स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

(उत्तर प्रदेश सरकार द्वारा निर्गत अधिनियम संख्या 10, 1999 द्वारा स्थापित)

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGPHS-01
प्रारंभिक यांत्रिकी

प्रथम खण्ड - यांत्रिकी की संकल्पनाएँ

द्वितीय खण्ड - कणों के निकाय

शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, इलाहाबाद - 211013

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

U. G. P. H. S. - 01
प्रारंभिक यांत्रिकी

खंड

1

यांत्रिकी की संकल्पनाएं

प्रारंभिक यांत्रिकी

अपनी रोज़मर्रा की ज़िंदगी में हमें अनेक किस्म की वस्तुओं की गति देखने को मिलती है। वस्तुओं की गति, और साम्यावस्था में विराम की स्थिति में वस्तुओं के ज्ञान से संबंधित भौतिकी की शाखा को **यांत्रिकी** (mechanics) कहते हैं। साइकिल या बस की सवारी करने, भारी वज़न उठाने, फुटबाल खेलने या मकान बनाने में यांत्रिकी के नियम इस्तेमाल होते हैं। अंतरिक्ष युग के अनेक लुभावने विकास, जैसे कि अंतरिक्ष अन्वेषी (space probe) और कृत्रिम उपग्रहों को छोड़ना, यांत्रिकी के नियमों के सीधे अनुप्रयोग हैं।

आज यांत्रिकी को भौतिकी का सर्वाधिक आधारभूत क्षेत्र माना जाता है। भौतिकी के अन्य क्षेत्रों, जैसे विद्युत्-चुम्बकत्व (electromagnetism), ऊष्मीय भौतिकी (thermal physics), कम्पन और तरंग (vibrations and waves) के अध्ययन के लिए आपको यांत्रिकी की अच्छी-ख़ासी जानकारी होनी ज़रूरी है। क्वांटम यांत्रिकी (quantum mechanics) और आपेक्षिकता (relativity), आधुनिक भौतिकी के दो प्रवेश-द्वार हैं। इन विषयों को समझने के लिए न्यूटनी यांत्रिकी (Newtonian mechanics) को अच्छी तरह समझना ज़रूरी है।

यांत्रिकी का विकास उस समय शुरू हुआ, जब एक ओर दैनिक जीवन में वस्तुओं की गति और दूसरी ओर ग्रहों जैसे आकाशीय पिंडों की गति को समझने के प्रयास किए गए। जैसा कि आप जानते हैं, न्यूटन द्वारा खोजे गए गति के तीन नियम यांत्रिकी की आधारशिला हैं। जिस ढंग से ये नियम हमें स्कूल में पढ़ाए जाते हैं, उसके कारण ये हमें बहुत साधारण लग सकते हैं। लेकिन ईसा से चौथी शताब्दी पूर्व के अरस्तू के विचारों से लेकर ईसा के बाद सत्रहवीं शताब्दी तक, जबकि न्यूटन के नियम सामने आए, सही निष्कर्षों तक पहुंचने में दो हज़ार वर्षों से भी ज़्यादा समय लगा। गति के बारे में अरस्तू का वर्णन किसी वस्तु के "प्राकृतिक स्थान" (natural place) के विचार पर आधारित था। विज्ञान तथा प्रौद्योगिकी में आधार पाठ्यक्रम-। (FST-1) की इकाई 3 में आपने पढ़ा होगा कि अरस्तू के ज़माने में यह माना जाता था कि तमाम पदार्थ चार मूल तत्वों में से एक या अधिक तत्वों से मिलकर बने हैं। ये चार मूल तत्व हैं— 'पृथ्वी', 'अग्नि', 'जल' और 'वायु'। उसके विचारों के अनुसार, 'पृथ्वी' का प्राकृतिक स्थान निम्नतम था। इसलिए अगर आप 'पृथ्वी' की बनी कोई भारी चीज़ छोड़ते हैं तो यह गिर पड़ती है। जिन भारी वस्तुओं में अधिक 'पृथ्वी' होती थी वे कम 'पृथ्वी' वाली हल्की वस्तुओं से अधिक तेज़ी से गिरती थीं। इसी तरह, अरस्तू के अनुसार धुएं के ऊपर उठने का कारण यह था कि धुआं अग्नि से बना हुआ होता था और अग्नि का 'प्राकृतिक स्थान' वायु में था। उसके अनुसार सूर्य, चन्द्रमा और ग्रह जैसे आकाशीय पिंड पृथ्वी के चारों ओर वृत्तों में घूमते थे क्योंकि वृत्त को सर्वाधिक परिशुद्ध आकार माना जाता था।

आधुनिक विज्ञान के आविर्भाव तक, गति के बारे में अरस्तू के विचार लगभग 2,000 वर्षों तक छाए रहे। प्रेक्षण, प्रयोग और सावधानी से किया गया मापन आधुनिक विज्ञान के प्रमाण-चिह्न हैं। इन सभी मामलों में गैलीलियो ने प्राचीन परम्पराओं से नाता तोड़ा। जबकि गैलीलियो से पहले दूसरों ने गति की अवस्था में पदार्थ के गुणों के बारे में अंदाजा ही लगाया, गैलीलियो ने विस्तृत प्रेक्षणों को अपने तर्कों का आधार बनाया। चिकने नत समतलों पर नीचे लुढ़कती गेंदों से किए गए उसके प्रयोगों ने गिरती हुई वस्तुओं के नियम और जड़त्व (inertia) के नियम को जन्म दिया। गैलीलियो के काम ने जो रास्ता दिखाया उस पर चलकर सत्रहवीं शताब्दी में यांत्रिकी का तेज़ी से विकास हुआ। टाइको ब्राहे द्वारा ग्रहीय गति के विस्तृत प्रेक्षणों के आधार पर योहान केपलर ने ग्रहीय गति के नियम दिए। उस काल के अनेक प्रतिभा-सम्पन्न व्यक्तियों ने, विशेष रूप से रॉबर्ट हुक ने, आकाशीय पिंडों और पृथ्वी पर स्थित वस्तुओं की गति को संचालित करने वाले नियमों की खोज करने की कोशिश की। अंततः आइज़क न्यूटन ने यांत्रिकी को एक वैज्ञानिक सिद्धांत के रूप में प्रस्तुत किया। न्यूटन के सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण (universal gravitation) के नियम के साथ-साथ उसके गति के नियमों की मदद से ब्रह्मांड के सभी पिंडों की गति का पूरा ब्यौरा दिया जा सकता है। हमारी जानकारी में आज केवल अवपरमाण्विक कण (subatomic particles) और लगभग प्रकाश के वेग के बराबर वेग से चलने वाले तंत्र ही ऐसे निकाय हैं जिन पर न्यूटनी यांत्रिकी लागू नहीं होती।

इस पाठ्यक्रम में हम पहले यांत्रिकी की आधारभूत संकल्पनाओं का विकास करेंगे और खंड 1 में इन्हें सरल भौतिक परिस्थितियों पर लागू करेंगे। हम रैखिक संवेग (linear momentum), कोणीय संवेग (angular momentum) और ऊर्जा (energy) के तीन महत्वपूर्ण संरक्षण नियमों का भी अध्ययन करेंगे। खंड 2 में हम इन संकल्पनाओं की मदद से अधिक जटिल परिस्थितियों, जैसे कि ग्रहीय गति, अनेक कणों वाले निकायों (many-particle systems) और दृढ़ पिंडों (rigid bodies) की गतिकी का अध्ययन करेंगे।

खंड 1 यांत्रिकी की संकल्पनाएं

इस खंड में आप यांत्रिकी की मूल संकल्पनाओं के बारे में पढ़ेंगे। आप इन संकल्पनाओं को पहले से ही जानते हैं। यानि आप अपने स्कूल के विज्ञान पाठ्यक्रमों में जो पढ़ चुके हैं उसे हम इस खंड में दोहरा भर रहे हैं। अंतर केवल इतना ही है कि इन संकल्पनाओं को समझने के लिए हम त्रिविम सदिशों (three-dimensional vectors) का व्यापक रूप से इस्तेमाल करेंगे। इकाई 1 में आप वस्तुओं की गति का वर्णन करने की भाषा सीखेंगे जिसे तकनीकी रूप से **शुद्ध गति विज्ञान** या **शुद्धगतिकी** (kinematics) कहा जाता है। इसके अंतर्गत हम विस्थापन, वेग और त्वरण की महत्वपूर्ण शुद्ध गतिकीय संकल्पनाओं की चर्चा करेंगे और इनकी मदद से एक- समान वर्तुल गति का वर्णन करेंगे।

इकाई 2 में आप गति के कारणों के बारे में पढ़ेंगे जो तकनीकी रूप से **गति विज्ञान** या **गतिकी** (dynamics) कहलाता है। हम बल तथा रैखिक संवेग की संकल्पनाओं की चर्चा करेंगे जो न्यूटन के गति नियमों के द्वारा आपस में जुड़ी हुई हैं। इसी इकाई में आप बलों की साम्यावस्था के बारे में पढ़ेंगे जिसका यांत्रिक युक्तियों (mechanical devices) में अनेक प्रकार से अनुप्रयोग किया जाता है। आप रैखिक संवेग के संरक्षण के सिद्धांत को भी पढ़ेंगे। यह सिद्धांत उन जटिल यांत्रिक परिघटनाओं (mechanical phenomena) के अध्ययन को आसान बना देता है जहां न्यूटन के नियमों को सीधे लागू करना कठिन होता है। इकाई 3 में आप अन्य गतिकीय संकल्पनाओं के बारे में पढ़ेंगे, जैसे कि कार्य और ऊर्जा। यह एक दिलचस्प बात है कि ऊर्जा की संकल्पना यांत्रिकी की उन थोड़ी सी संकल्पनाओं में से एक है जो सर आइज़क न्यूटन की देन नहीं हैं। यह संकल्पना उन्नीसवीं शताब्दी के मध्य में ही स्पष्ट हो पाई थी। ऊर्जा की संकल्पना विभिन्न परिघटनाओं का अध्ययन करने में उपयोगी है, जैसे कि ब्रह्मांड की उत्पत्ति, मूल कणों (elementary particles) के गुण, जीवित तंत्रों में जैव-रासायनिक अभिक्रियाएँ (biochemical reactions), मशीनों के डिज़ाइन आदि। ऊर्जा के संरक्षण का नियम विशेष रूप से महत्वपूर्ण है। रैखिक संवेग-संरक्षण के नियम के साथ-साथ यह नियम संघट्टनों (collisions) के अध्ययन में इस्तेमाल होगा।

इकाई 4 में आप कोणीय गति (angular motion) की शुद्ध गतिकी और गतिकी के बारे में पढ़ेंगे। हम कोणीय विस्थापन (angular displacement), कोणीय वेग (angular velocity) और कोणीय त्वरण (angular acceleration), बलआघूर्ण (torque) तथा कोणीय संवेग (angular momentum) की चर्चा करेंगे और एक कण की कोणीय गति पर इन्हें लागू करेंगे। आप कोणीय संवेग-संरक्षण के नियम और इसके अनुप्रयोगों के बारे में भी पढ़ेंगे। अन्त में इकाई 5 में आप न्यूटन का सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियम पढ़ेंगे जिसकी मदद से ब्रह्मांड की लगभग सारी वस्तुओं की गति को समझा जा सकता है, भले ही वे ग्रह, उपग्रह या पृथ्वी पर स्थित वस्तुएं हों। इस संदर्भ में हम गुरुत्व बल (force of gravity) की भी चर्चा करेंगे जो हमारे दैनिक जीवन में इतनी महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

जहाँ तक हो सका है, हमने इन संकल्पनाओं के उदाहरण वास्तविक भौतिक जगत से लिए हैं। हमारी कोशिश रही है कि हम इन संकल्पनाओं को ज़्यादा से ज़्यादा दैनिक अनुभव में आने वाली समस्याओं और घटनाओं पर लागू करें। हमने सभी इकाइयों में अनेक हल किए हुए आंकिक उदाहरण भी दिए हैं। हमारा ज़ोर इस बात पर है कि आप इन संकल्पनाओं को समझने के साथ-साथ इनको विभिन्न प्रकार की भौतिक परिघटनाओं पर लागू कर सकें।

इस खंड की संकल्पनाओं की जानकारी हमने दो ऑडियो-विज़न (audio-vision) प्रोग्रामों में भी दी है जिन्हें आप अपने अध्ययन केंद्रों पर सुन सकेंगे। इन कार्यक्रमों के माध्यम से हमने यांत्रिकी के पाठ्यक्रम में विविध प्रकार के प्रश्नों को हल करने की क्षमता विकसित करने की कोशिश की है।

पढ़ाई के लिहाज़ से सभी इकाइयां बराबर नहीं हैं। हरेक इकाई को पढ़ने के लिए हम निम्नलिखित औसत समय सुझा सकते हैं: इकाई 1 के लिए 3-1/2 घंटे, इकाई 2 और 3 के लिए 4-4 घंटे, इकाई 4 के लिए 5 घंटे और इकाई 5 के लिए 3-1/2 घंटे। इस प्रकार मूल पाठ के अध्ययन और बोध प्रश्नों तथा अंत में दिए गए प्रश्नों को हल करने में औसतन कुल 20 घंटे लगने चाहिए। लेकिन आपको यह इकाइयां पढ़ने में कितना वक्त लगता है, दरअसल यह आपकी अब तक की पढ़ाई पर निर्भर करेगा। उदाहरण के लिए, अगर आपने हाल ही में +2 या बारहवीं पास की है तो इन इकाइयों में इस्तेमाल हुआ गणित और विशेष रूप से कलन (calculus) समझना आसान होगा वरना हो सकता है कि आपको ज़्यादा समय लगे। क्योंकि आप +2 कर चुके हैं, इसलिए हम यह मान रहे हैं कि यहां जो कलन काम में लाया गया है, आप उसे जानते हैं।

इस पाठ्यक्रम में हम हमेशा एस॰आई॰ मात्रकों (S.I.units) का उपयोग करेंगे। इन मात्रकों और इनके प्रतीकों की सारणी खंड में दी गई है। भौतिक नियतांकों (physical constants) की सारणी भी उसी पृष्ठ पर दी गई

है । अनेक प्रश्नों को हल करने के लिए आपको इस सारणी की मदद लेनी होगी। खंड के अंत में कुछ पुस्तकों की सूची दी गई है, जिन्हें आप चाहें तो पढ़ सकते हैं।

इकाइयों में इस्तेमाल किए गए कुछेक संकेताक्षर इस प्रकार हैं : चित्र x.y, भाग x.y और समीकरण x.y। इकाई x के चित्र y को हम चित्र x.y लिख रहे हैं, यानि चित्र 1.10, इकाई 1 का दसवां चित्र है। इसी प्रकार भाग 2.4, इकाई 2 का चौथा भाग है और समीकरण 3.9, इकाई 3 में नवां समीकरण है आदि।

अध्ययन निर्देशिका

आप जानते ही हैं कि भौतिकी निष्क्रिय बने रह कर नहीं सीखी जा सकती। इस पाठ्यक्रम के बारे में भी यह उतना ही सच है। इकाइयों में दी गई व्युत्पत्तियों और हल किए गए उदाहरणों को आपको स्वयं भी करना होगा। इसलिए पढ़ते समय अपने पास हमेशा पेन या पेंसिल और कागज़ अवश्य रखिए। आपको एक पैमाने (ruler) और चाँदे (protracter) की भी ज़रूरत पड़ेगी। संख्यात्मक प्रश्नों को हल करते समय गणनाओं के लिए आपको या तो कैल्कुलेटर या ऐसी मानक पुस्तिका का उपयोग करना होगा जिसमें लघुगणकीय (logarithmic) और त्रिकोणमितीय (trigonometrical) सारणियाँ दी हुई हों। इसलिए इनमें से कोई एक अपने पास रखिए। यहां हमारा उद्देश्य है कि आप तथ्यों को रटने की बजाय संकल्पनाओं को समझें और उन्हें प्रश्नों पर लागू कर सकें। अगर आप यांत्रिकी की संकल्पनाओं को समस्याओं/प्रश्नों को हल करने के लिए लागू करेंगे तो आप इन्हें और अच्छी तरह समझ सकेंगे। यहां हमने अनेक चुनी हुई प्रतिनिधि समस्याओं को देने की कोशिश की है। इनमें से कुछ तो सरल हैं और उनका उद्देश्य महज़ आपको अभ्यास कराना है। लेकिन कई प्रश्न ऐसे भी हैं जिनको हल करने में आपको कुछ प्रयास करना होगा। इकाइयों के अंत में दिए गए प्रश्नों के रूप में कुछ चुनौतीपूर्ण समस्याएं भी हैं। हमारी सलाह है कि आप इकाइयों के बोध प्रश्नों और अंत में दिए गए प्रश्नों को स्वयं हल करने की कोशिश कीजिए। अगर आप पहले प्रयास में किसी समस्या को हल न कर पाएं तो प्रत्येक इकाई के अंत में दिए गए उत्तरों को तुरंत मत देखिए। अनेक प्रश्नों में मूल नियतांकों, जैसे कि सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक G या इलेक्ट्रॉन पर आवेश e आदि के मानों की आवश्यकता पड़ सकती है। आप इन मानों को इकाइयों में नहीं पाएंगे क्योंकि ये भौतिक नियतांकों की सारणी में दिए गए हैं। यही बात कुछ खगोलीय नियतांकों जैसे कि पृथ्वी की त्रिज्या, चन्द्रमा और पृथ्वी की माध्य दूरी आदि पर भी लागू होती है।

आपको इस बात का भी पूरा ध्यान रखना होगा कि संख्यात्मक प्रश्नों के उत्तर देते समय उनके साथ सही मात्रक ज़रूर लगाएं। इसके लिए हमारी सलाह यह है कि गणना करते समय आप आवश्यक मात्रकों को हर चरण पर हर राशि के साथ लिखिए, जैसा कि हमने उदाहरणों के हल में किया है। संख्यात्मक प्रश्नों में उत्तर को हमने आवश्यक सार्थक अंक (significant digit) तक ही सीमित रखा है और इसके लिए परंपरागत नियमों का इस्तेमाल किया है। आपको इन प्रश्नों के हल एक अलग कागज़ पर करने होंगे क्योंकि इसके लिए इकाइयों में जगह नहीं दी गई है।

हमें आशा है कि आपको ये इकाइयां रोचक लगेंगी। हम आपकी सफलता की कामना करते हैं।

आभार

इकाइयों पर टिप्पणी के लिए, प्रो॰ आर॰ एन॰ माथुर को

इकाई 1 गति

इकाई की रूपरेखा

1.1 प्रस्तावना

हमारे दैनिक जीवन की सबसे बड़ी विशेषता गति है। क्रिकेट अथवा फुटबाल का खेल, नृत्यांगना की मनोहर गति, पेड़ों से गिरते पत्ते, सूरज का उगना और ढलना इत्यादि सभी भौतिक जगत में गति के उदाहरण हैं। आपने अपने स्कूल के विज्ञान पाठ्यक्रम में गति के बारे में पढ़ा है। परन्तु आपका यह अध्ययन सीधी रेखा में तथा द्विविम तल (two-dimensional plane) में हो रही गति तक ही सीमित था। द्विविम गति के प्रमुख उदाहरणों के तौर पर आपने वर्तुल गति (circular motion) और प्रक्षेप्य गति (projectile motion) के बारे में पढ़ा है।

लेकिन आप जानते हैं कि हमारा यह भौतिक जगत एक त्रिविम (three-dimensional) संसार है। इसलिए इस इकाई में हम गति का अध्ययन त्रिविम तंत्र के आधार पर करेंगे। सबसे पहले हम यह जानेंगे कि किसी वस्तु के गतिशील होने का क्या अर्थ है। क्योंकि अपनी इस पढ़ाई में हम सदिश राशियों का काफ़ी ज़्यादा इस्तेमाल करेंगे, इसलिए हम उनसे सम्बन्धित सदिश बीजगणित को भी समझेंगे। सदिशों का प्रयोग करके हम एक ऐसी भाषा सीखेंगे जिसकी मदद से हम भिन्न वस्तुओं की गति का वर्णन कर सकें। इस भाषा को सीखने के लिए हम विस्थापन, वेग और त्वरण की संकल्पनाओं को दोहराएँगे। अंत में हम इन संकल्पनाओं का प्रयोग एकसमान वर्तुल गति (uniform circular motion) एवं आपेक्षिक गति (relative motion) के अध्ययन के लिए करेंगे।
त्वरण की संकल्पना गति के कारणों से जुड़ी है। इन कारणों का अध्ययन हम इकाई 2 में करेंगे। उस इकाई में आप बलों की साम्यावस्था और रैखिक संवेग संरक्षण के सिद्धांतों के बारे में भी पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- किसी दी हुई भौतिक स्थिति के लिए उपयुक्त निर्देश तंत्र का निर्धारण कर सकेंगे
- एकक सदिशों (unit vectors) का प्रयोग करके एकविम, द्विविम एवं त्रिविम सदिशों को अभिव्यक्त कर सकेंगे
- दो सदिशों के योग, अन्तर एवं अदिश और सदिश गुणनफल की गणना कर सकेंगे
- दिए हुए निर्देश तंत्र में किसी कण का विस्थापन, वेग एवं त्वरण निकाल सकेंगे
- औसत और तात्क्षणिक वेग में अन्तर तथा औसत और तात्क्षणिक त्वरण में अन्तर बता सकेंगे
- किसी कण के दूसरे कण के सापेक्ष आपेक्षिक वेग एवं त्वरण की गणना कर सकेंगे
- आपेक्षिक गति और एकसमान वर्तुल गति से संबंधित प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

1.2 गति क्या है ?

ज़रा सोचिए कि अगर आप को कुछ समय के लिए एक स्थान पर, समय के साथ स्थिति बदले बिना, बंध कर रहने के लिए कहा जाए तो आपको कैसा लगेगा। इस वाक्य को दोबारा पढ़िये। आप पायेंगे कि इस वाक्य में इस प्रश्न का उत्तर निहित है कि गति क्या है। जब विभिन्न क्षणों पर किसी वस्तु की स्थितियां भिन्न होती हैं, तब हम कहते हैं कि वह वस्तु गतिशील है। इस तरह गति का अध्ययन इन प्रश्नों से जुड़ा है : कहां ? और कब ?

निर्देश तंत्र

किसी भी वस्तु की वास्तविक गति को हम एक मापे हुए निश्चित समय-अंतराल में हुए उसके स्थिति परिवर्तन को माप कर जान सकते हैं। और अगर हमें एक निश्चित क्षण पर वस्तु की स्थिति या समय के साथ इसमें परिवर्तन जानना हो तो इसके लिये हमें एक निर्देश तंत्र (frame of reference) की ज़रूरत होती है। आइए इसे समझने के लिए हम एक चलती हुई रेलगाड़ी का उदाहरण लें। एक निश्चित समयांतराल में हुए रेलगाड़ी के स्थिति परिवर्तन का मान, उसे मापने वाले स्थिर प्रेक्षक के लिए कुछ होगा। चलती कार में बैठे प्रेक्षक के लिए यह मान अलग होगा। और रेलगाड़ी में बैठे प्रेक्षक के लिए यह मान शून्य होगा। और इनमें से प्रत्येक मान, उसे मापने वाले प्रेक्षक की दृष्टि से सही है।

आम तौर पर, किसी भी भौतिक राशि का मापा गया मान उसे मापने वाले प्रेक्षक के निर्देश तंत्र पर निर्भर करता है। किसी भी भौतिक राशि को मापने के लिए प्रत्येक प्रेक्षक एक निर्देश तंत्र चुनता है। निर्देश तंत्र चुनने का अर्थ है समय के उस क्षण को चुनना जबसे माप शुरू हो, जिसे समय के पैमाने पर शून्य माना जाता है, समष्टि में एक मूलबिंदु (origin) और उससे जुड़ी एक उपयुक्त निर्देशांक पद्धति (coordinate system) चुनना। हम इन तीनों को सामूहिक रूप से **निर्देश तंत्र** कहेंगे। क्योंकि हमारे अनुभव के इस संसार की तीन विमाएं हैं इसलिए हमें सामान्य रूप से किसी भी वस्तु की स्थिति को अद्वितीयतः (uniquely) निर्धारित करने के लिए तीन निर्देशांक बताने चाहिए। यांत्रिकी में आम तौर पर कार्तीय निर्देशांकों (Cartesian coordinates) x, y, z का प्रयोग होता है। इस प्रकार किसी घटना की स्थिति और समय को एक निश्चित निर्देश तंत्र के सापेक्ष कार्तीय निर्देशांकों x, y, z और समय t से निर्दिष्ट किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, हम यह मान सकते हैं कि प्रेक्षक किसी ठोस पिंड जैसे पृथ्वी पर स्थित है। वह इस पिंड के किसी बिंदु को मूल बिंदु के रूप में चुन सकता है, और ऐसे निर्देशांक अक्ष चुन सकता है जो उस बिंदु से दृढ़ रूप से जुड़े हों और उस के सापेक्ष स्थिर हों। क्या अब आप एक निर्देश तंत्र को अपने आप चुनना पसन्द नहीं करेंगे ? इसके लिए चित्र 1·1 देखिये और बोध प्रश्न 1 का उत्तर दीजिये।

चित्र 1·1 : 200 मीटर की जानी पहचानी दौड़, जहां धावक A, धावक B से आगे निकलने ही वाला है।

बोध प्रश्न 1

(क) चित्र 1·1 में तीन प्रेक्षकों B, A और S की दृष्टि से A की गति का वर्णन करने के लिए उपयुक्त निर्देश तंत्र चुनिए।

(ख) इन तीन प्रेक्षकों B, A और S में से कौन A के वेग को ठीक मापता है ?

यह जानने के बाद कि गति क्या है और निर्देश तंत्र का क्या अर्थ है हम किसी निर्देश तंत्र में वस्तुओं की गति का वर्णन करना चाहेंगे। गति का वर्णन करने के लिए इस्तेमाल की गई भाषा को, तकनीकी तौर पर **शुद्धगतिकी**

(kinematics) कहा जाता है। अब किसी कण अथवा बिंदु की गति का वर्णन करना सबसे आसान है। आप पूछ सकते हैं कि 'कण' क्या होता है। अगर किसी घटना के अध्ययन में किसी वस्तु का विस्तार, आकृति और आंतरिक संरचना महत्वहीन है, तो हम उस वस्तु को बिन्दु अथवा कण कह सकते हैं। उदाहरण के लिए, पृथ्वी और सूरज के बीच की दूरी की तुलना में इन दोनों ही पिंडों का आकार और विस्तार नगण्य है। अतः उन सभी घटनाओं में जिनमें यह दूरी लेनी पड़े, हम इन दोनों पिंडों को कण कह सकते हैं। आइए अब हम कण की गति का वर्णन करने के लिए ज़रूरी भाषा सीखें।

1.3 गति का वर्णन करने की भाषा

गति का वर्णन करने के लिए सबसे महत्वपूर्ण संकल्पनाएं हैं विस्थापन, वेग और त्वरण। गति का वर्णन करने के लिए ज़रूरी भाषा सीखने का मतलब है इन संकल्पनाओं को समझना और इन्हें अभिव्यक्त करना। जैसा कि आप जानते ही हैं कि यह कार्य गणित की मदद से अच्छी तरह से किया जा सकता है। इसलिए पहले हम इसके लिये ज़रूरी सदिश बीजगणित सीखेंगे जिसमें हम विस्थापन के उदाहरण को लेंगे। फिर इसी की मदद से हम अन्य शुद्धगतिक संकल्पनाओं, जैसे वेग और त्वरण को समझेंगे।

1.3.1 सदिश

हम सभी "सदिश" शब्द का अर्थ अच्छी तरह समझते हैं। सदिशों का प्रयोग हम मूलतः इसलिए करते हैं कि इनकी मदद से हम भौतिक धारणाओं को संक्षिप्त और सरल रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं। हम पहले सदिश का प्रयोग एक और दो विमाओं में करना सीखेंगे और फिर इसे तीन विमाओं तक ले जाएंगे।

सदिश वे राशियाँ हैं :

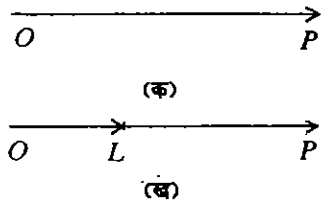
1 जिनका परिमाण और दिशा दोनों होते हैं और जो किसी भी निर्देशांक पद्धति पर निर्भर नहीं करते।

2 जिनका योग क्रम विनिमेय नियम (commutative law) के अनुसार होता है, अर्थात्
$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

आगे बढ़ने से पहले हम सदिशों की चर्चा में संकेतों के प्रयोग के बारे में कुछ कहेंगे। यह इस प्रकार से है : छपने में सदिश और अदिश में भेद मोटे - काले छापे से किया जाएगा। उदाहरणतः **A** सदिश है। लिखने में हम सदिश **A** को इस के नीचे लाइन लगा कर ($\underline{A}$) या इस के ऊपर तीर लगाकर ($\vec{A}$) दिखाते हैं। **A** के परिमाण को A द्वारा दिखाएंगे या इसे $|\mathbf{A}|$ भी लिखेंगे। चित्रों में सदिशों को, उन्हें निरूपित करने वाली लाइनों पर तीर लगाकर दिखाएंगे जैसे कि चित्र 1·2 (क) और 1·2 (ख) में।

एक और दो विमाओं में सदिश

मान लीजिए कि आप बिन्दु O से साइकिल चलाना आरम्भ करते हैं और बिंदु P तक सीधी रेखा में जाते हैं (चित्र 1.2 क)। O के सापेक्ष आपका विस्थापन क्या है ? जैसा कि आप जानते हैं यह O से P की दिशा में **OP** है। ध्यान दें कि हमने विस्थापन के परिमाण और दिशा दोनों को निर्दिष्ट किया है अर्थात् यह एक सदिश राशि है। बिंदु O सदिश **OP** की पूँछ (tail) है और P इसका शीर्ष (head) है।



चित्र 1·2 : (क) विस्थापन **OP**; (ख) एकक सदिश **OL**.

अब हम OP की लंबाई अर्थात् **OP** का परिमाण कैसे मालूम करें ? हम O को मूल बिंदु मान सकते हैं जिस से कि P का निर्देशांक **OP** के परिमाण के बराबर होगा। अगर हम **OP** को उसके परिमाण के पदों में लिखना चाहें तो हमें **एकक सदिश** (unit vector) की संकल्पना का प्रयोग करना पड़ेगा। मान लीजिए कि हम सदिश **OP** को **A** कहते हैं। हम इकाई परिमाण की लंबाई OL चुनते हैं (चित्र 1·2 ख) ताकि OP लंबाई OL का A गुना हो। मान लें कि सदिश **OL, OP** की ही दिशा में है। तब हम लिख सकते हैं

$$A\,(\mathbf{OL}) = \mathbf{OP} = \mathbf{A}. \tag{1·1}$$

OL को एकक सदिश (unit vector) कहा जाता है। परिभाषा के अनुसार एकक सदिश की लंबाई एक इकाई के बराबर होती है। **A** के अनुदिश इकाई लंबाई के सदिश को $\hat{\mathbf{A}}$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। इस का उच्चारण A कैप किया जाता है। परम्परा से इसे विमारहित (dimensionless) माना जाता है। इस प्रकार समीकरण 1.1 से हमें मिलता है

$$\mathbf{OL} = \hat{\mathbf{A}} = \frac{\mathbf{A}}{A}. \tag{1·2 क}$$

और

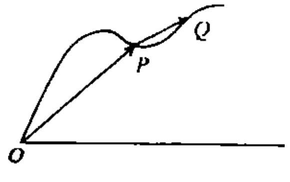
$$\mathbf{A} = A\,\hat{\mathbf{A}}. \tag{1·2 ख}$$

ध्यान दें कि **A** और A की विमाएं एक समान हैं क्योंकि $\hat{\mathbf{A}}$ विमारहित है। हम OP को x- अक्ष की दिशा में भी ले सकते हैं। परम्परा से x- अक्ष की दिशा में एकक सदिश को $\hat{\mathbf{i}}$ द्वारा निरूपित किया जाता है। तब हम समीकरण 1.2 ख को इस प्रकार लिख सकते हैं:

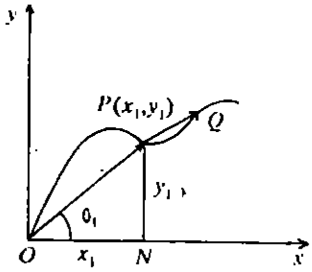
$$\mathbf{A} = A\,\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{i}}\,A. \tag{1·2 ग}$$

अब मान लीजिए कि आप एक मैदान में हैं और सीधी रेखा में नहीं चल रहे (चित्र 1.3 क)। क्या हम विस्थापन PQ को चित्र 1.2 ख की तरह से किसी एक अक्ष की दिशा में एक संख्या द्वारा निर्दिष्ट कर सकते हैं ? निश्चय ही आप इस अक्ष को PQ की दिशा में चुन सकते हैं। लेकिन केवल एक निर्देशांक का प्रयोग करके आप एक अन्य दिशा में हुए विस्थापन OP को किस प्रकार निर्दिष्ट करेंगे ? यह साफ़ है कि PQ की दिशा में केवल एक अक्ष, अन्य दिशाओं में हुए विस्थापनों को निर्दिष्ट करने के लिए काफ़ी नहीं है।

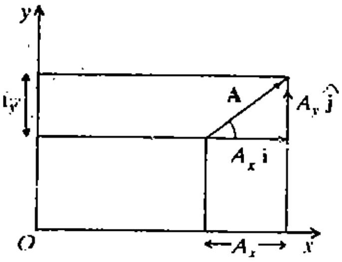
इस स्थिति में हमें मूल बिंदु O से खींचे गये दो परस्पर लंबवत् अक्षों x और y के अनुदिश मापी गई दो लंबाइयों की ज़रूरत होगी (चित्र 1.3 ख)। जैसा कि आप जानते ही हैं x_1 तथा y_1 की लंबाइयां बिंदु P के निर्देशांकों के बराबर हैं। यह निर्देशांक विस्थापन OP को पूरी तरह निर्दिष्ट करते हैं। अब हम PQ या अन्य दिशा में किसी सदिश को कैसे प्रकट कर सकते हैं ?



(क)



(ख)



(ग)

चित्र 1·3: (क) द्विविम गति; (ख) $ON = x_1, NP = y_1$; (ग) A के x तथा y घटक। A, $A_x\hat{\mathbf{i}}$ तथा $A_y\hat{\mathbf{j}}$ का योग है।

इसके लिए हम x–y तल में एक सदिश **A** लेते हैं।

x-अक्ष तथा y- अक्ष पर **A** के प्रक्षेपों को **A** का, क्रमशः x और y घटक कहा जाता है (चित्र 1·3 ग)। हम इन्हें क्रमशः A_x और A_y द्वारा व्यक्त कर सकते हैं। परम्परा से, x- अक्ष और y- अक्ष की दिशा में एकक सदिशों को, क्रमशः $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। तब सदिश योग के नियमों से **A**, $A_x\,\hat{\mathbf{i}}$ और $A_y\hat{\mathbf{j}}$ का योग होगा, यानि

$$\mathbf{A} = A_x\,\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}}. \tag{1·3 क}$$

पायथागोरस प्रमेय का प्रयोग करके **A** का परिमाण होगा

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}\,, \tag{1·3 ख}$$

और इसकी दिशा कोण θ द्वारा, जो कि **A**, x- अक्ष के साथ बनाता है, दी जाती है, जहाँ

$$\tan\theta = \frac{A_y}{A_x}. \tag{1·3 ग}$$

किसी दी हुई निर्देशांक पद्धति में **A** को A_x और A_y के पदों में अद्वितीयतः व्यक्त किया जा सकता है। अतः यदि **A** दिया हो तो A_x और A_y के अद्वितीय मान इस प्रकार हैं :

$$A_x = A\cos\theta,\ \ A_y = A\sin\theta. \tag{1·3 घ}$$

ध्यान रहे कि जब कोई विस्थापन मूल बिन्दु के सापेक्ष हो, जैसे कि चित्र 1·3 (ख) में OP, तो बिन्दु P के निर्देशांक ही OP के घटक होंगे, अर्थात्

$$\mathbf{OP} = x_1\,\hat{\mathbf{i}} + y_1\hat{\mathbf{j}}. \tag{1·4 क}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{y_1}{x_1}. \tag{1·4 ख}$$

आइए अब हम सदिशों के बारे में कुछ संकल्पनाओं को संक्षेप में दोहराएं। इन्हें आप स्कूल में भी पढ़ चुके हैं।

सदिशों की समानता

हम अक्षों के ऐसे समूह चुन सकते हैं जो किसी भी कोण पर जुड़े हों, लेकिन परस्पर लंबवत् अक्षों को चुनने से आसानी रहती है क्योंकि इससे गणनाएं काफ़ी सरल हो जाती हैं।

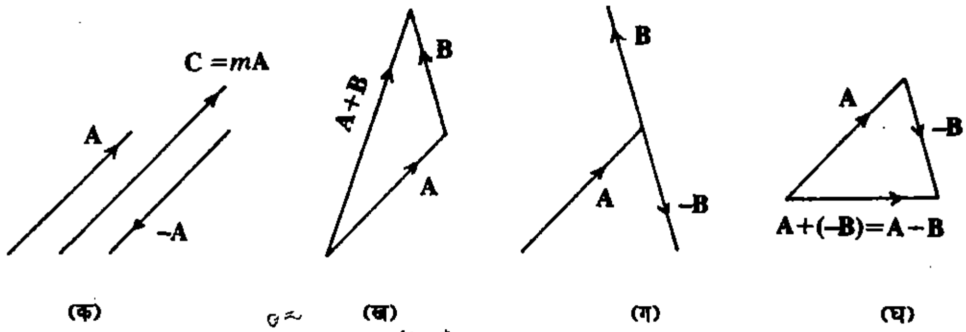
दो सदिश **A** और **B** समान होंगे यदि और केवल यदि उनके संगत घटक बराबर हों, अर्थात् अगर

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} \text{ और } \mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} \tag{1·5}$$

तो $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ होगा यदि और केवल यदि $A_x = B_x$ और $A_y = B_y$. (1·6)

सदिश की अदिश से गुणा

अगर हम A की धनात्मक अदिश m से गुणा करें तो नया सदिश $\mathbf{C} = m\,\mathbf{A}$ होगा। C, सदिश A के समांतर है और इसकी लम्बाई A से m गुना होगी (चित्र 1.4 क)।



चित्र 1.4: (क) सदिश की अदिश से गुणा; (ख) दो सदिशों का योग; (ग) और (घ) सदिश B को A से घटाना।

किसी सदिश को –1 से गुणा करने पर नया सदिश मूल सदिश की विपरीत दिशा में होगा, लेकिन उसका परिमाण वही रहेगा।

सदिशों का योग और अन्तर

दो सदिशों का योगफल, योग के त्रिभुज नियम (triangle law of addition) से निकाला जा सकता है (देखें चित्र 1.4 ख)। B और A का योगफल निकालने के लिए B की पूंछ को A के शीर्ष पर रखें। योगफल, A की पूंछ से B के शीर्ष तक खींचा गया सदिश होगा।

क्योंकि $\mathbf{A}-\mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$ है, इसलिए B को A से घटाने के लिए हम इसें –1 से गुणा करके A में जोड़ देंगे, जैसा कि चित्र 1.4 ग और घ में दिखाया गया है।

साहचर्य और बंटन नियम

सदिश राशियां क्रमशः योग, और अदिशों से गुणा के साहचर्य नियमों (associative laws of addition and multiplication by scalars) का पालन करती हैं :

$$\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}. \qquad (1\cdot7\text{ क})$$

$$m(n\mathbf{A}) = n(m\mathbf{A}) = nm\mathbf{A}. \qquad (1\cdot7\text{ ख})$$

वे अदिश से गुणा के बंटन नियम (distributive law) का भी पालन करती हैं :

$$m(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}. \qquad (1\cdot7\text{ ग})$$

आइए हम ऊपर दी गई कुछ समीकरणों को सदिश-घटकों के पदों में लिखें। ये प्रश्नों को हल करने में सहायक होंगे। अगर समीकरण 1.5 दिया हो, तो हम निम्न समीकरणें लिख सकते हैं :

$$\mathbf{C} = m\mathbf{A} = mA_x\,\hat{\mathbf{i}} + mA_y\,\hat{\mathbf{j}}. \qquad (1\cdot8\text{ क})$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = (A_x + B_x)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_y + B_y)\,\hat{\mathbf{j}}. \qquad (1\cdot8\text{ ख})$$

ऊपर दी गई संकल्पनाओं का प्रयोग करके अब हम एक उदाहरण हल करेंगे।

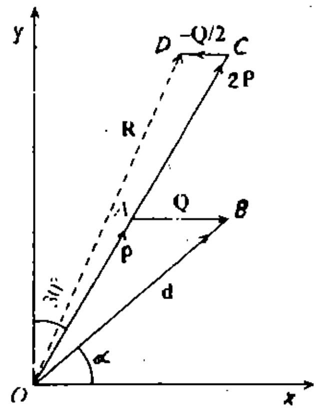
उदाहरण 1

एक जहाज़ बिन्दु O से, उत्तर दिशा से 30° पूर्व की ओर A तक 8 km चलता है और फिर पूर्व दिशा में B तक 4 km जाता है। मान लें कि $OA = \mathbf{P}$ और $AB = \mathbf{Q}$ तो जहाज़ का परिणामी विस्थापन **d** खींचें तथा

i) **P** और **Q** के घटक निकालें। **P** और **Q** को एकक सदिशों के पदों में लिखें।

ii) **d** के घटक, परिमाण और दिशा निकालें।

iii) सदिश $\mathbf{R} = 2\mathbf{P} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}$ को एकक सदिशों के पदों में लिखें और उसे चित्रित करें।



चित्र 1·5

सबसे पहले हम पूर्व और उत्तर दिशा को दिखाते हुए क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष खींचते हैं (चित्र 1·5)। तब **P**, y- अक्ष के साथ 30° कोण पर 8 km के परिमाण का सदिश है। **Q**, x-अक्ष के समांतर 4 km परिमाण का सदिश है। **OB** परिणामी विस्थापन **d** है।

i) **P** के घटक

x-अक्ष की दिशा में $= OA \cos 60° = 8\text{ km} \times \frac{1}{2} = 4\text{ km}$

y- अक्ष की दिशा में $= OA \sin 60° = 8\text{ km} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}\text{ km}$

इस प्रकार $\mathbf{P} = \mathbf{OA} = (4\hat{\mathbf{i}} + 4\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}})$ km.

Q के घटक

x-अक्ष की दिशा में $= 4\text{ km} \times \cos 0° = 4\text{ km} \times 1 = 4\text{ km}$,

और y-अक्ष की दिशा में $= 4\text{ km} \times \sin 0° = 4\text{ km} \times 0 = 0\text{ km}$.

इस प्रकार $\mathbf{Q} = \mathbf{AB} = 4\hat{\mathbf{i}}$ km.

ii) $\mathbf{d} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$

$$= (4\hat{\mathbf{i}} + 4\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}} + 4\hat{\mathbf{i}})\text{ km}$$

$$= \left\{(4+4)\hat{\mathbf{i}} + 4\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}}\right\}\text{ km}$$

$$= (8\hat{\mathbf{i}} + 4\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}})\text{ km.}$$

$$d = \sqrt{64+48}\text{ km} = \sqrt{112}\text{ km} = 4\sqrt{7}\text{ km.}$$

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4\sqrt{3}}{8}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

iii) $\mathbf{R} = 2\mathbf{P} - \frac{1}{2}\mathbf{Q}$

$$= \left\{2\,(4\hat{\mathbf{i}} + 4\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}}) - \frac{1}{2}(4\hat{\mathbf{i}})\right\}\text{ km}$$

सदिशों के बंटन और साहचर्य नियमों का उपयोग करते हुए हम लिख सकते हैं :

$$\mathbf{R} = (8\hat{\mathbf{i}} + 8\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{i}})\text{ km}$$

$$= (6\hat{\mathbf{i}} + 8\sqrt{3}\hat{\mathbf{j}})\text{ km.}$$

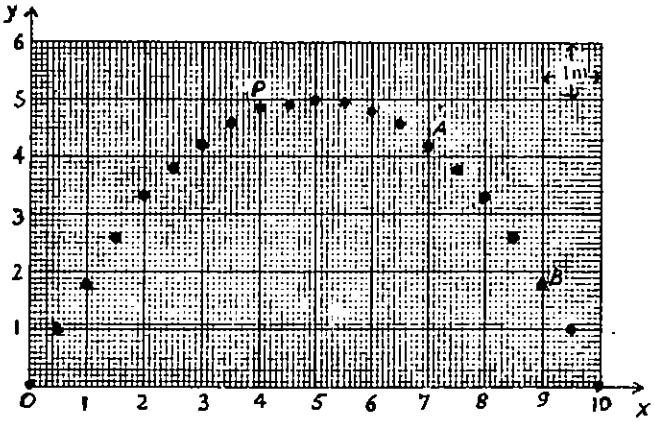
R को खींचने के लिए हम OA को इसकी लम्बाई का दो गुना बढ़ाकर C तक ले जाते हैं जिससे सदिश **2P** प्राप्त होता है। फिर हम **2P** के शीर्ष पर $-\frac{1}{2}\mathbf{Q}$ खींचते हैं।

परिणामी **R** बिन्दु O से D तक खींचा जा सकता है।

जो कुछ आपने अभी तक पढ़ा है, अब आप उस पर आधारित एक बोध प्रश्न हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 2

एक गेंद का प्रक्षेप पथ चित्र 1.6 में दिखाया गया है।



चित्र 1.6

(क) गेंद का O के सापेक्ष विस्थापन **p** तथा A के सापेक्ष विस्थापन **q** खींचिए जबकि

i) $p_x = 4$ m, $p_y = 4.9$ m

ii) $q_x = -3$ m, $q_y = 0.7$ m दिया हुआ है।

(ख) **OA** (= **r** माना) को उसके घटकों r_x और r_y के आंकिक मानों के पदों में लिखें।

(ग) $(q_x + r_x)$, $(q_y + r_y)$ निकालिए तथा क्रमशः p_x, p_y के साथ इनकी तुलना कीजिए और टिप्पणी दीजिए।

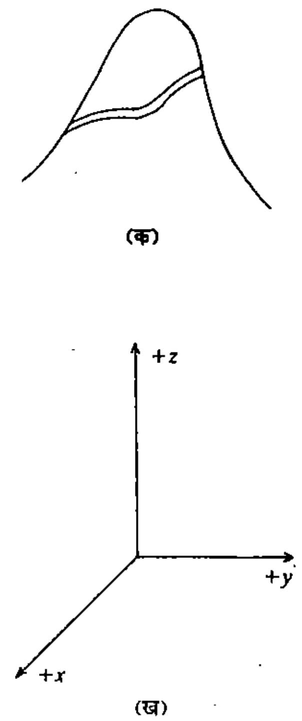
(घ) पैमाने से OB की लम्बाई और चांदे से OB तथा धनात्मक x- दिशा में बना कोण θ मापिये। मान लें कि **OB** = **s**। अब ग्राफ द्वारा s तथा समीकरण 1.3 घ द्वारा s_x और s_y निकालिए। दोनों विधियों से मिले इनके मानों की तुलना कीजिए।

अभी तक हमने संक्षेप में एक और दो विमाओं वाले सदिशों की संकल्पनाओं को, जिन्हें आप पहले से जानते हैं, दोहराया है। यहां पर केवल सदिशों को उनके घटकों तथा एकक सदिशों के पदों में लिखने का तरीका ही नया है। आइए अब हम त्रिविम सदिशों के बारे में पढ़ें।

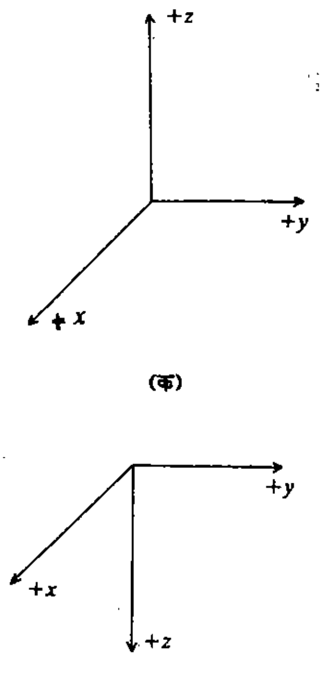
त्रिविम सदिश

मान लीजिए कि हम एक पहाड़ी पर चित्र 1.7क में दिखाए गए रास्ते से जा रहे हैं। अब हमें विस्थापन को निर्दिष्ट करने के लिए तीसरी विमा भी जाननी होगी, यानि हमें त्रिविम सदिशों का प्रयोग करना पड़ेगा। इसके लिए हमें त्रिविम निर्देशांक पद्धति की ज़रूरत होगी। आप चित्र 1.7 ख में दिखाई गई त्रिविम कार्तीय निर्देशांक पद्धति को जानते ही हैं। इस के तीन अक्ष हैं जो एक दूसरे के लंबवत् हैं और एक मूल बिन्दु O से गुज़रते हैं। बिन्दु O हरेक अक्ष को दो भागों में बांटता है जिसमें से एक को धनात्मक माना जाता है। $\hat{i}$, $\hat{j}$, $\hat{k}$, क्रमशः धनात्मक अक्ष x, y, z की दिशा में एकक सदिश हैं।

धनात्मक x- अक्ष और y- अक्ष को चुनने के बाद धनात्मक z- अक्ष के चुनाव पर प्रतिबंध लगाया जाता है। यह साफ़ है कि चित्र 1.8 क और 1.8 ख के अनुसार धनात्मक z- अक्ष को दो तरीक़ों से चुना जा सकता है। परंपरा से z- अक्ष को इस तरह चुना जाता है: धनात्मक x- अक्ष को धनात्मक y- अक्ष की ओर 90° के कोण से घुमाइये। तब धनात्मक z- अक्ष वह अक्ष है जिसके किसी भी बिन्दु से x- अक्ष वामावर्त दिशा में घूमता हुआ दिखाई देगा। इस प्रकार से परिभाषित निर्देशांक पद्धति को दक्षिणावर्ती पद्धति (right-handed system) कहा जाता है, और इसे चित्र 1.8 क में दिखाया गया है। हम धनात्मक z- अक्ष की दिशा चित्र 1.9 क और

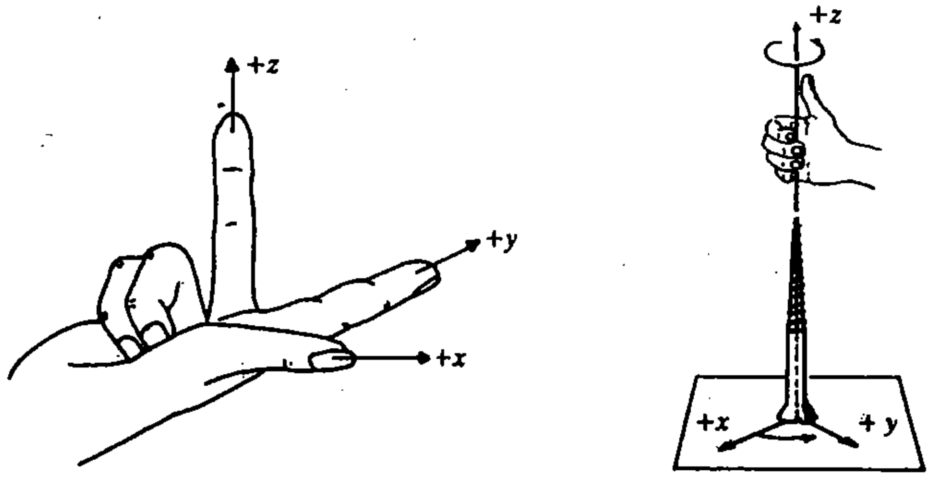


चित्र 1.7 : (क) पहाड़ी पर चढ़ाई का रास्ता; (ख) त्रिविम निर्देशांक पद्धति।



चित्र 1.8 : धनात्मक z-अक्ष को (क) और (ख) दो तरह से चुना जा सकता है।

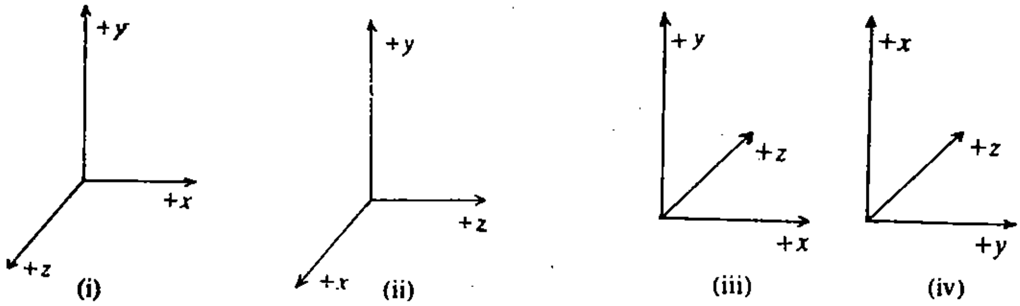
1·9 ख में दिखाए गए तरीक़ों से भी चुन सकते हैं। चित्र के शीर्षक को ध्यान से पढ़िए और उसके बाद दिए बोध प्रश्न को हल कीजिए।



चित्र 1.9 : (क) दायें हाथ को इस प्रकार फैलाया जाता है कि बीच की अंगुली, पहली अंगुली और अंगूठा एक दूसरे के लम्बवत् हों और बाकी दोनों अंगुलियां बन्द हों। अगर अंगूठा और पहली अंगुली धनात्मक x-अक्ष और धनात्मक y-अक्ष दिखाती हैं तो बीच की अंगुली धनात्मक z-अक्ष दिखाएगी; (ख) अपने दायें हाथ की अंगुलियों को $x-y$ तल पर लम्ब रेखा के गिर्द मोड़ें। अगर अंगुलियों के पोर x-अक्ष से y-अक्ष की तरफ़ 90° से घूमने की दिशा में हैं तो अंगूठा धनात्मक z-अक्ष की दिशा दिखाता है। यह वही दिशा है जिसमें एक दक्षिणावर्ती पेंच x-अक्ष से y-अक्ष की तरफ़ घुमाने पर आगे बढ़ता है।

बोध प्रश्न 3

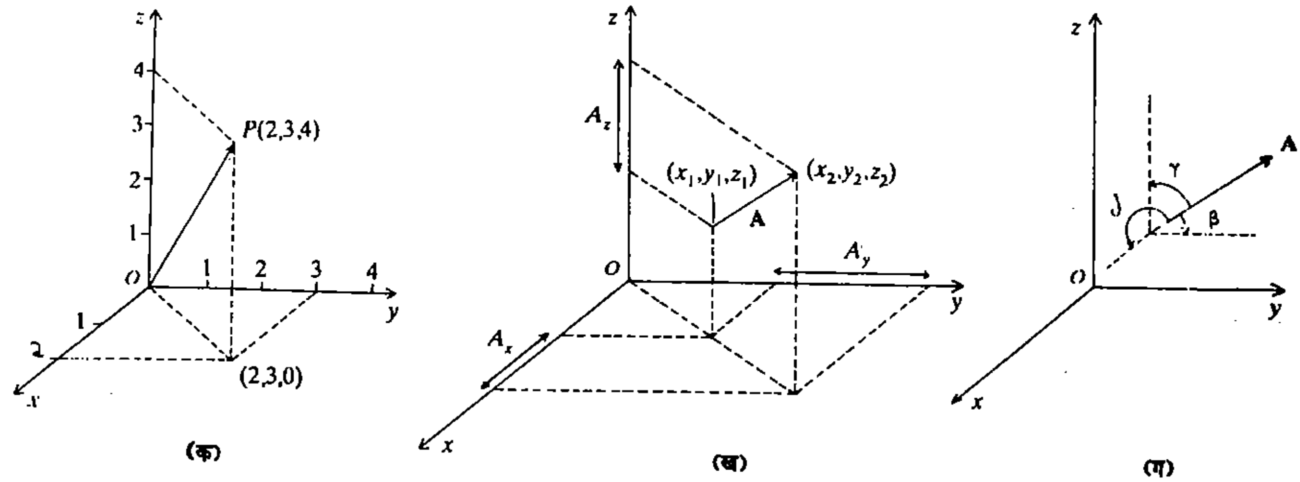
निम्नलिखित परस्पर लम्बवत् अक्षों के समूहों में से कौन से समूह दक्षिणावर्ती निर्देशांक पद्धति को प्रकट करते हैं ?



