स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उ० प्र० राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

(उत्तर प्रदेश सरकार द्वारा निर्गत अधिनियम संख्या 10, 1999 द्वारा स्थापित)

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-03
दोलन एवं तरंगें

प्रथम खण्ड - दोलन

द्वितीय खण्ड - तरंगें

शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, इलाहाबाद - 211013

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

U. G. P. H. S. - 03
दोलन एवं तरंगें

खंड

1

दोलन

पाठ्यक्रम परिचय

प्रकृति में सामान्यतः जो भी परिघटना हम देखते हैं मोटे तौर पर उनका वर्गीकरण दो श्रेणियों में किया जा सकता है उसमें एक श्रेणी वो है जो द्रव्य से संबंध रखती है तथा दूसरी श्रेणी जो तरंगों से संबंध रखती है। भौतिकी पाठ्यक्रमों का प्रारम्भ सामान्यतः द्रव्य से संबंध रखने वाली परिघटना से होता है जिसकी चर्चा हम यांत्रिकी तथा द्रव्य के गुणों में करते हैं। इसके पश्चात् तरंगों की परिघटना आती है। हमारी पांच ज्ञानेन्द्रियां (स्पर्श, स्वाद, गंध, देखना और सुनना) में से दो देखने और सुनने की इन्द्रियों का संबंध तरंगों से है। बाह्य संसार से हमारा संपर्क मुख्यतः इन्ही दो ज्ञानेन्द्रियों द्वारा होता है। यद्यपि ध्वनि और प्रकाश दो एकदम भिन्न स्वरूप हैं, उनमें अनेकों समान गुण हैं। इस पाठ्यक्रम में हम सामान्यतः तरंगों के बारे में अध्ययन करेंगे। तरंग गति (Wave motion) के इस एकीकृत अभिगम (Unified approach) का लक्ष्य प्रत्यक्ष तथा व्यापक रूप से भिन्न परिघटना के बीच आधारभूत समानता को सामने लाना है। वस्तुतः आधुनिक भौतिकी, विशेषकर, क्वान्टम यांत्रिकी की जानकारी इस पाठ्यक्रम की स्पष्ट और पूरी जानकारी पर निर्भर है।

तरंग गति का वर्णन करने से पहले यह आवश्यक है कि हम एक विलय (Isolated) पिंड तथा दो या अधिक पिंडों के दोलनों की भौतिकी को समझें। इसलिए यह पाठ्यक्रम दो खंडों में विभाजित है। खंड एक में, विभिन्न परिस्थितियों में एक विलय व्यवस्था जैसे लोलक व दो या अधिक युग्मित पिंडों के दोलन के अध्ययन के बारे में बताया गया है। विशेष रूप से, अवमंदन और सुव्यवस्थित बाह्य बल के प्रभाव पर विस्तार में विचार विमर्श किया गया है।

खंड 1

इस खंड में मुख्य रूप से विभिन्न दिशाओं के अन्तर्गत किसी विलय (Isolated) पिंड तथा दो या अधिक युग्मित पिंडों के दोलनों की चर्चा की गई है। इस खंड की इकाई एक में हमने सरल आवर्त्त गति (Simple Harmonic Motion) के गणितीय सिद्धांत का विस्तार से वर्णन किया है। इसका प्रयोग भौतिकी की विभिन्न शाखाओं की एकदम भिन्न अवस्थाओं के सादृश्य द्वारा दोलनों के अध्ययन के लिए किया जाता है। इकाई दो हमें दो या दो से अधिक समरेख या लम्ब कोणीय आवर्त्त दोलनों के अध्यारोपण के बारे में बताती है, जो उसी या भिन्न बारंबारता (Frequency) की हों।

प्राकृतिक रूप से, यदि दोलन कर रहे पिंडों को यों ही छोड़ दिया जाए तो उनके दोलन धीरे-धीरे अपने आप नष्ट हो जाते हैं। ऐसा अवमंदन के कारण होता है। आवर्त्त दोलनों पर अवमंदन के प्रभाव की चर्चा इकाई तीन में की गई है। इकाई चार में आप अवमंदित आवर्त्त दोलनों की गति के बारे में पढ़ेंगे जिस पर एक आवधिक आवर्त्त बल का प्रभाव पड़ रहा है। इससे विशेष स्थिति में, इसमें अनुनाद (Resonance) की एक भव्य परिघटना भी हो सकती है। अंतिम इकाई में युग्मित दोलकों के दोलनों का विश्लेषण किया गया है। आप पढ़ेंगे कि यदि दोलकों की संख्या बहुत अधिक बढ़ने पर हम इससे तरंग गति की परिघटना पर पहुंचते हैं।

प्रत्येक इकाई में हमने अनेक बोध प्रश्न तथा अंत में कुछ प्रश्न दिए हैं जिससे आपकी धारणाएं व्यवस्थित हो जाएं। यदि आप उन्हें स्वयं हल नहीं कर पाते हैं, तो समाधान के लिए आप इकाई के अंत में देख सकते हैं।

हमें आशा है कि इस खंड को पढ़ने के बाद आप सरल आवर्त्त गति की विस्तृत प्रयोज्यता और उसके तरंग गति से संबंध को समझ सकेंगे। इसलिए आप से यह आशा की जाती है कि विभिन्न दिशाओं में सरल आवर्त्त गति के अध्ययन के लिए आवश्यक गणितीय तकनीक को आप भली प्रकार से समझ लें।

हम आपकी सफलता की कामना करते हैं।

दूसरा खंड, जिसमें चार इकाइयां हैं, संचरण, प्रतिबिंबन और अपवर्तन के अलावा तरंग व्यापार संचरण के मूल गुणों से संबंधित है। तरंगों के व्यतिकरण और विवर्तन की परिघटना उनके अध्यारोपण के कारण उत्पन्न होती है और इनके बारे में पिछली इकाई में बताया जा चुका है।

इकाई 1 सरल आवर्त्त गति

इकाई की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना

आप विद्यालय के अपने विज्ञान पाठ्यक्रम में विभिन्न प्रकार की गतियों के बारे में पढ़ चुके हैं। ग्रहों, उपग्रहों और पृथ्वी पर गिरने वाले पिण्डों की गति से आप परिचित हैं। जब कोई पिण्ड विरामावस्था से गुरूत्व के कारण मुक्त रूप से गिरता है तो उसकी गति एक सरल रेखा में होती है, परंतु किसी वायुयान से गिरायी गयी कोई वस्तु अथवा हवा में ऊपर की फेंकी गयी कोई वस्तु एक वक्र पथ में गति करती है लेकिन जब किसी वस्तु को ठीक ऊर्ध्वाधर दिशा में फेंका गया हो तो उसका पथ ध्रुवीय नहीं होता। आपने दीवार घड़ी के लोलक और वायलिन अथवा अंन्य किसी तार वाले यंत्र की कम्पनमान तार में होने वाली कंपन अवश्य देखा होगा। ये सभी दोलन-गति के उदाहरण हैं। सबसे सरल दोलन-गति, जिसका गणितीय विश्लेषण आसानी से किया जा सकता है, उसे हम सरल आवर्त्त गति (Simple Harmonic Motion) कहते हैं। हम बिल्कुल अलग-अलग भौतिक प्रकृति वाले निकायों (Systems) की दोलन गतियों का भी विश्लेषण सरल आवर्त्त गति के पदों में कर सकते हैं। उदाहरणतया एक लोलक की गति के लिए जो समीकरण निकालते हैं वह प्रेरक (Inductor) और संधारित्र (Capacitor) युक्त परिपथ (Circuit) में आवेश के समीकरण के समरूप होता है। इन समीकरणों के हलों (Solutions) के रूप (Form) में और इन निकायों की ऊर्जा के समय-विचरण (Time Variation) में एक अनूठी समरूपता (Similarity) पायी जाती है। तथापि ऐसी बहुत सी परिघटनाएं है जो कि दो या दो से अधिक सरल आवर्त्त गतियों के अध्यारोपण (Superposition) से उत्पन्न होती है। उदाहरणार्थ हमारा कान का पर्दा बहुत से संनादी (Harmonic) कंपनों के एक जटिल संयोजन के आधीन कम्पन करता है। परंतु इस पहलू की चर्चा हम अगली इकाई में करेंगे।

इस इकाई में हम सरल गणितीय तकनीकों का प्रयोग करके दोलायमान निकायों का अध्ययन करेंगे। हम विभिन्न निकायों की समरूपताओं की स्पष्ट रूप से चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- किसी भी निकाय की सरल आवर्त्त गति की मूल मानक (Criteria) बता सकेंगे,

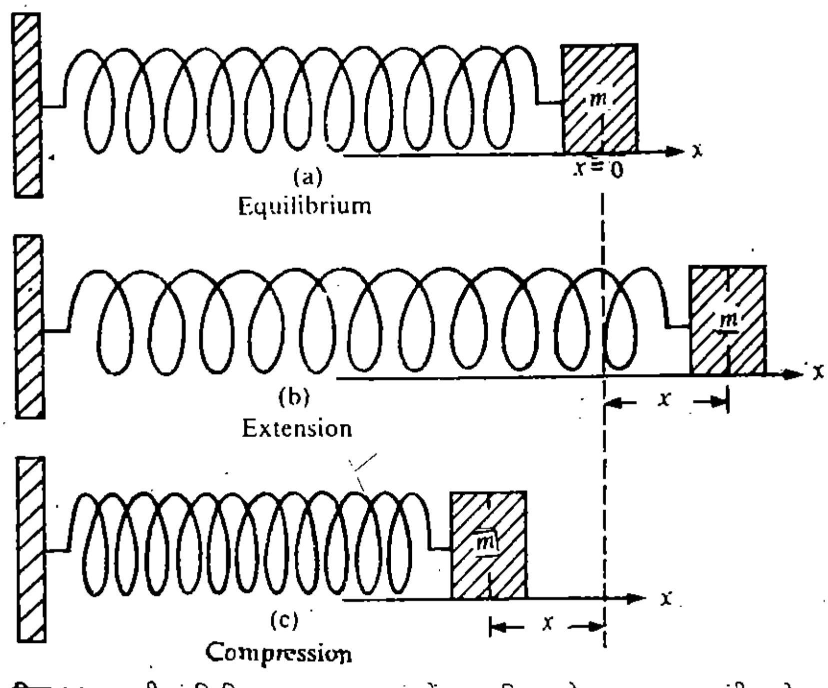
- सरल आवर्त्त गति करने वाले किसी भी निकाय का अवकल समीकरण स्थापित कर उसे हल कर सकेंगे,
- आयाम, कला और आवर्त्तकाल की परिभाषा दे सकेंगे,
- सरल आवर्त्त गति करने वाले किसी पिण्ड की स्थितिज, गतिज एवं सम्पूर्ण ऊर्जा का परिकलन कर सकेंगे,
- औसत स्थितिज व गतिज ऊर्जाओं के व्यंजकों का निगमन कर सकेंगे तथा उनके महत्व का विवेचन भी कर सकेंगे ,
- सरल आवर्त्त गति करने वाले भौतिक निकायों की गति का समीकरण लिखकर तथा विस्थापन, आवर्त्तकाल और ऊर्जा के व्यंजकों का परिकलन करेंगे, और
- विभिन्न दोलायमान निकायों के अंतर्गत समरूपताओं को पहचान सकेंगे ।

1.2 सरल आवर्त्त गति : मौलिक विशेषताएं

आप सभी जानते है कि घड़ी की प्रत्येक सुई नियमित समय के पश्चात् एक निश्चित स्थान पर आ जाती है । आवर्त्त गति का यह एक सुपरिचित उदाहरण है । जब कोई पिण्ड अपनी माध्य-स्थिति (Mean position) के इर्द-गिर्द आवर्त्त गति करता है तो उसकी गति को दोलन गति (Oscillatory Motion) या कम्पन गति (Vibratory Motion) कहते हैं । दोलन गति, एक सामान्य परिघटना है और लोलक घड़ी का गोलक (Bob), इंजन का पिस्टन, वाद्य-यंत्र के कम्पमान तार, विखंडित होने से पहले यूरेनियम का दोलायमान नाभिक आदि दोलन गति के सर्वविदित उदाहरण हैं । यहां तक कि बड़े-बड़े भवन एवं पुल भी दोलन-गति करते हैं । बहुत से नक्षत्रों की चमक (Brightness) में भी आवर्त्तीय परिवर्तन होता है । आपने यह भी अवश्य देखा होगा कि यदि इन दोलनों को एक बार शुरू करके ऐसे ही छोड़ दिया जाए तो सामान्यतः ये अनिश्चित काल तक चलते नहीं रहते अपितु विविध अवमंदन कारकों, जैसे घर्षण और वायु प्रतिरोध आदि, के कारण ये दोलन स्वतः ही समाप्त हो जाते हैं । वास्तव में दोलन गति बहुत जटिल भी हो सकती है । उसका एक उदाहरण हम वायलिन की तार के कम्पन में देखते हैं । हम स. आ. ग. के मूलभूत लक्षणों के विवेचन से अपना अध्ययन प्रारम्भ करेंगे । इसके लिए हम कमानी-संहति निकाय (Spring-Mass System) को सरल आवर्त्ती दोलक के रूप में एक आदर्श मॉडल पर विचार करेंगे ।

1.2.1 कमानी-संहति निकाय के दोलन

कमानी-संहति तंत्र में एक नगण्य द्रव्यमान वाली कमानी होती है जिसका एक सिरा दृढ़ आधार S से जुड़ा होता है और दूसरे सिरे पर द्रव्यमान m का एक गुटका लगा होता है जो कि एक घर्षण रहित क्षैतिज पटल पर रखा होता है (चित्र 1.1 क) । मान लो कि x- अक्ष की कमानी लम्बाई की दिशा में है । जब संहित विरामावस्था में होती है तो हम इस अक्ष के एक बिंदु पर निशान लगा लेते हैं और इस बिंदु को हम x-अक्ष का मूल-बिंदु मान लेते हैं, अर्थात् साम्यावस्था (Equilibrium) की स्थिति में यह निशान $x = 0$ पर स्थित होता है ।



चित्र 1.1 : कमानी-संहति निकाय (क) साम्यावस्था में, (ख) विस्तार के समय बल, (ग) संपीडन के समय बल

यदि संहित m को लम्बाई की दिशा में खींचकर कमानी को तान दिया (Stretched) जाए तो प्रत्यास्थता (Elasticity) के कारण कमानी पर एक प्रत्यानयन बल (Restoring Force) कार्य करता है । प्रत्यांनयन बल की प्रवृत्ति संहति को वापस संतुलन की स्थिति में ले जाने की होती है (चित्र 1.1 ख) । यदि कमानी को

संपीड़ित (Compressed) किया गया हो तो प्रत्यानयन बल कमानी का विस्तार करके संहति को पुनः साम्यावस्था स्थिति में ले जाता है (चित्र 1.1 ग)। आप कमानी का जितना ही अधिक विस्तार या संपीडन करेंगे उतना ही अधिक प्रत्यानयन बल लगता है। अतः प्रत्यानयन बल की दिशा सदैव विस्थापन के विपरीत होती है। यदि लम्बाई में कुल परिवर्तन मूल लम्बाई की अपेक्षा बहुत कम हो तो प्रत्यानयन बल विस्थापन के रैखिकतः (Linearly) अनुक्रमानुपाती (Proportional) होगा। इस निष्कर्ष को हम निम्न समीकरण द्वारा लिख सकते हैं।

$$F = -k\,x \qquad (1.1)$$

ऋणात्मक चिन्ह दर्शाता है कि प्रत्यानयन बल विस्थापन के विपरीत होता है। राशि k कमानी-स्थिरांक अथवा कमानी का बल-स्थिरांक कहलाता है। संख्यात्मक रूप से यह उस प्रत्यानयन बल के बराबर है जो एकांक (Unit) विस्तार होने पर कमानी पर लगता है। इसका एस. आई. (S.I.) मात्रक न्यूटन प्रति मीटर (Nm^{-1} है।

बोध प्रश्न 1

चित्र (1.1 क) की कमानी पर जब 2 न्यूटन का बल लगाया जाता है तो उसका विस्तार 5 सें.मी. होता है। कमानी स्थिरांक का परिकलन करो। यदि 2·5 न्यूटन बल लगाया जाए तो इस कमानी में कितना संपीडन उत्पन्न होगा ?

कमानी-संहति निकाय दोलन कैसे करता है ? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हम इस बात पर ध्यान देंगे कि जब हम संहति को खींचते हैं तो कमानी तन जाती है। प्रत्यानयन बल में संहति को वापस साम्यावस्था स्थिति में ले जाने की प्रवृत्ति होती है। अतः मुक्त कर दिए जाने पर, संहति संतुलन-स्थिति की तरफ बढ़ती है। इस प्रक्रिया में यह स्थिति ऊर्जा अर्जित कर लेती है और साम्यावस्था स्थिति का अतिलंघन करती है। क्या आप जानते हैं ऐसा क्यों होता है ? इस का मूल कारण संहति का जड़त्व है। यदि यह एक बार अतिलंघन करके साम्यावस्था-स्थिति के दूसरी ओर चली जाती है तो कमानी संपीडन हो जाती है और संहति पर प्रत्यानयन बल लगने लगता है, परन्तु यह विपरीत दिशा में होता है। अतः दोलन-गति निकाय के निम्न दो आंतरिक गुणधर्मों (Properties) से उत्पन्न होती है (i) प्रत्यास्थता और (ii) जड़त्व।

साम्यावस्था-स्थिति के सापेक्ष, किसी दोलायमान पिण्ड के प्रत्यानयन बल की दिशा क्या होती है ?

प्रत्यानयन बल सदैव दोलायमान पिंड की साम्यावस्था स्थिति की दिशा में निर्देशित होता है।

कमानी संहति निकाय का विवेचन करते समय हमने निम्न दो महत्वपूर्ण बातें देखीं :

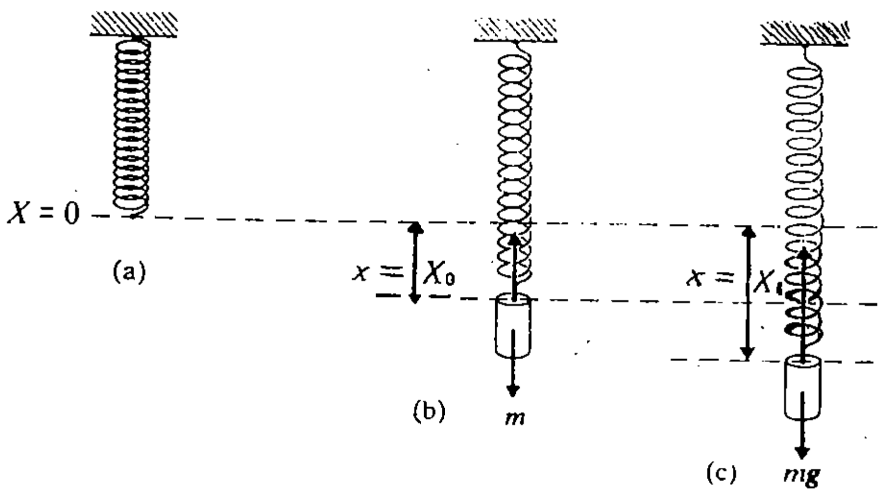
(i) प्रत्यानयन बल साम्यावस्था-स्थिति से संहति के विस्थापन के रैखिकतः अनुक्रमानुपाती होता है।

(ii) प्रत्यानयन बल सदैव साम्यावस्था स्थिति की ओर निर्देशित होता है।

ऐसी सभी दोलन-गति जो इन दोनों शर्तों को पूरा करती हैं, सरल आवर्त्त गति कहलाती हैं।

सरल आवर्त्त गति के अध्ययन का महत्व का कारण यह है कि हम, बिल्कुल भिन्न-भिन्न भौतिक प्रकृति वाले निकायों की दोलन गति का विश्लेषण इसके पदों में कर सकते हैं।

अब हम कमानी-संहति निकाय के दोलनों पर गुरुत्व के प्रभाव का अध्ययन करेंगे। इसके लिए हम एक दृढ़ आधार से लटकी **नगण्य द्रव्यमान** वाली कमानी पर विचार करेंगे जिसके निचले सिरे से द्रव्यमान m वाली एक संहति लटकी हुई है (चित्र 1.2)।



चित्र 1.2 : ऊर्ध्वाधर लटका हुआ कमानी-संहति निकाय

x-अक्ष कमानी की लम्बाई की दिशा में लेते हैं। यह माना कि जब कमानी पर कोई भार नहीं लटका होता है, उस समय उसका सबसे निचला बिंदु ही हमारा संदर्भ-बिंदु $x = 0$ है (चित्र 1.2 क)। जब कमानी से एक संहति m लटका दी जाती है तो मान लें कि संदर्भ-बिंदु $x = x_0$ पर चला जाता है (चित्र 1.2 ख)। साम्यावस्था में भार mg कमानी बल kx_0 को संतुलित करता है। अर्थात् वास्तविक बल शून्य है, अतः

$$mg - kx_0 = 0$$

या $$mg = kx_0 \quad (1.2)$$

अब यदि संहति को नीचे की ओर खींचा जाए जिससे संदर्भ-बिंदु $x = x_1$ पर चला जाए (चित्र 1.2 ग) तो कुल प्रत्यानयन बल kx_1 होगा तथा अपरिमुखी दिशा में होगा। अतः नीचे की ओर लगने वाला वास्तविक बल समीकरण 1.2 का प्रयोग करके निम्नलिखित होगा :

$$mg - kx_1 = k\,(X_0 - X_1) = -\,kx$$

यहां $$x = X_1 - X_0$$

अतः संहति पर लगने वाला परिणामी प्रत्यानयन बल

$$F = -\,kx$$

है, यहां x साम्यावस्था-स्थिति x_0 से संहति का विस्थापन है। यह समीकरण (1.1) के समान रूप है जो कि क्षैतिज विन्यास के लिए निकाला गया था। अतः इससे स्पष्ट होता है कि कमानी से ऊर्ध्वाधरतः लटकी हुई संहति के दोलनों की आवृत्ति पर गुरुत्व का कोई प्रभाव नहीं होता। गुरुत्व केवल उसकी साम्यावस्था-स्थिति को विस्थापित करता है।

1.3 सरल आवर्त्त गति का अवकल समीकरण

अब हम एक ऐसा अवकल समीकरण ज्ञात करेंगे जो कि कमानी-संहति निकाय की दोलन गति का निरूपण करता है। इस प्रकार के निकाय की गति का समीकरण, संहति पर लगने वाले दो बलों को समतुल्य करके प्राप्त किया जाता है।

द्रव्यमान $\times$ त्वरण = प्रत्यानयन बल

अर्थात् $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\,kx$$

यहां d^2x/dt^2 संहति का त्वरण है।

यह बात ध्यान देने योग्य है कि इस समीकरण में संहति की साम्यावस्था स्थिति, मूलबिंदु $x = 0$ पर मानी गयी है। आप देखेंगे कि राशि k/m का मात्रक $Nm^{-1}\,kg^{-1} = (kg.m.s^{-2})m^{-1}\,kg^{-1} = s^{-2}$ हैं। अतः हम k/m के स्थान पर ω_0^2 लिख सकते हैं, ω_0 को कोणीय आवर्ती कहा जाता है। तब उपर्युक्त समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2_0\,x = 0 \quad (1.3)$$

यहां यह उल्लेखनीय है कि समीकरण (1.3), समीकरण (1.1) का ही अवकल रूप है और वह एक विमीय (One Dimensional) सरल आवर्त्त गति का निरूपण करता है।

जिस अवकल समीकरण के पदों में चर (Variable) और उसके अवकलजों (Derivatives) की केवल प्रथम घात ही होती है वह रैखिक (linear) अवकल समीकरण कहलाता है। यदि उसमें चर से स्वतंत्र (Independent) कोई पद न हो तो उसे समघात (Homogeneous) अवकल समीकरण कहते हैं। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि समीकरण (1.3) द्वितीय क्रम (Second Order) रैखिक समघात समीकरण है। इसके हल में दो स्वेच्छ अचर होंगे।

1.4 सरल आवर्त्त गति के अवकल समीकरण का हल

यदि हम किसी भी समय t पर संहति का विस्थापन ज्ञात करना चाहते हैं तो समीकरण (1.3) को नियत प्रारंभिक प्रतिबंधों (given initial condition) के अधीन हल करना होगा। समीकरण (1.3) का निरक्षण

करने पर यह स्पष्ट हो जाता है कि x एक ऐसा फलन होना चाहिए जिसका द्वितीय समय अवकलन $-\omega_0^2 x$ के बराबर हो।

प्रारंभिक कैलकुलस (Elementary Calculus) से हमें ज्ञात है कि यह गुण साइन और कोसाइन फलनों में विद्यमान है। आप यह भी जांच सकते हैं कि यदि साइन और कोसाइन फलनों के साथ एक गुणांक भी लगा हो तो भी उनका यह गुण बदलता।

अतः समीकरण (1.3) के व्यापक हल को साइन और कोसाइन पदों के रैखीय संयोजन (Linear Combination) के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है।

अर्थात्

$$x(t) = A_1 \cos \alpha t + A_2 \sin \alpha t \qquad (1.4)$$

यदि हम $A_1 = A \cos \phi$ और $A_2 = -A \sin \phi$ रखें तो हम लिख सकते हैं

$$x(t) = A \cos (\alpha t + \phi) \qquad (1.5)$$

समीकरण (1.5) का समय के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर प्राप्त व्यंजक की समीकरण (1.3) से तुलना करने पर हमें $\alpha = \pm \omega_0$ प्राप्त होता है। यहां पर ऋणात्मक चिन्ह को लेना उचित नहीं है क्योंकि इससे ऋणात्मक आवृत्ति प्राप्त होगी, जो कि स्वाभाविक रूप से ही एक निरर्थक राशि है।

$$\frac{d(\sin \alpha t)}{dt} = \alpha \cos \alpha t$$

और

$$\frac{d^2(\sin \alpha t)}{dt^2} = -\alpha^2 \sin \alpha t$$

इसी प्रकार

$$\frac{d(\cos \alpha t)}{dt} = -\alpha \sin \alpha t$$

और

$$\frac{d^2(\cos \alpha t)}{dt^2} = -\alpha^2 \cos \alpha t$$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

समीकरण (1.5) में आए हुए अचर A और ϕ का मान, विस्थापन (x) और वेग (dx/dt) से संबंधित प्रारंभिक प्रतिबंधों का प्रयोग करके, ज्ञात किए जा सकते हैं। कल्पना करे कि हमने संहति को संतुलित-स्थिति से कुछ दूरी a पर स्थिर कर दिया है और फिर समय $t = 0$ पर उसे (दोलन करने के लिए) छोड़ते हैं। यहां पर प्रारंभिक प्रतिबंध निम्नलिखित हैं

समय $t = 0$ पर $x = a$ और $dx/dt = 0$ तब समीकरण (1.5) में इन प्रारंभिक प्रतिबंधों को प्रयोग करने पर

$$x(t = 0 \text{ पर}) = A \cos \phi = a$$

और $$\frac{dx}{dt}(t = 0 \text{ पर}) = -A\, \omega_0 \sin \phi$$

A और ϕ का मान निश्चित करने के लिए ये प्रतिबंध पर्याप्त हैं। दूसरे प्रतिबंध से हमें यह ज्ञात होता है कि ϕ या तो शून्य है या $n\pi$ ($n = 1, 2, 3$ ....)। यहां पर हमने दूसरे अधिमान को अस्वीकार कर दिया है क्योंकि पहले प्रतिबंध के अनुसार $\cos \phi$ धनात्मक होना चाहिए। इस प्रकार उपरोक्त प्रारंभिक प्रतिबंधों के अधीन, समीकरण (1.5) निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है।

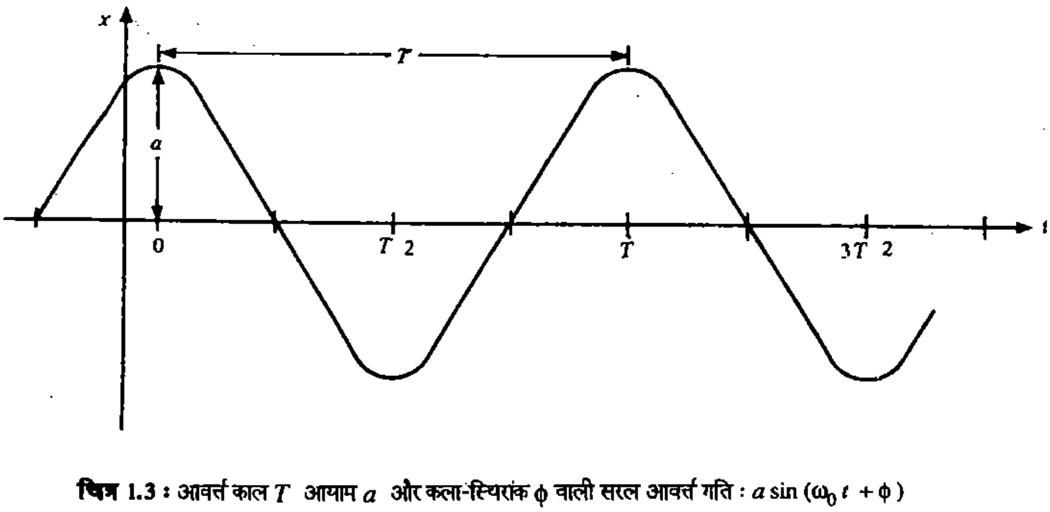
$$x = a \cos \omega_0 t \qquad (1.6)$$

बोध प्रश्न 2

यदि हम समीकरण (1.4) में $A_1 = B \sin \theta$ और $A_2 = B \cos \theta$ रखें, तो इस स्थिति में हल निम्नलिखित होगा।

$$\therefore \quad x(t) = B \sin (\omega_0 t + \theta)$$

इस प्रकार हम देखते हैं कि अवकल समीकरण (1.3) के मान्य हल, कोसाइन और साइन दोनों ही रूपों में होते हैं। यदि आप विस्थापन का ग्राफ बनाएं तो यह एक साइन (या कोसाइन) वक्र होगा जिसकी एक निश्चित प्रारंभिक कला होगी (चित्र 1.3)।



चित्र 1.3 : आवर्त काल T आयाम a और कला-स्थिरांक ϕ वाली सरल आवर्त गति : $a \sin(\omega_0 t + \phi)$

1.4.1 आयाम और कला

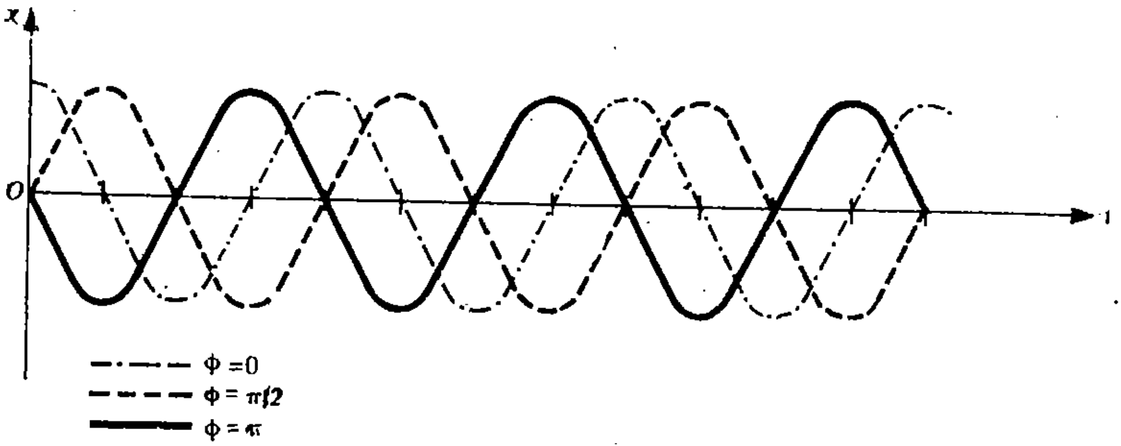
समीकरण (1.5) में प्रयुक्त राशि $(\omega_0 t + \phi)$ को कला कोण अथवा समय t पर निकाय के कम्पनों की कला कहा जाता है। समय $t = 0$ पर कला ϕ होती है। इसे हम प्रारंभिक कला अथवा कला-स्थिरांक कहते हैं। यह हमें प्रारंभिक स्थिति के बारे में सूचना देता है। जहां से विस्थापन का मापन प्रारंभ किया जाता है। यदि $t = 0$ पर पिंड की स्थिति $x = x_0$ हैं तो हमें समीकरण (1.5) से प्राप्त होता है

$$x_0 = a \cos \phi$$

हम जानते हैं कि साइन और कोसाइन फलनों का मान +1 और –1 के बीच होता है। जब $\cos(\omega_0 t + \phi) = +1$ या –1 तब विस्थापन का मान अधिकतम होता है। हम इसे यहां a या $-a$ से सूचित करते हैं। यहां राशि a को हम दोलन का आयाम कहते हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि कोसाइन और साइन, अवकल समीकरण के मान्य हल हैं। अतः हम समीकरण (1.3) को पुनः इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{1.7}$$

चित्र 1.4 में $\phi = 0, \pi/2$ और $-\pi/2$ के लिए विस्थापन कला ग्राफ दिखलाया गया है। सभी दिशाओं में, ग्राफों की आकृतियाँ बिल्कुल एक जैसी हैं, परन्तु मूल-बिंदु काल-अक्ष पर खिसकता जाता है। जब दो दोलनों के बीच कला अंतर π का होता है तो हम कहते हैं कि विपरीत कला में हैं अथवा एक दोलन की प्रावस्था दूसरे से π अलग है।



चित्र 1.4 : स.आ.गति $x(t) = a\cos(\omega_0 t + \phi)$ के लिए विस्थापन समय ग्राफ, जबकि (क) $\phi = 0$ (ख)) $\phi = \pi/4$ (ग) $\phi = \pi/2$ (घ) $\phi = -\pi/2$

बोध प्रश्न 3

चित्र 1.1 में संहति के दोलनों का आयाम 'a' है। यदि समय को उस क्षण से मापा जाय, **जबकि यह**

(i) $x = +a$, (ii) $x = -a$, (iii) $x = a\sqrt{2}$

तब समीकरण

(क) $x = a \sin(\omega_0 t + \phi)$ और

(ख) $x = a \cos(\omega_0 t + \phi)$

की कला स्थिरांक का परिकलन कीजिए।

1.4.2 आवर्त्त काल और आवृत्ति

यदि हम समीकरण (1.7) में $t = t + 2\pi/\omega_0$ रखने पर हम प्राप्त करते हैं

$$x = a\cos[\omega_0(t + 2\pi/\omega_0) + \phi]$$
$$= a\cos[\omega_0 t + 2\pi + \phi]$$
$$= a\cos(\omega_0 t + \phi)$$

अर्थात् $2\pi/\omega_0$ के समय अंतराल के पश्चात् कण का विस्थापन स्वयं की पुनरावृत्ति करता है। दूसरे शब्दों में दोलायमान कण $2\pi/\omega_0$ समय में एक कम्पन पूरा करता है। इस समय को कंपन कला काल अथवा आवर्त्त काल कहते हैं। इसे 'T' से दर्शाया जाता है। और उसे निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$T = 2\pi/\omega_0 \tag{1.8}$$

कमानी संहति निकाय के लिए $\omega_0^2 = k/m$

अतः
$$T = 2\pi\sqrt{m/k} \tag{1.9}$$

दोलित एक सैकण्ड में जितने कम्पन करता है उसे उसकी आवृत्ति कहते हैं। यदि इसे हम ν_0 से दर्शाते हैं। यह कमानी-संहति निकाय के लिए,

$$\nu_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{1.10}$$

इसका यह निष्कर्ष निकलता है कि कमानी जितनी अधिक सख्त होगी उसके कम्पनों की आवृत्ति भी उतनी ही अधिक होगी। आवृत्ति का मात्रक हर्ज (Hz) होता है।

1.4.3 वेग और त्वरण

हम जानते हैं कि सरल आवर्त्त गति करने वाली संहति का विस्थापन को निम्न प्रकार लिखा जाता है

$$x = a\cos(\omega_0 t + \phi)$$

इसलिए तात्क्षणिक वेग (Instantaneous Velocity) जो कि विस्थापन का प्रथम काल-अवकलज होता है को हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं।

$$v = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 a \sin(\omega_0 t + \phi) \tag{1.11}$$

$$= \omega_0 a \cos(\pi/2 + \overline{\omega_0 t + \phi}) \tag{1.12 क}$$

किसी बिंदु x पर हम वेग का मान भी जानने के लिए हम समीकरण (1.11) को इस प्रकार लिखते हैं

$$v = -\omega_0 [a^2 - a^2\cos^2(\omega_0 t + \phi)]^{1/2}$$

$$= -\omega_0 (a^2 - x^2)^{1/2}, -a \le x \le a \tag{1.12 ख}$$

हम यह भी जानते हैं कि त्वरण, वेग का प्रथम काल-अवकलज होता है अतः समीकरण (1.11) का काल अवकलन निम्न होगा :

$$\frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 a\cos(\omega_0 t + \phi)$$

$$= \omega_0^2 a\cos(\pi + \overline{\omega t + \phi}) \tag{1.13 क}$$

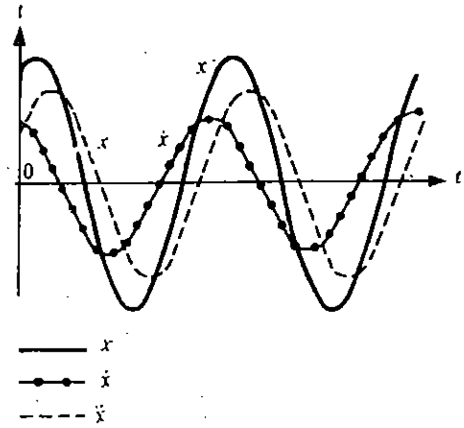
स्पष्टतः विस्थापन के पदों में,

$$\frac{dv}{dt} = -\omega_0^2 x \tag{1.13 ख}$$

यदि आप समीकरणों (1.7), (1.12 क) और (1.13 क) की तुलना करें तो आप पाएंगे कि

(i) $\omega_0 a$ वेग आयाम होता है और $(\omega_0^2 a)$ त्वरण आयाम होता है और (ii) वेग, विस्थापन से $\pi/2$ आगे हैं और त्वरण, वेग से $\pi/2$ आगे है।

यदि आप विस्थापन, वेग और त्वरण को काल के फलन के रूप में आलेखित करें तो आपको चित्र 1.5 में दिखाए गए ग्राफ प्राप्त होंगे।



चित्र 1.5 : स.आ.ग. में (ϕ=0 पर) विस्थापन, वेग और त्वरण

बोध प्रश्न 4

सरल आवर्त्त गति करने वाले किसी कण का विस्थापन $x = 0.01 \cos 4\pi (t + .0625)$, मीटर द्वारा प्रकट किया गया है। इस समीकरण से, आप कण के (i) आयाम (ii) आवर्त्त काल (iii) अधिकतम चाल (iv) अधिकतम त्वरण और (v) प्रारंभिक विस्थापन ज्ञात कीजिए ?

1.5 दोलायमान निकायों में ऊर्जा का रूपांतरण : स्थितिज और गतिज ऊर्जाएं

चित्र 1.1 में दिए गए कमानी-संहति निकाय पर विचार करें। जब संहति को नीचे खींचा जाता है तो कमानी की लंबाई बढ़ जाती है। कमानी की लंबाई में वृद्धि को हम dx से प्रदर्शित करते हैं। इसकी वृद्धि के लिए जितनी ऊर्जा की आवश्यकता होती है वह किए गए कार्य के बराबर होती है। इसे हम इस प्रकार से लिख सकते हैं

$$dw = dU = F_0 dx \tag{1.14}$$

यहां F_0 प्रयुक्त बल है (जैसे हाथ द्वारा लगाया बल) इस बल को प्रत्यानयन बल संतुलित करता है और यह $F_0 = kx$ के बराबर है। इसलिए कमानी की लंबाई में वृद्धि x करने के लिए आवश्यक ऊर्जा को निम्न प्रकार से निकाला जाता है :

$$U = \int_0^x F_0\, dx = k \int_0^x x dx = \frac{1}{2} kx^2 \tag{1.15}$$

यह ऊर्जा कमानी में स्थितिज ऊर्जा के रूप में संचित रहती है और यह कमानी-संहति निकाय के दोलनों के लिए उत्तरदायी होती है।

समीकरण (1.7) से विस्थापन का मान समीकरण (1.14) में लगाने पर हम,

$$U = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 (\omega_0 t + \phi) \tag{1.16}$$

प्राप्त करते हैं। यहां ध्यान दीजिए कि समय $t = 0$ पर स्थितिज ऊर्जा,

$$U_0 = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 \phi$$

होती है। जैसे ही संहति को मुक्त कर दिया जाता है तो यह संतुलन स्थिति की तरफ बढ़ती है और उसकी स्थितिज ऊर्जा गतिज ऊर्जा में बदलने लगती है। किसी भी स्वेच्छ समय t पर गतिज ऊर्जा $K.E. = \frac{1}{2} mv^2$ होती है। समीकरण (1.11) का प्रयोग करके, हम इसे निम्नलिखित रूप में भी लिख सकते हैं।

$$K.E. = \frac{1}{2} m\, \omega_0^2\, a^2 \sin^2 (\omega_0 t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} ka^2 \sin^2 (\omega_0 t + \phi) \tag{1.17}$$

क्योंकि $\omega_0^2 = k/m$ इसलिए हम $K.E.$ को विस्थापन के पदों में, निम्न प्रकार लिख सकते हैं,

$$K.E. = \frac{1}{2} ka^2 [\, 1 - \cos^2 (\omega_0 t + \phi)]$$

$$= \frac{1}{2} ka^2 - \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 (\omega_0 t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} ka^2 - \frac{1}{2} kx^2$$

$$= \frac{1}{2} k\, (a^2 - x^2) \tag{1.18}$$

$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$

इससे ज्ञात होता है कि जब दोलायमान पिण्ड अपनी संतुलन-स्थिति $x = 0$ से गुजरता है तो इसकी गतिज ऊर्जा अधिकतम होती है। तब इसका मान $\frac{1}{2} ka^2$ होता है।

बोध प्रश्न 5

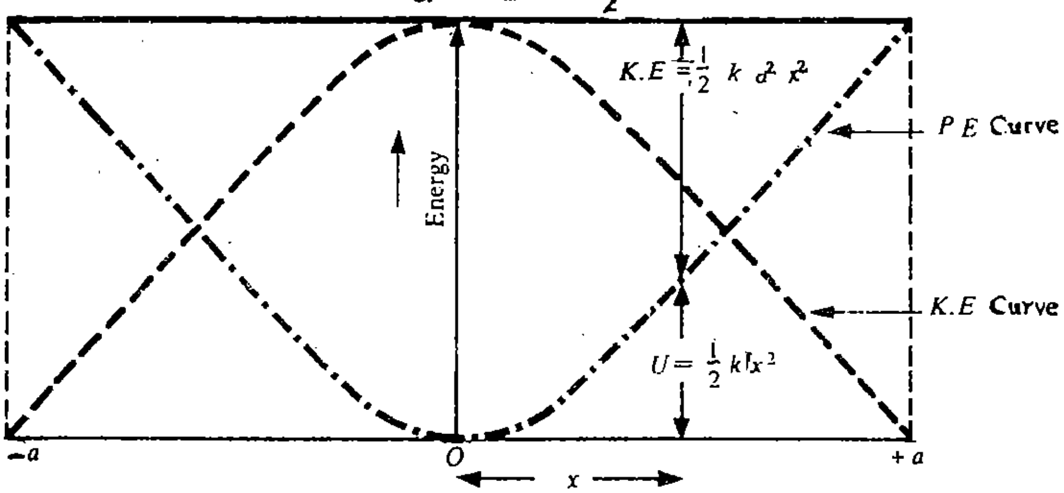
दर्शाइये कि स्थितिज और गतिज ऊर्जाओं के आवर्त्त काल कम्पनों के आवर्त काल के आधे होते हैं।

अतः समीकरण (1.15) और (1.17) की काल निर्भरता से यह ज्ञात होता है कि कमानी संहति निकाय में संहति और कमानी बारी-बारी से ऊर्जा का आदान-प्रदान करते रहते हैं। समय $t = 0$ पर कमानी में संचित स्थितिज ऊर्जा शून्य होती है। $t = \pi/4$ पर स्थितिज ऊर्जा शून्य होती है और गतिज ऊर्जा अधिकतम। जैसे-जैसे संहति दोलन करती है ऊर्जा गतिज रूप से स्थितिज रूप में बदलती है और फिर इसके विपरीत होती है। किसी भी क्षण दोलित (Oscillator) की सम्पूर्ण ऊर्जा, E, इन दोनों ऊर्जाओं के योग के बराबर होती है। अतः समीकरण (1.15) और (1.17) की सहायता से हम कुल ऊर्जा को निम्न प्रकार लिख सकते हैं

$$E = U + K.E. = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 (\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} k\, a^2 \sin^2 (\omega_0 t + \phi) = \frac{1}{2} ka^2 \qquad (1.19)$$

इससे हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि सम्पूर्ण ऊर्जा स्थिर रहती है और आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है। यदि घर्षण जैसे कोई क्षयकारी (Dissipative) बल उपस्थित न हों तो कुल यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित (Conserved) रहती है।

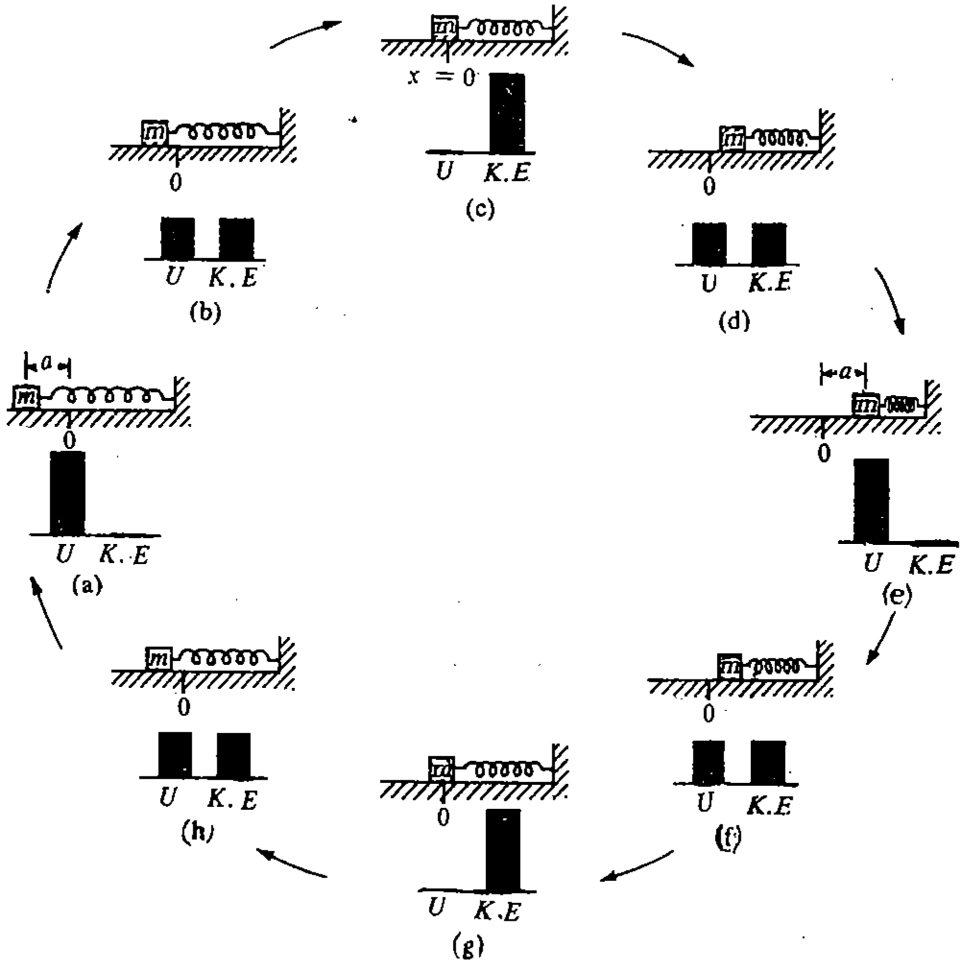
समीकरण (1.14) और (1.18) से प्राप्त U और $K.E.$ के ग्राफ x के फलन के रूप में, चित्र 1.6 में दिखाए गए हैं।



चित्र 1.6 : सरल आवर्त्त गति में स्थितिज ऊर्जा और गतिज ऊर्जा ($K.E.$) और सम्पूर्ण ऊर्जा (E) का विस्थापन (x) के साथ विचरण

इन ग्राफों के संबंध में इन बातों पर ध्यान दीजिए (i) इन वक्रों की आकृति परवलयिक (Parabolic) है। (ii) आकृति मूल-बिंदु के सापेक्ष संमित है और (iii) स्थितिज ऊर्जा तथा गतिज ऊर्जा के वक्र एक दूसरे से प्रतिलोमित (Inverted) हैं। क्यों ? यह आवर्त्ती दोलित्र के विस्थापन और वेग में $\pi/2$ का कला-अंतर होने के कारण है। विस्थापन x के किसी भी मान के लिए, सम्पूर्ण ऊर्जा, स्थितिज और गतिज ऊर्जाओं के योग के बराबर होती है और इसका मान $1/2\, ka^2$ होता है। इसे एक क्षैतिज रेखा द्वारा दर्शाया गया है।

वे बिंदु जहां पर यह क्षैतिज रेखा, स्थितिज ऊर्जा वक्र को काटती है उन्हें हम वर्तन-बिंदु (Turning Point) कहते हैं। दोलायमान कण इनसे आगे नहीं जा सकता है और संतुलन-स्थिति की तरफ वापस मुड़ जाता है। इन बिंदुओं पर दोलित की सम्पूर्ण ऊर्जा पूरी तरह स्थितिज ही होती है ($E = u = \frac{1}{2} ka^2$) और गतिज ऊर्जा शून्य होती है। संतुलन-स्थिति पर ($x = 0$) सम्पूर्ण ऊर्जा गतिज ऊर्जा $K.E. = E = \frac{1}{2} ka^2$ होती है। इससे हम अधिकतम वेग v_{max}^2 को संबंध $\frac{1}{2} m\, v_{max}^2 = E$ से प्राप्त कर सकते हैं। अर्थात् $v_{max}^2 = \sqrt{2E/m}$ बीच में अन्य किसी भी स्थिति पर ऊर्जा आंशिक रूप से स्थितिज और आंशिक रूप से गतिज होती है परन्तु सम्पूर्ण ऊर्जा सदैव स्थित रहती है। कमानी-संहति निकाय का ऊर्जा-रूपांतरण चित्र 1.7 में दिखाया गया है।



चित्र 1.7 : कमानी-संहति निकाय के लिए विभिन्न समयों पर संहति की स्थिति का चित्रण। स्थितिज और गतिज ऊर्जा को घोषित करने वाली शलाकाएं (Bars) $t = T/8$ के समयांतर पर दिखलायी गयी हैं।

क्या आप यह जानते हैं कि न्यूनतम स्थितिज ऊर्जा वाला बिंदु हम स्थायी साम्यावस्था की स्थिति में मानते हैं ? ऐसा इसलिए मानते हैं क्योंकि उस स्थिति में निकाय पर लगने वाला कुल वास्तविक बल शून्य होता है।

बोध प्रश्न 6

एक पिंड जिसकी संहति m है। उसे ऊंचाई h से एक कमानीदार तुला के पलड़े पर गिराते हैं। पलड़े और कमानी के द्रव्यमान नगण्य है। कमानी का दुर्नम्यता गुणांक (Stiffness Constant) k है। पलड़े में गिरकर पिंड ऊर्ध्वाधर दिशा में आवर्ती दोलन करता है। आप इन दोलनों का आयाम व ऊर्जा ज्ञात करिए ?

1.6 स.आ.ग. से संबंधित राशियों के औसत मानों का परिकलन करना

चित्र 1.5 में हमने विस्थापन, वेग और त्वरण को समय के फलन के रूप में आलेखित किया है। इन ग्राफों को ध्यान से देखने पर आपको ज्ञात हुआ होगा कि प्रत्येक दिशा में, किसी भी पूर्ण काल के लिए प्रथम अर्धकाल चक्र में वक्र के नीचे का क्षेत्रफल, द्वितीय अर्धकाल चक्र में वक्र के नीचे के क्षेत्रफल के ठीक बराबर है। अतः एक पूर्ण चक्र में इन क्षेत्रफलों का बीजीय योग शून्य है। इसका अर्थ यह हुआ कि किसी भी एक पूर्ण काल चक्र में विस्थापन, वेग और त्वरण के औसत मान शून्य हैं। यदि हम x^2 (या v^2) को t के सापेक्ष में आलेखित करें तो वक्रित भाग केवल ऊपरी भाग में ही बनेंगे जिससे एक पूर्ण चक्र का कुल क्षेत्रफल धनात्मक ही रहेगा। इससे यह संकेत मिलता है कि हम गतिज और स्थितिज ऊर्जाओं के औसत मानों को ले सकते हैं।

एक पूर्ण चक्र के लिए गतिज ऊर्जा के कालिक माध्य (Time Average) को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है :

$$<K.E.> = \frac{\int_0^T K.E.dt}{T} \tag{1.20 क}$$

समीकरण (1.17) से $K.E.$ के मान को इसमें लगाने पर, हमें निम्न व्यंजक प्राप्त होता है :

$$< K.E. > = \frac{ka^2}{2T} \int_0^T \sin^2 (\omega_0 t + \phi)\, dt \tag{1.20 ख}$$

समाकल समीकरण (1.20 ख) को हल करने पर उसका मान $T/2$ प्राप्त हुआ। अतः यह मान रखने पर औसत गतिज ऊर्जा का व्यंजक निम्न रूप ले लेता है :

$$< K.E.> = \frac{ka^2}{4} \tag{1.21}$$

इसी प्रकार यह दर्शाया जा सकता है कि एक पूर्ण चक्र के लिए, स्थितिज ऊर्जा का मान

$$< U > = \frac{1}{4} ka^2 \tag{1.22}$$

होता है।

अर्थात् सरल आवर्त्त गति करने वाले दोलित्र को किसी भी पूर्ण काल चक्र के लिए औसत गतिज ऊर्जा उसकी औसत स्थितिज ऊर्जा के बराबर होती है।

अतः औसत गतिज और औसत स्थितिज ऊर्जा का योग

$$< K.E. > + < U > = \frac{1}{4} ka^2 + \frac{1}{4} ka^2$$

$$= \frac{1}{2} ka^2$$

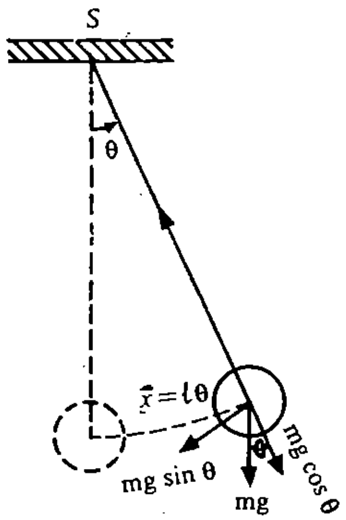
कुल ऊर्जा के बराबर होता है।

1.7 स. आ. गति करने वाले भौतिक निकायों के उदाहरण

हम देख चुके हैं कि सरल आवर्त्त गति करने के लिए, किसी भी निकाय में दो भागों का होना आवश्यक है : एक वह जो कि स्थितिज ऊर्जा का संचय कर सकता (जैसे कमानी) और दूसरा वह जो कि गतिज ऊर्जा का संचय करने में समर्थ है (जैसे संहति)। अब हम सरल आवर्त्त गति करने वाले दूसरे निकायों का अध्ययन करेंगे। इसके लिए इन तकनीकों का प्रयोग करेंगे जिनका विकास हमने अपने कमानी-संहति निकाय के मॉडल का विवेचन करते समय किया था।

1.7.1 सरल लोलक (Simple Pendulum)

सरल लोलक एक आदर्श अविस्तारी है जिसमें एक बिंदु-संहति (गोलक), एक अविस्तारी भारहीन डोरी में लटका होता है। जब द्रव्यमान m वाले गोलक को उसकी साम्यावस्था-स्थिति से θ कोण पर विस्थापित किया जाता है (चित्र 1.8) तब यह भार एक चाप बनाता है जिसमें प्रत्यानयन बल F को हम भार mg के रेखीय घटकों में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :



चित्र 1.8 : सरल लोलक की गति

अतः $F = -mg \sin\theta$

और गोलक (Bob) की गति का समीकरण

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -mg\sin\theta \tag{1.23}$$

गोलक एक चाप के समांतर गति करता है जिसकी तात्क्षणिक लम्बाई को x से दर्शाया जाता है। यदि उसी क्षण संतुलन-स्थिति से कोणीय विस्थापन θ हो तो चाप की लम्बाई,

$$x = l\theta \tag{1.24}$$

होती है।

यहां पर l-उस डोरी की लम्बाई है जिससे गोलक बंधा रहता है। समीकरण (1.24) का t के सापेक्ष दो बार अवकलन करने पर और उसके परिणाम को समीकरण (1.23) में प्रतिस्थापित करने पर, हमें

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta \tag{1.25}$$

प्राप्त होता है। छोटे कोणीय विस्थापनों के लिए, हम $\sin\theta$ का सन्निकट मान θ लिख सकते हैं। इस सन्निकटीकरण के अंतर्गत, समीकरण (1.25), यह रूप धारण कर लेता है।

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{1.26}$$

यहां पर $\omega_0 = \sqrt{g/l}$

समीकरण (1.26) बिल्कुल ठीक मानक रूप (1.3) की तरह का है। इससे यह प्रकट होता है कि लोलक सरल आवर्त्त गति करता है। दोलनों का आवर्त्त काल

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} \tag{1.27}$$

होता है। हम तुल्य रूपता के आधार पर समीकरण (1.26) का व्यापक हल, इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\theta = \theta_m \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{1.28}$$

यहां θ_m अधिकतम कोणीय विस्थापन है।

समीकरण (1.27) से आपको ज्ञात होगा कि छोटे कोणीय विस्थापनों के लिए सरल लोलक की दोलन आवृत्ति g और l पर तो निर्भर करती है परंतु गोलक के द्रव्यमान पर नहीं। समीकरण (1.27) में गुणक g की उपस्थिति का अर्थ यह है कि लोलक घड़ी, ध्रुवों की अपेक्षा विषुवत रेखा पर अधिक धीमी चलती है। क्या आप जानते हैं कि ऐसा क्यों होता है ? इसका कारण है कि g का मान अक्षांश के साथ-साथ बदलता रहता है। इसी कारण से लोलक का आवर्त्त काल चन्द्रमा (उपग्रहों) और ग्रहों पर अलग-अलग होता है।

मान लो कि दोलन-आयाम छोटा नहीं है और हमें व्यापक समीकरण (1.25) को हल करना है। आवर्त्त काल (T) को अधिकतम कोणीय विस्थापन θ_m पर निर्भर एक श्रेणी के रूप मे अभिव्यक्त किया जा सकता है। इस प्रकार,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{2^2}\sin^2\left(\frac{\theta_m}{2}\right) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4\frac{\theta_m}{2} + ..\right) \tag{1.29}$$

(हमने उपर्युक्त परिणाम को मान लिया है)

आप समीकरण (1.27) की यथार्थता की जांच, समीकरण (1.29) से प्राप्त T के मान से तुलना कर सकते हैं। उदाहरण के लिए आप पाएंगे कि जब $\theta_m = 15°$ है (जो कि एक सिरे से दूसरे सिरे तक के कुल कोणीय विस्थापन 30° के बराबर है) तब आवर्त्त काल के वास्तविक मान, समीकरण द्वारा प्राप्त मान से अलग होता है और यह अंतर 0.5% से भी कम है।

बोध प्रश्न 7

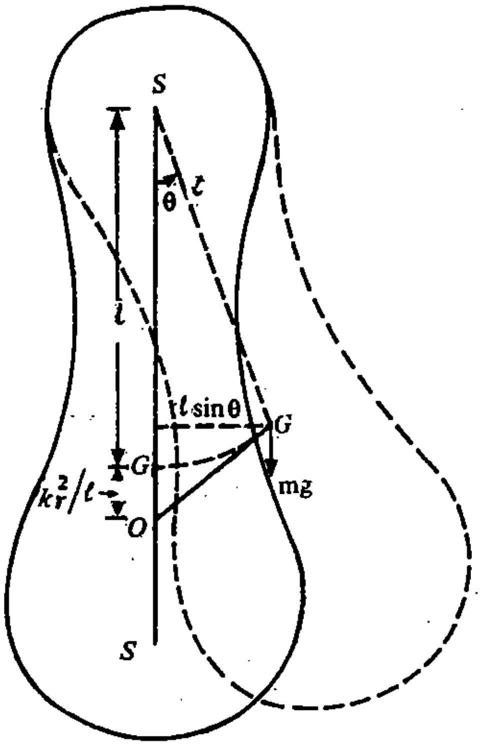
ऊर्जा के अविनाश के सिद्धांत का प्रयोग करके दर्शाओ कि सरल लोलक की कोणीय गति ($\dot{\theta}$) इसी प्रकार लिखी जा सकती है

$$\theta = \left[\frac{2}{ml^2}[E - mgl(1-\cos\theta)]\right]^{1/2}$$

यहां प्रतीकों के अर्थ सामान्य हैं।

1.7.2 पिंड लोलक (Compound Pendulum)

पिंड लोलक एक दृढ़ पिंड होता है जो कि उसके अन्दर होकर जाती हुई एक क्षैतिज अक्ष के चारों ओर स्वतंत्र रूप से दोलन कर सकता है (चित्र 1.9)।



चित्र 1.9 : पिण्ड लोलक

संतुलन-स्थिति में गुरुत्व केन्द्र G, निलम्बन बिंदु S के ऊर्ध्वाधरतः नीचे होता है। माना कि दूरी SG, l है। अब यदि किसी क्षण लोलक का छोटा कोणीय विस्थापन θ दे दिया जाए तो यह उसी पथ पर दोलन करता रहता है। क्या इसकी गति सरल आवर्त्त गति है ? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हम इस बात पर ध्यान देते हैं कि SG के गिर्द प्रत्यानयन बल आघूर्ण (Moment of Inertia) है और इसकी प्रवृत्ति लोलक की संतुलन स्थिति की ओर ले जाने की होती है।

यदि S से गुजरने वाली क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष पिंड का जड़त्व आघूर्ण I है तो प्रत्यानयन बल आघूर्ण $I\ \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$ के बराबर होगा। अतः गति का समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$I = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta \qquad (1.30)$$

किसी नियत अक्ष के गिर्द घूमते हुए पिंड के बल आघूर्ण और उसी अक्ष के सापेक्ष उसके कोणीय त्वरण का अनुपात उस पिंड का जड़त्व आघूर्ण होता है। यह ध्यान रखना है कि जड़त्व आघूर्ण सदैव किसी निश्चित घूर्णन अक्ष (Axis of rotation) के सापेक्ष में होता है। अर्थात् यदि घूर्णन अक्ष बदल जाएगा तो जड़त्व आघूर्ण भी बदल जाता है।

छोटे कोणीय विस्थापन के लिए $\sin\theta \simeq \theta$ और समीकरण (1.30) निम्न रूप धारण कर लेता है

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\theta = 0 \qquad (1.31)$$

यह समीकरण दर्शाता है कि पिंड लोलक सरल आवर्त्त गति करता है जिसका आवर्त्त काल,

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{I/mgl} \qquad (1.32)$$

होता है।

जड़त्व आघूर्ण के अध्ययन में एक बहुत उपयोगी और महत्वपूर्ण प्रमेय आती है — समांतर अक्षों का प्रमेय । आप इसका अध्ययन अपने प्रारंभिक यांत्रिकी पाठ्यक्रम के खंड दो की इकाई चार में करेंगे। इस प्रमेय के अनुसार, किसी अक्ष के सापेक्ष किसी पिंड के जड़त्व आघूर्ण I और उसके गुरुत्व केन्द्र से गुजरने वाली एक अन्य समांतर अक्ष के सापेक्ष उसके जड़त्व आघूर्ण I_a में निम्नलिखित संबंध होता है।

$$I = I_G + ml^2 \tag{1.33}$$

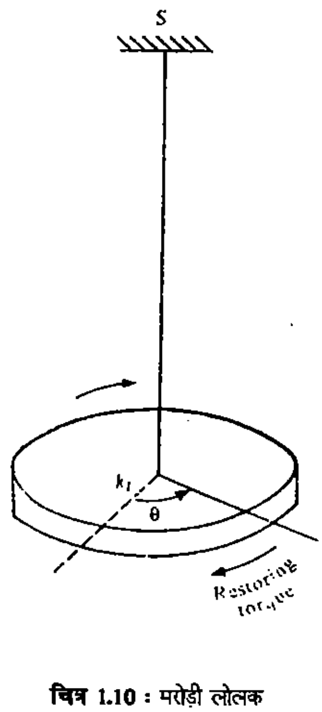
यहां पर l दोनों अक्षों के बीच की दूरी है और $I_G = mk_r^2$ राशि k_r, G से गुजरने वाली अक्ष के सापेक्ष, पिंड की परिभ्रमण त्रिज्या (Radius of Gyration) है। यह वह त्रिज्य दूरी (Radial Distance) है जहां पर पिंड की संपूर्ण संहति को रखा जा सकता है जिससे कि उस अक्ष के सापेक्ष पिंड के जड़त्व आघूर्ण में कोई परिवर्तन न आए। समीकरण (1.33) से I के व्यंजक को समीकरण (1.32) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k_r^2 + l^2}{lg}} \tag{1.34}$$

के इस व्यंजक की समीकरण (1.27) में दिए गए सरल लोलक के आवर्त्त काल से तुलना करने पर आपको ज्ञात होगा कि यदि समीकरण (1.27) में l के स्थान पर $L = (k_r^2/l) + l$ लिख दिया जाय तो दोनों आवर्त्त काल बराबर हो जायेंगे। L को तुल्यकाली सरल लोलक (Equivalent Simple Pendulum) की लम्बाई कहा जाता है। यदि हम रेखा को SG आगे बढ़ाएं और उस पर एक बिंदु O इस प्रकार नियत करें कि SO = $k_r^2/l + l$ हो तो को O दोलन केन्द्र (central of oscillation) कहा जाता है।

1.7.3 मरोड़ी निकाय (Tortional Systems)

यदि किसी लम्बे पतले तार के एक सिरे को दृढ़ आधार से कस दिया जाए दूसरे सिरे को किसी स्थूल पिंड जैसे चक्रिका (Disc) बेलन, गोला या छड़, के केन्द्र से बांध दिया जाय तो इस प्रकार के विन्यास को मरोड़ी लोलक कहा जाता है (चित्र 1.10)। आपको अपनी भौतिक प्रयोगशाला में ऐसे बहुत से यंत्र देखने को मिलेंगे जिनका संबंध मरोड़ी दोलनों से होता है। इनमें सबसे अधिक परिचित जड़त्व पटल (Inertial Table) है। सामान्य रूप से इसका प्रयोग नियमित और अनियमित आकृति वाले पिंडों के जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने के लिए किया जाता है। अन्य मापक यंत्र एमीटर, वोल्टमीटर और चल कुंडली धारामापी है। जिनमें सर्पिल कमानी या निलंबन तंतु (Suspension fibre) प्रत्यानयन बल आघूर्ण प्रदान करते हैं।



चित्र 1.10 : मरोड़ी लोलक

जब किसी मरोड़ी निकाय को ऐठन देकर मुक्त रूप से छोड़ दिया जाता है तो वह क्षैतिज तल में दोलन करने लगता है। यदि उसका कोणीय विस्थापन किसी समय θ है तो प्रत्यानयन बल आघूर्ण $-k_t\theta$ होगा।

यदि घूर्णन-अक्ष के सापेक्ष जड़त्व आघूर्ण I है और कोणीय त्वरण $d^2\theta/dt^2$ है तो गति का समीकरण को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है

$$I\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k_t\theta$$

अथवा यदि $\omega_0 = \sqrt{k_t/I}$ लिखा जाय तो यह समीकरण इस प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\,\theta = 0 \qquad (1.35)$$

इसका रूप ठीक वैसा ही है जैसा मानक समीकरण का है। अतः इसकी गति सरल आवर्त्त गति है जिसका आवर्त काल

$$T = 2\pi\sqrt{I/k_t}$$

होगा। यहां इस बात पर ध्यान दिया जाए कि T के इस व्यंजक में कोई सन्निकटन (Approximation) नहीं है। इसका तात्पर्य यह है कि दीर्घ आयामी दोलनों के लिए भी आवर्त्त काल उतना ही रहेगा बशर्ते कि निलंबन तार की प्रत्यास्थता सीमा (Elastic Limit) का उल्लंघन न किया जाए। समीकरण (1.35) का हल समीकरण है।

बोध प्रश्न 8

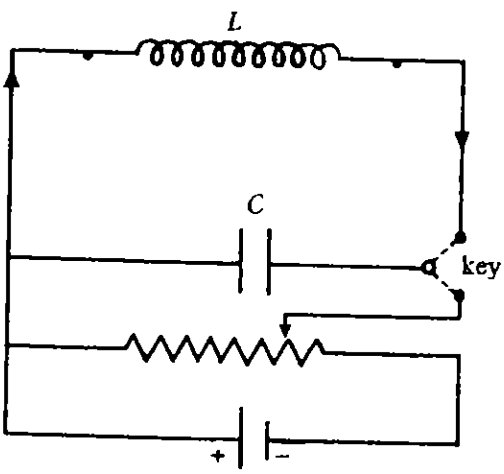
एक गोला जिसका द्रव्यमान 3 kg और त्रिज्या 0.01 m है। एक तार से लटका हुआ है। यदि तार को ऐठन देने के लिए आवश्यक बल आघूर्ण 0.04 Nm/rad हो तो गोले के दोलनों का आवर्त काल ज्ञात कीजिए ?

(एक गोले का जड़त्व आघूर्ण जिसका आघूर्ण अक्ष उसके माध्य से गुजरता है उसे हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं।) $I = 2/5\ MR^2$

1.7.4 प्रेरक-संधारित्र (Inductance-Capacitance) परिपथ

अब तक हमने यांत्रिकी निकायों के दोलनों का विवेचन किया है। अब हम चित्र 1.11 में प्रदर्शित एक आदर्श (प्रतिरोध $R= 0$), L-C परिपथ में आवेश के सरल आवर्ती दोलनों का विवेचन करेंगे। जैसा कि आप जानते हैं L-C परिपथ में कोई गतिमान अवयव नहीं होता है। लेकिन इस परिपथ में वैद्युत और चुम्बकीय ऊर्जाएं वही भूमिका निभाती हैं जो कमानी-संहति निकाय में क्रमशः स्थितिज और गतिज ऊर्जाएं निभाती हैं। आसानी के लिए हम मान लेते हैं कि प्रेरक (Inductor) का प्रतिरोध शून्य है।

एक लोलक में साम्यावस्था की स्थिति को माध्य-स्थिति (Mean Position) मान लिया जाता है। L-C परिपथ में संतुलन-अवस्था क्या होती है। यह वह अवस्था होती है जबकि परिपथ में कोई धारा नहीं बह रही होती। संधारित्र को आवेशित या विसर्जित करके इस अवस्था को बदला जा सकता है। मान लो कि संधारित्र को Q_0 कूलाम (Coulomb) आवेश दिया जाता है तो उसकी प्लेटों के बीच वोल्टता Q_0/C होती है।



चित्र 1.11 : एक आदर्श (R = 0) प्रेरक संधारित्र (L–C) परिपथ

अब यदि स्विच S को बंद कर दिया जाए तो संधारित्र प्रेरक के माध्यम से विसर्जित होता है। परिणामस्वरूप परिपथ में धारा धीरे-धीरे बढने लगती है और संधारित्र प्लेटों पर आवेश की मात्रा घटने लगती है। किसी भी समय t पर माना परिपथ में धारा I है और संधारित्र की प्लेटों पर आवेश Q है। तब प्रेरक के सिरों पर वोल्टता-पात $V_L = -L\,dI/dt$ होगा। यह उस समय संधारित्र की प्लेटों के बीच वोल्टता $V_c = Q/C$ के बराबर होता है। अतः हम लिख सकते हैं कि

$$V_c = V_L$$

अथवा $Q/C = -L\,dI/dt$ (1.36)

क्योंकि $I = dQ/dt$ और $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2Q}{dt^2}$

अतः समीकरण (1.36) इस तरह लिखा जा सकता है।

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + \omega_0^2 Q = 0 \qquad (1.37)$$

यहां $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$. इसका अर्थ यह है कि L और C में परिवर्तन कर की आवृत्तियों की एक विशाल शृंखला प्राप्त की जा सकती है। क्या आप जानते हैं कि आप अपने रेडियो सेट में विभिन्न केंद्रो को कैसे लगाते हैं। समीकरण (1.37) सरल आवर्त्त गति दर्शाता है और इसका हल यह है।

$$Q = Q_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (1.38)$$

इससे प्रकट होता है कि आवेश सरल आवर्त्ती दोलन करता है जिनका आवर्त्त काल

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (1.39)$$

होता है।

समीकरण (1.38) का संचय के सापेक्ष अवकलन करने पर हम तात्क्षणिक धारा (Instantaneous Current) प्राप्त करते हैं।

$$I = -Q_0\,\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$
$$= I_0 \cos(\omega_0 t + \phi + \pi/2)$$

यहां $I_0 = Q_0\,\omega_0$

अतः धारा की कला आवेश से $\pi/2$ आगे होती है। वास्तव में प्रत्येक LC परिपथ में कुछ न कुछ प्रतिरोध अवश्य होता है। आवेश के दोलनों पर इसके प्रभाव का विवेचन इकाई तीन में किया जायेगा।

अब हम प्रेरक L और संधारित्र C में किसी क्षण t पर संचित ऊर्जा का परिकलन करेंगे। क्योंकि धारा, समय t में शून्य से बढ़ कर I हो जाती है। अतः तात्क्षणिक शक्ति (Power) को समय के सापेक्ष समाकलित करके प्रेरक में संचित ऊर्जा, E_L को, निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है।

$$E_L = \int_0^t E_L\, I\, dt = L\int_0^t I\,\frac{dI}{dt}\,dt = \frac{1}{2}LI^2$$

समय t पर संधारित्र में संचित ऊर्जा

$$E_c = Q^2/2C$$

और सम्पूर्ण ऊर्जा,

$$E = E_L + E_C = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}Q^2/C \qquad (1.40)$$

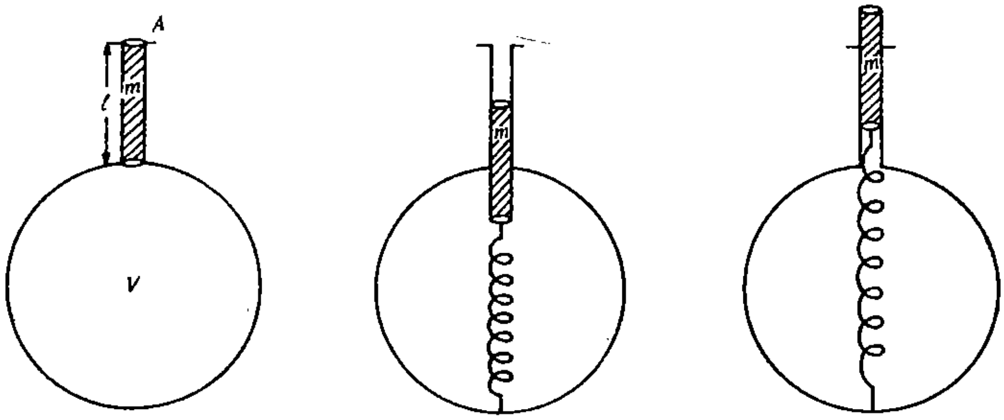
सम्पूर्ण ऊर्जा का यह व्यंजक यांत्रिक दोलित्र के संगत व्यंजक ($E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$) के समरूप है। क्योंकि Q और I समय के साथ परिवर्तित होते हैं। अतः प्रेरक और संधारित्र अक्ष में निश्चित समय अंतराल पर ऊर्जा का आदान-प्रदान करते हैं। यह कमानी संहति निकाय में ऊर्जा के आदान-प्रदान जैसा ही है। इसके अतिरिक्त संहति और प्रेरक क्रमशः यांत्रिक और वैद्युत निकायों में एक जैसी भूमिका निभाते हैं।

बोध प्रश्न 9

एक 20 mH प्रेरक को 1μF के संधारित्र के साथ जोड़ा गया है। वैद्युत दोलनों की ऊर्जा का परिकलन कीजिए ? यदि संधारित्र के सिरों के बीच अधिकतम विभवान्तर 10V हो तो दोलनों की ऊर्जा ज्ञात कीजिए ?

1.7.5 ध्वानिक दोलित्र (Acoustic Oscillator)

कल्पना करो कि आयतन V का एक फलास्क है जिसकी संकीर्ण ग्रीवा की लम्बाई l और उसके अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल A है (चित्र 1.12)। इन राशियों के परिणाम ऐसे हैं कि $V>>lA$ इस प्रकार के निकायों को हैम्होल्ज अनुनादक (Helmhotz Resonator) भी कहा जाता है। इसका कारण यह है कि जब इसके ऊपर आपत्ति ध्वनि की आवृत्ति इसकी स्वाभाविक (Natural) आवृत्ति के समतुल्य होती है तो यह निकाय अनुनाद करने लगता है। अब हम इस अनुनादक की स्वाभाविक आवृत्ति के लिए व्यंजक ज्ञात करेंगे।



चित्र 1.12 : ध्वानिक दोलित्र. (Acoustic Oscillator)

कल्पना करो कि फ्लास्क की ग्रीवा में वायु स्वच्छन्द कम्पन करती है। जब वायु ग्रीवा में प्रवेश करती है तो फ्लास्क की वायु संपीडित हो जाती है। यदि ग्रीवा की वायु बाहर निकलती है तो फ्लास्क में वायु विरलित हो जानी है। अतः ग्रीवा की वायु यांचिक दोलित्र की संहति की तरह और बल्ब की वायु कमानी की तरह व्यवहार करती है।

माना की ग्रीवा की वायु अंदर की तरफ x दूरी चलती है। अतः बल्ब की वायु के आयतन में परिवर्तन, $\Delta V = xA$ होगा। माना कि वायुमंडल के दाब के अतिरिक्त दाब में वृद्धि Δp है। हम जानते हैं कि किसी गैस का आयतन उसके दाब और तापक्रम, दोनों पर, निर्भर करता है। अतः ध्वनि-कम्पनों में दाब-प्रविर्तनों के कारण फ्लास्क की वायु बारी-बारी से गर्म व ठण्डी हो जानी चाहिए। इसका कारण यह है कि वायु संपीडित व विरलित होती रहती है। मान लो कि दाब में परिवर्तन इतनी शीघ्रता से होते हैं कि उष्मा का आदान-प्रदान नहीं हो पाता है। अर्थात् यह प्रक्रिया-रुद्धोष्म (Adiabatic) होती है। अतः इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं कि

$$\Delta p = -E_r \frac{\Delta V}{V} = -E_r \frac{Ax}{V} \tag{1.41}$$

यहां पर E_r गैस की रुद्धोष्म प्रत्यास्थता (Adiabatic Elasticity) है। इसे प्रतिबल (Stress) और विकृति (Strain) के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है और इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$E_r = \frac{-\Delta p}{\Delta V/V}$$

यहां पर ऋणात्मक चिन्ह इस तथ्य को दर्शाता है कि जैसे-जैसे दाब बढ़ता है, आयतन घटता जाता है अथवा इसके विपरीत यदि आयतन घटता है तो दाब बढ़ता है। माना कि बल्ब के अंदर की वायु का दाब p है और यह प्रत्यानयन बल F प्रदान करता है। जिसकी दिशा ऊपर की तरफ होती है। अतः हम इसे निम्न प्रकार से लिख सकते हैं

$$F = A\,\Delta P = -\frac{E_r A^2}{V}x$$

यदि वायु का घनत्व ρ है तो ग्रीवा में वायु की संहति $m=lA\rho$ होगी। अतः ग्रीवा की वायु की गति का समीकरण इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$lA\rho\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{E_rA^2}{V}x$$

अथवा

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{E_rA}{Vl\rho}x=0 \tag{1.42}$$

इस समीकरण का रूप वही है जो मानक सरल आवर्त्ती दोलनों के समीकरण का है। अतः फ्लास्क कीं ग्रीवा सरल आवर्त्ति गति करती है जिसकी आवृत्ति

$$\nu_0=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{E_rA}{Vl\rho}}=\frac{v}{2\pi}\sqrt{\frac{A}{Vl}} \tag{1.43}$$

होती है। यहां $v=\sqrt{E_r/\rho}$ ध्वनि का वायु में वेग है। हम जानते हैं कि v_1, $T^{1/2}$ के अनुक्रमानुपाती होती है, अतः फ्लास्क की वायु के कपंनों की आवृत्ति भी $T^{1/2}$ के अनुक्रमानुपाती होगी।

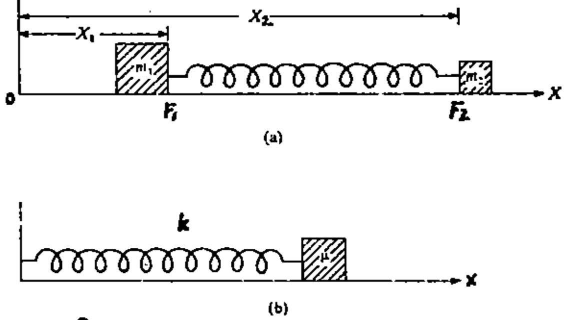
बोध प्रश्न 10

एक फ्लास्क की ग्रीवा की त्रिज्या 1 सें.मी. और लम्बाई 10 सें.मी है। यदि फ्लास्क की धारिता 2 लीटर हो तो वह आवृत्ति ज्ञात करो जिस पर यह निकाय अनुनाद करने लगेगा (वायु में ध्वनि की गति = 350 ms^{-1})।

1.7.6 द्विपरमाणुक अणु : द्विपिंडी दोलन

द्विपरमाणुक अणु, उदाहरणार्थ HCl का अणु, एक द्विपिंड निकाय (Two Body System) का उदाहरण है। यह दोनों परमाणुओं को जोड़ने वाली रेखा के समांतर दोलन कर सकता है। द्विपरमाणुक अणु के परमाणु स्थिर-वैद्युत स्रोत वाले बलों से जुड़े रहते हैं। उनके बीच के आबंधन (Bonding) को कमानी के तुल्य माना जा सकता है। इस प्रकार द्विपरमाणुक अणु को हम एक कमानी द्वारा जुड़ी हुई दो संहतियों का एक निकाय मान सकते हैं। अब हम इन निकाय के दोलनों पर विचार करेंगे।

कल्पना करो कि बल-स्थिरांक k वाली कमानी द्वारा दो संहतियों —m_1 और m_2 को जोड़ दिया गया है। ये संहतियां कमानी की अक्ष की दिशा में दोलन करने के लिए बाध्य है (चित्र 1.13)।



चित्र 1.13 : क) द्वि-पिंड दोलित्र, ख) तुल्य एक-पिंड दोलित्र।

माना कि कमानी की सामान्य लम्बाई r_0 है। और दोनो संहतियों को मिलाने वाली रेखा x-अक्ष है। यदि किसी समय t पर कमानी के दोनो सिरों के निर्देशांक (Co-ordinate) x_1 और x_2 हैं तो लम्बाई में परिवर्तन

$$x=(x_2-x_1)-r_0 \tag{1.44}$$

होगा। $x>0$, $x=0$ और $x<0$ होने पर कमानी क्रमशः विस्तृत सामान्य तथा संपीड़ित होगी। माना कि किसी नियत क्षण पर कमानी विस्तृत है, अर्थात् $x>0$ है। कमानी दोनों संहतियों पर समान परिमाण का बल kx लगा रही है, परंतु m_1 पर लगने वाला बल $F_1\ (=kx)$, m_2 लगने वाले बल F_2 के विपरीत होता है अतः

$$F_1=kx \text{ और } F_2=-kx$$

न्यूटन के गति के द्वितीय नियम के अनुसार, उपर्युक्त समीकरण निम्न प्रकार लिखे जा सकते हैं

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2}=kx \quad \text{तथा}\ m\frac{d^2x_2}{dt^2}=-kx$$

अथवा $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{kx}{m_1}$ (1.45 क)

तथा $\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\frac{kx}{m_2}$ (1.45 ख)

समीकरण (1.45 ख) को समीकरण (1.45 क) में घटाने पर

$$\frac{d^2 (x_2 - x_1)}{dt^2} = -\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) kx$$

क्योंकि r_0 कमानी की निश्चित लम्बाई को प्रदर्शित करती है। अतः समीकरण (1.44) से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 (x_2 - x_1)}{dt^2}$$

इस प्रकार द्विपरमाणुक अणु की गति का समीकरण इस रूप में परिवर्तित हो जाता है

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{\mu} x = 0 \quad (1.46)$$

यहां पर $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ निकाय को समानीत (reduced) द्रव्यमान कहा जाता है।

समीकरण (1.46) की आवृत्ति,

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{k/m} \quad (1.47)$$

वाले सरल आवर्त्ती दोलनों का निरूपण करता है।

इसका अर्थ यह हुआ कि द्विपरमाणुक अणु, बल-स्थिरांक k वाली कमानी से सम्बद्ध, द्रव्यमान μ वाली एक अकेली वस्तु के समान व्यवहार करता है।

बोध प्रश्न 11

A HCl के लिए $r_0 = 13$ A है। बल स्थिरांक और दोलनों की आवृत्ति का मान बताइये जबकि $m_1 = 1.67 \times 10^{-27}$ kg और $m_2 = 35 m_1$ हो।

$$\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 \text{ Nm}^2\right)$$

1.8 सारांश

1. **सरल आवर्त्त गति :** कोई दोलन गति सरल आवर्त्त गति तब कहलाती है जबकि त्वरण, विस्थापन के अनुक्रमानुपाती होता है और सदैव उसके विपरीत दिशा में लगता है। हम यह भी कह सकते हैं कि सरल आवर्त्त गति में प्रत्यानयन बल विस्थापन के रैखिक (Linearly) अनुक्रमानुपाती होता है और उसके विपरीत लगता है।

2. सरल आवर्त्त गति का अवकल समीकरण यह है $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ यहां पर $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

3. सरल आवर्त्त गति के अवकल समीकरण का सर्वाधिक व्यापक हल यह है :

   $x = a \cos(\omega_0 t + \phi)$

4. सरल आवर्त्त गति का निरूपण करने वाले आवर्त्त काल एवं आवर्त्त क्रमशः इन संबंधों से दर्शाए जाते हैं

   $T = \frac{2\pi}{\omega_0}, \nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T}$

5. दोलन की सम्पूर्ण ऊर्जा

   $E = U + K.E.$

$$= \frac{1}{2} ka^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2} ka^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2} ka^2 = \frac{1}{2} m V_{max}^2$$

गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा के काल माध्य (Time Average) समतुल्य होते हैं और प्रत्येक $\frac{1}{4} ka^2$ के बराबर होता है।

अनुरूपताओं (Analogies) की तालिका

निकाय	अवकल समीकरण	जड़त्वीय गुणांक	कमानी गुणांक	ω_0	दोलन का आवर्त्त काल
कमानी संहति निकाय	$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	m	k	$\sqrt{k/m}$	$2\pi\sqrt{m/k}$
सरल लोलक	$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$	m	$\frac{mg}{l}$	$\sqrt{g/l}$	$2\pi\sqrt{l/g}$
पिंड लोलक मरोड़ी लोलक	$I\ddot{\theta} + mgl\,\theta = 0$	I	mgl	$\sqrt{mgl/I}$	$2\pi\sqrt{I/mgl}$
L-C परिपथ	$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0$	L	$\frac{1}{C}$	$\sqrt{1/LC}$	$2\pi\sqrt{LC}$
ध्वानिक अनुनाद	$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$l\rho$	$\frac{E_r A}{V}$	$\sqrt{\frac{E_r A}{Vl\rho}}$	$2\pi\sqrt{\frac{Vl\rho}{E_r A}}$
द्विपिंडी दोलित्र	$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$	$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$	k	$\sqrt{\frac{k}{\mu}}$	$2\pi\sqrt{\mu/k}$

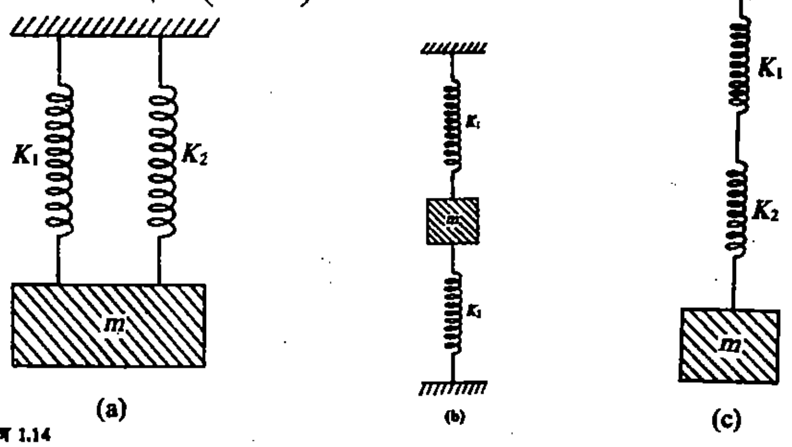
1.9 अंत में कुछ प्रश्न

1. बल-स्थिरांकों k_1 और k_2 वाली दो कमानियों के तीन संयोजन, चित्र क, ख और ग में दिए गए हैं। दर्शाइए कि इन दशाओं में आवर्त्त काल क्रमशः निम्न होंगे।

क) $2\pi\sqrt{m/(k_1+k_2)}$

ख) $2\pi\sqrt{m/(k_1+k_2)}$

ग) $2\pi\sqrt{m\left(\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}\right)}$



चित्र 1.14

2. पृथ्वी के अंदर उसके व्यास की दिशा में एक चिकनी (Smooth) सुरंग खोदी गयी है और इसमें एक गेंद गिरा दी जाती है। दर्शाओ की गेंद सरल आवर्त्त गति करेगी जिसका आवर्त काल $T = 2\pi\sqrt{R/g}$ होगा। यहां R पृथ्वी की त्रिज्या और g पृथ्वी की सतह पर गुरूत्व त्वरण है। मान लो कि पृथ्वी एक सयान घनत्व वाला संभाग (Homogenly) गोला है।

3. यदि संतुलन-स्थिति से दूरी x_1 और x_2 पर एक कण के वेग क्रमशः v_1 और v_2 हैं तो उसके सरल आवर्ती दोलनों की कोणीय आवृत्ति और आयाम ज्ञात करो।

4. दर्शाओ की दण्ड लोलक (Bar Pendulum) के आलंबन (Suspension) और दोलन केन्द्र परस्पर विनिमेय होते हैं।

5. एक द्विपरमाणविक अणु की स्थितिज ऊर्जा, जब इसके परमाणुओं के बीच की दूरी r है निम्न प्रकार लिखी जाती है

$$U(r) = -\frac{e^2}{4\pi r\varepsilon_0} + \frac{c}{r^9}$$

प्रथम पद आकर्षण वाले भाग को और द्वितीय पद प्रतिकर्षी भाग को बतलाता है। दर्शाओ कि बल-स्थिरांक $2e^2/\pi\varepsilon_0 r_0^3$ होगा, यहां पर संतुलन पार्थक्य (Equilibrium Separation) है।

1.10 हल/उत्तर

बोध प्रश्न

1. बलस्थिरांक, $k = \dfrac{\text{बल}}{\text{विस्थापन}} = \dfrac{2.0\,\text{N}}{5.0\times10^{-2}\,\text{m}} = 40\,\text{Nm}^{-1}$

संपीड़ित बल-स्थिरांक $= \text{बल} / \text{बल-स्थिराँक} = \dfrac{2.5\,\text{N}}{40\,\text{N m}^{-1}}$

$= .0625\,m = 6.25\,\text{cm}$

2. समीकरण (1.4) में $A_1 = B\sin\theta$ और $A_2 = B\cos\theta$ रखने पर हम यह प्राप्त करते हैं $x(t) = B\sin(2t+\theta)$ क्योंकि $\sin(A+B) = \sin A\cos B + \cos A\sin B$ समय $t = 0$, पर $x(0) = B\sin\theta$, अतः B, a के बराबर तभी होगा, जब $\theta = \pi/2$ हो। इसलिए प्रारंभिक प्रतिबंध यह हुआ $t = 0$ पर, $\theta = \pi/2$ और $x(0) = a$

3. क) $x = a\sin(\omega_0 t + \phi)$

$t = 0$ पर

(i) $x = a = a\sin\phi$ अर्थात् $\sin\phi = 1$ अथवा $\phi = \pi/2$

(ii) $x = -a = a\sin\phi$ अर्थात् $\sin\phi = -1$ अथवा $\phi = -\pi/2$

(iii) $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = a\sin\phi$ अर्थात् $\sin\phi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ अथवा $\phi = \pi/4$

ख) $x = a\cos(\omega_0 t + \phi)$

$t = 0$ पर

(i) $x = a = a\cos\phi_1$ अर्थात् $\cos\phi = 1$ अथवा $\phi = 0$

(ii) $x = -a = a\cos\phi$ अर्थात् $\cos\phi = -1$ अथवा $\phi = \pi$

(iii) $x = a/\sqrt{2} = a\cos\phi$ अर्थात् $\cos\phi = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ अथवा $\phi = \pi/4$

4. $x = 0.01\cos 4\pi(t + .0625)$

इसकी तुलना मानक समीकरण

$x = a\cos(\omega_0 t + \phi)$

से करने पर

(i) आयाम $a = .01$ मीटर

(ii) आवर्त्त काल $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5\ s$

अधिकतम गति $= a\ \omega_0 = .01 \times 4\pi = .125\ ms^{-1}$

अधिकतम त्वरण $= a\ \omega_0^2 = .01 \times (4\pi)^2 = 1.570\ ms^{-2}$

$t = 0$ पर विस्थापन $x_0 = .01 \cos (4\pi \times .0625)$

$= .01 \cos \pi/4 = .01 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$= 7.1 \times 10^{-3}\ m$

5. $U, K.E.$ और E के समय के साथ विचरण के ग्राफ चित्र 1.6 में दिखलाए गए हैं।

क्योंकि

$$U\left(t + \frac{\pi}{\omega_0}\right) = \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 [\omega_0 (t + \pi/\omega_0) + \phi]$$

$$= \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 (\omega_0 t + \phi + \pi)$$

$$= \frac{1}{2} ka^2 \cos^2 (\omega_0 t + \phi)$$

$$= U(t)$$

इसका मतलब है कि स्थितिज ऊर्जा के दोलनों का आवर्त्त काल π/ω_0 है कम्पनों के आवर्त्त काल का आधा।

इसी प्रकार आप दिखला सकते हैं कि गतिज उर्जा के दोलनों का आवर्त्त काल π/ω_0 है। अर्थात् इसका अर्थ है कि प्रत्येक चक्र (cycle) में ऊर्जा की एक निश्चित मात्रा संहति से कमानी की ओर पुनः वापस कमानी से संहति को दो बार स्थानांतरित हो जाती है।

6. स्थितिज ऊर्जा $= mgh$

अधिकतम गतिज उर्जा $= \frac{1}{2} k\, a^2$ इन दोनों को समतुल्य करके हम दोलन आयाम का परिकलन कर लेते हैं। अर्थात् $\frac{1}{2} ka^2 = mgh$

अथवा $a = \sqrt{2mgh/k}$

7. $E = K.E + U = mgl\,(1 - \cos\theta) + \frac{1}{2} m\,(l\dot{\theta})^2$

अतः

$$\dot{\theta} = \left[\frac{2}{ml^2}\,\{E - mgl\,(1 - \cos\theta)\}\right]^{1/2}$$

8. $T = 2\pi \sqrt{I / k_t}$; k_t कोणीय विस्थापन उत्पन्न करने वाला बल आघूर्ण है।

एक गोले के लिए $I = \left(\frac{2}{5}\right) m R^2$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2\,mR^2}{5k_t}} = 2\pi \sqrt{\frac{2 \times 3 \times (.01)^2}{5 \times .04}}$$

$= .344\ s$

9. $\nu_0 = \frac{1}{2\pi \sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi \sqrt{20 \times 10^{-3} \times 10^{-6}}} = 1125\ Hz$

$$E = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \times 10^{-6} \times 10^2 = 5 \times 10^{-5} \text{ जूल}$$

10. $$\nu_0 = \frac{4}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{Vl}} = \frac{350}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi \times (0.01)^2}{2 \times 10^{-3} \times 10 \times 10^{-2}}}$$

क्योंकि $V = 2$ लीटर = 2000 घन सें.मी.

