमान होने लगता है। अब, किसी भी वृत्तीय पथ में गतिमान कण पर एक अभिकेन्द्री बल F_c (centripetal force) लगता है, जिसकी दिशा वृत्त के केन्द्र की ओर होती है। बल का मान यह होता है :

$$F_c = \frac{mv^2}{r} \quad (10.14)$$

जहां r , वृत्तीय कक्षा (circular orbit) की त्रिज्या है और v , कण की स्पर्श रेखीय चाल (tangential speed) है। क्योंकि यहां पर अभिकेन्द्री बल चुंबकीय बल है, इसलिए हम यह लिख सकते हैं :

$$F_c = qvB = \frac{mv^2}{r}$$

जिससे कि

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (10.15)$$

कण का संवेग mv जितना अधिक होगा, कक्षा की त्रिज्या भी उतनी ही अधिक होगी। इसके विपरीत यदि क्षेत्र या आवेश को अधिक किया जाए, तो कक्षा छोटी होगी। अतः आवेशित कण के संवेग (momentum) मापने की एक मानक तकनीक, एक चुंबकीय क्षेत्र में उस कण के प्रक्षेप-पथ (trajectory) का प्रेक्षण करना है। अब इस स्थिति में आवेशित कण वामावर्त या दक्षिणावर्त गतिमान हो सकता है। चित्र 10.5 में कण को दक्षिणावर्त वृत्तीय पथ के अनुदिश गतिमान होता हुआ दिखाया गया है। नीचे दिए बोध प्रश्न को हल कीजिए। तब आप समझ जाएंगे कि कण की गति वामावर्त वृत्तीय पथ के अनुदिश भी हो सकती है।

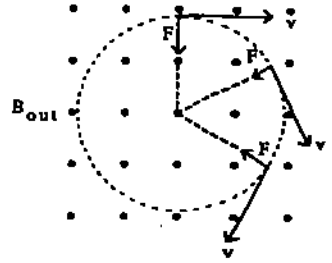
बोध प्रश्न 4

यदि चित्र 10.5 में कण ऋण आवेशित हो, तो वृत्तीय कक्षा किस प्रकार की दिखाई पड़ेगी? चित्र 10.5 में पेंसिल से ऋण आवेशित कण की कक्षा बनाइए।

इस तरह, कण के प्रक्षेप-पथ को देखकर कण पर आवेश के चिह्न और उसके संवेग को ज्ञात किया जा सकता है।

क्योंकि कक्षा की परिधि $2\pi r$ है, इसलिए पूरी एक कक्षा को पूरा करने में कण द्वारा लिया गया समय यह होगा :

विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र में आवेश की गति



चित्र 10.5: एकसमान चुंबकीय क्षेत्र के लम्बवत् गतिमान एक आवेशित कण वृत्तीय पथ निर्धारित करता है।

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (10.16)$$

त्रिज्या r के लिए समीकरण (10.12) का उपयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{v} \frac{mv}{qB} = \frac{2\pi m}{qB} \quad (10.17)$$

गतिमान आवेश के घूर्णन की आवृत्ति (frequency of rotation) यह होती है :

$$f = \frac{qB}{2\pi m} \quad (10.18)$$

इस राशि को प्रायः साइक्लोट्रॉन आवृत्ति (cyclotron frequency) कहा जाता है। इसे ऐसा इसलिए कहा जाता है, क्योंकि यह वह आवृत्ति होती है, जिस पर आवेशित कण एक साइक्लोट्रॉन कण त्वरित्र (accelerator) में चकर (circulate) लगाता है। इलेक्ट्रॉन के आवेश-द्रव्यमान अनुपात (e/m) का ज्ञात मान लेकर इलेक्ट्रॉन की साइक्लोट्रॉन आवृत्ति माप लेने पर चुंबकीय क्षेत्र की प्रबलता मालूम की जा सकती है। इस इकाई में आगे चलकर आप साइक्लोट्रॉन के बारे में बहुत कुछ जान सकेंगे।

आइए, अब हम यह देखें कि उस स्थिति में आवेशित कण का पथ क्या होगा जब उसका प्रारंभिक वेग न तो क्षेत्र के लम्बवत् हो और न ही समांतर हो।

10.3.2 प्रारंभिक वेग किसी भी दिशा में

इस स्थिति में वेग को दो सदिशों v_{\perp} जो कि क्षेत्र के लम्बवत् है और v_{\parallel} जो कि क्षेत्र के अनुदिश है में विभोजित किया जा सकता है। तब समीकरण (10.13) यह हो जाएगा :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel}) \times \mathbf{B} = q\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} + q\mathbf{v}_{\parallel} \times \mathbf{B}$$

क्योंकि इस समीकरण के दक्षिण पक्ष का दूसरा पद दो समांतर सदिशों का सदिश गुणनफल (cross product) है, इसलिए यह शून्य के बराबर होगा। अतः

$$\mathbf{F} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}$$

$$\text{या } m \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} + m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = q\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}$$

स्पष्ट है कि बल \mathbf{F} , \mathbf{B} पर लंब है अर्थात् \mathbf{B} की दिशा में कोई त्वरण नहीं होता। इसका अर्थ यह है कि

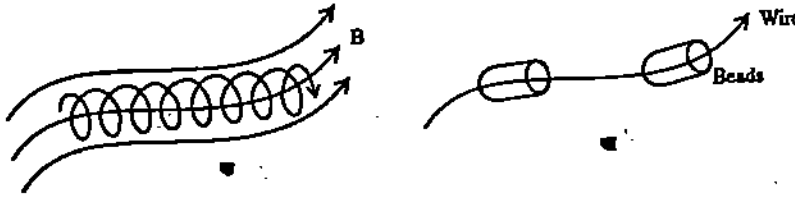
$$m \frac{d\mathbf{v}_{\parallel}}{dt} = 0$$

$$\therefore \frac{d\mathbf{v}_{\perp}}{dt} = q\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B} \quad (10.19)$$

समीकरण (10.19) को देखने से यह पता चलता है कि बल, क्षेत्र पर लंब है। कहने का अर्थ है कि यह बल, क्षेत्र के लम्बवत् स्थित समतल में हो रही कण की गति को प्रभावित करता है।

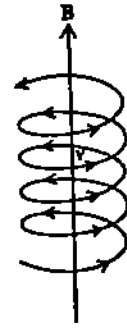
परंतु, हम यह जानते हैं कि चुंबकीय क्षेत्र के लम्बवत् दिशा में कण की गति वृत्तीय होती है। समीकरण (10.19) से यह भी पता चलता है कि चुंबकीय क्षेत्र के अनुदिश कोई भी बल कार्य नहीं करता है। अतः क्षेत्र के अनुदिश बल के घटक पर क्षेत्र का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। इस तरह, कण चुंबकीय क्षेत्र के अनुदिश एकसमान वेग v_{\parallel} से गतिमान होता है, हालांकि क्षेत्र के लम्बवत् दिशा में यह वेग v_{\perp} से वृत्तीय गति में गतिमान होता रहता है। परिणामी पथ (resulting path) एक कुंडलिनी (helix) होती है, जैसाकि चित्र 10.6 में दिखाया गया है। v के स्थान पर v_{\perp} लेने पर

समीकरण (10.15) से कुंडलिनी की त्रिज्या प्राप्त हो जाती है। उस स्थिति में आवेशित कण की गति को एक तार में गूथी मणिकाओं (beads) की तरह माना जा सकता है, जहां तार चुंबकीय क्षेत्र है, जैसाकि चित्र 10.7 में दिखाया गया है।



चित्र 10.7: (क) चुंबकीय क्षेत्र रेखाओं के चारों ओर कुंडलिनीय गति में गतिमान आवेशित कण (ख) मणिकाओं जो कि तार के अनुदिश मुक्त रूप से गतिमान होती हैं, किन्तु तार के सम्बन्ध में मुक्त रूप से गतिमान नहीं होती, के सदृश हैं।

विद्युत और चुंबकीय क्षेत्र में आवेश की गति



चित्र 10.6: एकसमान चुंबकीय क्षेत्र में कण की गति

बोध प्रश्न 5

$1.5 \times 10^{-3} \text{ Wb m}^{-2}$ की प्रबलता वाले एक चुंबकीय क्षेत्र में एक इलेक्ट्रॉन 10^7 ms^{-1} के वेग से क्षेत्र से 30° के कोण पर प्रवेश करता है। कुंडलिनीय पथ की त्रिज्या और एक परिक्रमण (revolution) में इलेक्ट्रॉन द्वारा लिया गया समय ज्ञात कीजिए। यहां $e/m = 1.76 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$ लीजिए।

अगले भाग में हम कैथोड किरण दोलनदर्शी (cathod ray oscilloscope) कार्य-प्रणाली के बारे में बताएंगे, जिससे कि आप विद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों द्वारा निर्भायी गई भूमिका को अच्छी तरह से समझ सकें।

10.4 कैथोड किरण दोलनदर्शी (Cathod Ray Oscilloscope)

कैथोड किरण दोलनदर्शी एक अति उपयोगी और बहुमुखी प्रयोगशाला उपकरण है जिसका प्रयोग विद्युत और इलेक्ट्रॉनिकी परिपथों में तरंग रूपों (wave forms) तथा अन्य परिघटनाओं के प्रदर्शन, मापन और विश्लेषण में किया जाता है। इसका प्रयोग अनेक कार्यों जैसे—धारा, वोल्टता का मापन, प्रत्यावर्ती वोल्टता (alternating voltages) के तरंग रूपों का प्रेक्षण, प्रतिबिंबों के पुनर्सर्जन दूरी, ऊंचाई आदि जैसे लक्ष्य-आंकड़ों के दृष्टि निरूपण के लिए रेडार में एक रूप में किया जाता है। यह उपकरण निम्नलिखित दो नियमों पर आधारित होता है:

- 1) जब अधिक गति से गतिमान इलेक्ट्रॉन जिक स्फाइड से लेपित कांच के स्क्रीन पर पड़ते हैं, तब प्रतिदीप्ति (fluorescence) होती है।
- 2) क्योंकि इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान बहुत कम होता है, इसलिए यह विद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों में आसानी से विचलित हो जाता है तथा व्यावहारिक दृष्टि से बिना किसी समय-परचता (time lag) के क्षेत्रों में हो रहे परिवर्तनों के अनुसार इलेक्ट्रॉन के विचलन में परिवर्तन होता रहता है।

वास्तव में, कैथोड किरण दोलनदर्शी एक बहुत ही शीघ्रगामी आलेखित्र (plotters) है जो निवेश संकेत (input signal) को अन्य संकेत (या समय) के सापेक्ष आलेखित करता है। आलेखित्र एक दीप्त बिन्दु होता है, जो प्रदर्शन क्षेत्र (display area) पर निवेश वोल्टता के अनुसार गतिमान होता रहता है। एक प्रतिदीप्त स्क्रीन पर पड़ रहे इलेक्ट्रॉनों के किरण-मुंज के कारण दीप्त बिन्दु उत्पन्न किया जाता है। इलेक्ट्रॉन का बहुत ही कम द्रव्यमान होने के कारण वोल्टता में तेजी से हो रहे परिवर्तनों के अनुसार ही इलेक्ट्रॉनों के किरण मुंज में परिवर्तन होता रहता है।

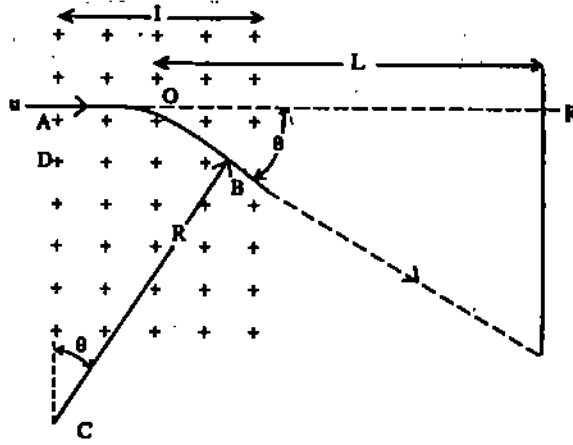
सामान्यतः कैथोड किरण दोलनदर्शी में क्षैतिज निवेश वोल्टता (horizontal input voltage) का उपयोग होता है जो दीप्त बिन्दु को स्क्रीन पर बाएं से दाएं ओर को एक क्षैतिज दिशा में आवर्ती रूप

$$D = \frac{LIV}{2dV_a} \quad (10.25)$$

समीकरण (10.25) से हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि दी हुई त्वरक वोल्टता (accelerating voltage) V_a और विशेष विमाओं (dimensions) वाली कैथोड किरण ट्यूब के लिए, इलेक्ट्रॉन-पुंज का विचलन विचलनी वोल्टता के अनुलोमानुपाती (directly proportional) होता है। विचलनी वोल्टता एक समय परिवर्ती राशि हो सकती है अतः स्क्रीन पर का प्रतिबिंब एक रैखिक रूप में विचलनी वोल्टता के परिवर्तनों के अनुसार बदलता रहता है।

10.4.2 चुंबकीय विचलन (Magnetic Deflection)

चुंबकीय विचलन का प्रयोग उस स्थिति में किया जाता है, जब अधिक विचलन-कोण (wide angle of deflection) की आवश्यकता होती है जैसे कि टेलीविजन ट्यूब में होता है। चुंबकीय क्षेत्र को इस तरह उत्पन्न किया जाता है, जिससे कि यह इलेक्ट्रॉन-पुंज पर लंब हो, जैसाकि चित्र 10.9 में दिखाया गया है।



चित्र 10.9: चुंबकीय विचलन

चुंबकीय क्षेत्र के होने पर इलेक्ट्रॉन पुंज सीधे चलता है और प्रतिदीप्त स्क्रीन के बिन्दु R पर पड़ता है। तब लंबाई l वाले प्रदेश में पुंज त्रिज्या R वाले एक वृत्तीय पथ में चलता है। बिन्दु B पर चुंबकीय क्षेत्र के प्रदेश से निकलने के बाद यह एक सीधे पथ पर चलता जाता है और स्क्रीन के बिन्दु S पर पड़ता है। स्क्रीन पर अनुरेखित ऊर्ध्वाधर विचलन D होता है।

मान लीजिए वृत्तीय पथ AB, बिन्दु C पर एक कोण अंतरित करता है। जब SB को पीछे की ओर बढ़ाया जाता है तो यह x-अक्ष को बिन्दु O पर काटता है, जिसे चुंबकीय क्षेत्र का मध्य बिन्दु माना जा सकता है बशर्ते विचलन कम हो। क्योंकि त्रिभुज SOR और ACB समरूप (similar) है, इसलिए

$$D = L \tan \theta = L \frac{l}{R}$$

अब

$$R = \frac{mv}{qB}$$

यदि इलेक्ट्रॉन को अंतिम एनोड से कैथोड विभव V_a तक त्वरित किया गया हो, तो

$$v = \sqrt{\frac{2qV_a}{m}} \therefore R = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qV_a}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mV_a}{q}}$$

$$\therefore D = LIB \left(\frac{q}{2mV_a} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (10.26)$$

इस तरह, स्क्रीन पर विचलन B के समानुपाती होता है और त्वरणकारी विभव V_0 के वर्गमूल के प्रतिलोमानुपाती होता है।

विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्र में आवेश की गति

अगले भाग में हम आवेशित कणों की गति पर संयोजित विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के प्रभाव का अध्ययन करेंगे। बल के उस व्यापक समीकरण को, जिसमें विद्युत् क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र दोनों होते हैं, लारेन्ज समीकरण (Lorentz equation) कहा जाता है। हम लारेन्ज बल-नियम के कुछ महत्वपूर्ण अनुप्रयोगों पर भी चर्चा करेंगे। अगले भाग का अध्ययन करने से पहले नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

बोध प्रश्न 6

एक विद्युत् क्षेत्र तथा एक चुंबकीय क्षेत्र दोनों से ही प्रोटॉन-पुंज का विचलन हो सकता है। यदि विद्युत् क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र में से किसी एक से भी पुंज का विचलन होता हो, तो आप यह किस प्रकार बता सकते हैं कि किस क्षेत्र के कारण विचलन हुआ है ?

10.5 लारेन्ज बल और उसके अनुप्रयोग

मान लीजिए आवेश q वाला एक कण एक ऐसे स्थान से होकर वेग v से गतिमान हो रहा है, जहां चुंबकीय क्षेत्र और विद्युत् क्षेत्र दोनों का एक साथ अस्तित्व होता है, तो इस कण पर लग रहा बल यह होता है :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (10.27)$$

समीकरण (10.27), समीकरण (10.1) और (10.13) को एक साथ ला देता है। समीकरण (10.27) को लारेन्ज बल समीकरण (Lorentz force equation) कहा जाता है और \mathbf{F} को लारेन्ज बल (Lorentz force) कहा जाता है। यह विद्युत् बल $q\mathbf{E}$ और चुंबकीय बल $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ का सदिश योगफल (vector sum) होता है।

आइए, अब हम वेग वरणकारी और साइक्लोट्रॉन जैसी युक्तियों में, एक-दूसरे पर लंबिक दिशा में कार्य कर रहे संयोजित विद्युत् और चुंबकीय क्षेत्रों के महत्वपूर्ण अनुप्रयोगों पर चर्चा करें।

10.5.1 वेग वरणकारी (Velocity Selector)

अनेक प्रयोगों में जिनमें आवेशित कणों, आयनों या इलेक्ट्रॉनों की गति का अध्ययन करना होता है, समान वेग वाले कणों के एक स्रोत (source) का होना आवश्यक होता है। क्योंकि इलेक्ट्रॉनों या आयनों के अधिकांश स्रोत विभिन्न वेगों वाले कणों को उत्सर्जित (emit) करते हैं, इसलिए ऐसी स्थिति में प्रायः एक वेग-वरणकारी का होना आवश्यक होता है। आइए, हम इस प्रकार के वरणकारी की कार्य-प्रणाली को समझने की कोशिश करें। इसमें विद्युत् बल और चुंबकीय बल दोनों का ही प्रयोग होता है, जैसा कि चित्र 10.10 में दिखाया गया है। संधारित्र (capacitor) जैसी व्यवस्था से कागज के तल पर एक अधोमुखी एकसमान विद्युत् क्षेत्र उत्पन्न होता है तथा चुंबकीय क्षेत्र कागज के तल के लम्बवत् नीचे की ओर है।

मान लीजिए निर्वात (vacuum) में गतिमान एकसमान आवेशित-कणों का पुंज (उदाहरण के लिए, इलेक्ट्रॉनों का पुंज) एक ऐसे प्रदेश में प्रवेश करता है जहां एकसमान विद्युत् क्षेत्र \mathbf{E} और एकसमान चुंबकीय क्षेत्र \mathbf{B} एक-दूसरे पर लंब हैं। पुंज के कणों के वेग भिन्न-भिन्न होते हैं, परंतु वे सभी उस क्षेत्र प्रदेश में, दोनों क्षेत्र-सदिशों (field vectors) के लम्बवत् प्रवेश करते हैं, जैसाकि चित्र 10.10 में दिखाया गया है। जहां विद्युत् क्षेत्र के कारण पुंज के इलेक्ट्रॉनों पर एक उपरिमुखी बल $q\mathbf{E}$ उत्पन्न होता है, वहीं चुंबकीय क्षेत्र के कारण अधोमुखी बल $q\mathbf{v}\mathbf{B}$ उत्पन्न होता है (दक्षिण हस्त नियम लागू करके इसकी जांच कर लीजिए)। एक अद्वितीय वेग (unique velocity) v_0 होता है जिस पर विद्युत् बल और चुंबकीय बल एक-दूसरे को पूरी तरह से निरस्त कर देते हैं। इन दो बलों

समीकरण (10.15) से हमें यह प्राप्त होता है:

$$v = \frac{Bqr}{m}$$

$$\therefore KE = \frac{(Bqr)^2}{2m} \text{ J} = \frac{(Bqr)^2}{2me} \text{ eV}$$

प्रोटॉनों के लिए,

$$q = e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ और } m = m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg.}$$

इस तरह,

$$\begin{aligned} KE_p &= \frac{B^2 r^2 e}{2m_p} = \frac{(0.80 \text{ T})^2 (0.60 \text{ m})^2 (1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}{2 (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})} \\ &= 11 \times 10^6 \text{ eV} = 11 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$\text{और } v = \frac{(0.80 \text{ T})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.60 \text{ m})}{1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 4.6 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$$

“डी” पर लागू की गई वोल्टता की आवृत्ति साइक्लोट्रॉन आवृत्ति है जो कि समीकरण (10.18) से प्राप्त की जा सकती है। प्रोटॉन के लिए

$$\begin{aligned} f_{cp} &= \frac{Be}{2\pi m_p} = \frac{(0.80 \text{ T})(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}{2\pi (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})} \\ &= 1.22 \times 10^7 \text{ Hz} = 12.2 \text{ MHz} \end{aligned}$$

अभी तक आपने जो कुछ भी पढ़ा है, उसका संक्षिप्त विवरण देने से पहले हम चाहेंगे कि आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करें।

बोध प्रश्न 7

साइक्लोट्रॉन में विद्युत क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र के मुख्य कार्य क्या होते हैं ?

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए अब हम उसका संक्षिप्त विवरण यहां दे दें।

10.6 सारांश

- एक विद्युत क्षेत्र में स्थित आवेशित कण पर लग रहा बल, आवेश और विद्युत क्षेत्र के गुणनफल के बराबर होता है :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}$$

यदि कोई अन्य बल कण पर नहीं लग रहा हो, तो न्यूटन के नियम के अनुसार परिणामी त्वरण यह होता है :

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}\mathbf{E}$$

- एकसमान विद्युत क्षेत्र में गतिमान आवेशित कण परवलयिक पथ का अनुसरण करती है, क्योंकि इस स्थिति में कण अचर त्वरण का अनुभव करता है। यदि कण का प्रारंभिक वेग ज्ञात हो; तो समीकरणों (10.9), (10.10), (10.11) और (10.12) की सहायता से परवलयिक पथ के किसी भी अन्य बिन्दु पर कण का वेग परिकल्पित किया जा सकता है।

- एक आवेशित कण, जिसका वेग v , चुंबकीय क्षेत्र B के लम्बवत् स्थित समतल में है, एक वृत्तीय पथ का अनुसरण करता है। इस वृत्तीय पथ की त्रिज्या r का मान यह होता है :

$$r = \frac{mv}{Bq}$$

जहां m आवेशित कण का द्रव्यमान है।

- इस कण द्वारा प्रति सेकंड किए गए परिक्रमणों की संख्या को साइक्लोट्रॉन-आवृत्ति कहा जाता है और यह निम्नलिखित होता है :

$$f = \frac{Bq}{2\pi m}$$

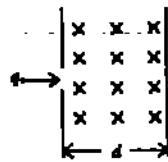
- जब आवेशित कण की दिशा चुंबकीय क्षेत्र की दिशा के न तो लंब होती है और न ही समांतर होती है, तब यह कुंडलिनीय पथ का अनुसरण करता है।
- कैथोड किरण दोलनदर्शी में इलेक्ट्रॉन पुंज या तो विद्युत क्षेत्र से या चुंबकीय क्षेत्र से विचलित होता है। दोनों स्थितियों में, इलेक्ट्रॉन पुंज का विचलन प्रयुक्त किए गए विद्युत (या चुंबकीय) क्षेत्र के समानुपाती होता है।
- विद्युत क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र से गुजरने वाले आवेशित कण की गति लारेन्ज बल:

$$F = qE + qv \times B$$

द्वारा निर्धारित होती है।

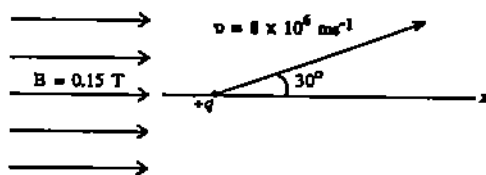
10.7 अंत में कुछ प्रश्न

- 1) आवेश q और द्रव्यमान m वाले एक कण को दो प्लेटों के बीच के प्रदेश में गतिज ऊर्जा k से शॉट किया गया है, जैसाकि चित्र 10.13 में दिखाया गया है। यदि प्लेटों के बीच चुंबकीय क्षेत्र का मान B हो और जैसाकि चित्र में दिखाया गया है B की दिशा कागज के तल के लम्बवत् नीचे की ओर हो, तो B का क्या मान होना चाहिए जिससे कि कण सामने वाले प्लेट से न टकराए ?

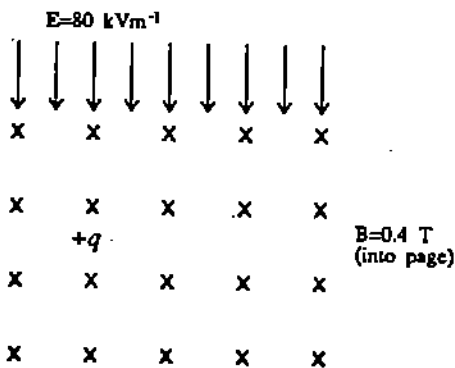


चित्र 10.13

- 2) चित्र 10.14 में, एक प्रोटॉन ($q = +e, m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$) को $8 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$ की चाल से x -दिशा की ओर द्रुत क्षेत्र $B = 0.15 \text{ T}$ के साथ 30° के कोण पर शॉट किया गया है। प्रोटॉन द्वारा तय किया गया पथ (त्रिज्या, पिच आदि) ज्ञात कीजिए।
- 3) जैसाकि चित्र 10.15 में दिखाया गया है, आवेश q वाले कणों का एक पुंज (beam) उस प्रदेश में प्रवेश करता है, जहां विद्युत क्षेत्र एकसमान अक्षोमुखी है। इसका मान 80 kVm^{-1} है। E पर लंब और पृष्ठ की ओर दिष्ट एक चुंबकीय क्षेत्र $B = 0.4 \text{ T}$ है। यदि कण की चाल उपयुक्त ढंग से ली जाए, तो इन क्रासित विद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों से कण विचलित नहीं होंगे। बताइए कि इस स्थिति में चाल कितनी होनी चाहिए ? (इस युक्ति को वेग वरणकारी कहा जाता है।)



चित्र 10.14



चित्र 10.15

- 4) इलेक्ट्रॉनों का एक पुंज दो परस्पर लंब विद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों से होकर बिना विचलित हुए गुजरता है। विद्युत क्षेत्र को हटा देने पर लेकिन वहीं चुंबकीय क्षेत्र बनाए रखने पर इलेक्ट्रॉन चुंबकीय क्षेत्र में 1.14 cm की त्रिज्या वाले एक वृत्तीय पथ में गतिमान होते हैं। इलेक्ट्रॉनिक आवेश और द्रव्यमान का अनुपात ज्ञात कीजिए, यदि $E = 81 \text{ Vm}^{-1}$ तथा चुंबकीय क्षेत्र का अभिवाह घनत्व (flux density) $2 \times 10^{-3} \text{ T}$ हो।
- 5) एक साइक्लोट्रॉन को 5.0 Mev की गतिज ऊर्जा वाले प्रोटॉनों को त्वरित करना है। यदि साइक्लोट्रॉन में चुंबकीय क्षेत्र 2.0T हो, तो साइक्लोट्रॉन की त्रिज्या कितनी होनी चाहिए? यह भी ज्ञात करें कि किस आवृत्ति से "डी" वोल्टता प्रत्यावर्तित हो रहा है।

10.8 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

- 1) समीकरण (10.4) का उपयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$y = 0 + \frac{1}{2} at^2 \text{ (दूरी ऊर्ध्वाधर दिशा में मापी गई है)}$$

समीकरण (10.2) से त्वरण का मान रखने पर, हमें प्राप्त होता है :

$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$$

$$= \frac{(-1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2.0 \text{ N C}^{-1})}{2 \times (9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})} (1.0 \times 10^{-6} \text{ s})^2$$

$$= -0.18 \text{ m.}$$

ऋण चिन्ह यह प्रकट करता है कि गति, क्षेत्र की विपरीत दिशा में अधोमुखी है। ऐसा होना स्वाभाविक है, क्योंकि इलेक्ट्रॉन ऋण आवेशित होते हैं।

- 2) ख) समान स्थिति में प्रोटॉन उतनी दूरी तक नहीं जाएगा, क्योंकि काफी अधिक द्रव्यमान होने के कारण इसका त्वरण काफी कम होता है। प्रोटॉन उपरिमुखी दिशा में जाएगा।
- 3) i) विद्युत क्षेत्र y -अक्ष के अनुदिश कार्य करता है। इलेक्ट्रॉन के वेग के क्षैतिज घटक v_x पर विद्युत क्षेत्र का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। अतः A से B तक जाने में लगा समय यह होगा :

$$t = \frac{x}{v_x} = \frac{2.0 \times 10^{-2} \text{ m}}{4.0 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}} = 0.50 \times 10^{-8} \text{ s}$$

- ii) इस अवधि में इलेक्ट्रॉन, ऊर्ध्वाधर दिशा में, त्वरण $\frac{qE}{m}$ अनुभव करता है और इसमें निम्नलिखित ऊर्ध्वाधर विचलन (y) होता है :

$$y = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} \frac{x^2}{v_x^2}$$

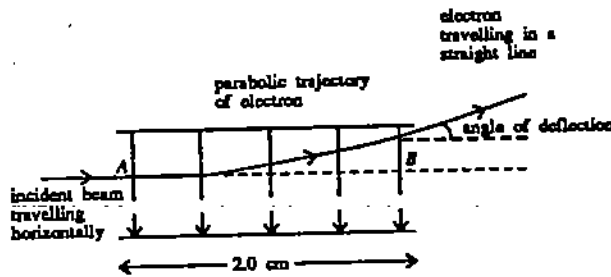
इस तरह विद्युत क्षेत्र में आवेशित कण का पथ xy -समतल में एक परवलय होता है। अब,

$$y = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2$$

$$\text{या } y = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(-1.0 \times 10^2 \text{ NC}^{-1})}{(2)(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})} (0.50 \times 10^{-8} \text{ s})^2$$

$$= 2.2 \text{ mm.}$$

y का घनात्मक मान यह दर्शाता है कि इलेक्ट्रॉन ऊपर की ओर विचलित हुआ है। क्षेत्र प्रदेश में, यह ऊपर दिशा की ओर वक्रित परवलय का अनुसरण करता है, जैसाकि चित्र 10.16 में दिखाया गया है।



चित्र 10.16

- iii) क्योंकि प्रवेश करते समय y -अक्ष के अनुदिश v का कोई घटक नहीं था, इसलिए समीकरण (10.10) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$v_y = 0 + \frac{(-1.6 \times 10^{-19} \text{ C})}{(9.1 \times 10^{-31} \text{ kg})} \times (-1 \times 10^3 \text{ NC}^{-1}) (0.50 \times 10^{-8} \text{ s})$$

$$= 8.8 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}.$$

- iv) प्रदेश को, इलेक्ट्रॉन चाल v से छोड़ता है, जिसका मान यह है :

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{(4 \times 10^2 \text{ ms}^{-1})^2 + (8.8 \times 10^5 \text{ ms}^{-1})^2}$$

$$= 4.1 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$$

v) B पर विचलन-कोण $\theta = \tan^{-1} \left(\frac{v_y}{v_x} \right)$

$$= \tan^{-1} \frac{8.8 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}}{4.4 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}}$$

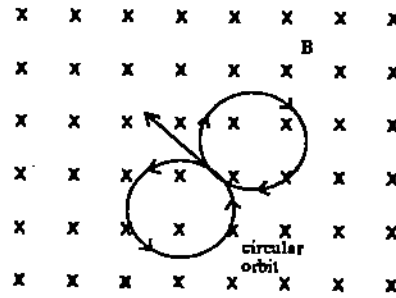
= क्षैतिज के ऊपर 12° है।

vi) क्षेत्र प्रदेश से निकलने पर इलेक्ट्रॉन परवलय के उस बिन्दु पर खींचे गए स्पर्श रेखा के अनुदिश एक सरल रेखा में पुनः चलने लगेगा, जैसाकि चित्र 10.16 में दिखाया गया है।

vii) धन आवेशित कण भी 12° से विचलित होंगे पर अपने चिन्ह के कारण वे नीचे की ओर विचलित होंगे।

viii) इस प्रकार की व्यवस्था का प्रयोग आयन-युंज में धन और ऋण आवेशित कणों को अलग करने में किया जा सकता है।

4) जब आवेश कृणात्मक होता है, तो दक्षिण हस्त नियम लागू करने पर यह पता चलता है कि इस पर लग रहा बल उपरिमुखी दिशा में होगा। चित्र 10.17 में दिखाए गए रेखाचित्र की तरह आपका उत्तर होना चाहिए।



चित्र 10.17

5) $v = 10^7 \text{ ms}^{-1}$, $v_{\parallel} = v \cos 30^\circ$, $v_{\perp} = v \sin 30^\circ$

$$R = \frac{m v_{\perp}}{e B} = \frac{10^7 \sin 30^\circ}{1.5 \times 10^{-3} \times 1.76 \times 10^{11}} = \frac{1}{52.8} \text{ m}$$

$$T = \frac{2\pi}{1.5 \times 10^{-3} \times 1.76 \times 10^{11}} = 2.38 \times 10^{-8} \text{ s}$$

6) प्रोटॉन की प्रवाह-दिशा को उलट देने पर यदि प्रोटॉन समान दिशा में विचलित होते हैं, तब विचलन विद्युत क्षेत्र के कारण होता है और यदि प्रोटॉन विपरीत दिशा में विचलित हों तो विचलन चुंबकीय क्षेत्र के कारण होता है।

7) साइक्लोट्रॉन में विद्युत क्षेत्र का काम आवेशित कण-युंज को ऊर्जा प्रदान करना है, जबकि चुंबकीय क्षेत्र का काम इसे वृत्तीय गति प्रदान करना है।

अंत में कुछ प्रश्न

- 1) सामने वाले प्लेट से न टकराए, इसके लिए आवश्यक है कि कण, त्रिज्या d वाले वृत्तीय पथ में गतिमान हों। अतः $Bqd = mv$ और $K = (mv^2)/2$ लेने पर हमें $B = (2mK)^{1/2} / (qd)$ प्राप्त होता है।
- 2) हम कण के वेग को चुंबकीय क्षेत्र के समांतर और उसके लंब घटकों में वियोजित करते हैं। v_{\parallel}

से उत्पन्न चुंबकीय बल शून्य होता है ($\sin \theta = 0$), v_{\perp} से उत्पन्न चुंबकीय बल का कोई x -घटक नहीं होता। अतः $v_1 = (0.86)(8 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}) = 6.88 \times 10^6 \text{ ms}^{-1}$ की चाल से, x - गति एक समान होती है, जबकि अनुप्रस्थ गति (transverse motion) वृत्तीय है जिसकी त्रिज्या यह होती है :

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(0.5 \times 8 \times 10^6 \text{ ms}^{-1})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(0.15 \text{ T})} = 0.28 \text{ m}$$

प्रोटॉन x -अक्ष के अनुदिश सर्पिल गति से गतिमान होंगे। सर्पिल (या हेलिक्स (helix)) की त्रिज्या 28 cm होगी। हेलिक्स का पिच (pitch) एक परिक्रमण में तय की हुई दूरी) ज्ञात करने के लिए हम यह देखते हैं कि एक वृत्त को पूरा करने में लगा समय यह होता है :

$$\text{आवर्त काल} = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi(0.28 \text{ m})}{(0.5)(8 \times 10^6 \text{ ms}^{-1})} = 4.4 \times 10^{-7} \text{ s}$$

इस समय में प्रोटॉन पिच की दूरी x तय करेगा $= (v_1)(\text{आवर्त काल})$

$$= (6.88 \times 10^6 \text{ ms}^{-1})(4.4 \times 10^{-7} \text{ s}) = 3.0 \text{ m}$$

- 3) विद्युत क्षेत्र के कारण आवेश पर नीचे की ओर बल Eq लगता होता है, यदि आवेश घनात्मक हो। दक्षिण हस्त नियम लागू करने पर यह पता चलता है कि चुंबकीय बल, $qvB \sin 90^\circ$ ऊपर की ओर होगा, यदि q घनात्मक हो। यदि इन दो बलों को बराबर करना हो, जिससे कि कण विचलित न हो, तो

$$Eq = qvB \sin 90^\circ \text{ या } v = \frac{E}{B} = \frac{80 \times 10^3 \text{ Vm}^{-1}}{0.4 \text{ T}} = 2 \times 10^5 \text{ ms}^{-1}$$

यदि q ऋणात्मक हो, तो इन दोनों बलों की दिशा उलट जाती है जिससे कि परिणाम $v = E/B$ तब भी लागू होता है।

- 4) यदि क्रासित क्षेत्र के लागू होने पर भी आवेशित-पुंज अविचलित रहता हो, तो $evB = eE$ और $v = E/B$ होता है। जब विद्युत क्षेत्र हटा लिया जाता है, तो इलेक्ट्रॉन एक वृत्त में घूमने लगते हैं। इस स्थिति में

$$\begin{aligned} e/m &= v/RB = E/(RB^2) = (8 \times 10^3) / [(0.0114)(2 \times 10^{-3})^2] \\ &= 1.75 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}. \end{aligned}$$

- 5) साइक्लोट्रॉन-आवृत्ति यह होती है :

$$f = \frac{qB}{2\pi m} = \frac{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2.0 \text{ T})}{(2\pi)(1.7 \times 10^{-27} \text{ kg})} = 3.0 \times 10^7 \text{ Hz.}$$

यह वही आवृत्ति है जो कि "डी" अंतराल के प्रत्येक क्रासिंग पर प्रोटॉन को त्वरित करने के लिए आवश्यक होती है। 5.0 MeV की ऊर्जा यह होती है :

$$(5.0 \times 10^6 \text{ eV})(1.6 \times 10^{-19} \text{ J (eV)}^{-1}) = 8.0 \times 10^{-13} \text{ J,}$$

अतः प्रोटॉन की गतिज ऊर्जा यह होती है:

$$\text{KE} = \frac{1}{2}mv^2 = 8.0 \times 10^{-13} \text{ J.}$$

चाल v के लिए हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$v = \sqrt{\frac{2K}{m}} = \frac{(2)(8.0 \times 10^{-13} \text{ J})}{1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}} = 3.1 \times 10^7 \text{ ms}^{-1}$$

5-MeV वाले प्रोट्रॉन को धारण करने के लिए आवश्यक त्रिज्या यह होती है :

$$r = \frac{mv}{qB} = \frac{(1.7 \times 10^{-27} \text{ kg})(3.1 \times 10^7 \text{ ms}^{-1})}{(1.6 \times 10^{-19} \text{ C})(2.0 \text{ T})} = 0.16 \text{ m.}$$

10.9 शब्दावली

अधोमुखी	downward
आवेश	charge
आवेशित कण	charged particle
आवृत्ति	frequency
उपरिमुखी	upward
त्वरित्र	accelerator
वोलनदर्शी	oscilloscope
आवेशित-पुंज	beam
प्रक्षेप-पथ	trajectory
प्रदेश	region
प्रारंभिक वेग	initial velocity
युक्ति	device
चरणकारी	selector
विचलन	deviation

इकाई 11 पदार्थों का चुंबकत्व-I

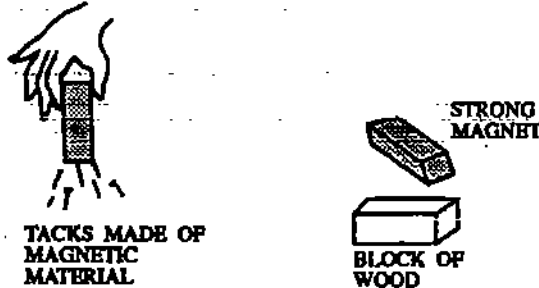
इकाई की रूपरेखा

- 11.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 11.2 चुंबकीय क्षेत्र में विभिन्न पदार्थों की अनुक्रिया
- 11.3 परमाणु का चुंबकीय आघूर्ण और कोणीय संवेग
- 11.4 प्रतिचुंबकत्व और अनुचुंबकत्व
प्रतिचुंबकत्व-परमाण्वीय कक्षाओं पर चुंबकीय क्षेत्र का प्रभाव
अनुचुंबकत्व-चुंबकीय द्विध्रुवों पर बल आघूर्ण
- 11.5 चुंबकीय क्षेत्र और परमाणु की पारस्परिक क्रिया
लारमोर प्रेरण
- 11.6 अनुचुंबकों का चुंबकन
- 11.7 सारांश
- 11.8 अंत में कुछ प्रश्न
- 11.9 हल और उत्तर
- 11.10 शब्दावली

11.1 प्रस्तावना

पिछली दो इकाइयों में हमने गतिमान आवेशों या चालकों में प्रवाहित धारा से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र के बारे में चर्चा की है। वहाँ हमने यह मान लिया था कि गतिमान आवेश और चालक निर्वात में (अर्थात् हवा में) रखे हुए हैं। इकाई 11 और 12 में हम सीखते हैं कि किस प्रकार चुंबकीय क्षेत्र पदार्थों को प्रभावित करता है और किस प्रकार कुछ पदार्थ चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न करते हैं। आपने स्कूल के भौतिकी पाठ्यक्रम में यह अवश्य पढ़ा होगा कि जनरेटर और मोटर जैसे उपकरण में, चुंबकीय अभिवाह बढ़ाने और उसे अपेक्षित प्रदेश में बनाए रखने के लिए इनकी संरचना में लोहे या लोह मिश्र धातु (iron alloy) का प्रयोग किया जाता है। अतः हम लोहे और कुछ अन्य पदार्थों के, जिन्हे लोह चुंबक (ferromagnet) कहते हैं, चुंबकीय गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे। लोह चुंबक पदार्थों के गुणधर्म वही होते हैं जो कि लोहे के होते हैं। यहां हम यह भी देखेंगे कि सभी पदार्थों पर चुंबकीय क्षेत्र का कुछ न कुछ प्रभाव अवश्य पड़ता है, हालांकि कुछ पदार्थों में प्रभाव काफी दुर्बल होता है।

जब हम अपने रोजमर्रा की बातचीत में शब्द "चुंबकत्व" का प्रयोग करते हैं, तब निश्चित ही हमारा अभिप्राय दंड-चुंबक (bar magnet) से होता है। आपने यह अवश्य देखा होगा कि चुंबक का प्रयोग कील, सेफ्टी पिन और सुई (चित्र 11.1 क) को उठाने में किया जा सकता है जबकि चुंबक का प्रयोग आप लकड़ी का टुकड़ा या कागज को उठाने में नहीं कर सकते हैं।



चित्र 11.1: क) उन पदार्थों को, जो चुंबक की ओर आकर्षित होते हैं, चुंबकीय पदार्थ कहा जाता है। ब) उन पदार्थों को जिन पर चुंबक का कोई प्रभाव नहीं पड़ता, अनुचुंबकीय पदार्थ कहा जाता है।

कील, सुई आदि जैसे पदार्थों को, जिन पर चुंबक का प्रभाव पड़ता है, **चुंबकीय पदार्थ** (magnetic materials) कहा जाता है, जबकि लकड़ी या कागज जैसे पदार्थों को **अचुंबकीय पदार्थ** (non-magnetic material) कहा जाता है। पर, इसका यह अर्थ नहीं है कि अचुंबकीय पदार्थों पर चुंबकीय क्षेत्र का कोई प्रभाव नहीं पड़ता। ऐसे पदार्थों और लोहे जैसे चुंबकीय पदार्थों के परस्पर व्यवहार में अंतर यह है कि इन पदार्थों पर चुंबकीय क्षेत्र का प्रभाव काफी दुर्बल होता है।

अचुंबकीय पदार्थ दो प्रकार के होते हैं — प्रतिचुंबकीय (diamagnetic) और अनुचुंबकीय (paramagnetic)। इकाई 11 में प्रतिचुंबकीय और अनुचुंबकीय प्रभावों के बारे में चर्चा की गई है। इस इकाई में आप जिन-जिन धारणाओं, संकल्पनाओं और शब्दों से परिचित होंगे — वे अगली इकाई में लोहचुंबकत्व (ferromagnetism) के अध्ययन में काफी सहायक सिद्ध होंगे। इस इकाई में हम क्लासिकल भौतिकी (classical physics) की अभिधारणा पर आधारित चुंबकत्व का एक सरल क्लासिकल विवरण देंगे। पर, यह बात आप अवश्य अपने ध्यान में रखें कि क्लासिकल भौतिकी के दृष्टिकोण से पदार्थों के चुंबकीय प्रभावों को समझना संभव नहीं है। चुंबकीय प्रभाव पूर्णतः एक क्वांटम यांत्रिकी परिघटना (quantum mechanical phenomena) है। केवल आधुनिक क्वांटम भौतिकी की सहायता से ही पदार्थ के चुंबकीय गुणधर्मों की विस्तृत व्याख्या की जा सकती है, क्योंकि इसके अध्ययन में परमाणु के क्वांटम यांत्रिक गुणधर्मों का उपयोग होता है। अतः इस संकल्पना को अच्छी तरह से समझने के लिए क्वांटम यांत्रिकी का ज्ञान आवश्यक है : फिर भी, क्लासिकल और क्वांटम संकल्पनाओं को संयुक्त रूप से लागू कर द्रव्य के बारे में पूरी तो नहीं, पर बहुत-कुछ जानकारी प्राप्त की जा सकती है।

इस इकाई में मुख्यतः व्यापक रूप में विभिन्न चुंबकीय प्रभावों के परमाण्वीय उद्गम के बारे में समझाने का प्रयत्न किया गया है। अगली इकाई इस इकाई का ही विस्तार है। वहां हम चुंबकीय क्षेत्र तथा चुंबकीय पदार्थ को अभिलक्षित करने वाले प्राचलों के बीच के कुछ प्रेक्षित संबंधों के आधार पर चुंबकित पदार्थ के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे। अंत में, हम चुंबकीय परिपथ (magnetic circuit) के विश्लेषण पर विचार करेंगे जिसका कि विद्युत-चुंबकों की रचना में विशेष महत्व है।

उद्देश्य

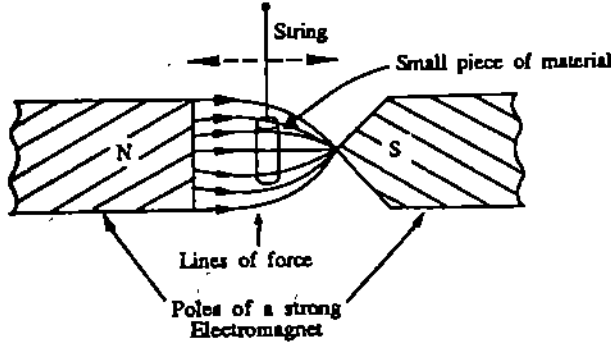
इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- घूर्ण-चुंबकीय अनुपात, अनुचुंबकत्व, प्रतिचुंबकत्व, लारमोर आवृत्ति को समझ सकेंगे और उसकी व्याख्या कर सकेंगे,
- एक परमाण्वीय चुंबक के चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण और उसके कोणीय संवेग में संबंध स्थापित कर सकेंगे,
- फराडे-ग्रेरण और लेन्ज-नियम के आधार पर प्रतिचुंबकत्व की परिघटनाओं की व्याख्या कर सकेंगे,
- चुंबकीय द्विध्रुवों पर लग रहे बल-आघूर्ण के आधार पर अनुचुंबकत्व को समझ सकेंगे,
- चुंबकीय क्षेत्र में एक परमाण्वीय द्विध्रुव की पुरस्सारी आवृत्ति ज्ञात कर सकेंगे,
- समझ सकेंगे कि परमाण्वीय चुंबकत्व की क्लासिकल संकल्पनाओं की सहायता से द्रव्य के चुंबकत्व के बारे में बहुत-कुछ जानकारी प्राप्त की जा सकती है।

11.2 चुंबकीय क्षेत्र में विभिन्न पदार्थों की अनुक्रिया (Response)

यह दिखाने के लिए कि चुंबकीय क्षेत्र में पदार्थों की किस प्रकार की अनुक्रिया होती है, एक प्रबल वैद्युतचुंबक (electromagnet) लीजिए जिसका एक ध्रुव नुकीला हो और दूसरा ध्रुव सपाट हो, जैसाकि चित्र 11.2 में दिखाया गया है।

नुकीले ध्रुव के निकट के प्रदेश (region) में चुंबकीय क्षेत्र अधिक प्रबल होता है, जबकि सपाट ध्रुव के निकट के प्रदेश में क्षेत्र दुर्बल होता है। ऐसा होने का कारण यह है कि नुकीले ध्रुव पर चुंबकीय रेखाएं संकेन्द्रित होती हैं। जब वैद्युतचुंबक में धारा प्रवाहित की जाती है (अर्थात् जब चुंबक को चालू कर दिया जाता है), तो लटक रहा पदार्थ थोड़ा-सा विस्थापित हो जाता है, क्योंकि उस पर



चित्र 11.2: बिस्मथ का एक छोटा सिलिंडर नुकीले ध्रुव से कुछ प्रतिकर्षित होता है, जबकि एल्युमिनियम का टुकड़ा नुकीले ध्रुव की ओर आकर्षित होता है।

थोड़ा बल लग रहा होता है। कुछ पदार्थ बढ़ रहे चुंबकीय क्षेत्र (increasing magnetic field) की दिशा में अर्थात् नुकीले ध्रुव की ओर विस्थापित होते हैं। ऐसे पदार्थ को अनुचुंबकीय पदार्थ (paramagnetic material) कहा जाता है। इस प्रकार के पदार्थ के उदाहरण हैं — एल्युमिनियम और द्रव ऑक्सीजन। इसके विपरीत, बिस्मथ जैसे कुछ ऐसे पदार्थ होते हैं जो घट रहे चुंबकीय क्षेत्र (decreasing magnetic field) की ओर विस्थापित होते हैं अर्थात् ये नुकीले ध्रुव से प्रतिकर्षित होते हैं। ऐसे पदार्थ को प्रतिचुंबकीय (diamagnetic) पदार्थ कहा जाता है। अंत में, कुछ ऐसे पदार्थ भी होते हैं, जिन पर नुकीले ध्रुव की ओर काफी प्रबल ($10^3 - 10^5$ गुना) बल लगता है। ऐसे पदार्थों को लोह-चुंबकीय पदार्थ (ferromagnetic material) कहा जाता है। इस प्रकार के पदार्थों के उदाहरण हैं: लोहा और मैग्नेटाइट।

चुंबकीय क्षेत्र में स्थित पदार्थ पर बल किस प्रकार लगता है? और क्यों कुछ पदार्थों के लिए बल एक विशेष दिशा में कार्य करता है जबकि कुछ अन्य पदार्थों के लिए बल विपरीत दिशा में कार्य करता है? यदि हम इन प्रश्नों का उत्तर दे सकें, तो समझिए कि हमने अनुचुंबकत्व, प्रतिचुंबकत्व और लोह चुंबकत्व की क्रिया-विधि को समझ लिया है। इकाई 9 में आप यह पढ़ चुके हैं कि गतिमान विद्युत आवेशों के कारण चुंबकीय क्षेत्र स्थापित होते हैं। वास्तव में, यदि आप किसी पदार्थ को परमाण्वीय दृष्टि से देखें तो आप उसमें (i) न्यूक्लियस के चारों ओर घूम रहे इलेक्ट्रॉनों और (ii) अपने अक्षों पर प्रचक्रण (spinning) कर रहे इलेक्ट्रॉनों के कारण छोटे-छोटे धारा-लूपों (current loops) की कल्पना कर सकते हैं। स्थूल कार्यों के लिए ये धारा-लूप इतने छोटे होते हैं कि इन्हें चुंबकीय आघूर्ण (magnetic moment) वाले चुंबकीय द्विध्रुव माना जा सकता है (इकाई 9 का भाग 9.2 देखिए)। इसी चुंबकीय आघूर्ण के कारण, पदार्थ के परमाणुबाह्य क्षेत्र के साथ अन्वोन्यक्रिया करता है और इससे प्रतिचुंबकीय और अनुचुंबकीय प्रभाव उत्पन्न होते हैं। इस इकाई में हम अनुचुंबकत्व और प्रतिचुंबकत्व के उद्गम को समझने की कोशिश करेंगे। लोह-चुंबकत्व की व्याख्या हम अगली इकाई में करेंगे। आइए, पहले हम चुंबकीय आघूर्ण का मान ज्ञात करें और देखें कि परमाणु के कोणीय संवेग (angular momentum) के साथ यह किस प्रकार संबंधित है।

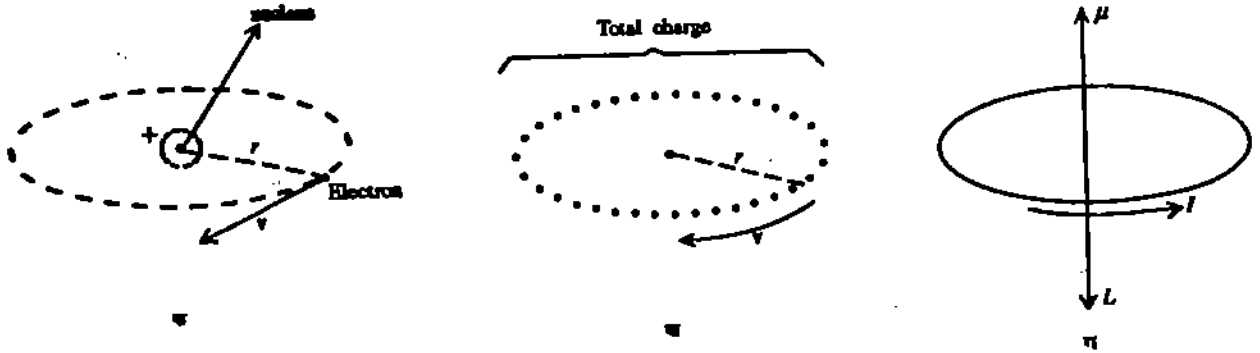
11.3 परमाणु का चुंबकीय आघूर्ण और कोणीय संवेग

अध्ययन संबंधी टिप्पणी: इकाई 9 के भाग 9.2.2 को फिर से देख लेना आपके लिए उपयोगी सिद्ध हो सकता है, जिसमें चुंबकीय द्विध्रुवों (magnetic dipoles) की संकल्पना से आपको परिचित कराया गया है।

परमाणु के इलेक्ट्रॉन न्यूक्लियस के चारों ओर एक अचर गति से घूमते रहते हैं। इनकी गति को समझने के लिए क्वान्टम यांत्रिकी (quantum mechanics) की जानकारी का होना आवश्यक है, पर, इस इकाई में हम अपने परिणामों को प्राप्त करने के लिए केवल क्लासिकल तर्कों का प्रयोग करेंगे, हालांकि यहां यह बात हम फिर से दोहराते हैं कि भौतिक जगत् के संबंध में हमारा विवरण

अपूर्ण रहेगा क्योंकि यहां हम क्वांटम यांत्रिकी पर चर्चा नहीं कर रहे हैं।

यहां हमने यह माना है कि परमाणु में, न्यूक्लियस के चारों ओर इलेक्ट्रॉन एक वृत्तीय कक्षा में घूम रहा है। यह इलेक्ट्रॉन एक केन्द्रीय बल, जिसे स्थिरवैद्युत बल कहते हैं, के अधीन घूम रहा है, जैसाकि चित्र 11.3 (क) में दिखाया गया है। इस गति के कारण न्यूक्लियस के परितः इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग L होगा।



चित्र 11.3: क) एक परमाणु का क्लासिकल मॉडल जिसमें इलेक्ट्रॉन एक वृत्तीय कक्षा में चाल v से घूमता है। ख) यदि आवेश $-e$ को छोटे-छोटे टुकड़ों में इस प्रकार बांट दिया जाए जिससे कि आवेश का एक घूर्णी वलय (rotating ring) बनता हो तो वह औसत विद्युत धारा के तुल्य होगी। ग) कक्षीय कोणीय संवेग सदिश और चुंबकीय आघूर्ण सदिश दोनों विपरीत दिशाओं में होते हैं।

इस कोणीय संवेग (angular momentum) का परिमाण (magnitude) इलेक्ट्रॉन के द्रव्यमान, m , इसकी चाल v और वृत्तीय पथ की त्रिज्या r के गुणनफल के बराबर होता है (चित्र 11.3 देखिए)।

$$L = mvr \quad (11.1)$$

इसकी दिशा कक्षा के तल के लम्बवत् होती है। इकाई 9 को पढ़ने के दौरान तथा उस इकाई के अंत में दिए गए प्रश्न को हल करते वक्त, यह तथ्य आपको तुरंत याद आ गया होगा कि इलेक्ट्रॉन की कक्षीय गति विद्युत् धारा के तुल्य होती है। यदि इलेक्ट्रॉन पर के आवेश को छोटे-छोटे टुकड़ों में इस प्रकार बांट दिया जाए जिससे कि आवेश का एक घूर्णी वलय (rotating ring) बनता हो, तो वह विद्युत धारा के तुल्य होगी, जैसाकि चित्र 11.3 (ख) में दिखाया गया है। इस धारा का परिमाण (magnitude), आवेश और आवृत्ति के गुणनफल के बराबर होता है क्योंकि इस गुणनफल का मान प्रति इकाई समय में कक्षा के किसी बिन्दु से होकर गुजरने वाले आवेश के मान के बराबर होता है।

घूर्णन की आवृत्ति, घूर्णन के आवर्त-काल (period) $\frac{2\pi r}{v}$ का व्युत्क्रम होता है, इसलिए घूर्णन की आवृत्ति $\frac{v}{2\pi r}$ होगी। अतः धारा का मान यह होता है:

$$I = -\frac{ev}{2\pi r} \quad (11.2)$$

इस धारा से उत्पन्न चुंबकीय आघूर्ण का मान, धारा और उस क्षेत्रफल के गुणनफल के बराबर है जिसका कि इलेक्ट्रॉन पथ परिसीमा (boundary) है, अर्थात् $\mu = I\pi r^2$,