अब हम इस पद्धति का प्रयोग O के सापेक्ष विस्थापन **OP** को निर्दिष्ट करने के लिए करेंगे (चित्र 1·10)। बिन्दु P पर पहुंचने के लिए हम x-अक्ष पर x दूरी चलेंगे, अपने बायें मुड़ेंगे, y-अक्ष के समांतर y दूरी चलेंगे और तब z- अक्ष के समांतर z दूरी चलेंगे। अब अगर हमें x,y,z दूरियां मालूम हो तो हम O के सापेक्ष बिन्दु P की स्थिति तीन कार्तीय निर्देशांकों (x,y,z) द्वारा व्यक्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, बिन्दु (2, 3, 4) को चित्र 1·10 (क) में दिखाया गया है। इस प्रकार हम विस्थापन **OP** को, जिसे हम $\mathbf{r}$ भी कह सकते हैं, तीन सदिशों $x\hat{\mathbf{i}}$, $y\,\hat{\mathbf{j}}$, $z\hat{\mathbf{k}}$ के योग द्वारा व्यक्त कर सकते हैं, यानि

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \qquad (1\cdot9)$$

मूल बिन्दु O से बिन्दु P तक खींचे गए विस्थापन सदिश को उस बिन्दु P का **स्थिति सदिश** (position vector) कहा जाता है। आप देख सकते हैं कि बिन्दु P के स्थिति सदिश के घटक इस के निर्देशांक ही हैं।



चित्र 1·10 : (क) बिन्दु P पर स्थित कण का स्थिति सदिश ; (ख) सदिश $\mathbf{A}$ के कार्तीय घटक $A_x = x_2 - x_1$, $A_y = y_2 - y_1$, $A_z = z_2 - z_1$; (ग) कोण α, β, γ.

अब हम ऊपर दी गई संकल्पना को किसी भी सदिश $\mathbf{A}$ पर लागू कर सकते हैं (देखें चित्र 1.10 ख)। अगर A_x, A_y, A_z क्रमशः x, y और z-अक्षों पर $\mathbf{A}$ के प्रक्षेप हैं तो $\mathbf{A}$ को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}} + A_y \hat{\mathbf{j}} + A_z \hat{\mathbf{k}} . \qquad (1\cdot10\text{ क})$$

$\mathbf{A}$ का परिमाण होता है

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \qquad (1\cdot10\text{ ख})$$

$\mathbf{A}$ की दिशा को, $\mathbf{A}$ और तीन निर्देशांक अक्षों के बीच के कोणों द्वारा निर्दिष्ट किया जाता है। इन कोणों को α, β, γ कहते हैं (चित्र 1·10 ग देखिए)। $\mathbf{A}$ की पूंछ से जाती बिन्दुदार रेखाएं x, y और z- अक्षों के समांतर हैं। व्यवहार में हम इन कोणों की कोसाइन (cosine) का प्रयोग करते हैं और इन्हें दिक्-कोसाइन (direction cosines) कहा जाता है :

$$l = \cos\alpha = \frac{A_x}{A} ,$$

$$m = \cos\beta = \frac{A_y}{A} ,$$

$$n = \cos\gamma = \frac{A_z}{A} . \qquad (1\cdot10\text{ ग})$$

आप देख सकते हैं कि $\quad l^2 + m^2 + n^2 = 1. \qquad (1\cdot10\text{ घ})$

उदाहरण 2

$\mathbf{A} = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} - 2\hat{\mathbf{k}}$ का परिमाण और दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

यहाँ $\quad A_x = 2, \quad A_y = 1, \quad A_z = -2.$

$$\therefore \quad A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4+1+4} = 3.$$

$$l = \cos\alpha = \frac{A_x}{A} = \frac{2}{3}, m = \cos\beta = \frac{A_y}{A} = \frac{1}{3}, n = \cos\gamma = \frac{A_z}{A} = -\frac{2}{3}$$

बोध प्रश्न 4

(क) चित्र 1.10 क में बिन्दु Q (2,4,4) का स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ खींचिए। इसे एकक सदिशों के पदों में अभिव्यक्त करिए और इसके परिमाण और दिक्-कोसाइन ज्ञात कीजिए।

ध्यान दें कि स्थिति सदिश एक भौतिक राशि है और इसके साथ लंबाई का उचित मात्रक लगाया जाना ज़रूरी है। लेकिन क्योंकि हम किसी बिंदु के निर्देशांकों के साथ हमेशा ही मात्रक नहीं लगाते, इसलिए यहां हमने स्थिति सदिशों के साथ भी मात्रक नहीं लगाए हैं।

(ख) $\mathbf{r}_1$ और $\mathbf{r}_2$ बिन्दु R और S के स्थिति सदिश हैं, जहां

$$\mathbf{r}_1 = 2\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}.$$

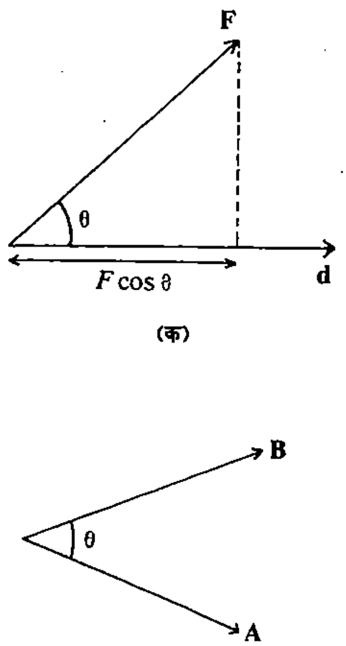
$$\mathbf{r}_2 = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 2\hat{\mathbf{k}}.$$

चित्र 1.10 क में बिन्दु R और S को दिखाएं।

सदिश $\mathbf{d}$ (= $\mathbf{RS}$) खींचें और इसके घटक भी लिखें।

अब तक हमने सदिशों को एक, दो और तीन विमाओं में उनके घटकों के पदों में लिखना सीखा है। बेशक हमने इन संकल्पनाओं को समझने के लिए केवल विस्थापन का ही उदाहरण लिया है। लेकिन फिर भी उन्हें दूसरे किसी भी सदिश के लिए प्रयोग किया जा सकता है। हमने यह भी सीखा है कि सदिशों का योगफल कैसे निकाला जाता है और उन्हें अदिशों से गुणा कैसे किया जाता है। अगला प्रश्न यह है कि हम दो सदिशों को गुणा कैसे करते हैं। क्या उनका गुणनफल सदिश होता है या कोई और राशि होता है? इसका चुनाव हम पर ही निर्भर करता है। यहां हम दो तरह के गुणनफलों की परिभाषा देंगे जो भौतिकी में इस्तेमाल होते हैं।

1.3.2 सदिशों का गुणनफल



(क)

(ख)

चित्र 1.11

आइए हम उस दिशा में बल $\mathbf{F}$ लगाएं जो विस्थापन $\mathbf{d}$ की दिशा से कोण θ बनाती है (चित्र 1.11 क)। आप जानते ही होंगे कि बल $\mathbf{F}$ द्वारा किसी वस्तु पर किया गया कार्य वस्तु के विस्थापन $\mathbf{d}$ के परिमाण तथा $\mathbf{d}$ की दिशा में $\mathbf{F}$ के घटक का गुणनफल होता है, यानि

$$W = (F \cos\theta)\, d. \qquad (1{\cdot}11\ \text{क})$$

जैसा कि आप जानते ही हैं कार्य एक अदिश राशि है। हम कार्य को सदिशों $\mathbf{F}$ और $\mathbf{d}$ के गुणनफल के रूप में भी व्यक्त कर सकते हैं, यानि

$$W = \mathbf{F}.\mathbf{d}. \qquad (1{\cdot}11\ \text{ख})$$

दो सदिशों $\mathbf{A}$ और $\mathbf{B}$ का इस प्रकार का गुणनफल जिससे एक अदिश राशि प्राप्त होती है, **अदिश गुणनफल** (scalar product) कहलाता है। इसे $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ द्वारा प्रकट किया जाता है (इसे $\mathbf{A}$ डॉट $\mathbf{B}$ पढ़ा जाता है)। **अदिश गुणनफल** को इस प्रकार परिभाषित किया जाता है

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta, \qquad (1{\cdot}12)$$

जहां पर θ, $\mathbf{A}$ और $\mathbf{B}$ के बीच का कोण है, जब कि इन दोनों सदिशों को इनकी पूंछ मिला कर खींचा जाता है (जैसा कि चित्र 1.11 ख में दिखाया गया है)। परम्परा से, $\mathbf{A}$ और $\mathbf{B}$ के बीच के उस कोण को θ माना जाता है जिसका मान π से छोटा या π के बराबर हो।

उदाहरण 3

एकक निर्देशांक सदिश का स्वयं से अदिश गुणनफल ज्ञात करें।

$$\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{i}} = |\hat{\mathbf{i}}|\,|\hat{\mathbf{i}}|\cos 0^\circ = 1.$$

इसी प्रकार $\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = 1$ और $\hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = 1.$ (1·13 क)

बोध प्रश्न 5

(क) दिए हुए रिक्त स्थान पर दो भिन्न एकक निर्देशांक सदिशों का गुणनफल लिखिए।

i) $\hat{\mathbf{i}}\cdot\hat{\mathbf{j}} = \ldots\ldots\ldots$

ii) $\hat{\mathbf{j}}\cdot\hat{\mathbf{k}} = \ldots\ldots\ldots$ (1.13 ख)

iii) $\hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} =$ ....

(ख) रिक्त स्थान भरें जबकि दिया है कि सदिश

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}},$$

i) $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}} =$ ....

ii) $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{j}} =$ ....

iii) $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} =$ .... (1·13 ग)

बोध प्रश्न 5 (ख) के हल में क्या आपने ध्यान दिया कि किसी सदिश के x, y, z घटकों को, उसके तथा संगत एकक निर्देशांक सदिशों के अदिश गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है।

हम दो सदिशों के अदिश गुणनफल को भी उन सदिशों के घटकों के पदों में लिख सकते हैं। मान लें कि

$$\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}},$$

$$\mathbf{B} = B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}.$$

अदिश गुणनफल के बंटन गुण का प्रयोग करते हुए जो कि इस प्रकार है

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}, \qquad (1\cdot14)$$

हम लिख सकते हैं कि

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}) \cdot (B_x\hat{\mathbf{i}} + B_y\hat{\mathbf{j}} + B_z\hat{\mathbf{k}}) \\
&= A_x B_x\, \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + A_x B_y\, \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + A_x B_z\, \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \\
&+ A_y B_x\, \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + A_y B_y\, \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + A_y B_z\, \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} \\
&+ A_z B_x\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + A_z B_y\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + A_z B_z\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}.
\end{aligned}$$

समीकरण 1·13 क और 1·13 ख का प्रयोग करके हमें प्राप्त होता है :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z. \qquad (1\cdot15\ \text{क})$$

इस प्रकार दो सदिशों का अदिश गुणनफल प्रत्येक निर्देशांक अक्ष पर उनके घटकों के गुणनफल के योग के बराबर है। क्योंकि घटक अदिश हैं इसलिए

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}. \qquad (1\cdot15\ \text{ख})$$

आप अदिश गुणनफल पर एक और सरल बोध प्रश्न को हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 6

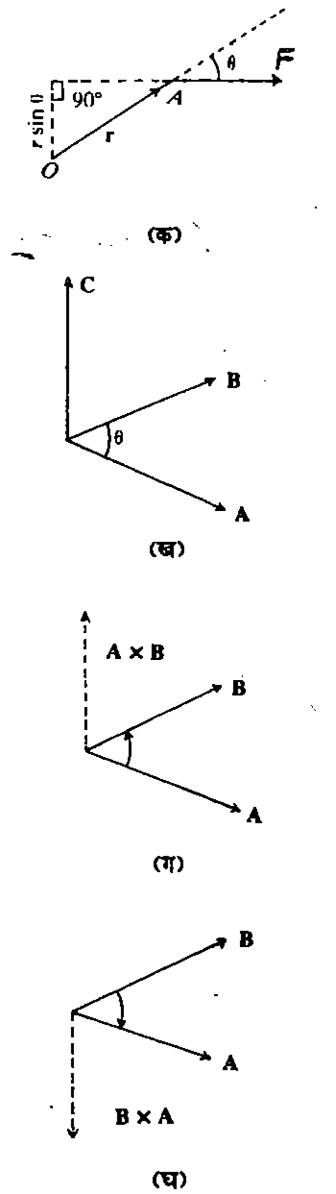
सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A^2$.

अदिश गुणनफल के अतिरिक्त दो सदिशों का एक अन्य गुणनफल होता है जो सदिश ही होता है और जिसकी दिशा दिए हुए दो सदिशों के लम्बवत् होती है। उदाहरण के लिए, अगर बिन्दु A पर बल $\mathbf{F}$ लगाया जाए (चित्र 1·12 क) तो इसके द्वारा बिन्दु O के सापेक्ष लगाए गए बलआघूर्ण का परिमाण $(F \sin \theta)\, r$ होता है और यह $\mathbf{F}$ और $\mathbf{r}$ से बने तल के लंबवत् अक्ष के गिर्द लगता है।

जैसा कि आप जानते ही हैं कि बलआघूर्ण एक सदिश राशि है। हम बलआघूर्ण को $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ के गुणनफल के रूप में भी लिखते हैं :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \qquad (1\cdot16)$$

दो सदिशों **A** और **B** के इस प्रकार के गुणनफल को जिससे सदिश राशि प्राप्त होती है, **सदिश गुणनफल** अथवा **वेक्टर गुणनफल** (vector product) कहते हैं। इसे $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ द्वारा प्रकट किया जाता है और A क्रास B बोला जाता है।



परिभाषा के अनुसार यह होता है एक सदिश

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \sin\theta \; \hat{\mathbf{C}}, \qquad (1{\cdot}17)$$

जहां पर θ, **A** और **B** के बीच का कोण है जबकि चित्र 1·12 ख के अनुसार इन दोनों की पूंछ मिला कर खींचा जाता है। परम्परा से, **A** और **B** के बीच के उस कोण को θ माना जाता है जिसका मान π से छोटा अथवा π के बराबर हो। **C** का परिमाण $AB \sin\theta$ होता है और इसकी दिशा $\hat{\mathbf{C}}$ द्वारा परिभाषित होती है जो **A** और **B** की लम्बवत् दिशा में एकक सदिश है। परम्परा से $\hat{\mathbf{C}}$ की दिशा दक्षिणहस्त नियम (right-hand rule) से निर्धारित होती है यानि पहले **A** और **B** की पूंछों को मिलाएं जिससे एक तल बनता है। **A** को **B** की तरफ, दोनों के बीच बने कम मान वाले कोण पर घुमाएं और दायें हाथ की अंगुलियों को उस दिशा में अन्दर की ओर मोड़ें जिस दिशा में **A** को घुमाया गया है। तब दायें हाथ का अंगूठा $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा दिखाएगा।

इस प्रकार $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ एक सदिश है जिसकी दिशा $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ के विपरीत है (देखें चित्र 1.12 घ), अर्थात्

$$\mathbf{B} \times \mathbf{A} = -\mathbf{A} \times \mathbf{B} \qquad (1{\cdot}18)$$

हम यह भी देखते हैं कि अगर $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, तब

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{A} = |\mathbf{A}|^2 \sin(0^\circ) \; \hat{\mathbf{C}} = \mathbf{0}.$$

इस प्रकार, किसी सदिश का अपने से ही सदिश गुणनफल, एक शून्य सदिश होता है, यानि वह सदिश जिसका परिमाण शून्य होता है।

उदाहरण 4

दो भिन्न एकक निर्देशांक सदिशों का सदिश गुणनफल ज्ञात करें।

$$|\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}}| = 1{\cdot}1 \sin 90^\circ = 1.$$

इसकी दिशा दक्षिणहस्त नियम से निकाली जा सकती है

जिससे कि $\qquad \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}.$

इसी प्रकार $\qquad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}. \qquad$ (1·19 क)

बोध प्रश्न 7

सदिश गुणनफल की परिभाषा और दक्षिणहस्त नियम का प्रयोग करके नीचे के रिक्त स्थान भरिए :

i) $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}$ = ...

ii) $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}}$ = ...

iii) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}}$ = ...

iv) $\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}}$ = ... (1·19 ख)

v) $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}}$ = ...

vi) $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}$ = ...

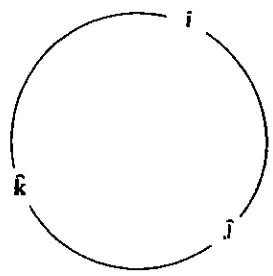
चित्र 1·12 : (क) बल द्वारा मूल बिन्दु O के गिर्द लगाये गये बलआघूर्ण का परिमाण $\tau = rF \sin\theta$; (ख) $\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B}$; (ग) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ की दिशा दक्षिणहस्त नियम से निर्धारित की जाती है; (घ) $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ एक सदिश है जो परिमाण में $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ के बराबर और दिशा में उसके विपरीत है।

आप देख सकते हैं कि $\hat{i} \times \hat{j}$, $\hat{j} \times \hat{k}$ और $\hat{k} \times \hat{i}$ के गुणनफल में एक चक्रीय पैटर्न है जो कि चित्र 1·13 में दिखाया गया है। उदाहरण के लिए, अगर हम वृत्त में दक्षिणावर्त चलें तो सदिश गुणनफल धनात्मक होते हैं, यानि

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k},\ \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i},\ \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}.$$

अगर हम वामावर्त दिशा में चलें तो सदिश गुणनफल ऋणात्मक होते हैं, यानि

$$\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k},\ \ \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j},\ \hat{k} \times \hat{j} = -\hat{i}.$$



चित्र 1.13 : अगर हम वृत्त में दक्षिणावर्त चलें तो सदिश गुणनफल धनात्मक होते हैं, और अगर हम वामावर्त चलें तो यह गुणनफल ऋणात्मक होते हैं।

अदिश गुणनफल की तरह सदिश गुणनफल भी सदिश योग पर बंटन गुण का पालन करता है, यानि

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} + \mathbf{P} \times \mathbf{R}. \qquad (1{\cdot}20)$$

इसलिए किन्हीं भी दो सदिशों

$$\mathbf{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k} \text{ और } \mathbf{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}$$

के लिए हम लिख सकते हैं :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_x\hat{i} + A_y\hat{j} + A_z\hat{k}) \times (B_x\hat{i} + B_y\hat{j} + B_z\hat{k}) \\ &= A_xB_x(\hat{i} \times \hat{i}) + A_xB_y(\hat{i} \times \hat{j}) + A_xB_z(\hat{i} \times \hat{k}) \\ &+ A_yB_x(\hat{j} \times \hat{i}) + A_yB_y(\hat{j} \times \hat{j}) + A_yB_z(\hat{j} \times \hat{k}) \\ &+ A_zB_x(\hat{k} \times \hat{i}) + A_zB_y(\hat{k} \times \hat{j}) + A_zB_z(\hat{k} \times \hat{k}).\end{aligned}$$

समीकरणों 1·19 क और ख का उपयोग करके हमें प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned}\mathbf{A} \times \mathbf{B} &= \hat{k}\,A_xB_y - \hat{j}\,A_xB_z \\ &- \hat{k}\,A_yB_x + \hat{i}\,A_yB_z \\ &+ \hat{j}\,A_zB_x - \hat{i}\,A_zB_y\end{aligned}$$

या $\quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \hat{i}\,(A_yB_z - A_zB_y) + \hat{j}\,(A_zB_x - A_xB_z) + \hat{k}\,(A_xB_y - A_yB_x) \quad$ (1·21 क)

$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ को डिटर्मिनेन्ट के रूप में भी लिखा जा सकता है। आप डिटर्मिनेन्ट के बारे में पहले से ही जानते हैं इसलिए आप प्रमाणित कर सकते हैं कि

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (1{\cdot}21\text{ ख})$$

यह समीकरण 1·21 क के तुल्य है और इसे याद रखना आसान है। हम दो सदिशों **A** और **B** के सदिश और अदिश गुणनफलों का प्रयोग **(A + B)** के परिणामी सदिश का परिमाण और दिशा निकालने के लिए कर सकते हैं। मान लें कि चित्र 1·14 के अनुसार **A** और **B** की पूंछ सांझी है। क्या हम योग के त्रिभुज नियम का उपयोग कर सकते हैं ? हां, हम चित्र 1·14 ख के अनुसार सदिश **B** को स्थिति *OQ* से *PR* में स्थानांतरित कर सकते हैं। तब **OR = C** परिणामी होगा। संयोग से *OR*, चतुर्भुज *OPRQ* का बिन्दु *O* से विकर्ण है। यह सदिश योगफल का चतुर्भुज नियम (parallelogram law of vector addition) कहलाता है।

परिणामी **C** का अपने ही साथ अदिश गुणनफल करके हम उसका परिमाण मालूम कर सकते हैं :

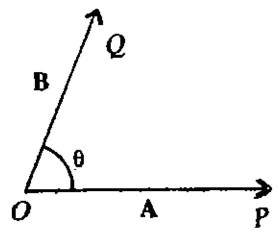
$$C^2 = \mathbf{C}\cdot\mathbf{C} = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})$$

$$= \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$$

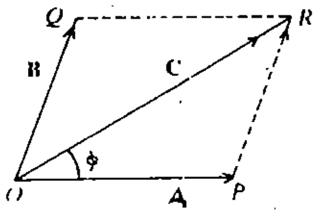
$$= A^2 + 2\,\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + B^2 \quad [\because \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}]$$

$\therefore C^2 = A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta$, जहां θ, **A** और **B** के बीच का कोण है,

या $$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta} \qquad (1{\cdot}22\ \text{क})$$



(क)



(ख)

चित्र 1.14 : सदिश योगफल का चतुर्भुज नियम। दो सदिशों **A** और **B**, जिनकी पूंछ सांझी है, का परिणामी उस चतुर्भुज के (सांझी पूंछ से गुज़रने वाले) विकर्ण द्वारा दिया जाता है, जिसकी आसन्न भुजाएं **A** और **B** हैं।

A और **C** के सदिश और अदिश गुणनफलों से उनके बीच का कोण ϕ यानि सदिश **C** की दिशा निकाली जा सकती है।

$$\mathbf{A}\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B}, [\because \mathbf{A}\times\mathbf{A} = 0]$$

या $$|\mathbf{A}\times\mathbf{C}| = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|,$$

या $$AC\sin\phi = AB\sin\theta$$

यानि $$C\sin\phi = B\sin\theta. \qquad [\because A \neq 0] \qquad (1{\cdot}22\ \text{ख})$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{B},$$

या $$AC\cos\phi = A^2 + AB\cos\theta,$$

$$\therefore \quad C\cos\phi = A + B\cos\theta. \qquad (1{\cdot}22\ \text{ग})$$

समीकरण 1·22 ख और 1·22 ग से हमें प्राप्त होता है

$$\tan\phi = \frac{B\sin\theta}{A + B\cos\theta}. \qquad (1{\cdot}22\ \text{घ})$$

आइए अब हम अदिश और सदिश गुणनफल का एक उदाहरण हल करें।

उदाहरण 5

दो सदिश $\mathbf{A} = 4\,\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}} - 7\,\hat{\mathbf{k}}$

तथा $\mathbf{B} = 2\,\hat{\mathbf{i}} + 6\,\hat{\mathbf{j}} + 3\,\hat{\mathbf{k}}$ दिए हैं।

A · B तथा **A × B** और **A, B** के बीच का कोण निकालिए।

यहां $A_x = 4, A_y = 4, A_z = -7;$

$B_x = 2,\ B_y = 6,\ B_z = 3.$

i) $$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$= 4{\cdot}2 + 4{\cdot}6 + (-7)\,.\,3$$

$$= 8 + 24 - 21 = 11$$

ii) $$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\hat{\mathbf{i}} + (A_zB_x - A_xB_z)\,\hat{\mathbf{j}} + (A_xB_y - A_yB_x)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= [\,4{\cdot}3 - 6.(-7)]\,\hat{\mathbf{i}} + (-7{\cdot}2 - 4{\cdot}3)\,\hat{\mathbf{j}} + (4{\cdot}6 - 4{\cdot}2)\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$= 54\,\hat{\mathbf{i}} - 26\,\hat{\mathbf{j}} + 16\,\hat{\mathbf{k}}.$$

हम जानते हैं कि

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$$

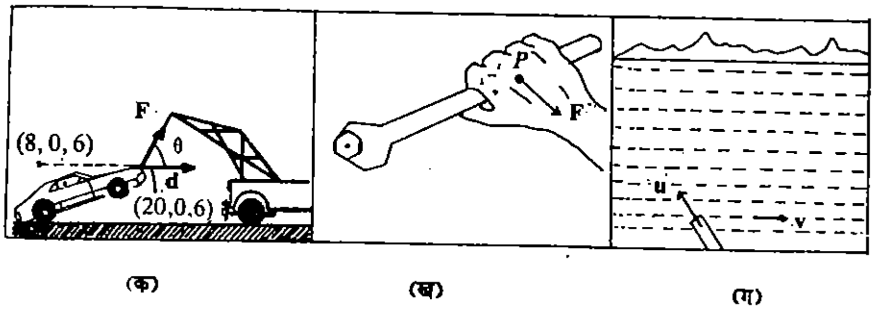
$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} = 9,\ B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2} = 7$$

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB} = \frac{11}{9\times 7} = \frac{11}{63}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{11}{63}\right)$$

अब आप इस भाग पर आधारित एक ज़रा लंबा बोध प्रश्न हल कर सकते हैं। इसके भाग (क) और (ख) अदिश और सदिश गुणनफल पर आधारित हैं और भाग (ग) समीकरणों 1.22 क और 1.22 घ पर आधारित है ।

बोध प्रश्न 8



चित्र 1·15

(क) एक अचर बल $\mathbf{F} = \hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}$ चित्र 1·15 क के अनुसार एक कण पर लगता है जिसके परिणामस्वरूप इसका विस्थापन बिन्दु (8, 0, 6) से बिन्दु (20, 0, 6) तक हो जाता है। कुल किया गया कार्य ज्ञात कीजिए। बल को न्यूटन में तथा विस्थापन को मीटरों में लीजिए।

(ख) एक बल $\mathbf{F} = 2\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$, बिन्दु P (1, −1, 1) पर लगाया जाता है (चित्र 1·15 ख)। मूल बिन्दु के गिर्द बलआघूर्ण निकालिए। बल न्यूटन में तथा विस्थापन मीटर में लीजिए।

(ग) एक व्यक्ति सबसे छोटे रास्ते से स्पीड बोट द्वारा एक नदी पार करना चाहता है। ठहरे पानी में स्पीड बोट की चाल u है। नदी की चाल v है और $v < u$ (चित्र 1·15 ग)। सिद्ध कीजिए कि बोट की परिणामी चाल $\sqrt{u^2 - v^2}$ है और वह दिशा ज्ञात कीजिए जिसमें बोट को ले जाया जाए। मान लीजिए कि नदी के किनारे समांतर हैं।

अब तक हमने सदिश बीजगणित के कुछ मूल सिद्धांतों को पढ़ा है। अब हम सदिशों का प्रयोग करके शुद्धगतिकीय राशियों, जैसे विस्थापन, वेग और त्वरण की चर्चा करेंगे।

1.3.3 विस्थापन, वेग और त्वरण

आइए हम समष्टि में एक कण की गति पर विचार करें (चित्र 1·16 क)। क्षण t पर इस कण की स्थिति A है और क्षण $t + \Delta t$ पर इस की स्थिति B है। जैसा कि हमने भाग 1.3.1 में पढ़ा था किसी भी कण की स्थिति एक दिए हुए निर्देश तंत्र में उस स्थिति सदिश द्वारा दी जाती है जो इस तंत्र के मूल बिंदु से कण की स्थिति तक खींचा जाता है। मान लीजिए कि O के सापेक्ष A और B के स्थिति सदिश, क्रमशः $\mathbf{r}$ और $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ हैं । समयांतराल Δt में कण का विस्थापन, AB दिशा में, $\Delta\mathbf{r}$ के बराबर है।

Δt समय में कण का औसत वेग (average velocity) होगा :

$$\mathbf{v}_{av} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}. \qquad (1\cdot 23)$$

चूंकि Δt एक अदिश राशि है इसलिए $\mathbf{v}_{av}$ की दिशा वही होगी जो $\Delta\mathbf{r}$ की है। $\mathbf{v}_{av}$ वह वेग है जिस पर कण एकसमान गति से सीधी रेखा में समयांतराल Δt के दौरान चलता है।

बोध प्रश्न 9

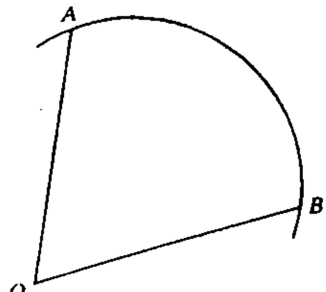
विरामावस्था से गिरते हुए एक कण की विस्थापन और समय में समीकरण इस प्रकार दी जाती है

$$x = (4\cdot 9 \text{ m s}^{-2})t^2$$

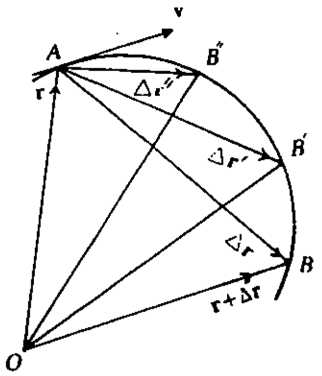
जहां x मीटरों में है और t सेकंडों में।

$t = 1$ s और $t = 2$ s के बीच के समय में तथा $t = 3$ s और $t = 4$ s के बीच के समय में कण का औसत वेग निकालिए।

बोध प्रश्न 9 को हल करने पर आपने पाया होगा कि दो भिन्न समय अंतरालों में कण के औसत वेग एकसमान नहीं थे। ऐसी गति को **असमान गति** (non-uniform motion) कहा जाता है। जब एक बस एक स्टॉप से दूसरे स्टॉप तक जाती है तो इसकी गति असमान होती है। ऐसी स्थितियों में हम किसी भी क्षण पर कण के वेग को जानना चाहेंगे।



(क)



(ख)

चित्र 1·16

किसी कण का वेग, उसके परिमाण या दिशा या दोनों ही के बदलने के कारण बदल सकता है। चित्र 1·16 ख में समय अन्तराल Δt में औसत वेग जीवा AB की दिशा में होगा। लेकिन वास्तव में कण की गति चाप (arc) के अनुदिश होती है। अन्तराल $\Delta t'$ (A से B') तथा $\Delta t''$ (A से B'') के दौरान औसत वेग के परिमाण और दिशा दोनों ही अलग होंगे। समय अन्तराल $\Delta t''$, $\Delta t'$ से छोटा है जो कि Δt से छोटा है।

जैसे-जैसे हम समय-अन्तराल को कम करते हैं, बिन्दु B बिन्दु A के पास आता जाता है यानि जीवा कण की वास्तविक गति को बेहतर ढंग से निरूपित करती जाती है। अन्ततः यह दोनों बिन्दु आपस में मिल जाते हैं और $\Delta\mathbf{r}$ उस बिन्दु पर वक्र की स्पर्श रेखा से संपाती (coincident) होता है।

ज्यों-ज्यों Δt कम होता जाता है, $\dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ का अनुपात एक सीमा की ओर प्रवृत्त होता है। सदिश $\mathbf{v}$ को जिस का परिमाण उस सीमा के बराबर है जिसकी ओर $\dfrac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ प्रवृत्त होता है जब $\Delta t \to 0$, क्षण t पर उस कण का **तात्क्षणिक वेग** (instantaneous velocity) कहते हैं। इसकी दिशा उस क्षण पर वक्र की स्पर्श रेखा की दिशा में होती है। इस तरह

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}.$$

दूसरे शब्दों में, तात्क्षणिक वेग, $\mathbf{r}$ का समय के साथ अवकलज है:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \qquad (1{\cdot}24\text{ क})$$

समीकरण 1·24 क से यह पता चलता है कि अगर $\mathbf{r}$ के घटक x, y, z हैं तो

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}})$$

या

$$\mathbf{v} = x\frac{d\hat{\mathbf{i}}}{dt} + \hat{\mathbf{i}}\frac{dx}{dt} + y\frac{d\hat{\mathbf{j}}}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\frac{dy}{dt} + z\frac{d\hat{\mathbf{k}}}{dt} + \hat{\mathbf{k}}\frac{dz}{dt}$$

$= \hat{\mathbf{i}}\dfrac{dx}{dt} + \hat{\mathbf{j}}\dfrac{dy}{dt} + \hat{\mathbf{k}}\dfrac{dz}{dt}$, क्योंकि $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$ समय पर निर्भर नहीं करते।

$\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}$ के परिमाण और दिशा अचर हैं। अतः समय के सापेक्ष-उनके अवकलज शून्य होंगे।

या

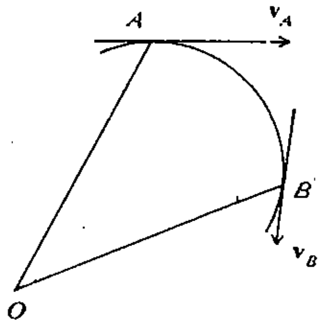
$\mathbf{v} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$ जहां

$$v_x = \frac{dx}{dt},\ v_y = \frac{dy}{dt},\ v_z = \frac{dz}{dt}. \qquad (1{\cdot}24\text{ ख})$$

अगर हम वेग की समीकरणें लिखने के लिए केवल निर्देशांकों का प्रयोग करते तो हमें तीन समीकरण लिखने पड़ते जैसा कि समीकरण 1·24 ख में किया गया है। सदिश के प्रयोग की वजह से केवल एक समीकरण 1·24 क लिखना काफ़ी है। आइए अब हम कण के पथ के दो बिंदुओं A और B पर उसका तात्क्षणिक वेग दिखाएं (चित्र 1·17)। हम देख सकते हैं कि दोनों बिंदुओं पर कण के वेग भिन्न हैं, यानि वेग का परिमाण और दिशा दोनों बदल रहे हैं। इस प्रकार कण की गति में त्वरण हो रहा है। इसलिए जिस तरह हमने औसत और तात्क्षणिक वेग की परिभाषा दी है उसी तरह से हम अब औसत और तात्क्षणिक त्वरण को परिभाषित करेंगे।

यदि कण का वेग, t से $t+\Delta t$ के बीच के समयांतराल में $\mathbf{v}$ से बदल कर $\mathbf{v}+\Delta\mathbf{v}$ हो जाता है तो इस समयांतराल में औसत त्वरण (average acceleration) $\mathbf{a}_{av}$ होगा :

$$\mathbf{a}_{av} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}. \qquad (1{\cdot}25)$$



चित्र 1·17

क्योंकि Δt अदिश राशि है इसलिए $\mathbf{a}_{av}$, $\Delta\mathbf{v}$ की दिशा में होगा। जैसे-जैसे समयांतराल Δt कम होता जाता है वैसे-वैसे $\frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$ एक सीमा की ओर प्रवृत्त होता है। हम गति के किसी क्षण पर किसी कण के तात्क्षणिक त्वरण को इस प्रकार परिभाषित करते हैं,

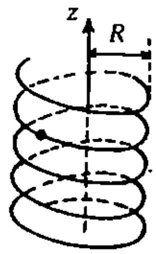
$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \qquad (1{\cdot}26 \text{ क})$$

तो इस प्रकार त्वरण समय t के सापेक्ष $\mathbf{v}$ का अवकलज है यानि

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}.$$

तथा
$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, a_y = \frac{dv_y}{dt}, a_z = \frac{dv_z}{dt}. \qquad (1{\cdot}26 \text{ ख})$$

उदाहरण 6



चित्र 1·18

एक तार की कुंडली जिसकी त्रिज्या R है, इस तरह रखी है कि उसका अक्ष ऊर्ध्वाधरतः z-अक्ष की दिशा में है। एक घर्षणरहित मनका उस कुंडली के तार पर नीचे की ओर खिसकता है (चित्र 1·18)। मनके का स्थिति सदिश समय के साथ इस प्रकार बदलता है :

$$\mathbf{r}(t) = (R\cos bt^2)\,\hat{\mathbf{i}} + (R\sin bt^2)\,\hat{\mathbf{j}} - \frac{1}{2}ct^2\,\hat{\mathbf{k}},$$

जहां b और c अचर हैं। $\mathbf{v}(t)$ और $\mathbf{a}(t)$ ज्ञात कीजिए।

यहां पर $x = R\cos bt^2$, $y = R\sin bt^2$, $z = -\frac{1}{2}ct^2$

हम जानते हैं कि $\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dz}{dt}\hat{\mathbf{k}}$

$$= (-2bt\,R\sin bt^2)\,\hat{\mathbf{i}} + (2btR\cos bt^2)\,\hat{\mathbf{j}} - (ct)\,\hat{\mathbf{k}}$$

तथा $\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = (-4t^2b^2R\cos bt^2 - 2Rb\sin bt^2)\,\hat{\mathbf{i}}$

$$+ (-4t^2b^2R\sin bt^2 + 2Rb\cos bt^2)\,\hat{\mathbf{j}} - c\hat{\mathbf{k}}$$

बोध प्रश्न 10

एक कण वक्र $y = Ax^2$ के पथ पर इस प्रकार चलता है कि $x = Bt$ जहां पर A और B अचर हैं।

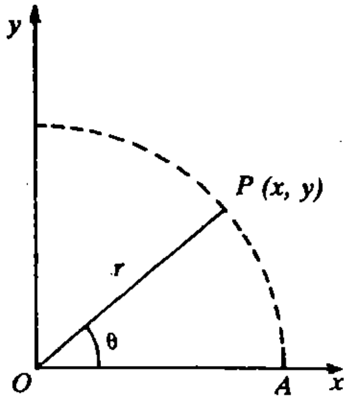
(क) कण के स्थिति सदिश को $\mathbf{r}(t) = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}$ के रूप में व्यक्त कीजिए।

(ख) इस पथ पर किसी क्षण t पर कण की चाल $v\left(=\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|\right)$ का परिकलन कीजिए।

अभी तक हमने जिन संकल्पनाओं को समझा है, आइए अब उन्हें एकसमान वर्तुल गति पर लागू करें जिसकी भौतिकी में महत्वपूर्ण भूमिका है। वर्तुल कक्षा में कृत्रिम उपग्रहों की गति, सड़कों के डिज़ाइन, चुम्बकीय क्षेत्र में इलेक्ट्रॉनों की गति आदि का अध्ययन, एकसमान वर्तुल गति के आधार पर आसानी से किया जा सकता है।

1.4 एकसमान वर्तुल गति

अब हम एक ऐसे कण की गति पर विचार करेंगे जो किसी बिन्दु O से सदा अचर दूरी r बनाए रखता है और निश्चित समयांतराल में एक निश्चित अचर कोण से घूमता है। चित्र 1·19 में इस कण का पथ बिन्दुदार रेखा से दिखाया गया है।



चित्र 1.19: एकसमान वर्तुल गति

x-अक्ष पर बिन्दु A क्षण $t=0$ पर कण की स्थिति प्रकट करता है। t सेकन्ड के बाद यह कोण $\theta = \angle AOP$ घूम कर P पर पहुंचता है। O से हम x- अक्ष के लम्बवत् y- अक्ष खींचते हैं। मान लीजिए कि परस्पर लम्बवत् x और y- अक्षों के सापेक्ष P के निर्देशांक (x,y) हैं। त्रिकोणमिति से हम जानते हैं कि

$$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta. \qquad (1\cdot27\ \text{क})$$

अगर प्रति सेकंड कण द्वारा घूमे गए अचर कोण का मान ω रेडियन हो तो $\theta = \omega t$ और हम समीकरण 1·27 क को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$x = r\cos\omega t,\ \ y = r\sin\omega t. \qquad (1.27\ \text{ख})$$

ω को कण की **कोणीय चाल** (angular speed) कहा जाता है। बिन्दु P पर कण का स्थिति सदिश होता है:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}, \qquad (1\cdot28)$$

$$\mathbf{r} = r\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + r\sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}},$$

और
$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -r\omega\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + r\omega\cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}}, \qquad (1\cdot29\ \text{क})$$

$$= v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}},$$

जहां
$$v_x = -r\omega\sin\omega t, \qquad v_y = r\omega\cos\omega t. \qquad (1\cdot29\ \text{ख})$$

इसलिए वेग का परिमाण होगा

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

$$= \sqrt{r^2\omega^2(\sin^2\omega t + \cos^2\omega t)} = \sqrt{r^2\omega^2} = r\omega. \qquad (1\cdot29\ \text{ग})$$

अब इसकी दिशा कैसे निकालेंगे ? इसके लिए पहले हम $\mathbf{v}.\mathbf{r}$ निकालेंगे:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = (-r\omega\sin\omega t\ \hat{\mathbf{i}} + r\ \omega\cos\omega t\ \hat{\mathbf{j}})\cdot(r\cos\omega t\ \hat{\mathbf{i}} + r\sin\omega t\ \hat{\mathbf{j}})$$

$$= -r^2\omega\sin\omega t\ \cos\omega t + r^2\omega\cos\omega t\ \sin\omega t = 0.$$

चूंकि $\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} = 0$ है, इसलिए $\mathbf{v}$ सदा ही $\mathbf{r}$ के लम्बवत् होगा। अतः $\mathbf{v}$ हमेशा वर्तुल पथ की स्पर्श रेखा के अनुदिश होगा। समीकरण 1.29 ग से हमें यह मालूम होता है कि $\mathbf{v}$ का परिमाण अचर है, लेकिन उसकी दिशा लगातार बदलती है क्योंकि किसी भी बिन्दु पर यह वक्र की स्पर्श रेखा के अनुदिश होती है। इसलिए वेग सदिश अचर नहीं रहता अर्थात् कण की गति त्वरित गति होती है। मान लीजिए कि कण का त्वरण $\mathbf{a}_R$ है। क्योंकि त्वरण $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ के बराबर है, इसलिए समीकरण 1.29 ख से

$$\mathbf{a}_R = -r\omega^2\cos\omega t\ \hat{\mathbf{i}} - r\omega^2\ \sin\omega t\ \hat{\mathbf{j}}, \qquad (1\cdot30\ \text{क})$$

$$= -\omega^2(r\cos\omega t\ \hat{\mathbf{i}} + r\sin\ \omega t\ \hat{\mathbf{j}})$$

$$\therefore\ \ \mathbf{a}_R = -\omega^2\mathbf{r}. \qquad (1\cdot30\ \text{ख})$$

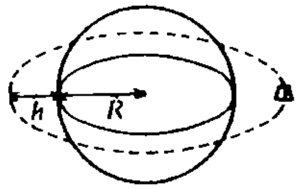
क्योंकि समीकरण 1.29 ग से $v = \omega r$ इसलिए

$$a_R = \omega^2 r = \frac{v^2}{r^2} r = \frac{v^2}{r}. \qquad (1.30 \text{ ग})$$

ध्यान दीजिए कि समीकरण 1.30 ख के दायें हाथ की तरफ ऋण चिन्ह इसलिए लगाया गया है कि त्वरण की दिशा **r** के विपरीत है। अर्थात् वर्तुल पथ में एकसमान कोणीय चाल से चल रहा एक कण केंद्र बिन्दु की ओर त्वरण का अनुभव करता है। इसे **अभिकेन्द्र त्वरण** (centripetal acceleration) कहा जाता है।

उदाहरण 7 : वर्तुल भूमध्य-रेखीय कक्षा में उपग्रह

आइए हम पृथ्वी के गिर्द वर्तुल भूमध्य-रेखीय कक्षा (circular equatorial orbit) में घूम रहे उपग्रह के परिक्रमण काल (period of revolution) का परिकलन करें (चित्र 1.20)। मान लीजिए कि कक्षा में उपग्रह का वेग **v** है और कक्षा की त्रिज्या r है। पृथ्वी की सतह के नज़दीक किसी भी मुक्त वस्तु की तरह ही उपग्रह में भी पृथ्वी के केंद्र की तरफ त्वरण होगा (मान लीजिए g') जो कि अभिकेंद्र त्वरण ही है। इसी त्वरण के कारण ही इस का पथ वर्तुल होता है। अतः समीकरण 1.30 ग से



चित्र 1.20: अपनी कक्षा में उपग्रह

$$g' = \frac{v^2}{r} \qquad (1.31)$$

या $\quad v^2 = g' r.$

अगर उपग्रह की कोणीय चाल ω है तो समीकरण 1.29 ग से प्राप्त होता है

$$\omega^2 r^2 = g' r,$$

या $$\omega^2 = \frac{g'}{r} \qquad (1.32)$$

उपग्रह का परिक्रमण काल $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\dfrac{r}{g'}},$

या $$T = 2\pi \sqrt{\frac{R_E + h}{g'}}, \qquad (1.33)$$

जहां पर R_E = पृथ्वी की त्रिज्या, और

h = भूतल से उपग्रह की ऊंचाई

प्रथम कृत्रिम भू-उपग्रह स्पुतनिक की कक्षा लगभग वर्तुल थी और वह भूतल से 1.7×10^5 m की माध्य ऊंचाई पर पृथ्वी की परिक्रमा करता था जहां पर गुरुत्व त्वरण का मान 9.26 m s^{-2} है। इस प्रकार उपग्रह द्वारा पृथ्वी के गिर्द एक पूरा चक्कर काटने में लगा समय था

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(6.37 \times 10^6 + 0.17 \times 10^6)\,\text{m}}{9.26 \text{ m s}^{-2}}}$$

$$= 5.28 \times 10^3 \text{ s} = 1 \text{ h } 28 \text{ min.}$$

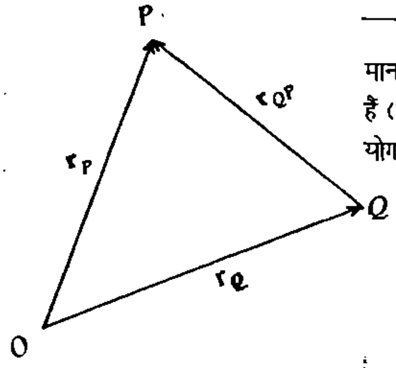
बोध प्रश्न 11

एक समतल क्षैतिज सड़क 60 km h^{-1} की गति सीमा के लिए बनाई जानी है। अगर इस गति सीमा पर चल रही कार का अधिकतम त्वरण 1.5 m s^{-2} रहना हो तो सड़क की न्यूनतम वक्रता त्रिज्या क्या होनी चाहिए ?

अब आप गति का वर्णन करने की भाषा जान चुके हैं और आपने सदिशों का प्रयोग करके विस्थापन, वेग और त्वरण के बारे में भी सीख लिया है। आप यह पहले ही समझ चुके हैं कि एक कण की स्थिति, वेग और त्वरण किसी निर्देश तंत्र के सापेक्ष ही प्राप्त किये जा सकते हैं। जब हम एक ही बस में यात्रा कर रहे हों तो हम दोनों एक दूसरे के सापेक्ष विरामावस्था में होंगे। लेकिन किसी सड़क पर खड़े व्यक्ति के सापेक्ष हम दोनों गतिमान होंगे। सड़क पर खड़े व्यक्ति द्वारा तथा साईकिल पर चल रहे व्यक्ति द्वारा मापे गए हमारे वेग अलग-अलग होंगे। इसी प्रकार जब हम कहते हैं कि कार 60 km h^{-1} की गति से चल रही है तो इस का अर्थ प्रायः यही है कि इसकी गति पृथ्वी के सापेक्ष 60 km h^{-1} है। लेकिन पृथ्वी सूर्य के सापेक्ष 30 kms^{-1} की गति से चल रही है। इस प्रकार सूर्य के सापेक्ष कार की गति 60 km h^{-1} से बहुत अधिक है। ये उदाहरण

दिखाते हैं कि गति हमेशा सापेक्ष होती है। इसलिए हमें प्रायः किसी कण के स्थिति, वेग और त्वरण किसी दूसरे कण के सापेक्ष निर्धारित करने पड़ते हैं। आइए हम देखें कि यह राशियां कैसे ज्ञात की जाती हैं।

1.5 आपेक्षिक गति



चित्र 1·21: $\mathbf{r}_{QP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q$.

मान लीजिए कि $\mathbf{r}_P$ और $\mathbf{r}_Q$ अचर मूल बिन्दु O के सापेक्ष किसी क्षण पर कण P और Q के स्थिति सदिश हैं (देखिए चित्र 1.21)। $\mathbf{r}_{QP}$, Q के सापेक्ष P की **आपेक्षिक स्थिति** (relative position) है। सदिशों के योग के-नियम से हम जानते हैं कि

$$\mathbf{r}_Q + \mathbf{r}_{QP} = \mathbf{r}_P,$$

$$\mathbf{r}_{QP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q. \tag{1·34}$$

Q के सापेक्ष P का आपेक्षिक वेग (relative velocity) $\mathbf{v}_{QP}$, $\mathbf{r}_{QP}$ का समय के सापेक्ष अवकलन कर के मिल सकता है। इस प्रकार

$$\mathbf{v}_{QP} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r}_{QP}) = \frac{d\,\mathbf{r}_P}{dt} - \frac{d\,\mathbf{r}_Q}{dt}$$

या

$$\mathbf{v}_{QP} = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q. \tag{1·35}$$

इसी प्रकार Q के सापेक्ष P का **आपेक्षिक त्वरण** (relative acceleration) इस प्रकार निकाला जाता है:

$$\mathbf{a}_{QP} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{QP}) = \frac{d\mathbf{v}_P}{dt} - \frac{d\mathbf{v}_Q}{dt}$$

या

$$\mathbf{a}_{QP} = \mathbf{a}_P - \mathbf{a}_Q. \tag{1·36}$$

यदि $\mathbf{v}_Q$ अचर है तो $\mathbf{a}_Q = 0$ और $\mathbf{a}_{QP} = \mathbf{a}_P$.