$= 2000 \times (10^{-2})^3$ मी.^{3}

$= 2 \times 10^{-3}$ मी.^{3}

$= 2 \times 10^{-3}$ मी.^{3}

अतः $\nu_0 = 69.8$ हर्ज (Hz)

यदि इसी आकार के एक फ्लास्क की कॉर्क को अचानक खोल दिया जाय तो लगभग इतनी ही आवृत्ति का एक श्रव्य स्वर (Audible note) सुना जा सकता है।

11. $$k = \frac{2e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2 \times (1.6 \times 10^{-19})^2 \times 9 \times 10^9}{(1.3 \times 10^{-10})^3}$$

$= 209.74 \text{ Nm}^{-1}$

क्योंकि

$$M = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{35 \times 1.67 \times 10^{-27}}{36}$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{\mu}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{209.74 \times 36}{35 \times 1.67 \times 10^{-27}}}$$

$$= 5.7 \times 10^{13} \text{ Hz}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. क) इस विन्यास में, दोनों कमानियों की लंबाई में समान वृद्धि x होगी। प्रत्यानयन बल,

$$F = -k_1 x - k_2 x$$

अतः

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2) x = 0$$

आवर्त्त काल $T = 2\pi \sqrt{m/(k_1 + k_2)}$

ख) इस विन्यास में, यदि संहति का विस्थापन बांयी और दांयी ओर x हो तो प्रत्यानयन बल ये होंगे,

$F_1 = -k_1 x$ और $F_2 = -k_2 x$

सम्पूर्ण प्रत्यानय बल,

$$F = -k_1 x - k_2 x$$

अर्थात्

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2) x = 0$$

और आवर्त्त काल

$$T = 2\pi \sqrt{m/(k_1 + k_2)}$$

ग) इस विन्यास में दोनों कमानियां श्रेणी क्रम में जुड़ी हैं। यदि संहति को x विस्थापन दिया जाय तो कमानियों में एक ही प्रत्यानयन बल लगेगा, परंतु बल स्थिरांक भिन्न होने के कारण उनमें विस्तार x_1 और x_2 होंगे। इस प्रकार

$$F = -k_1 x_1 = -k_2 x_2$$

$$x = x_1 + x_2 = -F/k_1 - F/k_2$$

अर्थात् $x = -\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) F$

अथवा $F = -\frac{1}{\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)} x$

अतः आवर्त्त काल

$$T = 2\pi \sqrt{m\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)}$$

2. पृथ्वी की सतह पर किसी संहति m पर लगने वाला बल,

$$mg = \frac{GmM}{R^2} \quad \text{अर्थात्}\ g = \frac{GM}{R^2} \qquad \text{(अ 1)}$$

यदि पृथ्वी को त्रिज्या R और एक समान घनत्व ρ वाल गोला मान लिया जाय तो $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$

$$\text{अतः}\ g = \frac{4}{3} \ \frac{\pi R^3 \rho G}{R^2} = \frac{4}{3}\pi R \rho G \qquad \text{(अ 2)}$$

यदि पृथ्वी की सतह के नीचे गहराई पर गुरूत्व त्वरण g' हो तो,

$$g' = \frac{4}{3} \pi (R-d) \rho G \qquad \text{(अ 3)}$$

सभी (अ 3) को समीकरण (अ 2) से विभाजित करने पर

$$g'/g = \frac{R-d}{R} \qquad \text{(अ 4)}$$

यदि हम दूरी को पृथ्वी के केन्द्र से मापें तो $R - d = x$ मान सकते हैं। तब समीकरण (अ 4) को हम इस तरह लिख सकते हैं

$$g' = -\frac{g}{R} x$$

यहां ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता है कि त्वरण पृथ्वी के केन्द्र की तरफ लगाता है। इस प्रकार,

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{g}{R} x = 0$$

यह समीकरण एक सरल आवृत्त गति को दर्शाता है जिसका आवर्त्त काल, $T = 2\pi \sqrt{R/g}$ है।

3. $x = a \cos(\omega_0 t + \phi)$

$$v = \frac{dx}{dt} = -a\ \omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi)$$

$$v = -a\ \omega_0 \sqrt{1 - x^2/a^2}$$

अतः हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{v_1}{a\omega_0} = -\sqrt{1 - x_1^2/a^2}$$

और,

$$\frac{v_2}{a\omega_0} = -\sqrt{1 - x_2^2/a^2}$$

इन समीकरणों का वर्ग करने पर,

$$\left(\frac{v_1}{a\,\omega_0}\right)^2 = 1 - x_1^2/a^2$$

और

$$\left(\frac{v_2}{a\,\omega_0}\right)^2 = 1 - x_2^2/a^2$$

इन समीकरणों को उचित रूप से समायोजित करके हम यह प्राप्त कर सकते हैं —

$$\omega_0 = \sqrt{(v_1^2 - v_2^2)/(x_2^2 - x_1^2)}$$

समीकरण (1) में इस परिणाम का प्रयोग करने पर, हम प्राप्त करेंगे,

$$a = \sqrt{\frac{v_1^2\, x_2^2 - v_2^2\, x_1^2}{v_1^2 - v_1^2}}$$

4. आवर्त्त काल $T = 2\pi\sqrt{\frac{(k_r^2/l) + l}{g}}$

जब लोलक को दोलन केन्द्र से निलम्बित करते हैं तो माना कि उसका आवर्त्त काल T' है। दोलन केन्द्र और गुरुत्व केन्द्र के बीच की दूरी

$l' = k_r^2/l$ अर्थात् $k_r^2 = l'$

अब

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{k_r^2/l + l'}{g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{l + k_r^2/l}{g}} = T$$

अर्थात् आलम्बन केन्द्र और दोलन केन्द्र के सापेक्ष आवर्त्त काल बराबर होते हैं। पिंड लोलक के इस गुणधर्म (Property) को आलम्बन केन्द्र और दोलन केन्द्र की पारस्परिक विनिमेयता कहा जाता है।

अतः आलम्बन और दोलन केन्द्र की पारस्परिक विनिमेयता का स्रोत यह तथ्य है कि S और O के सापेक्ष दोलनों का आवर्त्त काल समान होता है। रेखा SS′ पर कुल मिलाकर चार बिंदु (S, O, O′, S′) ऐसे हैं जिनके सापेक्ष दोलनों का आवर्त्त काल समान होता है। (यहां (S′,O′ इस पकार निर्धारित किए जाते हैं जिससे GS = GS′ और GO=GO′) ।

5. $U(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{c}{r^9}$

$$F = -\frac{dU}{dr} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\;\frac{1}{r^2} - \frac{9c}{r^{10}}$$

साम्यावस्था में, पार्थक्य $r = r_0$ होने पर, बल का अस्तित्व ही समाप्त हो जाता है। अर्थात्

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{1}{r_0^2} - \frac{9c}{r_0^{10}} = 0$$

अथवा

$$c = \frac{e^2 r_0^8}{36\pi\,\varepsilon_0}$$

अब

$$\left.\frac{d^2U}{dr^2}\right|_{r=r_0} = \left.\frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{r^3}\right|_{r=r_0} + \left.\frac{90c}{r^{11}}\right|_{r=r_0}$$

$$= -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2}{r_0^3} + \frac{90}{r_0^3}\cdot\frac{e^2}{36\pi\,\varepsilon_0}$$

$$= 2e^2/\pi\,\varepsilon_0 r_0^3$$

जो कि धनात्मक है, अतः स्थायी साम्यावस्था में पार्थक्य $r = r_0$ होता है। बल-स्थिरांक,

$k = \dfrac{2e^2}{\pi\varepsilon_0 r_0^3}$ होता है।

शब्दावली

• अध्यारोपण	Superposition
• अनुक्रमानुपाती	Proportional
• अवकलजों	Derivatives
• आबंधन	Bonding
• आलंबन	Suspension
• एक विमीय	One Dimensional
• एकांक	Unit
• कम्पन गति	Vibratory Motion
• कमानी-संहति निकाय	Spring-mass System
• कालिक माध्य	Time Average
• कूलाम	Coulomb
• गुणधर्मों	Properties
• गोलक	Bob
• गुणधर्मों	Properties
• चक्र	Cycle
• चक्रिका	Disc
• चमक	Brightness
• चर	Variable
• जड़त्व पटल	Inertial Table
• तात्क्षणिक धारा	Instantaneous current
• तात्क्षणिक वेग	Instantaneous Velocity
• तानना	Stretched
• तुल्यकाली सरल लोलक	Equivalent Simple Peudulum

- द्वितीय क्रम — Second Order
  दोलन केन्द्र — Centre of Oscillation
- द्विपिंड निकाय — Two Body System
- दुर्भ्यता गुणांक — Stiffness Constant
- दोलित्र — Oscillator
- दोलन गति — Oscillatory Motion
- दण्ड लोलक — Bar Pendulum
- ध्वानिक दोलित्र निकायो — Acoustic Oscillator Systems
- निर्देशांक — Co-Ordinate
- निलंबन तंतु — Suspension fibre
- पखलयिक — Parabolic
- प्रिभ्रमण त्रिज्या — Radius of Gyration
- प्रक्रिया-रुद्घोष्मा — Adiabatic
- प्रतिबल — Stress
- प्रेरक — Inductor
- परिपथ — Circuit
- प्रारंभिक प्रतिबंधों — Given Initial Conditions
- प्रारंभिक कैलकुलस — Elementary Calculus
- प्रत्यास्थता — Elasticity
- प्रतिलोभी — Inverted
- प्रेरक — Inductor
- प्रेरक संधारित्र — Inductance-capacitance
- प्रत्यास्थता सीमा — Elastic limit
- पिंड लोलक — Compound Peudulum
- बल-आघूर्ण — Moment of Inertia
- माध्य-स्थिति — Mean Position
- मूल मानक — Criteria
- रूप — Form
- रुद्घोष्म प्रत्यास्थता — Adiabatic Elasticity
- रैखिक — Linear
- रैखिकतः — Linearly
- रैखीय संयोजन — Linear combination
- विकृति — Strain

• वर्तन-बिंदु	Turning Point
• समरूपता	Similarity
• समय-विचरण	Time Variation
• संनादी	Harmonic
• संपीड़ित	Compressed
• साम्यावस्था	Equilibrium
• स्वतंत्र	Independent
• सरल लोलक	Simple pendulum
• संतुलन पार्थक्य	Equilibrium Seperation
• समानीत	reduced
• शक्ति	Power
• सन्निकटन	Approximation
• हलों	Solutions
• हैमहोल्जअनुनादक	Helmholz Resonator
• श्रव्य स्वर	Audible note
• त्रिज्य दूरी	Radial distance

इकाई 2 सरल आवर्त्त दोलन का अध्यारोपण

इकाई की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, हमने सरल आवर्त्त गति का अध्ययन किया है और इससे संबंधित भौतिकी विषय की विभिन्न शाखाओं के अनेक उदाहरण पर विचार किया है। वहां हमने यह देखा है कि प्रत्येक स्थिति में गति द्वितीय कोटि के समधान अवकल समीकरण से नियंत्रित होती है (समीकरण 1.3)। इस समीकरण के हल से पिंड के विस्थापन से संबंधित जानकारी हमें समय के एक फलन के रूप में प्राप्त हो जाती है।

ऐसी अनेक स्थितियां आती हैं जहां हमें दो या अधिक सरल आवर्त्त गतियों के संयोजन पर विचार करना होता है । उदाहरण के लिए क्या आप यह जानते हैं कि हमारे कान के पर्दे आवर्त्ती कंपनों के जटिल संयोजन के अन्तर्गत कंपित होते हैं ? इसका परिणामी प्रभाव अध्यारोपण-नियम से प्राप्त होता है।

आपने यह अवश्य देखा होगा कि दोलन करते हुए गोलक को यदि छोड़ दिया जाए तो उसका दोलन धीरे-धीरे रूक जाता है। ऐसा घर्षण और वायु-प्रतिरोध के कारण होता है। इस प्रक्रिया के दौरान तंत्र की ऊर्जा में कमी आती है और तब यह कहा जाता है कि इसकी गति अवमंदित हो गई है। अगली इकाई में हम अवमंदित आवर्त्ती दोलनों के बारे में चर्चा करेंगे।

इस इकाई में पहले हम अध्यारोपण-सिद्धांत पर चर्चा करेंगे और इसके बाद हम यह सीखेंगे कि इस नियम को उन स्थितियों पर किस प्रकार लागू किया जाता है जहां दो (या अधिक) आवर्त्ती दोलन समान रेखा के अनुदिश या लांबिक दिशा में अध्यारोपित होते हैं।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप :

- अध्यारोपण-सिद्धांत का कथन दे सकेंगे,
- अध्यारोपण-सिद्धांत को समान रेखा के अनुदिश (क) समान आवृत्ति और (ख) अलग-अलग आवृत्तियों वाले दो आवर्त्ती दोलनों पर लागू कर सकेंगे,
- अनेक सरल आवर्त्ती दोलनों के अध्यारोपण के लिए सदिश योग और संमिश्र संख्याओं की विधियों के प्रयोग कर सकें, और
- अध्यारोपण-नियम को अलग-अलग आवृत्तियों/कलाओं वाले दो पारस्परिक लांबिक आवर्त्ती दोलनों पर लागू कर सकेंगे और लिसाजू की आकृतियों का वर्णन कर सकेंगे।

2.2 अध्यारोपण-नियम (Principle of Superposition)

हम जानते हैं कि जब सरल लोलक (Simple Pendulum) थोड़े आयाम का दोलन कर रहा होता है तो उस समय वह सरल आवर्त्त गति (Simple Harmonic Motion) में होता है। आइए अब हम इस गति पर फिर से विचार करें। मान लीजिए जब गोलक (Bob) का प्रारंभिक विस्थापन a_1 है तो उसे समय $t = 0$ पर छोड़ दिया जाता है। मान लीजिए समय-अंतराल t पर इसका विस्थापन (Displacement) x_1 होता है। इस प्रयोग को हम प्रारंभिक विस्थापन a_2 लेकर फिर से करें। मान लीजिए समान समय-अंतराल t के बाद विस्थापन x_2 हो जाता है। अब, यदि हम पहले दो विस्थापनों के योग अर्थात् $a_1 + a_2$ को प्रारंभिक विस्थापन मान लें तो अध्यारोपण-नियम के अनुसार समान समय-अंतराल t के बाद विस्थापन x_3 निम्न होगा :

$$x_3 = x_1 + x_2$$

आप इस कार्यकलाप को ठीक एक ही प्रकार के तीन सरल लोलक लेकर कर सकते हैं। तीनों लोलकों को एक साथ छोड़िए कि उनके प्रारंभिक वेग शून्य हों और पहले, दूसरे और तीसरे लोलक के विस्थापन क्रमशः a_1, a_2 और $a_1 + a_2$ हों। आप देखेंगे कि समय t पर तीसरे लोलक का विस्थापन a_3 अन्य दो लोलकों के विस्थापनों का बीजीय योग है। सामान्यतः प्रारंभिक वेग शून्य नहीं भी हो सकता। अतः अध्यारोपण-नियम का सिद्धान्त निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है :

यदि हम वेग और आयाम (Amplitude) के संगत प्रारंभिक प्रतिबंधों को अध्यारोपित करें तो दो (या अधिक) आवर्त्ती विस्थापनों का परिणामी विस्थापन सभी अनुवर्ती समयों पर अलग-अलग विस्थापनों का बीजीय योग होगा।

अब आप यह देखेंगे कि सरल आवर्त्ती दोलन चाहें कितने ही क्यों न हों, अध्यारोपण-नियम उन सभी पर लागू होता है। ये दोलन समान या परस्पर लांबिक दिशाओं में अर्थात् दो विभाओं (Dimensions) में हो सकते हैं।

इकाई 1 में हमने यह देखा है कि समीकरण (1.3) एक सरल आवर्त्त गति निर्धारित करता है :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \tag{2.1}$$

यह द्वितीय कोटि का एक रैखिक समघात समीकरण है।

इस प्रकार के समीकरण का एक महत्वपूर्ण गुणधर्म यह होता है कि इसके दो हलों का योग स्वयं एक हल होता है। इस गुणधर्म का प्रयोग हम इकाई 1 में समीकरण (1.4) को लिखते समय कर चुके हैं।

मान लीजिए $x_1(t)$ और $x_2(t)$ क्रमशः समीकरण (2.1) को सन्तुष्ट करते है तब

$$\frac{d^2 x_1}{dt^2} = -\omega_0^2 x_1 \tag{2.2}$$

और

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} = -\omega_0^2 x_2 \tag{2.3}$$

को संतुष्ट करते हैं।

समीकरण (2.2) और (2.3) को जोड़ने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$\frac{d^2 (x_1 + x_2)}{dt^2} = -\omega_0^2 (x_1 + x_2) \tag{2.4}$$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार दो विस्थापनों का योग, निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) \tag{2.5}$$

समीकरण (2.5) भी समीकरण (2.1) को संतुष्ट करता है। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि दो विस्थापनों का अध्यारोपण उसी रैखिक-समघात अवकल समीकरण को संतुष्ट करता है। जिसे x_1 और x_2 ने अलग-अलग संतुष्ट किया है।

बोध प्रश्न 1

हम जानते हैं कि सरल लोलक का गति-समीकरण निम्नलिखित होता है :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\omega_0^2 \sin\theta$$

यदि इस समीकरण में $\sin\theta$ के स्थान पर उसका प्रसार अर्थात्

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{\lfloor 3} + \frac{\theta^5}{\lfloor 5} - \frac{\theta^7}{\lfloor 7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

लिखें तो क्या यह तब भी θ में रैखिक होगा ? यदि आप प्रसार के केवल पहले दो पदों को लें और दो विस्थापनों θ_1 और θ_2 के लिए परिणामी समीकरण लें, तो क्या इस पर अध्यारोपण-नियम लागू किया जा सकता है ? यदि नहीं, तो क्यों ?

आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सरल लोलक के लिए हम केवल लघु दोलन, अर्थात् जब $\sin\theta \simeq \theta$ हो, तब ही अध्यारोपण-नियम लागू कर सकते हैं। यहां हम केवल उन्हीं दोलनों के बारे में अध्ययन करेंगे जिनके विस्थापन रैखिक समघात अवकल समीकरणों को संतुष्ट करते हों और इसीलिए ये अध्यारोपण-सिद्धांत को भी संतुष्ट करते हैं।

2.3 एक ही रेखा के अनुदिश समान आवृत्ति वाले दो आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

आइए अब हम आयाम a_1 और a_2 वाले ऐसे दो सरेखी (एक ही रेखा के अनुदिश) आवर्ती दोलनों को अध्यारोपित करें जिनकी आवृत्ति ω_0 है और कलांतर π इन दोलनों के विस्थापन निम्नलिखित होंगे :

$$x_1 = a_1 \cos\omega_0 t \tag{2.6}$$

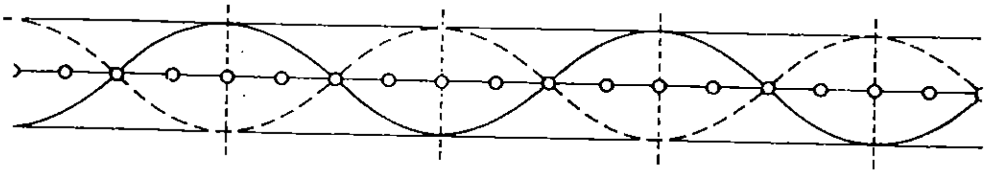
और

$$x_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \pi)$$
$$= -a_2 \cos\omega_0 t \tag{2.7}$$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार परिणामी विस्थापन (Resultant Displacement) यह होगा :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$
$$= a_1 \cos\omega_0 t - a_2 \cos\omega_0 t$$
$$= (a_1 - a_2)\cos\omega_0 t \tag{2.8}$$

यह आयाम $(a_1 - a_2)$ वाली एक सरल आवर्त्त गति को निरूपित करता है। विशेष स्थिति में, यदि आयाम बराबर हों अर्थात् $a_1 = a_2$ तो सभी समयों पर परिणामी विस्थापन शून्य होगा। इस स्थिति को निरूपित करने वाले विस्थापन-समय ग्राफ को चित्र 2.1 में दिखाया गया है।



चित्र 2.1 : समान आयाम पर विपरीत कलाओं वाले दो आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

बोध प्रश्न 2

आयाम a_1 और a_2 वाले दो आवर्ती दोलन की समान आवृत्ति है और वे एक ही कला में हैं। दिखाइए कि इनके अध्यारोपण से आयाम $a_1 + a_2$ वाला एक आवर्ती दोलन प्राप्त होता है।

अब हम दो आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण की व्यापक स्थिति पर विचार करेंगे। मान लीजिए इनमें से एक दोलन आयाम a_1 और कला ϕ_1 वाला है। और दूसरा दोलन आयाम a_2 और कला ϕ_2 वाला है। दोनों दोलन की आवृत्ति ω_0 है और वे सरेख (Co-linear) हैं अर्थात् एक ही रेखा में हैं। तब, हम यह लिख सकते हैं कि—

$$x_1(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) \tag{2.9}$$

और

$$x_2(t) = a_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2) \tag{2.10}$$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार परिणामी विस्थापन x_1 और x_2 का योग होता है और

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = a_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$$

$\cos(A + B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$

दो कोण के योग के कोसाइन के व्यंजक का प्रयोग करके इसे निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है—

$x(t) = a_1 \cos \omega_0 t \cos \phi_1 - a_1 \sin \omega_0 t \sin \phi_1 + a_2 \cos \omega_0 t \cos \phi_2 - a_2 \sin \omega_0 t \sin \phi_2$.

ऊपर वाले समीकरण में $\cos \omega_0 t$ और $\sin \omega_0 t$ के गुणांकों को इकट्ठा कर लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है—

$$x(t) = (a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2) \cos \omega_0 t - (a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2) \sin \omega_0 t \qquad (2.1$$

क्योंकि a_1, a_2, ϕ_1 और ϕ_2 अचर हैं, इसलिए हम ऐसा मान सकते हैं कि

$$a \cos \phi = a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi_2 \tag{2.12}$$

$$a \sin \phi = a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi_2 \tag{2.13}$$

जहाँ a और ϕ के मान ज्ञात करना है। तब, समीकरण (2.11) को हम निम्न रूप में लिख सकते हैं —

$$x(t) = a \cos \phi \cos \omega_0 t - a \sin \phi \sin \omega_0 t$$

यह दो कोणों के अंतर के कोसाइन के रूप का है, अतः इसे —

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi) \tag{2.14}$$

के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

यह समीकरण भी उसी रूप का है जो कि अलग-अलग आवर्ती दोलन के मूल समीकरण का था। अतः हमें यह महत्वपूर्ण परिणाम प्राप्त होता है : *समान आवृत्ति वाले दो सरेख आवर्ती दोलनों का योगफल भी समान रेखा के अनुदिश के समान आवृत्ति वाला एक आवर्ती दोलन होता है।* पर इसका एक नया आयाम a और एक कला नियंताक θ है। समीकरण (2.12) और समीकरण (2.13) को वर्ग करके और परिणामी व्यंजकों को जोड़कर आयाम आसानी से ज्ञात किया जा सकता है। सरल करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है —

$$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \tag{2.15}$$

इसी प्रकार, समीकरण (2.13) को समीकरण (2.12) से भाग देने पर कला θ प्राप्त हो जाती है

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_1 \sin \phi_1 + a_2 \sin \phi}{a_1 \cos \phi_1 + a_2 \cos \phi}\right) \tag{2.16}$$

बोध प्रश्न 3

दो आवर्ती दोलनों की कलाएं निम्नलिखित हैं —

(क) $\phi_1 - \phi_2 = 2n\pi$

और

(ख) $\phi_1 - \phi_2 = (2n + 1)\pi$

जहां n एक पूर्णांक है, समीकरण (2.15) की सहायता से यह दिखाइए कि परिणामी दोलनों के आयाम क्रमशः $(a_1 + a_2)$ और $(a_2 - a_2)$ हैं।

बोध प्रश्न 4

आवृत्ति ω_0 वाले दो आवर्त्ती दोलन, जिनका आयाम 1 सें॰मी॰ है और प्रारंभिक कलाएं क्रमशः 0 और $\pi/2$ हैं, अध्यारोपित हैं। परिणामी कंपन का आयाम और कला ज्ञात कीजिए।

2.4 अलग-अलग आवृत्तियों वाले दो सरेख आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

अनेक स्थितियों में हमें अलग-अलग कोणीय आवृत्तियों वाले दो या अधिक आवर्त्ती दोलनों के अध्यारोपण के बारे में जानकारी प्राप्त करनी होती है। उदाहरण के लिए माइक्रोफोन के डायग्राम और मनुष्य के कान के पर्दे पर एक साथ विभिन्न कंपन दिए जाते हैं। सरलता के लिए पहले हम थोड़ा अलग-अलग आवृत्तियों ω_1 और ω_2 जहाँ $\omega_1 > \omega_2$ और समान आयाम वाले दो आवर्त्ती दोलनों के अध्यारोपण पर विचार करेंगे।

$$x_1 = a\cos\,(\omega_1 t + \phi_1)$$

और

$$x_2 = a\cos\,(\omega_2 t + \phi_2)$$

यहाँ, इन दो आवर्त्ती कंपनों के बीच कलांतर (Phase Difference) यह है —

$$\phi = (\omega_1 - \omega_2)\,t + (\phi_1 - \phi_2)$$

पहले पद अर्थात् $(\omega_1 - \omega_2)\,t$ में समय के साथ लगातार परिवर्तन होता रहता है, जबकि दूसरा पद अर्थात् $(\phi_1 - \phi_2)$ समय के साथ अचर रहता है और इसलिए यहाँ उसकी कोई विशेष भूमिका नहीं होती। अतः हम यह मान सकते हैं कि दो दोलनों की प्रारंभिक कला शून्य है। तब दो आवर्ती दोलनों को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है —

$$x_1(t) = a\cos\omega_1 t$$

और

$$x_2(t) = a\cos\omega_2 t \qquad (2.17)$$

दो दोलनों के अध्यारोपण से निम्नलिखित परिणामी प्राप्त होता है —

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t) = a\,(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) \qquad (2.18)$$

(C + D) सूत्र का प्रयोग करके इस समीकरण को एक विशेष सरल रूप में लिखा जा सकता है —

$$x(t) = 2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\,\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t \qquad (2.19)$$

$$\cos C + \cos D = 2\cos\frac{C+D}{2}\cos\frac{C-D}{2}$$

यह कोणीय आवृत्ति $\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{t}\right)$ और आयाम $2a\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t$ वाली एक दोलायमान गति है।

आइए अब हम मान लें कि औसत कोणीय आवृत्ति

$$\omega_{av} = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2} \qquad (2.20\text{ क})$$

है और माडुलित कोणीय आवृत्ति

$$\omega_{mod} = \frac{(\omega_1 - \omega_2)}{2} \qquad (2.20\text{ ख})$$

तब हम यह पाते हैं कि माडुलित आयाम

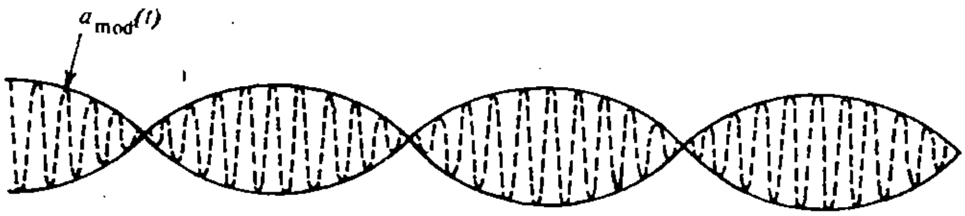
$$a_{mod}(t) = 2a \cos 2\,\omega_{mod}\, t \qquad (2.20\ \text{ग})$$

आवृत्ति $\frac{\omega_{mod}}{2\pi} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{4\pi}$ के अनुसार बदलता रहता है।

इससे यह भी पता चलता है कि एक पूर्ण चक्र में माडुलित आयाम $\omega_{mod}(t) = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ और 2π के लिए माडुलित आयाम के मान क्रमशः $2a, 0, -2a, 0$ और $2a$ हैं। परिणामी दोलन को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है —

$$x(t) = a_{mod}(t) \cos \omega_{av} t \qquad (2.21)$$

यह समीकरण सरल आवर्त्त गति के समीकरण से मिलता-जुलता है। क्या यह समीकरण सरल आवर्त्त गति को निरूपित करता है ? इसका उत्तर है नहीं, क्योंकि इसके आयाम में समय के साथ परिवर्तन होता रहता है।



चित्र 2.2 : अलग-अलग आवृत्तियों वाले दो सरेख आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

अलग-अलग आवृत्तियों वाले दो सरेख आवर्त्ती दोलनों के परिणामी को दर्शाने वाला विस्थापन समय ग्राफ चित्र 2.2 में दिखाया गया है। यहाँ आप देखेंगे कि प्रत्येक दोलन स्वयं में तो आवर्त्ती है पर उनके अध्यारोपण में समय के साथ परिवर्तन होता रहता है, अतः यह आवर्त्ती तो है पर सरल आवर्त्त गति में नहीं है।

व्यापक स्थिति में हम a_1 और a_2 आयामों तथा ω_1 और ω_2 आवृत्तियों वाले दो आवर्त्ती दोलन लेते हैं। यदि उनकी प्रारंभिक कलाएँ शून्य हो, तो परिणामी दोलन को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है —

$$x(t) = a_{mod}(t) \cos(\omega_{av} t + \theta_{mod}) \qquad (2.22)$$

माडुलित आयाम और कला क्रमशः निम्नलिखित हैं —

$$a_{mod}(t) = [a_1 + a_2 + 2a_1 a_2 \cos(2\,\omega_{mod}\, t)]^{1/2} \qquad (2.23)$$

और

$$\theta_{mod} = \frac{(a_1 - a_2) \sin \theta_{mod}\, t}{(a_1 + a_2) \cos \theta_{mod}\, t} \qquad (2.24)$$

आप देख सकते हैं कि यदि $a_1 = a_2$ हो तो $a_{mod}(t)$ का व्यंजक समीकरण (2.20 ग) हो जाता है। यदि ω_1 और ω_2 लगभग बराबर हों, तो ω_{mod}, ω_{av} से काफी कम होगा और माडुलित आयाम में समय के साथ बहुत थोड़ा परिवर्तन होगा। अर्थात् $\omega_{mod} \leq \omega_{av}$ के लिए $a_{mod}(t)$ को आवर्त्त $2\pi/\omega_{av}$ पर अनिवार्यतः अचर माना जा सकता है। इस स्थिति में समीकरण कोणीय आवृत्ति ω_{av} वाले एक लगभग आवर्त्ती दोलन को निरूपित करेगा।

परिणामी गति का आयाम तब अधिकतम ($= a_1 + a_2$) होता है जबकि

$\cos 2\,\omega_{mod}\, t = +1$

या $2\,\omega_{mod}\, t = 0, 2\pi, 4\pi.......2n\pi \quad n = 0, 1, 2.....$

या $(\omega_1 - \omega_2)t = 0, 2\pi, ...2n\pi \quad n = 0, 1, 2.....$

या $$t = 0, \frac{1}{(v_1 - v_2)}, \frac{3}{(v_1 - v_2)}, ..., \frac{n}{(v_1 - v_2)} \qquad (2.25)$$

जहाँ $\nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$ और $\nu_2 = \frac{\omega_2}{2\pi}$ दो आवृत्त दोलनों की आवृत्तियाँ हैं।

इसी प्रकार, आप यह देखेंगे कि परिणामी दोलन का आयाम तब निम्नतम ($= a_1 - a_2$) होता है जबकि

$\cos 2\,\omega_{mod}\, t = -1$

या जबकि

$$t = \frac{1}{2(\nu_1 - \nu_2)}, \frac{3}{2(\nu_1 - \nu_2)}, \frac{5}{2(\nu_1 - \nu_2)} \qquad (2.26)$$

2.5 समान आवृत्ति वाले अनेक आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

पिछले भाग में हम दो सरेख आवर्त्ती दोलनों के अध्यारोपण के बारे में चर्चा कर चुके हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि हम किस प्रकार अनेक आवर्त्ती दोलनों का परिणामी प्राप्त करेंगे ? संभवतः आपका विचार यह हो सकता है कि भाग 2·3 में बताई गई प्रक्रिया को यहाँ भी लागू कर देना एक विधि हो सकती है। पर हम यह पाते हैं कि सरल होने के बावजूद भी गणितीय विश्लेषण अपर्याप्त रहता है। ऐसी स्थिति में एक सुविधाजनक विधि सदिश विश्लेषण (Vector Analysis) या संमिश्र संख्या (Complex Analysis) विधि को लागू करना है।

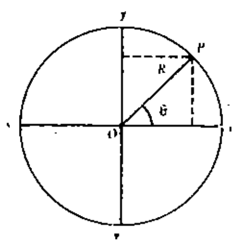
2.5.1 सदिश योग की विधि

यह विधि इस तथ्य पर आधारित है कि आवर्त्ती दोलन का विस्थापन वृत्त के व्यास पर एक समान वृत्तीय गति का प्रक्षेप (Projection) होता है।

सरल आवर्त्त गति और एक समान वर्तीय गति

इसे समझने के लिए आइए हम यह मान लें कि एक कण अचर चाल θ से एक वृत्त में गतिमान है (चित्र 2.3), वृत्त के केन्द्र और परिधि पर कण की स्थिति को मिलाने वाली ध्रुवांतर रेखा (Radius Vector) अचर कोणीय आवृत्ति से घूर्णन करेगी। हम $t = 0$ पर ध्रुवांतर रेखा की दिशा को x- अक्ष मान लेते हैं। तब समय t पर x- अक्ष के साथ ध्रुवांतर रेखा द्वारा बनाया गया कोण यह होगा —

$$\theta = \frac{\text{चाप की लम्बाई}}{\text{वृत की त्रिज्या}} = \frac{vt}{R}$$



चित्र 2.3: एक समान वृत्तीय गति और सरल आवर्त्त गति

समय t पर कण की स्थिति के x-घटक और y- घटक ये होंगे

$$x = R\cos\theta$$

और

$$y = R\sin\theta$$

इस तरह, $\dfrac{dx}{dt} = -R\sin\theta.\dfrac{d\theta}{dt}$

$$= -\omega_0 R\ \sin\theta.$$

क्योंकि $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega_0 = \dfrac{v}{R}$

इसी प्रकार,

$$\frac{dy}{dt} = R\cos\theta\ .\ \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \omega_0 R\ \ \cos\theta$$

इन्हें समय के सापेक्ष पुनः अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है —

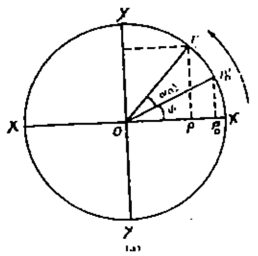
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x \qquad (2.27\text{ क})$$

और

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\omega_0^2\, y \qquad (2.27\text{ ख})$$

इन व्यंजकों को देखने से यह पता चलता है कि जब कण एक वृत्त में एक-समान गति से गतिमान होता है तो x– अक्ष और y– अक्ष के अनुदिश इसके प्रक्षेप सरल आवर्त्त गति में दोलित होते हैं। दूसरे शब्दों में, *हम यह कह सकते हैं कि एक सरल आवर्त्त गति को एक निर्देश अक्ष (Reference Axis) पर एक-समान रूप से घूर्णन कर रहे सदिश का प्रक्षेप माना जा सकता है।*

मान लीजिए सदिश **OP′** जहाँ $|\mathbf{OP'}| = a_0$ कोणीय आवृत्ति ω_0 से एक वामावर्त दिशा (Anticlockwise Direction) में घूर्णन कर रहा है, जैसाकि चित्र 2.4 में दिखाया गया है। मान लीजिए P′ बिन्दु से x- अक्ष पर डाले गए लंब का पाद-बिन्दु है, इसलिए तब $|\mathbf{OP'}| = x$, x- अक्ष पर **OP′** का प्रक्षेप होगा। और क्योंकि सदिश **OP′** अचर चाल से घूर्णन करता है, इसलिए बिन्दु P, x- अक्ष के अनुदिश सरल आवर्त्त गति में दोलन करेगा। इस दोलन का आवर्त्त काल (Period) घूर्णन कर रहे सदिश **OP′** के आवर्त्त काल के बराबर होगा। मान लीजिए $\mathbf{OP'_0}$ घूर्णन कर रहे सदिश की प्रारंभिक स्थिति है। x- अक्ष पर इसका प्रक्षेप $\mathbf{OP_0}$, $a_0\cos\phi$ है (चित्र 2.4क)। यदि समय t में घूर्णन कर रहा यह सदिश $\mathbf{OP'_0}$ से हटकर **OP′** पर आ जाता है, तो $\angle\mathbf{P'OP'_0} = \omega_0 t$ और $\angle\mathbf{P'OX} = (\omega_0 t + \phi)$



चित्र 2.4 : (क) वृत्त के व्यासों के अनुदिश घूर्णन कर रहे सदिश के प्रक्षेप

अतः

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OP'}\ \cos\ \angle\mathbf{P'OX}$$

या $\qquad x = a_0\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (2.28\text{ क})$

इस तरह हम यह पाते हैं कि बिन्दु **P**, x- अक्ष के अनुदिश एक सरल आवर्त्त गति में दोलन करता है।

यदि आप OP' को y- अक्ष पर प्रक्षिप्त करें तो आप पाएंगे कि अभिलंब के पाद-बिन्दु का संगत बिन्दु निम्नलिखित समीकरण को संतुष्ट करता है —

$$y = a_0 \sin(\omega_0 t + \phi) \quad (2.28\ \text{ख})$$

इससे यह अर्थ निकलता है कि सामान्यतः एक घूर्णन कर रहे सदिश को दो लांबिक घटकों (Original Components) में नियोजित किया जा सकता है और अब हम इसे इस प्रकार लिख सकते हैं —

$$\mathbf{r} = x\,\mathbf{x} + y\,\mathbf{y} \quad (2.29)$$

जहाँ **x** और **y** क्रमशः x– अक्ष और y– अक्ष के अनुदिश एकक सदिश (Unit Vector) हैं।

सदिश योग

आइए अब हम समान आयाम a_0 और समान कोणीय आवृत्ति ω_0 वाले n आवर्ती दोलनों के अध्यारोपण पर विचार करें। उत्तरोत्तर दोलनों की प्रारंभिक कलाओं में ϕ_0 का अंतर है। मान लीजिए इन दोलनों में से पहले दोलन का समीकरण यह है —

$$x_1(t) = a_0 \cos \omega_0 t$$

तब अन्य दोलनों के समीकरण ये होंगे —

$$x_2(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$x_3(t) = a_0 \cos(\omega_0 t + 2\phi_0)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

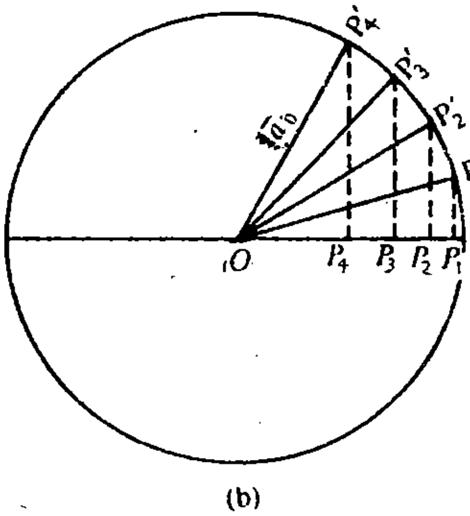
$$x_n(t) = a_0 \cos[\omega_0 t + (n-1)\phi_0] \quad (2.30)$$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार परिणामी दोलन का समीकरण यह होगा —

$$x(t) = a_0[\cos \omega_0 t + \cos(\omega_0 t + \phi_0) + \cos(\omega_0 t + 2\phi_0) + \dots\dots\dots + \cos\{\omega_0 t + (n-1)\phi_0\}] \quad (2.31)$$

आइए अब हम समीकरण (2.31) में दिए गए आवर्ती दोलन को घूर्णन कर रहे सदिश OP_1, OP_2, OP_3, के प्रक्षेप से प्रकट करें (चित्र 2.4 ख)।

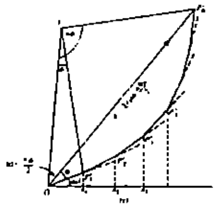
जब किसी सदिश राशि को उसके समान्तर दूसरी जगह हटाया जाता है, तब इस सदिश राशि पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।



चित्र 2.4 : (ख) घूर्णन कर रहे सदिश OP_1', OP_2', OP_3' का प्रक्षेप

इन सदिशों का परिणामी प्राप्त करने के लिए इन्हें स्वयं के समांतर इस तरह स्थानांतरित करते है कि पहले सदिश का शीर्ष दूसरे सदिश के पुच्छ के साथ संपाती हो, आदि। ऐसा करने पर आप यह पाएंगे कि —

(i) सदिशों को इस तरह जोड़ने पर ये सदिश n- भुजा वाले एक अपूर्ण बहुभुज की उत्तरोत्तर भुजाएं होते हैं (चित्र 2.4 ग)।



(ग) समान आयाम और उत्तरोतर दोलनों के बीच नियत कलांतर ϕ_0 वाले N– आवर्ती दोलनों का अध्यारोपण

(ii) $OP_1 \parallel OP_1'$, $P_1'P_2' \parallel OP_2'$, $P_2'P_3' \parallel OP'_3$ आदि, आदि।

आइए अब हम इनमें से प्रत्येक सदिश को x-अक्ष के अनुदिश प्रक्षिप्त करें। तब,

$$x_1 = \text{प्रक्षेप } (OP_1')_x = a_0 \cos \omega_0 t$$

$$x_2 = \text{प्रक्षेप } (P_1'P_2')_x = a_0 \cos (\omega_0 t + \phi_0)$$

$$x_3 = \text{प्रक्षेप } (P_2'P_3')_x = a_0 \cos (\omega_0 t + 2\phi_0)$$

$$\vdots$$

$$x_n = \text{प्रक्षेप } (P_{n-1}'P_n') = a_0 \cos\{\omega_0 t + (n-1)\phi_0\}$$

सदिश योग-नियम से यह पता चलता है कि OP_1', $P_1'P_2'$, $P_2'P_3'$, का परिणामी सदिश OP'_n है, अर्थात्

$$OP_n' = OP_1' + P_1'P_2' + P_2'P_3' + ... + P_{n-1}'P_n'$$

इस तरह,

प्रक्षेप $(OP_n')_x$ = प्रक्षेप $(OP_1')_x$ + प्रक्षेप $(P_1'P_2')_x$ + ...

या $\quad x = x_1 + x_2 + ...$

मान लीजिए OP'_n की लंबाई a है और प्रथम सदिश के सापेक्ष इसकी कला ϕ है। तब x- अक्ष के अनुदिश OP_n का प्रक्षेप यह निम्न होगा —

$$x(t) = \text{प्रक्षेप } (OP_n')x = a \cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (2.32)$$

एक वृत्त अनन्त समान भुजाओं वाला बहुभुज है।

इस तरह हम यह पाते हैं कि समीकरण (2.31) में दिए गए योग का अर्थ है परिणामी सदिश OP'_n को अभिलक्षित करने वाले a और ϕ के मान ज्ञात करना। हम जानते हैं कि एक वृत्त के अंतर्गत एक समबहुभुज (Regular Polygon) खींचा जा सकता है। अतः इस बहुभुज के शीर्ष त्रिज्या r वाले वृत्त पर स्थित होंगे जैसाकि चित्र 2.4 ख में दिखाया गया है। अलग-अलग सदिशों द्वारा वृत्त के केन्द्र C पर अंतरित किया गया कोण ϕ_0 के बराबर होगा। अतः परिणामी सदिश OP'_n द्वारा केन्द्र C पर अंतरित किया गया संपूर्ण कोण $n\phi_0$ होगा। त्रिभुज OCP'_n से हम यह पाते हैं कि

$$a = \sqrt{2r^2 - 2r^2 \cos n\phi_0}$$

त्रिकोणमितीय संबंध $\cos 2\phi = 1 - 2\sin^2\phi$ का प्रयोग करने और परिणामी व्यंजक को सरल करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$a = 2r \sin (n\phi_0/2) \qquad (2.33\text{ क})$$

इसी प्रकार हम यह दिखा सकते हैं कि

$$a_0 = 2r \sin \phi_0/2 \qquad (2.33\text{ ख})$$

समीकरण (2.33 (क)) और समीकरण (2.33 (ख)) को एक साथ लेकर हम यह लिख सकते हैं —

$$a = a_0 \frac{\sin n\,\phi_0/2}{\sin \phi_0/2} \tag{2.34}$$

प्रथम दोलन के सापेक्ष परिणामी दोलन का कलांतर ϕ यह होगा —

$$\phi = \underline{|COP_1'} - \underline{|COP_n'} \tag{2.35}$$

समद्विबाहु त्रिभुज COP_1 में

$$\underline{|OCP_1'} = \phi_0 \text{ और } \underline{|OP_1'C} = \pi/2$$

क्योंकि त्रिभुज के कोणों का जोड़ π के बराबर होता है,

$$\therefore \underline{|COP_1'} = \pi - \underline{|OP_1'C} - \underline{|OCP_1'}$$

$$= \pi - \frac{\pi}{2} - \phi_0$$

$$= \frac{\pi}{2} - \phi_0 \tag{2.36 क}$$

इसी प्रकार, समद्विबाहु त्रिभुज COP_n' में $\underline{|OCP_n} = n\,\phi_0$

और $\underline{|COP_n'} = \underline{|CP_n'O}$

इसलिए $2\,\underline{|COP_n'} = \pi - n\,\phi_0$

या $\underline{|COP_0'} = \pi/2 - n\,\phi_0/2$ (2.36 ख)

अतः समीकरण (2.35) और समीकरण (2.36) को एक साथ लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$\phi = (\pi/2 - \phi_0) - (\pi/2 - n\,\phi_0/2) = (n-1)\,\phi_0/2 \tag{2.37}$$

अर्थात्, परिणामी दोलन की प्रारंभिक कला n वें और प्रथम ध्रुवांतर रेखाओं (दोलनों) के कलांतर के आधे के बराबर होता है। अतः

$$a_0 \frac{\sin (n\,\phi_0/2)}{\sin (\phi_0/2)} \cos \left[\omega_0 t + (n-1)\frac{\phi_0}{2}\right] \tag{2.38}$$

अगले उप-भाग में हम इस परिणाम को संमिश्र संख्याओं की विधि लागू करके प्राप्त करेंगे। फिलहाल, आइए हम समीकरण (2.38) से परिभाषित परिणामी दोलन के आयाम के बारे में विचार करें :

$$a = a_0 \frac{\sin n\,\phi_0/2}{\sin \phi_0/2}$$

यहां आप यह पाते हैं कि a का मान ϕ_0 के मान पर निर्भर करता है। जब a बहुत बड़ा होता है तो ϕ बहुत छोटा हो जाता है। तब समीकरण (2.37) का प्रयोग करके हम यह लिख सकते हैं —

$$\phi = (n-1)\,\phi_0/2 \simeq \frac{n\,\phi_0}{2}$$

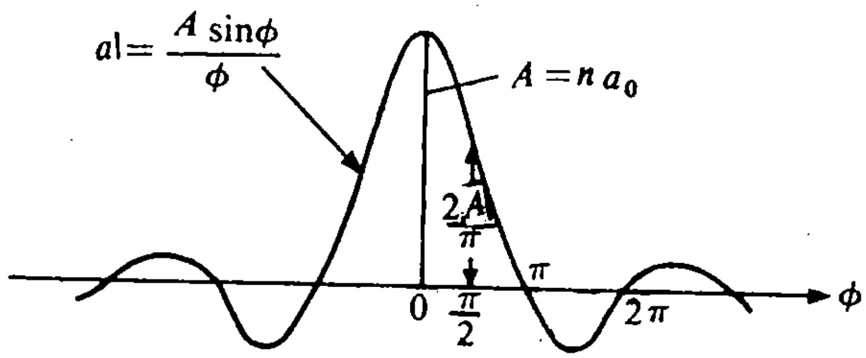
जिससे कि $\sin \phi_0/2 \rightarrow \dfrac{\phi_0}{2} \simeq \dfrac{\phi}{n}$

अतः वृहत् की सीमा में

$$a = a_0 \frac{\sin \phi}{\frac{\phi}{n}} = n\,a_0 \frac{\sin \phi}{\phi}$$

$$= A \frac{\sin \phi}{\phi}$$

अर्थात् बहुभुज उस वृत्त के एक माप के रूप का हो जाता है जिसका केन्द्र O पर है और लंबाई $n\,a_0 = A$ जहां a जीवा है। चित्र 2.5 में $\sin\phi/\phi$ और ϕ के बीच व्यवहार को दिखाया गया है।



चित्र 2.5: $A\,\frac{\sin\phi}{\phi}$ और ϕ का आलेख

यह प्रतिरूप $\phi = 0$ के प्रति सममित है और शून्य होता है जब ($\phi \to 0$ को छोड़कर) $\sin\phi = 0$ हो। जब $\phi_0 = 0$ और n दोलनों (सदिशों) का परिणामी, लंबाई A वाली एक सरल रेखा होती है। ϕ_0 के मान में वृद्धि होने पर $\phi = \pi/_2$ पर A वृत्त का चाप हो जाता है, जब तक अंतिम और प्रथम दोलन कला में नहीं होते। और चाप A एक अर्धवृत्त बन जाता है। जिसका व्यास परिणामी a होता है। कोण ϕ में और अधिक वृद्धि होने पर लंबाई A शुन्य परिणामी वाले वृत्त ($\theta = \pi$) की परिधि के बराबर हो जाती है, आदि।

बोध प्रश्न 5

$x_1 = 4\cos 2\pi t$, $x_2 = 4\cos(2\pi t + \pi/3)$

$x_3 = 4\cos\left(2\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$ से नियमित तीन सरेख आवर्ती दोलन अध्यारोपित हैं। परिणामी कंपन का आयाम और कला ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

2.5.2 संमिश्र संख्याओं की विधि

पिछले भाग में हमने अध्यारोपित आवर्ती दोलनों का परिणामी प्राप्त करने के लिए सदिश योग की ज्यामितीय विधि का प्रयोग किया था। इसी परिणाम को संमिश्र संख्याओं की विधि लागू करके एक अति सुविधाजनक और संक्षिप्त रूप में हम प्राप्त कर सकते हैं। इस विधि का जैसे-जैसे अध्ययन करते जाएंगे, आप पाएंगे कि समिश्र संख्याओं के प्रयोग से गणितीय परिकलन काफी सरल हो जाता है। हम जानते हैं कि संमिश्र संख्या संकेतन पद्धति में सदिश को $z = a\exp[i(\omega_0 t + \phi)]$ के रूप में निरूपित किया जा सकता है जहाँ संमिश्र चारघातांकों की $\exp(i\,\theta)$ निम्न होती है —

$$\exp(i\theta) = \cos\theta + i\sin\theta$$

जिससे कि $\cos\theta = \text{Re}\,[\exp(i\theta)]$

और $\sin\theta = \text{Im}\,[\exp(i\theta)]$

आइए अब हम यह देखें कि किस प्रकार संमिश्र संख्याओं की इस विधि का प्रयोग समीकरण (2.30) द्वारा दिए गए n आवर्ती दोलनों का परिणामी प्राप्त करने में किया जाता है। संमिश्र चरघातांकों की संकेतन पद्धति में हम निम्नलिखित लिख सकते हैं –

$$z_1 = a_0 \exp(i\,\omega_0 t)$$

$$z_2 = a_0 \exp[i(\omega_0 t + \phi)]$$

$$z_3 = a_0 \exp[i(\omega_0 t + 2\phi_0)] \qquad (2.40)$$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार परिणामी यह होता है –

$$z = a_0 e^{i\omega_0 t} + a_0 e^{i(\omega_0 t + \phi_0)} + \ldots\ldots\ldots + a_0 e^{i(\omega_0 t + (n-1)\phi_0}$$

$$= a\, e^{i\omega_0 t}\,[1 + e^{i\phi_0} + e^{2i\phi_0} + \ldots\ldots + e^{i(n-1)\phi_0}]$$

यह श्रेणी गुणोत्तर श्रेणी है जिसका सार्व अनुपात $e^{i\phi_0}$ है। इसका योग यह होता है–

$$z = a_0 \exp(i\,\omega_0 t)\,\frac{1 - e^{in\phi_0}}{1 - e^{i\phi_0}} \qquad (2.41)$$

$$= a_0 \exp(i\omega_0 t)\,\frac{e^{in\phi_0/2}\,(e^{-i\phi_0 n/2} - e^{in\phi_0/2})}{e^{i\phi_0/2}\,(e^{-i\phi_0/2} - e^{i\phi_0/2})}$$

संबंध $\sin\theta = \dfrac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2}$ का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$z = a_0 \exp(i\omega_0 t)\,\frac{\sin n\phi_0/2}{\sin\phi_0/2}\; e^{in\phi_0/2}\, e^{-i\phi_0/2}$$

$$= a_0 \exp(i\omega_0 t)\,\frac{\sin(n\phi_0/2)}{\sin\phi_0/2}\; e^{i(n-1)\phi_0/2}$$

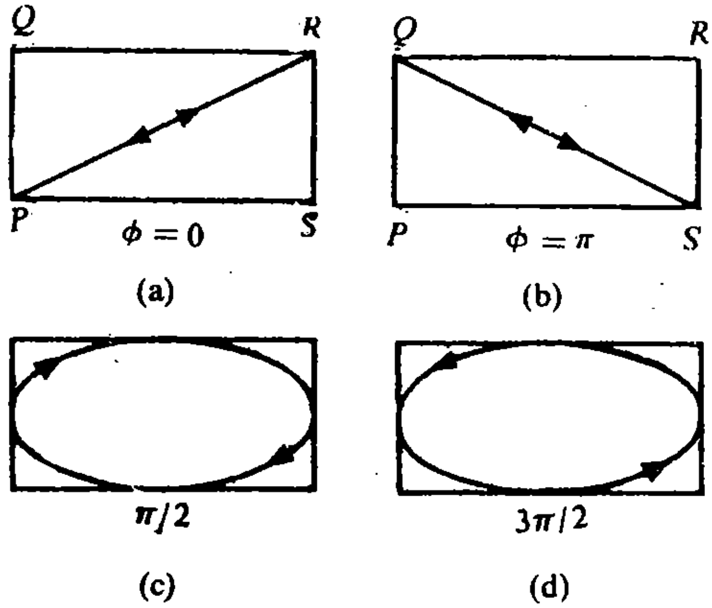
क्योंकि $z = a\exp[i(\omega_0 t + \phi)$ इसलिए परिणामी कंपन के आयाम और कला वही होंगे जो कि क्रमशः समीकरण 2.34 और समीकरण 2.37 में दिए गए हैं।

परिणामी दोलन का कोसाइन रूप समीकरण 2.42 के वास्तविक भाग लेकर प्राप्त किया जाता है।

2.6 दो विभाओं में दोलन

अभी तक हमने अपनी चर्चा एक नियम में हो रहे आवर्ती दोलन तक ही सीमित रखी थी। पर, दोलायमान गति दो विभाओं में भी हो सकती है। सरल लोलक की गति इसका एक सुपरिचित उदाहरण है जिसमें गोलक x–y समतल में किसी भी दिशा में घूमने के लिए मुक्त होता है। इस विन्यास को हम *गोलीय लोलक* (Spherical Pendulum) कहते हैं। इसमें हम लोलक को x दिशा में विस्थापित करते हैं और जब उसे छोड़ते हैं तब हम उसे y दिशा में एक आवेग (Impulse) प्रदान करते हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि जब यह लोलक दोलन करता है तब क्या होता है ? परिणाम एक संयुक्त गति होता है जिसका अधिकतम विस्थापन तब होता है जब y- विस्थापन शून्य हो और y- वेग अधिकतम हो। इसका विलोम भी सही होता है। हम जानते हैं कि लोलक का आवर्त काल गुरुत्व-त्वरण (Acceleration due to Gravity) और वृत्त खंड को जोड़ने वाली रेखा त्रिज्या की लंबाई पर निर्भर करता है, अतः अध्यारोपित सरल आवर्त्त गति की आवृत्ति समान

होती है। परिणाम एक वक्र पथ होता है जो सामान्यतः दीर्घवृत्त होता है (चित्र 2.6)।



चित्र 2.6 : समान आवृत्ति वाले दो परस्पर लांबिक आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण जब कलांतर (क) $\phi = 0$, (ख) $\phi = \pi$ (ग) $\phi = \pi/2$ (घ) $\phi = 3\pi/2$ हो

अब हम अध्यारोपण-नियम को उस स्थिति में लागू करेंगे जहाँ दो आवर्त्ती दोलन परस्पर लंब होते हैं।

2.6.1 समान आवृत्ति वाले दो परस्पर लांबिक आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

आयाम a_1 और a_2 जहाँ $a_1 < a_2$ और कोणीय आवृत्ति ω_0 वाले दो परस्पर लांबिक दोलन लीजिए। इन्हें निम्नलिखित समीकरण के रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$x = a_1 \cos \omega_0 t \tag{2.43}$$

और $$y = a_2 \cos (\omega_0 t + \phi) \tag{2.44}$$

यहाँ x- अक्ष और y- अक्ष के अनुदिश प्रारंभिक कलाएं क्रमशः 0 और ϕ हैं। अर्थात् दो कंपनों के बीच का कलांतर ϕ है।

पहले हम कलांतर ϕ के कुछ विशेष मानों के लिए परिणामी दोलन प्राप्त करेंगे।

स्थिति I : $\phi = 0$ या π

क्योंकि $\phi = 0$ पर

$$x = a_1 \cos \omega_0 t$$

और $$y = a_2 \cos \omega_0 t \tag{2.45}$$

इसलिए $\dfrac{y}{x} = \dfrac{a_2}{a_1}$

या $$y = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)x$$

एक सरल रेखा की समीकरण $y = mx+c$ है। जहाँ m रेखा की प्रवणता है और C रेखा की y-अक्ष पर काट हैं।

इसी प्रकार $\theta = \pi$ पर

$x = a_1 \cos \omega_0 t$

और $y = -a_2 \cos \omega_0 t$

जिससे कि $y = -(a_2/a_1)\, x$ (2.46)

समीकरण 2.45 और समीकरण 2.46 मूल बिन्दु से होकर जाने वाली सरल रेखाएं निरूपित करते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि कल की परिणामी गति एक सरल रेखा के अनुदिश है। फिर भी, $\phi = 0$ पर गति एक विकर्ण (चित्र 2.6 क में PR) के अनुदिश होती है। जबकि $\phi = \pi$ पर गति दूसरे विकर्ण (चित्र 2.6 ख में QS) के अनुदिश होती हैं।

स्थिति II : $\phi = \pi/_2$

इस स्थिति में दो कंपन निम्नलिखित हैं :

$x = a_1 \cos \omega_0 t$

और $y = a_2 \cos (\omega_0 t + \pi/_2) = -a_2 \sin \omega_0 t$

इन व्यंजकों को वर्ग करके जोड़ने पर निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है –

$$\frac{x^2}{{a_1}^2} + \frac{y^2}{{a_2}^2} = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1 \qquad (2.47)$$

यह दीर्घ वृत्त का समीकरण है। इस तरह, हम यह पाते हैं कि कण की गति उस दीर्घ वृत्त के अनुदिश होती है जिसके मुख्य अक्ष, x-अक्ष और y- अक्ष हैं। दीर्घ वृत्त के अर्ध दीर्घ-अक्ष और अर्ध लघु अक्ष a_1 और a_2 हैं। ध्यान दीजिए कि समय में वृद्धि होने पर x का मान अपने अधिकतम धनात्मक मान से कम होने लगता है, पर y का मान और अधिक ऋणात्मक होने लगता है। इस तरह, गति दीर्घ वृत्त की दक्षिणावर्त दिशा में होती है जैसाकि चित्र 2.6 में दिखाया गया है। यदि आप $\phi = 3\pi/_2$ या $\phi = -\pi/_2$ वाली स्थिति का विश्लेषण करें तो भी आपको यहाँ दीर्घ वृत्त प्राप्त होगा, पर गति वामावर्त दिशा में होगी (चित्र 2.6 घ)।

जब आयाम a_1 और a_2 बराबर होते हैं अर्थात् $a_1 = a_2 = a$ तो समीकरण (2.47) निम्न हो जाता है –

$$x^2 + y^2 = a^2$$

यह समीकरण त्रिज्या वाले एक वृत्त को निरूपित करता है। कहने का अर्थ यह है कि दीर्घवृत्त एक वृत्त के रूप में आ जाता है।

व्यापक स्थिति :

अब हम ϕ के किसी स्वेच्छ मान के लिए व्यापक स्थिति पर विचार करेंगे। मान लीजिए समीकरण 2.43 और समीकरण 2.44 द्वारा दी गई सरल आवर्त गतियाँ अध्यारोपित हैं। परिणामी दोलन प्राप्त करने के लिए हम समीकरण 2.44 को निम्न रूप में लिखते हैं —

$$\frac{y}{a^2} = \cos (\omega_0 t + \phi) = \cos \omega_0 t \ \cos \phi - \omega_0 t \ \sin \phi \qquad (2.48)$$

समीकरण 2.43 से

$\cos \omega_0 t = x/a_1$

जिससे कि

$\sin \omega_0 t = \sqrt{1 - (x^2/{a_1}^2)}$

$\cos \omega_0 t$ और $\sin \omega_0 t$ के इन मानों को समीकरण 2.48 में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$\frac{y}{a^2} = \frac{x \cos \phi}{a_1} - \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \sin \phi$$

या

$$\frac{x}{a_1} \cos \phi - \frac{y}{a^2} = \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2}\right)} \sin \phi$$

दोनों ओर का वर्ग करने और पदों को व्यवस्थिति रूप में रखने पर हमें —

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} - 2\frac{xy}{a_1 a_2}\cos\phi = \sin^2\phi \tag{2.49}$$

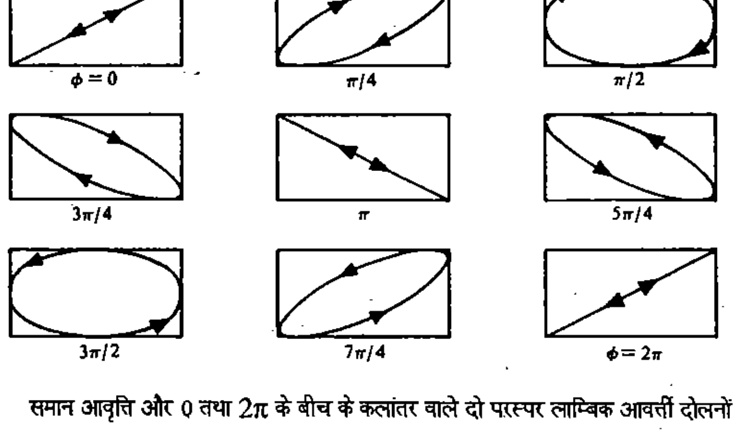
के रूप में परिणामी पथ का समीकरण प्राप्त होता है। यह एक दीर्घ वृत्त निर्धारित करता है जिसके अक्ष निर्देशांक अक्ष के साथ एक कोण बनाते हैं।

कुछ विशेष स्थितियों में ϕ का मान 0 और 2π के बीच में होता है, उस दशा में परस्पर दो समान आवृत्ति वाली लांबिक सरल आवर्त गतियों के अध्यारोपित होने पर प्राप्त परिणामी दोलन द्वारा अनुरेखित पथ चित्र 2.7 में दिखाए गए हैं। इन प्रक्रियाओं को एक कैथोड किरण दोलनदर्शी (Oscilloscope) पर काफी सरलता से प्रदर्शित किया जा सकता है।

इस तरह हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दीर्घवृत्तीय गति असमान आयामों और एक कलांतर वाले दो परस्पर लांबिक रेखिक आवर्त्ती दोलनों से संयोजित होती है जबकि वृत्तीय गति समान आयाम वाले दो आवर्त्ती दोलनों की संयोजित गति होती है।

2.6.2 लगभग समान आवृत्तियों वाले दो समकोणिक आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण : लिसाजू की आकृतियाँ

अब हम यह जानते हैं कि जब दो लांबिक कंपन ठीक एक ही आवृत्ति वाले होते हैं तो परिणामी दोलन द्वारा अनुरेखित वक्र का आकार घटक-कंपनों के कलांतर पर निर्भर करता है। 0 से 2π रेडियन के परिसर से कलांतर ϕ के कुछ मानों के लिए खीचें गए वक्र चित्र 2.6 में दिखाए गए हैं। जब दो अलग-अलग कंपन की आवृत्तियों में किंचितमात्र अंतर होता है, तब परिणामी गति अधिक जटिल होती है। ऐसा होने का कारण यह है कि दो कंपनों की सापेक्ष कला [$\phi = \omega_2 t + \phi_0 - \omega_1 t = (\omega_2 - \omega_1)t + \phi$] समय के साथ धीरे-धीरे परिवर्तित होती रहती है। इसकी वजह से चित्र के आकार में भी धीरे-धीरे परिवर्तन होने लगता है। यदि कंपनों के आयाम क्रमशः a_1 और a_2 हों तो बनने वाली आकृति सदा ही $2a_1$ और $2a_2$ भुजाओं वाले आयत में स्थित होगी। अनुरेखित किए गए इन प्रतिरूपों को लिसाजू की आकृतियाँ कहा जाता है। जब दो कंपन समान कला में होते हैं अर्थात् $\phi = 0$ तो लिसाजू की आकृति एक सरल रेखा का रूप ले लेती है और आयत के विकर्ण $y = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)x$ के साथ संपाती होती है। जब ϕ, 0 से बढ़कर $\pi/2$ हो जाता है तब लिसाजू की आकृति एक दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{a_2^2} = 1$ होती है। और आयत की त्रियक स्थितियों से होकर जाती है। जब ϕ, $\pi/2$ से बढ़कर π हो जाता है तो दीर्घवृत्त लगभग एक सरल रेखा का रूप ले लेता है जो आयत के अन्य विकर्ण $y = -\left(\frac{a_2}{a_1}\right)x$ के साथ संपाती होती है और, जब ϕ, π से बढ़कर 2π होता है, तब जिस क्रम में ऊपर परिवर्तन हो रहा था वह क्रम उलट जाता है। सामान्यतः वक्र का आकार आयामों, आवृत्तिओं और कलांतर पर निर्भर करता है। ये भी परिवर्तन चित्र 2.7 में दिखाए गए हैं। समयांतराल $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ में कला ϕ में 2π का परिवर्तन होता है। अतः परिवर्तन के पूर्ण चक्र का आवर्तकाल $2\pi/(\omega_2 - \omega_1)$ होता है और उसकी आवृत्ति $(\omega_2 - \omega_1)/2\pi = \nu_2 - \nu_1$ होती है अर्थात् अलग-अलग कंपनों की आवृत्तियों के अंतर के बराबर होती है।



चित्र 2.7 : समान आवृत्ति और 0 तथा 2π के बीच के कलांतर वाले दो परस्पर लाम्बिक आवर्त्ती दोलनों का अध्यारोपण

लिसाजू की आकृतियों को कैथोड किरण दोलनदर्शी की सहायता से आसानी से दर्शाया जा सकता है। कैथोड किरण दोलनदर्शी के xx और yy विचलन प्लेटों पर अलग-अलग प्रत्यावर्ती ज्यावक्रीय वोल्टता (Alternating Sinusoidal voltage) लगाया जाता है और इलेक्ट्रान प्रकाश पुंज प्रदीप्त सक्रीन पर परिणामी प्रभाव को अनुरेखित करता है। जब लगाए गए वोल्टता समान आकृति के होते हैं, तब कला और आयाम में समायोजन करके हमें चित्र 2. 7 के विभिन्न वक्र प्राप्त हो सकते हैं, ऐसे प्रतिरूपों को गोलीय लोलक की सहायता से भी यांत्रिकतः प्राप्त किया जा सकता है।

यदि अलग-अलग लांबिक कंपन की आवृत्तियाँ 2 : 1 के अनुपात में हो, तो लिसाजू की आकृतियां कुछ अधिक जटिल होते हैं। जब $\phi = 0$ या π पर यह परवलय (Parabolic) के आकार का होता और $\phi = \pi/2$ पर इसका आकार अंक " 8" की तरह होता है। इसे और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम निम्नलिखित उदाहरण लें —

दो सम्कोणिक आवर्ती कंपनों को, जिनकी आवृत्तियाँ 2 : 1 के अनुपात में हैं, निम्नलिखित रूप में निरूपित किया जाता है —

$$x = a_1 \cos (2\omega_0 t + \phi)$$

और

$$y = a_2 \cos \omega_0 t$$

अब हम $\phi = 0, \pi/2$ और π पर परिणामी गति प्राप्त करेंगे।

(i) जब $\phi = 0$, तब $x = a_1 \cos 2\omega_0 t = a_1 (\cos^2 \omega_0 t - 1)$

और $y = a_2 \cos \omega_0 t$

क्योंकि $y/a_2 = \cos \omega_0 t$ इसलिए हम ऊपर दिए समीकरण निम्न रूप में लिख सकते हैं —

$$\frac{x}{a_1} = \frac{2y^2}{a_2^2} - 1$$

या

$$y^2 = \frac{a_2^2}{2a_1}(x + a_1)$$

यह समीकरण एक परवलय को निरूपित करता है।

(ii) जब $\phi = \pi/2$ तब $x = -a_1 \sin 2\omega_0 t$

या $-\frac{x}{a_1} = 2 \sin \omega_0 t \cos \omega_0 t$

और $y = a_2 \cos \omega_0 t$

और क्योंकि $\cos \omega_0 t = y/a_2$

और $\sin \omega_0 t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{a_2^2}}$

इसलिए पहला समीकरण यह हो जाएगा —

$$-\frac{x}{a_1} = \frac{2y}{a_2}\sqrt{1 - \frac{y^2}{a_2^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने और पदों को व्यवस्थित ढंग से रखने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$\frac{4y^2}{a_2^2} = \left(\frac{y^2}{a_2^2} - 1\right) + \frac{x^2}{a_1^2} = 0$$

जो अंक " 8" के आकार जैसे चित्र को निरूपित करता है।

(iii) जब $\phi = \pi$, तब $x = -a_1 \cos 2\omega_0 t$

या $-\frac{x}{a_1} = 2\cos^2 \omega_0 t - 1$

और $y = a_2 \cos \omega_0 t$

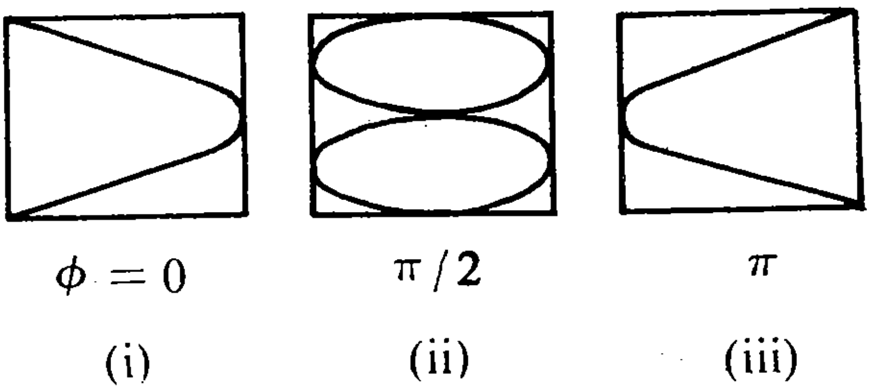
इन समीकरणों को संयोजित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है –

$$\frac{2y_2^2}{a^2} = -\frac{x}{a_1} - 1$$

या

$$y^2 = -\frac{a_2^2}{2a_1}(x - a_1)$$

यह एक परवलय को निरूपित करता है जो उस स्थिति का ठीक उल्टा है जब $\phi = 0$.



चित्र 2.8 2:1 के अनुपात की बारम्बारता और कलांतर (क) $\phi=0$ (ख) $\phi=\pi/4$ (ग) $\phi=\pi/2$ (घ) $\phi=3\pi/4$ (ङ) $\phi=\pi$ वाले दो आवृति दोलनों का अध्यारोपण

एक कैथोड किरण दोलनदर्शी में दो परस्पर लांबिक वैद्युत समों क्षेत्रों द्वारा इलेक्ट्रान के विचलन निम्नलिखित हैं —

$$x = 4\cos 2\pi\nu t$$

और

$$y = 4\cos(2\pi\nu t + \pi/6)$$

इलेक्ट्रानों का परिणामी पथ क्या होगा ?

2.7 सारांश

(i) अध्यारोपण-नियम यह है : यदि दो (या अधिक) आवर्त्ती दोलनों के संगत प्रारंभिक आयामों और वेगों को अध्यारोपित करें तो परिणामी विस्थापन सभी अनुवर्ती समयों में हुए अलग-अलग विस्थापनों का बीजीय योग होता है :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

(ii) यदि $x_1 = a_1 \cos(\omega_0 t + \phi_1)$

और $x_2 = a_2 \cos(\omega_0 t + \phi_2)$

द्वारा दिए गए समान आवृत्ति वाले सरेख आवर्त्ती दोलन अध्यारोपित हों तो परिणामी यह होता है —

$$x = a \cos(\omega_0 t + \phi)$$

जहाँ $a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_2 - \phi_1)]^{1/2}$

और

$$\phi = \tan^{-1} \frac{a_1 \sin\phi_1 - a_2 \sin\phi_2}{a_1 \cos\phi_1 - a_2 \cos\phi_2}$$

(iii) जब अलग-अलग आवृत्तियों वाले दो सरेख आवर्त्ती दोलन अध्यारोपित होते हैं, तब माडुलित दोलन निम्न रूप में निरूपित किया जाता है —

$$x = a_{mod}(t) \cos \omega_{av} t$$

जहाँ

$$a_{mod}(t) = 2a \cos \omega_{mod} t$$

जहाँ

$$\omega_{mod} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}$$

और

$$\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

(iv) समान आयाम (a_0) और समान आवृत्ति वाले पर उत्तरोत्तर दोलनों के बीच अचर कलांतर (ϕ_0) वाले n आवर्त्ती सरेख दोलनों का अध्यारोपण एक आवर्त्ती दोलन होता है। इसे निम्नलिखित समीकरण से व्यक्त किया जाता है —

$$x(t) = a \cos(\omega_0 t + \phi)$$

जहाँ

$$a = \frac{a_0 \sin(n\phi_{0|2})}{\sin(\phi_{0|2})}$$

और

$$\phi = (n-1)(\phi_{0|2})$$

(v) जब दो परस्पर लांबिक आवर्त्ती दोलन अध्यारोपित होते हैं, तो परिणामी रूप से अलग-अलग प्रकार के वक्र अनुरेखित होते हैं। यदि दोलन समान आवृत्तियों वाले हों तो वक्र का आकार कलांतर पर निर्भर करता है। सामान्यतया वक्र दीर्घवृत्तीय होता है पर कुछ कलाओं पर यह एक सरल रेखा के आकार का हो जाता है। जब आवृत्तियाँ लगभग बराबर होती हैं तो जो वक्र प्राप्त होते हैं वे लिसाजू की आकृतियाँ कहलाती हैं।

2.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. सरल लोलक की गति को निम्नलिखित अवकल समीकरण से निरूपित किया जाता है -

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$$

इसे निम्नलिखित प्रारंभिक प्रतिबंधों के लिए हल कीजिए :

(i) $t = 0$ पर $x = 3\ cm$ और $\frac{dx}{dt} = 0$; (ii) $t = 0$ पर $x = 2$ cm और $dx/dt = 4$ cm s^{-1} इन दो हलों को x_1 और x_2 से प्रकट करें। दिखाइए कि नए विस्थापन $x_3 = x_1 + x_2$ के लिए गोलक के प्रारंभिक प्रतिबंध x_1 और x_2 के प्रारंभिक प्रतिबंधों का अध्यारोपण होता है।

2. दो सरल आवर्त कंपनों को

$$x_1 = 3 \sin (20\pi t + \pi/6)$$

और

$$x_2 = 4 \sin (20 \pi t + \pi/3)$$

से निरूपित किया गया है। परिणामी कंपन का आयाम, कला नियतांक और आवर्त काल ज्ञात कीजिए।

3. निम्नलिखित दो सरल आवर्ती दोलन लीजिए

$$x_1 = a_1 \cos \omega_1 t$$

और

$$x_2 = a_2 \cos \omega_2 t$$

इनकी परिणामी गति के लिए आयाम के निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त करने के लिए संमिश्र संख्या विश्लेषण का प्रयोग कीजिए

$$a = [a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos (\omega_1 - \omega_2) t\ ]^{1/2}$$

दिखाइए कि परिणामी आयाम $(a_1 + a_2)$ और $(a_1 - a_2)$ के बीच रहता है।

4. लगभग समान आवृत्तियों वाले दो ट्यूनिंग फार्क का प्रयोग लिसाजू की आकृतियाँ प्राप्त करने के लिए किया गया है और यह देखा गया है कि 20 सेकंड में आकृति का परिवर्तन चक्र पूरा हो जाता है। अब यदि A पर थोड़ा मोम लगा दिया जाए तो 10 सेकंड में ही आवृत्ति 300 Hz हो तो मोम लगाने के पहले और बाद में A की आवृत्ति क्या होगी ?