अतः

$$\mu = -\frac{evr}{2} \quad (11.3)$$

μ की दिशा कक्षा के लम्बवत् होती है।

समीकरण (11.3) में समीकरण (11.1) का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है:

$$\mu = -\frac{e}{2m} L \quad (11.4)$$

शून्य चिन्ह यह प्रकट करता है कि μ और L विपरीत दिशाओं में हैं, जैसाकि चित्र 11.3 (ग) में

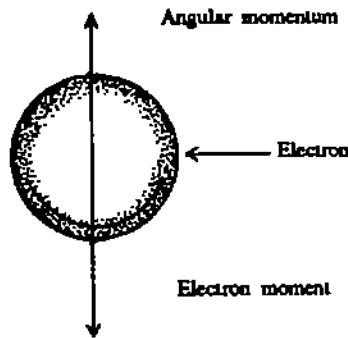
दिखाया गया है। ध्यान दीजिए कि L , इलेक्ट्रॉन का कक्षीय कोणीय संवेग है। चुंबकीय आघूर्ण (magnetic moment) और कोणीय संवेग के अनुपात को घूर्ण चुंबकीय अनुपात (gyro-magnetic ratio) कहा जाता है। इसका मान वेग और कक्षा की त्रिज्या पर निर्भर करता है।

क्वांटम यांत्रिकी के अनुसार $L = \sqrt{l(l+1)} \hbar$ जहाँ l एक धन पूर्णांक है और, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, जहाँ h प्लांक-नियतांक हैं। फिर भी, कुछ भौतिक स्थितियों में, क्योंकि क्लासिकल मॉडल (classical model) को लागू करना बहुत-कुछ वास्तविकता से मिलता-जुलता है, इसलिए हम क्लासिकल संकल्पनाओं पर विचार करेंगे। और, चुंबकीय पदार्थों की प्रकृति पर प्रारम्भ में किए गए शोध कार्य क्लासिकल संकल्पनाओं पर आधारित थे जिससे इन पदार्थों के व्यवहार के बारे में बहुत-कुछ सही अनुमान लगाया गया था।

बोध प्रश्न 1

- क) दिखाइए कि चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्णों को JT^{-1} (जूल प्रति टेस्ला) के मात्रकों में व्यक्त किया जा सकता है।
- ख) बोर-हाइड्रोजन परमाणु में, इलेक्ट्रॉन के कक्षीय कोणीय संवेग को $h/2\pi$ के मात्रकों में क्वांटिकृत किया गया है जहाँ $h = 6.626 \times 10^{-34}$ Js प्लांक-नियतांक है। JT^{-1} में परमाण्विक द्विध्रुव आघूर्ण का लघुतम परिमाण ज्ञात कीजिए (इस राशि को बोर-मैग्नेटॉन कहा जाता है)। इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान 9.109×10^{-31} Kg है।

आप यह जानते हैं कि अपनी अक्षीय गति के अतिरिक्त परमाणु का इलेक्ट्रॉन इस तरह व्यवहार करता है जैसे कि वह अपने अक्ष के चारों ओर घूर्णन कर रहा हो, जैसा कि चित्र 11.4 में दिखाया गया है।



चित्र 11.4 : इलेक्ट्रॉन का प्रचक्रण और उससे सम्बन्ध चुंबकीय आघूर्ण

इस गुणधर्म को प्रचक्रण (spin) कहा जाता है। हालांकि सही माने में इलेक्ट्रॉन जैसे अति लघु कण के प्रचक्रण की कल्पना नहीं की जा सकती है, पर, अनेक स्थितियों में ऐसी कल्पना करने से इलेक्ट्रॉन को एक कृण आवेशित बॉल के रूप में माना जा सकता है और तब आप यह कह सकते हैं कि यह एक धारा लूप (current loop) है। प्रचक्रण पूरी तरह से एक क्वांटम यांत्रिक संकल्पना है। फिर भी, इलेक्ट्रॉन के प्रचक्रण का संबंध कोणीय संवेग और चुंबकीय आघूर्ण से होता है। बिना किसी प्रकार की व्याख्या देते हुए केवल क्वांटम यांत्रिक तर्कों से हमें यह प्राप्त होता है :

$$\mu = -\frac{e}{m} S \quad (11.5)$$

जहाँ S प्रचक्रण कोणीय संवेग है और μ प्रचक्रण चुंबकीय आघूर्ण है। इस स्थिति में घूर्णी चुंबकीय अनुपात, कक्षीय स्थिति वाले अनुपात का दोगुना होता है।

सामान्यतः एक परमाणु में अनेक इलेक्ट्रॉन होते हैं। इन इलेक्ट्रॉनों के कक्षीय और प्रचक्रण कोणीय संवेगों को एक निश्चित विधि से संयोजित कर कुल कोणीय संवेग J और परिणामी कुल चुंबकीय आघूर्ण प्राप्त किया जा सकता है। संयोजित करने का नियम क्वांटम यांत्रिकी से प्राप्त होता है। इस

स्थिति में भी चुंबकीय आघूर्ण की दिशा कोणीय संवेग की दिशा के विपरीत होती है, जिससे कि हमें यह प्राप्त होता है :

$$\mu = -g \frac{e}{2m} J \quad (11.6)$$

जहां g , एक संख्यात्मकगुणक (numerical factor) है जिसे लैंडे g -गुणक (Lande-g-factor) कहा जाता है। यह परमाणु की अवस्था का अभिलक्षण होता है। क्वांटम यांत्रिकी के नियमों की सहायता से किसी भी विशेष परमाण्वीय अवस्था के लिए g -गुणक परिकलित किया जा सकता है। केवल कक्षीय स्थिति के लिए $g = 1$ और केवल प्रचक्रण स्थिति के लिए $g = 2$ होता है।

अपने चुंबकीय आघूर्ण के कारण परमाणु और अणु बाह्य चुंबकीय क्षेत्र के साथ अन्योन्यक्रिया करते हैं। पर, एक अन्य विधि द्वारा भी परमाण्वीय धाराओं और इस तरह आघूर्णों पर बाह्य चुंबकीय क्षेत्र का प्रभाव पड़ता है। इस स्थिति में क्षेत्र द्वारा चुंबकीय आघूर्ण प्रेरित होता है। इस प्रभाव के फलस्वरूप प्रतिचुंबकत्व (diamagnetism) होता है जिसका अध्ययन हम अगले भाग में करेंगे। पर, अगले भाग का अध्ययन करने से पहले नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल कीजिए :

बोध प्रश्न 2

- क) समीकरणों (11.4) और (11.5) के साथ समीकरण (11.6) की तुलना कर (i) केवल कक्षीय स्थिति के लिए और (ii) केवल प्रचक्रण स्थिति के लिए g का मान ज्ञात कीजिए।
- ख) प्रयोग से मापे गए इलेक्ट्रॉन प्रचक्रण चुंबकीय आघूर्ण का मान $9.27 \times 10^{-24} \text{ Am}^2$ है। दिखाइए कि यह मान समीकरण (11.5) द्वारा दिए गए सूत्र के संगत है।

(संकेत : बोर-सिद्धांत के अनुसार $S = \frac{h}{2}$, $h = \frac{h}{2\pi}$, जहां h प्लैंक-नियतांक है।)

11.4 प्रतिचुंबकत्व और अनुचुंबकत्व

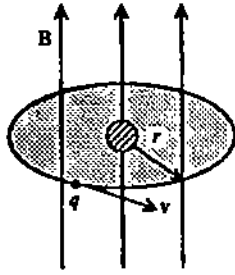
ऐसे कई पदार्थ हैं जिनके परमाणुओं में कोई स्थायी चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण (magnetic dipole moments) नहीं होता है, क्योंकि इन पदार्थों के परमाणुओं के विभिन्न इलेक्ट्रॉनों के चुंबकीय आघूर्णों की प्रवृत्ति एक-दूसरे को निरस्त करने की होती है जिस कारण परमाणु में कोई नेट चुंबकीय आघूर्ण नहीं रह पाता है। कक्षीय और प्रचक्रण चुंबकीय आघूर्ण ठीक-ठीक एक-दूसरे को संतुलित कर देते हैं। ऐसे पदार्थ में प्रतिचुंबकत्व (diamagnetism) होता है। यदि इस प्रकार के पदार्थ को एक चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाए, तो वैद्युत चुंबकीय प्रेरण-नियमों के अनुसार (जिस पर विस्तार से चर्चा इकाई 13 में की जाएगी) उनके परमाणुओं में थोड़ी-सी अतिरिक्त धाराएं उस दिशा में प्रेरित होती हैं जिससे कि वह पहले से उपस्थित चुंबकीय क्षेत्र का विरोध कर सके। अतः ऐसे पदार्थ में चुंबकीय आघूर्ण प्रेरित धाराओं के कारण बाह्य चुंबकीय क्षेत्र की विपरीत दिशा में प्रेरित होते हैं। इस प्रभाव को प्रतिचुंबकत्व कहा जाता है। हालांकि यह एक दुर्बल प्रभाव है, पर इसका प्रभाव सार्वत्रिक (universal) होता है।

कुछ ऐसे पदार्थ भी होते हैं, जिनके परमाणुओं में स्थायी चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण होते हैं। ऐसा इसलिए होता है, क्योंकि उनके इलेक्ट्रॉनों की कक्षीय गति और प्रचक्रण के कारण उत्पन्न चुंबकीय आघूर्ण एक-दूसरे को निरस्त न कर एक नेट मान देते हैं। जब ऐसे पदार्थ को एक चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाता है (पदार्थ में प्रतिचुंबकत्व का गुण होने के बावजूद), तो इनमें उपस्थित द्विध्रुवों की प्रवृत्ति चुंबकीय क्षेत्र की दिशा में एक पंक्ति में रहने की होती है। इस परिघटना को अनुचुंबकत्व (paramagnetism) कहा जाता है और पदार्थ को अनुचुंबकीय (paramagnetic) पदार्थ कहा जाता है। अनुचुंबकीय पदार्थ में, प्रायः अनुचुंबकत्व का गुण, प्रत्येक पदार्थ में सदा उपस्थित प्रतिचुंबकत्व के गुणधर्म की अपेक्षा अधिक प्रबल होता है।

प्रतिचुंबकत्व में परमाणु के चुंबकीय आघूर्ण के परिमाण में परिवर्तन होता है, जबकि अनुचुंबकत्व में, परमाणु के चुंबकीय आघूर्ण के अभिविन्यास (orientation) में परिवर्तन होता है। आइए, हम देखें कि यह कैसे होता है।

11.4.1 प्रतिचुंबकत्व: परमाण्वीय कक्षाओं पर चुंबकीय क्षेत्र का प्रभाव

हम एक ऐसा परमाणु लेते हैं, जिसमें कोई स्थायी चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण (intrinsic magnetic dipole moment) नहीं है और हम यह मान लेते हैं कि जिस स्थान पर परमाणु रखा हुआ है, वहां चुंबकीय क्षेत्र का मान धीरे-धीरे बढ़ रहा है। चुंबकीय क्षेत्र में परिवर्तन होने के कारण फाराडे के प्रेरण नियम के अनुसार (इस पर विस्तार से चर्चा हम इकाई 13 में करेंगे) एक विद्युत क्षेत्र उत्पन्न होता है। फाराडे नियम के अनुसार, किसी बन्द पथ (closed path) के अनुदिश E का रेखा समाकल (line integral), पथ द्वारा परिवर्द्ध पृष्ठ से गुजरने वाले चुंबकीय अभिवाह के परिवर्तन-दर के बराबर होता है।



चित्र 11.5: वृत्तीय कक्षा में घूमता हुआ एक इलेक्ट्रॉन एकसमान चुंबकीय क्षेत्र में स्थित है। चुंबकीय क्षेत्र की दिशा कक्षा के तल पर लम्बवत् है।

सरलता की दृष्टि से हम एक वृत्तीय पथ लेते हैं जिसके अनुदिश परमाणु का इलेक्ट्रॉन गतिमान हो रहा है (चित्र 11.5 देखिए) फाराडे-नियम से इस पथ के परितः विद्युत क्षेत्र का मान यह है :

$$\int E \cdot dl = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$E \cdot 2\pi r_{\perp} = -\frac{d}{dt}(B \cdot \pi r_{\perp}^2) \quad (11.7)$$

जहां r_{\perp} वृत्तीय पथ की त्रिज्या है जो कि B के लम्बवत् है। उपरोक्त समीकरण से परिसंचारी विद्युत क्षेत्र (circulating electric field) प्राप्त होता है, जिसकी प्रबलता यह होती है :

$$E = -\frac{r_{\perp}}{2} \frac{dB}{dt} \quad (11.8)$$

यह विद्युत क्षेत्र, कक्षा में चक्कर काट रहे इलेक्ट्रॉन पर बल-आघूर्ण (torque) $\tau = -eEr_{\perp}$ लगाता है जो कि इसके कोणीय संवेग (angular momentum) के परिवर्तन-दर $\frac{dL}{dt}$ के बराबर होना चाहिए, अर्थात्

$$\frac{dL}{dt} = -eEr_{\perp}$$

या
$$\frac{dL}{dt} = -e \left(-\frac{r_{\perp}}{2} \frac{dB}{dt} \right) r_{\perp}$$

या
$$\frac{dL}{dt} = \frac{er_{\perp}^2}{2} \frac{dB}{dt} \quad (11.9)$$

चुंबकीय क्षेत्र के सक्रिय होने पर कोणीय संवेग में हुए परिवर्तन ΔL के मान को शून्य से समय के सापेक्ष, समीकरण (11.9) को समाकलित करके प्राप्त किया जाता है, अर्थात्

$$\Delta L = \frac{er_{\perp}^2}{2} \Delta B \quad (11.10)$$

अतः समीकरण (11.10) को देखने से यह पता चलता है कि चुंबकीय क्षेत्र B के कारण इलेक्ट्रॉन के कोणीय संवेग में परिवर्तन, ΔL होता है और इस तरह समीकरण (11.4) से नियंत्रित चुंबकीय आघूर्ण के मान में परिवर्तन यह होता है :

$$\Delta \mu = -\frac{e}{2m} \Delta L$$

$$\Delta \mu = -\frac{er_{\perp}^2}{4m} B \quad (11.11)$$

जैसाकि समीकरण (11.11) के कृण चिन्ह से देखा जा सकता है, प्रेरित चुंबकीय आघूर्ण (induced magnetic moment) की दिशा B , जो कि इसे उत्पन्न करता है, की दिशा के विपरीत होती है। इस समीकरण में एक पद r_{\perp}^2 है जो कि विशेष इलेक्ट्रॉन कक्षा, जिसका अक्ष, B के अनुदिश है, के त्रिज्या का वर्ग है। यदि B , z -अक्ष के अनुदिश हो, तो हम $r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$ लेते हैं। इस तरह हम यह देखते हैं कि औसत $\langle r_{\perp}^2 \rangle$, $2\langle x^2 \rangle$ होगा क्योंकि गोलीय सममिति (spherical symmetry) के कारण $\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle$ होता है। और, क्योंकि

$$\langle x^2 \rangle = \langle y^2 \rangle = \langle z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle x^2 + y^2 + z^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle r^2 \rangle$$

इसलिए, $\langle r_{\perp}^2 \rangle = \frac{2}{3} \langle r^2 \rangle$ होगा। अतः समीकरण (11.11) जिसे हम

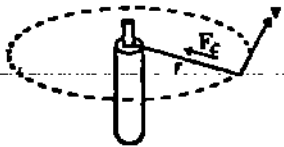
$$\Delta \mu = -\frac{e^2 \langle r_{\perp}^2 \rangle}{4m} B$$

के रूप में लिखेंगे, यह हो जाता है :

$$\Delta \mu = -\frac{e^2}{6m} \langle r^2 \rangle B. \quad (11.12)$$

यहां हम यह पाते हैं कि प्रतिचुंबकीय परमाणु में प्रेरित चुंबकीय आघूर्ण, B के समानुपाती होता है और इसके दिशा के विपरीत होता है। यही पदार्थ का प्रतिचुंबकत्व होता है। यदि प्रत्येक अणु में n इलेक्ट्रॉन हों और प्रत्येक इलेक्ट्रॉन की कक्षा की त्रिज्या r हो, तो परमाणु के चुंबकीय आघूर्ण में परिवर्तन यह होगा :

$$\Delta \mu = -\frac{e^2}{6m} \sum_{\text{सभी इलेक्ट्रॉन}} \langle r^2 \rangle B.$$



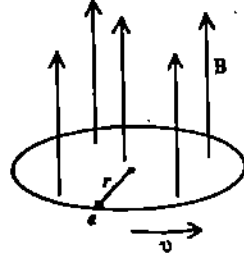
चित्र 11.6: जब कोई भी बाह्य चुंबकीय क्षेत्र नहीं होता है तब अभिकेन्द्री बल विद्युत बल से संतुलित हो जाता है।

प्रतिचुंबकत्व के उद्गम को एक अन्य विधि से समझा जा सकता है, जो कि इस तथ्य पर आधारित है कि चुंबकीय क्षेत्र की दिशा (orientation) के अनुसार इलेक्ट्रॉन की चाल या तो बढ़ जाती है या कम हो जाती है। आइए, हम देखें कि यह कैसे होता है। जैसाकि चित्र 11.6 में दिखाया गया है चुंबकीय क्षेत्र के न होने पर अभिकेन्द्री बल (centripetal force) $\frac{mv^2}{r}$ विद्युत बल से इस प्रकार संतुलित हो जाता है :

$$\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (11.13)$$

आइए, हम यह देखें कि जब किसी एक कक्षा पर बाह्य चुंबकीय क्षेत्र लगाया जाता है, जैसाकि चित्र 11.7 में दिखाया गया है, तब क्या होता है। चुंबकीय क्षेत्र के उपस्थिति में एक अतिरिक्त पद $e(v \times B)$ आ जाता है और इन प्रतिबंधों के अधीन इलेक्ट्रॉन की चाल बदल जाती है। मान लीजिए नई चाल v_1 है, तब

$$ev_1 B + \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} = \frac{mv_1^2}{r}$$



चित्र 11.7: चुंबकीय क्षेत्र कक्षा के तल के सम्बन्ध है।

$$\text{या } ev_1 B = \frac{m}{r} (v_1^2 - v^2) = \frac{m}{r} (v_1 + v)(v_1 - v)$$

यदि हम यह मान लें कि परिवर्तन $\Delta v = v_1 - v$ छोटा है, तो हमें यह प्राप्त होगा :

$$ev_1 B = \frac{m}{r} (2v_1) \Delta v$$

$$\text{या } \Delta v = \frac{erB}{2m} \quad (11.14)$$

कक्षीय चाल में परिवर्तन होने का अर्थ है द्विध्रुव आघूर्ण (dipole moment) में परिवर्तन जो कि समीकरण (11.3) से इस प्रकार प्राप्त होता है

$$\Delta \mu = -\frac{1}{2} e (\Delta v) r = -\frac{e^2 r^2}{4m} B \quad (11.15)$$

यह समीकरण यह दर्शाता है कि μ में हो रहा परिवर्तन, B की विपरीत दिशा में होता है। बाह्य चुंबकीय क्षेत्र के न होने पर इलेक्ट्रॉन की कक्षाएं एक निश्चित दिशा में न होकर किसी भी दिशा में (randomly oriented) होती हैं और इस प्रकार कक्षीय द्विध्रुव आघूर्ण निरस्त हो जाते हैं। परंतु, चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में प्रत्येक परमाणु के द्विध्रुव आघूर्ण में परिवर्तन होता है और सभी बाह्य क्षेत्र के प्रतिसमांतर (anti parallel) संरेखित हो जाते हैं। चुंबकीय पदार्थ का यह गुणधर्म सभी परमाणुओं में होता है। क्योंकि अनुचुंबकत्व की तुलना में यह गुण काफी दुर्बल होता है, इसलिए यह केवल उन्हीं पदार्थों में होता है जहां अनुचुंबकत्व नहीं होता है।

11.4.2 अनुचुंबकत्व : चुंबकीय द्विध्रुवों पर बल-आघूर्ण

अनुचुंबकत्व उन्हीं परमाणुओं में होता है जिनमें चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण नहीं होता है। परमाणु का चुंबकीय आघूर्ण इलेक्ट्रॉनों की कक्षीय धाराओं और उनके “अयुग्मित प्रचक्रणों” (unpaired spins) से उत्पन्न आघूर्ण के कारण होता है। इकाई 9 में आपने यह देखा है कि एकसमान क्षेत्र में चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण μ वाले एक धारा-लूप (current loop) को रखने पर उस पर बल-आघूर्ण τ लगता है जिसका मान समीकरण (9.16) से प्राप्त होता है। अर्थात्

$$\tau = \mu \times B \quad (9.16)$$

बल-आघूर्ण की प्रवृत्ति द्विध्रुवों को संरेखित करने की होती है जिससे कि चुंबकीय आघूर्ण, क्षेत्र के समांतर एक पंक्ति में हो जाते हैं (यह ठीक उसी प्रकार होता है जैसाकि परावैद्युत (dielectric) के स्थायी द्विध्रुव, विद्युत क्षेत्र के साथ, एक पंक्ति में हो जाते हैं)। इसी बल-आघूर्ण के कारण अनुचुंबकत्व का गुण होता है। आप यह सोच सकते हैं कि प्रत्येक पदार्थ अनुचुंबकीय होगा, क्योंकि प्रचक्रण करता हुआ प्रत्येक इलेक्ट्रॉन एक चुंबकीय द्विध्रुव होता है। पर, ऐसा होता नहीं, क्योंकि परमाणु के विभिन्न इलेक्ट्रॉन विपरीत प्रचक्रणों सहित, युग्मों (pairs) में होते हैं। इस प्रकार के इलेक्ट्रॉन-युग्म का चुंबकीय आघूर्ण ठीक-ठीक निरस्त हो जाता है। इस तरह, हम यह देखते हैं कि केवल उन परमाणुओं या अणुओं में अनुचुंबकत्व होता है, जिनमें प्रचक्रण चुंबकीय आघूर्ण निरस्त नहीं होता है। यही कारण है कि शब्द “अयुग्मित प्रचक्रण” का प्रयोग ऊपर किया गया है। सामान्यतः अनुचुंबकत्व दुर्बल होता है, क्योंकि तापीय गति (thermal motion) के कारण उत्पन्न

बलों की तुलना में, जो कि क्रम को बिगाड़ देते हैं, संरेखित करने वाले बल दुर्बल होते हैं। निम्न तापमान पर संरेखित करने वाले बल प्रबल होते हैं, अतः अनुचुंबकत्व का प्रभाव अधिक प्रबल होता है।

बोध प्रश्न 3

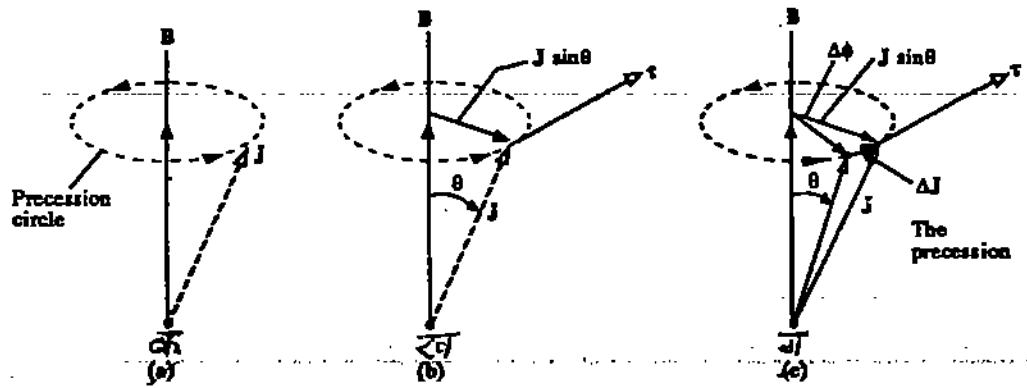
(क) बताइए कि निम्नलिखित पदार्थों में से कौन-कौन-से पदार्थ अनुचुंबकीय हैं और कौन-कौन-से प्रतिचुंबकीय हैं ?

तांबा, दिस्मथ, एल्युमिनियम, सोडियम, चाँदी

(ख) क्या ताँवे जैसे प्रतिचुंबकीय पदार्थ और एल्युमिनियम जैसे अनुचुंबकीय पदार्थ से एक ऐसा मिश्र धातु (alloy) बनाया जा सकता है जिससे कि मिश्रधातु न तो अनुचुंबकीय हो और न ही प्रतिचुंबकीय ?

11.5 चुंबकीय क्षेत्र और परमाणु की पारस्परिक क्रिया: लारमोर पुरस्सरण (Larmor Precession)

पिछले उपभाग में अनुचुंबकत्व के बारे में बताते समय हमने परमाणु को चुंबकीय आघूर्ण μ वाला एक चुंबक माना था। जब इसे एकसमान क्षेत्र B में रखा जाता है, तो इस पर एक बल-आघूर्ण $\tau = \mu \times B$ कार्य करता है जिसकी प्रवृत्ति इसे चुंबकीय क्षेत्र की दिशा में संरेखित करने की होती है। पर, यह बात परमाण्विक चुंबक के साथ नहीं होती, क्योंकि, नाच रहे एक लट्ठू की तरह, इसका भी एक कोणीय संवेग J होता है। हम जानते हैं कि गुरुत्वीय क्षेत्र में तेजी से नाच रहे लट्ठू या घूर्णाक्षस्थायी (gyroscope) पर एक बल-आघूर्ण कार्य करता है जिसकी वजह से यह क्षेत्र-दिशा के परितः पुरस्सरित होने लगता है। पुरस्सरण (precession) के बारे में अधिक जानकारी प्राप्त करने के लिए पी. एच. ई. -01 के पाठ्यक्रम "प्रारंभिक यांत्रिकी" की इकाई 9 को पढ़ सकते हैं। इसी प्रकार, परमाण्विक चुंबक, चुंबकीय क्षेत्र की दिशा में संरेखित होने के बजाय क्षेत्र-दिशा के परितः पुरस्सरित होने लगता है। कोणीय संवेग और इसके साथ-साथ चुंबकीय आघूर्ण चुंबकीय क्षेत्र के परितः पुरस्सरित होता है, जैसाकि चित्र 11.8 (क) में दिखाया गया है।



चित्र 11.8 (क): चुंबकीय क्षेत्र के परितः परमाण्विक चुंबक से सम्बन्ध कोणीय संवेग का पुरस्सरण होगा। (क) चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में बल-आघूर्ण τ कार्य करता है। बल-आघूर्ण कोणीय संवेग के लम्बवत् है। (ग) बल आघूर्ण के कारण कोणीय संवेग सदिश की दिशा बदल जाती है जिससे पुरस्सरण होता है।

चुंबकीय क्षेत्र के कारण परमाणु पर बल-आघूर्ण लगता है जिसका परिमाण यह होता है:

$$\tau = \mu B \sin \theta \quad (11.16)$$

जहाँ θ , J और B के बीच का कोण है। बल-आघूर्ण की दिशा चुंबकीय क्षेत्र और J के भी लम्बवत् है, जैसाकि चित्र 11.8 (ख) में दिखाया गया है।

ध्यान दीजिए कि बल-आघूर्ण, सदिश J पर लंब है। अब, न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार,

$$\tau = \frac{dJ}{dt} \quad (11.17)$$

लघु परिवर्तनों के लिए इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\Delta J = \tau \Delta t \quad (11.18)$$

दूसरे शब्दों में, बल-आघूर्ण के कारण समय के साथ कोणीय संवेग में परिवर्तन होगा। मान लीजिए, Δt समय अंतराल में कोणीय संवेग में परिवर्तन ΔJ हो रहा है। इस ΔJ की दिशा τ की ओर होगी। इसकी वजह से J का ऊपरी सिरा B को अक्ष मानकर उसके चारों ओर एक वृत्त में घूमने लगेगा। अर्थात् यही B के परितः J (और इसलिए μ) का पुरस्सरण है। समीकरण (11.18) में समीकरण (11.16) का प्रयोग करके ΔJ के परिमाण को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\Delta J = \tau \Delta t = (\mu B \sin \theta) \Delta t \quad (11.19)$$

हालांकि बल-आघूर्ण से, जो कि τ के लम्बवत् है, J के परिमाण में तो परिवर्तन नहीं हो सकता, पर, इसकी दिशा में परिवर्तन अवश्य होता है। चित्र 11.8 ग में यह दिखाया गया है कि किस प्रकार सदिश J और सदिश ΔJ का सदिश योग सदिश J के दिशा में परिवर्तन लाता है। यदि ω_p पुरस्सरण का कोणीय वेग हो और Δt समय में $\Delta \phi$ पुरस्सरण कोण हो, तो

$$\omega_p = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \quad (11.20)$$

चित्र 11.8 ग से हम यह देखते हैं कि

$$\Delta \phi = \frac{\Delta J}{J \sin \theta} = \frac{(\mu B \sin \theta) \Delta t}{J \sin \theta}$$

Δt , से भाग देकर अवकल सीमा की ओर प्रवृत्त होने पर तथा $\omega_p = \frac{d\phi}{dt}$ रखने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\omega_p = \frac{\mu B}{J} \quad (11.21)$$

समीकरण (11.16) से μ/J के मान को प्रतिस्थापित करने पर हमें B की दिशा के चारों ओर परमाण्विक चुंबक के पुरस्सरण के कोणीय चाल का निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होना है :

$$\omega_p = \frac{g e}{2m} B \quad (11.22)$$

यदि समीकरण (11.22) में $g = 1$ हो, तो ω_p को लारमोर आवृत्ति (Larmor frequency) कहा जाता है और यह B के समानुपाती होती है। यहां यह बात ध्यान में रखनी चाहिए कि यह एक क्लासिकल विवरण है।

अब, आपको यह आश्चर्य हो रहा होगा कि यदि परमाण्विक चुंबक (द्विध्रुव) चुंबकीय क्षेत्र के चारों ओर पुरस्सरित होता है, तो इनमें से कितने द्विध्रुव चुंबकीय क्षेत्र की दिशा में संरेखित हो सकते हैं। हम जानते हैं कि आरोपित चुंबकीय क्षेत्र में द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा $U = -\mu \cdot B = -\mu B \cos \theta$ होती है। अतः संरेखित द्विध्रुव की तुलना में असंरेखित द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा अधिक होती है। यदि द्विध्रुव की ऊर्जा को संरक्षित (conserved) रखा जाए, तो क्षेत्र के सापेक्ष इसकी दिशा में परिवर्तन नहीं हो सकता अर्थात् कोण θ का मान अचर बना रहता है। इसलिए यह क्षेत्र के चारों ओर पुरस्सरण करता रहता है। फिर भी, ऊर्जा में हानि के कारण परमाण्विक द्विध्रुव, क्षेत्र के साथ संरेखित हो जाते हैं। एक ठोस वस्तु में द्विध्रुव की ऊर्जा में विभिन्न प्रकार से कमी आ सकती है क्योंकि इसकी ऊर्जा अन्य स्वातंत्र्य-कोटि (degree of freedom) में स्थानांतरित हो जाती है और इस तरह ठोस वस्तु के तापमान के अनुसार, क्षेत्र के साथ यह संरेखित हो जाता है। द्विध्रुव के

अभिविन्यास (orientation) में परिवर्तन लाने के लिए आवश्यक अधिकतम ऊर्जा $2\mu_B$ होती है। यदि μ , लगभग 10^{-23} Am^2 हो और एक प्रबल क्षेत्र, मान लीजिए $5T$, लगाया गया हो, तो स्थितिज ऊर्जा 10^{-22} जूल होगी। इसकी तुलना कमरे के तापमान पर तापीय ऊर्जा KT से की जा सकती है। इस तरह, द्विध्रुवों का एक छोटा अंश ही B के समांतर संरेखित होगा। अगले भाग में सांख्यिकीय यांत्रिकी (statistical mechanics) की सहायता से हम यह दिखाएंगे कि द्विध्रुवों का कितना अंश, B के अनुदिश संरेखित होता है।

चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में, जब पदार्थ में विद्यमान छोटे-छोटे चुंबकीय द्विध्रुव एक निश्चित दिशा के अनुदिश संरेखित होते हैं, तब हम कहते हैं कि पदार्थ चुंबकित या चुंबकीयतः ध्रुवीकृत (magnetically polarised) हो गया है। किसी पदार्थ के चुंबकीय ध्रुवण की अवस्था का निर्धारण सदिश राशि से किया जाता है, जिसे चुंबकन (magnetisation) कहा जाता है। इसे M से प्रकट किया जाता है। इसे प्रति इकाई आयतन में चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण से परिभाषित किया जाता है। यह स्थिरवैद्युतिकी के ध्रुवण P के अनुरूप भूमिका निभाता है। अगले भाग में हम अनुचुंबकों के चुंबकन का व्यंजक भी प्राप्त करेंगे। पर, अध्ययन को आगे बढ़ाने से पहले आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल कीजिए।

बोध प्रश्न 4

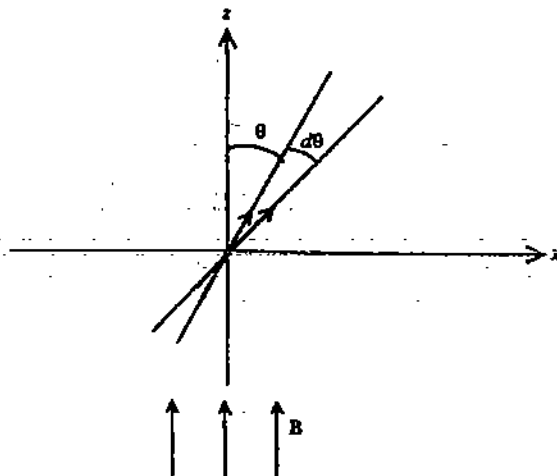
जल में सभी इलेक्ट्रॉन-प्रचक्रण इस तरह संतुलित हो जाते हैं कि उनका नेट चुंबकीय आघूर्ण शून्य होता है, परंतु फिर भी जल के अणुओं में हाइड्रोजन न्यूक्लियस का एक छोटा चुंबकीय आघूर्ण होता है। 1.0 wb m^{-2} के चुंबकीय क्षेत्र में प्रोटॉन (जल के H न्यूक्लियस के रूप में) की प्रारसरण आवृत्ति (precession frequency) 42 MHz होती है। प्रोटॉन का g -गुणक परिकल्पित कीजिए।

11.6 अनुचुंबकों का चुंबकन

बाह्य चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में चुंबकीय आघूर्ण की प्रवृत्ति चुंबकीय क्षेत्र की दिशा में संरेखित होने की होती है। पर, चुंबकीय पदार्थ के एक स्थूल टुकड़े में अणुओं की तापीय ऊर्जा की प्रवृत्ति आपेक्षिक द्विध्रुव आघूर्णों की दिशा को यादृच्छिकीकृत (randomize) करने की होती है। अतः संरेखण की मात्रा, क्षेत्र की प्रबलता और तापमान दोनों पर निर्भर करती है। आइए, हम सांख्यिकीय विधियों को लागू कर मात्रात्मक रूप में आपेक्षिक द्विध्रुवों की संरेखण मात्रा प्राप्त करें।

मान लीजिए T तापमान पर प्रति इकाई आयतन में N चुंबकीय अणु हैं जिनमें से प्रत्येक का चुंबकीय आघूर्ण μ है। क्लासिकल रूप में चुंबकीय द्विध्रुव, क्षेत्र दिशा के साथ कोई भी कोण बना सकता है (चित्र 11.9)। बाह्य क्षेत्र के न होने पर, कोण θ और $\theta + d\theta$ के बीच द्विध्रुवों के होने की प्रायिकता (probability) $2\pi \sin \theta d\theta$ के समानुपाती होती है, जो कि इस कोण परिसर

बोल्ट्जमैन-नियम के अनुसार एक ही हुई अवस्था में अणुओं को ज्ञात करने की प्रायिकता उस अवस्था की कृष्णात्मक स्थितिज ऊर्जा और KT के भागफल के अनुसार चरघातांकीय (exponentially) रूप में परिवर्तित होती है। इस स्थिति में ऊर्जा E उस कोण पर निर्भर करती है जो कि आघूर्ण चुंबकीय क्षेत्र के साथ बनाता है। अतः प्रायिकता $(\exp(-U(\theta)/KT))$ के समानुपाती होगी।



चित्र 11.9: बाह्य चुंबकीय क्षेत्र में पदार्थों के अनुचुंबकीय गुणधर्मों का परिचय

(range of angle) द्वारा अंतरित ठोस कोण $d\omega$ के बराबर है। इस प्रायिकता के अनुसार द्विध्रुवों का शून्य औसत प्राप्त होता है। जब चुंबकीय क्षेत्र B को z -दिशा में लगाया जाता है, तब प्रायिकता बोल्ट्जमां बंटन (Boltzman distribution) $e^{-U/kT}$ के भी समानुपाती हो जाती है। यहां $U = -\mu \cdot B = -\mu B \cos\theta$ द्विध्रुव की चुंबकीय ऊर्जा है यदि यह चुंबकीय क्षेत्र के साथ कोण θ बना रहा हो। K , बोल्ट्जमां नियतांक है और T परम तापमान है।

अतः प्रति इकाई आयतन में उन परमाणुओं (या अणुओं) की संख्या dN , जिनके μ , B के साथ कोण θ और $\theta + d\theta$ बनाते हैं, का मान यह होता है :

$$dN = 2\pi K e^{+\mu B \cos\theta/kT} \sin\theta d\theta \quad (11.23)$$

जहां K एक नियतांक है।

यहां $\mu B/kT$ को हम a मान लें तो प्रति इकाई आयतन में द्विध्रुवों की कुल संख्या यह होगी :

$$N = \int dN = \int_0^\pi 2\pi K e^{+a \cos\theta} \sin\theta d\theta$$

इसमें $\cos\theta = x$, लेने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} N &= 2\pi K \int_{-1}^{+1} e^{+ax} dx \\ &= \frac{2\pi K}{a} (e^a - e^{-a}) \end{aligned} \quad (11.24)$$

B के साथ θ कोण बनाने वाला चुंबकीय द्विध्रुव, पदार्थ की चुंबकन-तीव्रता M में, $\mu \cos\theta$ का योगदान देता है। अतः प्रति इकाई आयतन में स्थित सभी द्विध्रुवों के योगदानों को जोड़ने पर, पदार्थ का चुंबकन यह प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} M &= \int dN \mu \cos\theta \\ &= 2\pi K e^{+\mu B \cos\theta/kT} \mu \cos\theta \sin\theta d\theta \\ &= 2\pi K \int_{-1}^{+1} e^{+ax} x dx \end{aligned}$$

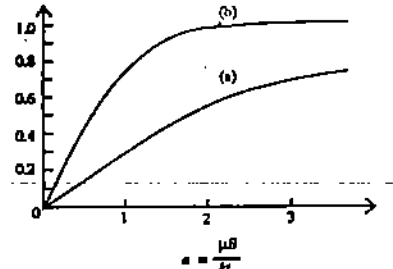
यहां भी हमने $\cos\theta = x$ और $\mu B/kT = a$ लिया है। ऊपर दिए गए समाकल को हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$M = 2\pi K \mu \left[\frac{1}{a} (e^a + e^{-a}) + \frac{1}{a^2} (e^a - e^{-a}) \right]$$

समीकरण (11.24) से प्राप्त $2\pi K$ के मान को इसमें प्रतिस्थापित करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned} M &= \mu N \left(\frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} \right) \\ \therefore M &= M_s \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) \end{aligned} \quad (11.25)$$

जहां $M_s = \mu N$ पदार्थ का संतृप्त चुंबकन (saturation magnetisation) है जब सभी द्विध्रुव चुंबकीय क्षेत्र के अनुदिश संरेखित हो जाते हैं। व्यंजक $\coth a - \frac{1}{a}$ को लैन्गेविन फलन (Langevin function) कहा जाता है और इसे $L(a)$ से प्रकट किया जाता है।



चित्र 11.10: $a = \frac{\mu B}{kT}$ के एक फलन के रूप में एक चुंबकीय क्षेत्र रखे अनुचुंबकीय पदार्थ का चुंबकन। (क) क्लासिकल परिकल्पन पर आधारित है जहां द्विध्रुव की दिशा पर कोई प्रतिबंध नहीं लगा है। (ख) क्वांटम धार्मिक परिकल्पन पर आधारित है जहां द्विध्रुव की दिशा पर प्रतिबंध लगाया गया है।

अब हम दो स्थितियों पर विचार करेंगे : (i) यदि $\frac{\mu B}{kT}$ बहुत बड़ा हो। यह स्थिति तब होगी जब तापमान बहुत कम हो और/ या B बहुत बड़ा हो। तब इस स्थिति में

$$L(a) = \coth a - \frac{1}{a} = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}} - \frac{1}{a} = \frac{1 + e^{-2a}}{1 - e^{-2a}} - \frac{1}{a} \approx 1.$$

अतः $M = M_s$, यह संतृप्ति (saturation) की अवस्था को प्रकट करता है।

(2) यदि $\frac{\mu B}{kT}$ छोटा हो, जिसका अर्थ है कि T बड़ा हो और/ या B छोटा हो। इस स्थिति में $\coth a - \frac{1}{a} = \frac{a}{3}$ और $M = M_s (\mu B / 3 kT) = \mu^2 NB / 3 kT$.

B पर M की पूरी निर्भरता को चित्र 11.10 में दिखाया गया है। तुलनात्मक अध्ययन के लिए क्वांटम यांत्रिक परिकलन पर आधारित B पर M की निर्भरता को भी दिखाया गया है।

बोध प्रश्न 5

समाकल $\int_{-1}^{+1} e^{ax} x dx$ का मान निकालिए।

बोध प्रश्न 6

दिखाइए कि यदि $a = \mu B / kT$ होता हो, तो

$$M = M_s \left(\coth a - \frac{1}{a} \right) = \frac{M_s a}{3}$$

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए, अब हम उसका संक्षिप्त विवरण यहां दे दें।

11.7 सारांश

- सभी पदार्थ किसी न किसी रूप में चुंबकीय होते हैं और चुंबकीय क्षेत्र के साथ अनुक्रिया करते हैं। पदार्थों को मुख्यतः तीन वर्गों में बांटा जा सकता है - प्रतिचुंबकीय, अनुचुंबकीय और लोह-चुंबकीय। उन पदार्थों में प्रतिचुंबकत्व होता है जिनके परमाणुओं में कोई स्थायी चुंबकीय द्विध्रुव नहीं होता। जिन पदार्थों के परमाणुओं में स्थायी चुंबकीय द्विध्रुव होते हैं, उनमें अनुचुंबकत्व और लोह-चुंबकत्व का गुण होता है।
- इलेक्ट्रॉन की कक्षीय गति का संबंध चुंबकीय आघूर्ण μ से होता है जो कि इसके कक्षीय कोणीय संवेग J के समानुपाती होती है। इसे हम इस प्रकार लिखते हैं :

$$\mu = -g \left(\frac{e}{2m} \right) J$$

जहां e , इलेक्ट्रॉन पर आवेश है, m इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान है और g लॉडे g -गुणक है। कक्षीय स्थिति में g का मान ≈ 1 होता है और प्रचक्रण स्थिति में इसका मान ≈ 2 होता है।

- चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण और कोणीय संवेग के अनुपात को घूर्णी चुंबकीय अनुपात (gyromagnetic ratio) कहा जाता है।
- चुंबकीय पदार्थों में चुंबकीय द्विध्रुव, अपनी कक्षाओं में इलेक्ट्रॉनों की परमाण्वीय धाराओं और इनके मूलभूत प्रचक्रणों, के कारण होता है।
- परमाणुओं के चुंबकीय आघूर्ण के परिमाण में हुए परिवर्तन के कारण प्रतिचुंबकत्व होता है

जबकि चुंबकीय आघूर्ण के अभिविन्यास में हुए परिवर्तन के कारण अनुचुंबकत्व होता है।

- क्योंकि चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में चुंबकीय आघूर्ण का सम्बद्ध कोणीय संवेग से होता है, इसलिए परमाणु न केवल चुंबकीय क्षेत्र के अनुदिश घूमता है, बल्कि इसके अनुदिश आवृत्ति $\omega_p = g(e/2m)B$ से पुरस्सरित भी होता है। इस प्रक्रिया को लारमोर पुरस्सरण कहा जाता है।
- जब प्रतिचुंबकीय परमाणु को एक ऐसे बाह्य चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाता है, जिसकी दिशा कक्षा के अभिलंब की ओर होती है, तब क्षेत्र स्वयं की विपरीत दिशा में चुंबकीय आघूर्ण प्रेरित करता है (लेंज नियम)।

$$\Delta \mu = \frac{er^2}{4m} B.$$

जहां r और m क्रमशः कक्षा की त्रिज्या और इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान हैं।

- जब चुंबकीय आघूर्ण μ वाले परमाणुओं को चुंबकीय क्षेत्र B में रखा जाता है, तब चुंबकन M का मान यह होता है :

$$M = M_s (\coth a - 1/a)$$

जहां $a = \frac{\mu B}{kT}$ और $M_s = \mu N$ संतृप्ति चुंबकन है जब सभी द्विध्रुव क्षेत्र की दिशा में संरेखित हो जाते हैं।

11.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. q आवेश और r त्रिज्या वाला एकसमान आवेशित डिस्क एक अचर कोणीय वेग ω से घूर्णन कर रहा है। दिखाइए कि चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण का परिमाण $\frac{1}{4}(\omega q r^2)$ है।
(संकेत: गोले को घूर्णी आवेश वाले पतले वलयों में बांट दीजिए। वह धारा ज्ञात कीजिए जिसके तुल्य प्रत्येक वलय हैं तथा इसका द्विध्रुव आघूर्ण ज्ञात कीजिए। तत्पश्चात् सभी वलयों के लिए इसे समाकलित कीजिए।)
2. चुंबकीय क्षेत्र B के समान मान के लिए पुरस्सरण आवृत्ति और साइक्लोट्रॉन आवृत्ति की तुलना कीजिए।

11.9 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

- 1) क) चुंबकीय द्विध्रुव की स्थितिज ऊर्जा U निम्नलिखित संबंध से प्राप्त होती है :

$$U = \mu \cdot B$$

जहां μ द्विध्रुव आघूर्ण है और B चुंबकीय क्षेत्र है।

क्योंकि U को जूल में और B को टेसला में व्यक्त किया जाता है, इसलिए चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण का मात्रक JT^{-1} होगा।

ख) समीकरण (11.4) से, $\mu = \frac{e}{2m} L$.

$L = \frac{nh}{2\pi}$ (क्योंकि इलेक्ट्रॉन का कोणीय संवेग क्वांटिकृत है)

जहां n एक पूर्णांक है।

अतः $n = 1$ लेने पर द्विध्रुव आघूर्ण का निम्नतम संभव परिमाण यह होता है :

$$\mu_{\min} = \frac{e}{2m} \frac{h}{2\pi} = \frac{1.602 \times 10^{-19} \text{ C}}{2 (9.109 \times 10^{-31} \text{ kg})} \times \frac{6.626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}}{2\pi}$$

या

$$\begin{aligned} \mu_{\min} &= 9.27 \times 10^{-24} \text{ C Js kg}^{-1} \\ &= 9.27 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1} \end{aligned}$$

∴ बोर-मैग्नेटॉन यह होता है : $\frac{eh}{4\pi m} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$

2) क) (i) $g = 1$ (ii) $g = 2$

ख) समीकरण (11.5) यह है :

$$\mu = \frac{e}{m} S$$

अतः $9.27 \times 10^{-24} \text{ A m}^2 = \frac{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}}{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}} \times S$

जिससे कि

$$\begin{aligned} S &= \frac{9.1 \times 10^{-31} \text{ kg} \times 9.27 \times 10^{-24} \text{ A m}^2}{1.6 \times 10^{-19} \text{ C}} \\ &= \frac{9.1 \times 9.27}{1.6} \times 10^{-36} \frac{\text{A kg m}^2}{\text{C}} \\ &= 52.72 \times 10^{-36} \text{ Js} \\ &= 0.5272 \times 10^{-34} \text{ Js} \end{aligned}$$

लेकिन प्रचरण कोणीय संवेग $S \frac{\hbar}{2}$ के बराबर है, इसलिए

$$\frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi} = 0.5272 \times 10^{-34} \text{ JS}$$

या $h = 4 \times 3.142 \times 0.5272 \times 10^{-34} \text{ JS}$
 $= 6.626 \times 10^{-34} \text{ JS}$

जो कि वास्तव में प्लांक-नियतांक का मान है।

3) क) तांबा कुछ प्रतिचुंबकीय होता है
 बिस्मथ, चांदी-प्रतिचुंबकीय
 एल्युमिनियम और सोडियम-अनुचुंबकीय

ख) नहीं। क्योंकि प्रतिचुंबकीय पदार्थ में अंतर्निहित चुंबकीय द्विध्रुव नहीं होता और अनुचुंबकीय पदार्थों में चुंबकीय द्विध्रुव होते हैं, इसलिए इन पदार्थों का मिश्रघात अंतर्निहित द्विध्रुवों वाला पदार्थ होगा। इस प्रकार के पदार्थ में अनुचुंबकत्व का गुणघर्म होता है जो मिश्रघात के दोनों घटकों के प्रतिचुंबकत्व से अधिक प्रबल होता है।

सूत्र यह है

$$\omega_p = g \frac{e}{2m} B,$$

लेकिन $2\pi f_p = \omega_p$

अतः

$$g = 2\pi f_p \times \frac{2m}{e} \times \frac{1}{B}$$

अब,

$$2\pi f_p = 2 \times 3.14 \times 42 \times 10^6 \text{ s}^{-1} = 263.93 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$$

$$\begin{aligned} \text{प्रोटॉन के लिए, } \frac{2m}{e} &= \frac{2 \times 1860 \times 9.1 \times 10^{-31}}{1.6 \times 10^{-19}} \text{ kg C}^{-1} \\ &= 21.15 \times 10^{-9} \text{ kg C}^{-1} \end{aligned}$$

दिया हुआ है, $\frac{1}{B} = 1 \text{ wb}^{-1} \text{ m}^2$

ऊपर दिए गए सूत्र का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है:

$g = 5.584$ जो कि प्रोटॉन का g -गुणक है।

5) खंडशः समाकलन करने पर

$$\begin{aligned} \int x e^{ax} dx &= \frac{x e^{ax}}{a} - \int \frac{e^{ax}}{a} dx \\ &= \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{1}{a} \frac{e^{ax}}{a} = \frac{x e^{ax}}{a} - \frac{e^{ax}}{a^2} \\ \int_{-1}^{+1} x e^{ax} dx &= \left[\frac{x e^{ax}}{a} \right]_{-1}^{+1} - \left[\frac{1}{a^2} e^{ax} \right]_{-1}^{+1} = \frac{1}{a} (e^{+a} + e^{-a}) - \frac{1}{a^2} (e^a - e^{-a}) \end{aligned}$$

6) $\coth a = \frac{e^a + e^{-a}}{e^a - e^{-a}}$

$$e^a = 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots \quad e^{-a} = 1 - a + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots$$

अतः

$$e^a + e^{-a} = 2 \left(1 + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} + \dots \right) = 2 \left(1 + \frac{a^2}{2!} \right)$$

$$e^a - e^{-a} = 2 \left(a + \frac{a^3}{3!} + \dots \right) = 2a \left(1 + \frac{a^2}{3!} \right)$$

जिससे कि

$$\begin{aligned}\coth a &= \frac{1 + \frac{a^2}{2}}{a \left(1 + \frac{a^2}{6}\right)} \approx \frac{1}{a} \left(1 + \frac{a^2}{2}\right) \left(1 - \frac{a^2}{6}\right) \\ &= \frac{1}{a} \left(1 + \frac{a^2}{3} - \frac{a^4}{12}\right) \approx \frac{1}{a} + \frac{a}{3}\end{aligned}$$

इसलिए

$$\coth a \frac{1}{a} = \frac{a}{3} \quad \text{और} \quad M = M_s a/3$$

अंत में कुछ प्रश्न

- 1) पृष्ठ आवेश घनत्व का मान $\frac{q}{\pi r^2}$ है।

डिस्क को अनेक वलयों का बना माना जा सकता है। आइए हम त्रिज्या R और चौड़ाई dR वाला एक वलय लें। इस वलय में आवेश का मान यह होगा :

$$dQ = \frac{q}{\pi r^2} (2\pi R dR) = \frac{2q}{r^2} (R dR)$$

इस वलय में प्रवाहित धारा का मान आवेश और घूर्णन के आवर्तकाल के भागफल के बराबर होता है :

$$dI = \frac{dQ}{(2\pi/\omega)} = \frac{q\omega}{\pi r^2} (R dR)$$

इस वलय द्वारा प्राप्त चुंबकीय आघूर्ण का परिमाण यह है:

$$d\mu = adI$$

जहां a , वलय का क्षेत्रफल है।

इसलिए

$$d\mu = \pi R^2 dI = \frac{q\omega}{r^2} (R^3 dR)$$

सभी वलयों (0 से r त्रिज्याओं वाले वलय) को लेने पर हमें चुंबकीय आघूर्ण का निम्नलिखित परिमाण प्राप्त होता है :

$$\mu = \int d\mu = \int_{R=0}^{R=r} \frac{q\omega}{r^2} (R^3 dR)$$

$$= \frac{q\omega}{r^2} \left[\frac{R^4}{4} \right]_0^r$$

$$= \frac{q\omega}{r^2} \times \frac{1}{4} \times r^4 = \frac{1}{4} q\omega r^2$$

- 2) एक चुंबकीय क्षेत्र में प्रोटॉन की पुरस्सरण-आवृत्ति यह होती है :

$$\omega_p = \frac{\mu B}{J} = \frac{q}{2m_p} B$$

(क्योंकि $\frac{\mu}{J} = \frac{q}{2m_p}$, जहाँ q आवेश है और m_p प्रोटॉन का द्रव्यमान है)

साइक्लोट्रॉन आवृत्ति यह है :

$$\omega_L = \frac{qB}{2\pi m}$$

$$\therefore \frac{\omega_p}{\omega_L} = \frac{qB}{2m} \times \frac{2\pi m}{qB} = \pi$$

11.10 शब्दावली

अनुक्रिया	response
अनुचुंबकत्व	paramagnetism
अभिविन्यास	orientation
घूर्णचुंबकीय	gyromagnetic
चुम्बकन	magnetisation
द्विध्रुव	dipole
पुरस्सरण	precession
प्रचक्रण	spin
प्रतिचुंबकत्व	diamagnetism
लोह चुंबकत्व	ferromagnetism

इकाई 12 पदार्थों का चुंबकत्व - II

इकाई की रूपरेखा

- 12.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 12.2 लोह-चुंबकत्व
- 12.3 चुंबकित पदार्थ के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र
- 12.4 सहायक क्षेत्र H (चुंबकीय तीव्रता)
- 12.5 चुंबकीय पदार्थ में B और H के बीच संबंध
- 12.6 चुंबकीय परिपथ
- 12.7 सारांश
- 12.8 अंत में कुछ प्रश्न
- 12.9 हल और उत्तर
- 12.10 शब्दावली

12.1 प्रस्तावना

इस पाठ्यक्रम के खंड 2 में आपने बाह्य विद्युत-क्षेत्रों के अनुक्रिया (response) के फलस्वरूप उत्पन्न पराविद्युत पदार्थों के व्यवहार का अध्ययन किया। उसके अंतर्गत उन पदार्थों में विद्यमान प्राकृतिक और प्रेरित दोनों ही प्रकार के विद्युत-द्विध्रुवों एवं विद्युत-क्षेत्र में उनके पंक्तिबद्धता (lining up) के आधार पर उनके गुणधर्मों की जांच की गई है। इन पदार्थों के स्थूल गुणधर्मों (macroscopic properties) का अध्ययन ध्रुवण सदिश P -प्रति इकाई आयतन में विद्यमान विद्युत-द्विध्रुव आघूर्ण के आधार पर किया गया।

पदार्थों के चुंबकीय गुणधर्मों को भी इसी प्रकार की व्याख्या द्वारा समझा जा सकता है यद्यपि मुक्त चुंबकीय एकध्रुवों के न होने से वह अधिक जटिल रूप में होती है। इन पदार्थों में चुंबकीय द्विध्रुवों को ऐम्पियरी धारा लूपों (Amperian Current loops) के रूप में समझा जा सकता है जिसे सबसे पहले ऐम्पियर ने प्रस्तुत किया था।

एक अर्थ में सभी पदार्थ चुंबकीय होते हैं तथा भिन्न-भिन्न प्रकार के और भिन्न तीव्रताओं के चुंबकीय गुणधर्म प्रदर्शित करते हैं। जैसा कि आप जानते हैं, सभी पदार्थों को तीन मुख्य वर्गों में विभाजित किया जा सकता है, (i) प्रतिचुंबकीय (diamagnetic), (ii) अनुचुंबकीय (paramagnetic), और (iii) लोह-चुंबकीय (ferromagnetic)। इस इकाई में इन पदार्थों के स्थूल व्यवहार का अध्ययन किया जाएगा।

हमने पराविद्युत पदार्थों के स्थूल गुणधर्मों का अध्ययन करते समय इस तथ्य का उपयोग किया था कि इन पदार्थों के अणुओं और परमाणुओं में इलेक्ट्रॉन होते हैं जो गतिशील होते हैं और इन पदार्थों में विद्यमान प्राकृतिक और प्रेरित विद्युत-द्विध्रुवों के लिए उत्तरदायी होते हैं। इन पदार्थों का ध्रुवण, इन द्विध्रुवों के संरेखण (alignment) का सकल प्रभाव होता है। इसी प्रकार हम विभिन्न पदार्थों के चुंबकीय गुणधर्मों का वर्णन इन पदार्थों में स्थित चुंबकीय द्विध्रुवों के आधार पर करते हैं।

इकाई 11 में चुंबकीय द्विध्रुवों के आधार पर प्रति-चुंबकत्व और अनुचुंबकत्व की व्याख्या की जा चुकी है। इन इकाई में पहले लोह-चुंबकत्व के उद्गम का उल्लेख किया जाएगा। बाद में चुंबकीय पदार्थ के स्थूल गुणधर्मों का वर्णन किया जाएगा।