इसका अर्थ है कि यदि O के सापेक्ष Q का वेग अचर हो तो Q के सापेक्ष P का आपेक्षिक त्वरण वही होगा जो P का O के सापेक्ष है।

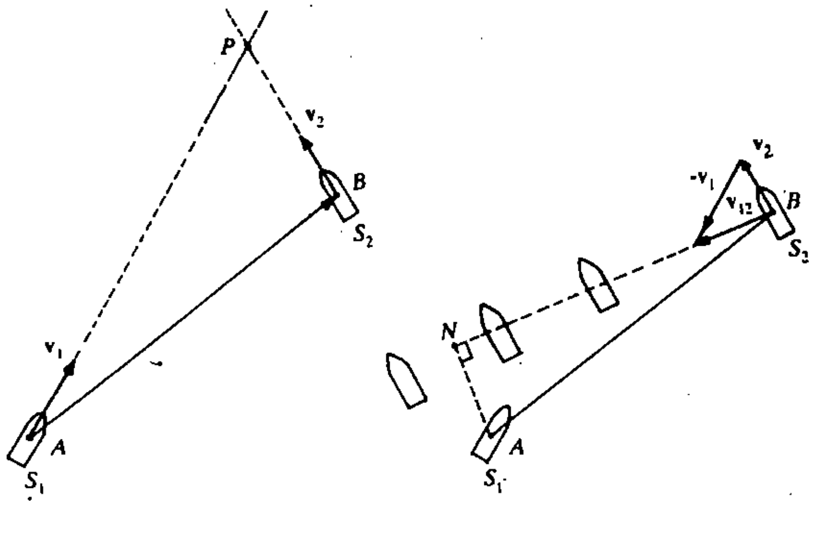
उदाहरण 8

आइए अब हम समुद्र में जहाज़ों के निर्देशन और उन्हें एक दूसरे से सुरक्षित दूरी पर रखने की व्यावहारिक समस्या लेते हैं। मान लीजिए कि दो जहाज़ S_1 और S_2 चित्र 1.22 क के अनुसार अचर वेग से चलते हैं और किसी क्षण पर उनकी स्थितियां A और B हैं। सदिश $\mathbf{v}_1$ और $\mathbf{v}_2$ समुद्र के सापेक्ष उनके वेग हैं। जहाज़ों के पथों को आरम्भिक बिन्दुओं A और B से उनकी गति की दिशा में बढ़ाया जाए तो वे बिन्दु P पर एक दूसरे को काटते हैं। क्या जहाज़ टकराएंगे या एक दूसरे से सुरक्षित दूरी पर रहेंगे ?

समीकरण 1.35 से जहाज़ S_2 का S_1 के सापेक्ष आपेक्षिक वेग होगा :

$$\mathbf{v}_{12} = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

$\mathbf{v}_{12}$ को चित्र 1.22 ख में दिखाया गया है। जहाज़ S_1 के सापेक्ष जहाज़ S_2, $\mathbf{v}_{12}$ के अनुदिश सीधी रेखा पर चलता है। यह S_1 से AN दूरी पर हट कर रहेगा। अगर आप कभी जहाज़ पर चले हों तो आपको यह महसूस हुआ होगा कि बिना सीमाचिन्ह के पानी में चलना एक विलक्षण अनुभव होता है। एक जहाज़ से किसी दूसरे जहाज़ की दिखाई देने वाली गति का उस दिशा से कोई सम्बन्ध नहीं प्रतीत होता जिसमें वह जहाज़ वास्तव में चल रहा हो।

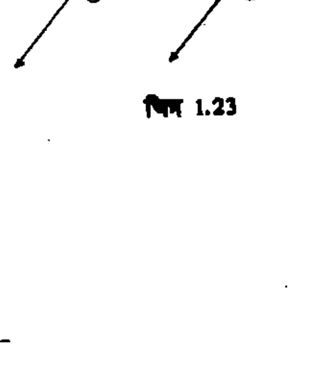


(क) (ख)

चित्र 1.22 : (क) अचर वेग से चलने वाले दो जहाज़ों के पथ जो एक दूसरे को काटते हैं ; (ख) S_1 के सापेक्ष S_2 का पथ यह दिखाते हुए कि दोनों के पथ काटते हैं पर फिर भी वे जहाज़ नहीं टकराते।

अब हम समीकरण 1·35 और 1·36 के परिणामों को व्यापक रूप में लिखेंगे। मान लीजिए कि एक पिंड निर्देश तंत्र S के सापेक्ष वेग $\mathbf{v}$ से चलता है। अगर एक और निर्देश तंत्र S', निर्देश तंत्र S के सापेक्ष वेग $\mathbf{V}$ से चलता है (चित्र 1·23), तो S' के सापेक्ष पिंड का वेग $\mathbf{v}'$ होता है :

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{V}. \tag{1·37}$$



चित्र 1.23

अगर $\mathbf{V}$ अचर है, तो

$$\mathbf{a}' = \mathbf{a}. \tag{1·38}$$

यानि अचर वेग से चल रहे सभी निर्देश तंत्रों के सापेक्ष किसी पिंड का त्वरण एकसमान होता है।

अभी तक की चर्चा से हमने यह जाना है कि निरपेक्ष गति वास्तविकता से परे है। हमें हमेशा एक पिंड की गति का अध्ययन किसी दूसरे पिंड के सापेक्ष ही करना पड़ता है। आइए अब हम इस इकाई में अब तक पढ़ी हुई सामग्री का सार प्रस्तुत करें।

1.6 सारांश

- अगर समय के साथ किसी पिंड की स्थिति बदलती है तो हम कहते हैं कि वह पिंड गतिमान है। समय के साथ स्थिति में किसी भी प्रकार के परिवर्तन को जानने के लिए निर्देश तंत्र की ज़रूरत होती है।

- किसी सदिश को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\mathbf{A} = A\,\hat{\mathbf{A}}$$

जहां $\hat{\mathbf{A}}$, **A** की दिशा में एकक सदिश है। एकक सदिश का परिमाण हमेशा इकाई होता है।

- x- अक्ष के अनुदिश किसी एकविम सदिश **A** को इस तरह लिखा जा सकता है :

$$\mathbf{A} = A_x \hat{\mathbf{i}}$$

जहां A_x, **A** का x- घटक है। $\hat{\mathbf{i}}$ धनात्मक x दिशा में एकक सदिश है।

- किसी द्विविम सदिश **B** को दो परस्पर लंबवत् x और y-अक्षों के सापेक्ष इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\mathbf{B} = B_x \hat{\mathbf{i}} + B_y \hat{\mathbf{j}},$$

जहां B_x और B_y, **B** के क्रमशः x और y घटक हैं। $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$, क्रमशः धनात्मक x और y दिशा में एकक सदिश हैं।
अगर **B** और x-अक्ष के बीच का कोण θ है तो

$$B_x = B\cos\theta,\ B_y = B\sin\theta$$

$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2},\ \ \tan\theta = \frac{B_y}{B_x}$$

- किसी त्रिविम सदिश **C** को उसके घटकों के पदों में लिखा जा सकता है :

$$\mathbf{C} = C_x\hat{\mathbf{i}} + C_y\hat{\mathbf{j}} + C_z\hat{\mathbf{k}}$$

जहां पर $\quad C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2 + C_z^2}$

C की दिशा α, β और γ कोणों द्वारा निर्दिष्ट की जाती है जो **C** और क्रमशः x, y तथा z-अक्षों के बीच के कोण हैं।

$$C_x = C\cos\alpha,\ C_y = C\cos\beta,\ C_z = C\cos\gamma.$$

- दो सदिशों **A** और **B** का अदिश गुणनफल

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = AB\cos\theta$$

होता है, जहां पर θ, **A** और **B** के बीच का कोण है।

- दो सदिशों **A** और **B** का सदिश गुणनफल, सदिश **C** इस प्रकार होता है कि

$$\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{B} = AB\sin\theta\ \hat{\mathbf{C}}$$

$\hat{\mathbf{C}}$ की दिशा दक्षिणहस्त नियम से दी जाती है।

- किसी भी कण, जिसके निर्देशांक किसी दिए हुए निर्देश तंत्र में x, y, z हैं, का स्थिति सदिश होता है:

$$\mathbf{r} = x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}}$$

कण का तात्क्षणिक वेग **v** और तात्क्षणिक त्वरण **a** होता है :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}}$$

जहां $\quad v_x = \dfrac{dx}{dt},\ v_y = \dfrac{dy}{dt},\ v_z = \dfrac{dz}{dt}$, और

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = a_x\hat{\mathbf{i}} + a_y\hat{\mathbf{j}} + a_z\hat{\mathbf{k}}$$

जहां $a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}.$

- एकसमान वर्तुल गति करने वाले कण का तात्क्षणिक वेग हमेशा वृत्त की स्पर्श रेखा की दिशा में होता है और उसका परिमाण होता है

$$v = r\omega$$

जहां पर r वृत्त की त्रिज्या है और ω उसकी कोणीय चाल है। तात्क्षणिक त्वरण की दिशा वृत्त के केन्द्र की ओर होती है और इस का परिमाण होता है

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r.$$

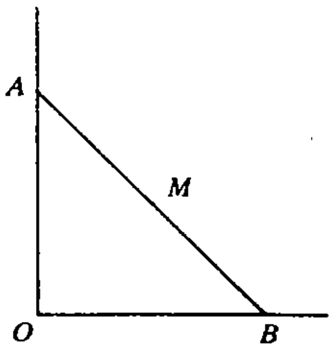
- सभी पिंडों की गति आपेक्षिक होती है। कण P की कण Q के सापेक्ष आपेक्षिक स्थिति और वेग इस प्रकार हैं

$$\mathbf{r}_{QP} = \mathbf{r}_P - \mathbf{r}_Q,$$

$$\mathbf{v}_{QP} = \mathbf{v}_P - \mathbf{v}_Q,$$

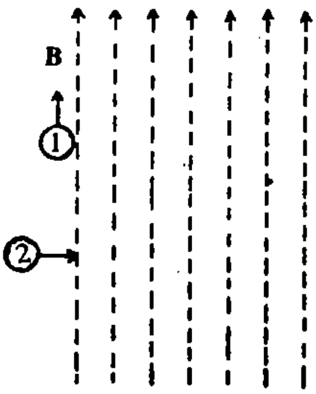
जहां पर $\mathbf{r}_P$ और $\mathbf{r}_Q$ दिए हुए निर्देश तंत्र में P और Q के स्थिति सदिश हैं। इस तंत्र में $\mathbf{v}_P$ और $\mathbf{v}_Q$ क्रमशः P और Q के वेग हैं।

1.7 अंत में कुछ प्रश्न



चित्र 1.24

1. "मैं चल रहा/रही हूँ"— यह उक्ति अर्थहीन क्यों है ?
2. एक सीढ़ी AB जिसकी लम्बाई L है एक ऊर्ध्वाधर (vertical) दीवार के सहारे खड़ी है (चित्र 1.24)। सीढ़ी का सिरा B अचर चाल v_0 से पीछे खींचा जा रहा है।
   (क) सीढ़ी के मध्य बिन्दु M का स्थिति सदिश ज्ञात कीजिए। यह भी दिखाइए कि यह O केन्द्र वाले $\frac{L}{2}$ त्रिज्या के वृत्त की चाप बनाता है।
   (ख) इस बिंदु की चाल और वेग उस क्षण पर ज्ञात कीजिए जब B की स्थिति दीवार से b $(< L)$ की दूरी पर है।



चित्र 1·25

3. चित्र 1·25 देखिए। किसी क्षेत्र में एकसमान चुम्बकीय क्षेत्र $\mathbf{B}$ विद्यमान है। दो इलेक्ट्रॉन 1 और 2, अचर वेग $\mathbf{v}_1$ और $\mathbf{v}_2$ से इस क्षेत्र में इस तरह प्रवेश करते हैं कि 1 इस क्षेत्र के समांतर और 2 इसके लम्बवत् है। इस क्षेत्र में प्रवेश करने के क्षण से माप शुरू करके किसी भी क्षण t पर इलेक्ट्रॉन 1 और 2 के स्थिति सदिश $\mathbf{r}_1$ और $\mathbf{r}_2$ ज्ञात कीजिए।

   अतः इलेक्ट्रॉन 2 का इलेक्ट्रॉन 1 के सापेक्ष आपेक्षिक वेग तथा आपेक्षिक त्वरण ज्ञात कीजिए। (संकेत : क्षेत्र के समांतर रहने वाले इलेक्ट्रॉनों की गति क्षेत्र से अप्रभावित रहती है। क्षेत्र के लम्बवत् चलने वाले इलेक्ट्रॉन क्षेत्र के लम्बवत् तल में एकसमान वर्तुल गति करते हैं।)

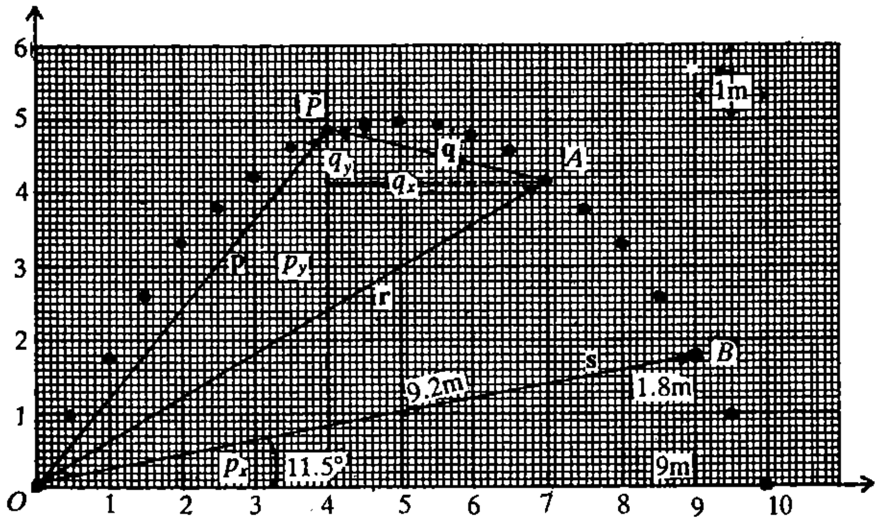
1.8 उत्तर

बोध प्रश्न

1. (क) हम तीन निर्देश तंत्र चुन सकते हैं जिनमें, क्रमशः B, A और S मूल बिन्दु वाली त्रिविम समकोणिक कार्तीय निर्देशांक पद्धतियां, और समय के पैमाने पर शून्य बिंदु लिए जाएं। समय के पैमाने पर हम उन क्षणों को शून्य बिंदु चुन सकते हैं जिन पर तीनों प्रेक्षकों को दौड़ शुरू करने के लिए दागी गई बंदूक की आवाज़ सुनाई देती है।

   (ख) अपने-अपने निर्देश तंत्रों में सभी प्रेक्षकों द्वारा ली गई मापें सही हैं।

2. (क) देखिए चित्र 1·26।



चित्र 1·26

(ख) $\mathbf{r} = (7 \cdot 0\ \hat{\mathbf{i}} + 4 \cdot 2\ \hat{\mathbf{j}})\,\text{m}$

(ग) $q_x + r_x = (-3{\cdot}0 + 7{\cdot}0)\ \text{m} = 4{\cdot}0\ \text{m},\ q_y + r_y = (0{\cdot}7 + 4 \cdot 2)\ \text{m} = 4 \cdot 9\ \text{m}.$

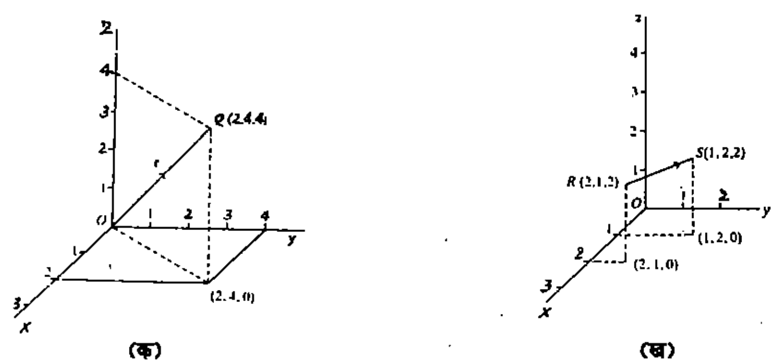
इस तरह $p_x = q_x + r_x, p_y = q_y + r_y$.

टिप्पणीः $\mathbf{p} = \mathbf{q} + \mathbf{r}$ (यानि **OA = OP + PA**, ज्यामितीय दृष्टि से) जो सदिशों के योग के नियम से भी प्राप्त होता है।

(घ) $s = 9 \cdot 2\ \text{m},\ \theta = 11{\cdot}5°,\ s_x = 9\ \text{m},\ s_y = 1{\cdot}8\ \text{m}.$
समीकरण 1·3 घ से $s_x = s \cos \theta = 9{\cdot}0\ \text{m},\ s_y = s \sin \theta = 1{\cdot}8\ \text{m}.$
अतः दोनों तरीकों से, यानि नाप कर और गणना करके, मिले s_x और s_y के मान समान हैं।

3. (i), (iv).

4. (क) चित्र 1·27 क देखिए।



चित्र 1·27

$$\mathbf{r} = 2\ \hat{\mathbf{i}} + 4\ \hat{\mathbf{j}} + 4\ \hat{\mathbf{k}},\ r = \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = 6$$

$$l = \frac{2}{6} = \frac{1}{3},\ m = n = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

(ख) चित्र 1·27 ख देखिए। $\mathbf{RS} = \mathbf{d}$, $d_x = -1$, $d_y = 1$, $d_z = 0$.

5. (क) $\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = 1 \cdot 1 \cos 90° = 0$. इसी तरह $\hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0$

(ख) $\mathbf{A} = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$

या $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{i}} = A_x\, \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + A_y\, \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} + A_z\, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}}$

$= A_x \quad [\because\ \hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 1, \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0, \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0]$

इसी तरह $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{j}} = A_y$, $\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{k}} = A_z$.

6. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A \,.\, A \cos 0° = A^2$

7. $|\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}| = 1 \cdot 1 \sin 90° = 1$. $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}$ की दिशा वही है जिसमें एक दक्षिणहस्त पेंच का सिरा आगे बढ़ता है जब पेंच को $\hat{\mathbf{j}}$ से $\hat{\mathbf{i}}$ की ओर घुमाया जाए, यानि $-\hat{\mathbf{k}}$ की दिशा। अतः $\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} = -\hat{\mathbf{k}}$.

इसी तरह

$$\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{i}},\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}},\ \hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$$

8. (क) $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$

$\mathbf{d} = \{(20\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{k}}) - (8\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{k}})\}\,\text{m} = 12\,\hat{\mathbf{i}}\,\text{m}$

$W = \{(\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}} + 3\hat{\mathbf{k}}) \cdot 12\hat{\mathbf{i}}\}\ \text{N m} = 12\ \text{N m} = 12\ \text{J}$

(ख) बलआघूर्ण $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, $\mathbf{r} = (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}})\,\text{m}$

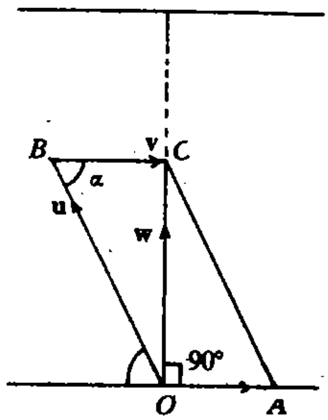
$\boldsymbol{\tau} = (\hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) \times (2\,\hat{\mathbf{i}} + 3\,\hat{\mathbf{j}})\ \text{N m}$.

$= (3\,\hat{\mathbf{k}} + 2\,\hat{\mathbf{k}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} - 3\,\hat{\mathbf{i}})\ \text{N m}$

$= (-3\,\hat{\mathbf{i}} + 2\,\hat{\mathbf{j}} + 5\,\hat{\mathbf{k}})\ \text{N m}$.

ध्यान दें कि बलआघूर्ण के लिए प्रयुक्त इकाई न्यूटन-मीटर (N m) को ऐसे ही लिखा जाना चाहिए। इसे जूल के रूप में नहीं लिखना चाहिए।

(ग) देखें चित्र 1·28। **OA** नदी के वेग को दिखाता है। सब से छोटा रास्ता नदी के किनारे पर लम्बवत् होगा। नाव इस छोटे रास्ते से जाए इसके लिए परिणामी वेग OC की दिशा में होना चाहिए। इसलिए **u** की दिशा इस प्रकार से होगी कि **u** और **v** का परिणामी OC के अनुदिश हो।



चित्र 1·28

इसलिए OC उस चतुर्भुज का विकर्ण होना चाहिए जिसकी आसन्न भुजाएं **u** और **v** हैं। अब हमें u और v के पदों में चाल w और कोण α का परिकलन करना है।

मान लें कि $\angle AOB = \beta$, तब समीकरण 1·22 घ से हम लिख सकते हैं

$$\tan \angle AOC = \frac{u \sin \beta}{v + u \cos\beta}$$

क्योंकि $\angle AOC = 90°$, तो ऊपर लिखे भिन्न का हर शून्य होगा यानि $\cos \beta = -\frac{v}{u}$. लेकिन

$\alpha + \beta = 180°$,

$\therefore \cos \alpha = \cos (180° - \beta) = -\cos \beta = \frac{v}{u}$

या $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$

पुनः समीकरण 1·22 क से

$$w = \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv \cos \beta}$$

$$= \sqrt{u^2 + v^2 + 2uv\left(\frac{-v}{u}\right)}$$

$$= \sqrt{u^2 - v^2}.$$

समकोण त्रिभुज OBC पर पाइथागोरस प्रमेय लागू करके हम इस प्रश्न को एक और तरीक़े से हल कर सकते हैं

यानि $w = OC = \sqrt{OB^2 - BC^2} = \sqrt{u^2 - v^2}$

और $\cos\alpha = \frac{BC}{OB} = \frac{v}{u}$ या $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{v}{u}\right)$

9. $t = 1$ s और $t = 2$ s के बीच औसत वेग $= \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$

या औसत वेग $= \frac{(4{\cdot}9 \times 4 - 4{\cdot}9 \times 1)\ \text{m}}{(2-1)\ \text{s}}$

$= 14{\cdot}7\ \text{m s}^{-1}$.

$t = 3$ s और $t = 4$ s के बीच में औसत वेग $= \frac{x_4 - x_3}{t_4 - t_3}$

या औसत वेग $= \frac{(4{\cdot}9 \times 16 - 4{\cdot}9 \times 9)\text{m}}{(4-3)\text{s}}$

$= 34{\cdot}3\ \text{m s}^{-1}$

10. (क) $\mathbf{r}(t) = Bt\ \hat{\mathbf{i}} + AB^2 t^2\ \hat{\mathbf{j}}$

(ख) $\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\{\mathbf{r}(t)\} = B\ \hat{\mathbf{i}} + 2AB^2 t\ \hat{\mathbf{j}}$

$v = \sqrt{B^2 + 4A^2 B^4 t^2}$

$= B\sqrt{1 + 4A^2 B^2 t^2}$

11. $\frac{v^2}{r} \ngtr a$ या $\frac{v^2}{a} \ngtr r$

या $r \nless \frac{v^2}{a}$ यानि $r_{min} = \frac{v^2}{a}$

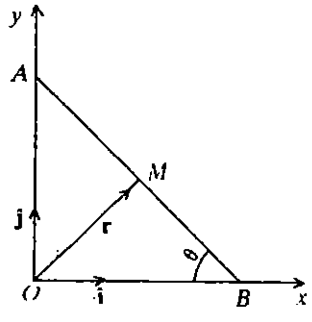
क्योंकि $v = 60\ \text{km h}^{-1}$, $a = 1{\cdot}5\ \text{m s}^{-2}$

$\therefore\ r_{min} = 1{\cdot}8 \times 10^2\ \text{m}$

अंत में कुछ प्रश्न

1. भाग 1·5 से हमने यह सीखा है कि "विराम" और "गति" परस्पर सापेक्ष हैं। इसलिए जब भी हम कहते हैं कि "मैं चल रहा/रही हूँ" या "मैं विरामावस्था में हूँ" तो हमें उस प्रेक्षक के बारे में अवश्य बताना चाहिए जिसके सापेक्ष हम अपनी स्थिति बता रहे हों। इसलिए यह उक्ति कि "मैं चल रहा/रही हूँ" अर्थहीन है।

2. चित्र 1·29 देखें। यह चित्र 1·24 का ही रूपांतरण है जहां पर कार्तीय x-और y-अक्ष क्रमशः OB और OA की दिशा में हैं।



चित्र 1·29

(क) मान लीजिए कि AB के मध्यबिंदु M का स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ है। मान लीजिए कि किसी क्षण t पर B और A के निर्देशांक, क्रमशः $(x,0)$ और $(0,y)$ हैं। तब

$$\mathbf{OB} = x\hat{\mathbf{i}},\ \mathbf{OA} = y\hat{\mathbf{j}}.$$

अब $\mathbf{OA} + \mathbf{AB} = \mathbf{OB}$

या $\mathbf{AB} = \mathbf{OB} - \mathbf{OA} = x\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}}$

यानि $\mathbf{r} = \mathbf{OM} = \mathbf{OA} + \mathbf{AM} = \mathbf{OA} + \frac{1}{2}\mathbf{AB}$

या $\mathbf{r} = y\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{2}(x\hat{\mathbf{i}} - y\hat{\mathbf{j}}) = \frac{1}{2}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})$.

M का स्थिति सदिश $\mathbf{r} = \frac{1}{2}(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}})$, जहां $x^2 + y^2 = L^2$ = एक अचर, जो सीढ़ी की लम्बाई के वर्ग के बराबर है। अब समीकरण 1·3 ख का उपयोग करके हम $r = \frac{L}{2}$ प्राप्त करते हैं ($\because x^2 + y^2 = L^2$). इस का अर्थ है कि बिन्दु M सदा O से $\frac{L}{2}$ की दूरी पर रहता है। दूसरे शब्दों में यह बिंदु O केन्द्र पर $\frac{L}{2}$ त्रिज्या का वृत्त बनाता है।

(ख) M का वेग = $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\mathbf{j}}\right)$

अब $\frac{dx}{dt}$ = एक अचर $= v_0$ (दिया गया है)

पुनः चूंकि $x^2 + y^2 = L^2$ तो

$$x\,\frac{dx}{dt} + y\,\frac{dy}{dt} = 0$$

अथवा $$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\,v_0.$$

जब B बिन्दु O से b दूरी पर है तो हम $x = OB = b$ प्राप्त करते हैं। और

$$y = OA = \sqrt{L^2 - b^2}$$

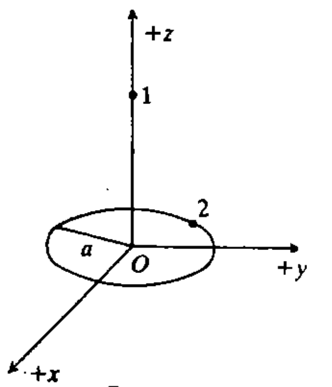
जिसके संगत $\frac{dy}{dt} = -\frac{bv_0}{\sqrt{L^2 - b^2}}$

इसलिए इस क्षण पर M का वेग इस प्रकार से होगा

$$\mathbf{v}_m = \frac{1}{2}\left[v_0\hat{\mathbf{i}} - \frac{bv_0}{\sqrt{L^2 - b^2}}\,\hat{\mathbf{j}}\right] = \frac{v_0}{2}\left(\hat{\mathbf{i}} - \frac{b\hat{\mathbf{j}}}{\sqrt{L^2 - b^2}}\right)$$

और चाल $= v_m = \frac{v_0}{2}\left(1 + \frac{b^2}{L^2 - b^2}\right)^{1/2} = \frac{L\,v_0}{2\sqrt{L^2 - b^2}}$

3. चित्र 1·30 देखें। हम पहले त्रिविम कार्तीय निर्देशांक पद्धति चुनते हैं। इस का मूल बिन्दु वृत्त के केन्द्र पर है जिस पर इलेक्ट्रॉन 2 एकसमान वर्तुल गति करता है। इस का z-अक्ष चुम्बकीय क्षेत्र की दिशा में चुना गया है और इलेक्ट्रॉन 1 इसी दिशा में चलता है। मान लीजिए किसी क्षण t पर 1 और 2 के स्थिति सदिश, क्रमशः $\mathbf{r}_1$ और $\mathbf{r}_2$ हैं।



चित्र 1·30

मान लीजिए कि इलेक्ट्रॉन 2 की एकसमान कोणीय चाल ω है और वृत्त की त्रिज्या a है। तब

$$\mathbf{r}_1 = v_1 t\,\hat{\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{r}_2 = a\,(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}})$$

1 के सापेक्ष 2 का आपेक्षिक वेग इस प्रकार होगा :

$$\mathbf{v}_{12} = \frac{d}{dt}\,(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{d}{dt}\left\{a\left(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}}\right) - v_1 t\,\hat{\mathbf{k}}\right\}$$

अथवा $\mathbf{v}_{12} = -a\,\omega\,(\sin\omega t\,\hat{\mathbf{i}} - \cos\omega t\,\hat{\mathbf{j}}) - v_1\,\hat{\mathbf{k}}$

और इलेक्ट्रॉन 2 का इलेक्ट्रॉन 1 के सापेक्ष त्वरण होगा

$$\mathbf{a}_{12} = \frac{d}{dt}\,\mathbf{v}_{12} = -a\,\omega^2\,(\cos\omega t\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\omega t\,\hat{\mathbf{j}}).$$

1.9 शब्दावली

अदिश	Scalar
अदिश गुणनफल	Scalar product
अभिकेन्द्र त्वरण	Centripetal acceleration
असमान गति	Non-uniform motion
आपेक्षिक गति	Relative motion
आपेक्षिक त्वरण	Relative acceleration
आपेक्षिक वेग	Relative velocity
आपेक्षिक स्थिति	Relative position
एकविम	One-dimensional
एकक सदिश	Unit vector
एकसमान वर्तुल गति	Uniform circular motion
औसत त्वरण	Average acceleration
औसत वेग	Average velocity
कार्तीय निर्देशांक	Cartesian coordinates
कोणीय चाल	Angular speed
गति	Motion
घटक	Component
डिटर्मिनेन्ट	Determinant
त्वरण	Acceleration
तात्क्षणिक त्वरण	Instantaneous acceleration
तात्क्षणिक वेग	Instantaneous velocity
दिक्-कोसाईन	Direction cosines
दक्षिणहस्त नियम	Right-hand rule
दक्षिणावर्त	Clockwise
दक्षिणावर्ती	Right-handed
द्विविम तल	Two-dimensional plane
निर्देशांक पद्धति	Coordinate system
निर्देश तंत्र	Frame of reference
परिक्रमण काल	Period of revolution
प्रक्षेप	Projection
प्रक्षेप्य गति	Projectile motion
बंटन नियम	Distributive law
मूलबिंदु	Origin
योग का त्रिभुज नियम	Triangle law of addition
वामावर्त	Anticlockwise

विस्थापन	Displacement
वेग	Velocity
वर्तुल गति	Circular motion
शुद्धगतिकी	Kinematics
शून्य सदिश	Null vector
समष्टि	Space
सदिश	Vector
सदिश गुणनफल	Vector product
सदिश योग का चतुर्भुज नियम	Parallelogram law of vector addition
साहचर्य नियम	Associative law
स्थिति सदिश	Position vector
सीमा	Limit
संपाती	Coincident
त्रिविम तंत्र	Three-dimensional system

इकाई 2 बल और संवेग

इकाई की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना

इकाई 1 में आपने जाना कि किस तरह आप विस्थापन, वेग और त्वरण की मदद से किसी कण की गति का वर्णन कर सकते हैं। लेकिन उस इकाई में आपने यह नहीं पढ़ा कि गति किन कारणों से उत्पन्न होती है। इस इकाई में आप उन कारणों के बारे में पढ़ेंगे जिनसे किसी कण अथवा पिंड की गति प्रभावित होती है। इसके लिए आप न्यूटन के गति-नियमों पर पुनः विचार करेंगे और उन नियमों को विभिन्न स्थितियों में लागू करेंगे। न्यूटन के गति-नियमों की मदद से हम उस स्थिति में कण को साम्यावस्था में रखने की शर्तें जानेंगे जबकि उस पर अनेक समतलीय बल लग रहे हों।

एक से अधिक कणों वाले निकाय की गति का अध्ययन करने में हम रैखिक संवेग की संकल्पना का प्रयोग करेंगे । इसी के साथ हम संवेग-संरक्षण नियम स्थापित करेंगे और उसे उन प्रश्नों को हल करने में लागू करेंगे जिनमें निकाय पर लग रहे बलों की जानकारी ज़रूरी नहीं होती। अंत में हम आवेग की संकल्पना दोहराएंगे और उसका इस्तेमाल बदलते द्रव्यमान वाले निकाय की गति को समझने के लिए करेंगे। जब भी किसी पिंड की गति बदलती है तो उसके साथ-साथ कुछ कार्य होता है और ऊर्जा ख़र्च होती है। इसलिए अगली इकाई में आप कार्य और ऊर्जा के बारे में पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

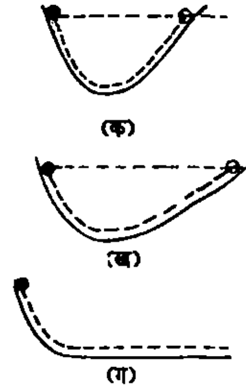
- न्यूटन के गति-नियम लागू कर सकेंगे
- बल-साम्यावस्था के प्रतिबंधों की सहायता से प्रश्नों को हल कर सकेंगे
- रैखिक संवेग-संरक्षण नियम लागू कर सकेंगे
- आवेग और बदलते द्रव्यमान वाले निकायों से संबंधित प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

2.2 गति के कारण

किसी भी पिंड की गति किस कारण से होती है ? यह एक ऐसा प्रश्न है जिसका उत्तर 400 ई.पू. अरस्तू ने देने का प्रयास किया था। अगले लगभग 2000 वर्षों तक अरस्तू द्वारा सुझाए गए उत्तर को ही लोग सही मानते रहे। उनका कहना था कि किसी पिंड की गति बनाए रखने के लिए उस पर खींच कर या ढकेल कर, बल लगाना ज़रूरी था। और बल हटाते ही पिंड की गति रुक जाती थी। यह विचार काफ़ी सही लगता है। उदाहरण के लिए, जब तक बैल खींचता रहता है तब तक बैलगाड़ी चलती रहती है और जब बैल गाड़ी को खींचना बंद कर देता है तब गाड़ी तुरंत रुक जाती है।

अरस्तू के इन विचारों को पहले पहल गैलीलियो ने आलोचनात्मक दृष्टि से देखा। उन्होंने यह दिखाने के लिए अनेक प्रयोग किए कि पिंड की गति को बनाए रखने के लिए किसी कारक अथवा बल की आवश्यकता नहीं होती । इस संकल्पना को समझने के लिए चित्र 2.1 को अच्छी तरह से समझिये।

आपके विचार से स्थिति (ग) में वास्तव में क्या होता है ? वास्तव में, चपटी सतह पर कुछ समय तक चलने के बाद गेंद रुक जाती है। पर यह देखा गया है कि सतह जितनी अधिक चिकनी होती है, गेंद को रुकने में उतनी ही अधिक देरी लगती है। यह भी देखा गया है कि यदि सतह चिकनी और चपटी है तो गेंद लगभग एक सीधी रेखा में चलती है। अतः यदि घर्षण बिल्कुल न हो तो गेंद समान वेग से एक सीधी रेखा में अनंत तक चलती चली जाएगी क्योंकि चपटी सतह पर वह अपनी आरंभिक ऊंचाई तक कभी नहीं पहुंच सकेगी। इन तथ्यों से गैलीलियो इस नतीजे पर पहुंचे कि गतिमान वस्तु पर यदि कोई रुकावट न डाली जाए तो वह अचर चाल (constant speed) से एक क्षैतिज रेखा (horizontal line) में चलती चली जाएगी। इसलिए हम यह कह सकते हैं कि किसी वस्तु की गति तब तक नहीं बदलेगी जब तक कि उसे बदलने के लिए उस पर कोई बाहरी बल न लगाया जाए।



चित्र 2.1 : (क) एक घर्षणहीन ढाल पर लुढ़क रही गेंद दूसरे ढाल पर लगभग उतनी ऊंचाई तक चली जाएगी जितनी ऊंचाई से वह पहले ढाल से चली थी; (ख) दूसरे ढाल के झुकाव को थोड़ा कम कर देने पर गेंद तब तक चलती रहेगी जब तक कि वह पहली ऊंचाई तक नहीं पहुंच जाती; (ग) इस स्थिति में क्या होता है ?

यही गैलीलियो की जड़त्व (inertia) की संकल्पना थी, कि जड़त्व वस्तु की गति में होने वाले किसी भी परिवर्तन का विरोध करता है। अगर कोई वस्तु विरामावस्था (state of rest) में है और उसे गति दी जाए तो उसका जड़त्व उसमें रुकावट डालेगा। इसी तरह अचर चाल से एक सरल रेखा में चल रहे पिंड की गति के बदलाव का भी जड़त्व विरोध करता है। इस तरह पिंडों की गति का अध्ययन करने वाले लोगों का ध्यान पिंड की गति के कारणों की ओर से हट कर इस ओर लगा कि पिंड की गति के **बदलाव** के क्या कारण हैं।

गैलीलियो की इस संकल्पना ने सैकड़ों वर्ष आगे तक होने वाली यांत्रिकी की प्रगति को संभव बनाया जिसकी शुरुआत आइज़क न्यूटन की उपलब्धियों से हुई। न्यूटन के गति-नियम यांत्रिकी की आधारशिला हैं। अब हम इन नियमों पर संक्षेप में चर्चा करेंगे।

2.2.1 न्यूटन के गति-नियम

गैलीलियो की जड़त्व-संकल्पना को न्यूटन ने एक व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत किया जिसे न्यूटन के प्रथम गति-नियम के नाम से जाना जाता है।

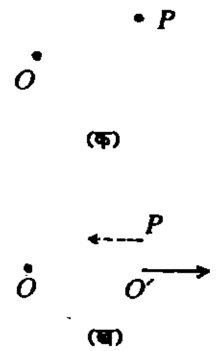
न्यूटन का प्रथम गति-नियम

न्यूटन के शब्दों में प्रथम गति-नियम यह है :

"प्रत्येक पिंड तब तक विरामावस्था में बना रहता है या एकसमान गति से एक सीधी रेखा में चलता रहता है जब तक कि उस पर बल लगाकर उसकी अवस्था में परिवर्तन लाने के लिए उसे बाध्य न कर दिया जाए"।

न्यूटन के प्रथम नियम को "जड़त्व-नियम" (law of inertia) भी कहा जाता है और यदि पिंड की गति किसी बल के अधीन न हो तो उस गति को जड़त्वीय गति (inertial motion) कहा जाता है। इस नियम के अनुसार हम बल को उस बाहरी कारक के रूप में परिभाषित कर सकते हैं जो पिंड की विरामावस्था में अथवा एकसमान गति में परिवर्तन कर देता है या जिसकी प्रवृत्ति इन अवस्थाओं में परिवर्तन करने की होती है।

क्या आपने इस बात की ओर ध्यान दिया है कि न्यूटन के प्रथम नियम में प्रेक्षक के बारे में कुछ भी नहीं कहा गया है ? लेकिन इकाई 1 के भाग 1.5 से हमें यह मालूम है कि गति का निर्धारण प्रेक्षक पर निर्भर करता है। अतः यह प्रश्न आपके मन में उठ सकता है कि किस प्रकार के प्रेक्षक के लिए न्यूटन का प्रथम गति-नियम लागू होता है ?



चित्र 2·2 : (क) प्रेक्षक O और वस्तु P एक दूसरे के सापेक्ष विरामावस्था में हैं; (ख) O', O के सापेक्ष, त्वरित गति से चल रहा है।

मान लीजिए कि प्रेक्षक O , जो कि विरामावस्था में है, के सापेक्ष एक वस्तु P विरामावस्था में है (चित्र 2·2 क)। मान लीजिए कि अन्य प्रेक्षक O' , प्रेक्षक O के सापेक्ष त्वरित गति से चल रहा है। तब O' को वस्तु P अपने त्वरण (acceleration) की विपरीत दिशा में त्वरित होती हुई नज़र आएगी (चित्र 2.2 ख)। न्यूटन के प्रथम नियम के अनुसार, क्योंकि त्वरण उत्पन्न करने वाला कारक एक बल होता है, इसलिए O' यह अनुमान लगायेगा कि P पर कोई बल लग रहा है। पर प्रेक्षक O यह जानता है कि वस्तु P पर कोई बल नहीं लग रहा है। यह केवल O' को त्वरित होता हुआ प्रतीत होता है। अतः हम इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि प्रेक्षक O' के लिए प्रथम नियम लागू नहीं होता। यह नियम केवल प्रेक्षक O के लिए लागू होता है।

O जैसे प्रेक्षक को, जो कि विरामावस्था में होता है या एक अचर वेग (constant velocity) से चल रहा होता है, **जड़त्वीय प्रेक्षक** (inertial observer) कहा जाता है और O' जैसे प्रेक्षक को **अजड़त्वीय प्रेक्षक** (non-inertial observer) कहा जाता है।

मगर हम यह कैसे जानेंगे कि कोई प्रेक्षक जड़त्वीय है या नहीं। इसके लिए हमें किसी मानक के सापेक्ष प्रेक्षक का वेग जानना होगा। प्रायः मानक के इस रूप में पृथ्वी को लिया जाता है। अब उस स्थान का, जहां कोई

व्यक्ति प्रयोग कर रहा है, पृथ्वी के दैनिक घूर्णन के कारण ध्रुवी अक्ष (polar axis) की ओर कुछ त्वरण होता है (जिसकी चर्चा भाग 1.5 में की गई है)। इसी प्रकार सूर्य की वार्षिक परिक्रमा करने के कारण पृथ्वी के केन्द्र का सूर्य की ओर त्वरण होता है और इसी तरह मंदाकिनी के केन्द्र की ओर सूर्य का त्वरण होता है, आदि-आदि। इस तरह हम यह देखते हैं कि एक निरपेक्ष (absolute) जड़त्वीय तंत्र की खोज एक निरर्थक प्रक्रिया है।

अतः हम जड़त्वीय प्रेक्षक की परिभाषा में थोड़ा संशोधन कर देते हैं। हम कहते हैं कि : "दो प्रेक्षक एक दूसरे के सापेक्ष जड़त्वीय प्रेक्षक तब होते हैं जब वे एक दूसरे के सापेक्ष या तो विरामावस्था में हों या एकसमान गति कर रहे हों।"

यदि एक प्रेक्षक के सापेक्ष दूसरा प्रेक्षक त्वरित गति से चल रहा हो तो वे एक दूसरे के सापेक्ष अजड़त्वीय प्रेक्षक होते हैं। इस तरह, अचर वेग से चल रही एक कार और सड़क पर खड़ा एक व्यक्ति एक दूसरे के सापेक्ष जड़त्वीय हैं जबकि एक कार, जिसके वेग में वृद्धि हो रही हो, और वह व्यक्ति एक दूसरे के सापेक्ष अजड़त्वीय हैं।

न्यूटन के प्रथम नियम की सहायता से हम इस बात का पता लगा सकते हैं कि पिंड पर कोई बल कार्य कर रहा है या नहीं। एक तरह से यह नियम हमें यह बताता है कि कोई बल क्या करता है — वह पिंड में (धनात्मक अथवा ऋणात्मक) त्वरण उत्पन्न करता है। लेकिन हमें प्रथम नियम से यह नहीं मालूम होता कि बल का परिमाण क्या है, उसकी दिशा क्या है, हम उसे कैसे नाप सकते हैं। यह बातें हमें न्यूटन के द्वितीय नियम से मालूम होती हैं।

न्यूटन का द्वितीय गति-नियम

जब एक तेज़ी से आ रही क्रिकेट की गेंद आपको लगती है तो उससे आपको चोट पहुंचती है। पर उतनी ही तेज़ी से आ रहे एक फूल के लगने पर आपको कोई परेशानी नहीं होती, और यदि आपको लगने वाली क्रिकेट की गेंद कुछ धीरे आ रही हो तो आपकी चोट उतनी गंभीर नहीं होती। इससे यह पता चलता है कि किसी वस्तु द्वारा लगी टक्कर दो बातों पर निर्भर करती है — उसका द्रव्यमान और वेग। इसलिए न्यूटन ने द्रव्यमान और वेग के गुणनफल को परिभाषित करना ज़रूरी समझा। इस गुणनफल को बाद में **रैखिक संवेग** (linear momentum) कहा जाने लगा। गणित की भाषा में रैखिक संवेग होता है :

$$\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}. \qquad (2\cdot1)$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि $\mathbf{p}$, वेग की दिशा में एक सदिश राशि है। इस राशि की सहायता से द्वितीय नियम का कथन देना संभव हो गया। न्यूटन के शब्दों में यह निम्नलिखित है :

> "किसी वस्तु का गति-परिवर्तन (change of motion) लगे हुए बल के अनुक्रमानुपाती होता है और यह परिवर्तन उस सरल रेखा की दिशा में होता है जिस दिशा में बल लगा हुआ है।"

न्यूटन के अनुसार "गति-परिवर्तन" का अर्थ है समय के साथ संवेग की परिवर्तन-दर। अतः गणितीय रूप में

$$\mathbf{F} \propto \frac{d}{dt}(\mathbf{p}),$$

$$\mathbf{F} = k\,\frac{d}{dt}(\mathbf{p}). \qquad (2\cdot2)$$

जहां $\mathbf{F}$ आरोपित बल (impressed force) है, और k आनुपातिकता-अचर (constant of proportionality) है। अवकल संकारक (differential operator) $\frac{d}{dt}$, समय के साथ होने वाले परिवर्तन-दर को दिखाता है। अब, अगर पिंड का द्रव्यमान अचर हो (अर्थात् उसका द्रव्यमान न तो कन्वेयर बेल्ट की तरह बढ़ रहा हो और न ही रॉकेट की तरह कम हो रहा हो), तो

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\mathbf{v}) = m\mathbf{a},$$

जहां $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$ = पिंड का त्वरण। इस तरह समीकरण 2.2 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\mathbf{F} = k\,m\,\mathbf{a}, \qquad (2\cdot3\ \text{क})$$

और $$F = k\,m\,a\,. \qquad (2\cdot3\ \text{ख})$$

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं कि बल का परिमाण और दिशा जानने के लिए द्वितीय नियम की आवश्यकता समझी गई थी। तो इसके लिये हमें अचर k का मान भी मालूम होना चाहिए। अब हम जानते हैं कि द्रव्यमान m वाले पिंड पर लग रहे बल $\mathbf{F}$ का काम उस पिंड में त्वरण $\mathbf{a}$ लाना है। इसलिए बल के व्यंजक में अगर m और $\mathbf{a}$ के अलावा और कोई राशि आ रही है तो वह राशि एक शुद्ध संख्या होगी। यानि k एक शुद्ध संख्या है। इसलिए हम अपने हिसाब से इसे एक संख्यात्मक मान दे सकते हैं।

इसके लिये हम एकक बल की परिभाषा देते हैं। एकक बल वह बल है जो एकक द्रव्यमान पर लगने पर बल की दिशा में एकक त्वरण पैदा करता है। अतः हमें समीकरण 2.3 ख से $1 = k \,.\, 1 \cdot 1$ या $k = 1$ प्राप्त होता है। इस तरह, समीकरण 2.2 और 2.3 निम्न रूप के हो जाते हैं :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}, \qquad (2\cdot4 \text{ क})$$

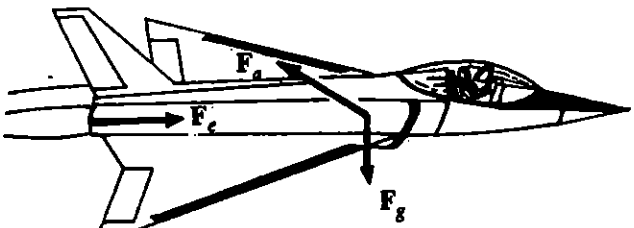
$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}, \text{ अचर द्रव्यमान के लिए।} \qquad (2\cdot4 \text{ ख})$$

इकाई 1 के भाग 1·3 से हम यह जानते हैं कि यदि क्षण t पर किसी कण की स्थिति $\mathbf{r}$ हो तो इसका वेग $\mathbf{v}$ और त्वरण $\mathbf{a}$, क्रमशः समीकरण 1·24 और 1·26 से प्राप्त होते हैं। समीकरण 2·4 में $\mathbf{v}$ और $\mathbf{a}$ के वे मान रखने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right),$$

या $$\mathbf{F} = m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \qquad (2\cdot5)$$

समीकरण 2·5, $\mathbf{r}$ में एक द्विघात अवकल समीकरण (second order differential equation) है। अगर हमें द्रव्यमान m वाले पिंड पर लग रहा बल $\mathbf{F}$ मालूम हो तो हम समीकरण 2·5 का समाकलन (integration) करके t के एक फलन (function) के रूप में $\mathbf{r}$ को मालूम कर सकते हैं। $\mathbf{r}(t)$ फलन से हमें कण का पथ मालूम हो जाएगा। क्योंकि समीकरण 2·5 दो घात वाला समीकरण है, इसलिए हमें दो समाकलन-अचर (constants of integration) मिलेंगे। इसलिए इस समीकरण का हल जानने के लिए हमें दो प्रारंभिक प्रतिबंध (initial conditions) चाहिये। इसके विपरीत अगर हमें किसी त्वरित कण का प्रपथ (trajectory) मालूम हो तो समीकरण 2·5 की मदद से हम यह जान सकते हैं कि पिंड पर कितना बल लग रहा है, और यदि हमें बल और त्वरण पता हों तो समीकरण 2·5 से हम अज्ञात द्रव्यमान भी मालूम कर सकते हैं।



चित्र 2.3: जेट पर कार्य कर रहे बल : इंजन का प्रणोद $\mathbf{F}_e$, ऊपर उठाने और कर्षण के लिए वायु बल $\mathbf{F}_a$, गुरुत्व बल $\mathbf{F}_g$।

अभी तक हमने उस स्थिति पर विचार किया है जबकि पिंड पर केवल एक बल लग रहा हो। पर, अक्सर एक ही पिंड पर अनेक बल लगे होते हैं। मिसाल के तौर पर, एक उड़ रहे जेट पर गुरुत्व बल, जेट के पंखों और बाडी पर वायु बल और इंजन प्रणोद (thrust) से संबंधित बल कार्य कर रहे होते हैं (चित्र 2·3)। पिंड पर लग रहा नेट बल जानने के लिए हम बलों को सदिश राशियों के रूप में जोड़ते हैं। पिंड के द्रव्यमान और त्वरण का इस नेट बल से संबंध हमें न्यूटन के द्वितीय गति-नियम से मिलता है। अब आप न्यूटन के द्वितीय गति-नियम को एक सरल स्थिति पर लागू कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 1

1970 में स्काईलैब मिशन पर गए अंतरिक्ष यात्रियों ने एक ऐसी कुर्सी पर बैठ कर अपना द्रव्यमान मालूम किया था जिस पर एक कमानी (spring) द्वारा एक ज्ञात बल लगाया गया था। 15 kg की कुर्सी से बंधे अंतरिक्ष यात्री पर 2·07 N का कमानी बल लगने पर उसमें $2{\cdot}04 \times 10^{-2}$ m s^{-2} का त्वरण आ गया। बताइए कि अंतरिक्ष यात्री का द्रव्यमान कितना था ?

न्यूटन का तृतीय गति-नियम

अभी तक हम यह जानने का प्रयास करते रहे हैं कि किसी पिंड की गति क्यों और कैसे होती है। हमने जाना है कि पिंड की गति बदलने का कारण बल होता है। मगर पिंड पर बल लगाया कैसे जाता है ? निश्चय ही कोई न कोई अभिकारक (agent) अवश्य होता है जिसकी वजह से बल लगता है। प्रायः हमारे हाथ और पांव अभिकारक का काम करते हैं। फुटबॉल में पांव से बॉल को मारने पर बॉल गति में आ जाता है। इस तरह हम यह पाते हैं कि निकायों की अन्योन्य क्रिया (interaction) से बल उत्पन्न होता है। इस तथ्य को न्यूटन के तृतीय गति-नियम में स्पष्ट किया गया है जो कि उन्हीं के शब्दों में निम्नलिखित है :

"प्रत्येक क्रिया की एक बराबर और विपरीत प्रतिक्रिया होती है।"

यहां पर प्रयुक्त किए गए शब्द "क्रिया" (action) और "प्रतिक्रिया" (reaction), न्यूटन के प्रथम और द्वितीय नियम के अनुसार परिभाषित बल के लिए इस्तेमाल हुए हैं। यदि कोई पिंड A एक अन्य पिंड B पर बल $\mathbf{F}_{AB}$ लगाता हो तो पिंड B भी पिंड A पर बल $\mathbf{F}_{BA}$ इस तरह लगाता है कि

$$\mathbf{F}_{AB} = -\mathbf{F}_{BA},$$

$$\therefore \qquad \mathbf{F}_{AB} + \mathbf{F}_{BA} = \mathbf{0}. \qquad (2{\cdot}6)$$

ध्यान दीजिए कि न्यूटन के तृतीय गति-नियम में दो बल कार्य करते हैं जिनमें से प्रत्येक एक अलग पिंड पर लग रहा होता है। अब आप न्यूटन के तीसरे गति-नियम पर एक बोध प्रश्न हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 2

(क) जब कोई फुटबॉल का खिलाड़ी फुटबॉल को मारता है तब तृतीय नियम के अनुसार खिलाड़ी और बॉल दोनों को ही परिमाण में समान पर विपरीत दिशा में बल का अनुभव होता है। ऐसा होने पर बॉल तो गति में आ जाता है पर खिलाड़ी गति में नहीं आता। क्यों ?

(ख) पृथ्वी परिमाण F के बल से सेब को अपनी ओर खींचती है। बताइए कि किस बल से सेब पृथ्वी को अपनी ओर खींचता है ? जब सेब पृथ्वी की ओर चलने लगता है तो पृथ्वी सेब की ओर क्यों नहीं चलती ?