2.9 हल/उत्तर

बोध प्रश्न 1

दिए हुए प्रसार को लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2 \left[\theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} + ... \right] = 0$$

क्योंकि इस समीकरण में उच्च घात वाले पद हैं, इसलिए यह रैखिक नहीं है।

यदि हम प्रसार के पहले दो पद को लें तो परिणामी समीकरण रैखिक नहीं होगा, अतः अध्यारोपण-नियम यहाँ लागू नहीं हो सकता।

बोध प्रश्न 2

$$x_1 = a_1 \cos \omega_0 t$$

और

$x_2 = a_2 \cos \omega_0 t$

अध्यारोपण-नियम के अनुसार

$x = x_1 + x_2 = (a_1 + a_2) \cos \omega_0 t$

क्योंकि कोसाइन फलन $+1$ और -1 के बीच होता है, इसलिए परिणामी दोलन का आयाम $(a_1 + a_2)$ होगा ।

बोध प्रश्न 3

प्रारंभिक कलाओं Q_1 और Q_2 वाले दो आवर्त्ती दोलन का परिणामी यह है

$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\phi_1 - \phi_2)$ (i)

(क) जब $\phi_1 - \phi_2 = 2n\pi$, तब $\cos(\phi_1 - \phi_2) = 1$ (ii)

और समीकरण (i) यह हो जाता है —

$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2$

$= (a_1 + a_2)^2$

जिससे कि

$a = \pm (a_1 + a_2)$

ऋणात्मक चिह्न छोड़ दिया जाता है क्योंकि भौतिक दृष्टि से यह उचित नहीं है।

इसलिए $a = (a_1 + a_2)$

(ख) जब $\phi_1 - \phi_2 = (2n+1)\pi$ तब $\cos(\phi_1 - \phi_2) = -1$

तब समीकरण (i) निम्न हो जाता है

$a^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1 a_2$

जिससे कि

$a^2 = \pm (a_1 - a_2)^2$

$a = \pm (a_1 - a_2)$

पहले की तरह यहां भी ऋण चिह्न को छोड़ दिया जाता है और इसलिए

$a = a_1 - a_2$

बोध प्रश्न 4

समीकरण (2.15) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$a = \sqrt{2}\ a_1 [1 + \cos(\phi_1 - \phi_2)]^{1/2}$

संबंध $\cos 2A = 2\cos^2 A - 1$ का प्रयोग करने पर इसे हम इस प्रकार लिख सकते हैं

$a = 2a_1 \cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2)$

क्योंकि $\phi_1 - \phi_2 = 90°$, $\cos \frac{1}{2}(\phi_1 - \phi_2) = \cos 45 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ अतः

$a = 2 \times 1 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,\text{cm}$

इसी प्रकार समीकरण (2.16) से हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है

$\tan \phi = 1$ or $\phi = \frac{\pi}{4}$

बोध प्रश्न 5

यहाँ $n = 3$, $a_0 = 4$ एकक और $\phi_0 = \pi/3$ रेडियन है । अतः समीकरण (2.34) के अनुसार परिणामी दोलन का आयाम यह होगा

$$a = a_0 \frac{\sin n\, \phi_0/2}{\sin \phi_0/2}$$

$$= a_0 \frac{\sin \frac{3 \times \pi}{2 \times 3}}{\sin \frac{\pi}{2 \times 3}}$$

$$= a_0 \frac{\sin \pi/2}{\sin \pi/6}$$

क्योंकि $\sin \pi/2 = 1$ और $\sin \pi/6 = 1/2$ इसलिए

$a = 2\, a_0$

परिणामी दोलन की कला समीकरण (2.37) से प्राप्त होती है :

$$\phi = (n-1) \frac{\phi_0}{2}$$

$= 2 \times \pi/6$

$= \pi/3$ रेडियन

बोध प्रश्न 6

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{4^2} - \frac{2xy}{4 \times 4} \cos \pi/6 = \sin^2 \pi/6$$

या $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} - \frac{2\,xy}{16}\, \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4}$

या $x^2 + y^2 - \sqrt{3}\, xy - 4 = 0$

परिणामी पथ एक दीर्घवृत्त है ।

अंत में कुछ प्रश्न

1. $\frac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$ (i)

सरल आवर्त्त गति के मानक समीकरण $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

से इसकी तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि इस समीकरण का हल यह है —

$x = a \cos (2t + \phi)$ (ii)

के सापेक्ष समीकरण (i) को अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है —

$\frac{dx}{dt} = -2\,a \sin (2t + \phi)$ (iii)

(1) क्योंकि $t = 0$ पर $x = 3$ cm और $dx/dt = 0$ इसलिए समीकरण (ii) और (iii) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$3 = a \cos \phi$

और $0 = -2a \sin \phi$

बाद वाले संबंध से यह पता चलता है कि $\phi = 0$

पहले संबंध में इसका प्रयोग करने पर

$a = 3$ cm

इसलिए संपूर्ण हल यह होगा

$x_1 = 3 \cos 2t$ cm (iv)

(2) और यदि $t = 0$ पर $x = 2$ cm और $\frac{dx}{dt} = 4$ cm s^{-1}

तो हम पाते हैं कि

$2 \text{ cm} = a \cos \phi$

और $4 \text{ cm s}^{-1} = -2a \sin \phi$

या $2 \text{ cm s}^{-1} = -a \sin \phi$

एक को दूसरे से भाग देने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$\tan \phi = -1$ याँ $\phi = -\frac{\pi}{4}$ अतः $a = 2\sqrt{2}$ cm

इसलिए दूसरा हल यह होगा

$x_2 = 2\sqrt{2} \cos (2t - \pi/4)$ cm (v)

अतः x_1 और x_2 के अध्यारोपण से x_3 प्राप्त होता है

$$x_1 + x_2 = 3 \cos 2t \text{ cm} + 2\sqrt{2} \cos \left(2t - \frac{\pi}{4}\right) \text{cm}$$

$$= 3 \cos 2t \text{ cm} + 2\sqrt{2} \left[\cos 2t \quad \cos \pi/4 + \sin^2 t \pm \sin \pi/4\right] \text{cm}$$

$$= 3 \cos 2t \text{ cm} + 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cos 2t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2t\right) \text{ cm}$$

$$= 5 \cos 2t \text{ cm} + 2 \sin^2 t \text{ cm} \qquad \text{(vi)}$$

यदि हम x_1 और x_2 के प्रारंभिक प्रतिबंधों को अध्यारोपित करें तो

$t = 0$ पर $x = 5$ cm और $\frac{dn}{dt} = 4$ cm s^{-1}

$\therefore$ $5 \text{ cm} = a \cos \phi$

और $4 \text{ cm} = -2a \sin \phi$

अतः $\tan \phi = -2/5$

$\therefore \sin \phi = -\frac{2}{\sqrt{2a}}$

$\cos \phi = \frac{5}{\sqrt{2a}}$

और $a = \sqrt{2a}$ cm

इसलिए प्रारंभिक प्रतिबंधों को अध्यारोपित करने पर निम्नलिखित हल प्राप्त होता है—

$x_3 = \sqrt{2a} \cos (2t + \phi) \text{ cm} = \sqrt{2a} [\cos 2t \cos\phi - \sin 2t \sin \phi] \text{ cm}$

इसमें $\cos \phi$ और $\sin \phi$ के मान प्रतिस्थापित करने पर

$x_3 = 5 \cos 2t$ cm $+ 2 \sin 2t$ cm (vii)

यह वही है जो समीकरण (vi) से प्राप्त होता है और जो यह x_1 और x_2 के अध्यारोपण से प्राप्त हुआ है।

$x_1 = 3 \cos (20 \pi t + \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2})$

और $x_2 = 4 \cos (20 \pi t + \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2})$

या $x_1 = 3 \cos (2\pi t - \pi/3)$

और $x_2 = 4 \cos (2\pi t - \pi/6)$

अतः परिणामी कंपन

$x = a \cos (2\pi t + \phi)$ cm

से परिभाषित होता है

जहाँ $a = (3^2 + 4^2 + 2 \times 3 \times 4 \times \cos \pi/6)^{1/2}$ cm

$= (9 + 16 + 12\sqrt{3})^{1/2}$ cm

$= 6.77$ एकक

और $\phi = \tan^{-1} \dfrac{3 \sin \pi/3 + 4 \sin \pi/6}{3 \cos \pi/3 + 4 \cos \pi/6}$

$= \tan^{-1} \dfrac{3\sqrt{3} + 4}{3 + 4\sqrt{3}} = -\ 0.24\,\pi$

3. $z = a_1 \exp (\omega_1 t) + a_2 \exp (\omega_2 t)$

$a^2 = (zz^*) = (a_1 e^{-i\omega_1 t} + a_2 e^{-i\omega_2 t})$

$(a_1 e^{i\omega_1 t} + a_2 e^{i\omega_2 t})$

$= [\, a_1^2 + a_2^2 + a_1 a_2 \exp[i (\omega_1 - \omega_2) t \,] + a_1 a_2 e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t}$

वास्तविक भाग (part) लेने पर

$a = [a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1 a_2 \cos (\omega_1 - \omega_2)\, t\,]$

जब $(\omega_1 - \omega_2)t = \pi\ (2n+1)\,\pi$ तब $a_{min} = a_1 - a_2$

जब $(\omega_1 - \omega_2)t = 0$ या $n\pi$ तब $a_{max} = a_1 + a_2$

अतः परिणामी आयाम $a_1 + a_2$ और $a_1 - a_2$ के मानों के बीच रहता है।

4. $v_A - v_B$

ट्यूनिंग फॉर्क A पर मोम लगाने पर A की आवृत्ति कम हो जाएगी। अब, क्योंकि 10 सेकंड में चित्रों का परिवर्तन चक्र पूरा हो जाता है, इसलिए आवृत्ति अंतर बढ़कर 0.1 हो जाती है। इससे यह अर्थ निकलता है कि मोम लगाने के पहले और बाद में आवृत्तियां क्रमशः $300 - 0.05 = 299.95$ Hz और $300 - 0.1 = 299.9$ Hz होगी।

2.10 शब्दावली

अध्यारोपण	–	Superposition
अवमंदन	–	Damping

आयाम	–	Amplitude
आवृत्ति	–	Frequency
कला	–	Phase
कलांतर	–	Phase Difference
गोलक	–	Bob
घटक	–	Component
दोलन	–	Oscillation
दोलनदर्शी	–	Oscilloscope
ध्रुवांतर रेखा	–	Radius Vector
परिणामी	–	Resultant
प्रक्षेप	–	Projection
माडुलन	–	Modulation
लिसाजू की आकृतियाँ	–	Lissajous Figures
लोलक	–	Pendulum
विभा	–	Dimension
विस्थापन	–	Displacement
संमिश्र संख्या	–	Complex Number
संरेख	–	Collinear
सदिश	–	Vector
सरल आवर्त्त गति	–	Simple Harmonic Motion

इकाई 3 अवमंदित सरल आवर्त्त गति

इकाई की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना

इकाई 1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि सरल आवर्त्त गति एक सार्वत्रिक परिघटना है। अब आप यह भी जान चुके हैं कि आदर्श स्थिति में समय के सापेक्ष में सरल आवर्त्त दोलक की संपूर्ण ऊर्जा अचर बनी रहती है और दोलक का विस्थापन, एक साइन वक्र को दर्शाता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि यदि इस प्रकार की व्यवस्था को एक बार गति में लाने पर वह हमेशा के लिए निरंतर दोलन जारी रखेगी। इस प्रकार के दोलनों को मुक्त (Free) अथवा अनवमंदित (Undamped) दोलन कहा जाता है। क्या इस वास्तविक जगत में आप किसी ऐसे भौतिक तंत्र को जानते हैं जिससे अवमंदन न होता हो। शायद किसी ऐसे भौतिक तंत्र का अस्तित्व नहीं है जिसमें अवमंदन न होता हो। ~~आपने~~ यह अवश्य देखा होगा कि जब किसी झूले, एक सरल अथवा मरोड़ी लोलक तथा एक कमानी के द्रव्यमान तंत्र को दोलन करने के लिए छोड़ दिया जाए तो उनका दोलन धीरे-धीरे समाप्त हो जाता है। इसी प्रकार एक एल सी परिपथ में अथवा निलंबित कुंडली वाले गैल्वनोमीटर में आवेश के दोलन का आयाम धीरे-धीरे कम होता जाता है। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि प्रत्येक दोलन तंत्र की ऊर्जा में समय के साथ कमी होती जाती है। अब प्रश्न यह उठता है कि यह ऊर्जा कहां चली जाती है ? इसका उत्तर देने के लिए हम यहां ध्यान देंगे कि जब भी कोई पिंड किसी माध्यम में दोलन करता है तो उसे अपनी गति में प्रतिरोध का अनुभव होता है। इसका अर्थ हुआ कि अवमंदन बल अपना प्रभाव डालता है। यह अवमंदन बल स्वयं पिंड के अंदर और आस-पास के माध्यम (वायु अथवा द्रव) के कारण भी उत्पन्न हो सकता है। अवमंदन बलों के विरुद्ध दोलन तंत्र द्वारा किए गए कार्य के कारण तंत्र की ऊर्जा का क्षय होता है। जैसा कि दोलनी पिंड की ऊर्जा अवमंदन को दूर करने में खर्च हो जाती है। लेकिन कुछ इंजीनियरिंग तंत्रों में हम जानबूझकर अवमंदन लाते हैं। इसका एक सपरिचित उदाहरण है ब्रेक — जिसमें हम घर्षण को बढ़ा देते हैं ताकि वाहन की गति थोड़े समय में कम हो जाये। आम तौर पर अवमंदन के कारण ऊर्जा की व्यर्थ में हानि होती रहती है, इसलिए हमारी पूरी कोशिश होती है कि अवमंदन को कम से कम किया जाए।

अक्सर हमें किसी तंत्र के दोलनों को बनाए रखने की आवश्यकता होती है। इसके लिए हमें तंत्र को बाह्य स्रोत से ऊर्जा प्रदान की जाती है जिससे कि अवमंदन के कारण ऊर्जा में जो हानि होती हो उसकी पूर्ति की जा सके। इस प्रकार के दोलनों को *प्रणोदित दोलन* (Forced Oscillations) कहा जाता है। अगली इकाई में आप इस प्रकार के दोलनों के विभिन्न पहलुओं के बारे में पढ़ेंगे।

इस इकाई में आप अवमंदित सरल आवर्त्त दोलक की गति का समीकरण स्थापित करना और उसे हल करना सीखेंगे। अवमंदन को लघुगणकीय ह्रास, शिथिलता काल और गुणता कारक के रूप में अभिव्यक्त किया जा

सकता है। और आप यहां पर लघुगणकीय ह्रास एक चक्र में शक्ति ह्रास और गुणता कारक के व्यंजकों की संगणना करना सीखेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन कर लेने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि आप :

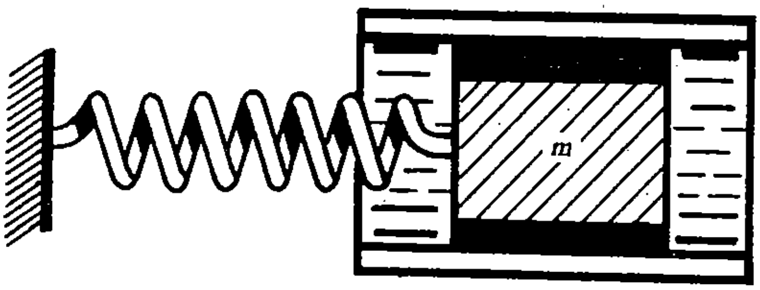
- अवमंदित सरल आवर्त्त दोलन का अवकल समीकरण प्राप्त कर सकें और उसे हल कर सकें।
- दोलन के आयाम, ऊर्जा और आवर्त्त काल पर अवमंदन के प्रभाव का विशलेषण कर सकें।
- दुर्बलतः अवमंदित, क्रांतिकतः अवमंदित और प्रवबलतः अवमंदित तंत्रों में भेद कर सकें।
- एक दोलन में क्षयित शक्ति के समीकरण प्राप्त कर सकें।
- अवमंदित दोलक का शिथिलता काल और गुणता कारक ज्ञात कर सकें।
- विभिन्न भौतिक तंत्रों में अनुरूपता प्रदर्शित कर सकें।

3.2 अवमंदित दोलक का अवकल समीकरण

अवमंदित दोलक (Damped Oscillator) की गति के बारे में विचार करते समय हमारे मन में कुछ इस प्रकार के प्रश्न उठ सकते हैं : क्या समीकरण (1.2) को यहां भी लागू किया जा सकता है ? यदि नहीं, तो उस समीकरण में क्या परिवर्तन करने की आवश्यकता है ? परिमाणात्मक रूप में (Quantatively) अवमंदित गति का निर्धारण किस प्रकार किया जाएगा ? इस सभी प्रश्नों का उत्तर जानने के लिए हमें फिर से इकाई 1 के कमानी द्रव्यमान (Spring-Mass) तंत्र पर विचार करना होगा। मान लीजिए द्रव्यमान एक श्यान माध्यम (Viscous Medium), जैसे स्नेहित वेलन (Lubricated Cylinder), में क्षैतिजतः स्थिति में गतिमान है जैसा कि आकृति 3.1 में दिखाया गया है। गति में होने पर द्रव्यमान पर एक घर्षण (Drag) बल लगता है जिसे हम F_d से प्रकट करते हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि इस अवमंदन बल के परिमान (Magnitude) के बारे में आप किस प्रकार जानकारी प्राप्त कर सकते हैं ? प्रायः परिमाण का ठीक-ठीक मान ज्ञात करना कठिन होता है । फिर भी अपने अनुभव से हम इसका एक तर्कसंगत आकल (Estimate) ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण के तौर पर, बहुत ही कम आयाम (Amplitude) वाले दोलनों के लिए हम स्टोक्स-नियम के अनुसार अवमंदन बल को प्रस्तुत कर सकते हैं। अर्थात् हम F_d को वेग के समानुपाती ले सकते हैं और उसे इस प्रकार लिख सकते हैं

एक वस्तु जो किसी श्यान माध्यम में मुक्त रूप से गिर रही है, पर लग रहा बल $F_d = 6\pi\eta\, r v$ है। इसे हम स्टाक का नियम कहते हैं। यहाँ पर η श्यानता गुणांक है और r वस्तु का अर्धव्यास है (यहाँ पर वस्तु को गोलाकार माना गया है) और v इसका वेग है।

$$F_d = -\gamma v$$



चित्र 3.1: अवमंदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र

ऋण के चिह्न से यह पता चलता है कि अवमंदन बल गति का विरोध कर रहा है। और अनुपातिकता अचर (Constant of proportionality) γ को *अवमंदन गुणांक* (Damping Co-efficient) कहा जाता है। संख्यात्मक रूप में यह बल प्रति एकक वेग के बराबर होता है और इसे

$$\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{ms^{-1}}} = \frac{\mathrm{kg\,ms^{-2}}}{\mathrm{ms^{-1}}} = \mathrm{kg\,s^{-1}}$$

में मापा जाता है।

अब हम अवमंदित सरल आवर्त्त दोलक की दोलनी गति का अवकल समीकरण (Differential Equation) प्राप्त करेंगे। इसके लिए आइए हम अक्ष को कमानी की लम्बाई की दिशा में लें। हम अक्ष ($x = 0$) के मूल

बिन्दु को द्रव्यमान की साम्यावस्था स्थिति (Equilibrium Position) मान लेते हैं। मान लीजिए (कमानी द्रव्यमान तंत्र के) द्रव्यमान अनुदैर्ध्य (Longitudinally) खींचा गया है और फिर छोड़ दिया गया है। ऐसा करने पर वह अपनी साम्यावस्था स्थिति से हट जाता है। इस समय कमानी-द्रव्यमान तंत्र पर निम्नलिखित बल लग रहे होते हैं :

(i) प्रत्यानयन बल (Restoring Force) $-kx$ जहां k कमानी गुणक (Spring Constant) हैं और

(ii) अवमंदन बल : γv जहाँ $v = \frac{dx}{dt}$ दोलक का तात्कालिक वेग (Instantenous Velocity) है। इससे यह अर्थ निकलता है कि अवमंदित सरल आवर्त्त दोलक के गति समीकरण में प्रत्यानयन बल और अवमंदन बल का समावेश अवश्य होना चाहिए। अतः इस स्थिति में समीकरण (1.2) को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma\frac{dx}{dt} \tag{3.2}$$

पदों को व्यवस्थित रूप में लिखने पर और m से भाग देने पर अवमंदित दोलक का गति-समीकरण निम्न रूप का हो जाता है।

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \tag{3.3}$$

जहाँ $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ (पहले की तरह) और $2b = \frac{\gamma}{m}$ (आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि अवमंदन के पद में गुणक 2 लगा दिया गया है जिससे कि इस समीकरण के हल के लिए एक उपयुक्त व्यंजक (Expression) प्राप्त हो सके। अचर b की विमाएँ (Dimensions)

$$\frac{\text{बल}}{\text{वेग} \times \text{द्रव्यमान}} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}M} = T^{-1} \text{ हैं।}$$

अतः इसका मात्रक s^{-1} है जो कि वही है जो कि ω_0 का है।

आपने ध्यान दिया होगा कि समीकरण (1.3) की तरह समीकरण (3.3) अचर गुणांकों वाला एक रैखिक द्विकोटि का समघात अवकल समीकरण (Homogenous Differential Equation) है। यदि अवमंदन न हो, तो समीकरण (3.3) का दूसरा पद शून्य हो जाएगा और तब इस तरह प्राप्त समीकरण का व्यापक हल (General Solution) समीकरण (1.5) से प्राप्त हो जाएगा अर्थात् $x = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ इसके विपरीत यदि अवमंदन बल तो हो पर प्रत्यानयन बल न हो तो समीकरण (3.3) का तीसरा पद शून्य हो जाएगा। तब इस तरह प्राप्त समीकरण का व्यापक हल $x(t) = Ce^{-2bt} + D$ से प्राप्त हो जाएगा, जहां C और D अचर है। आप इस कल्पित किए गए हल को समीकरण (3.3) में प्रतिस्थापित करके प्राप्त कर सकते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि प्रत्यानयन बल के न होने पर विस्थापन में चरघातांकीय रूप (Exponentially) में कमी आती है। इस तरह हम यह मान लेते हैं कि समीकरण (3.3) का हल उस दोलनी गति को निरूपित करेगा जिसके आयाम में समय के साथ कमी आती जाती है।

3.3 अवकल समीकरण के हल

अब प्रश्न यह उठता है कि किस प्रकार अवमंदन का प्रभाव दोलन के आयाम पर पड़ता है ? इसके लिए हमें समीकरण (3.3) को हल करना होता है जबकि उसमें प्रत्यानयन बल और अवमंदन बल दोनों ही मौजूद हों व्यापक हल में, चरघातांकी पद और सरल आवर्ती पद दोनों ही होने चाहिए। अतः आइए हम निम्न रूप का एक हल लें

$$x = a\,\exp(\alpha t) \tag{3.4}$$

जहाँ a और α अज्ञात अचर हैं।

समीकरण (3.4) को समय के सापेक्ष दो बार अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{dx}{dt} = a\,\alpha\,\exp(\alpha t)$$

और

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a\,\alpha^2 \exp(\alpha t)$$

इन व्यंजकों को समीकरण (3.3) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है

$$(\alpha^2 + 2b\,\alpha + \omega_0^2)\,a \exp(\alpha t) = 0 \qquad (3.5)$$

यह समीकरण हमेशा लागू हो, इसके लिए या तो $a = 0$ जो तुच्छ (Trival) है, या

$$\alpha^2 + 2b\,\alpha + \omega_0^2 = 0 \qquad (3.6)$$

यह समीकरण α में द्विघात समीकरण (Quadratic Equation) है। मान लीजिए इसके दो मूल α_1 और α_2 हैं । तब,

$$\alpha_1 = -b + (b^2 - \omega_0^2)^{1/2} \qquad (3.7 \text{ क})$$

और

$$\alpha^2 = -b - (b^2 - \omega_0^2)^{1/2} \qquad (3.7 \text{ ख})$$

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ हैं।

इन मूलों से दोलक की गति निर्धारित हो जाती है। स्पष्ट है कि α की विमाएँ वही होती हैं जो कि प्रतिलोम समय की विमाएँ हैं। क्या इसका ज्ञान आपको $\exp(\alpha t)$ के रूप को देखकर नहीं होता।

इस तरह, हम यह पाते हैं कि समीकरण (3.3) के दो संभव हल हैं

$$x_1 = a_1 \exp[-\{b - (b^2 - \omega_0^2)^{1/2}\}t]$$

और

$$x_2 = a_2 \exp[-b\{b + (b^2 - \omega_0^2)^{1/2}\}t] \qquad (3.8)$$

क्योंकि समीकरण (3.3) रैखिक हैं, इसलिए इस पर अध्यारोपण का नियम लागू होता है। अतः x_1 और x_2 का अध्यारोपण करने पर व्यापक हल प्राप्त हो जाता है

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1 \exp(b^2 - \omega_0^2)^{1/2}\,t\,] + a_2 \exp[-(b^2 - \omega_0^2)^{1/2}\,t] \qquad (3.9)$$

ध्यान दीजिए कि जब b, ω_0 से कम, के बराबर या से अधिक होता है तो राशि $(b^2 - \omega_0^2)$ क्रमशः ऋणात्मक, शून्य अथवा धनात्मक होती है। अतः निम्नलिखित तीन संभावनाएँ होती हैं।

i) यदि $b<\omega_0$ तो हम कहते हैं कि तंत्र अल्प अवमंदित (Under Damped) है।

ii) यदि $b = \omega_0$ तो तंत्र क्रांतिकतः अवमंदित (Critically Damped) है।

iii) यदि $b > \omega_0$ तो तंत्र अधिक अवमंदित (Over Damped) है।

इन प्रतिबंधों में से प्रत्येक से एक अलग हल प्राप्त होता है जो एक विशेष व्यवहार को निर्धारित करता है। हम इन हलों की चर्चा उनके महत्व के अनुसार करेंगे।

3.3.1 प्रबल अवमंदन (Heavy Damping)

जब गति प्रतिरोध बहुत अधिक होता है तब तंत्र को प्रबल अवमंदित निकाय कहा जाता है। क्या आप व्यवहारिक रुचि वाले प्रबल अवमंदित तंत्र का एक उदाहरण दे सकते हैं ? किसी ट्रेन के माल डिब्बों को जोड़ने वाली कमानियों से एक अति महत्वपूर्ण प्रबल अवमंदित तंत्र प्राप्त होता है। भौतिकी के प्रयोगशाला में, श्यान माध्यम (Viscous Medium) में लोलक के कंपन (Vibrations) और निलंबित गैल्वेनोमीटर (Dead Beat Galvanometer) की कुंडली की गति प्रबल अवमंदित तंत्र के उदाहरण हैं।

गणितीय रूप में कोई तंत्र प्रबल अवमंदित तंत्र तब होता है जबकि $b > \omega_0$ इस स्थिति में राशि $\sqrt{b^2 - \omega_0^2}$ धनात्मक होगी। यदि हम

$$\beta = \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

मान लें तो समीकरण (3.9) द्वारा दिया गया अवमंदित दोलक का व्यापक हल यह हो जाता है

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1 \exp(\beta t) + a_2 \exp(-\beta t)] \qquad (3.10)$$

यह समीकरण एक अदोलनी प्रकृति को निरूपित करता है। इस प्रकार की गति को स्द्धदोल (Dead Beat) कहा जाता है। इस स्थिति में वास्तविक विस्थापन प्रारंभिक प्रतिबंधों से प्राप्त होता है। आइए हम यह मान लें कि शुरू में दोलन अपनी साम्यावस्था में है अर्थात् $x = 0$ पर $t = 0$, तब इसे हम एक झटका देते हैं जिससे

कि इसका वेग v_0 हो जाता है अर्थात् $t = 0$ पर $v = v_0$ तब समीकरण (3.10) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$a_1 + a_2 = 0$$

और

$$-b\,(a_1 + a_2) + \beta\,(a_1 - a_2) = v_0$$

इन समीकरणों को हल करने पर

$$a_1 = -a_2 = \frac{v_0}{2\beta}$$

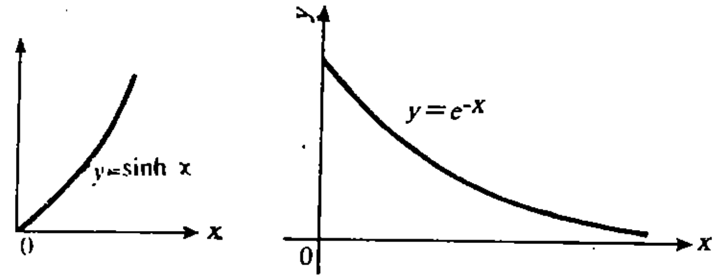
प्राप्त होता है। इन परिणामों को समीकरण (3.10) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित हल प्राप्त होता है

$$x\,(t) = \frac{v_0}{2\beta}\ \exp\,(-bt)\ [\ \exp\,(\beta t) - \exp(-\beta t)]$$

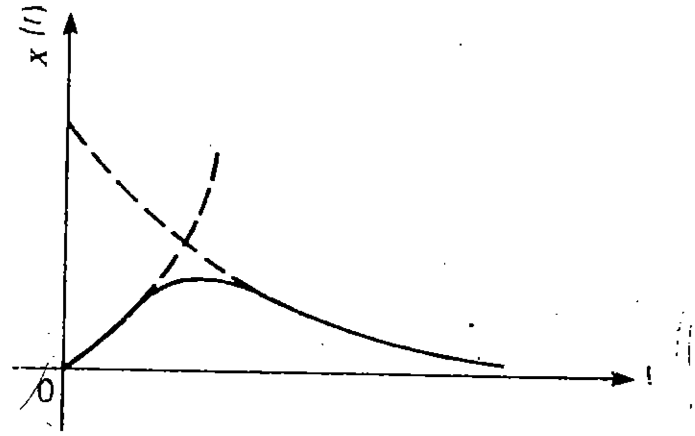
$$= \frac{v_0}{\beta} \exp\,(\beta t)\ \sinh \beta t \qquad (3.11)$$

जहाँ $\dfrac{[\exp\,(\beta t) - \exp\,(-\beta t)]}{2}$

अतिपरवलयिक साइन फलन (Hyperbolic Function) है। समीकरण (3.11) से यह स्पष्ट है कि $x(t)$ बढ़ते क्रम में (Increasing) अतिपरवलयिक फलन और क्षय मान (Decaying) चरघातांकी फलन के गुणन से प्राप्त हो जाता है। इन्हें आकृति 3.2 क में अलग-अलग आलेखित किया गया है। आकृति 3.2 ख में उस प्रबल अवमंदित तंत्र के समीकरण (3.11) को आलेखित किया गया है जबकि उसे अपनी साम्यावस्था से यकायक क्षुब्ध कर दिया गया हो। यहाँ आप यह ध्यान दीजिए कि प्रारंभ में समय के साथ विस्थापन में वृद्धि होती है। पर तुरंत चरघातांकी पद का प्रभाव अधिक हो जाता है और तब विस्थापन धीरे-धीरे कम होने लगता है।



चित्र 3.2 क: चरघातांकी क्षय और अतिपरवलयिक फलन



चित्र 3.2 ख : अधिक अवमंदित तंत्र से समीकरण (3.11) का आलेख

3.3.2 क्रांतिक अवमंदन (Critical Damping)

आपने यह अवश्य देखा होगा कि जब कोई कार सड़क के किसी उभरे स्थान से होकर जाती है तो कार ऊपर-नीचे उछलने लगती है जिससे उसमें बैठे व्यक्तियों को उछाल का अनुभव होता है। इस उछाल को कम करने के लिए अवमंदित बल का प्रयोग करना चाहिए जिससे कि कार तुरंत पुनः साम्यावस्था में आ जाए। इसके लिए हम क्रांतिकतः अवमंदित आघात अवशोषियों (Shock Absorbers) का प्रयोग करते हैं। सूचक तथा निलंबित, गैल्वेनोमीटर जैसे अभिलेखन यंत्रों में भी, जो अचानक आवेग (Impulse) का अनुभव करते हैं, क्रांतिक अवमंदन उपयोगी होता है। इसमें गैल्वेनोमीटर के सूचक (सूई) को कम से कम समय में सही स्थिति में आ जाना होता है और बिना किसी दोलन के रुक सके। इसी प्रकार प्रक्षेप गैल्वेनोमीटर की कुंडली को तुरंत शून्य विस्थापन की स्थिति में आ जाना होता है।

गणितीय रूप में हम किसी तंत्र को क्रांतिकतः अवमंदित तब कहते हैं जबकि b तंत्र की प्राकृतिक आवृत्ति (Natural Frequency) के बराबर हो इससे यह अर्थ निकलता है कि $b^2 - \omega_0^2 = 0$ जिससे कि समीकरण (3.9) निम्न रूप का हो जाता है

$$x(t) = (a_1 + a_2)\exp(-bt)$$

$$= a \exp(-bt) \qquad (3.12)$$

आइए अब हम यह याद करें कि सरल आवर्त गति के अवकल समीकरण के हल में दो स्वेच्छ अचर (Arbitrary Constants) होते हैं जिन्हें प्रारंभिक प्रतिबंध लगाकर नियत कर दिया जाता है। पर, यहां समीकरण (3.12) में केवल एक अचर हैं। अतः यह एक संपूर्ण हल (Complete Solution) नहीं है। यहां यह जान लेना आवश्यक है कि ऐसा क्यों होता है। ऐसा होने का कारण यह कि α वाले द्विघात समीकरण (3.6) के मूल बराबर हैं। अतः समीकरण (3.9) के दो पदों से समान समय प्राप्त होता है जिसकी वजह से ये दो पद एक पद के रूप में आ जाते हैं। यह सरलता से सत्यापित किया जा सकता है कि इस स्थिति में समीकरण (3.3) का व्यापक हल यह होता है

$$x(t) = (p + qt)\exp(-bt) \qquad (3.13 \text{ ख})$$

जहाँ p और q अचर है। p की विमाएँ नहीं हैं जो कि लंबाई की है और q की विमाएं वही होती हैं जो वेग की हैं। इन्हें प्रारंभिक प्रतिबंधों को लागू करके आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

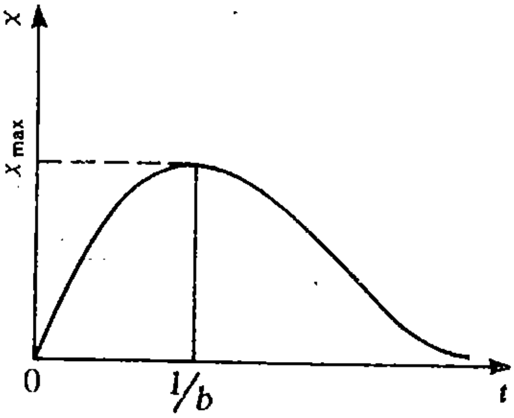
आइए अब हम यह मान लें कि यकायक आवेग देकर (निलंबित कुंडली गैल्वेनोमीटर की कुंडली को $t = 0$ पर कुछ वैद्युत आवेश दिया जाता है) तंत्र को अपनी माध्य साम्यावस्था से क्षुब्ध कर दिया गया है। अर्थात् $t = 0$ पर $x(0) = 0$ और $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = v_0$ इससे p = 0 और q = 0 प्राप्त होता है जिससे कि संपूर्ण हल को निम्नलिखित प्रकार से लिखा जा सकता है

$$x(t) = v_0 t \exp(-bt) \qquad (3.13 \text{ ख})$$

चित्र 3.3 में समीकरण (3.13ख) द्वारा निर्धारित क्रांतिकतः अवमंदित तंत्र का विस्थापतः समय ग्राफ से दिखाया गया है। अधिकतम विस्थापन पर $\frac{dx}{dt} = 0$ और $\frac{d^2x}{dt^2}$ = या < 0 यह घटना समय $t = 1/b$ पर घटित होती है :

π की तरह e भी अस्पष्ट है जिसका मान 2.718 हैं।

$$x_{max} = v_0 t\, e^{-1} = 0.368\ \frac{v_0}{b} = 0.736\frac{mv_0}{\gamma}$$



चित्र 3.3 : समीकरण (3.3 (ख) से निर्धारित क्रांतिकतः अवमंदित तंत्र का विस्थापन समय ग्राफ

3.3.3 दुर्बल अथवा अल्प अवमंदन

जब $b < \omega_0$ तो इसे हम दुर्बल अवमंदन की स्थिति मानते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि $(b^2 - \omega_0^2)$ एक ऋण राशि है अर्थात् $[(b^2 - \omega_0^2)^{1/2}]$ आधिकल्पित (Imaginary) राशि है। आइए इसे हम निम्न रूप में लिखें

$$(b^2 - \omega_0^2)^{1/2} = \sqrt{-1}\,(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}$$

$$= \pm\, \mathrm{i}\,\omega_d$$

जहाँ $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ और $\omega_d = (\omega_0^2 - b^2)^{1/2} = \left[\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}\right]^{1/2}$ (3.14)

एक वास्तविक धनराशि (Real Positive Quantity) है। ध्यान दीजिए कि अवमंदन न होने पर (b = 0) ω_d, घटाकर ω_0 के बराबर हो जाती है। अर्थात् दोलक की प्राकृतिक आवृत्ति हो जाती है।

$\exp(\pm\, \mathrm{i}\, x) = \cos x \pm \mathrm{i} \sin x$

समीकरण (3.9) और समीकरण (3.14) को एक साथ लेने पर विस्थापन निम्न रूप का हो जाता है।

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1 \exp(\mathrm{i}\omega_d t) + a_2 \exp(-\mathrm{i}\,\omega_d t)] \quad (3.15)$$

एक आदर्श दोलक के साथ एक अवमंदित दोलक के व्यवहार की तुलना करने के लिए हमें समीकरण (3.15) को इस रूप में लिखना चाहिए जिससे कि विस्थापन ज्यावक्रीयतः (Sinusoidally) हो। इसके लिए हम संमिश्र चरघातांकी (Complex exponential) को साइन और कोसाइन फलनों के पदों में लिखते हैं।

$$x(t) = \exp(-bt)\,[a_1(\cos \omega_d t + \mathrm{i} \sin \omega_d t) + a_2(\cos \omega_d t - \mathrm{i} \sin \omega_d t)]$$

$\cos \omega_d t$ और $\sin \omega_d t$ के गुणांकों को इनके साथ लेने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$x(t) = \exp(-bt)\,[(a_1 + a_2) \cos \omega_d t + \mathrm{i}\,(a_1 - a_2) \sin \omega_d t] \quad (3.16)$$

आइए अब हम

$$(a_1 + a_2) = a_0 \cos \phi$$

और $\quad -\mathrm{i}\,(a_1 - a_2) = a_0 \sin \phi \quad (3.17)$

मान लें। जहां a_0 और ϕ स्वेच्छ अचर है। (3.17) से निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$a_0 = 2\sqrt{a_1 a_2}$$

और $$\tan\phi = -i\,\frac{a_1 - a_2}{a_1 + a_2} \qquad (3.18)$$

दूसरे परिणाम को देखने से पता चलता है कि $\tan\theta$ एक संमिश्र राशि है। क्या इससे यह अर्थ भी निकलता है कि ϕ भी संमिश्र है ? प्रश्न यह उठता है कि संमिश्र कोण का विवेचन किस प्रकार किया जा सकता है ? इसे जानने के लिए हम निम्न सर्वसमिका (Identity)

$$\sec^2\phi = \frac{a_1 + a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}}$$

का प्रयोग करके $\cos\phi$ को ज्ञात करते हैं । तब

$$\cos\phi = \frac{a_1 + a_2}{2\sqrt{a_1 a_2}}$$

इसका मतलब यह हुआ कि $\cos\phi$ वास्तविक है और ϕ भी वास्तविक है।

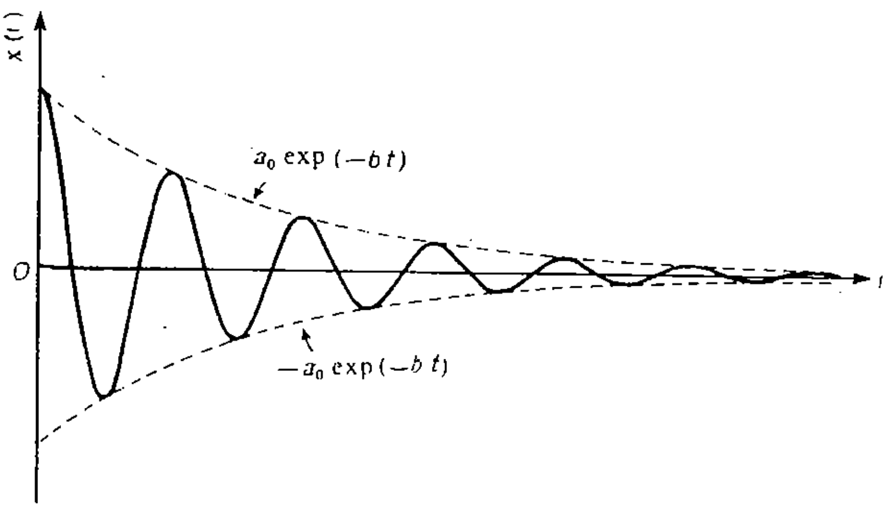
समीकरण (3.17) को समीकरण (3.16) में प्रतिस्थापित करने पर हम यह पाते हैं कि कोष्ठक के अंदर लिखा गया व्यंजक दो कोणों के योग का कोसाइन है। अतः दुर्बलतः अवमंदित दोलक ($b < \omega_0$) के लिए समीकरण (3.3) का व्यापक हल यह होगा

$$x(t) = a_0 \exp(-bt)\cos(\omega_d t + \phi) \qquad (3.19)$$

जहाँ ω_d वही है जो कि समीकरण (3.16) में दिया गया है।

यहाँ आप यह ध्यान दें कि समीकरण (3.19) द्वारा दिया गया हल जो कि पूरी गति में समान बना रहता है, आवृत्ति ω_d ज्यावक्रीय गति को निर्धारित करता है। इस गुणधर्म का ठीक-ठीक समयांतरालों में दोलकों के प्रयोग में काफी महत्व होता है। अब प्रश्न यह उठता है कि आदर्श सरल आवर्त्त गति के अनुसार आयाम में किस प्रकार परिवर्तन होता है ? आप यह देखेंगे कि b से निर्धारित दर पर आयाम में समय के साथ चरघातांकीय रूप में कमी आती जाती है। अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि दुर्बलतः अवमंदित तंत्र की गति सरल आवर्त्त गति नहीं होती।

समीकरण (3.19) द्वारा निर्धारित अवमंदित दोलनी व्यवहार को चित्र 3.4 में $\phi = 0$ लेकर आलेखित किया गया है। क्योंकि कोसाइन फलन का मान +1 और −1 के बीच होता है, इसलिए विस्थापन समय वक्र $a_0 \exp(-bt)$ और $-a_0 \exp(-bt)$ के बीच स्थित होता है। इस तरह हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अवमंदन के कारण आयाम और कोणीय आवृत्ति में कमी आने लगती है।



चित्र 3.4 : दुर्बलतः अवमंदित सरल आवर्त्ती दोलक का विस्थापन - समय ग्राफ

अब प्रश्न यह उठता है कि किस प्रकार अवमंदन दोलन के आवर्त्त काल (Period) को प्रभावित करता है ? इस प्रभाव का पता आप यह देखकर लगा सकते हैं कि दोलन का आवर्त्त काल निम्न होता है

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - b^2)} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\gamma^2}{4m^2}}}$$

जबकि $b > 0$, $\omega_d < \omega_0$ इससे यह अर्थ निकलता है कि आदर्श दोलित की तुलना में आवमंदित दोलित्र के कंपन का आवर्त्त काल अधिक होता है। इस परिणाम का अनुभव आपने स्वयं भी किया होगा क्योंकि अवमंदन बल गति का प्रतिरोध करता है।

बोध प्रश्न 1

एक अवमंदित कमानी द्रव्यमान तंत्र के कंपन का आयाम 200 सेकंड में 10 से घटकर 2.5 cm हो जाता है। इस अवधि में यह 100 दोलन करता है तो आप इस तंत्र की अवमंदन सहित और अवमंदन रहित आवर्त्त कालों की तुलना कीजिए।

अभी तक हमने दुर्बल, क्रांतिक और अधिक अवमंदन के लिए अवमंदित दोलित्र से संबंधित अवकल समीकरण के हल के बारे में चर्चा की है। अब हम अपनी चर्चा केवल दुर्बलतः अवमंदित तंत्रों तक ही केन्द्रित सीमित रखेंगे।

3.4 दुर्बलत : अवमंदित दोलित्र की औसत ऊर्जा

इकाई 1 में हम अवमंदित दोलित्र की औसत ऊर्जा ज्ञात कर चुके हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि किस प्रकार अवमंदन का दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र की औसत ऊर्जा पर प्रभाव पड़ता है ? इस प्रश्न का उत्तर देने के संबंध में हम यह पाते हैं कि अवमंदन रहने पर समय के साथ दोलन के आयाम में कमी आती जाती है। इससे यह अर्थ निकलता है कि गति के प्रतिरोध को दूर करने में ऊर्जा का क्षय होता है। आपको याद होगा कि इकाई 1 में हम यह पढ़ चुके हैं कि किसी भी समय पर सरल आवर्त दोलित्र की संपूर्ण ऊर्जा गतिज ऊर्जा (Kinetic Energy) और स्थितिज ऊर्जा (Potential Energy) का योग होता है। हम इस परिभाषा को यहां भी लागू करके यह लिख सकते हैं

$$E = \text{गतिज ऊर्जा } (K.E.) + \text{स्थितिज ऊर्जा } (U)$$

$$= \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \tag{3.20}$$

जहाँ (dx/dt) तात्कालिक वेग को प्रकट करता है।

दुर्बलतः अवमंदित सरल आवर्त दोलित्र का तात्कालिक विस्थापन समीकरण (3.19) से प्राप्त हो जाता है :

$$x = a_0 \exp(-bt) \cos(\omega_d t + \phi)$$

इसे समय के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें तात्कालिक वेग प्राप्त होता है :

$$\frac{dx}{dt} = v = -a_0 \exp(-bt) [b \cos(\omega_d t + \phi) + \omega_d \sin(\omega_d t + \phi)] \tag{3.21}$$

अतः दोलित्र की गतिज ऊर्जा निम्न होगी

$$\text{गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2} m a_0^2 \exp(-2bt) [b \cos(\omega_d t + \phi) + \omega_d \sin(\omega_d t + \phi)]^2$$

$$= \frac{1}{2} m a_0^2 \exp(-2bt) [b^2 \cos^2(\omega_d t + \phi) + \omega_d \sin^2(\omega_d t + \phi)$$

$$+ b\omega_d \sin^2(\omega_d t + \phi) \tag{3.22 क}$$

इसी प्रकार हम यह प्राप्त कर सकते हैं कि दोलित्र की स्थितिज ऊर्जा यह है :

$$\text{स्थितिज ऊर्जा (U)} = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2$$

क्योंकि $k = m\omega_0^2$ का मान प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है

$$\text{स्थितिज ऊर्जा} = \frac{1}{2} m a_0^2 \omega_0^2 \exp(-2bt) \cos^2(\omega_d t + \phi) \qquad (3.22\text{ख})$$

अतः किसी समय t पर दोलित्र की संपूर्ण ऊर्जा निम्न होगी

$$E(t) = \frac{1}{2} m a_0^2 \exp(-2bt) [(b^2 + \omega_0^2) \cos^2(\omega_d t + \phi)$$
$$+ \omega_d^2 \sin^2(\omega_d t + \phi) + b\, \omega_d \sin^2(\omega_d t + \phi)] \qquad (3.23)$$

जब अवमंदन बहुत कम होता है, तब एक दोलन पूरा होने पर दोलन के आयाम में कोई विशेष परिवर्तन नहीं आता। अतः हम गुणक $\exp(-2bt)$ को अनिवार्य रूप में एक अचर मान सकते हैं। और, क्योंकि $< \sin^2\theta > = < \cos^2\theta > = \frac{1}{2}$ और $< \sin\theta > = 0$ इसलिए एक चक्र का औसत लेने पर दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र की ऊर्जा यह होगी

$$< E > = \frac{1}{2} m a_0^2 \exp(-2bt) < [(b^2 + \omega_0^2) \cos^2(\omega_d t + \phi) + \omega_d^2 \sin^2(\omega_d t + \phi) + ...]$$

$$= \frac{1}{2} m a_0^2 \exp(-2bt) \left[\frac{b^2 + \omega_0^2}{2} + \frac{\omega_d^2}{2}\right]$$

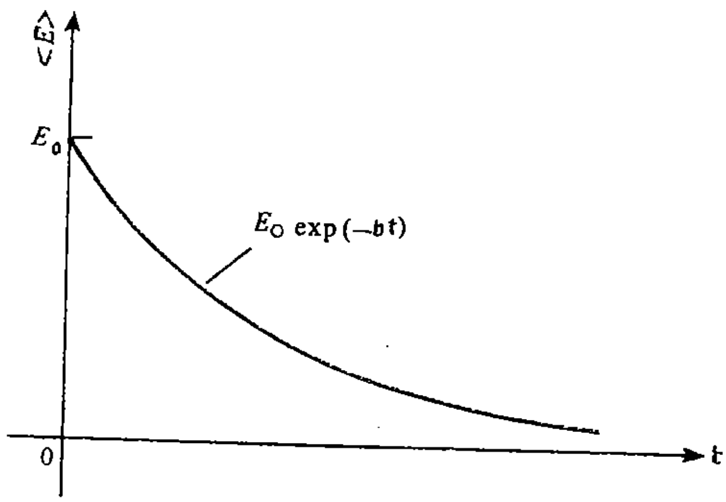
$$= \frac{1}{2} m a_0^2 \omega_0^2 \exp(-2bt) \qquad (3.24\text{ क})$$

क्योंकि $b << \omega_0$ पर $\omega_d \simeq \omega_0$.

इकाई 1 से आपको याद होगा कि $E_0 = \frac{1}{2} m a_0^2 \omega_0^2$ अनवमंदित दोलित्र की संपूर्ण ऊर्जा होती है। अतः हम यह लिख सकते हैं कि

$$< E > = E_0 \exp(-2bt) \qquad (3.24\text{ ख})$$

इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र की औसत ऊर्जा में समय के साथ चरघातांकी रूप में कमी आती जाती है। इस तथ्य को चित्र 3.5 में दिखाया गया है। समीकरण (3.24 ख) से यह भी पता चलता है कि ऊर्जा की क्षय-दर b के मान पर निर्भर करती है, b का मान जितना अधिक होगा, ऊर्जा का क्षय उतनी ही तेजी से होगा।



चित्र 3.5 : अवमंदित सरल आवर्ती दोलक की औसत ऊर्जा

3.4.1 एक चक्र में क्षयित औसत शक्ति

क्योंकि अवमंदित दोलित्र की ऊर्जा समय के साथ अचर नहीं होती, इसलिए dE/dt शून्य नहीं होगा। वास्तव में यह ऋणात्मक होती है। किसी भी समय ऊर्जा में हो रही हानि की दर से क्षयित तात्कालिक शक्ति प्राप्त हो जाती है। समीकरण (3.20) से हम यह लिख सकते हैं कि

$$\frac{dE}{dt} = P(t) = m \left[\frac{d^2x}{dt^2} + kx\right] \frac{dx}{dt}$$

इस परिणाम को समीकरण (3.2) के साथ लेने पर हमें अवमंदित दोलित्र द्वारा क्षयित शक्ति निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त हो जाती है

$$P(t) = -\gamma \left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

इस समीकरण से यह पता चलता है कि घर्षण बल के विरुद्ध किए गए कार्य की दर तात्कालिक वेग के वर्ग के अनुलोमानुपाती (Directly Proportional) होता है। समीकरण (3.21) से प्राप्त के मान को इसमें प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$P(t) = -\gamma a_0^2 \exp(-2bt)\,[b^2 \cos^2(\omega_d t + \phi)$$
$$+ \omega_d^2 \sin^2(\omega_d t + \phi) + b\,\omega_d \sin^2(\omega_d t + \phi)]$$

अतः एक चक्र में क्षयित औसत शक्ति यह होती है।

$$< P > = \frac{1}{2}\,\gamma\, a_0^2\, \omega^2 \exp(-2bt)$$
$$= -\frac{\gamma}{m} < E >$$
$$= -2b < E > \qquad (3.25)$$

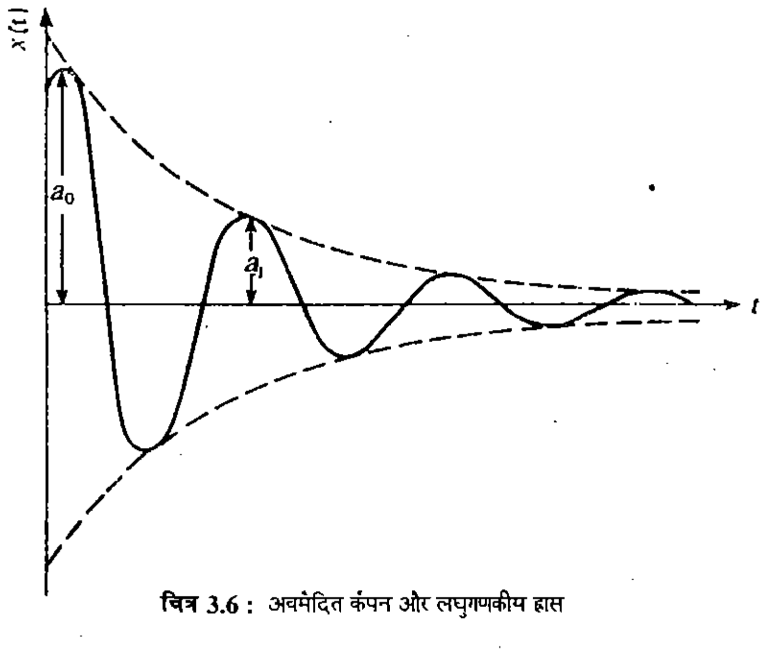
हम इस परिणाम को समय के सापेक्ष समीकरण (3.24 ख) को अवकलित करके सीधे प्राप्त कर सकते हैं।

3.5 अवमंदित तंत्रों को अभिलक्षित करने की विधियां

हम जानते हैं कि श्यान अवमंदन निदर्श (Model) में अवमंदित दोलित्र γ और ω_0 से अभिलक्षित होता है। हम यह भी जानते हैं कि यह निदर्श अनेक अलग-अलग भौतिक तंत्रों में लागू होता है। अतः अब यह प्रश्न उठ सकता है कि क्या अवमंदित दोलनों को अभिलक्षित करने की और भी विधियां हैं। अनुभव से यह पता चलता है कि कुछ स्थितियों में अवमंदित गति को अभिलक्षित करने के लिए अन्य प्राचलों (Parameters) का प्रयोग अधिक सुविधाजनक होता है। पर सभी स्थितियों में हम इनका γ और ω_0 के साथ संबंध स्थापित कर सकते हैं।

3.5.1 लघुगणकीय ह्रास (Logarithmic Decrement)

तंत्र में उपस्थित अवमंदन की मात्रा मालूम करने की सबसे अधिक सुविधाजनक विधि उस दर को मापना है जिस दर से दोलन का आयाम कम होता जाता है। आइए हम चित्र 3.6 में ग्राफीय रूप में दिखाए गए अवमंदित कंपन पर विचार करें। मान लीजिए a_0 और a_1 दोलन के प्रथम दो उत्तरोत्तर आयाम हैं जिनमें एक आवर्तकाल का अंतर है।



चित्र 3.6 : अवमंदित कंपन और लघुगणकीय ह्रास

ध्यान दीजिए कि ये आयाम समान दिशा/चतुर्थांश (Qudrant) में स्थित होते हैं। यदि T दोलन का आवर्त्त-काल हो, तो दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र से संबंधित समीकरण (3.19) का प्रयोग करके हम लिख सकते हैं कि

$$a_1 = a_0 \exp(-bT)$$

जिससे कि

$$\frac{a_0}{a_1} = \exp(bT) = \exp(\gamma T/2m) \qquad (3.26)$$

ध्यान दीजिए कि अनुपात a_0/a में बड़ा आयाम अंश में है। यही कारण है कि इस अनुपात को ह्रास (Decrement) कहा जाता है। अब प्रश्न यह उठ सकता है कि क्या किन्हीं दो क्रमागत आयामों का ह्रास समान होता है ? इसका उत्तर "हाँ" में है। इसे दिखाने के लिए आइए हम दूसरे आयाम और तीसरे आयाम का अनुपात लें। इन्हें समीकरण (3.19) में $t = T$ और $t = 2T$ लेकर प्राप्त किया जा सकता है। अतः, हम यह लिख सकते हैं

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_0 \exp(-bT)}{a_0 \exp(-2bT)} \exp(bT)$$

अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि किन्हीं दो क्रमागत आयामों के लिए, जिनमें एक आवर्त-काल का अंतर है, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \exp(bT) = d \qquad (3.27)$$

अर्थात किन्हीं दो क्रमागत आयामों का ह्रास समान होता है जिसे हम इस प्रकार से लिख सकते हैं

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{a_{n-1}}{a_n} = d \qquad (3.28)$$

एक आवर्त्त-काल के अंतर वाले उत्तरोत्तर दोलन आयामों के अनुपात के लघुगणक को लघुगणकीय ह्रास कहा जाता है। इसे प्रायः प्रतीक λ से प्रकट किया जाता है।

$$\lambda = \ln\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = \frac{\gamma T}{2m} \qquad (3.29)$$

इस समीकरण से यह पता चलता है कि यदि दो उत्तरोत्तर आयाम ज्ञात हों तो λ मालूम किया जा सकता है। पर, प्रयोग की दृष्टि से n आवर्त्त-काल के अंतर वाले दोलन आयामों की तुलना करना अधिक सुविधाजनक होता है और साथ ही अधिक सही होता है। अर्थात् इस संधि में हम a_0/a_n मापते हैं।

इस अनुपात को मालूम करने के लिए पहले हम समीकरण (3.29 क) को उलटा करके इसे इस प्रकार लिखते हैं

$$\frac{a_{n-1}}{a_n} = \exp(\lambda)$$

अब, अनुपात को a_0/a_n को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$\frac{a_0}{a_n} = \left(\frac{a_0}{a_1}\right)\left(\frac{a_1}{a_2}\right)\left(\frac{a_2}{a_3}\right)\ldots\ldots\ldots\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = [\exp(\lambda)]^n$$

$$= n \exp(\lambda) \qquad (3.30)$$

क्योंकि किन्हीं दो क्रमागत आयामों का आयाम समान होता है।

दोनों ओर लघुगणक लेने पर अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है :

$$\lambda = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{a_0}{a_n}\right) \qquad (3.31)$$

इससे यह पता चलता है कि यदि n के विभिन्न मानों के लिए $\ln (a_0/a_n)$ और n को आलेखित करें तो हमें एक सरल रेखा प्राप्त होगी। इस रेखा की प्रवणता (Slope) से λ प्राप्त हो जाता है।

बोध प्रश्न 2

अवमंदित सरल आवर्त दोलित्र का प्रथम आयाम 20 से·मी· का है। 100 दोलनों के बाद आयाम घटकर 2 से·मी· का हो जाता है जबकि प्रत्येक आवर्त काल 4.6 सेकंड का है। लघुगणकीय ह्रास और अवमंदन अचर ज्ञात कीजिए। यह भी बताइए कि कितने दोलनों पर आयाम घटकर 50% हो जाता है।

3.5.2 शिथिलता काल (Relaxation Time)

भौतिकी में हम प्रायः किसी राशि के क्षय को प्रारंभिक मान की भिन्न e^{-1} के रूप में मापते हैं। इससे हमें आयाम का मूल मान से घटकर $e^{-1} = 0.368$ गुणा तक होने में लगने वाले समय की सहायता से अवमंदन प्रभाव को एक अन्य विधि से व्यक्त कर सकते हैं। इस प्रक्रिया में लगने वाले इस समय को *विश्रांति काल* कहा जाता है। इसे समझने के लिए पहले आप यह याद कीजिए कि अवमंदित दोलित्र का आयाम

$$a(t) = a_0 \exp(-bt)$$

होता है।

यदि समयांतराल τ के बाद आयाम $a(t + \tau)$ हो तो हम इसे प्रकार लिख सकते हैं :

$$a'(t) = a_0 \exp[-b(t + \tau)]$$

अनुपात $a'(t)/a(t)$ लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{a'(t)}{a(t)} = \exp(-b\tau)$$

$$= \frac{1}{e}, b\tau = 1 \tag{3.32}$$

इससे यह पता चलता है कि $b = \tau^{-1}$ पर आयाम अपने प्रारंभिक मान से घटकर $e^{-1} = 0.368$ हो जाता है।

इस परिणाम को समीकरण (3.26) में लागू करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है।

अतः शिथिलता काल τ उसे तीव्रता का माप है जिससे गति अवमंदित होती है।

बोध प्रश्न 3

बोध प्रश्न 1. के कमानी-द्रव्यमान तंत्र का विश्रांति काल ज्ञात कीजिए।

3.5.3 गुणता कारक (Quality Factor)

अवमंदन प्रभाव को व्यक्त करने की एक अन्य विधि उसे ऊर्जा की क्षय-दर से व्यक्त करता है। समीकरण (3.24 ख) से हम यह जानते हैं कि समय $t = \frac{1}{2b} = \frac{m}{\gamma}$ सेकंड में दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र की औसत ऊर्जा घटकर E_0e^{-1} हो जाती है यदि ω_0 उसकी कोणीय आवृत्ति हो तो इस समय में दोलित्र $\omega_d m/\gamma$ रेडियन से कंपित करेगा। दुर्बलतः अवमंदित तंत्र की ऊर्जा का घटकर E_0e^{-1} होने में वह तंत्र जितने रेडियन का दोलित करते हैं, वह गुणता कारक Q का माप होता है।

$$Q = \frac{\omega_d}{2b} = \frac{\omega_d m}{\gamma} = \frac{\omega_d \tau}{2} \tag{3.33}$$

ध्यान दीजिए कि Q केवल एक संख्या है और इसकी कोई भी विभा नहीं है। सामान्यतः γ छोटा होता है और Q एक काफी बड़ी संख्या होती है। मिसाल के तौर पर ट्यूनिंग फार्म का Q हजार या इससे भी अधिक होता है। जबकि रबर बैंड का Q काफी कम (~10) होता है। ऐसा होने का कारण रबर बैंड में अणुओं की लंबी शृंखला के कुंडलन से उत्पन्न आंतरिक घर्षण है। एक परमाणु में मुक्त रूप से विकिरण कर रहे इलेक्ट्रान के लिए $Q \sim 5 \times 10^7$ होता है। यह मान जीवन काल के विकिरण का लगभग 10^{-8}s होता है। अनवमंदित दोलित्र $(\gamma = 0)$ का गुणता कारक अंनत होता है।

दुर्बलतः अवमंदित यांत्रिक दोलित्र के गुणता कारक को कमानी कारक और अवमंदन अचर के पदों में व्यक्त किया जा सकता है।

क्योंकि दुर्बल अवमदन के लिए $\omega_d \simeq \omega_0 = \sqrt{k/m}$

इसलिए $Q = \sqrt{km/\gamma^2}$

दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि दुर्बलतः अवमंदित दोलित्र का गुणता कारक k के वर्गमूल के अनुलोमानुपाती γ और के प्रतिलोमानुपाती (Inversely Proportional) होता है।

हम समीकरण (3.25) की सहायता से समीकरण (3.33) को भौतिक दृष्टि से अधिक सार्थक रूप में लिख सकते हैं :

$$Q = \frac{\omega_d}{2\pi} = \frac{2\pi}{\tau} \times \frac{< E >}{<p>}$$

$$= 2\pi \frac{\text{तंत्र में जमा औसत ऊर्जा}}{\text{प्रति चक्र में हानि हुई औसत ऊर्जा}} \quad (3.34)$$

हम गुणता कारक का संबंध अवमंदित दोलित्र की आवृत्ति में होने वाले मित्रात्मक परिवर्तन के साथ स्थापित कर सकतें हैं। इस संबंध को स्थापित करने के लिए हम यह देखते हैं कि

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

या

$$\frac{\omega_d^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{b^2}{\omega_0^2}$$

$$= 1 - \frac{1}{4Q^2}$$

$$\therefore \frac{\omega_d}{\omega_0} = (1 - 1/4\ Q^2)^{1/2}$$

$$= 1 - 1/8Q^2$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि ω_0 में $1/8Q^2$ का भिन्नात्मक परिवर्तन होता है।

बोध प्रश्न 4

एक ट्यूनिंग फार्क जिसकी आवृत्ति 512 हर्ट्ज (Hz) है। उसका गुणता कारक 6×10^4 है यह अवधि ज्ञात कीजिए जिसमें कि इसकी ऊर्जा घटकर अपनी प्रारंभिक ऊर्जा के मान का 10% रह जाए।

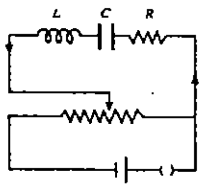
3.6 अवमंदित तंत्रों के उदाहरण

आप जानते हैं कि सभी सरल आवर्त्त दोलक में कुछ न कुछ अवमंदन अवश्य होता है जिसका मान सामान्यतः बहुत कम होता है। अवमंदन के प्रभाव को अच्छी तरह से समझने के लिए यहां हम दो विशेष स्थितियाँ ले रहे हैं : (i) एल सी आर परिपथ में आवेश के दोलन, और (ii) निलंबित कुंडली गैल्वेनोमीटर में कुंडली की गति । इन-दोनों में हमारी विशेष रुचि इसलिए है, क्योंकि ज़हां एल सी आर परिपथ का रेडियो इंजीनियरी में काफी अधिक प्रयोग होता है वहीं निलंबित कुंडली ग़ैल्वोनोमीटर का प्रयोग भौतिकी के प्रयोगशाला में होता है।

3.6.1 एल सी आर परिपथ

इकाई 1 में हम यह देख चुके हैं कि एल सी परिपथ में आवेश दोलन करता है और यह दोलन सरल आवर्त्त गति जैसा होता है। यदि परिपथ में एल प्रतिरोधक (Resistor) जोड़ दिया जाए तो क्या आपकी राय में दोलन संबंधी व्यवहार में कोई परिवर्तन आ सकता है ? इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए हम चित्र 3.7 लेते हैं यह, चित्र 1.11 के समान है, अंतर केवल यह है कि इसमें एक प्रतिरोधक R लगा हुआ है। यदि संधारित्र (Capacitor) के विसर्जन आवेश के कारण परिपथ में धारा प्रवाहित होती हो तो प्रतिरोधक पर वोल्टता ह्रास RI होता है। इस तरह समीकरण (1.36) अब निम्न रूप का हो जाता है

यहाँ पर विभव (charge) को Q की जगह q से प्रदर्शित कर रहे हैं। ताकि यह गुणता कारक Q से अलग हो।



चित्र 3.7 : एक एल सी आर परिपथ

$$\frac{q}{C} = -L\frac{dI}{dt} - RI \qquad (3.35)$$

इससे यह पता चलता है कि यांत्रिक दोलित्र के बल समीकरण के स्थान पर एल सी आर परिपथ का वोल्टता समीकरण आ जाता है।

क्योंकि $I = dq/dt$ इसलिए समीकरण (3.35) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0 \qquad (3.36)$$

इस समीकरण को समीकरण (3.2) के साथ तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि L, R और $\frac{1}{C}$ क्रमशः m, γ और k के अनुरूप है। इससे यह अर्थ निकलता है कि वैद्युत परिपथ में प्रतिरोध का अवमंदन प्रभाव यांत्रिक तंत्र में श्यान बल के अवमंदन प्रभाव के ठीक अनुरूप होता है।

अब हम पूरे समीकरण (3.36) को L से भाग देते हैं।

तब

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0 \qquad (3.37)$$

इस रूप में समीकरण (3.37) समीकरण (3.3) के अनुरूप है, और दोनों की तुलना सीधे की जा सकती है। इससे हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

और $\quad b = R/2L \qquad (3.38)$

हम जानते हैं कि b की विभाएं प्रतिलोम समय की विभाएं होती हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि R/L की भी वही विभाएं होती हैं जो s^{-1} की विभाएं अर्थात् ω_0 की विभाएं हैं। यही कारण हे कि $\omega_0 L$ के ओम में मापा जाता है।

इन अनुरूपताओं से यह स्पष्ट हो जाता है कि समीकरण (3.3) के सभी परिणाम समीकरण (3.37) पर भी लागू होते हैं। दुर्बलतः अवमंदित परिपथ में समय पर संधारित प्लेट पर आवेश यह होता है।

$$q(t) = q_0 \exp\left(-\frac{R}{2L}t\right)\cos(\omega_d t + \phi) \qquad (3.39\ \text{क})$$

जिसमें दोलनी विसर्जन की कोणीय आवृत्ति निम्न होती है

$$\omega_d = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

समीकरण (3.39 ख) से यह पता चलता है कि आवेश आयाम $q_0 \exp\left(\frac{R}{2L}t\right)$ में उस दर से क्षय होगा जो कि प्रतिरोध पर निर्भर करती है। इस तरह हम यह पाते हैं कि एल सी आर परिपथ में प्रतिरोध ही केवल क्षयकारी अवयव होता है : R में वृद्धि होने पर आवेश की क्षय-दर में बढ़ जाती है और दोलन की आवृत्ति कम हो जाती है । क्योंकि

$$\frac{1}{LC} > R^2/4L$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

क्योंकि $\omega_0 L$ को ओम में मापा जाता है, इसलिए $\frac{1}{\omega_0 C}$ भी ओम में मापा जाता है। इन्हें क्रमशः *प्रेरण प्रतिघात* (Inductive Reactance) और *धारिता प्रतिघात* (Capacitive Reactance) कहा जाता है।

यदि $R = 0$ हो तो समीकरण (3.39 क) समीकरण (1.38) के रूप का हो जाता है और $\omega_d \to \omega_0$ इसलिए दुर्बलता अवमंदित एल सी आर परिपथ का यह होगा

$$Q = \frac{\omega_d}{2b} \simeq \omega_0 \frac{L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad (3.40)$$

इस समीकरण से यह पता चलता है कि केवल प्रेरण परिपथ $R = 0$ के लिए गुणता कारक अंनत होगा।

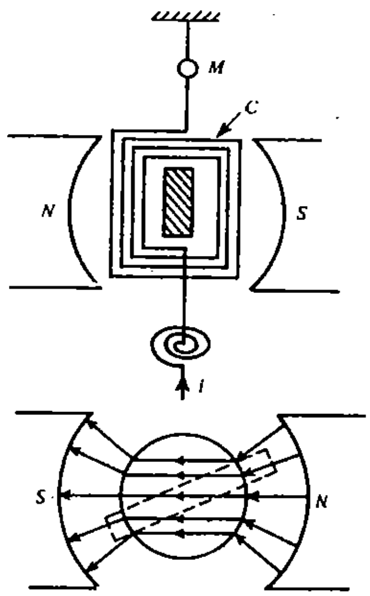
बोध प्रश्न 5

एक एल सी आर परिपथ में $L = 2$mH अगर $C = 5\mu$F यदि $R = 1\Omega$, 40Ω और 100Ω हो तो दोलन की आवृत्ति और गुणता कारक मालूम कीजिए जबकि विसर्जन दोलनी हो।

3.6.2 निलंबित गैल्वेनोमीटर

अवमंदन का एक हिस्सा हवा के श्यान कर्षण के कारण होता है। आमतौर पर यह बहुत कम होता है। गैल्वोनोमीटर की कुडंली जैसे ही चुंबकीय क्षेत्र में घूमती है, इससे स्वप्रेरित e.m.f. उत्पन्न होता है जो लैंज के नियम के अनुसार गति का विरोध करता है। इसलिए इसे विद्युत चुंबकीय अवमंदन कहते हैं यह गैल्वोनोमीटर की कुंडली को नियंत्रित करता है, जिसे हम प्रयोग में ला रहे हैं।

निलंबित गैल्वेनोमीटर के अंदर एक चुंबकीय क्षेत्र में धारा ले जाने वाली निलंबित कुंडली होती है। चुंबकीय क्षेत्र नाल-चुंबक (Horse Shoe Magnet) से पैदा किया जाता है। इसमें चुंबक को इस तरह रखा जाता है कि कुंडली सदा ही चुंबकीय बल रेखा की दिशा में रहती है। एक समान प्रबलता प्राप्त करने के लिए चुंबक के ध्रुवों के बीच एक लोहे का बेलन लटका दिया जाता है, जैसा कि चित्र (3.8) में दिखाया गया है। जब हम गैल्वेनोमीटर की कुंडली में आवेश भेजते हैं तो यह कुंडली θ कोण से घूम जाती है। क्योंकि कुंडली यांत्रिक रूप में एक मरोड़ी लोलक (Tortional Pendulum) होती है इसलिए इस पर एक प्रत्यानयन युग्म $-k_t\theta$ और एक अवमंदन युग्म $-\gamma\, d\theta/dt$ लगता है। क्या आप जानते हैं कि इस स्थिति में अवमंदन किस प्रकार प्रभावित करता है ? इसका उद्‌गम वायु घर्षण और वैद्युत चुंबकीय प्रेरण में होता है।



चित्र 3.8 : निलंबित गैल्वेनोमीटर का एक चित्रीय निरूपण

अतः कुंडली की गति के संबंध में समीकरण (1.35) निम्न रूप का हो जाता है

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -k_t\theta - \gamma \frac{d\theta}{dt} \tag{3.41}$$

जहाँ I निलंबित अक्ष के प्रति कुंडली का जड़त्व आघूर्ण (Moment of Inertia) है।

समीकरण (3.41) को I से भाग देने पर और

$$2b = \gamma/I$$

तथा

$$\omega_0^2 = k_t/I \tag{3.42}$$

लिखने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2b\frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2\theta = 0 \tag{3.43}$$

इस समीकरण का भी रूप वही है जो समीकरण (3.3) का है। इसलिए पहले प्राप्त किए गए सभी परिणाम समीकरण (3.4b) में बतायी गई कुंडली की गति पर भी लागू होंगे।

कम अवमंदन पर समीकरण (3.43) का हल निम्न यह होता है

$$\theta = \theta_0 \exp(-bt)\cos(\omega_d t + \phi) \tag{3.44}$$

जहाँ $\theta_0 \exp(-bt)$ दोलन का आयाम है। समीकरण (3.44) एक दोलनी गति निर्धारित करती है जिसमें दोलन का आवर्त काल T निम्न यह होता है।

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}} = \frac{2\pi}{\left[\frac{k_t}{I} - \frac{\gamma^2}{4I^2}\right]^{1/2}} \tag{3.45}$$

यही कारण है कि दुर्बलतः अवमंदित निलंबित गैल्वेनोमीटर को *प्रक्षेप-गैल्वेनोमीटर* (Ballistic Galvanometer) कहा जाता है। ध्यान दीजिए कि अवमंदन को कम करने के लिए हमें γ को कम करना होगा और हम किस प्रकार γ को कम कर सकते हैं ? जैसा कि पहले बताया जा चुका है कि प्रायः वायु अवमंदन काफी कम होता है। पर यह होता अवश्य है। वैद्युत चुंबकीय अवमंदन को कम करने के लिए हमें प्रेरित emf को कम करना होगा। प्रेरित emf एक अचालक बॉस अथवा हाथी दांत के फ्रेम पर कुंडली पर उत्पन्न करते हैं। यदि फ्रेम धातु का हो तो इसे एक स्थान पर काट दिया जाता है जिससे कि इसमें धारा प्रवाहित न हो सके।

प्रक्षेप गैल्वेनोमीटर का गुणता कारक यह होता है।

$$Q = \frac{\omega_d}{2b} = \frac{I}{\gamma}\sqrt{\frac{k_t}{I} + \frac{\gamma^2}{4I^2}} \tag{3.46 क}$$

यदि $\frac{k_t}{I} > \frac{\gamma^2}{4I^2}$ तो व्यंजक यह हो जाता है

$$Q = \sqrt{\frac{k_t I}{\gamma^2}}$$

बोध प्रश्न 6

एक गैल्वेनोमीटर कुंडली के कंपन का आवर्त्त काल 4 सेकंड है। इसके कंपन का 46 सेकंड में आयाम घटकर अपने मूल आयाम का 1/10वाँ हो जाता है। अवमंदन अचर γ और गुणता कारक Q ज्ञात कीजिए।

3.7 सारांश

1. सरल आवर्त्ती दोलक का अवकल समीकरण यह है

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

जहाँ $2b = \gamma/m$ और $\omega_0^2 x = 0$

अधिक अवमंदन के समीकरण का हल यह है

$$x(t) = \frac{v_0}{\beta} \exp(-bt) \sinh \beta t$$

क्रांतिक अवमंदन का समीकरण यह है

$$x(t) = (p + qt) \exp(-bt)$$

और दुर्बल अवमंदन के संबंध में समीकरण यह होता है

$$x(t) = a_0 e^{-bt} \cos(\omega_d t + \phi)$$

2. दुर्बलतः अवमंदित दोलन के आयाम और औसत ऊर्जा में समय के साथ चरघातांकी रूप में

$$a = a_0 e^{-bt}$$

और

$$< E > = E_0 \exp(-2bt)$$

जहाँ a_0 प्रारंभिक आयाम है और E_0 संपूर्ण प्रारंभिक ऊर्जा है।

3. दुर्बलतः अवमंदित तंत्र का आवर्त्त काल निम्न होता है

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}}$$

4. लघुगणकीय ह्रास एक आवर्त्त काल के अंतर वाले उत्तरोत्तर आयामों के अनुपात का लघुगणक होता है। यह निम्नलिखित होता है।

$$\lambda = \ln\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}\right) = bT$$

5. एक चक्र में दुर्बलतः अवमंदित सरल आवर्ती दोलक द्वारा क्षयित ऊर्जा अथवा शक्ति की हानि-दर निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है

$$< P > = 2 < E > \tau$$

6. दुर्बलतः अवमंदित सरल आवर्त्ती दोलक का Q कारक निम्न होता है

$$Q = \omega_d \tau/2$$

7. एल सी आर परिपथ में आवेश के प्रवाह को निर्धारित करने वाला अवकल समीकरण निम्न प्रकार का है

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0$$

एल सी आर परिपथ में L, R और $1/C$ के व्यवहार क्रमशः यांत्रिक दोलित्र में m, γ और k के व्यवहार अनुरूप होते हैं। जब $\left(\frac{1}{LC}\right) > \frac{R^2}{4L^2}$ तो व्यवहार दोलनी होता है और दोलन की आवृत्ति यह होती है

$$\gamma_d = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

निम्न R परिपथ के लिए

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{L/C}$$

8. अवमंदित निलंबित गैल्वेनोमीटर का अवकल समीकरण यह होता है

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + k_t\theta = 0$$

दुर्बल अवमंदन में यह प्रक्षेप गति निर्धारित करता है जो यह है

$$\theta = \theta_0 \exp(-bt)\cos(\omega_d t + \phi)$$

जहाँ

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k_1}{I} - \frac{\gamma^2}{4I^2}}$$

3.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक सरल लोलक का आवर्त काल 2 सेकंड आगे आयाम 5° है। इसका 20 पूर्ण दोलन के बाद इसका आयाम घटकर 4° हो जाता है। अवमंदन अचर और समय अचर ज्ञात कीजिए।
2. एक सोनोमीटर का तार का गुणता कारक 4,000 है। तार 300 हर्ज (Hz) की आवृत्ति पर कंपन करता है। वह अवधि ज्ञात कीजिए जिसमें उसका आयाम घटकर अपने प्रारंभिक आयाम का आधा हो जाता हो।
3. एक बक्स जिसका द्रव्यमान 0.2 किलोग्राम है उसे कमानी के एक सिरे से जोड़ दिया गया है जिसका दूसरा सिरा एक दृढ़ आलेख में जुड़ा हुआ है। बक्स में 0.8 किलोग्राम का एक द्रव्यमान रखने पर तंत्र 4 दोलन प्रति सेकंड की दर से दोलन करने लगता है और 30 सेकंड में इसका आयाम 2 से· मी· से घटकर 1 से·मी· हो जाता है। (i) बल अचर (ii) समय अचर, (iii) कारक ज्ञात कीजिए।
4. एक एल सी आर परिपथ में $L = 5mH$, $C = 2\mu F$ और $R = 0.2\Omega$ बताइए कि विसर्जन दोलनी है कि नहीं। यदि दोलनी है तो आवृत्ति और परिपथ का गुणता कारक ज्ञात कीजिए। आवेश दोलन के आयाम को घटकर आधे आयाम तक आने में कितना समय लगेगा ? R के किस मान से विसर्जन ठीक अदोलनी हो जाएगा।
5. एक ट्यूनिंग फॉर्क जिसकी आवृत्ति 256 हर्ज (Hz) है उसका गुणता कारक 10^3 है। वह अवधि ज्ञात कीजिए जिसमें अवमंदन के न होने पर इसकी ऊर्जा घटकर अपनी मूल ऊर्जा की e^{-1} हो जाती है। इस अवधि में ट्यूनिंग फॉर्क कितने दोलन करेगा ?

3.9 हल/उत्तर

बोध प्रश्न

1. $T_d = \frac{200}{100} = 2s$

अब, $T_d = 2\,s = \frac{2\pi}{(\omega_0^2 + b^2)^{1/2}}$

जिससे कि

$\omega_0^2 = \pi^2 - b^2$

इस तरह $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{(\pi^2 - b^2)^{1/2}}$

b ज्ञात करने के लिए हम संबंध

$a = a_0 \exp(-bt)$

का प्रयोग करते हैं।

इसे इस रूप में लिखा जा सकता है

$$b = \frac{1}{t}\ln\left(\frac{a_0}{a}\right)$$

$$= \frac{1}{200}\ln\left(\frac{10}{2.5}\right)$$

$= \frac{2.3}{200} \log 10^4$

$= 6.93 \times 10^{-3}\ s^{-1}$

इस मान को (i) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$T_0 = \frac{2\pi}{[\pi^2 + (6.93 \times 10^{-3})^2]^{1/2}} = 2.0\ s$

$\simeq T_d$

2. हम जानते हैं कि

$\lambda = \frac{1}{n} \ln \frac{a_0}{a_n}$

$= \frac{1}{100} \ln 10$

$= \frac{2.3}{100} \log_{10} 10 = 2.3 \times 10^{-2}$

क्योंकि

$b = \lambda / T$

इसलिए $b = \frac{2.3 \times 10^2}{4.6}$

$= 5 \times 10^{-3} s^{-1}$

और मान ज्ञात करने के लिए हम (i) को उलट देते हैं।

$n = \frac{1}{\lambda} \ln (a_0/a)$

$= \frac{\ln 2}{2.3} \times 10^{-2}$

$= 30$

3. क्योंकि $\lambda = bT = \frac{1}{n} \ln \frac{a_0}{a_n}$

हम यह लिख सकते हैं

$= \frac{1}{200} \ln 4\ s^{-1}$

$= \frac{2.3 \times .601}{200}\ s^{-1}$

अतः $\tau = \frac{1}{b} = \frac{200}{2.3 \times .601} = 72s$

4. $Q = 6 \times 10^4$ और $\upsilon = 512$ Hz

$\therefore Q = \frac{\tau \omega_0}{2} = \pi \upsilon \tau$

या $\tau = \frac{Q}{\pi \upsilon} = \frac{6 \times 10^4}{512} = 37.3$ s

क्योंकि

$E = E_0 \exp(-2bt) = E_0 \exp(-2t/\tau)$

इसलिए, $E/E_0 = \frac{1}{10}$ के लिए हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{1}{10} = \exp\left(-\frac{2t}{\tau}\right)$$

अतः $t = \frac{\tau}{2}\ln 10$

$$= \frac{37.3}{2} \times 2.3$$

$$= 42.9 \text{ s}$$

5. $L = 2 \times 10^{-3}$ H और $C = 5 \times 10^{-6}$ F

$$\frac{1}{LC} = \frac{1}{2 \times 10^{-3} \times 6 \times 10^{-6}} = 10^{8}\ \text{s}^{-1}$$

स्थिति I

R = 1 Ω

$$\therefore \frac{R^{e}}{4L^2} = \frac{1\ \Omega^2}{4 \times (2 \times 10^{-3})^2\ \text{H}^2} = 6.00 \times 10^4\ \frac{\Omega^2}{\text{H}^2}$$

इस तरह,

$\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ जिससे कि विसर्जन दोलनी होता है, दोलन की आवृत्ति निम्न है

$$\upsilon = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$$

$$= 1.89 \text{ kHz}$$

और परिपथ का गुणता कारक

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2 \times 1.59 \times 10^3 \times 2 \times 10^{-3}}{1}$$

$$= 19.98$$

$$\simeq 20$$

स्थिति II $R = 40\Omega$

इस स्थिति में

$$\frac{R^2}{4L^2} = \frac{40 \times 40\ \Omega^2}{4 \times (2 \times 10^{-3})^2 \text{H}^2} = 10^8\ \frac{\Omega^2}{\text{H}^2}$$

स्थिति III

$R = 100\Omega$

यहां $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{100^2}{4 \times (2 \times 10^{-3})^2} = 6.25 \times 10^8\ \frac{\Omega^2}{\text{H}^2}$

अर्थात् $\frac{R^2}{4L^2} > \frac{1}{4L^2}$ यह रुद्ध दोल गति के संगत है।

ध्यान दीजिए कि परिपथ में प्रतिरोध बढ़ाने पर अवमंदन बढ़ जाता है।

6. $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} = 4\text{s}$

or

$$\omega_0^2 - b^2 = \frac{\pi^2}{4}$$

Also

$$\ln \frac{a_0}{a_n} = 10 = b\,t$$

or

$$b = \frac{1}{t} \ln 10$$

$$= \frac{2.3}{465} \log 10 = 0.05 \text{ s}^{-1}$$

अतः

$$\omega_0^2 = .0025 + 2.4649$$

$$= 2.467 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_0 = 1.57 \text{ s}^{-1}$$

और

$$\theta = \frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{\omega_0}{2b} = \frac{1.57}{0.1} = 15.7$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. क्योंकि $\theta = \theta_0 e^{-bt}$ इसलिए

$$b = \frac{1}{t} \log \frac{\theta_0}{\theta}$$

$$= \frac{1}{40} \log \frac{5}{4}$$

$$= 5.58 \times 10^{-3} \text{ S}^{-1}$$

और $\tau = \frac{1}{b} = 179.2$ s

2. क्योंकि $\theta = \omega_0 \tau$ इसलिए

$$\tau = \frac{\theta}{\omega_0} = \frac{4000}{2\pi \times 300} = 4.24 \text{ s}$$

अब $a = a_0 e^{-bt} = a_0 e^{-t/\tau}$

$$\therefore t = \tau \log \frac{a_0}{a} = 4.24 \log_{10}^{2} = 2.94\text{s}$$

3. (i) यहाँ $\omega_0 = 2\pi \upsilon = 2 \times 3.14 \times 4 = 25$ rad s^{-1} (If the damping is small)

लेकिन $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ या $k = m\,\omega_0^2 = 1 \times 25^2 = 625$ Nm^{-1}

(ii) $a = a_0 e^{-bt}$ यहाँ $b = \frac{\log 2}{30} = 0.023$ s^{-1}

समय अचर $\tau = \frac{1}{b} = \frac{1}{0.023} = 44$ s

(iii) $Q = \omega_0\tau = 25 \times 44 = 1100$

4. यहां $\frac{1}{LC} = \frac{1}{5 \times 10^{-3} \times 2 \times 10^{-6}} = 10^8\, s^{-2}$

और $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{(0.2)^2\, \Omega^2}{4 \times (5/10^{-3})^2}\, H^2 = 400 \quad \frac{\Omega^2}{H^2}$

क्योंकि $\frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$ इसलिए विसर्जन दोलनी होता है।

और इसकी आवृत्ति

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} = 1.59 \times 10^3\ \text{Hz}$$

परिपथ का गुणता कारक यह है

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2 \times 1.59 \times 10^3 \times 5 \times 10^{-3}}{0.2} = 249.8$$

और

$$t = \frac{R}{2L}\ \ln\left(\frac{a}{a_0}\right) = \frac{0.2}{2 \times 5 \times 10^{-3}}\ \log 2 = 13.86\text{s} \simeq 14\ \text{s}$$

विसर्जन ठीक अदोलनी होगा जबकि

$$\frac{1}{LC} = \frac{R^2}{4L^2} \text{ या } R^2 = \frac{4L}{C}$$

$$= \frac{4 \times 5 \times 10^{-3}}{2/10^{-6}} = 10^4 \text{ या } R = 100\,\Omega$$

5. समय t पर अवमंदित सरल आवर्त्ती दोलक की ऊर्जा यह होती है

$$E = E_0 \exp(-2bt)$$

$$= E_0 \exp(2t/\tau)$$

जहाँ $\tau = b^{-1}$ विश्रांति काल है।

जब $t = \tau/2$ तो $E = \frac{E_0}{e}$ और $Q = \frac{\omega_d \tau}{2}$ इसलिए

$$\tau = \frac{2}{\omega_d} = \frac{2 \times 10^3}{2\pi \times 256\ s^{-1}} = \frac{10^3}{256\pi\ s^{-1}} = 1.24\ \text{s}$$

इस तरह, 0.62 s में ऊर्जा अपने प्रारंभिक मान के $\frac{1}{e}$ हो जाती है।

इस अवधि में ट्यूनिंग फॉर्क द्वारा किए गए दोलनों की संख्या निम्न होती है

$$n = \nu_d \times t$$

$$= 256 \times 0.62$$

$$= 156\ \text{Hz}$$

3.10 शब्दावली

अध्यारोपण	Superposition
अवकल समीकरण	Differential Equation

अवमंदन	Damping
आयाम	Amplitude
आवर्त्त काल	Period
आवेग	Impulse
आवृत्ति	Frequency
कर्षण	Drag
क्रांतिक अवमंदन	Critical Damping
क्षय	Decay
गुणता कारक	Quality Factor
चरघातांकी	Exponential
दुर्बल अवमंदन	Weak Damping
दोलक	Oscillator
दोलन	Oscillation
दोलित्र	Oscillator
धारिता प्रतिघात	Capacitive reactance
निलंबित कुंडल गैल्वेनोमीटर	Suspended Coil Galvanometer
प्रक्षेप गैल्वेनोमीटर	Suspended needle Galvanometer
प्रतिघात	Reactance
प्रतिरोधक	Resistor
प्रत्यानयन बल	Restoring Force
प्रबल अवमंदन	Heavy Damping
प्राचल	Parameter
प्रेरण प्रतिघात	Inductive Reactance
मरोड़ी लोलक	Tortional Pendulum
रूद्ध दोल	Dead Beat
लोलक	Pendulum
विमा	Dimensions
विश्रांति काल	Relaxation Time
श्यान	Viscus
संधारित्र	Capacitor
सरल आवर्त्त गति	Simple Harmonic Motion
साम्यावस्था	Equilibrium

इकाई 4 प्रणोदित दोलन और अनुनाद

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हम एक तंत्र के दोलन के आयाम और आवृत्ति पर अवमंदन के प्रभाव के बारे में जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। हमने देखा है कि दीवार की घड़ी अथवा एल.सी. परिपथ जैसे अनेक तंत्र हैं जिनमें दोलन समाप्त होते हुए नज़र नहीं आते। इन तंत्रों में दोलन को बनाए रखने के लिए हमें तंत्र को बाह्य स्रोत से ऊर्जा देनी पड़ती है और इसे हम परिचालक कहते हैं जो ऊर्जा देता रहता है। समान्यतः परिचालक की आवृत्ति और परिचालित तंत्र की आवृत्ति समान नहीं होती, परन्तु स्थायी अवस्था में तंत्र उसी आवृत्ति से दोलन करता है जिस आवृत्ति से उस पर आवृत्ति बल लगाया जाता है, चाहे उस तंत्र की प्राकृतिक आवृत्ति कुछ भी क्यों न हो। ऐसे दोलनों को प्रणोदित दोलन कहते हैं। फिर भी, जब परिचालन बल की आवृत्ति ठीक वही होती है, जोकि कंपायमान तंत्र की प्राकृतिक आवृत्ति हैं तब हमें एक दर्शनीय प्रभाव देखने को मिलता है अर्थात् वह यह है कि प्रणोदित दोलनों का आयाम बहुत अधिक हो जाता है और ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि अनुनाद हो रहा है। क्या आप जानते हैं कि गैलीलियो ही वह पहला व्यक्ति था, जिसने इस बात का पता लगाया था कि अनुनाद कैसे होता है और यह क्यों होता है ? ऐसी अनेक यांत्रिक और आण्विक परिघटनाएं हैं जिनमें अनुनाद का होना ठीक माना जाता है। परन्तु कुछ ऐसी भी परिघटनाएं हैं जिनमें अनुनाद का होना काफी आपत्तिजनक है और शाब्दिक रूप से दोलन कर रहे तंत्र को पृथक कर सकता है। उदाहरण के तौर पर, तेज चल रही हवा से निलंबित पुल दोलन करने लगाता है। यदि हवा से उत्पन्न उच्चावली बल की आवृत्ति और पुल की प्राकृतिक आवृत्ति समान हो जाए तो ऐसी स्थिति में पुल की आवृत्ति का आयाम धीरे-धीरे बढ़ता है और अन्त में पुल टूट सकता है। यही कारण था कि सन् 1940 में वाशिंगटन राज्य में टकोमा नैरोजा पुल चालू होने के चार महीने बाद ही टूट गया। और यही कारण है कि निलम्बन पुल पर जब सेना मार्च करती हुई जाती है, तो सिपाहियों को निर्देश दिया जाता है कि वह कदम मिलाकर न चलें, जिससे कि अनुनादी कंपन न हो सके। व्यवहार में, विमुक्त तंत्र बहुत ही कम है। ठोस और आण्विक भौतिकी में दो या अधिक तंत्र स्थैतिक विद्युत बलों से युग्मित होते हैं। विद्युत परिपथ में प्रेरक और संधारक युग्मत होते हैं। इस प्रकार के तंत्रों के दोलन के अध्ययन अगली इकाई में करेंगे।

इस इकाई में हम बाह्य आवर्ती बल से परिचालित तंत्र की अनुक्रिया के बारे में विस्तार से पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि आप :

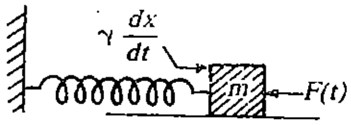
- आवर्ती बल से परिचालित तंत्र का अवकल समीकरण लिख सकें और उसे हल कर सकें ;
- अलग-अलग आवृत्तियों पर दोलक की अनुक्रिया का विश्लेषण कर सकें ;

- प्रणोदित दोलक की अनुनाद चौड़ाई और गुणता कारक की गणना कर सकें ;
- एक LCR परिपथ का समीकरण लिख सकें, जो कि आवृत्ति से प्रभावित है।

4.2 दुर्बलतः अवमंदित प्रणोदित दोलन का अवकल समीकरण

दुर्बलतः अवमंदित प्रणोदित आवर्ती दोलक का अवकल समीकरण प्राप्त करने के लिए आइए हम इकाई 3 में वर्णित कमानी द्रव्यमान तंत्र पर फिर से विचार करें। यहां, इस तंत्र पर अब एक बाह्य परिचालन बल (Driving Force), $F(t)$ लगाया गया है। कहने का अर्थ यह है कि निदर्श दोलक को अपनी प्राकृतिक आवृत्ति पर दोलित करते रहने के स्थान पर हम इसे एक आवृत्ति पर आवर्तीतः आगे-पीछे करते हैं (चित्र 4.1)। हम परिचालक बल को निम्नलिखित दोलनी फलन के रूप में लिख सकते हैं :

$$F(t) = F_0 \cos \omega t \tag{4.1}$$



चित्र 4.1 : दुर्बलतः अवमंदित प्रणोदित कमानी-द्रव्यमान तंत्र

जहां F_0 एक अचर है। मान लीजिए द्रव्यमान को अपनी साम्यावस्था-स्थिति से हटाकर उसे छोड़ दिया जाता है। किसी भी क्षण, उस पर निम्नलिखित बल कार्य करते हैं (i) एक प्रत्यानयन बल (Restoring Force), $-k\,x$ (ii) अवमंदन बल (Damping Force), $-\gamma \dfrac{dx}{dt}$ और (iii) परिचालन बल $F_0 \cos \omega t$ तब प्रणोदित दोलक के लिए समीकरण (3.2) को इस रूप में परिवर्तित किया जा सकता है :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - \gamma \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t \tag{4.2}$$

इसे m से भाग देने और पदों को व्यवस्थित रूप में रखने पर, प्रणोदित दोलक का गति-समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \tag{4.3}$$

जहां $2b = \dfrac{\gamma}{m}$, $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$ और $f_0 = \dfrac{F_0}{m}$ परिचालन बल का एक माप है।

अब आपके मन में यह प्रश्न उठ सकता है कि क्या यह समीकरण एक कमानी में लगे द्रव्यमान पर ही लागू होता है ? नहीं। यह किसी भी दोलक पर लागू होता है, जिसकी प्राकृतिक आवृत्ति ω_0 हो और उस पर एक आवर्त्ती परिचालन बल लग रहा हो।

आप पाएंगे कि समीकरण (4.3) अचर गुणांकों वाला एक विषम द्विकोटी रैखिक अवकल समीकरण है। अब हम प्रणोदित दोलक की गति के बारे में जानकारी प्राप्त करने के लिए इस समीकरण को हल करेंगे।

4.3 अवकल समीकरण के हल

समीकरण (4.3) को हल करने से पहले आइए हम इस स्थिति का भौतिक रूप में विश्लेषण करें। आपको याद होगा कि पिछली इकाई में हम यह पढ़ चुके हैं कि जब कोई बल नहीं लग रहा हो तब दुर्बलतः अवमंदित तंत्र ($b < \omega_0$) कोणीय आवृत्ति $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ से आवर्तीतः दोलन करता है, लेकिन जब कोणीय आवृत्ति ω वाला परिचालन बल लगाया जाता है, तब इसकी अपनी आवृत्ति भी दोलक की आवृत्ति को प्रभावित करती है। इसलिए हम प्रत्याशा करते हैं कि वास्तविक गति दो दोलनों के अध्यारोपण होगी जिनमें से एक दोलन आवृत्ति ω_d (अवमंदित दोलन की) वाला होगा और दूसरा आवृत्ति ω (परिचालन बल) वाला होगा। इस तरह, जब $\omega \neq \omega_0$ तो समीकरण (4.3) के व्यापक हल (General Solution) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$x(t) = x_1 + x_2$$

जहां, x समीकरण (4.3) के दाएं पक्ष के स्थान पर शून्य प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त समीकरण का हल है।

इस परिणाम को समीकरण (4.3) में प्रतिस्थापित करने पर आप पाएंगे कि $x_2(t)$ निम्नलिखित समीकरण को संतुष्ट करता है

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} + 2b\,\frac{dx_2}{dt} + \omega_0^2 x_2 = f_0 \cos \omega t$$

इस तरह यह स्पष्ट है कि $(x_1 + x_2)$ समीकरण (4.3) का एक पूर्ण हल (Complete Solution) है आपने अपने अवकल समीकरण के पाठ्यक्रम का अध्ययन करने के दौरान यह अवश्य पढ़ा होगा कि x_1 को पूरक फलन (Complementary Function) और x_2 को विशेष समाकल (Particular Integral) कहा जाता है ।

आपको यह भी याद होगा कि जब कोई परिचालन बल लग नहीं रहा होता, तब किसी भी क्षण दुर्बलतः अवमंदित $(b < \omega_0)$ तंत्र का विस्थापन समीकरण (3.19) से प्राप्त हो जाता है :

$$x_1(t) = a_0 e^{-bt} \cos(\omega_d t + \phi)$$

स्पष्ट है कि यह पूरक फलन चरघातांकीय रूप से क्षयित होता चला जाता है और कुछ समय के बाद लोपन हो जाता है। यही कारण है कि इसे अल्पस्थायी हल (Transient Solution) भी कहा जाता है। अल्पस्थायी अवस्था में तंत्र अपनी प्राकृतिक आवृत्ति अथवा परिचालन बल की आवृत्ति से दोलन नहीं करता, बल्कि किसी अन्य आवृत्ति से दोलन करता है।

काफी समय के बाद $(t \geq \tau)$ अवमंदन के कारण कमानी-द्रव्यमान तंत्र का प्राकृतिक दोलन रुक जाता है। फिर भी, हम यह जानते हैं कि समय के साथ समीकरण (4.3) का पूर्ण हल क्षयित नहीं होगा। कहने का अर्थ यह है कि तंत्र परिचालन बल की आवृत्ति से दोलन करेगा। इस स्थिति में तब यह कहा जाता है कि तंत्र **स्थायी अवस्था** (Steady State) में है। अब हम समीकरण (4.3) का स्थायी अवस्था हल प्राप्त करेंगे।

4.3.1 स्थायी अवस्था में हल

समीकरण (4.3) का स्थायी अवस्था वाला हल प्राप्त करने के लिए आइए हम यह मान लें कि प्रणोदित दोलक का विस्थापन निम्नलिखित समीकरण निम्न प्रकार से लिखा जाता है

$$x(t) = a \cos(\omega t - \theta) \tag{4.4}$$

जहां a और θ अज्ञात अचर हैं। समीकरण (4.1) और समीकरण (4.4) की तुलना करने पर हम यह देखेंगे कि परिचालन बल विस्थापन की कला (Phase) से कोण θ आगे हो जाती है :

a और θ ज्ञात करने के लिए हम समीकरण (4.4) को समय के सापेक्ष से दो बार अवकलित करते हैं। इससे हमें निम्न समीकरण प्राप्त होते हैं :

$$\frac{dx}{dt} = a\,\omega \sin(\omega t - \theta)$$

और

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\,\omega^2 \cos(\omega t - \theta)$$

इन परिमाण को समीकरण (4.3) में प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है :

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\, a \cos(\omega t - \theta) - 2ab\,\omega \sin(\omega t - \theta) = f_0 \cos \omega t$$

सूत्रों $\cos(\omega t - \theta) = \cos \omega t \cos \theta - \sin \omega t \sin \theta$ और $\sin(\omega t - \theta) = \sin \omega t \cos \theta - \cos \omega t \sin \theta$ का प्रयोग करने और पदों को व्यवस्थित रूप में रखने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होती है :

$$[(\omega_0^2 - \omega^2)\, a \cos \theta + 2\,ab\,\omega \sin \theta] \cos \omega t + [(\omega_0^2 - \omega^2) a \sin \theta - 2\,ab\,\omega \cos \theta] \sin \omega t = 0 \tag{4.5}$$

हम जानते हैं कि कभी भी $\cos \omega t$ और $\sin \omega t$ एक साथ शून्य नहीं होते, जब एक शून्य होता है तो उस समय दूसरे का अधिकतम मान होता है। इस तरह हम यह देखते हैं कि समीकरण (4.5) केवल तभीं संतुष्ट हो सकता है, जबकि कोष्ठकों के अंदर के दोनों पद अलग-अलग शून्य हो जाएं, अर्थात्

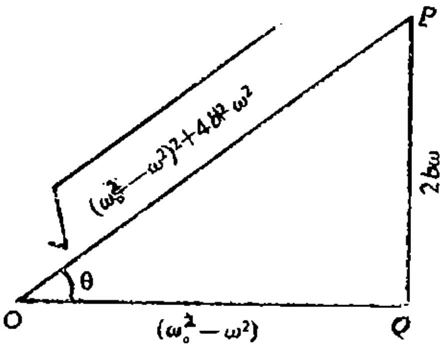
$$(\omega_0^2 - \omega^2)\, a \cos\theta + 2ab\,\omega \sin\theta = F_0 \tag{4.6 क}$$

और

$$(\omega_0^2 - \omega^2)\, a \sin\theta - 2ab\,\omega \cos\theta = 0 \tag{4.6 ख}$$

समीकरण (4.6 ख) से हमें वह कला प्राप्त हो जाती है, जिससे परिचालन बल में तंत्र के विस्थापन से अधिक होती है।

$$\theta = \tan^{-1} \frac{2b\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{4.6 ग}$$



चित्र 4.2 : ध्वनि प्रतिबाध त्रिभुज

अब $\sin\theta$ और $\cos\theta$ के मान ज्ञात होने पर समीकरण (4.6 क) से स्थायी अवस्था हल का आयाम ज्ञात कर सकते हैं। इन मानों को ज्ञात करने के लिए हम एक तथा-कथित ध्वनि प्रतिबाध त्रिभुज (Acoustic Impedence Triangle) बनाते हैं, जो चित्र 4.2 में दिखाया गया है। अब हम तुरंत यह लिख सकते हैं :

$$\sin\theta = \frac{2b\,\omega}{\left[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2\right]^{1/2}}$$

और

$$\cos\theta = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2]^{1/2}}$$

$\sin\theta$ और $\cos\theta$ के इन मानों को समीकरण (4.6 क) में प्रतिस्थापित करने और पदों को व्यवस्थित करने पर हमें a का निम्नलिखित मान प्राप्त होता है

$$a = \frac{F_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2]^{1/2}} = \frac{F_0}{m\,[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2]^{1/2}} \tag{4.7 ख}$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि प्रणोदित दोलन का आयाम निम्नलिखित बातों पर निर्भर करता है (i) परिचालन बल का आयाम और कोणीय आवृत्ति, (ii) दोलनी तंत्र का द्रव्यमान और प्राकृतिक कोणीय आवृत्ति; और (iii) अवमंदन नियतांक (Damping Constant).