इकाई 12 के साथ ही हम चुंबकत्व का अध्ययन समाप्त करते हैं। आगामी खंड में उन स्थितियों पर विचार किया जाएगा जिनमें समय के साथ विद्युत क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र दोनों में परिवर्तन होता

है। इसके फलस्वरूप अंत में चार अवकल समीकरण प्राप्त होंगे जिन्हें मैक्सवेल-समीकरण कहते हैं।

पदार्थों का चुंबकत्व-II

उद्देश्य

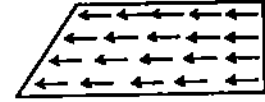
इस इकाई के अध्ययन के बाद आप,

- लोह-चुंबकत्व, ऐम्पियरी धारा, चुंबकन (magnetisation), चुंबकीय तीव्रता H , चुंबकीय प्रवृत्ति (magnetic susceptibility), चुंबकशीलता (magnetic permeability), आपेक्षिक चुंबकशीलता जैसे शब्दों को समझकर उनकी व्याख्या कर सकेंगे,
- चुंबकन M (जिसे प्रयोग द्वारा माप सकते हैं) और पदार्थ में परमाणु-धाराओं (जिन्हें नहीं माप सकते) के बीच संबंध स्थापित कर सकेंगे,
- M और H के लिए अवकल-समीकरण और समाकल समीकरणों की व्युत्पत्ति कर उन्हें समझ सकेंगे और उनकी सहायता से साधारण स्थितियों के लिए क्षेत्र परिकलित कर सकेंगे,
- B, H, M, μ_0, μ और χ के परस्पर संबंध को स्थापित कर सकेंगे,
- अनेक चुंबकीय और अचुंबकीय पदार्थों के लिए B और H के बीच संबंध स्थापित कर सकेंगे, और
- चुंबकीय परिपथ के लिए ओम-नियम के अनुरूप समीकरण की व्युत्पत्ति कर सकेंगे।

12.2 लोह-चुंबकत्व

लोह-चुंबकीय पदार्थ उन पदार्थों को कहते हैं जो चुंबकीय क्षेत्रों की उपस्थिति में तीव्र अनुक्रिया करते हैं, ऐसे पदार्थों में परमाणुओं का चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण, अयुग्मित (unpaired) इलेक्ट्रॉनों के चक्रणों (spins) के कारण उत्पन्न होता है। वे एक-दूसरे के समांतर पंक्तिबद्ध हो जाते हैं। यह पंक्तिबद्धता, पूरे पदार्थ में न होकर एक छोटे आयतन में ही होती है, जिसे डोमेन (domain) कहते हैं, जैसा कि चित्र 12.1 में दिखाया गया है। किन्तु ये आयतन परमाण्विक और आण्विक विमाओं की तुलना में बड़े होते हैं। इस प्रकार की पंक्तिबद्धता बाह्य चुंबकीय क्षेत्र की अनुपस्थिति में भी होती है। आपको यह आश्चर्य हो रहा होगा कि वे कौन-से बल हैं, जिनके कारण विभिन्न परमाणुओं के प्रचक्रण चुंबकीय आघूर्ण (spin magnetic moment) एक-दूसरे के समांतर पंक्तिबद्ध हो जाते हैं। इसकी व्याख्या केवल "विनिमय बलों" (exchange forces), जो कि एक क्वांटम यांत्रिक धारणा है, द्वारा की जा सकती है। यहां विनिमय बलों की विस्तृत चर्चा नहीं की जाएगी। उसका अध्ययन आप भौतिकी के अन्य पाठ्यक्रमों में करेंगे किन्तु उनके बारे में कुछ जानकारी हाशिये की टिप्पणी में दी गई है।

किसी अचुंबकित लोह-चुंबकीय पदार्थ में विभिन्न डोमेन (domains) के चुंबकीय आघूर्ण यादृच्छिक रूप से अभिविन्यस्त रहते हैं और कुल मिलाकर पदार्थ का नेट चुंबकीय आघूर्ण शून्य होता है, जैसा कि चित्र में 12.2 में दिखाया गया है। किन्तु बाह्य चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में डोमेनों के चुंबकीय आघूर्ण इस प्रकार पंक्तिबद्ध हो जाते हैं कि पदार्थ का नेट चुंबकीय आघूर्ण क्षेत्र की दिशा

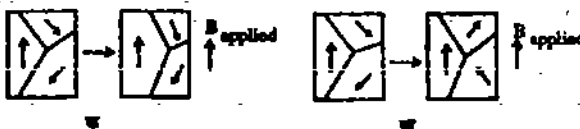


चित्र 12.1: डोमेन

माना एक-दूसरे के समीप स्थित परमाणुओं में दो इलेक्ट्रॉन हैं। यदि इलेक्ट्रॉन-प्रचक्रण समांतर हों, तो पाउली सिद्धांत के कारण वे एक-दूसरे से दूर रहते हैं जिससे उनकी प्रतिकर्षण (repulsion) की कुलोंम ऊर्जा कम हो जाती है। दूसरी ओर यदि ये प्रचक्रण प्रति-समांतर हों, तो इलेक्ट्रॉन एक-दूसरे के नजदीक आ सकते हैं और उनकी कुलोंम ऊर्जा अधिक होती है। इस प्रकार प्रचक्रणों को समांतर बनाकर इलेक्ट्रॉन अपनी ऊर्जा कम कर देते हैं।



चित्र 12.2: अचुंबकित लोह-चुंबक में डोमेन। प्रत्येक डोमेन में तीर के विमान चुंबकीय आघूर्ण के संरचना-दिशा को प्रदर्शित करते हैं।

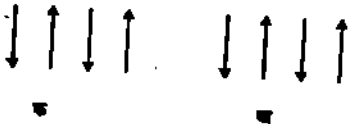


चित्र 12.3: किसी लोह-चुंबकीय पदार्थ में नेट चुंबकीय आघूर्ण में होने वाले डोमेन-परिवर्तन (क) डोमेन-वृद्धि और (ख) डोमेन-संरचना, द्वारा होते हैं।

की ओर इंगित करता है। इस क्रियाविधि के अंतर्गत अनुकूल दिशाओं में चुंबकीय आघूर्ण वाले डोमेनों का आकार बढ़ जाता है जबकि वे डोमेन जो बाह्य चुंबकीय क्षेत्र के प्रतिकूल अभिविन्यस्त रहते हैं, वे आकार में घट जाते हैं, जैसा कि चित्र 12.3 (क) में दिखाया गया है। इसके अलावा संपूर्ण डोमेनों के चुंबकीय आघूर्णों का घूर्णन हो सकता है, जैसा कि चित्र 12.3 (ख) में दिखाया गया है। इस प्रकार पदार्थ चुंबकित हो जाता है। इसके बाद यदि बाह्य चुंबकीय क्षेत्र को घटाकर शून्य कर दिया जाय तो भी पदार्थ में चुंबकत्व की पर्याप्त मात्रा शेष रह जाती है और पदार्थ स्थायी रूप से चुंबकित हो जाता है। परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्रों की उपस्थिति में लोह-चुंबकीय पदार्थों का व्यवहार अत्यंत जटिल होता है और शैथिल्य (hysteresis) की परिघटना प्रदर्शित करता है। शैथिल्य का शाब्दिक अर्थ है – पीछे रह जाना। इसकी चर्चा भाग 12.5 में की जाएगी।

एक निश्चित ताप से अधिक ताप पर, जब तापीय विक्रम बल (forces of thermal agitation), "विनियम" बलों पर प्रभावी हो जाते हैं, तो डोमेन अपने द्विध्रुव आघूर्णों को खो देते हैं और परिणामस्वरूप लोह-चुंबकीय पदार्थ अनुचुंबकीय पदार्थ की भांति व्यवहार करने लगता है। इस निश्चित ताप को "क्यूरी ताप" (Curie temperature) कहते हैं। पदार्थ को ठंडा करने पर वह पुनः लोह-चुंबकीय हो जाता है।

अंत में हम संक्षेप में दो अन्य प्रकार के चुंबकत्व का उल्लेख करते हैं जिनका लोह चुंबकत्व से घनिष्ठ संबंध है। ये हैं : प्रतिलोह चुंबकत्व (antiferromagnetism) और फेरी चुंबकत्व (ferrimagnetism) जिसे फेरिट (Ferrite) भी कहते हैं। इस पाठ्यक्रम में प्रतिलोह चुंबकत्व और फेरी चुंबकत्व की भौतिकी का विस्तृत अध्ययन नहीं किया जाएगा। इन पदार्थों का उल्लेख करने का मुख्य कारण यह है कि इनका प्रौद्योगिकी में अत्यंत महत्व है और इनका उपयोग चुंबकीय रिकार्डिंग टेपों, ऐन्टीना और कंप्यूटर-स्मृति (computer-memory) में किया जाता है।



चित्र 12.4: (क) प्रतिलोह चुंबकीय पदार्थ एवं (ख) फेरिट में इलेक्ट्रॉन प्रचक्रणों का आपेक्षिक-अभिविन्यास

प्रतिलोह चुंबकीय पदार्थों में, पूर्व उल्लिखित विनियम-बल, संलग्न परमाणुओं के समान चुंबकीय आघूर्णों को प्रति-समांतर संरेखण में सेट करने का काम करते हैं। अर्थात् संलग्न चुंबकीय आघूर्ण, विपरीत दिशाओं में सेट हो जाते हैं, जैसा कि चित्र 12.4 (क) में दिखाया गया है। ऐसे पदार्थ, अपने में विद्यमान चुंबकत्व का बहुत कम अथवा कोई भी प्रमाण प्रदर्शित नहीं करते हैं। किन्तु यदि इन पदार्थों को नील-ताप (Neel Temperature) से अधिक ताप तक गरम किया जाए तो विनियम बल का प्रभाव समाप्त हो जाता है और पदार्थ किसी भी अन्य अनुचुंबकीय पदार्थ की भांति व्यवहार करने लगता है।

फेरी चुंबकीय पदार्थों में (जिन्हें सामान्यतया फेरिट कहते हैं), विनियम-युग्मन (exchange coupling), पदार्थ में मौजूद परमाणुओं के चुंबकीय आघूर्णों को एक विशेष पैटर्न में व्यवस्थित कर देता है, जैसा कि चित्र 12.4 (ख) में दिखाया गया है। इस प्रकार के संरेखण का बाहरी प्रभाव लोह-चुंबकत्व और प्रतिलोह चुंबकत्व के मध्यवर्ती का होता है। इन पदार्थों में भी एक निश्चित ताप के ऊपर विनियम युग्मन का प्रभाव समाप्त हो जाता है।

इस प्रकार हम देखते हैं कि पदार्थों में चुंबकत्व का कारण उनमें स्थायी (और प्रेरित) चुंबकीय द्विध्रुवों का विद्यमान होना है। इन पदार्थों में चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्णों का कारण है – परिसंचारी (circulating) विद्युत धाराएं जिन्हें परमाण्विक और आण्विक स्तरों पर ऐम्पियरी धाराएं कहते हैं। यह अपेक्षा की जाती है कि किसी पदार्थ में चुंबकत्व और ऐम्पियरी धाराओं के बीच सही संबंध की जानकारी आपको होनी चाहिए। इसी के साथ ही चुंबकीय क्षेत्रों में चुंबकीय पदार्थों के व्यवहार और विद्युत-क्षेत्रों में परावैद्युतों (और चालकों) के व्यवहार में परस्पर मूल अंतर (और कभी-कभी समानताओं) का ज्ञान भी आपको होना चाहिए।

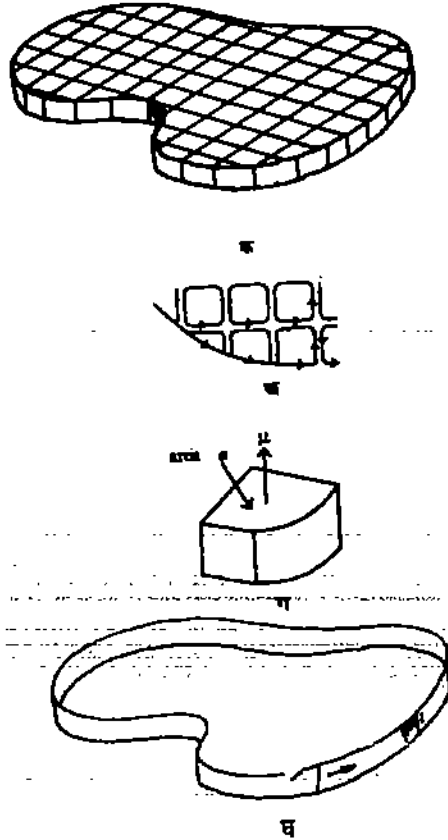
यद्यपि वैद्युत घटनाओं में अनुचुंबकीय और लोह-चुंबकीय पदार्थों की भौतिकी के समतुल्य देखने को मिलते हैं, किन्तु प्रतिचुंबकत्व, केवल चुंबकत्व की ही विशेषता है। छात्रों को सलाह दी जाती है कि वे इस इकाई की पाठ्य सामग्री को पढ़ने के बाद परावैद्युत पर लिखी गई इकाइयों को पढ़ें और उसके आधार पर अनुरूपताओं और भिन्नताओं (यदि कोई हों) के बारे में जानकारी प्राप्त करें। आगामी भाग में स्थूल राशि M (जिसे प्रयोग द्वारा माप सकते हैं) और पदार्थ में मौजूद परमाण्विक धाराओं (जो सूक्ष्म राशि हैं तथा जिसे मापा नहीं जा सकता है) के बीच संबंध ज्ञात करेंगे। इस

संबंध की सहायता से उस चुंबकीय क्षेत्र को ज्ञात किया जा सकता है जिसे स्वयं चुंबकित पदार्थ उत्पन्न करता है।

12.3 चुंबकीय पदार्थ के कारण उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र

इकाई 5 में परावैद्युत पदार्थों के स्थूल गुणधर्मों का उल्लेख ध्रुवण (polarization) सदिश, P , के रूप में किया गया था। ध्रुवण सदिश की उत्पत्ति, पदार्थ में प्राकृतिक अथवा प्रेरित वैद्युत द्विध्रुवों के द्विध्रुव-आघूर्णों से होती है। चुंबकीय पदार्थों के अध्ययन के लिए भी इसी प्रकार की प्रक्रिया अपनाई जाएगी। आप यह कह सकते हैं कि चुंबकीय पदार्थों के लिए उन सभी समीकरणों का उपयोग हो सकता है जो परावैद्युतों के अध्ययन के दौरान प्राप्त हुए थे। यदि ऐसा होता है, तो विद्युत क्षेत्र सदिश E को B द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं तथा उसके पश्चात् P को उसके अनुरूप-चुम्बकन सदिश (magnetization vector) M द्वारा प्रतिस्थापित करते हैं। M , प्रति इकाई आयतन में विद्यमान चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण होता है। इसके बाद ध्रुवण आवेश घनत्व ρ_p को चुंबकीय आवेश घनत्व ρ_m द्वारा प्रतिस्थापित करेंगे चाहे इसका अर्थ कुछ भी हो। इस प्रकार $\nabla \cdot P = -\rho_p$ की भांति हम $\nabla \cdot M = -\rho_m$ लिखेंगे। वास्तव में लोगों ने कुछ इसी तरह किया और विश्वास किया कि चुंबकीय आवेश अथवा एकध्रुव (monopole) का अस्तित्व होता है। इसी पूर्व धारणा के आधार पर उन्होंने विद्युत चुंबकत्व के पूरे सिद्धांत की रचना की है। अपितु हम जानते हैं कि दीर्घकालीन अनुसंधान के बावजूद अभी तक किसी भी प्रयोग में चुंबकीय आवेशों अथवा एकध्रुवों की पहचान नहीं हो पाई है। अब हमें ज्ञात है कि पदार्थ का चुम्बकन पदार्थों के अणुओं में परिसंचारी धाराओं के कारण होता है। यह विचार आरंभ में ऐम्पियर ने प्रस्तुत किया था इसलिए इन परिसंचारी धाराओं को ऐम्पियरी धारा लूप कहते हैं। इन धाराओं के उत्पन्न होने का कारण परमाणुओं में इलेक्ट्रॉनों की कक्षीय गति अथवा उनका प्रचक्रण है। चलन धाराओं (conduction current) की भांति इन धाराओं द्वारा, चुंबकीय पदार्थों में, बड़े पैमाने में आवेश का परिवहन नहीं होता है। इन धाराओं को चुम्बकन धारा भी कहते हैं। हम इन धाराओं का चुम्बकन सदिश M के साथ संबंध स्थापित करेंगे।

आइये, एकसमान रूप से चुंबकित किसी पदार्थ की बनी एक सिल्ली (slab) लें, जैसाकि चित्र 12.5 (क) में दिखाया गया है।



चित्र 12.5: (क) एकसमान रूप से चुंबकित पदार्थ की पतली सिल्ली, जिसमें द्विध्रुव बहुत छोटे धारा-लूप (ख) और (ग) द्वारा व्यक्त किए गए हैं, सीमा के चारों ओर प्रवाहित हो रही धारा I (घ) के मुख्य होती है।

इसमें पूरे आयतन में, समान रूप से वितरित बड़ी संख्या में परमाण्विक चुंबकीय द्विध्रुव हैं जो एक ही दिशा की ओर संकेत करते हैं। यदि प्रत्येक द्विध्रुव का चुंबकीय आघूर्ण μ हो तो चुम्बकन M का मान, μ और प्रति इकाई आयतन में अभिविन्यस्त द्विध्रुवों की संख्या का गुणनफल होता है। आपको ज्ञात होगा कि द्विध्रुवों को अल्प धारा-लूपों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। माना कि सिल्ली में अनेक अल्प-धारा-लूप हैं, जैसाकि चित्र 12.5 (ख) में दिखाया गया है। आइये, एक अल्प धारा-लूप पर विचार करें जिसके क्षेत्रफल a है और जिसे चित्र 12.5 (ग) में दिखाया गया है। इसके द्विध्रुव आघूर्ण μ को चुम्बकन M के रूप में इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\mu = Madz \quad (12.1)$$

जिसमें dz सिल्ली की मोटाई है।

यदि अल्प लूप में परिसंचारी धारा I हो, तो अल्प लूप के द्विध्रुव आघूर्ण को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\mu = Ia \quad (12.2)$$

समीकरण (12.1) और (12.2) को बराबर करने पर,

$$M = \frac{I}{dz} \text{ or } I = Mdz. \quad (12.3)$$

यहां हमने यह माना है कि चुंबकीय द्विध्रुवों के संगत धारा-लूप आकार में बहुत बड़े हैं, इसलिए दो संगलन लूपों की चुम्बकन में बहुत अधिक अंतर नहीं होता है। इसलिए समीकरण (12.3) से प्रदर्शित होता है कि चित्र 12.5 (ख) के सभी धारा-लूपों में समान धारा प्रवाहित होती है। ध्यान दें कि सिल्ली के अंदर, विभिन्न लूपों में प्रवाहित होने वाली धाराएं निरस्त (cancel) हो जाती हैं, क्योंकि यदि किसी एक दिशा में धारा प्रवाहित हो रही है तो उसके ठीक विपरीत दिशा में भी एक अन्य सतत धारा प्रवाहित हो रही होती है। सिल्ली की सीमा पर निरस्त करने के लिए कोई संलग्न लूप नहीं होती है। अतः यह सिल्ली एक धारा-लूप के तुल्य होती है जिसमें धारा, I , सिल्ली के सीमा के चारों ओर प्रवाहित होती है जैसाकि चित्र 12.5 (घ) में दिखाया गया है।

इसलिए चुंबकित पदार्थ की पतली सिल्ली एक धारा-लूप के तुल्य होती है जिसमें धारा Mdz प्रवाहित हो रही हो। अतः सिल्ली के बाहर स्थित किसी भी बिन्दु पर चुंबकीय क्षेत्र का मान उतना ही होगा जितना कि धारा Mdz द्वारा उत्पन्न होता है।

यदि पदार्थ का असमान चुम्बकन हुआ हो, तो पदार्थ के अंदर सभी स्थानों पर ऐम्पियरी परिसंचारी धारा लूपों में परमाण्विक धाराओं का मान समान नहीं होता है। अतः स्पष्ट है कि ऐसे पदार्थों के अंदर धारायें एक-दूसरे को निरस्त नहीं कर पाती हैं। किन्तु फिर भी, हम पाते हैं कि चुंबकित पदार्थ, धारा विरतण $J = \text{curl } M$ के तुल्य होता है। आइये, ज्ञात करें कि यह संबंध कैसे प्राप्त हुआ ?

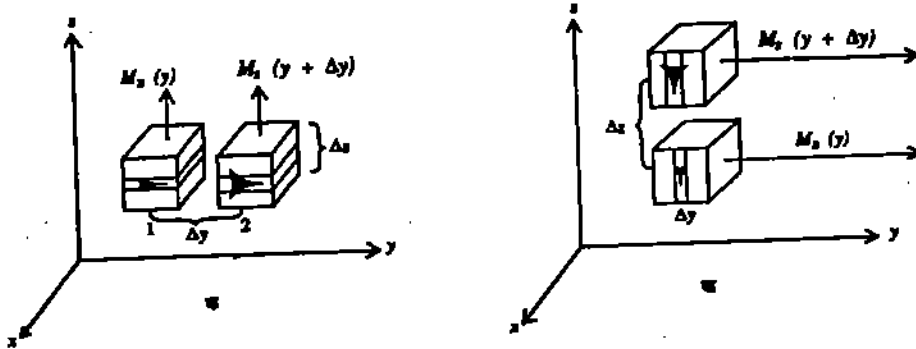
माना, असमान रूप से चुंबकित पदार्थ में दो छोटे ब्लॉक हैं जिनमें से प्रत्येक का आयतन $\Delta x \Delta y \Delta z$ है। वे घनाकार हैं और y -अक्ष पर एक-दूसरे के निकट स्थित हैं (देखिये चित्र 12.6 क)। माना इन ब्लॉकों का नाम 1 और 2 है। माना इन ब्लॉकों में M का z -घटक क्रमशः $M_x(y)$ और $M_x(y + \Delta y)$ हैं।

माना ब्लॉक "1" के चारों ओर $I(1)$ ऐम्पियर की धारा तथा ब्लॉक "2" के चारों ओर $I(2)$ धारा प्रवाहित हो रही है। समीकरण (12.3) का उपयोग करते हुए और चित्र 12.6 (क) की सहायता लेते हुए, हम लिख सकते हैं कि :

$$I_x(1) = M_x(y) \Delta z$$

तथा
$$I_x(2) = M_x(y + \Delta y) \Delta z$$

दो ब्लॉकों के अंतरपृष्ठ पर दो धाराओं के योगदान से कुल धारा इस प्रकार प्राप्त होगी: ब्लॉक 1 द्वारा उत्पन्न ऋणात्मक x -दिशा में प्रवाहित होने वाली धारा $I(1)$ और ब्लॉक 2 द्वारा उत्पन्न धनात्मक x -दिशा में प्रवाहित होने वाली धारा $I(2)$ । धनात्मक x -दिशा में प्रवाहित होने वाली नेट धारा इस प्रकार होगी :



चित्र 12.6: चुम्बकित पदार्थ के दो संलग्न ब्लॉक, (क) में बाईं ओर और (ख) में ऊपर की ओर के बड़े तीर उस बिन्दु पर के अधिक चुम्बकन को व्यक्त करते हैं। जिस पृष्ठ पर वे मिलते हैं, वहाँ नेट धारा x-दिशा में होती है।

$$I_x(2) - I_x(1) = [M_z(y + \Delta y) - M_z(y)] \Delta z$$

अथवा
$$\Delta I_x = + \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \Delta z \quad (12.4)$$

M के z-घटक के रूप में, पदार्थ के x-अक्ष के किसी बिन्दु पर नेट धारा को समीकरण (12.4) की सहायता से प्राप्त किया जा सकता है। x-दिशा में, प्रति इकाई क्षेत्रफल में प्रवाहित धारा अर्थात् धारा घनत्व का मान निम्नलिखित है :

$$(J_m)_x = \frac{\Delta I_x}{\Delta y \Delta z}$$

जहाँ $\Delta y \Delta z$, ΔI_x धारा के लिए किसी भी ब्लॉक के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल है। इसलिए,

$$(J_m)_x = + \frac{\partial M_z}{\partial y} \quad (12.5)$$

उपर्युक्त समीकरणों में धाराओं के साथ x अंतर्सर्ग लगा है जो बत... ब्लॉकों के अंतरापृष्ठ पर धारा x-अक्ष की ओर प्रवाहित हो रही है।

x-दिशा में प्रवाहित हो रही धारा को ज्ञात करने की एक अन्य विधि भी है। इसमें y-अक्ष पर एक-दूसरे के ऊपर दोनों ब्लॉकों को लिया जाता है, जैसाकि चित्र 12.6 (ख) में दिखाया गया है। तब हमें इस प्रकार का संबंध प्राप्त होता है :

$$(J_m)_x = - \frac{\partial M_y}{\partial z} \quad (12.6)$$

इन-दो-स्थितियों के अध्यारोपण-से,

$$(J_m)_x = \frac{\partial M_z}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial z} = (\nabla \times M)_x \quad (12.7)$$

स्पष्ट है कि समीकरण (12.7), J_m और M के कर्ल को संबंधित करने वाले सदिश समीकरण का x-घटक है। इस y और z घटकों के साथ संयुक्त करने पर, हमें यह प्राप्त होता है :

$$J_m = \nabla \times M \quad (12.8)$$

यदि पहले ब्लॉक में चुम्बकन $M(x, y, z)$ हो, तो दूसरे ब्लॉक में चुम्बकन का मान यह होगा:

$$M(x, y, z) + \frac{\partial M}{\partial y} \Delta y + \text{उच्चतर कोटि पर}$$

$I_x(1)$ के रूप में पहले ब्लॉक के चुम्बकन के z-घटक को इस प्रकार लिख सकते हैं:

$$M_z \Delta z = I_x(1)$$

उसी प्रकार दूसरे ब्लॉक के चुम्बकन के z-घटक को इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$\left(M_z + \frac{\partial M_z}{\partial y} \Delta y \right) \Delta z = I_x(2)$$

यहाँ उच्चतर कोटि पदों को नहीं लेते हैं क्योंकि प्रत्येक ब्लॉक के बहुत छोटे होने पर वे लुप्त हो जाते हैं।

समीकरण (12.8) अधिक व्यापक व्यंजक है जो चुम्बकन और तुल्य धारा (equivalent current) के परस्पर संबंध को दर्शाता है। समीकरण (12.8) से ज्ञात होता है कि एकसमान रूप से चुंबकीय पदार्थ के अंदर, $J_m = 0$ होता है यदि $M =$ स्थिरांक हो तो यह सत्य है। देखिये समीकरण (12.8), धारा केवल पदार्थ के पृष्ठ पर है जहां चुम्बकन में असांतत्य (discontinuity) है (M का मान परिमित से शून्य हो जाता है)। असमान रूप से चुंबकित पदार्थ के अंदर J_m का मान शून्येतर (non-zero) होता है।

आगामी भाग में हम देखेंगे कि उपरोक्त समीकरणों में J_m , जिसे पदार्थ में चुम्बकन के उद्गम की व्याख्या करने के लिए परिभाषित किया है, के स्थान पर चालन धारा घनत्व का अस्तित्व होता है, जो कि वास्तविक आवेश वाहक है और जिसे प्रयोग द्वारा मापा जा सकता है।

12.4 सहायक क्षेत्र H (चुंबकीय तीव्रता) Auxiliary Field H. (Magnetic Intensity)

अभी तक हमने पढ़ा कि चुंबकन का कारण परमाणु चुंबकीय आघूर्णों से संबद्ध धारा और इलेक्ट्रॉन के प्रचक्रण हैं। ऐसी धाराओं को बद्ध धारार्यें (bound current) अथवा चुंबकन ऐम्पियरी धारार्यें कहते हैं। समीकरण (12.3) में दिया गया धारा घनत्व पदार्थ के अंदर उत्पन्न बद्ध धारा है। माना आपके पास चुंबकित पदार्थ का एक टुकड़ा है। यह टुकड़ा किसी स्थान पर कितना चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न करेगा? इसका उत्तर यह है कि इस वस्तु द्वारा उत्पन्न क्षेत्र, उसमें स्थापित बद्ध धाराओं द्वारा उत्पन्न क्षेत्र के ही बराबर होगा। माना हम इस चुंबकीय पदार्थ के चारों ओर एक कुंडली लपेटते हैं और इस कुंडली में एक निश्चित धारा, I प्रवाहित करते हैं। इस व्यवस्था से उत्पन्न कुल क्षेत्र, बद्ध धाराओं के कारण उत्पन्न क्षेत्र और धारा I के कारण उत्पन्न क्षेत्र, के योग के बराबर होता है, धारा I को मुक्त धारा (free current) कहते हैं क्योंकि वह कुंडली में प्रवाहित होती है और कुंडली के साथ श्रेणी में आमीटर लगाकर उसे मापा जा सकता है। (यदि चुंबकीय पदार्थ कोई चालक हो, तो पदार्थ में प्रवाहित होने वाली धारा मुक्त धारा होगी)। स्मरण रहे कि मुक्त धारार्यें वे धारार्यें होती हैं, जो बाह्य वोल्टता स्रोतों द्वारा उत्पन्न होती हैं। जबकि आंतरिक धारार्यें, परमाणुओं में इलेक्ट्रॉनों की गति के कारण उत्पन्न होती हैं। धारा मुक्त होती है क्योंकि बैटरी में एक तार लगाकर इसे प्राप्त किया जाता है तथा स्विच द्वारा इसको प्रवाहित किया जाता है या इसका प्रवाहित होना बंद किया जा सकता है। इसलिए कुल धारा घनत्व J को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$J = J_f + J_m \quad (12.9)$$

जहां J_f मुक्त धारा घनत्व है।

आइये, चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात करने के लिए ऐम्पियर नियम का उपयोग करें। अवकल रूप में इसे इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\nabla \times B = \mu_0 J \quad (9.46)$$

(देखिये इकाई 9)

समीकरण (12.9) का उपयोग करने से ऐम्पियर नियम को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\nabla \times B = \mu_0 (J_f + J_m)$$

जैसाकि पहले बताया जा चुका है, J_m को प्रयोग द्वारा मापने की कोई विधि नहीं है किंतु हम उसे समीकरण (12.8) द्वारा चुम्बकन सदिश M के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जिसे मापा जा सकता है। अतः हम इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\nabla \times B = \mu_0 J_f + \mu_0 \nabla \times M$$

$$\text{अथवा} \quad \nabla \times \left(\frac{B}{\mu_0} - M \right) = J_f \quad (12.10)$$

समीकरण (12.10) क्षेत्र $\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}\right)$ के लिए एक अवकल समीकरण है। यह अवकल समीकरण मुक्त धारा घनत्व \mathbf{J}_f के रूप में लिखा गया है जो कि क्षेत्र का स्रोत है। इस क्षेत्र सदिश को एक नये प्रतीक \mathbf{H} द्वारा व्यक्त किया जाता है। अर्थात्

$$\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} = \mathbf{H} \quad (12.11)$$

सदिश \mathbf{H} को चुंबकीय "तीव्रता" (Magnetic intensity) सदिश कहते हैं। जो वास्तव में \mathbf{B} का नाम है किन्तु ऐतिहासिक कारणों से यह नाम \mathbf{H} को दिया गया है। समीकरण (12.11) का उपयोग करने से समीकरण (12.10) इस प्रकार हो जाता है :

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f \quad (12.12)$$

दूसरे शब्दों में \mathbf{H} का संबंध मुक्त धारा के साथ उसी प्रकार का है, जिस प्रकार \mathbf{B} का संबंध कुल धारा के साथ होता है। यहां कुल धारा का अर्थ है बद्ध धारा एवं मुक्त धारा। यहां आप निश्चय ही नये सदिश क्षेत्र \mathbf{H} को प्रस्तुत करने के उद्देश्य के बारे में सोचने के लिए मजबूर होंगे। व्यावहारिक कारण से सदिश \mathbf{H} बहुत उपयोगी है क्योंकि उसे केवल बाह्य धारा की जानकारी द्वारा परिकलित किया जा सकता है। जबकि \mathbf{B} कुल धारा से संबंधित होता है जो कि ज्ञात नहीं है। समीकरण (12.12) को समाकल रूप में इस प्रकार भी लिख सकते हैं :

$$\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_f \quad (12.13)$$

जहां I_f बाईं ओर के रेखा समाकल के पथ द्वारा बद्ध पृष्ठ में प्रवाहित होने वाली चालन धारा हैं। यहां \mathbf{H} का रेखा समाकल, बंद पथ के चारों ओर होता है जो पदार्थ से गुजर भी सकता है और नहीं भी। उपर्युक्त समीकरण का उपयोग चुंबकीय पदार्थ की उपस्थिति में भी \mathbf{H} को परिकलित करने के लिए किया जा सकता है।

बोध प्रश्न 1

चित्र 12.7 में लोहे के एक टुकड़े में एक कुंडली लपेटी गई है जिसमें $5A$ की धारा प्रवाहित हो रही है। पथ (1), (2) और (3) के लिए $\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$ मान ज्ञात कीजिए। यह भी बताइए कि किस पथ (पथों) के लिए $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ और $\mathbf{B} \neq \mathbf{H}$ हैं।

चित्र 12.7 बोध प्रश्न 7

समीकरण (12.3) से हम देखते हैं कि \mathbf{M} का मात्रक ऐम्पियर प्रति मीटर है। समीकरण (12.11) से ज्ञात होता है कि सदिश \mathbf{H} के वही मात्रक हैं जो \mathbf{M} के हैं, इसलिए \mathbf{H} भी ऐम्पियर प्रति मीटर में मापा जाता है। विद्युत इंजीनियर जो विद्युत चुंबकों, ट्रॉंसफॉर्मरों आदि का काम करते हैं वे \mathbf{H} के मात्रक के लिए ऐम्पियर फेरे प्रति मीटर का उपयोग करते हैं क्योंकि फेरे का तात्पर्य धारा वाही कुंडली में फेरों की संख्या से है, जो कि विमाहीन राशि है अतः आपको यह भ्रम नहीं होना चाहिए कि \mathbf{H} के दोनों मात्रक भिन्न-भिन्न हैं।

पदार्थ के चुंबकीय गुणधर्म

अनुचुंबकीय और प्रतिचुंबकीय पदार्थों का चुंबकन बाह्य चुंबकीय क्षेत्र की उपस्थिति में ही देखने को मिलता है। जब क्षेत्र को हटा दिया जाता है, तो \mathbf{M} लुप्त हो जाता है। वास्तव में, देखा गया है कि \mathbf{M} , \mathbf{B} के समानुपाती होता है बशर्ते क्षेत्र बहुत प्रबल न हो।

अतः

$$\mathbf{M} \propto \mathbf{B} \quad (12.14)$$

समीकरण (12.14) को \mathbf{B} की अपेक्षा \mathbf{H} के रूप में व्यक्त करने की प्रथा है, इस प्रकार

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (12.15)$$

आनुपातिकता स्थिरांक χ_m को पदार्थ की चुंबकीय प्रवृत्ति (magnetic susceptibility) कहते हैं। यह विमाहीन राशि होती है जिसका मान प्रत्येक पदार्थ के लिए भिन्न-भिन्न होता है। χ_m की सहायता से किसी भी पदार्थ के चुंबकीय गुणधर्मों को व्यक्त किया जा सकता है। प्रतिचुंबकीय पदार्थों के लिए χ_m का मान ऋणात्मक और अनुचुंबकीय पदार्थों के लिए इसका मान धनात्मक होता है। इसका मान 1 से बहुत कम होता है अर्थात् $|\chi_m| \ll 1$ होता है। इसलिए निर्वात में χ_m का मान शून्य होता है क्योंकि M केवल चुंबकित पदार्थ में ही विद्यमान है। नीचे दी गई संक्षिप्त सारणी में सामान्य ताप पर प्रतिचुंबकीय और अनुचुंबकीय पदार्थों के लिए χ_m के मान दिए गए हैं।

	पदार्थ	χ_m
अनुचुंबकीय	ऐल्युमिनियम	2.10×10^{-5}
अनुचुंबकीय	सोडियम	0.84×10^{-5}
अनुचुंबकीय	टंगस्टन	7.60×10^{-5}
अनुचुंबकीय	ऑक्सीजन	190×10^{-5}
प्रतिचुंबकीय	बिस्मय	-1.64×10^{-5}
प्रतिचुंबकीय	तांबा	-0.98×10^{-5}
प्रतिचुंबकीय	चांदी	-2.40×10^{-5}
प्रतिचुंबकीय	स्वर्ण	-3.50×10^{-5}

लोह चुंबकीय पदार्थों की प्रवृत्तियों के लिए कोई सारणी नहीं दी गई है क्योंकि इन पदार्थों के लिए χ_m केवल H पर ही नहीं बल्कि पदार्थ के पिछले चुंबकीय इतिहास पर भी निर्भर करता है।

समीकरण (12.11) का $B = \mu_0 (H + M)$ के रूप में उपयोग करने से हमें यह प्राप्त होता है :

$$B = \mu_0 (1 + \chi_m) H \quad (12.16)$$

$$= \mu_0 K_m H$$

$$\therefore B = \mu H \quad (12.17)$$

जहाँ $\mu = \mu_0 K_m = \mu_0 (1 + \chi_m)$

$$\therefore K_m = \frac{\mu}{\mu_0} \quad (12.18)$$

μ को माध्यम की चुंबकशीलता (permeability of the medium) कहते हैं तथा K_m को आपेक्षिक चुंबकशीलक (relative permeability) कहते हैं। हम देखते हैं कि μ की वही विमा है जो μ_0 की है एवं K_m विमाहीन है। निर्वात में $\mu = \mu_0$ और $\chi_m = 0$ होता है। आपेक्षिक चुंबकशीलता, K_m का मान किंचित् भिन्न होता है क्योंकि $K_m = (1 + \chi_m)$ है। K_m का मान अनुचुंबकीय पदार्थों के लिए एक से अधिक और प्रतिचुंबकीय पदार्थों के लिए एक से कम होता है।

यदि तीन राशियों चुंबकीय प्रवृत्ति, χ_m आपेक्षिक चुंबकशीलता, K_m अथवा चुंबकशीलता, μ में से कोई भी एक राशि ज्ञात हो तो पदार्थ के चुंबकीय गुणधर्मों को पूर्णतया सुनिश्चित किया जा सकता है।

उदाहरण

1 मीटर लंबे ऐल्युमिनियम के टोरॉइड (toroid) के चारों ओर एक तार के 100 फेरे लपेटे गये हैं। तार में 1A की अपरिवर्ती धारा प्रवाहित हो रही है। टोरॉइड में चुंबकीय क्षेत्र, B , का मान $1.2567 \times 10^{-4} \text{ wbm}^{-2}$ है। निम्नलिखित राशियों के मान ज्ञात कीजिए :

(i) H , (ii) χ_m और K_m (iii) टोरॉइड में M , और (iv) तुल्य पृष्ठ चुम्बकन धारा I_m ।

हल :

i) समीकरण (12.13) के अनुसार

धारा द्वारा उत्पन्न H , का मान ज्ञात करने के लिए हम टोरोइड के अनुदिश एक वृत्तीय समाकलन-पथ की कल्पना कर लेते हैं। इस 1m लंबे पथ में H का मान सभी स्थानों पर समान है। इस समाकलन पथ से गुजरने वाले तार-फेरों की संख्या $100 \times 1A$ है। H की दिशा सर्वत्र वृत्तीय समाकलन-पथ के समांतर होता है, इसलिए

$$H \times 1 = 100 \times 1$$

अथवा
$$H = \frac{100 \times 1A}{1m} = 100 \text{ A m}^{-1}$$

ii) समीकरण (12.16) से

$$B = \mu_0 K_m H$$

$$K_m = \frac{B}{\mu_0 H} = \frac{1256.7 \times 10^7}{4\pi \times 10^{-7}} \times \frac{1}{100} = 1.00005$$

$$\text{और } (1 + \chi_m) = K_m$$

$$\therefore \chi_m = K_m - 1 = 1.00005 - 1 = 5 \times 10^{-5}$$

iii) समीकरण (12.15) से

$$M = \chi_m H$$

$$= 5 \times 10^{-5} \times 100 \text{ A m}^{-1} = 5 \times 10^{-3} \text{ Am}^{-1}$$

iv) $I_m = ML$

$$= 5 \times 10^{-3} \text{ Am}^{-1} \times 1m = 5mA$$

ऊपर हमने यह माना है कि टोरोइड के अनुप्रस्थ काट पर और टोरोइड के अक्ष पर B , H और M का मान एकसमान रहता है।

निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल करने का प्रयत्न कीजिए।

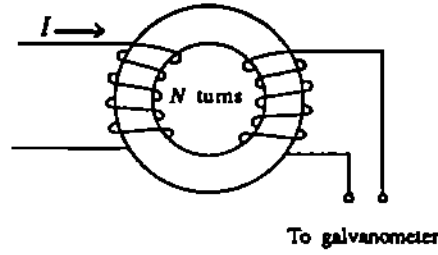
बोध प्रश्न 2

एक ऐसा वायु-क्रोड (air-core) परिनालिका (solenoid) लीजिए जिसमें प्रति सेन्टीमीटर 20 फेरे, हों और 0.18 A की धारा प्रवाहित हो रही हो। परिनालिका के केन्द्र में H और B का मान ज्ञात कीजिए। यदि एक लोहे की क्रोड जिसकी निरपेक्ष चुंबकशीलता 6×10^{-3} है, परिनालिका में प्रविष्ट किया जाय तो इस स्थिति में H और B का मान ज्ञात कीजिए। ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$)

12.5 चुंबकीय पदार्थ के लिए B और H के बीच संबंध

इस भाग में M और B की विशिष्ट निर्भरता पर विचार किया जाएगा। M और B के बीच संबंध अथवा B और H के बीच संबंध चुंबकीय पदार्थ के स्वभाव पर निर्भर करता है और उन्हें प्रायः प्रयोग द्वारा ज्ञात किया जाता है।

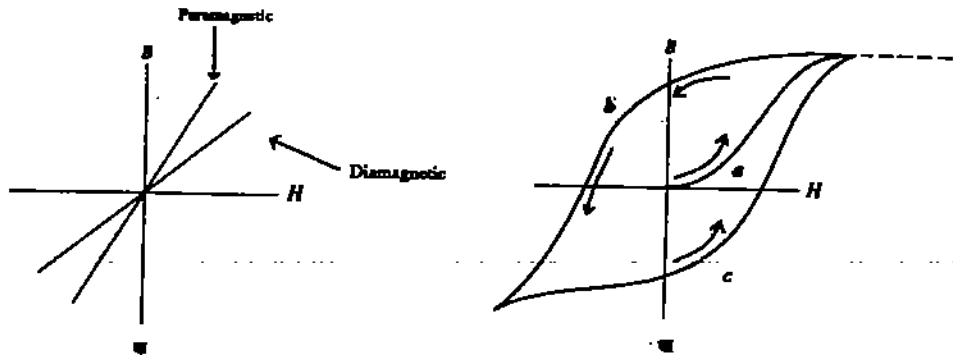
एक सरल प्रायोगिक व्यवस्था में एक टोरोइड होता है जिसके अंदर कोई भी चुंबकीय पदार्थ होता है। टोरोइड के चारों ओर प्राथमिक और द्वितीयक दो कुंडलियां लपेटी हुई होती हैं, जैसाकि चित्र 12.8 में दिखाया गया है।



चित्र 12.8: किसी चुंबकीय पदार्थ में B और M अथवा B और H के बीच संबंध ज्ञात करने की व्यवस्था।

यदि हम यह मान लें कि स्वयं टोरोइड की त्रिज्या की तुलना में टोरोइड के फेरों के अनुप्रस्थ काट की त्रिज्या कम हो तो टोरोइड के अंदर चुंबकीय क्षेत्र को लगभग एकसमान माना जा सकता है। प्राथमिक कुंडली से प्रवाहित होने वाली धारा H स्थापित करती है। प्राथमिक कुंडली में धारा के स्थापित होने से विद्युत वाहक बल (वि. वा. ब.) प्रेरित होता है। प्रेरित वोल्टता को मापकर हम चुंबकीय पदार्थ के अंदर फ्लक्स Φ में हो रहे परिवर्तन और इस प्रकार B को ज्ञात कर सकते हैं। यदि हम H को स्वतंत्र चर के रूप में मान लें और $B = 0$ से आरंभ कर B में होने वाले परिवर्तनों को आरेख के रूप में प्राप्त करें तो H के किसी विशेष मान के लिए B का मान ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रकार विभिन्न प्रकार के चुंबकीय पदार्थ के लिए $B-H$ वक्र प्राप्त किया जा सकता है।

ऊपर वर्णित प्रयोग को प्रतिचुंबकीय और अनुचुंबकीय पदार्थों के लिए भी प्रयुक्त किया जा सकता है। इसके लिए $I = 0$ से आरंभ करते हैं और धीरे-धीरे I का मान बढ़ाकर B और H के मान ज्ञात कर लेते हैं। इन पदार्थों के लिए B एवं H का आरेख चित्र 12.9 (क) में दिखाया गया है।



चित्र 12.9: विभिन्न प्रकार के चुंबकीय पदार्थों के लिए आंतरिक चुंबकीय क्षेत्र (B) तथा प्रयुक्त चुंबकीय क्षेत्र (H) के बीच वक्र। (क) प्रतिचुंबकीय और अनुचुंबकीय में रैखिक संबंध होता है। (ब) लोह चुंबकीय पदार्थों लिए संबंध, प्रयुक्त क्षेत्र की प्रबलता और पदार्थ के पिछले इतिहास पर निर्भर करता है। (ब) में कैलिन अक्ष की अपेक्षा ऊर्ध्वाधर-अक्ष में क्षेत्र प्रबलतायें बहुत अधिक होती हैं। सीर उस दिशा की ओर संकेत करते हैं जिसमें क्षेत्रों का परिवर्तन होता है।

हम देखते हैं कि आरेख एक सीधी रेखा है, जैसाकि निम्नलिखित संबंध से प्रकट होता है,

$$B = \mu_0 (1 + \chi_m) H \quad (12.16)$$

जहां μ_0 और χ_m स्थिरांक हैं। आरेख की प्रवणता, $\mu_0 (1 + \chi_m)$ के बराबर होती है। इसमें से χ_m का मान नीचे गये समीकरण द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

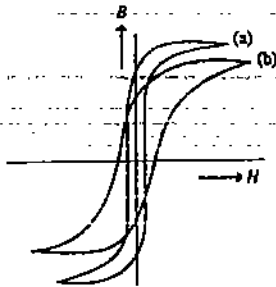
$$\chi_m = \frac{B}{\mu_0 H} - 1.$$

प्रतिचुंबकीय पदार्थों के लिए क्योंकि ढाल $< \mu_0$ होता है, अतः $\chi_m < 0$ होता है। अनुचुंबकीय पदार्थों के लिए ढाल $> \mu_0$ होता है जिससे कि $\chi_m > 0$ होता है।

यदि उपर्युक्त प्रयोग में लोहे जैसा किसी लोहचुंबकीय पदार्थ का उपयोग किया जाए तो एक विशिष्ट प्रकार का $B-H$ वक्र प्राप्त होता है, जैसा कि चित्र 12.9 (ख) में दिखाया गया है।

- i) $I = 0$ पर अर्थात् जब $H = 0$ हो, तो B का मान शून्य होता है। यदि I को बढ़ाया जाये तो B और H का निर्धारण I के बढ़ते मानों के लिये किया जाता है। सबसे पहले, H के साथ B में वृद्धि वक्र "a" के अनुसार होती है। H के एक अधिक मान पर वक्र, रैखिक हो जाता है (जिसे चित्र में डैश रेखा द्वारा दिखाया गया है) जो यह दर्शाता है कि H के इस मान के बाद M में वृद्धि नहीं होती है तथा सभी डोमेन द्विध्रुव आघूर्ण के एक ही दिशा में होने की वजह से पदार्थ संतृप्त हो गया है।
- ii) यदि संतृप्त अवस्था में पहुंचने के बाद कुंडली में धारा को घटाकर H का मान पुनः शून्य कर दिया जाए तो $B-H$ वक्र का स्वरूप b वक्र के जैसा होता है। जब H शून्य हो जाता है फिर भी, कुछ B शेष रह जाता है जो इस बात को व्यक्त करता है कि $I = 0$ हो जाने पर भी पदार्थ में कुछ B अथवा चुम्बकन शेष रह जाता है अर्थात् पदार्थ स्थायी रूप से चुंबकित हो जाता है। $H = 0$ के लिए B का मान चुंबकत्वावशेष (remanence) कहलाता है।
- iii) यदि प्राथमिक कुंडली में धारा की दिशा को उलट दिया जाये और उसका मान बढ़ाया जाय तो $B-H$ वक्र 'b' वक्र के अनुसार होता है, जब तक कि H के एक निश्चित मान पर B शून्य न हो जाय। H के इस मान को निग्रह बल (coercive force) कहते हैं। यदि धारा का मान ऋणात्मक दिशा में बढ़ाते रहें तो वक्र 'b' जैसा होता है, जब तक कि संतृप्ति अवस्था पुनः प्राप्त न हो जाए।
- iv) अब धारा को कम किया जाता है, जब तक कि वह फिर से शून्य न हो जाय। इस अवस्था में $H = 0$ है, किन्तु M का मान शून्य नहीं होता है, अपितु चुम्बकन विपरीत दिशा में होता है। इस स्थिति में धारा को फिर से उलट देते हैं, जिससे कुंडली में धारा फिर से धनात्मक दिशा में हो जाती है। इस दिशा में धारा के बढ़ने से वक्र 'c' वक्र के अनुसार बढ़ता है और संतृप्ति की अवस्था पर 'b' वक्र के साथ मिल जाती है।

यदि बृहत् धनात्मक और ऋणात्मक मानों के बीच धारा को बढ़ाया एवं घटाया जाये, तो $B-H$ वक्र 'b' और 'c' के साथ एक चक्र में आगे-पीछे जाता है। इस चक्रीय वक्र को शैथिल्य वक्र (Hysteresis curve) कहते हैं। इससे ज्ञात होता है कि B, H का एकल मान फलन (single valued function) ही नहीं है, बल्कि पदार्थ के पूर्ववर्ती अवस्था पर भी निर्भर करता है। एक पदार्थ से दूसरे पदार्थ के शैथिल्य-लूप (hysteresis loop) में बहुत भिन्नता होती है। स्थायी चुंबक बनाने के लिए उपयोग में आने वाले पदार्थों जैसे-इस्पात, ऐलिको आदि के फैले हुए (wide) शैथिल्य-लूप होते हैं और निग्रह बल का मान अधिक होता है (देखिए चित्र 12.10)। किंतु विद्युत चुंबक (अस्थायी चुम्बक) बनाने के लिए काम में आने वाले पदार्थ जैसे—नर्म लोहा, परमेलॉय आदि के लिए चुंबकत्वावशेष का मान अधिक, किन्तु निग्रह बल का मान बहुत कम होता है। वे



चित्र 12.10: कुछ पदार्थों के शैथिल्य वक्र। वक्र (क) और (ख) क्रमशः नर्म लोहा और इस्पात के लिए हैं।

लोहचुंबक पदार्थ जैसे - आयरन - सिलिकन (0.8 - 4.8 प्रतिशत) मिश्रधातु आदि जो ट्रांसफॉर्मरों की क्रोडों में प्रयुक्त होते हैं, उनका शैथिल्य-रूप संकरा होता है।

12.6 चुंबकीय परिपथ (Magnetic Circuits)

किसी विद्युत मशीन अथवा विद्युत उपकरण में चुंबकन बल द्वारा चुंबकीय फ्लक्स जिस बंद पथ का अनुसरण करती है, उसे चुंबकीय परिपथ कहते हैं। (चुंबकन बल, धारा कुंडली अथवा स्थायी चुंबक के कारण हो सकता है।)

चुंबकीय परिपथ और विद्युत परिपथ के बीच समानता का अध्ययन करने के लिए हम चुंबकीय परिपथ के लिए ओम-नियम के संगत एक संबंध को विकसित करते हैं। आइये, एक लोहे के वलय पर विचार करें (चित्र 12.11) जिसे उसके ऊपर लपेटी हुई कुंडली में प्रवाहित विद्युत-धारा द्वारा चुंबकित किया गया हो। माना,

I = कुंडली में प्रवाहित होने वाली धारा,

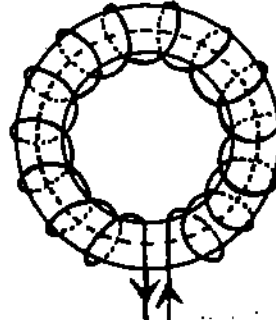
N = कुंडली में फेरों की संख्या,

l = चुंबकीय परिपथ की लंबाई (वलय की माध्य परिधि)

A = वलय के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल,

μ = लोहे की चुंबकशीलता।

इस स्थिति में संपूर्ण उत्पन्न चुंबकीय फ्लक्स लोहे के वलय के अंदर तक ही सीमित रहता है और फ्लक्स का क्षरण (leakage) बहुत कम होता है (इसका कारण बाद में बताया जाएगा)। हम पहले देख चुके हैं कि वलय के अंदर H के मान को निम्नलिखित समीकरण द्वारा व्यक्त किया जाता है :



चित्र 12.11: चुंबकीय परिपथ

$$\int H \cdot dl = NI \quad \text{ऐम्पियर नियम से}$$

जहां समाकलन-पथ, वलय के अनुदिश है। क्योंकि किसी विद्युत परिपथ के लिए विद्युत क्षेत्र E का रेखा-समाकल विद्युतवाहक बल (वि. वा. ब.) के बराबर होता है, अतः उसी प्रकार चुंबकीय क्षेत्र H के रेखा-समाकल को चुंबकत्व वाहक बल (magnetomotive force—M.M.F.) कहते हैं।

$$\text{M.M.F.} = \int H \cdot dl = NI$$

वलय में इस पथ के प्रत्येक बिन्दु पर

$$H = \frac{B}{\mu} \quad \text{होता है।}$$

इसके अतिरिक्त यदि चुंबकीय फ्लक्स $\Phi = BA$ हो, तो $H = \Phi/\mu A$ होगा, इसलिए

$$\text{M.M.F.} = \int H \cdot dl = \Phi \int \frac{dl}{\mu A} = NI \quad (12.19)$$

जहाँ Φ को हमने समाकल के बाहर लिया है, क्योंकि इसका मान वलय के सभी अनुप्रस्थ काटों पर स्थिर होता है। समीकरण (12.19) को देखने से उसी के समान विद्युत परिपथ के लिए निम्नलिखित समीकरण का स्मरण होता है :

$$\text{e.m.f.} = \text{घारा} \times \text{परिपथ} = I \int \frac{\rho dl}{A} \quad (12.20)$$

समीकरण (12.19) और (12.20) से ज्ञात होता है कि,

- i) चुंबकत्व वाहक बल ($\int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l}$), वि. वा. ब. ($\int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$) के अनुरूप है,
- ii) चुंबकीय फ्लक्स Φ ओम-नियम की घारा I के अनुरूप है,
- iii) चुंबकीय प्रतिरोध जिसे प्रतिष्टम्भ (reluctance) $\left(\int \frac{dl}{\mu A} \right)$ कहते हैं, विद्युत प्रतिरोध $\left(\int \frac{\rho dl}{A} \right)$ के अनुरूप होता है।

$$\therefore \text{M.M.F.} = \text{फ्लक्स} \times \text{प्रतिष्टम्भ}$$

$$\text{अथवा कुल फ्लक्स } \Phi = \frac{\text{M.M.F.}}{\text{प्रतिष्टम्भ}} = \frac{NI}{\int \frac{dl}{\mu A}} \quad (12.21)$$

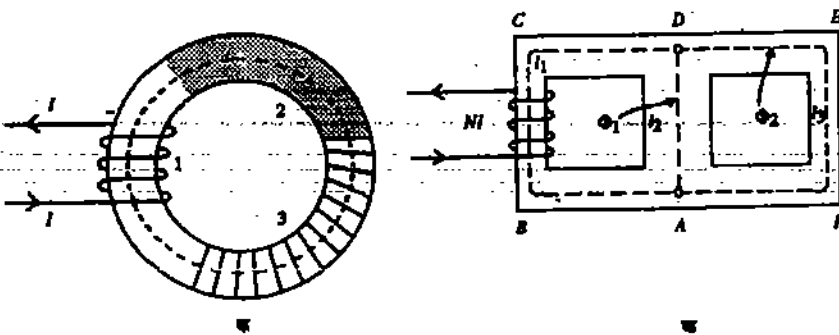
यदि μ का मान संपूर्ण वलय के लिए स्थिर मान लिया जाय, तो प्रतिष्टम्भ

$$\mathfrak{R} = \int \frac{dl}{\mu A} = \frac{L}{\mu A} \quad (12.22)$$

जहाँ L वलय लंबाई है। किन्तु विद्युत परिपथ और चुंबकीय परिपथ के बीच महत्वपूर्ण अंतर हैं :

- i) विद्युत-परिपथ के प्रतिरोध में ऊर्जा का लगातार क्षय होता है जबकि चुंबकीय परिपथ के प्रतिष्टम्भ में ऊर्जा-ह्रास नहीं होता है।
- ii) विद्युत-घारा में इलेक्ट्रॉनों का प्रवाह होता है किन्तु चुंबकीय फ्लक्स में ऐसे किसी भी कणों का प्रवाह नहीं होता है।
- iii) किसी निश्चित ताप पर, प्रतिरोधकता, ρ घारा पर निर्भर नहीं करती है। जबकि प्रतिष्टम्भ में उसके संगत राशि $\frac{1}{\mu}$ चुंबकीय फ्लक्स Φ के अनुसार परिवर्तित होती है।

श्रेणी-क्रम में प्रतिष्टम्भ: आइए, हम यह मान लें कि टोरोइड एक सजावट लोह चुंबकीय पदार्थों का बना है: जिनमें से प्रत्येक का अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल A है किन्तु उनकी चुम्बकशीलताएं भिन्न अर्थात् μ_1, μ_2, \dots हैं।