न्यूटन के गति-नियमों से हमें गति के अनेक पहलुओं को समझने में काफ़ी सहायता मिलती है। आइए अब हम इन नियमों को गतिमान पिंडों से संबंधित विभिन्न प्रकार की भौतिक स्थितियों पर लागू करें।

2.2.2 न्यूटन के नियमों के अनुप्रयोग

न्यूटन के नियम लागू करने के लिए सबसे पहले हमें उस पिंड को पहचानना चाहिए जिसकी गति के बारे में हम जानना चाहते हैं। फिर हमें पिंड पर लग रहे सभी बलों का पता लगाना चाहिए, इन्हें एक सदिश आरेख (vector diagram) पर खींच लेना चाहिए और पिंड पर लग रहा नेट बल मालूम करना चाहिए। तब न्यूटन के द्वितीय नियम से पिंड का त्वरण मालूम किया जा सकता है। अब हम इस मूलभूत विधि को लागू करके कुछ उदाहरण हल करेंगे।

उदाहरण 1 : प्रक्षेप्य गति

बंदूक से छोड़ी गई गोली की गति और खिलाड़ी के मारने पर हवा में जाने वाले फुटबॉल की गति, प्रक्षेप्य गति (projectile motion) के उदाहरण हैं। आइए अब हम द्रव्यमान m वाला एक प्रक्षेप्य (projectile) लें (देखिए चित्र 2.4)। इसे बिन्दु O से OA दिशा में, जो क्षैतिज से कोण θ बनाती है, वेग $\mathbf{v}_0$ से फेंका गया है। मान लीजिए क्षण t पर कण बिन्दु P ($\mathbf{OP} = \mathbf{r}$) पर है। यदि वायु-प्रतिरोध को ध्यान में न लें तो उस कण पर गुरुत्व के कारण केवल एक अचर बल $\mathbf{F}=m\mathbf{g}$ लग रहा होता है। आइए अब हम कण का प्रपथ ज्ञात करें। समीकरण 2.5 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$m\,\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = m\mathbf{g}. \qquad (2{\cdot}7)$$

या
$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{g}$$

या
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) = \mathbf{g}.$$

t के सापेक्ष समाकलन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

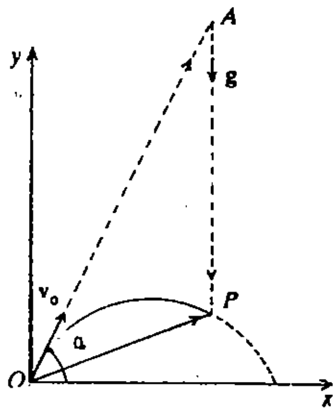
$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{g}t + \mathbf{A}, \qquad (2\cdot8 \text{ क})$$

जहां **A** एक समाकलन अचर है। क्योंकि समीकरण 2.8 क की अन्य दो राशियाँ सदिश हैं जिनकी विमा (dimension) वही है जो कि वेग की है इसलिए **A** भी सदिश होगा और उसकी विमा वही होगी जो वेग की विमा है। **A** ज्ञात करने के लिए हम यह प्रारंभिक प्रतिबंध लागू करते हैं कि

$$t = 0 \text{ पर वेग } \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0$$

इसलिए $\mathbf{A} = \mathbf{v}_0$,

और $$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{g}t + \mathbf{v}_0. \qquad (2.8 \text{ ख})$$



चित्र 2.4 : OA + AP = OP

इसे फिर t के सापेक्ष समाकलित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2 + \mathbf{B}, \qquad (2\cdot9)$$

जहां **B** समीकरण 2·8 क के **A** की तरह एक अचर समाकलन सदिश है पर यहां इसकी विमा वही है जो लंबाई की विमा है। **B** ज्ञात करने के लिए हमें एक अन्य प्रारंभिक प्रतिबंध चाहिये। मान लीजिए कि क्षण $t = 0$ पर $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ है। तब हमें $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ प्राप्त होता है।

$$\therefore \quad \mathbf{r} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2}\mathbf{g}t^2. \qquad (2\cdot10)$$

यहां हमने दो प्रारंभिक प्रतिबंध लागू किए हैं : $t = 0$ पर $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ और $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_0$. क्योंकि $\mathbf{v}_0$, **OA** के अनुदिश है और t अदिश है, इसलिए $\mathbf{v}_0 t$, **OA** के अनुदिश होगा। और, क्योंकि **g** ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी (vertically downward) होता है और $\frac{1}{2}t^2$ अदिश है, इसलिए $\frac{1}{2}\mathbf{g}t^2$ भी ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी, अर्थात् **AP** के अनुदिश होगा (चित्र 2·4)।

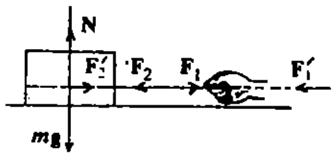
सदिश-योग-नियम से हमें प्राप्त होता है :

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OA} + \mathbf{AP} \qquad (2\cdot11)$$

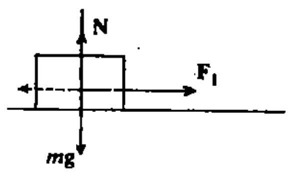
इस तरह, हमें कण की स्थिति की जानकारी मिल जाती है। और, क्योंकि समय के साथ *OA* लंबा होता जाता है और साथ ही *AP* भी लंबा होता जाता है इसलिए हमेशा **OA** और **AP** का सदिश योग करके हमें कण की स्थिति की जानकारी मिल जाती है।

उदाहरण 2 : घर्षण

एक भारी ब्लॉक एक खुरदुरे फ़र्श पर रखा हुआ है। ब्लॉक में लगी रस्सी खींचकर हम बल लगाते हैं, पर बल लगाने के बावजूद भी ब्लॉक अपने स्थान से नहीं खिसकता। क्या यह प्रक्रिया न्यूटन के नियमों का विरोध करती है ? ब्लॉक की गति के बारे में चर्चा कीजिए।



(क)



(ख)

चित्र 2.5

इसके लिए चित्र 2·5 देखिए। आइए पहले यह मालूम करें कि इस भारी ब्लॉक पर कौन-कौन से बल कार्य कर रहे हैं। एक गुरुत्व बल $m\mathbf{g}$ है जो अधोमुखी लग रहा है। दूसरे, ब्लॉक फर्श पर बल लगा रहा है। अतः फर्श भी ब्लॉक पर इसकी विपरीत दिशा में बराबर अभिलंबीय प्रतिक्रिया बल (normal force of reaction) **N** लगाता है। यहां **N** फ़र्श की सतह पर अभिलंब है। तीसरा बल ब्लॉक को खींचने के लिए आपके द्वारा रस्सी पर लगाया गया बल है। मान लीजिए कि $\mathbf{F}_1$ वह बल है जो कि आप रस्सी पर लगाते हैं। यह रस्सी आप पर प्रतिक्रिया बल $\mathbf{F}_1'$ और ब्लॉक पर बल $\mathbf{F}_2$ लगाती है। मान लीजिए $\mathbf{F}_2'$ वह बल है जो ब्लॉक रस्सी पर लगाता है। तब न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार

$$\mathbf{F}_1 = -\mathbf{F}_1', \quad \mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_2'. \qquad (2\cdot12)$$

अब मान लीजिए कि रस्सी भारहीन (massless) है। तब न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार रस्सी पर कार्य कर रहा नेट बल शून्य होगा यानि

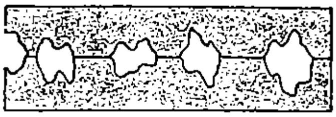
$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2' = 0,$$

या $$\mathbf{F}_2' = -\mathbf{F}_1,$$

या $$\mathbf{F}_2 = \mathbf{F}_1 \,. \qquad \text{(समीकरण 2.12 से)}$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि जो बल हम एक भारहीन रस्सी पर लगाते हैं उसे वह रस्सी बिना किसी परिवर्तन के ब्लॉक को स्थानांतरित कर देती है। चित्र 2·5 ख में आप देख सकते हैं कि ब्लॉक पर लग रहे इन तीनों बलों $m\mathbf{g}$, $\mathbf{N}$ और $\mathbf{F}_1$ का जोड़ शून्य नहीं है। $\mathbf{N}$ और $m\mathbf{g}$ तो एक दूसरे का निरसन (cancellation) कर देते हैं और नेट बल $\mathbf{F}_1$ बचा रहता है। अब क्योंकि ब्लॉक विरामावस्था में है, इसलिए प्रथम नियम के अनुसार इस पर कार्य कर रहा नेट बल शून्य होगा। अतः एक और बल ब्लॉक पर अवश्य लग रहा होगा। यह बल क्षैतिज होगा और परिमाण में $\mathbf{F}_1$ के बराबर लेकिन विपरीत दिशा में होगा। वस्तुतः इस प्रकार का एक बल है जो फ़र्श और ब्लॉक के संपर्क की वजह से लग रहा है। इसे घर्षण बल (force of friction) कहा जाता है। इसे चित्र 2·5 ख में बिंदुदार रेखा से दिखाया गया है।

(क)



(ख)

चित्र 2·6 : घर्षण दो सतहों के बीच उनकी सापेक्ष गति का प्रतिरोध करता है। वास्तव में हर सतह कितनी भी चिकनी क्यों न हो सूक्ष्म स्तर (microscopic level) पर अनियमित होती है। (क) जब दो सतहें एक दूसरे के संपर्क में आती हैं तो अणुओं के बीच वैद्युत बल होने के कारण उन सतहों की अनियमितताएं जुड़ जाती हैं। इससे एक ऐसा बल उत्पन्न होता है जो उनकी सापेक्ष गति का प्रतिरोध करता है; (ख) जब दो सतहों के बीच का अभिलंबीय बल बढ़ता है तो दबने से अनियमितताएं एक दूसरे के अधिक नज़दीक हो जाती हैं जिससे सतहों के बीच का संपर्क क्षेत्र बढ़ जाता है। इससे घर्षण-बल भी बढ़ जाता है।

घर्षण वह बल है जो दो सतहों के बीच कार्य करता है और उनकी सापेक्ष गति का विरोध करता है (देखिए चित्र 2·6)। स्थैतिक घर्षण बल (force of static friction) $\mathbf{f}_s$ परस्पर उन दो सतहों के बीच कार्य करता है जो एक दूसरे के सापेक्ष विरामावस्था में होती हैं। अधिकतम स्थैतिक घर्षण बल $\mathbf{f}_{sm}$ एक दूसरे के सापेक्ष दो सतहों की गति प्रारंभ करने के लिए आवश्यक निम्नतम बल के बराबर होता है। एक बार गति में आ जाने के बाद घर्षण बल प्रायः कम होता जाता है जिससे कि एकसमान गति बनाए रखने के लिए अपेक्षाकृत कम बल लगाने की आवश्यकता होती है। यदि घर्षण बल परस्पर उन दो सतहों के बीच कार्य कर रहा हो जो एक दूसरे के सापेक्ष गति कर रही हों तो उसे गतिक घर्षण बल (force of kinetic friction) $\mathbf{f}_k$ कहा जाता है। $\mathbf{f}_k$, $\mathbf{f}_{sm}$ से कम होता है। अधिकतम स्थैतिक घर्षण बल के परिमाण f_{sm} और दो सतहों के बीच अभिलंबीय प्रतिक्रिया बल के परिमाण N के अनुपात को स्थैतिक घर्षण गुणांक (coefficient of static friction) μ_s कहा जाता है। अर्थात्

$$f_{sm} = \mu_s N$$

इसी प्रकार $$f_k = \mu_k N$$

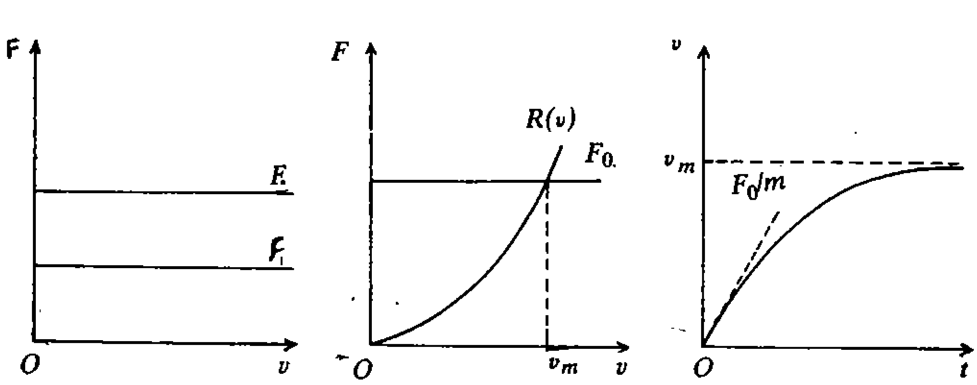
जहां μ_k गतिक घर्षण गुणांक (coefficient of kinetic friction) है।

घर्षण की चर्चा करने पर अब हम उस प्रकार के प्रश्नों पर विचार कर सकते हैं जिसमें पिंड की गति प्रतिरोधी बल (resistive force) के विरुद्ध होती है। प्रतिरोधी बल का एक अन्य उदाहरण प्रक्षेप्य गति में वायु-प्रतिरोध है। वर्षा की बूंदों की और कारों की गति पर भी वायु-प्रतिरोध का प्रभाव पड़ता है। अतः आइए अब हम गति संबंधी एक ऐसे उदाहरण पर विचार करें जहां प्रतिरोधी बल कार्य कर रहे हों।

उदाहरण 3 : प्रतिरोधी बलों के विरुद्ध गति

मान लीजिए कि एक अचर बल $\mathbf{F}_0$ एक पिंड पर लग रहा है और उस पर उसकी गति का प्रतिरोध करने वाला एक और प्रतिरोधी बल $\mathbf{R}$ लग रहा है। मान लीजिए कि $\mathbf{R}$ सदा ही पिंड के तात्क्षणिक वेग की विपरीत दिशा में लगता है। सामान्यतः प्रतिरोधी बल चाल का एक फलन होता है। अतः न्यूटन का द्वितीय नियम हो जाएगा :

$$\mathbf{F}_0 - \mathbf{R}(v) = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} \cdot \qquad (2\cdot13)$$



(क) (ख) (ग)

चित्र 2·7 : (क) शुष्क घर्षण द्वारा; और (ख) तरल घर्षण द्वारा प्रतिरोधित पिंड का प्रतिरोधी बल; (ग) तरल प्रतिरोधी माध्यम में पिंड की अंतिम चाल (terminal speed)।

शुष्क घर्षण (dry friction) के कारण लग रहा प्रतिरोधी बल (चित्र 2·7 क) लगभग v पर निर्भर नहीं करता, जिससे कि

$$\mathbf{R}(v) = \mathbf{F}_1 = \text{एक अचर}$$

इससे समीकरण 2·13 का हल सरल हो जाता है क्योंकि हमें एक अचर नेट बल द्वारा उत्पन्न त्वरण ही मालूम करना है।

वायु-प्रतिरोध (air resistance) अथवा तरल-प्रतिरोध (fluid resistance) होने पर v में वृद्धि होने के साथ-साथ $R(v)$ में भी वृद्धि होती है (चित्र 2·7 ख)।

इसे प्रायः संबंध

$$R(v) = Av + Bv^2 \qquad (2\cdot14)$$

से दिया जाता है।

सरलता के लिए आइए हम यह मान लें कि समीकरण 2.14 के प्रतिरोधी बल के अधीन केवल एकविम गति हो रही है। तब हम समीकरण 2.13 के निम्नलिखित अदिश रूप का प्रयोग कर सकते हैं :

$$m\frac{dv}{dt} = F_o - Av - Bv^2. \qquad (2\cdot15)$$

समीकरण 2·15 को आसानी से हल नहीं किया जा सकता है और हम इसका औपचारिक गणितीय हल निकालना भी नहीं चाहते। फिर भी इस समीकरण के जो हल हो सकते हैं, आइए उनके कुछ गुणात्मक लक्षणों पर हम विचार करें।

मान लीजिए कि पिंड अचर बल F_0 के अधीन चलना शुरू करता है। इसके प्रारंभिक त्वरण का लगभग एक अचर मान $\frac{F_0}{m}$ होगा क्योंकि इस समय v यानि $R(v)$ का मान काफ़ी कम होता है। तो प्रारंभ में v, t का एक रैखिक फलन होगा (चित्र 2·7 ग)।

v बढ़ने के साथ-साथ $R(v)$ भी बढ़ेगा और नेट बल का मान F_0 से कम हो जाएगा जिससे कि $v(t)$ के ग्राफ़ की प्रवणता (slope) लगातार कम होती जाएगी। जैसे-जैसे $R(v)$ का मान F_0 के मान के निकट आता है वैसे-वैसे पिंड पर कार्य कर रहा नेट बल शून्य के निकट होता जाता है। इस सीमा में पिंड के वेग का परिमाण v_m अचर हो जाता है। v_m का मान द्विघाती समीकरण

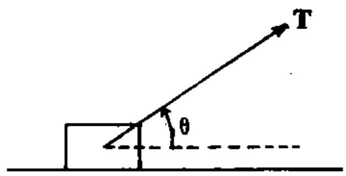
$$Bv^2 + Av - F_0 = 0$$

का धनात्मक हल होता है।

ऐसी स्थिति में शून्य नेट बल के अधीन पिंड शून्य त्वरण, यानि एकसमान वेग से चलने लगता है। ध्यान रहे कि यह उन पिंडों की अत्वरित गति नहीं है जिन पर कोई भी बल कार्य नहीं कर रहा होता। जब भी हम किसी कार को एक सीधी सड़क पर अचर चाल से चलते हुए, किसी जेट को अचर वेग से हवा में उड़ते हुए या वर्षा की बूंदों को एकसमान अंतिम वेग (uniform terminal velocity) से नीचे गिरते हुए देखते हैं तो वे सभी पिंड वास्तव में शून्य नेट बल के अधीन चल रहे होते हैं। उनके अचर चाल से चलने का यह अर्थ नहीं है कि उन पर कोई बल नहीं लग रहा है। अब आप इस संकल्पना पर आधारित एक बोध प्रश्न को हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 3

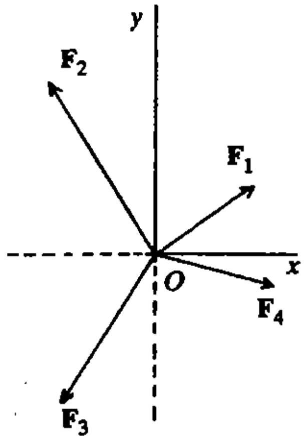
एक खुरदुरे फ़र्श पर द्रव्यमान m वाले बक्स को एक भारहीन रस्सी से, जो क्षैतिज से कोण θ बनाती है, खींचा जा रहा है (चित्र 2·8)। बक्स और फ़र्श के बीच गतिक घर्षण गुणांक μ_k है। यदि बक्स एक अचर वेग से खिसक रहा हो तो रस्सी में तनाव (tension) कितना होगा ?



चित्र 2·8

न्यूटन के नियमों का एक सरल पर महत्वपूर्ण अनुप्रयोग साम्यावस्था में स्थित पिंडों का अध्ययन है। अनेक स्थितियों को, एक कण पर लग रहे बलों की साम्यावस्था से जुड़ी हुई समस्या माना जा सकता है। उदाहरण के लिए, भवनों और निलंबन पुलों के निर्माण करने, वायुयानों और जहाज़ों का डिज़ाइन करने और माल चढ़ाने अथवा उतारने की क्रिया में साम्यावस्था में स्थित बल कार्य कर रहे होते हैं। आइए अब हम एक कण पर कार्य कर रहे बलों की साम्यावस्था (equilibrium of forces) का अध्ययन करें।

2.2.3 बलों की साम्यावस्था



चित्र 2.9

जब हम कहते हैं कि कोई कण साम्यावस्था (equilibrium) में है, तो इसका अर्थ यह होता है कि कण पर लग रहे सभी बलों का परिणामी (resultant) बल शून्य है। तब न्यूटन के प्रथम गति-नियम के अनुसार साम्यावस्था में पिंड या तो विरामावस्था में होता है या अचर चाल से एक सरल रेखा में चलता है। यह देखा गया है कि बहुत सी स्थितियों में हमारा वास्ता ऐसे बलों की साम्यावस्था से पड़ता है जो एक समतल में स्थित हों। इसलिए हम अपनी चर्चा उस स्थिति तक ही सीमित रखेंगे जबकि कण अनेक समतलीय बलों (coplanar forces) के अधीन साम्यावस्था में हो, अर्थात

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots = \mathbf{0}. \tag{2·16 क}$$

क्योंकि बल समतलीय हैं, इसलिए हम इन बलों को दो पारस्परिक लांबिक दिशाओं में, उनके x- और y- घटकों में वियोजित कर सकते हैं, जबकि कण O पर है (देखिए चित्र 2·9)।

अतः समीकरण 2·16 क को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$(F_{1x}\hat{\mathbf{i}} + F_{1y}\hat{\mathbf{j}}) + (F_{2x}\hat{\mathbf{i}} + F_{2y}\hat{\mathbf{j}}) + \ldots = \mathbf{0},$$

या

$$(F_{1x} + F_{2x} + \ldots)\,\hat{\mathbf{i}} + (F_{1y} + F_{2y} + \ldots)\,\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0},$$

या

$$\left.\begin{aligned} F_{1x} + F_{2x} + \ldots &= 0, \\ F_{1y} + F_{2y} + \ldots &= 0. \end{aligned}\right] \tag{2·16 ख}$$

और

समीकरण 2.16 ख को संक्षेप में निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

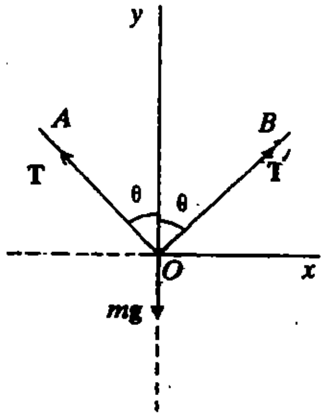
$$\sum F_x = 0\ ,\ \sum F_y = 0 \tag{2·16 ग}$$

जहां $\sum$ बलों के x- अथवा y- घटकों के जोड़ को प्रकट करता है।

अब हम एक उदाहरण को हल करने के लिए समीकरण 2·16ग लागू करेंगे।

उदाहरण 4

द्रव्यमान m वाले एक कण को दो हल्की रस्सियों से लटकाया गया है, जैसा कि चित्र 2.10 क में दिखाया गया है। रस्सियों के छोरों A और B को हाथों में पकड़ा गया है। रस्सी OA और रस्सी OB दोनों ही ऊर्ध्वाधर के साथ कोण θ बनाती हैं। m और θ के पदों में T और T' के मान ज्ञात कीजिए।



(क)


(ख)

चित्र 2·10

हम O से होकर जाने वाली दो परस्पर लांबिक दिशाएं x- और y- अक्षों के अनुदिश लेते हैं जिनमें y ऊर्ध्वाधर है। समीकरण 2·16 ग के अनुसार :

$$-T'\cos(90° - \theta) + T\cos(90° - \theta) = 0, \tag{2·17}$$

और

$$T\cos\theta + T'\cos\theta - mg = 0 \tag{2·18}$$

अतः समीकरण 2·17 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$T' = T\ (\because\ \theta \neq 0°)$$

इस तरह, समीकरण 2·18 से

$$2T\cos\theta = mg$$

या

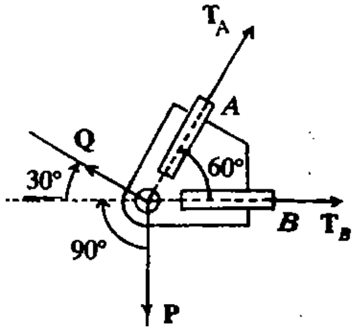
$$T = T' = \frac{mg}{2\cos\theta}. \tag{2·19}$$

क्योंकि θ के मान में वृद्धि होने के साथ cos θ के मान में कमी आने लगती है, इसलिए तनाव में वृद्धि होती जाएगी। यह तनाव इतना भी बढ़ सकता है कि रस्सी उसे सहन न कर पाए और टूट जाए। यही कारण है कि पुल के निलंबन को सहारा देने वाले केबलों को काफ़ी वक्रता (curvature) के साथ लटकाया जाता है (चित्र 2·10 ख)। यदि केबल को सीधे खींचा जाए तो तनाव इतना अधिक बढ़ सकता है कि वह केबल टूट जाए।

अब, क्योंकि आप बलों की साम्यावस्था के बारे में पढ़ चुके हैं, इसलिए आप निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 4

परिमाण $P = 3000$ N और $Q = 4000$ N वाले दो बल **P** और **Q** लगा करके एक मशीन के कई हिस्सों को जोड़ने वाले संबंधन को साम्यावस्था में रखा गया है (देखें चित्र 2.11)। छड़ों A और B में तनाव ज्ञात कीजिए।



चित्र 2·11

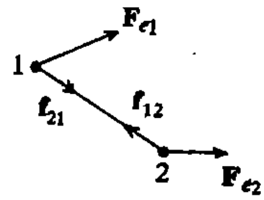
अभी तक हमने न्यूटन के गति-नियमों को एक कण पर या एक पिंड पर जिसे एक कण के रूप में लिया जा सकता है, लागू किया है। अब हम कई कणों वाले निकायों (systems of many particles) की गति का अध्ययन करेंगे। इस प्रकार के निकाय का एक उदाहरण सूर्य और ग्रह हैं। ये पिंड अपने-अपने व्यासों की तुलना में एक दूसरे से काफ़ी दूरी पर हैं। इसलिये इन सबको कई कणों का एक निकाय माना जा सकता है। हम पाते हैं (देखिए समीकरण 2·1) कि ऐसे निकायों की गति के निर्धारण में रैखिक संवेग की एक महत्वपूर्ण भूमिका होती है। इसके महत्वपूर्ण होने का एक और कारण रैखिक संवेग-संरक्षण नियम है।

इसलिए आइए अब हम रैखिक संवेग पर कुछ विस्तार से चर्चा करें।

2.3 रैखिक संवेग

इसके लिए आइए पहले हम द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले दो कणों के निकाय का अध्ययन करें जिनमें अन्योन्यक्रिया (interaction) होती है (चित्र 2·12)। मान लीजिए उनके रैखिक संवेग, क्रमशः $\mathbf{p}_1$ और $\mathbf{p}_2$ हैं। इस निकाय का संपूर्ण रैखिक संवेग $\mathbf{p}$ इन दो कणों के रैखिक संवेगों का सदिश योग होता है, यानि

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \qquad (2·20)$$



चित्र 2·12

न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार $\mathbf{p}_1$ की परिवर्तन दर, कण 1 पर कार्य कर रहे सभी बलों के, अर्थात् इस पर लग रहे कुल बाहरी बल $\mathbf{F}_{e1}$ और कण 2 के कारण आंतरिक बल $\mathbf{f}_{21}$ के सदिश योग के बराबर होती है, यानि

$$\mathbf{F}_{e1} + \mathbf{f}_{21} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt}. \qquad (2·21\text{क})$$

इसी प्रकार, कण 2 के लिए

$$\mathbf{F}_{e2} + \mathbf{f}_{12} = \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} \qquad (2·21\text{ख})$$

क्योंकि न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार $\mathbf{f}_{12} = -\mathbf{f}_{21}$, इसलिए समीकरणों 2·21 क और 2·21 ख को जोड़ने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{e2} = \frac{d\mathbf{p}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}$$

जिसे

$$\mathbf{F}_e = \frac{d}{dt}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)$$

के रूप में लिखा जा सकता है, जहां $\mathbf{F}_e$ निकाय पर लगा हुआ नेट बाह्य बल है। इसलिए, समीकरण 2·20 से

$$\mathbf{F}_e = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \qquad (2·22)$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि अन्योन्यक्रिया करने वाले कणों के निकाय की गति में त्वरण आंतरिक बल के कारण नहीं, बल्कि नेट बाह्य बल के कारण उत्पन्न होता है। आइए अब हम देखें कि किस प्रकार समीकरण 2·22 से रैखिक संवेग-संरक्षण नियम तक पहुंचा जा सकता है।

2.3.1 रैखिक संवेग-संरक्षण

उस विशेष स्थिति में जबकि नेट बाह्य बल $\mathbf{F}_e$ शून्य हो तो समीकरण 2·22 से

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \qquad (2\cdot23)$$

प्राप्त होता है जिससे कि

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{एक अचर सदिश।}$$

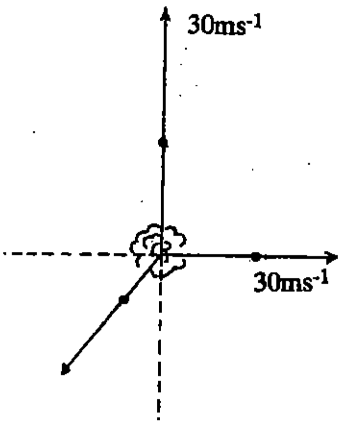
यही दो कणों वाले निकाय का रैखिक संवेग-संरक्षण नियम (principle of conservation of linear momentum) है। यह नियम दो से अधिक कणों के निकाय पर भी समान रूप से लागू होता है। अनेक कणों वाले निकाय से संबंधित इसकी औपचारिक उपपत्ति इकाई 7 में दी जाएगी। रैखिक संवेग-संरक्षण नियम का कथन हम इस प्रकार देते हैं:

"यदि किसी निकाय पर कार्य कर रहा नेट बाह्य बल शून्य हो, तो इसका संपूर्ण रैखिक संवेग संरक्षित रहता है।"

आइए अब हम इस नियम को लागू करें।

उदाहरण 5

विरामावस्था में रखा एक पात्र विस्फोट होने पर फटकर तीन टुकड़ों में बंट जाता है। फटने पर इसके, समान द्रव्यमान वाले, दो टुकड़े एक दूसरे की लांबिक दिशा में 30 m s⁻¹ की चाल से उड़ जाते हैं। दिखाइए कि विस्फोट के तुरंत बाद तीसरा टुकड़ा अन्य दो टुकड़ों के समान तल में उड़ता है। यदि तीसरे टुकड़े का द्रव्यमान, बाकी टुकड़ों के द्रव्यमान का तीन गुना हो तो विस्फोट के तुरंत बाद इस टुकड़े के वेग का परिमाण क्या होगा?



चित्र 2·13

इस प्रक्रिया की व्याख्या एक आरेख में की गई है (चित्र 2·13)। क्योंकि विस्फोट के पहले पात्र विरामावस्था में है, इसलिए उसका संवेग शून्य होगा। और, क्योंकि इस निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है, इसलिए इसका संपूर्ण रैखिक संवेग संरक्षित होता है। अतः अंतिम संवेग भी शून्य होगा, यानि

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3 = 0, \qquad (2\cdot24\text{ क})$$

या

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}_3. \qquad (2\cdot24\text{ ख})$$

क्योंकि $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$ उस समतल में स्थित होगा जिस समतल में $\mathbf{p}_1$ और $\mathbf{p}_2$ स्थित हैं, इसलिए समीकरण 2·24 ख के अनुसार हम यह पाते हैं कि $\mathbf{p}_3$ भी उसी समतल में स्थित है जिस समतल में $\mathbf{p}_1$ और $\mathbf{p}_2$ हैं। अब, समीकरण 2·24 ख से

$$(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2).\ (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) = (-\mathbf{p}_3).\ (-\mathbf{p}_3),$$

या $$p_1^2 + p_2^2 + 2\mathbf{p}_1.\ \mathbf{p}_2 = p_3^2$$

पर, $$\mathbf{p}_1.\ \mathbf{p}_2 = 0\ (\because \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 \text{ पर लंब है})।$$

इसलिए, $$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2 \qquad (2\cdot24\text{ ग})$$

या $$(3mv)^2 = (mu)^2 + (mu)^2,$$

या $$9m^2v^2 = 2\,m^2\,u^2$$

या $$v = \frac{\sqrt{2}}{3}\,u.$$

क्योंकि प्रश्न में $u = 30$ m s⁻¹ दिया हुआ है

$$\therefore\ v = 10\sqrt{2}\ \text{m s}^{-1}$$

इस वेग का परिमाण एक अन्य विधि से भी प्राप्त किया जा सकता है। हम समीकरण 2·24 ख को दो परस्पर लांबिक दिशाओं, x- और y- अक्षों के अनुदिश, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ और $\mathbf{p}_3$ के घटकों के पदों में व्यक्त कर सकते हैं, जैसा कि चित्र 2·9 में दिखाया गया है। अब, क्योंकि $\mathbf{p}_1$, x- अक्ष के अनुदिश, $\mathbf{p}_2$, y- अक्ष के अनुदिश है और $\mathbf{p}_3$, x- अक्ष के साथ कोण θ बनाता है, इसलिए समीकरण 2·24 ख से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$p_1\,\hat{\mathbf{i}} + p_2\hat{\mathbf{j}} = -(p_3 \cos\theta\ \hat{\mathbf{i}} + p_3 \sin\theta\hat{\mathbf{j}}) \qquad (2\cdot25\text{ क})$$

यह समीकरण संतुष्ट होता है यदि और केवल यदि (देखिए समीकरण 1·6)

$$-p_3 \cos\theta = p_1,\ -p_3 \sin\theta = p_2 \qquad (2\cdot25\text{ ख})$$

या

$$p_3^2 = p_1^2 + p_2^2.$$

जो कि समीकरण 2.24 ग ही है।

बोध प्रश्न 5

उदाहरण 5 के $\mathbf{v}$ की दिशा ज्ञात कीजिए।

ऊपर दिए गए उदाहरण से और जिस ढंग से हमने संवेग-संरक्षण नियम प्राप्त किया है उससे ऐसा लग सकता है कि इस नियम के अनुप्रयोग सीमित हैं। ऐसा इसलिये है कि हमने यह माना है कि कण-निकाय पर कोई नेट बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है। लेकिन वास्तव में इस नियम का अनुप्रयोग-क्षेत्र काफ़ी व्यापक है।

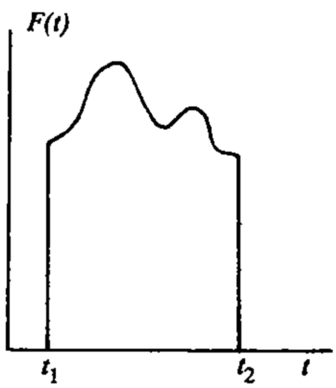
मसलन ऐसी बहुत सी स्थितियां होती हैं जिनमें आंतरिक बलों की तुलना में बाह्य बल, जैसे गुरुत्व, काफ़ी दुर्बल होता है। बीच हवा में रॉकेट का विस्फ़ोट होना, इसका एक उदाहरण है। क्योंकि विस्फ़ोट बहुत ही कम समय में होता है, इसलिए इस स्थिति में बाह्य बल गुरुत्व की उपेक्षा की जा सकती है। इस प्रकार के उदाहरणों में रैखिक संवेग काफ़ी हद तक संरक्षित होता है।

और, यदि किसी निकाय पर एक बाह्य कारक द्वारा बल लगाया गया हो तो निकाय उस कारक पर विपरीत दिशा में बराबर बल लगाता है। अब अगर हम कारक और निकाय को एक नए बड़े निकाय का ही अंग मान लें तो इस नए निकाय का संवेग संरक्षित रहता है। और, क्योंकि ब्रह्मांड से बड़ा कोई निकाय नहीं है, इसलिए उसका संपूर्ण रैखिक संवेग संरक्षित रहता है।

इस तरह हम यह पाते हैं कि यदि किसी कण-निकाय पर कोई नेट बाह्य बल न लग रहा हो तो उसकी गति का विश्लेषण करने के लिए हम रैखिक-संवेग संरक्षण नियम लागू कर सकते हैं। इस नियम का लाभ यह होता है कि कण-निकाय पर लग रहे बलों की जानकारी के बिना ही उसकी गति के बारे में जाना जा सकता है। आइए अब हम निकाय के प्रत्येक कण की गति के बारे में जानें। ऐसी स्थिति में प्रत्येक कण पर एक नेट बल कार्य करता है और उसका रैखिक संवेग बदल जाता है। संवेग में यह परिवर्तन, बल के परिमाण पर और जितने समय तक वह कार्य करता है उस समय पर निर्भर करता है। यहां यह भी ध्यान रहे कि समय के साथ स्वयं बल में भी परिवर्तन हो सकता है। आइए अब हम बल, उसकी कार्य-अवधि और संवेग में परिणामी परिवर्तन के संबंध के बारे में पढ़ें।

2.3.2 आवेग

जब कोई बल्लेबाज़ अपने बल्ले से गेंद को मारता है तो गेंद के साथ बल्ले का बहुत थोड़े पर परिमित (finite) समय तक संपर्क बना रहता है। उन दो क्षणों पर, जबकि गेंद बल्ले से तुरन्त संपर्क करने वाली हो और जबकि गेंद बल्ले को तभी-तभी छोड़ चुकी हो, बल्ला किसी भी बल का अनुभव नहीं करता। पर, इन दो क्षणों के बीच के अंतराल में वह एक वृहत् परिवर्तनशील बल का अनुभव करता है। ऐसे बल $\mathbf{F}(t)$ के परिमाण में हो रहे परिवर्तन को चित्र 2·14 की तरह दिखाया जा सकता है। इस स्थिति में सामान्यतः हम यह मान लेते हैं कि बल की एक नियत दिशा है। हम t_1 से t_2 के समयांतराल पर समीकरण 2·4 क का समाकलन करके उस पिंड का, जिस पर बल लग रहा है, संवेग परिवर्तन मालूम कर सकते हैं:



चित्र 2·14

$$\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathbf{p}}{dt}dt = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1) \equiv \Delta\mathbf{p}. \qquad (2\cdot26)$$

समय पर बल के समाकल को बल का **आवेग** (impulse) कहा जाता है और यह निम्नलिखित होता है :

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt . \qquad (2\cdot27)$$

इस तरह, समीकरण 2·26 के अनुसार बल का आवेग, संवेग-परिवर्तन के बराबर होता है। यदि $\mathbf{F}$, समयांतराल Δt तक लग रहा हो, और समय के साथ उसका परिमाण बदल रहा हो तो आवेग ज्ञात करने के लिए हमें फलन $\mathbf{F}(t)$ स्पष्टतः (explicitly) मालूम होना चाहिये। लेकिन ज़्यादातर अवस्थाओं में $\mathbf{F}(t)$ मालूम **नहीं** होता। इसका एक समाधान यह है कि निम्नलिखित समीकरण से **औसत बल** $\bar{\mathbf{F}}$ को परिभाषित किया जाए :

$$\bar{\mathbf{F}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)dt \text{ , जहां } \Delta t = t_2 - t_1. \qquad (2\cdot28)$$

समीकरण 2·27 और 2·28 से हमें प्राप्त होता है :

$$\mathbf{J} = \bar{\mathbf{F}}\,\Delta t = \Delta\mathbf{p}. \qquad (2\cdot29)$$

ऐसे अनेक उदाहरण हैं जो औसत बल, बल लगने की अवधि और रैखिक संवेग-परिवर्तन के संबंध को दिखाते हैं। टेनिस के खिलाड़ी गेंद को रैखिक संवेग देने के लिए बहुत अधिक बल लगाकर मारते हैं। अधिकतम संभव संवेग प्रदान करने के लिए सर्विस करते ही वे थोड़ा आगे बढ़ जाते हैं। ऐसा करने से गेंद और रैकेट का संपर्क-समय थोड़ा बढ़ जाता है। इसलिए रैखिक संवेग में अधिकतम संभव परिवर्तन लाने के लिए हमें अधिक से अधिक बल अधिक से अधिक समयांतराल तक लगाना चाहिए। अब आप इन संकल्पनाओं को एक प्रश्न को हल करने के लिए लागू कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 6

(क) क्षैतिज दिशा में 20 m s^{-1} के वेग से चल रही 0.25 kg द्रव्यमान वाली गेंद को एक बल्ले से मारा जाता है। बल्ले और गेंद की संपर्क अवधि 10^{-2} s है। बल्ला छोड़ने के बाद उस गेंद की चाल अपनी मूल दिशा की विपरीत दिशा में 40 m s^{-1} हो जाती है। बल्ले पर लगा हुआ औसत बल ज्ञात कीजिए ।

(ख) एक उदाहरण दीजिए जिसमें पर्याप्त आवेग प्राप्त करने के लिए एक दुर्बल बल लंबे समय तक कार्य करता है।

अभी तक हमने उन्हीं उदाहरणों को लिया है जिनमें गतिमान पिंड का द्रव्यमान बदलता नहीं है। अब हम उन स्थितियों पर विचार करेंगे जिनमें गतिमान पिंड का द्रव्यमान बदलता हो, और उन पर आवेग और संवेग की संकल्पनाओं को लागू करेंगे।

2.3.3 बदलते द्रव्यमान वाले निकायों की गति

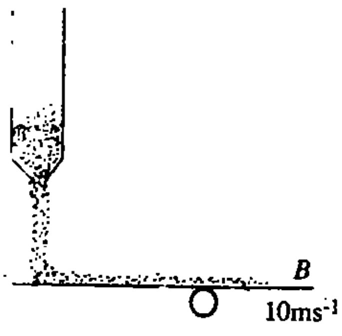
यदि निकाय का द्रव्यमान समय के साथ बदल रहा हो तो हम न्यूटन के द्वितीय गति-नियम को इस तरह लिख सकते हैं:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\,\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt}. \qquad (2\cdot30)$$

उस विशेष स्थिति में जबकि $\mathbf{v}$ अचर हो, समीकरण 2·30 हो जाता है :

$$\mathbf{F} = \mathbf{v}\frac{dm}{dt} . \qquad (2\cdot31)$$

आइए अब हम इससे संबंधित एक उदाहरण लें।



चित्र 2·15

उदाहरण 6

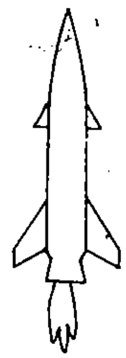
0·2 kg s^{-1} की अचर दर पर रेत एक कन्वेयर बेल्ट B (चित्र 2.15) में गिर रहा है। बेल्ट का 10 m s^{-1} का अचर वेग बनाए रखने के लिए कितने बल की आवश्यकता होगी ?

यहां, क्योंकि वेग अचर रहता है, इसलिए हम समीकरण 2.31 लागू करेंगे। क्योंकि बेल्ट का द्रव्यमान बढ़ रहा है, इसलिए $\frac{dm}{dt}$ धनात्मक होगा। अतः $\mathbf{F}$, $\mathbf{v}$ की, अर्थात् कन्वेयर बेल्ट की गति की दिशा में होगा।

इस तरह समीकरण 2·31 का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$F = (10\ \text{m s}^{-1})\ (0{\cdot}2\ \text{kg s}^{-1}) = 2\ \text{kg m s}^{-2} = 2\ \text{N}.$$

बदलते हुए द्रव्यमान वाले निकाय का एक अन्य उदाहरण रॉकेट है। रॉकेट में (देखिए चित्र 2·16) अत्यधिक ताप और दाब पर पैदा हुई गैस की धारा एक निकास नली से अति उच्च वेग से बाहर निकलती है। इस प्रक्रिया में रॉकेट के द्रव्यमान में कमी आती जाती है, और $\frac{dm}{dt}$ ऋणात्मक होता है। गैस की धारा निकलने पर रॉकेट की मुख्य बॉडी गैस निकलने की विपरीत दिशा में अत्यधिक बल का अनुभव करती है जिसकी वजह से वह उस दिशा में बढ़ने लगता है। रॉकेट की गति के बारे में जानकारी पाने का यह तरीक़ा काफ़ी सरल है। अब हम आवेग की संकल्पना की सहायता से रॉकेट की गति का परिशुद्ध विश्लेषण करेंगे।



चित्र 2·16

रॉकेट की गति

मान लीजिए क्षण t पर रॉकेट का कुल द्रव्यमान M है। यह वेग $\mathbf{v}$ से चल रहा है और समय अंतराल Δt में द्रव्यमान ΔM निष्कासित कर रहा है। इस स्थिति को चित्र 2·17 क और 2·17 ख में दिखाया गया है।

क्षण t पर निकाय का संपूर्ण प्रारंभिक संवेग $= M\,\mathbf{v}$ (चित्र 2·17 क)

क्षण $t + \Delta t$ पर निकाय का संपूर्ण अंतिम संवेग $= (M-\Delta M)\,(\mathbf{v} + \Delta\,\mathbf{v}) + (\Delta M)\mathbf{u}$ (चित्र 2·17 ख)

ध्यान दीजिए कि यहां हमने $\mathbf{u}$ का चिह्न धनात्मक रखा है क्योंकि चित्र 2.17 ख में निकाय का संपूर्ण अंतिम संवेग एक सदिश योग होता है न कि M और $M - \Delta M$ के संवेगों का अंतर।

आइए अब हम समीकरण 2·29 लागू करें। यदि हम ऊर्ध्वाधरतः उपरिमुखी (vertically upward) दिशा को धनात्मक मानें तो आवेग होगा $-M\mathbf{g}\,\Delta t$ और यह संवेग परिवर्तन के बराबर होगा। इस तरह,

$$-M\mathbf{g}\,\Delta t = (M-\Delta M)\,(\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}) + (\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v}$$

$$= M(\Delta\mathbf{v}) + \Delta M\,(\mathbf{u} - \mathbf{v} - \Delta\mathbf{v}).$$

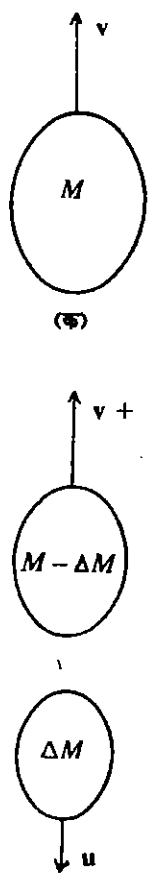
ऊपर दिए गए संबंध को हम समीकरण 1.35 की मदद से सरल कर सकते हैं। तब

$$-\mathbf{g} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta t} + \frac{1}{M}\,\frac{\Delta M}{\Delta t}\,\mathbf{u}_{rel}$$

जहां $\mathbf{u}_{rel} = \mathbf{u} - (\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v})$ निकलने वाली गैस का रॉकेट के सापेक्ष आपेक्षिक वेग है।

अब, सीमा $\Delta t \to 0$ में

$$-\mathbf{g} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{1}{M}\,\frac{dM}{dt}\,\mathbf{u}_{rel} \qquad (2.32)$$



(क)

(ख)

चित्र 2·17

समीकरण 2·32 के दाएं पक्ष में ऋणात्मक चिह्न इसलिए लगता है, क्योंकि

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta M}{\Delta t} = -\frac{dM}{dt}$$ क्योंकि समय t के साथ M में कमी आती जाती है।

इसलिए जब हम समीकरण 2·32 को संख्यात्मक प्रश्नों में लागू करते हैं तो $\frac{dM}{dt}$ के स्थान पर केवल उसका परिमाण रखते हैं, चिह्न नहीं।

समीकरण 2·32 को t के सापेक्ष समाकलित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\int_0^t \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,dt = -\mathbf{g}\,t + \mathbf{u}_{rel}\int_{M_0}^{M} \frac{dM}{M},$$

जहां M_0 रॉकेट का प्रारंभिक द्रव्यमान है और M, क्षण t पर उसका द्रव्यमान है। अब, यदि $\mathbf{v}_0$ प्रारंभिक वेग हो तो हमें प्राप्त होता है :

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_{rel} \ln \frac{M}{M_0} - \mathbf{g}t. \qquad (2\cdot33)$$

हम समीकरण 2·33 को और अच्छी तरह से समझने के लिए यहां एक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 7

दो-चरण रॉकेट के अलग-अलग चरणों के द्रव्यमान 100 kg और 10 kg हैं और उनमें क्रमशः 800 kg और 90 kg ईंधन भरा हुआ है। रॉकेट के सापेक्ष गैस का रेचन वेग (exhaust velocity) 1·5 km s^{-1} होने पर रॉकेट का अंतिम वेग क्या होगा ? (यहां गुरुत्व का प्रभाव नगण्य माना गया है)। क्योंकि यहां हम गुरुत्व की उपेक्षा कर रहे हैं, इसलिए समीकरण 2·33 हो जाएगा

$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_{rel} \ln \frac{M}{M_0} \qquad (2\cdot34)$$

अब, मान लीजिए कि ऊर्ध्वाधरतः उपरिमुखी दिशा में एकक सदिश $\hat{\mathbf{n}}$ है। तब समीकरण 2·34 को निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है:

$$v\,\hat{\mathbf{n}} - v_0\,\hat{\mathbf{n}} = -(u_{rel}\,\hat{\mathbf{n}}) \ln \frac{M}{M_0},$$

($\mathbf{u}_{rel} = -u_{rel}\,\hat{\mathbf{n}}$, क्योंकि रॉकेट के सापेक्ष गैस का रेचन वेग ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी है)।

या $$v - v_0 = -u_{rel} \ln \frac{M}{M_0}. \qquad (2\cdot34 \text{ क})$$

हमारे प्रश्न में

$$u_{rel} = 1\cdot5 \text{ km s}^{-1}$$

प्रथम चरण का $v_0 = 0$

$$M_0 = (800 + 90 + 100 + 10) \text{ kg} = 1000 \text{ kg}$$

$$M = (90 + 10 + 100) \text{ kg} = 200 \text{ kg},$$

क्योंकि पहले चरण में 800 kg ईंधन जल जाता है।

अतः समीकरण 2·34 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$v = (-1\cdot5 \text{ km s}^{-1}) \ln \frac{200}{1000}$$

$$= (-1\cdot5 \text{ km s}^{-1})(\ln 2 - \ln 10)$$

$$= (1\cdot5 \times 1\cdot6) \text{ km s}^{-1}$$

$$= 2\cdot4 \text{ km s}^{-1}.$$

ध्यान दीजिए कि ऊपर निकाला गया वेग दूसरे चरण का प्रारंभिक वेग होगा। और यह भी ध्यान दीजिए कि दूसरे चरण के प्रारंभिक द्रव्यमान में प्रथम चरण के द्रव्यमान के बराबर (अर्थात् 100 kg) कमी आ जाती है।

∴ दूसरे चरण के लिए

$$v_0 = 2\cdot4 \text{ km s}^{-1}$$

$$M_0 = (90 + 10) \text{ kg} = 100 \text{ kg}, \; M = 10 \text{ kg}$$

$$\therefore \quad v = \left(2\cdot4 - 1\cdot5 \ln \frac{10}{100}\right) \text{km s}^{-1}.$$

$$= (2.4 + 1.5 \times 2.3)\ \text{km s}^{-1}$$

$$= 5.85\ \text{km s}^{-1} = 5.8\ \text{km s}^{-1}.$$

उदाहरण 7 के उत्तर को दो सार्थक अंकों तक रखना है। यहां एक विशेष परिस्थिति है क्योंकि छोड़ा जाने वाला अंक 5 है। परंपरा से, अंक 5 से पहले आने वाली सम संख्या को ज्यों का त्यों रखा जाता है।

अब आप इस उदाहरण से संबंधित निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 7

उदाहरण 7 के रॉकेट को एक-चरण रॉकेट मानकर, यानि उसका द्रव्यमान 100 kg और उसमें भरे ईंधन का द्रव्यमान 890 kg लेकर, उसका अंतिम वेग ज्ञात कीजिए। और इस बात पर आप अपनी टिप्पणी दीजिए कि एक-चरण रॉकेट की तुलना में दो-चरण रॉकेट का कोई लाभ है कि नहीं।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है उसका एक संक्षिप्त विवरण हम यहां दे रहे हैं।

2.4 सारांश

- न्यूटन का प्रथम नियम यह है : प्रत्येक पिंड अपनी विरामावस्था में रहता है या एकसमान गति से एक सरल रेखा में चलता रहता है जब तक कि उस पर लगे हुए बल के कारण वह अपनी अवस्था में परिवर्तन करने के लिए बाध्य न हो जाए।

- न्यूटन के द्वितीय नियम में बल और संवेग का संबंध दिया गया है और इसे

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

  के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
  अचर द्रव्यमान वाले निकाय के लिए यह

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$$

  हो जाता है।

- न्यूटन का तृतीय नियम यह है: प्रत्येक क्रिया की एक बराबर और विपरीत दिशा में प्रतिक्रिया होती है। इसमें क्रिया-बल और प्रतिक्रिया-बल अलग-अलग पिंडों पर कार्य करते हैं।

- एक कण को साम्यावस्था में तब कहा जाता है जबकि उस पर कार्य कर रहा नेट बल शून्य हो।

  समतलीय बलों के लिए

$$\sum F_x = 0,\ \sum F_y = 0$$

- यदि निकाय पर कोई नेट बाह्य बल कार्य न कर रहा हो तो उसका संपूर्ण रैखिक संवेग संरक्षित होता है।

- किसी पिंड पर लग रहे बल का आवेग उसके संवेग-परिवर्तन के बराबर होता है और इसे निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$\mathbf{J} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt\ ,$$

  जहां बल, समयांतराल $\Delta t = t_2 - t_1$ में लगता है।

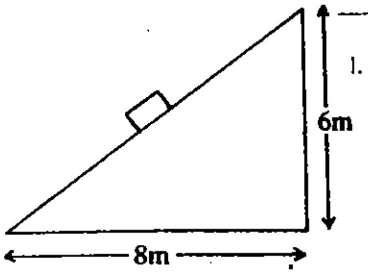
- बदल रहे द्रव्यमान वाले निकाय के लिए न्यूटन के द्वितीय गति नियम को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जाता है :

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \mathbf{v}\frac{dm}{dt}.$$

  उड़ान भरते ही समय t के अंदर रॉकेट के वेग में हुई वृद्धि होती है :

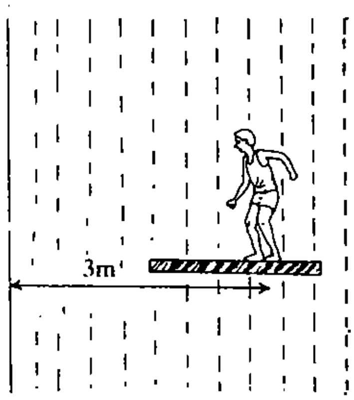
$$\mathbf{v} - \mathbf{v}_0 = \mathbf{u}_{rel} \ln \frac{M}{M_o} - \mathbf{g}t\ .$$

2.5 अंत में कुछ प्रश्न



चित्र 2.18

1. 6 m ऊंचे और 8 m आधार वाले एक नत समतल पर (चित्र 2·18) 100 kg द्रव्यमान का एक ब्लॉक रखा गया है। स्थैतिक घर्षण गुणांक और गतिक घर्षण गुणांक क्रमशः 0·3 और 0·25 हैं। (क) क्या ब्लॉक नत समतल पर नीचे की ओर खिसकेगा ? (ख) नत समतल पर ब्लॉक को उसी स्थान पर रोके रखने के लिए समतल के समांतर कितना बल लगाना चाहिए ? (ग) नत समतल पर ब्लॉक को अचर चाल से ऊपर ले जाने के लिए समतल के समांतर कितना बल लगाना चाहिए ? (घ) यदि ब्लॉक पर समतल के समांतर 882 N का बल ऊपर की ओर लगाया जाए तो त्वरण कितना होगा ? (ङ) यदि समतल के समांतर 490 N का बल ऊपर की ओर लगाया जाए तो क्या होगा ? (च) यदि समतल के समांतर 254·8 N का बल ऊपर की ओर लगाया जाए तो क्या होगा ?