अब a के इस मान को समीकरण (4.4) में प्रतिस्थापित करके हम समीकरण (4.3) के स्थायी अवस्था हल को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$x(t) = \frac{F_0}{[m\,(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2]^{1/2}} \tag{4.8}$$

यहां इस बात पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है कि स्थायी अवस्था हल की आवृत्ति वही होती है, जो परिचालन बल की है और इसका आयाम अचर होता है। और, इसकी कला भी परिचालन बल के सापेक्ष में पूर्णतः परिभाषित होती है। इस तरह हम यह पाते हैं कि यह प्रारंभिक अवस्थाओं पर निर्भर नहीं करती। दूसरे

शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि स्थायी अवस्था में परिचालित तंत्र की गति इस बात पर निर्भर नहीं करती कि तंत्र को दोलन अवस्था में किस प्रकार डाला जाता है।

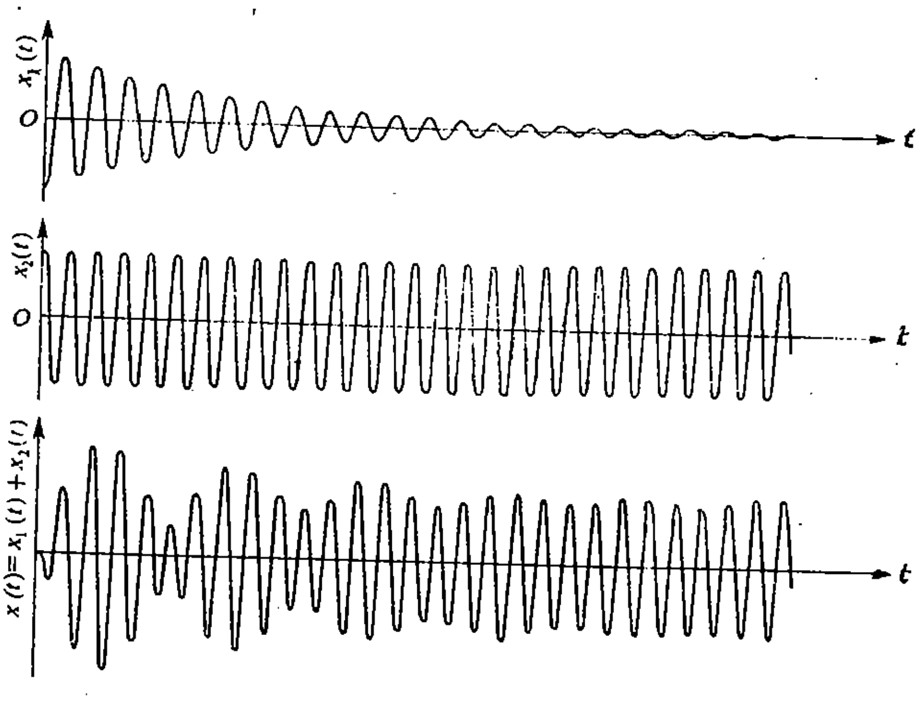
समीकरण (4.8) में $b = 0$ प्रतिस्थापित करके अनावमंदित तंत्र (Undamped System) का स्थायी अवस्था हल प्राप्त किया जाता है। इससे निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t \tag{4.9}$$

परिचालन बल और विस्थापन दोनों ही समान कला ($\theta = 0$) में हैं। इससे हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अवमंदन के कारण ही कला पश्चता (Phase lag) होती है। यहां हम यह भी देखते हैं कि यदि परिचालन बल की आवृत्ति और अनावमंदित दोलक की आवृत्ति समान हो तो उसका आयाम अंततः बृहत हो जाएगा। ऐसी स्थिति में तब यह कहा जाता है कि अनुनाद (Resonance) हो रहा है।

अब आप यह प्रश्न कर सकते हैं कि क्या व्यवहार में अनंततः बृहत प्रदोल (Swing) देखने को मिलता है ? इसका उत्तर है नहीं। प्रदोल परिमित होता है, क्योंकि प्रत्येक तंत्र में कुछ न कुछ अवमंदन अवश्य होता है।

अल्पस्थायी हल, स्थायी अवस्था हल और उनके योगफल को अर्थात् समीकरण (4.3) के पूर्ण व्यापक हल को चित्र 4.3 में दिखाया गया है। समय के साथ अल्पस्थायी भाग का योगदान कम होता जाता है और अंत में वह पूरी तरह लुप्त हो जाता है। जितने समय तक अल्पस्थायी भाग का योगदान होता रहता है, वह b से अर्थात् अवमंदन कारक से प्राप्त हो जाता है। b का मान जितना अधिक होगा, अल्पस्थायी भाग का लोपन उतना ही जल्दी होगा।



चित्र 4.3 : समीकरण (4.3) का पूरक फलन, विशेष समाकल (स्थायी अवस्था हल, PI) और व्यापक हल (C.F+P.I)

4.4 प्रणोदित दोलन के आयाम और कला पर परिचालन बल की आवृत्ति का प्रभाव

हम जानते हैं कि प्रणोदित तंत्र की आवृत्ति के परिवर्तन से परिचालन बल के आयाम $a(\omega)$ को समीकरण (4.7 ख) से प्राप्त किया जा सकता है। अब तीन स्थितियां उत्पन्न होती हैं, जो कि प्राकृतिक और परिचालन आवृत्तियों के सापेक्ष परिमाण पर निर्भर करती है। अब हम इन स्थितियों का अलग-अलग विस्तार विचार करेंगे ।

4.4.1 निम्न परिचालन आवृत्ति (Law Driving Frequency) ($\omega << \omega_0$)

हम देखते हैं कि जब $\omega << \omega_0$ तब अनुपात ω^2/ω_0^2 का मान 1 से काफी कम होगा। अतः पहले हम समीकरण (4.7 ख) को निम्न रूप में लिखने पर

$$a(\omega) = \frac{f_0}{\omega_0^2\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{4b^2\omega^2}{\omega_0^4}\right]^{\frac{1}{2}}}$$

इसमें ω^2/ω_0^2 वाले पदों की उपेक्षा कर देने पर निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$a(\omega) = \frac{f_0}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{m\,\omega_0^2} = \frac{F_0}{k} \qquad (4.10\text{ क})$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि अति निम्न परिचालन आवृत्तियों पर दोलन का आयाम दुर्नम्यता गुणांक (Stiffness Constant) और परिचालन बल के परिमाण पर निर्भर करता है। इसी प्रकार, इस प्रतिबंध के अंतर्गत समीकरण (4.7 क) से निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\tan\theta = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \to 0 \quad \frac{\omega}{\omega_0} << 1 \text{ के लिए} \qquad (4.10\text{ ख})$$

अर्थात् हम यह पाते हैं कि परिचालन बल (Driving Force) और परिणामी अवस्था समान कला में है।

4.4.2 अनुनाद

अनुनाद पर $a(\omega)$ का मान ज्ञात करने के लिए हम समीकरण (4.7 ख) में $\omega = \omega_0$ लेते हैं। ऐसा करने पर अंश के प्रथम पद का लोपन हो जाता है और आयाम को इस प्रकार लिखा जाता है :

$$a(\omega_0) = \frac{f_0}{2b\,\omega_0} \qquad (4.11\text{ क})$$

इस समीकरण से हम यह पाते हैं कि अनुनाद की स्थिति में आयाम अवमंदन पर निर्भर करता है और यह b के प्रतिलोमानुपाती (Inversely Proportional) होता है। यही कारण है कि वास्तविक व्यवहार में आयाम कभी भी अनंत नहीं होता। इसी प्रकार, समीकरण (4.7 क) में $\omega = \omega_0$ लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\tan\theta \to \infty$$

अर्थात् $\theta = \pi/2$ (4.11 ख)

इससे यह अर्थ निकलता है कि परिचालन बल और विस्थापन की कलाओं में $\pi/2$ का अंतर है। अब आपके मन में यह बात आ सकती है कि समीकरण (4.11 क) से प्राप्त $a(\omega)$ का मान अधिकतम मान है। परन्तु यह सही नहीं है। प्रश्न उठता है, क्यों ? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए आइए हम $\alpha(\omega)$ को अधिकतमीकृत करें अर्थात् समीकरण (4.7 ख) को ω के सापेक्ष अवकलित करें। जिस आवृत्ति पर प्रथम अवकलन (First Derivative) शून्य हो जाता हो और द्वितीय अवकलन ऋणात्मक हो जाता है, उससे निम्नलिखित अभीष्ट परिणाम प्राप्त होता है

$$\frac{d\,a(\omega)}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\frac{f_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2]^{1/2}}\right]$$

$$= -\frac{f_0[(-4\omega)(\omega_0^2 - \omega^2) + 8b^2\omega]}{2[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2]^{3/2}} = 0$$

यह समिका (Equality) केवल तभी लागू होगी, जबकि साथ साथ "हर" के मान का भी लोपन हो जाता हो, अर्थात्

$$-4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8b^2\omega = 0$$

हम मूल $\omega = 0$ जोकि तुच्छ (Trivial) है, की उपेक्षा कर देते हैं। तब

$$\omega^2 - \omega_0^2 + 2b^2 = 0$$

यह समीकरण ω में द्विघात समीकरण है और इसका स्वीकार्य मूल निम्न हैं :

$$\omega_r = (\omega_0^2 - 2b^2)^{1/2} \tag{4.12}$$

क्योंकि व्यावहारिक दृष्टि से ऋणात्मक चिह्न वाले मूल का कोई अर्थ नहीं होता। अतः उसकी उपेक्षा कर दी जाती है।

$a(\omega)$ का मान अधिकतम हो, इसके लिए यह आवश्यक है कि ω के सापेक्ष इसका द्वितीय अवकलज शून्य हो । आप इस बात की जांच कर सकते हैं कि $\omega_r = (\omega_0^2 - 2b^2)$ परन्तु $d^2a/d\omega^2$ का मान ऋणात्मक होता है । इस तरह, हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि अधिकतम आयाम तब होता है, जबकि आवृत्ति ω_0 से थोड़ा कम हो। ऐसा होने का कारण अवमंदन है। हम इसे इस रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं : जिस समय परिचालक अधिकतम धक्का देता है, ठीक उसी क्षण $x(t)$ और $F(t)$ के बीच परिमित कला अंतर (Phase Difference) होने के कारण तंत्र उसे स्वीकार नहीं करता।

समीकरण (4.12) से प्राप्त ω को समीकरण (4.7 ख) में प्रतिस्थापित करके और इस तरह प्राप्त हुए व्यंजक को सरल करने पर हमें निम्नलिखित अधिकतम आयाम प्राप्त होता है :

$$a_{max} = \frac{F_0}{2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}} \tag{4.13}$$

जब किसी विशेष आवृत्ति पर परिचालित तंत्र का आयाम अधिकतम हो जाता है तब हम कहते हैं कि **आयाम अनुनाद हो रहा है**। आवृत्ति ω_r को अनुनाद आवृत्ति कहा जाता है। यहां इस बात पर ध्यान देना आवश्यक है कि ω_r , ω_0 से कम होती है और

$$\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

4.4.3 उच्च परिचालन आवृत्ति

$\omega >> \omega_0$ के लिए हम समीकरण (4.7 ख) को इस रूप में लिखते हैं :

$$a(\omega) = \frac{f_0}{\omega^2\left[\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4b}{\omega^2}\right]^{1/2}}$$

और ω_0^2/ω^2 तथा $(2b/\omega)^2$ दोनों की उपेक्षा कर देते हैं। क्योंकि दोनों ही से काफी कम हैं। तब परिणामी कंपन का आयाम यह होता है

$$a(\omega) = \frac{f_0}{\omega^2} \tag{4.14 क}$$

अर्थात् उच्च आवृत्ति पर आयम में $1/\omega^2$ के अनुसार कमी आती जाती है और अंत में आयाम शून्य हो जाता है।

इसी प्रकार, समीकरण (4.7 क) के अनुसार कला यह होती है

$$\tan\theta = \frac{2b\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)} \xrightarrow[\omega >> \omega_0]{} -\frac{2b}{\omega} \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$$

$$\text{या } \theta = \pi \tag{4.14 ख}$$

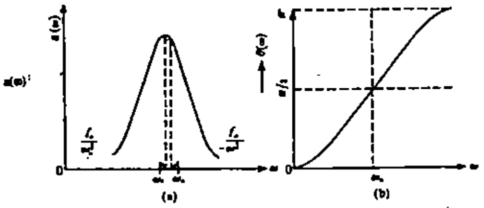
इससे यह अर्थ निकलता है कि उच्च आवृत्तियों पर परिचालन बल की कला और विस्थापन की कला में π का अंतर होता है।

इस तरह हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

i) स्थायी अवस्था में दोलन के आयाम में आवृत्ति के साथ परिवर्तन होता है। परन्तु $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$ अधिकतम होता है, जिसका मान $f_0/2b\sqrt{\omega_0^2 - b^2}$ होता है। $\omega > \omega_r$ पर $a(\omega)$ के मान में ω^{-2} के अनुसार कमी आती जाती है।

ii) विस्थापन की कला परिचालन बल की कला, से कोण θ कम होती है, जो $\omega = 0$ पर शून्य से बढ़कर अति उच्च आवृत्तियों पर π हो जाती है और $\omega = \omega_0$ पर $\theta = \pi/2$.

$a(\omega)$ की आवृत्ति निर्भरता और θ को चित्र 4 में दिखाया गया है।



चित्र 4.4 : (क) परिचालन आवृति के साथ दोलनी तंत्र के आयाम $a(\omega)$ आयाम में परिवर्तन। (ख) प्रणोदित दोलन में, परिचालन आवृति के एक फलन के रूप में परिचालन बल के सापेक्ष विस्थापन कला पश्चता (θ)

4.5 प्रणोदित दोलक द्वारा अवशोषित शक्ति

आप जानते हैं कि अवमंदन के विरुद्ध कार्य करने पर प्रत्येक दोलनी तंत्र की ऊर्जा में कमी आने लगती है। परन्तु परिचालन बल से ऊर्जा प्रदान करके प्रणोदित दोलक के दोलन को बनाए रखा जाता है। अतः यह जानना आवश्यक है कि स्थायी अवस्था दोलन को बनाए रखने के लिए तंत्र को किस औसत दर से ऊर्जा देते रहना आवश्यक है। अतः अब हम दोलनी तंत्र द्वारा अवशोषित औसत शक्ति ज्ञात करेंगे।

परिभाषा के अनुसार, तात्क्षणिक शक्ति को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$P(t) =$ बल $\times$ वेग

$= F(t) \times v$

समीकरण (4.8) को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\vartheta = \frac{dx}{dt} = -\frac{F_0\,\omega}{m[(\omega_0^2 - \omega^2) + 4b^2\,\omega^2]^{1/2}} \sin(\omega t - \theta)$$

$$= -\vartheta_0 \sin(\omega t - \theta)$$

$$= \vartheta_0 \cos(\omega t - \theta)$$

जहां $\vartheta_0 = \dfrac{F_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\,\omega^2]^{1/2}}$ (4.15 क)

यह वेग-आयाम है और

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{2} \qquad (4.15\ ख)$$

वेग और लगाए गए बल के बीच का कला अंतर है। क्रमशः समीकरण (4.1) और समीकरण (4.15) से प्राप्त $F(t)$ और ϑ के मान को प्रतिस्थापित करने पर हमें दोलक द्वारा अवशोषित तात्क्षणिक शक्ति का परिमाण निम्नलिखित समीकरण से प्रदर्शित किया जा सकता है :

$$P(t) = F_0\,\vartheta_0 \cos\omega t\ \sin(\omega t - \theta)$$

अब क्योंकि $\sin(\omega t - \theta) = \sin\omega t \cos\theta - \cos\omega t \sin\theta$

इसलिए हम तात्क्षणीक शक्ति वाले व्यंजक को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$P(t) = F_0\,\vartheta_0\,[\sin\omega t \cos\omega t \cos\theta - \cos^2\omega t \sin\theta]$$

इससे हम एक चक्र में अवशोषित औसत शक्ति आसानी से ज्ञात कर सकते हैं

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} F_0\,\vartheta_0 \cos\theta \langle \sin 2\omega t \rangle + F_0\,\vartheta_0 \sin\theta \langle \cos^2\omega t \rangle \qquad (4.16)$$

इकाई 1 में आप यह देख चुके हैं कि

$$< \sin 2\omega t > = 0$$

इस तरह, हम यह देखते हैं कि समीकरण (4.16) के दक्षिण पक्ष का पहला पद शून्य हो जाता है। और $<\cos^2 \omega t> = 1/2$ तब समीकरण (4.16) यह हो जाता है :

$$< P > = \frac{1}{2} F_0 \vartheta_0 \sin\theta \tag{4.17}$$

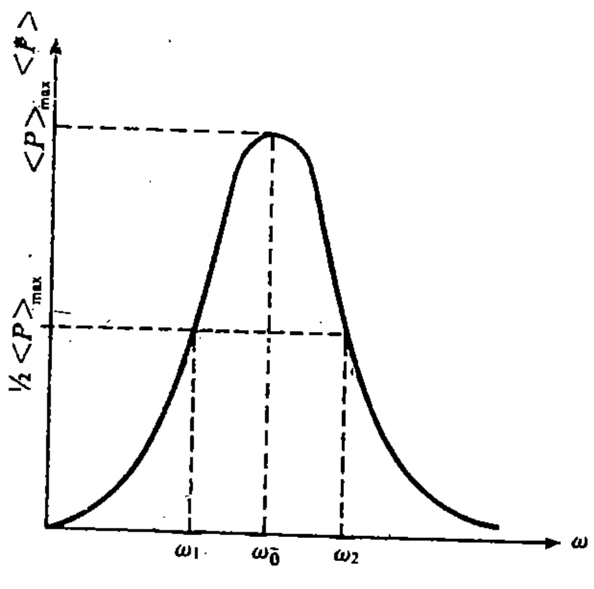
समीकरण (4.17) में चित्र 4.2 से प्राप्त के मान को और समीकरण (4.15 क) से प्राप्त v_0 के मान को प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$< P > = \left(\frac{bF_0^2}{m}\right)\frac{\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2]} \tag{4.18}$$

समीकरण (4.17) और समीकरण (4.18) से हम यह पाते हैं कि प्रणोदित दोलक द्वारा अवशोषित औसत शक्ति अधिकतम तब होगी जबकि $\sin\theta = 1 = \cos\theta$ अर्थात् $\theta = \pi/2 (\phi = 0)$ और $\omega = \omega_0$

$$<P>_{max} = \frac{1}{4bm} F_0^2 \tag{4.19}$$

अर्थात् अनुरक्षित तंत्र द्वारा अवशोषित औसत शक्ति का अधिकतम मान परिचालन बल के अवमंदन और आयाम से प्राप्त होता है। औसत शक्ति $< P >$ के आवृत्ति-परिवर्तन को चित्र 4.5 में दिखाया गया है।



चित्र 4.5 : परिचालन आवृत्ति के एक फलन के रूप में अवशोषित औसत शक्ति (P_{av}) अनुनाद वक्र की पूर्ण चौड़ाई

यहां इस बात की ओर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता है क्योंकि यहां तंत्र की प्राकृतिक आवृत्ति पर अधिकतम औसत शक्ति स्थानांतरित हो जाती है। ऐसा होने का कारण यह है कि वेग और परिचालन बल एक ही कला में है।

4.6 गुणता कारक

इकाई 3 में हमने अवमंदित दोलक के गुणता कारक को निम्न रूप में परिभाषित किया था

$$Q = 2\pi \ \frac{\text{एक चक्र में जमा की गई औसत ऊर्जा}}{\text{एक चक्र में क्षयित औसत ऊर्जा}}$$

आप प्रणोदित दोलक के Q को उसी प्रकार से परिकलित कर सकते हैं, यदि आपको $<E>$ और $<P>$ का मान पता लग जाए।

बोध प्रश्न 1

दिखलाइए कि प्रणोदित दोलक की औसत ऊर्जा यह है

$$<E> = \frac{1}{4} m\,(\omega^2 + \omega_0^2)\, a^2$$ और गुणता कारक यह है

$$Q = \frac{\omega^2 + \omega_0^2}{4b\omega}$$

गुणता कारक का एक अन्य अधिक उपयोगी विवेचन आयाम के पदों में किया जाता है। गुणता कारक Q को अनुनाद पर आयाम और निम्न आवृत्तियों ($\omega \to 0$) पर आयाम के अनुपात के रूप में परिभाषित किया जाता है। इस परिभाषा की सहायता से, समीकरण (4.13) को समीकरण (4.10 क) से भाग देकर गुणता-कारक अधिक आसानी से ज्ञात किया जा सकता है।

$$Q = \frac{a_{\max}}{a(\omega = 0)} = \frac{f_0}{2b(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}} \times \frac{\omega_0^2}{f_0} = \frac{\omega_0^2}{2b(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}} \qquad (4.20\ \text{क})$$

यदि अवमंदन कम हो, $b^2 << \omega_0^2$ तो गुणताकारक का व्यंजक यह हो जाता है

$$Q = \frac{\omega_0}{2b} = \frac{\omega_0 \tau}{2} \qquad (4.20\ \text{ख})$$

यह वही है, जो कि $b = 0$ के लिए समीकरण (3.33) है।

बोध प्रश्न 2

समीकरण (4.20 ख) की सहायता से यह दिखाइए कि दुर्बलतः अवमंदित प्रणोदित दोलक के आयाम और कला को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$a(\omega) = a_0 \frac{\omega_0/\omega}{\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\right]^{1/2}}$$

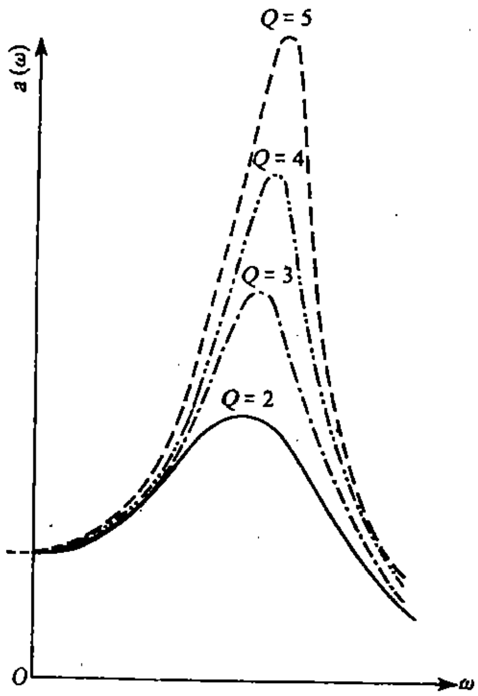
और

$$\tan\theta = \frac{1/Q}{\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

जहां

$$a_0 = F_0/m\,\omega_0^2$$

Q के अलग-अलग मानों के लिए इन समीकरणों पर आधारित $a(\omega)$ और $Q(\omega)$ के आवृत्ति-परिवर्तन को चित्र 4.6 में दिखाया गया है। हम देखते हैं कि जब Q उच्च होता है (अर्थात् अवमंदन निम्न होता है) तब $a(\omega)$ का मान अधिक होता है।



चित्र 4.6 : गुणता कारक के अलग-अलग मानों के लिए कला और आयाम का आवृत्ति परिवर्तन।

बोध प्रश्न 3

$<P>$ को Q के पदों में व्यक्त कीजिए और दिखाइए कि

$$< P >_{\max} = \frac{1}{2}\frac{F_0^2\,\omega_0}{k}Q.$$

4.6.1 पट्टी-चौड़ाई के पदों में Q: अनुनाद-तीव्रता

किसी तंत्र के Q को निम्न रूप में भी परिभाषित किया जा सकता है :

$$Q = \frac{\text{वह आवृत्ति जिस पर शक्ति अनुनाद होता है}}{\text{अर्ध-शक्ति बिन्दुओं पर पूरी चौड़ाई}} \tag{4.21}$$

उस आवृत्ति को ज्ञात करने के लिए जिसपर औसत शक्ति अपने अधिकतम से घटकर आधी हो जाती है, हम बोध प्रश्न 3 से यह लिख सकते हैं :

$$\frac{1}{2}\,\frac{F_0^2\,\omega_0}{kQ}\left[\frac{\omega_0^2\,\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\dfrac{\omega_0^2\,\omega^2}{Q^2}}\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{F_0^2\,\omega_0\,Q}{k}$$

अर्थात्

$$(\omega_0^2-\omega)^2 = \frac{\omega^2\,\omega_0^2}{Q^2}$$

जिससे कि

$$(\omega_0^2-\omega_2) = \pm\,\frac{\omega\,\omega_0}{Q}$$

इस समीकरण के 4 मूल हैं। इनमें दो मूल ऋणात्मक आवृत्तियों के संगत हैं। अतः इन्हें व्यावहारिक रूप में स्वीकार नहीं किया जा सकता। स्वीकार किए जाने वाले अन्य दो मूल ये हैं :

$$\omega_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$$

और

$$\omega_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0 \left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2} \quad (4.22)$$

स्पष्ट है कि इन दो मूलों में से दूसरा मूल ω_0 से अधिक है और पहला मूल ω_0 से कम है। इस तथ्य को चित्र 4.5 में दिखाया गया है।

दो अर्ध-शक्ति बिन्दुओं के बीच का आवृत्ति अंतराल यह है

$$\omega_2 - \omega_1 = 2\Delta\omega = \omega_0/Q \quad (4.23)$$

समीकरण (4.23) से यह स्पष्ट है कि उच्च Q तंत्र का बैंड छोटा होता है और ऐसी स्थिति में अनुनाद को तीव्र अनुनाद कहा जाता है। इसके विपरीत, निम्न Q तंत्र का बैंड बड़ा है। ऐसी स्थिति में अनुनाद को सपाट अनुनाद कहा जाता है। इस तरह हम यह देखते हैं कि अनुनाद की तीव्रता अनुनाद के किसी भी ओर आवृत्ति के साथ शक्ति में कमी आने की तीव्र दर होती है। इसे हम तंत्र के Q मान के पदों में मापते हैं। Q कारक का विद्युत परिपथ में काफी महत्व है। इस पर अब हम विचार करेंगे।

बोध प्रश्न 4

एक कमानी में लगे हुए 0.1 किलोग्राम वाले एक द्रव्यमान में भंडारित ऊर्जा ज्ञात कीजिए। द्रव्यमान 5 सेंटीमीटर के आयाम से दोलन कर रहा है और यह 30 हर्ज (Hz) की आवृत्ति वाले परिचालन बल के साथ अनुनाद में है। यदि Q का मान 100 हो तो शक्ति-हानि ज्ञात कीजिए।

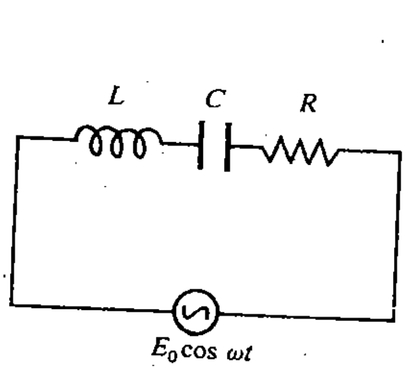
4.7 एल. सी. आर. परिपथ

अभी तक हमने आवर्ती बल के अधीन एक सरल यांत्रिक तंत्र के अनुनादी व्यवहार के बारे में चर्चा की है। एक अन्य भौतिक तंत्र, जो अनुनादी व्यवहार प्रदर्शित करता है, वह है — प्रत्यावर्ती ई.एम.एफ. (Alternating E.M.F.) के स्रोत वाला, एक श्रेणी एल.सी.आर. (Series LCR) परिपथ। यांत्रिक तंत्र के साथ इस तंत्र की तुलना करके हम इस तंत्र के व्यवहार के बारे में चर्चा करेंगे।

इकाई 3 में हम यह पढ़ चुके हैं कि एल.सी.आर. परिपथ में प्रतिरोधक (Resistance) में शक्ति की कमी आने के कारण आवेश दोलन लुप्त हो जाते हैं। यदि आवृत्ति ω के एक प्रत्यावर्ती ई.एम.एफ. वाला एक स्रोत इसमें लगा दिया जाए तो तंत्र के व्यवहार में किस प्रकार के परिवर्तन की आनुमन आप कर सकते हैं? इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए आइए हम चित्र 4.7 लें। मान लीजिए एक दिए हुए समय पर परिपथ में प्रवाहित धारा I है। तब लगाया गया ई.एम.एफ. संधारित्र (Capacitor) प्रतिरोधक (Resistor) और प्रेरक (Inductor) के विभवांतरों का जोड़ होता है। तब समीकरण (3.35) यह हो जाती है :

$$\frac{q}{C} + RI + L\frac{dI}{dt} = E_0 \cos \omega t \quad (4.24)$$

क्योंकि $I = \frac{dq}{dt}$ इसलिए इस समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :



चित्र 4.7 : परिचालित एल सी आर परिपथ

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=E_0\cos\omega t \quad (4.25)$$

दोनों ओर L से भाग देने पर

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=\frac{E_0}{L}\cos\omega t \quad (4.26)$$

इस रूप में समीकरण (4.26) और समीकरण (4.3) समरूप हैं। अतः अनुरूपता से इसके स्थायी अवस्था हल को लिखा जा सकता है। दुर्बलतः अवमंदित तंत्र के लिए किसी भी समय पर संधारित्र प्लेट पर किसी भी समय आवेश को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है :

$$q=\frac{E_0/L}{\left[\left(\frac{1}{LC}-\omega^2\right)^2+\left(\frac{\omega R}{L}\right)^2\right]^{1/2}}\cos(\omega t-\theta) \quad (4.27)$$

जहां $\omega=\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}$ दोलन की आवृत्ति है और

$$\tan\theta=\frac{R/L}{\frac{1}{LC}-\omega^2}$$

यह लगाए गए ई.एम.एफ. के सापेक्ष कला को परिभाषित करता है।

समीकरण (4.25) को t के सापेक्ष अवकलित करने पर परिपथ में प्रवाहित धारा को प्राप्त किया जा सकता है। इससे प्राप्त परिणाम निम्न है :

$$I=\frac{E_0}{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\cos(\omega t-\theta) \quad (4.29)$$

जहां $\phi=\theta-\pi/2$, E और I के बीच का कला अंतर है। क्योंकि

$$\tan\phi=-\cot\theta=\frac{1/LC-\omega^2}{\omega R/L}$$

इसलिए

$$\phi=\tan^{-1}\frac{\omega L-(1/\omega c)}{R} \quad (4.30)$$

समीकरण (4..29) को देखने पर हम यह पाते हैं कि एल.सी.आर. परिपथ में प्रवाहित धारा आवृत्ति का एक फलन है।

जब $\omega L \ll \frac{1}{\omega C}$ तब परिपथ संधारी (Capacitive) होता है और तब हम यह लिख सकते हैं :

$$\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2\simeq\frac{1}{\omega^2C^2}$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि यदि हम निम्न आवृत्तियों पर कार्य कर रहे हों और R भी कम हो तो धारा आयाम भी कम होगा। अब प्रश्न उठता है कि $\omega\to 0$ होने पर इसका परिमाण कितना होगा ?

इस सीमा में $I\to 0$ और यह लागू किए गए ई.एम.एफ. से $\pi/2$ अधिक है।

परिचालन आवृत्ति में वृद्धि होने पर प्रतिघात (Reactance) $\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)$ में कमी होने लगती है और धारा आयाम में वृद्धि होने लगती है। जब,

$$\omega L=\frac{1}{\omega C} \quad (4.31)$$

तब समीकरण (4.29) में करणी चिह्न (Radial Sign) के अंदर का पद निम्नतम हो जाता है और R के बराबर हो जाता है। अतः धारा अपना शिखर मान $I_0 = E_0/R$ प्राप्त कर लेती है। तब, इस स्थिति में यह कहा जाता है कि परिपथ, आवृत्ति

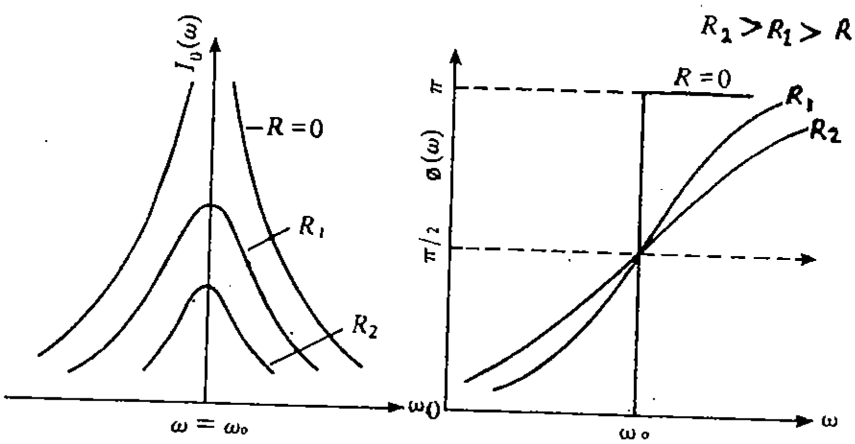
$$\upsilon_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \qquad (4.32)$$

के साथ अनुनादी है।

अनुनाद की स्थिति में धारा और लगाया गया ई.एम.एफ. समान कला में होता है।

जब परिचालन आवृत्ति उच्च होती है, तब परिपथ प्रणिक होता है और धारा ई.एम.एफ. से $\pi/2$ से पीछे होता है।

R के अलग-अलग मानों के लिए शिखर धारा के आवृत्ति-परिवर्तन और कला को चित्र 4.8 में दिखाया गया है। चित्र में आप देखेंगे कि प्रतिरोधक जितना कम होगा धारा का शिखर मान उतना ही अधिक होगा और अनुनाद उतना ही अधिक व तीव्र होगा।



चित्र 4.8: एक सी आर परिपथ में R के अलग-अलग मानों के लिए कला और शिखर धारा में आवृत्ति परिवर्तन

विद्युत-परिपथ में शक्ति की परिभाषा धारा और ई.एम.एफ. के गुणनफल के रूप में दी जाती है। एल.सी.आर. परिपथ के लिए हम यह लिख सकते हैं

$$P = EI = E_0 I_0 \cos \omega t \cos (\omega t - \phi)$$

सूत्र $2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)$ का प्रयोग करके हम ऊपर दिए गए व्यंजक को इस रूप में लिख सकते हैं

$$P = \frac{E_0 I_0}{2} [\cos \phi + \cos (2t - \phi)]$$

यह देखकर कि $< \cos (2\omega t - \phi)>_T$ एक पूर्ण चक्र में आसित शक्ति प्राप्त की जाती है। अतः

$$< P > = \frac{E_0 I_0}{2} \cos \phi$$

$$= E_{rms} I_{rms} \cos \phi$$

जहां $E_{rms} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$ और $I_{rms} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$ क्रमशः ई.एम.एफ. और धारा के वर्ग माध्य-मूल मान (Root Mean Square Value) हैं। चूंकि $< P >$ के साथ $\cos \phi$ में परिवर्तन होता है, इसलिए $\cos \phi$ को प्रायः शक्ति गुणांक (Power Factor) कहा जाता है।

एल.सी.आर. परिपथ का गुणता कारक यह होता है

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R}$$

जहां $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

आप इस बात की जांच कर सकते हैं कि एल.सी.आर. परिपथ के शक्ति अनुनाद वक्र की बैंड चौड़ाई यह होती है

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{2}{\tau} = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q} \tag{4.33}$$

जिससे कि

$$Q = \frac{\text{अनुनाद पर आवृत्ति}}{\text{अर्ध शक्ति बिन्दुओं पर पूर्ण चौड़ाई}}$$

परिपथ के Q से इस बात का पता चल जाता है कि परिपथ निविष्ट आवृत्तियों के परिसर से कितनी आवृत्तियों के एक बैंड को चुन सकता है। यही कारण है कि रेडियो रिसीवरों में इसका विशेष महत्व है। सभी केन्द्रों से आने वाली विभिन्न आवृत्तियों के ज्ञापन संकेत एन्टिना के आस-पास उपस्थित रहते हैं। परन्तु रिसीवर केवल एक ही आवृत्ति के मापन संकेत को पकड़ता है जिसे हम सुनना चाहते हैं और अन्य आवृत्तियों के ज्ञापन संकेतों को छोड़ देता है।

सामान्यतः रेडियो रिसीवर MHz आवृत्ति की सीमाओं में चलते हैं और इनके Q का मान 10^2 से लेकर 10^3 तक होता है। सूक्ष्म तरंग गुहिकाओं में Q का मान 10^5 के क्रम का होता है।

4.8 सारांश

1. जब एक अवमंदित आवर्ती दोलक पर एक आवर्त्ती बल $F = F_0 \cos \omega t$ लगाया जाता है, तब दोलक प्रणोदित दोलन करने लगता है। परिचालित दोलक की गति का अवकल-समीकरण यह होता है :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2b\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t$$

जहां

$$2b = \frac{\gamma}{m}, \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ और } F_0 = \frac{f_0}{m}$$

2. परिचालित दोलक के अवकल समीकरण का व्यापक हल

$x(t) = a \cos(\omega t - \theta) + a_0 e^{-bt} \cos(\omega_d t + \phi)$ होता है।

3. प्रणोदित दोलक का स्थायी-अवस्था विस्थापन को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$x = a \cos(\omega t - \theta)$$

जहां

$$a = \frac{f_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2) + 4b^2\omega^2]^{1/2}}$$

और

$$\tan \theta = \frac{2b\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

4. विस्थापन-अनुनाद निम्न आवृत्ति पर होता है :

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \left(\frac{1}{2Q}\right)^2}$$

इस बारंबारता पर

$$a_{max} = \frac{f_0}{2b\,(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}}$$

5. प्रणोदित दोलक द्वारा अवशोषित औसत शक्ति को इस प्रकार दर्शाया जा सकता है

$$< P > = \frac{1}{2} F_0\, v_0 \sin\theta$$

यह $\theta = \pi/2$ पर अधिकतम होती है।

6. प्रणोदित दोलक के गुणता-कारक को आयाम प्रवर्धन (Amplification) में दर्शाया जा सकता है। यह अर्ध अधिकतम पर पूर्ण चौड़ाई में संबंध इस प्रकार दर्शाया जा सकता है :

$$\theta = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$$

7. परिचालित एल.सी.आर. परिपथ का अवकल समीकरण यह है :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}\, q = \frac{E_0}{L}\cos\omega t$$

इसका स्थायी-अवस्था हल यह है

$$q = \frac{E_0 L}{\left[\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega R}{L}\right)^2\right]^{1/2}}$$

जहां

$$\tan\theta = \frac{\omega R/L}{\frac{1}{LC} - \omega^2}$$

4.9 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक कमानी जिस पर एक बल अचर $100\ Nm^{-1}$ लगाया जाता है और उस पर 0.1 कि.ग्रा. के द्रव्यमान वाला एक पिंड लटकाया जाता है। पिंड पर $-5v$ न्यूटन का घर्षण-बल कार्य कर रहा है। गति का अवकल-समीकरण प्राप्त कीजिए और मुक्त दोलनों का आवर्त्त-काल ज्ञात कीजिए। अब इस पर एक आवर्ती बल $F = 20\cos 20t$ लगाया गया है। स्थायी अवस्था में प्रणोदित दोलनों का आयाम और कला पश्चता ज्ञात कीजिए।

2. एक उच्च Q तंत्र के लिए यह दिखाइए कि आयाम अनुनाय वक्र की चौड़ाई लगभग $\sqrt{3}b$ है, जहां उन आवृत्तियों के बीच पूर्ण चौड़ाई मापी गई है जहां $a = a_m/2$.

3. एक श्रेणी एल·सी·आर· परिपथ में 10^5 की आवृत्ति और 1·2 वोल्ट के आयाम वाला एक प्रत्यावर्ती विभव लगाया गया है। यदि $L = 0.5$ mH और $R = 40\ \Omega$ तो अनुनाद प्राप्त करने के लिए संधारण का मान ज्ञात कीजिए। इस धारा का r.m.s मान भी ज्ञात कीजिए।

4.10 हल/उत्तर

बोध प्रश्न 1

गतिज ऊर्जा का समय औसत $= \left(\frac{1}{2}\right) m < v^2 >$

$$= \frac{1}{2} m\,\omega^2 a^2 < \sin^2(\omega t - \theta) > = \left(\frac{1}{4}\right) m\,\omega^2 a^2$$

स्थितिज ऊर्जा का समय औसत $= \frac{1}{2} k < x^2 >$

$$= \frac{1}{2} m\omega_0^2 a^2 < \cos^2(\omega t - \theta)> = \frac{1}{4} m \omega^2 a^2$$

समय औसत वाली भंडारित ऊर्जा को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$< E(\omega) > = \left(\frac{1}{4} m\right) (\omega^2 + \omega_0^2) a^2$$

प्रति सेकंड क्षयित ऊर्जा यह है $<\upsilon^2> =$

$m b^2 \omega^2 a^2$

परिभाषा के अनुसार,

$$Q = 2\pi \frac{\text{भंडारित औसत ऊर्जा}}{\text{प्रति चक्र क्षयित औसत ऊर्जा}}$$

$$= 2\pi \frac{\text{भंडारित औसत ऊर्जा}}{\text{समय} \times \text{सेकंड क्षयित औसत ऊर्जा}}$$

$$Q = \frac{2\pi}{4} \quad \frac{m(\omega 0^2 + \omega^2) a^2}{T m b \omega^2 a^2}$$

$$= \frac{\omega_0^2 + \omega^2}{4\omega b}$$

बोध प्रश्न 2

समीकरण (4.7 ख) से

$$a = \frac{F_0}{m[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2]^{1/2}}$$

$$= \frac{F_0/m}{\omega\omega_0 \left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{4b^2}{\omega_0^2}\right]^{1/2}}$$

$$= a_0 \frac{\omega_0/\omega}{\left[\left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\right]^{1/2}}$$

जहां

$$a_0 = \frac{F_0}{m\,\omega_0^2} \text{ और } \theta = \frac{\omega_0 \tau}{2}$$

समीकरण (4.7 क) से

$$\tan\theta = \frac{2b\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

$$= \frac{2b\,\omega}{\omega\omega_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

या

$$\tan\theta = \frac{1/Q}{\omega\omega_0 \left(\frac{\omega_0}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

बोध प्रश्न 3

समीकरण (4.18) से

$$< P > = \frac{b F_0^2}{m} \quad \frac{\omega^2}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2\ ]}$$

$Q = \frac{\omega_0}{2b}$ लेने पर निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$< P > = \frac{\omega_0 F_0^2}{2m\ Q} \left[\frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}} \right]$$

$\omega = \omega_0$ पर कोष्ठक के अंदर का हर निम्नतम हो जाएगा और अवशोषित औसत शक्ति अधिकतम हो जाएगी :

$$< P >_{max} = \frac{F_0^2 Q}{2m\,\omega_0}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \frac{(F_0/m)\, F_0 Q \omega_0}{\omega_0^2}$$

$$= \frac{1}{2} \quad \frac{F_0 \omega_0 Q}{k}$$

बोध प्रश्न 4

अनुनाद पर $\omega = \omega_0$ और भंडारित औसत ऊर्जा यह होती है

$$= \frac{1}{2}\ m\,\omega_0^2\, a^2$$

$$= \frac{1}{2} \times 0.1 \times (2\pi \times 30)^2\ (5 \times 10^{-2})^2$$

$$= 4.44\ J$$

अब,

$$Q = 2\pi \ \frac{\text{भंडारित औसत ऊर्जा}}{\text{प्रति चक्र अवशोषित औसत उर्जा}}$$

क्योंकि आवर्त काल $T = \frac{1}{30}\ s$

इसलिए $\frac{1}{30}\ s$ में क्षयित औसत ऊर्जा $= \frac{2\pi \times 4.44\ J}{100}$

प्रति सेकंड क्षयित औसत ऊर्जा $= 30 \times\ 0.28 = 8.4\ J$

अंत में कुछ प्रश्न

1. मुक्त दोलन में

$$0.1 \frac{d^2 x}{d t^2} \ = \ -100x\ - 5\,\frac{dx}{d t}$$

या

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 50\frac{dx}{dt} + 1000\, x\ = 0$$

यह गति का अवकल समीकरण है

आवर्त्त काल $T = \frac{2\pi}{[\omega_0^2 - b^2]^{1/2}} = \frac{2\pi}{[1000 - 625]} = .32$ सेकंड

आवर्ती बल लागू करने पर गति समीकरण यह होता है

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 50\frac{dx}{dt} + 1000\,x = 20\cos 20\,t$$

यहाँ

$$a = \frac{F_0}{(\omega_0^2 - \omega_0^2)^2 + 4b^2\omega^2} = \frac{20}{[(1000-400)^2 + 2500\times 400]^{1/2}}$$

$= 171$ cm

$$\tan\theta = \frac{2b\,\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} = \frac{50\times 20}{1000-400}$$

$\tan\theta = 1.67$

और

$\theta = \tan^{-1} 1.67$

2. मान लीजिए $a = \frac{a_{max}}{2}$ पर कोणीय आवृत्ति का मान ω_r है।

समीकरण (4.7 ख) और समीकरण (4.13) को लागू करने पर निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{F_0}{[(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4b^2\omega^2\ ]} = \frac{F_0}{4b\,(\omega_0^2 - b^2)^{1/2}}$$

या $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\,b^2\omega^2 = 16\,b^2(\omega_0^2 - b^2)$

या $(\omega_r - \omega + 2b^2)^2 + 4b^2\,\omega^2 = 16b^2(\omega_r^2 + b^2)$

या $(\omega_r - \omega)^2 + 4b^2\,\omega_r^2 = 16\,b^2\,\omega_r^2$ (निम्न अवमंदन के लिए)

या $(\omega_r^2 - \omega^2) = 12b^2\,\omega_r^2$

या $(\omega_r^2 - \omega^2) \pm 2\sqrt{3}b\,\omega_r$

या $(\omega_r - \omega) = \pm\dfrac{2\sqrt{3}\,b\,\omega_r}{\omega_r + \omega} = \pm\sqrt{3}\,b\ (\omega_0 \approx \omega$ के लिए)

अर्ध बैंड चौड़ाई $\Delta\omega = |\omega_r - \omega| = \sqrt{3}\,b$

पूर्ण बैंड चौड़ाई $2\ \Delta\omega = 2\ |\omega_r - \omega| = 2\sqrt{3}\,b$

$= \sqrt{3}\ \gamma/m$

3. अनुनाद पर संधारिता यह होती है

$$C = \frac{1}{4\pi\upsilon^2 L} = \frac{1}{4(3.14)^2\times(10^5)^2\times 0.5\times 10^{-3}\,F}$$

$= 5\times 10^{-9}$ F

$$I_{rms} = \frac{E_{rms}}{R} = \frac{E_0}{R\sqrt{2}} = \frac{1.2\text{ V}}{u\sqrt{2}\,\Omega}$$

$= 0.2$ A (अनुनाद पर $2 = R$)

संधारित्र में शिखर विभवांतर

= शिखर धारा × संधारित्र में प्रतिघात

$$= \frac{E_0}{R}\times\frac{1}{\omega_0 C} = \frac{1.2\text{ V}}{4\Omega}\times\frac{1}{2\pi\times 10^5\times 5\times 10^{-9}\text{ F}}$$

$= 95.5$ V

4.11 शब्दावली

अनुनाद	Resonance
अल्पस्थायी हल	Transient Solution
अवमंदन	Damping
आवृत्ति	Frequency
गुणता कारक	Quality Factor
परिचालन बल	Driving Force
प्रणोदित दोलक	Forced Oscillator
प्रतिघात	Reactance
प्रतिबाधा	Impedence
प्रतिरोधक	Resistance
प्रत्यावर्ती	Alternating
प्रवर्धन	Amplification
स्थायी अवस्था	Steady State

इकाई 5 युग्मित दोलन

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

अभी तक आपने इस खंड में स्प्रिंग-द्रव्यमान तंत्र, लोलक या मरोड़ी दोलत्र जैसे विलगित (एकांकी) दोलायमान तंत्रों का अध्ययन किया है। प्रकृति में भी हमें दोलत्रों के अनेक उदाहरण मिलते हैं। हम जानते हैं कि ठोस पदार्थों में परमाणु, स्थिर वैद्युत बलों द्वारा युग्मित होता है। अणुओं में, मान लीजिए कि जल अणु में, दो हाइड्रोजन परमाणु एक ऑक्सीजन परमाणु से युग्मित होते हैं, जबकि कार्बन डाइऑक्साइड अणु में ऑक्सीजन परमाणु एक अन्य कार्बन परमाणु से युग्मित होता है। इन सभी परिस्थितियों में अन्य परमाणुओं की उपस्थिति के कारण एक परमाणु के दोलनों पर प्रभाव पड़ता है। रेडियो तथा टेलीविजन संचारण में हम प्रेरणिक/धारितात्मक युग्मन सहित वैद्युत परिपथों का उपयोग करते हैं। अतः यह महत्वपूर्ण है कि हम पिछली इकाइयों के अध्ययन का विस्तार उन प्रकरणों (Cases) तक करें, जिनमें सरल तंत्र युग्मित होते हैं।

हम इस इकाई का आरम्भ युग्मित द्रव्यमानों के अनुदैर्ध्य दोलनों के अध्ययन से करते हैं। क्या आप अपेक्षा करते हैं कि इन द्रव्यमानों की गति सरल आवर्त्त होगी ? आपको मालूम हो जाएगा कि अब इनकी गति सरल आवर्त्त नहीं है। परन्तु यह संभव है कि इनका इनका विश्लेषण प्रसामान्य मोड़ों के पदों (Tenns) द्वारा किया जाए, जिनमें प्रत्येक की एक सुनिश्चित आवृत्ति होती है तथा वे सरल आवर्त्त गति का निरूपण करते हैं। युग्मन की उपस्थिति के कारण दो द्रव्यमानों के बीच ऊर्जा-विनिमय होता है। इसे और अधिक समझाने के लिए, हम अनुरूपता द्वारा दो युग्मित लोलकों तथा दो आगमनतः युग्मित *LC* परिपथों के प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियों को निर्धारित करेंगे। इस विश्लेषण को N-युग्मित दोलित्रों तक विस्तृत किया जाएगा। *N*-युग्मित दोलित्रों के तंत्रों के लिए हम यह दिखाएंगे कि जब N की संख्या बहुत अधिक हो जाती है तब हम इसे संमागी माध्यम में कल्पित कर सकते हैं। इस प्रकार के ऊर्जा-विनिमय के सांतत्यक विनिमय से, तरंग गति की परिघटना होती है।

आप अगली इकाई में तरंग संचरण के विषय में विस्तार से जान पाऐंगे, जिसमें धागों (Strings), द्रव्यों तथा गैसों में तरंगों का विशेष उल्लेख होगा।

उद्देश्य

इसके इकाई का अध्ययन करने के बाद आप :

- व्यष्टिगत दोलित्रों के दोलनों पर युग्मन के प्रभाव का वर्णन कर सकेंगे,
- अनुदैर्ध्य दोलनों का निष्पादन करते हुए युग्मित तंत्रों के गति-समीकरण स्थापित कर पाऐंगे,
- प्रसामान्य मोड़ों को परिभाषित और दो युग्मित दोलित्रों का प्रसामानय मोड़ों के पदानुसार गति-विश्लेषण कर सकेंगे,

- महत्वपूर्ण भौतिक तंत्रों की प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियों को अनुरूपता के आधार पर परिकलन कर सकेंगे।
- तरंग समीकरण को लिख सकेंगे।

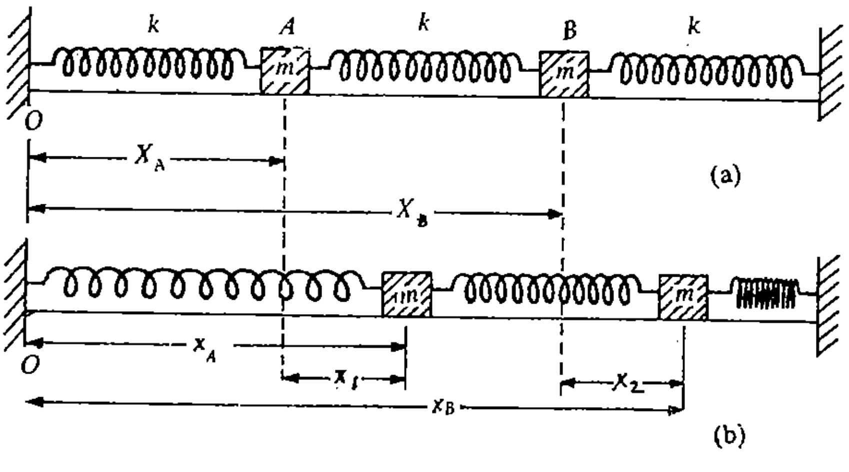
5.2 दो युग्मित द्रव्यमानों का दोलन

युग्मन के प्रभाव का विश्लेषण करने के लिए हम फिर से आदर्श स्प्रिंग-द्रव्यमानों तंत्रों का अध्ययन आरम्भ करते हैं। हम ऐसे दो समान तंत्रों पर विचार करेंगे, जो कि एक स्प्रिंग द्वारा जुड़े (युग्मित) हुए हैं, जैसा कि चित्र 5.1 में दिखाया गया है। इस तंत्र में आपके पास दो बराबर द्रव्यमान वाले पिंड है जो दुर्गम्यता गुणांक K' वाले स्प्रिंगों से सलंग्न है तथा वे दुर्गम्यता में गुणांक K वाले स्प्रिंग द्वारा एक-दूसरे संयुग्मित हैं। साम्यावस्था में दोनों ही द्रव्यमानों पर स्प्रिंग पर कोई भी बल नहीं लगता है। इस तंत्र की गति उनकी प्रारंभिक अवस्थाओं पर निर्भर करेगी। अर्थात् प्रारंभिक अवस्थाओं के आधार पर उनकी गति अनुप्रस्थ या अनुदैर्ध्य हो सकती है। आसानी के लिए, सबसे पहले हम दो युग्मित द्रव्यमानों के अनुदैर्ध्य गति पर विचार करेंगे।

उनमें से एक द्रव्यमान को हम x–अक्ष की दिशा में खींचकर छोड़ देते हैं। प्रत्यानयन बल उसको साम्यावस्था में दोबारा वापस लाने की ओर अग्रसर होगा। जैसे ही, यह द्रव्यमान साम्यवस्था बिंदु का अतिक्रमण करता है, युग्मन स्प्रिंग दूसरे द्रव्यमान को खींचता है। परिणामस्वरूप दोनों द्रव्यमान अनुदैर्ध्य रूप में दोलन करने लगते हैं। इसका अर्थ यह है कि दोनों युग्मित द्रव्यमानों में से एक को प्रदान की गई गति उसी तक सीमित नहीं रहती बल्कि वह दूसरे द्रव्यमान तक भी संचरित होती है।

5.2.1 अवकल समीकरण

हम स्प्रिंग की लम्बाई को x–अक्ष में मान लेते हैं। जिसमें O मूल बिंदु है (चित्र 5.1 क)।



चित्र 5.1 : दो द्रव्यमानों का अनुदैर्ध्य दोलन जो एक बल नियतांक वाले स्प्रिंग से युग्मित है।

मान लीजिए कि बिंदु X_A तथा X_B क्रमशः A तथा B द्रव्यमानों के केन्द्रों के निर्देशांक हैं। यदि द्रव्यमान B को दाहिनी ओर खींच कर छोड़ दिया जाए, तब द्रव्यमान A भी युग्मन स्प्रिंग के कारण दाहिनी ओर खिंच जाएगा। तब युग्मित तंत्र दोलन करने लगेगा। अब हम इन द्रव्यमानों की गति समीकरण को स्थापित करेंगे।

मान लीजिए x_A तथा x_B क्रमशः द्रव्यमान A तथा B की तात्क्षणिक अवस्थाएं हैं। तब इन द्रव्यमानों के अपनी-अपनी साम्यावस्थाओं से विस्थापन होंगे

$$x_2 = x_B - X_B \text{ तथा } x_1 = x_A - X_A$$

अब किसी भी क्षण दोलन के दौरान जो बल द्रव्यमान पर लागू होते हैं, वे निम्न हैं।

(i) प्रत्यानयन बल : $k'(x_A - X_A) = -k'x$ तथा

(ii) युग्मन बल $k(x_B - x_A) - (X_B - X_A) = k(x_2 - x_1)$

हम यहां मान लेते हैं कि द्रव्यमान एक घर्षण रहित सतह पर गतिमान है। न्यूटन के द्वितीय गति नियम के अनुसार, द्रव्यमान A की गति का समीकरण निम्न होगा

$$m\frac{d^2x_A}{dt^2} = -k'(x_A - X_A) + k[(x_B - X_B) - (x_A - X_A)]$$

या

$$m\frac{d^2(x_A - X_A)}{dt^2} = m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k'x_1 + k(x_2 - x_1)$$

क्योंकि $\frac{dX_A}{dt} = 0$

m द्वारा पूरे समीकरण को भाग देने तथा पदों को पुनर्व्यवस्थित करने से हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2x_1 - \omega_s^2(x_2 - x_1) = 0$$

जिसमें

$$\omega_0^2 = \frac{k'}{m} \text{ तथा } \omega_s^2 = \frac{k}{m}$$

इसी प्रकार, B पर द्रव्यमान की गति समीकरण है

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k'x_2 - k(x_2 - x_1) \tag{5.3}$$

इसे दुबारा निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है :

$$\frac{d^2x^2}{dt^2} + \omega_0^2x^2 + \omega_s^2(x_2 - x_1) = 0 \tag{5.4}$$

आइए हम कुछ समय के लिए रुके और पूछें : क्या समीकरण (5.2) तथा (5.4) सरल आवर्त-गति का नियंत्रण करते हैं ? नहीं, क्योंकि युग्मन पद $\omega_s^2(x_2 - x_1)$ की उपस्थिति के कारण हम सामान्यतया इन समीकरणों द्वारा इन द्रव्यमानों की गति को सरल आवर्त-गति अभिनिर्धारित नहीं कर सकते। इसका यह अर्थ है कि पिछली इकाइयों का विश्लेषण, यहां काम नहीं आएगा, क्योंकि ये समीकरण x_1 तथा x_2 में युग्मित हैं। अब प्रश्न उठता है : हम, इन समीकरणों का हल कैसे निकाल सकते हैं ? इन समीकरणों का हल हमें साथ-साथ निकालना पड़ेगा । इस उद्देश्य से हम सबसे पहले समीकरणों (5.2) और (5.4) को जोड़ कर प्राप्त करते हैं

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 + x_2) + \omega_0^2(x_1 + x_2) = 0 \tag{5.5 क}$$

इसके बाद समीकरण (5.4) को समीकरण (5.2) में से घटाने पर तथा पदों को पुनर्व्यवस्थित करते हैं तो इससे हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता है

$$\frac{d^2}{dt^2}(x_1 - x_2) + (\omega_0^2 + 2\omega_s^2)(x_1 - x_2) = 0$$

समीकरण (5.5क) तथा (5.5ख) को देखकर आप पहचान जायेंगे कि ये सरल आवर्त्त गति की मानक समीकरणें हैं। इससे यह संकेत मिलता है कि यदि हम दो नए चरों को प्रस्तुत करें जिनका निर्धारण होता है

$$\xi_1 = x_1 + x_2$$

तथा

$$\xi_2 = x_1 - x_2$$

के द्वारा हम एक युग्मित तंत्र की गति का वर्णन दो वियुग्मित तथा स्वतंत्र गतियों के पदों द्वारा कर सकते हैं। ये प्रत्येक गति सरल आवर्त्त गति है तथा इन्हें निम्न समीकरणों द्वारा वर्णित किया जाता है :

$$\frac{d^2\xi_1}{\delta\tau^2} + \omega_1^2\xi_1 = 0$$

तथा

$$\frac{d^2\xi_2}{d\,t^2} + \omega_2^2\xi_2 = 0$$

जहां

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{k'}{m}$$

तथा

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\omega_s^2 = \frac{k' + 2k}{m}$$

अतः हम देखते हैं कि नये निर्देशांकों ξ_1 तथा ξ_2 से समीकरणों (5.2) तथा (5.4) को दो स्वतंत्र समीकरणों में वियुग्मित किया है, जो ω_1 और ω_2 आवृत्तियों वाली $(\omega_2 > \omega_1)$ सरल आवर्त्त गतियों का वर्णन करती है। इन नए निर्देशांकों को हम **प्रसामान्य निर्देशांक** (Normal co-ordinate) कहेंगे तथा इन प्रत्येक निर्देशांक के साथ सम्बद्ध सरल आवर्त्त गति को हम **प्रसामान्य मोड़** (Normal Mode)कहते हैं। प्रत्येक प्रसामान्य मोड़ की अपनी विशेष आवृत्ति होती है, जिसे हम **प्रसामान्य मोड़ आवृत्ति** (Normal Mode Frequency) कहते हैं।

5.2.2 प्रसामान्य निर्देशांक तथा प्रसामान्य मोड़

साधारण निर्देशांकों x_1 तथा x_2 की तरह प्रसामान्य निर्देशांक ξ_1 तथा ξ_2 के विस्थापन का नाप नहीं होते हैं। परन्तु वे किसी भी समय एक युग्मित तंत्र के विन्यास का विशेष वर्णन देते हैं। इकाई 1 के विश्लेषण का उपयोग करके हम समीकरणों (5.7) तथा (5.8) का साधारण हल सहजता से लिख सकते हैं, कि

$$\xi_1 = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1)$$

और

$$\xi_2 = a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

जहां a_1 तथा a_2 प्रसामान्य मोड़ों का आयाम और ϕ_1 तथा ϕ_2 उनकी प्रारंभिक प्रावस्थाएं हैं।

$$x_1(t) = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$$

क्योंकि $x_1(t) = \dfrac{\xi_1 + \xi_2}{2}$ हैं, हम A पर स्थित द्रव्यमान के विस्थापन को लिख सकते हैं :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}[a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)] \tag{5.13}$$

इस प्रकार, B पर स्थित द्रव्यमान का विस्थापन हम निम्न समीकरण द्वारा लिख सकते हैं :

$$x_2(t) = \frac{1}{2}[a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)] \tag{5.14}$$

नियतांकों a_1, a_2, ϕ_1, ϕ_2 का निधार्रण प्रारंभिक अवस्थाओं से किया जाता है। एक बार इनकी जानकारी मिल जाए तो हम युग्मित द्रव्यमानों की गति को पूर्ण रूप से निर्धारित कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 1

निम्नलिखित प्रारंभिक अवस्थाओं को मानकर समीकरणों (5.13) तथा (5.14) का हल निकालिए :

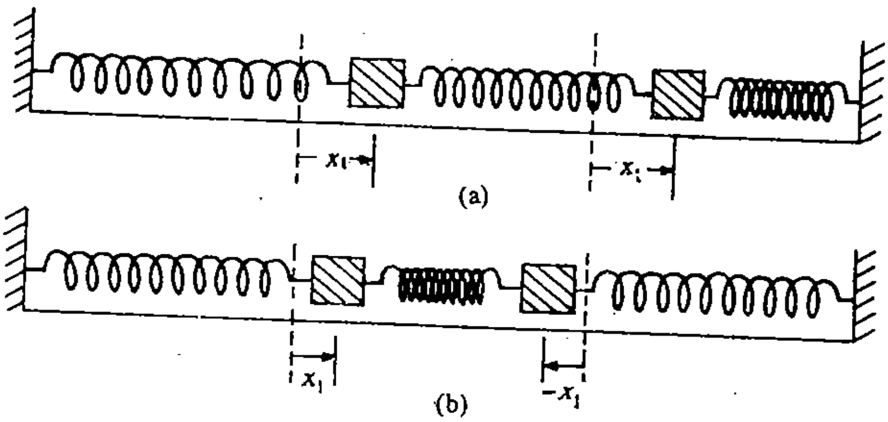
(i) $x_1(0) = d,\ x_2(0) = a,\quad \left.\dfrac{dx_1}{dt}\right|_{t=0} = 0$ तथा

$$\left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

(ii) $x_1(0) = a, x_2(0) = -a, \quad \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=0} = 0$ तथा

$$\left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

इस बोध प्रश्न का हल निकालने पर आप देखेंगे कि जब दोनों द्रव्यमानों को दाहिनी ओर बराबर विस्थापन करके छोड़ दिया जाए तब किसी भी क्षण $x_1(t) = x_2(t)$ अर्थात् $\xi_2 = 0$ होगा। इसका अर्थ है कि उनकी गति, समीकरण (5.7) द्वारा वर्णित होती है और उनकी प्रसामान्य मोड़ आवृत्ति वियुग्मित द्रव्यमानों की प्रसामान्य मोड़ आवृत्ति के बराबर होती है। अर्थात् दोनों द्रव्यमान युग्मन से बिना प्रभावित हुए प्रावस्था में दोलन करते हैं। इस कम्पन मोड़ में युग्मन स्प्रिंग न तो तानित होता है और न ही सम्पीड़ित होता है (ऐसा प्रतीत होता है कि वह है ही नहीं) जैसा कि चित्र 5.2 क में दर्शाया गया है।



चित्र 5.2 : (क) साम्यावस्था विन्यास

(ख) किसी भी क्षण का तात्क्षणिक विन्यास

यदि दो युग्मित द्रव्यमानों को प्रारंभ में एक दूसरे की तरफ बराबर दूरी तक खींच कर छोड़ दिया जाए तो उनके विस्थापन बराबर होंगे, लेकिन उनकी प्रावस्था में π का अंतर होगा। अर्थात् $x_1 = -x_2$ या $\xi_1 = 0$ (चित्र 5.2 ख) इसकी प्रसामान्य मोड़ आवृत्ति वियुग्मित द्रव्यमानों की प्रसामान्य मोड़ आवृत्ति से ज्यादा होगी ($\omega_2 > \omega_1$)। इसका अर्थ यह है कि हम यह कह सकते हैं कि युग्मन प्रभावी है। अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते है कि प्रसामान्य निर्देशांक हमें नियत गुणांकों वाली रैखिक अवकलन समीकरणों के सेट (माला) को लिखने की अनुमति देते हैं। प्रत्येक समीकरण में केवल एक ही आश्रित चर होता है। इसके अतिरिक्त, युग्मित तंत्र की गति को हम इसके संभावित प्रसामान्य मोड़ों का अध्यारोपण मान सकते हैं।

5.2.3 युग्मित दोलनों का मॉडुलन

उपर्युक्त चर्चा में हमने यह कल्पना की थी कि दोनों युग्मित द्रव्यमान बराबर दूरी तक एक ही दिशा या विपरीत दिशाओं में खींचे गए हैं। तब क्या होगा, यदि उनमें से केवल एक को ही खींचकर छोड़ा जाए ? इसको समझने के लिए हमें निम्न प्रारंभिक अवस्थाओं को मानकर समीकरणों (5.13) तथा (5.14) का हल निकालना होगा :

$$x_1(0) = 2a, x_2(0) = 0 \quad \left.\frac{dx_1}{dt}\right|_{t=0} = 0$$

तथा

$$\left.\frac{dx_2}{dt}\right|_{t=0} = 0 \qquad (5.15)$$

आप पाऐंगे कि दो युग्मित द्रव्यमानों के विस्थापनों को दिया जाता है

$$x_1(t) = a\,(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \qquad (5.16\text{ क})$$

तथा

$$x_2(t) = a(\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \qquad (5.16\text{ ख})$$

दो कोसाइन फलनों (Functions) के योगफल (अंतर) को उनके गुणनफल में अभिव्यक्त करने पर, हम इन समीकरणों को भौतिकतः ज्यादा परिचित रूप में दुबारा लिख सकते हैं :

$$x_1(t) = 2a \cos\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2}\right)t \qquad (5.17)$$

तथा

$$x_2(t) = 2a \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}\right)t \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t \qquad (5.18)$$

आपको याद होगा कि समीकरण (5.17) वस्तुतः समीकरण (2.19) जैसी ही है, जो कि हमने मॉडुलित दोलनों के लिए प्राप्त की थी। जैसा पहले किया था, हम $\omega_{av} = \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2}$ को औसत कोणीय आवृत्ति तथा $\omega_{mod} = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ को मॉडुलित कोणीय आवृत्ति से निर्धारित करते हैं।

तब समीकरण (5.17) तथा (5.18) मॉडुलित दोलनों को निरूपित करते हैं, जिन्हें नीचे दिए गए समीकरण से निर्धारित करते हैं :

$x_1(t) = a_{mod}(t) \cos \omega_{av} t$

तथा

$x_2(t) = b_{mod}(t) \sin \omega_{av} t$

जहां

$a_{mod}(t) = 2a \cos \omega_{mod} t$

तथा

$b_{mod}(t) = 2a \sin \omega_{mod} t$

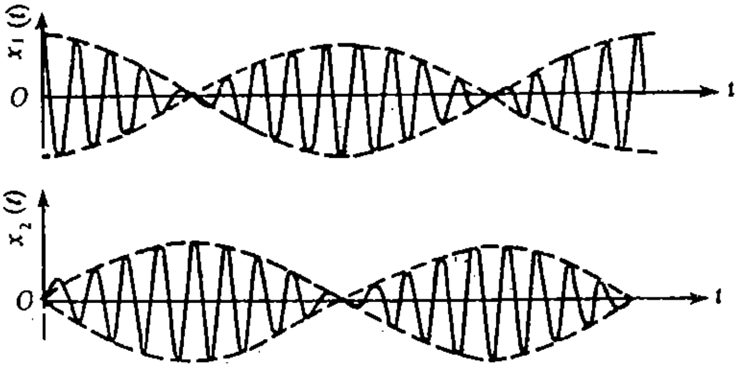
मॉडुलित आयाम है।

स्पष्टतया समीकरण (5.19) तथा (5.20) सरल आवर्त्त गति को निरूपित नहीं करते क्योंकि $a_{mod}(t)$ तथा $b_{mod}(t)$ समय के साथ परिवर्तित होते हैं।

दोनों द्रव्यमानों के विस्थापनों में प्रावस्था अंतर कितना है ? क्योंकि साइन तथा कोसाइन फलनों में $\pi/_2$ का अंतर है, इसलिए दोनों द्रव्यमानों के विस्थापनों में भी प्रावस्था अंतर $\pi/_2$ होगा, मॉडुलित आयामों के लिए भी यह सही है।

दो द्रव्यमानों के विस्थापन-काल ग्राफों को चित्र 5.3 में दर्शाया गया है। समय $t = 0$ पर हम देखते हैं कि जो द्रव्यमान A पर है, उसका आयाम अधिकतम होगा, जबकि B बिंदु पर द्रव्यमान का आयाम शून्य होगा। समय के निंपेक्ष में A का आयाम $t = T/4$ पर घटते-घटते शून्य हो जाता है, जबकि B का अधिकतम हो जाता है।

समय $t = T/4$ समय के पश्चात् चतुर्थांश आवर्त्त काल में यह प्रवृत्ति उत्क्रमित हो जाती है। यह प्रक्रिया अनिश्चित काल तक अपने आप को दोहराती रहेगी, बशर्ते अवमंदन की उपस्थिति न हो।



चित्र 5.3 : दो समरूपी युग्मित द्रव्यमानों का विस्थापन काल ग्राफ भाग 5. 2 . 3

5.2.4 दो युग्मित द्रव्यमानों की ऊर्जा

यदि दो द्रव्यमानों के बीच युग्मन कमजोर हो, तब ω_2 का मान ω_1 से केवल जरा-सा ही भिन्न होगा ताकि ω_{mod} बहुत छोटा हो। इसके फलस्वरूप a_{mod} तथा b_{mod} स्वयं में दृष्टिगोचर परिवर्तन प्रदर्शित करने में कुछ अधिक समय लेंगे। अर्थात् a_{mod} तथा b_{mod} कोणीय आवृत्ति ω_{av} चक्र के दौरान लगभग स्थिर रहेंगे। तब समीकरण (5.19) तथा (5.20) को लगभग सरल आवर्त्त मान सकते हैं।

A तथा B द्रव्यमानों की निम्न ऊर्जाएं हैं

$$E_1 = \frac{1}{2} m\, \omega_{av}^2\, a_{mod}^2(t) = 2\, ma^2 \omega_{av}^2 \cos^2 \omega_{mod} t \qquad (5.23\ क)$$

तथा

$$E_2 = \frac{1}{2} m\, \omega_{av}^2\, b_{mod}^2(t) = 2\, ma^2 \omega_{av}^2 \cos^2 \omega_{mod} t \qquad (5.23\ ख)$$

युग्मित द्रव्यमानों की संपूर्ण ऊर्जा है

$$E = E_1 + E_2 = 2\, ma^2\, \omega_{av}^2$$

जो कि काल के साथ अचर रहती है।

समीकरण (5.24) का उपयोग करके हम (5.23 क) तथा (5.23 ख) समीकरणों को इस प्रकार फिर से लिख सकते हैं

$$E_1 = \frac{E}{2} [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

तथा

$$E_2 = \frac{E}{2} [1 - \cos(\omega_2 - \omega_1)t]$$

ये समीकरणें बतलाती हैं कि $t = 0$ पर $E_1 = E$ तथा $E_2 = 0$ होता है। आरंभ में, संपूर्ण ऊर्जा A पर स्थित द्रव्यमान में समाविष्ट है। जैसे-जैसे समय बीतता है, A पर स्थित द्रव्यमान की ऊर्जा क्षय होने लगती है परन्तु B पर स्थित द्रव्यमान की ऊर्जा बढ़ने लगती है, ताकि तंत्र की संपूर्ण ऊर्जा अचर बनी रहे।

5.2.5 सामान्य कार्य-विधि

अधिकतर महत्वपूर्ण भौतिक परिस्थितियों में युग्मित द्रव्यमान बराबर नहीं होते। तब उपर्युक्त विश्लेषण अधिक उपयोगी सिद्ध नहीं होता है। इन प्रकरणों में प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियों का परिकलन करने के लिए हमें नीचे दी गई कार्य-विधि की रूपरेखा का अनुकरण करना चाहिए :

(i) युग्मित द्रव्यमानों की गति समीकरण लिख लीजिए,

(ii) प्रसामान्य मोड़ हल की कल्पना कीजिए,

(iii) इसे गति समीकरणों में प्रतिस्थापित कीजिए तथा प्रसामान्य मोड़ आयामों के अनुपातों की तुलना कीजिए,

(iv) परिणामी समीकरण का हल निकालिए।

अब हम इस कार्य-विधि को स्पष्ट करेंगे, जब दो असमान द्रव्यमानों m_1 तथा m_2 को बल नियतांक k वाले एक स्प्रिंग के द्वारा युग्मित किया गया हो। तब इन युग्मित द्रव्यमानों की गति समीकरण होगी,

$$m_1 x_1 = -k' x_1 + k(x_2 - x_1) \qquad \text{(i)}$$

तथा

$$m_2 x_2 = -k' x_2 - k(x_2 - x_1) \qquad \text{(ii)}$$

यह प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियों का अवकलन निम्न रूप के हलों की कल्पना करके निकाल सकते हैं।
$x_1 = a_1 \cos(\omega t + \phi)$ तथा $x_2 = a_2 \cos(\omega t + \phi)$

जहां ω कोणी आवृत्ति तथा ϕ प्रारंभिक प्रावस्था है :

तब

$$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$$

तथा

$$\ddot{x}_2 = \omega^2 x_2$$

इन्हें (i) तथा (ii) में x_1 तथा x_2 की जगह प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$(\omega_0^2 + \frac{k}{m_1} - \omega^2) x_1 = \frac{k}{m_1} x_2 \qquad \text{(iii)}$$

तथा

$$(\omega_0^2 + \frac{k}{m_2} - \omega^2) x_2 = \frac{k}{m_2} x_1 \qquad \text{(iv)}$$

समीकरण (iii) द्वारा हम लिख सकते हैं

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{k/m_1}{(\omega_0^2 + \frac{k}{m_1} - \omega^2)}$$

तथा समीकरण (iv) से हम प्राप्त करते हैं

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{(\omega_0^2 + \frac{k}{m_2} - \omega^2)}{k/m_2}$$

x_1 तथा x_2 की शून्येतर मानों के लिए, हम x_2/x_1 के इन मानों को समीकृत करने पर प्राप्त करते हैं :

$$\frac{k/m_1}{(\omega_0^2 + \frac{k}{m_1} - \omega_2)} = \frac{\omega_0^2 + \frac{k}{m_2} - \omega^2}{k/m_2}$$

वज्र-गुणन द्वारा हमें मिलता है :

$$\omega^4 - \left(2\omega_0^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)\omega^2 + \left(\omega_0^2 + \frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)\omega_0^2 = 0$$

यह समीकरण ω^2 में द्विघाती है तथा इसके निम्न मूल हैं :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2$$

तथा

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + K \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)$$

आपने यह नोट किया होगा कि $m_1 = m_2 = m_1$ के लिए यह परिणाम समीकरण (5.7) तथा (5.10) का प्रजनन (reproduce) करता है।

5.3 अन्य युग्मित तंत्रों का प्रसामान्य मोड़ विश्लेषण

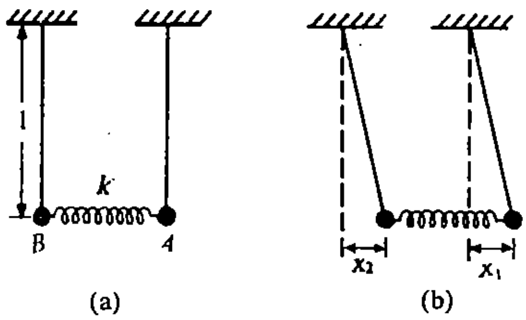
अब तक हमने युग्मित द्रव्यमानों की रैखिक शृंखला को विश्लेषित किया है। इस विश्लेषण को हम बिल्कुल भिन्न भौतिक प्रकृति वाले अन्य तंत्रों तक सहजता से विस्तारित कर सकते हैं। पिछले विश्लेषण के द्वारा हम प्राप्त सादृश्यताओं से हम सबसे पहले दो युग्मित लोलकों की सामान्य मोड़ आवृत्तियों का अभिकलन करेंगे।

5.3.1 दो युग्मित लोलक

आइए हम दो समरूपी सरल लोलकों A और B पर विचार करते हैं, जिनमें बराबर द्रव्यमान m की गोलियां बराबर लम्बाई l के धागों द्वारा लटकी हुई हैं, जैसा कि चित्र 5.4 (क) में दिखाया गया है। दोनों लोलकों की गोलियों को एक भारहीन स्प्रिंग, जिसका बल नियतांक k, है; के द्वारा जोड़ा गया है। साम्यावस्था में गोलियों के बीच की दूरी अतानित स्प्रिंग की लम्बाई के बराबर होगी।

कल्पना कीजिए कि दोनों लोलकों के द्रव्यमानों को उनकी साम्यावस्थाओं से दाहिनी ओर विस्थापित किया जाता है। मान लीजिए कि इन गोलियों की अवधि t पर विस्थापन x_1 (t) तथा x_2 (t) है, जैसा कि चित्र 5.4(ख) में दिखाया गया है। युग्मन स्प्रिंग में तनाव $k(x_1 - x_2)$ होगा। यह तनाव A के त्वरण के विरुद्ध होगा, परन्तु यह B के त्वरण में सहायता करेगा। लघु आयाम सन्निकटन के लिए, इकाई 1 से हमें स्मरण होगा कि एक सरल लोलक का गति समीकरण दिया जाता है :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mg}{l} x$$



चित्र 5.4 दो समरूपी लोलकों का दोलन
(क) साम्यावस्था विन्यास
(ख) तात्क्षणिक विन्यास

वर्तमान प्रकरण में, युग्मन की उपस्थिति, इस समीकरण के दक्षिण पक्ष को पद $\pm k\,(x_1 - x_2)$ के द्वारा रूपांतरित करती है। अतः A तथा B द्रव्यमान की गति समीकरण निम्न होगी :

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -\left(\frac{mg}{l}\right)x_1 - k\,(x_1 - x_2) \qquad (5.26\text{क})$$

तथा

$$m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\left(\frac{mg}{l}\right)x^2 + k(x_1 - x_2) \qquad (5.26\text{ख})$$

m द्वारा पूरे समीकरण को विभाजित करने तथा पदों की पुनर्व्यवस्था करने पर हम प्राप्त करते हैं

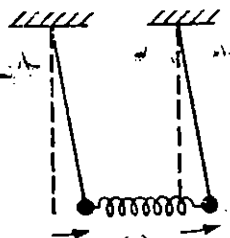
$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_1 + \omega_s^2(x_1 - x_2) = 0 \qquad (5.27\text{क})$$

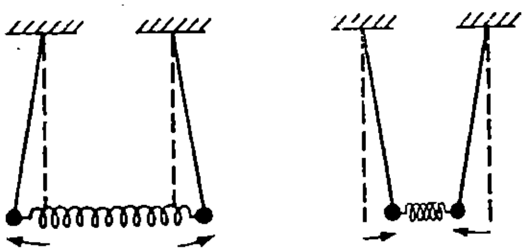
तथा

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \omega_0^2 x_2 + \omega_s^2(x_1 - x_2) = 0 \qquad (5.27\text{ख})$$

जहां हमने $\omega_0^2 = g/l$ तथा $\omega_s^2 = k/m$ को प्रतिस्थापित किया है!

आप स्वीकार करेंगे कि ये समीकरण क्रमशः समीकरण (5.2) तथा (5.4) के समरूपी हैं। अतः पिछले भागों के सम्पूर्ण विश्लेषण यहां लागू होते हैं और हम सादृश्यताओं के द्वारा युग्मित लोलकों की गति का वर्णन कर सकते हैं। इस तंत्र के प्रसामान्य मोड़ों को चित्र 5.5 में दिखाया गया है। मोड़-1 में $x_1 = x_2$ दोनों लोलकों के द्रव्यमान प्रावस्था में हैं तथा आवृत्ति $\omega_1 = \omega_0 = \sqrt{g/l}$ पर दोलन करती है। परन्तु मोड़-2 में ($x_1 = -x_2$ या $x_2 = -x_1$) दोनों लोलकों के द्रव्यमान के विपरीत प्रावस्था में हैं तथा आवृत्ति $\omega^2 = [\omega_0^2 + 2\omega_s^2]^{1/2} = [(g/l + 2(k/m)]^{1/2}$ पर दोलन करती है।


(a)


(b)

चित्र 5.5 : दो युग्मित लोलकों के प्रसामान्य मोड़
(क) प्रावस्था मोड़ में
(ख) असंगत प्रावस्था मोड़ में

बोध प्रश्न 2

दो समरूपी युग्मित लोलकों की गतिज तथा स्थितिज ऊर्जाएं निम्नलिखित समीकरणों द्वारा दी जाती हैं :

गतिज ऊर्जा $= \frac{m}{2}\ [(\dot{x}_1)^2 + (\dot{x}_2)^2]$

तथा

(स्थितिज ऊर्जा) $U = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{l}\right)[x_1^2 + x_2^2] + \frac{1}{2} K\,[(x_1 - x_2)^2]$

जहां

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \quad (i = 1,2) \text{ है।}$$

प्रसामान्य निर्देशांक के पदों में इन्हें अभिव्यक्त कीजिए ?

इस बोध प्रश्न को हल करने पर आप देखेंगे कि गतिज ऊर्जा K.E. $= \frac{m}{4}\,(\xi_1)^2 + \frac{m}{4}\,(\xi_2)^2$

तथा

(स्थितिज ऊर्जा) $= V = \frac{1}{4}\,(m\omega_1^2\,\xi_1^2 + m\,\omega_2^2\,\xi_2^2)$

हम इन व्यंजकों को ज्यादा परिष्कृत रूप में दोबारा लिख सकते हैं। यदि हम प्रसामान्य निर्देशांकों को निर्धारित कर लेते हैं, जैसे

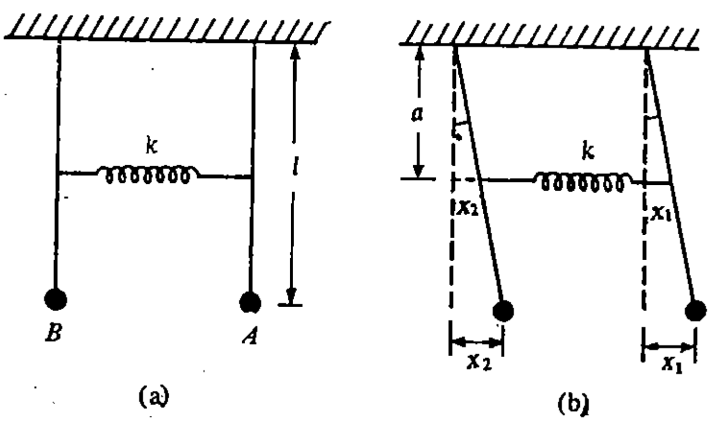
$$\xi_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\,(x_1 + x_2) \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{m}{2}} \text{ तथा } (x_1 + x_2) \qquad (5.28)$$

बोध प्रश्न 3

समीकरण (5.28) द्वारा दी गई परिभाषा का प्रयोग करके एक युग्मित लोलक तंत्र की सम्पूर्ण ऊर्जा का प्रसामान्य निर्देशांक पदों द्वारा परिकलन कीजिए ? यदि किसी भी क्षण $\xi_1 = 1.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\,\sqrt{\mathrm{kg}}$ तथा $\xi_2 = 0.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{m}\sqrt{\mathrm{kg}}$ हों तो आप उसी क्षण $x_1\,(t)$ तथा $x_2\,(t)$ का परिकलन कीजिए ? यदि $m = 0.1$ kg दिया गया है।

उपर्युक्त चर्चा से आप दो लोलकों, जिनके द्रव्यमान युग्मित हैं, की प्रसामान्य मोड आवृत्तियां परिकलन करना सीख गए होंगे। क्या इन लोलकों की आवृत्तियां वही रहेंगी, यदि इनके धागों को युग्मित किया जाए जैसा कि चित्र 5.6 (क) में दिखाया गया है। इस प्रश्न का उत्तर ढूँढ़ने के लिए हम चित्र 5.6 ख में दर्शाए विन्यास पर विचार करते हैं। किसी भी अवधि t पर, मान लीजिए कि स्प्रिंग की लम्बाई में परिवर्तन $x_2' - x_1' = \left(\frac{d}{l}\right)(x_2 - x_1)$ है, जहां x_1 तथा x_2 द्रव्यमानों की साम्यावस्था से विस्थापन तथा d निलम्बन तथा युग्मन बिंदुओं के बीच की दूरी है। अतः स्प्रिंग का प्रत्यानयन बल होगा।

$$F = k(x_2' - x_1') = \frac{k.d}{l}\,(x_2 - x_1)$$



चित्र 5.6: (क) साम्यावस्था विन्यास
(ख) तात्क्षणिक विन्यास

बोध प्रश्न 4

ऐसे दो लोलकों का गति-समीकरण लिखिए, जिन्हें निलम्बन बिंदु से दूरी d पर युग्मित किया गया हो ? उनकी प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियां परिकलित कीजिए ?