चित्र 12.12: (क) अनेक पदार्थों से बना चुंबकीय परिपथ : श्रेणी-क्रम में प्रतिष्टम्भ। (ख) दो खूबों वाला चुंबकीय परिपथ: समान्तर क्रम में प्रतिष्टम्भ।

तो पहले की भांति (देखिये चित्र 12.12 क)

$$NI = \int H \cdot dl$$

$$= \int_1 H \cdot dl + \int_2 H \cdot dl + \dots \text{ होगा}$$

जिसमें दाई ओर के समाकलों को क्रमशः पदार्थों 1, 2, ... में अक्षीय पथों के अनुदिश लिया जाता है। इसलिए,

$$\text{M.M.F.} = \int_1 \frac{\Phi}{\mu_1 A} dl + \int_2 \frac{\Phi}{\mu_2 A} dl + \dots$$

$$= \Phi \int_1 \frac{dl}{\mu_1 A} + \Phi \int_2 \frac{dl}{\mu_2 A} + \dots$$

$$= \Phi \left[\frac{L_1}{\mu_1 A} + \frac{L_2}{\mu_2 A} + \dots \right]$$

$$= \Phi (\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots) = \Phi \mathfrak{R}$$

इसलिए दिए गए चुंबकीय परिपथ का कुल प्रतिष्टम्भ इस प्रकार होगा:

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 + \dots \quad (12.23)$$

समांतर क्रम में प्रतिष्टम्भ: अब हम एक ऐसे चुंबकीय परिपथ का उदाहरण देंगे जिसमें प्रतिष्टम्भ समांतर क्रम में होते हैं। चित्र 12.12 (ख) में ऐसा ही चुंबकीय परिपथ दिखाया गया है। धारावाही कुंडलियों के N फेरे हैं। जिनमें से प्रत्येक में I ऐम्पियर की धारा प्रवाहित हो रही है। कुंडली से गुजरने वाले चुंबकीय फ्लक्स Φ दो पथों में विभक्त हो जाते हैं: एक पथ में फ्लक्स Φ_1 और दूसरे Φ_2 में है, जैसाकि चित्र में दिखाया गया है। स्पष्ट है कि $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ है। हम मान लेते हैं कि परिपथ में सब जगह अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A स्थिर है।

माना चित्र में दिए गए पथों $ABCD$, DA और $DEFA$ की लंबाइयां क्रमशः L , L_1 , L_2 हैं। $ABCD$ पथ के लिए

$$NI = \int_{ABCD} \frac{\Phi}{\mu A} dl + \int_{DA} \frac{\Phi}{\mu A} dl$$

$$= \frac{\Phi}{\mu A} L + \frac{\Phi_1}{\mu_1 A} L_1 \quad (12.24)$$

इसी प्रकार, बंद पथ $ADEFA$ के लिए,

$$0 = - \int_{AD} \frac{\Phi}{\mu A} dl + \int_{DEFA} \frac{\Phi}{\mu A} dl$$

$$= - \frac{\Phi_1}{\mu_1 A} L_1 + \frac{\Phi_2}{\mu_2 A} L_2 \quad (12.25)$$

यहां पर ध्यान दें कि हमने पथों AD और $DEFA$ के लिए μ_1 और μ_2 का उपयोग किया है। ऐसा इसलिए है क्योंकि इन पथों के लिए Φ के मान भिन्न हैं। इसलिए H के मान भी भिन्न होंगे। अतः इन पथों के लिए μ के मान भिन्न होंगे। $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ और समीकरण (12.25) का उपयोग करते हुए, हम लिख सकते हैं :

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_1 \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{L_1}{L_2}$$

$$= \Phi_1 \left(1 + \frac{\mu_2}{\mu_1} \cdot \frac{L_1}{L_2} \right)$$

उपर्युक्त समीकरण से Φ_1 के मान को समीकरण (12.24) में प्रतिस्थापित करने पर हम लिखते हैं:

$$NI = \frac{\Phi}{\mu A} L + \Phi \left(\frac{L_1}{\mu_1 A} + \frac{L_2}{\mu_2 A} \right)$$

$$NI = \Phi \left(\mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{R}_1 \mathfrak{R}_2}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2} \right) \quad (12.26)$$

इससे प्रकट होता है कि DA और $DEFA$ पथों के प्रतिष्टम्भ समांतर होते हैं क्योंकि इन पथों में चुंबकीय फ्लक्स Φ क्रमशः Φ_1 और Φ_2 में विभक्त हो जाता है। इन पथों के संयुक्त प्रतिष्टम्भ \mathfrak{R} , को अलग-अलग प्रतिष्टम्भों \mathfrak{R}_1 और \mathfrak{R}_2 के रूप में इस प्रकार व्यक्त किए जा सकते हैं :

$$\frac{1}{\mathfrak{R}_1} = \frac{1}{\mathfrak{R}_1} + \frac{1}{\mathfrak{R}_2} \quad (12.27)$$

ध्यान देने की बात है कि समीकरण (12.24), (12.25) और $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ चुंबकीय परिपथों के लिए किरचोफ नियमों (Kirchoff's law) के कयन हैं।

अब हमें ज्ञात होता है कि वायु में चुंबकीय फ्लक्स का क्षरण क्यों नहीं होता है। वायु, फ्लक्स के लिए समांतर पथ बनाता है। वायु के लिए $\mu = \mu_0$ और लोह चुंबकीय पदार्थ के लिए $\mu = 10^4 \mu_0$, होता है इसलिए लोह चुंबकीय पदार्थ की तुलना में वायु-पथ अत्यंत अधिक प्रतिष्टम्भ वाला पथ होता है। चुंबकीय फ्लक्स सबसे कम प्रतिष्टम्भ वाला पथ का अनुसरण करेगा, जैसाकि विद्युत-परिपथ में भी होता है।

चुंबकीय परिपथ से संबंधित सूत्रों का उपयोग विद्युत-इंजीनियरों द्वारा विद्युत-चुंबकों, मोटरों और डायनमों संबंधी परिकल्पनों में किया जाता है। प्रायः यह ज्ञात किया जाता है कि कुंडली में तार के फेरों की संख्या और उनमें प्रवाहित हो रही विद्युत धारा का मान क्या हो, जो कि विद्युत-चुंबक के वायु-अंतराल (air-gap) में एक निश्चित फ्लक्स घनत्व उत्पन्न कर सकें। परिपथ का प्रतिष्टम्भ ज्ञात होने पर, निम्नलिखित संबंध द्वारा M.M.F. परिकल्पित किया जाता है :

$$M.M.F. = \text{फ्लक्स} \times \text{प्रतिष्टम्भ}$$

क्योंकि M.M.F. का मान NI के बराबर होता है (देखिए समीकरण 12.19)। अतः ऐम्पियर फेरों की संख्या परिकल्पित की जा सकती है। आइए, किसी विद्युत-चुंबक के चुंबकीय परिपथ का अध्ययन कर इसे स्पष्ट करें।

विद्युत-चुंबक का चुंबकीय परिपथ

विद्युत-चुंबक का चुंबकीय परिपथ एक योजक (yoke) जो चुंबक का आधार है, किनारे (limbs) जिन पर कुंडली लेपटी हुई हैं, ध्रुव भाग (pole pieces) और वायु-अंतराल से बना होता है (देखिए चित्र 12.13)। माना योजक की प्रभावी लंबाई l_1 और अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल a है। यदि लोहे की चुंबकशीलता μ_1 हो तो योजक का प्रतिष्टम्भ $\frac{l_1}{\mu_1 a_1}$ होगा। इसी प्रकार प्रत्येक किनारे का

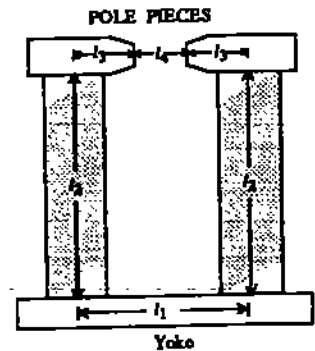
प्रतिष्टम्भ $\frac{l_2}{\mu_2 a_2}$ और प्रत्येक ध्रुव का प्रतिष्टम्भ $\frac{l_3}{\mu_3 a_3}$ है जबकि वायु अंतराल का प्रतिष्टम्भ $\frac{l_4}{\mu_0 a_4}$

है। (क्योंकि $\mu_{\text{air}} = \mu_0$)। इसलिए चुंबकीय क्षेत्र का कुल प्रतिष्टम्भ इस प्रकार होगा :

$$\frac{l_1}{\mu_1 a_1} + \frac{2l_2}{\mu_2 a_2} + \frac{2l_3}{\mu_3 a_3} + \frac{l_4}{\mu_0 a_4}$$

यदि चुंबकीय परिपथ के सभी हिस्सों में समान फ्लक्स हो तो समीकरण (12.19) के अनुसार ऐम्पियर-फेरों की संख्या इस प्रकार होगी :

$$\Phi \left(\frac{l_1}{\mu_1 a_1} + \frac{2l_2}{\mu_2 a_2} + \frac{2l_3}{\mu_3 a_3} + \frac{l_4}{\mu_0 a_4} \right) \quad (12.28)$$



चित्र 23.13: विद्युत-चुंबक का चुंबकीय परिपथ

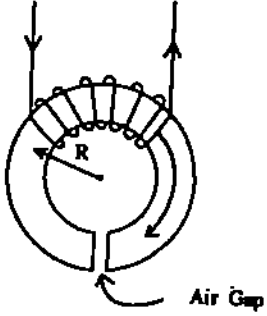
आइए, चित्र 12.14 के टोरॉइड के वायु-अंतराल में चुंबकीय क्षेत्र B को परिकलित करने का एक अन्य उदाहरण लें। इसमें टोरॉइड एक लोहचुंबकीय पदार्थ (नर्म लोहे) का बना होता है जिसमें d चौड़ाई वाला एक छोटा-सा वायु-अंतराल होता है जो टोरॉइड की लंबाई L की तुलना में काफी छोटा होता है। इस उदाहरण में,

$$NI = \Phi \left[\frac{(L-d)}{\mu_0 A} + \frac{d}{\mu A} \right] \quad \text{चुंबकीय परिपथ में से प्रवाहित होने वाला फ्लक्स है।}$$

$$= \frac{B}{\mu\mu_0} [\mu_0(L-d) + \mu d]$$

अथवा
$$B = \frac{NI \mu\mu_0}{\mu_0 L + (\mu - \mu_0) d} \quad (12.29)$$

यह वायु-अंतराल में चुंबकीय क्षेत्र का मान है। निम्नलिखित उदाहरण का अध्ययन कीजिए जो यह प्रदर्शित करता है कि वायु-अंतराल की वजह से टोरॉइड की लंबाई कैसे बढ़ जाती है।



चित्र 12.14: वायु-अंतराल में चुंबकीय क्षेत्र

उदाहरण 2

एक संपूर्ण टोरॉइड की लंबाई L है और इसे N फेरों वाली कुंडली से लपेटा गया है। प्रत्येक फेरे में I ऐम्पियर की धारा प्रवाहित हो रही है। एक अन्य टोरॉइड की लंबाई $(L-d)$ है जिसमें कि d ($d \ll L$) लंबाई वाला एक वायु-अंतराल है। इन दोनों उदाहरणों की तुलना कीजिए। सिद्ध कीजिए कि वायु-अंतराल के प्रभाव से टोरॉइड की लंबाई $(K_m - 1)d$, से बढ़ जाती है जहां K_m आपेक्षित चुंबकशीलता है।

हल :

बिना वायु-अंतराल वाले संपूर्ण टोरॉइड के उदाहरण में, $B = NI / \left(\frac{L}{\mu} \right)$ है। d लंबाई वाले वायु-अंतराल के उदाहरण में, समीकरण (12.29) के अनुसार

$$B = \frac{NI \mu\mu_0}{\mu_0 L + (\mu - \mu_0) d}$$

अंश और हर दोनों को $\mu\mu_0$ से भाग करने पर,

$$B = \frac{NI}{\frac{L}{\mu} + \left(\frac{1}{\mu_0} - \frac{1}{\mu} \right) d} = \frac{NI}{\frac{1}{\mu} [(L-d) + \frac{d}{\mu_0}]}$$

$$= \frac{NI}{\frac{1}{\mu} [(L-d) + \frac{\mu}{\mu_0} d]} = \frac{NI}{\frac{1}{\mu} [(L-d) + K_m d]}$$

अर्थात्

$$B = \frac{NI}{\frac{1}{\mu} [L + (K_m - 1) d]}$$

यदि इस सूत्र की, संपूर्ण टोरॉइड के लिए लिखे गए सूत्र के साथ तुलना की जाय तो हम देखते हैं कि L का मान $(K_m - 1)d$ बढ़ जाता है।

इकाई को समाप्त करने से पहले निम्नलिखित बोध प्रश्न का उत्तर दीजिए।

बोध प्रश्न 3

एक नर्म लोहे के वलय में 1.00 से. मी. का वायु-अंतराल है। उसमें 500 फेरे वाली कुंडली लपेटी गई है जिसमें 2A की धारा प्रवाहित हो रही है। लोहे के वलय की माध्य लम्बाई 50 से. मी. है, उनका अनुप्रस्थ काट से. मी.² और चुंबकशीलता $2500 \mu_0$ है। वायु-अंतराल में चुंबकीय प्रेरण

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा, आइये उसे संक्षेप में दोहरायें।

12.7 सारांश

- स्थायी चुंबकत्व और शैथिल्य (Hysteresis) की परिघटना के कारण लोह-चुंबकीय पदार्थों का व्यवहार जटिल हो जाता है। इस व्यवहार की व्याख्या इन पदार्थों में डोमेनों की उपस्थिति के आधार पर की जा सकती है। प्रत्येक डोमेन में द्विध्रुव आघूर्ण, विनिमय अन्वोन्यक्रिया के कारण, समांतर रहते हैं। किन्तु अचुंबकित अवस्था में विभिन्न डोमेनों की चुंबकन दिशाएँ यादृच्छिक होती हैं जिससे नेट चुंबकन शून्य होता है। दो अन्य प्रकार के चुंबकीय पदार्थ भी होते हैं : प्रतिलोह चुंबकीय और फेरी चुंबकीय।
- असमान चुंबकन की स्थिति में चुंबकित पदार्थ, एक धारा वितरण $\mathbf{J} =$ कर्ल \mathbf{M} के तुल्य होता है जिसमें \mathbf{M} प्रति इकाई आयतन चुंबकन अथवा चुंबकीय आघूर्ण है।
- चुंबकित पदार्थ द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र, ऐम्पियर नियम द्वारा ज्ञात किया जाता है, जो इस प्रकार है :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mathbf{J}_f + \mathbf{J}_m$$

जहाँ \mathbf{J}_f पदार्थ में प्रवाहित होने वाली मुक्त धारा घनत्व है और \mathbf{J}_m चुंबकन से संबद्ध धारा घनत्व है। इसके अनुसार

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) = \mathbf{J}_f$$

जहाँ $\mathbf{H} \left(= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right)$ एक नया क्षेत्र सदिश है।

- अनुचुंबकत्व और प्रतिचुंबकत्व में \mathbf{B} , \mathbf{M} और \mathbf{H} का परस्पर रैखिक संबंध होता है किन्तु लोह चुंबकत्व में ये शैथिल्य प्रदर्शित करते हैं जो कि अरैखिक व्यवहार है।
- विद्युत-चुंबकों, मोटरों और डायनमों के अध्ययन में धारावाही कुंडलियों पर विचार किया जाता है जिनमें लोह चुंबक पदार्थ होते हैं अर्थात् उसमें चुंबकीय परिपथों का अध्ययन किया जाता है। हम चुंबकीय परिपथों की बात तब करते हैं जब विद्यमान संपूर्ण चुंबकीय फ्लक्स सुनिश्चित पथ अथवा पथों में सीमित रहता है।
- चुंबकीय परिपथ के लिए सूत्र यह है :
चुंबकत्व वाहक बल (M.M.F.) = फ्लक्स \times प्रतिष्टम्भ। M.M.F., Nl के बराबर भी होता है जहाँ N चुंबकीय पदार्थ पर लपेटा गई कुंडली में फेरों की संख्या है और l प्रत्येक कुंडली में प्रवाहित होने वाली धारा है।
- प्रतिष्टम्भ $\mathcal{R} = \frac{l}{\mu a}$

जहाँ l , a और μ क्रमशः पदार्थ की लंबाई, अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल और चुंबकशीलता है। प्रतिष्टम्भों के संयोग उन्ही नियमों का पालन करते हैं जिनके द्वारा प्रतिरोधों का संयोग होता है।

12.8 अंत में कुछ प्रश्न

- 1) निम्नलिखित उदाहरणों में चुंबकन क्षेत्र H और चुंबकीय फ्लक्स घनत्व B ज्ञात कीजिए।
(क) एक लंबे, सीधे तार से 105 mm दूर स्थित बिन्दु पर, जबकि तार में 15 A की धारा प्रवाहित हो रही हो।

- (ख) 0.24m लंबी और 2000 फेरों वाली परिनालिका के केंद्र में जिसमें 1.6A की धारा प्रवाहित हो रही है। ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$)
- 2) 0.5 m की माध्य परिधि के टोरोइड में 500 फेरे हैं और प्रत्येक फेरे में 0.15 A की धारा प्रवाहित हो रही है। (क) यदि टोरोइड में वायु-क्रोड हो, तो H और B ज्ञात कीजिए। यदि क्रोड में 5000 आपेक्षिक चुंबकशीलता का लोहा भरा हो तो B और चुंबकन M ज्ञात कीजिए।
- 3) 1500 फेरे वाले एक टोरोइड को लोहे के बलय में लपेटा गया है जिसका अनुप्रस्थ काट क्षेत्रफल 360 mm^2 , माध्य परिधि 0.75 m और आपेक्षित चुंबकशीलता 1500 है। यदि तार में 0.24 A धारा प्रवाहित हो रही हो तो निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए : (क) चुंबकन क्षेत्र H , (ख) M.M.F., (ग) चुंबकीय प्रेरण B , (घ) चुंबकीय फ्लक्स और (च) परियथ का प्रतिष्टम्भ

12.9 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

- 1) पथ (1) से परिवर्द्ध I का मान 5A है।

$$\text{पथ (2) के लिए } \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 7I = 35\text{A}$$

$$\text{पथ (3) के लिए } \int \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2I = 10\text{A}$$

$$\text{पथ (1) के लिए } B = H$$

पथ (1) और (3) के लिए $B \neq H$ क्योंकि ये पथ लोहे से गुजरते हैं।

- 2) $H = nI = (2000 \text{ m}^{-1})(0.18\text{A}) = 360 \text{ Am}^{-1}$

$$B = \mu_0 H = (4\pi \times 10^{-7} \text{ Hm}^{-1})(360\text{Am}^{-1}) = 0.45 \text{ mT}$$

यदि $6 \times 10^{-3} \text{ Hm}^{-1}$ के निरपेक्ष चुंबकशीलता वाले लोहे के क्रोड को परिनालिका में प्रविष्ट किया जाए, तो H में कोई परिवर्तन नहीं होता है, अर्थात्

$$H = 360 \text{ Am}^{-1} \text{ (अपरिवर्तित)}$$

$$\text{और } B = \mu H = (6 \times 10^{-3} \text{ H m}^{-1})(360 \text{ A m}^{-1}) = 2.16 \text{ T}$$

- 3) वायु-अंतराल में चुंबकीय प्रेरण का व्यंजक है,

$$B = \frac{NI\mu}{[L + (K_m - 1)d]}$$

प्रश्न में दिए गए मानों को प्रतिस्थापित करने पर

$$B = \frac{500 \times 2 \times 2000 \times 4\pi \times 10^{-7}}{0.50 + (2500 - 1)0.01}$$

$$= \frac{10^3 \times 10^4 \times \pi \times 10^{-7}}{0.50 + 25} = \frac{\pi}{25.5} = 0.123 \text{ Wbm}^{-2}$$

लोहे के बलय में B का वही मान है, जो वायु में होता है किन्तु लोहे में H का मान इस प्रकार है

$$H = \frac{B}{K_m \mu}$$

$$H = 0.123/2500 \times 4\pi \times 10^{-7}$$

$$= 39.1 \text{ Am}^{-1}$$

अंत में कुछ प्रश्न

$$1) \text{ (क) } H = \frac{B}{\mu_0} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \times \frac{I}{\mu_0} = \frac{I}{2\pi r} = \frac{15}{(2\pi)(0.105)} = 22.7 \text{ A m}^{-1}$$

$$H = nI = \frac{2000}{0.24} \times 1.6 = 13.333 \text{ Am}^{-1}$$

$$B = \frac{4\pi}{10^7} \times \left(\frac{2000}{0.24} \right) 1.6 = 0.0168 \text{ T}$$

$$2) \text{ टोरोइड के लिए } H = nI, \text{ और हम उपयोग करते हैं } B = (4\pi/10^7)(K_m H) = \mu H.$$

इस प्रकार,

$$\text{क) } H = \frac{500}{0.5\text{m}} \times 0.15 \text{ A} = 150 \text{ Am}^{-1} \text{ फेरे और}$$

$$B = (4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1})(150 \text{ A m}^{-1}) = 0.188 \text{ mT}$$

$$\text{ख) } B = 5000(0.188 \text{ mT}) = 0.94 \text{ T}$$

$B/\mu_0 = H + M$ का उपयोग करते पर,

$$\frac{0.94}{4\pi \times 10^{-7}} = 150 + M \quad M = 7.5 \times 10^5 \text{ Am}^{-1}$$

$$3) \text{ क) } H = nI = \frac{1500}{0.75} = 0.24 = 480 \text{ Am}^{-1}$$

$$\text{ख) } \text{M.M.F.} = HI = (480 \text{ A m}^{-1})(0.75 \text{ m}) = 360 \text{ A}$$

$$\text{ग) } B = \frac{4\pi K_m H}{10^7} = \frac{4\pi}{10^7} (1500)(480) = 0.905 \text{ T}$$

$$\text{घ) } \Phi = BA = (0.905 \text{ Wb m}^{-2}) \frac{360 \text{ m}^2}{10^6} = 3.26 \times 10^{-4} \text{ Wb.}$$

$$\text{ड.) प्रतिष्टम्भ} = \frac{\text{m.m.f.}}{\Phi} = \frac{360}{3.26 \times 10^{-4}} = 1.1 \times 10^6 \text{ H}^{-1}$$

$$= 1.1 \mu\text{H}^{-1}.$$

12.10 शब्दावली

अनुचुम्बकीय	Paramagnetism
क्षरण	Leakage
चुम्बकत्व बाहक बल	Magneto motive force
चुम्बकत्वाशेष	Remanance
चुम्बकन	Magnetisation
चुम्बकशीलता	Permeability
चुंबकित पदार्थ	Magnetised material
निग्रह बल	Coercive force
प्रति चुम्बकीय	Diamagnetism
प्रतिलोह चुम्बकीय	Antiferromagnetic

विद्युत् धारा और चुम्बकीय क्षेत्र

प्रतिष्टम्भ

Reluctance

फेरी चुम्बकीय

Ferrimagnetic

बद्ध धारा

Bound current

मुक्त धारा

Free current

लोह चुम्बकीय

Ferromagnetic

वायु अंतराल

Air gap

विद्युत् चुम्बक

Electromagnet

विनिमय बल

Exchange force

शीथिल्य वक्र

Hysteresis curve

संतृप्त

Saturation



उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-04

वैद्युत एवम् चुंबकीय
परिघटनाएं

खंड

4

विद्युतचुंबकत्व

इकाई 13

विद्युतचुंबकीय प्रेरण

5

इकाई 14

मैक्सवेल समीकरण और विद्युतचुंबकीय तरंगें

35

इकाई 15

विद्युतचुंबकीय तरंगों का परावर्तन और अपवर्तन

73

खंड 4 विद्युतचुंबकत्व

प्रस्तावना

इस पाठ्यक्रम के पहले तीन खंडों में आपने ऐसे विद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों के बारे में पढ़ा है जिनका उद्गम या तो स्थिर या गतिमान वैद्युत आवेशों में होता है। उन खंडों में आप यह भी पढ़ चुके हैं कि विद्युत क्षेत्रों और चुंबकीय क्षेत्रों के बीच क्या संबंध होता है। आप यह भी देख चुके हैं कि जब विद्युत क्षेत्र के कारण एक तार में धारा प्रवाहित होती है तो उसके चारों ओर चुंबकीय क्षेत्र स्थापित हो जाता है। यह खोज 1820 में हांस क्रिश्चियन ओस्टेड द्वारा की गई। तभी से इस खोज के प्रतिलोम प्रभाव की, जिसमें चुंबकीय क्षेत्र से विद्युत क्षेत्र उत्पन्न होता हो, खोज करने के लिए वैज्ञानिक प्रेरित हुए। स्थायी चुंबकीय क्षेत्रों में ऐसे प्रभाव की खोज नहीं हो पाई। अंततः 1831 में इंग्लैंड के माइकेल फ़ैराडे और संयुक्त राज्य अमरीका के जोसफ़ हेनरी ने स्वतंत्र रूप से यह पता लगाया कि जब चालक परिपथ के चुंबकीय क्षेत्र में परिवर्तन होता है, तब परिपथ में विद्युत धारा प्रेरित होती है। फ़ैराडे और हेनरी द्वारा की गई विद्युतचुंबकीय प्रेरण की इस महत्वपूर्ण खोज से समस्त भावी वैद्युत उद्योग की नींव पड़ी। इस संबंध में एक कथा प्रचलित है कि जब एक राजनीतिज्ञ ने फ़ैराडे से पूछा कि उनकी इस खोज का क्या लाभ है तो फ़ैराडे का उत्तर था : 'इस समय तो कुछ नहीं बता सकता पर एक दिन ऐसा आयेगा जब आप इन पर कर लगायेंगे।' इस खंड की इकाई 13 में आप विद्युतचुंबकीय प्रेरण (electromagnetic induction) और उसके अनुप्रयोगों अर्थात् वैद्युत जेनरेटर और ट्रांसफ़ॉर्मर, के बारे में पढ़ेंगे जो कि आधुनिक वैद्युत इंजीनियरिंग की आधारशिला हैं।

संभवतः माइकेल फ़ैराडे उन्नीसवीं शताब्दी के महानतम प्रायोगिक भौतिकीविद् रहे हैं और जेम्स क्लार्क मैक्सवेल महानतम सैद्धांतिक भौतिकीविद् रहे हैं। ऊष्मागतिकी और सांख्यिकीय यांत्रिकी के पाठ्यक्रम (पी एच ई -06) में आपने उन क्षेत्रों में मैक्सवेल के योगदान के बारे में अवश्य पढ़ा होगा। वैद्युत और चुंबकीय परिघटनाओं को समझने में उनका योगदान और भी अधिक महत्वपूर्ण है। वास्तव में, उन्होंने ही एकीकृत विद्युतचुंबकत्व सिद्धांत प्रस्तुत किया।

अभी तक इस पाठ्यक्रम में आप वैद्युत और चुंबकीय परिघटनाओं को नियंत्रित करने वाले अधिकांश मूलभूत नियमों को पढ़ चुके हैं। 1865 में मैक्सवेल ने अनेक आनुभविक भौतिक नियमों जिन्हें आप खंड 1, 2 और 3 में पढ़ चुके हैं और फ़ैराडे के विद्युत चुंबकीय प्रेरण नियम के व्यापकीकरण के रूप में वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों के अवकल समीकरणों का समुच्चय प्रस्तुत किया। उन्होंने दर्शाया कि विद्युत और चुंबकत्व एक ही सिक्के के दो पहलू हैं और साथ ही विद्युतचुंबकत्व का संपूर्ण एकीकृत सिद्धांत प्रस्तुत किया, जिससे यह पूर्वानुमान भी लगाया जा सका कि विद्युतचुंबकीय तरंगों का अस्तित्व होता है। विद्युतचुंबकीय तरंगें कितनी महत्वपूर्ण हैं, यह तो आप जानते ही हैं। विद्युतचुंबकीय स्पेक्ट्रम के, जिसकी परास रेडियो तरंगों से लेकर गामा किरणों तक है, विविध गुणधर्म और अनुप्रयोग होते हैं। इस पूरे परिसर पर मैक्सवेल के विद्युतचुंबकत्व समीकरण लागू होते हैं। इकाई 14 में आप देखेंगे कि किस प्रकार मैक्सवेल ने पहले से ज्ञात नियमों का व्यापकीकरण करके इस समीकरण समुच्चय को प्राप्त किया था। इस इकाई में आप यह भी पढ़ेंगे कि किस प्रकार इन समीकरणों से विद्युतचुंबकीय तरंग समीकरण प्राप्त होता है। आप मुक्त आकाश और परावैद्युत माध्यमों (dielectric media) में विद्युतचुंबकीय तरंग समीकरणों के हल भी ज्ञात करेंगे। इकाई 15 में आप एक परावैद्युत माध्यम के पृष्ठ पर विद्युतचुंबकीय तरंगों के परावर्तन (reflection) और अपवर्तन (refraction) का अध्ययन करेंगे। अंत में हम इस बात पर संक्षिप्त चर्चा करेंगे कि विद्युतचुंबकीय तरंगें किस प्रकार जनित होती हैं।

यह खंड इस पाठ्यक्रम का अंतिम खंड है। हम आशा करते हैं कि इसका अध्ययन करने में आपको आनंद आएगा और उन्नीसवीं शताब्दी के दो महान भौतिकविदों द्वारा की गई महत्वपूर्ण खोजों से आप परिचित होंगे। हमारी शुभकामनाएं आपके साथ हैं।

आभार

डा० शुभा गुसा और श्री एस० एस० दुबे को इकाई 13 पर टिप्पणी देने के लिए ।

इकाई 13 विद्युतचुंबकीय प्रेरण

इकाई की रूपरेखा

- 13.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 13.2 प्रेरित धाराएं
फैराडे का विद्युतचुंबकीय प्रेरण नियम
प्रेरण और ऊर्जा संरक्षण: लेन्ज़ नियम
गतिक विद्युतवाहक बल
- 13.3 प्रेरण
स्वप्रेरकत्व
ट्रांसफॉर्मर
- 13.4 चुंबकीय क्षेत्र में संचित ऊर्जा
प्रेरक में संचित ऊर्जा
चुंबकीय क्षेत्र ऊर्जा
- 13.5 सारांश
- 13.6 अंत में कुछ प्रश्न
- 13.7 हल और उत्तर
- 13.8 शब्दावली

13.1 प्रस्तावना

जब आप एक अंधेरे कमरे में जाते हैं और महज एक स्विच दबा कर रोशनी उत्पन्न कर लेते हैं तो क्या कभी आपके मन में यह सवाल आता है कि ऐसा कैसे होता है। अगर आप स्विचों से जुड़े तांबे के उन तारों के साथ साथ चले जो आपके घर में बिजली लाते हैं और पूरे देश में एक जाल के रूप में बिछे हुए हैं, तो आपको अपने इस सवाल का जवाब मिल सकेगा। बिजली के तारों के जाल में कहीं न कहीं आपको निश्चित ही **विद्युत जेनरेटर** देखने को मिलेंगे जो प्रायः पनबिजली या ताप-बिजली घरों में लगे होते हैं। आपके घरों और इन जेनरेटरों के बीच आपको अनेक **ट्रांसफॉर्मर** देखने को मिलेंगे। यही दोनों यंत्र, विद्युत जेनरेटर और ट्रांसफॉर्मर, आज बड़े पैमाने पर विद्युत ऊर्जा पैदा करने और उन्हें वितरित करने के लिए नितांत आवश्यक हैं। ये दोनों ही यंत्र आज से करीब 250 वर्ष पहले माइकेल फैराडे और जोसेफ हेनरी द्वारा अलग अलग की गई महत्वपूर्ण खोजों पर आधारित हैं। वस्तुतः वैज्ञानिकों की ये खोजें ही आधुनिक विद्युत प्रौद्योगिकी का आधार हैं।

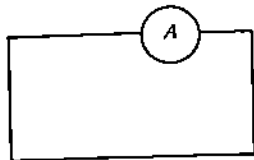
1831 में फैराडे और हेनरी ने यह खोज की कि **परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्रों** (changing magnetic fields) के कारण परिपथों में विद्युत धाराएं **प्रेरित** होती हैं। आइए हम इस इकाई में परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्रों से संबंधित इन परिघटनाओं का, जिनका पता अपने प्रयोगों में फैराडे ने लगाया था, अध्ययन करें और इनसे संबंधित नियमों को समझने का प्रयास करें। इस इकाई में हम इन नियमों के दो अनुप्रयोगों, जेनरेटर और ट्रांसफॉर्मर, का भी अध्ययन करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

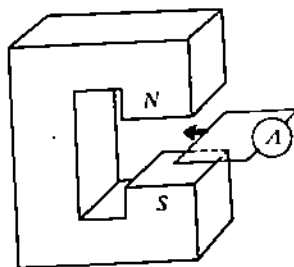
- फैराडे के विद्युतचुंबकीय प्रेरण नियम और लेन्ज़ नियम को लागू कर सकेंगे,
- सरल ज्यामिति वाले एक प्रेरक के स्वप्रेरकत्व और विरोधी विद्युत वाहक बल परिकलित कर सकेंगे,
- सरल विन्यासों में परिपथों का अन्योन्य प्रेरकत्व परिकलित कर सकेंगे,
- किसी भी दिए हुए चुंबकीय क्षेत्र में संचित ऊर्जा ज्ञात कर सकेंगे।

13.2 प्रेरित धाराएं

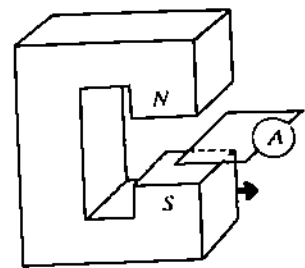


चित्र 13.1: क्या इस परिपथ में धारा प्रवाहित हो सकती है ?

चित्र 13.1 में एक सरल परिपथ दिखाया गया है, जिसमें तार का परिपथ एक एमीटर से जुड़ा हुआ है। क्या ऐसी कोई विधि है जिससे आप इस परिपथ में विद्युत धारा प्रेरित कर सकते हैं ? अब आप चित्र 13.2 देखिए जिसमें हमने फ़ैराडे के प्रयोगों से मिलते जुलते दो सरल प्रयोग दिखाए हैं जो प्रेरित धाराओं (induced currents) के अस्तित्व को दर्शाते हैं।



(क)

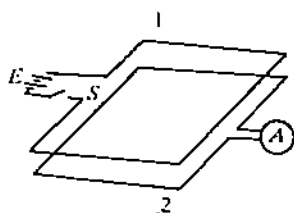


(ख)

चित्र 13.2 : एमीटर इन दोनों ही स्थितियों में धारा का प्रवाह दिखाता है: (क) जबकि परिपथ चुंबक के चुंबकीय क्षेत्र में गतिमान होता है और (ख) जब परिपथ को स्थिर रखा जाता है और चुंबक उसके सापेक्ष गतिमान होता है। जब तक परिपथ और चुंबक दोनों ही स्थिर रहते हैं तब तक परिपथ में कोई धारा प्रवाहित नहीं होती। यह धारा, जिसे प्रेरित धारा कहते हैं, केवल तभी प्रवाहित होती है जबकि चुंबक और तार एक दूसरे के सापेक्ष गतिमान होते हैं।

परिपथ में विद्युत धारा प्रेरित करने की एक और भी विधि है। इस प्रयोग को चित्र 13.3 में दिखाया गया है। आगे बढ़ने से पहले इस चित्र को ध्यान से समझ लें और इसका शीर्षक पढ़ लें।

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं



चित्र 13.3: जब पहले परिपथ (1) में स्विच बंद होता है, तब दूसरे परिपथ (2) में लगे एमीटर में बहुत ही थोड़े समय के लिए सूचक का विचलन होता है, थोड़े समय बाद दूसरे परिपथ की धारा पुनः शून्य हो जाती है। जब परिपथ (1) के स्विच को फिर खोला जाता है, तो बहुत ही थोड़े समय के लिए परिपथ 2 में एमीटर का सूचक विचलित होता है। इससे यह पता चलता है कि स्विच को खोलने और बंद करने पर परिपथ में प्रेरित धाराएं प्रवाहित होती हैं।

इन प्रयोगों से हमें किन बातों का पता चलता है ? क्या अभी तक इस पाठ्यक्रम में आपने जो कुछ पढ़ा है उसके आधार पर आप इन प्रेक्षकों की व्याख्या कर सकते हैं ? वास्तव में, लोरेन्ज़ बल के आधार पर पहले प्रयोग (चित्र 13.2 क) के परिणामों की व्याख्या की जा सकती है। क्या इसकी व्याख्या आप स्वयं ही नहीं करना चाहेंगे ?

बोध प्रश्न 1

गुणात्मक रूप में व्याख्या कीजिए कि किस प्रकार चित्र 13.2 क के परिपथ में प्रेरित धारा प्रवाहित होती है ?

चित्र 13.2 क और चित्र 13.3 में दिखाए गए प्रयोगों से किस बात का पता चलता है ? इन दोनों ही स्थितियों में (तापीय और अपवाह-प्रभावों की उपेक्षा कर देने पर) आवेश स्थिर बने रहते हैं और उन पर कोई लोरेन्ज़ बल कार्य नहीं करता। इन परिपथों में प्रेरित धाराओं के उद्गम (origin) की व्याख्या हम किस प्रकार करेंगे ? इसका उत्तर यह है : यहां हम एक नई परिघटना देख रहे हैं और हमें नई व्याख्याओं का पता लगाना होगा ! क्या आपने ध्यान दिया है कि इन सभी प्रयोगों में एक बात समान थी ? इन सभी स्थितियों में चुंबकीय क्षेत्र में परिवर्तन हो रहा था। उन्हीं परिपथों में प्रेरित धारा प्रवाहित हो रही थी जिनसे संबद्ध चुंबकीय क्षेत्र बदल रहा था। इससे हमें एक नया आधारभूत भौतिक नियम प्राप्त होता है :

परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र एक वैद्युत क्षेत्र उत्पन्न करता है

इस नये सिद्धांत द्वारा हम प्रेरित धारा के उद्गम की व्याख्या कर सकते हैं। वास्तव में, परिपथ के तार में स्थित आवेश इसी विद्युत क्षेत्र के कारण गतिमान होते हैं जो परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र के कारण उत्पन्न होता है।

यह तो इस परिघटना की गुणात्मक व्याख्या है। साथ ही साथ हमें प्रेरित धारा और चुंबकीय क्षेत्र के बीच एक परिमाणात्मक संबंध (quantitative relationship) भी स्थापित करना चाहिए। फ़ैराडे का विद्युतचुंबकीय प्रेरण नियम यही संबंध देता है।

13.2.1 फ़ैराडे का विद्युतचुंबकीय प्रेरण नियम

किसी परिपथ में धारा का प्रवाह किस कारण से होता है? जैसा कि आप जानते होंगे धारा प्रवाह के लिए हमें विद्युत वाहक बल (emf) के स्रोत, जैसे कि बैटरी, की आवश्यकता होती है जो परिपथ को निरंतर ऊर्जा प्रदान करती है। इसी प्रकार, जब एक परिपथ में प्रेरित धारा प्रवाहित होती है तो वहां एक प्रेरित विद्युत वाहक बल का होना आवश्यक है। इन्हीं बातों को ध्यान में रखकर फ़ैराडे ने प्रयोग से प्राप्त अपने परिणामों पर आधारित एक व्यापक नियम प्रस्तुत किया। इस नियम के अनुसार किसी भी परिपथ में प्रेरित विद्युत वाहक बल उस परिपथ में हो रहे चुंबकीय क्षेत्र के अभिवाह के समय परिवर्तन दर पर ही निर्भर करता है। गणितीय भाषा में इस नियम को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (13.1)$$

जहां ε प्रेरित विद्युत वाहक बल है और Φ उस परिपथ से जुड़ा चुंबकीय अभिवाह (magnetic flux) है।

हम समीकरण (13.1) द्वारा व्यक्त किए गए फ़ैराडे नियम को ऐसे रूप में भी लिख सकते हैं कि उसमें परिपथों का जिक्र ही न हो। आप जानते होंगे कि प्रेरित विद्युत वाहक बल एक परीक्षण आवेश पर, जो कि परिपथ में घूमता है, किया गया प्रति एकक आवेश कार्य (work per unit charge) होता है। क्योंकि कार्य, बल का रेखा समाकल (line integral) होता है और वैद्युत क्षेत्र प्रति एकक आवेश बल होता है, इसलिए हम विद्युत वाहक बल को परिपथ C में वैद्युत क्षेत्र के रेखा समाकल के रूप में लिख सकते हैं :

$$\varepsilon = \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

इकाई 9 में आप चुंबकीय अभिवाह का निम्नलिखित समाकल निरूपण देख ही चुके हैं

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

जहां S एक पृष्ठ है जिसकी परिसीमा (boundary) परिपथ C है।

तब फ़ैराडे नियम को हम इस प्रकार व्यक्त कर सकते हैं :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (13.2 क)$$

इस रूप में फ़ैराडे नियम में किसी भौतिक परिपथ के होने की कोई आवश्यकता नहीं होती। C आकाश में एक लूप (loop) को निरूपित करता है और S C द्वारा परिबद्ध पृष्ठ को निरूपित करता है। इस रूप में फ़ैराडे का नियम केवल प्रेरित वैद्युत क्षेत्रों को व्यक्त करता है जो कि तब उत्पन्न होते हैं जब चुंबकीय क्षेत्र परिवर्तित हो रहे होते हैं। यदि चुंबकीय क्षेत्र में वैद्युत परिपथ उपस्थित हो, तो प्रेरित धाराएं भी उत्पन्न होंगी। स्टोक्स प्रमेय (इकाई 9 देखिए) की सहायता से हम समीकरण (13.2 क) को अवकल रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \text{curl } \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

क्योंकि पृष्ठ S स्वेवच्छ (arbitrary) है, इसलिए

$$\text{curl } \mathbf{E} = - \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (13.2 \text{ ख})$$

क्योंकि \mathbf{B} स्थिति और समय दोनों पर निर्भर कर सकता है, इसलिए केवल \mathbf{B} के समय परिवर्तन को ध्यान में रखकर $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ के स्थान पर हम $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ लिखते हैं।

इस तरह हमें फ़ैराडे के दो बिल्कुल समतुल्य कथन प्राप्त होते हैं :

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{समाकल रूप}) \quad (13.2 \text{ क})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{अवकल रूप}) \quad (13.2 \text{ ख})$$

आपको याद होगा कि इस भाग के प्रारंभ में बताए गए प्रयोगों की व्याख्या में हमने दो अलग-अलग व्याख्याओं का अर्थात् फ़ैराडे-नियम और लारेन्ज़ बल नियम का प्रयोग किया है। जब परिपथ गतिमान होता है तब केवल लारेन्ज़ बल के कारण ही प्रेरित धारा उत्पन्न होती है। पर, जब हम चुंबक को गति देते हैं, तब परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र एक वैद्युत बल क्षेत्र प्रेरित करता है और इस वैद्युत क्षेत्र के कारण उत्पन्न वैद्युत बल ही प्रेरित धारा को उत्पन्न करता है। फिर भी, यह नियम कि एक परिपथ में प्रेरित विद्युत वाहक बल परिपथ में चुंबकीय अभिवाह के परिवर्तन दर के बराबर होता है दोनों ही स्थितियों पर लागू होता है। इस दृष्टि से देखने पर क्या यह आश्चर्यजनक सा नहीं लगता कि दो भिन्न प्रक्रियाओं में समान विद्युत वाहक बल प्राप्त होते हैं? वास्तव में, दो स्थितियों के बीच की इस सममिति ने ही आइन्स्टाइन को विशिष्ट आपेक्षिकता सिद्धांत (special theory of relativity) प्रस्तुत करने के लिए प्रेरित किया। पर, यह एक बिल्कुल ही अलग कहानी है।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि स्थैतिक आवेशों (static charges) और परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्रों से वैद्युत क्षेत्र उत्पन्न होते हैं। पर क्या इन क्षेत्रों की प्रकृति समान होती है? इसे स्वयं मालूम करने का प्रयास कीजिए।

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 2

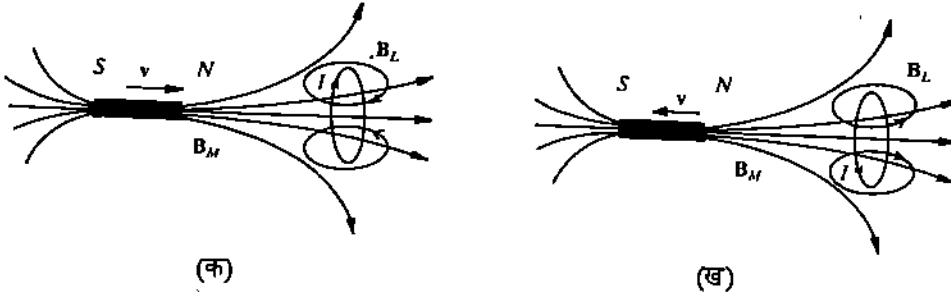
स्थैतिक आवेशों से उत्पन्न क्षेत्रों की प्रकृति और परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्रों से उत्पन्न वैद्युत क्षेत्रों की प्रकृति में आधारभूत अंतर को समझाइए।

अभी तक हमने फ़ैराडे के नियम में ऋण चिन्ह के बारे में कुछ भी नहीं कहा है। नियम में ऋण चिन्ह का एक विशेष महत्व है: इससे प्रेरित धारा की दिशा के बारे में पता चलता है और यह ऊर्जा संरक्षण (conservation of energy) का ही परिणाम है। आइए हम इस संबंध में थोड़ी और चर्चा करें। इसी से हमें लेन्ज़ नियम भी प्राप्त होगा।

13.2.3 प्रेरण और ऊर्जा संरक्षण : लेन्ज़-नियम

जब एक कुंडली (coil) में प्रेरित धारा प्रवाहित होती है, तो वैद्युत ऊर्जा का ऊष्मा के रूप में ह्रास होता है, क्योंकि कुंडली में कुछ प्रतिरोध (resistance) होता है। अब प्रश्न उठता है कि यह ऊर्जा कहाँ से आती है? ऊर्जा संरक्षण नियम से यह पता चलता है कि शून्य से ऊर्जा पैदा नहीं की जा सकती। अब प्रेरित धारा परिवर्ती चुंबकीय अभिवाह से उत्पन्न होती है। अतः ऊर्जा प्रदान करने के लिए अभिवाह में परिवर्तन लाने वाले अभिकर्मक को कार्य करना होगा।

आइए हम दंड चुंबक का एक सरल उदाहरण लें जिसे तार के एक लूप के निकट गति दी जाती है। जब हम चुंबक को लूप की ओर गति देते हैं तो लूप में धारा प्रेरित होती है (चित्र 13.4 क)। अन्य धाराओं की तरह इस प्रेरित धारा से भी चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है। इस क्षेत्र में चुंबक पर एक बल लगता है। यह बल अपकर्षी (repulsive) होगा जिससे कि कुंडली की ओर चुंबक को ले जाने के लिए हमें कार्य करना होगा न कि हमारे ऊपर कार्य किया जाएगा। मान लीजिए हम चुंबक



चित्र 13.4 : (क) : जब दंड चुंबक लूप की ओर गतिमान होता है, तब परिवर्ती चुंबकीय अभिवाह एक विद्युत बाहक बल प्रेरित करता है जिसके कारण लूप में धारा प्रवाहित होती है। ऊर्जा संरक्षण के लिए यह आवश्यक है कि प्रेरित धारा से उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र चुंबक की गति का विरोध करे। इस तरह, चुंबक को ले जाने वाला अधिकतम कार्य प्रदान करेगा जो कि लूप में ऊष्मा में व्यक्त जाता है; (ख) जब हम लूप से चुंबक को हटा लेते हैं तो प्रेरित धारा की दिशा विपरीत होती है जिससे कि लूप से उत्पन्न चुंबकीय बल चुंबक को हटाए जाने का विरोध करता है। चुंबक का चुंबकीय क्षेत्र B_M है और लूप का B_L ।

के उत्तरी ध्रुव को लूप की ओर ले जाते हैं तो लूप में प्रेरित धारा प्रवाहित होने के कारण वह एक चुंबकीय द्विध्रुव (magnetic dipole) की तरह व्यवहार करता है जिससे कि उसमें दंड चुंबक के क्षेत्र के जैसा ही चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है। चुंबक पर अपकर्षी बल होने के लिए, लूप द्विध्रुव का उत्तरी ध्रुव उपगामी चुंबक की ओर होना चाहिए। धारा लूप पर दक्षिण हस्त नियम लागू करने पर हम यह पाते हैं कि प्रेरित धारा चित्र 13.4 (क) में दिखाई गई दिशा में प्रवाहित होगी।

जब हम लूप से चुंबक को दूर ले जाते हैं तो क्या होता है? ऊर्जा संरक्षण के लिए यह आवश्यक है कि इसके लिए हम बल के विरुद्ध कार्य करें। तब लूप की ओर चुंबक का दक्षिण ध्रुव होगा। इसकी वजह से वहां एक आकर्षण बल उत्पन्न हो जाएगा जो चुंबक को दूर ले जाने का विरोध करेगा। परिणाम यह होता है कि लूप की धारा विपरीत दिशा में होती है (चित्र 13.4 ख देखें)।

ऊर्जा संरक्षण नियम से उत्पन्न इन दोनों परिणामों को लेन्ज़ नियम के रूप में प्रस्तुत किया जाता है :

प्रेरित धारा (प्रेरित विद्युत बाहक बल) की दिशा ऐसी होती है कि वह इसको उत्पन्न करने वाले परिवर्तन का विरोध करती है।

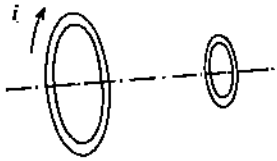
गणितीय रूप में लेन्ज़ नियम समीकरण (13.2) द्वारा दिए गए फ़ैराडे नियम के दक्षिण पक्ष में लगे ऋण चिन्ह से प्रदर्शित होता है।

इस संकल्पना को और अच्छी तरह से समझने के लिए विचार कीजिए कि उस स्थिति में क्या होगा जबकि प्रेरित धारा की दिशा अभिवाह के परिवर्तन में सहायक होती हो। उदाहरण के लिए अगर ऐसा हो कि जब चित्र 13.4 क में आप चुंबक को लूप की ओर ले जायें तब दक्षिण ध्रुव चुंबक की ओर हो। इस स्थिति में हमें चुंबक को थोड़ी सी ही गति देनी होगी और इतने से ही वह लगातार गतिमान रहेगा। इस स्थिति में चुंबक लूप की ओर त्वरित होगा और इस प्रक्रिया में उसकी गतिज ऊर्जा बढ़ेगी। साथ ही साथ लूप में ऊष्मा भी आ जाएगी। इस तरह, हम शून्य से ही ऊर्जा उत्पन्न कर सकेंगे। लेकिन इस तरह से ऊर्जा संरक्षण नियम का उल्लंघन होगा और जाहिर है कि ऐसा कभी नहीं होता।

लेन्ज़ नियम को लागू करते समय यह बात आपको हमेशा ध्यान में रखनी होगी कि प्रेरित धारा का चुंबकीय क्षेत्र, चुंबकीय क्षेत्र का विरोध नहीं करता, अपितु इस क्षेत्र में हुए परिवर्तन का विरोध करता है। उदाहरण के लिए, यदि लूप के चुंबकीय अभिवाह में कमी आती जाती हो, तो प्रेरित धारा ऐसी दिशा में प्रवाहित होती है जिससे कि इसका चुंबकीय अभिवाह लूप के चुंबकीय अभिवाह में वृद्धि करे; यदि लूप के चुंबकीय अभिवाह में वृद्धि होती जाती हो, तो धारा विपरीत दिशा में प्रवाहित होती है। यह एक प्रकार की जड़त्विय (inertial) परिघटना है : एक चालक लूप अपने में होकर जाने वाले अभिवाह को अचर बनाए रखना चाहता है। अगर हम अभिवाह में परिवर्तन लाने का प्रयास करते हैं तो लूप में एक ऐसी दिशा में प्रेरित धारा प्रवाहित होती है जो हमारे प्रयास का विरोध करती है।

अब आप लेन्ज नियम को कुछ साधारण स्थितियों पर लागू करना चाहेंगे और प्रेरित धारा की दिशा मालूम करना चाहेंगे।

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं



चित्र 13.5

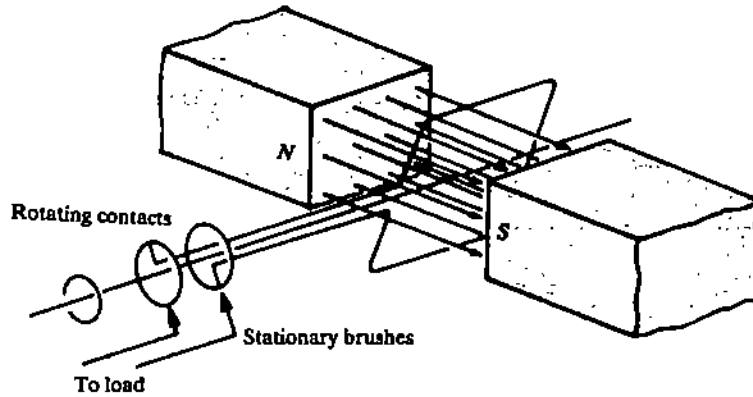
बोध प्रश्न 3

- क) चित्र 13.5 क में, लूप में प्रेरित धारा की दिशा क्या होगी जबकि बल F से लूप को खींचकर इसके क्षेत्रफल को कम किया गया हो। B की दिशा पृष्ठ में अंदर की ओर और इसके लंबवत् है।
- ख) चित्र 15.5 ख के छोटे लूप में प्रेरित धारा की दिशा क्या होगी जबकि एक बैटरी द्वारा, जिसे चित्र में नहीं दिखाया गया है, बड़े लूप में बायीं ओर से देखने पर दक्षिणावर्त धारा अचानक स्थापित की जाती है ?

आइए अब हम इन नियमों के एक अनुप्रयोग पर विचार करें जो कि संभवतः आज का सर्वाधिक महत्वपूर्ण प्रौद्योगिकीय अनुप्रयोग है।

उदाहरण 1 : ए सी जेनरेटर

क्या आप जानते हैं कि आज पूरी दुनिया में प्रतिदिन लगभग 10^{13} वाट की दर से विद्युत ऊर्जा की खपत होती है और तकरीबन समस्त विद्युत ऊर्जा वैद्युत जेनरेटरों से प्राप्त होती है ? जेनरेटर एक चुंबकीय क्षेत्र में चालकों का निकाय होता है। चित्र 13.6 में एक सरल जेनरेटर दिखाया गया है।



चित्र 13.6: एक ए सी वैद्युत जेनरेटर का सरल आरेख। जब चुंबकीय क्षेत्र में लूप घूर्णन करता है, तब परिवर्ती चुंबकीय अभिवाह से इसमें एक प्रेरित विद्युत वाहक बल उत्पन्न होता है। धारा घूर्णनी संपर्कों और स्थिर ब्रशों से होती हुई एक वैद्युत भार (load) की ओर प्रवाहित होती है।

चुंबक के ध्रुवों के बीच रखी गई कुंडली का घूर्णन कराने के लिए यांत्रिक ऊर्जा प्रयुक्त होती है। बिजली घरों में यांत्रिक ऊर्जा का स्रोत या तो गिरता हुआ पानी (पन बिजली घरों में) होता है या भाप होती है जिसे ईंधन जलाकर (तापीय बिजलीघर में) या नाभिकीय विखंडन द्वारा (नाभिकीय शक्ति संयंत्र में) बनाया जाता है। घूर्णन के कारण कुंडली से गुजरने वाले चुंबकीय अभिवाह में परिवर्तन आ जाता है जिससे विद्युत वाहक बल प्रेरित होता है। तब कुंडली में प्रेरित धारा प्रवाहित होती है।

आइए हम प्रेरित विद्युत वाहक बल और प्रेरित धारा के परिमाण ज्ञात करें। मान लीजिए S कुंडली का क्षेत्रफल है और θ चुंबकीय क्षेत्र और कुंडली समतल पर अभिलंब के बीच का कोण है। कुंडली में अभिवाह होता है

$$\Phi = BS \cos \theta \quad (13.3 \text{ क})$$

यदि कुंडली एकसमान कोणीय चाल ω से घूर्णन कर रही हो, तो समय के साथ θ में परिवर्तन होता रहता है क्योंकि $\theta = \omega t$ । तब कुंडली में विद्युत वाहक बल होगा

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(BS \cos \omega t)$$

$$\varepsilon = BS \omega \sin \omega t \quad (13.3ख)$$

विद्युतचुंबकीय प्रेरण

यदि हम कुंडली के तार को बिंदु P की ओर लायें जो कि घूर्णन कर रही कुंडली से काफी दूरी पर हो और जहां (चुंबक के कारण) चुंबकीय क्षेत्र में समय के साथ परिवर्तन नहीं होता हो, तब समीकरण 13.2 (ख) के अनुसार इस प्रदेश में $\nabla \times E$ शून्य होगा अर्थात् E संरक्षी होगा। और तब हम इस क्षेत्र से संबंधित एक वैद्युत विभव को परिभाषित कर सकते हैं। मान लीजिए कुंडली के दोनों सिरों का विभवांतर V है। यदि जेनरेटर से कोई धारा नहीं ली जा रही हो, तो दो तारों के बीच का विभवांतर घूर्णनी कुंडली के विद्युत वाहक बल के बराबर होगा, अर्थात्

$$V = BS \omega \sin \omega t = V_0 \sin \omega t \quad (13.4 क)$$

जहां $V_0 = BS \omega$ जेनरेटर की शिखर निर्गम वोल्टता (peak output voltage) है। जैसा कि समीकरण 13.4 क में दिया गया है, V एक प्रत्यावर्ती वोल्टता (alternating voltage) है। यदि हम इन तारों में एक भार R लगा दें, तो हम एक प्रत्यावर्ती धारा (alternating current) जनित कर सकते हैं जिसका परिमाण है

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0}{R} \sin \omega t \quad (13.4 ख)$$

क्या अब आप एक ए सी जेनरेटर की डिजाइन से संबंधित संख्यात्मक प्रश्न करना चाहेंगे ?