चित्र 2·19

2. एक बालक, जिसका द्रव्यमान 20 kg है, 30 kg द्रव्यमान वाली चपटी नाव पर तट से 3 m की दूरी पर खड़ा है (चित्र 2·19)। वह नाव पर ही तट की ओर 1 m चल कर रुक जाता है। बताइए कि इस समय के अंत में वह तट से कितनी दूरी पर होगा ?

3. बताइए कि क्यों एक सख़्त फ़र्श पर गिरने की अपेक्षा एक गद्दे पर गिरना कम ख़तरनाक होता है।

4. एक अग्निशामक पानी की धार को जल रहे भवन के दरवाज़े की ओर फेंकता है। नली से पानी 45 kg s⁻¹ की दर से निकल रहा है। पानी 32 m s⁻¹ चाल से क्षैतिज दिशा में दरवाज़े पर टकराता है। दरवाज़े पर टकराने के बाद पानी ऊर्ध्वाधरतः नीचे की ओर गिरता है। बताइए कि दरवाज़े पर कितना क्षैतिज बल लग रहा है।

2.6 उत्तर

बोध प्रश्न

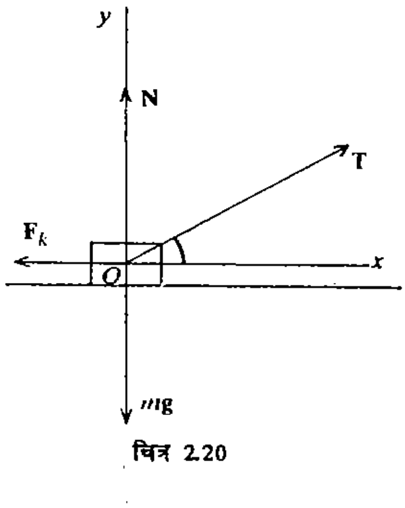
1. मान लीजिए अंतरिक्ष यात्री का द्रव्यमान m kg है। तब दिए हुए प्रतिबंधों और समीकरण 2·4 ख से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\{(15+m)\ \mathrm{kg}\}\ \left\{2{\cdot}04\times10^{-2}\ \mathrm{m\ s^{-2}}\right\} = 2{\cdot}07\ \mathrm{N}$$

$$m = \left(\frac{2{\cdot}07}{2{\cdot}04\times10^{-2}} - 15\right)\mathrm{kg} = 86{\cdot}5\ \mathrm{kg}$$

(क) व्यक्ति पर प्रतिक्रिया बल कार्य करता है। लेकिन व्यक्ति का द्रव्यमान (जड़त्व) अधिक होने के कारण बल उसे नहीं चला पाता।

(ख) सेब भी पृथ्वी को परिमाण F के बल से अपनी ओर खींचता है। सेब और पृथ्वी के त्वरण के परिमाण क्रमशः F/m_a और F/m_E हैं, जहां m_a और m_E क्रमशः सेब और पृथ्वी के द्रव्यमान हैं। चूंकि $m_E >> m_a$ से, अतः $\frac{F}{m_E} << \frac{F}{m_a}$ · अतः पृथ्वी द्वारा विपरीत दिशा में चली गई दूरी नगण्य होगी।



चित्र 2.20

चित्र 2·20 देखिए। मान लीजिए तनाव **T** है। बलों को दो परस्पर लंबवत् दिशाओं में, यानि x- दिशा में, जो कि फ़र्श के अनुदिश है और y-दिशा में जो कि फ़र्श पर लंब है, वियोजित किया गया है। **N** अभिलंबीय प्रतिक्रिया है और गतिक घर्षण बल का परिमाण, गति की विपरीत दिशा में $\mu_k N$ के बराबर है। क्योंकि ऊर्ध्वाधर दिशा में कोई गति नहीं होती, इसलिए y - अक्ष के अनुदिश बलों का परिणामी शून्य होगा। और, क्योंकि पिंड एकसमान वेग से चल रहा है, इसलिए x - अक्ष के अनुदिश भी इसका परिणामी बल शून्य होगा।

अतः

$$T\ \sin\theta + N - mg = 0\ , \qquad (2{\cdot}35)$$

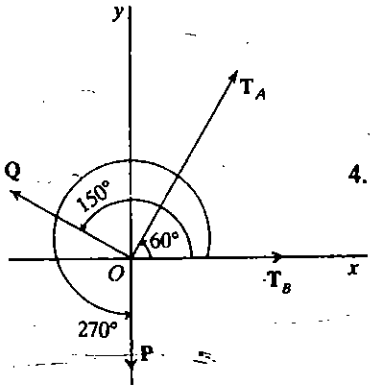
$$\mu_k N - T\cos\theta = 0. \qquad (2{\cdot}36)$$

T ज्ञात करने के लिए हमें समीकरण 2·35 और 2·36 से N का निरसन करना होगा।

इसलिए

$$T\left(\sin\theta + \frac{\cos\theta}{\mu_k}\right) = mg$$

या
$$T = \frac{\mu_k mg}{\cos\theta + \mu_k \sin\theta}$$



4.

चित्र 2·21

चित्र 2·21 देखिए। हम द्विविम समकोणिक निर्देश तंत्र में x और y- अक्ष लेते हैं। इसका मूल बिन्दु हम उस बिन्दु को लेते हैं जिस पर $\mathbf{P}, \mathbf{Q}, \mathbf{T}_A, \mathbf{T}_B$ लग रहे हैं। अब हम साम्यावस्था का प्रतिबंध प्राप्त करने के लिए समीकरण 2·16 ग लागू करेंगे।

अब,
$$\sum F_x = T_B \cos 0° + T_A \cos 60° + Q\cos 150° + P\cos 270°$$

$$= T_B + \frac{T_A}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}Q \text{ और}$$

$$\sum F_y = T_B \sin 0° + T_A \sin 60° + Q \sin 150° + P \sin 270°$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}T_A + \frac{Q}{2} - P.$$

अतः समीकरण 2·16 ग से

$$T_B + \frac{T_A}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}Q = 0 \quad (2{\cdot}37\text{ क})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}T_A + \frac{Q}{2} - P = 0 \quad (2{\cdot}37\text{ ख})$$

समीकरण 2·37 ख से

$$T_A = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(-\frac{Q}{2} + P\right) = \frac{2{,}000}{\sqrt{3}}\text{ N} = 1155\text{ N}.$$

और समीकरण 2·37 क से

$$T_B = \frac{\sqrt{3}}{2}Q - \frac{T_A}{2} = \frac{1}{2}(6928 - 1155)\text{N} = 2886\text{ N}.$$

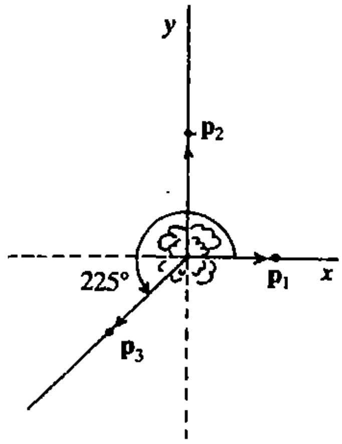
क्योंकि $p_1 = p_2 = mu$ और $p_3 = 3mv$, इसलिए

समीकरण 2·25 ख से

$$\cos\theta = \sin\theta = -\frac{u}{3v} \quad (2{\cdot}38)$$

$$\therefore \tan\theta = 1$$

और समीकरण 2·38 से $\cos\theta$ और $\sin\theta$ दोनों ही ऋणात्मक हैं क्योंकि $\frac{u}{v}$ धनात्मक है। इसलिए θ तृतीय चतुर्थांश में होगा। अतः $\theta = 225^\circ$ (देखिए चित्र 2·22)।



चित्र 2·22

6. (क) $J = \Delta p = (0{\cdot}25\ \text{kg}) \times \{40 - (-20)\}\ \text{m s}^{-1} = 15\ \text{kg m s}^{-1}$

$$\Delta t = 10^{-2}\,\text{s},\ \overline{F} = \frac{J}{\Delta t} = 1500\ \text{N}.$$

(ख) सूर्य और पृथ्वी के बीच गुरुत्वाकर्षण बल काफ़ी कम है पर यह बल सौरमंडल के उद्गम के समय से ही कार्य कर रहा है। इसलिए यह पर्याप्त आवेग उत्पन्न कर सकता है।

7. यदि यह एक-चरण रॉकेट होता तो

$$v_0 = 0$$

$$M_0 = (890 + 100)\ \text{kg} = 990\ \text{kg},\ M = 100\ \text{kg}.$$

$$v = (-1{\cdot}5\ \text{km s}^{-1}) \ln \frac{100}{990}$$

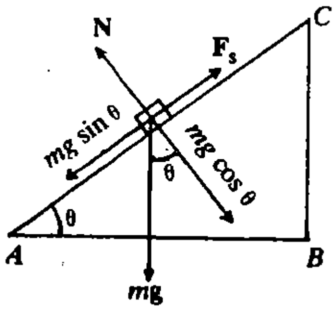
$$= (-1{\cdot}5\ \text{km s}^{-1})\ (\ln 10 - \ln 99)$$

$$= 3{\cdot}4\ \text{km s}^{-1}.$$

जो कि दो-चरण रॉकेट द्वारा प्राप्त किए गए वेग ($5{\cdot}8\ \text{km s}^{-1}$) के मान से 41% कम है। इसलिए हम यह कह सकते हैं कि एक-चरण रॉकेट की अपेक्षा दो-चरण रॉकेट का होना लाभकर होता है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. देखिए चित्र 2·23। $BC = 6$ m, $AB = 8$ m, $AC = \sqrt{(6^2 + 8^2)}$ m $= 10$ m, $\sin\theta = 0{\cdot}6$, $\cos\theta = 0{\cdot}8$



चित्र 2·23

(क) हमने बलों को नत समतल के अनुदिश और उसकी लंबवत् दिशा में वियोजित किया है। क्योंकि समतल की लांबिक दिशा में कोई गति नहीं हो सकती, इसलिए $N = mg\cos\theta$, जहां m = ब्लॉक का द्रव्यमान। अब, स्थैतिक घर्षण-बल का परिमाण

$$F_s = \mu_s N = \mu_s\, mg\cos\theta$$

$$F_s = (0{\cdot}3)\ (100\ \text{kg})\ (9{\cdot}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{\cdot}8) = 235{\cdot}2\ \text{N}$$

और $mg\sin\theta = (100\ \text{kg})\ (9{\cdot}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{\cdot}6) = 588\ \text{N}$

इसलिए $mg\sin\theta > F_s$। अतः ब्लॉक नत समतल पर नीचे की ओर फिसलने लगेगा।

(ख) नत समतल के समांतर अपेक्षित बल का परिमाण $= mg\sin\theta - F_s = 352{\cdot}8$ N.

(ग) जब ब्लॉक नत समतल पर ऊपर की ओर ले जाना होता है तब वहां गतिक घर्षण बल $\mathbf{F}_k$ जिसका परिमाण $\mu_k N$ है, नत समतल की अधोदिशा में कार्य करता है। इसलिए नत समतल की अधोदिशा में कुल बल $(\mu_k N + mg\sin\theta)$ होगा। अब, अचर चाल से ब्लॉक ऊपर की ओर गतिमान हो, इसके लिए यह आवश्यक है कि समतल के समांतर लगाया गया बल

$$= (\mu_k N + mg\sin\theta) = mg\,(\mu_k\cos\theta + \sin\theta)$$

$$= (100\ \text{kg})\ (9{\cdot}8\ \text{m s}^{-2})\ (0{\cdot}25 \times 0{\cdot}8 + 0{\cdot}6)$$

$$= 784\ \text{N}.$$

(घ) त्वरण $= \dfrac{(882 - 784)\text{N}}{100\ \text{kg}} = 0{\cdot}98\ \text{m s}^{-2}$.

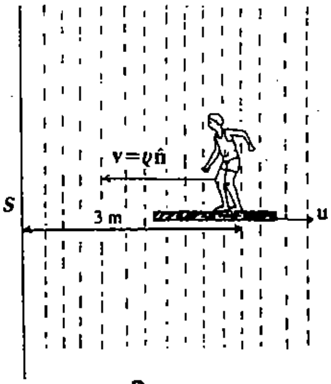
(ङ) क्योंकि $490 < 784$ से, इसलिए (ग) के अनुसार ब्लॉक ऊपर की ओर नहीं जाएगा। इस स्थिति में नत समतल की अधोदिशा में परिणामी बल $= (588 - 490)$ N $= 98$ N जो अधिकतम

स्थैतिक घर्षण बल के परिमाण F_s (= 235·2 N) से कम है। अतः स्थैतिक घर्षण-बल स्वयं 98 N के बराबर हो जाएगा और ब्लॉक साम्यावस्था में बना रहेगा।

(च) अब, समतल की अधोदिशा में परिणामी बल का परिमाण = (588 – 254·8) N = 333·2 N. यह F_s से अधिक है। अतः ब्लॉक नत समतल पर नीचे की ओर जाएगा। इसकी गति का प्रतिरोध गतिक घर्षण बल F_k करेगा।

अब, $F_k = \mu_k mg \cos\theta = (0{\cdot}25)\,(100\text{ kg})\,(9{\cdot}8\text{ m s}^{-2})\,(0{\cdot}8) = 196\text{ N}$

इसलिए समतल की अधोदिशा में इसका त्वरण $= \dfrac{(333{\cdot}2 - 196)\text{N}}{100\text{ kg}} = 1{\cdot}4\text{ m s}^{-2}$.



चित्र 2·24

2. मान लीजिए बालक और नाव के द्रव्यमान क्रमशः m और M हैं (देखिए चित्र 2·24)। मान लीजिए कि नाव के सापेक्ष बालक का वेग $\mathbf{v}$ है और तट के सापेक्ष नाव का वेग $\mathbf{u}$ है। इसलिए तट के सापेक्ष बालक का वेग $\mathbf{v} + \mathbf{u} = \mathbf{v}_1$ (माना) होगा। अब, बालक के नाव पर चलने के पहले, (बालक और नाव) निकाय का तट के सापेक्ष संपूर्ण रैखिक संवेग शून्य था। नाव पर बालक के चलने से परस्पर क्रिया और प्रतिक्रिया-बल के कारण नाव में गति होती है। हम यहां बालक और नाव के बीच के घर्षण-बल और नाव तथा पानी की सतह के बीच के घर्षण बल की उपेक्षा कर देंगे। अतः निकाय पर कोई भी बाहरी बल कार्य नहीं कर रहा है। इसलिए रैखिक संवेग-संरक्षण नियम के अनुसार

$$m(\mathbf{v} + \mathbf{u}) + M\mathbf{u} = \mathbf{0}. \qquad (2{\cdot}39)$$

अब, यह तो स्पष्ट है कि जब बालक नाव पर तट की दिशा की ओर चलेगा तो नाव विपरीत दिशा में जाएगी। मान लीजिए बालक की गति की दिशा में एकक सदिश $\hat{\mathbf{n}}$ है। इसलिए

$$\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{n}},\ \mathbf{u} = -u\hat{\mathbf{n}}.$$

अतः समीकरण 2·39 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$m(v-u)\,\hat{\mathbf{n}} - Mu\,\hat{\mathbf{n}} = 0$$

या $$m(v-u) - Mu = 0,\ u = \frac{mv}{m+M}$$

या $$\frac{m}{m+M} = \frac{u}{v} = \frac{s}{L},$$

जहां s नाव द्वारा तय की हुई दूरी है और L बालक द्वारा नाव पर तय की हुई दूरी है। प्रश्नानुसार $m = 20$ kg, $M = 30$ kg, $L = 1$m.

$\therefore\ s = 0{\cdot}4$ m. इसलिए जब बालक नाव पर चलना बंद कर देता है तो उस समय वह तट से (3–1 + 0·4) m अर्थात् 2·4 m की दूरी पर होता है।

3. दोनों ही स्थितियों में व्यक्ति अंततः विरामावस्था में आ जाता है और फ़र्श अथवा गद्दे पर जिस समय गिरता है उस समय उसका वेग समान होता है। इसलिए, दोनों स्थितियों में आवेग अर्थात् संवेग-परिवर्तन समान होगा। पर क्योंकि गद्दा मुलायम होता है, इसलिए संघट्टन की अवधि फ़र्श की अपेक्षा अधिक होगी। इसलिए समीकरण 2·29 के अनुसार गद्दे वाली स्थिति में औसत बल कम होगा। अतः सख़्त फ़र्श की अपेक्षा गद्दे पर गिरना कम ख़तरनाक होता है।

4. दरवाज़े पर टकराने के बाद पानी ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी गिरता है। इसलिए दरवाज़े पर पानी की क्षैतिज गति यकायक रुक जाती है। क्योंकि पानी 32 m s^{-1} से चल रहा है इसलिए प्रत्येक किग्रा पानी में 32 kg m s^{-1} के संवेग की कमी आ जाती है। पर, क्योंकि दरवाज़े पर पानी 45 kg s^{-1} की दर से टकराता है, इसलिए संवेग की हानि-दर

$$= (45\text{ kg s}^{-1})\ (32\text{ kg m s}^{-1}\text{ kg}^{-1})$$

$$= 1440\text{ kg m s}^{-2} = 1440\text{ N}$$

जो कि दरवाज़े पर लग रहा क्षैतिज बल है।

2.7 शब्दावली

अजड़त्वीय प्रेक्षक	Non-inertial observer
अन्योन्यक्रिया	Interaction
अभिलंब	Normal
अभिलंबीय प्रतिक्रिया बल	Normal force of reaction
आवेग	Impulse
एकसमान गति	Uniform motion
क्रिया	Action
गतिक घर्षण गुणांक	Coefficient of kinetic friction
घर्षण	Friction
जड़त्व	Inertia
जड़त्वीय प्रेक्षक	Inertial observer
तनाव	Tension
द्रव्यमान	Mass
निकाय	System
परिणामी	Resultant
प्रतिक्रिया	Reaction
प्रतिरोध	Resistance
प्रतिरोधी बल	Resistive force
प्रपथ	Trajectory
बल	Force
रेचन वेग	Exhaust velocity
रैखिक संवेग	Linear momentum
विरामावस्था	State of rest
स्थैतिक घर्षण गुणांक	Coefficient of static friction
स्थैतिक घर्षण बल	Force of static friction
संरक्षण	Conservation
सदिश आरेख	Vector diagram
समतलीय बल	Coplanar force
सापेक्ष गति	Relative motion
साम्यावस्था	State of equilibrium

इकाई 3 कार्य और ऊर्जा

इकाई की रूपरेखा

3.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आप यह पढ़ चुके हैं कि किन-किन कारणों से गति में परिवर्तन होता है। आपने रैखिक संवेग-संरक्षण के महत्वपूर्ण नियम (law of conservation of linear momentum) और उसके अनुप्रयोगों के बारे में भी पढ़ा। अपने दैनिक अनुभव से हमने यह महसूस किया है कि जब भी हम किसी पिंड को गति देते हैं तो ऊर्जा ख़र्च होती है। हम कभी-कभी यह भी कहते हैं कि ऊर्जा (energy) का ह्रास होने के फलस्वरूप कार्य होता है। फिर भी, ध्यान रहे कि भौतिकी में "कार्य" (work) का एक विशेष अर्थ होता है। उदाहरण के लिए, मेज़ के पास एक ही जगह खड़े होकर कोई लेक्चरर चाहे एक घंटे तक क्यों न पढ़ाये पर हम कहेंगे कि भौतिकी के नियम के अनुसार उसने कोई कार्य नहीं किया है। इस इकाई में आप विभिन्न बलों द्वारा किए गए कार्य और विभिन्न प्रकार की ऊर्जाओं का अध्ययन करेंगे। यहां हम अति महत्वपूर्ण ऊर्जा-संरक्षण नियम (law of conservation of energy) पर विस्तार से चर्चा करेंगे। यह नियम अनेक क्षेत्रों में लागू होता है। यहाँ तक कि आपके भौतिकी के पाठ्यक्रम में इस नियम का प्रयोग बार-बार किया जाएगा। अभी तक आपने इन तीन इकाइयों में गति की संकल्पनाओं के बारे में जो कुछ पढ़ा है उनमें से कुछ को हम अगली इकाई में कोणीय गति (angular motion) का अध्ययन करने में लागू करेंगे।

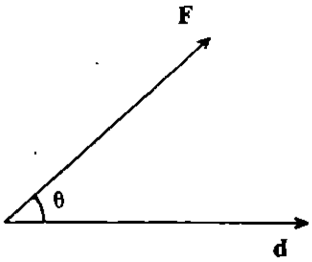
उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :

- अचर और चर बलों द्वारा किए गए कार्य का परिकलन कर सकेंगे
- कार्य-ऊर्जा प्रमेय लागू कर सकेंगे
- संरक्षी और असंरक्षी बलों के बीच अंतर बता सकेंगे
- ऊर्जा-संरक्षण नियम पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकेंगे
- ऊर्जा-आरेखों का विवेचन कर सकेंगे
- प्रत्यास्थ और अप्रत्यास्थ संघट्टनों पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकेंगे
- यांत्रिक तंत्रों में शक्ति का मान ज्ञात कर सकेंगे।

3.2 कार्य

इकाई 1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि बल जिस बिन्दु पर लग रहा है उस बिन्दु का विस्थापन **d** होने पर इस बल **F** द्वारा किया गया कार्य, समीकरण 1.11 ख के अनुसार **F. d** होता है। अतः यदि **F** और **d** के बीच



चित्र 3.1

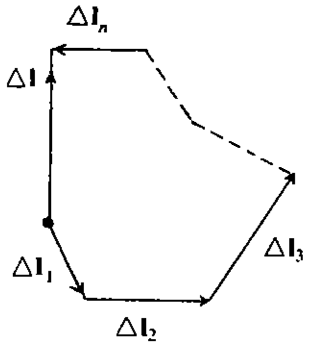
का कोण θ हो, जैसा कि चित्र 3·1 में दिखाया गया है, तो **F** द्वारा किया गया कार्य $(F\cos\theta)\,d$ होता है। कार्य का मात्रक न्यूटन-मीटर (newton-metre या N m) होता है जिसे जूल (joule या J) भी कहते हैं। यदि कोण θ न्यून कोण हो (अर्थात् cos θ धनात्मक हो), तो हम कहते है कि बल **द्वारा** कार्य किया गया है और यदि कोण θ अधिक कोण हो (अर्थात् cos θ ऋणात्मक हो) तो हम कहते हैं कि बल के **विरुद्ध** कार्य किया गया है। और अगर $\theta = 90°$ (अर्थात् $\cos\theta = 0$), तो हम कहते हैं कि इस बल ने कोई कार्य नही किया है अर्थात् यह **कार्य-रहित बल** (no-work force) है। उदाहरण के लिए, जब कोई व्यक्ति ज़मीन पर चलता है तो उस पर लगने वाला ज़मीन का प्रतिक्रिया बल (reaction force) सदा ही उसके विस्थापन के लंबवत् होता है। अतः यहां प्रतिक्रिया बल एक कार्य-रहित बल है।

बोध प्रश्न 1

कार्य-रहित बल का (ऊपर दिए गए उदाहरण के अतिरिक्त) एक उदाहरण दीजिए।

आपको मालूम है कि लघु विस्थापन **Δl** होने पर बल द्वारा किया गया कार्य होता है :

$$W = \mathbf{F}.\Delta\mathbf{l}. \tag{3·1}$$



चित्र 3.2

3.2.1 अचर बल द्वारा किया गया कार्य

मान लीजिए एक अचर बल लगने पर एक कण का क्रमशः $\Delta\mathbf{l}_1, \Delta\mathbf{l}_2, ..., \Delta\mathbf{l}_n$ विस्थापन होता है। तब कण का कुल विस्थापन होता है :

$$\Delta\mathbf{l} = \Delta\mathbf{l}_1 + \Delta\mathbf{l}_2 + ... + \Delta\mathbf{l}_n, \quad \text{(देखिए चित्र 3·2)}$$

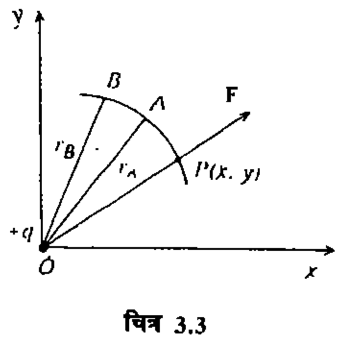
और किया गया कार्य होता है :

$$W = \mathbf{F}.\Delta\mathbf{l} = \mathbf{F}.\,(\Delta\mathbf{l}_1 + \Delta\mathbf{l}_2 + ... + \Delta\mathbf{l}_n).$$

यहां हम अदिश गुणनफलों के बंटन-नियम (distributive law of scalar products, समीकरण 1·14) के अनुसार यह लिख सकते हैं कि

$$W = \mathbf{F}.\Delta\mathbf{l}_1 + \mathbf{F}.\Delta\mathbf{l}_2 + ... + \mathbf{F}.\Delta\mathbf{l}_n. \tag{3·2}$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि उत्तरोत्तर विस्थापन होने पर एक अचर बल द्वारा किया गया कुल कार्य अलग-अलग विस्थापनों पर उस बल द्वारा किए गए कार्यों का जोड़ होता है।



चित्र 3.3

पर, प्रकृति में हमें ऐसे अनेक बल देखने को मिलते हैं जो कण की स्थिति बदलने के साथ-साथ बदलते हैं। उदाहरण के लिए मान लीजिए $+q$ आवेश के स्थिर वैद्युत क्षेत्र (electrostatic field) में एक इकाई धन आवेश को बिन्दु A से बिन्दु B तक ले जाया जाता है (चित्र 3·3)। यहां q, x और y- अक्षों वाले द्विविम कार्तीय निर्देश-तंत्र के मूल बिन्दु पर स्थित है। P पर रखे हुए इकाई धन आवेश पर $+q$ के कारण लगने वाला बल होता है :

$$\mathbf{F} = \frac{kq}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, \tag{3·3}$$

जहां k एक अचर है जो संबंधित माध्यम की प्रकृति पर निर्भर करता है। **OP = r** और $\hat{\mathbf{r}}$, **r** की दिशा में एकक सदिश है। अब जैसे-जैसे एकक धन आवेश गतिमान होता है, वैसे-वैसे **r** का परिमाण और दिशा भी बदलती जाती है। इस तरह हम यह पाते हैं कि **F** एक ऐसा बल है जो कण की स्थिति के साथ-साथ बदलता है। अब हम ऐसे बलों द्वारा किए गए कार्य को किस तरह मालूम कर सकते हैं ?

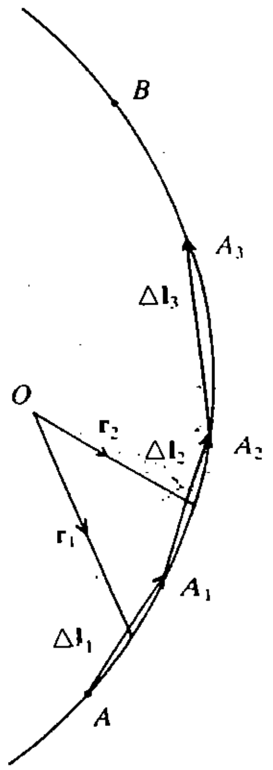
3.2.2 चर बल द्वारा किया गया कार्य

समीकरण 3·3 द्वारा दिए गए बल को आम तौर पर निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r}). \tag{3·4}$$

आइए अब हम उस कार्य का मान ज्ञात करें जो कि किसी कण को इस बल के अधीन बिन्दु A से बिन्दु B तक ले जाने में किया जाता है (चित्र 3·4)।

चित्र 3·4 में A से B तक के पथ को लगभग एक टेढ़ा-मेढ़ा बहुभुज (polygon) माना जा सकता है जिसकी भुजाएँ उत्तरोत्तर विस्थापन $\Delta\mathbf{l}_1, \Delta\mathbf{l}_2, \ldots, \Delta\mathbf{l}_n$ हैं। यहाँ हमने पथ AB को थोड़ा बढ़ा-चढ़ा कर दिखाया है। अब हम प्रत्येक उत्तरोत्तर विस्थापन $\Delta\mathbf{l}_i$ को बहुत छोटा मान सकते हैं। तब प्रत्येक बहुत छोटे विस्थापन $\Delta\mathbf{l}_i$ के संगत कण की स्थिति $\mathbf{r}_i$, अचर होगी। अतः इस विस्थापन के दौरान $\mathbf{F}(\mathbf{r}_i)$ भी अचर होगा। अब हम समीकरण 3·1 से विस्थापन $\Delta\mathbf{l}_i$ के दौरान किया गया कार्य निकाल सकते हैं जो कि $W_i = \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{l}_i$ है।



चित्र 3.4

क्योंकि कार्य एक अदिश राशि है, इसलिए A से B तक जाने में किया गया कार्य प्रत्येक उत्तरोत्तर विस्थापन में किए गए कार्यों का जोड़ होगा, यानि

$$W = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1) \cdot \Delta\mathbf{l}_1 + \mathbf{F}(\mathbf{r}_2) \cdot \Delta\mathbf{l}_2 + \ldots + \mathbf{F}(\mathbf{r}_n) \cdot \Delta\mathbf{l}_n,$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{l}_i, \qquad (3·5)$$

जहां प्रतीक $\sum$ ऊपर दिए जोड़ को प्रकट करता है।

अगर हम वक्र का समंजन (fitting) और अच्छी तरह से करें तो टेढ़े-मेढ़े पथों के और अधिक सार्थक मान प्राप्त होंगे। इसलिए आम तौर पर हम कार्य की परिभाषा इस तरह करते हैं : जैसे-जैसे $\Delta\mathbf{l}_i$ अधिकाधिक छोटा होकर शून्य की ओर प्रवृत्त होता है, वैसे-वैसे समीकरण 3.5 द्वारा दिए गए फलन का मान एक सीमा की ओर प्रवृत्त होता है जिसे कार्य कहते हैं, यानि किया गया कार्य

$$W = \lim_{\Delta\mathbf{l}_i \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}(\mathbf{r}_i) \cdot \Delta\mathbf{l}_i \right] \qquad (3·6)$$

निश्चित समाकलन (definite integration) के अनुसार ऊपर दी गई सीमा निम्न रूप की हो जाती है :

$$W = \int_A^B \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{l}, \qquad (3·7)$$

जहां A और B प्रारंभिक और अंतिम स्थितियाँ हैं। इस समाकल को A से B तक $\mathbf{F}$ का रेखा समाकल (line integral) कहा जाता है। अतः एक निश्चित पथ पर स्थिति चर (position variable) के सापेक्ष बल का समाकल उस पथ पर बल द्वारा किया गया कार्य होता है, जबकि बल केवल स्थिति चर पर निर्भर करता हो।

द्विविम तंत्र में $\quad \mathbf{F} = F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}}$ और $d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}}$

$\therefore \quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = (F_x\hat{\mathbf{i}} + F_y\hat{\mathbf{j}}) \cdot (dx\,\hat{\mathbf{i}} + dy\,\hat{\mathbf{j}}),$

या $\quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = F_x dx + F_y dy. \qquad (3·8)$

आइए अब एक उदाहरण में चर बल द्वारा किए गए कार्य की गणना करें।

उदाहरण 1

इस उदाहरण में हम समीकरण 3·3 द्वारा दिए गए स्थिर-वैद्युत बल $\mathbf{F}$ द्वारा पथ AB के अनुदिश किए गए कार्य W का मान ज्ञात करेंगे। यहां

$$\mathbf{F} = \frac{kq}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} = \frac{kq}{r^2}\,\frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (\because \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r})$$

या $\quad \mathbf{F} = \frac{kq}{r^3}\,(x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}}),$

या $\quad F_x = \frac{kqx}{r^3}, \; F_y = \frac{kqy}{r^3}.$

अतः समीकरण 3.8 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\mathbf{F}.d\mathbf{l} = \frac{kq}{r^3}(x\,dx + y\,dy)$$

$$= \frac{kq}{r^3}\left\{d\left(\frac{x^2}{2}\right) + d\left(\frac{y^2}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{kq}{2r^3}\,d(x^2+y^2)$$

$$= \frac{kq}{2r^3}\,d(r^2) = \frac{kq}{2r^3}\,2r\,dr = \frac{kq}{r^2}\,dr\,.$$

और समीकरण 3.3 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$W = \int_{r_A}^{r_B} \frac{kq}{r^2}dr = kq\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right). \qquad (3.9)$$

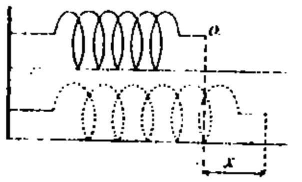
इस इकाई में आपने अभी तक जो कुछ पढ़ा है, उससे संबंधित निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल करने का प्रयास करें।

बोध प्रश्न 2

मान लीजिए कमानी के एक सिरे की साम्य स्थिति (equilibrium position) O है (चित्र 3.5) और इसे लंबाई x से खींचा गया है। कमानी को खींचने पर प्रत्यास्थता (elasticity) के कारण इस पर प्रत्यानयन बल (restoring force) लगने लगता है जो कि साम्यावस्था की स्थिति से विस्थापन x के समानुपाती होता है अर्थात् :

$$\mathbf{F} = -k_0\mathbf{x}\,.$$

जहां k_0 एक अचर है और ऋण चिह्न इसलिए लगता है क्योंकि प्रत्यानयन बल विस्थापन की विपरीत दिशा में होता है। कमानी की स्थिति $x = x_1$ से $x = x_2$ तक खींचने पर कितना कार्य किया जाता है ?



चित्र 3.5

इस तरह आपने बल के रेखा समाकल (line integral) के बारे में जानकारी पाई जबकि वह बल स्थिति चर का एक फलन हो। भाग 3.3 में हम बल के रेखा समाकल का और व्यापक अर्थ जानने की कोशिश करेंगे।

3.3 ऊर्जा

हम कार्य को परिभाषित कर चुके हैं। किसी पिंड की कार्य करने की क्षमता को उसकी ऊर्जा (energy) कहा जाता है और उसे सदा ही उस कार्य से मापा जाता है जिसे वह पिंड कर सकता है। अतः ऊर्जा का मात्रक भी कार्य के मात्रक की तरह जूल है। प्रकृति में ऊर्जा, यांत्रिक, ऊष्मा, वैद्युत, रासायनिक, ध्वनि, प्रकाश, आदि भिन्न-भिन्न रूपों में उपस्थित होती है।

आपने एफ. एस. टी.-1, खंड 4 की इकाई 17 के भाग 17.3 में ऊर्जा के बारे में पढ़ा होगा। इस इकाई में हम मुख्यतः यांत्रिक ऊर्जा (mechanical energy) पर विचार करेंगे। यांत्रिक ऊर्जा दो तरह की हो सकती है — गतिज ऊर्जा (kinetic energy) और स्थितिज ऊर्जा (potential energy) ।

3.3.1 गतिज ऊर्जा और कार्य-ऊर्जा प्रमेय

किसी पिंड की गतिज ऊर्जा उस पिंड की गति के कारण होती है। उदाहरण के लिए एक चलती हुई कार अथवा फेंकी गई गेंद में गतिज ऊर्जा होती है। हम समीकरण 3.7 पर न्यूटन का द्वितीय गति नियम लागू करके गतिज ऊर्जा का मान ज्ञात कर सकते हैं। इसके लिए अगले कुछ चरणों में हम गणितीय क्रियाएं करेंगे। परिणाम जानने के लिए इन्हें करना ज़रूरी है और यह परिणाम भौतिक दृष्टि से बड़ा ही महत्वपूर्ण है।

न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार द्रव्यमान m वाले कण पर, जिसका क्षण t पर वेग $\mathbf{v}$ है, लगने वाला बल होता है

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}),$$

या नियत द्रव्यमान वाले तंत्र के लिए

$$\mathbf{F} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

और, क्योंकि $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}$,

तथा $d\mathbf{l} = \frac{d\mathbf{l}}{dt}dt = \mathbf{v}\,dt,$

$$\therefore \quad \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{l} = m\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}\,.\,\mathbf{v}\;dt. \tag{3·10}$$

अब हमें समीकरण 3·10 को सरल करना है। इसके लिए हम निम्न गणितीय क्रियाएं करेंगे :

$$\mathbf{v}.\mathbf{v} = (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{v}.\mathbf{v}) = \frac{d}{dt}(v_x^2) + \frac{d}{dt}(v_y^2) + \frac{d}{dt}(v_z^2)$$

$$\frac{d}{dt}(v_x^2) = \frac{d}{dv_x}(v_x^2)\,\frac{dv_x}{dt} = 2v_x\,\frac{dv_x}{dt}.$$

इस तरह

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}.\mathbf{v}) = 2v_x\frac{dv_x}{dt} + 2v_y\frac{dv_y}{dt} + 2v_z\frac{dv_z}{dt}$$

$$= 2\,(v_x\hat{\mathbf{i}} + v_y\hat{\mathbf{j}} + v_z\hat{\mathbf{k}})\,.\left(\frac{dv_x}{dt}\hat{\mathbf{i}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{\mathbf{j}} + \frac{dv_z}{dt}\hat{\mathbf{k}}\right)$$ (समीकरण 1·15 क से)

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{v}.\mathbf{v}) = 2\,\mathbf{v}.\,\frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

क्योंकि अदिश गुणनफल क्रम विनिमेय (commutative) होता है, इसलिए

$$\mathbf{v}\,.\,\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\,.\,\mathbf{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}.\mathbf{v}}{2}\right). \tag{3·11}$$

इस तरह, समीकरण 3·10 और 3·11 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\mathbf{F}\,.\,d\mathbf{l} = m\,\frac{d}{dt}\left(\frac{\mathbf{v}.\mathbf{v}}{2}\right)dt = m\,d\left(\frac{\mathbf{v}.\mathbf{v}}{2}\right) = d\left(\frac{m}{2}\,\mathbf{v}.\mathbf{v}\right).$$

$$\therefore \quad \int_A^B \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{l} = \left|\frac{1}{2}m\;\mathbf{v}.\mathbf{v}\right|_A^B, \tag{3·12}$$

जहां A और B कण की स्थिति की वे सीमाएं हैं जिनके अंतर्गत हमें निश्चित समाकल का मान मालूम करना है। क्योंकि $\mathbf{v}\cdot\mathbf{v} = v^2$, इसलिए समीकरण 3·12 से हमें मिलता है

$$\int_A^B \mathbf{F}\,.\,d\mathbf{l} = \frac{1}{2}\,m\,v_B^2 - \frac{1}{2}m v_A^2. \tag{3·13}$$

अब हम समीकरण 3·13 को समझना चाहेंगे। आसानी के लिए यहां हम मान लें कि $v_A = 0$. तब समीकरण 3·13 का दायां पक्ष $\frac{1}{2}m\,v_B^2$ हो जाएगा। समीकरण 3·7 के अनुसार यह राशि, अर्थात् $\frac{1}{2}m\,v_B^2$, विरामावस्था से चलकर वेग $\mathbf{v}_B$ धारण करने में एक कण पर किया गया कार्य है। इस तरह, यह कार्य अपनी गति के कारण कण द्वारा अर्जित ऊर्जा का एक माप होगा। अतः $\frac{1}{2}m\,v^2$, द्रव्यमान m वाले कण की, जो कि वेग $\mathbf{v}$ से चल रहा है, गतिज ऊर्जा का माप होता है। आइए अब हम पीछे चलें और समीकरण 3·10 से पहले हल किए गए चरणों पर फिर से नज़र डालें। ऐसा करने पर आप पाएंगे कि ऊपर जो कुछ भी विश्लेषण किया गया है वह

सभी नियत द्रव्यमान वाले तंत्र से संबंधित है। लेकिन चर द्रव्यमान वाले तंत्रों की गतिज ऊर्जा का माप भी $\frac{1}{2} m v^2$ लिया जाता है। ऐसे तंत्रों के बारे में आप भाग 2·3·3 में पढ़ चुके हैं। इसलिए समीकरण 3·13 का दायां पक्ष स्थिति A और स्थिति B के बीच कण की गतिज ऊर्जा में हुए परिवर्तन को प्रकट करता है। इसे हम निम्न रूप में व्यक्त करते हैं :

$$\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{l} = T_B - T_A . \qquad (3\cdot 13 \text{ क})$$

इस तरह, अब हम बल के रेखा समाकल की व्यापक परिभाषा दे सकते हैं :

दो स्थितियों के बीच बल का रेखा समाकल अपनी प्रारंभिक स्थिति से अंतिम स्थिति तक आने के दौरान कण की गतिज ऊर्जा में हुए परिवर्तन के बराबर होता है। यदि **F** स्थिति चर का फलन हो तो बल का रेखा समाकल इन दो बिन्दुओं के बीच बल द्वारा किए गए कार्य के बराबर होता है। अब हम **कार्य-ऊर्जा प्रमेय** (work-energy theorem) का कथन दे सकते हैं:

एक कण पर लग रहे परिणामी बल (resultant force) द्वारा उस कण पर किया गया कार्य सदा ही कण की गतिज-ऊर्जा में हो रहे परिवर्तन के बराबर होता है।

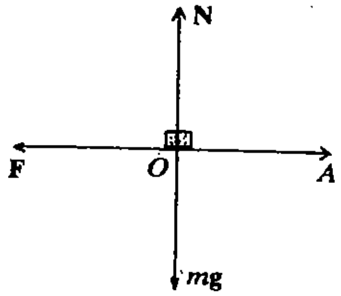
आइए अब हम इस कथन को और अच्छी तरह से समझने के लिए एक छोटा सा उदाहरण लें।

उदाहरण 2

एक पिंड जिसका द्रव्यमान 1 kg है और जिसका प्रारंभिक वेग 10 m s^{-1} है, एक क्षैतिज सतह पर फिसल रहा है। यदि पिंड और सतह के बीच गतिज घर्षण गुणांक (coefficient of kinetic friction) 0·5 हो तो

(क) घर्षण बल द्वारा किया गया कार्य मालूम कीजिए जबकि क्षैतिज सतह पर पिंड 5 m की दूरी तय कर चुका हो,

(ख) पिंड की प्रारंभिक और अंतिम गतिज ऊर्जाएं ज्ञात कीजिए।



चित्र 3.6

(क) चित्र 3·6 को देखिए। मान लीजिए कि पिंड का द्रव्यमान m है। जैसा कि आप भाग 2·2·2 में देख चुके हैं, अभिलंब प्रतिक्रिया बल का परिमाण $N = mg$ है और घर्षण बल $= \mu_k N = \mu_k mg$ है। अब मान लीजिए कि पिंड का OA दिशा में विस्थापन **d** है। यहाँ हम मान लेते हैं कि इस विस्थापन के दौरान घर्षण बल अचर बना रहता है।

अतः समीकरण 3·7 निम्न रूप का हो जाएगा :

$$W = \mathbf{F} . \mathbf{d}.$$

यहां, क्योंकि गतिज घर्षण बल **F**, **d** की विपरीत दिशा में लग रहा है

$$\therefore \quad W = -F\,d = -\mu_k mgd,$$

या

$$W = -(0\cdot5)\,(1\text{ kg})\;(9\cdot8\text{ m s}^{-2})\,(5\text{ m})$$
$$= -24\cdot5\text{ J}$$

(ख) प्रारंभिक गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} mv^2 = \left(\frac{1}{2}\right)(1\text{ kg})\,(10\text{ m s}^{-1})^2 = 50\text{ J}$ और कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसारः

किया गया कार्य = अंतिम गतिज ऊर्जा – प्रारंभिक गतिज ऊर्जा

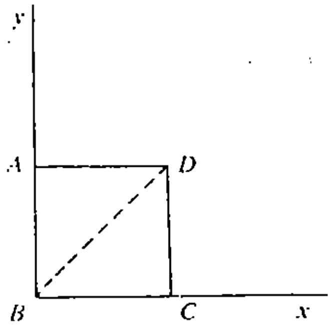
∴ अंतिम गतिज ऊर्जा = प्रारंभिक गतिज ऊर्जा $+ W = 50\text{ J} + (-24\cdot5\text{ J}) = 25\cdot5\text{ J}.$

बोध प्रश्न 3

एक ट्रक और एक कार, जिनकी गतिज ऊर्जाएं बराबर हैं, एक सीधी सड़क पर जा रहे हैं। यदि इन पर एक साथ समान ब्रेक बल लगाया जाए तो बताइए कि रुकने के पहले कौन अधिक दूरी तक चला जाएगा ?

यहां हमें यह समझ लेना चाहिए कि कार्य-ऊर्जा प्रमेय कोई नया नियम नहीं है। यह न्यूटन के द्वितीय गति-नियम से प्राप्त कार्य और गतिज ऊर्जा का एक संबंध मात्र है। यो तो हमने उदाहरण 2 और बोध प्रश्न 3 में कार्य-ऊर्जा प्रमेय लागू किया है, पर उन प्रश्नों में हमने समीकरण 3·13 के बायें पक्ष का मान ज्ञात करने के लिए कोई समाकलन नहीं किया है। आम तौर पर हमें इस रेखा-समाकल को हल करना पड़ेगा जिसके लिए हमें कण का पथ मालूम होना चाहिए। यदि पथ काफ़ी टेढ़ा-मेढ़ा हो तो W का मान सरलता से मालूम नहीं किया जा सकता। फिर भी, एक ऐसा विशेष प्रकार का बल होता है जिसके लिए कण के पथ को जाने बिना ही W का मान मालूम किया जा सकता है। इसके लिए केवल कण की प्रारंभिक और अंतिम स्थितियों की जानकारी ज़रूरी है। आइए अब हम इस विशेष प्रकार के बल, जिसे संरक्षी बल (conservative force) कहते हैं, पर चर्चा करें। इस चर्चा के दौरान ही हम स्थितिज ऊर्जा के बारे में भी जान जाएंगे।

3.3.2 संरक्षी बल और स्थितिज ऊर्जा



चित्र 3·7

चित्र 3·7 देखिए। मान लीजिए कि A, B, C, D चार बिन्दु हैं जो एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर बने भुजा L वाले वर्ग के शीर्ष हैं। द्रव्यमान m वाले कण को A से B तक निम्नलिखित दो पथों से ले जाया जाना है :

(क) सरल रेखा AB के अनुसार चल कर,

(ख) पथ $ADCB$ के अनुसार चल कर।

अब हम इन दो स्थितियों में गुरुत्व बल (force of gravity) द्वारा किया गया कार्य मालूम करेंगे। इसके लिए हम BC और BA को क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष मान कर एक द्विविम कार्तीय निर्देशांक पद्धति लेंगे। क्योंकि यहां हम समीकरण 3·7 का प्रयोग करेंगे, इसलिए हम $\mathbf{F}$ को निम्नलिखित रूप में लिख लेते हैं :

$$\mathbf{F} = -mg\hat{\mathbf{j}} . \tag{3·14}$$

स्थिति (क) में किया गया कार्य निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त होता है :

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{l} = \int_A^B (-mg\,\hat{\mathbf{j}}) . (-dy\,\hat{\mathbf{j}}), \text{ जहां } d\mathbf{l} = -dy\hat{\mathbf{j}} ,$$

या $$W_{AB} = \int_A^B mg\, dy$$

$$= mg\,(y_B - y_A) = -mgL . \tag{3·15 क}$$

स्थिति (ख) में किया गया कार्य निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त होता है :

$$W_{ADCB} = W_{AD} + W_{DC} + W_{CB} = \int_A^D \mathbf{F}.d\mathbf{l} + \int_D^C \mathbf{F}.d\mathbf{l} + \int_C^B \mathbf{F}.d\mathbf{l}$$

$$= \int_A^D (-mg\,\hat{\mathbf{j}}) . (dx\,\hat{\mathbf{i}}) + \int_D^C (-mg\,\hat{\mathbf{j}}) . (-dy\,\hat{\mathbf{j}}) + \int_C^B (-mg\hat{\mathbf{j}}) . (-dx\,\hat{\mathbf{i}})$$

जहां हमने क्रमशः $AD,\ DC,\ CB$ पथों के अनुसार $d\mathbf{l}$ के मान रख दिए हैं। चूंकि $\hat{\mathbf{j}} . \hat{\mathbf{i}} = 0$,

$$\therefore \quad W_{ADCB} = 0 + \int_D^C mgdy + 0$$

$$= mg\,(y_C - y_D) = -mgL. \tag{3·15 ख}$$

अतः $W_{AB} = W_{ADCB}$, या दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि कण को A से B तक दो अलग-अलग पथों से ले जाने पर भी किया गया कार्य समान रहता है। अर्थात् कण किस पथ से जाता है, इस बात का बल द्वारा किए गए कार्य पर कोई प्रभाव नहीं होता। इस प्रकार के बल को **संरक्षी बल** कहा जाता है। इसकी परिभाषा इस प्रकार की जाती है:

संरक्षी बल वह बल है जिसके लिए किया गया कार्य उस पथ पर निर्भर नहीं करता जिस पर से कण गुज़रता है। यह कार्य केवल कण की प्रारंभिक और अंतिम स्थितियों पर ही निर्भर करता है।

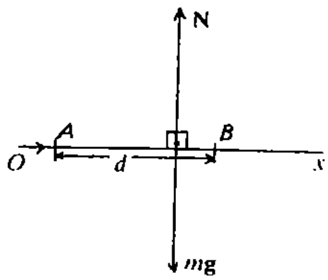
गुरुत्व बल की तरह स्थिर वैद्युत बल भी संरक्षी होता है। अब आप निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 4

(क) चित्र 3.7 के लिए यह जांच कीजिए कि $W_{AB} = W_{ADB}$.