आप पाऐंगे कि प्रसामान्य मोड़ों की आवृत्तियां दी जाती हैं :

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

तथा

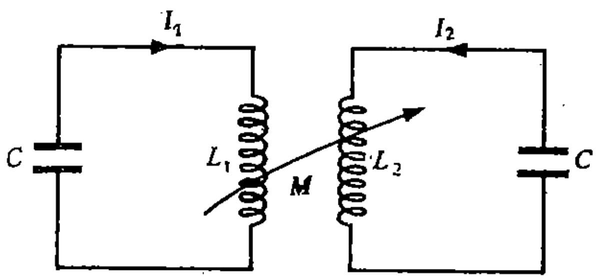
$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k\,d^2}{ml^2}}$$

यह समीकरण प्रमाणित करते हैं कि ω_2 निलंबन तथा युग्मन बिंदुओं के बीच की दूरी पर निर्भर रहता है। स्पष्टतः जब $d = l$ होगा तब ω_2 की अभिव्यंजना युग्मित द्रव्यमानों की अभिव्यंजन में समानीत हो जाती हैं।

5.3.2 आगमनतः युग्मित LC परिपथ

इकाई 1 में हमने जाना था कि एक LC परिपथ में चार्ज इधर-उधर, आवृत्ति $\upsilon_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ पर दोलन करता है। इस प्रकार, ऊर्जा का रूप बारंबार वैद्युत से चुम्बकीय तथा इसके विलोमतः परिवर्तित होता रहता है। यदि इस प्रकार के दो परिपथों को युग्मित किया जाए तो हम अपेक्षा करते हैं कि उनके बीच कुड ऊर्जा का आदान प्रदान होगा। इनका अध्ययन, विद्युत संचरण शक्ति तथा रेडियो अभिग्रहण के क्षेत्रों के महत्वपूर्ण अनुप्रयोगों में स्थान पाता है। इसलिए, आइए हम दो परिपथों पर विचार करें, जैसा कि चित्र 5.7 में दर्शाया गया है। क्या आप जानते हैं कि परिपथों को कैसे युग्मित किया जाता है। इन परिपथों को आगमनतः युग्मित किया जाता है। यह युग्मन एक वोल्टता ट्रांसफॉर्मर के साथ-साथ एक दो चित्र के प्रचालन का भी आधार बनता है।

दो वैद्युत परिपथों का आगमनतः युग्मित कहा जाता है, जब एक परिपथ से सम्बद्ध चुम्बकीय अभिवाह का परिवर्तन दूसरे परिपथ में विद्युत वाहक बल प्रेरित करता है (अतः यह धारा उत्पन्न करता है)। युग्मन-गुणांक को, इस प्रकार प्राप्त किया जाता है $\mu = M / \sqrt{L_1 L_2}$ जहां M अन्योन्य प्रेरकत्व है तथा L_1, L_2 दो युग्मित परिपथों के स्वप्रेरकत्व हैं ।



चित्र 5.7 : दो समरूपी आगमनतः युग्मित परिपथ

मान लीजिए कि I_1 तथा I_2 दो परिपथों में धाराओं का तात्क्षणिक मान है। परिपथ-1 में चार्ज की गति समीकरण प्राप्त करने के लिए हमें समीकरण (1.36) को निम्न प्रकार से रूपांतरित करना पड़ेगा

$$\frac{q_1}{C_1} = -L_1 \frac{dI_1}{dt} + M\frac{dI_2}{dt} \tag{5.29}$$

जहां $M\,dI_2/dt$ परिपथ-2 में बहने वाली धारा I_2 के द्वारा परिपथ-1 में उत्पन्न विद्युत वाहक-बल है। स्पष्ट रूप में यह I_1 की वृद्धि करने की ओर प्रवृत्त है। उसी प्रकार, परिपथ-2 के लिए हम लिख सकते हैं

$$\frac{q_2}{C_2} = -L_2 \frac{dI_2}{dt} + M\frac{dI_1}{dt}$$

क्योंकि

$$I = \frac{dq}{dt} \quad \text{तथा} \quad \frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \quad \text{हम}$$

इस समीकरणों को दोबारा इस प्रकार लिख सकते हैं,

$$\frac{d^2 q_1}{dt^2} + \omega_0^2 q_1 = \frac{M}{L_1} \frac{d^2 q_2}{dt^2} \quad (5.30 \text{ क})$$

तथा

$$\frac{d^2 q_2}{dt^2} + \omega_s^2 q_2 = \frac{M}{L_2} \frac{d^2 q_1}{dt^2} \quad (5.30 \text{ ख})$$

समीकरण (5.30 क) तथा (5.30 ख), दो युग्मित समीकरण हैं। प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियों को निकालने के लिए हम लिखते हैं

$$q_1 = A \cos(\omega t + \phi)$$

तथा

$$q_2 = B \cos(\omega t + \phi)$$

इनका प्रयोग समीकरणों (5.30 क) तथा (5.30 ख) में करके, हमें प्राप्त होता है

$$(\omega_p^2 - \omega^2)\, q_1 = -\frac{M}{L_1} \omega^2 q_2$$

तथा

$$(\omega_s^2 - \omega^2)\, q_2 = -\frac{M}{L_2} \omega^2 q_1$$

इन समीकरणों से प्राप्त q_1/q_2 के मान को समीकृत करने पर हमें निम्न प्राप्त होता है

$$\frac{M}{L_1} \frac{\omega^2}{(\omega_p^2 - \omega^2)} = \frac{L_2}{M} \frac{\omega_s^2 - \omega^2}{\omega^2}$$

इस व्यंजक को हम इस प्रकार पुनर्व्यवस्थित कर सकते हैं :

$$(\omega_p^2 - \omega^2)(\omega_s^2 - \omega^2) = \frac{M^2}{L_1 L_2} \omega^4$$

$$= \mu^2 \omega^4$$

जहां μ युग्मन-गुणांक है।

समीकरण (5.31) ω^2 में द्विघाती है, इसके मूल हमें प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियां प्रदान करते हैं। सरलता के लिए हम मान लेते हैं कि परिपथ समरूपी हैं ताकि उनकी सामान्य आवृत्तियां बराबर हों, अर्थात् मान लीजिए कि $\omega_p = \omega_s = \omega_0$ हैं तब,

$$(\omega_0^2 - \omega^2)^2 = \mu^2 \omega^4$$

अथवा

$$\omega_0^2 - \omega^2 = \pm \mu \omega^2$$

ताकि

$$\omega = \pm \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm \mu}} \quad (5.32)$$

प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियों के उन मानों को, जो कि धन वर्गों के संगत हों, स्वीकार्य प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियां कहलाती हैं तथा इन्हें इस प्रकार दिया जाता है :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{(1+\mu)}}$$

तथा

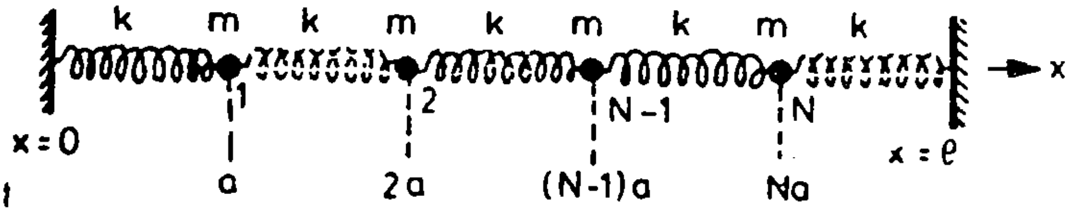
$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\mu}}$$

5.4 N युग्मित द्रव्यमान के अनुदैर्ध्य दोलन : तरंग समीकरण

हमें मालूम है कि ठोस के प्रत्येक तरल (Fluid) में अंतः आणविक बल से धारण किए हुए दो से अधिक युग्मित परमाणु होते हैं। इस प्रकार की प्रणाली के सामान्य रूप को जानने के लिए पूर्ववर्ती विश्लेषण को तीन या साधारण रूप से युग्मित दोलनों तक बढ़ाना पड़ेगा, जो जरूरी नहीं कि किसी एक ही द्रव्यमान के हों।

सरलता के लिए, सबसे पहले हम $(N+1)$ समरूपी स्प्रिंगों द्वारा जुड़े हुए N समरूपी द्रव्यमानों के तंत्र पर विचार करेंगे। जैसा कि चित्र 5.8 में दिखाया गया है। इसमें प्रत्येक स्प्रिंग का बल नियतांक K हैं। तंत्र के मुक्त सिरों को $x = 0$ तथा $x = l$ पर दृढ़ता से बद्ध किया गया है। साम्यावस्था में, इन द्रव्यमानों की स्थिति होगी $x = a, 2a, ...Na$ ताकि $l = (N+1)\, d$ हो। यदि $(N-1)$ वें, N तथा $(N+1)$ वें द्रव्यमानों का उनकी माध्य स्थिति से विस्थापनों को क्रमशः ψ_{n-1}, ψ_n तथा ψ_{n+1} द्वारा दिया जाए तो हम n वें द्रव्यमान की गति समीकरण को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$m \frac{d^2 \psi_n}{dt^2} = -k\,(\psi_n - \psi_{n+1}) - k\,(\psi_{n-1} - \psi_n) \tag{5.38}$$



चित्र 5.8 : अनुदैर्ध्य समरूपी द्रव्यमान साम्यवस्था

आपको याद होगा कि इकाई 1 में हमने स्प्रिंग-स्थिरांक K को प्रत्यानयन बल प्रति एकांक के रूप में परिभाषित किया था। तो हम लिख सकते हैं $K = F/d$ जहां d स्प्रिंग का तानन है। इस संबंध का समीकरण (5.38) में उपयोग करके, हमें प्राप्त होता है

$$\frac{d^2\psi_n}{d\,t^2} = \frac{F}{m}\left[\left(\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{d}\right)\right] - \left(\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{d}\right)$$

अब हम कल्पना करते हैं कि $N \to \infty$ तब, दो क्रमागत द्रव्यमानों के बीच पृथक्करण बहुत कम हो जाएगा। तत्पश्चात्, हम d को Δx द्वारा प्रतिस्थापित कर सकते हैं तथा तब समीकरण (5.38) हो जाती है :

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = \frac{F}{m}\left[\frac{\psi_{n+1}-\psi_n}{\Delta x} - \frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{\Delta x}\right]$$

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = \frac{F}{m}\left[\left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)_{n+1} - \left(\frac{\delta\psi}{\delta x}\right)_n\right]$$

यदि n वां द्रव्यमान मूल बिंदु से x दूरी पर स्थित हो, तब $\Delta x \to 0$ की सीमा में हमारे पास हैं :

$$\frac{d^2\psi_n}{dt^2} = \frac{F}{m}\left[\left(\frac{d\psi}{dx}\right)_{x+\Delta x} - \left(\frac{d\psi}{dn}\right)_x\right]$$

जहां हमने ψ से पायाक्षर n को छोड़ दिया है। हम जानते हैं कि किसी संतत फलन $f(x+\Delta x)$को x तथा उसके अवकलजों पर निर्धारित फलन पदों से निम्नलिखित प्रसरण द्वारा व्यक्त कर सकते हैं :

$$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{d\,f(n)}{dx}\,\Delta x + \frac{1}{2}\frac{d^2f}{d\,x^2}(\Delta x)^2 + \ldots\ldots \qquad (5.40)$$

f को $d\psi/dx$ लेने पर तथा पदों का Δx की केवल प्रथम कोटि तक रखकर हम लिख सकते हैं :

ताकि समीकरण (5.39) के कोष्ठकों के अंतर्गत आए पदों को इस प्रकार दोबारा लिखा जा सकता है

$$\left.\frac{d\psi}{dn}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{d\psi}{dn}\right|_x = \frac{d^2\psi}{dx^2}\,\Delta x$$

इस परिणाम को समीकरण (5.39) में उपयोग करके तथा पदों को पुनर्व्यवस्थित करके, हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{F}{\rho_c}\frac{d^2\psi}{dx^2}$$

जहां $\rho_c = m/\Delta n$ है। आप देखेंगे कि राशि F/ρ_c का परिमाप, वर्ग वेग के परिमाप जैसा ही है। समीकरण (5.41) एक आंशिक अवकल समीकरण है तथा इसे **तरंग समीकरण** (Wave Equation) कहा जाता है।

अतः हम पाते हैं कि बहुत से युग्मित द्रव्यमानों की अनुदैर्ध्य गति, तरंग संचरण परिघटना का कारण बनती है। हम बहुत से अनुप्रस्थ दोलनों को निष्पादित करने वाले युग्मिमत द्रव्यमानों तंत्र के लिए एक समान समीकरण प्राप्त करते हैं। हम उनकी अगले खंड में विस्तार से चर्चा करेंगे।

5.5 सारांश

1. दो समरूपी युग्मित द्रव्यमानों के अनुदैर्ध्य दोलन सरल आवर्त्त नहीं होते हैं। युग्मित द्रव्यमानों के परिणामी आयाम एक माडयुलित पैटर्न के समान होते हैं।

2. दोनों युग्मित द्रव्यमानों (समरूपी) में से किसी एक के विस्थापन को इस तंत्र के प्रसामान्य मोड़ों का अध्यारोपण समझ सकते हैं। प्रत्येक मोड़ एक स्वतंत्र सरल आवर्त्त-गति को निरूपित करता है। प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियों को हम प्राप्त करते हैं :

   $$\omega_1 = \sqrt{\frac{k'}{m}} \qquad \text{और} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{k'+2k}{m}}$$

   द्वारा, जहां k तथा k' स्प्रिंग-स्थिरांक हैं।

3. दो समरूपी युग्मित द्रव्यमानों की संपूर्ण ऊर्जा

   $E = 2\,ma^2\,\omega_{av}^2$ समीकरण द्वारा प्राप्त की जा सकती है।

यह ऊर्जा द्रव्यमानों के बीच दो बार इधर से उधर अवधि T में प्रवाहित होती है तथा इस अवधि को प्राप्त करते हैं

$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}$$

4. दो युग्मित लोलकों के तंत्र की प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियां प्राप्त होती है

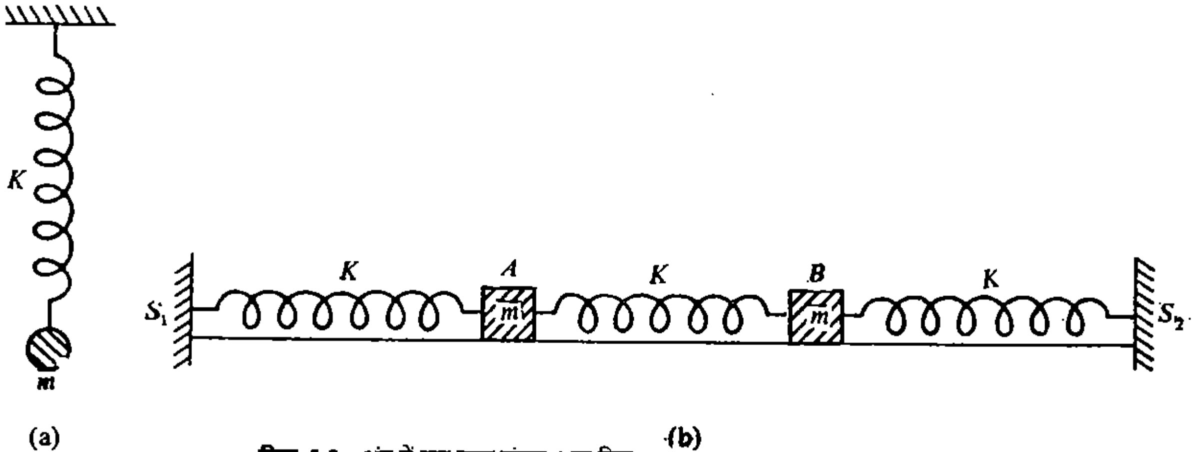
$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ तथा $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l} + \frac{2k}{m}}$ द्वारा।

5. N- युग्मित द्रव्यमानों के अनुप्रस्थ दोलनों के दौरान ऊर्जा-विनिमय के कारण सीमा $N \to \infty$ के अंतर्गत एक तरंग का संचरण होता है। तरंग समीकरण दी जाती है,

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{F}{\rho_c l} \frac{d^2\psi}{dn^2}$$

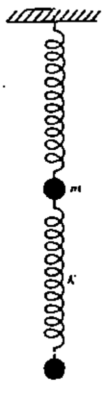
5.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. यदि द्रव्यमान m के एक पिंड को एक स्थिर टेक पर, एक बल नियतांक k वाले स्प्रिंग की मदद से निलंबित किया जाए तो वह 2 Hz आवृत्ति से कंपन करेगा (चित्र 5.9 क)। अब दो समरूपी पिंड A तथा B जिनका द्रव्यमान m है, एक k बल नियतांक के स्प्रिंग द्वारा आपस में जुड़े हुए हैं। ये दोनों पिंड अलग-अलग दो समरूपी k बल नियतांक वाले स्प्रिंगों द्वारा स्थिर टेकों S_1 तथा S_2 से जुडे हुए हैं (चित्र 5.9 ख)। उसके बाद, यदि A को क्लेम्प किया जाए तो B, 2.5 Hz आवृत्ति से कम्पन करेगा। कम्पन के दो मोड़ों की आवृत्तियों का परिकलन कीजिए।

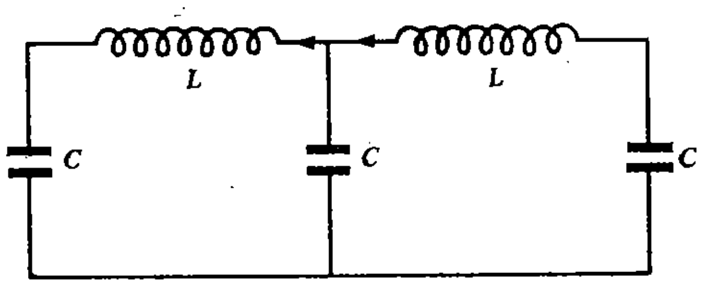


चित्र 5.9 : अंत में कुछ प्रश्न संख्या-1 का चित्र

2. दो समान द्रव्यमान (m) बल नियतांक k के एक स्प्रिंग द्वारा एक-दूसरे से जुड़े हैं और इसके बाद ऊपरी द्रव्यमान को एक समरूपी स्प्रिंग द्वारा एक स्थिर टेक से जोड़ा गया है, जैसा कि चित्र 5.10 में दिखाया गया है। तंत्र को उर्ध्वाधर दिशा में दोलन करने दिया जाता है। सिद्ध कीजिए कि दो प्रसामान्य मोड़ों की आवृत्तियां $\omega^2 = \left(3 \pm \sqrt{5}\right) k/2m$ हैं तथा इन दोनो मोड़ों में दो द्रव्यमानों में अनुपात 1/2 $\left(\sqrt{5+1}\right)$ है।



चित्र 5.10 : अंत में कुछ प्रश्न संख्या-2 का चित्र



चित्र 5.11 : अंत में कुछ प्रश्न संख्या-3 का चित्र

3. चित्र 5.11 में दर्शाए गए दो धारितात्मकता से युग्मित परिपथों पर विचार कीजिए। धाराओं के तरंग समीकरणों को लिखिए तथा प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियों का परिकलन कीजिए।

5.7 हल/ उत्तर

1. इस प्रकरण में समीकरण 5.1 में m का स्थान m_1 ले लेगा तथा समीकरण 5.4 में m को m_2 प्रतिस्थापित करेगा ताकि युग्मित द्रव्यमानों की गति समीकरण को हम लिख सकें

$$m_1 x_1 = -k' x_1 + k\ (x_2 - x_1)$$

बोध प्रश्न 1

$$x_1 = \xi_1 - \xi_2 = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

तथा

$$x_2 = \xi_1 - \xi_2 = a_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) - a_2 \cos(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\frac{dx_1}{dt} = -a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi) - a_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -a_1 \omega_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) + a_2 \omega_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2)$$

(क) प्रारंभिक अवस्था का प्रयोग करके, हम प्राप्त करते हैं

$$a = a_1 \cos\phi_1 + a_2 \cos\phi_2\ ,\ a = a_1 \cos\phi_1 - a_2 \cos\phi_2$$

तथा $0 = a_1 \omega_1 \sin\phi_1 + a_2 \omega_2 \sin\phi_2, 0 = a_1 \omega_1 \sin\phi_1 - a_2 \omega_2 \sin\phi_2$

अतः $a_1 \cos\phi_1 = a, a_2 \cos\phi_2 = 0, a_1 \omega_1 \sin\phi_1 = 0, a_2 \omega_2 \sin\phi_2 = 0$

क्योंकि $a_1, a_2, \omega_1, \omega_2$ शून्य के बराबर नहीं हैं,

$$\phi_1 = \phi_2 = 0, a_1 = a, a_2 = 0$$

$$x_1 = a_1 \cos\omega_1 t, x_2 = a \cos\omega_1 t$$

तथा

$$\xi_1 = a \cos\omega_1 t_1, \xi_2 = 0$$

(ख) समीकरणों (i) से (iv) तक में प्रारंभिक अवस्थाओं का प्रतिस्थापन करने से मिलता है

$$\phi_1 = 0, \phi_2 = 0, a_1 = 0, a_2 = -a$$

$\therefore x_1 = a \cos \omega_2 t, x_2 = -a \cos \omega_2 t$

तथा

$\xi_1 = 0, \xi_2 = -a \cos \omega_2 t$

2. x_1 तथा x_2 विस्थापनों पर A तथा B लोलकों की चाल क्रमशः $dx_1/dt = \dot{x}_1$ तथा $dx_2/dt = \dot{x}_2$ होगी। इसलिए गतिज ऊर्जा

$$\text{ग.उ.} = \frac{1}{2} m \ (\dot{x}_1)^2 + \frac{1}{2m} (\dot{x}_1)^2 \qquad \text{(i)}$$

$$\text{स्थितिज ऊर्जा} = \frac{1}{2} m \ \omega_0^2 x_1^2 + \frac{1}{2} m \, \omega_{av} \ x_2^2$$

$$\text{स्थितिज ऊर्जा} = +\frac{1}{2} m \ \omega_s^2 (x_2 - x_1)^2 \qquad \text{(ii)}$$

जहां $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$ तथा $\omega_s^2 = \frac{k}{x}$

समीकरणों (5.6 क) तथा (5.6 ख) से हम पाते हैं :

अतः $x_1 = \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$ तथा $x_2 = \frac{\xi_1 - \xi_2}{2}$

$\dot{x}_1 = \frac{\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2}{2}$ तथा $\dot{x}_2 = \frac{\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2}{2}$

$$\text{अब ग· उ·} = \frac{1}{8} m \ (\dot{\xi}_1 + \dot{\xi}_2)^2 + \frac{1}{8} m \ (\dot{\xi}_1 - \dot{\xi}_2)^2$$

$$= \frac{m}{4} \ (\dot{\xi}_1)^2 + \frac{m}{4} \ (\dot{\xi}_2)^2$$

$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2 (a^2 + b^2)$

$$\text{स्थि· उ·} = \frac{1}{2} m \ \omega_0^2 (x_1^2 + x_2^2) + \frac{1}{2} m (x_2 - x_1)^2 \omega_s^2$$

$$= m \ \omega_0^2 (\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{1}{2} m \ \omega_s^2 \xi_2^2$$

$$= \frac{1}{4} \ (m \ \omega_0^2 \xi_1^2 + m \ \omega_s^2 \xi_2^2)$$

3. यदि y प्रसामान्य निर्देशांकों को निम्न प्रकार निर्धारित किया जाए

$\xi_1 = \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1 + x_2)$ तथा $\xi_2 = \sqrt{\frac{m}{2}} (x_1 - x_2)$ तो हम पाते हैं कि

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{2m}} (\xi_1 + \xi_2)$ तथा $x_2 = \frac{1}{\sqrt{2m}} (\xi_1 - \xi_2)$

इनको (i) तथा (ii) में प्रातिस्थापित करने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\text{ग.उ·} = \frac{1}{2} \ (\dot{\xi}_1)^2 + \frac{1}{2} \ (\dot{\xi}_2)^2$$

$$\text{तथा स्थि · उ·} = \frac{1}{2} \ \omega^2 \xi_1^2 + \frac{1}{2} \ \omega^2 \xi_2^2$$

अतः युग्मित लोलकों की संपूर्ण ऊर्जा होगी

$$E = \frac{1}{2} \ [(\dot{\xi}_1)^2 + (\dot{\xi}_2)^2 + \omega^2 \xi_1^2 + \omega^2 \xi_2^2]$$

$$x_1 = \sqrt{\frac{1}{0.2}}\,(1.50 - .50) \times 10^{-3} = 4.47 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

$= 4.47$ mm

$$x_2 = \sqrt{\frac{1}{0.2}}\,(1.50 - .50) \times 10^{-3} = 2.24 \times 10^{-3}\,\text{m}$$

A तथा B पर द्रव्यमानों की गति समीकरणें हैं

$$\ddot{x}_1 = -\frac{g}{l}\; x_1 + \frac{k a^2}{m l^2}\,(x_2 - x_1)$$

तथा

$$\ddot{x}_2 = \frac{g}{l}\; x_2 - \frac{k a^2}{m l^2}\,(x_2 - x_1)$$

इन समीकरणों की तुलना, समीकरणों (5.27 क) तथा (5.27 ख) से करने पर, हम प्राप्त करते हैं :

$$\omega_1^2 = \omega_0^2 = \frac{g}{l}$$

तथा

$$\omega_2^2 = \omega_0^2 + 2\,\omega_s^2 = \left(\frac{g}{l} + \frac{2\,k a^2}{m l^2}\right)$$

5. समीकरण (5.33 क) तथा (5.33 ख) से हम देखते हैं

कि $\omega_1 = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1+\mu}}$

तथा

$$\omega_2 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\mu}}$$

यहां $\omega_0 = 600$ Hz तथा $\mu = .44$ है, ताकि

$$\omega_1 = \frac{600}{\sqrt{1.44}} = 500\text{ Hz}$$

तथा

$$\omega_2 = \frac{600}{\sqrt{0.56}} = 800\text{ Hz}$$

अंत में कुछ प्रश्नों के उत्तर

1. $\nu_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} = \dfrac{\omega_0}{2\pi} = 2\text{ Hz}$

$$\therefore \frac{k}{m} = \omega_0^2 = 4\pi^2\nu^2 = 4\pi^2 \times 2^2 = 16\,\pi^2 \qquad \text{(i)}$$

जब A को कलेम्प किया जाए तो B की गति समीकरण होगी

$$m\,\frac{d\,x_B}{dt^2} = -(k + k')\,x_B$$

या

$$\frac{d^2 x_2}{dt^2} + \left(\frac{k}{m} + \frac{k'}{m}\right) x_B = 0$$

इस सरल आवर्त्त-गति की आवृत्ति को दिया जाता है,

$$\upsilon_B = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}+\frac{k'}{m}} = 2.5 \text{ Hz}$$

$$\therefore \frac{k}{m} + \frac{k'}{m} = \omega_B^2 = 4\pi^2 \upsilon_B^2$$

$$= 4\pi^2 (2.5)^2 = 25\pi^2 \qquad \text{(ii)}$$

समीकरण (i) को समीकरण (ii) से घटाने पर हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{k'}{m} = 9\pi^2 \qquad \text{(iii)}$$

अब कम्पन के दो प्रसामान्य मोड़ों की कोणीय आवृत्तियों को दिया जाता है

$$\omega_1^2 = 4\pi^2 \nu_1^2 = \omega_0^2 = \frac{k}{m} = 16\pi^2$$

या

$$\nu_B = 2\text{Hz}$$

या $\omega_2^2 = 4\pi^2 \upsilon^2 = \frac{k_1}{m} + \frac{2k'}{m} = 16\pi^2 + 18\pi^2 = 34\pi^2$

या

$$\upsilon_2 = \sqrt{\frac{17}{2}} = 2.92 \text{ Hz}$$

2 द्रव्यमानों A तथा B की गति समीकरणें हैं :

$$m\frac{d^2x_1}{dt^2} = -k(x_1 - x_2)$$

तथा

$$m\frac{d_2x_2}{dt^2} = -k\,x_2 - k(x_2 - x_1)$$

जबकि

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 = 0 \qquad \text{(i)}$$

तथा

$$\frac{d^2x_2}{dt^2} - \frac{k}{m}x_1 + \frac{2k}{m}x_2 = 0$$

आइए हम यह कल्पना करते हैं कि

$$x_1 = A\cos(\omega t + \phi)$$

तथा

$$x_2 = B\cos(\omega t + \phi)$$

तब

$\ddot{x}_1 = -\omega^2 x_1$

तथा

$\ddot{x}_2 = -\omega^2 x_2$

इन परिणामों को समीकरण (i) तथा (ii) में प्रयोग करके हम प्राप्त करते हैं :

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 x_1 - \frac{k}{m} x_2 = 0$$

तथा

$$\left(\frac{2k}{m} - \omega^2\right) x_2 - \frac{k}{m} x_1 = 0$$

x_1 तथा x_2 के शून्येतर मानों के लिए इन युगपत समीकरणों के सेट का हल निम्नलिखित सरणिक शून्य को समीकृत करके निकाला जा सकता है :

$$\begin{vmatrix} \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{2k}{m} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

जबकि

$$\omega^4 = \frac{3k}{m}\omega^2 + \frac{k^2}{m^2} = 0$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{3k}{2m} + \frac{k\sqrt{5}}{2m}$$

अतः $\omega^2 = (3 - \sqrt{5})k/2m$ धीमे मोड़ के लिए होगा।

तथा

$\omega^2 = (3 + \sqrt{5})\, k/2m$ तीव्र मोड़ के लिए होगा।

धीमे मोड़ का आयाम अनुपात होगा

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{\omega^2 - k/m}{-k/m} = \frac{(3-\sqrt{5})\,k/2\,m - k/m}{-k/m} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

तीव्र मोड़ का आयाम अनुपात होगा

$$\frac{b_2}{a_2} = \frac{\omega^2 - k/m}{-k/m} = \frac{(3+\sqrt{5})\,k/2\,m}{-k/m} = -\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

अतः तीव्र मोड में दो द्रव्यमान विपरीत दिशाओं में आयाम अनुपात $(1|2)\,(\sqrt{5}+1)$ पर कंपन कर रहे हैं।

3. चित्र 5.11 पर विचार कीजिए। दोनों परिपथों में विद्युत वाहक बलों के संतुलन को नियंत्रित करने वाली समीकरणें हैं :

$$\frac{L\,di_1}{dt} = -\frac{q}{C} + \frac{q_3}{C}$$

तथा

$$\frac{L\,di_2}{dt} = -\frac{q_2}{C} + \frac{q_3}{C}$$

इन समीकरणों का समय की तुलना में अवकलन करने पर तथा संबंध $i = dq/dt$ का उपयोग करके हम प्राप्त करते हैं :

$$\frac{Ld^2 i_1}{dt^2} = -\frac{1}{C} i_1 + \frac{1}{C}(i_2 - i_1)$$

तथा

$$\frac{Ld^2 i_2}{dt^2} = -\frac{1}{C} i_2 - \frac{1}{C}(i_2 - i_1)$$

यदि हम L को m से $1/C$ को k' से तथा i को x से प्रतिस्थापित करें तो ये समीकरणें, समीकरणों (5.2) तथा (5.4) की समरूपी हो जाती है। अतः तंत्र की दो प्रसामान्य मोड़ आवृत्तियां हैं :

$$\omega_1 = \sqrt{1/LC}$$

तथा

$$\omega_2 = \sqrt{3/LC}$$

5.8 शब्दावली

तरंग समीकरण	Wave Equation
धागों	String
पदों	Terms
प्रकणों	Cases
प्रसामान्य आवृत्ति	Normal Mode Frequency
प्रसामान्य निर्देशांक	Normal Co-ordinates
मॉडुलन	Modulation

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

U. G. P. H. S. - 03
दोलन एवं तरंगें

खंड

2

तरंगें

खंड 2

खंड 1 में आपने पृथक और युग्मित लोलकों की विशेषताओं के संबंध में अध्ययन किया है। युग्मन से ऊर्जा का विनिमय होता है, जो अधिसंख्यक दोलनों को तरंग गति में परिवर्तित कर देता है।

इस खंड में आप तरंग गति की विशेषताओं का अध्ययन करेंगे। यहाँ पर हम श्रव्य तरंगों के इस विशेष अंश पर अधिक ध्यान देंगे जो श्रव्य भाग में होती हैं। विवेचना पर अधिक ध्यान देंगे।

इस खंड में तरंग गति से संबंधित चार इकाइयाँ—तरंग गति, परिसीमा पर तरंगों का परावर्तन एवं पारगमन, तरंग अध्यारोपण, व्यतिकरण और विवर्तन। पहली इकाई में आप तरंग गति की प्रारंभिक संकल्पनाओं तथा तरंगों के एक से अधिक दिशाओं में संचारण के विषय में अध्ययन करेंगे। प्रगामी तरंगों का एक विम समीकरण तनित रज्जू तथा द्रवों (गैस और तरल) के लिए स्थापित करेंगे। इस संदर्भ में माध्यम द्वारा उत्पन्न तरंग बाधा का वर्णन हम अनुप्रस्थ और अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए करेंगे।

इकाई 7 में आप तरंगों के उन परिवर्तनों के विषय में अध्ययन करेंगे, जो दो विभिन्न माध्यमों के अंतरापृष्ठ पर होते हैं। इसके लिए हम हाइगन की संरचना और तरंग बाधा की अवधारणा का प्रयोग करके परावर्तन और पारगमन व्यंजकों के आयाम और ऊर्जा गुणांकों का अभिकलन करेंगे। इस इकाई में हम डाप्लर्स के प्रभाव और प्रकंपन गति के विषय में भी चर्चा करेंगे।

इकाई-8 और इकाई-9 में आप तरंगों के अध्यारोपण के बारे में अध्ययन करेंगे। इकाई-8 में आप विभिन्न अवस्थाओं में तरंगों के अध्यारोपण के बारे में पढ़ेंगे। यहां पर आप पायेंगे कि जब दो तरंगें, जिनका आयाम, आवृत्ति और तरंगदैर्ध्य बराबर है, लेकिन वे एक दूसरे के उल्टी दिशाओं में चल रही हों तो इन दोनों तरंगों के अध्यारोपण से प्रत्यागामी तरंगें उत्पन्न होती हैं। यदि दो तरंगें जिनकी आवृत्ति में थोड़ा सा अन्तर हो और वे एक ही दिशा में चल रही हों, तो उनके अध्यारोपण से तरंग समूह और स्पंदन बनते हैं। इकाई-9 में, आप उस दशा को निकालेंगे, जिससे आप दो संबद्धता स्त्रोत को प्राप्त कर सकते हैं। आप यह भी देखेंगे कि प्रकाश के दो संबद्धता स्त्रोतों में किस प्रकार व्यतिकरण होता है। आप व्यतिकरण चित्राम के बारे में भी अध्ययन करेंगे। इसके बाद आप तरंगों का गोल कोनों पर मुड़ने के बारे में भी अध्ययन करेंगे। इस परिघटना को हम तरंगों का विवर्तन कहते हैं। तरंगों का विवर्तन दो प्रकार का होता है—फ्रोनहोवर व फ्रैनल विवर्तन। इस इकाई के अंतिम भाग में आप एक रेखाछिद्र और सीधी कोर के द्वारा विवर्तन के बारे में पढ़ेंगे।

हम आपको हार्दिक शुभकामनाएँ देते हैं।

इकाई 6 तरंग गति

इकाई की रूपरेखा

6.1 प्रस्तावना

आपने पिछली इकाई में पढ़ा था कि जब N युग्मित संहतियों के निकाय में से एक संहति को विचलित किया जाता है तो विक्षोभ (disturbance) धीरे-धीरे सभी संहतियों में स्थानान्तरित हो जाता है। आप ऐसे ही कई और उदाहरण सोच सकते हैं जिनमें किसी स्थान पर उत्पन्न दोलन मध्यवर्ती माध्यम द्वारा दूसरे स्थान तक पहुंचा दिए जाते हैं। जब हम बोलते हैं तो हमारे गले के अंदर वाक्-तंतु कम्पन करता है। इससे हवा के अणु कम्पन करने लगते हैं और हमारी आवाज संचरित हो जाती है। जब यह हमारे कान के पर्दे को कम्पित करती है तभी हम आवाज सुन पाते हैं। क्या आप जानते हैं कि श्रव्य (audio) सूचना किस प्रकार संचरित होती है? श्रव्य सूचना की वाहक (ध्वनि) तरंगें भौतिक माध्यम (वायु) में संचरित होती हैं। यदि आपने कभी समुद्र के किनारे पर खड़े होकर समुद्र जल की चंचलता का आनन्द लिया है तो आप तरंगों के विवरण की आवश्यकता महसूस नहीं करेंगे।

जल तरंगों तथा ध्वनि-तरंगों के अतिरिक्त अन्य सुपरिचित तरंगों को निम्न रूप में वर्गीकृत किया जाता है – पराध्वनि तरंगें (ultra sound waves) तथा विद्युत चुम्बकीय तरंगें (e.m. waves), दृश्य प्रकाश, रेडियो तरंगें, सूक्ष्म तरंगें तथा ऐक्स किरण विद्युत चुम्बकीय तरंग के ही अलग-अलग प्रारूप हैं। द्रव्य तरंगें (matter waves), प्रघाती तरंगें (shock waves) एवं भूकम्पी तरंगे (seismic waves) कुछ और असाधारण लेकिन महत्वपूर्ण तरंगें हैं। आप जानते हैं कि हमारी पूरी संचार व्यवस्था तरंगों द्वारा संकेत संचरण पर निर्भर करती है। रोग-निदान में एक्स किरणों के उपयोग से तो आप भली भांति परिचित होंगे ही। आजकल पराध्वनि तरंगें जिनकी आवृत्ति 20 kHz से अधिक होती हैं, मनुष्य के आंतरिक कोमल ऊतकों (tissues) के चित्र लेने में भी उपयोग की जा रही हैं। ध्वनि तरंगों का उपयोग ध्वनिक परासन (sound ranging), सोनार तथा तेल और खनिज के भंडारों, जिन पर किसी भी देश की आर्थिक स्थिति निर्भर करती है, की खोज के लिए भी किया जाता है।

इसका अर्थ यह हुआ कि तरंग गति को समझना हमारे लिए अत्यंत आवश्यक है। इस इकाई में हम यांत्रिक तरंगों, विशेषकर ध्वनि तरंगों की चर्चा करेंगे।

जब कोई प्रगामी तरंग एक परिमित (finite) माध्यम की परिसीमा (boundary) पर पहुंचती है या दो माध्यमों के अंतरापृष्ट पर पहुंचती है तो इसका परावर्तन या अपवर्तन होता है। अगली इकाई में आप इनके बारे में विस्तार से पढ़ेंगे।

इस पाठ्यक्रम के खंड 1 से आपको याद होगा कि विभिन्न भौतिक निकायों में विद्यमान समानता के कारण दोलनों की चर्चा सरल हो गई थी। जब हमें कमानी-द्रव्यमान निकाय के दोलनों के बारे में पूर्ण ज्ञान हो गया तो हमने अन्य निकायों के लिए तुल्यरूपता का लाभ उठाया। आपको ठीक ऐसी ही सरलता का अनुभव तरंगों के अध्ययन में भी होगा। किसी तरंग का मूल विवरण तथा इसमें प्रयुक्त प्राचल किसी तनित तार में संचरित एक विमिय तरंग, किसी तरल की सतह पर संचरित द्विविमीय तरंग, अथवा त्रिविमीय ध्वनि तरंग के लिए एक ही होते हैं। यही कारण है कि इस इकाई में हम पहले तरंग गति के मूल अभिलक्षणों का अध्ययन करेंगे। इसके पश्चात् हम प्रगामी तरंगों द्वारा संचरित ऊर्जा का परिकलन करेंगे। इन परिच्छेदों में प्रयुक्त शब्दावली, भाषा तथा संकल्पनाओं (concepts) का तनिक तारों, गैसों तथा द्रवों में संचरित तरंगों के लिए इस्तेमाल करेंगे।

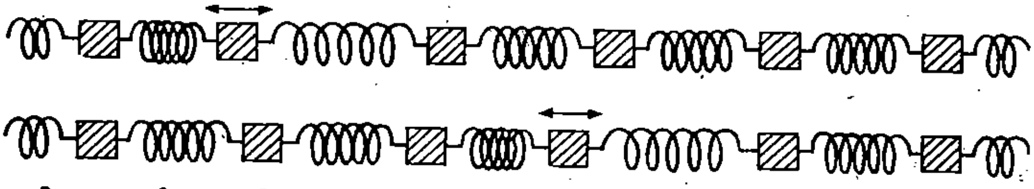
उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप

- तरंग गति की परिभाषा तथा उसकी विशेषताएं बता सकेंगे
- अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ तरंगों में अंतर बता सकेंगे
- किसी निश्चित स्थान या निश्चित समय पर तरंगों का सुचित्रित निरूपण कर सकेंगे
- किसी तरंग के तरंगदैर्ध्य, आवृत्ति तथा गति में सम्बंध स्थापित कर सकेंगे
- अनुदैर्ध्य और अनुप्रस्थ तरंगों के लिए तरंग समीकरण स्थापित कर उनका हल भी लिख सकेंगे
- प्रगामी तरंगों द्वारा संचरित ऊर्जा की परिकलना कर सकेंगे
- अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ तरंगों के वेगों के व्यंजक ज्ञात कर सकेंगे
- अभिलक्षणिक प्रतिबाधा तथा ध्वनिक प्रतिबाधा का व्यंजक ज्ञात कर सकेंगे
- द्विविमीय एवं त्रिविमीय तरंग का समीकरण लिख सकेंगे।

6.2 तरंग गति के मूल संप्रत्यय

आपने तालाब या झील के स्थिर जल में पत्थर के छोटे-छोटे टुकड़े डालने का आनंद अवश्य लिया होगा। यदि आप जल के ऊपर कागज की नाव, कोई फूल अथवा लकड़ी का छोटा सा टुकड़ा रख दें तो आप देखेंगे कि वह अपने स्थान पर ही ऊपर नीचे होता रहता है। इसका अभिप्राय यह है कि जल तरंग के साथ गति नहीं करता। अब आप यह जानना चाहेंगे कि ऐसा क्यों होता है? ऐसा तरंगों द्वारा दी गई ऊर्जा के कारण होता है। आइए N युग्मित संहतियों (चित्र 6.1) के निकाय की गति पर विचार करें। यदि हम पहली संहति को उसकी साम्य अवस्था से विचलित कर दें तो आप देखेंगे कि धीरे-धीरे अन्य संहतियां भी अपनी साम्य स्थितियों के सापेक्ष दोलन करने लगती हैं। अर्थात् ना तो कोई संहति, ना ही कोई कमानी (जिससे वे जुड़ी हैं) और ना ही पूरा निकाय तरंग के साथ गतिमान होता है। वास्तव में एक तरंग अपने साथ केवल ऊर्जा संचरित करती है। आप ऐसा कैसे कह सकते हैं? इसका प्रमाण यह है कि जब तरंग संचरित होती है तो कमानी या तो संपीडित (compress) होती हैं या फैलती (stretch) हैं। अतः तरंग गति की प्रमुख विशेषता है कि **तरंग सदैव ऊर्जा संचरित करती है द्रव्य नहीं।**



चित्र 6.1: युग्मित कमानी-द्रव्यमान तंत्र में एक विचलित संहति की गति/विक्षोभ संलग्न संहति तक पहुंच जाता है जिसके परिणामस्वरूप तरंग गति संचरित होती है। संपीडन एवं दैर्ध्य वृद्धि तंत्र में संचरित होते हैं जिसे हमने दो विभिन्न समयों पर दिखाए गए हैं।

तूफानी मौसम में ज्वारीय तरंगों द्वारा तटवर्तीय प्रदेशों में जो विनाश होता है वह जल तरंगों द्वारा ऊर्जा संचरण का प्रमुख उदाहरण है। आप यह जानकर चकित रह जायेंगे कि अप्रैल 1991 में बंगाल की खाड़ी में उत्पन्न ज्वारीय तरंगों ने बंगला देश में भीषण तबाही मचा दी थी। प्राप्त जानकारी के अनुसार लाखों लोगों की जानें चली गई और लगभग दस लाख लोग बेघर हो गए। सम्पत्ति के विनाश का ऐसा ही तांडव मई 1990 में आंध्र प्रदेश में तटीय क्षेत्रों में भी हुआ था। कुछ वर्ष पूर्व चिल्ली में आए भूकम्प के कारण प्रशान्त महासागर में उत्पन्न ज्वारीय तरंगों ने 15,000 कि.मी. दूर जापान में बहुत भारी विनाश किया। इसी ऊर्जा को अब हम बिजली की बढ़ती हुई खपत को पूरा करने के लिए काम में लाना चाहते हैं।

यांत्रिक तरंगों की एक और विशेषता है संचरण की गति जिसे हम **तरंग वेग** कहते हैं। (किसी तरंग द्वारा इकाई समय में तय की गई दूरी को तरंग वेग कहते हैं।) यह कण वेग से भिन्न होता है। (जिस वेग से किसी माध्यम का कण अपनी साम्य स्थिति के सापेक्ष दोलन करता है उसे कण वेग कहते हैं।) इसके अतिरिक्त तरंग गति भौतिक माध्यम के गुणों पर निर्भर करती है। हर तरंग की विशिष्ट आवृत्ति आयाम तथा तरंगदैर्ध्य होती है। उपभाग 6.2.4 में आप इनके बारे में विस्तार से पढ़ेंगे।

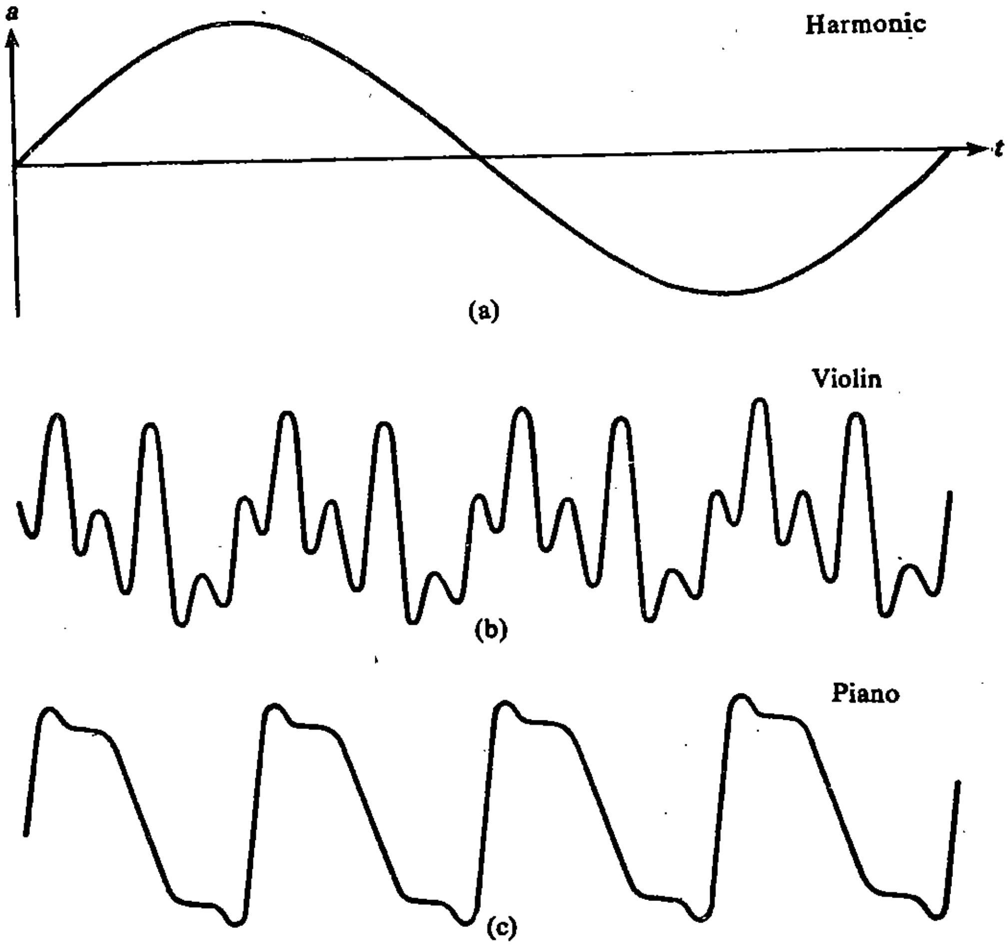
आपने तालाब या झील के जल पृष्ठ पर संचरित होने वाली लहरों को देखा होगा। लेकिन क्या आप वायु में संचरित ध्वनि तरंगों को देख सकते हैं? हम निश्चित रूप से कह सकते हैं कि आप ध्वनि तरंगों को नहीं देख सकते। तो आप यह जानना चाहेंगे कि हम ध्वनि तरंगों की पहचान किस प्रकार करते हैं? इसके लिए प्रायः हम स्रोत (सितार का तंतु अथवा तबले की झिल्ली) या अभिग्राही (माइक्रोफोन झिल्ली) की गति देखते हैं। हमारे मस्तिष्क में एक प्रश्न और उठता है : क्या जल तरंगें और ध्वनि तरंगें समरूप होती हैं? यदि नहीं तो हम इनका वर्गीकरण किस प्रकार करते हैं? आओ अब इस प्रश्न का उत्तर जानें।

6.2.1 तरंगों के प्रारूप

आपने स्कूल में पढ़ा होगा कि हम तरंगों को अनुदैर्ध्य और अनुप्रस्थ प्रारूपों में वर्गीकृत कर सकते हैं। यह वर्गीकरण तरंग संचरण दिशा के सापेक्ष कणों के कंपन की दिशा पर निर्भर करता है। वास्तव में हम तरंगों का अन्य कई प्रकार से भी वर्गीकरण कर सकते हैं। उदाहरणार्थ, जिन तरंगों के संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता है उन्हें यांत्रिक तरंग कहते हैं। ध्वनि तरंगें तथा जल तरंगें यांत्रिक (या प्रत्यास्थ) तरंगें होती हैं, जबकि प्रकाश तरंगें यांत्रिक तरंग नहीं होती। तरंगों को एकविमीय, द्विविमीय तथा त्रिविमीय तरंगों में भी वर्गीकृत किया जा सकता है। यह इस बात पर निर्भर करता है कि ऊर्जा कितनी दिशाओं में संचरित हो रही है। तनित तार या स्लिंकी पर उत्पन्न तरंगें एकविमीय होती हैं। जल पृष्ठ पर चलने वाले उर्मिक (ripples) द्विविम होते हैं। छोटे स्रोत से उत्पन्न ध्वनि तथा प्रकाश तरंगें त्रिविम होती हैं। कभी-कभी हम तरंगाग्र (wavefront) की आकृति के आधार पर तरंगों को *समतल तरंग* (plane wave) या *गोलीय तरंग* (spherical wave) के रूप में वर्गीकृत करते हैं। द्विविम में गोलीय तरंग वृत्ताकार दिखाई देती हैं, इसका सर्वमान्य उदाहरण जल पृष्ठ पर संचरित तरंगें हैं।

एक वियुक्त विक्षोभ से उत्पन्न तरंगों को **स्पंद** (pulse) कहते हैं। तालाब के स्थिर पानी में पत्थर डालने, हथेली बजाकर ध्वनि उत्पन्न करने, किसी व्यक्ति द्वारा स्वागत अथवा निर्देश देने में जो तरंगें उत्पन्न होती हैं उन्हें स्पंद कहते हैं। रेल के डिब्बे से इंजन के जुड़ने में लगा झटका भी स्पंद के रूप में संचरित होता है। परन्तु नियमित दोलनों से आवर्ती तरंगें (periodic waves) उत्पन्न होती हैं। वायलिन तथा पियानों द्वारा उत्पन्न ध्वनि तरंगों की आकृति चित्र 6.2 में दिखाई गई है। गुणावृत्ति तरंग (harmonic wave) आवर्ती तरंग का सरलतम रूप है।

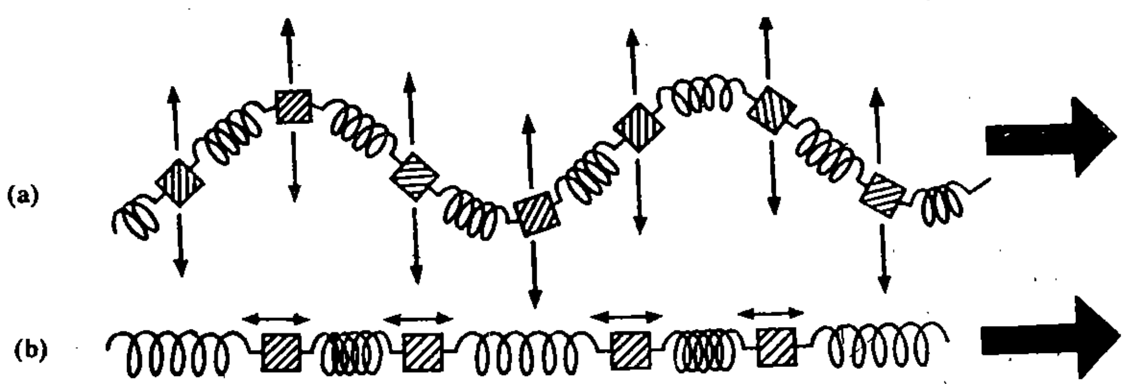
जब माध्यम का प्रत्येक कण तरंग संचरण दिशा के लम्बवत् दिशा में सरल आवर्त गति करता है तो तरंग *अनुप्रस्थ तरंग* (transverse wave) कहलाती है। वायलिन, वीणा, सितार, सारंगी तथा एकतारा जैसे वाद्यों के तनित तारों में अनुप्रस्थ तरंगें उत्पन्न होती हैं। चित्र 6.1 के युग्मित कमानी संहति निकाय में संहति को कमानी के लम्बवत् विस्थापित करने पर आप अनुप्रस्थ तरंगें उत्पन्न कर सकते हैं, जैसा कि चित्र 6.3a में दिखाया गया है। विद्युत चुंबकीय तरंग भी अनुप्रस्थ तरंगें होती हैं परन्तु इनके संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता नहीं होती।



चित्र 6.2 : (a) गुणावृत्ति तरंग (b) वायलिन और (c) पियानों की आवृत्ति

जब माध्यम का प्रत्येक कण तरंग संचरण दिशा के अनुदिश अपनी साम्य स्थिति के सापेक्ष सरल आवर्त गति करता है तो ऐसी तरंग को अनुदैर्ध्य तरंग कहते हैं। वायु में संचरित ध्वनि तरंगें अनुदैर्ध्य तरंगों का जाना,पहचाना उदाहरण हैं। चित्र 6.1 में दिखाई गई युग्मित कमानी संहति निकाय में संहति को कमानी की लम्बाई के अनुदिश विस्थापित करके आप अनुदैर्ध्य तरंगें उत्पन्न कर सकते हैं (चित्र 6.3 b)।

आपको स्कूल में बताया गया होगा कि जल तरंगें अनुप्रस्थ होती हैं तथा गति जल पृष्ठ पर ही सीमित रहती है। परन्तु यह सत्य नहीं है। वास्तव में नीचे की सतहों में तरंगों की गति धीरे-धीरे संचरित होती है लेकिन आयाम लगातार कम होता जाता है। परिशुद्ध प्रयोगों से

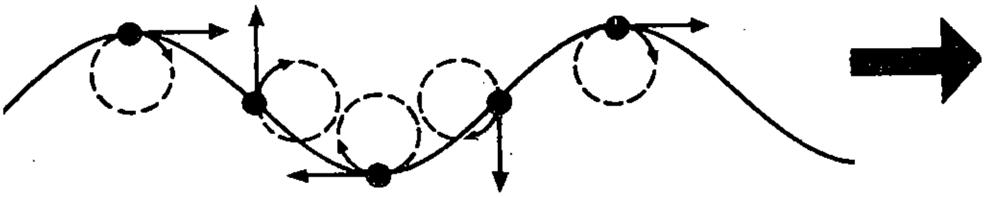


चित्र 6.3 : कमानी-द्रव्यमान तंत्र पर (a) अनुप्रस्थ तंरग और (b) अनुदैर्ध्य तरंगें। तीर तरंग संचरण की दिशा का संकेतक है।

पता चलता है कि दोलनों के अनुदैर्ध्य और अनुप्रस्थ घटक होते हैं। अर्थात् जल तरंगें संयुक्त तरंग होती हैं। इन्हें चित्र 6.4 में दिखाया गया है। प्रत्यास्थ ठोसों में संचरित तरंगों को *रैले तरंग* (Rayleigh waves) कहते हैं।

सामान्यतः गैस तथा तरल पदार्थों में केवल अनुदैर्ध्य तरंगें ही संचरित हो सकती हैं परन्तु ठोस पदार्थों में अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्ध्य दोनों तरंगें संचरित हो सकती हैं।

पिछले खंड में आपने मरोडी दोलनों के बारे में पढ़ा था। जब किसी माध्यम में मरोडी दोलन संचरित होते हैं तब हमें मरोडी तरंग प्राप्त होती है। अगले अनुभागों में आप यांत्रिक तरंगों और विशेषतया ध्वनि तरंगों का अध्ययन करेंगे। परन्तु इससे पहले निम्नलिखित प्रश्नों के उत्तर दीजिए।



चित्र 6.4 : जल तरंग संयुक्त तरंग होती है। चित्र में तीर जल के तात्कालिक वेग को इंगित करता है जबकि डैशदार वृत्त जल की गति के बारे में बोध कराते हैं। तरंग संचरण की दिशा तीर द्वारा दिखाई गई है।

बोध प्रश्न 1

रिक्त स्थानों की उपयुक्त शब्द से पूर्ति कीजिए :

(i) पराध्वनि तरंगों की आवृत्ति .... Hz से अधिक होती है।

(ii) जल तरंगें .... तरंगें होती हैं।

(iii) तरंगें ....स्थानांतरित करती हैं.............. नहीं।

(iv) प्रकाश तरंगों के संचरण में किसी माध्यम की आवश्यकता .... है।

(v) सितार के तार पर .... तरंगें उत्पन होती हैं।

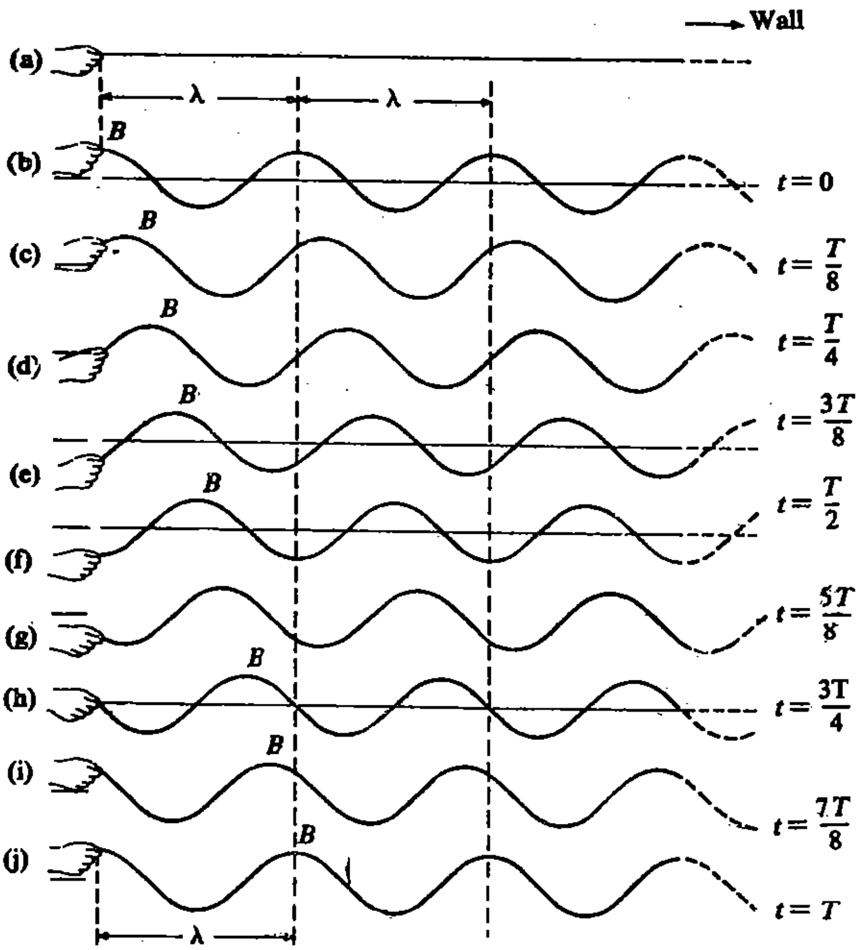
6.2.2 तरंग संचरण

यह देखने के लिए कि किसी माध्यम में तरंगें किस प्रकार संचरित होती हैं, आप निम्नलिखित कार्यकलाप करें:

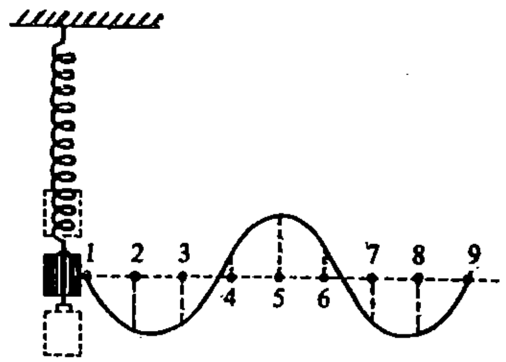
एक लम्बा प्रत्यास्थ तार लेकर उसके एक सिरे को दीवार पर बांध दीजिए। दूसरे सिरे को कस कर पकड़ें तथा अपना हाथ तार के लम्बवत् ऊपर नीचे चलायें। आप देखेंगे कि तार पर एक स्पंद गति करता है। यह स्पंद तार के कणों की साम्य स्थिति के सापेक्ष दोलन करने से उत्पन्न होता है। जब हाथ की गति आवर्ती होती है तब तार पर ज्या वक्रीय परिच्छेदिका (sinusoidal profile) की आकृति वाला विक्षोभ संचरित होता है। चित्र 6.5 में $\frac{T}{8}$ के अंतराल पर तार में उत्पन्न विक्षोभ की आकृति दिखाई गई है। आप देखेंगे कि तरंग दांई ओर गतिमान होती है, जिसे तीर द्वारा दिखाया गया है।

अब आप यह पूछ सकते हैं कि पूरा तार एक साथ विस्थापित क्यों नहीं होता? तार के विभिन्न भागों में काल पाश्चता (time lag) उत्तरोत्तर (successive) कणों के बीच स्पंद के धीरे-धीरे संचरित होने के कारण होती है।

इस संदर्भ में हमारे लिए तरंग तथा तार के कणों की गति में अंतर समझना भी आवश्यक है। जब कि तरंग की गति अचर होती है, तार के कण अपनी साम्य स्थिति के इर्द गिर्द सरल आवर्त गति करते हैं। इस अंतर को भली भांति समझने के लिए तार में नौ (9) निशान समान दूरी पर लगाइए। आप मान लें कि तार का आवर्तकाल T है। तार के एक सिरे को (चिन्ह 1 पर) चित्र 6.6 में दिखाए गए ऊर्ध्वाधर दोलित कमानी संहति निकाय से बांधिए। जैसे ही संहति ऊर्ध्वाधर दोलन प्रारंभ करती है अंकित स्थितियों पर कण एक के बाद एक दोलित होने लगते हैं। पहले कण पर शुरू हुआ विक्षोभ T सैकंड में नवें कण तक पहुंच जाएगा।



चित्र 6.5 : हाथ की आवर्त गति ज्या वक्रीय परिच्छेदिका वाली तरंग का जनन करता है। भाग (b)—(j) में हमने I/8 अंतराल पर तरंग परिच्छेदिका निरुपित की है।



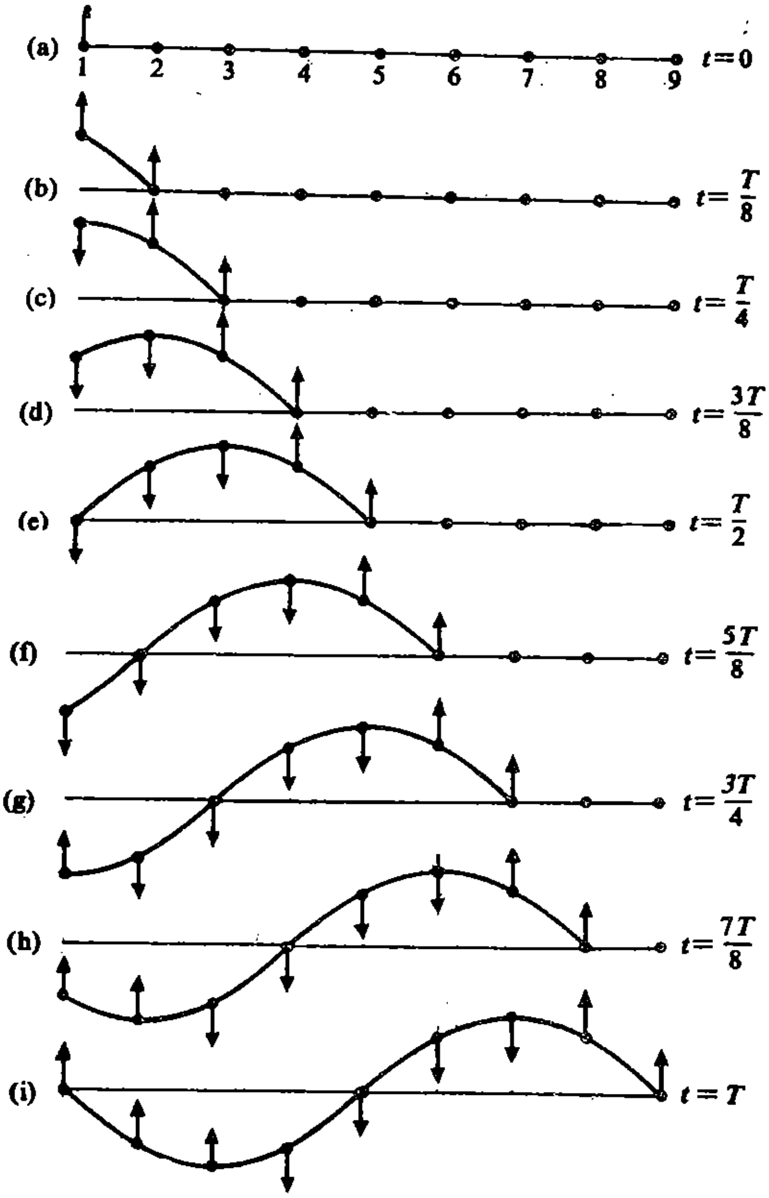
चित्र 6.6 : दोलित कमानी-द्रव्यमान से एक तार बांध कर तरंग के रूप और कणों की गति के अन्तर का चित्रण

इसका अर्थ यह है कि $\frac{T}{8}$ अंतराल में विक्षोभ कण 1 से कण 2 तक संचरित होता है। अगले $\frac{T}{8}$ अंतराल में विक्षोभ कण 2 से कण 3 तक पहुंच जाता है तथा यह प्रक्रिया आगे बढ़ती रहती है। चित्र 6.7 (a)–(i) में हमने $\frac{T}{8}$ अंतराल में सभी 9 अंकित स्थानों पर कणों की तात्कालिक स्थितियां दिखाई हैं। (तीर का निशान प्रत्येक अंकित स्थान पर कणों की उस दिशा को दर्शाता है जिस ओर वे गतिमान होने वाले हैं।) आप देखेंगे कि

(i) $t = 0$ पर सभी कण अपनी अपनी साम्यावस्था स्थिति पर हैं।

(ii) $t = T$ पर पहला, पांचवां तथा नौवां कण अपनी मूल साम्य स्थिति में है लेकिन पहला और नौवां कण ऊपर की ओर तथा पांचवा कण नीचे की ओर गति करने के लिए तैयार है।

तीसरा तथा सातवां कण अधिकतम विस्थापन की स्थिति में हैं, परन्तु क्षैतिज अक्ष के सापेक्ष विपरीत दिशाओं में है। सभी चिन्हित कणों की तात्कालिक स्थितियों को दर्शाने वाले एनवेलप (envelop) को चित्र 6.7(i) में दिखाया गया है। आप देखेंगे कि यह चित्र 6.5 के समरूप है।



चित्र 6.7 : तार पर जनित अनुप्रस्थ तरंग की 1/8 अंतराल पर तात्कालिक परिच्छेदिका

यह *अनुप्रस्थ तरंग* का निरूपक है। तीसरे तथा सांतवे कण क्रमशः *गर्त* (trough) और *शीर्ष* (crest) दर्शाते हैं।

यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि *जब तरंग तार में संचरित होती है तब तार के सभी कण अपनी-अपनी साम्यस्थिति के सापेक्ष अचर आवर्तकाल (T) और आयाम (a) से दोलन करते हैं।* जब तक यह तरंग गति दूसरे सिरे तक नहीं पहुंच जाती, यह *प्रगामी* रहती है।

अब हम चाहते हैं कि आप किसी तरंग का सुचित्रित तथा गणितीय निरूपण करना सीखें। अगले अनुभागों में हम इन्हीं विषयों पर चर्चा करेंगे।

6.2.3 तरंग गति का सुचित्रित निरूपण

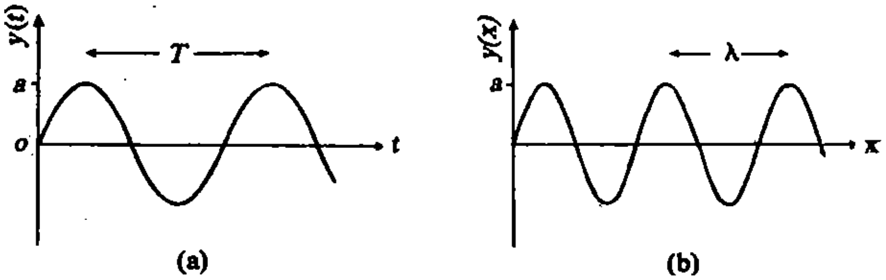
पिछले अनुभाग के क्रियाकलाप (activity) से आपको याद होगा कि जब कोई तरंग किसी तार अथवा कमानी में गति करती है तो उसके तीन प्राचल होते हैं : कण विस्थापन, उसकी स्थिति तथा समय। एक द्विविम ($2-D$) ग्राफ में हम किसी निश्चित स्थिति के लिए कण विस्थापन को समय के साथ चित्रित कर सकते हैं, जैसा कि चित्र 6.8(a) में दिखाया गया है। इसी प्रकार

किसी दिए समय पर कण विस्थापन को स्थिति के साथ चित्रित कर सकते हैं, **जैसा कि चित्र** 6.8 (b) में दिखाया गया है। आप देखेंगे कि दोनों ग्राफ ज्या वक्रीय हैं **जिनका आयाम** a **है।** इन्हें निम्न संबंधों द्वारा दर्शा सकते हैं :–

$$y(t) = a \sin 2\pi \left(\frac{t}{T} \right)$$

और

$$y(t) = a \sin 2\pi \left(\frac{x}{\lambda} \right)$$



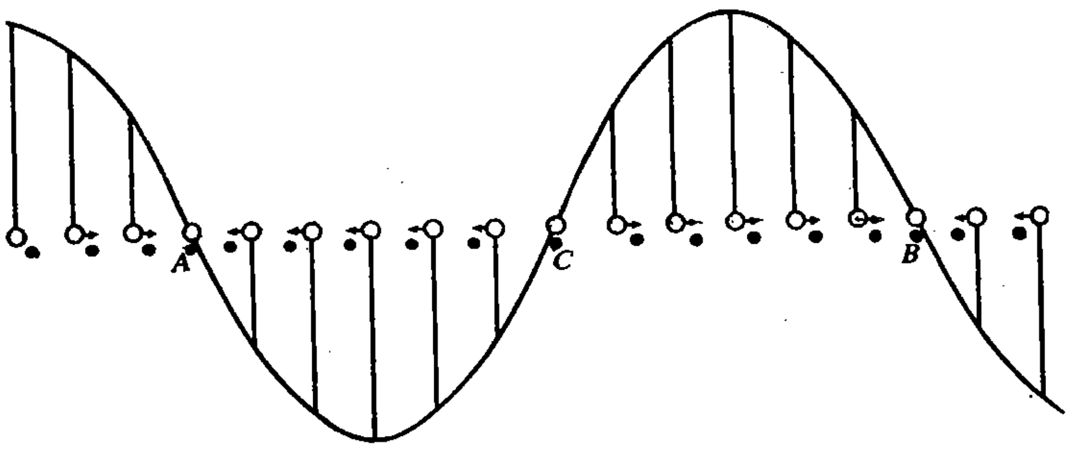
चित्र 6.8 : (a) किसी तरंग पर एक निश्चित स्थान पर दोलनों की परिच्छेदिका तथा (b) एक निश्चित क्षण पर तरंग परिच्छेदिका यह तार पर संचरित तरंग का आशुचित्र (snap shot) है।

ज्या (sine) फलन के कोणांक से यह सुनिश्चित हो जाता है कि यह फलक नियमित रूप से दोहराया जाता रहेगा।

अब हम तरंगदैर्ध्य और आवर्तकाल में अंतर्निहित अनुरूपता के बारे में जानकारी प्राप्त करेंगे। तरंग पर किन्हीं दो उत्तरोत्तर समकला बिंदुओं के बीच की दूरी **तरंगदैर्घ्य कहलाती है** जबकि दो उत्तरोत्तर कम्पन चक्रों में समान क्षणों के बीच समय अंतराल **आवर्तकाल होता है।** इसका अर्थ यह हुआ कि तरंगदैर्ध्य और आवर्तकाल तरंग के क्रमशः *स्थानिक* और *कालगत* गुणधर्म हैं।

ध्यान रखने योग्य बात यह है कि $y(x)$ और $y(t)$ के मापक्रम भिन्न-भिन्न होते हैं। ध्वनि तरंगों के लिए विस्थापन आयाम mm से भी कम होते हैं जबकि x का मान कई मीटर तक होता है।

हमारे कान 1000 Hz और 10^{-11}m आयाम की ध्वनि तरंग को स्पष्ट रूप से सुन सकते हैं। (यह आयाम परमाणु की त्रिज्या (= 10^{-10}m) से कम है।)



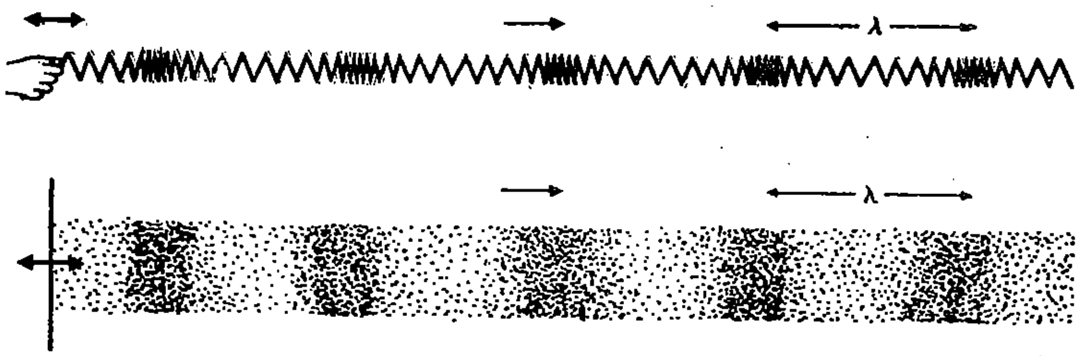
चित्र 6.9 : अनुदैर्ध्य तरंग का आरेखित निरुपण

ग्राफीय निरूपण के विषय में दूसरी बात यह है कि इसे अनुप्रस्थ और अनुदैर्ध्य दोनों तरंगों के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है।

अनुदैर्ध्य तरंगों में कणों का विस्थापन तरंग संचरण की दिशा के अनुदिश होता है। चित्र 6.9

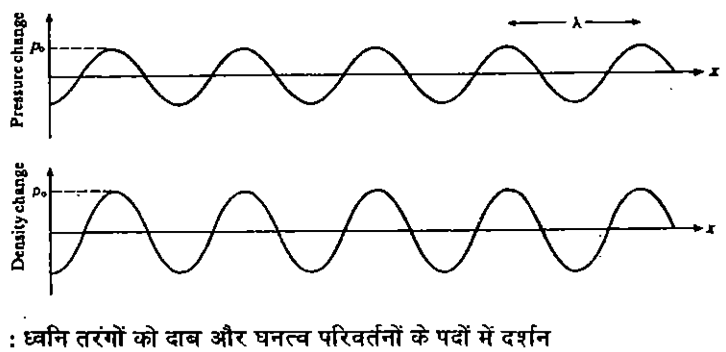
में खाली वृत्त एक माध्यम में समदूरस्थ कणों की मूल स्थितियों को निरूपित करते हैं। (आवर्धित) अनुदैर्ध्य विस्थापनों को तीर द्वारा दर्शाया गया है। आप देखेंगे कि तीर न तो लम्बाई में एक समान हैं और न ही एक दिशा में हैं। ठोस वृत्त, जो कि कणों की तात्कालिक स्थितियों का निरूपण करते हैं तथा तीरों के सिरों के अनुरूप हैं, इस बात को स्पष्ट रूप से प्रकट करते हैं। दाईं ओर के विस्थापन ग्राफ में y-अक्ष की ओर दिखाए गए हैं तथा बाईं ओर के विस्थापन $-y$-अक्ष की ओर दिखाए गए हैं।

दाईं दिशा के अनुदिश प्रत्येक तीर के लिए हम x-अक्ष से ऊपर की ओर एक समानुपाती रेखा खींचते हैं। इसी प्रकार बाईं ओर के प्रत्येक तीर के लिए नीचे की ओर समानुपाती रेखा खींची जाती है। इन रेखाओं के ऊपरी सिरों से होता हुआ निष्कोण वक्र खींचने पर हम देखते हैं कि यह ग्राफ अनुप्रस्थ तरंग के कण विस्थापन-समय के ग्राफ जैसा है। यदि हम ठोस बिंदुओं को



चित्र 6.10 : तार पर संचरित अनुदैर्ध्य तरंग ध्वनि तरंग के समवृत्ति है।

देखें तो हमें पता चलता है कि A और B स्थितियों के आसपास बहुत से कण एकत्रित हो गए हैं। जबकि C बिंदु के आसपास वे एक दूसरे से दूर हो गए हैं। ये *संपीडन* (compression) और *विरलन* (rarefaction) के क्षेत्रों को दर्शाते हैं। इसका अर्थ यह हुआ कि एक अनुदैर्ध्य तरंग में सामान्य से अधिक और कम औसत घनत्व (दाब) वाले क्षेत्र बारी- बारी से आते हैं। वायु में संचरित ध्वनि तरंगें तनित तार/कमानी पर उत्पन्न अनुदैर्ध्य तरंगों के समरूप ही होती हैं। इस समरूपता को चित्र 6.10 में दिखाया गया है। ध्वनि तरंग को दाब तरंग या विस्थापन तरंग भी माना जा सकता है लेकिन दाब तरंग और विस्थापन तरंग में 90^0 का कलान्तर होता है। इसका अर्थ यह है कि जब किसी बिंदु का साम्य स्थिति से विस्थापन सर्वाधिक होता है तब अतिरिक्त दाब शून्य होता है। दाब और घनत्व के परिवर्तनों को ग्राफ द्वारा चित्र 6.11 में



चित्र 6.11 : ध्वनि तरंगों को दाब और घनत्व परिवर्तनों के पदों में दर्शन

निरूपित किया गया है। अब आप कह सकते हैं कि अनुदैर्ध्य तरंगों के साथ-साथ उच्च और निम्न दाब संचरित होते हैं।

6.2.4 प्रावस्था वेग, आवृत्ति तथा तरंगदैर्ध्य में संबंध

चित्र 6.7 (i) को देखो। आप देखेंगे कि पहला और नौवां कण कम्पन की एक जैसी स्थिति में हैं। इसलिए हम कह सकते हैं कि ये समकला में हैं। दो समकलित उत्तरोत्तर कणों के बीच की दूरी को तरंगदैर्ध्य कहते हैं। इसे प्रायः ग्रीक अक्षर λ द्वारा दर्शाया जाता है। हम जानते हैं कि

एक आवर्तकाल में तय की गई दूरी तरंगदैर्ध्य के बराबर होती है। इसलिए इसके वेग के लिए निम्न संबंध लिख सकते हैं:

$$v = \frac{\text{तरंगदैर्ध्य}}{\text{आवर्तकाल}} = \frac{\lambda}{T} \qquad (6.3)$$

चूंकि आवृत्ति और आवर्तकाल व्युत्क्रमानुपाती हैं, इसलिए हम इस संबंध को निम्न रूप में भी लिख सकते हैं:

$$v = \nu\lambda \qquad (6.4)$$

अतः हम कह सकते हैं कि किसी तरंग का वेग, इसकी आवृत्ति और तरंगदैर्ध्य के गुणनफल के बराबर होता है। इस से यह भी पता चलता है कि किसी माध्यम में निश्चित आवृत्ति की तरंग का वेग अचर होगा। यह संबंध बहुत महत्वपूर्ण है।

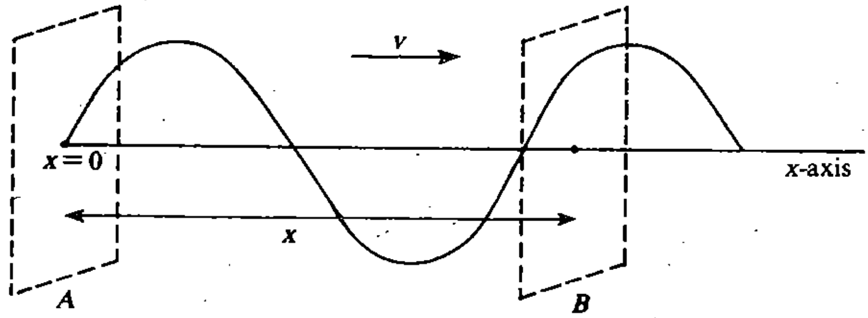
आप मानेंगे कि हमने समीकरण (6.4) को तनित तार में संचरित अनुप्रस्थ तरंगों के लिए व्युत्पन्न किया है। परन्तु यह समीकरण वायु, जल, कांच इत्यादि दूसरे प्रत्यावस्था माध्यमों तथा अनुप्रस्थ तरंगों के लिए भी मान्य है। मानक ताप एवं दाब के लिए वायु, जल तथा स्टील में ध्वनि तरंगों के वेग क्रमशः $332\,ms^{-1}$, $1500\,ms^{-1}$, तथा $5100\,ms^{-1}$, होते हैं। इससे इस तथ्य का स्पष्टीकरण हो जाता है कि हमारी ओर आती हुई रेल की सीटी हमें दो बार क्यों सुनाई देती है—पहली ध्वनि तो रेल की पटरी में तरंग के संचरित होने के कारण होती है तथा दूसरी ध्वनि तरंग के वायु में संचरित होने से सुनाई देती है। तालाब की सतह पर गति करने वाले उर्मिकों की गति लगभग $0.20ms^{-1}$ होती है। पृथ्वी के बाहय पटल पर भूकम्पी तरंगों की गति लगभग $6 \times 10^3 ms^{-1}$ होती है और प्रकाश की गति $3 \times 10^8 ms^{-1}$ होती है। यही कारण है कि पृथ्वी या उसके आसपास उत्पन्न होने वाली प्रकाश की किरणें हमारे पास तत्काल पहुंच जाती हैं।

बोध प्रश्न 2

प्रकाश की गति $3 \times 10^8 ms^{-1}$ है। दृश्य प्रकाश की तरंगदैर्ध्य 4000Å से 7000Å के परिसर में होती है। इसकी संगत आवृत्तियों की परिकलना कीजिए।

6.3 तरंग गति का गणितीय निरूपण

आप पिछले अनुभाग में पढ़ चुके हैं कि एक निश्चित समय पर किसी तरंग को समीकरण (6.1) द्वारा निरूपित किया जा सकता है। जैसे-जैसे समय बीतता है, तरंग $+x$ दिशा में संचरित होती रहती है। अतः x के दिए गए मान के लिए माध्यम के कणों का विस्थापन समय के साथ-साथ बदलना चाहिए। यह सूचना समीकरण (6.1) में अंतर्विष्ट नहीं है। इसलिए यह समीकरण तरंग को ठीक प्रकार निरूपित नहीं करता। अतः आप यह जानना चाहेंगे कि हम समीकरण (6.1) को किस प्रकार संशोधित करें। इस प्रश्न का उत्तर ढूंढने के लिए आओ चित्र 6.12 की पुनः समीक्षा करें। यह x-अक्ष के अनुदिश चलने वाली प्रगामी



चित्र 6.12: तल A एवं B में x की दूरी है।

तरंग का आशुचित्र (snap shot) है। अब $A(x=0)$ तथा B पर स्थित दो तलों में कणों की कल्पना कीजिए जिनके बीच की दूरी x हो। आप यह तो स्वीकार करेंगे कि $t=0$ पर बिंदु A से आरम्भ हुआ विक्षोभ B बिन्दु पर $\frac{x}{v}$ समय में पहुंच जाएगा। इसका अर्थ यह हुआ कि समय t पर कण B का विस्थापित वही होगा जो कि कण A का $t'=t-\frac{x}{v}$ पर था। गणितीय रूप में इसे हम निम्न रूप में लिख सकते हैं:—

$$y(x,t)=y\left(x=0,\ t'=t-\frac{x}{v}\right) \tag{6,5}$$

हम समीकरण (6.2) में t को $t'=t-\frac{x}{v}$ लेकर $y\,(x=0,\ t')$ का मान ज्ञात कर सकते हैं। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि जब कोई तरंग x-अक्ष के अनुदिशा v वेग से संचरित होती है तो माध्यम के कणों के विस्थापन को x तथा t के फलन के रूप में निम्नलिखित समीकरण द्वारा लिखा जा सकता है:

$$y\,(x,\ t) = a \sin\left[\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\right] \tag{6.6a}$$

अथवा

$$y\,(x,\ t) = a \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right] \tag{6.6b}$$

चूंकि $v=\frac{\lambda}{T}$ इस समीकरण को हम निम्न रूप में भी लिख सकते हैं:

$$y\,(x,\ t) = a \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)\right] \tag{6.6c}$$

$t=0$ (या जब t पूर्णांक हो) पर समीकरण (6.6c) और समीकरण (6.1) सामानयन हो जाते हैं। ऋणात्मक चिन्ह $t=0$ पर तरंग के कला में हुए समायोजन के बारे में बताता है। आप यह भी जांच कर सकते हैं कि यह समीकरण आवर्ती वक्र का द्योतक है। इसके लिए आपको मूल बिंदु से $(x+\lambda)$ दूरी पर स्थित बिंदु के विस्थापन का परिकलन करना होगा।

बोध प्रश्न 3

275 Hz की एक ध्वनि तरंग x-अक्ष के अनुदिश 340ms^{-1} की चाल से गति करती है। माध्यम का प्रत्येक कण क्षैतिज अक्ष के ऊपर 5.0 mm विस्थापित होता है। इस तरंग का समीकरण लिखिए तथा इसकी (i) तरंगदैर्ध्य एवं (ii) माध्यम के कणों के वेग और त्वरण की परिकलना कीजिए।

समीकरण (6.6a), (6.6b) और (6.6c) हमें बताते हैं कि एक निश्चित (कण) स्थिति (माना $x=0$) को देखें तो माध्यम के कणों का विस्थापन समय के साथ ज्या वक्रीय होता है:

$$y\,(x=0,\ t) = a \sin\left(2\pi\,\frac{t}{T}\right)$$

हम यह जानते हैं कि यह संबंध $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ कोणीय आवृत्ति की सरल आवर्त गति को दर्शाता है।

$y\,(x,\ t)$ का दूसरा समानार्थी और सरल रूप तरंग-संख्या k के पदों में लिखा जाता है। तरंग-संख्या को तरंगदैर्ध्य के पदों में निम्न रूप में परिभाषित किया जाता है:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

(आप तरंग-संख्या k और खंड 1 में इस्तेमाल किए गए कमानी स्थिरांक में संभ्रमित न हों।)

आप देखेंगे कि तरंग-संख्या कोणीयं आवृत्ति का स्थानिक अनुरूप है। तरंग समीकरण को ω_0 तथा k के पदों में हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$y(x, t) = a \sin(\omega_0 t - kx) \tag{6.6d}$$

अब आप समझ गए होंगे कि k और ω_0 तरंग समीकरण को कितना सरल बना देते हैं। यही कारण है कि इन राशियों को हम प्रायः तरंग समीकरण लिखने के लिए इस्तेमाल करते हैं।

समीकरण (6.6b) तथा (6.6d) की तुलना करने पर आप देखेंगे कि v और k निम्नलिखित व्यंजक द्वारा सम्बंधित हैं:

$$v = \frac{\omega_0}{k}$$

समीकरण (6.6 (a)-(d)) हमें x-दिशा के अनुदिश चलने वाली प्रगामी तरंगों का समानार्थ विवरण देते हैं। इन्हें सुविधानुसार प्रयोग में लाया जाता है। $-x$-अक्ष के अनुदिश संचरित तरंग का आप किस प्रकार वर्णन करेंगे? इस स्थिति में आप समीकरण (6.6) में x की जगह $-x$ लगा दें।

बोध प्रश्न 4

7.4 cm आयाम की एक ज्या वक्रीय जल तरंग 93 cm s^{-1} की गति से $-x$ दिशा में संचरण करती है। दो उत्तरोत्तर शीर्षों के बीच की दूरी 55 cm है। कोणीय आवृत्ति तथा तरंग-संख्या के पदों में तरंग समीकरण लिखिए तथा कण वेग $\frac{dy}{dt}$ की भी गणना कीजिए।

6.3.1 कला तथा कलान्तर

आवर्त गति में कण विस्थापन, वेग और त्वरण के परिवर्तन का चक्र चलता रहता है। चक्र की विभिन्न अवस्थाओं का वर्णन कला के पदों में किया जा सकता है। ज्याफलन के कोणांक को **कला कोण** अथवा **कला** कहते हैं। हम इसे ϕ द्वारा दर्शायेंगे। अतः तरंग समीकरण (6.6c) में x दूरी पर स्थित कण की समय t पर कला ϕ है तो

$$\phi = \omega_0 t - kx \tag{6.8}$$

आप देखेंगे कि कला कण की स्थिति x और समय t के साथ बदलती है।

यदि x दूरी पर स्थित कण की कला में समय के साथ हुआ परिवर्तन $\Delta\phi$ है तो

$$\Delta\phi = \omega_0 \Delta t = 2\pi\nu\Delta t \tag{6.9a}$$

इसी तरह किसी समय t पर कण की दूरी के साथ कला में हुए परिवर्तन को निम्न व्यंजक द्वारा दर्शाते हैं:

$$\Delta\phi = -k\Delta x \tag{6.9b}$$

इस समीकरण में ऋणात्मक चिन्ह यह बताता है कि दिशा के अनुदिश गतिमय तरंग के अग्र बिन्दुओं की कला कम होती है। इसका अर्थ यह हुआ कि वे कम्पन की उत्तरोत्तर अवस्था देर से शुरू करते हैं।

6.3.2 प्रावस्था वेग

अपने अनुभव से हम जानते हैं कि जब तक माध्यम के गुणों में कोई परिवर्तन नहीं होता, जल तरंगों की गति एक समान रहती है। गुणावृत्ति प्रगामी तरंगों के लिए इस वेग को प्रावस्था वेग

कहते हैं। इसे सिद्ध करने के लिए आइए संचरित तरंग के किसी एक तरंग शीर्ष (गर्त) को देखें। समीकरण (6.8) द्वारा परिभाषित कला $\phi(x,t)$ को अचर रखने के लिए हमें समय के साथ विभिन्न कणों की स्थितियों को देखना होगा। अतः $\phi(x,t)$ के सम्पूर्ण अवकल (differential) को शून्य के बराबर रख कर आप स्थिर कला के बिंदु के लिए x और t में संबंध ज्ञात कर सकते हैं। $\phi(x,t)$ का सम्पूर्ण अवकल

$$d\phi = \omega_0 \, dt - k\, dx$$

अतः यदि $d\phi = 0$ हो तो

$$\frac{v}{\rho} \equiv \left(\frac{dx}{dt}\right)_\phi = \frac{\omega_0}{k} \qquad (6.10)$$

समीकरण (6.7) तथा (6.10) की तुलना करने पर आप देखेंगे कि समीकरण (6.7) भी प्रावस्था वेग को परिभाषित करता है।

6.3.3 प्रगामी तरंगों द्वारा ऊर्जा संचरण

हम यह भली भांति जानते हैं कि प्रगामी तरंगों की मुख्य विशेषता ऊर्जा का संचरण है। अब हम तरंग द्वारा संचरित ऊर्जा का परिकलन करेंगे। ऐसा करने के लिए हमें गतिज तथा स्थितिज ऊर्जा का ज्ञान होगा चाहिए। यदि किसी कण का तात्कालिक विस्थापन $y(x,t)$ हो तो x-अक्ष के अनुदेश गतिमय तरंग को निम्न समीकरण द्वारा निरूपित किया जा सकता है :

$$y(x,t) = a \sin(\omega_0 t - kx)$$

आओ अब स्रोत से x दूरी पर स्थित Δx मोटाई तथा अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल A की एक पर्त पर विचार करें। यदि माध्यम का घनत्व ρ हो तो पर्त की संहति $\rho \Delta x A$ होगी। इसलिए पर्त की गतिज ऊर्जा

$$K.E\,(x,t) = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2}\rho \Delta x A \left[\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\rho \Delta x A\, \omega_0^2 a^2 \cos^2(\omega_0 t - kx)$$

$$= 2\pi^2 \nu^2 \rho A \Delta x\, a^2 \cos^2(\omega_0 t - kx) \qquad (6.11)$$

यह समीकरण संकेत करता है कि गतिज ऊर्जा शून्य और $\frac{1}{2}\rho \Delta x A \omega_0 a^2$ के बीच रहती है। इसका कारण यह है कि $\cos^2(\omega_0 t - kx)$ का मान 0 और 1 के बीच में रहता है। एक पूरे चक्र में $\cos^2\theta$ का औसत मान $\frac{1}{2}$ होता है। अतः एक आवर्तकाल में औसत गतिज ऊर्जा का मान

$$\langle K.E \rangle = \frac{1}{4}\rho \omega_0^2 a^2 A \Delta x \qquad (6.12)$$

स्थितिज ऊर्जा क्या होगी? खंड 1 की इकाई 1 से आपको याद होगा कि सरल आवर्त गति में औसत गतिज ऊर्जा तथा औसत स्थितिज ऊर्जा समान होती है। क्या गुणावृत्ति तरंग के लिए भी यह सत्य है? वैसे तो हम यही अपेक्षा करते हैं फिर भी स्थितिज ऊर्जा की परिकलना विश्लेषिक विधि से करेंगे।

जिस पर्त की हमने ऊपर विवेचना की उस पर लगे बल का मान

$$F = \rho A \Delta x \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

$$= -4\pi^2 \nu_0^2 \rho \Delta x A y(x,t)$$

हम यह जानते हैं कि जब इस पर्त का इसकी साम्यावस्था से विस्थापन $y(x,t)$ हो तो बल द्वारा किया गया कार्य इसमें स्थितिज ऊर्जा के रूप में संग्रहीत हो जाता है। इसे हम निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$U(x,t) = -\int_{0}^{y} A 4\pi^2 \nu_0^2 \rho\, \Delta x\, y' dy'$$
$$= -2\pi^2 \nu_0^2 \rho\, \Delta x A y^2$$
$$= -2\pi^2 \nu_0^2 \rho A \Delta x\, a^2 \sin^2(\omega_0 t - kx) \qquad (6.13)$$

ऋणात्मक चिन्ह हमें बताता है कि बल पर्त पर कार्य करता है। (जब हम कुल ऊर्जा का परिकलन करते हैं तो इस चिन्ह का कोई महत्व नहीं होता।) तरंग की स्थितिज ऊर्जा के कालिक माध्य का मान निम्न समीकरण द्वारा निरूपित किया जा सकता है:

$$\langle U \rangle = \pi^2 \nu_0^2 \rho A a^2 \Delta x$$
$$= \langle K.E \rangle \qquad (6.14)$$

समीकरण (6.11) तथा (6.13) से हमें तरंग की कुल ऊर्जा प्राप्त होती है:

$$E = K.E + U$$
$$= 2\pi^2 a^2 \nu_0^2 \rho A \Delta x$$
$$= \langle K.E \rangle + \langle U \rangle \qquad (6.15)$$

इस समीकरण से यह पता चलता है कि तरंग की ऊर्जा स्थितिज तथा गतिज रूपों में बराबर-बराबर बंटी होती है।

इस ऊर्जा का क्या होता है? जैसे-जैसे यह पर्त आगे बढ़ती है, यह अगली पर्त को आगे धकेलती है। इस प्रक्रिया में यह अपनी ऊर्जा को संचरित कर देती है। अब आप यह जानना चाहेंगे कि इस पर्त को ऊर्जा त्यागने में कितना समय लगता है? या ऊर्जा के प्रवाह की औसत दर क्या है? इसकी परिकलना करने के लिए हम देखते हैं कि यदि तरंग की गति v है तो ऊर्जा पर्त में से $\Delta t = \dfrac{\Delta x}{v}$ समय में गुजरती है। अतः

$$P = \frac{E}{\Delta t} = \frac{2\pi^2 a^2 \nu_0^2 \rho A \Delta x}{\Delta x / v}$$
$$= 2\pi^2 a^2 \nu_0^2 \rho v A \qquad (6.16)$$

अर्थात् तरंग की ऊर्जा प्रवाह की औसत दर या शक्ति तरंग वेग के रैखिक और आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती है।

6.3.4 तीव्रता और व्युत्क्रम वर्ग नियम

हम अपने दैनिक जीवन के अनुभव से जानते हैं कि पक्षियों की चहचहाट, वाहनों का शोर, पटाखों की आवाज या लैम्प का प्रकाश कुछ दूरी के बाद खत्म हो जाते हैं। यदि ऐसा न होता तो पृथ्वी पर शोर प्रदूषण (noise pollution) हमारे जीवन को नर्क बना देता। ऐसी परिस्थितियों में कौन सा नियम लागू होता है? इसे समझने के लिए आओ स्रोत से दूर फैलती हुए तरंग के आयाम को देखें। स्रोत से दूरी बढ़ने पर आयाम कम हो जाता है। इसका अर्थ यह हुआ कि जैसे-जैसे एक तरंग स्रोत में दूर पहुंचती है उसकी ऊर्जा की औसत प्रवाह दर कम हो जाती है। इसलिए प्रगामी तरंग की कुल ऊर्जा के विषय में बात करना बहुत लाभकारी नहीं होता। वास्तव में किसी तरंग की शक्ति का विवरण देने के लिए उसकी तीव्रता की बात करना अधिक तर्क संगत है। माध्यम के किसी बिंदु पर तरंग तीव्रता I का मान मात्रक क्षेत्रफल से एकक समय में बहने वाली ऊर्जा के बराबर होता है। यह क्षेत्रफल तरंग-संचरण की दिशा के लम्बवत् होना चाहिए।

इस परिभाषा के इस्तेमाल करने पर समीकरण (6.16) को निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$I = 2\pi^2 a^2 \nu_0^2 \rho v$$
$$= \frac{1}{2} v V_A^2 \rho \qquad (6.17)$$

क्योंकि $V_A = 2\pi \nu_0 a$.

तीव्रता का मात्रक $Jm^{-2}s^{-1}$ अथवा Wm^{-2} है। ब्लॉक 1 की इकाई 1 से आपको याद होगा कि किसी भी तरंग की कुल ऊर्जा दोलन के आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है। इसी प्रकार किसी निश्चित स्थान पर तरंग की तीव्रता वहां इसके आयाम के वर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है। ध्वनि तरंग के लिए हम सिद्ध कर सकते हैं कि

$$I \propto p_0^2 \qquad (6.18a)$$

यहाँ p_0 अधिकतम दाब परिवर्तन का द्योतक है। यहां ध्यान देने योग्य बात यह है कि जब हम तीव्रता की अभिव्यक्ति p_0 के पदों में करते हैं तो प्राप्त व्यंजक में आवृत्ति स्पष्ट रूप से प्रकट नहीं होती। इसका अर्थ यह हुआ कि 100 Hz तथा 10 kHz की ध्वनि तरंगों के आयाम समान हों तो उनकी तीव्रता समान होगी।

अब आप जानना चाहेंगे कि किसी बिंदु पर तरंग की तीव्रता उस बिंदु की स्रोत से दूरी के साथ किस प्रकार परिवर्तित होती है?