बोध प्रश्न 4

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

एक वैद्युत जेनरेटर में, जैसा कि चित्र 13.6 में दिखाया गया है, 50 cm की भुजा वाला तार का एक वर्गाकार लूप है जिसमें 10 घुमाव हैं। हमारे देश में प्रयुक्त मानक 50 Hz ए सी का उत्पादन करने के लिए लूप को 50 परिक्रमण प्रति सैकंड की दर से घुमाया जाता है। जेनरेटर का शिखर निर्गम वोल्टता 300 V हो, इसके लिए चुंबकीय क्षेत्र का क्या परिमाण होना चाहिए ?

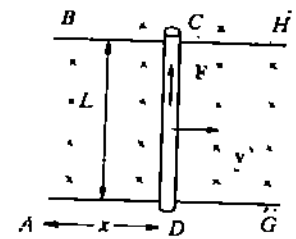
आपको याद होगा कि चित्र 13.2 क में दिखाए गए पहले प्रयोग में आपने गुणात्मक रूप से यह दिखाने के लिए बोध प्रश्न 1 हल किया था कि गतिमान तार पर लग रहे लॉरेन्ज़ बल के कारण अचर चुंबकीय क्षेत्र में विद्युत वाहक बल प्रेरित होता है। बाद में फ़ैराडे नियम प्रस्तुत करते समय हमने यह बताया था कि इस स्थिति पर भी समीकरण (13.2) लागू होता है। इस तरह से जनित वाहक बल को गतिक विद्युत वाहक बल (motional electromotive force) कहा जाता है। आइए हम परिमाणात्मक रूप से गतिक विद्युत वाहक बल ज्ञात करें।

13.2.3 गतिक विद्युत वाहक बल

आइए हम एक सरल स्थिति लें, जैसा कि चित्र 13.7 में दिखाया गया है। लंबाई L वाले तार CD को अचर वेग v से दायीं ओर खींचा जाता है। यह तार $GABH$ के बिंदुओं C और D के संपर्क में है जिससे कि एक तार लूप $ABCD$ बन जाता है। हम तार CD की स्थिति को दूरी x से मापते हैं जैसा कि चित्र में दिखाया गया है। इस लूप को एक अचर चुंबकीय क्षेत्र B में रखा जाता है जिसकी दिशा पृष्ठ के अंदर की ओर उसके लंबवत् है। जैसा कि आप जानते हैं तार में इलेक्ट्रॉनों के तापीय वेग काफी अधिक होते हैं। परन्तु यहां हम इनकी उपेक्षा इसलिए कर सकते हैं क्योंकि ये यादृच्छिकता: अभिविन्यस्त (randomly oriented) होते हैं और यदि हम तार CD के सभी इलेक्ट्रॉनों पर लगे बलों को जोड़ दें, तो लॉरेन्ज़ बल में इलेक्ट्रॉनों के तापीय वेगों का नेट योगदान शून्य होता है। इस तरह, तार के प्रत्येक आवेश पर निम्नलिखित बल लगता है

$$F = qv \times B$$

जहां हमने तार में इलेक्ट्रॉनों के तापीय वेगों की उपेक्षा कर दी है। इसकी उपेक्षा करने का कारण ऊपर बताया जा चुका है। अब, क्योंकि $v \perp B$, इसलिए $F = qvB$ और F की दिशा चित्र 13.7 में दिखाई गई है। लूप के चारों ओर प्रभावी विद्युत वाहक बल का परिकलन करने के लिए हमें प्रति एकक आवेश नेट कार्य ज्ञात करना होगा, जो कि निम्नलिखित है :



चित्र 13.7: लूप में प्रेरित विद्युत वाहक बल की व्याख्या गतिमान तार के आवेशों पर लगे बलों के आधार पर की जाती है।

$$\frac{W}{q} = \frac{1}{q} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} \quad (13.5 \text{ क})$$

जहां $d\mathbf{l}$, CD के अनुदिश लंबाई का एक अत्यणु अल्पांश (infinitesimal element) है। अतः प्रेरित विद्युत वाहक बल होगा :

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{W}{q} = \frac{1}{q} \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} && \text{(यहाँ } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = -Fdl \text{ क्योंकि} \\ &= -vB \int dl && \text{ } \mathbf{F} \text{ और } d\mathbf{l} \text{ विपरीत दिशा में हैं,} \\ & && \text{और } F = qvB) \end{aligned}$$

$$\text{या} \quad \varepsilon = -vLB \quad (13.5 \text{ ख})$$

परन्तु राशि vLB लूप में अभिवाह की परिवर्तन दर है क्योंकि लूप का चुंबकीय अभिवाह है

$$\Phi = BLx, \text{ जहाँ } Lx \text{ लूप का क्षेत्रफल है}$$

$$\text{और} \quad \frac{d\Phi}{dt} = BL \frac{dx}{dt} = BLv \quad (13.5 \text{ ग})$$

अतः समीकरणों (13.5 ख) और (13.5 ग) की तुलना करने पर हमें गतिक विद्युत वाहक बल का निम्न व्यंजक प्राप्त होता है

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

यह फ़ैराडे नियम ही है। इस तरह हम यह पाते हैं कि फ़ैराडे नियम एक नया नियम है जो कि गतिमान आवेश पर चुंबकीय बल नियमों के संगत भी है। संक्षेप में, हम यह कह सकते हैं कि प्रेरण की भौतिकी निम्नलिखित दो आधारभूत नियमों से नियंत्रित होती है :

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad \text{लारेन्ज़ बल नियम}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{फ़ैराडे नियम}$$

अभी तक आपने फ़ैराडे नियम का अध्ययन किया है जो कि एक परिपथ में परिवर्ती चुंबकीय अभिवाह की परिवर्तन दर का, उसमें प्रेरित विद्युत वाहक बल के साथ संबंध स्थापित करता है। आइए अब हम उस स्थिति पर विचार करें, जबकि एक वैद्युत परिपथ में परिवर्ती अभिवाह स्वयं इसमें या आस-पास के परिपथ में उपस्थित परिवर्ती धारा के कारण उत्पन्न होता है। इससे हमें परिपथ के प्रेरकत्व की संकल्पना मिलती है। आइए अब हम इस परिघटना का अध्ययन करें।

13.3 प्रेरण

जब एक परिपथ में प्रवाहित धारा में परिवर्तन होता है, तब इसके आस पास परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न हो जाता है। यदि इस क्षेत्र का एक भाग स्वयं परिपथ से होकर जाता हो तो उसमें एक विद्युत वाहक बल प्रेरित हो जाता है। यदि इसके आस पास कोई और परिपथ हो तो उस परिपथ से गुज़रने वाले चुंबकीय अभिवाह में परिवर्तन होता है जिसके कारण उस परिपथ में एक प्रेरित विद्युत वाहक बल आ जाता है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि निम्न दो विधियों से परिपथों में प्रेरण हो सकती है :

- तार की कुंडली अपने में विद्युत वाहक बल प्रेरित कर सकती है।
- आस पास स्थित ऐसी दो कुंडलियों के युग्म में जिनमें से एक कुंडली से संबद्ध अभिवाह दूसरी कुंडली में से गुज़रता हो, एक कुंडली की परिवर्ती धारा के कारण दूसरी कुंडली में प्रेरित विद्युत वाहक बल उत्पन्न होता है।

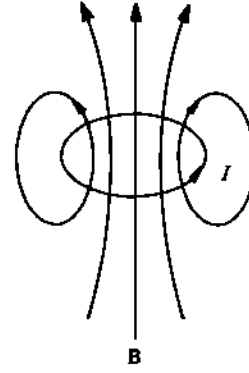
पहली स्थिति में हम कुंडली के स्व-प्रेरकत्व (self-inductance) की बात करते हैं और दूसरी स्थिति

में कुंडलियों के अन्योन्य प्रेरकत्व (mutual inductance) की। आइए हम इन प्रभावों पर अलग अलग चर्चा करें।

13.3.1 स्व-प्रेरकत्व

एक गोल लूप लीजिए जिसमें धारा I प्रवाहित हो रही हो (चित्र 13.8)। इस लूप में प्रवाहित हो रही धारा से एक चुंबकीय अभिवाह संबद्ध होता है। जब तक धारा अपरिवर्ती रहती है तब तक चुंबकीय अभिवाह में कोई परिवर्तन नहीं होता और तब परिपथ में प्रेरित धारा भी उपस्थित नहीं होती। पर, यदि हम लूप में प्रवाहित धारा में परिवर्तन करें तो अभिवाह में भी परिवर्तन होता है और तब परिपथ में विद्युत वाहक बल प्रेरित हो जाता है। लेन्ज नियम से प्रेरित धारा की दिशा मालूम हो जाती है अर्थात् यह लूप धारा में हो रहे परिवर्तन का विरोध करती है। लूप में प्रवाहित धारा में हम जितनी तेजी से परिवर्तन करेंगे, अभिवाह की परिवर्तन दर उतनी ही अधिक होगी और प्रेरित विद्युत वाहक बल भी, जो धारा परिवर्तन का विरोध करता है, अधिक होगा।

विद्युतचुंबकीय प्रेरण



चित्र 13.8: एक कुंडली का स्व-प्रेरकत्व

इस गुणधर्म की परिमाणात्मक रूप से चर्चा करने के लिए हम प्रत्येक परिपथ के साथ राशि L का, जिसे परिपथ का स्व-प्रेरकत्व कहा जाता है, संबंध स्थापित करते हैं। स्व-प्रेरकत्व की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है

$$L = \frac{\Phi}{I} \quad (13.6 \text{ क})$$

जहां Φ परिपथ से होकर जाने वाला अभिवाह है, जबकि परिपथ में धारा I प्रवाहित हो रही हो। स्व-प्रेरकत्व का मात्रक हेनरी (H) है, जो कि जोसेफ हेनरी के नाम पर रखा गया है। परिभाषा के अनुसार

$$1 \text{ हेनरी} = 1\text{H} = 1 \text{ टेस्ला-मीटर}^2 / \text{एम्पीयर}$$

N घुमावों वाली कुंडली के लिए

$$L = \frac{N\Phi}{I} \quad (13.6 \text{ ख})$$

सभी लूपों में, चाहे वे सीधे तार के रूप में हों या कुंडली के रूप में हों, स्व-प्रेरकत्व होता है। फिर भी, स्व-प्रेरकत्व के प्रभाव का महत्व केवल तभी होता है जबकि परिपथ में चुंबकीय अभिवाह अधिक हो या जबकि धारा में काफी तेजी से परिवर्तन होता हो। उदाहरण के लिए, 1 cm लंबे सीधे तार में लगभग 5×10^{-9} H का प्रेरकत्व होता है और यह 50 Hz ए सी में हो रहे परिवर्तनों का बहुत कम विरोध करता है। परन्तु टी वी सेटों, बड़े कंप्यूटरों या उपग्रह संचार जैसे उच्च आवृत्ति संचारों (high frequency communication) में 10^{-9} s के समय मापक्रम पर धारा में परिवर्तन होता है। तब स्वयं तारों के स्व-प्रेरकत्व को ध्यान में रखना होता है। स्व-प्रेरकत्व प्रदर्शित करने के लिए कुछ युक्तियों को बनाया जाता है। इन्हें प्रेरक (inductors) कहा जाता है।

फैराडे नियम के अनुसार प्रेरक में प्रेरित विद्युत वाहक बल होता है

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{dI}{dt} \quad (13.7)$$

प्रेरित विद्युत वाहक बल को विरोधी विद्युत वाहक बल (back emf) भी कहा जाता है। समीकरण (13.7) से यह पता चलता है कि एक प्रेरक में विरोधी विद्युत वाहक बल प्रेरक धारा के परिवर्तन दर पर निर्भर करता है और धारा में हो रहे परिवर्तन का विरोध करता है। क्योंकि अनंत विद्युत वाहक बल का होना असंभव है, इसलिए समीकरण (13.7) को देखने से यह पता चलता है कि प्रेरक धारा में तात्कालिक परिवर्तन नहीं हो सकता। अतः हम यह कह सकते हैं कि

एक प्रेरक में प्रवाहित धारा में तात्कालिक परिवर्तन नहीं हो सकता

अभी आपने यह पढ़ा कि एक प्रेरक का स्व-प्रेरकत्व इसमें प्रवाहित धारा में हो रहे परिवर्तन के विरोध का एक माप है। आप एक प्रेरक के स्व-प्रेरकत्व का परिमाण किस प्रकार ज्ञात करेंगे ?

प्रेरक का प्रेरकत्व उसकी ज्यामिति पर निर्भर करता है। सिद्धांत रूप में हम किसी भी परिपथ का

स्व-प्रेरकत्व परिकल्पित कर सकते हैं, पर व्यवहार में यदि ज्यामिति सरल न हो, तो इसका परिकलन काफी कठिन होता है। सोलेनाइड (solenoid) सरल ज्यामिति वाली एक युक्ति है और वैद्युत परिपथों में इसका व्यापक प्रयोग किया जाता है। अतः आइए हम सोलेनाइड का स्व-प्रेरकत्व ज्ञात करें।

सोलेनाइड का स्व-प्रेरकत्व

अनुपरिच्छेद क्षेत्रफल A और लंबाई L वाला एक सोलेनाइड लीजिए जिसमें तार के N घुमाव हों। इसका प्रेरकत्व मालूम करने के लिए हमें सोलेनाइड की धारा और इसके चुंबकीय अभिवाह के बीच संबंध स्थापित करना होगा। इकाई 9 में आपने एक लंबे सोलेनाइड का चुंबकीय क्षेत्र मालूम करने के लिए एंपीयर नियम को लागू किया था, जो कि यह है

$$B = \mu_0 n I$$

जहां n प्रति एकक लंबाई घुमावों की संख्या है और I सोलेनाइड में प्रवाहित धारा है। क्योंकि यहां $n = N/L$ इसलिए

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L}$$

सोलेनाइड के N घुमावों में कुल अभिवाह होगा

$$\Phi = N \int_{\text{1 turn}} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = NB \int_{\text{1 turn}} dS = NBA = \frac{\mu_0 N^2 A I}{L}$$

यहां हमने $\mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = BdS$ लिखा है क्योंकि सोलेनाइड का चुंबकीय क्षेत्र एकसमान है और इसकी दिशा अलग अलग घुमावों के अनुपरिच्छेद के लंबवत् है। सोलेनाइड का स्व-प्रेरकत्व होगा

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu_0 N^2 A}{L} \quad (13.8)$$

इस जानकारी के मिल जाने के बाद शायद आप सोलेनाइड के स्व-प्रेरकत्व और विरोधी विद्युत वाहक बल का परिमाण ज्ञात करना चाहें। इसके लिए आप निम्न बोध प्रश्न हल करें।

प्रश्न पर 10-मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 5

1m लंबे और 20 cm व्यास वाले सोलेनाइड में तार के 10,000 घुमाव हैं। इसमें प्रवाहित हो रही 2.5A की धारा 1.0ms में धीरे धीरे शून्य हो जाती है। प्रेरक का विरोधी विद्युत वाहक बल क्या होगा जबकि धारा को शून्य किया जाता है? यहां $\mu_0 = 1.26 \times 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}$ लीजिए।

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं, एक प्रेरक में विरोधी विद्युतवाहक बल, धारा परिवर्तन का विरोध करता है और इस बल का परिमाण इस बात पर निर्भर करता है कि कितनी तेजी से धारा में परिवर्तन होता है। यदि हम बहुत ही थोड़े समय में धारा को रोकने की कोशिश करें, तो $\frac{dI}{dt}$ काफी बड़ा होगा और एक बहुत बड़ा विरोधी विद्युत वाहक बल उत्पन्न होगा। यही कारण है कि सोलेनाइड जैसी युक्तियों को बंद करने पर उत्पन्न प्रेरित धाराओं के कारण संवेदनशील इलेक्ट्रॉनिक युक्तियां तट हो सकती हैं। बोध प्रश्न-5 को हल करने पर आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि उन परिपथों के, जिनमें बड़े-बड़े प्रेरक लगे हुए हैं, स्विच बंद करते समय काफी सतर्कता बरतने की आवश्यकता होती है। अपने दैनिक जीवन में भी प्रायः आप यह देखते होंगे कि जब आप बिजली का स्विच बंद करते हैं तो एक चिंगारी-सी निकलती है। नया आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों होता है? ऐसा विद्युतचुंबकीय प्रेरण के कारण होता है, जो कि परिपथ में धारा बनाये रखने की कोशिश करता है। अब शायद आप यह भी जानना चाहें कि किसी परिपथ में कोई युक्ति लगाकर स्विच दबाने पर क्या होता है? इस प्रश्न का उत्तर हमें परिपथों में लगे प्रेरकों की भूमिका का ज्ञान कराता है। आइए हम इस भूमिका को और अच्छी तरह से समझने के लिए एक LR परिपथ का उदाहरण लें।

उदाहरण 2: LR परिपथ

चित्र 13.9 क में दिखाया गया परिपथ लीजिए जिसमें प्रतिरोध R और प्रेरकत्व L से जुड़ी एक बैटरी है, जो विद्युत वाहक बल का स्रोत है। जब हम स्विच बंद कर देते हैं तब परिपथ में कितनी धारा प्रवाहित होती है ?

हल

आइए हम परिपथ में धारा का परिमाण निकालें। परिपथ में कुल विद्युत वाहक बल बल बैटरी द्वारा उपलब्ध कराए गए विद्युत वाहक बल और प्रेरक के विरोधी विद्युत वाहक बल का योग होता है। अतः ओम नियम से यह प्राप्त होता है

$$\epsilon_0 - L \frac{dI}{dt} = IR \quad (13.9)$$

$I(t)$ प्राप्त करने के लिए हम इस समीकरण को हल कर सकते हैं

$$\frac{dI}{I - \frac{\epsilon_0}{R}} = -\frac{R}{L} dt$$

$$\int \frac{dI}{(I - \epsilon_0/R)} = -\frac{R}{L} \int dt + C_1$$

$$\ln(I - \epsilon_0/R) = -\frac{Rt}{L} + C_1$$

$$I - \epsilon_0/R = C \exp(-Rt/L)$$

$$I = \frac{\epsilon_0}{R} + C \exp(-Rt/L) \quad (13.10 क)$$

अचर C को आदि प्रतिबंधों (initial conditions) से मालूम किया जा सकता है।

स्विच को बंद करने से पहले परिपथ में धारा शून्य होती है, जिससे हमें यह प्रतिबंध प्राप्त होता है कि $t = 0$ पर $I = 0$ । इस आदि प्रतिबंध से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$C = -\epsilon_0/R$$

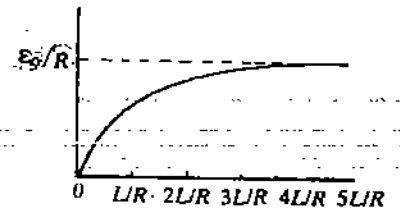
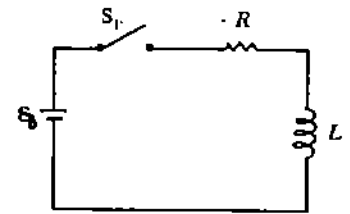
$$I(t) = \frac{\epsilon_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}) \quad (13.10 ख)$$

यदि परिपथ में कोई प्रेरकत्व नहीं होता, तो धारा का मान तुरंत ϵ_0/R हो गया होता। परिपथ में प्रेरकत्व होने के कारण धारा में धीरे-धीरे ही वृद्धि होती है और धारा अपने अपरिवर्ती अवस्था मान तक तभी पहुंचती है जबकि $t \rightarrow \infty$ । धारा को अपने अपरिवर्ती अवस्था मान के लगभग दो-तिहाई भाग तक पहुंचने में लिया गया समय होता है L/R जिसे परिपथ का प्रेरक समय स्थिरांक

(inductive time constant) कहा जाता है। एक LR परिपथ की धारा में L/R से कम समय में सार्थक परिवर्तन नहीं हो सकता। धारा और समय का ग्राफ चित्र 13.9 ख में दिखाया गया है।

यहां आप यह देख सकते हैं कि L जितना बड़ा होगा, विरोधी विद्युत वाहक बल भी उतना ही बड़ा होगा और धारा को प्रवाहित होने में उतना ही अधिक समय लगेगा। इस तरह, हम यह देखते हैं कि विद्युत परिपथों में प्रेरकत्व की भूमिका ठीक वैसी ही होती है जैसी कि यांत्रिक तंत्रों में द्रव्यमान की होती है। आप जानते हैं कि किसी वस्तु का द्रव्यमान जितना अधिक होगा, उसे अपने वेग में परिवर्तन करने में उतनी ही अधिक कठिनाई होगी। ठीक इसी प्रकार, किसी परिपथ में L जितना बड़ा होगा उतना ही उस परिपथ में प्रवाहित धारा में परिवर्तन करने में कठिनाई होगी।

क्या अब आप वास्तविक परिपथों से संबद्ध समय मापक्रमों के बारे में कुछ जानकारी प्राप्त करना चाहेंगे? इसके लिए निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल कीजिए।



बोध प्रश्न 6

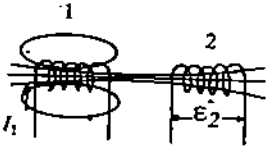
प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

एक 15V बैटरी, 2000 Ω प्रतिरोधक और 10mH प्रेरक को परिपथ में श्रेणी में जोड़ा गया है। काफी अधिक समय अंतराल (~100 L/R) के बाद परिपथ में अपरिवर्ती अवस्था धारा क्या होगी? अपने अपरिवर्ती अवस्था के आधे मान तक पहुंचने में धारा को कितना समय लगेगा?

आइए अब हम दूसरी स्थिति पर विचार करें, जहां परिपथ की परिवर्ती धारा परिपथ में एक धारा प्रेरित करती है। यह अन्योन्य प्रेरण की परिघटना है।

13.3.2 अन्योन्य प्रेरकत्व

दो परिपथ लीजिए जो एक दूसरे के निकट विरामावस्था में स्थित हैं। यदि हम परिपथ 1 में धारा I_1 प्रवाहित करें, तो इससे एक चुंबकीय क्षेत्र B_1 उत्पन्न होगा (चित्र 13.10)।



मान लीजिए Φ_2 परिपथ 2 में B_1 का अभिवाह है। यदि हम I_1 में परिवर्तन करें, तो Φ_2 में भी परिवर्तन होगा और परिपथ 2 में एक प्रेरित विद्युत वाहक बल आ जाएगा। इस प्रेरित विद्युत वाहक बल के कारण परिपथ 2 में एक प्रेरित धारा प्रवाहित होने लगेगी। इस तरह, जब भी हम परिपथ 1 की धारा में परिवर्तन करते हैं, परिपथ 2 में एक प्रेरित धारा प्रवाहित होने लगेगी। अब, क्योंकि बायो-सावर्ट नियम (इकाई 9) के अनुसार चुंबकीय क्षेत्र B_1 धारा I_1 के समानुपाती होता है, इसलिए लूप 2 में B_1 का अभिवाह भी I_1 के समानुपाती होगा।

चित्र 13.10: दो परिपथों का अन्योन्य प्रेरकत्व

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint \frac{dl_1 \times \hat{r}}{r^2}$$

और
$$\Phi_2 = \int_S B_1 \cdot dS_2 \propto I_1 \tag{13.11 क}$$

इस तरह, हम यह लिख सकते हैं

$$\Phi_2 = M I_1 \tag{13.11 ख}$$

या
$$\frac{d\Phi_2}{dt} = M \frac{dI_1}{dt} \tag{13.12 क}$$

फैराडे नियम के अनुसार, कुंडली 2 में प्रेरित विद्युत वाहक बल यह होगा

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt} \tag{13.12 ख}$$

आनुपातिक स्थिरांक M को दो परिपथों का अन्योन्य प्रेरकत्व (mutual inductance) कहा जाता है। यह एक शुद्ध ज्यामितीय राशि है जो कि परिपथों के आकार प्रकार और आपेक्षिक विन्यास पर निर्भर करती है।

समीकरण (13.12) स्थापित करने के लिए, पहली कुंडली में विद्युत वाहक बल प्रेरित करने के लिए हम दूसरी कुंडली की धारा में भी परिवर्तन कर सकते थे। तब कुंडली 1 में प्रेरित विद्युत वाहक बल के लिए हमें वैसा-ही परिणाम प्राप्त होता-

$$\mathcal{E}_1 = -M \frac{dI_2}{dt} \tag{13.13}$$

अन्योन्य प्रेरकत्व का मात्रक भी हेनरी (H) है। सामान्य इलेक्ट्रॉनिक परिपथों में अन्योन्य प्रेरकत्व का परिसर माइक्रोहेनरी से अनेक हेनरी तक होता है।

आइए हम युग्मित सोलेनाइड का अन्योन्य प्रेरकत्व मालूम करने के लिए एक उदाहरण लें। इस प्रकार के विन्यास का प्रयोग वाहनों के इग्निशन कॉयल में भी किया जाता है।

उदाहरण 3 : युग्मित सोलेनाइडों का अन्योन्य प्रेरकत्व

लंबाई L_2 वाले एक छोटे सोलेनाइड को लंबाई L_1 और क्षेत्रफल A वाले एक लंबे सोलेनाइड पर लपेटा गया है, जैसा कि चित्र 13.11 में दिखाया गया है। दोनों सोलेनाइडों में प्रति एकक लंबाई N घुमाव हैं। इस विन्यास का अन्योन्य प्रेरकत्व क्या होगा ?

हल

लंबे सोलेनाइड द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र है

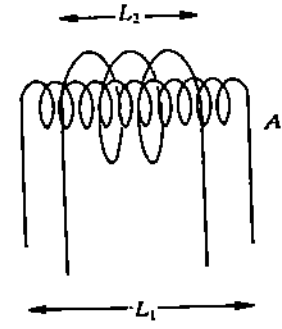
$$B = \mu_0 N I$$

यह क्षेत्र अचर होता है और सोलेनाइड कुंडलियों के समतल पर लंब होता है। यह लंबे सोलेनाइड के आंतरिक भाग तक ही सीमित रहता है। अतः छोटे सोलेनाइड के एक लूप में अभिवाह, लंबे सोलेनाइड की क्षेत्रफल प्रबलता और लूप के क्षेत्रफल का गुणनफल होता है। क्योंकि छोटे सोलेनाइडों में घुमावों की कुल संख्या NL_2 है, इसलिए इसमें कुल अभिवाह होगा

$$\Phi_2 = NL_2 \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = NL_2 BA$$

और अन्योन्य प्रेरकत्व यह होगा

$$M = \frac{\Phi_2}{I} = \frac{NL_2 BA}{I} = \frac{NL_2 \mu_0 N I A}{I} = \mu_0 N^2 L_2 A \quad (13.14)$$



चित्र 13.11 : युग्मित सोलेनाइडों का अन्योन्य प्रेरकत्व

अब आप इन संकल्पनाओं को एक व्यावहारिक स्थिति पर लागू करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 7

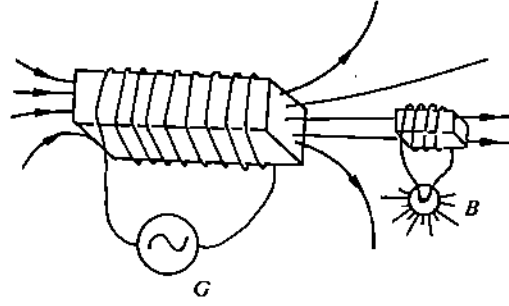
एक वाहन के इंजन में पेट्रोल तब जलता है जबकि स्पार्क प्लग पर लगायी गई उच्च वोल्टता के कारण प्लग के दो चालकों के बीच स्पार्क उत्पन्न होता है। इस उच्च वोल्टता को एक इग्निशन कॉयल से प्राप्त किया जाता है। इग्निशन कॉयल दो कुंडलियों की एक ऐसी व्यवस्था है जिसमें एक कुंडली को दूसरी कुंडली के सिरे पर कसकर लपेट दिया जाता है। वाहन की बैटरी से आने वाली धारा कम घुमावों वाली कुंडली से होकर प्रवाहित होती है। नियत समय अंतराल पर एक स्विच से इस धारा को बार-बार रोका जाता है। धारा में अचानक परिवर्तन होने से अधिक घुमावों वाली कुंडली में एक बड़ा विद्युत वाहक बल प्रेरित होता है और इस विद्युत वाहक बल के कारण स्पार्क उत्पन्न होता है। एक इग्निशन कॉयल स्पार्क प्लग को 3.0A की धारा और 24 kV का विद्युत वाहक बल प्रदान करता है। यदि हर 0.10 ms पर कुंडली में प्रवाहित धारा को रोका जाए, तो इग्निशन कॉयल का अन्योन्य प्रेरकत्व क्या होगा ?

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

अन्योन्य प्रेरकत्व की परिघटना का एक अतिमहत्वपूर्ण अनुप्रयोग ट्रांसफॉर्मर में देखने को मिलता है। आइए हम इस पर कुछ विस्तृत चर्चा करें।

13.3.3 ट्रांसफॉर्मर

अभी आपने पढ़ा कि एक कुंडली की परिवर्ती धारा के कारण दूसरी कुंडली में विद्युत वाहक बल प्रेरित हो जाता है। और, दूसरी कुंडली में प्रेरित विद्युत वाहक बल कुंडली के चुंबकीय अभिवाह के परिवर्तन दर के बराबर होता है। मान लीजिए हम दो कुंडलियां लेते हैं और उनमें से एक कुंडली को एक ए सी जेनरेटर से जोड़ देते हैं। धारा में लगातार परिवर्तन होते रहने से दूसरी कुंडली में एक परिवर्ती चुंबकीय अभिवाह उत्पन्न होता है। इस परिवर्ती अभिवाह के कारण दूसरी कुंडली में एक प्रत्यावर्ती विद्युत वाहक बल जनित होता है जिसकी आवृत्ति वही होती है जो पहली कुंडली में जनक धारा की होती है। तब दूसरी कुंडली में प्रेरित विद्युत वाहक बल से इतनी बिजली पैदा की जा सकती है कि वह एक बल्ब को जला दे (चित्र 13.12)।



चित्र 13.12: सीधा संबंध किए बिना ही दो कुंडलियों के कारण जेनरेटर इतनी बिजली पैदा कर देता है कि उससे बल्ब को जलाया जा सकता है। यह अन्योन्य प्रेरण का एक अनुप्रयोग है।

अब यदि हम दूसरी कुंडली में घुमावों की संख्या बढ़ा दें, तो पहली कुंडली के विद्युत वाहक बल की तुलना में दूसरी कुंडली में प्रेरित विद्युत वाहक बल को अधिक किया जा सकता है। ऐसा होने का कारण यह है कि एक दिए हुए चुंबकीय क्षेत्र में कुंडली में अभिवाह घुमावों की संख्या के समानुपाती होता है। इसी प्रकार घुमावों की संख्या को कम करके पहली कुंडली के विद्युत वाहक बल की तुलना में दूसरी कुंडली में प्रेरित विद्युत वाहक बल को कम किया जा सकता है।

आइए हम दूसरी कुंडली जिसे **द्वितीयक कुंडली** (secondary coil) भी कहा जाता है और पहली कुंडली, जिसे **प्राथमिक कुंडली** (primary coil) भी कहा जाता है, में वोल्टता का परिमाण ज्ञात करें।

प्राथमिक और द्वितीयक कुंडलियों में वोल्टता

चित्र 13.13 (ख) में चित्र 13.13 (क) में दिखाए गए ट्रांसफॉर्मर का एक रेखा चित्र दिखाया गया है। इसमें N_1 घुमावों वाली एक प्राथमिक कुंडली (P) है। जब स्विच S_1 को बंद कर दिया जाता है तो प्राथमिक कुंडली में धारा प्रवाहित होने लगती है और जैसे जैसे धारा में वृद्धि होती है वैसे-वैसे परिपथ से गुजरने वाले चुंबकीय अभिवाह में वृद्धि होती है, जिससे प्राथमिक कुंडली में एक विरोधी विद्युत वाहक बल, उत्पन्न होता है। यदि कुंडली के प्रतिरोध की उपेक्षा कर दी जाए तो यह विरोधी विद्युत वाहक बल लागू की गई वोल्टता के बराबर होता है। फ़ैराडे नियम (समीकरण 13.1) के अनुसार विरोधी विद्युत वाहक बल \mathcal{E}_1 का परिमाण होता है :

$$\mathcal{E}_1 = N_1 \frac{d\Phi}{dt} = E \quad (13.15 \text{ क})$$

अब प्राथमिक कुंडली का परिवर्ती अभिवाह द्वितीयक कुंडली S से गुजरता है और इस तरह उसमें एक विद्युत वाहक बल \mathcal{E}_2 प्रेरित करता है जिसका परिमाण होता है

$$\mathcal{E}_2 = N_2 \frac{d\Phi}{dt} \quad (13.15 \text{ ख})$$

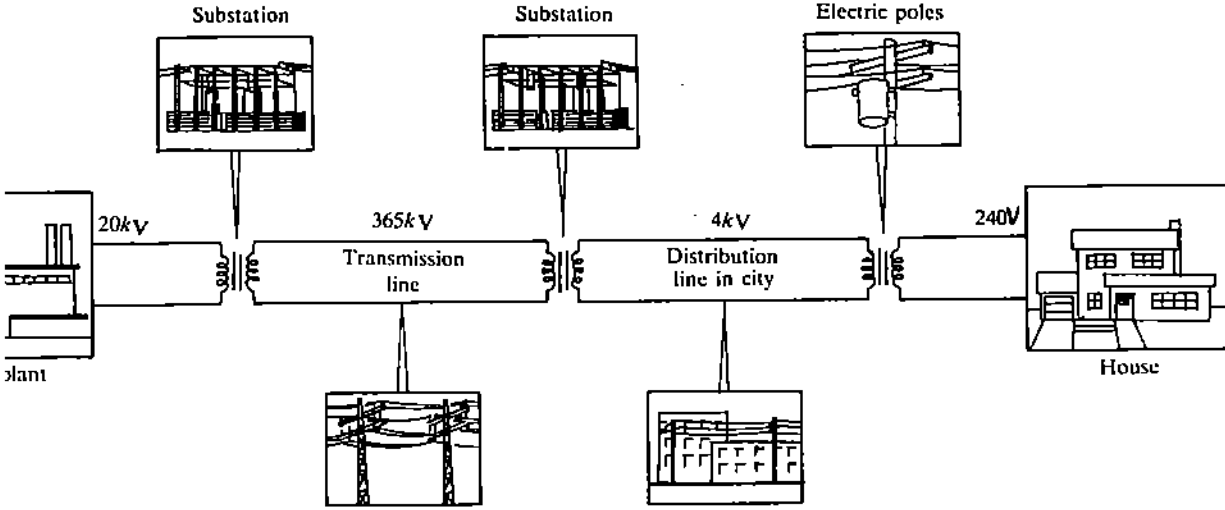
जहां N_2 द्वितीयक कुंडली में घुमावों की संख्या है। समीकरणों (13.15 क) और (13.15 ख) से $\frac{d\Phi}{dt}$ का निराकरण करने पर हमें मिलता है

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (13.16)$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि दो कुंडलियों में तात्कालिक वोल्टताएं कुंडलियों पर घुमावों की संख्या के अनुपात में होती हैं। प्राथमिक कुंडली और द्वितीयक कुंडली में घुमावों के अनुपात को व्यवस्थित करके हम एक **उच्चायी** (step-up) या **अपचायी** (step-down) ट्रांसफॉर्मर बना सकते हैं जो दी हुई ए सी वोल्टता को किसी स्तर तक रूपांतरित कर सकता है। उदाहरण के लिए, यदि हम चाहते हैं कि एक अपचायी ट्रांसफॉर्मर 22,000 V की उच्च ग्रिड वोल्टता को 220 V की मेन वोल्टता में रूपांतरित कर दे, तो इसके लिए

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{22,000 \text{ V}}{220} = \frac{1000}{1}$$

स तरह, द्वितीयक कुंडली के प्रत्येक घुमाव के संगत प्राथमिक कुंडली पर 1000 घुमाव होने चाहिए। व्यवहार में, केवल एक ट्रांसफॉर्मर से नहीं बल्कि अनेक उपकेन्द्रों के जरिए उच्च वोल्टता को कम मान वाली मेन वाल्डता में बदला जाता है। जैसा कि आप चित्र 13.14 में देख सकते हैं, बिजली की वितरण प्रणाली में उच्च वोल्टता को निम्न वोल्टता में रूपांतरित करने के लिए अनेक ट्रांसफॉर्मरों का प्रयोग किया जाता है।



चित्र 13.14: बिजली वितरण प्रणाली में ट्रांसफॉर्मर

भी तक आपने विद्युतचुंबकीय प्रेरण की परिघटना का अध्ययन किया है और फ़ैराडे नियम, लेन्ज नियम, स्व-प्रेरकत्व, अन्योन्य प्रेरकत्व और इनके कुछ अनुप्रयोगों के बारे में जानकारी पाई है। अब हम इससे संबंधित एक अन्य महत्वपूर्ण पहलू अर्थात् चुंबकीय क्षेत्र में ऊर्जा के संचयन पर चर्चा करेंगे।

3.5 चुंबकीय क्षेत्र में संचित ऊर्जा

प्रेरकत्व पर चर्चा करने के दौरान हमने आपको एक प्रेरक के विरोधी विद्युत वाहक बल की कल्पना से भी परिचित कराया था। आप जानते हैं कि धारा को परिपथ में प्रवाहित होने देने के लिए हमें विरोधी विद्युत वाहक बल के विरुद्ध कार्य करना होता है। अतः परिपथ में प्रेरित धारा प्रवाहित करने के लिए कुछ ऊर्जा लगती है। इस ऊर्जा को धारा के चुंबकीय क्षेत्र में संचित ऊर्जा माना जा सकता है। इकाई के इस भाग में हम एक धारा-वाहक परिपथ में संचित ऊर्जा का परिमाण त करेगे और फिर चुंबकीय क्षेत्र में संचित ऊर्जा ज्ञात करेंगे।

इए पहले हम प्रेरकत्व L वाले लूप की ऊर्जा ज्ञात करें। यह ऊर्जा इस लूप में धारा I प्रवाहित होने के लिए जाने वाले कार्य के बराबर होती है।

3.4.1 प्रेरक में संचित ऊर्जा

एक परिपथ में धारा वर्धित होती है तब उसमें एक विरोधी विद्युत वाहक बल प्रेरित होता है जो धारा के प्रवाह का विरोध करता है। मान लीजिए किसी क्षण पर विरोधी विद्युत वाहक बल \mathcal{E} है। धारा I परिपथ का एक चक्कर लगाने में विरोधी विद्युत वाहक बल \mathcal{E} के विरुद्ध एकक आवेश पर किया गया कार्य $-\mathcal{E}$ होगा। यदि उस क्षण पर धारा I हो, तो लघु समय अंतराल dt में तार में होकर जाने वाला आवेश $I dt$ होगा। इस तरह, समय अंतराल dt में किया गया कार्य dW होगा

ध्यान दें कि यहां हमने निम्न परिणाम का प्रयोग किया है

$$dl = \left(\frac{dI}{dt} \right) dt$$

$$\begin{aligned} dW &= -\epsilon I dt = L \left(\frac{dI}{dt} \right) I dt \\ &= LI dI \end{aligned}$$

अतः शून्य मान से मान I_0 तक धारा का वर्धन करने में किया गया कुल कार्य यह होगा

$$W = L \int_0^{I_0} I dI$$

या

$$W = \frac{1}{2} LI_0^2 \quad (13.17)$$

यह एक प्रेरक में ऊर्जा भंडारण का एक विशेष उदाहरण था। हम समीकरण (13.17) का पृष्ठ और आयतन धाराओं के लिए व्यापकीकरण कर सकते हैं और यह दिखा सकते हैं कि किस प्रकार इस ऊर्जा को अपरिवर्ती धारा द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र की ऊर्जा माना जा सकता है।

13.4.2 चुंबकीय क्षेत्र ऊर्जा

आप जानते हैं कि एक लूप में अभिवाह LI के बराबर होता है, जहां L इसका प्रेरकत्व है और I लूप में प्रवाहित धारा है :

$$\Phi = LI \quad (13.18 \text{ क})$$

आप यह भी जानते हैं कि

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (13.18 \text{ ख})$$

क्योंकि \mathbf{B} का डाइवर्जेंस शून्य है (इकाई 9 का समीकरण (9.20) देखिए) इसलिए हम सदिश सर्वसमिका $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$ जहां \mathbf{A} एक सदिश क्षेत्र है, का प्रयोग करके लिख सकते हैं कि

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (13.18 \text{ ग})$$

यहां \mathbf{A} को चुंबकीय क्षेत्र \mathbf{B} से संबंधित सदिश विभव (vector potential) कहा जाता है। अतः समीकरण (13.18 ख) से हमें मिलता है :

$$\Phi = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{S} \quad (13.18 \text{ घ})$$

स्टोक्स प्रमेय को लागू करने पर हम लिख सकते हैं कि

$$\Phi = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (13.18 \text{ ङ})$$

इस तरह, समीकरणों (13.18 क) और (13.18 ख) से हमें मिलता है,

$$LI = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (13.19)$$

इसलिए, इस लूप की ऊर्जा यह होगी

$$U = \frac{L}{2} I^2 = \frac{1}{2} I \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (13.20)$$

इस व्यंजक का व्यापकीकरण करने के लिए आइए हम यह मान लें कि धारा परिपथ एक बंद पथ है जो एक धारा घनत्व रेखा का अनुसरण करता है। तब यदि हम

$$I d\mathbf{l} \text{ के स्थान पर } \mathbf{J} dV$$

और

$$\oint_C \text{ के स्थान पर } \int_V$$

लें जहां V द्वारा धारा धारण किया गया आयतन है, तब समीकरण (13.20) से प्राप्त U से हम इस स्थिति का सन्निकटन कर सकते हैं। अतः हम यह लिख सकते हैं कि

$$U = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \quad (13.21)$$

एम्पीयर नियम ($\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$) का प्रयोग करने पर हमें मिलता है

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) dV \quad (13.22)$$

अब हम संबंध

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

का प्रयोग करके यह लिख सकते हैं

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\ &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} - \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (\because \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}) \end{aligned}$$

तब हमें मिलता है

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV - \int_V \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dV \right]$$

$$\text{या} \quad U = \frac{1}{2\mu_0} \left[\int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV - \int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} \right] \quad (13.23)$$

जहां हमने दूसरे पद में गाउस के डाइवर्जेंस नियम का प्रयोग किया है और S वह पृष्ठ है जो V को परिवर्द्ध करता है। समाकलन, धारा द्वारा धारण किए गए पूरे आयतन पर करना होता है। फिर भी, परिणाम में कोई अंतर लाए बिना समाकलन के लिए हम एक बड़ा प्रदेश ले सकते हैं, क्योंकि धारा द्वारा धारण किए गए आयतन से परे \mathbf{J} का मान शून्य होगा। आइए हम आयतन समाकल को इतना व्यापक बना दें कि उसमें समस्त समष्टि शामिल हो जाए। इस स्थिति में पृष्ठ समाकल का योगदान शून्य हो जाता है, क्योंकि धारा से पृष्ठ जितनी अधिक दूरी पर होगा, \mathbf{B} और \mathbf{A} के मान उतने ही छोटे होंगे। इस तरह, हमारे पास यह बचा रहता है

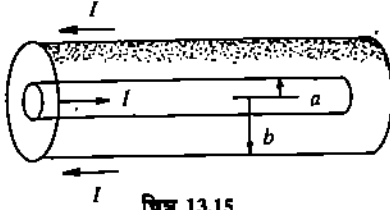
$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV \quad (13.24)$$

इस परिणाम को ध्यान में रखकर तब हम यह कहते हैं कि धारा-वाहक परिपथों की ऊर्जा को इन धाराओं द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र में संचित माना जा सकता है, जिसकी मात्रा प्रति एकक आयतन $B^2/2\mu_0$ होती है। इस तरह, परिपथों में संचित ऊर्जा के बारे में हम दो तरह से सोच सकते हैं और ये दोनों विधियां बिल्कुल तुल्य होती हैं। प्रति एकक आयतन ऊर्जा का मान या तो $\frac{1}{2\mu_0} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{J})$ या $B^2/2\mu_0$ होता है।

क्या यह जान कर आपको आश्चर्य नहीं होता कि एक चुंबकीय क्षेत्र स्थापित करने में कार्य करना होता है? वास्तविकता तो यह है कि जहां कोई क्षेत्र न हो वहां एक चुंबकीय क्षेत्र को स्थापित करने के लिए परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र की आवश्यकता होती है। और, जैसा कि आप जानते हैं परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र एक वैद्युत क्षेत्र को प्रेरित करता है; वैद्युत क्षेत्र कार्य कर सकता है। इस तरह, हम यह देखते हैं कि प्रारंभ और अंत की स्थितियों के बीच, जब चुंबकीय क्षेत्र में परिवर्तन हो रहा होता है, एक वैद्युत क्षेत्र उत्पन्न होता है और इसी क्षेत्र के विरुद्ध कार्य किया जाता है। किया गया यही कार्य चुंबकीय क्षेत्र में संचित ऊर्जा के रूप में उपस्थित होता है।

अब आप एक स्थिति विशेष के लिए इस तरह संचित ऊर्जा का परिमाण ज्ञात करें।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं



बोध प्रश्न 8

एक लंबा साक्ष केबल (coaxial cable) धारा I ले जाता है जो त्रिज्या a वाले आंतरिक बेलन के पृष्ठ की ओर प्रवहित होती है और त्रिज्या b वाले बाह्य बेलन के अनुदिश लौट आती है (चित्र 13.15)। केबल के लंबाई l वाले भाग में संचित ऊर्जा ज्ञात कीजिए। यहां यह दिया हुआ है कि बेलन के बीच चुंबकीय क्षेत्र का परिमाण यह होता है

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

और अन्य स्थान पर शून्य होता है।

अतः केबल की प्रति इकाई लंबाई का स्व-प्रेरकत्व ज्ञात कीजिए।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है उसका संक्षिप्त विवरण हम यहां दे रहे हैं।

13.5 सारांश

- इस इकाई में हमने आपको दो महत्वपूर्ण परिघटनाओं से परिचित कराया है : परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र के कारण विद्युतचुंबकीय प्रेरण और गतिक प्रेरण।
- गतिक प्रेरण की व्याख्या लारेन्ज़ बल से की जा सकती है। लेकिन विद्युतचुंबकीय प्रेरण की व्याख्या में एक नए मूलभूत नियम की आवश्यकता होती है : परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र से एक वैद्युत क्षेत्र प्रेरित होता है।
- विद्युतचुंबकीय प्रेरण की व्याख्या फ़ैराडे-नियम से की जाती है जिसके अनुसार एक परिपथ में प्रेरित विद्युत वाहक बल समय के साथ परिपथ के अभिवाह में परिवर्तन दर के बराबर होता है

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

उपर्युक्त दोनों प्रकार के प्रेरणों पर फ़ैराडे नियम लागू होता है।

- फ़ैराडे नियम को समाकल रूप और अवकल रूप दोनों में लिखा जा सकता है

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

प्रेरित वैद्युत क्षेत्र असंरक्षी होता है जबकि स्थिर आवेश का स्थिर वैद्युत क्षेत्र संरक्षी होता है।

- लेन्ज़ नियम से प्रेरित धारा की दिशा का पता चलता है :

वह दिशा जिसमें प्रेरित धारा प्रवाहित होती है, ऐसी होती है कि वह इसे उत्पन्न करने वाले परिवर्तन का विरोध करती है। इस नियम को फ़ैराडे-नियम के दक्षिण पक्ष में ऋण चिन्ह लगाकर गणितीय रूप में प्रदर्शित किया जाता है। लेन्ज़ नियम ऊर्जा संरक्षण नियम का एक परिणाम है।

- कुंडली या परिपथ की परिवर्ती धारा से उसी परिपथ में परिवर्ती चुंबकीय अभिवाह उत्पन्न होता है जो उसमें एक विरोधी विद्युत वाहक बल प्रेरित करता है। विरोधी विद्युत वाहक बल धारा के मूल परिवर्तन का विरोध करता है।

परिपथ या कुंडली के इस गुणधर्म को स्व-प्रेरकत्व कहा जाता है। स्व-प्रेरकत्व के गुणधर्म को प्रदर्शित करने वाली विशिष्ट युक्तियों को प्रेरक कहा जाता है। एक प्रेरक का स्व-प्रेरकत्व

चुंबकीय अभिवाह और इसमें प्रवाहित धारा के अनुपात के बराबर होता है :

$$L = \frac{\Phi}{I}$$

एक प्रेरक धारा के तात्क्षणिक परिवर्तन का विरोध करता है। फ़ैराडे नियम एक प्रेरक के विद्युत वाहक बल और धारा परिवर्तन दर के बीच संबंध स्थापित करता है

$$\varepsilon = -L \frac{dI}{dt}$$

- जब कुंडलियों या चालकों के एक युग्म को इस तरह रखा गया हो कि एक कुंडली का चुंबकीय अभिवाह दूसरी कुंडली से होकर गुजरता है तो एक कुंडली की परिवर्तनी धारा दूसरी कुंडली में एक विद्युत वाहक बल प्रेरित करती है। कुंडलियों की इस विद्युत चुंबकीय परस्पर क्रिया को **अन्योन्य प्रेरण** कहा जाता है। कुंडली युग्म का **अन्योन्य प्रेरकत्व** एक कुंडली के कुल अभिवाह और दूसरी कुंडली में प्रवाहित धारा के अनुपात के बराबर होता है :

$$M = \frac{\Phi_2}{I_1}$$

फ़ैराडे नियम एक कुंडली के विद्युत वाहक बल और दूसरी कुंडली की धारा परिवर्तन दर के बीच संबंध स्थापित करता है :

$$\varepsilon_2 = -M \frac{dI_1}{dt}$$

- एक प्रेरक में धारा वर्धन अर्थात् चुंबकीय क्षेत्र स्थापित करने के लिए कार्य करने की आवश्यकता होती है। किया गया यह कार्य प्रेरक में ऊर्जा के रूप में संचित होता है, जिसका परिमाण है :

$$U = \frac{1}{2} L I^2$$

जहां L, I धारा वाले प्रेरक का स्व-प्रेरकत्व है।

- इस ऊर्जा को धारा I द्वारा उत्पन्न चुंबकीय क्षेत्र में संचित ऊर्जा भी माना जा सकता है और इसे इस रूप में लिखा जा सकता है

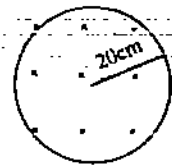
$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V \mathbf{B} \cdot \mathbf{B} dV$$

यह एक अति व्यापक व्यंजक है और यह एकल प्रेरक, युग्मित प्रेरक और धाराओं के पृष्ठ और आयतन वितरणों पर लागू होता है।

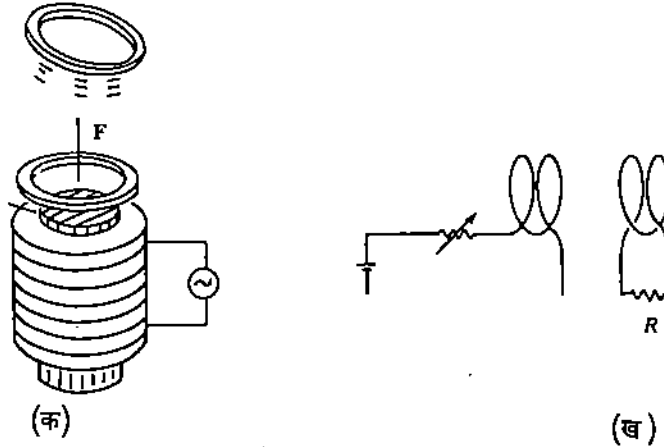
13.6 अंत में कुछ प्रश्न

प्रश्न पर कुल 45 मिनट लगाएं

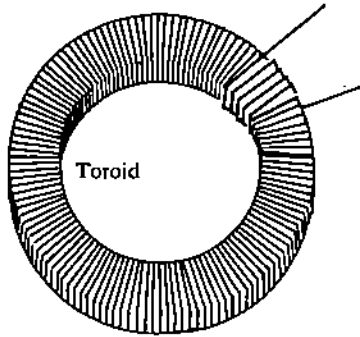
- 20 cm त्रिज्या वाला तार का एक लूप जिसका प्रतिरोध 50Ω है, एकसमान चुंबकीय क्षेत्र \mathbf{B} में क्षेत्र के लंबवत् रखा है (चित्र 13.16)। क्षेत्र का परिमाण 0.01 Ts^{-1} की दर से बढ़ रहा है। लूप में प्रेरित धारा की दिशा और परिमाण ज्ञात कीजिए।
- क) सोलेनाइड पर रखा धातु का एक बलय, सोलेनाइड में धारा प्रवाहित होने पर उछल जाता है (चित्र 13.17 क)। ऐसा क्यों होता है ?
ख) चित्र 13.17 ख में दो कुंडलियां दिखाई गई हैं। यदि परिवर्तनी प्रतिरोध का मान बढ़ाया जाये तो प्रतिरोध R में बढ़ने वाली प्रेरित धारा की दिशा क्या होगी ?
- क) N_1 घुमावों वाले एक टोरॉइड की, जिसका परिक्षेत्र आयताकार है, आंतरिक त्रिज्या a , बाह्य त्रिज्या b , ऊंचाई h है, स्व-प्रेरकत्व ज्ञात कीजिए। यदि कुंडली में धारा i_1 प्रवाहित होती हो, तो उसमें कुल कितनी चुंबकीय ऊर्जा भंडारित होगी ?