(ख) सिद्ध कीजिए कि संरक्षी बल द्वारा एक बंद पथ (closed path) पर किया गया कार्य शून्य होता है।

कुछ ऐसे भी बल होते हैं जिनके द्वारा किया गया कार्य कण के पथ पर निर्भर करता है। इन बलों को **असंरक्षी बल** (non-conservative force) कहा जाता है। क्योंकि ये बल कण के पथ पर निर्भर करते हैं, इसलिए एक बंद पथ पर असंरक्षी बलों द्वारा किया गया कार्य शून्य नहीं होता।



चित्र 3.8 : जब गति A से B की ओर होती है तो घर्षण बल BA की दिशा में यानि $\hat{\mathbf{i}}$ की विपरीत दिशा में होता है। जब गति B से A की ओर होती है तो घर्षण बल $\hat{\mathbf{i}}$ की दिशा में होता है।

उदाहरण के लिए घर्षण एक असंरक्षी बल है।

चित्र 3.8 देखिए। आइए अब हम एक कण की गति पर विचार करें जो एक नियत क्षैतिज दूरी A से B तक जाता है और फिर लौट आता है। यह एक बंद पथ है। अब प्रश्न उठता है कि इस पथ पर लग रहे घर्षण बल द्वारा कितना कार्य किया जाता है। घर्षण बल का परिमाण $\mu_k N = \mu_k mg$ होता है और यह कण की गति की विपरीत दिशा में कार्य करता है। यदि हम गति की दिशा को x-अक्ष मान लें तो

$$W_{AB} = \int_A^B \mathbf{F}.d\,\mathbf{l} = \int_A^B (-\mu_k mg\hat{\mathbf{i}}).(dx\hat{\mathbf{i}}) = -\mu_k mgd;$$

और
$$W_{BA} = \int_B^A (\mu_k mg\hat{\mathbf{i}}).(-dx\,\hat{\mathbf{i}}) = -\mu_k mgd.$$

इसलिए बंद पथ ABA पर किया गया कुल कार्य $= -2\,\mu_k mgd$ जो कि शून्य नहीं है। अतः घर्षण बल असंरक्षी बल है।

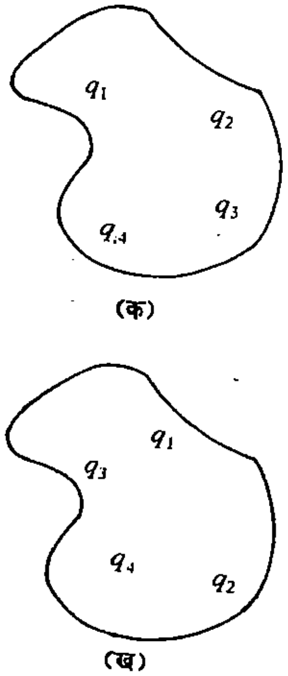
आइए अब हम संरक्षी बल पर की गई अपनी चर्चा को और आगे बढ़ाएं। इस भाग का अध्ययन करने के पहले हम तीन संरक्षी बलों के बारे में जान चुके हैं। ये तीन संरक्षी बल हैं : गुरुत्व बल, दो आवेशों के बीच स्थिर वैद्युत बल (उदाहरण 1) और कमानी-द्रव्यमान तंत्र का बल (बोध प्रश्न 2)। पहली स्थिति में द्रव्यमान m वाले कण को A से B तक ले जाने में किया गया कार्य समीकरण 3·15 क से निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है।

$$W = -(U_B - U_A), \text{ जहां } U = mgy, \qquad (3{\cdot}16 \text{ क})$$

और, उदाहरण 1 तथा बोध प्रश्न 2 के परिणामों को हम इस तरह लिख सकते हैं :

$$W = -(U_B - U_A), \text{ जहां } U = \frac{kq}{r}. \qquad (3{\cdot}16 \text{ ख})$$

और
$$W = -(U_2 - U_1), \text{ जहां } U = \frac{1}{2}k_0 x^2. \qquad (3{\cdot}16 \text{ ग})$$



चित्र 3.9

अब हम यह देख सकते हैं कि समीकरण 3·16 क, 3·16 ख और 3·16 ग की कौन-कौन सी बातें तीनों में मिलती हैं। प्रत्येक समीकरण में हमने राशि U का प्रयोग किया है जिसके परिवर्तन का ऋणात्मक मान किए गए कार्य के बराबर होता है। पहली स्थिति में U कण की स्थिति y पर निर्भर करता है और दूसरी स्थिति में यह एकक धन आवेश की स्थिति r पर निर्भर करता है। तीसरी स्थिति में U, x पर निर्भर करता है। x एक चर है जिससे, न खींची गई अपनी सामान्य स्थिति से कमानी के खुले सिरे का विस्थापन प्राप्त होता है। इस तरह, x के मान से यह पता चल जाता है कि कमानी को किस सीमा तक खींचा जा सकता है। इसलिए यह न कह कर कि x कमानी के खुले सिरे का अपनी सामान्य स्थिति से विस्थापन है, हम यह कहते हैं कि x तंत्र के विन्यास (configuration) की माप है। x का मान बदलने के साथ-साथ कमानी का विन्यास भी बदलता है। इसी प्रकार, एक निकाय में स्थित आवेशों (देखें चित्र 3.9 क) की सापेक्ष स्थितियों के बदलने से तंत्र का विन्यास भी बदल जाता है (चित्र 3.9 ख)। इस तरह, किसी तंत्र को A से B तक ले जाने में बल $\mathbf{F}$ द्वारा किए गए कार्य को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$W = \int_A^B \mathbf{F}\,.\,d\,\mathbf{l} = -(U_B - U_A), \qquad (3{\cdot}16 \text{ घ})$$

जहां U एक राशि है जो तंत्र के विन्यास पर निर्भर करती है। इस राशि U को तंत्र की **स्थितिज ऊर्जा** (potential energy) कहा जाता है।

यह किसी पिंड या तंत्र की वह ऊर्जा है जो उसके विन्यास के कारण उसमें निहित होती है। स्थितिज ऊर्जा को मापने के लिए उस संरक्षी बल को जानना ज़रूरी है जिसके कारण यह स्थितिज ऊर्जा पिंड या तंत्र में निहित होती है। अब हम स्थितिज ऊर्जा को मापने की विधि पर विचार करेंगे। हम जानते हैं कि समीकरण 3.16 घ में अगर हम $U_A = 0$ लें, तो

$$U_B = -\int_A^B \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{l} = \int_B^A \mathbf{F} \cdot d\,\mathbf{l}. \qquad (3\cdot16\text{ ङ})$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि एक निश्चित विन्यास में किसी तंत्र की स्थितिज ऊर्जा की माप उस तंत्र को उस विन्यास से किसी मानक विन्यास तक ले जाने में, संबंधित बल द्वारा किए गए कार्य से की जाती है। समीकरण 3·16 ङ से मानक विन्यास A के सापेक्ष विन्यास B पर तंत्र की स्थितिज ऊर्जा मिल जाती है। यहां हमने $U_A = 0$ रखकर A को मानक स्थिति माना है। आइए अब हम समीकरण 3·15 क को फिर से देख लें। उसके अनुसार $W_{AB} = -mgL$ अर्थात् कण को B से A तक ले जाने में किया गया कार्य mgL है, इसलिए A को मानक स्थिति मानने पर, B पर कण की स्थितिज ऊर्जा mgL है। स्थितिज ऊर्जा की संकल्पना को और अच्छी तरह से समझने के लिए आप निम्नलिखित प्रश्न को हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 5

एक विशेष प्रकार की कमानी पर बल-नियम $\mathbf{F} = -Cx^3\,\hat{\mathbf{i}}$ लागू होता है जहां C एक अचर है। $x = 0$ पर मानक $U = 0$ के सापेक्ष x पर स्थितिज ऊर्जा क्या होगी ?

इस तरह हम यह पाते हैं कि स्थितिज ऊर्जा का मान कभी भी निरपेक्ष नहीं होता। यह सदा ही एक मानक मान के सापेक्ष होता है। आप यह भी पढ़ चुके हैं कि स्थितिज ऊर्जा मालूम करने के लिए संगत बल की जानकारी भी ज़रूरी है। आइए अब हम कोशिश करके देखें कि अगर स्थितिज ऊर्जा मालूम हो तो हम संबंधित बल मालूम कर सकते हैं या नहीं।

समीकरण 3·16 घ के अनुसार स्थितिज ऊर्जा के मान में हुआ अत्यणु परिवर्तन (infinitesimal change) dU होता है :

$$dU = -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}. \qquad (3\cdot17)$$

इसलिए कमानी जैसे एक सरल तंत्र में, जिसमें एकविम बल लग रहा हो, हम लिख सकते हैं $dU = -F dx$. इस तरह

$$F = -\frac{dU}{dx}. \qquad (3\cdot18)$$

समीकरण 3·18 से यह साफ़ है कि **संरक्षी बल स्थिति चर के सापेक्ष स्थितिज ऊर्जा की परिवर्तन-दर का ऋणात्मक होता है**। आइए अब हम समीकरण 3·18 का एक अनुप्रयोग लें। समीकरण 3·18 से स्थितिज ऊर्जा और साम्यावस्था के संबंध का पता चलता है। हम जानते हैं कि यदि किसी पिंड पर कार्य कर रहा नेट बल शून्य हो, तो पिंड साम्यावस्था में होता है। संरक्षी बल के संबंध में इस साम्यावस्था का अर्थ है कि

$$\frac{dU}{dx} = 0. \qquad (3\cdot19)$$

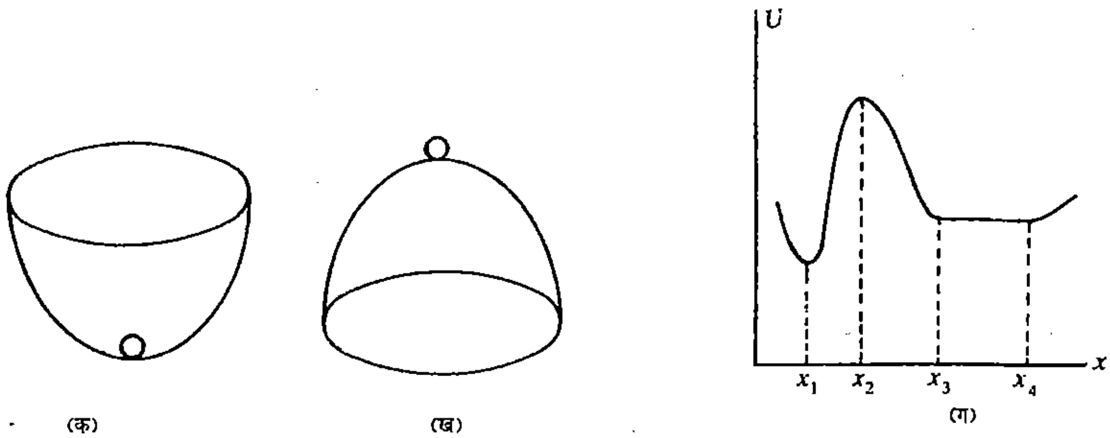
समीकरण 3·19 निम्न तीन स्थितियों में लागू हो सकता है : जब

(i) U निम्नतम हो,

(ii) U अधिकतम हो,

(iii) U, x से स्वतंत्र एक अचर हो।

अब आप यह तो जानते ही हैं कि जब किसी गेंद को छोड़ा जाता है तब वह नीचे गिरती है। ऐसा पृथ्वी के गुरुत्व के कारण होता है। गेंद को गिरते हुए तो आपने देखा होगा — पर क्या आपको इस बात की जानकारी है कि गिरने के दौरान गेंद की स्थितिज ऊर्जा कम होती जाती है ? इसी तरह यदि आप एक कमानी को खींच कर छोड़ दें तो कमानी अपनी समान्य लंबाई पर तुरन्त आ जाती है। ऐसा करने पर उसकी स्थितिज ऊर्जा भी कम हो जाती है। वास्तव में प्रकृति में सभी प्रक्रियाएं किसी तंत्र को उस विन्यास की ओर ले जाती हैं जिस विन्यास में उसकी स्थितिज ऊर्जा निम्नतम होती है।



चित्र 3·10

आइए अब हम ऊपर दी गई पहली स्थिति (i) को समझें जिसमें U निम्नतम है। अगर इस तरह की साम्यावस्था वाले तंत्र की स्थिति में परिवर्तन करके छोड़ दिया जाए तो तंत्र अपनी मूल साम्यावस्था में पुनः लौट आता है। इसीलिए इस साम्यावस्था को **स्थायी साम्यावस्था** (stable equilibrium) कहा जाता है। कटोरे के तल पर रखा एक गेंद (चित्र 3·10 क) स्थायी साम्यावस्था का एक उदाहरण है। यदि ऊपर दी गई दूसरी तरह की साम्यावस्था, (ii) जिसमें U अधिकतम हो, वाले तंत्र की स्थिति में परिवर्तन किया जाता है तो वह तंत्र पुनः अपनी मूल साम्यावस्था में नहीं लौटता। इसका कारण यह है कि कोई भी प्रक्रिया तंत्र को उस विन्यास की ओर नहीं ले जा सकती जिस विन्यास में उसकी स्थितिज ऊर्जा बढ़ती हो। इसलिये इसे **अस्थायी साम्यावस्था** (unstable equilibrium) कहा जाता है। उलटे कटोरे के ऊपर रखा एक गेंद (चित्र 3·10 ख) अस्थायी साम्यावस्था का एक उदाहरण है। यदि गेंद की स्थिति में परिवर्तन करके उसे छोड़ दिया जाए तो वह अपनी मूल साम्यावस्था में पुनः लौटकर नहीं आती।

ऊपर दी गई तीसरी स्थिति, (iii) जिसमें U अचर है, उस अवस्था के संगत है जिसमें कोई तंत्र अपनी मूल साम्यावस्था में परिवर्तन होने पर अपनी नई स्थिति में भी साम्यावस्था में ही बना रहेगा। इसे हम **उदासीन साम्यावस्था** (neutral equilibrium) कहते हैं। आपकी मेज़ पर रखी कोई किताब उदासीन साम्यावस्था का एक उदाहरण है। यदि आप धीरे से सरका कर उसकी स्थिति में परिवर्तन कर दें तो वह अपनी नई स्थिति पर साम्यावस्था में बनी रहेगी और अपनी मूल स्थिति पर पुनः लौटने का प्रयास नहीं करेगी। यदि हम किसी एक तंत्र के स्थिति चर x के साथ स्थितिज ऊर्जा के परिवर्तन को दिखायें जैसा कि चित्र 3·10 ग में दिखाया गया है तो तंत्र $x = x_1$ और $x = x_2$ पर क्रमशः स्थायी साम्यावस्था और अस्थायी साम्यावस्था में है। x_3 और x_4 स्थितियों के बीच तंत्र उदासीन साम्यावस्था में है।

बोध प्रश्न 6

निम्नलिखित साम्यावस्थाएं किस प्रकार की हैं ?

(क) अपनी माध्य स्थिति पर एक सरल लोलक का बॉब।

(ख) मदारी द्वारा अपनी अंगुली पर ऊर्ध्वाधरतः संतुलित छड़ी।

इस तरह हम यह पाते हैं कि यदि "संरक्षी तंत्र" की स्थितिज ऊर्जा स्थिति चर के फलन के रूप में मालूम हो तो इससे संगत बल मालूम किया जा सकता है। हम यह भी जान चुके हैं कि स्थितिज ऊर्जा की मदद से कैसे जाना जा सकता है कि पिंड की साम्यावस्था किस तरह की है।

अब हम समीकरण 3·16 ग और कार्य-ऊर्जा प्रमेय को एक साथ लेकर ऊर्जा संरक्षण का महत्वपूर्ण नियम (principle of conservation of energy) प्राप्त करेंगे।

3.3.3 ऊर्जा-संरक्षण नियम

समीकरण 3.13 क और 3.16 ग से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$W = -(U_B - U_A) = T_B - T_A ,$$

या

$$T_A + U_A = T_B + U_B. \qquad (3\cdot20)$$

क्योंकि A और B स्वेच्छ बिन्दु (arbitrary points) हैं, इसलिए इससे हम इस नतीजे पर पहुंचते हैं कि जिस तंत्र पर संरक्षी बल कार्य कर रहे हों उसकी गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का जोड़ सदा ही एक अचर

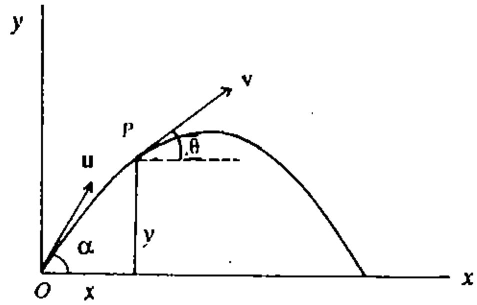
होता है। हम इस अचर को तंत्र की **संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा** (total mechanical energy) E के रूप में व्यक्त करते हैं, अर्थात्

$$T + U = E = \text{एक अचर} \qquad (3\cdot21)$$

आइए एक उदाहरण द्वारा समीकरण 3·21 को अच्छी तरह से समझें।

उदाहरण 3

हम इकाई 2 में प्रक्षेप्य-गति के बारे में चर्चा कर चुके हैं। सिद्ध कीजिए कि कोई वायु-प्रतिरोध न होने पर प्रक्षेप्य की गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का कुल जोड़ अचर बना रहता है।



चित्र 3·11: प्रक्षेप्य गति

इसके लिए चित्र 3·11 देखिए। क्योंकि प्रक्षेप वेग (velocity of projection) **u** है, इसलिए O पर प्रक्षेप्य की गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2}mu^2$ होगी। स्थितिज ऊर्जा मालूम करने के लिए हम O से होकर जाने वाले क्षैतिज स्तर को निर्देश स्तर मान लें। तब O पर स्थितिज ऊर्जा शून्य होगी। इसलिए O पर

$$\text{गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}mu^2. \qquad (3\cdot22)$$

मान लीजिए बिन्दु $P\ (x, y)$ पर वेग **v** क्षैतिज दिशा के साथ कोण θ बनाता है। अब क्षैतिज दिशा में कोई त्वरण नहीं होता। इसलिए वेग का क्षैतिज घटक अपरिवर्तित रहता है। वेग का ऊर्ध्वाधर घटक नीचे की ओर त्वरण **g** के कारण बदलता है। अतः

$$v \cos\theta = u \cos\alpha, \qquad (3\cdot23\text{ क})$$

$$v^2 \sin^2\theta = u^2 \sin^2\alpha - 2gy. \qquad (3\cdot23\text{ ख})$$

समीकरण 3·23 क से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$v^2 \cos^2\theta = u^2 \cos^2\alpha. \qquad (3\cdot23\text{ ग})$$

समीकरण 3·23 ख और 3·23 ग को जोड़ने पर प्राप्त होता है:

$$v^2 = u^2 - 2gy. \qquad (3\cdot23\text{ घ})$$

अब, P पर गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mu^2 - mgy,$ (3·24 क)

और P पर स्थितिज ऊर्जा $= mgy.$ (3·24 ख)

इसलिए P पर,

$$\text{गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}mu^2. \qquad (3\cdot25)$$

इस तरह समीकरण 3·22 और 3·25 से हम यह पाते हैं कि गतिज ऊर्जा और स्थितिज ऊर्जा का कुल जोड़ अचर रहता है।

आपने ध्यान दिया होगा कि समीकरण 3·23 घ, गुरुत्वीय त्वरण के अधीन हुई रैखिक गति के समीकरण जैसी है। लेकिन दोनों स्थितियों में एक फ़र्क है। रैखिक गति में **v** और **u** एक ही दिशा में होते हैं जबकि प्रक्षेप्य गति में ऐसा नहीं है। इसलिए आप यह न महसूस करें कि समीकरण 3·23 घ को सिद्ध करना व्यर्थ है।

आइए अब हम उदाहरण 2 पर फिर से विचार करें। वहां हमने यह देखा था कि अंतिम गतिज ऊर्जा, प्रारंभिक गतिज ऊर्जा से कम थी। पर प्रारंभिक स्थितिज ऊर्जा और अंतिम स्थितिज ऊर्जा समान थीं क्योंकि पिंड एक

क्षैतिज सतह पर चल रहा था। इसलिए क्या हम यह कह सकते हैं कि वहां समीकरण 3·21 लागू नहीं होता ? आइए अब हम यह पता लगाने की कोशिश करें कि जिस गतिज ऊर्जा का क्षय हुआ है, वह कहां चली गई।

आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि वहां घर्षण के रूप में एक असंरक्षी बल था और उस बल द्वारा किया गया कार्य −24·5 जूल था। ऋण चिह्न से यह पता चलता है कि घर्षण बल के विरुद्ध किया गया कार्य 24·5 जूल है जो कि गतिज ऊर्जा में हुए क्षय के ठीक बराबर है। अब प्रश्न उठता है कि क्या घर्षण-बल के विरुद्ध किए गए कार्य का क्षय होता है ? इस प्रश्न का उत्तर है कि किए गए कार्य का क्षय नहीं होता। यह कार्य ऊष्मा में रूपांतरित हो जाता है। इस ऊर्जा से पिंड और उसकी सतह गर्म हो जाते हैं, और यह हमारे लिए उपयोगी नहीं होती। लेकिन वास्तव में ऊर्जा का क्षय नहीं होता। उदाहरण 2 से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

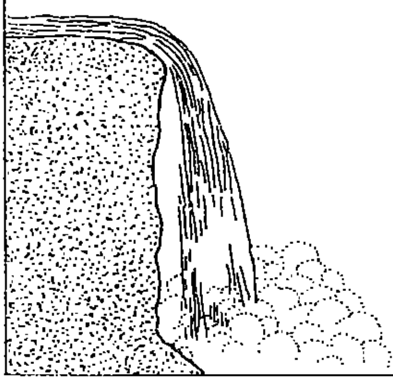
गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा + (घर्षण के विरुद्ध किया गया कार्य) = एक अचर

या (संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा) + (रूपांतरित ऊर्जा) = एक अचर

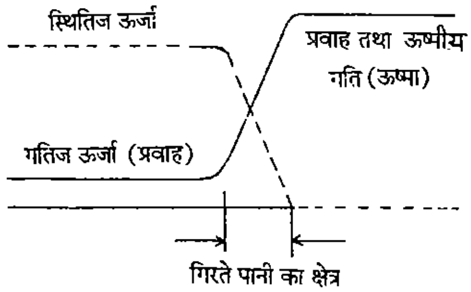
इस तरह अब हम **ऊर्जा-संरक्षण नियम** (principle of conservation of energy) का कथन दे सकते हैं :

"ऊर्जा न तो पैदा की जा सकती है और न ही नष्ट की जा सकती है, पर ऊर्जा को एक रूप से दूसरे रूप में बदला जा सकता है। ब्रह्मांड की कुल ऊर्जा अचर बनी रहती है।"

आइए अब हम इस नियम से संबंधित एक उदाहरण लें।



(क)



(ख)

चित्र 3.12

चित्र 3·12 क देखें। जल प्रपात के ऊपरी सिरे पर पानी में केवल गुरुत्वाकर्षी स्थितिज ऊर्जा होती है जो गिरते समय गतिज ऊर्जा में रूपांतरित हो जाती है। इस तरह हम यह पाते हैं कि जहां एक तरफ़ स्थितिज ऊर्जा में कमी आती जाती है वहां दूसरी तरफ़ गतिज ऊर्जा में उतनी ही वृद्धि होती जाती है और गतिज ऊर्जा तथा स्थितिज ऊर्जा का जोड़ अचर बना रहता है। यहां हम यह मान लेते हैं कि जल प्रपात में पानी के कणों पर घर्षण का कोई प्रभाव नहीं पड़ रहा है। पानी जहां गिरता है वहां उसकी स्थितिज ऊर्जा शून्य हो जाती है और वहां उसमें केवल गतिज ऊर्जा ही होती है। पर अब यह प्रश्न उठता है कि इस गतिज ऊर्जा का आगे जाकर क्या होता है ? यहां जो गतिज ऊर्जा होती है उसका कुछ भाग तो आगे बहते पानी के साथ बना रहता है। बाकी ऊर्जा का प्रयोग टरबाइन का मोटर चला कर पनबिजली पैदा करने में किया जा सकता है। यह सब करने के बावजूद कुछ ऊर्जा दूसरे रूपों जैसे ऊष्मा आदि में बदलती ही है। इस उदाहरण में ऊर्जा के अलग-अलग रूपों में परिवर्तन को चित्र 3·12 ख के ग्राफ़ में दिखाया गया है।

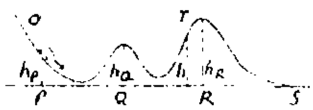
इस तरह हम यह पाते हैं कि जब भी कोई ऊर्जा एक रूप से दूसरे रूप में बदलती है तो उस पर ऊर्जा-संरक्षण नियम लागू होता है। उदाहरण के लिए लेड एसिड सेल में रासायनिक ऊर्जा (chemical energy), वैद्युत ऊर्जा (electrical energy) में रूपांतरित होती है जबकि सोलर सेल में प्रकाश ऊर्जा (light energy), वैद्युत ऊर्जा में रूपांतरित होती है।

प्रकृति में हमें प्रायः असंरक्षी बल देखने को मिलते हैं। मिसाल के तौर पर, जब कोई पिंड मुक्त रूप से गिर रहा होता है तो उस पर कुछ वायु-प्रतिरोध होता है। जब कोई पिंड एक नत समतल पर फिसल रहा होता है तो उस

पर घर्षण बल लग रहा होता है। पर यदि, वायु-प्रतिरोध, घर्षण जैसे बल नगण्य हों तो समीकरण 3.21 के रूप में ऊर्जा-संरक्षण नियम का प्रयोग किया जा सकता है। अब हम ऐसे ही एक अनुप्रयोग की चर्चा करेंगे।

3.3.4 ऊर्जा-आरेख

चित्र 3.13 में एक कार का पथ दिखाया गया है जिस पर घर्षण नगण्य है। यदि उस कार को बिन्दु R तक पहुंचना हो तो उसे बिन्दु P पर किस चाल से जाना चाहिए। यदि कार उससे कम चाल से जा रही हो तो उस स्थिति में क्या होता है?



चित्र 3.13

क्योंकि यहां घर्षण नगण्य है, इसलिए समीकरण 3.21 के रूप में ऊर्जा-संरक्षण नियम लागू करके हम अपने प्रश्नों के उत्तर पा सकते है। स्थितिज ऊर्जा मालूम करने के लिए पथ के निम्नतम बिन्दु को हम संदर्भ बिन्दु मान सकते हैं। P पर ऊर्जा का मान $(\frac{1}{2}mv_P^2 + mgh_P)$ है और यह हर बिन्दु पर कुल यांत्रिक ऊर्जा का मान भी है क्योंकि इस तंत्र के लिये यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित होगी। S तक पहुंचने के लिए कार को उच्चतम बिन्दु R को अवश्य पार करना होगा जहां स्थितिज ऊर्जा mgh_R है। यदि कार ऐसा कर लेती है तो उच्चतम बिन्दु पर कार की गतिज ऊर्जा लगभग शून्य होगी। अब ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार

$$mgh_R = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgh_P.$$

या

$$\frac{1}{2}mv_P^2 = mg(h_R - h_P). \qquad (3.26)$$

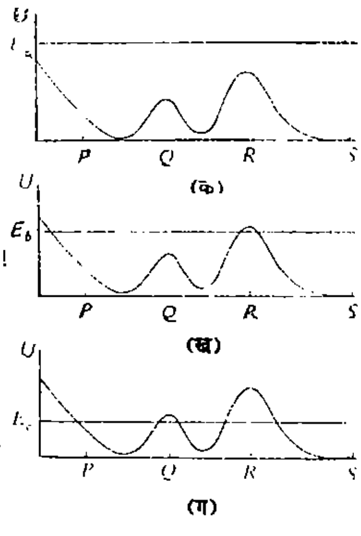
दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि प्रारंभिक गतिज ऊर्जा का निम्नतम मान, उच्चतम बिन्दु और प्रारंभिक बिन्दु पर की स्थितिज ऊर्जाओं के अंतर के बराबर अवश्य होगा। R तक पहुंचने के लिए P पर निम्नतम चाल v_P मालूम करने के लिए समीकरण 3.26 को हल किया जा सकता है। अब प्रश्न उठता है कि यदि कार इससे भी कम चाल से चल रही हो तो क्या होगा? ऐसी स्थिति में वह दूसरे शिखर बिन्दु पर नहीं पहुंच पाएगी बल्कि उस बिन्दु T से ही उल्टी दिशा में लौट आएगी जहां उसकी गतिज ऊर्जा शून्य हो जाती है। यदि यह क्रिया ऊँचाई h पर होती हो, तो

$$mgh = \frac{1}{2}mv_P^2 + mgh_P. \qquad (3.27)$$

यह कार पीछे की ओर चल कर शिखर Q को पार करेगी, नीचे उतरेगी और फिर बिन्दु P को पार करके एक ऐसे बिंदु O पर पहुंचेगी जहां इसकी गतिज ऊर्जा फिर शून्य हो जाए।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 7
चित्र 3.13 में संदर्भ स्तर से बिन्दु O की ऊँचाई कितनी है?



चित्र 3.14

संपूर्ण ऊर्जा के मान द्वारा निर्धारित बिन्दुओं O और T को **वर्तन बिन्दु** (turning points) कहा जाता है। इससे भी कम चाल होने पर कार शिखर Q को पार नहीं कर पाएगी और इस तरह वह केवल पहली घाटी में ही उतरती चढ़ती रहेगी। चित्र 3.14 में एक कार का वास्तविक पथ दिखाया गया है। पर, क्योंकि पृथ्वी की सतह के निकट गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा ऊँचाई के अनुक्रमानुपाती (directly proportional) होती है इसलिए इस रेखाचित्र को स्थितिज ऊर्जा और स्थिति के लिए खींचा गया आलेख अर्थात् **स्थितिज ऊर्जा वक्र** मान सकते हैं। स्थितिज ऊर्जा वक्र के रूप में इस लेखाचित्र पर कार की संपूर्ण ऊर्जा को आलेखित करके हम कार की गति के बारे में जानकारी पा सकते हैं। क्योंकि संपूर्ण ऊर्जा E अचर है इसलिए संपूर्ण ऊर्जा वक्र एक सीधी क्षैतिज रेखा होता है। चित्र 3.14 में संपूर्ण ऊर्जा के विभिन्न मानों के लिए स्थितिज ऊर्जा वक्र और संपूर्ण ऊर्जा वक्र दिखाए गए हैं। इन आलेखों को देखते ही हमें कार की गति के बारे में जानकारी मिल जाती है। चित्र 3.14 क में, संपूर्ण ऊर्जा, शिखर R पर की स्थितिज ऊर्जा से अधिक है। इसलिए कार R तक पहुंच जाएगी, और फिर शेष बची गतिज ऊर्जा के कारण S तक चली जाएगी। चित्र 3.14 ख में संपूर्ण ऊर्जा, शिखर R पर की स्थितिज ऊर्जा से कम है। इसलिए जब भी कार की संपूर्ण ऊर्जा पूरी की पूरी स्थितिज ऊर्जा के बराबर होगी तभी कार रुक जाएगी। ऐसा तब होता है जब संपूर्ण ऊर्जा वक्र, स्थितिज ऊर्जा वक्र को काटता है। इन वक्रों के प्रतिच्छेद-बिन्दु वर्तन बिन्दु हैं जिनसे कार की गति बंधी है यानि इन बिंदुओं से कार वापस लौट पड़ती है। चित्र 3.14 ग में अभी भी संपूर्ण ऊर्जा स्थितिज उर्जा से कम है और वर्तन बिन्दु एक दूसरे के

और निकट आ गए हैं। ऐसी स्थिति में हम यह कहते हैं कि कार अपने वर्तन बिन्दुओं के बीच **स्थितिज कुएं** (potential well) में फंस गई है। क्योंकि संरक्षी तंत्र मे

$$\text{गतिज ऊर्जा} + \text{स्थितिज ऊर्जा} = \text{संपूर्ण ऊर्जा } E,$$

इसलिए
$$\frac{1}{2}mv^2 + U = E,$$

या
$$v = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U)}. \tag{3·28}$$

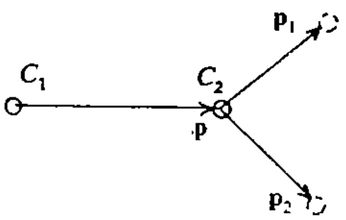
यदि $U > E$ तो समीकरण 3·28 को हल करने पर v का अधिकल्पित मान (imaginary value) प्राप्त होता है। उस स्थिति में कार की गति संभव नहीं होगी, पर यदि $U < E$ तो कार की गति संभव है।

दोनों चित्रों 3·14 ख और 3·14 ग में दायीं ओर के क्षेत्र में कार की संपूर्ण ऊर्जा स्थितिज ऊर्जा से अधिक है। इसलिए इस क्षेत्र में कार की गति संभव है। पर अगर कार बिन्दु P से चलना शुरू करेगी तो इस क्षेत्र तक पहुंच ही नहीं पाएगी क्योंकि शिखर R के निकट के क्षेत्र में $U > E$ और कार वहीं से ही वापस हो जाएगी। चित्र 3·14 ग के संबंध में, शिखर Q के साथ भी यही स्थिति (अर्थात् $U > E$) होती है जिसमें कार Q और R के बीच की घाटी, जहां उसकी गति संभव है, के बाहर होती है। ऐसे शिखर को, जिसमें $U > E$ होने के कारण कार की गति नहीं हो सकती, **स्थितिज रोधक** (potential barrier) कहा जाता है। हम अपने क्वांटम, परमाणु और अणु भौतिकी, न्यूक्लीय भौतिकी और घन अवस्था और द्रव्य विज्ञान (solid state and materials science) के पाठ्यक्रम में स्थितिज कुआं और स्थितिज रोधक शब्दों का काफ़ी प्रयोग करेंगे।

इस तरह यहां हमने ऊर्जा-संरक्षण नियम के कुछ उपयोगों के बारे में पढ़ा है। आप इकाई 2 में एक अन्य संरक्षण नियम, अर्थात् रैखिक संवेग के संरक्षण नियम, के बारे में पढ़ चुके हैं। अब आप संघट्टनों (collisions) का अध्ययन करेंगे, जिनमें ये दोनों संरक्षण नियम लागू होते हैं।

3.4 प्रत्यास्थ और अप्रत्यास्थ संघट्टन

हम यह जानते हैं कि उस स्थिति में कुछ धातु की सतहों से इलेक्ट्रॉन उत्सर्जित होने लगते हैं जबकि उन पर पराबैंगनी प्रकाश (ultraviolet light) डाला जाता है। इस प्रक्रिया की व्याख्या संघट्टन के अध्ययन के ज़रिए की जा सकती है। इस अध्ययन के दौरान हमें एक्स-किरण और कृत्रिम रेडियोऐक्टिवता के जनन जैसी अन्य प्रक्रियाओं के बारे में भी कुछ जानकारी मिल सकती है। लेकिन पहले हम संघट्टन का अध्ययन एक मेज़ पर दो सिक्कों की टक्कर से शुरू करेंगे। यह क्रिया आप स्वयं दो सिक्के लेकर कर सकते हैं। ऐसा करने पर आपको क्या देखने को मिलता है ? इस स्थिति को चित्र 3.15 में दिखाया गया है।



चित्र 3.15

मान लें कि शुरू में C_2 स्थिर है। C_1 की मूल गति-रेखा के एक ओर, टकराने वाला सिक्का C_1 चलने लगता है और दूसरी ओर जिससे टकराया है वह सिक्का C_2 चलने लगता है। मान लीजिए C_2 से टकराने के तुरंत पहले C_1 का रैखिक संवेग $\mathbf{p}$ है और टकराने के बाद C_1 और C_2 के रैखिक संवेग, क्रमशः $\mathbf{p}_1$ और $\mathbf{p}_2$ हैं। यहां हम यह मान लेते हैं कि मेज़ की सतह काफ़ी चिकनी है जिससे कि इससे होने वाले घर्षण की उपेक्षा की जा सके। तब, क्योंकि टकराने के दौरान इन सिक्कों पर कोई बाह्य बल (external force) कार्य नहीं करता, इसलिए इसका रैखिक संवेग संरक्षित रहता है, अर्थात्

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2. \tag{3·29}$$

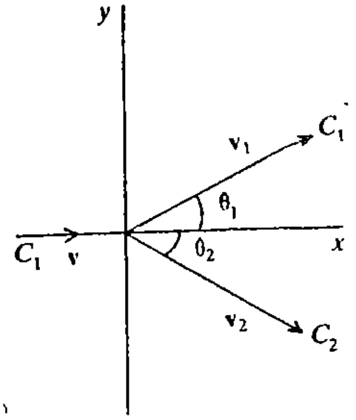
रैखिक संवेग-संरक्षण नियम सभी प्रकार के संघट्टनों पर लागू होते हैं बशर्ते उन पर कोई बाह्य बल कार्य न करता हो। साथ ही इन पर ऊर्जा-संरक्षण नियम भी लागू होता है। अब, सिक्के सदा उस मेज़ पर ही रहते हैं जिसकी सतह क्षैतिज है। इसलिए मेज़ की ऊपरी सतह को मानक मानने पर उसके सापेक्ष उनकी स्थितिज ऊर्जा हमेशा शून्य होगी। इससे यह अर्थ निकलता है कि टक्कर होने के पहले C_1 की गतिज ऊर्जा, टक्कर के बाद C_1 और C_2 की गतिज ऊर्जाओं और ताप अथवा ध्वनि के रूप में प्राप्त ऊर्जा के, जो कि संघट्टन के कारण रूपांतरित हो गयी हो, कुल जोड़ के बराबर होती है। इन सभी प्रक्रियाओं के दौरान हमें यह बात अवश्य ध्यान में रखनी चाहिए कि हमने यह मान लिया है कि मेज़ की सतह घर्षणहीन है। अब, यदि संघट्टन के दौरान तंत्र की गतिज ऊर्जा अचर रहती हो तो इस संघट्टन को **प्रत्यास्थ** (elastic) कहा जाता है। दूसरे शब्दों में सिक्कों के प्रत्यास्थ संघट्टन का प्रतिबंध होता है :

$$T = T_1 + T_2. \tag{3·30}$$

जहां T संघट्टन के पहले C_1 की गतिज ऊर्जा है और T_1, T_2 संघट्टन के बाद, क्रमशः C_1 और C_2 की गतिज ऊर्जाएं हैं। यदि तंत्र की गतिज ऊर्जा अचर नहीं होती तो संघट्टन को **अप्रत्यास्थ** (inelastic) कहा जाता है। पर संघट्टन प्रत्यास्थ हो या अप्रत्यास्थ, दोनों ही स्थितियों में **संपूर्ण ऊर्जा संरक्षित रहती है।** आइए पहले हम प्रत्यास्थ संघट्टन पर चर्चा करें।

प्रत्यास्थ संघट्टन

आप अभी पढ़ चुके हैं कि प्रत्यास्थ संघट्टन में समीकरण 3·29 और 3·30 दोनों ही लागू होते हैं। अब हम इन समीकरणों को संघट्टन के बाद सिक्कों की गति-दिशाओं के बीच का कोण मालूम करने के लिए लागू करेंगे। इसके लिए पहले हमें त्रिकोणमिति के कुछ परिणाम इस्तेमाल करने होंगे। इस प्रकार का विश्लेषण द्विविम में हो रहे संघट्टन से संबंधित किसी भी प्रश्न को हल करने के लिए ज़रूरी होता है। इसके लिए हम चित्र 3·15 को फिर से चित्र 3·16 की तरह खींचते हैं। इसमें हम C_1 की मूल गति-दिशा को x-अक्ष और इसकी लांबिक दिशा को y-अक्ष मान लेते हैं।



चित्र 3.16

यहां C_1 को **प्रक्षेप्य** और C_2 को **लक्ष्य** माना गया है। मान लें कि C_1 और C_2 के द्रव्यमान क्रमशः m_1 और m_2 हैं और संघट्टन होने के पहले C_1 वेग $\mathbf{v}$ से चल रहा है। मान लीजिए संघट्टन के बाद C_1 और C_2 के वेग क्रमशः $\mathbf{v}_1$ और $\mathbf{v}_2$ हैं। $\mathbf{v}_2$ को प्रतिक्षेप वेग (recoil velocity) और θ_2 को प्रतिक्षेप कोण (angle of recoil) कहा जाता है। समीकरण 3.29 को निम्न रूप में लिखा जा सकता है :

$$m_1\mathbf{v} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$$

समीकरण 1·3 क और समीकरण 1·3 घ को लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$m_1 v\hat{\mathbf{i}} = m_1 (v_1 \cos\theta_1 \hat{\mathbf{i}} + v_1 \sin\theta_1 \hat{\mathbf{j}}) + m_2 (v_2 \cos\theta_2 \hat{\mathbf{i}} - v_2 \sin\theta_2 \hat{\mathbf{j}})$$

या $$m_1 v\hat{\mathbf{i}} = (m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2)\hat{\mathbf{i}} + (m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v_2 \sin\theta_2)\hat{\mathbf{j}}.$$

समीकरण 1·5 और 1·6 का प्रयोग करके हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$m_1 v = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2, \qquad (3\cdot31\text{ क})$$

और $$0 = m_1 v_1 \sin\theta_1 - m_2 v_2 \sin\theta_2. \qquad (3\cdot31\text{ ख})$$

समीकरण 3·30 से

$$m_1 v^2 = m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2. \qquad (3\cdot32)$$

पहले हम समीकरण 3·31 क और 3·31 ख से θ_1 को विलुप्त करेंगे, अर्थात् $m_1 v_1 \cos\theta_1 = m_1 v - m_2 v_2 \cos\theta_2$ और $m_1 v_1 \sin\theta_1 = m_2 v_2 \sin\theta_2$ समीकरणों का वर्ग करके जोड़ने पर मिलता है :

$$(m_1 v_1)^2 = (m_2 v_2 \sin\theta_2)^2 + (m_1 v - m_2 v_2 \cos\theta_2)^2$$

या $$m_1^2 v_1^2 = m_2^2 v_2^2 + m_1^2 v^2 - 2m_1 m_2 v v_2 \cos\theta_2.$$

अब हम v और θ_2 के पदों में v_2 का व्यंजक प्राप्त करने के लिए समीकरण 3·32 का प्रयोग करेंगे। अर्थात्

$$0 = m_2^2 v_2^2 + m_1 m_2 v_2^2 - 2m_1 m_2 v v_2 \cos\theta_2.$$

यह v_2 में एक द्विघाती समीकरण है जिसका $v_2 = 0$ एक तुच्छ हल (trivial solution) है। इसे हम नहीं लेते हैं और केवल निम्नलिखित हल लेते हैं :

$$v_2 = \frac{2m_1 m_2 v\cos\theta_2}{m_2^2 + m_1 m_2} = \frac{2\alpha v\cos\theta_2}{1+\alpha}, \qquad (3\cdot33)$$

जहां $$\alpha = \frac{m_1}{m_2}.$$

पुनः समीकरण 3·31 क तथा 3·31 ख से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\frac{m_1 v_1 \sin\theta_1}{m_1 v_1 \cos\theta_1} = \frac{m_2 v_2 \sin\theta_2}{m_1 v - m_2 v_2 \cos\theta_2}.$$

दायीं ओर के हर और अंश दोनों को $2 \cos \theta_2$ से गुणा करने पर

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2 v_2 \sin 2\theta_2}{2m_1 v \cos \theta_2 - 2m_2 v_2 \cos^2\theta_2}$$

प्राप्त होता है। समीकरण 3·33 का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\tan\theta_1 = \frac{m_2 v_2 \sin 2\theta_2}{(m_1+m_2)v_2 - 2m_2 v_2 \cos^2\theta_2} = \frac{\sin 2\theta_2}{\alpha - \cos 2\theta_2}. \tag{3·34}$$

समीकरण 3·34 को देखने से यह पता चलता है कि θ_1 और θ_2 का संबंध α के मान पर काफ़ी निर्भर करता है । अब हम उस स्थिति पर विचार करेंगे जबकि $\alpha >> 1$ (अर्थात् $m_1 >> m_2$) ।

क्योंकि $\sin 2\theta_2$ और $\cos 2\theta_2$ का मान हमेशा -1 और $+1$ के बीच ही होगा इसलिए इस स्थिति में $\tan \theta_1 \to 0$ या $\theta_1 \to 0$ और क्योंकि $\theta_1 \to 0$ इसलिए समीकरण 3·31 ख से $\theta_2 \to 0$ भी प्राप्त होता है। इसलिए जब प्रक्षेप्य का द्रव्यमान लक्ष्य के द्रव्यमान से काफ़ी अधिक होता है तब दोनों संघट्टन के बाद प्रारंभिक दिशा में ही एक सीधी रेखा में चलते हैं।

बोध प्रश्न 8

सिद्ध कीजिए कि (क) $\theta_1 + 2\theta_2 = 180°$. जब $\alpha << 1$.

और (ख) $\theta_1 + \theta_2 = 90°$. जब $\alpha = 1$.

अब हम अप्रत्यास्थ संघट्टन के एक अनुप्रयोग के बारे में पढ़ेंगे।

प्राक्षेपिक लोलक

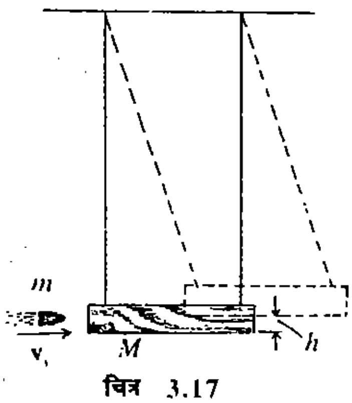
प्राक्षेपिक लोलक (ballistic pendulum) एक युक्ति है जिसका प्रयोग बंदूक की गोली का वेग मालूम करने के लिए किया जाता है। लोलक द्रव्यमान M वाला लकड़ी का एक बड़ा टुकड़ा होता है जो दो रस्सियों से ऊर्ध्वाधरतः (vertically) लटकता रहता है। द्रव्यमान m वाली एक गोली प्रारंभिक वेग $\mathbf{v}_i$ से लोलक से टकराती है और उसी में अंतःस्थापित हो जाती है। संघट्टन के बाद (गोली + लोलक) तंत्र का अंतिम वेग $\mathbf{v}_f$ टकराने के पहले गोली के वेग से काफ़ी कम होता है। इस अंतिम वेग को आसानी से मापा जा सकता है। फिर संवेग-संरक्षण नियम लागू करके गोली का प्रारंभिक वेग मालूम किया जा सकता है।

गोली का प्रारंभिक संवेग $= m\,\mathbf{v}_i$

संघट्टन के बाद (गोली + लोलक) तंत्र का संवेग $= (m + M)\,\mathbf{v}_f$

अतः, संवेग-संरक्षण नियम के अनुसार

$$m\,\mathbf{v}_i = (m + M)\,\mathbf{v}_f . \tag{3·35}$$



चित्र 3.17

संघट्टन के पहले गतिज ऊर्जा $\frac{1}{2} m v_i^2$ है और संघट्टन के बाद समीकरण 3·35 के अनुसार संपूर्ण गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} (m + M) v_f^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2 v_i^2}{m + M}$. अब

(संघट्टन के पहले की गतिज ऊर्जा) − (संघट्टन के बाद की गतिज ऊर्जा)

$$= \frac{1}{2} m v_i^2\left(1 - \frac{m}{m + M}\right) = \frac{1}{2} \frac{m M}{m + M} v_i^2 ,$$

जो एक धन राशि है। इससे यह अर्थ निकलता है कि गतिज ऊर्जा का क्षय हुआ है। अतः यह संघट्टन अप्रत्यास्थ है। फिर भी, शेष बची गतिज ऊर्जा के कारण लकड़ी का ब्लॉक किसी अधिकतम ऊंचाई, मान

लीजिए h तक चला जाता है, जैसा कि चित्र 3·17 में दिखाया गया है। अब हमें v_i का मान ज्ञात राशियों m, M और h के पदों में मालूम करना है। गोली और लोलक की गतिज ऊर्जा, लोलक को ऊंचाई h तक ले जाने में इस्तेमाल होती है। तब लोलक और गोली में स्थितिज ऊर्जा आ जाती है जो $(M + m)gh$ के बराबर होती है। ऊर्जा-संरक्षण नियम के अनुसार

लोलक और गोली की गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}(M+m)v_f^2 = (M+m)gh.$

इसलिए $v_f^2 = 2gh$ या $v_f = \sqrt{2gh}$.

अतः समीकरण 3·35 से हमें प्राप्त होता है

$$v_i = \frac{M + m}{m}\sqrt{2gh}. \tag{3·36}$$

नीचे दिए गए प्रश्न में आप v_i का संख्यात्मक मान निकाल सकते हैं।

बोध प्रश्न 9

एक प्राक्षेपिक लोलक में गोली और लोलक के द्रव्यमान, क्रमशः 5 g और 2 kg हैं। गोली लगने के बाद गोली के साथ लोलक 0·5 cm ऊपर उठ जाता है। गोली का वेग ज्ञात कीजिए। (दिया है $g = 9.8$ m s^{-2})

अभी तक इकाई 3 का अध्ययन करने में आपको कितना समय लगा है ? संभवतः आपने तीन घंटे में यह कार्य पूरा किया हो। आपके कुछ मित्रों को इस काम को पूरा करने में शायद 4 घंटे लगे हों। आपके कुछ ऐसे भी मित्र होंगे जिन्होंने यह कार्य 2 घंटे में पूरा किया होगा। इस तरह आप में से सभी ने समान कार्य पूरा किया है और सभी की कार्य पूरा करने की दर अलग-अलग रही है। इस प्रश्न का कुछ संबंध निम्नलिखित प्रश्न के साथ भी हो सकता है। नियत चाल से चलते हुए सीढ़ियां चढ़ने के बजाय अगर आप नियत चाल से दौड़ कर सीढ़ियां चढ़ते हैं तो आप क्यों अधिक थक जाते हैं ? प्रत्येक स्थिति में आप अपने भार के ठीक बराबर औसत बल लगाते हैं और यह कार्य आप एक नियत दूरी तक करते हैं। और क्योंकि बल और दूरी का गुणनफल किया गया कार्य होता है, इसलिए दोनों स्थितियों में समान कार्य किया जाता है। पर, यहां मुख्य बात यह है कि किस दर से कार्य किया गया है। अब हम इस पहलू पर चर्चा करेंगे।

3.5 शक्ति

कार्य करने की दर को **शक्ति** (power) कहा जाता है। यदि समय Δt में किया गया कार्य ΔW है तो **औसत शक्ति** $\bar{P}$ (average power) होती है :

$$\bar{P} = \frac{\Delta W}{\Delta t} \tag{3·37}$$

यदि यह दर समय के साथ बदलती है तो हम **तात्क्षणिक शक्ति** (instantaneous power) को परिभाषित करते हैं : यदि समीकरण 3·37 में Δt शून्य की ओर प्रवृत्त हो तो $\bar{P}$ को जो सीमा मिलेगी वह तात्क्षणिक शक्ति है। अर्थात्

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}. \tag{3·38}$$

समीकरण 3·37 और 3·38 से पता चलता है कि शक्ति की इकाई जूल प्रति से (J s^{-1}) है जिसे वॉट (watt या W) भी कहते हैं। अब आप एक सरल बोध प्रश्न हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 10

एक व्यक्ति एक पहाड़ पर 1500 m खड़ी ऊंचाई पर चढ़ता है। उसका द्रव्यमान 60 kg है और इस ऊंचाई को चढ़ने में वह 5 h लेता है। एक 1,500 kg वाली कार को इस ऊंचाई तक बनी सड़क से पहुंचने में 1 h लगता है। यदि हम सरलता के लिए घर्षण की उपेक्षा कर दें तो प्रत्येक स्थिति में कितनी औसत शक्ति लगती है ? यहां यह मान लीजिए कि व्यक्ति और कार अचर चाल से चल रहे हैं।

अभी हमने यह नहीं पढ़ा है कि किस प्रकार शक्ति लगे हुए बल **F** पर निर्भर करती है। इसके लिए हम पुनः समीकरण 3·1 पर आ जाते हैं। समीकरण 3·1 और 3·38 का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{F}.\,\Delta \mathbf{l}}{\Delta t}$$

$$= \mathbf{F}.\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{l}}{\Delta t}$$, (क्योंकि **F** के साथ अदिश गुणन करने की प्रक्रिया Δt पर निर्भर नहीं करती)

या $$P = \mathbf{F}.\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{F}.\mathbf{v}\,. \qquad (3\cdot39)$$

इस तरह, हमने P का व्यंजक एक अदिश गुणनफल के रूप में प्राप्त किया है। अब आप अदिश गुणनफल की विधि को लागू करके निम्नलिखित प्रश्न हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 11

60 kg द्रव्यमान वाला एक व्यक्ति 15 kg की साईकिल चला रहा है। (क) समतल सतह पर चलने और (ख) 5° वाले नत समतल की चढ़ाई पर चढ़ने पर 20 km h^{-1} की अचर चाल बनाए रखने के लिए कितनी शक्ति की ज़रूरत होगी जबकि प्रत्येक स्थिति में घर्षण बल 30 N है ?

अभी तक इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है, उसका एक संक्षिप्त विवरण हम यहां दे रहे हैं।

3.6 सारांश

- A से B तक एक पथ पर बल द्वारा किया गया कार्य $W = \int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{l}$ होता है।
- कार्य-ऊर्जा प्रमेय :

  एक कण पर लग रहे परिणामी बल द्वारा उस कण पर किया गया कार्य सदा ही कण की गतिज ऊर्जा में हुए परिवर्तन के बराबर होता है।
- यदि एक कण को एक बिन्दु से दूसरे बिन्दु तक ले जाने में उस कण पर बल द्वारा किया गया कार्य उस पथ पर निर्भर न हो जहां से कण गुज़रा है और केवल पथ की प्रारंभिक और अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता हो तो बल को संरक्षी बल कहा जाता है।
- एक कण को A से B तक ले जाने में संरक्षी बल द्वारा किया गया कार्य निम्नलिखित समीकरण से प्राप्त होता है :

  $$\int_A^B \mathbf{F}.d\mathbf{l} = -(U_B - U_A)$$

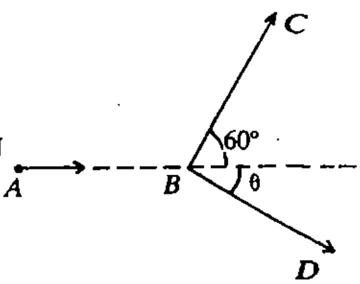
  जहां U_A और U_B स्थिति A और B पर कण की स्थितिज ऊर्जाएं हैं।
- असंरक्षी बलों के न होने पर तंत्र की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा संरक्षित रहती है।
- ऊर्जा-संरक्षण नियम : ऊर्जा न तो पैदा की जा सकती है और न ही नष्ट की जा सकती है। यह केवल एक रूप से दूसरे रूप में बदल सकती है, और ब्रह्मांड की कुल ऊर्जा अचर बनी रहती है।
- किसी भी संघट्टन प्रक्रिया में रैखिक संवेग और संपूर्ण ऊर्जा संरक्षित होते हैं। प्रत्यास्थ संघट्टन में गतिज ऊर्जा संरक्षित होती है जबकि अप्रत्यास्थ संघट्टन में गतिज ऊर्जा संरक्षित नहीं होती।
- शक्ति P की परिभाषा $P = \frac{dW}{dt}$ है।

  अचर बल **F** के लिए शक्ति $P = \mathbf{F}.\mathbf{v}$ होती है।

3.7 अंत में कुछ प्रश्न

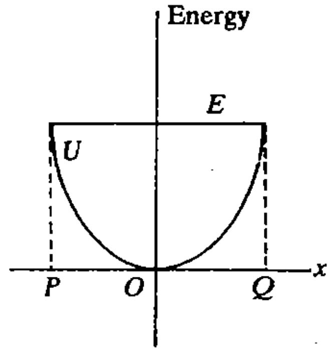
1. ऐसे दो उदाहरण दीजिए जिनमें आप समझते हैं कि आप कोई कार्य कर रहे हैं पर भौतिकी की दृष्टि से कोई कार्य नहीं हो रहा है ?