हम जानते हैं कि जैसे-जैसे तरंग स्रोत से दूर जाती है उसके द्वारा पार किया गया क्षेत्रफल भी बढ़ता जाता है। यदि यह स्रोत एक बिंदु हो या स्रोत की दूरी स्रोत के आकार से बहुत अधिक हो तो क्षेत्रफल लगभग गोलाकार ($\propto r^2$) होगा। तब ऊर्जा संरक्षण नियम के अनुसार तरंग द्वारा संचरित ऊर्जा $E = 4\pi Ir^2$ अचर रहेगी। अतः जब r बढ़ता है तो तीव्रता $1/r^2$ के पदों में घटती है:

$$I \propto \frac{1}{r^2} \qquad (6.18b)$$

समीकरण (6.18a) तथा (6.18b) से पता चलता है कि

$$p_0 \propto \frac{1}{r}$$

चूंकि कण का आयाम अधिकतम दाब परिवर्तन के अनुक्रमानुपाती होता है ($a \propto p_0$), यह संबंध हमें बताता है कि तरंग का आयाम स्रोत की दूरी के व्युत्क्रमानुपाती है। इससे हमें यह पता चलता है कि हमारी आवाज निश्चित दूरी तक ही क्यों सुनी जा सकती है। (एक सीमा के बाहर तरंग का आयाम इतना कम हो जाता है कि यह कान के पर्दों को प्रभावित ही नहीं कर सकता।) आपको यह ध्यान रखना चाहिए कि ये परिणाम तभी मान्य होंगे जब कि तरंग अवशोषित या अवरुद्ध न हुई हो। तालिका 6.1 में हमने विभिन्न स्रोतों से उत्पन्न तरंगों की तीव्रताओं की सूची दी है।

तालिका 6.1 तरंग की तीव्रताएं

स्रोत/तरंग	तीव्रता ($Jm^{-2}s^{-1}$)
ध्वनि	
श्रवण की प्रभाव सीमा	10^{-12}
पत्तियों की सरसराहट	10^{-11}
फुसफुसाहट, (कान के पर्दे पर)	10^{-11}
सामान्य वार्तालाप	3.2×10^{-6}
सड़क यातायात	10^{-5}
एक मीटर दूरी पर पटाखों की आवाज	8×10^{-5}
30 मीटर दूरी पर जैट हवाई जहाज की उड़ान	5
विद्युत चुम्बकीय तरंगें	
घर में रेडियो	10^{-8}
टी.वी. सिग्नल, (50 kW) ट्रांसमीटर (5.0 किमी दूरी पर)	1.6×10^{-4}
पृथ्वी के कक्ष में सूर्य के प्रकाश की तीव्रता	1368
कैमरे के फ्लैश से 1 मीटर की दूरी पर	4000
सूक्ष्म तरंग ओवन के अंदर	6000
लेसर संलयन प्रयोग का लक्ष्य	10^{18}

बोध प्रश्न 5

किसी स्रोत से एक मीटर की दूरी पर ध्वनि की तीव्रता $8 \times 10^{-5} Wm^{-2}$ है। मनुष्य के श्रवण की प्रभाव सीमा लगभग $10^{-12} Wm^{-2}$ है। यदि ध्वनि तरंगें सभी दिशाओं में एक समान फैलें तो इस ध्वनि को स्रोत से कितनी दूरी तक सुना जा सकता है?

हमारे कान तीव्रताओं के विशाल परिसर के प्रति सुग्रहित (sensitive) होते हैं। अतः हम लघुगणकीय तीव्रता मापक्रम परिभाषित कर सकते हैं। ध्वनि तरंग की तीव्रता के स्तर की परिभाषा निम्नलिखित समीकरण द्वारा दी जाती है:

$$\beta = 10 \ln \left(\frac{I}{I_o} \right)$$

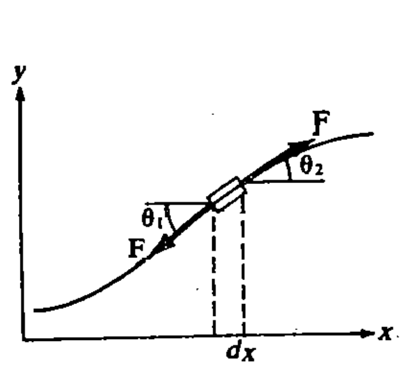
अतः I_o ($= 10^{-12} Wm^{-2}$) श्रवण प्रभाव सीमा को अंकित करता है। तीव्रता स्तर को डेसिबल में मापा जाता है जिसे संक्षेप में db द्वारा दर्शाया जाता है। हमारे कान 120db तक की तीव्रता को सहन कर सकते हैं।

6.4 एकविमिय प्रगामी तरंगें : तरंग समीकरण

बचपन में आपको इकतारा के संगीत ने अवश्य मोहित किया होगा। पं. रविशंकर के सितार वादन, बिस्मिल्ला खां की शहनाई अथवा संगीत् साम्राज्ञी लता मंगेशकर के गीतों ने तो आपको अवश्य ही मुग्ध किया होगा। क्या आप जानते हैं कि यह संगीत आप तक किस प्रकार पहुंचता है? यह किस बात पर निर्भर करता है कि किसी माध्यम में तरंगें संचरित हो सकती हैं अथवा नहीं। और यदि तरंगें संचरित होती हैं तो उनकी गति कितनी होती है। प्रयोगों से पता चलता है कि तरंगों की गति तरंगदैर्ध्य अथवा आवर्तकाल पर निर्भर नहीं करती। इसका अर्थ यह है कि इन प्रश्नों का उत्तर माध्यम के भौतिक गुणों पर निर्भर करता है। इसकी पुष्टि करने के लिए अब हम एक विशिष्ट भौतिक निकाय पर विचार करेंगे। सरलता की दृष्टि से पहले हम एक तनित तार पर संचरित तरंगों का अध्ययन करेंगे।

6.4.1 तनित तार पर तरंग संचरण

m, प्रति इकाई लंबाई संहति की एक समान मोटाई वाली तार की कल्पना कीजिए जिसपर **F** बल लगा है। साम्य स्थिति में इस तार की लम्बाई के अनुदिश x-अक्ष का चयन करें। मान लीजिए की तार को इस प्रकार कर्षित किया गया है कि उसका कुछ हिस्सा तार की लंबाई के लम्बवत् है यानि y-अक्ष के अनुदिश है, जैसा कि चित्र 6.13 में दिखाया गया है। इस कर्षित तार को मुक्त करने पर क्या होगा? ऐसा करने पर तरंग गति उत्पन्न होगी। इस तरंग का वेग क्या होगा? हम अपेक्षा करते हैं कि माध्यम की प्रत्यास्थता तथा जड़त्व तरंग वेग का मान निर्धारित करेंगे। तनित तार में प्रत्यास्थता और जड़त्व के माप क्रमशः F और m हैं। इस आशय का उत्तर आपको निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल करने पर मिल जायेगा।



चित्र 6.13 : कर्षित तार के लघु अवयव का आवर्धित चित्रण उस पर नेट बल शून्येतर है। उर्ध्वाधर निरुपण को आवर्धन जान-बूझ कर किया गया है।

बोध प्रश्न 6

विमीय विश्लेषण द्वारा सिद्ध कीजिए कि

$$v = k\sqrt{\frac{F}{m}}$$

जहां k अविम स्थिरांक है।

अब हम तार के छोटे अवयव को लेकर इस प्रश्न का विश्लेषण करेंगे।

मान लीजिए कि तार को इस प्रकार विक्षोभित किया गया है कि उस पर लगे तनाव में कोई अंतर नहीं आता। चित्र 6.13 में विचाराधीन अवयव का आवर्धित रूप दिखाया गया है। आप देखेंगे कि तार के जिस हिस्से का हम अध्ययन कर रहे हैं उस पर तनाव बल लंबाई के अनुदिश बदलता है। ऐसा क्यों होता है? इसका कारण यह है कि तार वक्र रूप में है। इसका अर्थ यह हुआ कि तार के इस अवयव के दोनों छोरों पर लगे बल समान होते हुए भी एक दूसरे को निरस्त नहीं करते। x और y अक्षों के अनुदिश बलों की परिकलना करने के लिए हम $\mathbf{F}$ को आयताकार घटकों में वियोजित (resolve) करते हैं। दांईं तथा बाईं ओर के x तथा y घटकों के बीच के अंतर को हम क्रमशः निम्न समीकरण द्वारा लिख सकते हैं:

$$F_x = F\cos\theta_2 - F\cos\theta_1$$

और

$$F_y = F\sin\theta_2 - F\sin\theta_1$$

जिसमें θ_1 तथा θ_2 तार के छोटे भाग के सिरों पर खींचे गये स्पर्शज्या द्वारा क्षैतिज के साथ बनाये कोण हैं। यदि दोलनों का आयाम कम हो $(\theta \leq 4°)$ तो

$$\cos\theta_1 \simeq \cos\theta_2 \simeq 1$$

इसका अर्थ यह हुआ कि x-दिशा में कोई नेट बल (net force) नहीं है, $F_x = 0$ तथा तनित तार लगभग क्षैतिज होगा। इससे हमें संकेत मिलता है कि

$$\sin\theta_1 \sim \tan\theta_1$$

तथा

$$\sin\theta_2 \simeq \tan\theta_2$$

परन्तु $\tan\theta_1$ तथा $\tan\theta_2$ तार के विचाराधीन अवयव के सिरों की प्रवणताएं हैं। अतः अवयव पर लगे बल का y घटक

$$F_y = F(\tan\theta_2 - \tan\theta_1)$$

$$= F\left[\left.\frac{dy(x,t)}{dx}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{dy(x,t)}{dx}\right|_{x}\right] \qquad (6.20)$$

पिछली इकाई से आपको याद होगा कि कोष्ठक में दी गई राशि अंतराल Δx के एक सिरे से दूसरे सिरे तक प्रथम अवकलज परिवर्तन का बोध कराती है। इस परिवर्तन को Δx द्वारा विभाजित कर $\Delta x \to 0$ परिसीमा में हमें प्रथम सम्पूर्ण अवकलज में स्थानिक परिवर्तन की दर प्राप्त होती है। परन्तु हम जानते हैं कि तार का विस्थापन t तथा x दोनों पर निर्भर करता है। यदि इन प्राचलों में से किसी एक में परिवर्तन होता है तो विस्थापन में भी परिवर्तन हो जाता है। आप देखेंगे कि समीकरण (6.20) किसी विशिष्ट समय पर ही तार के संरूपण के लिए मान्य है। इसलिए इस समीकरण में अवकलज लेने के लिए t को स्थिर रखना होगा। जब एक प्राचल को निश्चित रखा जाए तथा दूसरे को परिवर्तित किया जाए तो अवकलज को *आंशिक अवकलज* (partial derivative) कहते हैं। हम आंशिक अवकलज को प्रायः ∂ द्वारा दर्शाते हैं। अतः समीकरण (6.20) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$F_y = F\,\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\,\Delta x$$

किसी फलन $f(x+\Delta x)$ की बिन्दु x के सापेक्ष टेलर सीरीज निम्न रूप में लिख सकते हैं:
$f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{\partial f}{\partial x}\,\Delta x + \ldots\ldots$

इस समीकरण से हमें खंड Δx पर लगे नेट बल का मान प्राप्त होता है। न्यूटन के गति के दूसरे नियमानुसार हम इस बल को खंड की संहति तथा त्वरण के गुणनफल के बराबर लिख सकते हैं। खंड Δx की संहति $m\Delta x$ है। अतः

$$m\,\Delta x\;\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = F\;\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\,\Delta x$$

Δx को दोनों ओर से काटने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{m}{F}\;\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} \qquad (6.21)$$

आप जांच कर सकते हैं कि $\frac{F}{m}$ की विमा वेग के वर्ग की विमा के बराबर है। समीकरण (6.21) को तनित तार के छोटे अवयव पर न्यूटन के द्वितीय नियम के आधार पर प्राप्त किया गया है। परन्तु समस्त तार एक जैसी है इसलिए यह समीकरण सारे तार पर लागू होता है।

अब कुछ क्षण ठहर कर यह प्रश्न पूछे : हमने अपने लिए क्या लक्ष्य निर्धारित किया था तथा उसे प्राप्त करने में समीकरण (6.21) कहां तक सहायक होता है? हम यह जानना चाहते थे कि तरंग की चाल कौन से कारक निर्धारित करते हैं? इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए मान लीजिए कि एक गुणावृत्ती तरंग

$$y(x,t) = a\sin(\omega_0 t - kx)$$

तार पर गतिमान है। यदि यह गणितीय रूप न्यूटन के गति के द्वितीय नियम के अनुकूल हो तो आप पूरी तरह से आश्वस्त हो सकते हैं कि इस प्रकार की तरंगें तार पर गति कर सकती हैं। यह देखने के लिए आपको कण विस्थापन के द्वितीय आंशिक अवकलज की परिकलना करनी चाहिए:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 a\sin(\omega_0 t - kx)$$

तथा

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\omega_0^2\, a\sin(\omega_0 t - kx)$$

इन अवकलजों को समीकरण (6.21) में रखकर सरल करने पर आपको निम्नलिखित व्यंजक प्राप्त होगा:

$$k^2 = \frac{m}{F}\,\omega_0^2$$

या

$$\left(\frac{\omega_0}{k}\right)^2 = \frac{F}{m}$$

इस समिका में क्या अंतरनिहित है? इसे तनित तार में गुणावृत्ति तरंग संचरण के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम की सहायता से प्राप्त किया गया है। अतः इससे हमें पता चलता है कि तनित तार पर केवल वही तरंगें संचरित हो सकती हैं जिनके लिए तरंग गुण (ω_0 और k) F तथा m से निम्नलिखित समीकरण द्वारा सम्बद्ध हों:

$$\frac{\omega_0}{k} = \sqrt{\frac{F}{m}}$$

परन्तु समीकरण (6.7) से आप जनते हैं कि $\frac{\omega_0}{k}$ तरंग की चाल का व्यंजक है। अतः

$$v = \frac{\omega_0}{k} = \sqrt{\frac{F}{m}} \qquad (6.22)$$

इस संबंध से हमें यह पता चलता है कि जब एक तनित तार पर तरंग संचरित होती है तो उसका वेग तार पर लगे तनाव बल तथा उसकी प्रति इकाई लंबाई की संहति पर निर्भर करता है। इसका अर्थ यह हुआ कि v तार के गुणों पर निर्भर नहीं करती। इसमें एक बाह्यतत्व (तनाव बल) समाहित है जिसे सम-स्वरण (fine tuning) के लिए संमायोजित

किया जा सकता है। यही कारण है कि संगीतज्ञ तंतु वाद्यों में तनाव को समायोजित करते हैं। लेकिन बांसुरी और हारमोनियम में ऐसा कुछ नहीं किया जाता। v के इस मान को समीकरण (6.21) में रखने पर हमें निम्न तरंग समीकरण प्राप्त होता है:

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \qquad (6.23)$$

आप देखेंगे कि समीकरण (6.23) तथा (5.41) समरूप हैं। यह तब तक मान्य होता है जब तक कि तार के कणों के दोलनों का आयाम छोटा रहता है। अब आप पूछेंगे कि क्या समीकरण (6.23) बड़े आयाम के विक्षोभों के लिए मान्य नहीं है? यदि कणों के दोलनों का आयाम बड़ा हो तो दोलनों के लिए सम्मिश्र समीकरण प्राप्त होता है तथा तरंग चाल तरंग दैर्घ्य पर भी निर्भर करने लगती हैं।

अब आप निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल करें।

बोध प्रश्न 7

एक ग्राम संहति की एक मीटर लम्बी तार पर 10 न्यूटन बल लगा है। अनुप्रस्थ तरंगों का वेग परिकलित कीजिए।

हम जानते हैं कि किसी तरंग की चाल माध्यम की प्रत्यास्थता तथा जड़त्व पर निर्भर करती है। प्रत्यास्थता के कारण प्रत्यानयन बल उत्पन्न हो जाता है तथा जड़त्व हमें माध्यम की प्रतिक्रिया के बारे में बताता है। चूंकि तरल पदार्थों (गैस अथवा द्रव) में कठोरता नहीं होती, इसलिए अनुप्रस्थ तरंगें केवल ठोस पदार्थों में ही संचरित हो सकती हैं जबकि अनुदैर्ध्य तरंगें सभी पदार्थों में समपीडन और विरलनों की सहायता से संचरण करती हैं। आओ अब तरल पदार्थों में तरंग संचरण पर विचार करें।

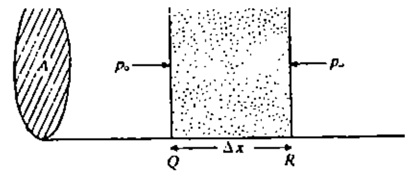
6.4.2 तरलों में तरंग संचरण

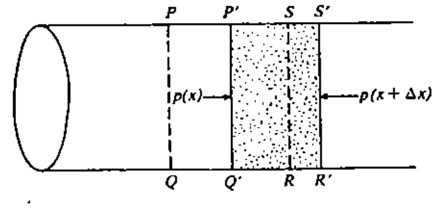
तरलों में तरंग संचरण की जानकारी प्राप्त करने के लिए हम अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल A की एक लम्बी नलिका की कल्पना करते हैं जिस पर p_0 दाब लगा है तथा जिसमें ρ घनत्व का निश्चित संहति का तरल भरा है। तनित तार की तरह हम तरल के छोटे स्तम्भ पर ही विचार करेंगे। मान लो स्तम्भ में कोई गति नहीं है तथा वह x तथा $x+\Delta x$ तलों के बीच $PQRSP$ क्षेत्र में निहित है (चित्र 6.14a) स्तम्भ $PQRSP$ की संहति $\rho \Delta x A$ है। आप तरल में अनुदैर्ध्य तरंगें किस प्रकार उत्पन्न कर सकते हैं? इन्हें उत्पन्न करने के लिए या तो आप इसके एक सिरे पर कम्पायमान स्वरित्र द्विभुज रखिए अथवा पिस्टन द्वारा तरल को दांई ओर विस्थापित कीजिए। जैसे ही तरंग स्तम्भ में संचरित होती है, तरल पर लगे दाब, उसके घनत्व और आयतन में परिवर्तन आता है। मान लो t समय में तल PQ तथा SR क्रमशः $P'Q'$ और $S'R'$ की नई स्थिति में पहुंच जाते हैं, जैसा कि चित्र 6.14b में दिखाया गया है। यदि PQ और RS क्रमशः $\psi(x)$ और $\psi(x+\Delta x)$ विस्थापित होते हैं तो स्तम्भ $PQRS$ की मोटाई में हुए परिवर्तन का मान निम्न व्यंजक द्वारा परिकलित किया जा सकता है :

$$\Delta l = \psi(x+\Delta x) - \psi(x) = \frac{\partial \psi}{\partial x}\Delta x$$

इस समीकरण को लिखते समय हमने $\psi(x+\Delta x)$ फलन के टेलर सीरीज एक्सपेन्सन का इस्तेमाल किया है। इसका अर्थ यह है कि तरल के आयतन में परिवर्तन

$$\Delta V = A\,\Delta l = A\Delta x \frac{\partial \psi}{\partial x}$$





चित्र 6.14 : (a) अनुप्रस्थ क्षेत्रफल A की एक लम्बी नलिका में तरल के स्तंभ *PQRS* की साम्यवस्था स्थिति (b) दाब अंतर के कारण स्तंभ की विचलित स्थिति

अतः *आयतन विकृति*

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{-A\Delta x \frac{\partial \psi}{\partial x}}{A\Delta x} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{6.24}$$

ऋणात्मक चिन्ह यह दर्शाता है कि स्तम्भ संपीडित है। यानि स्तम्भ के दोनों तलों पर लगे दाब बराबर नहीं हैं। मान लो कि इन दाबों में अंतर $p(x+\Delta x) - p(x)$ है। अतः स्तम्भ पर लगा नेट बल $A[p(x+\Delta x)-p(x)]$ है। Δx के पदों में $p(x+\Delta x)$ को टेलर एक्सपेन्सन लेकर हम स्तम्भ पर लगे नेट बल के मान को निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$\begin{aligned} F &= A\frac{\partial p}{\partial x}\Delta x \\ &= A\frac{\partial (p_o+\Delta p)}{\partial x}\Delta x \\ &= A\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x}\Delta x \end{aligned}$$

इसमें p_0 साम्य दाब है तथा Δp तरंग के संचरण से उत्पन्न अतिरिक्त दाब है। अतः न्यूटन के गति के द्वितीय नियम के अनुसार तरल स्तम्भ के गति समीकरण को निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$\rho\Delta x A\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = A\Delta x\frac{\partial(\Delta p)}{\partial x} \tag{6.25}$$

इस परिणाम को सुपरिचित रूप में लिखने के लिए हम Δp और *आयतन प्रत्यास्थता गुणांक* E के मध्य संबंध का उपयोग करते हैं:

$$E = \frac{\text{प्रतिबल (stress)}}{\text{आयतन विकृति (volume strain)}} = -\frac{\Delta p}{\Delta V/V}$$

(ऋणात्मक चिन्ह दबाव बढ़ने पर आयतन के घटने को दर्शाता है।) यह E को धनात्मक रखने के लिए लगाना पड़ता है। अतः

$$\Delta p = -E\frac{\Delta V}{V}$$

इस परिणाम में समीकरण (6.24) से $\frac{\Delta V}{V}$ का मान रखने पर हमें Δp और E में निम्न संबंध प्राप्त होता है :

$$\Delta p = E\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

इस परिणाम को समीकरण (6.25) में रखने पर हम देखते हैं कि

$$\rho \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = E \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)$$

या

$$= E \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \qquad (6.26)$$

यदि हम $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ का अनुदैर्ध्य तरंगों की गति से अभिनिर्धारण करें तो समीकरण (6.26) और समीकरण (5.41) समरूप हो जाते हैं।

आप देखेंगे कि तरंग वेग E और ρ द्वारा निर्धारित होती है जो कि उस माध्यम के गुण हैं जिसमें तरंग संचरित होती है। आइए अब गैसों में ध्वनि तरंग संचरण पर विचार करें।

a गैसों में ध्वनि तरंगें

वायु जैसे किसी गैसीय माध्यम में आयतन प्रत्यास्थता इस बात पर निर्भर करती है कि जब उसमें अनुदैर्ध्य तरंग संचरित होती है तब उष्मागतिक परिवर्तन कैसा है। यह समतापी (isothermal) या रूद्धोष्म (adiabatic) हो सकता है। ध्वनि तरंग के लिए न्यूटन की धारणा थी कि माध्यम में होने वाले परिवर्तन समतापी होते हैं। समतापी परिवर्तन के लिए आयतन प्रत्यास्थता साम्य दाब के बराबर होती है। बॉयल के नियम का उपयोग कर आप इस कथन की जांच कर सकते हैं। अतः

जिस प्रक्रम में ताप स्थिर रहता है उसे समतापी प्रक्रम कहते हैं। रुद्धोष्म प्रक्रम में निकाय की ऊर्जा अचर रहती है।

$$v = \sqrt{\frac{p_0}{\rho}} \qquad (6.27)$$

ध्वनि के वेग के लिए न्यूटन का यह सूत्र बहुत व्यापक है। STP पर वायु के लिए $\rho = 1.29$ $kg\,m^{-3}$ और $p_0 = 1.01 \times 10^5 Nm^{-2}$ होता है। अतः न्यूटन के सूत्र की सतायता से वायु में ध्वनि का वेग

$$v = \sqrt{\frac{1.01 \times 10^5 Nm^{-2}}{1.29\ kg/m^{-3}}} = 280 ms^{-1}$$

परन्तु प्रयोगों द्वारा पता चलता है कि STP पर वायु में ध्वनि का वेग $332\,ms^{-1}$ है। इस तथ्य से एक रोचक प्रश्न उठता है : न्यूटन से सही उत्तर के इतना निकट पहुंचने पर भी लगभग 15% की त्रुटि कैसे रह गई? इसका अर्थ है कि इस व्युत्पत्ति में अवश्य ही कुछ कमी है। अब आप यह जानना चाहेंगे कि इस विसंगति की व्याख्या कैसे की जाये। वास्तव में, बॉयल का नियम जो कि केवल स्थिर तापमान पर ही मान्य होता है इस प्रक्रम में इस्तेमाल नहीं करना चाहिए। इस विसंगति का समाधान लाप्लास (Laplace) ने किया जिसे लाप्लास - संशोधन कहते हैं। लाप्लास के अनुसार जब किसी माध्यम में ध्वनि तरंगें गतिमय होती हैं तब उसके कण बहुत तेजी से दोलन करने लगते हैं। इस प्रक्रम में संपीडित क्षेत्र में ताप बढ़ जाता है तथा विरलन क्षेत्र में कम हो जाता है। अर्थात् जब वायु में ध्वनि संचरित होती है तब तापमान में स्थानीय परिवर्तन होते हैं। लेकिन निकाय की कुल ऊर्जा संरक्षित रहती है। इसका अर्थ यह हुआ कि वायु में ध्वनि संचरण एक रूद्धोष्म प्रक्रम है।

एक रूद्धोष्म परिवर्तन में E का मान γp_0 होता है। अतः

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}} \qquad (6.28)$$

वायु के लिए γ का मान 1.4 होता है। अतः इस व्यंजक से वायु में ध्वनि के वेग का मान $331 ms^{-1}$ प्राप्त होता है, जो मापे गए मान के लगभग बराबर है। इससे स्पष्ट है कि लाप्लास का तर्क उचित है तथा न्यूटन की धारणा त्रुटिमय है।

रुद्धोषम परिवर्तन के लिए अवस्था समीकरण $pV^r = k$ होता है। अतः p तथा V में परिवर्तन निम्नलिखित संबंध मे जुड़े हैं।

$$V^r\Delta + p_r v^{r-1} \Delta V = 0$$

अथवा

$$\frac{\Delta p}{\Delta v\ v} = E = rp$$

किसी दिए गए तापमान पर गैस के लिए $\frac{p_0}{\rho}$ स्थिर होता है। इसलिए समीकरण (6.28) से यह पता चलता है कि अनुदैर्ध्य तरंग का वेग दाब पर निर्भर नहीं करता।

अब आप यह जानना चाहेंगे कि जितने समय में ध्वनि संपीडन से विरलन तक पहुंचती है

ऊष्मा क्यों नहीं पहुंच पाती तथा पूरा तापमान एक समान क्यों नहीं होता? इस परिस्थिति के लिए अर्ध आवर्तनकाल से भी कम समय में ऊष्मा को अर्ध-तरंगदैर्ध्य के बराबर दूरी तय करनी चाहिये। इसका अर्थ यह हुआ कि

$$v_{heat} \gg v_{sound} \tag{6.29}$$

चूंकि ऊष्मा का प्रवाह मूलतः चालन के कारण होता है इसलिए वायु के अणुओं का वेग

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{k_B T}{M}} \tag{6.30}$$

जहां M वायु के अणुओं की संहति है तथा T तापमान है। अतः हम लिख सकते हैं कि

$$v_{sound} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{M}} \tag{6.31}$$

अतः जितने समय में वायु के अणु $\frac{\lambda}{2}$ दूरी तय कर ऊष्मा को स्थानांतरित करते हैं, ध्वनि आगे संचरित हो चुकी होती है। वास्तव में, वे अनियमित टेड़े-मेढ़े रास्ते पर लगभग 10^{-5}cm की दूरी तय करते हैं। अतः यदि $\lambda > 10^{-5}$cm है तो रूद्धोष्म प्रवाह परिशुद्ध सन्निकट है।

श्रव्य ध्वनि की सूक्ष्मतम तरंगदैर्ध्य (1.6 cm) 20 kHz आवृत्ति के संगत होती है। आपने पिछली कक्षाओं में पढ़ा होगा कि ध्वनि के वेग मापन की क्षमता सुरक्षा बलों के लिए बहुत उपयोगी सिद्ध हुई है। प्रथम विश्वयुद्ध में ध्वनिक परासन (sound ranging) तकनीक का विकास हुआ। इसमें दुश्मन की तोपों की स्थिति का पता उनकी आवाज से लगा लिया जाता है।

b द्रव में ध्वनि तरंगें

द्रव सामान्य रूप से असंपीडय होते हैं। जल के लिए $E = 2.22 \times 10^9$ Nm^{-2} तथा $\rho = 10^3$ kg m^{-3} होता है। अतः $v = 1500$ms^{-1}। आप इसकी तुलना STP पर वायु में तरंग की चाल से कीजिए। यद्यपि वायु की तुलना में जल लगभग 10^3 गुना सघन होता है फिर भी जल में ध्वनि अधिक तेजी से संचरण करती है। इसका अर्थ यह हुआ कि हमें एक जलपोत से दूसरे जलपोत पर संदेश भेजने के लिए वायु की अपेक्षा जल का उपयोग करना चाहिये। यह तथ्य सोनार के विकास में बहुत उपयोगी सिद्ध हुआ है। सोनार में उच्च आवृत्ति की ध्वनि तरंगें इस्तेमाल की जाती है जिनसे समुद्रतल की गहराई मापी जा सकती है तथा पनडुब्बियों और दुश्मन के तारपीडों का पता लगाया जा सकता है।

6.4.3 छड़ में तरंग संचरण

जब किसी (ठोस) प्रत्यास्थ छड़ में तरंग संचारित होती है तो केवल उसकी लम्बाई में परिवर्तन होता है (आयतन लगभग अचर रहता है)। अतः आयतन प्रत्यास्थता गुणांक को हम यंग के प्रत्यास्थता गुणांक द्वारा प्रस्थापित करते हैं:

$$Y = \frac{\text{प्रतिबल}}{\text{अनुदैर्ध्य विकृति}} = \frac{\Delta p}{\Delta l / l}$$

अतः जब किसी छड़ में तरंग संचरित होती है तो समीकरण (6.26) के संशोधित रूप को निम्नलिखित तरीके से लिख सकते हैं:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{Y}{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \tag{6.32a}$$

अनुदैर्ध्य तरंगों के वेग का मान निम्न व्यंजक द्वारा परिकलित किया जा सकता है:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} \tag{6.32b}$$

इससे यह पता चलता है कि ध्वनि वेग छड के अनुप्रस्थ परिच्छेद क्षेत्रफल पर निर्भर नहीं करता।

बोध प्रश्न 8

स्टील की छड के लिए $Y = 2 \times 10^{11}\,Nm^{-2}$ तथा $\rho = 7800\,kg\ m^{-3}$ है। ध्वनि की चाल परिकलित कीजिए।

इस प्रश्न का उत्तर निकालने पर आप देखेंगे कि v का मान $5 \times 10^3 ms^{-1}$ होता है। इससे पता चलता है कि अनुदैर्ध्य तरंगें गैसों तथा द्रवों की अपेक्षा ठोसों में अधिक तेजी से गति करती हैं। इसका अर्थ यह है कि आप रेल की पटरी पर कान लगाकर आती हुई रेल का पता लगा सकते हैं। परन्तु यह अत्यन्त जोखिम भरा कार्य है तथा हमारी सलाह है कि आप ऐसा कभी भी ना करें।

6.5 तरंग गति और प्रतिबाधा

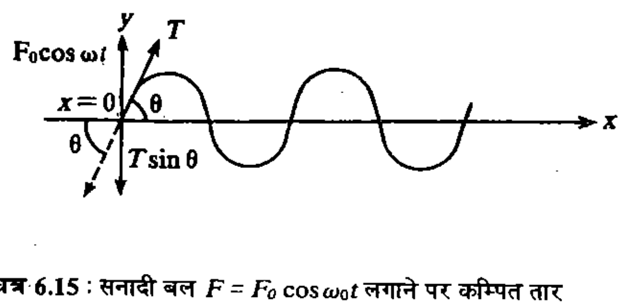
जब कोई तरंग किसी माध्यम में संचरित होती है तो माध्यम उसके वेग को अवरोधित करता है। इस प्रतिरोध को हम **तरंग प्रतिबाधा** कहते हैं। आप जानते हैं कि ac परिपथ में भी धारा प्रवाह अवरोधित होता है तथा विद्युत प्रतिबाधा उत्पन्न होती है। (आप इन दोनों में भ्रमित न हों।) तार में संचरित अनुप्रस्थ तरंगों की प्रतिबाधा को **अभिलक्षणिक प्रतिबाधा** कहते हैं तथा वायु में संचरित अनुदैर्ध्य ध्वनि तरंगों की प्रतिबाधा को **ध्वनिक प्रतिबाधा** कहते हैं। अब आप यह पूछेंगे कि प्रतिबाधा क्यों उत्पन्न होती है तथा इसके निर्धारक तत्व कौन-कौन से हैं? इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए हमें यह स्मरण करना होगा कि जब किसी माध्यम में कोई तरंग संचरित होती है तब उसका प्रत्येक कण अपनी साम्यावस्था के सापेक्ष कम्पन करता है और गतिमय प्रत्येक कण अपने परवर्ती कण को ऊर्जा स्थानान्तरित करके कम्पित करना चाहता है। इसी प्रकार प्रत्येक स्थिर कण पड़ोसी गतिमय कण की गति को कम करना चाहता है। अर्थात् प्रत्येक कम्पित कण कर्षण बल (dragging force) का अनुभव करता है जो कि श्यान बल (viscous force)के समरूप होता है। न्यूटन के गति के तीसरे नियमानुसार यह प्रेरक बल (driving force) के बराबर होगा। ब्लॉक 1 की इकाई 3 से आपको याद होगा कि जब कणों का वेग कम होता है तो हम श्यान बल को स्टोक के नियम के आधार पर प्रतिरूपित कर सकते हैं:

$$F = Z\,v$$

अनुपातिकता स्थिरांक Z को **तरंग प्रतिबाधा** कहते हैं। इस समीकरण से यह स्पष्ट है कि संख्यात्मक रूप में तरंग प्रतिबाधा प्रेरक बल के उस मान के बराबर होती है जो कणों को इकाई वेग देता है। आओ अब हम कुछ विशिष्ट उदाहरणों पर विचार करें।

6.5.1 तनित तार द्वारा प्रस्तुत प्रतिबाधा : अनुप्रस्थ तरंगें

आइए अब हम तनित तार पर संचरित तरंग पर विचार करें। हम तार की लम्बाई के अनुदिश x-अक्ष का चयन करते हैं (चित्र 6.15)। अनुप्रस्थ तरंगें तार के $x=0$ सिरे पर $F=F_0 \cos \omega_0 t$ सनादी बल लगाने पर उत्पन्न होती हैं। x स्थिति और t समय पर तार के कणों का विस्थापन समीकरण (6.6) द्वारा निरूपित किया जाता है।



चित्र 6.15 : सनादी बल $F = F_0 \cos\omega_0 t$ लगाने पर कम्पित तार

मान लीजिए कि तार में तनाव बल T है। ऋणात्मक y-दिशा की ओर तनाव बल का ऊर्ध्व घटक अनुप्रयुक्त अनुप्रस्थ बल के बराबर होता है। इससे तार के $x = 0$ सिरे पर परिणामी बल शून्य हो जाता है, अर्थात्

$$F_0 \cos\omega_0 t = -T\sin\theta$$

θ ($< 5^0$) के लघु मान के लिए $\sin\theta \simeq \tan\theta$ जिससे कि हम लिख सकते हैं कि

$$F_0 \cos\omega_0 t = -T\tan\theta \qquad (6.33$$

स्पर्श रेखा (अथवा प्रवणता) तार के $x = 0$ सिरे पर परिभाषित होती है। समीकरण (6.6) की सहायता से हम $\frac{dy}{dx}$ और $\frac{dy}{dt}$ को निम्न रूप में सम्बद्ध कर सकते हैं:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{k}{\omega_0}\frac{dy}{dt}$$

इस परिणाम को समीकरण (6.33) में रख कर हमें पता चलता है कि

$$F_0 \cos\omega_0 t = \frac{kT}{\omega_0}\left(\frac{dy}{dt}\right)_{x=0}$$

हम जानते हैं कि

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{x=0} = a\,\omega_0 \cos\omega_0 t$$

अतः
$$F_0 \cos\omega_0 t = \frac{Tk}{\omega_0}\, a\,\omega_0 \cos\omega_0 t$$
$$= \frac{T}{v}\, a\omega_0 \cos\omega_0 t$$

जबकि $v = \frac{\omega_0}{k}$

यदि हम $a\omega_0 = v$ को तरंग का वेग आयम कहें तो उपर्युक्त समीकरण निम्न रूप ले लेता है

$$F_0 \cos\omega_0 t = \frac{Tv_0}{v}\cos\omega_0 t$$

इसे सरल करने पर हमें पता चलता है कि

$$F_0 = \frac{Tv_0}{v}$$

या

$$\frac{F_0}{v_0} = \frac{T}{v} \qquad (6.34)$$

इस परिणाम से हमें पता चलता है कि अनुप्रयुक्त बल के आयाम और अनुप्रस्थ तरंगों के लिए कण वेग के आयाम का अनुपात तार में लगे तनाव बल तथा कण वेग के अनुपात के बराबर होता है। इस परिणाम को तार की अभिलक्षणिक प्रतिबाधा (Z) ज्ञात करने के लिए प्रयोग में लाया जा सकता है:

$$Z = \frac{\text{अनुप्रस्थ अनुप्रयुक्त बल का आयाम } (F_0)}{\text{अनुप्रस्थ तरंग के लिए कणों के वेग का आयाम } (v_0)}$$

समीकरण (6.34) की सहायता से हम देखते हैं कि

$$Z = \frac{F_0}{v_0} = \frac{T}{v} \qquad (6.35)$$

इस परिणाम से पता चलता है कि अभिलक्षणिक प्रतिबाधा का एकक Nm^{-1} है परन्तु इसकी विमा MT^{-1} है।

हम जानते हैं कि $v = \sqrt{\frac{T}{m}}$ जिसमें T तार पर लगा तनित बल तथा m तार की प्रति इकाई लम्बाई संहति है। अतः समीकरण (6.35) को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है:

$$Z = \frac{T}{v} = \frac{T}{\sqrt{T/m}} = \sqrt{Tm} \qquad (6.36a)$$

और यदि हम T का लोप कर दें तो

$$Z = \frac{v^2m}{v} = mv \qquad (6.36b)$$

समीकरण (6.36a) से हमें यह ज्ञात होता है कि अभिलक्षणिक प्रतिबाधा तार में लगे तनाव बल और इसकी प्रति इकाई लम्बाई संहति पर निर्भर करती है। इसका अर्थ यह है कि सोनोमीटर (स्वरमापी) के तार पर भिन्न-2 भार लटकाने पर भिन्न-भिन्न प्रतिबाधा उत्पन्न होगी। समीकरण (6.36b) से हमें यह पता चलता है कि Z, जो तरंग वेग से संबद्ध है, माध्यम की प्रत्यास्थता तथा जड़त्व पर निर्भर करता है।

बोध प्रश्न 9

यदि स्टील के पतले तार पर 80N बल लगा हो तो उत्पन्न अभिलक्षणिक प्रतिबाधा परिकलित कीजिए। इसका प्रति मीटर भार 2g है।

6.5.2 गैसों द्वारा प्रस्तुत प्रतिबाधा : ध्वनि तरंगें

किसी गैस में संचरित ध्वनि तरंगों के कारण अतिरिक्त दाब की प्रक्रिया अनुप्रस्थ तरंग के प्रसंग में अनुप्रयुक्त तरंग बल के समरूप होती है। इसलिए हम ध्वनिक प्रतिबाधा को निम्न रूप में परिभाषित कर सकते हैं:

$$Z = \frac{\text{ध्वनि तरंग के कारण अतिरिक्त दाब}}{\text{कण वेग}} = \frac{\Delta p}{\left(\frac{\Delta\psi}{\Delta t}\right)} \qquad (6.37)$$

इसका अर्थ यह है कि विमीय रूप में Z प्रति इकाई क्षेत्रफल पर लगे बल तथा वेग के अनुपात के बराबर है।

किसी माध्यम में अनुदैर्ध्य तरंग के संचरित होने पर यदि अतिरिक्त दाब Δp हो तो

$$\Delta p = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad (6.38)$$

यहां E माध्यम का *आयतन प्रत्यास्थता गुणांक* है। इसका अर्थ यह है कि Z ज्ञात करने के लिए हमें $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ और $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ की परिकलना करनी होगी। ऐसा करने के लिए हम यह याद रखना होगा कि x-अक्ष के अनुदिश गतिमय अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए

$$\psi(x, t) = a \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right]$$

इसे x और t के सापेक्ष अवकलित करने पर आप देखेंगे कि

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = -a\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right] \qquad (6.39a)$$

तथा

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -a \left(\frac{2\pi v}{\lambda}\right) \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right] \qquad (6.39b)$$

समीकरण (6.38) और समीकरण (6.39a) से हम देखते हैं कि

$$\Delta p = Ea \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right) \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right] \qquad (6.40)$$

समीकरण (6.40) और (6.39b) में से Δp तथा $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ के मान रखने पर हमें पता चलता है कि ध्वनिक प्रतिबाधा

$$Z = \frac{\Delta p}{\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)} = \frac{Ea\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right]}{a\left(\frac{2\pi v}{\lambda}\right)\cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right]}$$

$$= \frac{E}{v} \qquad (6.41)$$

यहां v तरंग वेग है। इस परिणाम से यह पता चलता है कि ध्वनिक प्रतिबाधा की इकाई $Nm^{-3}s$ है और विमा $ML^{-2}T^{-1}$ है। (आगे बढ़ने से पहले आप इनकी जांच कर लीजिए।) समीकरण (6.26a) से हमें विदित है कि तरंग वेग

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

जिसमें ρ माध्यम का घनत्व है। अतः ध्वनिक प्रतिबाधा को निम्न व्यंजक द्वारा भी निरूपित किया जा सकता है:

$$Z = \frac{E}{v} = \sqrt{E\rho} = \rho v \qquad (6.42)$$

इस परिणाम से हमें यह पता चलता है कि ध्वनिक प्रतिबाधा माध्यम के घनत्व और तरंग वेग के गुणनफल के बराबर है। इसका अर्थ यह है कि माध्यम जितना अधिक सघन होगा, प्रतिबाधा उतनी ही अधिक होगी। फिर भी हम देखते हैं कि ध्वनि, गैसों की अपेक्षा ठोस पदार्थों में अधिक तेजी से गति करती है।

इकाई 7 में आप इन परिणामों को दो माध्यमों की परिसीमा पर आपतित तरंग के परावर्तन और पारगमन गुणांकों की गणना करने में उपयोग करेंगे।

बोध प्रश्न 10

STP पर वायु की ध्वनिक प्रतिबाधा की परिकलना कीजिए। (ρ = 1.29 kgm^{-3} और ϑ = 332 ms^{-1}) यह मान जल के लिए अधिक होगा या वायु के लिए? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

6.6 द्विविम तथा त्रिविम तरंगें

अभी तक हमने केवल एक विम तरंगों के संचरण का ही अध्ययन किया है। तनित तार में तरंगें लम्बाई के अनुदिश गति करने के लिए बाध्य होती हैं जब कि कण लम्बवत् दिशा में कम्पन करते हैं। परन्तु संगीत के सभी वाद्यों में तार नहीं होते। क्या आपने उस्ताद जाकिर हुसैन अथवा अल्ला रखा खां के तबला वादन का आनंद लिया है? आपने शायद कभी झांझ या ढोल

बजाया हो? जब तबले अथवा ढोल की झिल्ली को इस के तल के लम्बवत् अनुनादित किया जाता है तो क्या होता है? झिल्ली के कण अनुप्रयुक्त बल की दिशा में कम्पन करने लगते हैं परन्तु झिल्ली का तनाव विक्षोभ को सम्पूर्ण तल पर फैला देता है। अर्थात् तनित झिल्ली पर तरंगें द्विविम (2-D) होती हैं। इसी प्रकार शांत तालाब में पत्थर फैंकने पर जल पृष्ठ पर उत्पन्न उर्मिक भी द्विविम होते हैं। ऐसी स्थितियों में विस्थापन x, y और t पर निर्भर करता है, $\psi = \psi\,(x, y, t)$। अब आप पूछ सकते हैं कि 2-D में तरंग समीकरण क्या होता है? क्या इस स्थिति में पूर्ववर्ती विश्लेषण लागू होगा? इन प्रश्नों का उत्तर देने के लिए हम गणितीय पद नहीं देंगे। संयोग से 2-D तरंग के लिए समीकरण (6.23) का व्यापीकरण सरलता से किया जा सकता है। चूंकि x और y अक्षों के अनुदिश बल स्वतंत्र हैं, इसलिए प्रत्येक बल तरंग समीकरण में सदृश पद प्रदान करेगा। अतः समीकरण (6.23) निम्नलिखित रूप ले लेता है:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{F}{\rho}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi\,(x, y, t) \qquad (6.43)$$

यदि आप इस समीकरण को हल करें तो आप देखेंगे कि

$$\psi\,(x, y, t) = a \sin\,(\omega_0 t - \mathbf{k}\,.\mathbf{r}) \qquad (6.44)$$

इसमें $\mathbf{k}.\mathbf{r} = (k_x\mathbf{i} + k_y\mathbf{j})\,.\,(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = k_x x + k_y y$ तथा $k^2 = k_x^2 + k_y^2$.

आइए अब एक मिनट रुक कर पूछें कि क्या ध्वनि और प्रकाश तरंगें किसी छोटे द्विविम स्रोत से त्रिज्यतः उत्सर्जित होती हैं? हम भूकम्पी तरंगों या प्रत्यास्थ ठोस अथवा द्रव में संचरित तरंगों का वर्णन किस प्रकार कर सकते हैं? ये त्रिविम (3-D) तरंगें होती हैं। 3-D तरंगों का विश्लेषण करने के लिए हमें उपरोक्त तर्क का वर्धन करना होगा। इसके फलस्वरूप हमें 3-D तरंग समीकरण प्राप्त होगा।

बोध प्रश्न 11

समीकरण (6.43) का त्रिविम व्यापीकरण कीजिए।

6.7 सारांश

- यान्त्रिक (प्रत्यास्थ) तरंगें अनुप्रस्थ और अनुदैर्ध्य भी हो सकती हैं। अनुप्रस्थ तरंग में माध्यम के कण तरंग गति की दिशा के लम्बवत् कम्पन करते हैं जबकि अनुदैर्ध्य तरंग में माध्यम के कण तरंग गति की दिशा के अनुदिश कम्पन करते हैं।

- तरंग वेग, आवृत्ति और तरंगदैर्ध्य में निम्न संबंध होता है

$$v = \nu\lambda$$

हम ν को कोणीय आवृत्ति और तरंग-संख्या के अनुपात के रूप में लिख सकते हैं :

$$v = \frac{\omega_0}{k}$$

- 1-D में गुणावृत्ति तरंग को निम्न रूप में लिखा जाता है

$$y(x,t) = a \sin\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\right]$$

$$= a \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}\,(vt - x)\right]$$

$$= a\ \sin\,(\omega_0 t - kx)$$

यहां T आवर्तकाल है। तरंग की कला $\phi = \omega_0 t - kx$ समय तथा स्थान के साथ परिवर्तित होती है।

- तरंग के साथ ऊर्जा का प्रवाह होता है। तरंग द्वारा संचरित ऊर्जा में आधी ऊर्जा गतिज होती है और आधी स्थितिज:

$$E = 2\pi^2 a^2 \nu_0^2 \rho A \Delta x$$
$$= \langle K.E \rangle + \langle U \rangle$$

- ऊर्जा के प्रवाह की औसत दर, जिसे हम शक्ति भी कहते हैं, तरंग चाल तथा तरंग के आयाम के वर्ग के समानुपाती होती है:

$$\langle P \rangle = 2\pi a^2 \nu_0^2 \rho v A$$

- तीव्रता तरंगों की ऊर्जा का एक उपयोगी माप है। समतल तरंग संचरण में तीव्रता स्थिर रहती है परन्तु गोलीय तरंगों की तीव्रता स्रोत से किसी बिंदु की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होती है।

- तनित तार पर संचरित तरंगों के समीकरण को निम्न रूप में लिखा जाता है:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x, t)$$

जहां $\psi(x, t)$ विस्थापन हैं तथा v तरंग चाल है।

- तनित तार पर तरंग की चाल निम्नलिखित व्यंजक द्वारा परिकलित की जा सकती हैं :

$$v = \sqrt{\frac{F}{m}}$$

यहां F तनाव बल है और m प्रति इकाई लम्बाई संहति है। अनुदैर्ध्य तरंग के लिए

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

यहां E प्रत्यास्थता तथा ρ माध्यम का घनत्व है। वायु में ध्वनि तरंगों की चाल

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}}$$

यहां γ स्थिर दाब पर विशिष्ट ऊष्मा तथा स्थिर आयतन पर विशिष्ट ऊष्मा का अनुपात है।

जब ठोसों में ध्वनि तरंग संचरित होती हैं तो वेग

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- जब तरंग किसी माध्यम में गति करती है तो वह माध्यम उसका प्रतिरोध करता है। तरंग गति के इस प्रतिरोध को तरंग प्रतिबाधा कहते हैं। अनुप्रस्थ तरंगों के लिए अभिलक्षणिक प्रतिबाधा की गणना निम्न व्यंजक द्वारा की जाती है:

$$Z = \frac{T}{v} = \sqrt{Tm} = mv$$

वायु में ध्वनि तरंगों के लिए ध्वनिक प्रतिबाधा के लिए निम्न व्यंजक प्रयुक्त होता है:

$$Z = \frac{E}{v} = \sqrt{E\rho} = \rho v$$

- द्विविम तरंगों के लिए तरंग समीकरण है:

$$\frac{\partial^2\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \psi(\mathbf{r}, t)$$

इस समीकरण का हल इस प्रकार है:

$$\psi(\mathbf{r}, t) = a \sin(\omega_0 t - \mathbf{k}.\mathbf{r})$$

यहां $\mathbf{k}.\mathbf{r} = k_x x + k_y y$ तथा $k^2 = k_x^2 + k_y^2$

6.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. 1 cm आयाम तथा 500 Hz की अनुप्रस्थ गुणावृत्ति तंरग तार के $x = 0$ सिरे पर उत्पन्न की गई है। एक समय पर $x = 10$ cm पर कण विस्थापन - 0.5 cm है तथा $x = 20$ cm पर विस्थापन 0.5 cm है। तरंग वेग और तरंगदैर्ध्य की परिकलना कीजिए। यदि तरंग धनात्मक x दिशा के अनुदिश गति करती है और $t = 0$ समय पर $x = 0$ सिरा साम्य स्थिति मे हो तो विस्थापन को तरंग वेग के पदों में लिखिए।

2. सामान्य बातचीत में ध्वनि तीव्रता 5.0×10^{-6} Wm^{-2} होती है। श्रव्य ध्वनि की सामान्य आवृत्ति 1000 Hz है। STP पर वायु का घनत्व 1.29 kg m^{-3} और ध्वनि वेग 332 ms^{-1} लेकर ध्वनि तरंगों के आयाम की परिकलना कीजिए।

3. 15 ^{0}C तापमान वाले कमरे में 500 Hz की आवृत्ति की ध्वनि के स्वर का तरंगदैर्ध्य 0.70 m है। यदि STP पर वायु का घनत्व 1.29 kg m^{-3} हो तो γ का मान ज्ञात कीजिए।

4. भूकम्प में उत्पन्न अनुदैर्ध्य विक्षोभ 2.5 min में 10^3 km गति करता है। यदि चट्टान का घनत्व 2.75×10^3 kg m^{-3} हो तो चट्टान के आयतन प्रत्यास्थता गुणांक की परिकलना कीजिए।

6.9 हल और उत्तर

बोध पश्न

1. (i) 20 Hz (ii) मिश्रित (iii) ऊर्जा, द्रव्य (iv) नहीं (v) अनुप्रस्थ

2. समीकरण (6.4) से हम जानते हैं कि

$$\nu = \frac{c}{\lambda}$$

जब $\lambda = 4000\ \mathring{A} = 4 \times 10^{-7}$ m, तो

$$\nu = 3 \times \frac{10^8\ ms^{-1}}{4 \times 10^{-7} m}$$
$$= 7.5 \times 10^{14}\ s^{-1}$$

इसी प्रकार $\lambda = 7200\ \mathring{A}$ के लिए

$$\nu = 3 \times \frac{10^8\ ms^{-1}}{7.2 \times 10^{-7} m}$$
$$= 4.1 \times 10^{14} s^{-1}$$

3. एक विम तरंग के लिए

$$y\,(x, t) = (2.5 \times 10^{-3} m) \sin \left[600\, \pi \left(t - \frac{x}{340}\right) \right]$$

अतः तरंगदैर्ध्य

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{340\ ms^{-1}}{275\ s^{-1}} = 1.24\ m$$

माध्यम के कणों का वेग

$$v = \frac{\partial y}{\partial t} = (2.5 \times 10^{-3} m)\,(600\pi s^{-1}) \cos \left[600\pi \left(t - \frac{x}{340}\right)\right]$$

तथा त्वरण

$$a = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(2.5 \times 10^{-3} m)\,(600\pi s^{-1})^2 \sin \left[600\pi \left(t - \frac{x}{340}\right)\right]$$

4. $-x$ दिशा के अनुदिश गति करती तरंग का निम्नलिखित समीकरण द्वारा वर्णन किया जा सकता है:

$$y(x, t) = a \sin(\omega_0 t + kx)$$

v तथा λ कोणीय आवृत्ति से निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा जुड़े हैं:

$$\omega_0 = \frac{2\pi v}{\lambda} \quad \text{यहां } v = 93 \text{ cm s}^{-1} \text{ और } \lambda = 50 \text{ cm}$$

अत: $\omega_0 = \dfrac{2\pi \times 93 \text{ cms}^{-1}}{55 \text{ cm}} = \dfrac{372}{55} \text{ s}^{-1}$

इसी प्रकार तरंग-संख्या और तरंगदैर्घ्य में निम्न संबंध है:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2 \times 22}{7 \times 55 \text{ cm}} = \frac{4}{35} \text{ cm}^{-1}$$

अत:

$$y(x, t) = (7.4 \text{ cm}) \sin\left(\frac{372}{35} t + \frac{4}{35} x\right)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = (7.4 \text{ cm}) \sin(10.6\, t + 0.1\, x)$$

तथा कण वेग $= 7.4\text{cm} \times \left(\dfrac{372 s^{-1}}{35}\right) \cos\left(\dfrac{372}{35} t + \dfrac{4}{35} x\right)$

$$= (78.6 \text{ cm } s^{-1}) \cos(10.6\, t + 0.1\, x)$$

5. यहां $I = 8 \times 10^{-5}$ Wm^{-1} तथा $I_0 = 10^{-12}$ Wm^{-2} है।

हम जानते हैं कि तीव्रता दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होती है। यदि r दूरी है जिस पर ध्वनि सुनी जा सकती है तब

$$\frac{8 \times 10^{-5} \text{ Wm}^{-2}}{10^{-12} \text{ Wm}^{-2}} = \frac{r^2}{(1\text{m})^2}$$

अत: $r = 9 \times 10^3\text{m} = 9 \text{ km}$

परन्तु दैनिक जीवन में ऐसा नहीं होता। इसका मूल कारण माध्यम द्वारा उर्जा का अवशोषण है।

6. $v = k f(F, m)$

$$[v] = [K][F]^a[m]^b$$

$$[LT^{-1}] = [MLT^{-2}]^a[ML^{-1}]^b$$

या

$$[LT^{-1}] = [M^{a+b}][L^{a-b}][T^{-2a}]$$

दोनों तरफ T की घातों की तुलना करने पर हम देखते हैं कि

$$-1 = -2a$$

या

$$a = \frac{1}{2}$$

इसी प्रकार L की घातों की तुलना करने पर हम देखते हैं कि

$$a - b = 1$$

या

$$b = a - 1 = -\frac{1}{2}$$

अत:

$$v = k\sqrt{\frac{F}{m}}$$

दी गई राशियों के मानों को प्रस्थापित पर हम देखते हैं कि

$$v = \sqrt{\frac{10\text{N}}{10^{-3}\text{kgm}^{-1}}}$$

$$= 100 \text{ ms}^{-1}$$

8. समीकरण (6.32b) से $v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$ में दिए गए मानों को रखने पर आप देखेंगे कि

$$v = \sqrt{\frac{2\times10^{11}\ \text{Nm}^{-2}}{7800\ \text{kg m}^{-3}}}$$
$$= 5 \times 10^3\ \text{ms}^{-1}$$

9. यहां $m = 2.0\ \text{gm}^{-1} = 2.0 \times 10^{-3}\ \text{kg m}^{-1}$
तथा $T = 80$ N
समीकरण (6.36a) से हमें ज्ञात है कि तार द्वारा उत्पन्न प्रतिबाधा
$$Z = \sqrt{Tm}$$
दिए हुए आकड़ों को इस व्यंजक में रखने पर हम देखते हैं कि
$$Z = \sqrt{(80\text{N}) \times (2.0 \times 10^{-3}\text{kg m}^{-1})}$$
$$= 0.4\text{Nm}^{-1}\text{s}$$

10. समीकरण (6.41) से हमें ज्ञात है कि
$$Z = \rho v$$
यहां $\rho = 1.29\ \text{kg m}^{-3}$ तथा $v = 332\ \text{ms}^{-1}$
$$\therefore Z = (1.29\ \text{kg m}^{-3}) \times (332\ \text{ms}^{-1})$$
$$= 4.28 \times 10^2\ \text{kg m}^{-2}\text{s}^{-1}$$
$$= 4.28 \times 10^2\ \text{N m}^{-3}\text{s}$$
वायु की अपेक्षा जल अधिक प्रतिबाधा उत्पन्न करता है। इसका कारण यह है कि STP पर वायु की तुलना में जल का घनत्व अधिक होता है। इसके अतिरिक्त जल में ध्वनि का वेग भी वायु में ध्वनि के वेग की अपेक्षा पांच गुना होता है।

11. 3-D तरंग समीकरण को निम्न रूप में लिखा जा सकता है:

$$\frac{\partial\psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = v^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \psi(\mathbf{r}, t)$$

तथा $\mathbf{r} = x_i + y_j + z_k$

अंत के प्रश्न

1. हम जानते हैं कि 1-D गुणावृत्ति तरंग का समीकरण निम्न रूप में लिखा जाता है:

$$y(x, t) = a \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right]$$

यहां $a = 1$ cm तथा $x = 10$ cm पर $y(x, t) = -0.5$ cm

$$\therefore -0.5\text{cm} = (1\ \text{cm}) \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-10)\right]$$

या

$$\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x)\right] = -\frac{1}{2} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)$$

इस समानता में यह निहित है कि

$$\frac{2\pi}{\lambda}(vt-x) = \frac{7\pi}{16}$$

अथवा $vt-10 = \frac{7}{12}\lambda$ (i)

इसी प्रकार $x = 20$ cm पर $y(x, t) = 0.5$ cm

$$\therefore 0.5\ \text{cm} = (1\text{cm}) \sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}(vt-20)\right] = \sin\frac{\pi}{6}$$

अतः $vt-20 = \frac{\lambda}{12}$ (ii)

समीकरण (i) और (ii) से हम देखते हैं कि

$$\frac{\lambda}{2} = 10$$

अथवा $\lambda = 20$ cm
$= 0.2$ m

चूंकि $v = \nu\lambda$, हम देखते हैं कि

$$v = (500 \text{ Hz}) \times (0.02 \text{ m}) = 100 \text{ ms}^{-1}$$

अतः

$$y(x, t) = (0.01 \text{ m}) \sin\left[\frac{2\pi}{0.2} (100t - x)\right]$$

2. समीकरण (6.17) से हम जानते हैं कि तीव्रता

$$I = 2\pi^2 \rho \nu_0^2 a^2 v$$

इसलिए $a = \dfrac{1}{\pi\nu_0}\sqrt{\dfrac{I}{2\rho v}}$

यहां $v = 332$ ms^{-1}, $\rho = 1.29$ kg m^{-3}, $\nu_0 = 1000$ Hz तथा $I = 5\times10^{-6}$Wm^{-2} हैं
अतः

$$a = \frac{1}{(3.14\times1000 \text{ Hz})}\sqrt{\frac{5\times10^{-6}\text{Wm}^{-2}}{2\times(1.29 \text{ kg m}^{-3})\times(332 \text{ ms}^{-1})}}$$

$$= 2.4 \times 10^{-8}\text{m}$$

3. हम यहां निम्नलिखित व्यंजकों को इस्तेमाल करेंगें

$$v_t = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}, \; v_0 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho}}$$

तथा गैस समीकरण

$$\frac{p_0 V_0}{T} = \frac{pV}{T}$$

गैस समीकरण को ρ और ρ_0 के रूप में निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\frac{p_0 \rho}{p \rho} = \frac{T_0}{T}$$

क्योंकि $\rho = \dfrac{m}{V}$ और $\rho_0 = \dfrac{m}{V_0}$.

चूंकि $v_t = \nu\lambda$, हम देखते हैं कि

$$v_t = (500 \text{ Hz}) \times (0.70 \text{ m})$$
$$= 350 \text{ ms}^{-1}$$

अतः

$$\frac{v_0}{v_t} = \sqrt{\frac{p_0 \rho}{\rho_0 p}} = \sqrt{\frac{T_0}{T}} = \sqrt{\frac{273 \text{ K}}{288 \text{ K}}}$$

या

$$v^0 = (350 \text{ ms}^{-1})\sqrt{\frac{273 \text{ K}}{288 \text{ K}}} = 341 \text{ ms}^{-1}$$

अतः

$$\gamma = \frac{v_0^2 \rho_0}{p_0} = \frac{(341 \text{ ms}^{-1}) \times (1.29 \text{ kg m}^{-3})}{(0.76 \text{ m}) \times (9.8 \text{ ms}^{-1}) \times (13.6 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3})}$$

$$= 1.5$$

4. भूकम्पी तरंगों की चाल

$$v = \frac{10^3 \times 10^3\,\text{m}}{2.5 \times 60\,\text{s}} = 6.7 \times 10^3\,\text{ms}^{-1}$$

चूंकि $v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$, हम लिख सकते हैं कि

$$E = v^2 \rho$$

दिए हुए आंकड़ों को प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि

$$E = (6.7 \times 10^3\,\text{ms}^{-1}) \times (2.7 \times 10^3\,\text{kg m}^{-3})$$

$$= 12.1 \times 10^{10}\,\text{N m}^{-2}$$

इकाई 7 दो माध्यमों की परिसीमा पर तरंगें

इकाई की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना

इकाइ 6 में आप तरंग गति की मूल विशेषताओं के बारे में पढ़ चुके हैं। आपने तनित तार और तरल पदार्थों में ध्वनि के संदर्भ में तरंग संचरण का अध्ययन किया। अब आप यह पूछ सकते हैं कि यदि कोई तरंग एक दीवार से बंधी तार पर आपतित हो तो क्या होगा? आप जानते हैं कि तरंग ऊर्जा दीवार में संचरण नहीं करेगी और तरंग वहां रुक भी नहीं सकती। तब तरंग ऊर्जा कहां जाएगी? ऐसी स्थिति में तरंग उल्ट दिशा में तार के अनुदिश गति करती है और हम कहते हैं कि तरंग परावर्तित हो गई है।

आपने किसी बड़े हॉल या पहाड़ियों में ध्वनि परावर्तन का अनुभव गूँज के रूप में अवश्य किया होगा। आपने किनारे से जल (समुद्र) तरंगों के परावर्तन को भी देखा होगा। मुँह देखने वाले शीशे में प्रकाश का परावर्तन तो सर्वसामान्य उदाहरण है। पराश्रव्य तरंगों का परावर्तन पृथ्वी के गर्त में पैट्रोलियम तेल और खनिजों की खोज, समुद्री यातायात तथा सोनार के प्रचलन के लिए उत्तरदायी है। विद्युत-चुंबकीय तरंगों का परावर्तन वायुयान संसूचना में रडार की कार्यप्रणाली का संचालन करता है। आयनोस्फ़ीयर द्वारा रेडियो तरंगों का परावर्तन ही एक स्थान से दूसरे स्थान पर संकेत परागमन संभव होता है तथा संचार साधनों में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

मान लीजिए की भिन्न-भिन्न प्रति इकाई संहति की दो डोर (या तार) आपस में जुड़ी हैं। आप इस बात से तो सहमत होंगे की इनकी परिसीमा न तो दृढ़ है और न ही दोनों माध्यमों के गुण समान हैं। तो आपतित तरंग का क्या होगा? ऐसी स्थिति में ऊर्जा का कुछ अंश दूसरी रस्सी (तार) में पारगत हो जाता है तथा शेष भाग पहली डोरी में वापस लौट जाता है। इसी प्रकार जब कोई तरंग दो माध्यमों के सीमान्त पृष्ठ पर पहुंचती है तो उसका कुछ अंश पहले माध्यम में परावर्तित हो जाता है तथा शेष भाग दूसरे माध्यम में पारगत हो जाता है। जब जल की गहराई अचानक बदल जाती है तो जल पृष्ठ पर संचरित तरंगे आंशिक रूप से परावर्तित होती हैं। हमारे वायुमंडल में आपतित दृश्य प्रकाश माध्यम के घनत्व में परिवर्तन के कारण आंशिक रूप से परावर्तित होता है। मानव शरीर में विभिन्न घनत्व के ऊत्तकों के अंतरापृष्ठों पर पराध्वनिक तरंगों के आंशिक परावर्तन के कारण अल्ट्रासाउंड की चिकित्सा निदान में महत्वपूर्ण भूमिका है।

क्या इसका तात्पर्य यह है कि तरंगें कभी भी पूर्ण रूप से परावर्तित नहीं होतीं। यदि यह सत्य होता तो हम लैंस की कार्यविधि कभी नहीं समझ सकते थे जो कि देखने की फ्रक्रिया और वातावरण से हमारे संबंध का मूल कारण है। आपने सूर्योदय और सूर्यास्त के समय सूर्य की छवि को देखा होगा। ऐसा वायुमंडल में प्रकाश के अपवर्तन के कारण होता है।

अनुभाग 7.2 तथा 7.3 में आप हाइगन्स संरचना और प्रतिबाधा संकल्पना का उपयोग कर देखेंगे कि जब कोई तरंग दो माध्यमों की सीमान्त पृष्ठ पर पहुंचती है तो इसका तरंगदैर्ध्य बदल जाता है परन्तु आवृत्ति अचर रहती है। लेकिन दैनिक जीवन में ऐसी अनेक स्थितियां हैं जहां तरंग की आवृत्ति भी बदल जाती है। इसे **डाप्लर प्रभाव** कहते हैं। इसे आप अनुभाग 7.5 में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- तरंगाग्र की व्याख्या कर सकेंगे
- किसी भी स्रोत के लिए तरंगाग्र की संरचना कर सकेंगे
- हाइगन्स संरचना का इस्तेमाल करते हुए परावर्तन और अपवर्तन की विवेचना कर सकेंगे
- परावर्तन और पारगमन आयाम गुणांकों को परिकलित कर सकेंगे
- जब स्रोत अथवा प्रेक्षक गति में हों तो ध्वनि की आभासी आवृत्ति की परिकलना कर सकेंगे।

7.2 तरंगाग्र संकल्पना तथा हाइगन्स संरचना

आइए जल की सतह पर होने वाले तरंग संचरण पर विचार करें। यदि आप अपनी अंगुली को बार-बार पानी में डालें तो आप देखेंगे कि शिखाओं और गर्त की माला सी निकलती रहती है। इसका अर्थ यह हुआ कि सभी दिशाओं में तरंगें संचरित होती हैं। किसी निश्चित समय पर गर्त या शिखा गोलाकार होती है। **सम-कला बिंदुओं के बिंदुपथ को तरंगाग्र कहते हैं।** तरंगाग्र की आकृति स्रोत पर निर्भर करती है। बिंदु स्रोत से उत्पन्न तरंग के तरंगाग्र गोलीय होते हैं। जल की-सतह जैसी द्विविम आकृति पर तरंगाग्र वृत्ताकार होते हैं। यदि कोई स्रोत लम्बी स्लिट के रूप में हो तो तरंगाग्र बेलनाकार होंगे। बिंदु अथवा स्लिट से अधिक दूरी पर तरंगाग्र समतल दिखाई देते हैं। तरंगाग्र की संरचना को समझने के लिए हम हाइगन्स संरचना का उपयोग करते हैं।

हाइगन्स का अनुकरण करते हुए हम निम्नलिखित कल्पनाएं करते हैं:

(i) तरंगाग्र का प्रत्येक बिंदु स्वयं तरंग स्रोत की भांति व्यवहार करता है तथा द्वितीयक तरंगिकाएं (secondary wavelets) निकालता है जो कि उस माध्यम में सभी दिशाओं में तरंग के वेग से आगे बढ़ते हैं।

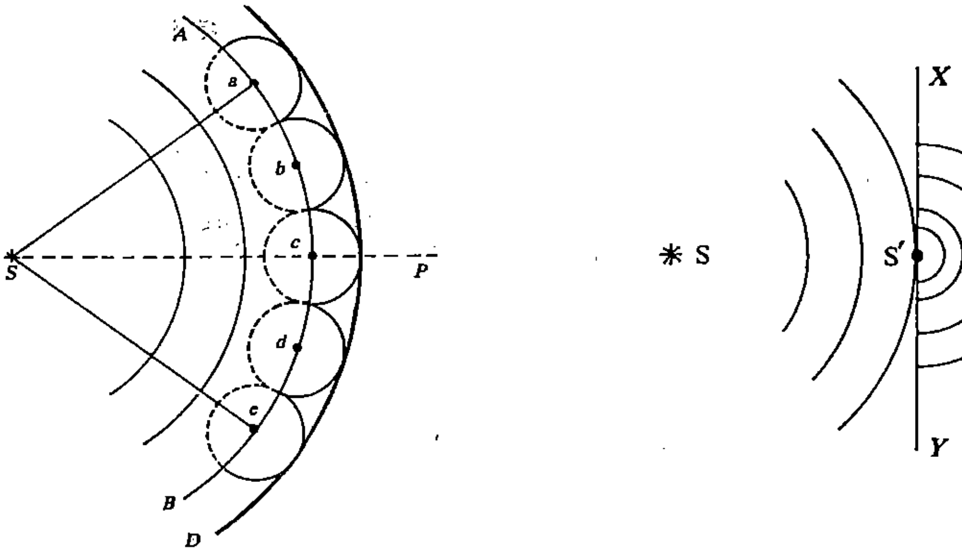
(ii) नया तरंगाग्र द्वितीयक तरंगिका के अग्राग्र आवरण से प्राप्त होता है।

(iii) समदैशिक (isotropic) माध्यम में तरंगें सभी दिशाओं में बराबर ऊर्जा संचरित करती हैं।

यदि S ध्वनि (या प्रकाश) का स्रोत हो, जैसा कि चित्र 7.1 में दिखाया गया है, तो t समय के पश्चात् AB समतल में माध्यम के सभी कण सम-कला में कंपन करते हैं क्योंकि ये सभी कण स्रोत से समान दूरी पर हैं और S से निर्गत कोई भी विक्षोभ उसी क्षण इन कणों तक पहुंच जाता है।

हाइगन्स संरचना के अनुसार AB प्राथमिक तरंगाग्र (primary wavefront) है। इस तरंगाग्र पर प्रत्येक बिंदु, जैसे कि a, b, c इत्यादि द्वितीयक स्रोत की भांति व्यवहार करते हैं। इन द्वितीयक स्रोतों से सभी दिशाओं में तरंगें संचरित होती हैं जिन्हें इन बिंदुओं के सापेक्ष वृत्त खींच कर दिखाया गया है। यदि किसी समय इनको स्पर्श करने वाले उभयनिष्ठ आवरण खींचा जाये तो इस प्रकार बना तरंगाग्र **द्वितीयक तरंगाग्र** कहलाता है।

संक्षेप में इसका अर्थ यह है कि स्रोत S से सभी दिशाओं में तरंगिकाएं निकलती हैं। इन तरंगिकाओं का आवरण प्राथमिक तरंगाग्र की भांति व्यवहार करता है। इस प्राथमिक तरंगाग्र



चित्र 7.1 (a) हाइगन्स तरंगाग्र की संरचना (b) द्वितीयक स्त्रोत का चित्रण

पर प्रत्येक बिंदु द्वितीयक तरंगिका के स्रोत का कार्य करता है। इन द्वितीयक तरंगिकाओं का आवरण द्वितीयक तरंगाग्र होता है। इस द्वितीयक तरंगाग्र के प्रत्येक बिंदु से पुनः तरंगिकाएं निकलती हैं जिनसे और तरंगाग्र बनते हैं। जब तक तरंग माध्यम में संचरित होती है यह प्रक्रिया चलती रहती है। (S से विकसित) विक्षोभ के संचरण की दिशा (SP) को किरण कहते हैं। किरण सदैव प्रसारी तरंगाग्र के लम्बवत होती है।

हाइगन्स की संरचना को समझने के लिए आप कल्पना करें कि बिंदु स्रोत एक खाली गोले के केन्द्र पर स्थित है। इस गोले की बाह्य सतह प्राथमिक तरंगाग्र की भांति कार्य करती है। यदि इस गोले को बड़ी त्रिज्या के एक अन्य खाली गोले में रख दिया जाए तो बड़े गोले की बाह्य सतह द्वितीयक तरंगाग्र की तरह व्यवहार करेगी। यदि इस गोले को फिर से और बड़ी त्रिज्या के गोले में बंद कर दिया जाए तब बाह्यतम गोले की सतह द्वितीयक तरंगाग्र बन जाती है। इसके लिए अंदर वाले गोले की सतह प्राथमिक तरंगाग्र का कार्य करती है। द्विविम में प्राथमिक तथा द्वितीयक तरंगाग्र संकेन्द्री वृत्त होते हैं, जिन्हें चित्र 7.1 (क) तथा 7.1 (ख) में दिखाया गया है।

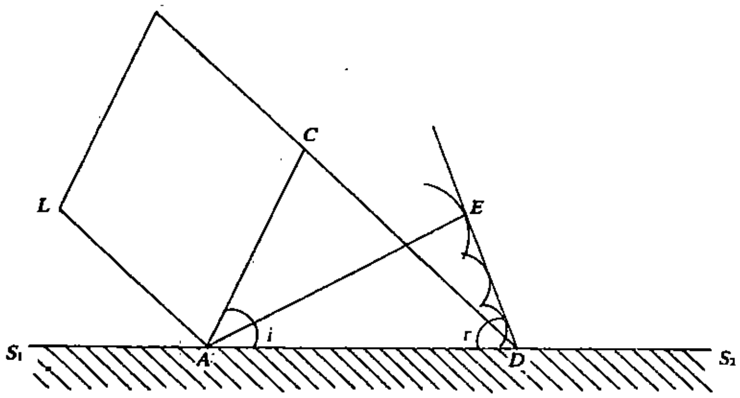
द्वितीयक स्रोतों के बनने की हाइगन्स की अवधारणा को चित्रात्मक रूप में भी समझा जा सकता है। यदि स्रोत से उत्सर्जित तरंगों के पथ में हम कोई स्क्रीन XY (जिसमें एक छोटा-सा छिद्र हो) को S' पर रख दें तो S' द्वितीयक स्रोत की भांति व्यवहार करता है (चित्र 7.1 ख)। इससे स्क्रीन के दूसरी ओर तरंगें उत्सर्जित होंगी। ये तरंगें S' से इस प्रकार फैलती हैं जैसे कि यह एक मूल स्रोत हो।

आप अपने स्कूल-पाठ्यक्रम में तरंगों के परावर्तन तथा अपवर्तन के बारे में पढ़ चुके हैं। जब वायु जैसे एक माध्यम में संचरित होती हुई तरंगें दूसरे माध्यम के सीमा पृष्ठ पर पहुंचती हैं तभी ये परिघटनाएं घटित होती हैं। मान लीजिए कि हम किसी रज्जु के एक सिरे को किसी दीवार से बांधते हैं और दूसरे सिरे को हिला कर एक स्पन्द (pulse) उत्पन्न करते हैं। आप यह देखेंगे कि स्पन्द सिरे से परावर्तित होती है। इसी प्रकार आप पानी के बेसिन में रिपल्स के परावर्तन का अध्ययन कर सकते हैं। आप यह जानकर आश्चर्य चकित होंगे कि प्रकाश सहित सभी तरंगों के लिए परावर्तन (अपवर्तन) के नियम एक ही हैं। आओ अब हम हाइगन्स के तरंग सिद्धांत के आधार पर तरंगों के परावर्तन तथा अपवर्तन का अध्ययन करें।

7.2.1 तरंगों का परावर्तन

चित्र 7.2 को देखें। इसमें LM समतल तरंगाग्र का वह भाग है जो चिकने परावर्तक पृष्ठ S_1S_2 की ओर बढ़ रहा है। इस तल पर यह तरंगाग्र सर्वप्रथम बिंदु A को स्पर्श करता है तथा इसके पश्चात् बिन्दु D की ओर उत्तरोत्तर बिन्दुओं पर आपतित होता है। यदि तरंग का वेग v हो तो तरंगाग्र पर स्थित बिन्दु M बिन्दु L की अपेक्षा परावर्तक तल पर $t = \frac{DC}{v}$ समय देर से पहुंचेगा। हाइगन्स के नियमानुसार परावर्तक तल पर प्रत्येक बिन्दु द्वितीयक तरंगिकाओं को उत्सर्जिक करता है। तथा इन तरंगिकाओं के आवरण से **परावर्तित तरंगाग्र** प्राप्त होता है। क्या आप परावर्तित तरंगाग्र का पता लगा सकते हैं? हम

देखते हैं कि जिस समय D विक्षोभित होता है उस समय A से उत्सर्जित तरंगिका $\frac{DC}{v}$ समय तक विकसित हो चुकी होती है तथा E तक पहुंच जाती है यानी $AE = DC$ इस तरंगिका को दर्शाने के लिए हम A को केन्द्र बिन्दु लेकर AE त्रिज्या की चाप लगाते हैं। इसी प्रकार हम A और D के मध्यवर्ती बिन्दुओं से भी कई अन्य वृत्त खींच सकते हैं। बिन्दु D से इन वृत्तों पर खींची गई स्पर्शज्या परावर्तित तरंगाग्र को परिभाषित करते हैं।



चित्र 7.2 : तरंग परावर्तन के लिए हाइगन्स की संरचना

चित्र 7.2 से यह स्पष्ट है कि Δs ACD तथा DEA सर्वांगसम हैं। अतः

$$\angle CAD = \angle ADE$$

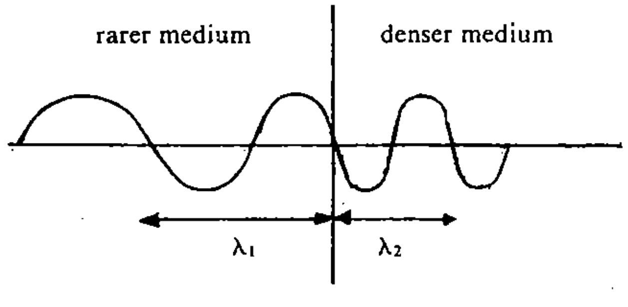
या $$\angle i = \angle r \qquad (7.1)$$

इसका अर्थ यह है कि आपतन कोण तथा परावर्तन कोण बराबर हैं। इसके अतिरिक्त आप यह भी देखेंगे कि आपतित तथा परावर्तित किरणें एवं आपतन बिन्दु पर अभिलंब कागज के तल में हैं।

इस संदर्भ में यह कहना आवश्यक है कि परावर्तित तरंगाग्र की कला में π का परिवर्तन हो जाता है। वास्तव में यह हर ऐसी गतिमय तरंग के लिए सत्य है जो विरल माध्यम (वायु) से सघन माध्यम (जल) के सीमान्त पृष्ठ पर परावर्तित होती है लेकिन इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता।

7.2.2 तरंगों का अपवर्तन

जब कोई तरंग दो माध्यमों की परिसीमा पर आपतित होती है तो इसका कुछ अंश परावर्तित हो जाता है तथा शेष भाग पारगत हो जाता है। इसका अध्ययन करने के लिए आप भिन्न-भिन्न प्रति इकाई लंबाई की संहति वाली एक मोटी तथा दूसरी पतली रज्जुओं को जोड़ दें। इकाई 6 में आप पढ़ चुके हैं कि किसी तरंग की चाल माध्यम के घनत्व के व्युत्क्रमानुपाती होती है। अर्थात् जब कोई तरंग विरल माध्यम से सघन माध्यम की ओर गति करती है तो उसकी चाल बढ़ जाती है परन्तु आवृत्ति वही रहती है। चित्र 7.3 में तरंग अपवर्तन को दिखाया गया है।



$\lambda_1 > \lambda_2$
$v_1 > v_2$

चित्र 7.3 : तरंग अपवर्तन में तरंग का तरंगदैर्ध्य परिवर्तन

मान लो कि किसी विरल माध्यम में ν आवृत्ति की तरंग की चाल तथा तरंगदैर्ध्य क्रमशः v_r एवं λ_r हैं। सघन माध्यम के सीमा पृष्ठ पर अपवर्तन के पश्चात् मान लीजिए कि इसकी चाल तथा तरंगदैर्घ्य क्रमशः v_d एवं λ_d हैं। गणितीय रूप से ये राशियां निम्न संबंध द्वारा जुड़ी हैं

$$\frac{v_r}{\lambda_r} = \frac{v_d}{\lambda_d} \qquad (7.2)$$

यह संबंध जल, वायु तथा रज्जुओं में तरंग संचरण के लिए एक समान मान्य है।

हाइगन्स के नियम के आधार पर आप अपवर्तन के नियमों को भी सत्यापित कर सकते हैं। लेकिन आप यह मानेंगे कि हाइगन्स की विधि मूलतः ज्यामितीय है और इसे तभी इस्तेमाल किया जा सकता है जब तरंग पार्थक्य पृष्ठ पर परावर्तित या अपवर्तित होती है। अब आप यह पूछ सकते हैं कि क्या हम इस विधि को भिन्न-भिन्न प्रति एकक लम्बाई की संहति की दो रज्जुओं में आंशिक परावर्तन तथा अपवर्तन के अध्ययन के लिए कर सकते हैं? यद्यपि सैद्धांतिक रूप में हम ऐसा कर तो सकते हैं परन्तु यह अध्ययन माध्यम प्रतिबाधा के पदों में करना अधिक सरल होता है। इसके लिए हम प्रायः परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांकों की परिकलना करते हैं। आओ अब इस परिकलना की विधि सीखें।

7.3 परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांक

इकाई 6 से आपको याद होगा कि हर माध्यम तरंग संचरण में प्रतिबाधा उत्पन्न करता है। यह प्रतिबाधा माध्यम के गुणों पर निर्भर करती है। आप यह जानना चाहेंगे कि माध्यमों की परिसीमा पर प्रतिबाधा के आकस्मिक परिवर्तन के कारण तरंगों की क्या अनुक्रिया होती है? इस रोचक प्रश्न का उत्तर पहले हम अनुप्रस्थ तरंग संचरण के लिए देंगे।

7.3.1 अनुप्रस्थ तरंगें

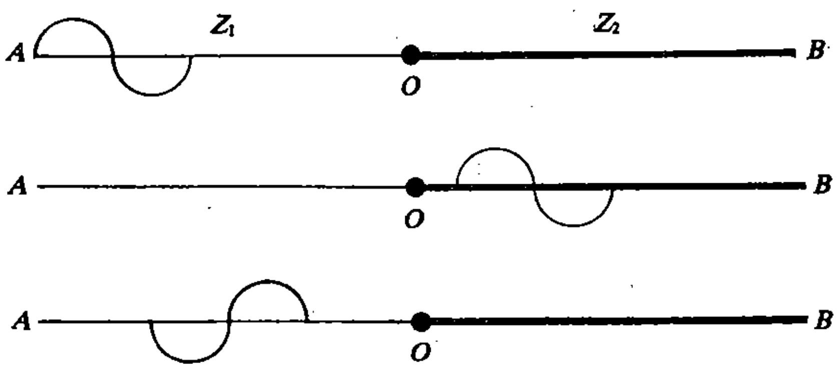
आइए असमान प्रति इकाई संहति की दो रज्जुओं AO तथा OB (जिन पर समान तनाव बल T लगा है) में तरंग संचरण का अध्ययन करें। मान लीजिए कि उनके अभिलक्षणिक प्रतिबाधाएं Z_1 तथा Z_2 हैं। धनात्मक x-दिशा में गतिमय तरंग बिन्दु O पर आंशिक रूप से परावर्तित हो जाती है तथा शेष भाग पारगत हो जाता है। आपतित, परावर्तित तथा पारगत तरंगों में कणों के विस्थापनों को निम्न व्यंजकों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है:

$$y_i(x, t) = a_i \sin(\omega_0 t - k_1 x) \qquad (7.3)$$

$$y_r(x, t) = a_r \sin(\omega_0 t + k_1 x) \qquad (7.4)$$

तथा

$$y_{tr}(x, t) = a_{trl} \sin(\omega_0 t - k_2 x) \qquad (7.5)$$



चित्र 7.4: असमान प्रति इकाई संहति की रज्जुओं में अनुप्रस्थ तरंगें

यहां विस्थापनों तथा आयामों के पदांक i, r तथा tr क्रमशः आपतित, परावर्तित तथा पारगत तरंगों को दर्शाते हैं। आप देखेंगे कि इन तरंगों की कोणीय आवृत्ति में कोई अन्तर नहीं आता। इसके अतिरिक्त आपतित तथा परावर्तित तरंगों को एक ही संचरण संख्या द्वारा निरुपित किया गया है परन्तु यह पारगत तरंग की संचरण संख्या से भिन्न है। क्या आप इसका कारण

जानते हैं? इसका कारण यह है कि माध्यम के घनत्व के परिवर्तन के कारण तरंग की चाल में परिवर्तन हो जाता है। आप यह भी देखेंगे कि हमने परावर्तित तरंग के लिए $k_1 x$ से पहले धनात्मक चिन्ह इस्तेमाल किया है। इसका कारण यह है कि यह तरंग ऋणात्मक x-दिशा में गति कर रही है।

परावर्तन तथा पारगमन नियतांकों को भौतिक अर्थ देने के लिए हमें सीमान्त प्रतिबंधों (boundary conditions) पर भी विचार करना होगा। *दो माध्यमों के परिसीमा पृष्ठ पर सत्यापित शर्तों को सीमान्त प्रतिबंध कहते हैं।* पारगत तरंगों के लिए कण विस्थापन तथा सीमापृष्ठ के एक ओर तनाव बल का अनुप्रस्थ घटक, आपतित तथा परावर्तित तरंगों के विस्थापनों एवं तनाव बल के अनुप्रस्थ घटकों के योग के बराबर है। अतः सीमान्त प्रतिबंध इस प्रकार हैं:

(i) $x = 0$ परिसीमा पृष्ठ के निकट दांईं तथा बांईं ओर कणों के विस्थापन समान होते हैं। इसका अर्थ यह है कि कणों के वेग $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial t}$ भी समान होंगे।

(ii) तनाव बल का अनुप्रस्थ घटक $- T \dfrac{\partial y\ (x,t)}{\partial x}$ भी परिसीमा पृष्ठ के सामीप्य दोनों ओर समान होते हैं। इन प्रतिबंधों से यह निष्कर्ष निकलता है कि

$$y_i(x,t)\Big|_{x=0} + y_r(x,t)\Big|_{x=0} = y_{tr}(x,t)\Big|_{x=0} \qquad (7.6)$$

तथा

$$-T\frac{\partial y_i}{\partial x}\Big|_{x=0} + T\frac{\partial y_r}{\partial x}\Big|_{x=0} = -T\frac{\partial y_{tr}}{\partial x}\Big|_{x=0} \qquad (7.7)$$

समीकरण (7.3) (7.4) तथा (7.5) के आधार पर हम समीकरण (7.6) में लिखे प्रतिबंध को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$a_i \sin \omega_0 t = a_{tr} \sin \omega_0 t$$

या

$$a_i + a_r = a_{tr} \qquad (7.8)$$

इसी प्रकार समीकरण (7.7) में अभिव्यक्त प्रतिबंध से हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है:

$$a_i k_1 T \cos \omega_0 t - a_r k_1 T \cos \omega_0 t = a_{tr} k_2 . T \cos \omega_0 t$$

या

$$k_1 T (a_i - a_r) = k_2 T a_{tr} \qquad (7.9)$$

हम जानते हैं कि

$$k_1 T = \frac{2\pi T}{\lambda_1} = \frac{2\pi\nu}{v_1} T = 2\pi\nu\, m_1 v_1 = 2\pi\nu Z_1$$

यहां Z_1 प्रथम माध्यम द्वारा तरंग संचरण को उत्पन्न प्रतिबाधा है। इस परिणाम पर पहुंचने के लिए हमने समीकरण (6.22) तथा (6.36) का उपयोग किया है। इसी प्रकार आप लिख सकते हैं कि

$$k_2 T = 2\pi\nu Z_2$$

यहां Z_2 दूसरे माध्यम द्वारा तरंग संचरण के लिए उत्पन्न प्रतिबाधा है।

इन परिणामों की सहायता से हम समीकरण (7.9) को निम्न रूप में लिख सकते हैं।

$$2\pi\nu Z_1 (a_i - a_r) = 2\pi\nu Z_2 a_{tr}$$

या

$$Z_1 (a_i - a_r) = Z_2 a_{tr} \qquad (7.10)$$

समीकरण (7.8) तथा (7.10) से हम $\dfrac{a_r}{a_i}$ तथा $\dfrac{a_{tr}}{a_i}$ तथा के अनुपातों की परिकलना कर

सकते हैं। इन अनुपातों से हमें परिसीमा पृष्ठ पर आपतित आयाम के परावर्तित तथा पारगत अंश प्राप्त होते हैं। इन अंशों को प्रायः परावर्तन तथा पारगमन आयाम नियतांक कहते हैं। इन्हें हम R_{12} तथा T_{12} द्वारा व्यक्त करेंगे:

$$R_{12} = \frac{a_r}{a_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \qquad (7.11)$$

तथा

$$T_{12} = \frac{a_{tr}}{a_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \qquad (7.12)$$

इन समीकरणों से हम देखते हैं कि परावर्तन तथा पारगमन आयाम नियतांक केवल माध्यमों की प्रतिबाधा पर ही निर्भर करते हैं। आइए अब हम समीकरण (7.11) तथा (7.12) के आशयों पर विचार करें:

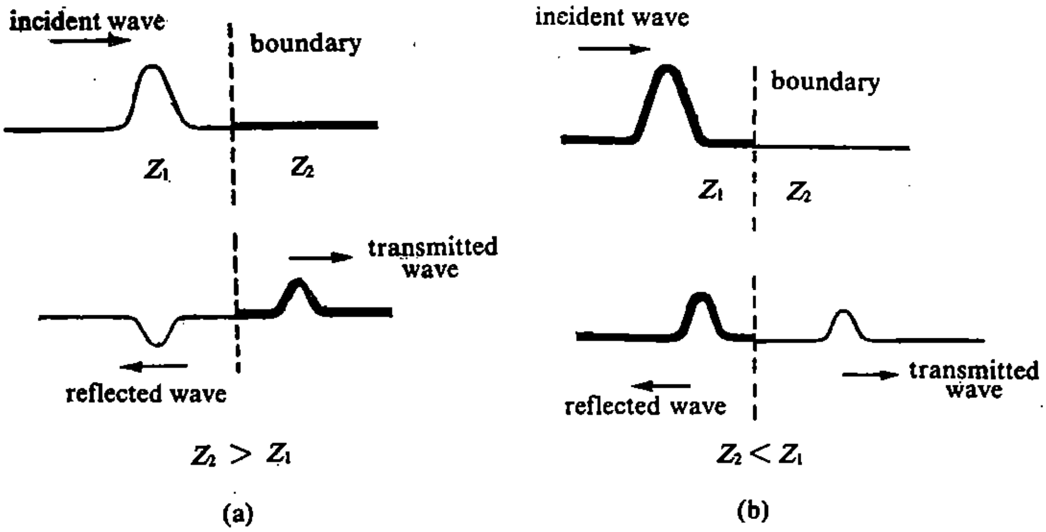
(i) मान लो कि रज्जु किसी दीवार से बंधी है। इसका अर्थ यह हुआ कि दूसरा माध्यम बहुत सघन है तथा $Z_2 = \infty$ इस स्थिति में $R_{12} = -1$ तथा $T_{12} = -0$. इस परिणाम का आशय यह है कि $a_r = -a_i$ *तथा* $a_{tr} = 0$, यानि परावर्तित तरंग का आयाम आपतित तरंग के आयाम के बराबर है तथा पारगत तरंग उत्सर्जित नहीं होती। अतः हम कह सकते हैं कि जब आपतित तरंग सघन माध्यम से परावर्तित होती है तो इसकी कला में π का परिवर्तन हो जाता है।

(ii) जब $Z_2 > Z_1$ होता है, अर्थात् दूसरी रज्जु (माध्यम) सघन है तब R_{12} ऋणात्मक ही रहेगा जिसका आशय यह है कि परिवर्तन के पश्चात् आपतित तरंग की कला में π का परिवर्तन तो होता है लेकिन आपतित किरण का आंशिक भाग परावर्तित तथा शेष भाग पारगत होता है।

(iii) जब $Z_2 < Z_1$ होता है तो R_{12} धनात्मक होगा। इसका अर्थ यह है कि परावर्तन के पश्चात् तरंग की कला में कोई परिवर्तन नहीं होता। इस स्थिति में भी आपतित तरंग परावर्तित तथा पारगत तरंगों में बंट जाती है।

(iv) जब $Z_1 = Z_2$ है तब $R_{12} = 0$ इसका आशय यह है कि कोई परावर्तित तरंग नहीं है। इस स्थिति में $T_{12} = 1$ तथा $a_{tr} = a_i$, यानि पारगत तरंग का आयाम आपतित तरंग के आयाम के बराबर है।

उपरोक्त (i)-(iii) कथनों से यह स्पष्ट हो जाता है कि जब विरल (कम प्रतिबाधा) माध्यम में गतिमय तरंग किसी सघन (अधिक प्रतिबाधा) के माध्यम की परिसीमा पर पहुंचती है तो परावर्तित तरंगों की कला में आपतित तरंग की अपेक्षा π का परिवर्तन हो जाता है। लेकिन यदि सघन माध्यम में गतिमय तरंग विरल माध्यम की परिसीमा पर पहुंचती है तो आपतित तरंग की कला में कोई परिवर्तन नहीं होता। इसके अतिरिक्त आप यह भी देखेंगे कि T_{12} सदैव धनात्मक रहता है जिससे यह पता चलता है कि पारगत तरंग की कला में कभी कोई परिवर्तन नहीं आता। इन परिणामों को चित्र 7.5 में दिखाया गया है।



चित्र 7.5: परावर्तित एवं पारगत तरंगें जब आपतित तरंग (a) न्यून प्रतिबाधा माध्यम से प्रबल प्रतिबाधा माध्यम में संचरित होती है तथा (b) विलोम स्थिति में।

समीकरण (6.36 a, b) से आपको ज्ञात है कि यदि तनाव निश्चित रहे तो सघन माध्यम में तरंग वेग कम होता है। इस परिणाम की सहायता से क्या आप उपर्युक्त विवेचन और अनुभाग 7.2.1 में दिए गए विवेचन में कोई तालमेल बैठा सकते हैं? क्या ये दोनों स्थितियां संगत नहीं हैं? इससे यह भी स्पष्ट हो जाता है कि ध्वनि तरंग, जल तरंग, रज्जु पर संचरित तरंग तथा प्रकाश तरंग एक ही सिद्धांत का पालन क्यों करती हैं?