चित्र 13.16: चुंबकीय क्षेत्र \mathbf{B} की दिशा पृष्ठ के अंदर की ओर है।



चित्र 13.17

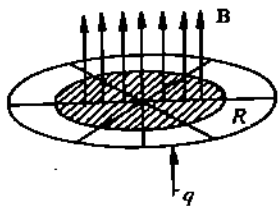


चित्र 13.18

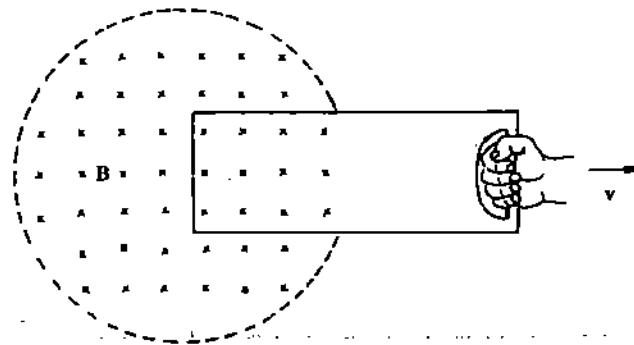
ख) मान लीजिए कि भाग (क) के टोरॉइड पर एक N_2 घुमावों वाली कुंडली लपेट दी जाती है (चित्र 13.18)। सिद्ध कीजिए कि इन कुंडलियों का अन्योन्य प्रेरकत्व निम्न है

$$M = \frac{\mu_0}{2\pi} N_1 N_2 h \ln \frac{b}{a}$$

- क्षैतिजतः लटके हुए त्रिज्या R वाले पहिये की कोर आवेश q से आवेशित है। पहिये की तीलियां लकड़ी की हैं और वह मुक्त रूप से घूम सकता है। पहिये के केंद्रीय क्षेत्र में त्रिज्या a के वृत्त तक एकसमान क्षेत्र B विद्यमान है जिसकी दिशा ऊर्ध्वाधरतः उपरिमुखी है (चित्र 13.19)। जब चुंबकीय क्षेत्र को हटा दिया जाता है तो क्या होता है? पहिये में कितना कोणीय संवेग और आ जाता है?
- क) तांबे का एक पटल चुंबकीय क्षेत्र में रखा जाता है (चित्र 13.20)। जब हम पटल को क्षेत्र में बाहर या अंदर की ओर गति देते हैं तो हमें लगता है कि एक प्रतिरोधक बल इस गति को रोक रहा है। समझाइए कि यह प्रतिरोधक बल कैसे उत्पन्न होता है?
- ख) 2.2 m लंबे एक सोलेनाइड का व्यास 0.9 m है। उसके केन्द्र पर चुंबकीय क्षेत्र 0.4T है। इस कुंडली में भंडारित ऊर्जा ज्ञात कीजिए।



चित्र 13.19



चित्र 13.20

13.7 हल और उत्तर

बोध प्रश्न

- परिपथ का तार धातु का बना है और इसमें इलेक्ट्रॉन अपेक्षाकृत अधिक मुक्त रूप से घूमते हैं। जब इस तार को चुंबकीय क्षेत्र में गति दी जाती है, तो इसके इलेक्ट्रॉन भी इसके साथ

गतिमान होते हैं। जब चुंबकीय क्षेत्र में इलेक्ट्रॉन गतिमान होते हैं, तब इन पर बल $F = -e v \times B$ लगता है जिसकी प्रवृत्ति इन्हें तार के अनुदिश लाने की होती है। बल के कारण अपेक्षाकृत अधिक मुक्त इलेक्ट्रॉन तार के अनुदिश गतिमान होते हैं और तब एक विद्युत धारा प्रवाहित होती है। इसी धारा का संसूचन (detection) एमीटर से होता है। इस धारा को प्रेरित धारा (induced current) कहा जाता है।

2. आपको याद होगा कि इकाई 4 में आप यह पढ़ चुके हैं कि स्थैतिक आवेशों के कारण वैद्युत क्षेत्र का कर्ल शून्य होता है और इसका संगत बल क्षेत्र संरक्षी (conservative) होता है। समीकरण (13.2 ख) से आप यह देख सकते हैं कि परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र द्वारा प्रेरित क्षेत्र का कर्ल शून्यतर होता है। अतः समीकरण (13.2 ख) द्वारा दिया गया वैद्युत क्षेत्र असंरक्षी (non-conservative) होता है। इन दो प्रकार के वैद्युत क्षेत्रों में यह आधारभूत अंतर होता है। समीकरण (13.2 ख) के वैद्युत क्षेत्र के संगत बल, आवेशों पर कार्य कर सकते हैं जब आवेश एक बंद पाश (loop) पर गतिमान होते हैं और हम इस क्षेत्र से संबद्ध अदिश विभव (potential) नहीं परिभाषित कर सकते।
3. (क) जब हम लूप को खींचते हैं तब इसके क्षेत्र और इस तरह इसके चुंबकीय अभिवाह में कमी आती है। प्रेरित धारा की दिशा ऐसी होती है कि वह इस कमी का विरोध करती है। अर्थात् इसका चुंबकीय क्षेत्र वर्तमान चुंबकीय क्षेत्र में जुड़ जाना चाहिए। इस तरह, प्रेरित धारा दक्षिणावर्त दिशा (clockwise direction) में प्रवाहित होनी चाहिए जबकि हम लूप को ऊपर से देखें।
- (ख) जब बड़े लूप में दक्षिणावर्त (clockwise) धारा स्थापित होती है, तो दंड चुंबक की तरह ही यहां भी एक चुंबकीय क्षेत्र स्थापित होता है जिसका उत्तरी ध्रुव छोटे लूप की ओर होता है। इस स्थिति में छोटे लूप में प्रेरित धारा ऐसी होनी चाहिए कि वह चुंबकीय क्षेत्र में इस परिवर्तन का विरोध कर सके। अर्थात् इस लूप का उत्तरी ध्रुव बड़े लूप के चुंबकीय क्षेत्र की ओर होना चाहिए। यह तब होगा जबकि बायीं ओर से देखने पर छोटे लूप में प्रवाहित धारा वामावर्त दिशा (anticlockwise direction) में हो।
4. प्रेरित विद्युत वाहक बल \mathcal{E} होता है

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

समीकरण (13.3 क) से एक एकसमान चुंबकीय क्षेत्र के लिए लूप के एक घुमाव में अभिवाह होता है

$$\Phi_B = BS \cos \omega t$$

$\omega = 2\pi f$ जहां f वह आवृत्ति है जिस पर लूप घूमता है, S लूप का क्षेत्रफल है जो s^2 के बराबर है, जहां s लूप के पार्श्व की लंबाई है। इस तरह, एक N घुमाव वाली कुंडली का प्रेरित विद्युत वाहक बल होता है

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -NBS^2 [-2\pi f \sin(2\pi ft)] = 2\pi NBS^2 f \sin(2\pi ft)$$

अतः उच्चतम विद्युत वाहक बल है $\mathcal{E}_0 = 2\pi NBS^2 f = 300\text{V}$

$$B = \frac{\mathcal{E}_0}{2\pi Ns^2 f} = \frac{300\text{V}}{(2\pi) 10 (50\text{Hz}) (0.50\text{m})^2} = 0.38\text{T}$$

यह एक प्रबल स्थायी चुंबक के ध्रुवों के निकट प्रतिरूपी क्षेत्र प्रबलता (field strength) है।

5. पहले हमें सोलेनाइड के स्व-प्रेरकत्व को मालूम करना होगा जो कि यह है

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

इस समस्या में दिए गए प्राचलों के लिए

$$L = \frac{(1.26 \times 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}) \times (10,000)^2 \times \pi (0.1\text{m})^2}{1 \text{ m}}$$

$$= 3.96 \text{ H}$$

अब, क्योंकि धारा में एकसमान रूप से परिवर्तन होता है, इसलिए इसके परिवर्तन दर का परिमाण यह होता है

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2.5 \text{ A}}{1.0 \text{ ms}} = 2500 \text{ As}^{-1}$$

विरोधी विद्युत वाहक बल का परिमाण है

$$|\varepsilon| = L \frac{dl}{dt} = (3.96 \text{ H}) (2500 \text{ As}^{-1}) = 9900 \text{ V}$$

यह वोल्टता इतनी अधिक होती है कि इससे काफी तेज बिजली का झटका लगेगा। ध्यान दीजिए कि इस वोल्टता का प्रेरक धारा को सप्लाय करने वाले स्रोत की वोल्टता के साथ कोई संबंध नहीं होता। यदि हमारे पास 6V बैटरी भी हो तो भी वृहत् प्रेरकत्व होने पर परिपथ में तेजी से स्विच ऑफ करते समय हमें बिजली का झटका लग सकता है। अतः इस प्रकार के परिपथों के साथ काम करते समय सावधान रहना चाहिए।

6. अपरिवर्ती अवस्था में धारा में कोई परिवर्तन नहीं होता और प्रेरक में कोई विद्युत वाहक बल नहीं होता। अतः परिपथ में धारा यह होती है

$$I = \frac{\varepsilon_0}{R} = \frac{15 \text{ V}}{2000\Omega} = 7.5 \text{ mA}$$

जब धारा का मान अपने अंतिम मान, ε_0/R का आधा होता है तब समीकरण (13.10 ख) से मिलता है

$$\frac{I}{(\varepsilon_0/R)} = \frac{1}{2} = 1 - \exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)$$

या

$$\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right) = \frac{1}{2}$$

दोनों पक्षों का प्राकृतिक लघुगणक लेने पर

$$\frac{Rt}{L} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln(2) \quad [\because \ln(e^x) = x]$$

$$\therefore t = \frac{L}{R} \ln 2$$

या

$$t = \frac{10 \times 10^{-3} \text{ H} \times (0.69)}{2000\Omega} \text{ s} = 3.5 \mu\text{s}$$

हालांकि यह समय काफी कम है, पर उच्च आवृत्ति वाले संकेतों में जैसे कि टी० वी०, कंप्यूटर या इलेक्ट्रॉनिक संचार में यह काफी महत्वपूर्ण होता है।

7. धारा का परिवर्तन दर है

$$\frac{dl}{dt} = \frac{3.0\text{A}}{1.0 \times 10^{-4} \text{ s}} = 3.0 \times 10^4 \text{ As}^{-1}$$

अन्योन्य प्रेरकत्व यह होता है

$$M = \frac{|\varepsilon|}{dl/dt} = \frac{24 \times 10^3 \text{ V}}{3.0 \times 10^4 \text{ As}^{-1}} = 0.8 \text{ H}$$

8. प्रति एकक आयतन ऊर्जा यह है

$$\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2\mu_0} \left(\frac{\mu_0 I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2}$$

लंबाई l , त्रिज्या r और मोटाई dr वाले बेलनाकार शेल का आयतन $(2\pi r dr)l$ होता है।
अतः बेलनाकार शेल में भंडारित ऊर्जा होती है

$$\frac{\mu_0 I^2 l}{8\pi^2 r^2} (2\pi r dr) = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

a से b तक समाकलन करने पर हमें मिलता है

$$U = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I^2 l}{4\pi} \ln \frac{b}{a}$$

क्योंकि $U = \frac{1}{2} LI^2$, इसलिए;

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$$

प्रति एकक लंबाई स्व-प्रेरकत्व $\frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{b}{a}$ है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. प्रेरित धारा मालूम करने के लिए हमें प्रेरित विद्युत वाहक बल को जानना आवश्यक होता है जो कि फ़ैराडे नियम से प्राप्त होता है,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

अब, अभिवाह यह होता है

$$\Phi_B = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

क्योंकि आकाश में चुंबकीय क्षेत्र एकसमान है और लूप इस पर लंबवत् है, इसलिए

$$\Phi_B = \int B dS = B \int dS = B \pi r^2$$

जहां r लूप की त्रिज्या है। क्योंकि लूप का क्षेत्रफल अचर है, इसलिए

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_B}{dt} &= \pi r^2 \frac{dB}{dt} \\ &= \pi (0.2\text{m})^2 (0.1 \text{Ts}^{-1}) \\ &= 1.2 \times 10^{-2} \text{V} \end{aligned}$$

ओम नियम लागू करके हम लूप में प्रवाहित हो रही प्रेरित धारा का परिमाण मालूम कर सकते हैं :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{1.2 \times 10^{-2} \text{V}}{5.0\Omega} = 2.4 \text{mA}$$

पृष्ठ के अंदर की ओर दिशा वाले इस चुंबकीय क्षेत्र में वृद्धि हो रही है, और प्रेरित धारा की दिशा ऐसी होगी कि वह इस वृद्धि का विरोध करे। अतः धारा का चुंबकीय क्षेत्र विपरीत दिशा में होना चाहिए अर्थात् लूप में धारा वामावर्त दिशा में प्रवाहित होनी चाहिए जबकि हम लूप को ऊपर से देखें।

2. (क) धारा प्रवाहित होने से पहले वलय में अभिवाह शून्य होता है। धारा प्रवाहित करने पर आरेख में अभिवाह ऊपर की ओर होता है। अभिवाह में परिवर्तन होने के कारण धातु वलय में विद्युत वाहक बल और धारा प्रेरित होती है। धारा की दिशा ऐसी होती है कि

इसका चुंबकीय क्षेत्र सोलेनाइड के चुंबकीय क्षेत्र की विपरीत दिशा में होता है। इस तरह, लूप में प्रवाहित धारा सोलेनाइड में प्रवाहित धारा की विपरीत दिशा में होती है। यह आपने अवश्य पढ़ा होगा कि विपरीत दिशाओं में धारा ले जाने वाले दो चालकों के बीच का बल प्रतिकर्षी (repulsive) होता है। इसकी वजह से वलय उछलता है।

(ख) बायीं ओर की कुंडली 1 में धारा वामावर्त दिशा में प्रवाहित होती है जिससे कि इसका चुंबकीय क्षेत्र दूसरी कुंडली 2 की ओर होता है। जैसे जैसे प्रतिरोध बढ़ता है, कुंडली 1 की धारा में कमी आती जाती है जिससे कि कुंडली 2 से जुड़े चुंबकीय अभिवाह में कमी आ जाती है। प्रेरित धारा इस कमी का विरोध करती है, इसलिए इसका चुंबकीय क्षेत्र कुंडली 2 की दायीं ओर होना चाहिए। इस तरह, दक्षिण हस्त नियम से प्रेरित धारा, कुंडली 2 में वामावर्त दिशा में प्रवाहित होनी चाहिए, अर्थात् यह प्रतिरोधक R में दायीं से बायीं ओर प्रवाहित होनी चाहिए।

3. (क) आप जानते हैं कि टोरॉइड में चुंबकीय क्षेत्र यह होता है

$$B = \frac{\mu_0 i_1 N_1}{2 \pi r}$$

जहां i_1 टोरॉइड में प्रवाहित धारा है। अब हमें टोरॉइड के प्रत्येक घुमाव में अभिवाह ज्ञात करना होगा जो कि टोरॉइड से जाने वाला अभिवाह ही है (चित्र 13.21)।

आइए हम क्षेत्रफल $h dr$ वाली एक पट्टी लें। पट्टी में अभिवाह यह होता है

$$d\Phi = \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = (B)(h dr) = \frac{\mu_0 i_1 N_1 h}{2 \pi r} dr$$

क्योंकि \mathbf{B} टोरॉइड के अनुप्रस्थ परिच्छेद पर अभिलंब है। $r = a$ से $r = b$ तक $d\Phi$ का समाकलन करके हम टोरॉइड के अनुप्रस्थ परिच्छेद में कुल अभिवाह प्राप्त करते हैं:

$$\Phi = \frac{\mu_0 i_1 N_1 h}{2 \pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 i_1 N_1 h}{2 \pi} \ln \frac{b}{a}$$

N_1 घुमावों वाले टोरॉइड का स्व-प्रेरकत्व होता है

$$L = \frac{N_1 \Phi}{i_1} = \frac{\mu_0 N_1^2 h}{2 \pi} \ln \frac{b}{a}$$

कुंडली में भंडारित कुल चुंबकीय ऊर्जा है

$$U = \frac{1}{2} L i_1^2 = \frac{\mu_0 N_1^2 h i_1^2}{4 \pi} \ln \frac{b}{a}$$

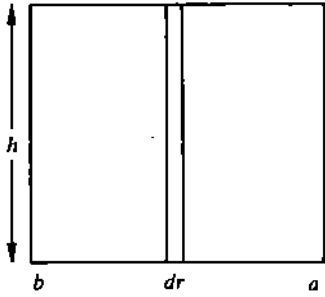
(ख) N_2 घुमावों वाली कुंडली C में अभिवाह टोरॉइडी कुंडली के अभिवाह के कारण होता है। अतः इसका मान है

$$N_2 \Phi_2 = \frac{\mu_0 i_1 N_1 N_2 h}{2 \pi} \ln \frac{b}{a}$$

इस तरह, इस विन्यास का अन्योन्य प्रेरकत्व होता है

$$M = \frac{N_2 \Phi_2}{i_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 h}{2 \pi} \ln \frac{b}{a}$$

4. परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र एक वैद्युत क्षेत्र प्रेरित करता है। क्योंकि चुंबकीय क्षेत्र में कमी हो रही है, इसलिए इस कमी का विरोध करने के लिए \mathbf{E} क्षेत्र वामावर्त दिशा में होगा। प्रेरित विद्युत क्षेत्र पहिए के कोने पर स्थित आवेश पर बल लगाता है। इसके कारण पहिया वामावर्त दिशा में घूमने लगता है, जबकि उसे ऊपर से देखा जाए। परिमाणतात्मक रूप में, फ़ैराडे नियम से हमें मिलता है



चित्र 13.21

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

$$= -\pi R^2 \frac{dB}{dt}$$

पहिए के केन्द्र के प्रति उसके किनारे के एक अल्पांश $d\mathbf{l}$ पर बलआघूर्ण ($\mathbf{R} \times \mathbf{F}$) या ($RqE d\mathbf{l}$) होता है। पहिए पर कुल बलआघूर्ण का परिमाण होता है

$$\tau = Rq \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\pi R^3 q \frac{dB}{dt}$$

पहिए को दिया गया कोणीय संवेग होता है

$$L = \int \tau dt = -\pi R^3 q \int_{B_0}^0 dB = \pi R^3 q B_0$$

5. क) जब हम एक तांबे के पटल को चुंबकीय क्षेत्र से बाहर निकालने की कोशिश करते हैं तो उसमें प्रेरित धाराएं आ जाती हैं। क्योंकि पटल से जाने वाले चुंबकीय क्षेत्र में कमी होती जाती है, तो इस कमी का विरोध करने के लिए इसमें प्रवाहित धारा की दिशा दक्षिणावर्त होती है। अतः प्रेरित धारा से उत्पन्न चुंबकीय बल बायीं ओर होगा अर्थात् यह लूप की गति का विरोध करेगा।

इसी प्रकार, जब हम पटल को चुंबकीय क्षेत्र में डालते हैं तब वामावर्त दिशा में प्रेरित धारा प्रवाहित होती है। इस धारा से उत्पन्न चुंबकीय बल दायीं ओर होगा और पटल की गति की दिशा की विपरीत दिशा में होगा। परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्रों के कारण ठोस चालकों में प्रेरित धाराओं को भ्रंवर धाराएं (eddy currents) कहा जाता है। जैसा कि आपने यहां देखा है भ्रंवर धाराओं के कारण चुंबकीय क्षेत्र में चालक को गति देने में कठिनाई हो सकती है।

- ख) सोलेनाइड में भंडारित ऊर्जा $\frac{1}{2} L i^2$ है। लंबाई l वाले सोलेनाइड के चुंबकीय क्षेत्र का परिमाण होता है

$$B = \frac{\mu_0 N i}{l}$$

इस तरह, सोलेनाइड में धारा यह होगी

$$i = \frac{lB}{\mu_0 N}$$

आप जानते हैं कि लंबे सोलेनाइड का स्व-प्रेरकत्व होता है

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l}$$

इस तरह

$$U = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 N^2 A}{l} \right) \left(\frac{l^2 B^2}{\mu_0^2 N^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2 \mu_0} l B^2 A$$

$$= \frac{1 (2.2 \text{ m}) (0.4 \text{ T})^2 \pi (0.45 \text{ m})^2}{2 \times 1.26 \times 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}}$$

या

$$U = 8.9 \times 10^4 \text{ J}$$

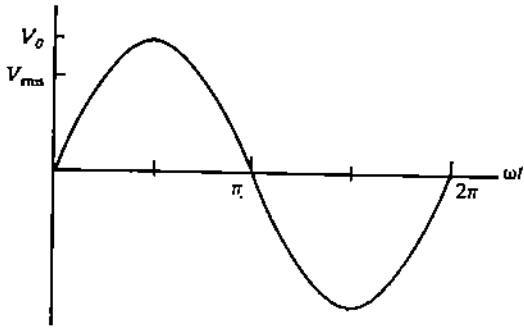
13.8 शब्दावली

अन्योन्य प्रेरकत्व	:	mutual inductance
अभिवाह	:	flux
ऊर्जा संरक्षण	:	conservation of energy
गतिक प्रेरण	:	motional induction
परिवर्ती धारा	:	changing current
प्रत्यावर्ती धारा	:	alternating current
प्रेरक	:	inductor
प्रेरकत्व	:	inductance
विद्युत वाहक बल	:	electromotive force (emf)
विरोधी विद्युत वाहक बल	:	back emf
स्व-प्रेरकत्व	:	self-inductance

परिशिष्ट : प्रत्यावर्ती धारा

इस इकाई में हम यह मानकर चले हैं कि प्रत्यावर्ती धारा से आप अच्छी तरह से परिचित हैं। फिर भी, इस परिशिष्ट में हम एक तत्काल संदर्भ के रूप में प्रत्यावर्ती धाराओं से संबद्ध प्रासंगिक आधारभूत संकल्पनाएं प्रस्तुत कर रहे हैं। इस परिशिष्ट में दी गई जानकारी पर परीक्षा में आपसे कोई प्रश्न नहीं पूछा जाएगा। प्रत्यावर्ती धारा (ac) परिपथ वे परिपथ होते हैं जिनमें समय के साथ वैद्युत ऊर्जा के स्रोत में परिवर्तन होता रहता हो। घर में लगे बिजली के तार ऐसे ही ए सी परिपथ हैं।

हालांकि समय के साथ वैद्युत राशियां अलग अलग प्रकार से बदल सकती हैं। पर यहां हम केवल ज्यावकीय परिवर्तन (sinusoidal variations) पर ही विचार करेंगे। अधिक जटिल परिवर्तनों का विश्लेषण ज्यावकीय रूप में परिवर्तित हो रही राशियों के अध्यारोपण (superposition) के रूप में किया जा सकता है। चित्र क. 1 में ए सी वोल्टता के एक पूरे चक्र को समय के फलन के रूप में दिखाया गया है। यह प्रक्रिया किसी भी दिशा में अनंत बार होती रहती है। ए सी संकेत, अपने आयाम, आवृत्ति और कला (phase) से अभिलक्षित होता है। ये वही राशियां हैं जो सरल आवर्त गति निर्धारित करती हैं। हम आयाम को या तो शिखर मान V_0 के रूप में या मान वर्ग माध्य मूल V_{rms} के रूप में निर्धारित करते हैं। मान वर्ग माध्य मूल एक चक्र के संकेत मान के वर्गों के माध्य का वर्गमूल होता है। यह प्रक्रिया इसलिए अपनायी जाती है क्योंकि आयाम चाहे कुछ भी हो, ए सी संकेत का साधारण औसत शून्य होता है, क्योंकि ए सी संकेत शून्य के नीचे उतना ही समय लेता है जितना कि शून्य के ऊपर। जब हम कहते हैं कि घर की वायरिंग में मानक वोल्टता 220 V है, तो वास्तव में हम संकेत के मान वर्ग माध्य मूल (rms value) की बात कर रहे होते हैं।



चित्र क.1: एक ज्यावकीय रूप वाली ए सी वोल्टता। यहां शिखरवोल्टता और मान वर्ग माध्य मूल वोल्टता भी दिखाए गए हैं।

उदाहरण के लिए, हम वोल्टता और धारा के ज्यावकीय ए सी संकेत को इस प्रकार व्यक्त करते हैं

$$V = V_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{क.1})$$

$$I = I_0 \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{क.2})$$

प्रत्यावर्ती परिपथों के परिपथ अवयव

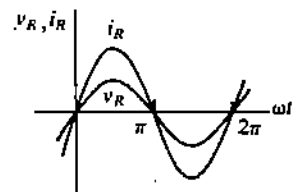
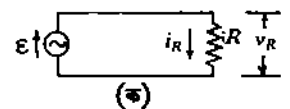
आइए अब हम ए सी परिपथों में प्रतिरोधकों (resistors), संधारित्रों (capacitors) और प्रेरकों (inductors) के बारे में जानें।

प्रतिरोधक

एक आदर्श प्रतिरोधक वह युक्ति है जिसकी धारा और वोल्टता सदा ही आनुपातिक होती है :

$$I = \frac{V}{R} \quad (\text{क.3क})$$

चित्र क. 2 क में ए सी जेनरेटर से जुड़ा एक प्रतिरोधक दिखाया गया है। प्रतिरोधक की वोल्टता जेनरेटर की वोल्टता के बराबर होती है। जेनरेटर की वोल्टता को समीकरण (क.1) से व्यक्त किया जा सकता है, जिससे कि धारा होती है



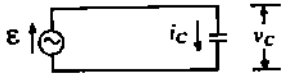
चित्र क.2: (क) ए सी जेनरेटर से जुड़ा एक प्रतिरोधक; (ख) प्रतिरोधक की वोल्टता और धारा एक कला में हैं।

$$I = \frac{V}{R} = \frac{V_0 \sin(\omega t + \phi)}{R} = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{क.3ख})$$

धारा की आवृत्ति और कला वही होती है जो कि वोल्टता की है और अधिकतम धारा, अधिकतम वोल्टता और प्रतिरोध का भागफल होता है (चित्र क.2)। क्योंकि वोल्टता और धारा दोनों ही ज्यावकीय (sinusoidal) हैं, इसलिए rms धारा V_{rms}/R होती है।

संधारित्र

चित्र क.3 क में ए सी जेनरेटर से जुड़े एक संधारित्र को दिखाया गया है। आप जानते हैं कि संधारित्र वह युक्ति है जिसमें वोल्टता और आवेश अनुलोमानुपाती होते हैं:



(क)

$$q = CV \quad (\text{क.4})$$

इस संबंध का अवकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{dq}{dt} = C \frac{dV}{dt}$$

पर dq/dt संधारित्र धारा I है, इसलिए

$$I = C \frac{dV}{dt} \quad (\text{क.5})$$

क्योंकि जेनरेटर वोल्टता $V_0 \sin \omega t$ संधारित्र पर सीधे लगती है इसलिए धारा यह होगी

$$I = C \frac{d}{dt} (V_0 \sin \omega t) \quad (\text{क.6})$$

$$= \omega CV_0 \cos \omega t = \omega CV_0 \sin(\omega t + \pi/2)$$

यह समीकरण एक संधारित्र की धारा और वोल्टता के बीच कला और आयाम के संबंधों को स्पष्ट रूप से प्रकट करती है।

क्योंकि कोज्या वक्र (cosine curve) बायीं ओर $\pi/2$ या 90° से विस्थापित किया गया ज्या वक्र होता है इसलिए समीकरण (क.6) से यह पता चलता है कि

संधारित्र की धारा, वोल्टता से 90° आगे होती है।

चित्र क.3 ख में एक संधारित्र की धारा और वोल्टता के बीच के इस संबंध को ग्राफ़ीय रूप में दिखाया गया है।

क्योंकि समीकरण (क.6) में कोज्या को गुणा करने वाला पद ωCV_0 धारा का आयाम है, इसलिए हम यह लिख सकते हैं

$$I_0 = \omega CV_0$$

या ओम नियम से मिलते जुलते रूप में

$$I_0 = \frac{V_0}{1/(\omega C)} \quad (\text{क.7})$$

समीकरण (क.7) को देखने से यह पता लगता है कि संधारित्र प्रतिरोध $1/\omega C$ वाले प्रतिरोधक की तरह व्यवहार करता है। इस "प्रतिरोध" से शिखर वोल्टता और शिखर धारा के बीच का संबंध प्राप्त होता है। पर इससे पूरी बात का पता नहीं चलता है। संधारित्रों में धारा और वोल्टता में कलांतर (phase difference) भी आ जाता है। इस कलांतर से प्रतिरोधकों और संधारित्रों के बीच के मूलभूत भौतिक अंतर का पता चलता है। प्रतिरोधक वैद्युत ऊर्जा को ऊष्मा में क्षयित कर देता है। संधारित्र वैद्युत ऊर्जा को भंडारित करता है जो बाद में प्राप्त की जा सकती है। एक पूरे चक्र में चित्र क.3 क में जेनरेटर को घुमाने वाला एजेंट कोई नेट कार्य नहीं करता जबकि चित्र .2 क के

प्रतिरोधी भार वाले जेनरेटर को घुमाने वाला एजेन्ट लगातार कार्य करता रहता है जो कि प्रतिरोधक की ऊष्मा के रूप में क्षयित होता है। क्योंकि समीकरण (क.7) की राशि हूबहू एक प्रतिरोध की तरह काम नहीं करती, इसलिए इसे विशेष नाम धारिता प्रतिघात (capacitive reactance) दिया गया है। इसे हम X_C से सूचित करते हैं। प्रतिरोध की तरह प्रतिघात (reactance) भी ओम में मापा जाता है।

इस बात का क्या महत्व है कि X_C आवृत्ति पर निर्भर करता है? आवृत्ति के शून्य की ओर प्रवृत्त होने पर X_C अनंत की ओर प्रवृत्त होता है। क्योंकि शून्य आवृत्ति पर परिपथ में कोई परिवर्तन नहीं होता, इसलिए संधारित्र प्लेटों पर आवेश गतिमान नहीं होता, अतः परिपथ में धारा प्रवाहित नहीं होती और तब संधारित्र खुले परिपथ की तरह व्यवहार करता है। आवृत्ति में वृद्धि होने पर थोड़े ही समय में धारा प्रवाहित होने लगती है जिससे कि संधारित्र प्लेटों पर आवेश गतिमान होने लगता है। परिणाम यह होता है कि संधारित्र एक बंद परिपथ की तरह व्यवहार करता है। संक्षेप में हम कहते हैं कि निम्न आवृत्ति पर संधारित्र एक खुले परिपथ की तरह व्यवहार करता है। वास्तव में निम्न आवृत्ति से हमारा अभिप्राय इतनी कम आवृत्ति से है कि परिपथ के किसी प्रतिरोध की तुलना में धारिता प्रतिघात $1/\omega C$ काफ़ी अधिक होता हो। उच्च आवृत्ति पर, परिपथ के किसी भी प्रतिरोध की तुलना में प्रतिघात काफ़ी कम होता है।

प्रेरक

चित्र क.4 क में ए सी जेनरेटर से जुड़ा एक प्रेरक दिखाया गया है। इस परिपथ पर किर्चॉफ का पाश नियम लागू करने पर मिलता है :

$$V_0 \sin \omega t + \varepsilon_L = 0.$$

इस इकाई से आप यह जानते हैं कि प्रेरक का विद्युत वाहक बल (emf) होता है

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt},$$

अतः पाश नियम हो जाता है

$$V_0 \sin \omega t = L \frac{dI}{dt} \quad (\text{क.8})$$

धारा के अवकलज के स्थान पर धारा I वाले संबंध को प्राप्त करने के लिए हम समीकरण (क.8) का समाकलन करते हैं

$$\int V_0 \sin \omega t dt = \int L \frac{dI}{dt} dt,$$

या

$$-\frac{V_0}{\omega} \cos \omega t = LI.$$

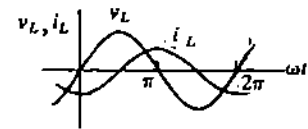
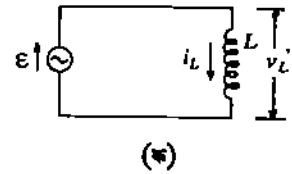
यहां हमने एक अनिश्चित समाकल किया है - अर्थात् जिसमें कोई सीमाएं नहीं हैं - क्योंकि हम दो फलनों के बीच का संबंध प्राप्त करना चाहते हैं। शून्येतर समाकलन अचर, ए सी पर अध्यारोपित अपरिवर्ती धारा को निरूपित करता है (यहां केवल ए सी है, इसलिए अचर शून्य होगा)। अतः I के लिए हल करने पर हमें मिलता है

$$I = -\frac{V_0}{\omega L} \cos \omega t \quad (\text{क.9})$$

समीकरण क.9 को देखने से यह पता चलता है कि चालक पर लागू की गई वोल्टता और प्रेरक धारा एक कला में नहीं है और वोल्टता, धारा से 90° आगे है:

प्रेरक की वोल्टता, धारा से 90° आगे है।

इस कला संबंध को चित्र क.4 ख में दिखाया गया है।



चित्र क. 4: (क) ए सी जेनरेटर से जुड़ा एक प्रेरक; (ख) प्रेरक की वोल्टता, धारा से 90° आगे होती है।

समीकरण (क.9) से हम यह भी पाते हैं कि शिखर धारा यह होती है

$$I_0 = \frac{V_0}{\omega L} \quad (\text{क.10})$$

यह समीकरण ωL के प्रतिरोध वाले ओम-नियम से मिलता जुलता है। पर, संधारित्र की तरह ही प्रेरक में भी ऊर्जा क्षयित नहीं होती। प्रेरक में चुंबकीय क्षेत्र स्थापित होने पर ऊर्जा भंडारित होती है, चुंबकीय क्षेत्र का ह्रास होने पर ऊर्जा मुक्त होती है। क्षयकारी प्रतिरोध से भेद करने के लिए हम राशि ωL को प्रेरणिक प्रतिघात (inductive reactance) कहते हैं। प्रेरणिक प्रतिघात को भी ओम में मापा जाता है। सारणी क. 1 में प्रतिरोधकों, संधारित्रों और प्रेरकों के कला तथा आयाम संबंधों को संक्षिप्त रूप में दिखाया गया है।

सारणी क. 1 : परिपथ अवयवों में कला और आयाम संबंध

परिपथ अवयव	शिखर धारा वोल्टता	कला संबंध
प्रतिरोधक	$I_0 = \frac{V_0}{R}$	V, I एक कला में हैं।
संधारित्र	$I_0 = \frac{V}{X_C} = \frac{V_0}{1/\omega C}$	I, V से 90° आगे है।
प्रेरक	$I_0 = \frac{V}{X_L} = \frac{V_0}{\omega L}$	V, I से 90° आगे है।

अधिकांश परिपथों में प्रतिरोधकों, संधारित्रों और प्रेरकों के संयोजन होते हैं। इनका आप भौतिकी के पाठ्यक्रमों में अध्ययन करेंगे। उदाहरण के लिए, इस इकाई में ही आप LR परिपथ के बारे में पढ़ चुके हैं। भौतिकी में गणितीय विधियाँ -II पाठ्यक्रम के खंड 1 में आप LCR परिपथ के बारे में पढ़ चुके हैं।

इकाई 14 मैक्सवेल समीकरण और विद्युतचुंबकीय तरंगें

इकाई की रूपरेखा

- 14.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 14.2 मैक्सवेल समीकरण
विद्युतचुंबकत्व के मूल नियमों में असममिति
एम्पीयर नियम का व्यापकीकरण: विस्थापन धारा
मैक्सवेल समीकरणों की व्याख्या
- 14.3 विद्युतचुंबकीय तरंगें
तरंग समीकरण
निर्वात में समतल तरंग संचरण
- 14.4 परावैद्युत माध्यमों में मैक्सवेल समीकरण और समतल तरंग संचरण
परावैद्युत माध्यम में मैक्सवेल समीकरण
परावैद्युत माध्यमों में समतल तरंग संचरण
- 14.5 विद्युतचुंबकीय तरंगों द्वारा वाहित ऊर्जा: प्वाइन्टिंग प्रमेय
- 14.6 सारांश
- 14.7 अंत में कुछ प्रश्न
- 14.8 हल और उत्तर
- 14.9 शब्दावली

14.1 प्रस्तावना

इस पाठ्यक्रम में अभी तक आप चुंबकीय और वैद्युत परिघटनाओं को नियंत्रित करने वाले चार मूल नियमों — वैद्युत क्षेत्र से संबंधित गाउस नियम, चुंबकीय क्षेत्र से संबंधित गाउस नियम, एम्पीयर नियम और फ़ैराडे नियम से परिचित हो चुके हैं। सम्मिलित रूप से इन सभी नियमों द्वारा उन तमाम वैद्युत और चुंबकीय अन्योन्य क्रियाओं की व्याख्या की जा सकती है जो द्रव्य के गुण धर्मों के लिए उत्तरदायी हैं। खंड की प्रस्तावना में आपने पढ़ा है कि इस पाठ्यक्रम में दिए गए प्रमुख नियमों को हम एक समीकरण-समुच्चय, जिन्हें **मैक्सवेल समीकरण** कहा जाता है, के रूप में प्रस्तुत करेंगे। यही इस इकाई की विषयवस्तु है।

मैक्सवेल समीकरण हर जगह वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों के व्यवहार को नियंत्रित करते हैं और इनके द्वारा विद्युतचुंबकीय परिघटनाओं की व्याख्या की जा सकती है। उदाहरण के लिए, कम्पस की सुई सदैव उत्तर की ओर क्यों झुंकि जाती है, पानी में प्रवेश करते ही प्रकाश किरण क्यों मुड़ जाती है, बिजली क्यों कड़कती है, ध्रुवी प्रदेशों में हमें ध्रुवीय ज्योति (aurora) क्यों दिखाई पड़ती है, और ऐसी ही अन्य अनेक प्राकृतिक परिघटनाएं। आधुनिक जीवन में प्रयुक्त अनेक युक्तियों जैसे कि बिजली के मोटर, टेलिविज़न, ट्रान्समीटर और रिसेीवर, माइक्रोवेव अवन, टेलिफोन, कंप्यूटर, रडार, साइक्लोट्रॉन आदि का प्रचालन भी इन समीकरणों पर आधारित है।

इन तमाम परिघटनाओं की व्याख्या करने के अतिरिक्त मैक्सवेल समीकरण हमें प्रकाश और अन्य विद्युतचुंबकीय विकिरणों (electromagnetic radiations) की प्रकृति के बारे में मूलभूत जानकारी भी देते हैं। अतः इस इकाई में आप विद्युतचुंबकीय तरंगों की प्रकृति और उनके संचरण (propagation) के बारे में पढ़ेंगे। अगली इकाई में हम विद्युतचुंबकीय तरंगों के परावर्तन (reflection) और अपवर्तन (refraction) तथा इनके कुछ प्रौद्योगिकीय अनुप्रयोगों के बारे में चर्चा करेंगे।

अध्ययन-निर्देशिका

इस इकाई को अच्छी तरह से समझने के लिए यह आवश्यक है कि आप खंड 1, 2, 3 में बतायी गई

बातों से अच्छी तरह से परिचित हों। साथ ही अगर आप दोलन और तरंगों नामक भौतिकी के पाठ्यक्रम का खंड 2 भी पढ़ लें तो आपको यह इकाई बेहतर समझ में आएगी। इसी के साथ-साथ तुरंत संदर्भ के लिए भौतिकी पाठ्यक्रम भौतिकी में गणितीय विधियां -I का खंड 1 रखना भी उपयोगी होगा। हमने इकाई में दिए महत्वपूर्ण परिणामों की जटिल व्युत्पत्तियों को इस इकाई के परिशिष्ट में दिया है। इससे ये संकल्पनाएं स्पष्ट हो जाएंगी और आपको इस बात का भी पता चल जाएगा कि किस प्रकार भौतिकी के परिणाम तर्क-संगत गणितीय तथ्यों पर आधारित होते हैं। **ध्यान रहे कि परिशिष्ट में दी गई बातों पर आपसे परीक्षा में प्रश्न नहीं पूछा जाएगा।** यह इकाई काफी बड़ी है। हमारे हिसाब से भाग 14.1 और 14.2 पढ़ने में करीब दो घंटे लगेंगे और शेष भाग 14.3 से भाग 14.5 तक आप करीब 6 घंटों में पूरा कर सकेंगे। फिर भी आपको वास्तव में कितना समय लगेगा, यह आपके पूर्व ज्ञान पर भी निर्भर करेगा।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- उन सममिति प्रतिबंधों की व्याख्या कर सकेंगे, जिनके कारण मैक्सवेल समीकरण प्राप्त हुए,
- आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेशों में, आवेशों और धाराओं वाले प्रदेशों के लिए और परवैद्युत माध्यमों (dielectric media) से संबद्ध मैक्सवेल समीकरण लिख सकेंगे
- मैक्सवेल समीकरणों से विद्युतचुंबकीय तरंग समीकरण व्युत्पन्न कर सकेंगे
- विद्युतचुंबकीय तरंगों की प्रकृति की व्याख्या कर सकेंगे
- निर्वात और परवैद्युत माध्यमों में (समतल तरंग के हल सहित) मैक्सवेल समीकरणों और विद्युतचुंबकीय तरंग समीकरणों को लागू कर सकेंगे
- प्वाइन्टिंग सदिश और विद्युतचुंबकीय तरंगों द्वारा वाहित ऊर्जा अभिकलित कर सकेंगे।

14.2 मैक्सवेल समीकरण

वैद्युत और चुंबकीय परिघटनाओं को नियंत्रित करने वाले उन सभी नियमों को याद कीजिए जिन्हें आपने इस पाठ्यक्रम में पढ़ा है। इन नियमों में से किन को मूल नियम माना जा सकता है? आइए हम इन मूल नियमों को एक सारणी (सारणी 14.1) में लिखें।

शायद आप सोच रहे हैं कि इस सारणी में हमने कूलॉम-नियम और बायो-सावर्ट नियम का उल्लेख क्यों नहीं किया है। आपने खंड 1 और 3 में पढ़ा है कि इन नियमों को केवल स्थिर आवेशों या मंद गति से चलने वाले आवेशों के लिए ही मूल नियम माना जा सकता है। वास्तव में, कूलॉम-नियम उस स्थिति में गाउस-नियम के तुल्य होता है जबकि अभिवाह में परिवर्तन न हो रहा हो, अर्थात् $\partial\Phi/\partial t = 0$ । इसी प्रकार, बायो-सावर्ट नियम भी चुंबकीय क्षेत्र से संबंधित गाउस नियम और एम्पीयर नियम से प्राप्त किया जा सकता है। इस तरह, हम यह देखते हैं कि कूलॉम-नियम और बायो-सावर्ट नियम दोनों को ही सारणी 14.1 बताए गए चार नियमों में से दो नियमों का संयोजन करके प्राप्त किया जा सकता है। इस पाठ्यक्रम में प्रस्तुत अन्य सभी समीकरण विशिष्ट स्थितियों पर लागू होते हैं और वे सभी सारणी 14.1 में दिए गए चार समीकरणों में सम्मिलित हैं।

आइए अब हम सारणी 14.1 में दिए गए चार नियमों पर एक साथ चर्चा करें। क्या आप इन नियमों में कोई समानता देखते हैं? ध्यान दीजिए कि पहले दो नियमों (समीकरण 14.1 और 14.2) और अंतिम दो नियमों (समीकरण 14.3 और 14.4) के वाम पक्ष एक जैसे हैं। अंतर केवल यही है कि समीकरणों में E के स्थान पर B और B के स्थान पर E उपस्थित है। पहले दो नियमों के वाम पक्ष में संवृत पृष्ठों (closed surface) पर पृष्ठ समाकल उपस्थित हैं। इसी प्रकार अंतिम दो नियमों में संवृत लूप के अनुदिश रेखा समाकल (line integral) उपस्थित हैं। इन समीकरण-युग्मों में अंतर केवल यह है कि वाम पक्ष में E के स्थान पर B और B के स्थान पर E उपस्थित है। अतः हम यह कह सकते हैं कि सारणी 14.1 में दिए गए समीकरणों के वाम पक्ष में युग्मों E और B में सममिति है।

क्र. स.	नियम	नियम का कथन	गणितीय कथन	
1.	वैद्युत क्षेत्र के लिए गाउस नियम	आवेशों से वैद्युत क्षेत्र उत्पन्न होता है। वैद्युत क्षेत्र रेखाएं आवेशों से प्रारंभ होती हैं और आवेशों पर समाप्त होती हैं।	$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$ या $\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	(14.1)
2.	चुंबकीय क्षेत्र के लिए गाउस नियम	चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं स्वयं पर बंद हो जाती हैं। ये न किसी बिन्दु से प्रारंभ होती हैं और न किसी बिन्दु पर समाप्त होती हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि विद्युत चुंबकीय आवेश का अस्तित्व नहीं होता।	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ या $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	(14.2)
3.	फैराडे का विद्युत-चुंबकीय प्रेरण नियम	परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र से विद्युत क्षेत्र उत्पन्न होता है।	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$ या $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	(14.3)
4.	एम्पीयर नियम (केवल अपरिवर्ती धाराओं के लिए)	विद्युत धारा से चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है।	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$ या $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$	(14.4)

इन नियमों के दक्षिण पक्ष, के बारे में हम क्या कह सकते हैं? ये सममित नहीं हैं। इन नियमों में क्या असममिति है? आइए अब हम इस पर चर्चा करें।

14.2.1 विद्युतचुंबकत्व के मूल नियमों में असममिति

इन नियमों के दक्षिण-पक्ष में हमें दो प्रकार की असममिति (asymmetry) देखने को मिलती है। जहां वैद्युत क्षेत्रों से संबंधित गाउस नियम के दक्षिण पक्ष में एक पृष्ठ से घिरा आवेश q होता है, वहीं चुंबकत्व से संबंधित गाउस नियम का दक्षिण पक्ष शून्य होता है। इस असममिति का कारण यह है कि प्रकृति में विद्युत आवेश उपस्थित होते हैं, पर अभी तक इस बात का कोई प्रमाण नहीं मिल सका है कि प्रकृति में विद्युत चुंबकीय आवेश भी उपस्थित होते हैं। इसीलिए दूसरे नियम के दक्षिण-पक्ष में चुंबकीय आवेश शून्य होता है। भविष्य में जब भी कभी चुंबकीय एकध्रुवों (magnetic monopoles) का पता चलेगा तब इस नियम का दक्षिण पक्ष शून्यतर (non-zero) हो जाएगा। इसी प्रकार, समीकरण (14.4) के दक्षिण पक्ष में वैद्युत आवेशों के प्रवाह को निरूपित करने वाला पद $\mu_0 i (= \mu_0 dq/dt)$ उपस्थित है। परन्तु (चुंबकीय एकध्रुवों की धारा को निरूपित करने वाला) इस प्रकार का पद समीकरण (14.3) के दक्षिण पक्ष में नहीं है। यह एक प्रकार की असममिति है जो इन नियमों में उपस्थित है। यह असममिति उस स्थिति में दूर हो जाएगी जब हमें चुंबकीय एकध्रुवों के अस्तित्व की निश्चित जानकारी हो जाएगी। वर्तमान प्रारंभिक कण-सिद्धांतों के कारण जिनके अनुसार एकध्रुवों का अस्तित्व होता है, इनकी खोज जोर शोर से की जा रही है।

इसके अलावा इन नियमों में एक अन्य प्रकार की असममिति देखने को मिलती है। फैराडे नियम (समीकरण 14.3) के दक्षिण पक्ष में पद $-d\Phi_B/dt$ है। इस नियम के अनुसार परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्रों से एक वैद्युत क्षेत्र उत्पन्न होता है। अब इस प्रकार का कोई पद हमें एम्पीयर नियम में देखने को नहीं मिलता। तो क्या कोई ऐसी बात है जो हमसे छूट रही है? सममिति को ध्यान में रखकर क्या हम निम्नलिखित बात कह सकते हैं?

परिवर्ती वैद्युत क्षेत्रों से चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है।

मैक्सवेल ने यही तर्क दिया था। वैद्युत और चुंबकीय परिघटनाओं की सममिति के संबंध में एक प्रैनी समझ प्रदर्शित करते हुए उन्होंने प्रेरित चुंबकीय क्षेत्रों और विस्थापन धारा की संकल्पनाएं प्रस्तुत की। इस तरह, उन्होंने फ़ैराडे नियम से मिलता जुलता नियम प्राप्त करने के लिए एम्पीयर नियम का व्यापकीकरण किया। आइए हम देखें कि उन्होंने यह कैसे किया।

14.2.2 एम्पीयर नियम का व्यापकीकरण : विस्थापन धारा

आइए हम अपरिवर्ती धाराओं से संबद्ध एम्पीयर नियम पर फिर से विचार करें। गणितीय सुविधा के लिए यहां हम इसके निम्नलिखित अवकलन रूप का प्रयोग करेंगे :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} \quad (14.5\text{क})$$

जहां \mathbf{J} वैद्युत धारा i से संबंधित धारा घनत्व (current density) है। आप जानते हैं कि $i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$ । आइए देखें कि हम समय के साथ बदल रहे क्षेत्रों के लिए समीकरण (14.5 क) का प्रयोग कर सकते हैं या नहीं। यदि हम समीकरण (14.5 क) के दोनों पक्षों का डाइवर्जेंस लें तो हमें मिलता है

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mu_0 (\nabla \cdot \mathbf{J}) \quad (14.5ख)$$

समीकरण (14.5 ख) का वाम पक्ष शून्य है (हाशिए में दी गई टिप्पणी देखिए)। इससे हमें मिलता है

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

यह समीकरण केवल अपरिवर्ती धाराओं के लिए ही सत्य है। यह समझने के लिए आप वैद्युत आवेश संरक्षण से प्राप्त किए गए सांतत्य समीकरण (continuity equation) को फिर से देखिए जिसके अनुसार

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (14.5ग)$$

या समाकल रूप में

$$\int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV,$$

अर्थात् किसी प्रदेश से \mathbf{J} का डाइवर्जेंस या नेट बहिर्वाह (net out flow) इस प्रदेश में स्थित आवेश की ह्रास-दर (rate of decrease) के बराबर होता है। केवल अपरिवर्ती धाराओं के लिए ही $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ होता है। इस तरह हम यह देखते हैं कि समीकरण (14.5 क) में समय के साथ बदल रहे क्षेत्रों के लिए कोई पद नहीं है। स्पष्ट है कि यह पद किसी सदिश क्षेत्र का समय-अवकलन होना चाहिए जिससे कि स्थैतिक क्षेत्रों के लिए इसका समीकरण, (14.5 क) के रूप का हो जाए। संभवतः मैक्सवेल का सबसे महत्वपूर्ण योगदान इस छोटे पद को मालूम करना ही था। मैक्सवेल ने समीकरण (14.5 क) में एक पद $\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ को जोड़कर समीकरण (14.5 क) में परिवर्तन कर दिया।

अवकल रूप में इसे इस प्रकार लिखा गया

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (14.6क)$$

किसी खुले पृष्ठ S पर समीकरण के दोनों पक्षों का समाकलन करके तथा स्टोक्स-प्रमेय लागू करके समीकरण (14.6 क) का समाकल रूप प्राप्त किया जा सकता है। हमने हाशिए में इसकी व्युत्पत्ति दी है। इस तरह, हमें मैक्सवेल द्वारा किया गया एम्पीयर नियम का व्यापकीकरण प्राप्त हो जाता है :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (14.6ख)$$

किसी सदिश क्षेत्र \mathbf{A} के लिए

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

एक खुले पृष्ठ S पर समीकरण (14.6 क) के दोनों पक्षों का समाकलन करने पर हमें मिलता है:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} + \mu_0 \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

वाम पक्ष पर स्टोक्स नियम लागू करने और

$$i = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

$$\Phi_E = \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$$

लेने पर हमें मिलता है :

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$$

ध्यान दीजिए कि इस समीकरण को लिखने में हमने फ़ैराडे नियम के ऋण चिन्ह के स्थान पर धन चिन्ह का प्रयोग किया है। ऐसा प्रायोगिक परिणामों और सममिति को ध्यान में रखकर किया गया है। यहां गुणक $\mu_0 \epsilon_0$ का प्रयोग समीकरण को SI मात्रकों में व्यक्त करने के लिए किया गया है। समीकरणों (14.6 क) और (14.6 ख) को देखने से यह पता चलता है कि चुंबकीय क्षेत्र को निम्नलिखित दो विधियों से स्थापित किया जा सकता है :

- 1) विद्युत धारा से और
- 2) परिवर्ती वैद्युत क्षेत्र से।

समीकरण (14.6 क) और (14.6 ख) एम्पीयर नियम के क्रमशः व्यापकीकृत अवकल रूप और व्यापकीकृत समाकल रूप को अभिव्यक्त करते हैं। इन्हें **एम्पीयर-मैक्सवेल नियम** भी कहा जाता है। स्मरण रहे कि मैक्सवेल ने इस नियम को किसी आनुभविक (empirical) अभिधारणा से व्युत्पन्न नहीं किया था। मूलतः वह सममिति-अभिधारणा से प्रेरित हुए थे और साथ ही एम्पीयर नियम को वैद्युत आवेश संरक्षण नियम के संगत बनाने के लिए उन्होंने उसमें एक अतिरिक्त पद जोड़ा था। मैक्सवेल के समय से ही अनेक प्रयोगों द्वारा मैक्सवेल की इस महत्वपूर्ण अंतर्दृष्टि की पुष्टि की गई है जिनमें संधारित्रों से संबंधित चुंबकीय क्षेत्र के प्रत्यक्ष मापन के प्रयोग भी शामिल हैं।

आइए अब हम समीकरण (14.6 ख) को ध्यान से देखें और इसका अर्थ समझने का प्रयास करें। आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि पद $\epsilon_0 d\Phi_E/dt$ की वही विमा होती है जो धारा की है। आइए हम इस पर और चर्चा करें।

विस्थापन धारा

हालांकि परिवर्ती वैद्युत अभिवाह, विद्युत धारा नहीं है, फिर भी चुंबकीय क्षेत्रों को उत्पन्न करने में इसका वही प्रभाव होता है जो कि धारा का होता है। यही कारण है कि मैक्सवेल ने इस पद को **विस्थापन धारा** का नाम दिया और वही नाम अभी भी चला आ रहा है। विस्थापन धारा यह होती है

$$i_d = \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{J}_d \cdot d\mathbf{S} \quad (14.7क)$$

जहां $\mathbf{J}_d \left(= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$ को विस्थापन धारा घनत्व (displacement current density) कहा जाता है। शब्द "विस्थापन" का कोई भौतिक अर्थ नहीं है, पर शब्द धारा इस अर्थ में प्रासंगिक है कि चुंबकीय क्षेत्रों को उत्पन्न करने में विस्थापन धारा के प्रभाव और वास्तविक धारा के प्रभाव में भेद नहीं किया जा सकता। अतः हम यह कह सकते हैं कि चालन धारा i से या विस्थापन धारा i_d से चुंबकीय क्षेत्र स्थापित किया जा सकता है।

इस तरह हम एम्पीयर-मैक्सवेल नियम को इस तरह व्यक्त कर सकते हैं :

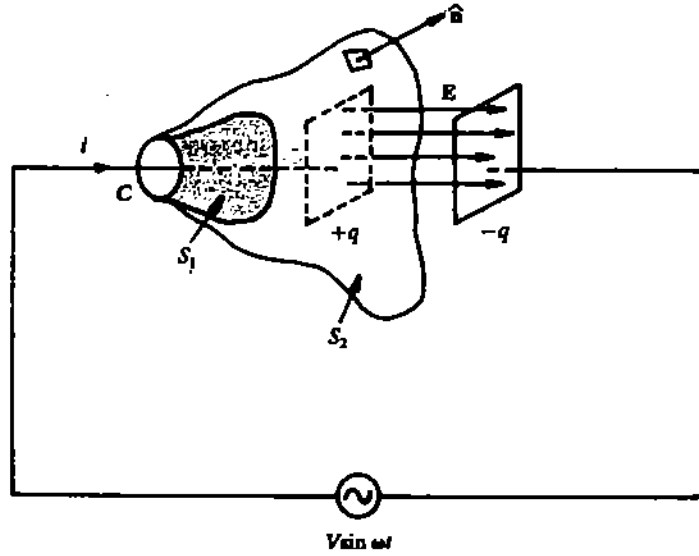
$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \int_S \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 (i + i_d) \quad (14.7ख)$$

विस्थापन धारा की भूमिका को अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम एक समांतर प्लेट संधारित्र युक्त परिपथ में विस्थापन धारा ज्ञात करें।

उदाहरण 1: एक समांतर प्लेट संधारित्र युक्त परिपथ में विस्थापन धारा

मान लीजिए समांतर प्लेट संधारित्र को एक अपरिवर्ती धारा से आवेशित किया गया है जैसा कि चित्र 14.1 में दिखाया गया है।

मान लीजिए कि दोनों प्लेटों के बीच के अंतर की तुलना में ये प्लेट काफी बड़े हैं। तब केवल प्लेटों के बीच \mathbf{E} क्षेत्र होगा और एक उत्तम सन्निकटन के रूप में प्लेटों के अधिकांश क्षेत्र पर यह एक-समान होगा। इन प्रतिबंधों के अधीन समांतर प्लेट संधारित्र के लिए i_d मालूम करने के लिए



चित्र 14.1

हम समीकरण (14.7 ख) का प्रयोग करेंगे। आइए हम संधारित्र की ओर जाने वाले तार के इर्द गिर्द एक परिपथ पर समीकरण (14.7 ख) को लागू करें। इसके लिए आइए हम गुब्बारे की तरह के दो पृष्ठ S_1 और S_2 बनाएं, जैसा कि चित्र 14.1 में दिखाया गया है। ध्यान दीजिए कि तार और इसमें बहने वाली धारा पृष्ठ S_1 को काटते हैं और संबंधित कंटूर C तार को घेरे हैं। दूसरा पृष्ठ S_2 संधारित्र के एक प्लेट को परिवद्ध किए हुए है। इस पृष्ठ में कोई मुक्त धारा प्रवेश नहीं करती, पर कंटूर C , तार को फिर से घेरे है। पृष्ठ S_1 और संबंधित कंटूर C के लिए समीकरण (14.7 ख) के दक्षिण पक्ष से यह मिलता है

$$\mu_0 \int_{S_1} \left\{ \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\} \cdot d\mathbf{S} = \mu_0 i$$

विस्थापन धारा वाला पद शून्य है, क्योंकि अपरिवर्ती धारा ले जाने वाले तार के लिए \mathbf{E} अचर होता है। अतः S_1 के लिए, समीकरण (14.7 ख) हो जाता है

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

समान कंटूर C वाले पृष्ठ S_2 के लिए

$$\int_{S_2} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

क्योंकि S_2 में कोई भी धारा प्रवेश नहीं करती। फिर भी, क्योंकि प्रत्येक संधारित्र प्लेट पर आवेश भंडारित किए जाते हैं और हटाए जाते हैं, इसलिए दोनों प्लेटों के बीच एक परिवर्ती \mathbf{E} विकसित हो जाएगा। इस क्षेत्र के अभिवाह की रेखाएं S_2 में प्रवेश करेंगी, अतः

$$\begin{aligned} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 \epsilon_0 \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \mu_0 i_d \end{aligned}$$

क्योंकि S_1 और S_2 दोनों का कंटूर C समान है, इसलिए $i = i_d$ होना चाहिए। इसे दर्शाने के लिए, हम क्षेत्रफल S वाले पृष्ठ को, परिवद्ध करने वाले पिल-बक्स आयतन पर, जो धन प्लेट के चारों ओर होता है, गाउस-नियम लागू करते हैं :

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = ES = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\epsilon_0 S} \hat{\mathbf{n}}$$

जहां q प्लेट पर आवेश है और S इसका क्षेत्रफल ($= \pi R^2$) है। इस तरह

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{\epsilon_0 S} \frac{\partial q}{\partial t} \hat{\mathbf{n}} = \frac{i}{\epsilon_0 S} \hat{\mathbf{n}}$$

और

$$\begin{aligned} i_d &= \epsilon_0 \int_S \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= \frac{i}{S} \int_S \hat{\mathbf{n}} \cdot d\mathbf{S} = i \end{aligned}$$

अतः परिपथ के लिए

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i$$

जो कि S_1 और S_2 दोनों के लिए होता है जबकि चालन और विस्थापन धाराओं दोनों को ध्यान में रखा गया हो।

ध्यान दीजिए कि दो पृष्ठों को परिवर्द्ध करने वाले कंडूर समान लिए गए हैं। समीकरण (14.7 ख) में विस्थापन धारा वाला पद न हो, तो हमें विसंगति मिलेगी: समान कंडूर वाले दो पृष्ठों को लेने से अलग-अलग परिणाम (S_1 के लिए $\mu_0 i$ और S_2 के लिए शून्य) प्राप्त होंगे। अतः हम विस्थापन धारा के बारे में ऐसे सोच सकते हैं कि यह परिपथ को पूरा करती है: जहां चालन धारा का प्रवाह रुक जाता है वहाँ परिपथ को पूरा करने के लिए परिपथ में विस्थापन धारा उपस्थित होती है। आवेश के लिए सांतत्य समीकरण अर्थात् समीकरण (14.5 ग) को समझने का भी यह एक तरीका है।

समांतर प्लेट संधारित्र के इस उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाता है कि मैक्सवेल के चौथे समीकरण में विस्थापन धारा वाले पद का होना आवश्यक है। विस्थापन धारा के महत्व को समझने के लिए आप निम्नलिखित बोध प्रश्न करें।

बोध प्रश्न 1

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

1 MHz की आवृत्ति पर तांबे में चालन और विस्थापन धारा घनत्वों

$\left(\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}, \mathbf{J}_d = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, E = E_0 \sin \omega t \right)$ का अनुपात ज्ञात कीजिए। 1 MHz की आवृत्ति पर यही अनुपात टेफ्लॉन के लिए ज्ञात कीजिए। तांबे के लिए $\epsilon = \epsilon_0, \mu = \mu_0, \sigma =$

$5.8 \times 10^7 \text{ Sm}^{-1}$ । टेफ्लॉन के लिए $\epsilon = 2.1 \epsilon_0, \mu = \mu_0$ और $\sigma = 3 \times 10^{-8} \text{ Sm}^{-1}$

वास्तव में मैक्सवेल ही थे जिन्होंने पहचाना कि फेराडे नियम द्वारा सुझाई गई सममिति को प्रदर्शित करने के लिए एम्पीयर नियम में परिवर्तन करना आवश्यक है। मैक्सवेल के सम्मान में उनके नाम पर चार मूल विद्युतचुंबकत्व नियमों को **मैक्सवेल समीकरण** कहा जाता है। मैक्सवेल समीकरण प्रकृति के मूल नियमों की श्रेणी में आते हैं। जैसा कि आप देख चुके हैं कि इन्हें तर्कसंगत व्याख्या और गणितीय परिकलन द्वारा किन्हीं मूल संदर्शों से व्युत्पन्न नहीं किया गया है। प्रायः प्रकृति के मूल नियम हमारे ज्ञान के व्यापकीकरण ही होते हैं। इस भाग के अंत में हम इन समीकरणों का एक संक्षिप्त विवरण प्रस्तुत करेंगे।

14.2.3 मैक्सवेल समीकरणों की व्याख्या

आइए पहले हम इन समीकरणों को एक साथ सारणी रूप में लिख लें।

सारणी 14.2 : मैक्सवेल समीकरण

क्र.सं.	समीकरण का कथन	अवकल रूप	समाकल रूप	
1.	गाउस नियम : आवेशों से वैद्युत क्षेत्र उत्पन्न होते हैं : वैद्युत क्षेत्र रेखाएं आवेशों से प्रारंभ होती हैं और आवेशों पर समाप्त होती हैं।	$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	(14.8)
2.	फैराडे नियम : परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र से वैद्युत क्षेत्र उत्पन्न होता है।	$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	(14.9)
3.	गाउस नियम: चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं स्वयं पर बंद हो जाती हैं; वियुक्त चुंबकीय आवेश का अस्तित्व नहीं होता।	$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	(14.10)
4.	एंपीयर - मैक्सवेल नियम: विद्युत धारा और परिवर्ती वैद्युत क्षेत्र से चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न होता है।	$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	(14.11)

यह समीकरण - समुच्चय, जिसे मैक्सवेल ने 1864 में पहले पहल प्रकाशित किया था, प्रत्येक स्थान पर वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों के व्यवहार को नियंत्रित करता है। सारणी 14.2 में इन समीकरणों को वैद्युत आवेशों और विद्युत धाराओं की उपस्थिति में निर्वात में स्थित प्रदेशों के लिए लिखा गया है। ध्यान दीजिए कि चुंबकीय आवेश और इसकी संगत धारा के न होने के कारण \mathbf{E} और \mathbf{B} के सापेक्ष इन समीकरणों में सममिति नहीं है। आवेश-मुक्त धारा-मुक्त प्रदेशों में q और i (या ρ और \mathbf{J} वाले) पद शून्य होते हैं और मैक्सवेल समीकरण निम्न रूप के होते हैं।

सारणी 14.3: निर्वात में मैक्सवेल समीकरण जबकि स्रोत आवेश या धारा न हों

अवकल रूप	समाकल रूप	
$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$	$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$	(14.12)
$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$	(14.13)
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$	(14.14)
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$	(14.15)

आप यहां यह देख सकते हैं कि आवेश-मुक्त प्रदेशों में इन समीकरणों में पूर्ण सममिति है। एम्पीयर-मैक्सवेल नियम में अक्षर ϵ_0 और μ_0 इसलिए आते हैं क्योंकि हमने इन समीकरणों को SI मात्रकों में लिखा है। समीकरण (14.13) और (14.15) में चिह्नों की असंगति क्यों है? यह अंतर वास्तव में सममिति के कारण है - साथ ही यह दिखाता है कि वैद्युत क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र एक-दूसरे के पूरक के रूप में उपस्थित होते हैं।

मैक्सवेल समीकरणों से हमें किन बातों का पता चलता है? मोटे तौर पर सारणी 14.2 के पहले दो समीकरणों से यह पता चलता है कि वैद्युत क्षेत्र दो विधियों से स्थापित होता है: विद्युत आवेश से और परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र से। अंतिम दो समीकरणों से यह पता चलता है कि चुंबकीय क्षेत्र का कोई स्रोत नहीं होता (प्रकृति में वियुक्त चुंबकीय आवेश नहीं होता) और यह विद्युत धाराओं और परिवर्ती वैद्युत क्षेत्र से स्थापित होता है। मैक्सवेल समीकरणों से यह भी पता चलता है कि वैद्युत क्षेत्र के बिना परिवर्ती चुंबकीय क्षेत्र का अस्तित्व नहीं हो सकता और चुंबकीय क्षेत्र के बिना परिवर्ती

विद्युत क्षेत्र का अस्तित्व नहीं हो सकता। यही कारण है कि इन दो क्षेत्रों को अलग-अलग नहीं माना जाता। अतः हम एक विद्युतचुंबकीय क्षेत्र की बात करते हैं। इस तरह, मैक्सवेल विद्युत और चुंबकत्व के एकीकृत सिद्धांत (unified theory) को गणितीय रूप में प्रस्तुत करने में सफल हुए।

मैक्सवेल के इस सिद्धांत के व्यापक अनुप्रयोग हैं - तमाम विद्युत और रेडियो इंजीनियरिंग इन्हीं समीकरणों पर आधारित है। और समीकरण (14.13) के साथ समीकरण (14.15) में विस्थापन धारा वाले पद के होने के कारण विद्युतचुंबकीय तरंगों के अस्तित्व का पता चलता है। अगले भाग में हम इसी बात पर चर्चा करेंगे। परन्तु, आगे पढ़ने से पहले आप समय के साथ बदल रहे क्षेत्रों पर मैक्सवेल समीकरण लागू करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 2

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

किन-किन प्रतिबंधों के अधीन निम्नलिखित परिवर्ती विद्युत और चुंबकीय क्षेत्र मैक्सवेल समीकरणों (समीकरण 14.12 से समीकरण 14.15 तक) को संतुष्ट करते हैं ?