2. विरामावस्था में स्थित एक प्रोटॉन की ओर सीधे $3{\cdot}24 \times 10^5$ m s^{-1} की चाल से एक इलेक्ट्रॉन को प्रक्षिप्त किया जाता है। यदि प्रारंभ में इलेक्ट्रॉन, प्रोट्रॉन से काफ़ी अधिक दूरी पर हो तो प्रोट्रॉन से कितनी दूरी पर इलेक्ट्रॉन की तात्क्षणिक चाल अपनी प्रारंभिक चाल की दुगुनी हो जाएगी ? (संकेतः कार्य-ऊर्जा प्रमेय के साथ समीकरण 3.9 का प्रयोग कीजिए। समीकरण 3.9 में k का मान 9×10^9 N m^2 C^{-2} लीजिए।)



चित्र 3.18

3. एक न्यूक्लीय संघट्टन में 4 एकक द्रव्यमान वाला एक अल्फ़ा-कण A चाल v से एक 4 एकक द्रव्यमान वाले स्थिर हीलियम न्यूक्लियस B से टकराता है (देखिए चित्र 3.18)। संघट्टन के बाद A चाल $v/2$ से BC की दिशा में चलने लगता है जहां BC प्रारंभिक दिशा AB के साथ 60° का कोण बनाता है और हीलियम न्यूक्लियस BD की दिशा में चलने लगता है। BD की दिशा में हीलियम न्यूक्लियस की चाल और BD तथा AB के बीच का कोण θ ज्ञात कीजिए।



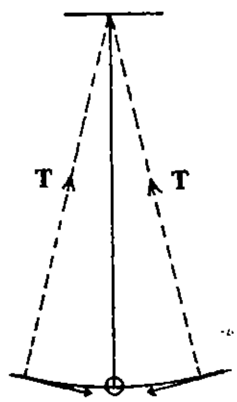
चित्र 3.19

4. चित्र 3.19 देखिए। स्थिति के साथ स्थितिज ऊर्जा और संपूर्ण ऊर्जा में हो रहे परिवर्तन को उस कण के लिए दिखाया गया है जो सरल आवर्त गति से दोलन कर रहा है। वर्तन बिन्दु ज्ञात कीजिए और यह भी बताइए कि किस बिन्दु पर दोलक (oscillator) का वेग अधिकतम होता है।

3.8 उत्तर

बोध प्रश्न

1. सरल लोलक की डोरी में तनाव (देखिए चित्र 3.20)। यह सदा ही गोले के विस्थापन (जो तीर की दिशा में है) की लांबिक दिशा में कार्य करता है।



चित्र 3.20

2. $$\mathbf{F} = -k_0 x \hat{\mathbf{i}} \,;\, d\mathbf{l} = dx \hat{\mathbf{i}} \,,\, \mathbf{F}.d\mathbf{l} = -k_0 x dx$$

$$W = -\int_{x_1}^{x_2} k_0 x dx = -\frac{k_0}{2}(x_2^2 - x_1^2)$$

3. कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसार किया गया कार्य = गतिज ऊर्जा में परिवर्तन। मान लीजिए ट्रक और कार द्वारा तय की हुई दूरियां, क्रमशः x_1 और x_2 हैं। इनकी प्रारंभिक गतिज ऊर्जाएं समान हैं और अंतिम गतिज ऊर्जाएं शून्य हैं। इसलिए दोनों की गतिज ऊर्जा में परिवर्तन समान होगा। मान लीजिए समान ब्रेक बल का परिमाण F है। तब $Fx_1 = Fx_2$,

   या $x_1 = x_2$.

4. (क) देखिए चित्र 3.21.

$$W_{ADB} = W_{AD} + W_{DB} = \int_A^D \mathbf{F}.d\mathbf{l} + \int_D^B \mathbf{F}.d\mathbf{l}$$

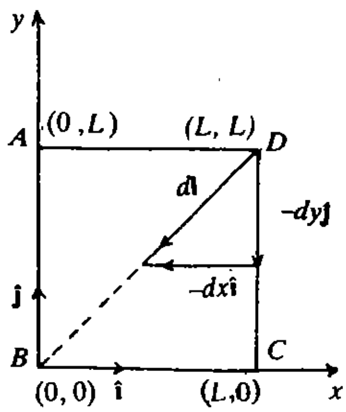
अब $$\int_A^D \mathbf{F}.d\mathbf{l} = \int_A^D (-mg\hat{\mathbf{j}}).(dx\hat{\mathbf{i}}) = 0$$

और $$\int_D^B \mathbf{F}.d\mathbf{l} = \int_D^B (-mg\hat{\mathbf{j}}).(-dx\hat{\mathbf{i}} - dy\hat{\mathbf{j}}) = \int_D^B mg\,dy$$

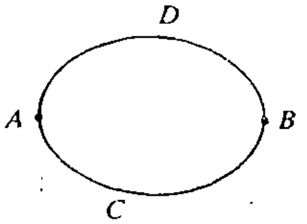
$$= mg\int_L^O dy = -mgL$$ और समीकरण 3.15 क से हम यह जानते हैं कि

$W_{AB} = -mgL$ अत :

$W_{AB} = W_{ADB}$.



चित्र 3.21



चित्र 3.22

(ख) चित्र 3.22 देखिए। आइए हम दो बिन्दु A और B लें। हम इन बिन्दुओं A और B को दो पथों ADB और ACB से मिलाते हैं जिससे कि हमें एक बंद पथ प्राप्त होता है। हम जानते हैं कि एक संरक्षी बल के लिए

$$W_{ADB} = W_{ACB}$$

या $\quad W_{ADB} = -W_{BCA}, \ \therefore \ W_{ADB} + W_{BCA} = 0$

या $\quad W_{ADBCA} = 0.$

अतः बंद पथ में किया गया कार्य शून्य होता है।

5. हम स्थितिज ऊर्जा मालूम करने के लिए समीकरण 3·16 घ का प्रयोग करेंगे। यहां B उस बिन्दु के संगत है जिसका x-निर्देशांक x है और A उस बिन्दु के संगत है जिसका x-निर्देशांक शून्य है। $\mathbf{F} = -Cx^3\hat{\mathbf{i}}, d\mathbf{l} = dx\,\hat{\mathbf{i}}.$

इसलिए अभीष्ट स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\int_0^x (-Cx^3\hat{\mathbf{i}}) \cdot (dx\ \hat{\mathbf{i}}) = \int_0^x Cx^3\,dx = \frac{1}{4}Cx^4 \ .$$

6. (क) स्थायी

(ख) अस्थायी

7. यह फिर h ही है क्योंकि स्थितिज ऊर्जा mgh होने पर गतिज ऊर्जा शून्य हो जाती है।

8. (क) यदि $\alpha << 1$ तब समीकरण 3·34 से $\tan\theta_1 = -\tan 2\theta_2 = \tan(180^\circ - 2\theta_2)$,

या $\quad \theta_1 = 180^\circ - 2\theta_2, \ \therefore \ \theta_1 + 2\theta_2 = 180^\circ.$

(ख) यदि $\quad \alpha = 1$ तो समीकरण 3·34 से $\tan\theta_1 = \dfrac{\sin 2\theta_2}{1 - \cos 2\theta_2}$

या $\quad \tan\theta_1 = \dfrac{2\sin\theta_2\cos\theta_2}{2\sin^2\theta_2} = \cot\theta_2 = \tan(90^\circ - \theta_2)$

$\therefore \quad \theta_1 = 90^\circ - \theta_2$, या $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$.

9. हम समीकरण 3·36 का प्रयोग करेंगे। वहां $M = 2$ kg,

$m = 0{\cdot}005$ kg, $g = 9{\cdot}8$ m s^{-2}

और $\quad h = 5 \times 10^{-3}$ m रखने पर $v_i = 125{\cdot}5$ m s^{-1} प्राप्त होता है।

10. $$P_{\text{व्यक्ति}} = \left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{\text{व्यक्ति}} = \frac{(60\text{ kg})\,(9{\cdot}8\text{ m s}^{-2})\,(1500\text{ m})}{(5 \times 3600)\text{ s}} = 49\text{ W}.$$

$$P_{\text{कार}} = \left(\frac{\Delta W}{\Delta t}\right)_{\text{कार}} = \frac{(1500\text{ kg})\,(9{\cdot}8\text{ m s}^{-2})\,(1500\text{ m})}{(1 \times 3600)\text{ s}} = 6125\text{ W}.$$

11. $$20\text{ km h}^{-1} = \frac{20 \times 1000}{3600}\text{ m s}^{-1} = \frac{50}{9}\text{ m s}^{-1}$$

अब $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ जहां $\mathbf{F}$ = लगाया गया बल।

(क) क्योंकि समतल सतह पर $\mathbf{F}$, घर्षण बल $\mathbf{F}_0$ के बराबर और विपरीत दिशा में होता है इसलिए

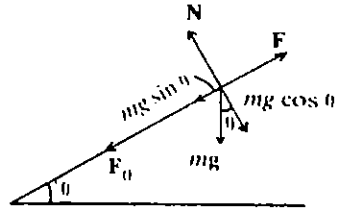
$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = F_0 v = (30\text{ N})\left(\frac{50}{9}\text{ m s}^{-1}\right) = 166.7\text{ W}$$

(ख) ढ़ाल पर $\mathbf{F}$. $\mathbf{F}_0$ के विपरीत और $m\mathbf{g}$ के उस घटक की विपरीत दिशा में कार्य करेगा जो नत समतल की दिशा में अधोमुखी है, (जैसा कि चित्र 3·23 में दिखाया गया है)। इसलिए $\mathbf{F}$ नत समतल में ऊपर की ओर कार्य करेगा और परिमाण में यह $(F_0 + mg\sin\theta)$ के बराबर होगा।

$$\therefore\ P = (F_0 + mg\sin\theta)v$$

$$= [30\text{ N} + (75\text{ kg})(9{\cdot}8\text{ ms}^{-2})(\sin 5^\circ)]\left(\frac{50}{9}\text{ ms}^{-1}\right)$$

$$= [30\text{ N} + 64\text{ N}]\left(\frac{50}{9}\text{ ms}^{-1}\right) = 522.2\text{ W}.$$



चित्र 3.23

अंत में कुछ प्रश्न

1. उदाहरण 1: एक लड़का कुर्सी पर बैठे-बैठे लगातार काफ़ी समय तक एक पुस्तक पढ़ता है।

   उदाहरण 2: रोकड़िया दिन के बैंक-समय में पूरे लेन-देन का लेखा-जोखा रखता है।

2. मान लीजिए कि इलेक्ट्रॉन की प्रारंभिक चाल v है।

   इसकी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन $= \frac{1}{2} m_e\{(2v)^2 - v^2\} = \frac{3}{2} m_e v^2$, जहां m_e= इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान। कार्य-ऊर्जा प्रमेय के अनुसार गतिज ऊर्जा में यह परिवर्तन काफ़ी अधिक दूरी (जिसे हम अनंत दूरी मान सकते हैं) से इलेक्ट्रॉन को प्रोटॉन से x मीटर की दूरी तक लाने में किए गए कार्य के बराबर होता है। हमें x का मान मालूम करना है। किया गया यह कार्य एकक धन आवेश को अनंत से ऊपर बताए गए बिन्दु तक लाने में किए गए कार्य और इलेक्ट्रॉन के आवेश के गुणनफल के बराबर होता है। मान लीजिए एक प्रोटॉन और इलेक्ट्रॉन पर e आवेश है। समीकरण 3·9 का प्रयोग करने पर और $r_A = \infty$ $r_B = x$ और $q = e$ रखने पर किया गया कार्य

$$= (-e)(ke)\left(0 - \frac{1}{x}\right) = \frac{ke^2}{x}$$

   कार्य-ऊर्जा प्रमेय से,

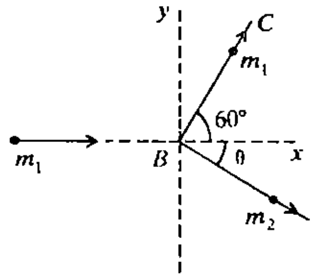
$$\frac{3}{2}\ m_e v^2 = \frac{ke^2}{x},\ \text{या}\ x = \frac{2\,ke^2}{3\,m_e v^2} \qquad (3{\cdot}40)$$

   हमारे प्रश्न के लिए $k = 9 \times 10^9\text{ N m}^2\text{C}^{-2}$, $v = 3{\cdot}24 \times 10^5\text{ m s}^{-1}$

   समीकरण 3·40 में k, v, m_e और e के मानों को रखने पर

   $x = 1 \cdot 6 \times 10^{-9}$ m प्राप्त होता है।

3. चित्र 3·24 देखिए। यह चित्र 3·16 से मिलता-जुलता है।



चित्र 3.24

$$\theta_1 = 60^\circ,\ \theta_2 = \theta,\ v = v,\ v_1 = \frac{v}{2},\ v_2 = u$$

   लेकर हम समीकरण 3·31 क और 3·31 ख को लिखेंगे :

$$m_1 v = m_1 \frac{v}{2}\cos 60^\circ + m_2 u\cos\theta, \qquad (3{\cdot}41\ \text{क})$$

$$0 = m_1 \frac{v}{2}\sin 60^\circ - m_2 u\sin\theta. \qquad (3{\cdot}41\ \text{ख})$$

   हमें v के पदों में u का मान, और θ का मान निकालना है। हमारे प्रश्न के लिए $m_1 = m_2 = 4$ एकक।

   इसलिए $\quad 4v = v + 4u\cos\theta$, या $4u\cos\theta = 3v \qquad (3{\cdot}41$ ग$)$

   और $\quad 0 = \sqrt{3}\ v - 4u\sin\theta$ या $4u\sin\theta = \sqrt{3}v. \qquad (3{\cdot}41$ घ$)$

समीकरणों 3·41 ग और 3·41 घ को वर्ग करके जोड़ने पर हमें मिलता है

$$16u^2 = 12v^2, \text{ या } u = \frac{\sqrt{3}}{2}v.$$

समीकरण 3·41 घ को समीकरण 3·41 ग से भाग देने पर हमें $\tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ या $\theta = 30°$ मिलता है।

4. क्योंकि P और Q पर $U = E$, इसलिए इन बिन्दुओं पर कण की गतिज ऊर्जा शून्य होती है। इसलिए P और Q वर्तन बिन्दु हैं।

   दूसरे भाग का उत्तर देने के लिए हम समीकरण 3·28 का प्रयोग करेंगे। क्योंकि E अचर है, इसलिए U के निम्नतम अर्थात् शून्य होने पर v अधिकतम हो जाता है। अतः O पर कण का वेग अधिकतम होता है।

3.9 शब्दावली

अप्रत्यास्थ	Inelastic
अस्थायी साम्यावस्था	Unstable equilibrium
असंरक्षी बल	Non-conservative force
उदासीन साम्यावस्था	Neutral equilibrium
ऊर्जा	Energy
कार्य	Work
कार्य-रहित बल	No-work force
कोणीय गति	Angular motion
क्रम-विनिमेय नियम	Commutative law
गतिज ऊर्जा	Kinetic energy
गुरुत्व बल	Force of gravity
घर्षण	Friction
परिमाण	Magnitude
प्रतिक्षेप कोण	Angle of recoil
प्रतिक्षेप वेग	Recoil velocity
प्राक्षेपिक लोलक	Ballistic pendulum
मात्रक	Unit
रैखिक	Linear
रेखा समाकल	Line integral
लोलक	Pendulum
बंटन नियम	Distributive law
वर्तन बिंदु	Turning point
विन्यास	Configuration
विमा	Dimension

शक्ति	Power
संघट्टन	Collision
संरक्षी बल	Conservative force
संवेग	Momentum
स्थायी साम्यावस्था	Stable equilibrium
स्थितिज कुआं	Potential well
स्थितिज ऊर्जा	Potential energy
स्थितिज रोधक	Potential barrier
स्थिर-वैद्युत क्षेत्र	Electrostatic field

इकाई 4 कोणीय गति

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

इकाई 1, 2 और 3 में आप विस्थापन, वेग, त्वरण, बल, रैखिक संवेग, कार्य और ऊर्जा जैसी यांत्रिकी की कुछ संकल्पनाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। आपने दो महत्वपूर्ण संरक्षण नियमों — रैखिक संवेग-संरक्षण नियम और ऊर्जा-संरक्षण नियम को भी समझा। फिर भी अभी तक अपने अध्ययन में हमने यांत्रिकी के एक महत्वपूर्ण पहलू को नहीं समझा है। हमने कणों की कोणीय गति (angular motion), विशेष रूप से उनकी घूर्णी गति (rotational motion) का वर्णन और विश्लेषण करने के किसी तरीके के बारे में अभी तक नहीं पढ़ा है।

आप यह कह सकते हैं कि इन संकल्पनाओं की मदद से हमने एकसमान वर्तुल गति और प्रक्षेप्य गति से संबंधित समस्याओं को हल किया है। पर इस संसार में अनेक ऐसी वस्तुएं हैं जो घूर्णी गति करती हैं। घूर्णन कर रही मंदाकिनियों से लेकर परिक्रमण कर रहे ग्रह, मेरी-गो-राउण्ड, साइकिल के पहियों और प्रचक्रों (flywheels) से लेकर बैले करती नृत्यांगना और कलाबाज़ की गति आदि घूर्णी गति के उदाहरण हैं। वैसे तो कोणीय गति करने वाले पिंडों के प्रत्येक कण पर न्यूटन के नियमों को लागू करके हम सभी घूर्णी गतियों का विश्लेषण कर सकते हैं। पर यह काफ़ी कठिन कार्य है। विशेष रूप से तब जबकि पिंड बहुत बड़े हों क्योंकि तब कणों की संख्या हज़ारों में हो सकती है। इसलिए हमें एक ऐसी सरल विधि चाहिए जिसकी मदद से हम पूरे पिंड की कोणीय गति का विश्लेषण कर सकें।

अधिकांश स्थितियों में हम किसी पिंड की कोणीय गति का अध्ययन उस पर स्थित एक बिंदु की कोणीय गति के रूप में कर सकते हैं। इसलिए इस इकाई में हम एक कण की कोणीय गति का अध्ययन करेंगे और उससे जुड़ी संकल्पनाओं, जैसे कोणीय विस्थापन (angular displacement), कोणीय वेग (angular velocity), कोणीय त्वरण (angular acceleration), बलआघूर्ण और कोणीय संवेग (angular momentum) आदि को समझेंगे। कण की कोणीय गति की इन संकल्पनाओं की मदद से हम इकाई 9 में दृढ़ पिंडों (rigid bodies) की कोणीय गति का अध्ययन करेंगे। अगली इकाई में हम गुरुत्वाकर्षण (gravitation) तथा प्रकृति में उपस्थित बलों पर विचार करेंगे।

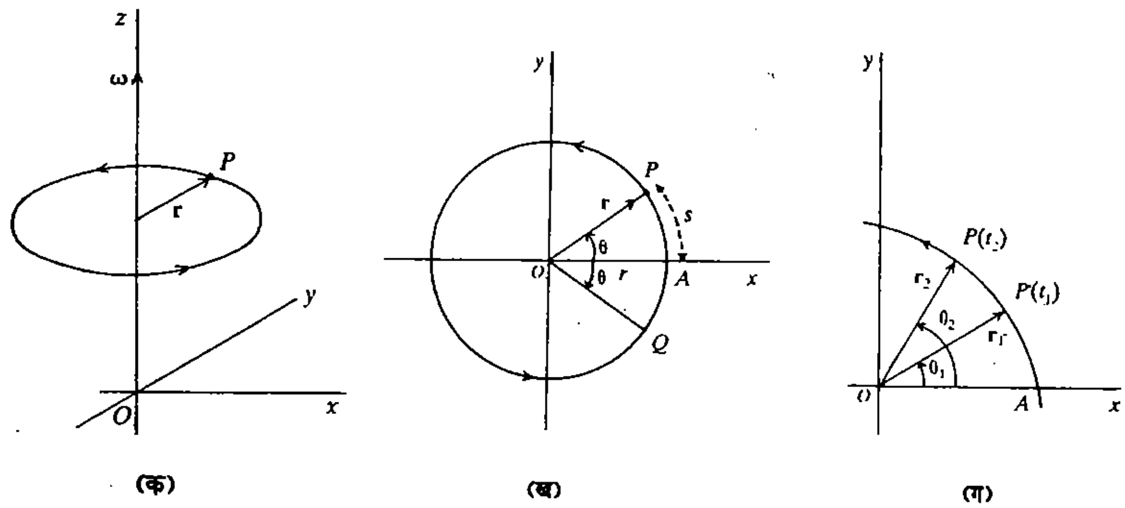
उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- कोणीय गति कर रहे कण के कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण का परिकलन कर सकेंगे
- समतल ध्रुवी निर्देशांकों (plane polar coordinates) में विस्थापन, त्रिज्य (radial) और अनुप्रस्थ (transverse) वेग और त्रिज्य और अनुप्रस्थ त्वरण को व्यक्त कर सकेंगे
- सदिश रूपों में कोणीय गति और रैखिक गति के शुद्धगतिक चरों में संबंध स्थापित कर सकेंगे
- कण के बलआघूर्ण, घूर्णी गतिज ऊर्जा और कोणीय संवेग से संबंधित प्रश्नों को हल कर सकेंगे
- कोणीय संवेग-संरक्षण नियम लागू कर सकेंगे।

4.2 कोणीय गति की शुद्धगतिकी

आइए हम अपना अध्ययन कण की वर्तुल गति से शुरू करें। मान लीजिए कि कण एक वृत्त में, उसके केंद्र से गुज़रने वाले उसके तल के लम्बवत् एक नियत अक्ष के गिर्द कोणीय गति कर रहा है (चित्र 4.1 क)।



चित्र 4.1: (क) एक नियत अक्ष, जिसे घूर्णन अक्ष कहते हैं, के गिर्द एक वृत्त में वामावर्त घूर्णन करता हुआ एक कण P ; (ख) क्षण t पर कण की कोणीय स्थिति $\theta = \angle AOP$; (ग) समयांतराल $\Delta t = t_2 - t_1$ में कण द्वारा तय किया गया कोणीय विस्थापन $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$.

जैसा कि आप भाग 1.4 से जानते हैं हमें इस कण की गति का निर्धारण करने के लिए केवल द्विविम निर्देश तंत्र चाहिए (चित्र 4.1 ख)। कोण θ निर्देश अक्ष, यानि x-अक्ष के सापेक्ष P पर कण की कोणीय स्थिति (angular position) है। परंपरा से हम θ को वामावर्त घूर्णन (anticlockwise rotation) के लिए धनात्मक और दक्षिणावर्त घूर्णन (clockwise rotation) के लिए ऋणात्मक लेते हैं। रेडियन (radian) इकाई में हम इसे निम्नलिखित संबंध से व्यक्त करते हैं :

आप शायद कोणों को मापने की इकाई अंश से ज़्यादा परिचित हों। रेडियनों की इकाई का अंशों से निम्न संबंध होता है : $360° = 2\pi$ rad; $\pi = 3.1415927 ....$

$$\theta = \frac{s}{r}, \tag{4.1}$$

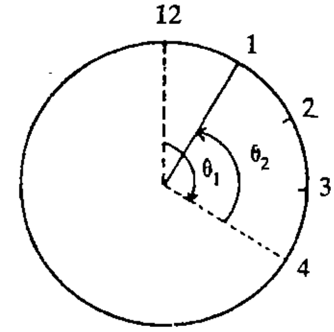
जहां s चाप (arc) की लंबाई है जैसा कि चित्र 4.1 ख में दिखाया गया है और r कण के स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ का परिमाण है। अगर कण एक से ज़्यादा बार घूर्णन करता है तो θ का मान भी उसके अनुसार बढ़ता चला जाएगा। मिसाल के तौर पर, मान लीजिए कण A से गति शुरू करके वृत्त के दो चक्कर पूरे कर लेने के बाद क्षण t पर बिन्दु P पर आ जाता है। तब उस क्षण t पर कण की कोणीय स्थिति $(2 \times 2\pi+\theta)=(4\pi + \theta)$ कोण से दी जाएगी। अब मान लीजिए कण वामावर्त घूर्णन कर रहा है। मान लीजिए क्षण t_1 पर और बाद में क्षण t_2 पर इसकी कोणीय स्थितियाँ क्रमशः θ_1 और θ_2 हैं (देखिए चित्र 4.1 ग)। तब समयांतराल $t_2 - t_1 = \Delta t$ में कण का कोणीय विस्थापन $\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta$ होगा। ध्यान दीजिए कि यहां हमने शब्द "कोणीय विस्थापन"

का प्रयोग किया है। तो क्या यह रैखिक विस्थापन की तरह एक सदिश राशि है ? इसे जानने के लिए आइए हम कोणीय विस्थापन के बारे में कुछ विस्तार से चर्चा करें।

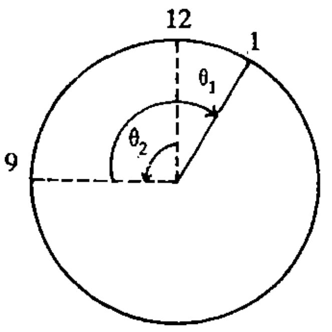
4.2.1 कोणीय विस्थापन

जब हम यह कहते हैं कि कोणीय विस्थापन एक सदिश राशि है तो एक तो परिमाण के साथ-साथ इसकी दिशा भी होनी चाहिए और दूसरे कोणीय विस्थापनों का योग सदिशों के योग की तरह होना चाहिए। जैसा कि आप देख सकते हैं, कोणीय विस्थापन का परिमाण वह कोण होता है जिससे कि वह कण घूमता है। कोणीय विस्थापन की दिशा क्या होती है ?

एक तरह से कोणीय विस्थापन की दिशा का विचार कोणीय गति से जुड़ा ही है। घूर्णन दोनों प्रकार के, अर्थात् दक्षिणावर्त और वामावर्त, होते हैं। आइए हम θ rad (रेडियन) के वामावर्त घूर्णन को एक निश्चित दिशा में निश्चित लंबाई के एक तीर से दिखाएं। तब हम $-\theta$ rad के घूर्णन को समान लंबाई लेकिन विपरीत दिशा वाले एक तीर से दिखा सकते हैं। लेकिन सवाल यह है कि पहले तीर की दिशा क्या हो ?



(क)



(ख)

चित्र 4.2: (क) 12 से प्रारंभ करके घड़ी की सुई को दायीं ओर $\theta_1 = 2\pi/3$ rad से घुमाया गया है और बायीं ओर $\theta_2 = \pi/2$ rad से घुमाया गया है, जिससे परिणामी $\theta_1 + \theta_2$ मिलता है; (ख) घूर्णन का क्रम उलट दिया गया है। 12 से प्रारंभ करके घड़ी की सुई को पहले बायीं ओर $\pi/2$ rad से घुमाया गया है और फिर दायीं ओर $2\pi/3$ rad से घुमाया गया है जिससे $\theta_2 + \theta_1$ मिलता है। दोनों स्थितियों में परिणामी समान रहता है।

यह तो साफ़ है कि तीर की दिशा वह नहीं हो सकती जो कण की अंतिम कोणीय स्थिति पर उसके स्थिति सदिश की है। ऐसा क्यों है ? इसे समझने के लिए एक बार फिर चित्र 4.1 ख देखें। इस हिसाब से कोण θ के वामावर्त घूर्णन के लिए, कण के कोणीय विस्थापन की दिशा OP होगी। लेकिन समान कोण के दक्षिणावर्त घूर्णन के लिए उसकी दिशा OQ होगी। यानि इस स्थिति में किसी भी परिमाण के दो बराबर और विपरीत दिशा में हुए घूर्णन (दक्षिणावर्त और वामावर्त) आम तौर पर प्रतिसमांतर (antiparallel) नहीं होंगे। अर्थात् कोणीय विस्थापनों की दिशाएं इस तरह चुनने पर वे सदिश नहीं हो सकते।

तब प्रश्न उठता है कि हम कोणीय विस्83

थापन की दिशा को किस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं ? आपने स्कूल में स्क्रू गेज (screw gauge) का प्रयोग अवश्य किया होगा। वहां आपने देखा होगा कि पेंच की घूर्णी गति, आगे बढ़ते हुए उसके सिरे की रैखिक गति में बदल जाती है। यह सरल रेखा, जिसमें पेंच का सिरा बढ़ता है, पेंच की घूर्णी गति की दिशा परिभाषित कर सकती है। यह रेखा वास्तव में पेंच का घूर्णन अक्ष होती है।

इस तरह हम कोणीय विस्थापन की दिशा को घूर्णन अक्ष के अनुदिश परिभाषित कर सकते हैं। लेकिन हम घूर्णन अक्ष पर वामावर्त या दक्षिणावर्त घूर्णन को किस तरह दिखाएं ?

इसके लिए हम दक्षिणहस्त नियम (right-hand rule) लागू करते हैं। हम अक्ष के गिर्द अपने दाएं हाथ की अंगुलियों को कण की घूर्णन दिशा में मोड़ते हैं। अंगूठे की दिशा कोणीय विस्थापन की दिशा होगी (देखिए चित्र 1.9 ख)। इस तरह चित्र 4.1 क के कण के लिए θ की दिशा धनात्मक z- अक्ष के अनुदिश होगी और चित्र 4.1 ख में θ की दिशा इस पृष्ठ के लंबवत् होगी और पृष्ठ से बाहर ऊपर की ओर होगी।

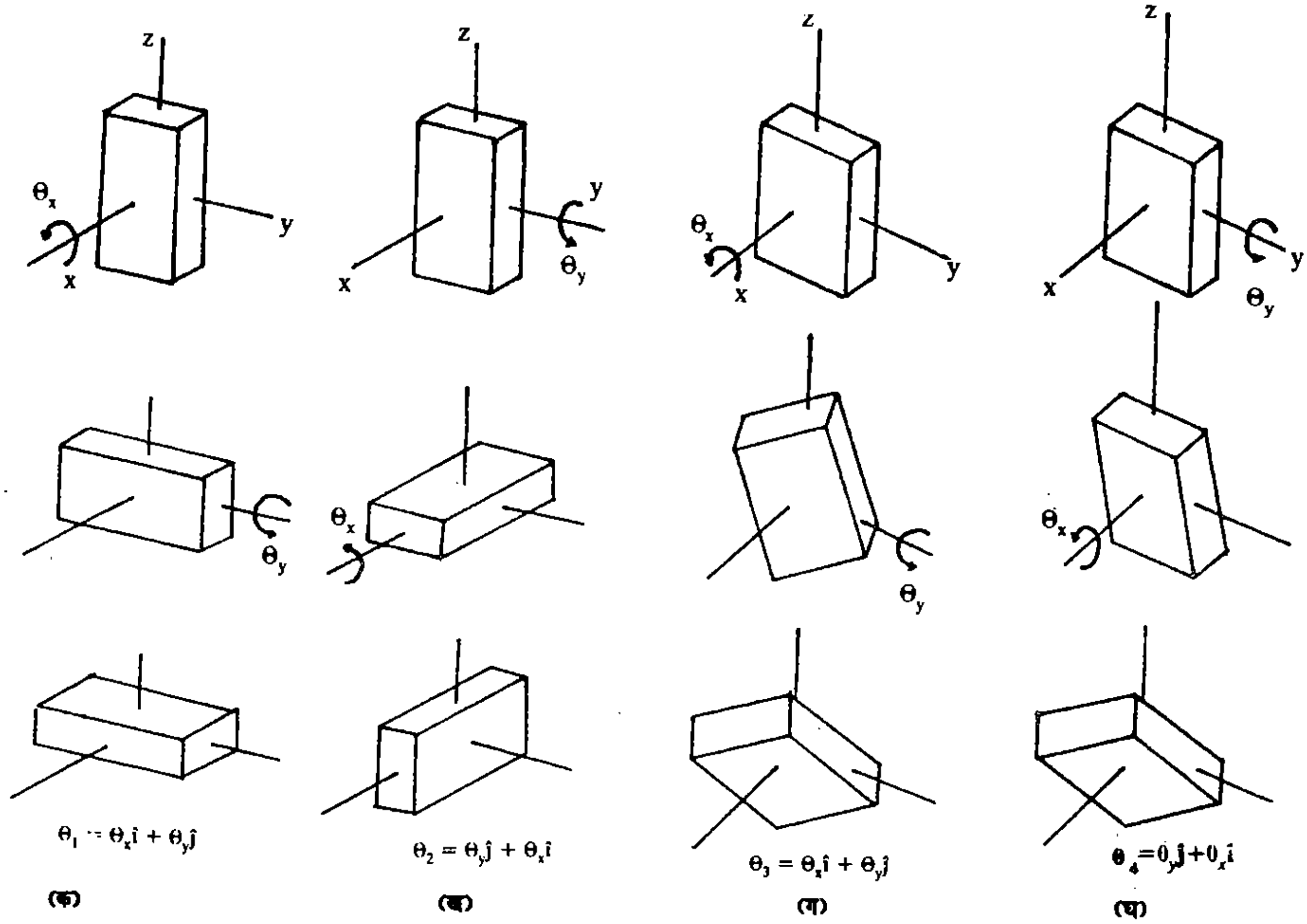
बोध प्रश्न 1

यदि घड़ी की सुई 5 से 9 तक दक्षिणा र्त घूर्णन करे तो उसके कोणीय विस्थापन का परिमाण और दिशा क्या होगी ?

घूर्णन कर रहे कण के कोणीय विस्थापन की दिशा निर्दिष्ट करने के बाद आइए हम देखें कि यह सदिश योग के नियमों को संतुष्ट करता है कि नहीं। आइए हम सदिश योग के क्रम विनिमेय नियम (commutative law) यानि **A+B = B+A** पर विचार करें। उस द्विविम स्थिति में क्या होगा जब एक नियत अक्ष के गिर्द घूर्णन करते समय कण एक ही समतल में बना रहता है ? आप चित्र 4.2 में दिखाई गई घड़ी की मदद से इसका उत्तर पा सकते हैं। चित्र में दिए गए शीर्षक को पढ़िए और θ_1 तथा θ_2 के अलग-अलग परिमाण लेकर उस में दी गई क्रिया दोहराइए।

आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं ? साफ़ है कि अगर कण एक ही समतल में बना रहता है और एक नियत अक्ष के गिर्द घूर्णन करता है तब कण का कोणीय विस्थापन सदिश होता है। क्या यह नियम त्रिविम घूर्णनों पर भी

लागू होता है ? इस सवाल का जवाब जानने के लिए चित्र 4.3 को अच्छी तरह समझिए और चित्र में दिए घूर्णनों को एक किताब की मदद से दोहराइए।



चित्र 4.3: परिमित कोणों से घूर्णन । (क) किताब को x- अक्ष के गिर्द बायीं ओर $\pi/2$ rad के कोण से घुमाया जाता है ($\theta_x\ \hat{\mathbf{i}}$) और फिर y-अक्ष के गिर्द बायीं ओर $\pi/2$ rad के कोण से घुमाया जाता है ($\theta_y\ \hat{\mathbf{j}}$) । परिणामी $\boldsymbol{\theta}_1 = \theta_x\ \hat{\mathbf{i}} + \theta_y \hat{\mathbf{j}}$ है; (ख) घूर्णन तो वही है पर उल्टे क्रम में है, अर्थात् $\boldsymbol{\theta}_2 = \theta_y\ \hat{\mathbf{j}} + \theta_x\ \hat{\mathbf{i}}$ स्पष्ट है कि $\boldsymbol{\theta}_1 \neq \boldsymbol{\theta}_2$;(ग) अत्यणु (infinitesimal) कोणों से घूर्णनः किताब को क्रमशः x-अक्ष और y-अक्ष के गिर्द $\pi/36$ rad के एक छोटे कोण से घुमाया गया है; (घ) घूर्णन तो वही है पर उल्टे क्रम में है। इस स्थिति में $\boldsymbol{\theta}_3 = \boldsymbol{\theta}_4$ । इन सभी चित्रों में निर्देश अक्षों का मूलबिंदु किताब के केंद्र पर रहता है, और किताब के घूर्णन में अक्ष एक दूसरे के समांतर बने रहते हैं।

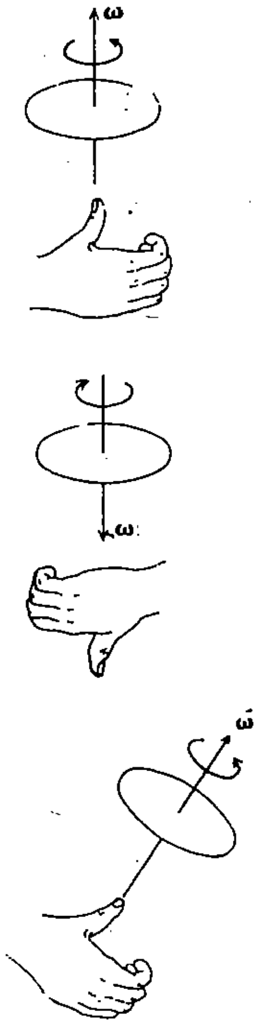
आपको क्या जवाब मिला ? तीन विमाओं में परिमित कोणीय विस्थापन सदिश राशि **नहीं** होते, पर **तीन विमाओं में अत्यणु कोणीय विस्थापन सदिश होते हैं।**

कोणीय विस्थापन की परिभाषा देने और उसकी सदिश प्रकृति को समझने के बाद अब हम कोणीय वेग और कोणीय त्वरण के बारे में पढ़ सकते हैं।

4.2.2 कोणीय वेग और कोणीय त्वरण

अगर समय अंतराल Δt में कण का कोणीय विस्थापन $\Delta\theta$ हो तो उसकी औसत कोणीय चाल होती है

$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \qquad (4.2\ \text{क})$$



चित्र 4.4 : कोणीय वेग की दिशा दक्षिणहस्त नियम से प्राप्त हो जाती है।

यदि $\Delta\theta$ अत्यणु है तो $\bar{\omega}$ एक सदिश होगा। इसकी दिशा भी वही होगी जो कि $\Delta\theta$ की है और इसे हम **औसत कोणीय वेग** (average angular velocity) कहेंगे। जब समय के साथ कोणीय चाल बदलती है तब हम **तात्क्षणिक कोणीय वेग** (instantaneous angular velocity) की परिभाषा इस प्रकार देते हैं :

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \qquad (4.2\text{ ख})$$

$d\theta$ एक सदिश है क्योंकि यह एक अत्यणु कोणीय विस्थापन है। हम लिख सकते हैं $d\theta = \frac{d\theta}{dt}\, dt$ ।

क्योंकि इसमें dt अदिश है इसलिए $\frac{d\theta}{dt}$ सदिश होगा यानि तात्क्षणिक कोणीय वेग ω एक सदिश राशि है। इसकी दिशा घूर्णन अक्ष के अनुदिश होती है जिसे दक्षिणहस्त नियम से मालूम किया जाता है। ω की सदिश प्रकृति को और अच्छी तरह से जानने के लिए चित्र 4.4 को ठीक से समझिए।

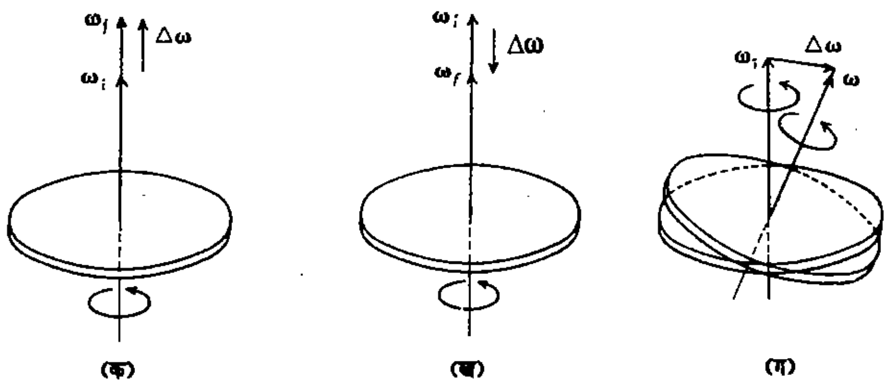
अगर चित्र 4.1 ग में कण की कोणीय चाल अचर न हो तो उसमें कोणीय त्वरण (angular acceleration) होता है। अगर क्षण t_1 और t_2 पर कण के तात्क्षणिक कोणीय वेग क्रमशः ω_1 और ω_2 हों, तो कण P का **औसत कोणीय त्वरण** (average angular acceleration) होता है

$$\bar{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (4.3\text{ क})$$

तात्क्षणिक कोणीय त्वरण (instantaneous acceleration) है

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (4.3\text{ ख})$$

कोणीय त्वरण की दिशा क्या होती है ? यह जानने के लिए चित्र 4.5 को समझिए।



चित्र 4.5: (क) केवल कोणीय चाल में वृद्धि से कोणीय वेग में परिवर्तन $\Delta\omega$ $(=\omega_f - \omega_i)$ कोणीय वेग सदिश ω के समांतर होता है। इसलिए, कोणीय त्वरण α भी कोणीय वेग ω के समांतर होगा। यहां ω_i और ω_f कण के प्रारंभिक और अंतिम कोणीय वेग हैं; (ख) केवल कोणीय चाल में हुई कमी का अर्थ है कि $\Delta\omega$ और α, ω के प्रति-समांतर हैं; (ग) जब ω की केवल दिशा में परिवर्तन होता है तब परिवर्तन $\Delta\omega$ और इसलिए α कोणीय वेग ω पर लंब होता है।

अगर कोणीय वेग का केवल परिमाण बदलता है और उसकी दिशा नहीं बदलती तो ω केवल घटता या बढ़ता ही है। इसलिए α जिसकी दिशा $\Delta\omega$ के अनुदिश है, घूर्णन अक्ष के समांतर अथवा प्रति-समांतर (antiparallel) होता है (देखिए चित्र 4.5 क और 4.5 ख)। जब ω की केवल दिशा बदलती है, परिमाण नहीं, तो कोणीय त्वरण सदिश, ω पर लंब होता है (देखिए चित्र 4.5 ग)। इसे सिद्ध करने के लिए नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल कीजिए।

बोध प्रश्न 2

दिखाइए कि यदि ω अचर हो तो α, ω पर लंब होता है। (संकेत : α, ω पर लंब हो इसके लिए $\alpha \cdot \omega = 0$। क्योंकि ω अचर है, इसलिए $\frac{d}{dt}(\omega^2) = \frac{d}{dt}(\omega \cdot \omega) = 0$)

व्यापक स्थिति में कोणीय वेग की दिशा और परिमाण दोनों बदल सकते हैं। तब α न तो ω के समांतर होगा और न ही उस पर लंब।

आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि एक नियत अक्ष के गिर्द कण की घूर्णी गति की, एक नियत दिशा में कण की रैखिक गति के साथ अनुरूपता (analogy) होती है। कोणीय गति के शुद्धगतिक चर θ, ω और α रैखिक गति के लिए क्रमशः x, v, और a के अनुरूप होते हैं। यानि θ, x के, ω, v के और α, a के अनुरूप होते हैं। आपने स्कूल में अचर त्वरण वाली रैखिक गति के लिए x, v, a और t के संबंधों को जरूर पढ़ा होगा। ठीक उसी तरह हम अचर कोणीय त्वरण से कोणीय गति कर रहे कण के लिए θ, ω, α और t के बीच भी संबंध निकाल सकते हैं। हम इन संबंधों को उनकी उपपत्ति के बिना सारणी 4.1 में दे रहे हैं।

सारणी 4.1: कोणीय और रैखिक स्थिति, चाल और त्वरण

रैखिक राशि या समीकरण	कोणीय राशि या समीकरण
स्थिति x	कोणीय स्थिति θ
चाल $v = \dfrac{dx}{dt}$	कोणीय चाल $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
त्वरण $a = \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{d^2x}{dt^2}$	कोणीय त्वरण $\alpha = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$
अचर त्वरण के समीकरण	**अचर कोणीय त्वरण के समीकरण**
$\bar{v} = \dfrac{1}{2}(v_0 + v)$	$\bar{\omega} = \dfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$
$x = v_0 t + \dfrac{1}{2}at^2$	$\theta = \omega_0 t + \dfrac{1}{2}\alpha t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2ax$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\theta$

ध्यान दीजिए कि आप x के स्थान पर θ, v के स्थान पर ω, a के स्थान पर α और प्रारंभिक रैखिक वेग v_0 के स्थान पर प्रारंभिक कोणीय वेग ω_0 रख कर कोणीय गति के लिए ये समीकरण लिख सकते हैं। हम यह देख चुके हैं कि रैखिक और कोणीय शुद्धगतिक चरों के बीच एक अनुरूपता होती है। आइए देखें कि हम कोणीय गति के लिए रैखिक और कोणीय चरों के इन समूहों के बीच संबंध कैसे स्थापित कर सकते हैं। इन संबंधों को समतल ध्रुवी निर्देशांकों (plane polar coordinates) का प्रयोग करके आसानी से मालूम किया जा सकता है।

4.2.3 रैखिक और कोणीय शुद्धगतिक चरों में संबंध

स्कूल गणित के पाठ्यक्रम में आपने बिन्दु $P(x, y)$ के समतल ध्रुवी निर्देशांकों r और θ के बारे में ज़रूर पढ़ा होगा। इन्हें चित्र 4.6 क में दिखाया गया है। ये x और y निर्देशांकों से इस तरह संबंधित होते हैं

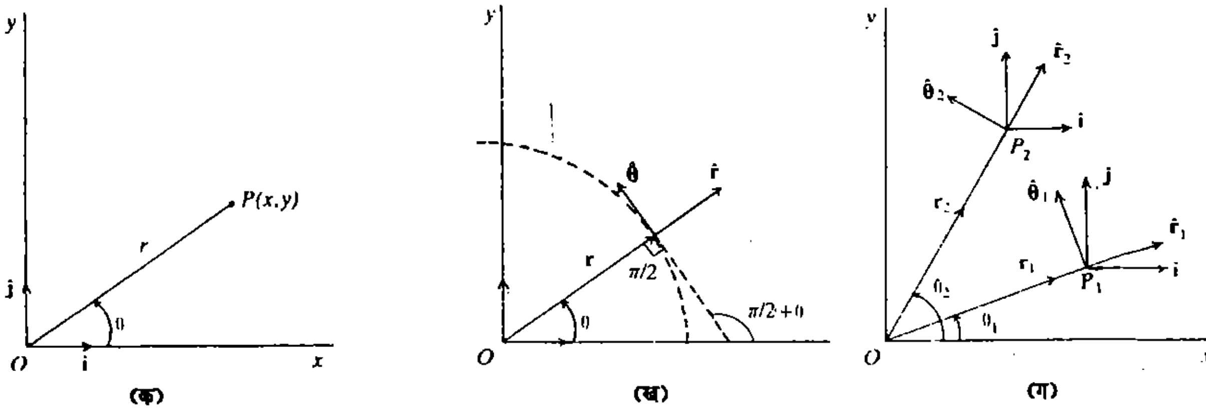
$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta, \qquad (4.4\text{ क})$$

जिससे प्राप्त होता है

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},\ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}. \qquad (4.4\text{ ख})$$

आप यह भी जानते हैं कि

$$\mathbf{r} = x\,\hat{\mathbf{i}} + y\,\hat{\mathbf{j}}. \qquad (4.5)$$



चित्र 4.6: (क) समतल ध्रुवी निर्देशांक r और θ; (ख) समतल ध्रुवी निर्देशांक पद्धति में एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$; (ग) बिंदु P_1 और P_2 पर एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ की अलग-अलग दिशाएं हैं यानि वे कण की स्थिति के साथ-साथ बदलते रहते हैं।

अब हम यहां दो नए एकक सदिश $\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ले रहे हैं जो परस्पर लंबवत् हैं और जिनकी दिशाएं क्रमशः बढ़ते हुए (increasing) r और बढ़ते हुए कोण θ की दिशाओं में हैं (देखिए चित्र 4.6 ख)। एकक सदिशों $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}})$ और एकक सदिशों $(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}})$ में एक महत्वपूर्ण अंतर है : $\hat{\mathbf{i}}$ और $\hat{\mathbf{j}}$ की दिशाएं नियत हैं लेकिन $\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ की दिशाएं कण की स्थिति के अनुसार बदलती हैं जैसा कि आप चित्र 4.6 ग में देख सकते हैं। क्योंकि $\hat{\mathbf{r}}$, $\mathbf{r}$ के अनुदिश एकक सदिश है, इसलिए हम लिख सकते हैं

$$\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}} \tag{4.6}$$

अब हम समीकरणों 4.4, 4.5 और 4.6 का प्रयोग करके $\hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$ और $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ के बीच के संबंधों को मालूम कर सकते हैं। समीकरण 4.4, 4.5 और 4.6 से

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r}\,(r\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + r\sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}),$$

या
$$\hat{\mathbf{r}} = \cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}. \tag{4.7 क}$$

इसलिए धनात्मक x-अक्ष के साथ कोण θ की दिशा में एकक सदिश $\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}$ होगा। $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ एक एकक सदिश है जो धनात्मक x- अक्ष के साथ कोण $(\pi/2 + \theta)$ बनाता है (देखिए चित्र 4.6 ख)। इसलिए $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ निकालने के लिए हम $\hat{\mathbf{r}}$ के व्यंजक में θ की जगह $(\frac{\pi}{2} + \theta)$ रखते हैं। इसलिए

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\hat{\mathbf{i}} + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\hat{\mathbf{j}},$$

या
$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}}. \tag{4.7 ख}$$

यहां यह ध्यान दीजिए कि हालांकि कण की स्थिति के साथ $\hat{\mathbf{r}}$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ बदलते हैं लेकिन वे केवल θ पर निर्भर करते हैं, r पर नहीं। और आगे बढ़ने के पहले हम चाहेंगे कि ध्रुवी निर्देशांकों का अच्छी तरह अभ्यास करने के लिए आप निम्नलिखित बोध प्रश्न हल करें।

बोध प्रश्न 3

(क) दिखाइए कि परिणाम $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$, $|\hat{\boldsymbol{\theta}}| = 1$ और $\hat{\mathbf{r}}.\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$ समीकरण 4.7 के संगत हैं।

(ख) यदि $\mathbf{A} = A_r\,\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ और $\mathbf{B} = B_r\,\hat{\mathbf{r}} + B_\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta$, जहां $\mathbf{A}$ और $\mathbf{B}$ दोनों के r और θ समष्टि में स्थित एक ही बिन्दु के निर्देशांक हैं।

(ग) दिखाइए कि $\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\mathbf{k}}$.