कथन (iv) से हम यह भी देखते हैं कि यदि $Z_1 = Z_2$ हो अर्थात् दोनों रज्जु एक ही पदार्थ की बनी हैं तो माध्यमों के बीच कोई परिसीमा ही नहीं होती। यही कारण है कि इस दशा में कोई परावर्तन नहीं होता।

बोध प्रश्न 1

m_1 तथा m_2 (= 4 m_1) रेखीय घनत्व की दो रज्जु आपस में जुड़ी हैं तथा उन पर समान तनाव बल लगा है। अनुप्रस्थ तरंग के परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांक परिकलित कीजिए।

7.3.2 अनुदैर्ध्य तरंगें

अनुदैर्ध्य तरंगों के परावर्तन तथा पारगमन का अध्ययन करने के लिए आप अनुप्रस्थ तरंगों के लिए प्रयुक्त विधि अपना सकते हैं। मान लो कि कोई तरंग Z_1 तथा Z_2 प्रतिबाधाओं वाले माध्यमों की परिसीमा पर आपतित होती हैं। अनुप्रस्थ तरंगों की भांति आप आपतित, परावर्तित तथा पारगत अनुदैर्ध्य तरंगों के विस्थापनों को समीकरण (7.3), (7.4) तथा (7.5) द्वारा अभिव्यक्त कर सकते हैं। अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए सीमान्त प्रतिबन्ध इस प्रकार है:

(i) परिसीमा पृष्ठ पर कण-विस्थापन $\psi(x, t)$ अविरत रहता है। अर्थात् परिसीमा के सामीप्य दोनों ओर $\psi(x, t)$ के मान एक ही हैं।

(ii) परिसीमा के सामीप्य दोनों ओर आधिक्य दाब भी समान हैं।

उपरोक्त सीमान्त प्रतिबंधों की सहायता से आप सिद्ध कर सकते हैं कि परावर्तित तथा पारगत अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए भी अनुप्रस्थ तरंगों की भांति आयाम गुणांक समीकरण (7.11) तथा (7.12) द्वारा व्यक्त किये जा सकते हैं (अंत के प्रश्न 5 में आपको ऐसा करने के लिए कहा गया है।

7.4 परावर्तन तथा पारगमन ऊर्जा गुणांक

हम जानते हैं कि प्रगामी तरंगें एक स्थान से दूसरे स्थान पर ऊर्जा स्थानांतरण करती हैं। अतः एक रोचक बात यह है कि जब कोई तरंग भिन्न-भिन्न प्रतिबाधाओं के माध्यमों की परिसीमा पर पहुंचती है तो उसकी ऊर्जा कैसे प्रभावित होती है? पहले की भांति हम अनुदैर्ध्य तथा अनुप्रस्थ तरंगों पर ही विचार करेंगे।

इकाई 6 में आप पढ़ चुके हैं कि जब m प्रति इकाई लंबाई संहति की कोई तार आयाम a तथा कोणीय आवृत्ति ω_0 से कम्पन करती है तब उसकी कुल ऊर्जा

$$E = \frac{1}{2}\, m a^2 \omega_0^2 \tag{7.13}$$

यदि तरंग की चाल v है तो रज्जु में संचरित ऊर्जा की दर ज्ञात करने के लिए हम ऊर्जा के व्यंजक को तरंग वेग से गुणा करते हैं। इस प्रकार हमें यह व्यंजक प्राप्त होता है:

$$P = \frac{1}{2}\, m a^2 \omega_0^2 v$$

अब अनुभाग 7.3.1 में विवेचित अनुप्रस्थ तरंगों पर विचार करें। आपतित तरंगों द्वारा परिसीमा पृष्ठ पर पहुंचायी गई ऊर्जा की दर

$$P_i = \frac{1}{2}\, m_1 a_i^2 v_1 \omega_0^2 = \frac{1}{2}\, Z_1 a_i^2 \omega_0^2 \tag{7.14}$$

इसी प्रकार, परावर्तित तथा पारगत तरंगों द्वारा परिसीमा पृष्ठ से ऊर्जा संचारित करने की दरें

$$P_r = \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 a_r^2 \qquad (7.15)$$

तथा

$$P_{tr} = \frac{1}{2} Z_2 \omega_0^2 a_{tr}^2 \qquad (7.16)$$

समीकरण (7.8) तथा (7.10) की सहायता से हम a_r तथा a_{tr} को a_i के पदों में लिख सकते हैं। परिणामी व्यंजक को समीकरण (7.15) तथा (7.16) में प्रतिस्थापित करने पर आप देखेंगे कि

$$P_r = \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 - Z_2} \right)^3 a_i^2 \qquad (7.17)$$

तथा

$$P_{tr} = \frac{1}{2} Z_2 \omega_0^2 \left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \right)^2 a_i^2 \qquad (7.18)$$

इन परिणामों को परावर्तन तथा पारगमन ऊर्जा गुणांक R_E तथा T_E ज्ञात करने के लिए इस्तेमाल किया जा सकता है :

$$R_E = \frac{\text{सीमांत पृष्ठ पर ऊर्जा के परावर्तन की दर}}{\text{सीमांत पृष्ठ पर आपतित ऊर्जा की दर}} = \frac{P_r}{P_i} = \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \qquad (7.19)$$

तथा

$$T_E = \frac{\text{सीमांत पृष्ठ पर परागत ऊर्जा दर}}{\text{सीमांत पृष्ठ पर आपतित ऊर्जा दर}} = \frac{P_{tr}}{P_i} = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \qquad (7.20)$$

समीकरण (7.19) से हम देखते हैं कि यदि Z_1 और Z_2 बराबर हों (यह तभी संभव है जब $T_1 m_1 = T_2 m_2$ तो $R_E = 0$ होगा। अर्थात् प्रतिबाधा सुमेलन होने पर ऊर्जा परावर्तन नहीं होता। प्रतिबाधा सुमेलन ऊर्जा पारगमन में बहुत महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। दूर दराज तक ऊर्जा ले जाने वाली केबिलों को भलीभांति सुमेलित किया जाता है। अन्यथा परावर्तन के कारण ऊर्जा की काफी मात्रा व्यर्थ नष्ट हो जाएगी। इसी प्रकार जब हम ध्वनि ऊर्जा को लाउडस्पीकर से कमरे में स्थानांतरित करना चाहते हैं तब भी हम प्रतिबाधा सुमेलन करते हैं। जब प्रकाश तरंगें वायु से कांच के लैंस में गति करती हैं तो भी हम यह चाहते हैं कि उनमें परावर्तन न हो क्योंकि इससे तीव्रता कम हो जाती है।

बोध प्रश्न 2

सिद्ध कीजिए कि जब कोई अनुप्रस्थ तरंग Z_1 तथा Z_2 अभिलक्षणिक प्रतिबाधाओं के दो माध्यमों के परिसीमा पृष्ठ पर पहुंचती है तो ऊर्जा संरक्षित रहती है।

अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए हम ऊर्जा स्थानांतरण प्रायः उनकी तीव्रता के पदों में परिकलित करते हैं। इंकाई 6 से आपको याद होगा कि किसी गैसीय माध्यम में ध्वनि तरंगों की तीव्रता

$$I = \frac{1}{2} \rho a^2 \omega_0^2 v = 2\pi^2 \nu^2 a^2 Z$$

यहां Z माध्यम प्रतिबाधा है। अतः आपतित, परावर्तित, तथा पारगत तरंगों की तीव्रताएं आप निम्न व्यंजकों द्वारा लिख सकते हैं:

$$I_i = 2\pi^2 \nu^2 a_i^2 Z_1 \qquad (7.22)$$

$$I_r = 2\pi^2 \nu^2 a_r^2 Z_1 \qquad (7.23)$$

तथा

$$I_{tr} = 2\pi^2 \nu^2 a_{tr}^2 Z_2 \qquad (7.24)$$

इन समीकरणों की सहायता से आप सरलतापूर्वक सिद्ध कर सकते हैं कि परावर्तन तथा पारगमन ऊर्जा गुणांक

$$R_E = \frac{I_r}{I_i} = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 \quad (7.25)$$

तथा

$$T_E = \frac{I_{tr}}{I_i} = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \quad (7.26)$$

आप देखेंगे कि ये संबंध वही हैं जो कि अनुप्रस्थ तरंगों के लिए प्राप्त हुए थे। इसका अर्थ यह हुआ कि अनुप्रस्थ तरंगों वाले निष्कर्ष अनुदैर्घ्य तरंगों के लिए भी मान्य हैं।

बोध प्रश्न 3

ध्वनि तरंगें जल-स्टील सीमांत पृष्ठ पर आपतित होती है। सिद्ध कीजिए कि ऊर्जा का 86% अंश परावर्तित होता है। जल तथा स्टील क्रमशः 1.43×10^6 Nm^{-3}s तथा 3.9×10^7 Nm^{-3} प्रतिबाधायें उत्पन्न करते हैं।

7.5 डाप्लर का सिद्धांत

अब तक हमने केवल ऐसी स्थितियों की विवेचना की जिनमें तरंगदैर्ध्य तथा तरंग वेग में ही परिवर्तन होता है और आवृत्ति अचर रहती है। क्या आप ऐसी किसी स्थिति से परिचित हैं जहां तरंग की आवृत्ति परिवर्तित होती है या परिवर्तित होती हुई दिखाई पड़ती है? इस प्रसंग में हम आपको एक घटना बताते हैं: प्रसिद्ध भौतिक वैज्ञानिक डब्ल्यू.एल. ब्रैग एक बार कार चलाकर ले जा रहे थे और उन्होंने लाल बत्ती रहते चौराहा पार कर लिया। इसके लिए उनका चालान कर दिया गया। ब्रैग का मैजिस्ट्रेट से जो वार्तालाप हुआ उसका वर्णन इस प्रकार है:

मैजिस्ट्रेट : आपने लाल बत्ती क्यों पार की?

ब्रैग : श्रीमान मुझे तो हरी बत्ती दिखाई दी थी।

मैजिस्ट्रेट : आपको अपनी गाड़ी की किस चाल पर लाल बत्ती हरी दिखाई देगी?

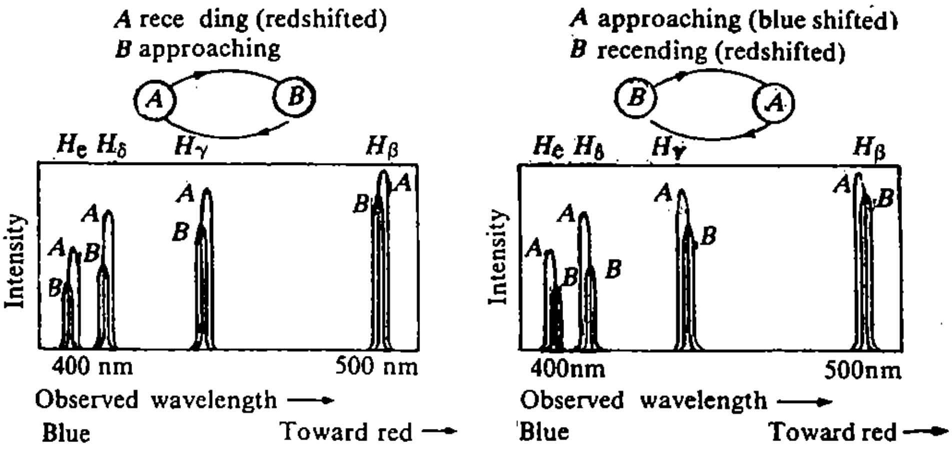
ब्रैग : (कुछ परिकलन के बाद) जब गाड़ी दो अरब किलोमीटर प्रति घंटे की चाल से चल रही हो।

मैजिस्ट्रेट : अच्छा! तो आपको अंधाधुंध गाड़ी चलाने के लिए जुर्माना किया जाता है।

इस वार्तालाप से यह पता चलता है कि प्रेक्षक तथा स्रोत के वेग के कारण आवृत्ति में परिवर्तन आ जाता है। आप सभी ने चलती हुई रेल की सीटी तो सुनी होगी। जब रेल आपकी तरफ आती है तो आपको कैसा महसूस होता है? ध्वनि का तारत्व (pitch) बढ़ता हुआ महसूस होता है परन्तु जैसे/जैसे इंजन हमसे दूर होता जाता है तारत्व घटता हुआ प्रतीत होता है। इसी प्रकार आपने राजमार्ग पर खड़े होकर अपनी ओर आते हुए सामान से भरे ट्रक से उच्च तारत्व की आवाज "आ आ आ आ" सुनी होगी। जैसे-जैसे ट्रक आपसे दूर होता जाता है तो उसका तारत्व अकस्मात् कम होने लगता है और आवाज "आ आ ई ई ऊ ऊ" के रूप में सुनाई पड़ती है। प्रेक्षक तथा स्रोत में सापेक्ष गति के कारण आवृत्ति के परिवर्तन के आभास को डाप्लर प्रभाव कहते हैं।

जब ध्वनि स्रोत, श्रोता की ओर आता है या श्रोता स्रोत की ओर जाता है या दोनों एक दूसरे के निकट आते हैं तो आभासी आवृत्ति ध्वनि स्रोत से उत्पन्न वास्तविक आवृत्ति से अधिक प्रतीत होती है। इसी प्रकार जब ध्वनि स्रोत, श्रोता से दूर जाता है या श्रोता स्रोत से दूर जाता है या दोनों एक दूसरे से दूर जाते हैं तो आभासी आवृत्ति ध्वनि के स्रोत से उत्पन्न आवृत्ति से कम प्रतीत होती है।

डाप्लर प्रभाव के बहुत से उपयोग हैं। शरीर के गतिमय तंतुओं द्वारा अल्ट्रासाउंड परावर्तन में हुए डाप्लर विस्थापन से खून के बहाव को मापा जाता है। इसे प्रायः प्रसुति चिकित्सक गर्भ में शिशु के दिल की धड़कनों की जानकारी के लिए इस्तेमाल करते हैं। क्या आप जानते हैं कि यह कैसे होता है? जैसे ही दिल की मांस पेशियों में धड़कन होती है परावर्तित अल्ट्रासाउंड



चित्र 7.6: द्वितारा में हाइड्रोजन के अणुओं द्वारा उत्सर्जित प्रकाश तरंग ब्रह्मांड गति की द्योतक है।

(पराध्वनिक) तरंग आपतित तरंगों के सापेक्ष डाप्लर विस्थापित हो जाती है। इसी प्रकार सोनार में भी जहाज के सापेक्ष पनडुब्बी का वेग ज्ञात करने के लिए डाप्लर प्रभाव का इस्तेमाल किया जाता है।

विद्युत-चुंबकीय तरंगों में भी डाप्लर प्रभाव दृष्टिगोचर होता है। वायुयान संचालन में रडार की कार्य प्रणाली उच्च आवृत्ति की रेडियों तरंगों के गतिमय वायुयान से परावर्तन के कारण होने वाले डाप्लर विस्थापन पर आधारित होती है। तारों के प्रकाश के डाप्लर विस्थापन से ही तारकीय गति का अध्ययन संभव हो पाया है। जब हम किसी स्पेक्ट्रोग्राफ में तारों के प्रकाश को देखते हैं तो स्पेक्ट्रम में हमें कई लाइनें दिखाई पड़ती हैं। तुलना करने पर पता चलता है कि ये लाइने उसी तत्व की संगत रेखाओं के सापेक्ष थोड़ी सी विस्थापित होती हैं। यह विस्थापन प्राय: स्पेक्ट्रम के लाल-सिरे की ओर होता है तथा इसका कारण तारे का दिष्ट रेखा के अनुदिश गतिमान होना है। चित्र 7.6 में द्वितारा निकाय में हाइड्रोजन अणु के लिए डाप्लर विस्थापन दिखाया गया है। (आकाश गंगाओं में प्रकाश का डाप्लर विस्थापन इस बात का प्रमाण है कि हमारा ब्रह्मांड फैल रहा है।)

ध्वनि तरंगों के लिए डाप्लर प्रभाव का अध्ययन करने के लिए हमें निम्नलिखित परिस्थितियों पर विचार करना होगा:

(i) क्या स्रोत गतिमान है या प्रेक्षक गतिमान है अथवा दोनों गति में हैं?

(ii) क्या गति स्रोत तथा श्रोता की दिष्ट दिशा में है या उसके सापेक्ष किसी कोण पर?

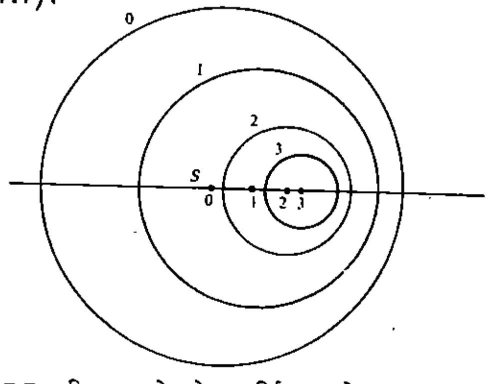
(iii) क्या माध्यम का वेग ध्वनि संचरण की दिशा में है अथवा उसके विपरीत?

(iv) क्या स्रोत का वेग ध्वनि के वेग से अधिक है?

अब हम इनमें से कुछ सम्भावनाओं पर विचार करेंगे।

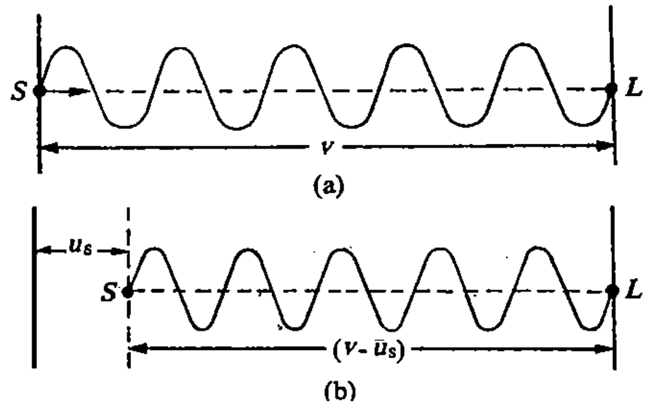
7.5.1 ध्वनि स्रोत गतिमान तथा प्रेक्षक स्थिर

मान लीजिए कि स्रोत ν आवृत्ति तथा λ तरंगदैर्ध्य की ध्वनि उत्पन्न कर रहा है। इस स्रोत से निकली ध्वनि तरंगें गोलीय तरंगाग्र के रूप में माध्यम में अग्रसर होती हैं। जब स्रोत का वेग ध्वनि के वेग से कम होता है तो तरंगाग्र एक दूसरे के अन्दर निहित रहते हैं। उत्तरोत्तर तरंगाग्रों के बीच की दूरी गति के अनुदिश न्यूनतम तथा उसके विपरीत दिशा में अधिकतम होती है (चित्र 7.7)।



चित्र 7.7: गतिमान स्त्रोत से उत्सर्जित उत्तरोतर तरंगाग्र

इसी स्थिति को तरंग संख्या के रूप में चित्र 7.8 में निरूपित किया गया है। हम देखते हैं कि यदि उत्पन्न ध्वनि की चाल v है और यदि स्रोत स्थिर हो तो एक सैकिंड में तरंगें v लम्बाई ग्रहण करती हैं। एक सैकिंड के पश्चात् जब स्रोत श्रोता की ओर u_s दूरी तक चला जाता है तो वही तरंगें $(v-u_s)$ लंबाई में संकुचित हो जाती हैं, जैसा कि चित्र 7.8 में दिखाया गया है।



चित्र 7.8: गतिमान स्त्रोत होने पर तरंगों का सघन

परिवर्तित तरंगदैर्ध्य

$$\lambda' = \frac{v-u_s}{\nu}$$

अतः श्रोता द्वारा सुनी गई आभासी आवृत्ति

$$\nu' = \frac{v}{\lambda'} = \nu \frac{v}{v-u_s} \qquad (7.27)$$

यदि स्रोत, श्रोता से दूर जाता है (ध्वनि संचरण की दिशा के विपरीत) तब u_s ऋणात्मक होगा। ऐसी स्थिति में समीकरण (7.27) निम्नलिखित रूप ले लेता है :

$$\nu' = \nu \frac{v}{v-u_s} \qquad (7.28)$$

बोध प्रश्न 4

एक मनुष्य रेल की पटरी के समीप खड़ा है। राजधानी एक्सप्रैस उसकी ओर 70 कि.मी. प्रति घंटा की चाल से आ रही है। उस मनुष्य को सीटी की आभासी आवृत्ति 700 Hz प्रतीत होती है। सीटी की वास्तविक आवृत्ति परिकलित कीजिए। वायु में ध्वनि की चाल 350 ms^{-1} है।

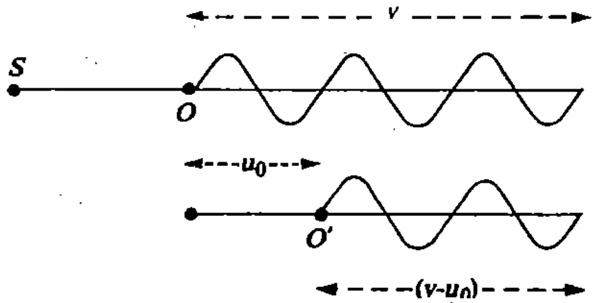
7.5,2 ध्वनि स्रोत स्थिर तथा प्रेक्षक गतिमान

यदि प्रेक्षक स्थिर है तो उसके पास से गुजरती हुई तरंगों के खंड की लम्बाई v होगी तथा उसमें v तरंगें होंगी। लेकिन यदि प्रेक्षक u_0 चाल से गति करता है तो एक सैकिंड के बाद वह L पर होगा तथा उसे लगेगा कि एक सैकिंड में उसके पास से $v-u_0$ लंबाई के खंड में निहित तरंगें गुजरेंगी। अतः उसके लिए आभासी आवृत्ति

$$\nu' = \frac{v-u_0}{\lambda} = \nu \frac{v-u_0}{v} \qquad (7.29)$$

यदि श्रोता, स्रोत की ओर गति करता है तो u_0 ऋणात्मक होगा तथा आभासी आवृत्ति का व्यंजक निम्न रूप ले लेता है:

$$\nu' = \nu \frac{v-u_0}{v} \qquad (7.30)$$



चित्र 7.9: प्रेक्षक गतिमान हो तो तरंग प्राप्ति

7.5.3 ध्वनि स्रोत तथा प्रेक्षक दोनों गतिमान

जब स्रोत तथा श्रोता दोनों गतिमान हों तथा एक दूसरे के निकट आ रहे हों तब हमें समीकरण (7.27) तथा (7.29) के परिणामों को संयोजित करना होगा। स्रोत की गति के कारण तरंगदैर्ध्य में परिवर्तन हो जाता है। श्रोता की गति के कारण तरंगों की संख्या में परिवर्तन हो जाता है। ऐसी स्थिति में आभासी आवृत्ति

$$\nu' = \frac{\text{तरंगों के खंड की लंबाई}}{\text{घटी हुई तरंगदैर्घ्य}} = \left(\frac{v-u_0}{v-u_s}\right) \qquad (7.31)$$

अब आप यह पूछ सकते हैं : जब स्रोत श्रोता के निकट या श्रोता, स्रोत की ओर समान वेग से आते हैं तो क्या आभासी आवृत्ति में कोई परिवर्तन होता है? समीकरण (7.31) से हमें पता चलता है कि इन स्थितियों में आभासी आवृत्ति भिन्न होगी।

विद्युत-चुंबकीय तरंगों के लिए समीकरण (7.31) को संसोधित करना पड़ता है। ध्वनि के लिए u_0 तथा u_s को माध्यम के सापेक्ष मापा जाता है। इसका कारण यह है कि माध्यम हीं तरंग वेग के मान को निश्चित करता है। लेकिन विद्युत-चुंबकीय तरंगों के संचरण के लिए माध्यम की आवश्यकता ही नहीं होती तथा इनका वेग स्रोत अथवा श्रोता के सापेक्ष सदैव समान रहता है। अतः इन तरंगों के लिए हमें स्रोत तथा श्रोता की सापेक्ष गति पर ही विचार करना होगा। यदि श्रोता के सापेक्ष स्रोत की चाल u_s हो तथा $u_s << v$ हो तो समीकरण (7.31) को इस प्रकार भी लिख सकते हैं:

$$\nu' = \nu\left(\frac{v}{v-u_s}\right)$$

$$= \nu\left(1-\frac{u_s}{v}\right)^{-1} \qquad (7.32)$$

द्विपद विस्तार करने पर तथा (u_s/v) में प्रथम श्रेणी के पदों को ही रख कर आभासी आवृत्ति के लिए हमें निम्न व्यंजक प्राप्त होता है:

$$\nu' = \nu\left(1-\frac{u_s}{v}\right) \qquad (7.33)$$

वायुयान संचालन प्रणाली में हम u_s को हवाई जहाज के उपगमन वेग (approach velocity) से दुगुना लेते हैं। इसका कारण यह है कि रडार द्वारा भेजी गई विद्युत-चुंबकीय तरंगें वायुयान द्वारा परावर्तित होकर पुनः रडार तक पहुंचती हैं।

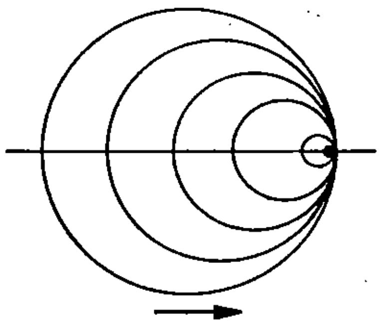
बोध प्रश्न 5

कोई स्थिर प्रेक्षक देखता है कि एक तारे से उत्सर्जित 4000 Å की स्पैक्ट्रमी रेखा अपनी सामान्य स्थिति में लाल-सिरे की ओर 100 Å से स्थनांतरित हो जाती है। दृष्टि रेखा के अनुदिश तारे की चाल की परिकलना कीजिए। प्रकाश की चाल = $3 \times 10^8 ms^{-1}$.

7.6 प्रघाती तरंगें

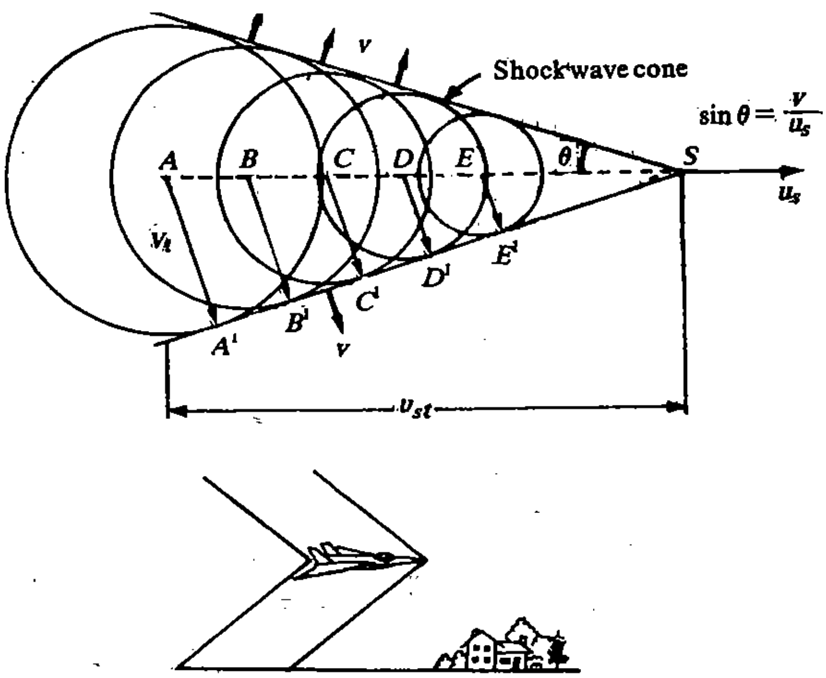
अभी तक हमने केवल ऐसी स्थितियों पर विचार किया है जहां ध्वनि का वेग स्रोत के वेग से अधिक होता है। समीकरण 7.31 से यह पता चलता है कि जैसे-जैसे u_s का मान बढ़ाता है डाप्लर विस्थापित आवृत्ति भी बढ़ाती जाती है तथा $u_s = v$ पर तो आपसारित ही हो जाती है। इसका क्या अर्थ है? जब स्रोत और तरंग चाल समान होते हैं तब अग्र दिशा में उत्सर्जित तरंग-शिखर स्रोत के सामने बड़े आयाम के रूप में एकत्र हो जाते हैं, जैसा कि चित्र 7.10 में दिखाया गया है।

अब आप जापना चाहेंगे कि जब पराध्वनिक वायुयान जैसे स्रोत का वेग ध्वनि तरंगों की गति से अधिक हो जाता है तब होता है? इस प्रश्न का उत्तर जानने के लिए आइए चित्र 7.7 जैसे तरंग - चित्राम बनायें।



चित्र 7.10: स्त्रोत और तरंग चाल समान होने पर तरंगों का पुंज संचन

कल्पना कीजिए कि स्रोत $t = 0$ पर बिंदु A पर है। t समय के बाद A पर उत्सर्जित तरंगें vt त्रिज्या के गोले पर होंगी। चूंकि $u_s > v$, स्रोत द्वारा तय की गई दूरी AS ध्वनि तरंगों द्वारा तय की गई दूरी से अधिक है। अतः उत्तरोत्तर बिन्दुओं B, C, D, E आदि पर उत्सर्जित तरंगें रेखा $A'S$ पर होंगी तथा यहां वृत्त सर्वाधिक संकुचित होते हैं। इस प्रकार ध्वनि तरंगें एक शंकु, जिसका आधा कोण $\sin\theta = \frac{V_s}{u}$ है, के अन्दर एकत्र हो जाती हैं जैसा कि चित्र 7.11 में दिखाया गया है। इस शंकु के बाहर कोई ध्वनि तरंगें



चित्र 7.11: (a) ध्वनि वेग से तेज चाल से गतिमान स्त्रोत द्वारा जनित प्रघाती तरंगें
(b) पराध्वनिक वायुमान द्वारा उत्पन्न किया गया ध्वनि बून

नहीं होती। ध्वनि तरंगों का वेग शंकु की सतह के लम्बवत होता है। जब यह शंकु प्रेक्षक तक पहुंचता है तब उससे अचानक एक बड़े आयाम की तरंग, जिसे **प्रघाती तरंग** कहते हैं, के आगमन का पता लगता है। पराध्वनिक वायुयान द्वारा उत्पन्न की गई प्रघाती तरंगों को **ध्वनि बूम** भी कहते हैं क्योंकि इसमें दो मुख्य प्रघाताग्र बनते हैं। एक वायुयान के मुख पर तथा दूसरे इसकी पूंछ पर होता है जैसा कि चित्र 7.11 में दिखाया गया है। प्रबल तीव्रता का बूम खिड़की के शीशों तक को तोड सकता है या किसी भवन को नुकसान भी पहुंचा सकता है।

प्रघाती तरंगें एक से बड़ी मैक संख्या वाले गतिमय स्रोत द्वारा रिफिल कुण्ड में भी उत्पन्न हो सकती हैं। यदि कोई नौका तरंगों की चाल से तेज चलती है तो भी आप प्रघाती तरंगें बनती हुई देख सकते हैं।

7.7 सारांश

- सम-कला बिंदुओं को जोड़ने वाले रेखा पथ को तरंगाग्र कहते हैं। तरंगाग्र का आकार स्रोत की प्रकृति पर निर्भर करता है।
- हाइगन्स के अनुसार तरंगाग्र पर प्रत्येक बिंदु द्वितीयक तरंगिका के नये स्रोत के रूप में कार्य करता है। ये तरंगिकायें माध्यम में तरंग की चाल से सभी दिशाओं में गति करती हैं।
- जब एक माध्यम में संचरित तरंगें भिन्न प्रतिबाधा वाले दूसरे माध्यम के परिसीमा पृष्ठ पर पहुंचती हैं तो इनका कुछ अंश परावर्तित तथा शेष भाग पारगत हो जाता है। इनके परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांक निम्न व्यंजकों द्वारा व्यक्त किये जाते हैं:

$$R_{12} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

तथा

$$T_{12} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

- जब कम प्रतिबाधा के माध्यम में गतिमान तरंग उच्च प्रतिबाधा वाले माध्यम के सीमान्त पृष्ठ पर परावर्तित होती है तब उसकी कला में π का परिवर्तन होता है।
- ध्वनि तरंगों के स्रोत तथा प्रेक्षक (श्रोता) के बीच सापेक्ष गति के कारण ध्वनि की आभासी आवृत्ति वास्तविक आवृत्ति से भिन्न होती है। इसे **डाप्लर प्रभाव** कहते हैं। डाप्लर विस्थापित आवृत्ति (जब प्रेक्षक तथा स्रोत एक दूसरे के निकट आते हैं) निम्न व्यंजक द्वारा व्यक्त की जाती है:

$$\nu' = \nu \frac{v - u_0}{v - u_s}$$

7.8 अंत में कुछ प्रश्न

1. हाइगन्स संरचना के आधार पर सिद्ध कीजिए की

$$\mu_{12} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin_i}{\sin_r}$$

2. वायु में संचरित एक ध्वनि तरंग पानी की सतह पर लम्बवत् आपतित होती है। ध्वनि तरंग के परागत और आपतित आयामों के अनुपात की गणना कीजिए। ρ = 1.29 kg m एवं वायु तथा जल में ध्वनि की चाल क्रमशः 350 ms^{-1} तथा 1500 ms^{-1} हैं।

3. कोई रस्सी एक साथ लिपटी हुई एक जैसी कई लरों से बनी एक रस्सी किसी जगह से घिस जाती है तथा केवल उसकी एक लर रह जाती है (चित्र 7.12) जब रस्सी पर बल लगता है तो उसमें संचरित 1.0 cm आयाम की तरंग एक लर की रस्सी में 0.45 cm आयाम की तरंग के रूप में परावर्तित होती है। रस्सी में कुल कितनी लरें हैं?

चित्र 7.12: जीर्ण रस्सी

4. एक गतिमय कार 500 Hz आवृत्ति के स्थिर स्रोत के पास से $20 ms^{-1}$ वेग से गुजरती है। इन दोनों में निकटतम दूरी 20 m है। चालक द्वारा सुनी गई आभासी आवृत्ति की दूरी के फलन के रूप में परिकलना कीजिए यदि $v = 340 ms^{-1}$ है।

5. अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए सीमान्त प्रतिबंधों का इस्तेमाल करके परावर्तन तथा पारगमन गुणांकों की परिकलना कीजिए।

7.9 हल और उत्तर

1. हमें ज्ञात है कि प्रतिबाधा, तनाव तथा प्रति इकाई लम्बाई संहति में निम्न सम्बंध होता है

$$Z = \sqrt{mT}$$

दी गई रज्जुओं के लिए

$$Z_1 = \sqrt{m_1 T} \text{ तथा } Z_2 = \sqrt{m_2 T}$$

अत:

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \frac{1}{2}$$

अत: समीकरण (7.11) तथा (7.12) से हम यह देखते हैं कि परावर्तन तथा पारगमन आयाम गुणांक

$$R_{12} = \frac{a_r}{a_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{(Z_1/Z_2) - 1}{(Z_1/Z_2) + 1} = \frac{(½) - 1}{(½) + 1} = -\frac{1}{3}$$

तथा

$$T_{12} = \frac{a_t}{a_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2Z_1/Z_2}{(Z_1/Z_2) + 1} = \frac{2}{3}$$

R_{12} में ऋणात्मक चिन्ह का अर्थ यह है कि पार्थक्य पृष्ठ पर तरंग की कला में π का परिवर्तन होता है।

2. समीकरण (7.14) से हम यह जानते हैं कि परिसीमा पर ऊर्जा के पहुंचने की दर

$$P_1 = \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 a_i^2$$

इसी प्रकार परावर्तित तथा पारगत तरंगों द्वारा परिसीमा से ऊर्जा दूसरे माध्यम में ले जाने की दर

$$P_2 = \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 a_r^2 + Z_2 \omega_0^2 a_t^2$$

a_r तथा a_t के व्यंजकों को समायोजित करने पर आप देखेंगे कि

$$P_2 = \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 a_r^2 + \frac{1}{2} Z_2 \omega_0^2 \left(\frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}\right)^2 a_i^2$$

$$= \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 \left[\left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 + \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_1)^2}\right] a_i^2$$

$$= \frac{1}{2} Z_1 \omega_0^2 a_i^2$$

आप देखेंगे कि पार्थक्य पृष्ठ पर ऊर्जा के पहुंचने की दर परावर्तित तथा पारगत तरंगों द्वारा इस पृष्ठ से ऊर्जा संचरण की दर के योग के बराबर है। अतः हम कह सकते हैं कि इस प्रक्रिया में ऊर्जा का संरक्षण होता है।

3. परावर्तन ऊर्जा गुणांक

$$R_E = \left(\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right)^2 = \left[\frac{(1.43 - 39) \times 10^6 \text{ Nm}^{-3}\text{s}}{(1.43 - 39) \times 10^6 \text{ Nm}^{-3}\text{s}}\right]^2 = \left(-\frac{37.57}{40.43}\right)^2 = 0.86$$

इसका अर्थ यह है कि जब जल-स्टील पार्थक्य पृष्ठ पर ध्वनि तरंगें आपतित होती हैं तो केवल 86% ऊर्जा परावर्तित होती है।

4. समीकरण (7.27) से हम जानते हैं कि

$$\nu' = \nu \left(\frac{v}{v - u_s}\right)$$

पदों को पुनः व्यवस्थित करने पर हम लिख सकते हैं कि

$$\nu = \nu' \left(\frac{v - u_s}{v}\right)$$

यहां $v = 350 \text{ ms}^{-1}$, $\nu = 700$ Hz तथा $u_s = 72 \text{ km/h}^{-1} = 20 \text{ ms}^{-1}$ है

अतः

$$\nu = \left(\frac{350 \text{ ms}^{-1} - 20 \text{ ms}^{-1}}{350 \text{ ms}^{-1}}\right) \times 700 \text{ Hz}$$

$$= 600 \text{ Hz}$$

5. चूंकि तरंगदैर्ध्य बढ़ता है इसलिए हम यह कह सकते हैं कि तारा दिष्ट रेखा के अनुदिश प्रेक्षक से दूर जा रहा है। इसका अर्थ यह हुआ कि आवृत्ति कम हो जाती है। प्रकाश के लिए समीकरण (6.28) को इस्तेमाल करके हम लिख सकते हैं कि

$$\nu' = \nu \left(\frac{c}{c + u_s}\right)$$

$$= \nu \left(1 + \frac{u_s}{c}\right)^{-1}$$

$$= \nu \left(1 - \frac{u_s}{c}\right) \quad \text{यदि } u_s << c.$$

चूंकि $\nu = \frac{c}{\lambda}$, आप लिख सकते हैं कि

$$\frac{1}{\lambda'} = \frac{1}{\lambda}\left(1 - \frac{u_s}{c}\right)$$

या

$$u_s = \frac{c}{\lambda'}(\lambda' - \lambda)$$

यहां $\lambda' = 4100$ Å, $\lambda = 4000$ Å तथा $c = 3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$ हैं।

अतः

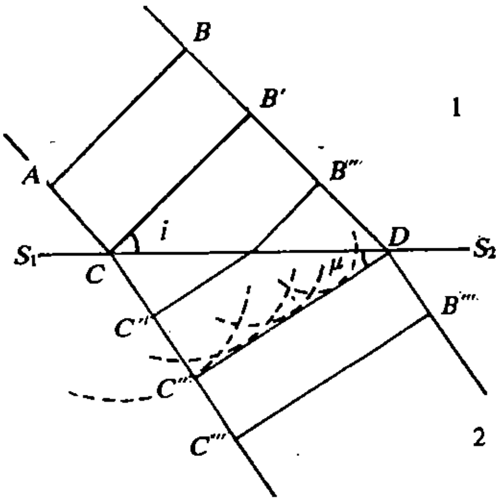
$$u_s = \frac{3 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}}{4100 \text{ Å}} \times (100 \text{ Å})$$

$= 7.3 \times 10^6 \ ms^{-1}$

$= 7.3 \times 10^3 \ kms^{-1}$

अंत के प्रश्न

1. चित्र 7.13 पर विचार कीजिए। AB एक तरंगाग्र के उस भाग को प्रदर्शित करता है जो वायु तथा जल जैसे दो माध्यमों को पृथक करने वाले पार्थक्य पृष्ठ S_1S_2 की ओर बढ़ रहा है। मान लीजिए कि माध्यम 1 तथा माध्यम 2 में तरंग चालें क्रमशः v_1 तथा v_2 हैं।



चित्र 7.13: अपवर्तन नियमों के लिए हाइगन्स संरचना

तरंगाग्र सर्वप्रथम C पर पहुंच कर D की ओर उत्तरोत्तर बिंदुओं की ओर बढ़ता है। तरंगाग्र पर स्थित बिंदु B, *पार्थक्य पृष्ठ पर स्थित* बिंदु D पर और बिंदु A के C पर पहुंचने के $t(= B'D/v_1)$ समय के बाद पहुंचता है। $S_1 S_2$ के प्रत्येक बिंदु से दूसरे माध्यम में द्वितीयक तरंगिका v_2 चाल से विकसित होने लगती हैं। जब D विक्षोभित होता है तब C से तरंगिका t समय तक विकसित हो चुकी होती है तथा इसकी त्रिज्या

$$CC'' = \frac{B'D}{v_1} v_2$$

इस तरंगिका को आप बिंदु C को केन्द्र मान कर CC'' त्रिज्या की चाप द्वारा दर्शा सकते हैं। इस चाप पर D से DC'' स्पर्शज्या खींचिए। यदि आप इस प्रक्रिया को C तथा D के बीच अन्य बिंदुओं के लिए दोहराएंगे तो आप देखेंगे कि DC'' उन सभी के लिए सर्वनिष्ठ स्पर्शज्या है। अतः DC'' **अपवर्तित तरंगाग्र** को प्रदर्शित करता है। Δs $CB'D$ तथा $CC''D$ से आप लिख सकते हैं कि

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{BD/CD}{CC''/CD} = \frac{BD}{CC''} \qquad \text{(ii)}$$

परिणाम (i) की सहायता से हम इस व्यंजक को निम्न रूप में लिख सकते हैं:

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \text{अचर} \qquad \text{(iii)}$$

अतः हम कह सकते हैं कि आपतित कोण की ज्या तथा अपवर्तित कोण की ज्या का अनुपात तरंगचालों के अनुपात के बराबर है तथा अचर है। इस स्थिरांक को पहले माध्यम के सापेक्ष दूसरे माध्यम का **अपवर्तनांक** कहते हैं। इसे μ_{12} द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

ध्वनि के लिए यदि प्रथम माध्यम वायु तथा द्वितीय माध्यम जल हो तो

$$\mu_{12} = 0.23$$

तथा प्रकाश के लिए

$$\mu_{12} = 1.33$$

2. यहां $\rho_1 = 1.29 \text{ kg m}^{-3}$, $\rho_2 = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, $v_1 = 350 \text{ m s}^{-1}$ तथा $v_2 = 1500 \text{ m s}^{-1}$ हैं।

   चूंकि ध्वनि तरंगें अनुदैर्घ्य होती हैं, समीकरण (7.12) से हम देखते हैं कि

$$\frac{a_t}{a_i} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2(Z_1 / Z_2)}{(Z_1/Z_2) + 1} \qquad \text{(i)}$$

   चूंकि $Z = \rho v$, हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho v_1}{\rho v_2} = \frac{(1.29 \text{ kg m}^{-3}) \times (350 \text{ ms}^{-1})}{(1000 \text{ kg m}^{-3}) \times (1500 \text{ ms}^{-1})} = 3.01 \times 10^{-4}$$

   इस परिणाम को (i) में इस्तेमाल करने पर हम देखते हैं कि

$$\frac{a_t}{a_i} = \frac{2 \times (3.01 \times 10)}{(1 + 3.01 \times 10^{-4})} = 6.02 \times 10^{-4}$$

3. समीकरण (7.11) से हम जानते हैं कि

$$x = \frac{a_r}{a_i} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 - Z_2} = \frac{(Z_1/Z_2 - 1)}{(Z_1/Z_2 + 1)}$$

   तनित रज्जु के लिए प्रतिबाधा $\sqrt{m}$ के समानुपाती होती है। अतः हम लिख सकते हैं कि

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$$

$$\therefore \quad x = \frac{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} - 1}{\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + 1}$$

   मान लीजिए कि पहले भाग में n लरें है तब

$$x = \frac{\sqrt{n} - 1}{\sqrt{n} + 1}$$

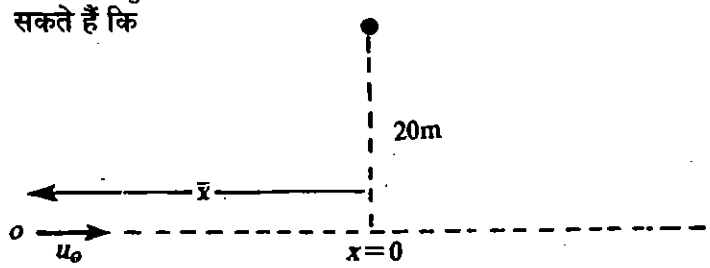
   इस समीकरण से n का मान निकालने पर हम देखते हैं कि

$$\sqrt{n} = \frac{1 + x}{1 - x} = \frac{1.45}{0.55}$$

   अतः

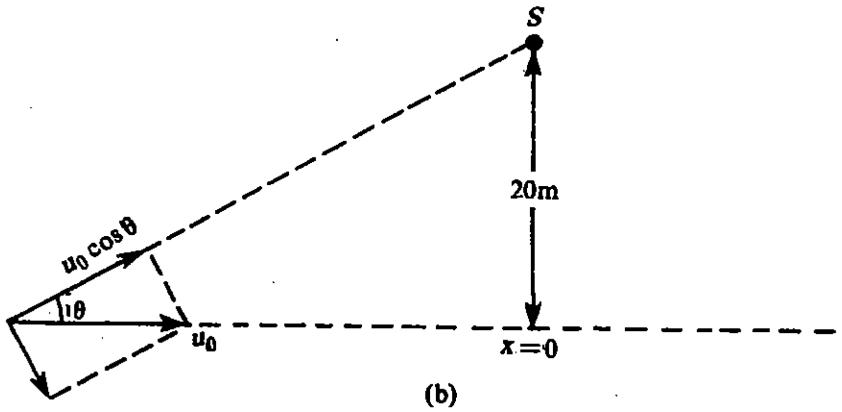
$$n = \left(\frac{1.45}{0.55}\right)^2 = 6.76 = 7$$

4. इस स्थिति में कार ध्वनि के स्रोत की ओर अग्रसर नहीं हो रही (चित्र 7.14a) तथा हमें स्रोत के अनुदिश वेग के घटक को ज्ञात करना है। चित्र 7.14b की सहायता से आप लिख सकते हैं कि



(a)

चित्र 7.14: (a) जब प्रेक्षक की गति स्त्रोत गति के अनुदिश नहीं है



(b)

(b) डाप्लर विस्थापन के लिए उत्तरदायी स्रोत के वेग का घटक

$$u_0 \cos\theta = u_0 \frac{x}{\sqrt{x^2+400}} = (200\ \text{ms}^{-1}) \frac{x}{\sqrt{x^2+400}}$$

तथा दूरी के फलन के रूप में डाप्लर विस्थापित आवृत्ति

$$\nu'(x) = \nu \frac{\sqrt{v + u_0 \cos\theta}}{v}$$

$$= (500\ \text{Hz}) \times \left(1+0.06 \frac{x}{\sqrt{x^2+400}}\right)$$

आप इसे $-100 \leq x \leq 100$ अंतराल में x के फलन के रूप में आरेखित कर सकते हैं। $x = 0$ पर कार तरंग के लम्बवत् गति कर रही है तथा जिस समय कार उस बिन्दु से गुजरती है तो चालक को सही आवृत्ति 500 Hz सुनाई पड़ती है।

5. आपतित, तरावर्तित तथा पारगत तरंगों के लिए कण विस्थापन का व्यंजक इस प्रकार हैं:

$$\psi_i(x, t) = a_i \sin(\omega_0 t - k_1 x) \qquad \text{(i)}$$

$$\psi_r(x, t) = a_r \sin(\omega_0 t + k_1 x) \qquad \text{(ii)}$$

तथा $$\psi_{tr}(x, t) = a_{tr} \sin(\omega_0 t - k_2 x) \qquad \text{(iii)}$$

इस स्थिति के लिए परिसीमा प्रतिबंध इस प्रकार है:

1. परिसीमा पर कण विस्थापन $\psi(x, t)$ अविरत रहता है अर्थात् परिसीमा $x = 0$ के परिवेश में दोनों ओर ψ के मान समान हैं।

2. सामान्य से अधिक दाब परिसीमा के परिवेश में दोनों ओर समान है। प्रथम प्रतिबंध का अभिप्राय है कि

$$a_i + a_r = a_{tr} \qquad \text{(iv)}$$

अनुदैर्ध्य तरंगों के लिए $\Delta p = -E \frac{\partial \psi}{\partial x}$ होता है जहां E प्रत्यास्थता है। हम जानते हैं कि $E = \gamma p_0$ तथा p_0 सामान्य दाब है। हम देखते हैं कि p_0 दोनों ओर से कट जाता है तथा दूसरे प्रतिबंध का अभिप्राय है कि

$$\left.\frac{\partial \psi_i}{\partial x}\right|_{x=0} + \left.\frac{\partial \psi_r}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \psi_{tr}}{\partial x}\right|_{x=0} \qquad \text{(v)}$$

समीकरण (v) से हम लिख सकते हैं कि

$$-a_i k_1 \cos\omega_0 t + a_r k_1 \cos\omega_0 t = -a_{tr} k_2 \cos\omega_0 t$$

या

$$k_1 (a_i - a_r) = k_2 a_{tr} \qquad \text{(vi)}$$

हम जानते हैं कि

$$k_l = \frac{\omega_0}{v_l}$$

इसे ρ_1 v_1 से गुणा करने पर हम देखते हैं कि

$$k_1 = \frac{\omega_0}{\rho_1 v_1^2} \times \rho_1 v_1 = \frac{\omega_0 Z_1}{\gamma p_0}$$

क्योंकि $Z_1 = \rho_1 v_1$ तथा $v_1 = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_1}}$

इसी प्रकार आप यह दिखा सकते हैं क्रि

$$k_2 = \frac{\omega_0 Z_2}{\gamma p_0}$$

इन परिणामों को (vi) में इस्तेमाल करने पर हम देखते हैं कि

$$\frac{\omega_0 Z_1}{\gamma p_0}(a_i - a_r) = \frac{\omega_0 Z_2}{\gamma p_0} a_{tr}$$

अथवा

$$Z_1 (a_i - a_r) = Z_2 \, a_{tr} \qquad \text{(vii)}$$

आप देखेंगे कि आपतित, परावर्तित तथा पारगत आयामों में संबंध बताने वाले व्यंजक (vi) तथा (vii) अनुप्रस्थ तरंगों के समान हैं। इसलिए परावर्तन तथा पारगत आयाम स्थिरांक भी अनुप्रस्थ तरंगों के व्यंजकों द्वारा व्यक्त किए जा सकते हैं।

इकाई 8 तरंगों का अध्यारोपण – I

इकाई की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना

आपने खंड 1 की इकाई 2 में पढ़ा है कि किस प्रकार एक कण पर एक साथ दो सरल आवर्त्त दोलनों के प्रभाव से लिसाज आकृतियाँ बनती हैं।

इस इकाई में आप तरंगों के अध्यारोपण के सिद्धांत के बारे में पढ़ेंगे। कुछ परिस्थितियों में, तरंगों के अध्यारोपण से कुछ रोचक परिघटनाएँ मिलती हैं, जैसे, प्रत्यागामी तरंगों की रचना, विस्पंदन, तरंग समूह, व्यतिकरण, विवर्तन इत्यादि। इस इकाई में आप प्रत्यागामी तरंगों, विस्पंदन, तरंग समूह के बारे में पढ़ेंगे। अन्य दो विषयों यानि व्यतिकरण व विवर्तन की चर्चा इस खंड की इकाई 9 में होगी।

इस इकाई में हम लकड़ी के वाद्य यंत्रों की मूल विशेषताओं के बारे में पढ़ेंगे, विशेषतः उनके ध्वनि पैदा करने वाले भाग पर जोर दिया जाएगा।

मूलतः दो तरह की पाइप होती हैं–वासुरी व रीड़ पाइप। इनके बारे में हम इस इकाई में पढ़ेंगे। जब समान कोणीय आवृत्ति वाली (ω) समान तरंग दैर्ध्य वाली (समान तरंग सदिश और संचरण स्थिरांक) तथा समान आयाम वाली दो तरंगें विपरीत दिशाओं में बढ़ती हुई अध्यारोपित होती हैं तब प्रत्यागामी तरंगों की रचना होती है। जबकि, दो लगभग समान आवृत्ति वाली ध्वनि तरंगों के अध्यारोपित होने पर विस्पंदन की रचना होती है।

तरंग समूह, जिन्हें तरंग पिटक भी कहा जाता है, दो लगभग समान आवृत्ति वाली तरंगों के अध्यारोपण से बनते हैं। तरंग समूह की धारणा क्वान्टम यांत्रिकीय के अध्ययन के लिये अति आवश्यक है, इसके बारे में हम बाद में चर्चा करेंगे।

अगली इकाई में आप दो तरंगों के अध्यारोपण के बारे में पढ़ेंगे जिससे व्यतिकरण की रचना होती है। यहाँ आप दो तरंगों के व्यतिकरण के लिए आवश्यक प्रतिबंधों के बारे में पढ़ेंगे। अंत में आप तरंगों के विवर्तन के बारे में जानेंगे और विवर्तन के कुछ विशिष्ट उदाहरणों के बारे में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप:

- तरंगों के अध्यारोपण के सिद्धांत का वर्णन कर सकेंगे,
- प्रत्यागामी तरंगों की रचना के पीछे छिपी सभी धारणाओं की व्याख्या कर सकेंगे,
- प्रत्यागामी तरंगों के विस्पंद और प्रस्पन्द को पहचान सकेंगे,

- प्रत्यागामी तरंगों की विशेषताओं की सूची बना सकेंगे,
- तरंग समूह की रचना का वर्णन कर सकेंगे,
- तरंग वेग व तरंग दैर्ध्य के परस्पर संबंध को जानते हुए समूह वेग के मान का परिकलन करे सकेंगे,
- नियत आवृत्ति वाली दो अध्यारोपित स्वर से उत्पन्न होने वाली विस्पंदों की संख्या का परिकलन कर सकेंगे।

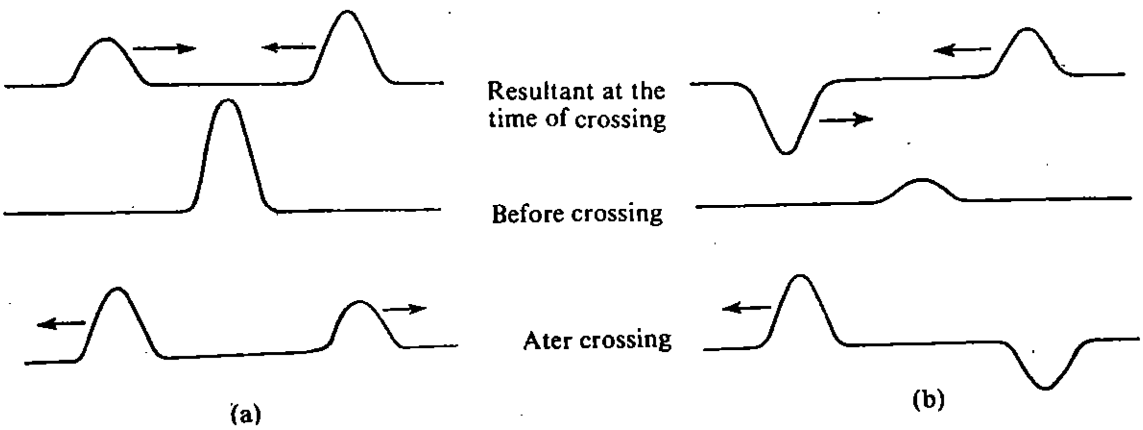
8.2. तरंगों के अध्यारोपण का सिद्धांत

खण्ड 1 की इकाई 2 में आप दो सरल आवर्त्त गतियों के अध्यारोपण के विषय में पढ़ चुके हैं। आपने देखा कि जब एक कण दो या अधिक सरल आवर्त्त गतियों से एक साथ प्रभावित होता है तो किसी भी क्षण उसका परिणामी विस्थापन व्यक्तिगत विस्थापनों का बीजीय योग होगा। इस को हम तरंगों के लिए भी विस्तृत कर सकते हैं।

दो या अधिक तरंगें नियत दिकस्थान में एक ही पथ से स्वतंत्र रूप से चंक्रम कर सकती हैं, इसका अर्थ यह है कि, एक कण का परिणामी विस्थापन किसी भी क्षण, उसको व्यक्तिगत तरंगों द्वारा दिये गये विस्थापनों का बीजीय योग होगा। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि एक कण का परिणामी विस्थापन हम केवल व्यष्टिगत तरंगों द्वारा दिये गये विस्थापनों को बीजतः जमा करके ज्ञात कर सकते हैं।

तरंगों के अध्यारोपण का एक रोचक उदाहरण है रेडियो तरंगें। आप जानते हैं कि विभिन्न रेडियो स्टेशन अपने कार्यक्रमों का प्रसारण करने के लिये विभिन्न आवृत्तियों वाले रेडियो तरंगों को उत्सर्जित करते हैं। जब ये तरंगें हमारे ग्रहण करने वाली ऐन्टेना पर पड़ती हैं तो उसमें, विभिन्न तरंगों के अध्यारोपण के कारण, बनने वाली विद्युत धारा बहुत जटिल होती है। फिर भी हम देखते हैं कि हम किसी भी केंद्र को स्वरित कर सकते हैं। अर्थात् बहुत सी तरंगों में से हम उस तरंग को चुन सकते हैं जिसे हम स्वरित करना चाहते हैं। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि बहुत सी तरंगों के अध्यारोपण से बने तरंग समूह में से हम विभिन्न तरंगें जिन्हें अध्यारोपित किया गया था अलग कर सकते हैं। यह तरंगों के व्यक्तिगत आचरण का संकेत देता है जो कि तरंगों के अध्यारोपण के सिद्धांत पर आधारित है।

अब आप, एक रस्सी पर विपरीत दिशा में चल रही दो स्पंदो के माध्यम से अध्यारोपण के सिद्धांत को दर्शा सकते हैं, जैसा कि चित्र 8.1 में दिखाया गया है। एक दूसरे को पार करने के पूर्व व उपरांत ये दोनों स्पंद एक दूसरे से पूर्णतः स्वतंत्र हैं। पार के समय स्पंद का परिणामी विस्थापन, दोनों स्पंदों के विस्थापनों का बीजीय योग होता है।



चित्र 8.1: विपरीत दिशा में चल रही दो स्पंदों का अध्यारोपण

आपने खंड 1 की इकाई 2 में दोलनों के अध्यारोपण के गणितीय आधार के विषय में पढ़ा है। यह समीकरण (2.1) की रैखिता पर आधारित है।

हम x की धनात्मक दिशा में स्थित कण, जिस पर कि दो तरंगों का स्वतंत्र रूप से प्रभाव पड़ रहा है, पर विचार करते हैं। यदि हम किसी भी क्षण t में, इन दो तरंगों के प्रभाव से $y_1(x, t)$ तथा $y_2(x, t)$ को इस कण का विस्थापन मानें तो इस कण के परिणामी विस्थापन $Y(x, t)$ को निम्नलिखित समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है:

$$Y(x, t) = Y_1(x, t) + Y_2(x, t) \qquad (8.1)$$

आपने इस खंड की इकाई 6 में पढ़ा है कि किसी भी तरंग को हम आवश्यकतानुसार, उसके आयाम, कोणीय, आवृत्ति, तरंग सदिश तथा कला द्वारा अभिलक्षणित कर सकते हैं। अब तरंगों के इन घटकों के (समान) या भिन्न होने के आधार पर तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न होने वाले विभिन्न भौतिक परिघटनाओं का आप अध्ययन करेंगे। आइए हम इनमें से कुछ परिघटनाओं पर विचार करें। इसके लिए हम निम्नलिखित तरंगों के जोड़ों को लेते हैं।

1. $Y_1 = a_1 \sin(\omega t - kx)$ व $y_2 = a_2 \sin(\omega t - kx)$
2. $Y_1 = a \sin(\omega t - kx)$ व $y_2 = a \sin(\omega t - kx + \phi)$
3. $Y_1 = a \sin(\omega_1 t - k_1 x)$ व $y_2 = a_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x)$
4. $Y_1 = a \sin(\omega t - kx)$ व $y_2 = a \sin(\omega t + kx)$ (8.2)

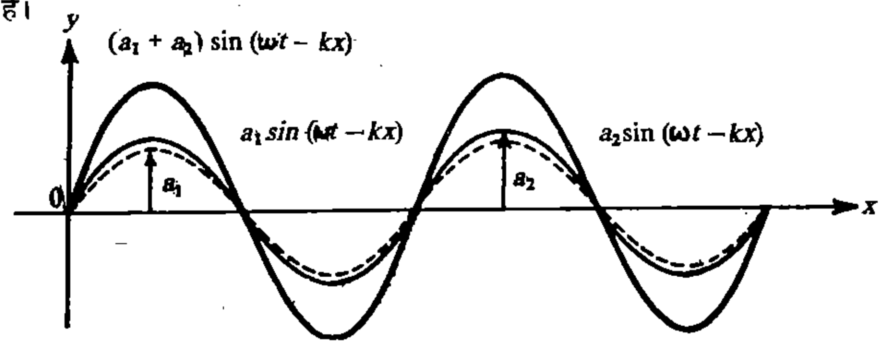
ऊपर दिये गये तरंगों के संयोजन से आप निम्नलिखित निष्कर्ष निकाल सकते हैं :

(क) स्थिति-1 में दोनों तरंगों का केवल आयाम ही भिन्न है :

अब हम ऐसी दो तरंगों के अध्यारोपण पर विचार करेंगे, जिनकी कोणीय आवृत्ति, कला व तरंग सदिश समान है परन्तु आयाम भिन्न है। यह दो तरंगें स्थिति-1 में दर्शाई गई हैं। समीकरण (8.1) का प्रयोग करते हुए हम यह अनुमान लगा सकते हैं कि तरंग को निम्नलिखित रूप में दर्शाया जा सकता है :

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= a_1 \sin(\omega t - kx) + a_2 \sin(\omega t - kx) \\ &= (a_1 + a_2)\sin(\omega t - kx) \end{aligned} \qquad (8.3)$$

समीकरण (8.3) यह दर्शाता है कि परिणामी तरंग की आवृत्ति व कला पृथक तरंगों की आवृत्ति व कला के समान है तथा उसका परिणामी आयाम $(a_1 + a_2)$ है। यह चित्र 8.2 में दर्शाया गया है।



चित्र 8.2 : समान आवृत्ति, कला और तरंग सदिश तथा भिन्न आयाम वाली दो तरंगों का अध्यारोपण।

(ख) स्थिति-2 में दोनों तरंगों की केवल कला भिन्न है:

अब हम ऐसी दो तरंगों के अध्यारोपण पर विचार करेंगे जिनका आयाम, आवृत्ति व तरंग सदिश समान है परन्तु कला भिन्न है। आप देखेंगे कि जब ऐसी दो तरंगें अध्यारोपित होती हैं तो व्यतिकरण की परिघटना उत्पन्न होती है। आप इस परिघटना के संबंध में इस खंड की इकाई 9 में विस्तार से अध्ययन करेंगे।

(ग) स्थिति-3 में दोनों तरंगों की आवृत्ति ω तथा तरंग सदिश **k** भिन्न है।

अब हम ऐसी दो तरंगों के अध्यारोपण पर विचार करेंगे जिनकी आवृत्तियाँ व तरंग सदिश लगभग बराबर हैं। इस स्थिति में कालांतर के मान से प्रभावित हुए बिना तरंगों के अध्यारोपण से एक रोचक परिघटना उत्पन्न होती है जिसे विस्पंदन कहते हैं। यदि लगभग बराबर आवृत्ति वाली अनेक तरंगें अध्यारोपित हों तो उनसे तरंग समूह या तरंग पिटक की उत्पत्ति होती है। इससे समूह वेग आता है जो कि तरंग वेग से बिल्कुल भिन्न होता है। आप समूह वेग के विषय में भाग 8.4 में विस्तार से अध्ययन करेंगे।

(घ) स्थिति 4 में दोनों तरंगों के समीकरण में तरंग सदिश **k** के सम्मुख लगे चिन्ह भिन्न हैं। इस स्थिति में पहली तरंग $y_1(x, t)$, x-अक्ष की धनात्मक दिशा में संचरित हो रही है जबकि दूसरी तरंग $y_2(x, t)$, x-अक्ष की ऋणात्मक दिशा में संचरित हो रही है। इसका तात्पर्य यह है कि दोनों तरंगें विपरीत दिशा में संचरित हो रही हैं। जब इस तरह की दो तरंगों का अध्यारोपण होता है तो प्रत्यागामी तरंगें उत्पन्न होती हैं। आप प्रत्यागामी तरंगों के बारे में भाग 8.3 में पढ़ेंगे।

8.3 प्रत्यागामी तरंगें

आपने अभी ऊपर वाले भाग में पढ़ा है कि जब दो समान कोणीय, आवृत्ति (यानि ω), समान तरंग दैर्ध्य (यानि समान तरंग सदिश **k**), तथा समान आयाम वाली परन्तु विपरीत दिशा में संचरित हो रहीं दो तरंगें अध्यारोपित होती हैं तो प्रत्यागामी तरंगों की उत्पत्ति होती है। बिल्कुल एक समान आयाम तथा तरंग दैर्ध्य वाली तरंगों को सरलता से समझने के लिये हम उनमें से एक तरंग को आपतित तरंग तथा दूसरी की एक परिसीमा से परावर्तित तरंग मान लेते हैं। आपतित तरंग का परावर्तन एक स्थिर परिसीमा से हो सकता है (जैसे दीवार से बद्ध कमानी, या औरगन पाइप का बंद सिरा) या मुक्त परिसीमा से हो सकता है (जैसे कमानी का मुक्त सिरा या औरगन पाइप का खुला सिरा)। आपने पिछली इकाई में पढ़ा है कि स्थिर परिसीमा पर विस्थापन y (x, t) सदैव शून्य रहता है व परावर्तित तरंग का चिन्ह बदल जाता है। जबकि एक मुक्त परिसीमा से परावर्तन तरंग का चिन्ह बदलता नहीं है, वह आपतित तरंग जैसा ही रहता है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि स्थिर परिसीमा द्वारा π का कलांतर आ जाता है जब कि एक मुक्त परिसीमा पर कला में कोई परिवर्तन नहीं होता।

आइए, अब हम उस स्थिति पर विचार करें जिसमें एक मुक्त परिसीमा से परावर्तन हो रहा है। इस अवस्था में परिणामी विस्थापन निम्नलिखित समीकरण से दर्शाया जा सकता है:

$$y(x, t) = a\sin(\omega t - kx) + a\sin(\omega t + kx)$$

समीकरण (8.6) को सन्तुष्ट करने के लिए हमें निम्न परिस्थिति की आवश्यकता है

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = m\pi$$

इसी के समरूप समीकरण (8.7) के लिये निम्न परिस्थिति की आवश्यकता है

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = (2m+1)\frac{\pi}{2} \qquad \text{जहां } m = 0, 1, 2\ldots\ldots$$

इनसे हमें अधिक विस्थापन वाले बिंदु $x = 0, \lambda/2, \lambda, \ldots\ldots$ पर मिलते हैं तथा न्यूनतम विस्थापन के बिंदु $x = \lambda/4, 3\lambda/4\ldots\ldots$ पर मिलते हैं। अधिकतम विस्थापन वाले बिंदुओं को प्रस्पंद कहा जाता है जबकि न्यूनतम विस्थापन वाले बिंदुओं को निस्पंद कहा जाता है। दो लगातार एक के बाद एक आने वाले निस्पंद या प्रस्पंद के बीच की दूरी $\lambda/2$ होती है जब कि एक निस्पंद और प्रस्पंद के बीच की दूरी $\lambda/4$ होती है (चित्र 8.3)।

उपरोक्त चर्चा से हमें ज्ञात होता है कि प्रत्यागामी तरंगें दो बिल्कुल एक सी, विपरीत दिशा में प्रगॉमण करती हुई प्रगामी तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न होती हैं। परिणामस्वरूप हमें एक ऐसी तरंग मिलती है जो अप्रगामी तरंग होती है जिसमें विक्षोभ एक कण से दूसरे कण में हस्तगत नहीं होता। वह जगह या दिकस्थान, जहां दो तरंगें अध्यारोपित होती हैं कई भागों में बँट जाता है (चित्र 8.3)। प्रत्येक भाग का जिस बिंदु पर अंत होता है उसे निस्पंद कहते हैं, जहाँ पर कण का विस्थापन सदैव शून्य होता है।

इस समीकरण को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$y(x, t) = 2a\cos kx \sin\omega t \tag{8.5}$$

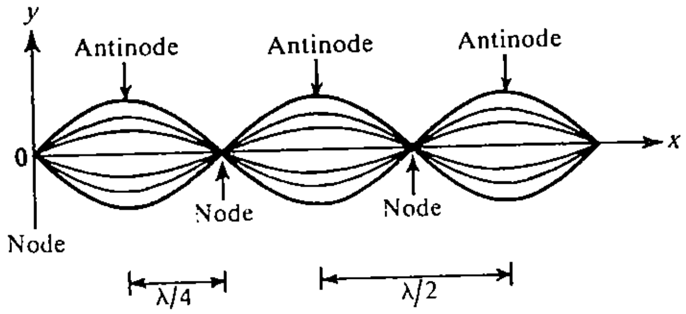
समीकरण (8.5) से हमें ज्ञात होता है कि तरंग का आयाम $2a\cos kx$ है जो स्थिर नहीं है। वह कण की स्थिति x पर निर्भर करता है (या प्रसंवादीतः परिवर्तित होता है।), परिणामी गति की आवृत्ति तथा तरंग दैर्ध्य व्यष्टिगत तरंगों की आवृत्ति व तरंग दैर्ध्य के बराबर होती है। समीकरण (8.4) का निरीक्षण करते हुए हम देखते हैं कि x-अक्ष की दिशा में विचरित कण x-अक्ष की समकोणीय दिशा में कम्पन करते हैं। कंपन कर रहे इन कणों का आयाम x-अक्ष की दिशा में विभिन्न स्थितियों पर भिन्न-भिन्न होता है। जबकि कंपन कर रहे सभी कणों का आवर्त काल बराबर होता है।

समीकरण (8.5) का निरीक्षण करते हुए हमें ज्ञात होता है कि यह किसी प्रगामी तरंग को नहीं दर्शाता है क्योंकि यहाँ पर साइन फलन का कोणांक दिकस्थान स्थिरांक x से स्वतंत्र है। इस प्रकार हम देखते हैं कि जब हमने दो ऐसी तरंगों को लिया था जो कि विपरीत दिशा में संचारित हो रही थी, परिणाम में हमें ऐसी तरंग मिली है जो कि दिकस्थान में प्रगामण नहीं करती। ऐसी तरंग जो संचारण नहीं करती उसे प्रत्यागामी तरंग कहते हैं। क्योंकि यह संचारण नहीं करती, वह अपने साथ ऊर्जा का स्थानांतरण नहीं करती। समीकरण (8.5) से यह स्पष्ट होता है कि विस्थापन $y(x, t)$ तब अधिकतम होता है जब

$$\cos kx = \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = \pm 1$$

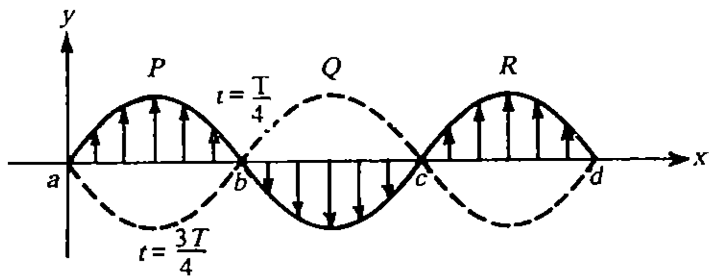
और तब न्यूनतम होता है जब

$$\cos kx = \cos \frac{2\pi}{\lambda} x = 0$$



चित्र 8.3 : प्रत्यागामी तरंग का आवरण, निस्पंद तथा प्रस्पंद को दर्शाते हुए।

इन भागों के केन्द्र बिन्दुओं में स्थित कण अधिकतम आयाम से कंपन करते हैं (इन्हें प्रस्पंद कहते हैं) निस्पंद और प्रस्पंद के बीच में स्थित कम शून्य से अधिकतम आयाम के कंपन करते हैं। यह चित्र 8.4 में दर्शाया गया है।



चित्र 8.4 : प्रत्यागामी तरंग, वाणग्रों द्वारा उन आयामों को दर्शाते हुये जिससे विभिन्न कण कंपन करते हैं।

उदाहरण के लिए कण ''अ'' सदैव स्थिर रहता है। कण ''ब'' सदैव अधिकतम आयाम वाला कंपन करता है तथा कण ''स'' सदैव शून्य व अधिकतम के बीच के आयाम वाला कंपन करता है जैसा कि चित्र 8.4 में दिखाया गया है।

बोध प्रश्न 1

दोनों किनारों पर बद्ध कमानी में उत्पन्न होने वाली प्रत्यागामी तरंग पर स्थित कण के विस्थापन के समीकरण का परिकलन कीजिये। कमानी का बद्धांत निस्पंद होगा या प्रस्पंद? यदि किसी खुले किनारे वाली पाइप में प्रत्यागामी तरंगे उत्पन्न होती हैं तो किनारे पर निस्पंद होगा या प्रस्पंद होगा? आप इसका विवेचन किस प्रकार करेंगे, कि प्रत्यागामी तरंग द्वारा किसी भी प्रकार का ऊर्जा प्रवाह नहीं होता है।

8.3.1 प्रत्यागामी तरंग की गति व किसी बिंदु पर विकृति

आप जानते हैं कि किसी कण के वेग को हम हर समय की अपेक्षा विस्थापन में होने वाले परिवर्तन की दर से परिभाषित करते हैं। किसी भी प्रत्यागामी तरंग के कण के वेग का, उसके परिणामी विस्थापन $Y(x, t)$ को समय के सापेक्ष अवकलन करके x को स्थिरांक रखते हुये, परिकलन कर सकते हैं। यदि हम समीकरण (8.5) का काल के सापेक्ष में अवकलन ले तो हमें निम्न समीकरण प्राप्त होगा :

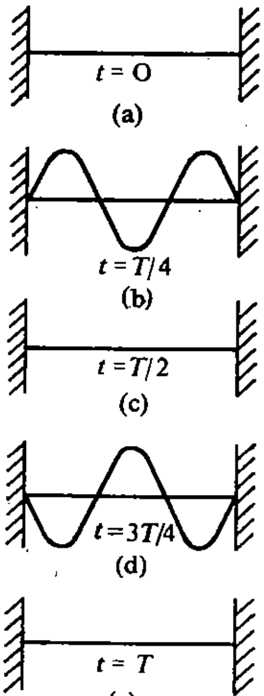
$$\text{वेग} \quad \frac{dY}{dt} = 2a\omega \cos kx \cos \omega t \qquad (8.8)$$

वेग का मान तब अधिकतम होगा जब कोसाइन kx का मान ± 1 होगा यानि उन बिदुओं पर जहां $x = 0, \lambda/2.....n\lambda/2$ के बराबर होगा (समीकरण 8.6 तथा उसके बाद दिये गये विवेचन पर विचार करें) वेग न्यूनतम (शून्य) तब होगा जब कोसाइन kx का मान शून्य होगा यानि उन बिदुओं पर जहां $x = \lambda/4, 3\lambda/4.....(2m+1)\lambda/4$ के बराबर होगा। इसका अर्थ यह है कि वेग का मान प्रस्पंद पर अधिकतम होता है, जहां पर किसी विस्थापन का मान अधिकतम होता है। वेग का मान निस्पंद पर न्यूनतम होता है (शून्य के बराबर) जहां पर कि विस्थापन का मान भी शून्य होता है। प्रस्पंद व निस्पंद के बीच के बिदुओं पर वेग का मान प्रस्पंद पर अधिकतम होता है तथा धीरे-धीरे कम होता हुआ निस्पंद पर शून्य हो जाता है। चित्र 8.4 में वाणाग्रो की लंबाई प्रत्यागामी तरंग के कणों के वेग को दर्शाती है।

प्रत्यागामी तरंग के कण की विकृति का परिकलन प्रत्यागामी परिणामी आयाम यानि $Y(x, t)$ के x के सापेक्ष में अवकलन द्वारा, समय को स्थिर रखते हुये हम कर सकते हैं। यदि हम समीकरण (8.5) को x के सापेक्ष में अवकलन करें तो हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होगा:

$$\text{विकृति,} \quad \frac{dY}{dx} = -2ak \sin kx \sin \omega t \qquad (8.9)$$

आप यह दिखा सकते हैं कि निस्पंद जहाँ विस्थापन तथा वेग का मान शून्य होता है, स्थित कण की विकृति अधिकतम होती है। यह चित्र 8.4 में भी दर्शाया गया है। निस्पंद पर स्थित कणों पर विपरीत दिशा में गतिमान कणों द्वारा खिचांव पड़ता है। प्रस्पंद पर, जहाँ विस्थापन व वेग का मान अधिकतम होता है, विकृति न्यूनतम होती है। चित्र 8.4 को पुनः देखते हुये, हमें पता चलता है कि प्रस्पंद पर स्थिति कण सदैव अपने साथ वाले कणों की दिशा में ही गतिमान होते हैं जिससे प्रस्पंद पर स्थित कणों की विकृति बहुत कम होती है।



चित्र 8.5 : दोनों किनारों पर बद्ध धागे में उत्पन्न होने वाली प्रत्यागामी तरंगें। एक आवर्तकाल के अंतर्गत विभिन्न समयों पर धागे के आकार को दर्शाया गया है।

प्रत्यागामी तरंगों में कण कई मार्गों जैसे P, Q व R में विभाजित हो जाते हैं जैसा कि चित्र 8.4 में दर्शाया गया है। एक भाग के सभी कण सदैव एक ही दिशा में गतिमान होते हैं। जब भाग P के कण ऊपर की ओर गतिमान होते हैं तब भाग Q के कण नीचे की ओर गतिमान होते हैं अर्थात् किन्हीं भी दो निकटतम भागों के कण विपरीत दिशा में गतिमान होते हैं।

किसी भी भाग के सभी कण चरम अवस्था में एक साथ ही पहुँचते हैं तथा साम्यस्थिति से भी एक साथ ही गुजरते हैं। यह चित्र 8.5 में दर्शाया गया है। यह सब इसलिए संभव होता है क्योंकि इन सभी कणों का आवर्तकाल T बराबर होता है पर वेगमान भिन्न होता है। जिन कणों को ज्यादा दूरी तय करनी पड़ती है उनका वेगमान अधिक होता है तथा जिनको कम दूरी तय करनी पड़ती है उनका वेगमान कम होता है।

अब व्यष्टिगत कण पर आते हुये हम देख सकते हैं कि उसका वेग कब महत्तम तथा कब शून्य होता है। समीकरण (8.8) को निम्न प्रकार से लिखते हुए

$$\frac{dY}{dt} = 4\pi a \cos \frac{2\pi}{\lambda} \cos 2\pi\omega t$$

$$= \frac{4\pi a}{T} \cos \frac{2\pi}{\lambda} x \cos \frac{2\pi t}{T}$$

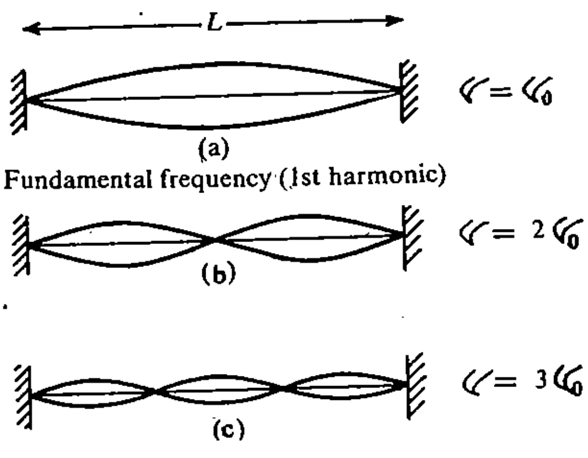
आप देखते हैं कि कण का वेग $t = T/4$ तथा $3T/4$ के लिये शून्य होता है तथा $t = 0$, $T/2$ व $T/1$ के लिए महत्तम होता है। तथापि प्रत्येक आवर्तकाल के अंतर्गत मध्य के कणों का वेग तब महत्तम होता है जब वह साम्यावस्था से गुजरते हैं तथा तब शून्य होता है जब वह चरमावस्था पर होते हैं। अब अगले भाग में आप प्रत्यागामी तरंगों में संनाद उत्पन्न करने वाली परिस्थितियों के बारे में पढ़ेंगे।

8.3.2 प्रत्यागामी तरंगों में आवर्त्त संनाद

सभी तार वाले वाद्य यंत्र प्रत्यागामी तरंगों की परिघटना का प्रयोग करते हैं। एक दोनों सिरों पर बद्ध धागे द्वारा कुछ निर्धारित तरंग दैर्ध्य वाली प्रत्यागामी तरंगों की रचना हो सकती है।

यदि धागे की लंबाई L हो तो इस धागे पर संभव प्रत्यागामी तरंगों की तरंग दैर्ध्य सबसे लंबी तरंग दैर्ध्य से शुरू करते हुये निम्न होंगी:

$2L, L, 2/3\, L$....... इत्यादि (चित्र 8.6 देखें)



चित्र 8.6 : एक दोनों सिरों पर बद्ध, लंबाई वाले धागे पर अनुमत प्रत्यागामी तरंगें।

यह तरंग दैर्ध्य निम्नलिखित संबंधों द्वारा धागे के दोलन की आवृत्ति निर्धारित करती है:

$$\lambda \nu = v$$

यहां v धागे में अनुप्रस्थ तरंग का वेग है, इसको निम्न संबंध द्वारा दर्शाया गया है:

$$V = \sqrt{\frac{T}{M}}$$

जहां T धागे पर लगा तनाव है तथा M धागे की इकाई लम्बाई की संहति है।

हम कंपन की न्यूनतम आवृत्ति ν_0 को मूल आवृत्ति कहते हैं। इसे हम निम्न प्रकार से दर्शाया जाता है:

$$\nu_0 = \frac{v_1}{\lambda} = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{M}}$$

दूसरी आवृत्तियों को अधिछवि कहा जाता है तथा यह मूल आवृति ν_0 के समाकल गुणांक होते हैं (चित्र 8.6 देखें)।

मूल आवृत्ति को पहला संनाद भी कहते हैं। पहला अधिछवि जिसकी आवृति $\nu = 2\nu_0$ होती है दूसरा संनाद कहलाता है, दूसरा जिसकी आवृत्ति $\nu = 3\nu_0$ होती है, तीसरा संनाद कहलाता है, इत्यादि।

प्रत्यागामी तरंगों के सिद्धांत पर आधारित वाद्य यंत्र हैं बांसरी, रीड़ इत्यादि। स्वर विशेषता तथा पूर्ण रूप से ध्वनि को निर्धारित करने वाले मूल तत्व निम्नलिखित हैं:

1. कंपन या शोर का स्रोत
2. अभ्यांतर व्यास का आकार व नाप, तथा
3. अंगुलि द्वारा प्रयोग में आने वाले छेदों का नाप व स्थिति।

लकड़ी के वाद्य यंत्र जिनमें हवा भरी हो (woodwind) के स्वर की विशेषता, भौतिक व वाद्यिक अनुभव के संयोग पर निर्भर करती है। भौतिक दृष्टि से वाद पेटी में हवा को दबाव लगाकर बंद किया हुआ होता है। इस समय दबाव को रखने के लिये एक बहुत बड़े जैलाशय की आवश्यकता होती है, जब कि अंगुलियों से निस्पंद के विभिन्न संयोगों को बजाया जा रहा हो। उपरोक्त वाद्यों में एक सिरा खुला होता है, जिससे इन्हें खुले सिरे वाली ओरगन पाइप कहा जाता है। ओरगन पाइप का बंद सिरा स्थिर परिसीमा की तरह होता है तथा खुला सिरा मुक्त परिसीमा की तरह होता है। बंद सिरे पर सदैव निस्पंद होता है तथा खुले सिरे पर सदैव प्रस्पंद होता है।

एक सिरे से बंद पाइप का मूल तरंग दैर्ध्य निम्न होता है:

$$\lambda = 4L$$

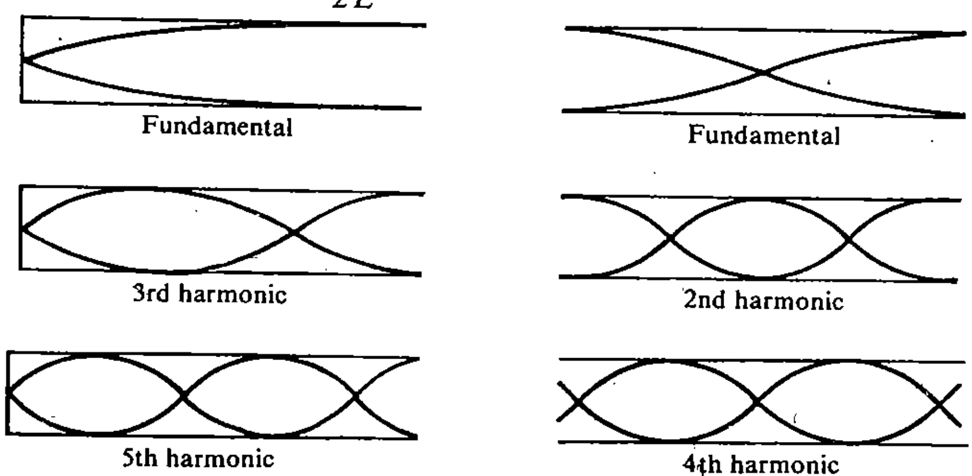
इसलिये मूल आवृत्ति को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$\nu_0 = \frac{v}{4L}$$

इस तरह की नली में समांक संनाद नहीं होते (चित्र 8.7 देखें)। दोनों सिरों से खुली नली के लिये मूल तरंग दैर्ध्य निम्न होगी:

$$\lambda = 2L$$

तभी मूल आवृत्ति $\nu_0 = \frac{v}{2L}$ होगी।



$\omega_0 = \frac{\vartheta}{4L}$ (a) $\omega_0 = \frac{\vartheta}{2L}$ (b)

चित्र 8.7 : ओरगन पाइप में अनुदैर्घ्य प्रत्यागामी तरंगों के कंपन (अ) एक सिरा बंद (ब) दोनों सिरे खुले।

बोध प्रश्न 2

क) एक प्यानों का एक मीटर लंबा धागा दोनों सिरो में बद्ध है। इसकी इकाई लम्बाई की संहति .015 kg/m है। एक ν = 220 Hz आवृत्ति वाले मूल स्वर को बजाने के लिये इसका प्रयोग किया जाता है। धागे पर लगाये जाने वाले तनाव का परिकलन कीजिये।

ख) एक मीटर लंबी, एक सिरे से बंद ओरगन पाइप के मूल विभा की आवृत्ति का आंकलन कीजिये।

8.3.3 प्रत्यागामी तरंगों की विशेषताएँ

पिछले भाग में हमने प्रत्यागामी तरंगों की उन विशेषताओं का विवेचन किया है जिनके कारण वह प्रगामी तरंगों से भिन्न हैं। क्या आप प्रत्यागामी तरंगों की विशेषताओं के बारे में कुछ लिख सकते हैं? ऐसा करने के बाद आप, अपने जवाब की तुलना निम्नलिखित से कीजिये :

1. प्रत्यागामी तरंगें प्रगामी नहीं होती।
2. प्रत्येक कण का आयाम बराबर नहीं होता। यह प्रस्पंदों पर महत्तम तथा निस्पंदों पर शून्य होता है। इनके बीच में यह प्रस्पंद से धीरे-धीरे कम होता हुआ निस्पंद पर शून्य हो जाता है।
3. दो क्रमागत निस्पंदों या दो क्रमागत प्रस्पंदों के बीच की दूरी प्रत्यागामी तरंगों की तरंग दैर्ध्य से आधा होता है। माध्यम खंड़ों में विभाजित हो जाता है तथा प्रत्येक भाग की लंबाई तरंग दैर्ध्य के आधे के बराबर होती है।
4. दो क्रमागत निस्पंदों के अंतर्गत आने वाले सभी कणों की कला समान होती है यानि यह कण महत्तम व न्यूनतम विस्थापन वाली अवस्था तथा साम्यावस्था में एक साथ पहुंचते हैं। एक भाग के कणों की कला संलग्न दूसरे भाग के कणों की कला के विपरीत होती है।
5. निस्पंदों पर कणों का वेग शून्य होता है। परस्पंदों पर कणों का वेग महत्तम होता है। इन दोनों के बीच में स्थित कणों का वेग प्रस्पंद से धीरे कम होता हुआ निस्पंद पर आ कर शून्य हो जाता है।

8.4 तरंग समूह व समूह वेग

अभी तक हमने दो बिल्कुल एक समान तरंगों के अध्यारोपण पर विचार किया है। आइये अब हम देखें कि जब दो लगभग बराबर कोणीय आवृत्ति ω_1 व ω_2 वाली तरंगों का अध्यारोपण होता है, तो क्या होता है।

स्थिति III की अनावश्यक गणितीय जटिलताओं से बचने के लिये हम दोनों तरंगों के आयाम के बराबर रखते हैं। इस प्रकार की दो तरंगों के अध्यारोपण को निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है :

$$\begin{aligned} Y(x, t) &= a \sin(\omega_1 t - k_1 x) + a \sin(\omega_2 t - k_2 x) \\ &= 2a \sin\left[\frac{(\omega_1+\omega_2)t - (k_1+k_2)x}{2}\right] \\ &= \quad \cos\left[\frac{(\omega_1-\omega_2)t - (k_1-k_2)x}{2}\right] \end{aligned} \qquad (8.11)$$

यदि ω_1 व ω_2 तथा k_1 व k_2 लगभग बराबर हो तो हम लिख सकते हैं कि

$$\omega_1 - \omega_2 = \Delta\omega \quad \text{व} \quad k_1 - k_2 = \Delta k$$

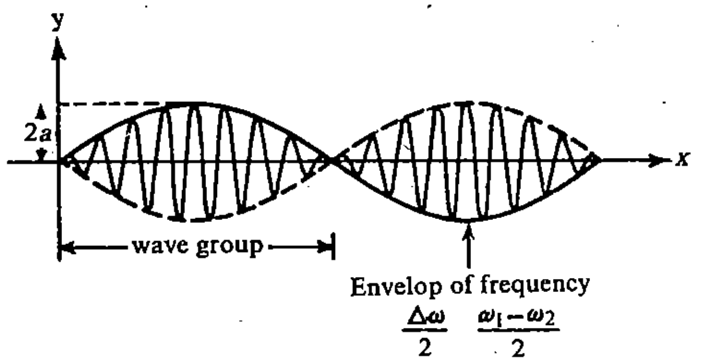
आगे निम्न लिखते हुए

$$\omega_{av} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \quad \text{तथा} \quad K_{av} = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

समीकरण (8.1) को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$Y(x, t) = 2a \sin(\omega_{av} t - kx) \cos\left(\frac{\Delta\omega}{2}\, t - \frac{\Delta k}{2}\, k\right) \qquad (8.12)$$

आइए अब हम देखें कि समीकरण (8.12) द्वारा निरूपित नयी तरंग कैसी दिखती है। पहली बात, इस तरंग का आयाम व्यष्टिगत तरंगों के आयाम से दो गुणा होता है। दूसरी बात यह दो हिस्सों में बनी होती है। शीघ्र परिवर्तित होने वाला भाग (साइन भाग) की आवृत्ति दो घटक तरंगों की आवृत्तियों का माध्य होता है। धीरे से परिवर्तित (यानि साइन भाग) होने वाले भाग की आवृत्ति, दोनों आवृत्तियों में अंतर का आधा होता है। यह भाग शीघ्र परिवर्तित होने वाले भाग पर आवरण की तरह बन जाता है जैसा कि चित्र 8.8 में दिखाया गया है।



चित्र 8.8 : लगभग बराबर आवृत्तियों ω_1 तथा ω_2 वाली दो तरंगों का अध्यारोपण।

चित्र 8.8 से यह स्पष्ट होता है कि अध्यारोपण के परिणामस्वरूप समूहों या खंडों की उत्पत्ति होती है, जो तरंग समूह (या तरंग पिटक) कहलाते हैं। तरंग समूह जिस वेग से आता है, उसी वेग वह व्यष्टिगत तरंग या परिणामी तरंग के वेग से भिन्न हो सकता है। तरंग समूह के वेग को समूह वेग कहते हैं। कोणीय आवृति तथा तरंग सदिश यह निम्नलिखित सम्बन्ध द्वारा दर्शाया गया है :

$$v_g = \frac{\Delta\omega/2}{\Delta k/2} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k}$$

यदि एक समूह में कई घटक तरंगें हों, जिनकी कोणीय आवृत्ति ω_1 तथा ω_2 के अंतर्गत हो (जहाँ ω_1 तथा ω_2) तब हम समूह वेग v_g को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{d\omega}{dk}$$

यहाँ $d\omega$ तथा dk को दर्शाते हैं (अधिकतम तथा न्यूनतम के बीच का अन्तर)।

यहाँ $d\omega$ तथा dk तरंग समूह को बनाने वाली घटक तरंगों की कोणीय आवृत्ति तथा संचरण नियतांक के विस्तार (अधिकतम तथा न्यूनतम के बीच का अंतर) को दर्शाते हैं।

परिणामी अध्यारोपित तरंग का वेग (जिसे कला वेग भी कहते हैं) समीकरण (8.12) का प्रयोग करते हुए, हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता है:

$$v_p = \frac{\omega_{av}}{k_{av}}$$

यदि व्यष्टिगत तरंगों का वेग समान हो, यानि

$$\frac{\omega_1}{k_1} = \frac{\omega_2}{k_2} = v$$

तब

$$v_p = \frac{\omega_1+\omega_2}{k_1+k_2}$$

यानि समूह वेग, कला वेग के बराबर है।

समूह वेग, भौतिक में अधिक मूल राशि है क्योंकि समूह वेग वाली तरंग के साथ ऊर्जा स्थानांतरण भी होता है। समूह तथा कला वेग के संबंध को हम निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(kv)}{dk}$$

जिसे हल करने पर हमें निम्न समीकरण प्राप्त होती है

$$v_g = v + k\frac{dv}{dk}$$

यदि हम लिखें

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

तब $$dk = -\frac{2\pi}{\lambda}\, d\lambda \qquad (8.15)$$

समीकरण (8.15) में इसका प्रयोग करते हुए हमें निम्न समीकरण प्राप्त होता है:

$$v_g = v + \frac{2\pi}{\lambda}\quad\frac{dv}{(-2\pi/\lambda^2 d\lambda)}$$

$$= v - \lambda\, dv/d\lambda \qquad (8.16)$$

इससे हमें समूह तथा कला वेग के बीच एक और संबंध प्राप्त होता है। परिणामी तरंग की तरंग दैर्ध्य निम्न होगी:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

तथा अन्वालोपी तरंग की तरंग दैर्ध्य निम्न होगी

$$\lambda_e = \frac{2\pi}{\Delta k/2} = \frac{4\pi}{\Delta k}$$

क्योंकि Δk, k की तुलना में बहुत कम है

इसलिए $\lambda_e >> \lambda$

यदि λ_1 व λ_2 घटक तरंगों की तरंग दैर्ध्य हो तो यह सरलता से सिद्ध किया जा सकता है कि

$$\frac{\lambda_e}{2} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

इससे हमें तरंग समूह की लंबाई प्राप्त होती है। चित्र 8.9 से हमें ज्ञात होता है कि तरंग समूह की लंबाई अन्वालोपी तरंग की तरंग दैर्ध्य से आधी होती है यानि वह $\lambda_e/2$ के बराबर होती है।

समूह व कला वेगों के बीच के अंतर को दर्शाने के लिए हम गहरे पानी में उत्पन्न होने वाली तरंगों के खास उदाहरण पर विचार करते हैं, जिन्हें गुरूत्व तरंग कहते हैं। ये तरंगें बहुत अधिक परिक्षिप्त होती हैं। इनका कला वेग इनके तरंग दैर्ध्य की वर्गानुपाती होती है। यानि

$$v_p = c\lambda^{1/2}$$

या

$$v_p = c_1 k^{-1/2} \quad (\text{क्योंकि } k = \frac{2\pi}{\lambda})$$

यहाँ नया स्थिरांक $c_1 = c\sqrt{2\pi}$

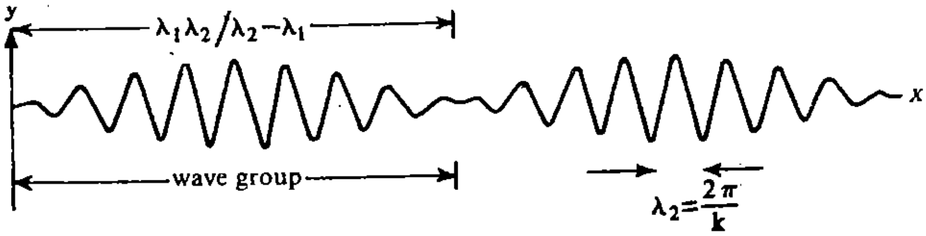
इसलिए $v_p = \omega/k$

$$\omega = c_1 k^{1/2}$$

ω को k के सापेक्ष में अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है।

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\, c_1 k^{-1/2} = v_p$$

अर्थात् गुरूत्व तरंग का समूह वेग उसके कला वेग का आधा होता है। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि इन तरंगों में घटक तरंग शीर्ष पूरे समूह में अधिक तेजी से चलते हैं।



चित्र 8.9 : तरंग समूह तथा उनका विस्तार

बोध प्रश्न 3

एक तरंग का किसी माध्यम में कला वेग निम्न प्रकार से निरूपित है:

$$v = c_1 + c_2\lambda$$

जहाँ c_1 तथा c_2 स्थिरांक है। इसका समूह वेग क्या होगा?