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{k}} E_0 \sin(y - vt)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{i}} B_0 \sin(y - vt)$$

यहां E_0 तथा B_0 अचर हैं।

14.3 विद्युतचुंबकीय तरंगें

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं मैक्सवेल समीकरणों की एक बड़ी सफलता यह रही है कि ये समीकरण विद्युतचुंबकीय तरंगों के अस्तित्व की जानकारी देती हैं। प्रयोगों द्वारा इन तरंगों के अस्तित्व का पता 1887 में हर्ट्ज़ ने लगाया। उच्च आवृत्तियों पर ये तरंगें प्रकाश तरंगों के रूप में उपस्थित होती हैं। आज हम जानते हैं कि रेडियो तरंगें, अवरक्त (infrared), दृश्य, पराबैंगनी, X-किरणें और गामा किरणें सभी विद्युतचुंबकीय तरंगें हैं - इनमें अंतर केवल इनकी आवृत्तियों का है। इस भाग में हम यह देखेंगे कि किस प्रकार मैक्सवेल समीकरणों से विद्युतचुंबकीय तरंगों का पूर्वानुमान लगाया जा सकता है। इसके लिए मैक्सवेल समीकरणों से हम एक समीकरण व्युत्पन्न करेंगे, जो कि तरंग समीकरण होता है और फिर इसके भौतिक अर्थ को समझने का प्रयास करेंगे।

14.3.1 तरंग समीकरण

पहले हम उस आकाश प्रदेश में, जहां कोई आवेश या धारा न हो, मैक्सवेल समीकरणों (सारणी 14.3 में दिए समीकरणों 14.12 से 14.15 तक) से तरंग समीकरण व्युत्पन्न करेंगे। जैसा कि आप देख सकते हैं ये समीकरण प्रथम कोटि के युग्मित आंशिक अवकल समीकरण (partial differential equations) हैं। परन्तु, हम इन युग्मित समीकरणों से \mathbf{E} और \mathbf{B} के लिए अलग-अलग समीकरण प्राप्त कर सकते हैं। गणितीय सुविधा की दृष्टि से हम इनके अवकल रूप का प्रयोग करेंगे। समीकरणों (14.13) और (14.15) का कर्ल लेने पर हमें मिलता है

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \quad (14.16क)$$

और

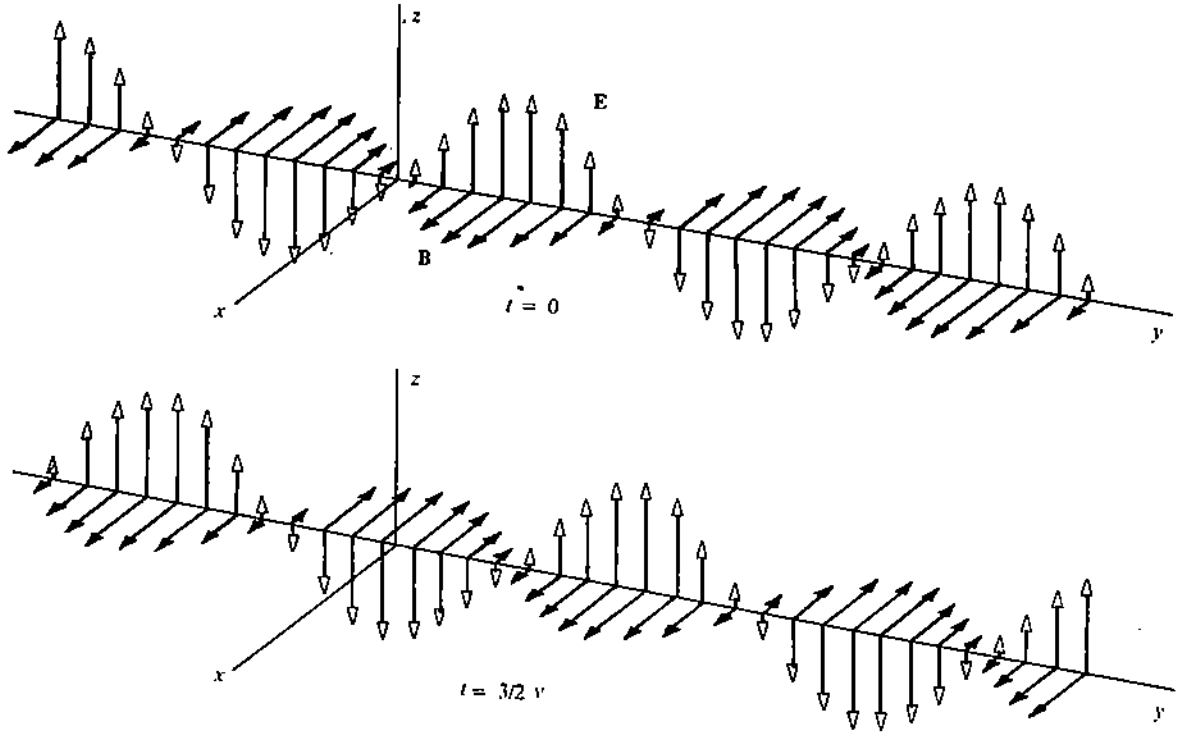
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) = \nabla \times \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \quad (14.16ख)$$

अब हम किसी भी क्षेत्र सदिश \mathbf{F} के लिए निम्नलिखित सदिश सर्वसमिका (vector identity) का प्रयोग करते हैं

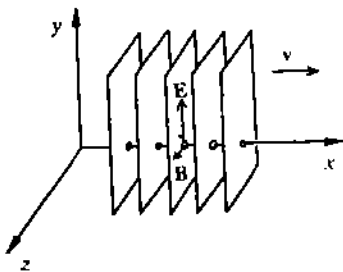
$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

इस तरह, इस सदिश सर्वसमिका के साथ समीकरण (14.15) का प्रयोग करने पर समीकरण (14.16 क) से हमें मिलता है :

$v = \pm c$ और $B_0 c = E_0$ । आप यह भी सत्यापित कर सकते हैं कि बोघ प्रश्न 2 के E और B तरंग समीकरणों (14.17 क और 14.17 ख) को संतुष्ट करते हैं। यह समतल विद्युतचुंबकीय तरंग (plane electromagnetic wave) का एक उदाहरण है।



चित्र 14.2: बोघ प्रश्न 2 के E और B क्षेत्रों द्वारा निर्धारित तरंग को अलग-अलग दो समयों पर दिखाया गया है। स्मरण रहे कि x या z के साथ किसी भी चीज में परिवर्तन नहीं होता। y अक्ष के एक बिन्दु पर जो कुछ भी हो रहा है वह उस बिन्दु से होकर जाने वाले लांबिक समतल पर सर्वत्र होता है। समय के साथ पूरा प्रतिरूप (pattern) दायीं ओर गतिमान होता है क्योंकि $y + \Delta y$ और $t + \Delta t$ पर $y - vt$ का वही मान होता है जो कि y और t पर था यदि $\Delta y = v \Delta t$ । दूसरे शब्दों में यह एक समतल तरंग है जो j की दिशा में अघर चाल v से गतिमान हो रही है।



चित्र 14.3: समतल विद्युतचुंबकीय तरंग

क्या इस बात की ओर आपने ध्यान दिया है कि यहां हमने एक नए शब्द - समतल विद्युतचुंबकीय तरंग (plane electromagnetic wave) का प्रयोग किया है। अब आप यह पूछ सकते हैं कि समतल विद्युतचुंबकीय तरंग क्या होती है? शब्द समतल यह प्रकट करता है कि आकाश के प्रत्येक बिन्दु पर क्षेत्र सदिश E और B एक समतल में होते हैं, और दो अलग-अलग बिन्दुओं के समतल एक-दूसरे के समांतर होते हैं (चित्र 14.3 देखिए)। आगे हम मुख्यतः समतल विद्युत-चुंबकीय तरंगों की चर्चा करेंगे क्योंकि भौतिकी, इंजीनियरिंग और प्रौद्योगिकी के विभिन्न क्षेत्रों में इनका प्रयोग काफ़ी उपयोगी सिद्ध होता है। जैसा कि आप देख चुके हैं बोघ प्रश्न 2 में दिया गया विद्युतचुंबकीय क्षेत्र, समतल विद्युतचुंबकीय तरंग का एक विशिष्ट उदाहरण है। अब हम निर्वात में तरंग समीकरण (14.17 क और 14.17 ख) के ऐसे व्यापक समतल तरंग हल ज्ञात करना चाहते हैं जो मैक्सवेल समीकरणों को भी संतुष्ट करते हैं।

14.3.3 निर्वात में समतल तरंग संचरण

आइए हम $A(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - vt)$ के रूप का एक अदिश फलन (scalar function) लें। अब $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = d$ जहां d एक अचर है, उस समतल का समीकरण है जिसका अभिलंब \mathbf{k} की दिशा में है। इसलिए $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = d$ के लिए फलन $A(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - vt)$ एक समतल तरंग को निरूपित करता है। हम यह दिखा सकते हैं कि इस रूप के E और B क्षेत्र, तरंग समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। इसके लिए, आइए हम इन क्षेत्रों को उनके अदिश घटकों (scalar components) के पदों में व्यक्त करें

$$\mathbf{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z} \quad (14.21क)$$

और

$$\mathbf{B} = B_x \hat{x} + B_y \hat{y} + B_z \hat{z} \quad (14.21ख)$$

हम यह दिखा सकते हैं कि ये अदिश घटक और इस तरह E और B क्षेत्र, समीकरणों (14.17 क और 14.17 ख) को संतुष्ट करते हैं। अदिश घटक $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z, A(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt)$ के रूप के हैं। तब समीकरण (14.21 क) और (14.21 ख) में दिए गए क्षेत्र $\hat{\mathbf{k}}$ की दिशा में चाल v से संचरित हो रही तरंगों को निरूपित करते हैं। मान लीजिए $\eta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt$ । हम मान सकते हैं कि A घटकों $E_x, E_y, E_z, B_x, B_y, B_z$ में से किसी को भी निरूपित करता है। η के पदों में x, y, z और t के सापेक्ष A के अवकलन को व्यक्त करने के लिए अब हम श्रृंखला-नियम (chain rule) का प्रयोग करेंगे :

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x} (x \hat{x} + y \hat{y} + z \hat{z}) \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{x} \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ \therefore \frac{\partial A}{\partial x} &= \frac{\partial A}{\partial \eta} (\hat{x} \cdot \hat{\mathbf{k}})\end{aligned}$$

और

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right) (\hat{x} \cdot \hat{\mathbf{k}}) = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} (\hat{x} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2$$

इसी प्रकार हम $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2}$ और $\frac{\partial^2 A}{\partial z^2}$ ज्ञात कर सकते हैं और यह दिखा सकते हैं कि

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \quad (14.22क)$$

अब आप स्वयं इस परिणाम को सिद्ध क्यों नहीं करते ? इसके लिए निम्न प्रश्न को हल कीजिए।

बोध प्रश्न 4

समीकरण (14.22 क) को सिद्ध कीजिए (आपको इस परिणाम का प्रयोग करना होगा कि $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ । यहाँ l, m, n $\hat{\mathbf{k}}$ की दिक्कोज्याएँ हैं।

इसी प्रकार हम यह दिखा सकते हैं कि

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial \eta} \left(\frac{\partial \eta}{\partial t} \right) = -v \frac{\partial A}{\partial \eta} \\ \therefore \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} &= v^2 \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2}\end{aligned} \quad (14.22ख)$$

समीकरणों (14.22 क) और (14.22 ख) की तुलना करने पर हमें A के लिए तरंग समीकरण प्राप्त हो जाता है :

$$\nabla^2 A = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2}$$

हम इस परिणाम को वैद्युत क्षेत्र के तीनों घटकों के लिए व्यक्त कर सकते हैं

$$\nabla^2 E_x(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E_y(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 E_z(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2}$$

क्योंकि $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ अचर सदिश हैं, इसलिए हम यह लिख सकते हैं कि

$$\nabla^2 (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z}) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z})$$

या
$$\nabla^2 \mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad (14.23क)$$

इसी प्रकार B क्षेत्र के लिए भी इसी प्रकार के परिणाम प्राप्त कर सकते हैं :

$$\nabla^2 \mathbf{B}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{B}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) \quad (14.23ख)$$

इस तरह, हमने यह दिखाया है कि $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt)$ और $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt)$ के रूप के क्षेत्र तरंग समीकरण को संतुष्ट करते हैं। तरंग संचरण की चाल $v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = c$ होती है, जहां c प्रकाश की चाल है।

अभी तक हमने यह स्थापित किया है कि

$$\mathbf{E}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt) \text{ and } \mathbf{B}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt)$$

के व्यापक रूप वाले क्षेत्र रिक्त आकाश में तरंग समीकरण के समतल तरंग हल को निरूपित करते हैं। अब हमें यह भी सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि ये क्षेत्र मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। यह स्थापित करने से हमें विद्युतचुंबकीय तरंगों के गुणधर्मों की कुछ जानकारी भी मिलेगी। हम यह दिखा सकते हैं कि यदि हम इन हलों को मैक्सवेल समीकरणों (14.12 से 14.15) में प्रतिस्थापित करें, तो हमें निम्नलिखित प्रतिबंध प्राप्त होंगे

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (14.24 क)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = c \mathbf{B} \quad (14.24 ख)$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14.24 ग)$$

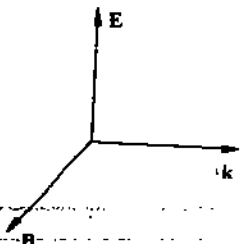
$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{E}}{c} \quad (14.24 घ)$$

जहां

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} \quad (14.24 ड.)$$

यदि हम समीकरण (14.24 ख) का या समीकरण (14.24 ग) का परिमाण लें, तो हमें वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्र प्रचलताओं के बीच निम्न संबंध प्राप्त होगा :

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = c \quad (14.24 च)$$



चित्र 14.4: विद्युतचुंबकीय तरंगें अनुप्रस्थ होती हैं

इन समीकरणों को व्युत्पन्न करने की गणितीय क्रियाविधि इस इकाई के परिशिष्ट में दी गई है। इस तरह, समीकरणों (14.21 क और 14.21 ख) द्वारा दी गई समतल विद्युतचुंबकीय तरंगें मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करती हैं और उस स्थिति में जहां कोई स्रोत नहीं हो, इनसे वीचीय समीकरण (14.24 क से 14.24 घ तक) प्राप्त होते हैं। इन समीकरणों से समतल विद्युतचुंबकीय तरंगों के गुणधर्मों के बारे में भी पता चलता है। समीकरणों (14.24 ख और 14.24 घ) को एक साथ लेने पर हमें यह पता चलता है कि E और B एक-दूसरे पर लंबवत् हैं क्योंकि इनका अदिश गुणनफल शून्य है। और समीकरणों (14.24 क और 14.24 ग) से यह पता चलता है कि E और B, $\hat{\mathbf{k}}$ पर अर्थात् विद्युतचुंबकीय तरंग की संचरण-दिशा पर लंब हैं (चित्र 14.4)। इस तरह, हम यह देखते हैं कि विद्युतचुंबकीय तरंग एक अनुप्रस्थ तरंग है। सामान्यतः r और t पर E और B की कोई भी फलनिक आश्रितता (functional dependence) हो सकती है। इस प्रकार की समतल विद्युतचुंबकीय तरंग को चित्र 14.5 में दिखाया गया है। संक्षेप में, हमने यह देखा है कि रिक्त आकाश में समतल विद्युतचुंबकीय तरंगों के निम्नलिखित गुणधर्म होते हैं :

रिक्त आकाश में समतल विद्युतचुंबकीय तरंगों के गुणधर्म

1. क्षेत्र प्रतिरूप चाल c से गतिमान होता है।
2. किसी भी क्षण तरंग के प्रत्येक बिंदु पर वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्र प्रबलताएं समीकरण (14.24 च) से संबंधित हैं।
3. वैद्युत क्षेत्र और चुंबकीय क्षेत्र एक दूसरे पर लंब होते हैं और ये तरंग की संचरण दिशा पर भी लंब होते हैं अर्थात् तरंग अनुप्रस्थ होती है।

भौतिकी के अनेक क्षेत्रों में प्रयुक्त एक विशेष और महत्वपूर्ण प्रकार की समतल विद्युतचुंबकीय तरंग एक ही हुई आवृत्ति वाली ज्यावकीय तरंग (monochromatic sinusoidal wave) होती है। अब हम इन तरंगों पर संक्षेप में चर्चा करेंगे।

एक-वर्णी ज्यावकीय विद्युतचुंबकीय समतल तरंग

अभी तक आपने जितनी तरह की तरंगों के बारे में पढ़ा है उनमें निश्चित रूप से निम्न रूप की तरंगें आपको सबसे अधिक जानी-पहचानी लगेंगी

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (14.25 \text{ क})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{k}, \omega) \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \quad (14.25 \text{ ख})$$

इस प्रकार की तरंगों को एकवर्णी ज्यावकीय विद्युतचुंबकीय समतल तरंग (monochromatic sinusoidal electromagnetic plane waves) कहा जाता है। एकवर्णी (monochromatic) का अर्थ है एक रंग वाली। क्योंकि आवृत्ति का संबंध रंग से होता है, विशेष रूप से प्रकाश के संदर्भ में, इसलिए एकल आवृत्ति वाली ज्यावकीय तरंग को एकवर्णी तरंग भी कहा जाता है। कोसाइन फलन का कोणांक $(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ तरंग की कला (phase) को निरूपित करता है। ऑयलर-सूत्र

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

को ध्यान में रखकर समीकरणों (14.25 क और 14.25 ख) द्वारा दी गई ज्यावकीय तरंगों को इस रूप में भी लिखा जा सकता है :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}]$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \text{Re} [\mathbf{B}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}]$$

जहाँ $\text{Re}(\mathbf{A})$, \mathbf{A} के वास्तविक भाग को प्रकट करता है। मान लीजिए यहाँ हम सम्मिश्र फलन (complex function)

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

लेते हैं। तब वास्तविक तरंग सम्मिश्र तरंग का वास्तविक भाग (real part) होगा :

$$\mathbf{F} = \text{Re} \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$$

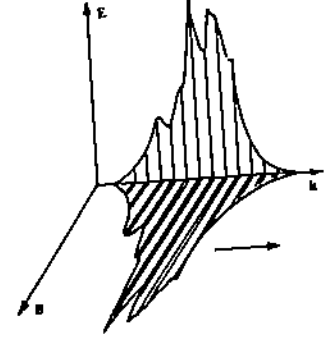
यदि हमें $\tilde{\mathbf{F}}$ ज्ञात हो, तो हम \mathbf{F} आसानी से ज्ञात कर सकते हैं। सम्मिश्र (complex) संकेत का प्रयोग करने का लाभ यह है कि साइन और कोसाइन फलनों की तुलना में चरघातांकी फलनों (exponential functions) का प्रकलन सरल होता है। अतः आगे की चर्चा में अब हम \mathbf{E} और \mathbf{B} क्षेत्रों को चरघातांकी फलनों के रूप में व्यक्त करेंगे :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (14.25 ग)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{k}, \omega) e^{-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (14.25 घ)$$

सामान्यतः \mathbf{E}_0 और \mathbf{B}_0 सम्मिश्र सदिश आत्मान लेते हैं जो \mathbf{r} और t से स्वतंत्र होते हैं। पर, जब कभी भी हम वास्तविक तरंगों पर विचार कर रहे होंगे तब हम समीकरणों (14.25 ग और 14.25 घ) के वास्तविक भाग को ही लेंगे। इस संकेत की जटिलता से आप परेशान न हों। उदाहरण के लिए, आप यह देख सकते हैं कि बोध प्रश्न 2 के \mathbf{E} और \mathbf{B} क्षेत्र समीकरणों (14.25 क और 14.25 ख) की विशिष्ट स्थितियां हैं जहाँ \mathbf{k}, y दिशा के समांतर है, $v = \frac{\omega}{k}$ और

समीकरण और विद्युत चुंबकीय तरंगें



चित्र 14.5: एक त्वेच्छ \mathbf{r} और t अभिन्नता वाली समतल विद्युतचुंबकीय तरंग।

$$E_0(\mathbf{k}, \omega) = E_0 \hat{z} \text{ और } B_0(\mathbf{k}, \omega) = B_0 \hat{x}.$$

इस रूप की तरंगों का प्रयोग करने में निम्नलिखित दो लाभ होते हैं :

- 1) किसी भी तरंगावलि (wave train) को ऊपर बताई गई तरंगों का ω और \mathbf{k} के विभिन्न मानों के लिए) रैखिक अध्यारोपण (linear superposition) माना जा सकता है ।
- 2) समीकरणों (14.25 क और 14.25 ख) द्वारा दी गई एकवर्णी समतल विद्युत चुंबकीय तरंगों के लिए मैक्सवेल समीकरणों की संक्रियाएं विशेष रूप से निम्नलिखित सरल रूप की हो जाती है :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = i \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \quad (14.26 \text{ क})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = i \mathbf{k} \times \mathbf{E} \quad (14.26 \text{ ख})$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -i \omega \mathbf{E} \quad (14.26 \text{ ग})$$

सामान्यतः हम इस गुणधर्म को निम्न तुल्यता संबंधों (equivalence relations) से व्यक्त करते हैं ।

$$\nabla * [] \rightarrow i \mathbf{k} * [] \quad (14.27 \text{ क})$$

और

$$\frac{\partial}{\partial t} [] \rightarrow -i \omega [] \quad (14.27 \text{ ख})$$

प्रतीक *अदिश या सदिश राशि पर लागू की गई किसी भी संक्रिया (operation) जैसे ग्रेडिएन्ट, डाइवर्जेंस, कर्ल आदि (grad, div, curl) को प्रकट करता है । इस तुल्यता की सहायता से हम रिक्त आकाश में एकवर्णी समतल तरंगों के लिए मैक्सवेल समीकरणों को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

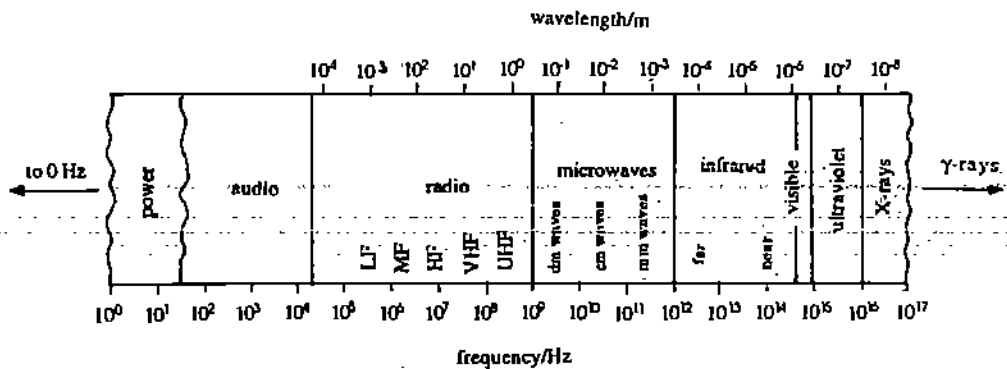
$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad (14.28 \text{ क})$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0 \quad (14.28 \text{ ख})$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0 \quad (14.28 \text{ ग})$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{1}{c} \omega \mathbf{E}_0 \quad (14.28 \text{ घ})$$

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं कि रेडियो तरंगें, सूक्ष्म तरंगें, कृष्णिका विकिरण (black body radiation), प्रकाश-तरंगें, X-किरणें और गामा किरणें सभी विद्युतचुंबकीय विकिरण हैं । यह सभी तरंगें विद्युतचुंबकीय स्पेक्ट्रम का हिस्सा हैं । ये विकिरण एक दूसरे से केवल आवृत्ति में भिन्न होते हैं ।



चित्र 14.6: विद्युतचुंबकीय स्पेक्ट्रम

क्या आप समीकरण (14.25 क) की समतल विद्युतचुंबकीय तरंग का तरंगदैर्घ्य ज्ञात कर सकते हैं ? इसे मालूम करने का प्रयास कीजिए ।

मैक्सवेल समीकरण और विद्युत चुंबकीय तरंगें

बोध प्रश्न 5

दिखाइए कि समतल एकवर्णी ज्यावक्रीय विद्युतचुंबकीय तरंग (समीकरण 14.25 क) का तरंगदैर्घ्य होता है

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (14.29 \text{ क})$$

और इस तरह आवृत्ति होती है

$$f = \frac{c}{\lambda} \quad (14.29 \text{ ख})$$

राशि k को तरंग-संख्या (wave number) कहा जाता है क्योंकि प्रति एकक दूरी पर $k/2\pi$ तरंगदैर्घ्य होते हैं और k को तरंग सदिश (wave vector) कहा जाता है ।

अब हम चाहेंगे कि आप आगे की पढ़ाई रोककर अभी तक का पाठ दोहरा लें । रिक्त आकाश (अर्थात् आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेश) में मैक्सवेल समीकरणों से विद्युतचुंबकीय तरंगों के बारे में पूर्वानुमान लगाया जा सकता है । मैक्सवेल समीकरण एक गतिमान विद्युतचुंबकीय तरंग का निदर्शन करते हैं जो कि समय-परिवर्ती वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों से बने होते हैं । परिवर्ती $B (E)$ क्षेत्र से एक प्रेरित $E (B)$ क्षेत्र उत्पन्न होता है । स्वयं $B (E)$ क्षेत्र परिवर्ती $E (B)$ क्षेत्र से उत्पन्न होता है जिससे एक स्वपोषी विद्युतचुंबकीय तरंग प्राप्त होती है जो प्रकाश की चाल से चलती है ।

विद्युतचुंबकीय तरंग में E और B क्षेत्र तरंग समीकरण और मैक्सवेल समीकरण दोनों को संतुष्ट करेंगे । $A (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)$ के रूप की विद्युतचुंबकीय तरंगों का भौतिकी में विशेष महत्व है । इस प्रकार की तरंगों का गुणधर्म यह है कि आकाश के प्रत्येक बिंदु पर इनके E और B क्षेत्र सदिश एक समतल में स्थित होते हैं जहां दो अलग अलग बिंदुओं पर समतल एक दूसरे के समानांतर होते हैं । ये क्षेत्र एक दूसरे के लंबवत् तथा उस दिशा के लंबवत् होते हैं जिसमें तरंग गतिमान होती है । इस तरह हम यह पाते हैं कि विद्युतचुंबकीय तरंगें अनुप्रस्थ तरंगें होती हैं । समतल ज्यावक्रीय तरंगों का अनेक कारणों के लिए भौतिकी में प्रायः प्रयोग किया जाता है ।

अब हम एक उदाहरण लेकर इन संकल्पनाओं को अच्छी तरह समझने का प्रयास करेंगे !

उदाहरण 2

रिक्त आकाश में एक विद्युतचुंबकीय तरंग का वैद्युत क्षेत्र दिया है

$$\mathbf{E} = 60 \hat{x} \exp \left[-i (10^8 t + \beta z) \right]$$

तरंग की संचरण दिशा, तरंग संख्या, आवृत्ति और चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात कीजिए ।

हल

तरंग के इन व्यंजकों को ज्ञात करने के लिए हम E , B और k के गुणधर्मों का प्रयोग करेंगे । तरंग की संचरण-दिशा ज्ञात करने के लिए आइए हम E के व्यंजक में चरघातांकी (exponential) के कोणांक (argument) की जांच करें ।

$\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$ से $10^8 t + \beta z$ की तुलना करके हम यह देख सकते हैं कि संचरण-दिशा $\hat{k} = -\hat{z}$ है । यह दिशा, गुणधर्म $\hat{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ को भी संतुष्ट करती है । हम निम्नलिखित संबंध से तरंग संख्या ज्ञात कर सकते हैं ।

$$c = \frac{\omega}{|k|}$$

$$3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1} = \frac{10^8 \text{ s}^{-1}}{\beta}$$

$$\therefore \beta = |\mathbf{k}| = \frac{1}{3} \text{ m}^{-1}$$

तरंग की आवृत्ति है

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10^8}{2\pi} \text{ Hz} = 1.67 \times 10^7 \text{ Hz.}$$

चुंबकीय क्षेत्र का रूप वही है जो कि E क्षेत्र का है :

$$\mathbf{B} = B_0 \exp \left[-i \left(10^8 t + \frac{1}{3} z \right) \right]$$

B_0 का मान ज्ञात करने के लिए हम गुणधर्मों $\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0$ और $\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = c \mathbf{B}$ को लागू करते हैं। इससे B की दिशा प्राप्त हो जाती है

$$\hat{\mathbf{B}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{E}} = -\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} = -\hat{\mathbf{y}}$$

संबंध $|\mathbf{E}|/|\mathbf{B}| = c$ से B_0 का परिमाण प्राप्त किया जा सकता है, जो कि $B_0 = 60/c$ है। अतः

$$\mathbf{B} = -\frac{60}{c} \hat{\mathbf{y}} \exp \left[-i \left(10^8 t + \frac{1}{3} z \right) \right] \text{ tesla}$$

यह देखने के लिए कि इस उपभाग में बतायी गई बातों को आपने अच्छी तरह से समझ लिया है या नहीं, अब आप एक बोध प्रश्न हल कीजिए।

प्रश्न पर 15 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न 6

$$(क) \mathbf{E} = 1000 \hat{\mathbf{x}} \exp \left[i \left(\frac{(2\hat{\mathbf{y}} - \hat{\mathbf{z}}) \cdot \mathbf{r}}{100} - \omega t \right) \right] \text{ Vm}^{-1}$$

द्वारा दिया गया वैद्युत क्षेत्र एक आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त आकाश में समतल विद्युतचुंबकीय तरंग के E क्षेत्र को निरूपित करता है। संबंधित चुंबकीय क्षेत्र ज्ञात कीजिए। तरंग का तरंगदैर्घ्य और आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

(ख) $\hat{\mathbf{y}}$ और $-\hat{\mathbf{y}}$ की दिशाओं में गतिमान निम्नलिखित दो विद्युतचुंबकीय तरंगें लीजिए

$$\mathbf{E}_1 = \hat{\mathbf{z}} E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (y - ct), \mathbf{B}_1 = \hat{\mathbf{x}} B_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (y - ct)$$

$$\mathbf{E}_2 = \hat{\mathbf{z}} E_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (y + ct), \mathbf{B}_2 = -\hat{\mathbf{x}} B_0 \sin \frac{2\pi}{\lambda} (y + ct)$$

दिखाइए कि जब दोनों तरंगें रिक्त आकाश में उपस्थित होती हैं जहां परिणामी वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्र

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2, \mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2$$

हों, तब भी ये मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करती हैं।

अब, क्योंकि आपने रिक्त आकाश में समतल विद्युतचुंबकीय तरंग संचरण को अच्छी तरह से समझ लिया है इसलिए इससे संबंधित एक अन्य पहलू, अर्थात् परावैद्युत माध्यम में समतल तरंगों के संचरण पर अब हम चर्चा करना चाहेंगे। इस पहलू का अध्ययन करना अति आवश्यक है, क्योंकि अनेक परिघटनाओं को समझने में यह सहायक होता है, जैसे कि कांच और पानी में प्रकाश का संचरण, मुन्थ के शरीर में X-किरणों और गामा किरणों का संचरण आदि।

परपरावैद्युत माध्यमों में विद्युतचुंबकीय तरंग संचरण का अध्ययन करने के लिए हमें पहले इसमें मैक्सवेल समीकरणों को लिखना होगा और तरंग समीकरण को व्युत्पन्न करना होगा। अगले भाग में हम इसी बात पर चर्चा करेंगे।

मैक्सवेल समीकरण और विद्युत चुंबकीय तरंगें

14.4 परावैद्युत माध्यमों में मैक्सवेल समीकरण और समतल तरंग संचरण

सारणी 14.2 में दिए गए मैक्सवेल समीकरण पूर्ण और सही हैं। फिर भी, परावैद्युत माध्यमों के लिए इन समीकरणों को एक बेहतर रूप में लिखा जा सकता है। अतः आइए अब हम इन माध्यमों के लिए मैक्सवेल समीकरण लिखें। यहां अच्छा रहेगा कि आप खंड 2 और 3 की प्रासंगिक इकाइयों में परावैद्युत पदार्थों के लिए दिए गए समीकरणों को देख लें।

14.4.1 परावैद्युत माध्यम में मैक्सवेल समीकरण

आपको याद होगा कि परावैद्युत पदार्थों में वैद्युत ध्रुवीकरण और चुंबकन होता है। ऐसे पदार्थों में परिवर्द्ध आवेश (bound charge) और धारा का संचयन होता है। आप यह पढ़ चुके हैं कि स्थैतिक अवस्था में, परावैद्युत माध्यम में वैद्युत ध्रुवीकरण P होने से निम्न परिवर्द्ध आवेश का संचयन होता है

$$\rho_p = -\nabla \cdot P \quad (14.30 \text{ क})$$

आप जानते हैं कि P प्रति एकांक आयतन वैद्युत द्विध्रुव आघूर्ण होता है। अस्थैतिक स्थिति में, वैद्युत ध्रुवन में कोई भी परिवर्तन होने पर आवेश का प्रवाह होता है जिसकी वजह से ध्रुवीकरण धारा प्राप्त होती है। संगत ध्रुवीकरण धारा घनत्व J_p जो कि समय के साथ ρ_p में परिवर्तन होने के कारण उपस्थित होता है, $\frac{\partial P}{\partial t}$ से प्राप्त होता है, अर्थात्

$$J_p = \frac{\partial P}{\partial t} \quad (14.30 \text{ ख})$$

इसी प्रकार, परावैद्युत माध्यम में चुंबकन M के कारण निम्नलिखित परिवर्द्ध धारा प्राप्त होती है

$$J_M = \nabla \times M \quad (14.30 \text{ ग})$$

जैसा कि आप जानते हैं चुंबकन, प्रति एकांक आयतन चुंबकीय द्विध्रुव आघूर्ण (magnetic dipole moment per unit volume) होता है। फिर भी, इस बात की ओर आपको अवश्य ध्यान देना चाहिए कि ध्रुवीकरण धारा J_p का परिवर्द्ध धारा J_M के साथ कोई संबंध नहीं होता। परिवर्द्ध धारा का संबंध पदार्थ के चुंबकन से होता है और यह इलेक्ट्रॉनों की प्रचक्रण (spin) और कक्षीय (orbital) गति के कारण होती है। इसके विपरीत, J_p आवेश की रैखिक गति से उत्पन्न होता है जबकि वैद्युत ध्रुवन में परिवर्तन होता है। उदाहरण के लिए, यदि P की दिशा दायीं ओर हो और उसमें वृद्धि हो रही हो, तो प्रत्येक धन आवेश दायीं ओर चला जाता है और प्रत्येक ऋण आवेश बायीं ओर, जिसकी वजह से ध्रुवीकरण धारा उत्पन्न होती है। इस चर्चा को ध्यान में रख कर हम कुल आवेश घनत्व को इस रूप में लिख सकते हैं

$$\rho = \rho_f + \rho_p = \rho_f - \nabla \cdot P \quad (14.31 \text{ क})$$

और कुल धारा घनत्व को इस रूप में लिख सकते हैं

$$J = J_f + J_p + J_M = J_f + \frac{\partial P}{\partial t} + \nabla \times M \quad (14.31 \text{ ख})$$

यहां ρ_f मुक्त आवेश घनत्व है और J_f मुक्त धारा घनत्व है। और J के इन व्यंजकों को मैक्सवेल समीकरणों (14.8 से 14.11 तक) में प्रतिस्थापित करने पर हमें परावैद्युत माध्यमों के लिए निम्नलिखित मैक्सवेल समीकरण प्राप्त होते हैं

$$\nabla \cdot E = \frac{1}{\epsilon_0} (\rho_f - \nabla \cdot P) \quad (14.32)$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t} \quad (14.33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (14.34)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{M} \right) \quad (14.35)$$

हम (14.32) से (14.35) तक के समीकरणों को (14.8) से (14.11) तक के समीकरणों के रूप में लिख सकते हैं। इसके लिए हम निम्न क्षेत्र परिभाषित करते हैं :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (14.36 \text{ क})$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (14.36 \text{ ख})$$

तबहम समीकरणों (14.32) और (14.35) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \frac{\rho_f}{\epsilon_0} \quad (14.37 \text{ क})$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_f + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (14.37 \text{ ख})$$

एक समदैशिक (isotropic) रैखिक परावैद्युत माध्यम में, \mathbf{P} , \mathbf{E} के समांतर होता है ($\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$) और \mathbf{M} , \mathbf{H} के समांतर होता है ($\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}$)। ऐसे पदार्थों के लिए हम समीकरणों (14.36 क और ख) को निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (14.38 \text{ क})$$

और

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (14.38 \text{ ख})$$

यहां

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e), \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad (14.38 \text{ ग})$$

χ_e वैद्युत प्रवृत्ति (electric susceptibility) है और χ_m चुंबकीय प्रवृत्ति (magnetic susceptibility) है। सामान्यतः ϵ और μ आवृत्ति पर निर्भर करते हैं। यदि माध्यम समांग हो तो ϵ और μ अचर होते हैं अर्थात् एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु पर इनमें कोई परिवर्तन नहीं होता। इतनी जानकारी के आधार पर अब आप स्वयं एक परावैद्युत माध्यम में मैक्सवेल समीकरण लिखें।

बोध प्रश्न 7

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

दिखाइए कि समदैशिक (रैखिक) परावैद्युत माध्यम में मैक्सवेल समीकरण निम्नलिखित रूप के होते हैं :

अवकल रूप

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t};$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0;$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu \left(\mathbf{J}_f + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right);$$

समाकल रूप

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q_f}{\epsilon} \quad (14.39)$$

$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (14.40)$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (14.41)$$

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu i + \mu \epsilon \frac{d\Phi_E}{dt} \quad (14.42)$$

समीकरण (14.39 से 14.42) परावैद्युत पदार्थ के अंदर मूल विद्युतचुंबकत्व नियम निरूपित करते हैं, यदि समीकरण (14.36 क और 14.36 ख) और समीकरण (14.38 क और 14.38 ख) दिए हुए हों। अब हम एक रैखिक और समांग परावैद्युत माध्यम में, समतल तरंग संचरण के बारे में पढ़ेंगे।

14.4.2 परावैद्युत माध्यमों में समतल तरंग संचरण

आइए हम माध्यम के केवल उन्हीं प्रदेशों को लें जहां कोई मुक्त आवेश या मुक्त धारा न हो। रेखिक माध्यम के ऐसे प्रदेशों के लिए मैक्सवेल समीकरण निम्न रूप के हो जाते हैं

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

आप यहां यह देख सकते हैं कि ये समीकरण ठीक वैसे ही हैं जैसे समीकरण (14.12) से (14.15)। एक बार फिर आप भाग 14.3.2 में अपनायी गई क्रियाविधि का अनुसरण कर सकते हैं और आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त रेखिक समांग माध्यम में संचरण कर रही विद्युतचुंबकीय तरंग का तरंग समीकरण व्युत्पन्न कर सकते हैं :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{\mu \epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (14.43 \text{ क})$$

और

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{\mu \epsilon} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (14.43 \text{ ख})$$

बोध प्रश्न 8

समीकरणों (14.43 क) और (14.43 ख) को सिद्ध कीजिए।

प्रश्न पर 5 मिनट लगाएं

इस तरह, हम यह पाते हैं कि रेखिक, समांग परावैद्युत माध्यम में विद्युतचुंबकीय तरंगें चाल

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (14.44)$$

से संचरित होती हैं।

प्रकाशिकी का एक जाना पहचाना परिणाम है कि पारदर्शी माध्यम में प्रकाश की चाल कम हो जाती है। इसका व्यंजक होता है

$$v = \frac{c}{n} \quad (14.45 \text{ क})$$

जहां c , निर्वात में प्रकाश की चाल है और n माध्यम का अपवर्तनांक (index of refraction) है। इससे यह पता चलता है कि n और परावैद्युत माध्यम के वैद्युत और चुंबकीय गुणधर्मों में निम्नलिखित संबंध होता है

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (14.45 \text{ ख})$$

परावैद्युत पदार्थों के लिए प्रायः $\mu = \mu_0$ और $n = \sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} = \sqrt{\kappa}$ जहां κ माध्यम का परावैद्युत स्थिरांक (dielectric constant) है।

आपको समझना चाहिए कि किसी माध्यम के अपवर्तनांक का उसके वैद्युत और चुंबकीय गुणधर्मों के साथ संबंध स्थापित करना मैक्सवेल समीकरणों का एक अन्य महत्वपूर्ण योगदान है।

हम एक रेखिक समांग माध्यम में, जहां कोई मुक्त आवेश और कोई मुक्त धारा न हो, तरंग समीकरणों (14.43 क और 14.43 ख) के लिए समीकरणों (14.21 क और 14.21 ख) या (14.25क और 14.25 ख) के जैसे समतल तरंग हल लिख सकते हैं। अंतर केवल यही है कि तरंगें,

चाल v से, जो कि समीकरण (14.44) में दी गई हैं, चलती हैं :

$$\mathbf{E} = (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt); \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r} - vt)$$

जहाँ प्रतिबंध ये हैं

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E} = 0$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} = v\mathbf{B}; \quad \frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} = v$$

$$\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{E}}{v}$$

आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (14.46 \text{ क})$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{k}, \omega) \exp(-i\omega t + i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (14.46 \text{ ख})$$

के रूप में एकवर्णी ज्यावकीय समतल तरंग (monochromatic sinusoidal plane waves) आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त रेखिक समांग पदार्थ माध्यम में तरंग समीकरणों और मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं, जबकि प्रतिबंध ये हों

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{E}_0 = 0 \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{B}_0 = 0$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 = \omega \mathbf{B}_0, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{B}_0 = -\frac{\omega \mathbf{E}_0}{v^2}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} \quad (14.47)$$

इन समीकरणों को देखने से यह पता चलता है कि एक परावैद्युत माध्यम में, जहाँ कोई मुक्त आवेश और कोई मुक्त धारा न हो, समतल तरंग हल, निर्वात में समतल तरंग हल से मिलते-जुलते हैं : \mathbf{B} , \mathbf{E} पर लंब है और तरंग, \mathbf{k} की दिशा में चलती है जो \mathbf{E} और \mathbf{B} दोनों पर लंब है। इन दोनों प्रकार के हलों में अंतर क्या है ? परावैद्युत माध्यम में जिस चाल से तरंग चलती है उसमें और निर्वात में प्रकाश की चाल में एक अचर गुणांक का अंतर होता है जिसे प्रकाशिकी (optics) में अपवर्तनांक (index of refraction) कहा जाता है।

इस तरह यदि हम परावैद्युत माध्यम की एक तरंग की तुलना निर्वात की समान आवृत्ति वाली एक तरंग से करें तो परावैद्युत माध्यम में तरंगदैर्घ्य निर्वात में तरंगदैर्घ्य से गुणक ($1/n$) से कम होगी, क्योंकि

$$\text{आवृत्ति} \times \text{तरंगदैर्घ्य} = \text{तरंग की चाल}$$

अब हम इस इकाई के अंतिम भाग में विद्युतचुंबकीय तरंगों के एक अन्य रोचक पहलू पर चर्चा करेंगे। इसके लिए निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए। जब आप जाड़े के मौसम में दिन में धूप सेकते हैं तो थोड़े ही समय में आपको गर्माहट महसूस होती है। ऐसा क्यों होता है ? स्पष्ट है कि यह धूप द्वारा लायी जा रही ऊर्जा होती है जो आपके पास पहुंचती है और आपको गर्माहट पहुंचाती है। आप यह तो जानते ही हैं तरंगों आकाश के एक प्रदेश से दूसरे प्रदेश तक ऊर्जा ले जाती हैं। इस भाग में हम आकाश में विद्युतचुंबकीय तरंगों द्वारा ले जायी गई ऊर्जा की मात्रा ज्ञात करेंगे।

14.5 विद्युतचुंबकीय तरंगों द्वारा वाहित ऊर्जा : प्वाइलिंग प्रमेय

आपको याद होगा कि इकाई 4 में हमने (सजातीय आवेशों (like charges) के कूलॉम प्रतिकर्षण के विरुद्ध) स्थैतिक आवेश वितरण को एकत्रित करने के लिए किया गया आवश्यक कार्य ज्ञात किया था, जो कि यह है

$$W_E = \frac{1}{2} \int_V \rho V dV$$

हम इस व्यंजक को \mathbf{E} के पदों में व्यक्त कर सकते हैं। इसके लिए पहले हम गाउस नियम का प्रयोग करते हैं :

$$\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}$$

अतः

$$W_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V (\nabla \cdot \mathbf{E}) V dV$$

अब हम निम्न सदिश सर्वसमिका का प्रयोग करते हैं।

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} V) = (\nabla \cdot \mathbf{E}) V + \mathbf{E} \cdot (\nabla V)$$

चूंकि $\mathbf{E} = -\nabla V$ अतः

$$W_E = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} V) dV + \int_V E^2 dV \right]$$

व्यंजक के प्रथम पद पर गाउस डाइवर्जेंस प्रमेय लागू करने पर हमें मिलता है

$$W_E = \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} + \int_V E^2 dV \right]$$

अब मान लीजिए कि हम आयतन को इतना बड़ा कर देते हैं कि उसमें समस्त आवेश समाहित हो जाए। तब अतिरिक्त आयतन का W_E में योगदान नहीं होगा क्योंकि उस आयतन में $\rho = 0$ लेकिन जैसे जैसे हम आयतन बढ़ाते हैं, E^2 का समाकल अधिक ही होगा क्योंकि समाकल्य घनात्मक है। अतः पृष्ठ समाकल घटेगा क्योंकि दोनों का योग समान ही रहना है। यदि हम यह समाकलन संपूर्ण समष्टि पर करें तो पृष्ठ समाकल शून्य हो जाएगा और शेष बच रहेगा आयतन समाकल। अतः W_E का व्यंजक निम्न रूप का हो जायेगा :

$$W_E = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV \quad (14.48 \text{ क})$$

जहां \mathbf{E} परिणामी वैद्युत क्षेत्र है। इसी प्रकार (विरोधी विद्युत वाहक बल के विरुद्ध) धाराओं को ले जाने के लिए किया गया आवश्यक कार्य यह होगा (देखिए समीकरण 13.24)

$$W_B = \frac{1}{2 \mu_0} \int_V B^2 dV \quad (14.48 \text{ ख})$$

जहां \mathbf{B} परिणामी चुंबकीय क्षेत्र है। स्पष्ट है कि धारा और आवेश वितरण से महारित कुल ऊर्जा को इस वितरण द्वारा उत्पन्न वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्र के पदों में व्यक्त किया जा सकता है

$$W_{EB} = \frac{1}{2} \int_V \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV \quad (14.48 \text{ ग})$$

अब हम ऊर्जा संरक्षण नियम को ध्यान में रखकर अधिक व्यापक रूप में समीकरण (14.48 ग) व्युत्पन्न करना चाहेंगे। मान लीजिए समय t पर आवेश और धारा वित्यास क्षेत्र \mathbf{E} और \mathbf{B} उत्पन्न करते हैं। मान लीजिए आवेश चारों ओर घूम रहे हैं। हम यह मालूम करना चाहेंगे कि लघु समय-अंतराल dt में इन आवेशों पर विद्युतचुंबकीय बल द्वारा किया गया कार्य dW कितना होता है? लारेन्ज़ बल नियम के अनुसार आवेश के एक अल्पांश dq पर किया गया कार्य होता है

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = dq (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} dt = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} dq dt \quad \left[\because \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0 \right]$$

अब, $dq = \rho dV$ और $\rho \mathbf{v} = \mathbf{J}$ । अतः किसी आयतन V में सभी आवेशों को दी गई कुल शक्ति होती है

$$\frac{dW}{dt} = \int_V (\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}) dV \quad (14.49)$$

आइए हम \mathbf{J} का निराकरण करने के लिए एम्पीयर-मैक्सवेल नियम को लागू करके केवल क्षेत्रों के पदों में समीकरण (14.49) को व्यक्त करें :

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) - \epsilon_0 \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

एक सुपरिचित सदिश सर्वसमिका से हमें निम्नलिखित परिणाम मिलता है :

$$\nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

इस परिणाम का फ़ैराडे नियम $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ के साथ संयोजन करने पर हमें मिलता है

$$\mathbf{E} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = -\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

हम यह भी लिख सकते हैं

$$\mathbf{B} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (B^2), \quad \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (E^2),$$

जिससे कि

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) - \frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (14.50)$$

समीकरण (14.49) में इसे प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV - \frac{1}{\mu_0} \int_V \nabla \cdot (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV$$

दक्षिण पक्ष के दूसरे पद पर डाइवर्जेंस प्रमेय लागू करने पर

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) dV - \frac{1}{\mu_0} \int_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \quad (14.51)$$

जहाँ S , आयतन V को परिवद्ध करने वाला पृष्ठ है।

समीकरण (14.51) प्वाइन्टिंग-प्रमेय का गणितीय रूप है : यह विद्युत चुंबकत्व में ऊर्जा-संरक्षण को व्यक्त करता है। दक्षिण पक्ष का पहला समाकल क्षेत्रों में भंडारित ऊर्जा W_{EB} (समीकरण 14.48 ग) को निरूपित करता है। और दूसरा पद उस दर को निरूपित करता है जिस पर ऊर्जा विद्युतचुंबकीय क्षेत्रों द्वारा अपने पृष्ठ पर V के बाहर ले जायी जाती है। प्वाइन्टिंग प्रमेय के अनुसार विद्युतचुंबकीय बल द्वारा आवेशों पर गए कार्य का दर, क्षेत्र में भंडारित ऊर्जा में हुए हास और पृष्ठ से प्रवाहित हो गई ऊर्जा के अंतर के बराबर होता है।

राशि

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (14.52)$$

को प्वाइन्टिंग सदिश (Poynting's vector) कहा जाता है : S ऊर्जा अभिवाह घनत्व (energy flux density) को निरूपित करता है अर्थात् $\mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$ पृष्ठ $d\mathbf{a}$ पर प्रति एकक समय क्षेत्रों द्वारा ले जायी गई ऊर्जा है। हम और अधिक संक्षिप्त रूप में प्वाइन्टिंग प्रमेय को S और W_{EB} के पदों में व्यक्त कर सकते हैं :

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{dW_{EB}}{dt} - \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a}$$

हाँ, यह बात अवश्य है कि आवेशों पर किए गए कार्य W के कारण उनकी यांत्रिक ऊर्जा (गतिज, स्थितिज या कोई अन्य ऊर्जा) में वृद्धि हो जाएगी। यदि हम यह मान लें कि U_M यांत्रिक ऊर्जा घनत्व को प्रकट करता है जिससे कि

$$\frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V U_M dV$$

और क्षेत्रों के ऊर्जा-घनत्व के लिए U_{EB} का प्रयोग करें ,

$$U_{EB} = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (14.53 \text{ क})$$

तो

$$\frac{d}{dt} \int_V (U_M + U_{EB}) dV = - \int_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{a} = - \int_V (\nabla \cdot \mathbf{S}) dV,$$

और इस तरह

$$\nabla \cdot \mathbf{S} = - \frac{\partial}{\partial t} (U_M + U_{EB}) \quad (14.53 \text{ ख})$$

यह प्वाइन्टिंग प्रमेय का अवकल रूप है। इसकी तुलना ऊर्जा-संरक्षण को व्यक्त करने वाले सांतत्य-समीकरण से कीजिए :

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

यहां आवेश घनत्व के स्थान पर कुल ऊर्जा घनत्व (यांत्रिक और विद्युतचुंबकीय) प्रतिस्थापित किया गया है जबकि धारा घनत्व के स्थान पर प्वाइन्टिंग सदिश प्रतिस्थापित किया गया है। इस तरह, प्वाइन्टिंग सदिश \mathbf{S} , ऊर्जा-प्रवाह की व्याख्या ठीक उसी प्रकार करता है जिस प्रकार \mathbf{J} आवेश-प्रवाह की व्याख्या करता है।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है अब हम उसका एक संक्षिप्त विवरण यहां दे रहे हैं।

14.6 सारांश

- मैक्सवेल समीकरण वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों की व्याख्या करने वाले अवकल समीकरणों का मूल समुच्चय निरूपित करते हैं। अलग-अलग स्थितियों के लिए अपने समाकल और अवकल रूपों में इन समीकरणों को नीचे दी गई सारणियों में दिखाया गया है।

निर्वात में, आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त प्रदेशों में मैक्सवेल समीकरण	
$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$	$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

आवेशों और धाराओं के होने पर निर्वात में मैक्सवेल समीकरण	
$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$	$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$
$\nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$	$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$
$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$
$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \left(\mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right)$	$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 i + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt}$

$$\begin{aligned} \text{ii) } \nabla \times \mathbf{E} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & E_0 \sin(y - vt) \end{vmatrix} \\ &= \hat{\mathbf{i}} \frac{\partial}{\partial y} E_0 \sin(y - vt) \\ &= \hat{\mathbf{i}} E_0 \cos(y - vt) \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= -\hat{\mathbf{i}} v B_0 \cos(y - vt) \end{aligned}$$

समीकरण (14.13) से यह प्रतिबंध मिलता है कि

$$E_0 = B_0 v$$

$$\begin{aligned} \text{iii) } \nabla \cdot \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial x} B_0 \sin(y - vt) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{iv) } \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

जहाँ

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= -\hat{\mathbf{k}} \frac{\partial B_0 \sin(y - vt)}{\partial y} = -\hat{\mathbf{k}} B_0 \cos(y - vt) \\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= -v \hat{\mathbf{k}} E_0 \cos(y - vt) \end{aligned}$$

समीकरण (14.15) से यह प्रतिबंध मिलता है कि $B_0 = \frac{v E_0}{c^2}$ | इन दो प्रतिबंधों

$E_0 = B_0 v$ और $B_0 = \frac{v E_0}{c^2}$ को एक साथ लेने पर यह आवश्यक होता है कि

$$v^2 = c^2, \text{ अर्थात् } v = \pm c$$

और

$$E_0 = B_0 c$$

3. आवेश-मुक्त पदार्थ माध्यम के लिए मैक्सवेल समीकरण ये हैं

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu \left(\mathbf{J} + \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

दूसरे समीकरण का एक बार और कर्ल लेकर हम यह लिख सकते हैं

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu \mathbf{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} \mu \sigma \mathbf{E} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \end{aligned}$$

$$= -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

वाम पक्ष को इस तरह सरल किया जाता है

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{E} \text{ क्योंकि } \nabla \cdot \mathbf{E} = 0\end{aligned}$$

इस तरह, हमें मिलता है

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

या
$$\nabla^2 \mathbf{E} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0$$

जो कि समीकरण (14.18 क) ही है।

इसी प्रकार कर्ल \mathbf{B} का कर्ल लेने पर हमें मिलता है

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \mu(\nabla \times \sigma \mathbf{E} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \mu\sigma(\nabla \times \mathbf{E}) + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{E}) \\ &= \mu\sigma \left(\frac{-\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \right)\end{aligned}$$

वाम पक्ष से

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} \\ &= -\nabla^2 \mathbf{B} \quad [\because \nabla \cdot \mathbf{B} = 0]\end{aligned}$$

इस तरह,

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}$$

या
$$\nabla^2 \mathbf{B} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$$

जो कि समीकरण (14.18 ख) है।

4.
$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial A}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} (\hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial y} (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}) \cdot \hat{\mathbf{k}} \\ &= \hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\partial A}{\partial y} = (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}}) \frac{\partial A}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} (\hat{\mathbf{y}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2$$

इसी प्रकार

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} (\hat{\mathbf{z}} \cdot \hat{\mathbf{k}})^2$$

$$\begin{aligned}\text{अब } \nabla^2 A &= \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \\ &= \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} [(\hat{x} \cdot \hat{k})^2 + (\hat{y} \cdot \hat{k})^2 + (\hat{z} \cdot \hat{k})^2]\end{aligned}$$

लेकिन $\hat{x} \cdot \hat{k}$, $\hat{y} \cdot \hat{k}$ और $\hat{z} \cdot \hat{k}$ की दिक्कोज्याएँ (direction cosines) हैं। परिणाम $(\hat{x} \cdot \hat{k})^2 + (\hat{y} \cdot \hat{k})^2 + (\hat{z} \cdot \hat{k})^2 = 1$ का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial \eta^2} \text{ जो समीकरण (14.22 क) है।}$$

5. गणितीय सुविधा की दृष्टि से हम संचरण-दिशा को x -दिशा में लेते हैं। समीकरण (14.25 क) का व्यंजक सरल करने पर यह हो जाता है

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(kx - \omega t)$$

अब, जब x एक तरंगदैर्घ्य λ से आगे बढ़ जाता है, तब कोसाइन फलन एक पूर्ण चक्र पूरा करता है। अतः

$$\cos[k(x + \lambda) - \omega t] = \cos(kx - \omega t)$$

$$\cos[kx + k\lambda - \omega t] = \cos(kx - \omega t)$$

यह प्रतिबंध केवल तभी संतुष्ट होता है जबकि

$$k\lambda = 2\pi$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

क्योंकि तरंग चाल = (आवृत्ति) \times (तरंगदैर्घ्य), अतः आवृत्ति $f = \frac{c}{\lambda}$

- 6.a) संबंधित चुंबकीय क्षेत्र को समीकरणों (14.24 क से 14.24 च) से प्राप्त किया जा सकता है। समीकरण (14.24 ख) लागू करने पर हमें मिलता है

$$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \mathbf{E}$$

$$\text{या } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times 1000 \hat{x} \exp \left[i \left\{ \left(\frac{2\hat{y} - \hat{z}}{100} \right) \cdot \mathbf{r} - \omega t \right\} \right]$$

$$\mathbf{k} = \frac{2\hat{y} - \hat{z}}{100} \text{ and } \hat{k} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} = \frac{2\hat{y} - \hat{z}}{\sqrt{5}}$$

इस तरह संबंधित चुंबकीय क्षेत्र यह होगा

$$\mathbf{B} = \frac{1000}{c\sqrt{5}} (2\hat{y} - \hat{z}) \times \hat{x} \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

$$= \frac{1000}{c\sqrt{5}} (-2\hat{z} - \hat{y}) \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

$$= -\frac{1000}{c\sqrt{5}} (2\hat{z} + \hat{y}) \exp [i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$$

यह समीकरण (14.24 च) के संगत है, क्योंकि

$$\begin{aligned}\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{B}|} &= \frac{1000}{\frac{1000}{c\sqrt{5}} |2\hat{z} + \hat{y}|} \\ &= \frac{c\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = c\end{aligned}$$

तरंग का तरंगदैर्घ्य यह है

$$\lambda = \frac{2\pi}{k \text{ m}^{-1}} = \frac{2\pi \times 100 \text{ m}}{\sqrt{5}} = 300 \text{ m}$$

$$\text{तरंग की आवृत्ति } f = \frac{c}{\lambda} = \frac{3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}}{300 \text{ m}} = 10^6 \text{ s}^{-1}$$

b) परिणामी वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \\ &= \hat{\mathbf{z}} E_0 \left[\sin \frac{2\pi}{\lambda} (y - ct) + \sin \frac{2\pi}{\lambda} (y + ct) \right] \\ &= 2 \hat{\mathbf{z}} E_0 \sin \frac{2\pi y}{\lambda} \cos \frac{2\pi ct}{\lambda} \left[\because \sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2} \right] \end{aligned}$$

और

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \\ &= -2 \hat{\mathbf{x}} B_0 \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda} \left[\because \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2} \right] \end{aligned}$$

यहां हमें यह दिखाना है कि परिणामी \mathbf{E} और \mathbf{B} क्षेत्र मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 2E_0 \frac{\partial}{\partial z} \left[\sin \frac{2\pi y}{\lambda} \cos \frac{2\pi ct}{\lambda} \right] = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = -2B_0 \frac{\partial}{\partial x} \left[\cos \frac{2\pi y}{\lambda} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda} \right] = 0$$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= 2E_0 \left[\hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial y} \sin \frac{2\pi y}{\lambda} \cos \frac{2\pi ct}{\lambda} \right] \\ &= \hat{\mathbf{x}} 2E_0 \frac{2\pi}{\lambda} \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \cos \frac{2\pi ct}{\lambda} \end{aligned}$$

और

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{2\pi c}{\lambda} 2 \hat{\mathbf{x}} B_0 \cos \frac{2\pi y}{\lambda} \cos \frac{2\pi ct}{\lambda}$$

इस तरह,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \text{ से मिलता है } E_0 = cB_0.$$

इसी प्रकार $\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ से मिलता है

$$\nabla \times \mathbf{B} = 2B_0 \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\cos \frac{2\pi y}{\lambda} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda} \right) = -2B_0 \frac{2\pi}{\lambda} \hat{\mathbf{z}} \sin \frac{2\pi y}{\lambda} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\hat{\mathbf{z}} 2E_0 \frac{2\pi c}{\lambda} \sin \frac{2\pi y}{\lambda} \sin \frac{2\pi ct}{\lambda}$$

$$\text{या } B_0 = \frac{E_0}{c}.$$

यह वही है जो कि समीकरण (14.24 च) है।

इस तरह, समतल विद्युतचुंबकीय तरंग के परिणामी \mathbf{E} और \mathbf{B} क्षेत्र मैक्सवेल समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। इस प्रकार की तरंग को अप्रगामी तरंग (standing wave) कहा जाता है।

$$\text{iii) } \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\text{या } E_0 \hat{x} \frac{\partial}{\partial y} (\cos kx \cos ky \cos \omega t) - E_0 \hat{y} \frac{\partial}{\partial z} (\cos kx \cos ky \cos \omega t)$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t} B_0 (\hat{x} \cos kx \sin ky - \hat{y} \sin kx \cos ky) \sin \omega t$$

$$\text{या } -E_0 \hat{x} k \cos kx \sin ky \cos \omega t + k E_0 \hat{y} \sin kx \cos ky \cos \omega t$$

$$= -\omega B_0 (\hat{x} \cos kx \sin ky - \hat{y} \sin kx \cos ky) \cos \omega t$$

$$\text{या } -k E_0 (\hat{x} \cos kx \sin ky - \hat{y} \sin kx \cos ky) \cos \omega t$$

$$= -\omega B_0 (\hat{x} \cos kx \sin ky - \hat{y} \sin kx \cos ky) \cos \omega t$$

$$\text{या } k E_0 = B_0$$

$$\text{iv) } \nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

$$\text{या } B_0 \hat{z} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \sin kx \cos ky - \frac{\partial}{\partial y} \cos kx \sin ky \right] \sin \omega t$$

$$= \frac{E_0}{c^2} \hat{z} \frac{\partial}{\partial t} \cos kx \cos ky \cos \omega t$$

$$\text{या } -B_0 \hat{z} k [\cos kx \cos ky + \cos kx \cos ky] \sin \omega t$$

$$= -\frac{E_0 \omega}{c^2} \hat{z} \cos kx \cos ky \sin \omega t$$

$$\text{या } 2k B_0 = \frac{E_0 \omega}{c^2}$$

$$\text{या } B_0 = \frac{E_0 \omega}{2c^2 k} = \frac{1}{2c^2} \frac{\omega^2}{k^2} B_0 \quad \left[\because \frac{E_0}{B_0} = \frac{\omega}{k} \right]$$

$$\text{या } \frac{\omega^2}{k^2} = 2c^2$$

$$\text{या } \frac{\omega}{k} = \sqrt{2} c$$

$$\therefore \omega = \sqrt{2} ck$$

$$\text{और } E_0 = \frac{\omega}{k} B_0 = \sqrt{2} c B_0$$

3. व्यंजक $E = E_0 \cos(kx - \omega t)$ से तुलना करने पर

$$\text{i) तरंग की आवृत्ति है } \nu = 10^8 \text{ Hz } (\because \omega = 2\pi\nu)$$

$$\text{ii) तरंगदैर्घ्य है } \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi \cdot (3)}{2\pi} = 3 \text{ m}$$

iii) संचरण की दिशा $+\hat{x}$ दिशा में है।

iv) क्योंकि E, \hat{y} की दिशा में है, और \hat{k}, \hat{x} की दिशा में है, इसलिए B क्षेत्र, $+\hat{z}$ की दिशा में होगा।

14.9 शब्दावली

मैक्सवेल समीकरण और विद्युत
चुंबकीय तरंगें

अपवर्तनांक	index of refraction
असममिति	asymmetry
आवृत्ति	frequency
ऊर्जा अभिवाह घनत्व	energy flux density
एकवर्णी	monochromatic
चुंबकन	magnetisation
चुंबकीय प्रवृत्ति	susceptibility
ज्यावन्तीय	sinusoidal
तरंग समीकरण	wave equation
द्विध्रुव	dipole
ध्रुवण	polarization
परावैद्युत	dielectric
रिक्त आकाश	empty space
विद्युतचुंबकत्व	electromagnetism
विस्थापन धारा	displacement current
संचरण	propagation
समतल तरंग	plane wave
समदैशिक	isotropic
सर्वसमिका	identity

परिशिष्ट : E, B और \hat{k} में अंतर्संबंध

इस इकाई में आप यह पढ़ चुके हैं कि

$$\mathbf{E}(\hat{k} \cdot \mathbf{r} - ct) \text{ और } \mathbf{B}(\hat{k} \cdot \mathbf{r} - ct)$$

के रूप में समतल तरंगें मुक्त आकाश में तरंग समीकरणों को संतुष्ट करती हैं। अब हम आवेश-मुक्त और धारा-मुक्त आकाश के लिए मैक्सवेल समीकरणों में इन तरंग रूपों को निविष्ट करेंगे और E, B और \hat{k} के बीच के संबंध प्राप्त करेंगे। इसके लिए हम प्रत्येक मैक्सवेल समीकरण को अलग अलग लेंगे।

$$\text{I. } \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \quad (\text{क.1 क})$$

$$\mathbf{E} = \hat{x} E_x + \hat{y} E_y + \hat{z} E_z \quad (\text{क.1 ख})$$

इस तरह, हम समीकरण (क.1क) को इस प्रकार लिख सकते हैं

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{क.1 ग})$$

यहां E_x, E_y, E_z ($\hat{k} \cdot \mathbf{r} - ct$) के फलन हैं। आइए हम

$$\eta = \hat{k} \cdot \mathbf{r} - ct$$

प्रतिस्थापित करें।

श्रृंखला नियम (chain rule) लागू करके हम यह लिख सकते हैं

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial \eta} (\hat{k} \cdot \hat{x}) \quad (\text{देखें भाग 14.3.2})$$

$$\text{इसी प्रकार } \frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial \eta} (\hat{k} \cdot \hat{y}) \text{ और } \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial \eta} (\hat{k} \cdot \hat{z})$$

अतः

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial \eta} (\hat{k} \cdot \hat{x}) + \frac{\partial E_y}{\partial \eta} (\hat{k} \cdot \hat{y}) + \frac{\partial E_z}{\partial \eta} (\hat{k} \cdot \hat{z})$$

या

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \hat{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \eta} (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z})$$

[\because सदिश गुणनफल क्रम विनिमेय है और $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ अचर सदिश हैं]

इस तरह, मैक्सवेल का प्रथम समीकरण यह हो जाता है

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \hat{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} = 0$$

इससे यह अर्थ निकलता है कि $\hat{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta}$ पर लंब है। हम यह दर्शा सकते हैं कि इससे यह भी अर्थ

निकलता है कि $\hat{k} \cdot \mathbf{E}$ लंब है। इसके लिए हम यह मान लेते हैं कि $\hat{k} \cdot \mathbf{E}$ के अनुदिश है, अर्थात् $\mathbf{E} = \hat{k} f(\eta)$ । तब

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} = \hat{k} \frac{\partial f}{\partial \eta}$$

और

$$\hat{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} = \hat{k} \cdot \hat{k} \frac{\partial f}{\partial \eta} = 0,$$

जब तक $f(\eta)$ एक अचर नहीं हो। पर, तरंगों के लिए $f(\eta)$ अचर नहीं होता है। अतः \hat{k} के अनुदिश E का कोई घटक नहीं हो सकता। इस तरह E , \hat{k} पर लंब होता है, अर्थात्

$$\hat{k} \cdot E = 0 \quad (\text{क.2})$$

मैक्सवेल समीकरण और विद्युत चुंबकीय तरंगें

II. $\nabla \cdot B = 0$

(I) में लागू की गई विधि के समान विधि लागू करके आप यह दिखा सकते हैं कि

$$\nabla \cdot B = 0 \text{ का अर्थ है कि } \hat{k} \cdot B = 0 \quad (\text{क.3})$$

इस तरह समतल तरंगों के लिए E और B तरंग संचरण की दिशा के लंबवत् हैं।

III. $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

आइए पहले हम $\nabla \times E$ को \hat{k} और η के पदों में व्यक्त करें। कार्तीय निर्देशांकों में

$$\nabla \times E = \nabla \times (\hat{x}E_x + \hat{y}E_y + \hat{z}E_z)$$

अब हम निम्न सदिश सर्वसमिका (vector identity) का प्रयोग करेंगे

$$(\nabla \times fA) = \nabla f \times A + f(\nabla \times A)$$

तब

$$\nabla \times E = (\nabla E_x) \times \hat{x} + (\nabla E_y) \times \hat{y} + (\nabla E_z) \times \hat{z}$$

$$(\because \nabla \times \hat{x} = \nabla \times \hat{y} = \nabla \times \hat{z} = 0)$$

अब

$$\nabla E_x = \hat{x} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial E_x}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial E_x}{\partial z}$$

यहां

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial \eta} (\hat{k} \cdot \hat{x})$$

सी प्रकार,

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_x}{\partial \eta} (\hat{k} \cdot \hat{y}) \text{ और } \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_x}{\partial \eta} (\hat{k} \cdot \hat{z})$$

स तरह,

$$\nabla E_x = \frac{\partial E_x}{\partial \eta} [\hat{x}(\hat{k} \cdot \hat{x}) + \hat{y}(\hat{k} \cdot \hat{y}) + \hat{z}(\hat{k} \cdot \hat{z})]$$

$$= \frac{\partial E_x}{\partial \eta} [\hat{x}k_x + \hat{y}k_y + \hat{z}k_z]$$

हां k_x, k_y, k_z \hat{k} के x, y, z घटक हैं।

$$\therefore \nabla E_x = \hat{k} \frac{\partial E_x}{\partial \eta}$$

सी प्रकार हम दिखा सकते हैं कि

$$\nabla E_y = \hat{k} \frac{\partial E_y}{\partial \eta} \text{ और } \nabla E_z = \hat{k} \frac{\partial E_z}{\partial \eta}$$

तः

$$\nabla \times E = \hat{k} \left(\frac{\partial E_x}{\partial \eta} \right) \times \hat{x} + \hat{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial \eta} \right) \times \hat{y} + \hat{k} \left(\frac{\partial E_z}{\partial \eta} \right) \times \hat{z}$$

$$= \hat{k} \times \frac{\partial}{\partial \eta} (E_x \hat{x} + E_y \hat{y} + E_z \hat{z})$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{k} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} \quad (\because \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \text{ अचर सदिश हैं और } \frac{\partial E_x}{\partial \eta} \text{ आदि अदिश हैं।}) \quad (\text{क.4क})$$

अब हम श्रृंखला नियम लागू करके η के पदों में $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ को व्यक्त करेंगे :

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = -c \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta} \quad (\text{क.4 ख})$$

मैक्सवेल के तीसरे समीकरण में $\nabla \times \mathbf{E}$ और $\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ के व्यंजकों को प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है

$$\hat{k} \times \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \eta} = c \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial \eta}$$

या $\frac{\partial}{\partial \eta} (\hat{k} \times \mathbf{E} - c \mathbf{B}) = 0 \quad (\because \hat{k} \text{ और } c \text{ अचर हैं})$

इससे यह अर्थ निकलता है कि तरंग की तरह के हलों के लिए

$$\hat{k} \times \mathbf{E} - c \mathbf{B} = 0$$

या

$$\hat{k} \times \mathbf{E} = c \mathbf{B} \quad (\text{क.5})$$

IV

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

यहां भी (III) की तरह का तरीका इस्तेमाल करके हम निम्न परिणाम प्राप्त कर सकते हैं :

$$\hat{k} \times \mathbf{B} = -\frac{\mathbf{E}}{c} \quad (\text{क.6})$$

इस तरह $\mathbf{E}(\hat{k} \cdot \mathbf{r} - ct)$, $\mathbf{B}(\hat{k} \cdot \mathbf{r} - ct)$, के रूप की समतल तरंगों के लिए मुक्त आकाश में मैक्सवेल समीकरण निम्नलिखित समीकरण समुच्चय के रूप के हो जाते हैं :

$\begin{aligned} \hat{k} \cdot \mathbf{E} &= 0 \\ \hat{k} \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \hat{k} \times \mathbf{E} &= c \mathbf{B} \\ \hat{k} \times \mathbf{B} &= -\frac{\mathbf{E}}{c} \end{aligned}$

इकाई 15 विद्युतचुंबकीय तरंगों का परावर्तन और अपवर्तन

इकाई की रूपरेखा

- 15.1 प्रस्तावना
उद्देश्य
- 15.2 दो परावैद्युत माध्यमों के बीच की परिसीमा पर परावर्तन और अपवर्तन
परिसीमा प्रतिबंध
अभिलंब आपतन पर परावर्तन और अपवर्तन
परावर्तन नियम और अपवर्तन नियम
- 15.3 विद्युतचुंबकीय तरंगों का जनन
दोलनी वैद्युत द्विध्रुव से विकिरण
एंटीना
- 15.4 सारांश
- 15.5 अंत में कुछ प्रश्न
- 15.6 हल और उत्तर
- 15.7 शब्दावली

15.1 प्रस्तावना

इकाई 14 में आपने मैक्सवेल समीकरणों का अध्ययन किया है और इन समीकरणों से विद्युतचुंबकीय तरंगों के समीकरण प्राप्त किए हैं। आपने यह भी पढ़ा है कि प्रकाश और अन्य अनेक प्रकार के विकिरण, जैसे रेडियो तरंगें, अवरक्त किरणें, X-किरणें और गामा किरणें विद्युतचुंबकीय विकिरण हैं। आपने आवेश-मुक्त, धारा-मुक्त रिक्त आकाश में और परावैद्युत माध्यम में विद्युत चुंबकीय तरंग समीकरणों के ज्यावक्रीय हल और समतल तरंग हल भी प्राप्त किए हैं।

इस इकाई में हम परावैद्युत माध्यमों में विद्युतचुंबकीय तरंगों से संबंधित एक अन्य रोचक प्रश्न पर विचार करेंगे कि जब एक विद्युतचुंबकीय तरंग एक परावैद्युत माध्यम से दूसरे परावैद्युत माध्यम में जाती है, तो क्या होता है? उदाहरण के लिए, आप जानते हैं कि जब प्रकाश हवा से पानी में या वायु से पानी में जाता है तो क्या होता है। आपको **परावर्तित तरंग** और **अपवर्तित तरंग** जिसे हम **संचरित तरंग** भी कहते हैं, प्राप्त होती हैं। इस इकाई में हम परावर्तित और संचरित विद्युतचुंबकीय तरंगों के समीकरण प्राप्त करेंगे जब ये तरंगें माध्यम की परिसीमा पर लंबवत् आपतित होती हों। अभी तक इस खंड में हमने इस बारे में कोई चर्चा नहीं की है कि विद्युतचुंबकीय तरंगें किस प्रकार जनित होती हैं। इस इकाई के अंतिम भाग में आप यह पढ़ेंगे कि किस प्रकार दोलनी वैद्युत द्विध्रुव विद्युतचुंबकीय तरंगें उत्पन्न करता है। अंत में हम ऐन्टिना पर संक्षेप में चर्चा करेंगे - यह एक ऐसी युक्ति है जिसका व्यापक प्रयोग विद्युतचुंबकीय तरंगों को संचरित करने और अभिग्रहण करने में किया जाता है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

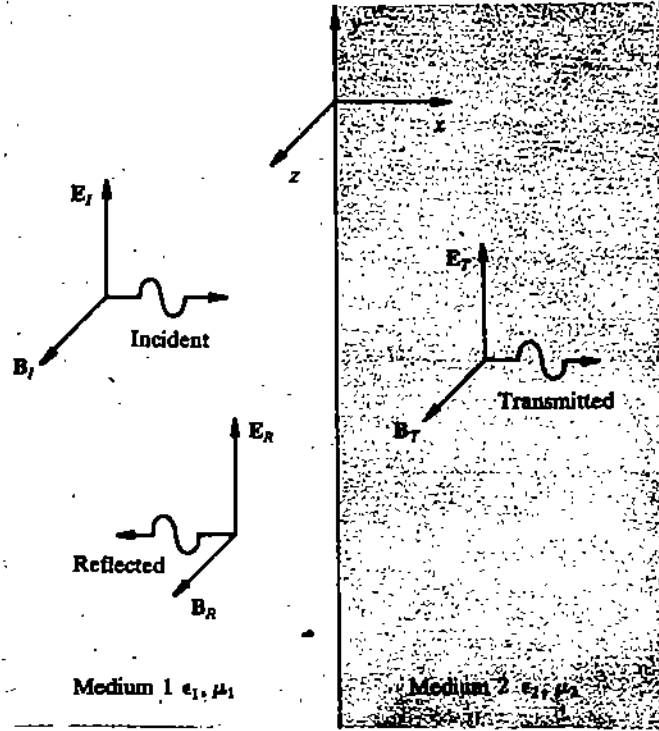
परावैद्युत माध्यमों की परिसीमाओं पर विद्युतचुंबकीय तरंगों के परावर्तन और अपवर्तन पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकेंगे,

एक दोलनी वैद्युत द्विध्रुव ऐन्टिना से विद्युतचुंबकीय तरंगों के जनन की गुणात्मक व्याख्या कर सकेंगे।

15.2 दो परावैद्युत माध्यमों के बीच की परिसीमा पर परावर्तन और अपवर्तन

शब्द 'रैखिक' का अर्थ यह है कि D और H क्रमशः E और B के समानुपाती हैं। और, माध्यम के ϵ और μ स्थिति और दिशा से स्वतंत्र हैं। इस तरह यहां हम रैखिक, समांग और समदैशिक माध्यमों के बारे में बात कर रहे हैं।

आइए हम उस स्थिति को लें जिसमें एकसमान समतल विद्युतचुंबकीय तरंगें दो रैखिक परावैद्युत माध्यमों के बीच की एक परिसीमा पर आपतित होती हैं। उदाहरणतः, प्रकाश का हवा से कांच में या तेल से पानी में संचरण। हम यह भी मान लेते हैं कि माध्यम में कोई मुक्त आवेश या मुक्त धारा उपस्थित नहीं है।



चित्र 15.1: एक समतल परिसीमा पर एकसमान समतल तरंग का अभिलंब आपतन जिसमें आपतित, परावर्तित और अपवर्तित तरंगों को दिखाया गया है।

चित्र 15.1 में अलग अलग गुणधर्मों वाले दो परावैद्युत माध्यमों के बीच एक समतल परिसीमा दिखायी गई है। माध्यम 1 के लिए स्थिरांक ϵ_1, μ_1 हैं और माध्यम 2 के लिए ϵ_2, μ_2 । माध्यम 1 में दायीं ओर जा रही एकसमान समतल तरंग इन माध्यमों के अंतर्फलक (interface) पर इनकी परिसीमा के लंबवत् आपतित होती है। यह तरंग किस प्रकार का व्यवहार करेगी? एक रस्सी में तरंगों को देखकर या अपने अनुभव से हम यह आशा कर सकते हैं कि परिसीमा से एक तरंग परावर्तित होकर माध्यम 1 में लौट आएगी और दूसरे माध्यम में एक संचरित (या अपवर्तित) तरंग चलने लगेगी। हम आपतित तरंग के पदों में परावर्तित और अपवर्तित तरंगों के व्यंजक ज्ञात करना चाहेंगे। हम यह भी जानना चाहेंगे कि आपतित ऊर्जा का कितना अंश परावर्तित होगा और कितना अंश संचरित होगा? इसके लिए हमें माध्यमों के अंतर्फलक पर तरंगों द्वारा संतुष्ट किए जाने वाले परिसीमा प्रतिबंधों को जानना होगा। ये प्रतिबंध हमें तब प्राप्त होते हैं जब हम यह मान लेते हैं कि माध्यमों के बीच की परिसीमा पर मैक्सवेल समीकरण अवश्य संतुष्ट हो रहे हैं। अतः आइए पहले हम उपयुक्त परिसीमा प्रतिबंध प्राप्त करें।

15.2.1 परिसीमा प्रतिबंध

हम आवेश और धारा से मुक्त एक परावैद्युत माध्यम के लिए मैक्सवेल समीकरणों से इन परिसीमा प्रतिबंधों को प्राप्त करेंगे। प्रासंगिक समीकरण ये हैं :

$$(क) \quad \epsilon \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{एक संवृत पृष्ठ } S \text{ पर} \quad (15.1क)$$

$$(ख) \quad \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0 \quad (15.1ख)$$

$$(ग) \oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.1ग)$$

संवृत लूप C से परिवद्ध किसी पृष्ठ S के लिए

$$(घ) \frac{1}{\mu} \oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \epsilon \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} \quad (15.1घ)$$

आइए हम समीकरण (15.1 क) को एक छोटे, पतले ग्राउसीय पिल बक्स पर लागू करें जो माध्यम की परिसीमा के दोनों ओर बहुत थोड़ा सा (बाल की तरह) निकला हुआ है (चित्र 15.2 क) । समीकरण 15.1 (क) से यह पता चलता है कि

$$\epsilon_1 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{S} - \epsilon_2 \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{S} = 0$$

वेफर की कोर का समाकल में कोई योगदान नहीं होता जबकि इसकी मोटाई शून्य की ओर प्रवृत्त होती है । इस तरह, अंतर्फलक पर वैद्युत क्षेत्रों के लंब घटक निम्नलिखित प्रतिबंध को संतुष्ट करते हैं

$$\epsilon_1 E_{1\perp} - \epsilon_2 E_{2\perp} = 0 \quad (15.2 क)$$

इस प्रक्रिया को लागू करके हमें समीकरण (15.1 घ) से चुंबकीय क्षेत्रों का निम्नलिखित परिसीमा प्रतिबंध प्राप्त होता है

$$B_{1\perp} - B_{2\perp} = 0 \quad (15.2 ख)$$

अब, पृष्ठ के एक पतले एम्पीयरी लूप पर (चित्र 15.2 ख) समीकरण (15.1 ग) लागू करने पर हमें मिलता है

$$\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

लूप की चौड़ाई के शून्य की ओर प्रवृत्त होने की सीमा में अभिवाह शून्य की ओर प्रवृत्त होता है

और $\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$ में दोनों सिरों का शून्य योगदान होता है । अतः

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) \cdot \mathbf{l} = 0$$

जिससे यह अर्थ निकलता है कि

$$\mathbf{E}_{1\parallel} - \mathbf{E}_{2\parallel} = 0 \quad (15.2 ग)$$

इसका यह अर्थ है कि अंतर्फलक के समांतर \mathbf{E} के घटक परिसीमा पर संतत होते हैं । इसी प्रकार समीकरण (15.1 घ) से हम यह प्रतिबंध प्राप्त कर सकते हैं

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{l} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{l} = 0$$

जिससे मिलता है

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1\parallel} - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2\parallel} = 0 \quad (15.2 घ)$$

इस तरह, हमने दो ऐसे रेखिक परावैद्युत माध्यमों के, जिनमें कोई मुक्त आवेश या धारा उपस्थित नहीं है, अंतर्फलक पर वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों द्वारा संतुष्ट परिसीमा प्रतिबंध प्राप्त किए हैं । आइए इन्हें हम एक साथ रखें ।

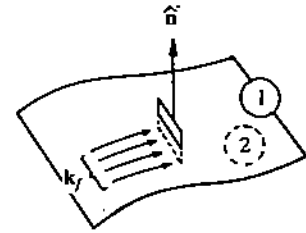
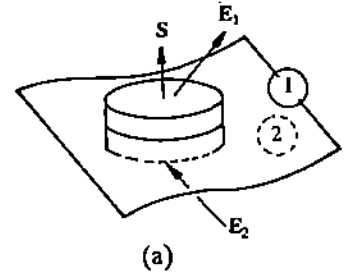
$$\epsilon_1 E_{1\parallel} = \epsilon_2 E_{2\parallel} \quad (15.2 क)$$

$$B_{1\perp} = B_{2\perp} \quad (15.2 ख)$$

$$\mathbf{E}_{1\parallel} = \mathbf{E}_{2\parallel} \quad (15.2 ग)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_{1\parallel} = \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_{2\parallel} \quad (15.2 घ)$$

विद्युतचुंबकीय तरंगों का परावर्तन और अपवर्तन



चित्र 15.2 : \mathbf{S} और \mathbf{E}_\perp की पनात्मक दिशा माध्यम 2 से माध्यम 1 की ओर है ।

चुंबकीय अपवर्तन

पर 5

E_\perp

E_\parallel

R

5.4: (ब) अपवर्तित परावर्तना या

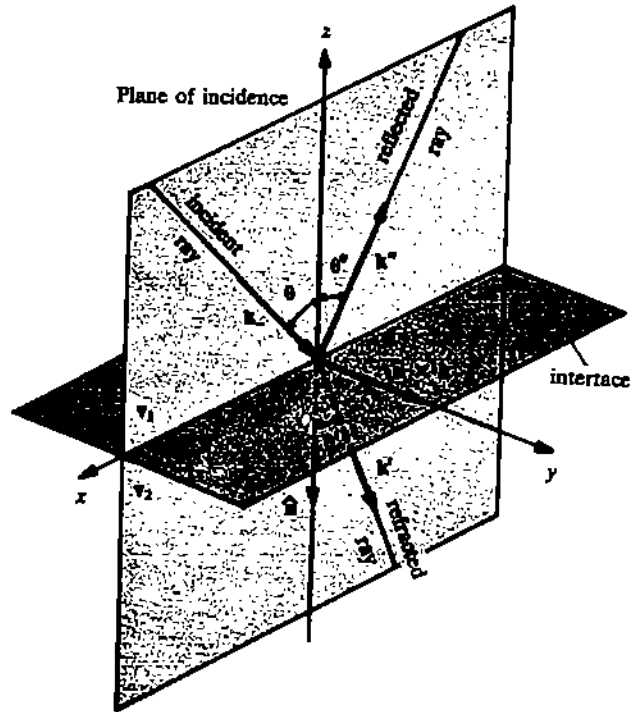
पर 1

प्रकाश हवा ($n_1 = 1$) से कांच ($n_2 = 1.5$) में जाता है तो उसका अधिकांश भाग संचरित क्यों होता है। इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए आपको केवल R और T को परिकल्पित करना होगा। आगे पढ़ने से पहले आप इसे हल क्यों नहीं करते ?

अब हम तिर्यक आपतन (oblique incidence) वाली स्थिति के लिए एक सरल ढंग से परावर्तन और अपवर्तन नियमों को प्राप्त करेंगे।

15.2.3 परावर्तन नियम और अपवर्तन नियम

चित्र 15.5 देखिए। माध्यम 1 में कोण θ_i से आपतित समतल तरंग से माध्यम 1 में कोण θ_R से परावर्तित तरंग और माध्यम 2 में संचरित तरंग प्राप्त होती है।



चित्र 15.5: एक समतल तरंग, जिसे संचरण सदिश k से निरूपित किया जाता है, दो माध्यमों (ϵ_1, μ_1) और (ϵ_2, μ_2) के बीच के एक अंतर्फलक पर आपतित होती है। एक संक्षिप्त \hat{n} अंतर्फलक पर अभिलंब है, और इसकी दिशा माध्यम 2 की ओर है।

हम इन तरंगों को निम्नलिखित रूप की समतल तरंगों द्वारा निरूपित करते हैं :

$$\mathbf{E}_I = E_{0I} e^{-i(\omega_I t - \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r})}, \mathbf{B}_I = \frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{k}}_I \times \mathbf{E}_I$$

$$\mathbf{E}_R = E_{0R} e^{-i(\omega_R t - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r})}, \mathbf{B}_R = \frac{1}{v_1} \hat{\mathbf{k}}_R \times \mathbf{E}_R$$

$$\mathbf{E}_T = E_{0T} e^{-i(\omega_T t - \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r})}, \mathbf{B}_T = \frac{1}{v_2} \hat{\mathbf{k}}_T \times \mathbf{E}_T$$

आपको याद होगा कि भाग 15.2.2 में हमने यह कहा था कि हर समय अंतर्फलक के प्रत्येक बिंदु पर परिसीमा प्रतिबंध (समीकरण 15.2) संतुष्ट होने चाहिए। यदि परिसीमा प्रतिबंध एक समय पर एक बिंदु पर संतुष्ट होते हों, तो वे हर समय सभी बिंदुओं पर तभी लागू होंगे जब कि इन तीनों तरंगों की कलाएं समान हों, अर्थात्

$$\omega_I t - \mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \omega_R t - \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \omega_T t - \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r}$$

हर समय पर कलाएं समान हों - इसके लिए आवश्यक है कि तीनों की कोणीय आवृत्तियां समान हों :

$$\omega_I = \omega_R = \omega_T = \omega \quad (15.11क)$$

विद्युतचुंबकीय तरंगों का परावर्तन
और अपवर्तन

चूंकि $k = \frac{\omega}{c}n$, अतः

$$k_I = k_R \text{ और } \frac{k_I}{n_1} = \frac{k_T}{n_2} \quad (15.11 ख)$$

अंतर्फलक के सभी बिंदुओं पर कलाएं समान हों, इसके लिए यह आवश्यक है कि अंतर्फलक के सभी r पर

$$k_I \cdot r = k_R \cdot r = k_T \cdot r \quad (15.12)$$

इन सभी समीकरणों से प्राप्त होता है कि

$$(k_I - k_R) \cdot r = 0 \text{ और } (k_I - k_T) \cdot r = 0$$

क्योंकि $r \neq 0$ इसलिए ऊपर के समीकरण से यह पता चलता है कि या तो

i) $k_I = k_R$ और $k_I = k_T$

ii) पृष्ठ के सभी r के लिए $(k_I - k_R)$ और $(k_I - k_T)$, r के लंबवत् हैं।

स्थिति (i) तुच्छ स्थिति है जिसमें n तो परावर्तन होता है और n ही अपवर्तन। अतः हम केवल स्थिति (ii) पर विचार करेंगे। क्योंकि r समतल अंतर्फलक में एक सदिश है, इसलिए प्रतिबंध (ii) तभी संतुष्ट होगा जबकि $(k_I - k_R)$ और $(k_I - k_T)$, अंतर्फलक लंब के अनुदिश हों। यदि \hat{n} समतल पर अभिलंब एकक सदिश को निरूपित करता हो, तो यह $(k_I - k_R)$ और $(k_I - k_T)$, के समांतर होगा। अतः हम यह लिख सकते हैं कि

$$\hat{n} \times (k_I - k_R) = 0$$

और

$$\hat{n} \times (k_I - k_T) = 0$$

इससे यह प्राप्त होता है

$$\hat{n} \times k_I = \hat{n} \times k_R = \hat{n} \times k_T \quad (15.13)$$

समीकरण (15.13) से हमें निम्नलिखित बातों का पता चलता है

1. $\hat{n} \times k_I = \hat{n} \times k_R$ से यह अर्थ निकलता है कि \hat{n} , k_I से परिभाषित समतल (आपतन समतल), \hat{n} , k_R से परिभाषित समतल (अपवर्तन समतल) के साथ संपाती होता है।

2. परिमाणों की समानता

$$|\hat{n} \times k_I| = |\hat{n} \times k_T|$$

से यह प्रतिबंध प्राप्त होता है कि

$$k_I \sin \theta_I = k_T \sin \theta_T \quad (15.14)$$

3. इसी प्रकार, संबंध

$$\hat{n} \times k_I = \hat{n} \times k_R$$

से यह पता चलता है कि आपतन समतल, k_R से बने समतल अर्थात् परावर्तन समतल के साथ संपाती होता है और

$$k_I \sin \theta_I = k_R \sin \theta_R \quad (15.15)$$

क्योंकि समीकरण (15.11 ख) के अनुसार $k_I = k_R$ इसलिए समीकरण (15.15) से मिलता है

$$\theta_R = \theta_I \quad (\text{परावर्तन नियम}) \quad (15.16)$$

समीकरण (15.14) को समीकरण (15.11 ख) में प्रतिस्थापित करने पर हमें मिलता है :

$$\frac{\sin \theta_r}{\sin \theta_i} = \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{स्नेल का अपवर्तन नियम}) \quad (15.17)$$

इस तरह हमें प्रकाशिकी के सुपरिचित परावर्तन नियम और अपवर्तन नियम प्राप्त हो जाते हैं। आपके लिए एक बोध प्रश्न देकर इस भाग को हम यही समाप्त कर रहे हैं।

प्रश्न पर 10 मिनट लगाएं

बोध प्रश्न '3

(क) एक एकसमान समतल तरंग, जिसका वैद्युत क्षेत्र है

$$E_r = 100 \cos(\omega t - 6\pi x) \hat{z} \text{ Vm}^{-1}$$

$\epsilon_1 = 4\epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$ वाले प्रदेश से $\epsilon_2 = 9\epsilon_0$, $\mu_2 = 4\mu_0$ वाले पदार्थ के समतल पृष्ठ पर अभिलंबवत् आपतित है। आपतित, परावर्तित और संचरित वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों के पूर्ण व्यंजक लिखिए।

(ख) एक समतल विद्युतचुंबकीय तरंग एक परावैद्युत माध्यम से दूसरे परावैद्युत माध्यम पर अभिलंबवत् आपतित होती है। दो परावैद्युत माध्यमों, जिनके परावर्तन गुणांक और संचरण गुणांक दोनों ही 0.5 के बराबर हैं, के अपवर्तनांकों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

15.3 विद्युतचुंबकीय तरंगों का जनन

अभी तक आपने विद्युतचुंबकीय तरंगों के अस्तित्व, मुक्त आकाश और परावैद्युत माध्यमों में उनके गुणधर्मों और परावैद्युत माध्यमों की परिसीमाओं पर उनके परावर्तन और अपवर्तन का अध्ययन किया है। अब प्रश्न उठता है कि ये विद्युतचुंबकीय तरंगें किस प्रकार जनित होती हैं? इसी प्रश्न का उत्तर हम इस भाग में देने जा रहे हैं।

अभी तक आपने विद्युतचुंबकीय तरंगों की प्रकृति के बारे में जो कुछ पढ़ा है उससे आप यह अनुमान लगा सकते हैं कि इस प्रकार की तरंग को जनित करने के लिए हमें एक परिवर्ती वैद्युत या चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न करना होगा। एक बार ऐसा कर देने पर एम्पीयर-मैक्सवेल नियम और फ़ैराडे नियम द्वारा बताया गया स्व-जनन प्रक्रम कार्यान्वित हो जाता है और तरंग संचरित होने लगती है।

आप जानते हैं कि विद्युत आवेश की गति में परिवर्तन करके परिवर्ती क्षेत्र उत्पन्न किया जा सकता है। साथ ही विद्युत आवेश को त्वरित करके भी ऐसा किया जा सकता है। ऐसे क्षेत्रों को उस स्थिति में भी उत्पन्न किया जा सकता है जबकि एक वैद्युत द्विध्रुव दोलन करता हो। आइए हम गुणात्मक रूप से इस बात का अध्ययन करें कि किस प्रकार दोलनी वैद्युत द्विध्रुवों से विद्युत तरंगें जनित होती हैं।

15.3.1 दोलनी वैद्युत द्विध्रुव से विकिरण

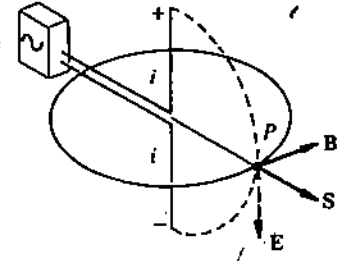
चित्र 15.6 में ए सी दोलनी वैद्युत द्विध्रुव की एक प्रायोगिक व्यवस्था दिखाई गई है। क्योंकि तार से धारा का एक ए सी स्रोत जोड़ा गया है इसलिए आवेश ऊर्ध्वाधर तार पर आगे पीछे घूमते रहेंगे। इससे एक वैद्युत द्विध्रुव उत्पन्न होगा जो बारी बारी से ऊपर और नीचे की ओर झिंगित करता रहेगा। तारों में धाराएं भी प्रवाहित होती हैं जिससे कि तारों के आस पास चुंबकीय क्षेत्र उत्पन्न हो जाता है। क्षेत्र की दिशा भी आवर्ती रूप से परिवर्तित होती रहती है।

आइए अब हम दोलनी द्विध्रुव (oscillating dipole) के निकट उत्पन्न हुए वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों की व्याख्या करें। जब तार के सिरों के निकट आवेश अधिकतम होते हैं तब धारा शून्य होती है। तार के निकट एक बिंदु P लीजिए। P पर E क्षेत्र तब अधिकतम होगा जबकि तार में धारा यानि B शून्य हो और इसी प्रकार B क्षेत्र तब अधिकतम होगा जबकि E शून्य हो। इस तरह, E और B एक समय में 90° पर कला-बाह्य होते हैं। अतः ऊर्जा प्रवाह की दिशा, जो कि प्वाइन्टिंग सदिश

S से निर्धारित होती है, बारी बारी से बहिर्मुखी और अंतर्मुखी दिशाओं में होती है। इसलिए, P पर नेट ऊर्जा प्रवाह शून्य होगा। इस तरह, एक दोलनी द्विध्रुव के निकट के क्षेत्र के कारण ऊर्जा समान रूप से अंदर बाहर प्रवाहित होती रहती है और एक विकिरित तरंग नहीं बनती।

AC source

विद्युतचुंबकीय तरंगों का परावर्तन और अपवर्तन



दोलनी द्विध्रुव से काफी अधिक दूरी पर क्या होता है? आपको याद होगा कि समय परिवर्ती E और B क्षेत्र क्रमशः B और E क्षेत्र उत्पन्न कर सकते हैं। दोलनी द्विध्रुव से जनित समय परिवर्ती वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्र बाहर की ओर गतिमान होते रहते हैं, क्योंकि (प्रेरित वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्रों के दो मैक्सवेल समीकरणों के अनुसार) स्थानीय समय परिवर्ती E क्षेत्र समान कला में B क्षेत्र उत्पन्न करते हैं और स्थानीय समय परिवर्ती B क्षेत्र से समान कला में E क्षेत्र उत्पन्न होते हैं। अतः P पर कुल E और B क्षेत्र दोलनी वैद्युत द्विध्रुव द्वारा जनित कला बाह्य E और B घटकों और स्थानीय समय-परिवर्ती क्षेत्रों द्वारा स्थानिकतः प्रेरित कलांतर्गत B और E क्षेत्रों का सदिश योग होता है।

कला बाह्य ऊर्जा घनत्व में $\frac{1}{r^3}$ के अनुसार दूरी के साथ तेजी से कमी आती है। ऊर्जा का नेट

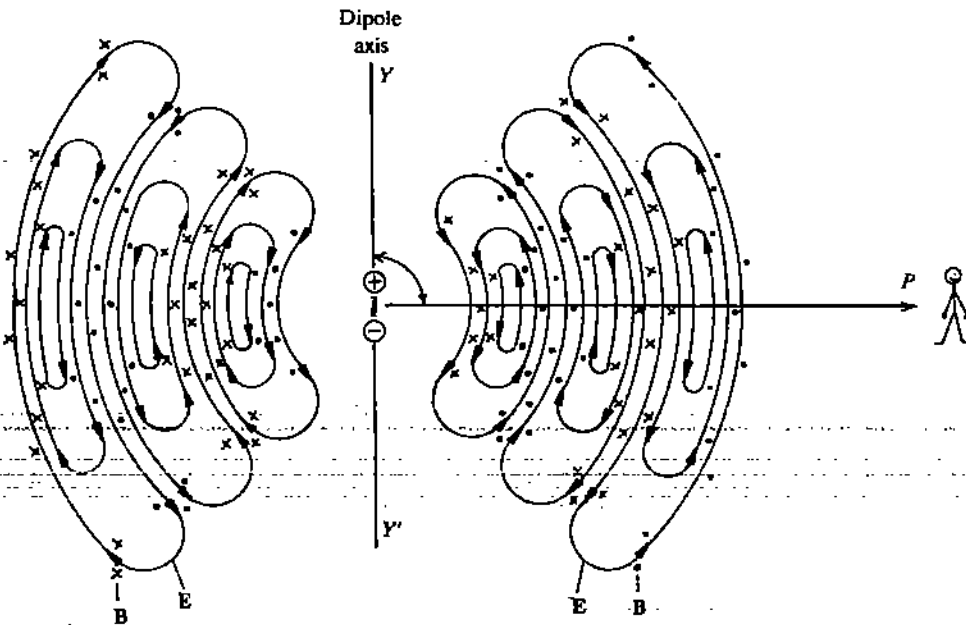
स्थानांतरण E और B क्षेत्रों के कलांतर्गत घटकों के कारण होता है। इस प्रकार हम यह पाते हैं कि द्विध्रुव के निकट के समय परिवर्ती क्षेत्र अधिक दूरियों पर विद्युतचुंबकीय तरंगों को जनित करते हैं।

विद्युतचुंबकीय तरंगों को जनित करने के इस सरल प्रक्रम पर आधारित एक रोचक युक्ति है एंटीना। क्या आप एंटीना के बिना किसी आधुनिक संचार नेटवर्क की कल्पना कर सकते हैं? एंटीना का प्रयोग विद्युतचुंबकीय तरंगों के जनन और अभिग्रहण (reception) दोनों के लिए किया जाता है। इस इकाई के अंतिम उपभाग में हम एंटीना के बारे में संक्षेप में चर्चा करेंगे।

चित्र 15.6: दोलनी वैद्युत द्विध्रुव। तार की धाराओं और आवेशों से उत्पन्न E और B क्षेत्रों को प्वाइन्टिंग सदिश S के साथ दिखाया गया है। चित्र में जिस कल्प की स्थिति की गई है उसमें प्वाइन्टिंग सदिश बिंदु P पर बहिर्मुखी दिशा में है। द्विध्रुव से कुछ अधिक दूरी पर स्थानीय समय परिवर्ती E और B क्षेत्रों से उत्पन्न ऊर्जा का नेट प्रवाह होता है।

15.3.2 एंटीना

दोलनी वैद्युत द्विध्रुव पर आधारित एंटीना को दोलनी वैद्युत द्विध्रुव एंटीना (oscillating electric dipole antenna) कहा जाता है। एंटीना निकायों में संभवतः यह सरलतम एंटीना है। इस प्रकार के एंटीना में एक ए सी जेनरेटर से जुड़े दो चालन छड़ होते हैं जैसा कि चित्र 15.6 में दिखाया गया है। चित्र 15.7 में इस प्रकार के एंटीना द्वारा जनित विद्युतचुंबकीय तरंग क्षेत्र को दिखाया गया है। चित्र में दिखाया गया क्षेत्र प्रतिरूप (field pattern) एंटीना से ऐसी सभी त्रिज्य (radial) दूरियों पर लागू होता है जिनके लिए $r > \lambda$, जहां λ विद्युतचुंबकीय तरंग का तरंगदैर्घ्य है। स्मरण रहे कि X-किरणों, गामा किरणों और प्रकाश जैसे कुछ विद्युतचुंबकीय विकिरण परमाणु और न्यूक्लीय स्रोतों से प्राप्त होते हैं।



चित्र 15.7: एक दोलनी द्विध्रुव एंटीना से विकिरित विद्युतचुंबकीय तरंग की वैद्युत और चुंबकीय क्षेत्र रेखाएं। बिंदु और क्लास के चिन्ह क्रमशः चित्र के समतल से निकल रही और उसमें प्रवेश कर रही क्षेत्र रेखाओं को निकषित करते हैं। एंटीना के निकट के क्षेत्र प्रतिरूप को चित्र में नहीं दिखाया गया है।

या
$$E_{OR} = \left(\frac{2}{1+\alpha} - 1 \right) E_{OI} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) E_{OI}$$

2.
$$R = \frac{I_R}{I_I} = \frac{\epsilon_1 v_1 E_{OR}^2}{\epsilon_1 v_1 E_{OI}^2} = \left(\frac{E_{OR}}{E_{OI}} \right)^2 = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right)^2$$

जहां इस स्थिति में $\alpha = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} = \frac{n_2}{n_1}$ क्योंकि $\mu_1 = \mu_2$

$$\therefore R = \left(\frac{1-n_2/n_1}{1+n_2/n_1} \right)^2 = \left(\frac{n_1-n_2}{n_1+n_2} \right)^2$$

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{\epsilon_2 v_2 E_{OT}^2}{\epsilon_1 v_1 E_{OI}^2} = \frac{\epsilon_2 v_2^2}{\epsilon_1 v_1^2} \cdot \frac{v_1}{v_2} \left(\frac{2}{1+n_2/n_1} \right)^2$$

$$= \frac{n_2}{n_1} \left(\frac{2n_1}{n_1+n_2} \right)^2$$

क्योंकि $n_1 = c/v_1, n_2 = c/v_2, v_1^2 = \frac{1}{\mu_1 \epsilon_1}, v_2^2 = \frac{1}{\mu_2 \epsilon_2}$

3. (क) $E_I = 100 \cos(\omega t - 6\pi x) \hat{z} \text{ Vm}^{-1}$ क्योंकि \hat{k}, x दिशा में है, इसलिए B_I, y दिशा में होगा। इसका परिमाण निम्नलिखित संबंध से प्राप्त होता है

$$\frac{|E_I|}{|B_I|} = v_1, \text{ जहां } v_1 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_1 \mu_1}}$$

यहां यह दिया हुआ है कि $\epsilon_1 = 4\epsilon_0, \mu_1 = \mu_0$

$$\therefore v_1 = \frac{c}{\sqrt{4}} = 0.5 \text{ cms}^{-1}$$

इस तरह

$$B_I = \frac{200}{c} \cos(\omega t - 6\pi x) \hat{y} \text{ tesla.}$$

परावर्तित तरंग कृणात्मक x दिशा में माध्यम 1 में लौट आती है। परावर्तित तरंगों के E और B क्षेत्र ये हैं :

$$E_R = E_{OR} \cos(\omega t + 6\pi x) \hat{z}$$

जहां

$$E_{OR} = \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right) E_{OI}$$

$$\alpha = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{c}{4} \times \frac{0.5}{v_2} \text{ ms}^{-1}$$

जहां

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 \mu_2}} = \frac{c}{\sqrt{9 \times 4}} = \frac{c}{6} \text{ ms}^{-1}$$

$$\therefore \alpha = 0.75$$

और

$$E_{OR} = \frac{0.25}{1.75} E_{OI} = \frac{1}{7} E_{OI}$$

इस तरह

$$E_R = \frac{100}{7} \cos(\omega t + 6\pi x) \hat{z} \text{ Vm}^{-1}$$

और

$$B_R = -\frac{200}{7c} \cos(\omega t + 6\pi x) \hat{y} \text{ T}$$

संचरित तरंग के E और B क्षेत्र ये हैं

$$E_T = E_{0T} \cos(\omega t - k_2 x) \hat{z}$$

जहाँ

$$E_{0T} = \left(\frac{2}{1+\alpha}\right) E_{0R} = \frac{2}{1.75} E_{0R} = \frac{8}{7} E_{0R}$$

और

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} = 6 \frac{\omega}{c}$$

$$\therefore E_T = \frac{800}{7} \cos\left(\omega t - \frac{6\omega x}{c}\right) \hat{z}$$

और

$$B_T = \frac{4800}{7c} \cos\left(\omega t - \frac{6\omega x}{c}\right) \hat{y}$$

$$\left[\because |B_T| = \left| \frac{E_T}{v_2} \right| \right]$$

ख) यह दिया हुआ है कि $R = T = 0.5$

मान लीजिए

$$\frac{n_2}{n_1} = \beta$$

तब

$$\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right)^2 = \beta \left(\frac{2}{1+\beta}\right)^2$$

या

$$(1-\beta)^2 = 4\beta$$

या

$$1 - \beta + \beta^2 = 0$$

इस तरह

$$\beta = 5.83.$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. परावैद्युतांक $\kappa = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}$ है। यह दिया हुआ है कि मुक्त आकाश में तरंग की तरंगदैर्घ्य 3 cm है

और परावैद्युत माध्यम में 2cm है। अतः परावैद्युत माध्यम में तरंग की चाल यह है

$$v = \frac{\lambda_2 c}{\lambda_1} = \frac{2c}{3}$$

अतः

$$\frac{v}{c} = \frac{2}{3} = \sqrt{\frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}} \text{ या } \frac{4}{9} = \frac{\mu_0 \epsilon_0}{\mu \epsilon}$$

Table of Constants

Symbol	Quantity	Value
c	speed of light in vacuum	$2.998 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
μ_0	permeability of free space	$1.257 \times 10^{-6} \text{ N A}^{-2}$
ϵ_0	permittivity of free space	$8.854 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2}$
$1/4 \pi \epsilon_0$		$8.988 \times 10^9 \text{ N m}^2 \text{ C}^{-2}$
e	charge of the proton	$1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
$-e$	charge of the electron	$-1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$
h	Planck's constant	$6.626 \times 10^{-34} \text{ J s}$
\hbar	$h/2\pi$	$1.055 \times 10^{-34} \text{ J s}$
m_e	electron rest mass	$9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}$
$-e/m_e$	electron charge to mass ratio	$-1.759 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$
m_p	proton rest mass	$1.673 \times 10^{-27} \text{ kg}$
m_n	neutron rest mass	$1.675 \times 10^{-27} \text{ kg}$
R	Rydberg constant	$1.097 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$
a_0	Bohr radius	$5.292 \times 10^{-11} \text{ m}$
N_A	Avogadro constant	$6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
R	Universal gas constant	$8.314 \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
k_B	Boltzmann constant	$1.381 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
G	Universal gravitational constant	$6.673 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$