8.5 विस्पंदन

हमने ऊपर देखा है कि दो लगभग बराबर कोणिय आवृत्तियों ω_1 तथा ω_2 वाली तरंगों के अध्यारोपण से तरंग समूहों की उत्पत्ति होती है। आपने यह देखा कि चित्र 8.8 व चित्र 8.99 में हमने परिणामी विस्थापन $y(x, t)$ को दूरी x के सापेक्ष में ग्राफ खींचा। इसे हम दिकस्थान में अध्यारोपण कह सकते हैं। यहाँ हमने समय को स्थिर माना है। अब हम एक और प्रकार के अध्यारोपण पर विचार करते हैं, जहां हम $y(x, t)$ को t के सापेक्ष में ग्राफ खीचेंगें और इसे हम समय में अध्यारोपण कह सकते हैं। यहां हम x को स्थिर मानते हैं।

ध्वनि तरंगों के समय में अध्यारोपण से विस्पंदन की रोचक परिघटना से उत्पन्न होता है। विस्पंदन तेज ध्वनियां होती हैं, जो नियमित समय अंतराल के बाद सुनाई देती हैं, जो अध्यारोपित होने वाली दो तरंगों की **आवृत्तियों** के अंतर पर निर्भर करती है। विस्पंदन अधिकतर संगीतकारों द्वारा उनके वाद्यों को समस्वरित करने के लिये प्रयोग किया जाता है।

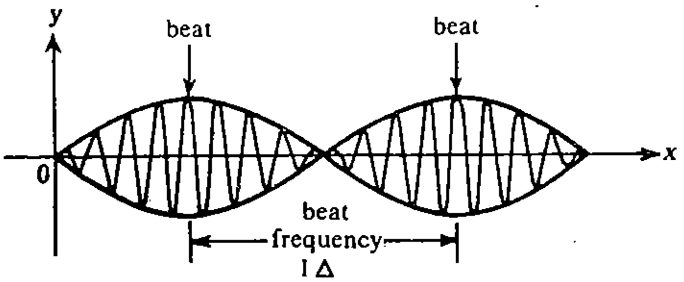
आइए, अब हम, लगभग समान कोणीय आवृत्तियों ω_1 व ω_2 समान आयाम a तथा एक ही दिशा में अग्रसर होने वाली दो तरंगों पर विचार करें, जैसा कि हम ने पिछले भाग में किया था। हम समीकरण (8.10) में x को, $x = 0$ पर स्थिर करते हैं। यह $x = 0$ पर खडें तरंगों को गुजरते हुये देखने वाले निरीक्षक के समान है। वह निम्नलिखित परिणामी तरंग के रूप का निरीक्षण करेगा :

$$Y(x, t) = Y(o, t) = [a \sin(\omega_1 t) + a\sin(\omega_2 t)]$$

भाग 8.4 में चर्चित पिछली स्थिति की भांति समीकरण (8.18) दर्शाता है कि, परिणामी तरंग का आयाम किसी एक बिंदु पर स्थिर नहीं होता, वह समय के साथ परिवर्तित होता रहता है। इसकी कोणीय आवृत्ति $\omega_{av} = \frac{\omega_1+\omega_2}{2}$ होती है। इसका आयाम $\cos\left(\frac{\Delta\omega_t}{2}\right)$ पद की उपस्थिति के कारण, शून्य व $2a$ के बीच में परिवर्तित होता रहता है। यह पद, साइन पद के आवरण की भांति क्रिया करता है।

यदि ω_1 व ω_2 लगभग बराबर हों तो हमें $\Delta\omega$ बहुत कम होगा। इस स्थिति में परिणामी तरंग का आयाम बहुत धीरे परिवर्तित होता है। इस तरंग के आवृत्ति बढ़ते व घटने से विस्पंदन की उत्पत्ति होती है या नियमित समय अंतराल के बाद तेज ध्वनियां सुनाई देती हैं।

विस्पंदन आयाम के अधिकतम होने पर सुनाई देता है (चित्र 8.10 देखें)। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि ध्वनि तीव्रता आयाम के वंर्ग के अनुक्रमानुपाती होती है। कोणीय आवृत्ति, $\Delta\omega/2$ से जुड़ी हुई ऊर्जा एक आर्वत में दो बार अधिकतम होता हैं। इस तरह विस्पन्द की आवृत्ति घटक आवृत्तियों के अंतर $(\omega_1-\omega_2)$ के बराबर होता है। आवृत्तियों ν_1 और ν_2 की व्यन्जन में विस्पंदन आवृत्ति $\Delta\nu = \nu_1-\nu_2 = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ दो क्रमागत विस्पंदनों के बीच के समय अंतराल को विस्पन्द कहते हैं (चित्र 8.10 देखें)।



चित्र 8.10 : लगभग समान आवृत्तियों वाली दो तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न होने वाला विस्पंदन

बोध प्रश्न 4

जब एक पियानो पर 560 हर्टज आवृत्ति वाले द्विभुज द्वारा कोई स्वर बजाया जाता है तो हर सेकिंड में 6 विस्पंदन सुनाई देते हैं। स्वर की आवृत्ति ज्ञात कीजिये।

8.6 सारांश

1. जब एक ही दिकस्थान से गुजरने वाली दो तरंगें एक दूसरे पर अध्यारोपित हों तो किसी भी बिंदु पर परिणाम विस्थापन, व्यष्टिगत विस्थापनों के बीजीय योग के बराबर होता है।
2. दो समान आयाम, आवृत्ति व तरंग दैर्ध्य वाली तरंगें, जो विपरीत दिशा में बढ़ रही हों तथा दो बिंदुओं के बीच में सीमित हों, के अध्यारोपण से प्रत्यागामी तरंगों की उत्पत्ति होती है।
3. प्रत्यागामी तरंगों में, शून्य व अधिकतम विस्थापन वाले बिंदुओं को क्रमशः निस्पंद व प्रस्पंद कहते हैं। दो क्रमागत निस्पंदों या प्रस्पंदों के बीच की दूरी, प्रत्यागामी तरंग की आधी तरंग दैर्ध्य के बराबर होती है।
4. दोनों अनुप्रस्थ तथा अनुदैर्ध्य प्रत्यागामी तरंगों के कंपन की विधा भिन्न हो सकती है।
5. दो लगभग समान आवृत्ति वाली समान दिशा में निर्देशित तरंगों के अध्यारोपण से तरंग समूहों व विस्पंदों की उत्पत्ति होती है।
6. एक सेकिंड में उत्पन्न होने वाले विस्पंदनों की संख्या, दोनों तरंगों की आवृत्तियों के अंतर के बराबर होती है।
7. जिस वेग से एक तरंग समूह बढ़ता है उसे समूह वेग कहते हैं। यह तरंग वेग के बराबर होता है जब दोनों घटक तरंगों का वेग बराबर हो अन्यथा यह तरंग वेग से भिन्न होता है।
8. दो घटक तरंगों की तरंग दैर्ध्य का अंतर जितना कम होगा, तरंग समूह की लंबाई उतनी ही अधिक होगी।

8.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक धागे पर दो बिंदुओं का निरीक्षण किया जाता है जबकि उस पर से एक प्रगामी तरंग गुजर रही है। यह बिंदु $x_1 = 0$ व $x_2 = 1$ m पर स्थित है। दोनों बिंदुओं की अनुप्रस्थ गति निम्न प्रकार से दर्शायी जाती है:

   $y_1 = 0.2 \sin 3\pi t$ and $y_2 = 0.2 \sin (3\pi t + \frac{\pi}{8})$

क) हर्टज में आवृत्ति क्या होगी?
ख) तरंग दैर्ध्य क्या होगी?
ग) तरंग किस गति से बढ़ेगी?

2. पचास स्वरित्र द्विभुज को बढ़ती हुई आवृत्ति के अनुसार इस प्रकार क्रमबद्ध किया गया है कि कोई भी दो क्रमागत द्विभुज को एक साथ बनाये जाने पर, एक सेकिंड में 5 विस्पंदन उत्पन्न होते हैं। यदि आखिरी द्विभुज पहले वाले के संनादी हैं तो पहले वाले की आवृत्ति का परिकलन कीजिये। (एक स्वर को दूसरे का ओक्टव कहते हैं जब उसकी आवृत्ति दूसरे की आवृत्ति से दुगुनी हो)।

3. एक बंद नली 25 cm लंबी, जब ऑक्सीजन से पूरी भरी होती है तो एक दिये हुये स्वरित्र द्विभुज से अनुनाद करती है। ऐसी बंद नली की लंबाई ज्ञात कीजिये जो हाइड्रोजन से भारी होने पर भी उसी स्वरित्र से अनुवाद करे। [ध्वनि वेग = 320 m/s तथा हाइड्रोजन में ध्वनि वेग = 1280 m/s]

4. एक 'd' परमाणु अन्तर्लाय वाले क्रिस्टल में अनुप्रस्थ तरंग का कर्ला वेग (v) निम्नलिखित है:

$$v = C \frac{\sin kd/2}{kd/2}$$

जहां C स्थिरांक है। प्रमाणित कीजिये कि इसका समूह वेग C cos $kd/2$ होगा।

8.8 बोध प्रश्न के हल

बोध प्रश्न 1

क्योंकि बद्ध सिरे से परावर्त्तन होने पर π कलांतर हो जाता है, प्रत्यावर्तित तरंग को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$y_2 = a \sin(\omega t + kx)$$

इससे हमें निम्न परिणामी विस्थापन y (x, t) प्राप्त होता है:

$$\begin{aligned} y(x, t) &= a \sin(\omega t - kx) - a \sin(\omega t + kx) \\ &= -2a \sin kx \cos \omega t \\ &= A \cos \omega t \end{aligned}$$

जहां $A = -2d \sin kx$

बद्ध सिरे पर सदैव निस्पंद होता है क्योंकि वहां पर विस्थापन शून्य होता है। खुले सिरों वाली पाइप में सिरे पर सदैव प्रस्पंद होता है। एक धनात्मक x दिशा में निर्देशित आपतित तरंग तथा एक ऋणात्मक x दिशा में निर्देशित प्रत्यावर्तित तरंग से एक प्रत्यागामी तरंग बनती है। प्रत्येक तरंग अपने साथ एक बराबर ऊर्जा विपरीत दिशा में ले जाती है। इसलिए परिणामी ऊर्जा बहाव सदैव शून्य होता है।

2. (क) मूल विभा की तरंग दैर्ध्य:

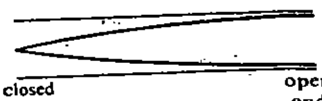
$$\lambda = 2L = 2 \times 1\,\text{m} = 2\text{m}$$

∴ तरंग का वेग

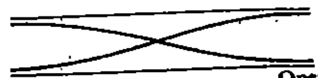
$$v = 220\text{ Hz} \times 2\text{ m}$$
$$= 440\text{ m/s}$$

$v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$ से

$$T = v^2/\mu = (440\text{ m/s})^2 \times 0.015\text{ kg/m}$$
$$= 2.9 \times 10^3\text{ N}$$



(a)



(b)

(ख) मूल विधा की तरंग दैर्घ्य

$$\lambda = 4L = 4 \times 1\,\text{m} = 4\,\text{m}$$

आवृत्ति $\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{350\,\text{m/s}}{4\,\text{m}} = 87.5$ हर्टज $\simeq 88$ हर्टज

नलि को करने से पिच,3 के गुणांक से बढ़ जाता है जिस से अगले संनाद की आवृतियां $\nu = 3 \times 88 = 264$ **हर्टज होती हैं।।**

3. हम जानते हैं कि

$$v_g = v - \lambda \frac{du}{d\lambda}$$

प्रश्न में आने वाली तरंग के लिए $\frac{du}{d\lambda} = C^2$

ऊपर दिये गये समीकरण में इसका प्रयोग करते हुये

$$v_g = C_1 + C_2\lambda - \lambda C_2 = C_1$$

4. यदि हम स्वर की आवृत्ति को मानें, तो

$$6 = [560 - \nu]$$
$$\nu = 554 \text{ हर्टज या } 566 \text{ हर्टज}$$

इस स्थिति में हम स्वर की आवृत्ति बिना निश्चित स्थिति से नहीं ज्ञात की जा सकती। इसका मान इन दोनों में से एक होगा।

अंत में कुछ प्रश्नों के उत्तर

1. (अ) $\nu = 1.5$ हर्टज

(ब) $\lambda = \frac{16}{16n-1}$ m, n = 1, 2, 3..... निर्देशित तरंग के लिये

$= \frac{16}{16n-1}$ m, n = 0, 1, 2, 3..... निर्देशित तरंग के लिये

(द) $U = +8/5$ m/s etc
$V = -24$ m/s etc

2. पहले स्वर की आवृत्ति को n मान लें

तब दूसरे द्विभुज की आवृत्ति होगी $= n+5$

तीसरे द्विभुज की आवृत्ति होगी $= n+5+5 = n+10$

चौथे द्विभुज की आवृत्ति होगी $= n+5+5+5 = n+15 = n + (4-1)\,5$

पांचवें द्विभुज की आवृत्ति होगी $= n+(5-1)5 = n+20$

इस प्रकार पचासवें द्विभुज की आवृति होगी

$$= n + (50-1) \times 5$$
$$= n + 245$$

क्योंकि पचासवें द्विभुज की आवृत्ति 2n है इसलिये

$$n + 245 = 2n$$

तथापि $n = 245$ हर्टज,

3. पहली नली के लिये मूल आवृत्ति

$$\nu_1 = \frac{v_0}{4l_1}$$

जहां v_0 हाइड्रोजन में ध्वनि वेग है तथा l_1 इसकी पहली नली की लंबाई है। दूसरी नली के लिए मूल आवृति

$$\nu_2 = \frac{V_1}{4l_2}$$

जहां V_1, v_0, हाइड्रोजन में ध्वनि वेग है तथा l_2 दूसरी नली की लम्बाई है। क्योंकि दोनों नलियों एक ही आवृत्ति पर अनुवाद करती हैं, इसलिये

$$\nu_1 = \nu_2 \text{ या } \frac{v_0}{4l_1} = \frac{V_1}{4l_2}$$

$$\therefore l_2 = \frac{V_1}{v_0} \times l_1$$

v_0, v_0 तथा l_1 के मान कों प्रस्थापित करने पर

$$l_2 = \frac{1280\,\text{ms}^{-1}}{320\,\text{ms}^{-1}} \times 25\text{ cm}$$
$$= 100\text{ cm}$$

4. समूह वेग

$$\nu_g = \frac{d\omega}{dk}$$

तथा

$$\omega = k\,\nu$$

हम जानते हैं

$$\omega = C\,\frac{\sin(kd/2)}{kd/2} = k\nu$$

$$= kC\frac{\sin kd/2}{kd/2}$$

$$= \frac{2C}{d}\sin kd/2$$

या

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2C}{d}\cos\left(\frac{kd}{2}\right)\frac{d}{2}$$

या

$$v_g = C\cos(kd/2)$$

इकाई 9 तरंगों का अध्यारोपण – II

इकाई की रूपरेखा

9.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आपने तरंगों के अध्यारोपण के सिद्धांत के बारे में पढ़ा है व इससे प्रत्यागामी तरंगों, तरंग समूहों व विस्पंदों की उत्पत्ति के परिघटना का अध्ययन किया है।

भाग 8.2 में आपने ऐसी दो तरंगों, जिनका आयाम तथा आवृत्ति समान हो पर कला भिन्न हो, के अध्यारोपण के बारे में पढ़ा है। जब ऐसी तरंगें अध्यारोपित होती हैं तो व्यतिकरण की परिघटना होती है। व्यतिकरण उत्पन्न करने के लिये, तरंगों के स्रोतों में संबद्धता होनी चाहिए। यानि इनसे निकलने वाली तरंगों में शून्य या स्थिर कलान्तर होना चाहिए। इस इकाई में आप पढ़ेंगे कि संबद्धता स्रोत कैसे बनते हैं तथा किसी व्यतिकरण चित्राम में तीव्रता किस तरह परिवर्तित होती है आप यह भी जान पायेंगे कि पानी के ऊपर फैली हुई तेल की एक पतली सी परत में विभिन्न रंग कैसे दिखने लगते हैं।

विवर्तन की परिघटना जो दो समान आयाम तथा आवृत्ति व लगभग समान कला तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न होता है, को प्रायः कोनों पर तरंगों का मुड़ना कहा जाता है। इस परिघटना की वजह से कई बार हम यह सोचने पर मजबूर हो जाते हैं कि तरंगें एक सीधी रेखा में नहीं चलती। विवर्तन चित्राम दो तरह के होते हैं, जिन्हें फ्रेनल तथा फ्रानहोवर प्रकार के विवर्तन कहा जाता है। आप इसके बारे में पढ़ेंगे कि यह दो प्रकार के विवर्तन, तरंगें पैदा करने वाले स्रोत तथा विवर्तन चित्राम बनाने वाले अवरोध के बीच की साक्षेप दूरी से संबंधित है।

व्यतिकरण तथा विवर्तन दोनों ही भौतिकी में बहुत महत्वपूर्ण परिघटनाएं हैं। प्रकाश की तरंग प्रकृति को सिद्ध करने में इनका बहुत बड़ा योगदान है। इन दोनों में बहुत थोड़ा सा ही अंतर है। व्यतिकरण दो (या अधिक) स्रोतों से, जो एक स्रोत से उत्पन्न हो आने वाली तरंगों के अध्यारोपण से उत्पन्न होता है। विवर्तन, एक ही तरंगाग्र के कई भागों से आने वाले तरंगिका के अध्यारोपण से उत्पन्न होता है, जिसके विषय में हम इस इकाई में बाद में पढ़ेंगे।

इकाई 6 में आपने विभिन्न प्रकार की तरंगों के बारे में पढ़ा है जैसे ध्वनि तरंगें, प्रकाश तरंगें। आपने यह भी पढ़ा कि ध्वनि तरंगें अनुदैर्ध्य होती हैं तथा प्रकाश तरंगें अनुप्रस्थ होती है। दोनों, आपस में अध्यारोपित होने पर, समान परिघटनाएं उत्पन्न करती हैं। मूलतः जो कुछ भी एक प्रकार की तरंग पर लागू होता है वह दूसरी प्रकार की तरंग पर भी लागू होता है। यदि प्रकाश तरंगों में व्यतिकरण तथा विवर्तन की परिघटनाएं होती हैं तो ध्वनि तरंगों में भी

यह दोनों ही होते हैं। प्रकाश तरंगों का प्रभाव देखा जाता है जब कि ध्वनि तरंगों का प्रभाव सुना जाता है। क्योंकि ध्वनि तरंगों की तरंग दैर्ध्य, दृश्य क्षेत्र की प्रकाश तरंगों की तरंग दैर्ध्य से बहुत अधिक होती है। इसलिए ध्वनि तरंगों का प्रभाव प्रायः प्रकाश तरंगों के प्रभाव की तुलना में बहुत अधिक होता है।

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप :

- संबद्धता स्रोतों तथा उनके गुणों का उदाहरण सहित वर्णन कर सकेंगे,
- दो संबद्धता स्रोतों से निकलने वाली तरंगों के पथांतर को जोड़ने वाले प्रतिबंधों की व्युत्पत्ति कर सकेंगे तथा तरंगों के रास्ते (पाथ) में रखे पर्दे पर तीव्रता अधिकतम व न्यूनतम लाने वाली तरंगों की तरंग दैर्ध्य की व्युत्पत्ति कर सकेंगे,
- व्यतिकरण चित्राम में तीव्रता के परिवर्तन होने की रूपरेखा बना सकेंगे,
- तनु फ़िल्म (पतली झिल्लयों) में प्रकट होने वाले विवर्तन की व्याख्या कर सकेंगे,
- विवर्तन की परिघटना का वर्णन तथा व्याख्या कर सकेंगे,
- एक रेखाछिद्र से होने वाले विवर्तन की व्याख्या कर सकेंगे, तथा
- विवर्तन चित्राम में तीव्रता वितरण का वर्णन कर सकेंगे।

9.2 व्यतिकरण

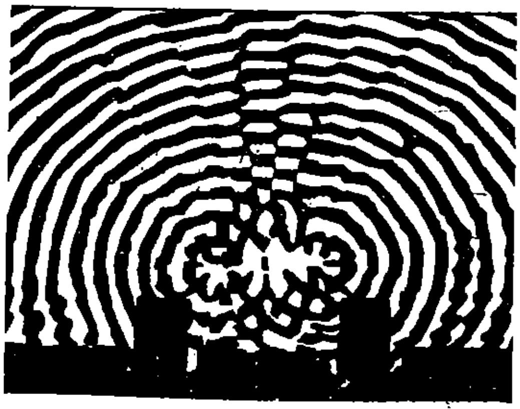
इकाई 8 में आपने तरंगों के अध्यारोपण के विषय में अध्ययन किया है। आपने देखा है कि कुछ खास प्रतिबंधों के अंतर्गत, तरंगों के अध्यारोपण से व्यतिकरण की उत्पति होती है। अब हम व्यतिकरण के विषय में विस्तार से पढ़ेंगे। आइये हम निम्नलिखित दो तरंगों के अध्यारोपण पर विचार करें:

$$y_1 = a \sin (\omega t - kx + \phi)$$

तथा

$$y_2 = a \sin (\omega t - kx + \phi)$$

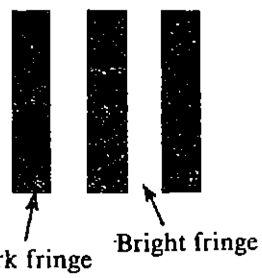
इन दोनों तरंगों की कोणिय आवृति ω तथा तरंग सदिश **k** बराबर है तथा यह एक ही दिशा में बढ़ रही है। इन दोनों में ϕ कलांतर है जो समय के साथ स्थिरांक है। क्या आप इन दोनों तरंगों के अध्यारोपण के पश्चात् होने वाले ऊर्जा वितरण के बारे में बता सकते हैं? यदि आप प्रयत्न करेंगे तो आप पायेंगे कि यह वितरण दिकस्थान में एक सा नहीं है आप पाएंगे कि ऊर्जा कुछ बिंदुओं पर अधिकतम हैं व कुछ बिंदुओं पर न्यूनतम (शायद शून्य) है। दिकस्थान में इस प्रकार के ऊर्जा वितरण को व्यतिकरण चित्राम कहते हैं।



चित्र 9.1 : जल तरंगों की सतह पर व्यतिकरण

चित्र 9.1 में, एक कम गहराई वाले तालाब में दो तरंगों द्वारा प्राप्त व्यतिकरण चित्राम दर्शाया गया है। S_1 तथा S_2 दो ऐसे स्रोत हैं जो पानी की सतह पर वृत्तीय तरंगें उत्पन्न करते हैं। स्रोत S_1 व S_2 को इस प्रकार से समायोजित किया जाता है कि पानी की सतह पर, उनसे उत्पन्न होने वाली तरंगों की कला स्थिरांक हो। इन तरंगों के परिणामस्वरूप एक व्यतिकरण चित्राम उत्पन्न होगा। जब एक तरंग का शीर्ष दूसरी तरंग के शीर्ष पर पड़ता है तो एक बड़ा शीर्ष (यानि बड़े आयाम वाला) उत्पन्न होता है। इसी प्रकार जब एक तरंग का गर्त दूसरी तरंग के गर्त पर पड़ता है तो एक और भी छोटा गर्त उत्पन्न होता है। परन्तु जब एक तरंग का शीर्ष दूसरी तरंग के गर्त पर पड़ता है तो वह एक दूसरे को काट देता है। इस प्रकार परिणामी तरंग में कुछ बिंदुओं पर आयाम दुगुना हो जाता है और कुछ बिंदुओं पर शून्य हो जाता है। इससे जो चित्राम बनता है उसे हम व्यतिकरण चित्राम कहते हैं।

प्रयोगशाला में किए जाने वाले व्यतिकरण प्रयोगों में अधिकतर व्यतिकरण चित्राम, फिन्ज के रूप में होता है। व्यतिकरण फिन्ज एक छोड़ कर एक,चमकीला या अदीप्त होता है जिसे चित्र 9.2 में दिखाया गया है।



चित्र 9.2 : व्यतिकरण चित्राम (चमकीले और अदीप्त फिन्ज)

जब भी एक तरंग का शीर्ष दूसरी तरंग के शीर्ष पर पड़ता है या एक तरंग का गर्त दूसरी तरंग के गर्त पर पड़ता है तो पर्दे पर एक चमकीली पट्टी बन जाती है। जहां पर भी एक तरंग का शीर्ष दूसरी तरंग के गर्त पर पड़ता है, वहां पर एक काली पट्टी उत्पन्न हो जाती है।

ऊपर की गई चर्चा से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि व्यतिकरण चित्राम उत्पन्न करने के लिए हमें मूलतः दो स्रोतों की आवश्यकता होती है। अब प्रश्न यह उठता है कि यह स्रोत कैसे होने चाहियें?

9.2.1 संबद्धता स्रोत

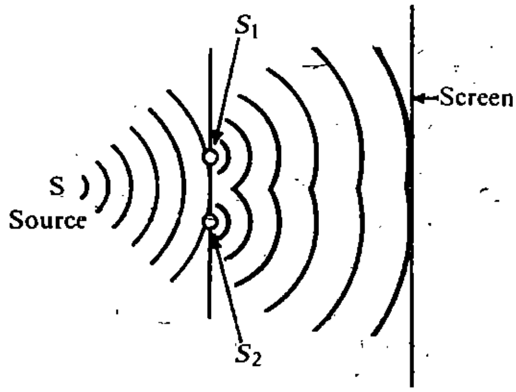
आप जानते हैं कि व्यतिकरण उत्पन्न करने के लिये हमें दो संबद्धता स्रोतों की आवश्यकता होती है। आइये अब हम यह चर्चा करें कि संबद्धता स्रोत क्या हैं तथा इनके विशेष गुण क्या हैं?

हम अपने अनुभव से यह जानते हैं कि एक स्थायी व साफ व्यतिकरण चित्राम उत्पन्न करने के लिए यह आवश्यक है कि दोनों स्रोतों से प्राप्त होने वाली तरंगों में कलांतर शून्य हों या स्थिरांक हो, मान लो यह ϕ है। यदि स्रोतों से प्राप्त होने वाली तरंगों में शून्य या स्थिरांक कलांतर हो तो उन्हें संबद्धता स्रोत कहा जाता है। हम ऐसे स्रोत कैसे बना सकते हैं। संबद्धता स्रोतों को बनाने का सबसे आसान तरीका यह है कि उन्हें एक ही मूल स्रोत से लिया जाता है।

प्रकाश में ऐसे स्रोत उपलब्ध करने का एक तरीका यह है कि एक स्रोत से आने वाली तरंगों के रास्ते में दो रेखाछिद्र वाला एक पर्दा रख दिया जाता है, जैसा कि चित्र 9.3 में दिखाया गया है।

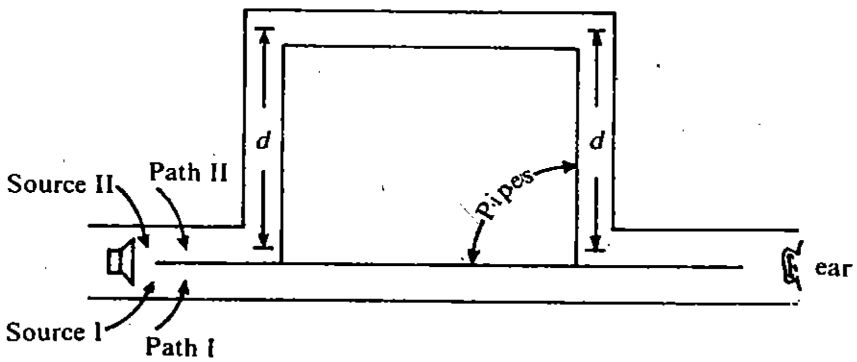
रेखाछिद्र से शुरू होने वाली तरंगों में शून्य या स्थिर कलांतर होता है। जब ये तरंगें एक दूसरे पर पड़ती हैं तो एक व्यतिकरण चित्राम प्राप्त होता है। इसके विषय में आप भाग 9.3.2 में विस्तार से पढ़ेंगे।

ध्वनि में दो संबद्धता स्रोत, मूल अनुदैर्ध्य तरंग को दो भागों में विभाजित करके उपलब्ध किये जा सकते हैं, जैसा कि चित्र 9.4 में दिखाया गया है। यहां पर एक भाग पथ -I से जाता है



चित्र 9.3: एक प्रकाश स्रोत S से दो संबद्धता स्रोत S_1 और S_2 प्राप्त किये गए हैं।

तथा दूसरा भाग पथ-II से जाता है। यह भाग दोबारा मिलकर व्यतिकरण उत्पन्न करते हैं। किसी भी बिंदु पर ध्वनि सुन कर जानी जा सकती है।



चित्र 9.4: संबद्धता स्रोत (पाथ I और II को ध्वनि तरंगों में व्यतिकरण करने के लिए उपयोग में लाया गया है।)

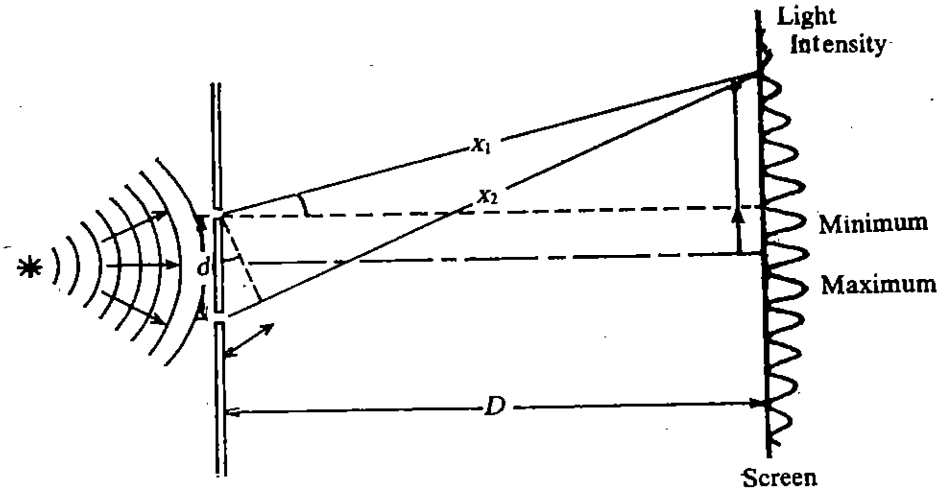
आइये अब हम एक मिनट ठहर कर सोचें कि यदि हम दो संबद्धता स्रोतों की जगह दो स्वेच्छा स्रोतों को लें तो क्या होगा? प्रयोगों द्वारा हमें पता चलता है कि यदि हम कोई दो स्वेच्छा स्रोत लें तो व्यतिकरण चित्राम नहीं बनेगा। ऐसा इसलिये होता है क्योंकि स्वेच्छ स्रोत प्रयोग करने पर तरंगों की कला बहुत जल्द तथा अनियमिता से बदलती है, जिससे बहुत शीघ्र परिवर्तित होने वाले व्यतिकरण चित्राम बनते हैं। दो स्वेच्छ प्रकाश स्रोत परदे पर केवल साधारण प्रदीपन देते हैं।

बोध प्रश्न 1

क्या दो रेखाछिद्र के पीछे लगे हुए 60 वाट के दो बल्ब व्यतिकरण चित्राम बनाने के लिए दो संबद्धता स्रोत बन सकते हैं, यदि नहीं तो क्यों?

9.2.2 दो रेखाछिद्र से आने वाली तरंगों में व्यतिकरण

पिछले भाग में आपने पढ़ा कि, एक स्रोत से कैसे दो संबद्धता स्रोत बनाये जा सकते हैं। इस भाग में आप पढ़ेंगे कि इस प्रकार के समूह से व्यतिकरण चित्राम कैसे बनता है? S को एक बिन्दु स्रोत मान लें (चित्र 9.5 देखें)। S_1 तथा S_2 दो रेखाछिद्र हैं जो स्रोत से समान दूरी पर स्थित हैं। पर्दा, रेखाछिद्र के मध्याहन से दूरी D पर है। क्योंकि रेखाछिद्र स्रोत से समान दूरी पर पर है, इसलिये तरंगाग्र, रेखाछिद्र S_1 तथा S_2 पर एक ही समय पर पहुंचेंगे, यानि कालांतर शून्य होगा। यह चित्र 9.5 में दर्शाया गया है।



चित्र 9.5: तरंगों के व्यतिकरण का उपकरण

रेखाछिद्र S_1 तथा S_2 जो दूरी d पर स्थित है, से आने वाली तरंगों की कला बराबर होगी यानि कलांतर शून्य होगा, दोनों रेखाछिद्र से आने वाली तरंगों में जो भी कलांतर बाद में आ जायेगा, वह केवल भिन्न-भिन्न दूरियां तय करने की वजह से ही आयेगा। रेखाछिद्र S_1 तथा S_2 संबद्धता स्रोतों की तरह काम करती है तथा कोणीय आवृत्ति ω व आयाम A वाली तरंगें उत्पन्न करती है। आइये अब हम एक ऐसे बिंदु P को लें जो S_1 से x_1 की दूरी पर है तथा S_2 से x_2 की दूरी पर है। इन दूरियों को बहुत अधिक मान लें। P पर S_1 से आने वाली तरंगों से होने वाले विस्थापन को निम्नलिखित मान लें

$$y_1 = A \sin(\omega t - kx_1) \quad (9.1)$$

तब इसी बिंदु पर रेखा छिद्र S_2 से आने वाली तरंगों से होने वाला विस्थापन निम्नलिखित होगा:

$$y_2 = A \sin(\omega t - kx_2) \quad (9.2)$$

समीकरण (9.1) तथा (9.2) से यह स्पष्ट होता है कि P पर दोनों तरंगों का पथांतर (यानि तय किये गये पथों की लंबाई में अंतर), निम्नलिखित होगा :

$$(x_1 - x_2)$$

इससे निम्नलिखित कलांतर आ जायेगा:

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) \quad (9.3)$$

ऐसा इसलिये होगा क्योंकि पथ अंतर होने के साथ-साथ निम्नलिखित संबंध के अनुसार कलांतर सदैव निम्न समीकरण से जुड़ा रहता है:

$$\frac{\text{कलांतर}}{2\pi} = \frac{\text{पथांतर}}{\lambda}$$

बिन्दु P पर तरंगों के अध्यारोपण से हमें निर्म्नलिखित प्राप्त होता है:

$$y = y_1 + y_2$$
$$= A\,[\sin(\omega t - kx_1) + \sin(\omega t - kx_2)] \quad (9.4)$$

समीकरण (9.4) को हम विस्तार से निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$y = A\,[\sin \omega t \cos kx_1 - \cos \omega t \sin kx_1 + \sin \omega t \cos kx_2 - \cos \omega t \sin kx_2]$$
$$= A\,[(\cos kx_1 + \cos kx_2) \sin \omega t - (\sin kx_1 + \text{in } kx_2) \cos \omega t]$$

कोष्ट में लिखे गये पद समय के सापेक्ष में स्थिर है, यदि हम

$$A(\cos kx_1 + \cos kx_2) = A_1 \cos\phi \text{ लिखें} \quad (9.6)$$

तथा

$$A(\sin kx_1 + \sin kx_2) = A_1 \sin\phi \text{ लिखें} \quad (9.7)$$

तो समीकरण (9.5) को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$y = A_1[\sin\omega t\cos\phi - \cos\omega t\sin\phi]$$
$$= A_1\sin(\omega t - \phi) \quad (9.8)$$

समीकरण (9.6) तथा (9.7) का प्रयोग करते हुए हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$A_1^2 = A^2(\cos kx_1 + \cos kx_2) + A^2(\sin kx_1 + \sin kx_2)$$
$$= 2A^2[1 + \cos kx_1 \cos kx_2 + \sin kx_1 + \sin kx_2]$$
$$= 2A^2[1 + \cos k(x_2 - x_1)] = 2A^2(1 + \cos\delta) \quad (9.9)$$

यहां हमने समीकरण (9.3) में कलांतर के लिये δ प्रयोग किया है। समीकरण (9.7) को समीकरण (9.6) से भाग देते हुये तथा साइन व कोसाइन वाले पदों के योग को गुणांक में लाते हुए हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है:

$$\tan\phi = \frac{\sin kx_1 + \sin kx_2}{\cos kx_1 + \cos kx_2}$$

$$= \frac{2\sin\frac{k(x_1+x_2)}{2}\cos\frac{k(x_1-x_2)}{2}}{2\cos\frac{k(x_1+x_2)}{2}\cos\frac{k(x_1-x_2)}{2}}$$

$$= \tan k\frac{(x_1+x_2)}{2}$$

या

$$\phi = \tan^{-1}\frac{k(x_1+x_2)}{2}$$

समीकरण (9.9) से हमें बिंदु पर परिणामी तीव्रता का व्यजंक मिलता है, जो निम्नलिखित है:

$$I \alpha A_1^2 = 2A^2(1 + \cos\delta)$$

या

$$I \alpha 4A^2\cos^2\delta/2$$

स्पष्टत: जब $\cos\delta/2 = 1$

तो तीव्रता $I = 4A^2$

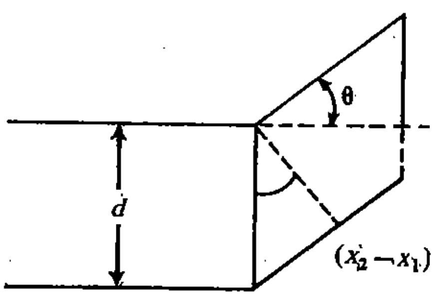
जो कि अधिकतम तीव्रता है तथा I_{max} से दर्शायी जाती है।

अब हम अधिकतम तीव्रता की स्थिति का परिकलना करेंगे। दोनों रेखाछिद्रों के बीच की दूरी को 'd' मान लें, जिस कोण पर हम कण-किरण-पुंज निरीक्षण करते हैं उसे θ मान लें तथा दोनों तरंगों के बीच के पथांतर को $(x_2 - x_1)$ मान लें।

तब समीकरण (9.6) से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:–

$$\sin\theta = \frac{x_2 - x_1}{d} \quad \text{या} \quad d\sin\theta = (x_2 - x_1)$$

तीव्रता का अधिकतम मान तब प्राप्त होता है जब भी यह पथांतर, λ, जो कि यहां कि यहां



चित्र 9.6: d और θ में संबंध

पर प्रयोग होने वाली तरंगों की तरंग दैर्ध्य है, का समाकल गुणांक होता है। अतः अधिकतम तीव्रता के लिये:

$$d \sin \theta = n\lambda \quad \text{जहाँ} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \tag{9.13}$$

व्यतिकरण न्यूनतम तब होता है, जब भी यह पथांतर $\lambda/2$ का विषम संमाकल गुणांक होता है यानि

$$d \sin \theta = (2n + 1)\lambda/2 \quad \text{जहाँ} \quad n = 0, 1, 2, \ldots\ldots \tag{9.14}$$

बोध प्रश्न 2

प्रकाश किरणें दो रेखाछिद्रों में से गुजरती हैं जिन में आपस की दूरी $d = 0.8$ mm है। परदे से 1.6 m दूरी पर स्थित द्वितीय क्रम के अधिकतम की दूरी अक्ष से 2.5 mm है। यहां पर प्रयोग में आने वाली किरणों की तरंग दैर्ध्य ज्ञात कीजिए।

अब तक की चर्चा से हमने माना है कि दोनों तरंगों का आयाम बराबर है। परन्तु यदि हम इन दोनों तरंगों का आयाम क्रमशः a_1 तथा a_2 मानें तो हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि परिणामी आयाम निम्नलिखित होगा:

$$A_1^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \delta$$

इस परिस्थिति में अधिकतम व न्यूनतम तीव्रताएं निम्नलिखित हो जायेंगी (जैसी कि भाग 9.2.3 में सिद्ध किया जायेगा):

$$I_{max} = (a_1 + a_2)^2$$

और

$$I_{min} = (a_1 - a_2)^2$$

इनका अनुपात निम्नलिखित होगा:

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{(a_1 + a_2)^2}{(a_1 - a_2)^2} \tag{9.16}$$

यदि हम $\beta = \frac{a_1}{a_2}$ मानें तो समीकरण (9.16) निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{(\beta + 1)^2}{(\beta - 1)^2} \tag{9.17}$$

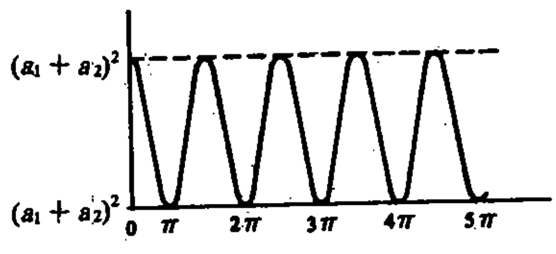
9.2.3 एक व्यतिकरण चित्रांग में तीव्रता वितरण

हमने देखा है कि जब a_1 तथा a_2 आयामों व δ कलांतर वाली दो तरंगें अध्यारोपित होती हैं तो परिणामी तीव्रता I निम्नलिखित होती हैं:

$$I = A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos \delta$$

कलांतर δ के साथ तीव्रता वितरण का अध्ययन करने के लिये, आइये हम I vs δ का ग्राफ बनायें। यह चित्र 9.7 में दिखाया गया है। जब कलांतर 0, 2π, 4π इत्यादि होता है तो $\cos \delta = 1$ होता है। तब हमें अधिकतम तीव्रता प्राप्त होती है, यानि

$$\begin{aligned} I_{max} = A_1^2 &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \\ &= (a_1 - a_2)^2 \end{aligned} \tag{9.19}$$



चित्र 9.7 : तीव्रता I और कोण δ के बीच ग्राफ

विशेष परिस्थिति में, जब दोनों आयाम बराबर हों, यानि $a_1 = a_2 = d$ तो तीव्रता का अधिकतम मान $4a^2$ से न्यूनतम मान शून्य के बीच में वितरित होती है। एकवर्णी स्रोत से आने वाली प्रकाश तरंगों के लिये आपको शून्य तीव्रता वाली अदीप्त फ्रिन्ज, चमकीली फ्रिन्ज द्वारा अलग दिखाई देंगी।

तीव्रता वितरण वक्र से यह पता चलता है कि जब एकदम भिन्न कलाओं वाली दो तरंगें परदे पर एक साथ पड़ती हैं तो विनाशी व्यतिकरण होता है तथा परिणामी तीव्रता (या ऊर्जा फ्लक्स) शून्य होता है। शून्य तीव्रता पर ऊर्जा की क्षति से जो भी कमी होती है वह ऊर्जा संरक्षण की वजह से, अधिकतम तीव्रता वाली चोटी में वितरित हो जाती हैं।

हमने पहले देखा है कि बराबर आयाम वाली तरंगों के लिये तीव्रता को निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है:

$$I = 2a^2(1 + \cos\delta) = 4a^2\cos^2\delta/2$$

क्योंकि $\cos^2\delta$ का औसत मान ½ होता है, चित्र 9.7 में $I = 2a^2$ पर डाट रेखा औसत तीव्रता है, जो कि वास्तव में प्रत्येक रेखाछिद्र से मिलने वाली तीव्रता का योग है।

चित्र 9.5 में हम देखते हैं कि S_1 व S_2 से P पर आने वाली तरंगों के बीच में पथांतर = $(x_2 - x_1) = d\sin\theta$। यदि θ बहुत कम हो तथा रेडियम में नापा जाये तो हम निम्नलिखित सन्निकटन कर सकते हैं:

$$\sin\theta \simeq \tan\theta \simeq \theta$$

समीकरण (9.13) का प्रयोग करते हुए हम अधिकतम तीव्रता के लिये निम्नलिखित प्रकार से लिख सकते हैं:

$$d\sin\theta = \frac{dy_n}{D} = n\lambda$$

$$\Longrightarrow y_n = \frac{nD\lambda}{d} \quad \text{जहां} \quad n = 0, 1, 2, \ldots..$$

जहां y_n, n^{th} अधिकतम तीव्रता वाली चोटी की उस बिंदु से दूरी है, जहां दोनों रेखाछिद्र को जोड़ने वाली रेखा का लंब द्विभाजन पर्दे से मिलता है। दो निकटतम अधिकतम तीव्रता वाली स्थितियों को निम्न प्रकार से लिखते हैं:

$$y_n = \frac{nD\lambda}{d}$$

तथा

$$y_{n+1} = (n+1)\frac{\lambda}{d}$$

दो क्रमागत अधिकतम तीव्रता में दूरी Δy (या फ़्रिन्ज की चौड़ाई β) निम्नलिखित होंगी:

$$\beta = y_{n+1} - y_n = \frac{D\lambda}{d} \qquad (9.20)$$

इससे हमें ज्ञात होता है कि जब तक θ का मान कम होता है, तब तक दो क्रमागत अधिकतम तीव्रता की दूरी n पर निर्भर नहीं करती और अधिकतम तीव्रता दूरी पर बराबर की आती है। ठीक इसी प्रकार हम यह सिद्ध कर सकते हैं कि दो क्रमागत न्यूनतम तीव्रता के बीच की दूरी भी D/d के बराबर होती है तथा वह भी बराबर की दूरी पर होती है।

बोध प्रश्न 3

क) यदि दो स्रोत S_1 व S_2 चित्र 9.3 जैसी तरंगें उत्पन्न करते हैं, जो

1. बराबर कला वाली हैं 2. जिनमे π का कलांतर है, तो इन दोनों दशाओं में परिणामी तरंग की तीव्रता, स्रोत S_1 व S_2 के लंब विभाजन की स्थिति पर क्या होगी, इसकी चर्चा कीजिये।

ख) यदि दो ऐसे स्रोतों, जिनकी तीव्रता अनुपात 25:1 है, से आने वाली तरंगों के व्यतिकरण हो तो अधिकतम व न्यूनतम तीव्रता की ज्ञात कीजिये।

बोध प्रश्न 4

दो लाउडस्पीकर जिनके बीच की दूरी 5 m है को एक कोमन एम्पलीफायर से जोड़ा गया है। यदि कोई स्पीकर से 100 m की दूरी पर सीधे पथ पर चलता है तो किस दर में तीव्रता परिवर्तित होगी यह मान लें कि ध्वनि तरंगों की तरंग दैर्ध्य = 0.3 m हैं।

प्रकाश तरंगों के व्यतिकरण द्वारा हमें इसका भी पता चलता है कि पानी पर तेल की पतली परत से या साबुन के बुलबुले में विभिन्न सुंदर रंगों की उत्पत्ति कैसे होती है। अगले भाग में हम इस पर एक संक्षिप्त चर्चा करेंगे।

9.2.4 तनु फिल्म में व्यतिकरण

आपने चमकीले व अदीप्त फ़िन्ज के संबंध के बारे में भाग 9.2.3 में पढ़ा है। इन संबंधों को हम तनु फिल्म में उत्पन्न होने वाले रंगों की व्याख्या करने में प्रयोग करेंगे।

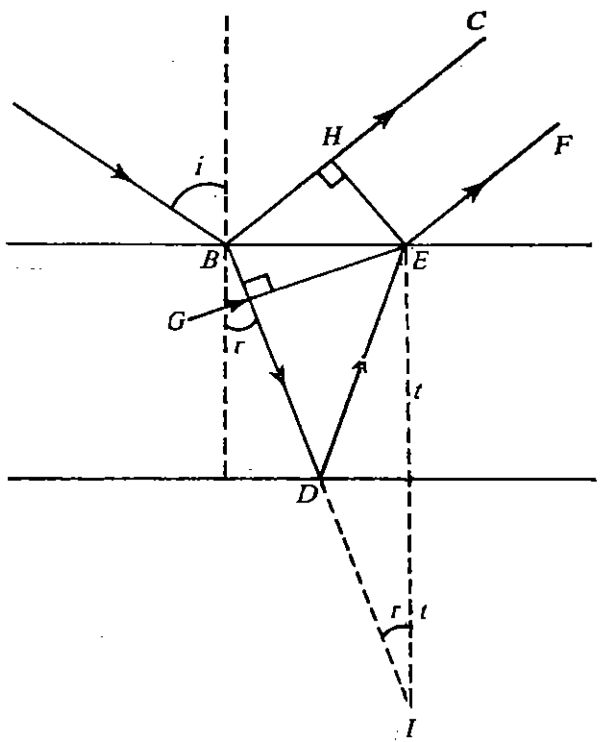
जैसे कि चित्र 9.8 में दिखाया गया है, एक समान मोटाई तथा अपवर्तनांक गुणांक μ वाली तनु फ़िल्म पर आपतित प्रकाश किरण AB पर विचार करें। इसका कुछ भाग BC की दिशा में प्रत्यावर्तित हो जायेगा तथा बाकी भाग BD की दिशा में फिल्म में परावर्तन होगा। D पर दुबारा इसका कुछ भाग DE की दिशा में प्रत्यावर्तित होगा। किरण DE का कुछ भाग EF की दिशा से बाहर हवा में आ जाता है जो BC के समानान्तर होता है। अतः आपतित किरण B पर दो भिन्न-भिन्न आयामों वाली किरणों में विभाजित हो जाती हैं, जिनमें से परावर्तित किरण की D, E इत्यादि पर बहुलित परावर्तन होता है तथा EH, E से BC पर लंब है।

किरणों BC तथा EF में परावर्तित तंत्र में, पथांतर निम्नलिखित होता है:

$$\mu = \mu\,(BD + DE) - BH$$

इसे हम $2\mu t \cos r$ के बराबर सिद्ध कर सकते हैं, यानि

$$\text{पथांतर} = 2\mu t \cos r \tag{9.21}$$



चित्र 9.8: तनु फिल्म में व्यतिकरण (*BD* को *I* तक बढ़ाया गया है और ($BD = DI$)

जहाँ r फिल्म का अपवर्तन कोण है। हम पहले यह पढ़ चुके हैं कि सघन माध्यम में अपवर्तन होने से π का कलांतर आ जाता है। यह $\lambda/2$ के पथांतर के बराबर है। किरण BC का सघन माध्यम पर अपवर्तन होना है। इसलिए प्रत्यावर्तित किरणों BC और EF में कुल पथांतर निम्नलिखित होगा।

$$\text{पथांतर} = 2\mu t \cos r - \lambda/2$$

फ़िल्म तब चमकीली होती है जहां

$$2\mu t \cos r - \lambda/2 = n\lambda \tag{9.22}$$

तथा अदीप्त होती है जब

$$2\mu t \cos r - \lambda/2 = (2n + 1)\,\lambda/2 \tag{9.23}$$

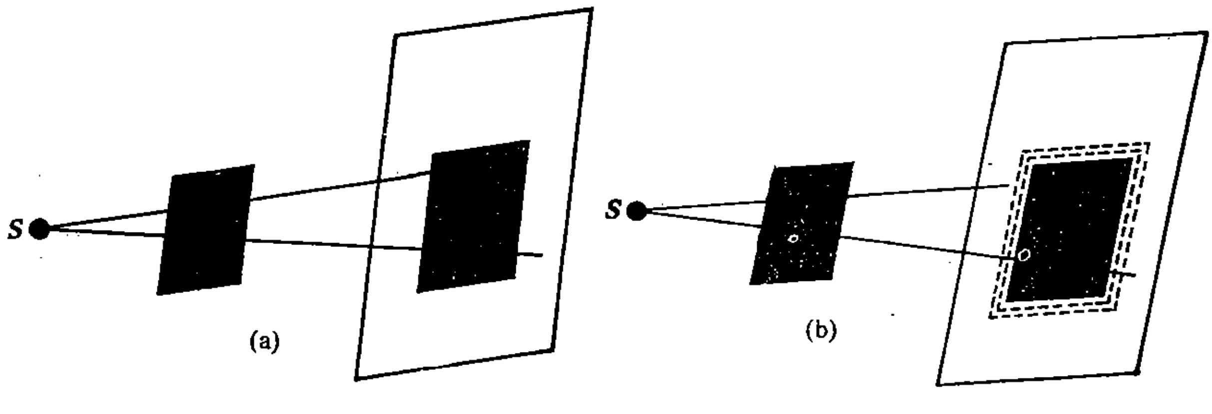
अतः हम देखते हैं कि एक वर्णी प्रकाश किरणों से हमें एक छोड़ कर एक चमकीली व अदीप्त फ़िन्जें मिलती है। श्वेत प्रकाश किरणों से, जिसमें कई रंग मिले हुये होते हैं हमें रंगीन फ़िन्जें मिलती हैं।

हमने ऊपर देखा है पथांतर t व λ के अलावा μ व r पर निर्भर करता है। विभिन्न रंगों के लिये पथांतर भी अलग-अलग होता है क्योंकि विभिन्न रंगों के लिए μ भी अलग-अलग होता है। इसी प्रकार विभिन्न आपतन कोण के लिए भिन्न-भिन्न परावर्तन कोण होते हैं। इसे अलग-अलग दिशाओं से देखने पर अलग-अलग रंग नजर आते हैं। इन सब ही वजह से हमें तनु फिल्म में रंग दिखाई देते हैं। यह प्रकाश किरणों के व्यतिकरण से उत्पन्न होते हैं।

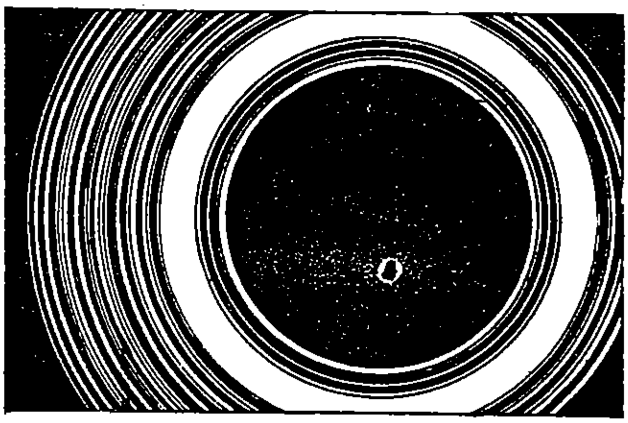
9.3 विवर्तन

कई प्रयोगों द्वारा यह निरीक्षण किया गया है कि जब एक प्रकाश की किरण किसी छोटे से छेद (छोटा गोल छेद या पतला रेखा छिद्र) से गुजरती है तो वह कुछ दूरी तक ज्यामितीय बिम्ब वाले भाग में फैल जाती है। इसे प्रकाश किरणों का विवर्तन कहते हैं।

एकवर्णी प्रकाश के बिंदु स्रोत S को लें, जैसा कि चित्र 9.9 में दिखाया गया है। स्रोत व परदे के मध्य में एक अवरोध जैसे एक सिक्का या तेज धारवाला रेजर ब्लेड रख दें। ज्यामितीय के नियमों के अनुसार हम एक पूर्ण स्पष्ट व साफ परछाई की उम्मीद करते हैं, जैसा कि चित्र 9.9 में दिखाया गया है। अब आप परछाई का ध्यान से निरीक्षण करें। यदि प्रयोग एक अंधेरे कमरे में किया जाये, तथा प्रयोग में आने वाली प्रकाश किरणों की तरंग दैर्ध्य, अवरोध के किनारों के नाप की हो तो आप देखेंगे कि परछाई के किनारे साफ नहीं होंगे। परछाई के अंदर, किनारों के पास, प्रकाश किरणों की तीव्रता धीरे-धीरे कम होती जाती है। परछाई के बाहर, यह धीरे-धीरे बढ़ती जाती है, वह एक छोड़ कर एक चमकीला व अदीप्त फ़िन्ज बनाती है, जैसा कि चित्र 9.10 में दिखाया गया है।

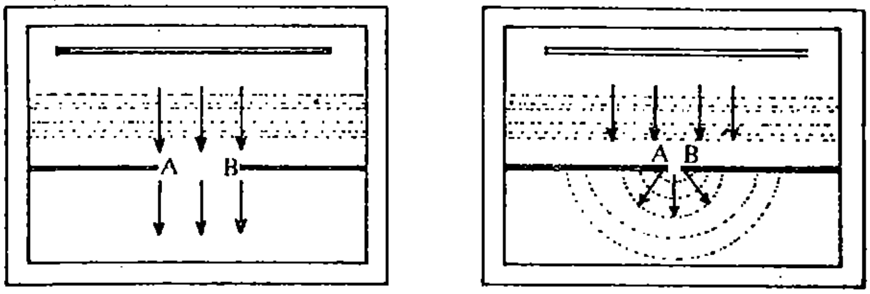


चित्र 9.9: एक चकोर अवरोध द्वारा विवर्तन



चित्र 9.10: विवर्तन चित्राम जो एक सिक्के को अवरोध के रूप में रखकर लिए गए हैं।

ऊर्मिका टंकी में जल तरंगों पर विचार करें। मान लों कि आप ऊर्मिका टंकी में पानी की सतह पर, एक सीधा लोलक जैसे कि रूलर को आवधिक रूप से ऊपर नीचे गतिमान करके, समतल तरंगें उत्पन्न करते हैं। एक अवरोध को लें, जैसे कि बढ़ती हुई तरंगों के रास्ते में रेखाछिद्र AB को रख दिया जाये (चित्र 9.11देखें)। जब तक छेद AB बड़ा है तब तक उसमें से गुजरती हुई समतल तरंगें लगभग, समतल तरंगे ही दिखाई देगी। निकलने वाली समतल तरंगों के किनारे लगभग रेखाछिद्र AB के किनारों के बराबर होते हैं। यदि छेद की चौड़ाई कम कर दी जाये, और वह जल तरंगों की तरंग दैर्ध्य के बराबर जाए तो छोटे छेद में प्रवेश करने वाली सब समकोण समतल तरंगें, लगभग गोलाकार संकेन्द्री रिंग के रूप में फैल जाती हैं, जैसा कि चित्र 9.11 में दिखाया गया है।



चित्र 9.11 : ऊर्मिका टंकी

परिणामस्वरूप, यह गोलाकार तरंगें न केवल सीधी दिशा में चलती हैं, परन्तु छेद के किनारों के आसपास से भी गुजरती हैं। तरंगों के, द्वारक के (या अवरोध के) किनारों पर मुड़ने की इस परिघटना को विवर्तन कहते हैं।

यह तरंगों के मुड़ने का गुण तब बहुत स्पष्ट रूप से उभरता है। जब तरंगों की तरंग दैर्ध्य उस छेद के नाप (या अवरोध के नाप) के तुलनात्मक होती है, जिसमें से तरंगें गुजरती हैं। 500 हर्टज आवृत्ति वाली ध्वनि तरंगों की हवा में तरंगदैर्ध्य 0.6 m होती है जबकि पीली प्रकाश किरणों की तरंगदैर्ध्य 6×10^{-7} m होती है। स्पष्टतः ध्वनि तरंगों के लिये यदि कमरे का दरवाजा 1 m के लगभग हो तो हम ध्वनि तरंगों के विवर्तन का निरीक्षण कर सकते हैं। परन्तु प्रकाश किरणों के लिये छेद का नाप लगभग 10^{-6} m होना चाहिये तभी हम ध्वनि तरंगों की तरह प्रकाश किरणों का विवर्तन देख पायेंगे। इसलिये प्रकाश किरणों में विवर्तन देख पाना, जल तरंगों या ध्वनि तरंगों में विवर्तन देखने से कहीं ज्यादा कठिन है। लेकिन प्रकाश किरणों में विवर्तन, खास तौर पर बनाये गये प्रयोगों में देखा जा सकता है, जिनके बारे में हम अब पढ़ेंगे।

9.3.1 विवर्तन के विभिन्न प्रकार : फ्रानहोवर व फ्रेनल

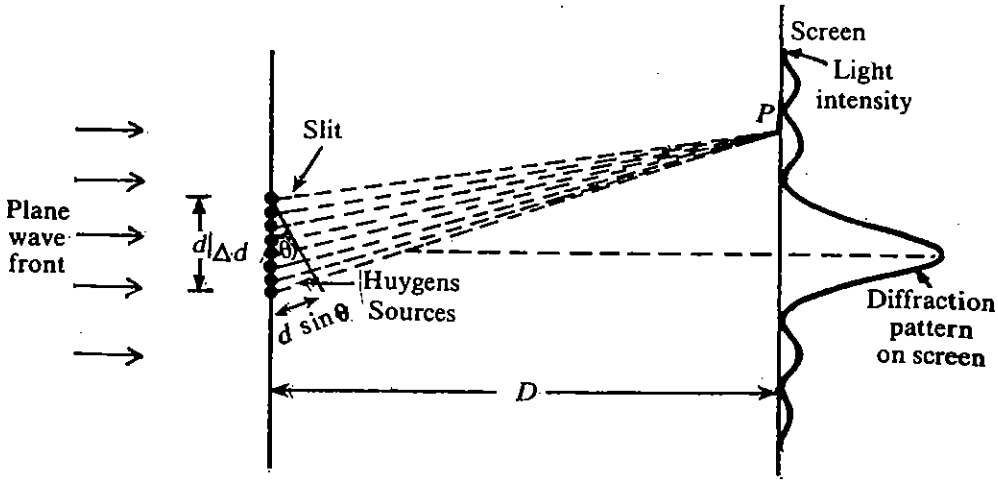
प्रकाश किरणों के विवर्तन को प्रायः दो प्रकार का होता है : फ्रानहोवर तथा फ्रैनल विवर्तन। फ्रानहोवर विवर्तन (या सुदूर क्षेत्र विवर्तन) में विवर्ती निकाय (यानि छेद या अवरोध) स्रोत से इतना दूर होता है कि चित्राम बनाने वाली तरंगों को प्रायः समतल तरंगें माना जा सकता है। यह प्रयोगशाला में, स्रोत को उत्तल लेन्स के फोक्स पर रख कर, प्रकाश किरणों को समकोण बना कर, उपलब्ध किया जा सकता है। फ्रैनल विवर्तन (या निकट क्षेत्र विवर्तन) में, दूसरी तरफ, तरंगों का स्रोत विवर्ती निकाय के इतना नजदीक होता है कि चित्राम बनाने वाली तरंगें अपने वक्रिय गुणधर्म रखती है। इसका अर्थ यह है कि फ्रैनल विवर्तन में उत्तल लेन्स को प्रयोग में नहीं लाया जाता तथा स्रोत की प्रकृति के आधार पर तरंगें वृतीय या कोणीय रहती हैं।

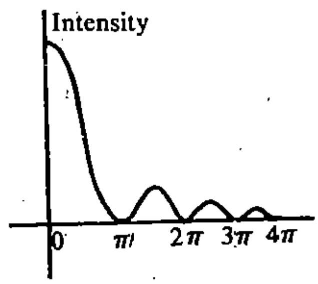
विवर्तन चाहे किसी भी प्रकार का हो, पर्दे पर या दिकस्थान में परिणामी ऊर्जा वितरण, एक ही तरंगाग्र के विभिन्न भागों के अध्यारोपण से उपलब्ध होता है। फ्रानहोवर प्रकार के विवर्तन में तरंगाग्र वृतीय या कोणीय होता है। व्यतिकरण में हम दो या अधिक स्रोत लेते हैं जबकि विवर्तन में हमारे पास कई लगभग अगण्य स्रोत होते हैं।

आने वाले भागों में हम प्रकाश की दो विशेष स्थितियों के बारे में पढ़ेंगे: पहली – एक सूक्ष्म रेखाछिद्र से विवर्तन तथा दूसरी सीधी कोर से विवर्तन। पहली स्थिति फ्रानहोवर प्रकार की है जबकि दूसरी फ्रैनल प्रकार के विवर्तन की है।

9.3.2 एक रेखाछिद्र द्वारा फ्रानहोवर विवर्तन

आइये अब हम एक रेखाछिद्र से गुजरती हुई समतल तरंगों द्वारा बनाये गये विवर्तन चित्राम का विश्लेषण करें। हम यह देखते हैं कि कोई भी रेखाछिद्र या द्वारक चाहे कितना भी छोटा क्यों न हो फिर भी उसका एक सीमित नाप होता है। हाइजन के सिद्धांत के अनुसार, इसका प्रत्येक बिंदु द्वितीय तरंगिका की तरह काम करता है। इस तथ्य के आधार पर हमें पता लगता है कि तरंगों में विवर्तन को रेखाछिद्र के विभिन्न भागों में बांटा जाता है।





चित्र 9.12 : (अ) एक रेखाछिद्र से विवर्तन। (ध्यान दें कि प्रकाश किरण सीधे पथ पर नहीं चल रही है)
(ब) sin α और α के बीच में ग्राफ

चित्र 9.12 (अ) में d चौड़ाई की सूक्ष्म रेखाछिद्र का एक बड़ा चित्र दर्शाया गया है। हम यह मान लेते हैं कि जब समतल तरंगाग्र, रेखाछिद्र पर पहुंचता है तो उसके सब बिंदुओं से समकला वाले द्वितीय तरंगिका निकलते हैं। अतः यदि रेखाछिद्र की दूसरी तरफ अभिलम्ब से θ कोण पर स्थित बिंदु P पर विक्षोभ उत्पन्न हो तो रेखाछिद्र AB के दोनों किनारों की तरंगों में $d\sin\theta$ का पथांतर होगा। समीकरण (9.3) के अनुसार यह कलांतर $2\pi d\sin\theta/\lambda$ के बराबर है।

अब यह कल्पना करें कि रेखाछिद्र AB बहुत सारी बराबर चौड़ाई Δd वाली स्टिपस में विभाजित हैं। प्रत्येक रेखाछिद्र द्वितीय तरंगिका भेजती हैं तथा दो निकटतम स्टिप से बिंदु P पर पहुंचने वाली तरंगों में $d\sin\theta$ का पथांतर है। इसके बराबर कलांतर δ निम्नलिखित होगा:

$$\delta = \frac{2\pi\Delta d\sin\theta}{\lambda} \tag{9.24}$$

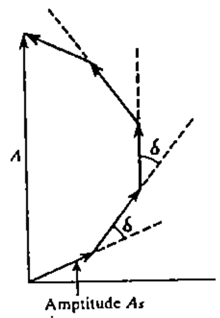
यदि हम स्लिट AB को कुल N लिस्ट में विभाजित करें तो स्पष्टतः $d = N\Delta d$ तथा कुल कलांतर निम्नलिखित होगा:

$$\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda}Nd\sin\theta = N\delta \tag{9.25}$$

यह मान लें कि प्रत्येक स्टिप से आने वाली द्वितीय तरंग का आयाम A_0 से दर्शाया जाता है। तब विंदु P पर परिणामी विक्षोभ, इन सभी स्टिप से आने वाली, तरंगों के अध्यारोपण से प्राप्त होगा। दूसरे शब्दों में,

$$Y = A_0 \sin(t - \phi) + A_0 \sin(t - \phi - \delta) + A_0 \sin(t - \phi - 2\delta) + \ldots (N \text{ पदों तक}) \quad (9.26)$$

जहां $\phi = \frac{2\pi r}{\lambda}$, विंदु P से पहली रेखाछिद्र से दूरी r की वजह से होने वाला कलांतर है। आपको याद होगा कि इस अध्यारोपण के बारे में हम पहले खंड 1 की इकाई 2 में विस्तार से चर्चा कर चुके हैं। वहां पर हमने यह सिद्ध किया था कि, परिणामी तरंग का आयाम A, A_0 लंबाई वाले N सदिशों, जिनमें से प्रत्येक अपने निकटतम सदिश के साथ δ का कोण बनाता है, के बीजीय योग से प्राप्त होगा (चित्र 9.13 देखें)।



चित्र 9.13 : निकटतम स्रोतों के योगदान के सदिश योग से परिणामी आयाम

इस स्थिति में परिणामी आयाम निम्नलिखित होगा:

$$A = A_0 \frac{\sin(N\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \quad (9.27)$$

हमें यह याद रखना चाहिये कि यह रेखाछिद्र का निश्चित स्टिपस में विभाजन कृत्रिम है। यदि हम यह सीमा लें, जब $N \to 0$ तो $d \to 0$ तब हमारे पास कला का संतत वितरण होगा। तब चित्र 9.13 में दिया गया सदिश चित्र, अर्धव्यास वाले चमकद्वार वृत्तीय वक्र में परिवर्तित हो जायेगा। जब परिणामी आयाम निम्नलिखित होगा:

$$A = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha} \quad (9.28)$$

जहां $A_0 = RN\delta$ व $\alpha = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$

समीकरण (9.28) से ज्ञात होता है कि आपतित दिशा के सापेक्ष किसी भी कोण θ पर प्रकाश की तीव्रता I_0 निम्नलिखित होगी:

$$I = I_0 \frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}$$

पर्दे पर तीव्रता का ग्राफ चित्र 9.12 में दिखाया गया है।

एक रेखाछिद्र फ्रानहोवर विवर्तन चित्राम के लिये, न्यूनतम तीव्रता आपतित दिशा से Q_n के कोण पर प्राप्त होती है जहां

$$n\lambda = d \sin\theta_n$$

यहां $n = 1, 2, 3, \ldots$ इत्यादि, मध्य अधिकतम से शुरू करते हुए विवर्तन अदीप्त बैंड की संख्या है।

समीकरण (9.29) से आप यह देखेंगे कि जब $\alpha \to 0$, $I_0 \to I_0$ की सीमा में यह मध्य अधिकतम तीव्रता की बन जाती है। ऐसा इसलिये होता है क्योंकि

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$$

α के उन मानों के लिये, जिनके लिये $\sin \alpha = 0$, $I_{\theta\phi} = 0$ होती है। **इससे हमें न्यूनतम तीव्रता की विभिन्न स्थितियों का पता चलता है जो α का मान $n\pi$ के बराबर होने पर होती हैं।**

θ_n के मान का, पहले दिये गये संबंधों द्वारा परिकलन किया जा सकता है यानि

$$\alpha = \pi d \sin \theta / \lambda$$

विभिन्न न्यूनतम तीव्रता वाले बिंदुओं के बीच में आने वाली विभिन्न अधिकतम तीव्रता वाली स्थितियों का पता लगाने के लिये हमें फलन $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$ का α के सापेक्ष अवकलन करना पड़ेगा तथा उसे शून्य के बराबर रखना पड़ेगा। विस्तृत परिकलन से हमें ज्ञात होता है कि यह अधिकतम, जिन्हें द्वितीय अधिकतम भी कहते हैं, $\alpha = 1.429\pi$, 2.459π, 3.471π इत्यादि पर प्राप्त होती है। (इस परिकलन का विस्तार हम अपने प्रकाश के खंड में देंगे) इन द्वितीय अधिकतमों की ऊंचाई क्रमशः मध्य अधिकतम की $1/21$, $1/61$ तथा $1/120$ होती है। इससे हमें एक रेखाछिद्र विवर्तन चित्राम में तीव्रता वितरण की एक धारणा मिलती है जिसे चित्र 9.12 (ब) में दर्शाया गया है।

तीव्रता वक्र का कोणिय विस्तार निम्नलिखित होगा:

$$\sin \theta = \frac{\lambda}{d}$$

इससे हमें पता चलता है कि जैसे-जैसे तरंग दैर्ध्य λ बढ़ती है या रेखाछिद्र की चौड़ाई कम होती है वैसे-वैसे ही कोणिय विस्तार बढ़ता है। यानि जितनी ज्यादा पतला रेखाछिद्र होगा उतना ही ज्यादा चौड़ा विवर्तन चित्राम होगा। रेखाछिद्र व पर्दे के बीच की दूरी D तथा मध्य अधिकतम की चौड़ाई के आधार पर पर्दे पर Δy निम्नलिखित होगा:

$$\Delta y = \frac{D\lambda}{d} \tag{9.31}$$

तीव्रता वक्र की मध्यम चोटी को प्राथमिक अधिकतम कहते हैं, जब कि बाकि चोटी को द्वितीय अधिकतम कहते हैं।

प्राथमिक अधिकतम की ऊंचाई किसी भी दूसरी द्वितीय अधिकतम की ऊंचाई से बहुत अधिक होती है।

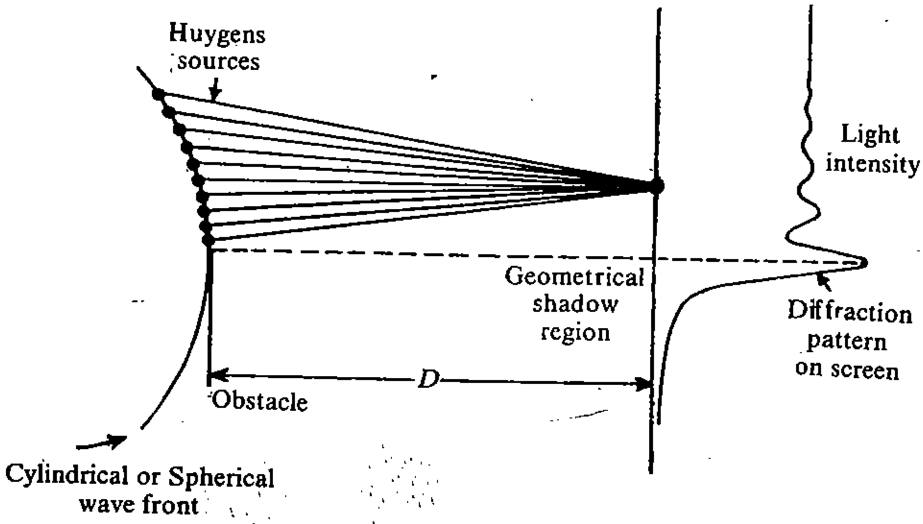
बोध प्रश्न 5

तरंग दैर्ध्य 6000 Å वाली प्रकाश किरणों के लिये मध्यम अधिकतम के कोणीय विस्तार का परिकलन कीजिये जबकि रेखाछिद्र की चौडाई निम्नलिखित है:

(i) 10^{-2} m (2) 2×10^{-2} m

9.3.3 सीधी कोर पर विवर्तन

यदि हम तरंगों के रास्ते में कोई बाधा या अवरोध डाल दें, जैसे हजामत वाला उस्तरा, छोटे से स्रोत से आने वाली प्रकाश किरणों के रास्ते में रख दें तो हम देखेंगे कि उस्तरे की परछाई



चित्र 9.14: एक सीधी कोर से प्रकाश की किरणों के द्वारा विर्वतन (ध्यान रहे कि यहाँ ज्योमितीय छाया में प्रकाश की तीव्रता है जो यह दर्शाता है कि प्रकाश की किरणें सीधी रेखा में चलती हैं।)

साफ नहीं होती। अपितु प्रकाश किरणों की तीव्रता पर्दे पर एक चित्राम बनती है जो कि चित्र 9.14 में दिखाया गया है। वह भाग भी प्रकाशित पाया जाता है जहां पर वास्तव में अंधेरा होना चाहिये था।

विवर्तन चित्राम की तीव्रता वक्र प्रायः व्यतिकरण चित्राम के तीव्रता वक्र से बिल्कुल भिन्न होता है। व्यतिकरण चित्राम में पथ की ऊंचाई व चौड़ाई सदैव बराबर होती है। चित्र 9.7 जिसका अर्थ यह है कि सभी अधिकतम या न्यूनतम बराबर तीव्रता के होते हैं तथा उनके बीच की दूरी भी बराबर होती है जबकि विवर्तन चित्राम में ऐसा नहीं होता। विवर्तन चित्राम में अधिकतम (या न्यूनतम) बराबर तीव्रता के नहीं होते तथा उनके बीच की दूरी भी बराबर नहीं होती (चित्र 9.12 व 9.14 देखें)।

बोध प्रश्न 6

आवृत्ति 1650 हर्टज वाली ध्वनि तरंगें, 0.6 चौड़ाई वाले छेद पर लंबवत् पड़ती हैं। एक सुननेवाला, छेद के लंब दिशा में बीच में एक बिंदु से शुरू होकर, छेद से 3 m की दूरी पर, छेद के समकोण चलता है। उन स्थितियों को ज्ञात कीजिये जब उसे न्यूनतम ध्वनि सुनाई देगी।

(हवा में ध्वनि वेग का मान 330 m/s होता है)

9.4 सारांश

- दो स्रोतों को तब संबद्धता कहा जाता है जब उनसे निकलने वाली तरंगों में शून्य या स्थिर कलांतर हो।
- दो संबद्धता स्रोतों से आने वाली तरंगों के अध्यारोपण के परिणाम स्वरूप दिकस्थान में ऊर्जा वितरण एक सा नहीं होता। यह पाया जाता है कि वह एक छोड़ कर एक, अधिकतम व न्यूनतम से गुज़रता है। इस तरह के वितरण को व्यतिकरण चित्राम कहते हैं।
- यदि दो, समान आवृत्ति वाली, a_1 व a_2 आयाम वाली तथा ϕ_1 व ϕ_2 कलाओं वाली, तरंगें एक कण को प्रभावित करती हैं तो अध्यारोपण के सिद्धांत के अनुसार परिणामी तरंग का आयाम A निम्न प्रकार से दर्शाया जाता है:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\phi_1 - \phi_2)$$

- दो व्यतिकरण करने वाली तरंगों में (जो दो संबद्धता स्रोतों से आ रही हैं) कलांतरण का, यदि वो विभिन्न पथों से गुजरे, परिकलन, निम्न संबंध से किया जा सकता है:

$$\text{कलांतर} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{पथांतर}$$

अधिकतम तीव्रता वहां पर मिलती है जहां पथांतर λ जो कि प्रकाश किरणों की तरंग-दैर्ध्य है, का समाकल गुणांक होता है। किसी व्यतिकरण चित्राम में किन्हीं दो निकटतम, अधिकतम या न्यूनतम के बीच की दूरी निम्न होती है।

$$\beta = \frac{D\lambda}{d}$$

जहां β को फ्रिन्ज की चौड़ाई कहते हैं, λ प्रकाश किरणों की तरंग दैर्ध्य है, d दो संबद्धता स्रोतों के बीच की दूरी है, तथा D स्रोतों व पर्दे के बीच की दूरी है।

- विवर्तन से हमारा अभिप्राय है किनारों के आसपास तरंगों का मुड़ना होता है। विवर्तन चित्राम की दो प्रकार होती हैं, जिन्हें फ्रानहोवर फ्रैनल तथा फ्रैनल विवर्तन कहा जाता है।
- फ्रैनल विवर्तन तब पाया जाता है जब विवर्तन चित्राम का निरीक्षण करने वाले स्रोत व पर्दे विवर्तन उत्पन्न करने वाले छेद या अवरोध से निश्चित दूरी पर होते हैं।
- फ्रानहोवर विवर्तन में स्रोत व पर्दा विवर्तन उत्पन्न वाले छेद से अगणनीय दूरी पर स्थित होते हैं।
- एक रेखाछिद्र विवर्तन चित्राम में न्यूनतम तीव्रता जिन कोणों पर पाई जाती है, वह निम्न हैं:

$$n\lambda = d\sin\theta_n$$

9.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. दो संबद्धता स्रोतों से आने वाली प्रकाश किरणों में, तीसरी अदीप्त फ़िन्ज बनाने के लिये क्या पथांतर होगा।

2. यंग का प्रयोग, हरी मर्करी लाइन के प्रकाश से किया गया। यदि फ़िन्ज को माइक्रोमीटर से नापा जाये। नेत्रिका दो रेखाछिद्र के 80 cm पीछे है। यह पाया गया है कि 20 फ़िन्ज 10.42 mm की दूरी में हैं। दोनों रेखाछिद्र के बीच की दूरी ज्ञात कीजिये। आप जानते हैं कि हरी मर्करी लाइन की तरंगदैर्ध्य 5460 Å होती हैं।

3. 5000 Å वाली प्रकाश किरणें, एक रेखाछिद्र पर लंबवत् आपतित होती है। विवर्तन चित्राम का पहला न्यूनतम पर्दे पर मध्यम अधिकतम से 0.5 cm की दूरी पर है, जब कि पर्दा रेखाछिद्र से 2 m की दूरी पर हैं। रेखाछिद्र की चौड़ाई का परिकलन कीजिये।

9.6 उत्तर

1. बल्बों द्वारा भेजी गई प्रकाश किरणें न तो समकला वाली होंगी और न ही उनका कलांतर स्थिरांक होगा।

2. छोटे कणों के लिये $\sin\theta$ को y/D के बराबर रख सकते हैं। जहां y दिये गये अधिकतम की अक्ष से दूरी है तथा D रेखाछिद्र से पर्दे की दूरी है द्वितीयकोटी अधिकतम के लिये हम निम्नलिखित लिख सकते हैं:

$$d\sin\theta = n\lambda \quad \text{जहां} \quad n = 2$$

जिससे हमें निम्नलिखित मिलता है:

$$d\,(y/D) = n/\lambda$$

या $$\lambda = \frac{dy}{nD} \quad y = 2.5\text{ mm},\ D = 1.6\text{ m तथा } d = 0.8\text{ mm}$$

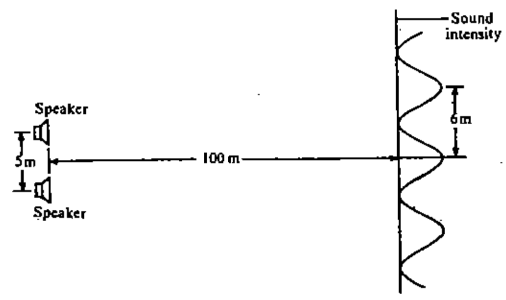
$$\lambda = \frac{(8\text{ mm})\,(2.5\text{ mm})\ 1.25\times10^{-3}\text{mm}}{1.6\text{m}} = 1.25\times10^{-7}\text{mm}$$

3. क) लंब द्विभाजक पर 1.6 m पथांतर शून्य होता है। यदि स्रोत समान कला वाली तरंगें भेजे तो लंब द्विभाजक पर तीव्रता अधिकतम होगी। दूसरी स्थिति में, लंब द्विभाजक पर न्यूनतम तीव्रता होगी।

ख) $$\beta = \sqrt{\frac{a_1^2}{a_2^2}} = \sqrt{\frac{25}{1}} = 5$$

$$\frac{I_{max}}{I_{min}} = \frac{(5+1)^2}{(5-1)^2} = \frac{36}{16} = 2.25$$

4. $$y = \frac{D\lambda}{d} = \frac{0.3\times100}{5.0}$$
$$= 6\text{ m}$$



5. क) समीकरण (9.30) का प्रयोग करते हुये

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d} = \frac{6000\times10^{-10}\,\text{m}}{10^{-2}\,\text{m}} = 6000\times10^{-8}\,\text{m}$$

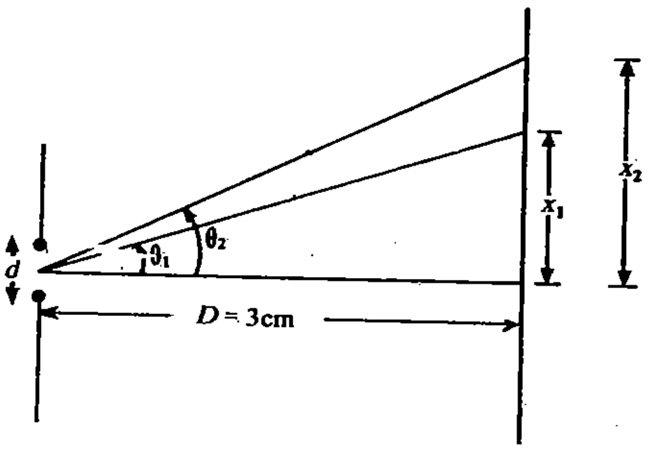
$\sin\theta$ के इतने कम मान के लिये

$$\sin\theta \simeq \theta = 6000\times10^{-8} = 6\times10^{-5} = \frac{1}{230}\ \text{डीग्री}$$

ख) $\sin\theta = 6000\times10^{-10}/2\times10^{-5} = 3000\times10^{-5}$

$= .03$ रेडियम

$$= \frac{.03\times180}{3.1416} = 1.8\ \text{डीग्री}$$



6. $$\lambda = \frac{\text{वेग}}{\text{आवृति}} = \frac{330}{1650} = 0.2\ \text{m}\ \text{तथा}$$

$d = 0.6$ m

न्यूनतम तीव्रता की स्थिति वहां होगी जहां

$d\sin\theta = n\lambda$ जबकि $n = 1, 2, 3$ ......

अतः न्यूनतम तीव्रता वाली स्थितियां निम्नलिखित दिशाओं में होंगी

$$\theta_n = \sin^{-1}\frac{n\lambda}{d}\ \text{यानि}$$

$$\theta_1 = \sin^{-1}\frac{.2}{.6}\quad \sin^{-1}\frac{1}{3} = 19^0$$

$$\theta_2 = \sin^{-1}\frac{2\times.2}{.6}\quad \sin^{-1}\frac{2}{3} = 42^0$$

निरीक्षक को निम्नलिखित स्थितियों में न्यूनतम तीव्रता प्राप्त होंगी :

$$x_1 = D\tan\theta_1 = 3\tan19 = 3\times0.344 = 1.03\ \text{m}$$

$$x_2 = D\tan\theta_2 = 3\tan42 = 3\times0.9 = 2.7\ \text{m}$$

(ध्यान दें कि न्यूनतम तीव्रता वाली स्थितियों समान दूरी पर नही है)

अंत में कुछ प्रश्न का हल

1. तीसरी अदीप्त फ़िन्ज की तरंगों के बीच के पथांतर को δ मान लें।

तब $\delta = (2n+1)\lambda$ जहां $n = 2$

$$\lambda = 5896\ \mathring{A} = 5896 \times 10^{-10}\text{m}$$

$$\therefore\ \delta = (5 \times 5896 \times 10^{-10})/2 = 1.474 \times 10^{-6}\text{m}$$

2. यंत्र के प्रयोग में फ़िन्ज की चौड़ाई निम्नलिखित होगी :

$$\beta = \lambda D/d$$

क्योंकि 10.92 mm की दूरी में 20 फ़िन्ज मिलती है फिन्ज की चौड़ाई निम्नलिखित होगी:

$$\beta = (10.92/20)\ \text{mm} = (10.92 \times 10^{-3}/20)\ \text{m}$$

तथा $D = 80$ cm व $\lambda = 5.460 \times 10^{-7}$m

अत: $$d = \frac{5.460 \times 10^{-7} \times 0.8 \times 20}{10.92 \times 10^{-3}}\ \text{m m}$$

$$= 8.0 \times 10^{-4}\text{m}$$

$$= 8.0 \times 10^{-1}\text{mm}$$

$$= 0.8\ \text{mm}$$

3. एक रेखाछिद्र द्वारा फ्रानहोवर विवर्तन में, न्यूनतम तीव्रता वाले विवर्तन कोण निम्नलिखित होंगे:

$d \sin\theta = n\lambda$ जहां $n = 1, 2, 3$

पहले न्यूनतम के लिये n = 1 अत: हम लिख सकते हैं

$$d \sin\theta = \lambda$$

यदि θ बहुत कम हो तो $\sin\theta \cong \theta$ (θ रेडियम में होगा)

$$d\theta = \lambda \text{ या } \theta = \frac{\lambda}{D} \text{ रेडियम}$$

यहां $\lambda = 5000\ \mathring{A} = 5000 \times 10^{-8}$cm तथा d = ?

$\theta = 5000 \times 10^{-8}/d$ रेडियम ....(A)

पहले न्यूनतम व मध्यम अधिकतम के बीच की दूरी 0.5 cm है तथा पर्दे की रेखाछिद्र से दूरी 2 m है यानि 200 cm है। इससे हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$\theta \simeq 0.5/200$ रेडियम ....(B)

समीकरण (A) व (B) की तुलना करते हुये, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\frac{5000 \times 10^{-8}}{d} = \frac{0.5}{200}$$

या $$d = \frac{5000 \times 10^{-8} \times 200}{0.5}$$

$$= .02\ \text{cm}$$