अब जबकि हम समतल ध्रुवी निर्देशांकों को समझ चुके हैं, आइए वर्तुल गति के लिए हम इन निर्देशांकों के पदों में वेग और त्वरण के व्यंजक मालूम करें। आप इकाई 1 के भाग 1.4 में एकसमान वर्तुल गति के लिए

इन संबंधों को पढ़ चुके हैं। हम जानते हैं कि अचर ω के लिए, $v = \omega r$ और $a_R = \dfrac{v^2}{r} = \omega^2 r$. आइए अब हम बदलती कोणीय चाल वाली वर्तुल गति पर विचार करें।

समतल ध्रुवी निर्देशांकों में वर्तुल गति का वेग और त्वरण

आपको याद होगा कि $\mathbf{v} = \dfrac{d\mathbf{r}}{dt}$ । क्योंकि r अचर है, इसलिए $\dfrac{dr}{dt} = 0$ और समीकरण 4.6 से हमें मिलता है

$$\mathbf{v} = \frac{d(\mathbf{r})}{dt} = \frac{d\,(r\hat{\mathbf{r}})}{dt} = \frac{dr}{dt}\hat{\mathbf{r}} + r\,\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = 0 + r\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = r\,\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}.$$

यहां ध्यान दीजिए कि $\dfrac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$ शून्य नहीं है। आइए अब हम इसका मान निकालें।

समीकरण 4.7 क को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{dt}(\sin\theta)\hat{\mathbf{j}}, \text{ क्योंकि } \hat{\mathbf{i}} \text{ और } \hat{\mathbf{j}} \text{ अचर एकक सदिश हैं,}$$

$$= -\sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= \dot{\theta}\,(-\sin\theta\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\hat{\mathbf{j}}),$$

जहां हमने $\dfrac{d\theta}{dt}$ के स्थान पर $\dot{\theta}$ लिखा है। समीकरण 4.7 ख का प्रयोग करने पर हमें मिलता है

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}. \qquad (4.8)$$

इस तरह, वर्तुल गति के लिए

$$\mathbf{v} = r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}},$$

या

$$\mathbf{v} = r\,\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}}. \qquad (4.9)$$

क्योंकि $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ । इस तरह हम यह पाते हैं कि एक वृत्त में गतिमान कण के वेग का परिमाण ωr होता है। इसकी दिशा $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ के अनुदिश अर्थात् वृत्त की स्पर्श रेखा के अनुदिश होती है। आप यह देख सकते हैं कि समीकरण 4.9 एकसमान वर्तुल गति के लिए भी लागू होता है।

अब समीकरण 4.9 को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें समतल ध्रुवी निर्देशांकों में वर्तुल गति के लिए त्वरण मिलता है :

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dr}{dt}\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\frac{d\dot{\theta}}{dt}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}$$

$$= r\,\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}, \text{ जहां } \ddot{\theta} = \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

या

$$\mathbf{a} = r\,\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}.$$

$\dfrac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt}$ का मान जानने के लिए हम समीकरण 4.7 ख को समय के सापेक्ष अवकलित करते हैं :

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\frac{d}{dt}\,(\sin\theta)\,\hat{\mathbf{i}} + \frac{d}{dt}\,(\cos\theta)\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= -\cos\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{i}} - \sin\theta\,\frac{d\theta}{dt}\,\hat{\mathbf{j}}$$

$$= -\,\dot{\theta}\,(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}}).$$

समीकरण 4.7 क से हमें मिलता है

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}}. \qquad (4.10)$$

अतः एक वृत्त में गतिमान कण का त्वरण होगा :

$$\mathbf{a} = r\,\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - r(\dot{\theta})^2\,\hat{\mathbf{r}}.$$

क्योंकि $\omega = \dot{\theta}$, और $\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \ddot{\theta}$, इसलिए

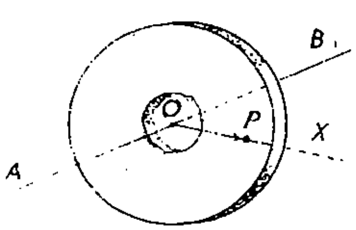
$$\mathbf{a} = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} + \alpha r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}, \qquad (4.11\ \text{क})$$

$$= -a_R\,\hat{\mathbf{r}} + a_T\,\hat{\boldsymbol{\theta}}, \qquad (4.11\ \text{ख})$$

या

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_T. \qquad (4.11\ \text{ग})$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि वर्तुल गति के लिए **a** का एक त्रिज्य घटक (radial component) $\mathbf{a}_R$ होता है जिसकी दिशा $\hat{\mathbf{r}}$ की दिशा के विपरीत होती है। समीकरण 4.11 क के पहले पद में ऋण चिह्न इसीलिए लगा हुआ है। उस वर्तुल गति का $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ के अनुदिश एक अनुप्रस्थ घटक (transverse component) $\mathbf{a}_T$ भी होता है। आप यह आसानी से देख सकते हैं कि एकसमान वर्तुल गति में अनुप्रस्थ घटक $\mathbf{a}_T$ नहीं होता। अब इन तथ्यों को अच्छी तरह से समझने के लिए आप एक बोध प्रश्न हल कर सकते हैं।



चित्र 4.7: चक्की एक स्थिर अक्ष AOB के गिर्द घूर्णन कर रही है। उसके सिरे पर स्थित कण P वर्तुल गति करता है।

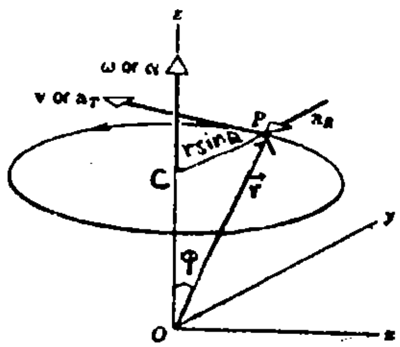
बोध प्रश्न 4

0.5 m त्रिज्या वाली एक चक्की 3.0 rad s^{-2} के अचर कोणीय त्वरण **a** से वामावर्त घूर्णन कर रही है (चित्र 4.7)। क्षण $t = 0$ पर निर्देश क्षैतिज रेखा OX से शुरू करके, जबकि चक्की विरामावस्था में है, चक्की के सिरे पर स्थित एक कण P के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

(क) 2.0 s बाद कण के कोणीय विस्थापन और कोणीय वेग,

(ख) 2.0 s के अंत में कण के रैखिक वेग, त्रिज्य और अनुप्रस्थ त्वरण।

4.6 से 4.11 तक के समीकरणों में हमने सदिशों **r, v** और **a** को अदिशों θ, ω और α के पदों में लिखा है। अब सवाल उठता है कि सदिशों **r, v, a** और **θ, ω, α** में क्या संबंध है ? मान लीजिए एक कण z-अक्ष के गिर्द एक वृत्त में घूर्णन कर रहा है। सदिशों **r, v** और **a** को चित्र 4.8 में दिखाया गया है। मान लीजिए **ω** और **r** के बीच का कोण φ है। तब, क्योंकि $\angle PCO = 90°$, इसलिए वृत्त की त्रिज्या CP, $r \sin\phi$ होगी और



चित्र 4.8 : z-अक्ष के गिर्द एक वृत्त में घूर्णन कर रहे कण के लिए सदिशों **r**, **v**, $\mathbf{a}_T$, $\mathbf{a}_R$, **ω** और **α** की दिशाएं।

$$v = \omega r \sin\phi.$$

अब यदि हम **ω** को **r** की ओर, उनके बीच के छोटे कोण से घुमाएं और दक्षिणहस्त नियम लागू करें तो हम पाते हैं कि अंगूठा **v** की दिशा में है। इससे हमें निम्नलिखित संबंध मिलता है

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \qquad (4.12\ \text{क})$$

अब

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}).$$

क्योंकि,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt},$$ इसलिए

$$\mathbf{a} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}.$$

हम फिर से यह सिद्ध कर सकते हैं कि

$$\mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}, \quad (4\cdot12 \text{ ख})$$

$$\mathbf{a}_R = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (4\cdot12 \text{ ग})$$

$$\therefore \quad \mathbf{a} = \mathbf{a}_T + \mathbf{a}_R . \quad (4\cdot12 \text{ घ})$$

समीकरण 4·12 ख को उसी विधि से सिद्ध किया जा सकता है जिसका प्रयोग हमने $\mathbf{v}$ के लिए किया था। $a_T = \alpha r \sin\phi$ और इसकी दिशा $\boldsymbol{\alpha}$ और $\mathbf{r}$ पर दक्षिणहस्त नियम लागू करके प्राप्त की जा सकती है।

अब, $a_R = \omega^2 r \sin\phi = \omega\,(\omega r \sin\phi) = \omega v$.

$\mathbf{a}_R$, PC के अनुदिश है। अगर हम $\boldsymbol{\omega}$ को $\mathbf{v}$ की ओर उनके बीच के छोटे कोण से घुमाते हुए दक्षिणहस्त नियम लगाएं तो अंगूठा उसी दिशा यानि PC की ओर होगा।

आइए अब हम एक नियत घूर्णन अक्ष के गिर्द कण की **व्यापक कोणीय गति** के लिए $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}$ और $\mathbf{a}$ को समतल ध्रुवी निर्देशांकों के पदों में लिखें।

$\mathbf{r}$ से संबंधित समीकरण 4·6 किसी भी प्रकार की कोणीय गति पर लागू होती है। वेग के लिए हमें निम्न व्यंजक मिलता है

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt}$$

समीकरण 4·8 का प्रयोग करने पर

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_T, \quad (4\cdot13 \text{ क})$$

जहां $\mathbf{v}_R = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}},\ \mathbf{v}_T = r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$ (4·13 ख)

इसी प्रकार, त्वरण $\mathbf{a}$ होता है

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\,\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\dot{\theta}\,\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt},$$

$$= \ddot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\,\ddot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} - r(\dot{\theta})^2\,\hat{\mathbf{r}}$$

जहां हमने समीकरण 4·8 और समीकरण 4·10 का प्रयोग किया है।

इस तरह

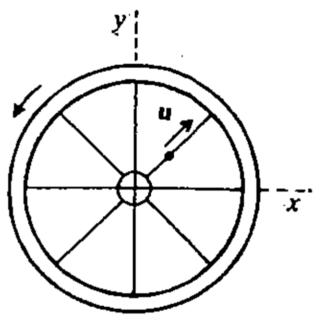
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (4\cdot14)$$

समीकरण 4·14 को देखने से यह पता चलता है कि व्यापक कोणीय गति कर रहे कण के त्वरण के दो घटक हैं। एक घटक $\hat{\mathbf{r}}$ के अनुदिश है जिसे **त्रिज्य घटक** कहा जाता है और दूसरा $\hat{\mathbf{r}}$ की लांबिक दिशा में है जिसे **अनुप्रस्थ घटक** कहा जाता है।

4·6 से 4·14 तक के समीकरणों की मदद से हम कोणीय चरों या रैखिक चरों में कोणीय गति कर रहे कण की गति का वर्णन कर सकते हैं। आपके मन में यह सवाल उठ सकता है कि कोणीय गति का वर्णन करने के लिए हमें कोणीय चरों की ज़रूरत क्यों पड़ती है ? ये ज़्यादा मुश्किल लगते हैं। इस सवाल का जवाब यह है कि किसी कण की कोणीय गति का वर्णन रैखिक चरों की अपेक्षा कोणीय चरों की मदद से करना ज़्यादा उपयोगी होता है। उदाहरण के लिए, ग्रहों की कक्षाएं (orbits) मालूम करने में इन समीकरणों का प्रयोग ज़्यादा आसान होता है । यह तथ्य आपको इकाई 6 में देखने को मिलेगा। इसी तरह घूर्णन कर रहे पिंड की गति का वर्णन करने के लिए हमें उस पर स्थित अनेक बिन्दुओं की गति का वर्णन करना पड़ेगा। 4·6 से 4·14 तक के समीकरणों से

यह साफ़ है कि पिंड पर स्थित विभिन्न बिन्दुओं के विस्थापन, वेग या त्वरण समान नहीं होंगे। पर एक नियत अक्ष (जो पिंड से होकर न जाता हो) के गिर्द घूर्णन कर रहे पिंड के सभी बिन्दुओं के कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण किसी भी क्षण पर समान होंगे। इसलिए हम कोणीय चरों θ, ω और α की मदद से पूरे पिंड की गति का आसान तरीके से वर्णन कर सकते हैं। यह तथ्य आपको और अच्छी तरह से समझ में आएगा जब आप इकाई 9 पढ़ेंगे। हम एक उदाहरण और एक बोध प्रश्न देकर कोणीय चरों की शुद्धगतिकी से संबंधित इस भाग को यहीं समाप्त कर रहे हैं।

उदाहरण 1: पहिए की तिल्ली पर लगे एक मनके का त्वरण



चित्र 4.9: पहिए की तिल्ली पर लगे मनके का त्वरण

एक मनका घूर्णन करते पहिए की तिल्ली पर उसके अनुदिश अचर चाल u से बाहर की ओर चलता है। यह क्षण $t = 0$ पर केंद्र से चलना शुरू करता है। तिल्ली की कोणीय स्थिति $\theta = \omega t$ से दी जाती है जहां ω अचर है। मनके का वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए।

आइए अब हम चित्र 4.9 की तरह का एक निर्देश तंत्र (frame of reference) लें। यहां $\dot{r} = u$ और $\dot{\theta} = \omega$। संबंध $\dot{r} = u$ को t के सापेक्ष समाकलित करके त्रिज्य स्थिति r निकाली जा सकती है :

$$\int dr = \int u\, dt$$

या $\quad r = ut + c$, जहां c = समाकलन अचर।

क्योंकि $\quad t = 0$ पर $r = 0$, इसलिए $c = 0$.

समीकरण 4.13 से

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ &= u\,\hat{\mathbf{r}} + ut\,\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\\ &= \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_T.\end{aligned}$$

यहां हम यह पाते हैं कि त्रिज्य वेग का परिमाण अचर है जबकि अनुप्रस्थ वेग के परिमाण में समय के साथ रैखिकतः वृद्धि होती जाती है।

समीकरण 4.14 से त्वरण प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.\\ &= -ut\,\omega^2\,\hat{\mathbf{r}} + (2u\omega)\,\hat{\boldsymbol{\theta}}.\end{aligned}$$

अतः यहां अनुप्रस्थ त्वरण का परिमाण भी अचर है।

बोध प्रश्न 5

एक कण एक सर्पिल (spiral) के अनुदिश बाहर की ओर चलता है। इसका प्रपथ (trajectory) $r = C\theta$ से दिया जाता है, जहां C एक अचर है जिसका मान $(1/\pi)$ m rad^{-1} है। समय के साथ θ में $\theta = \dfrac{\alpha t^2}{2}$ के अनुसार वृद्धि होती है, जहां α एक अचर है।

(क) कण का वेग और त्वरण ज्ञात कीजिए।

(ख) दिखाइए कि जब $\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ rad तब कण का त्रिज्य त्वरण शून्य होता है।

(संकेतः समीकरण 4.7, 4.13 और 4.14 का प्रयोग कीजिए।)

अभी तक हमने कोणीय गति का वर्णन किया है। अब आप कोणीय गति उत्पन्न करने वाले कारणों के बारे में पढ़ेंगे।

4.3 कोणीय गति की गतिकी

जैसा कि आप पहले जान चुके हैं वर्तुल गति सबसे आसान तरह की कोणीय गति है। प्रकृति में वर्तुल गति के अनेक उदाहरण देखने को मिलते हैं। मिसाल के तौर पर, अनेक उपग्रह वृत्तीय कक्षाओं में होते हैं, ग्रहों की कक्षाएं लगभग वृत्तीय होती हैं। पृथ्वी की अपनी धुरी पर दैनिक घूर्णी गति आपको वृत्ताकार पथ में ले जाती है। घूर्णन कर रहे यंत्रों के पुर्ज़ों की गति या वक्राकार मोड़ पर घुमाव लेती हुई कारों की गति वर्तुल गति होती है। आइए हम देखें कि किन बलों के कारण कोई कण वर्तुल गति करता है।

4.3.1 वर्तुल गति

पहले हम एकसमान वर्तुल गति पर विचार करेंगे जिसके बारे में आप इकाई 1 के भाग 1.4 में पढ़ चुके हैं। आपको याद होगा कि इस स्थिति में कण एक अचर कोणीय चाल से एक वृत्त में चलता है। इस तरह, यहाँ r और ω दोनों अचर हैं। अब न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार बल $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$.

हम यहाँ **a** से संबंधित समीकरण 4.11 के व्यंजक का प्रयोग करेंगे। इस स्थिति में क्योंकि ω अचर है, इसलिए α शून्य होगा। अतः

$$\mathbf{F} = -ma_R\hat{\mathbf{r}} = -mr\,\omega^2\hat{\mathbf{r}} = -\frac{mv^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}}. \qquad (4.15)$$

आप पहचान सकते हैं कि $\frac{v^2}{r}$ समीकरण 1.30 ग में दिया अभिकेन्द्र त्वरण (centripetal acceleration) ही है। समीकरण 4.15 द्वारा परिभाषित बल का परिमाण $\frac{mv^2}{r}$ है और इसकी दिशा वृत्त के केन्द्र की ओर है। समीकरण 4.15 में ऋण चिह्न इसलिए लगाया गया है क्योंकि **F** की दिशा **r** की दिशा के विपरीत है। इस बल को **अभिकेन्द्र बल** (centripetal force) कहा जाता है। समीकरण 4.15 का क्या अर्थ है ? इसका अर्थ है कि द्रव्यमान m वाला पिंड एकसमान वर्तुल गति कर सके इसके लिए यह ज़रूरी है कि उस पर एक नेट बल कार्य करे। इसलिए जब कभी भी हम किसी पिंड को एकसमान वर्तुल गति करते हुए देखें तो हमें जान लेना चाहिए कि उस पर इस परिमाण का नेट बल अवश्य लग रहा है। यह बल गुरुत्व, रस्सी में तनाव, वैद्युत अथवा चुंबकीय बल, घर्षण आदि किसी भी कारण से लग सकता है। मिसाल के तौर पर, विशाल ग्रह बृहस्पति 13 $\mathrm{kms^{-1}}$ की चाल से सूर्य की परिक्रमा करता है। गुरुत्वाकर्षण बल के कारण ही उसका परिक्रमण पथ लगभग वृत्ताकार रहता है। इसी प्रकार जब एक छोटी स्पोर्ट्स कार एक चक्र में घूमती है तो इसके पथ को वृत्तीय बनाए रखने के लिए ज़रूरी अभिकेन्द्र बल, टायर और सड़क के बीच के घर्षण बल से तथा सड़क के झुकाव से प्राप्त होता है। प्रोटॉन एक त्वरित्र के घेरे (accelerator ring) के चारों ओर वृत्ताकार चक्कर काटते हैं क्योंकि उसके लिए ज़रूरी अभिकेंद्र बल चुंबकीय बल से मिलता है।

उदाहरण 2

गुरुत्वाकर्षण बल एक तुल्यकाली (geostationary) उपग्रह को उसकी कक्षा में बनाए रखता है। पृथ्वी से उपग्रह की ऊंचाई ज्ञात कीजिए।

आपने विज्ञान और प्रौद्योगिकी के आधार पाठ्यक्रम में तुल्यकाली उपग्रहों के बारे में पढ़ा होगा। आप जानते होंगे कि इसकी घूर्णन अवधि 24 घंटा है जो कि अपनी धुरी पर पृथ्वी की घूर्णन अवधि भी है। अब उपग्रह को अपने पथ में बनाए रखने के लिए आवश्यक अभिकेंद्र बल पृथ्वी और उपग्रह के बीच के गुरुत्वाकर्षण बल से प्राप्त होता है। इसलिए अगर उपग्रह और पृथ्वी के द्रव्यमान क्रमशः m_S और m_E हों और उपग्रह कक्षा की त्रिज्या r हो, तो

$$\frac{m_S\,v^2}{r} = \frac{G\,m_S\,m_E}{r^2},$$

जहाँ v उपग्रह का कक्षीय वेग है। यहां $v = \frac{2\pi r}{T}$,

जहां T = **घूर्णन अवधि** $= 24\,\mathrm{h} = 24 \times 60 \times 60\,\mathrm{s}$.

इसलिए $\quad \frac{4\pi^2}{T^2} r = \frac{Gm_E}{r^2}$, या $r^3 = \frac{Gm_E T^2}{4\pi^2}$.

$r = R_E + h$ रखने पर जहां पृथ्वी की सतह से उपग्रह की ऊंचाई h है और R_E पृथ्वी की त्रिज्या है हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$h = \left(\frac{Gm_E T^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} - R_E . \qquad (4{\cdot}16)$$

इसमें G, m_E, R_E के मान रखने पर और $T = 24 \times 60 \times 60$ s रखने पर

$$h = 3{\cdot}59 \times 10^6 \text{ m} \doteq 35900 \text{ km}.$$

बोध प्रश्न 6

मान लीजिए चंद्रमा को पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण से नहीं बल्कि एक भारहीन केबल के तनाव से कक्षा में बनाए रखा गया है। केबल में तनाव का परिमाण ज्ञात कीजिए।

अब सवाल उठता है कि वर्तुल गति कर रहे कण पर कौन सा बल लग रहा होता है जिससे कोणीय चाल बदल जाती है ? जैसे कि विरामावस्था से शुरू होकर किसी चाल से घूमती हुई रेकार्ड टर्नटेबल पर स्थित कण की चाल में परिवर्तन या ऊर्ध्वाधर वृत्त में चक्कर काट रही एक गेंद की चाल में परिवर्तन, आदि किस बल के कारण होते हैं ? इस स्थिति में हम **a** से संबंधित समीकरण 4·11 का प्रयोग करके निम्नलिखित प्राप्त करते हैं

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{a} = \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_T , \qquad (4{\cdot}17\ \text{क})$$

जहां

$$\mathbf{F}_R = -mr\,\omega^2\,\hat{\mathbf{r}} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}}, \text{ और} \qquad (4{\cdot}17\ \text{ख})$$

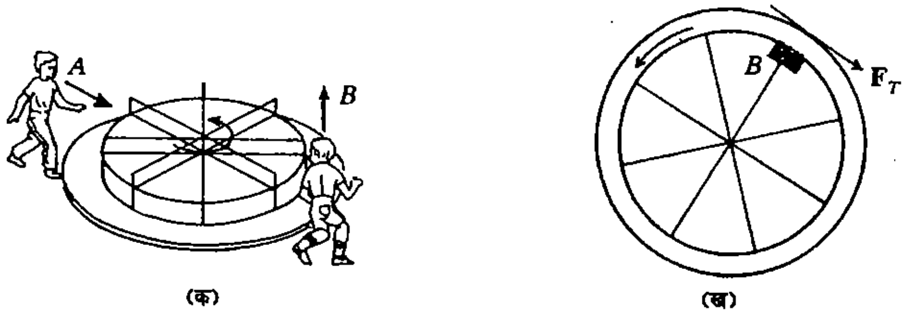
$$\mathbf{F}_T = mr\,\alpha\,\hat{\boldsymbol{\theta}}. \qquad (4{\cdot}17\ \text{ग})$$

इस तरह, उस वर्तुल गति के लिए, जो एकसमान नहीं है, बल के त्रिज्य या अभिकेंद्र घटक के अतिरिक्त बल का एक और घटक होता है जिसे अनुप्रस्थ घटक कहते हैं। आप इकाई 1 के भाग 1·4 में यह पढ़ चुके हैं कि अभिकेंद्र बल से कोणीय वेग की केवल **दिशा** बदलती है उसका परिमाण नहीं। तो कण पर अनुप्रस्थ बल क्या प्रभाव डालता है ?

अनुप्रस्थ बल की भूमिका

अनुप्रस्थ बल कण में परिमित कोणीय त्वरण उत्पन्न करता है। बल जितना ज़्यादा होगा त्वरण भी उतना ही ज़्यादा होगा यानि कोणीय चाल में वृद्धि की दर उतनी ही ज़्यादा होगी। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि यदि यह बल लगातार लग रहा हो तो कण का कोणीय वेग बढ़ता चला जाएगा। घूर्णन कर रहे पिंड पर यदि यह बल लगना बंद हो जाए तो आपके ख़्याल में क्या होगा ?

यदि $\mathbf{F}_T$ शून्य हो और $\mathbf{F}_R$ लगातार लग रहा हो तो कण एक वृत्त में शून्य कोणीय त्वरण यानि अचर कोणीय चाल से घूमता रहेगा। अतः कण को अचर कोणीय चाल से एक वृत्त में घूमते रहने के लिए केवल अभिकेंद्र बल की ज़रूरत होती है। यदि आप कण की घूर्णन गति की दर को बढ़ाना या घटाना चाहते हैं तब आपको त्रिज्या की लांबिक दिशा में एक अनुप्रस्थ बल लगाना होगा। मान लीजिए आप एक पहिए (कुम्हार का चक्का या साइकिल का पहिया), चक्की अथवा मेरी-गो-राउंड को विरामावस्था से शुरू करके घुमाना चाहते हैं (चित्र 4·10 क) तो इसके लिए आपको अनुप्रस्थ बल लगाना होगा क्योंकि आप इसकी कोणीय चाल को शून्य से बढ़ाकर किसी धनात्मक मान तक लाना चाहते हैं। इसे एक वृत्त में घूमते रहने के लिए अभिकेंद्र बल की भी ज़रूरत होगी। अतः आपको एक ऐसा बल लगाना होगा जो त्रिज्या की ठीक-ठीक लांबिक दिशा में तो न हो पर त्रिज्य और अनुप्रस्थ बलों के परिणामी की दिशा में हो अर्थात् पिंड के केंद्र की ओर थोड़ा झुका हुआ हो।



चित्र 4.10: (क) मेरी-गो-राउंड को घूमते रहने के लिए A के अनुदिश एक त्रिज्य बल के साथ-साथ B के अनुदिश एक अनुप्रस्थ बल की ज़रूरत होती है; (ख) साइकिल के पहिए में जब आप ब्रेक (B) लगाते हैं तो उस पर एक मंदकारी अनुप्रस्थ बल $\mathbf{F}_T$ कार्य करता है।

कार्यकलाप

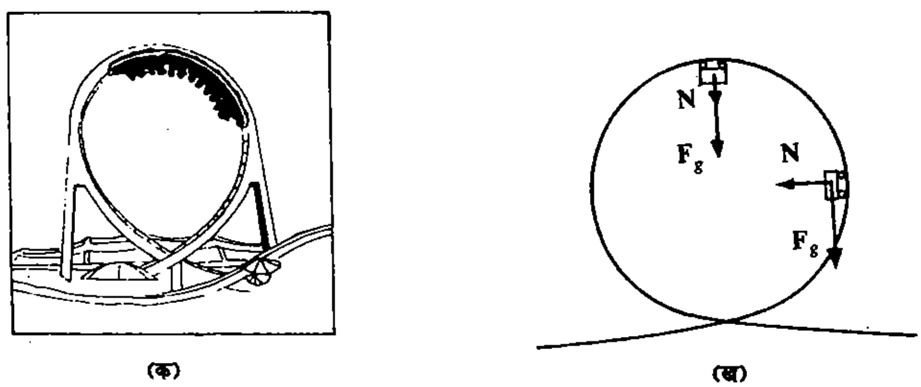
आप स्वयं मेरी-गो-राउंड, चक्की अथवा साइकिल का पहिया घुमाइए। ऐसा करते समय आप किस दिशा में बल लगाते हैं ? चित्र 4·10 क में दिशा खींचिए।

आप यह जान चुके हैं कि घूर्णन कर रहे पिंड की कोणीय चाल बढ़ाने के लिए अनुप्रस्थ बल लगाना पड़ता है। उस पिंड की कोणीय चाल में कमी लाने के लिए समान बल को विपरीत दिशा में लगाना पड़ता है। ऐसा ही होता है जब आप साइकिल चलाते समय ब्रेक B लगाते हैं। तब ब्रेक की सतह पहिए के रिम के संपर्क में आती है (देखिए चित्र 4·10 ख)। इससे पहिए की वामावर्त गति की विपरीत दिशा में अनुप्रस्थ घर्षण बल $\mathbf{F}_T$ उत्पन्न होता है जो उसकी कोणीय चाल को कम कर देता है।

वास्तव में जिस धुरी पर पहिया घूम रहा होता है उसमें और पहिये के बीच सदा ही घर्षण मौजूद रहता है। यही कारण है कि अगर पहिए को घुमाए बिना छोड़ दिया जाता है तो घर्षण की वजह से तुरंत या कुछ देर बाद उसका घूमना रुक जाता है। यह ठीक उसी प्रकार की क्रिया है जिसमें घर्षण बल एक सरल रेखा में चल रहे पिंड की गति को तब तक कम करता चला जाता है जब तक कि वह रुक नहीं जाता।

उदाहरण 3

एक रोलर कोस्टर के पथ में त्रिज्या r वाला एक वृत्ताकार भाग है (चित्र 4·11 क)। ऊर्ध्वाधर वृत्त के शीर्ष पर भी रेलगाड़ी पटरी पर बनी रहे, इसके लिए ट्रेन की चाल क्या होनी चाहिए ?



चित्र 4.11: (क) रोलर कोस्टर (roller coaster) मनोरंजन के लिए बने पार्कों में एक घुमावदार पथ होता है जिस पर रेलगाड़ी चलती है। रेलगाड़ी पर लग रहे बलों के अंतर्गत गुरुत्व और रेलगाड़ी तथा पटरी के बीच अभिलंबीय प्रतिक्रिया बल होते हैं। इन बलों के परिणामी से वह अभिकेंद्र बल प्राप्त होता है जिसकी वजह से रेलगाड़ी उस के वृत्तीय भाग में पटरी पर बनी रहती है: (ख) वृत्त के शीर्ष पर नेट बल अधोमुखी होता है।

रेलगाड़ी और पटरी पर कौन-कौन से बल कार्य कर रहे हैं ? ये बल हैं गुरुत्व, और रेलगाड़ी तथा पटरी के बीच अभिलंबीय प्रतिक्रिया बल। पटरी पर रेलगाड़ी तब तक बनी रहेगी जब तक कि उनके बीच का अभिलंबीय

प्रतिक्रिया बल शून्य नहीं होता। बलों को चित्र 4.11 ख में वृत्त के दो बिन्दुओं पर दिखाया गया है। न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार वृत्त के किसी बिन्दु पर लगे नेट बल और त्वरण का संबंध होता है :

$$\mathbf{F}_g + \mathbf{N} = m\mathbf{a}.$$

सुविधा के लिए हम एक ऐसी निर्देशांक पद्धति (coordinate system) लेते हैं जिसकी धनात्मक दिशा अधोमुखी हो। तब वृत्त के शीर्ष पर बल के ऊर्ध्वाधर घटक का समीकरण हो जाता है :

$$mg + N = ma = \frac{mv^2}{r},$$

जिसमें कि $$v^2 = gr + \frac{Nr}{m}.$$

अब यदि वृत्त के शीर्ष पर N शून्य नहीं रहना हो तो

$$(v^2 - gr) > 0,$$

अर्थात् $$v^2 > gr$$

या $$v > \sqrt{gr}.$$

इसलिए वृत्त के शीर्ष पर भी रेलगाड़ी का संपर्क पटरी से बनाए रखने के लिए यह ज़रूरी है कि उसकी चाल सदा ही $\sqrt{gr}$ से ज़्यादा हो। इसलिए किसी आम रोलर कोस्टर के लिए, जिसके लिए प्रायः $r = 6\text{m}$, माना,

$$\sqrt{gr} = \sqrt{(9{\cdot}8\ \text{m s}^{-2})(6\text{m})} = 7{\cdot}7\ \text{m s}^{-1}.$$

तो ऐसे रोलर कोस्टर में रेलगाड़ी की चाल सदा $7{\cdot}7\ \text{m s}^{-1}$ से अधिक होनी चाहिए।

बोध प्रश्न 7

समतल सड़क में 95 m की वक्रता त्रिज्या वाला एक मोड़ है। इस मोड़ पर कार को ठीक से मोड़ने के लिए उसकी अधिकतम चाल क्या होगी जबकि (क) सड़क सूखी हो और स्थैतिक घर्षण गुणांक 0·88 हो और (ख) सड़क बर्फ़ से ढकी हो और स्थैतिक घर्षण गुणांक 0·21 हो ? (संकेतः टायर और सड़क के बीच के घर्षण बल से कार का त्वरण प्राप्त होता है।)

4.3.2 व्यापक कोणीय गति

आइए अब हम कोणीय गति कर रहे एक कण पर लगने वाला बल निकालें। समीकरण 4·14 का प्रयोग करने प न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\left(\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2\right)\hat{\mathbf{r}} + m\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \mathbf{F}_R + \mathbf{F}_T, \qquad (4{\cdot}18\ \text{क}$$

जहां $\mathbf{F}_R$ त्रिज्य बल है जो $\hat{\mathbf{r}}$ के अनुदिश कार्य करता है और जिसका परिमाण

$$F_R = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2), \qquad (4{\cdot}18\ \text{ख})$$

और $\mathbf{F}_T$ अनुप्रस्थ बल है जो $\hat{\mathbf{r}}$ की लांबिक दिशा में कार्य करता है और जिसका परिमाण

$$F_T = m\left(r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta}\right). \qquad (4{\cdot}18\ \text{ग})$$

समीकरण 4·18 क, ख, और ग अति व्यापक समीकरण हैं। इनका प्रयोग द्विविम गति से संबंधित किसी भी प्रश्न, मसलन ग्रहों की गति आदि, को हल करने में किया जा सकता है। देखने में तो ये व्यंजक आपको कुछ जटिल लग सकते हैं पर उनकी जटिलता देखकर आप घबराइए नहीं। यहां हमारे लिए सिर्फ़ इतना समझना

ज़रूरी है कि हम समतल ध्रुवी निर्देशांकों का प्रयोग करके किसी भी द्विविम गति का वर्णन कर सकते हैं। तब हम कण की द्विविम गति को दो तरह की गतियों का संयोजन कह सकते हैं — एक तो ध्रुवांतर रेखा (radius vector) के अनुदिश सरल रेखा में गति और दूसरे निर्देश तंत्र के मूल बिन्दु के गिर्द घूर्णन। कण की रैखिक गति में त्वरण त्रिज्य बल के कारण और घूर्णी गति में त्वरण अनुप्रस्थ बल के कारण होता है। ज़्यादातर स्थितियों के लिए समीकरण 4.18 क, ख, ग सरल हो जाते हैं।

अभी तक हमने किसी कण की कोणीय गति का अध्ययन करने के लिए न्यूटन के द्वितीय नियम का प्रयोग किया है। पर, अगर घूर्णन कर रहा पिंड एक दृढ़ पिंड (rigid body) हो तो पिंड के प्रत्येक कण की गति निर्धारित करने के लिए न्यूटन के नियमों को लागू करना काफ़ी मुश्किल होगा। क्या हम न्यूटन के नियम के अनुरूप कोई नियम नहीं बना सकते जो सीधे घूर्णी राशियों पर लागू हो सके ? इसके लिए हमें बल, रैखिक संवेग और त्वरण के अनुरूप कोणीय या घूर्णी राशियां चाहिए। हम पढ़ चुके हैं कि कोणीय त्वरण, रैखिक त्वरण का घूर्णी अनुरूप होता है। लेकिन बल का घूर्णी अनुरूप क्या होगा ? इसका उत्तर है बलआघूर्ण, जिसके बारे में हम अब पढ़ेंगे।

4.3.3 बलआघूर्ण

बलआघूर्ण क्या है, इसे ठीक से समझने के लिए निम्नलिखित कार्यकलाप कीजिए।

कार्यकलाप

दरवाज़े के किनारे एक बिंदु पर उसके तल के अनुदिश बल लगाकर उसे खोलिए। उसी बिन्दु पर दरवाज़े के तल की लांबिक दिशा में धक्का देकर उस दरवाज़े को खोलिए। और फिर, कब्ज़े के पास लगभग इतने ही बल से धक्का देकर दरवाज़ा खोलिए। इन तीनों में से किस विधि से दरवाज़ा जल्दी खुलता है ?

आप इसी कार्यकलाप को एक किताब के साथ कर सकते हैं या स्पैनर (पाने) से एक जंग लगे बोल्ट को खोलने का प्रयास कर सकते हैं।

सभी स्थितियों में आपने यह देखा होगा कि घूर्णन अक्ष से अधिक से अधिक दूरी पर दरवाज़े, किताब या स्पैनर की बांह की लांबिक दिशा में बल लगाने पर उन्हें खोलने का काम आसान हो जाता है। इस तरह हम यह देखते हैं कि कितनी आसानी से कोई पिंड घूर्णन करता है यह केवल इस बात पर ही निर्भर नहीं करता कि उस पर कितना बल लगाया गया है। यह इस बात पर भी निर्भर करता है कि किस बिन्दु तथा किस कोण पर बल लगाया गया है। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि यह बलआघूर्ण पर निर्भर करता है। एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र से प्रेक्षित किए गए एक कण के बलआघूर्ण को हम निम्नलिखित रूप से परिभाषित करते हैं :

यदि एक बिन्दु P पर स्थित एक कण पर, जिसका स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ है, एक बल $\mathbf{F}$ कार्य कर रहा हो तो मूल बिन्दु O के सापेक्ष उस पर कार्य कर रहा बलआघूर्ण होता है :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \qquad (4{\cdot}19 \text{ क})$$

बलआघूर्ण एक सदिश राशि है (चित्र 4.12)। इसका परिमाण होता है :

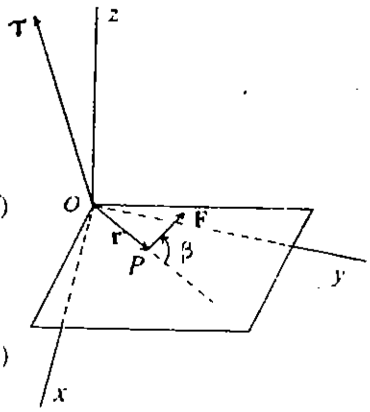
$$\tau = rF \sin\beta, \qquad (4{\cdot}19 \text{ ख})$$

जहां β, $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ के बीच का कोण है। इसकी दिशा $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ से बने समतल पर अभिलंब होती है। इस तरह हम यह पाते हैं कि $\boldsymbol{\tau}$ और $\mathbf{F}$ सदा एक दूसरे पर लंब होते हैं। बलआघूर्ण का मात्रक न्यूटन-मीटर (newton-metre) है। अब, यदि हम समीकरण 4.18 क से प्राप्त $\mathbf{F}$ के मान को यहाँ रखें तो

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_R + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_T. \qquad (4{\cdot}19 \text{ ग})$$

क्योंकि $\mathbf{F}_R$, $\mathbf{r}$ के समांतर है, इसलिए इनका सदिश गुणनफल शून्य होगा, यानि

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_T. \qquad (4{\cdot}19 \text{ घ})$$

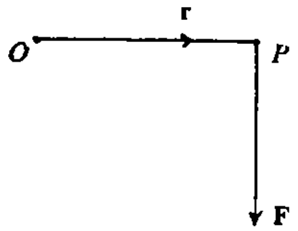


चित्र 4.12: स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ वाले एक कण P पर एक बल $\mathbf{F}$ लगाया गया है। $\mathbf{r}$ के साथ बल सदिश $\mathbf{F}$ कोण β बनाता है। O के सापेक्ष बल-आघूर्ण $\boldsymbol{\tau}$ को दिखाया गया है। इसकी दिशा दक्षिणहस्त नियम के अनुसार $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ से बने समतल पर लंब है।

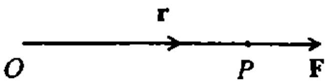
इस बात को आपको अच्छी तरह समझ लेना चाहिए कि बलआघूर्ण और बल बिल्कुल अलग-अलग राशियां हैं। बलआघूर्ण की संकल्पना से हमें लगाए गए बल और पिंड की घूर्णन करने की प्रवृत्ति के बीच का संबंध मिलता है। एक बात तो यह है कि बलआघूर्ण मूल बिन्दु पर निर्भर करता है जबकि बल मूल बिन्दु पर निर्भर नहीं करता। एक ही बल को धुरी अथवा मूल बिन्दु से ज़्यादा से ज़्यादा दूरी पर लगाकर आप ज़्यादा से ज़्यादा

बलआघूर्ण उत्पन्न कर सकते हैं। और अगर दिया हुआ बल और दूरी r नियत हो तो बलआघूर्ण अधिकतम तब होता है जब $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ समकोण पर होते हैं (देखिए चित्र 4·13 क)।

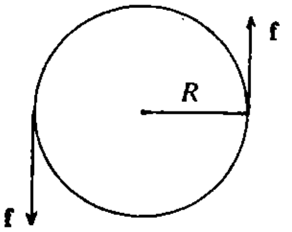
जब $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}$ समान रेखा के अनुदिश होते हैं तो बलआघूर्ण शून्य हो जाता है (चित्र 4·13 ख)। इस तरह हम यह पाते हैं कि यदि बलआघूर्ण शून्य हो तो यह आवश्यक नहीं कि बाह्य बल भी शून्य हो। उस स्थिति में भी बलआघूर्ण शून्य होता है जबकि बल उस बिन्दु पर अथवा उस अक्ष के अनुदिश लग रहा हो जिसके गिर्द कण घूर्णन कर रहा है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि ऐसी स्थिति में सदिश $\mathbf{r}$ शून्य हो जाएगा। उस स्थिति में भी बलआघूर्ण शून्य होता है जबकि बाह्य बल स्वयं शून्य हो। ध्यान रहे कि शून्य नेट बल वाले निकाय पर भी बलआघूर्ण हो सकता है (चित्र 4·13 ग)। आम तौर पर एक निकाय पर बलआघूर्ण और बल दोनों ही लग रहे होते हैं।



(क)



(ख)



(ग)

चित्र 4.13: बलआघूर्ण
(क) अधिकतम तब होता है जब $\mathbf{F}$ और $\mathbf{r}$ समकोण पर हों; (ख) शून्य होता है जब वे एक ही रेखा के अनुदिश हों; (ग) शून्य नेट बल वाले निकाय पर भी हो सकता है।

आइए अब हम xy-समतल में वर्तुल गति कर रहे कण पर लग रहा बलआघूर्ण निकालें। समीकरण 4·19 घ और समीकरण 4·17 ग से हमें मिलता है

$$\tau = \mathbf{r} \times m r \alpha \hat{\theta}$$

$$= mr^2 \alpha (\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta}), \text{ क्योंकि } \mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}$$

$$= mr^2 \alpha\, \hat{\mathbf{k}}, \text{ क्योंकि बोध प्रश्न 3 (ग) से } \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\theta} = \hat{\mathbf{k}},$$

या
$$\tau = mr^2 \boldsymbol{\alpha}. \qquad (4·20)$$

क्योंकि $\alpha\,\hat{\mathbf{k}}$ कोणीय त्वरण सदिश $\boldsymbol{\alpha}$ ही है।

आइए हम समीकरण 4·20 की न्यूटन के द्वितीय नियम $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ से तुलना करें। हम पाते हैं कि बलआघूर्ण कोणीय त्वरण $\boldsymbol{\alpha}$ और एक राशि mr^2 का गुणनफल है। तुलना करने पर हम कह सकते हैं कि यह राशि mr^2 द्रव्यमान का घूर्णी अनुरूप है। हम इस राशि mr^2 को कण का **घूर्णी जड़त्व** या **जड़त्व आघूर्ण** (rotational inertia या moment of inertia) कहते हैं और इसका प्रतीक I, लेते हैं। जड़त्व आघूर्ण का मात्रक किग्रा-मी² (kg m²) होता है और इसके अंतर्गत कण का द्रव्यमान और घूर्णन अक्ष के सापेक्ष कण की स्थिति दोनों ही आते हैं। आप जानते हैं कि कोई भी पिंड अपनी गति की अवस्था में हो रहे परिवर्तन का प्रतिरोध करता है और उस प्रतिरोध का माप पिंड के जड़त्वीय द्रव्यमान (inertial mass) से किया जाता है। ठीक उसी तरह हम यह कह सकते हैं कि पिंड अपनी घूर्णी गति में हो रहे परिवर्तन का भी प्रतिरोध करता है जिसका माप जड़त्व आघूर्ण से किया जाता है। यहां यह ध्यान दीजिए कि घूर्णन अक्ष बदलने पर I, यानि कण का जड़त्व आघूर्ण, बदल जाएगा जबकि m, यानि जड़त्वीय द्रव्यमान, अचर बना रहेगा। समीकरण 4·20 में mr^2 की जगह I रखकर, द्रव्यमान m वाले कण की नियत घूर्णन अक्ष के गिर्द वर्तुल गति के लिए हम लिख सकते हैं

$$\tau = I\,\boldsymbol{\alpha}, \qquad (4·21 \text{ क})$$

जहां
$$I = mr^2. \qquad (4·21 \text{ ख})$$

यह समीकरण न्यूटन के द्वितीय नियम $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ जैसा है। अतः समीकरण $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ से हमने जिन-जिन बातों का पता लगाया था उन्हीं बातों की जानकारी हम इससे पा सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि I अचर हो तो कोणीय त्वरण लगाए गए बलआघूर्ण के अनुलोमानुपाती (directly proportional) होता है। यदि बल-आघूर्ण शून्य हो तो पिंड एक नियत कोणीय चाल से चलता रहेगा। पिंड का जड़त्व आघूर्ण जितना कम होगा, समान बलआघूर्ण लगने से उसमें उतना ही अधिक कोणीय त्वरण उत्पन्न होगा। अब आप समीकरण 4·21 को एक ऐसा प्रश्न हल करने में लागू कर सकते हैं जिसमें कण के कोणीय वेग को बदलने के लिए बलआघूर्ण लगाया गया है।

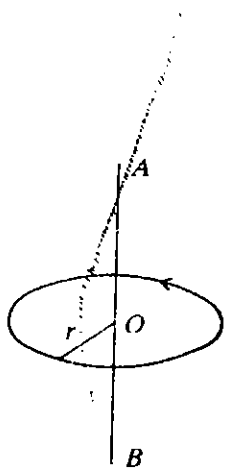
बोध प्रश्न 8

आपने आधार पाठ्यक्रम एफ. एस. टी.-1 के खंड 3 में पढ़ा होगा कि न्यूट्रॉन तारा एक अत्यधिक सघन और तेज़ी से अपने अक्ष पर घूम रहा एक पिंड है जो कि अपने जीवन के अंत में किसी तारे के संकुचन से बनता है। 15×10^{30} kg द्रव्यमान वाले न्यूट्रॉन तारे का, अपने केंद्र से होकर जाने वाले घूर्णन अक्ष के गिर्द जड़त्व आघूर्ण 45×10^{36} kg m² है। चुंबकीय बलों से संबंधित बलआघूर्ण के कारण न्यूट्रॉन तारे की घूर्णन दर धीरे-धीरे कम होती जा रही है। यदि इसकी कोणीय चाल में परिवर्तन की दर 5×10^{-5} rad s⁻² हो तो चुंबकीय बलआघूर्ण का परिमाण ज्ञात कीजिए।

कोणीय गति से संबंधित एक और प्रश्न यह है कि क्या हम घूर्णन कर रहे कण की गतिज ऊर्जा (kinetic energy) को कोणीय चरों के पदों में लिख सकते हैं ? आइए अब हम देखें कि यह कैसे किया जा सकता है ।

4.3.4 घूर्णी गतिज ऊर्जा

मान लीजिए द्रव्यमान m वाला कण एक नियत घूर्णन अक्ष AOB के गिर्द त्रिज्या r वाले एक वृत्त में घूम रहा है (देखिए चित्र 4.14)। मान लीजिए अक्ष के गिर्द उसकी कोणीय चाल ω है। तब इसकी गतिज ऊर्जा होगी



चित्र 4.14

$$\text{गतिज ऊर्जा} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(r\omega)^2.$$

$$= \frac{1}{2}mr^2\omega^2.$$

समीकरण 4.21 ख से $I = mr^2$ रखने पर मिलता है

$$K_{Rot} = \frac{1}{2}I\omega^2. \tag{4.22}$$

इसको पिंड की **घूर्णी गतिज उर्जा** (rotational kinetic energy) भी कहा जाता है ।

अभी तक हमने कोणीय गति की कुछ संकल्पनाओं को समझा है । हमने जाना है कि किसी पिंड की रैखिक और कोणीय गति की शुद्धगतिकी (kinematics) और गतिकी (dynamics) में एक अनुरूपता है, यानि विस्थापन, वेग, त्वरण, बल आदि रैखिक गति की संकल्पनाओं के अनुरूप कोणीय गति की संकल्पनाएं हैं, कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, बलआघूर्ण आदि। अब अगर हम रैखिक संवेग के संगत कोणीय राशि की परिभाषा दे सकें तो यह अनुरूपता पूरी हो जाएगी। वास्तव में इस प्रकार की एक राशि है जिसे कोणीय संवेग (angular momentum) कहा जाता है। अब हम कोणीय संवेग के बारे में पढ़ेंगे, विशेष रूप से इसलिए कि इसके द्वारा हम एक और महत्वपूर्ण संरक्षण नियम जान सकेंगे।

4.4 कोणीय संवेग

हम जानते हैं कि बल $\mathbf{F}$ के कारण कण पर बलआघूर्ण $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ होता है। क्योंकि न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$, इसलिए

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

अब,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times (m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (\because \mathbf{p} = m\mathbf{v})$$

$$= 0 + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (\because \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0)$$

अतः हम लिख सकते हैं

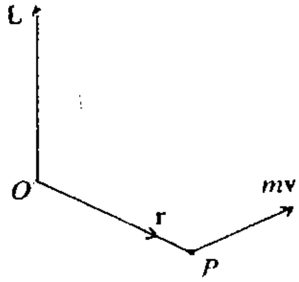
$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}).$$

हम मूल बिन्दु O के सापेक्ष कण के कोणीय संवेग $\mathbf{L}$ की निम्न परिभाषा देते हैं :

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \tag{4.23 क}$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि कोणीय संवेग एक सदिश है जिसका परिमाण

$$L = rp \sin\gamma, \qquad (4{\cdot}23\ \text{ख})$$



चित्र 4.15: कण का कोणीय संवेग ।

है, जहां γ, $\mathbf{r}$ और $\mathbf{p}$ के बीच का कोण है । $\mathbf{L}$ की दिशा, $\mathbf{r}$ और $\mathbf{p}$ से बने समतल पर लंब होती है । यह दक्षिणहस्त नियम से निकाली जाती है (देखिए चित्र 4·15)। हालांकि चित्र में $\mathbf{L}$ को मूल बिन्दु से गुज़रते हुए दिखाया गया है पर उसे वहां बनाने को कोई विशेष सार्थकता नहीं है । केवल $\mathbf{L}$ की दिशा और उसके परिमाण की सार्थकता है इसकी नहीं कि वह किस बिन्दु से होकर गुज़रता है । कोणीय संवेग का मात्रक किग्रा. मी./से (kg m s^{-1}) है । इस तरह, समीकरण 4·23 क का प्रयोग करने से बलआघूर्ण का व्यंजक हो जाता है :

$$\tau = \frac{d\mathbf{L}}{dt}. \qquad (4{\cdot}24)$$

आप यह देख सकते हैं कि यह संबंध न्यूटन के द्वितीय नियम $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ के अनुरूप है । हम कोणीय संवेग का संबंध कोणीय वेग के साथ भी स्थापित कर सकते हैं । मान लीजिए द्रव्यमान m वाला कण xy-समतल में एक नियत घूर्णन अक्ष के गिर्द वामावर्त दिशा में घूम रहा है और उसका रैखिक संवेग $\mathbf{p}$ है । तब इसका कोणीय संवेग होगा

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\,\mathbf{v} = m\,\mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

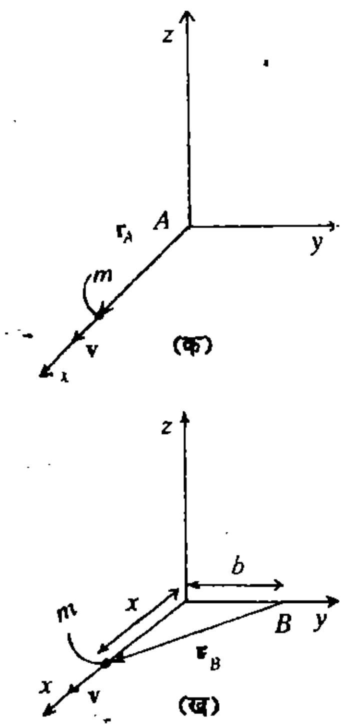
$\mathbf{r}$ के लिए समीकरण 4·6 का और $\mathbf{v}$ के लिए समीकरण 4·13 प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\mathbf{L} = m\,\mathbf{r} \times (\dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}),$$

$$= 0 + mr^2\,\dot{\theta}\,(\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}), \text{ क्योंकि } \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{r}} = 0,$$

या

$$\mathbf{L} = mr^2\,\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{k}}. \qquad (4{\cdot}25\ \text{क})$$



चित्र 4.16: (क) A के सापेक्ष और (ख) B के सापेक्ष एकसमान गति करने वाले कण का कोणीय संवेग ।

अब, क्योंकि mr^2 कण का जड़त्व आघूर्ण I है और $\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{k}}$ कोणीय वेग सदिश $\boldsymbol{\omega}$ है इसलिए हम लिख सकते हैं

$$\mathbf{L} = I\,\boldsymbol{\omega}. \qquad (4.25\ \text{ख})$$

ध्यान दीजिए कि यह समीकरण $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$ के अनुरूप है । आइए अब हम कोणीय संवेग से संबंधित एक उदाहरण को हल करें।

उदाहरण 4: एकसमान गति वाले कण का कोणीय संवेग

द्रव्यमान m वाला एक ब्लॉक जिसके विस्तार की उपेक्षा की जा सकती है एक सरल रेखा में अचर चाल v से चल रहा है (देखिए चित्र 4·16)। मूल बिन्दु A के सापेक्ष उसका कोणीय संवेग $\mathbf{L}_A$ और मूल बिन्दु B के सापेक्ष उसका कोणीय संवेग $\mathbf{L}_B$ क्या होगा ?

मान लीजिए कण x-अक्ष के अनुदिश चल रहा है, यानि $\mathbf{v} = v\,\hat{\mathbf{i}}$ जैसा कि चित्र 4·16 क में दिखाया गया है । A के सापेक्ष कण का स्थिति सदिश है

$$\mathbf{r}_A = x\,\hat{\mathbf{i}}$$

क्योंकि $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{v}$ के समांतर है इसलिए इनका सदिश गुणनफल शून्य होगा और

$$\mathbf{L}_A = \mathbf{r}_A \times m\,\mathbf{v} = m\,\mathbf{r}_A \times \mathbf{v} = 0.$$

B के सापेक्ष कण का कोणीय संवेग होगा

$$\mathbf{L}_B = m\,\mathbf{r}_B \times \mathbf{v}.$$

$\mathbf{r}_B$ को हम निम्न रूप में लिख सकते हैं

$$\mathbf{r}_B = x\,\hat{\mathbf{i}} - b\,\hat{\mathbf{j}}$$

जहां x, $\mathbf{v}$ के समांतर $\mathbf{r}_B$ का घटक है और b, $\mathbf{v}$ की लांबिक दिशा में इसका घटक है । क्योंकि $\hat{\mathbf{i}} \times \mathbf{v} = 0$, इसलिए

$$\mathbf{L}_B = m\,(x\,\hat{\mathbf{i}} - b\,\hat{\mathbf{j}}) \times v\,\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0} - mbv\,(\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}}),$$

या

$$\mathbf{L}_B = mbv\,\hat{\mathbf{k}}\,.$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि $\mathbf{L}_B$ धनात्मक z-दिशा में है और इसका परिमाण mbv है। इस उदाहरण से यह पता चलता है कि किस प्रकार **L** मूल बिन्दु पर निर्भर करता है। और क्योंकि एक सरल रेखा में चल रहे कण के लिए b अचर होता है, इसलिए अचर चाल से सरल रेखा में चल रहे कण का कोणीय संवेग अचर होगा। अतः इस कण पर कार्य कर रहा बलआघूर्ण शून्य होगा।

ऊपर दिए गए उदाहरण से एक और बात हमारे सामने आती है। आप यह नहीं समझिए कि $\boldsymbol{\omega}$, **L**, $\boldsymbol{\alpha}$ और $\boldsymbol{\tau}$ आदि राशियों की परिभाषा या इनकी सार्थकता सिर्फ़ कोणीय गति के लिए ही है। किसी भी गतिमान पिंड में मूल बिन्दु के सापेक्ष कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, कोणीय संवेग और बलआघूर्ण हो सकते हैं। मूल बिन्दु अलग-अलग होने पर इन राशियों के मान भी अलग-अलग होते हैं।

बोध प्रश्न 9

द्रव्यमान m वाला एक कण विरामावस्था से पृथ्वी के गुरुत्वाकर्षण क्षेत्र में गैलीलियो के नियम $z = z_0 - \frac{1}{2}gt^2$ के अनुसार नीचे गिरता है। इसके क्षैतिज निर्देशांक $x = x_0$, $y = 0$ हैं।

क) क्षण t पर कण का स्थिति सदिश **r**, और वेग **v** ज्ञात कीजिए।

ख) मूल बिन्दु के सापेक्ष समय के एक फलन के रूप में कोणीय संवेग **L** ज्ञात कीजिए।

ग) मूल बिन्दु के सापेक्ष कण पर कार्य कर रहा बलआघूर्ण ज्ञात कीजिए। $\left(\text{संकेत } \boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{L}}{dt}\right)$

4.4.1 कोणीय संवेग-संरक्षण और उसके अनुप्रयोग

अगर कण पर कार्य कर रहा नेट बाह्य बलआघूर्ण शून्य हो तो क्या होता है ?

तब समीकरण 4.24 हो जाता है :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}$$

अर्थात्

$$\mathbf{L} = \text{अचर}$$

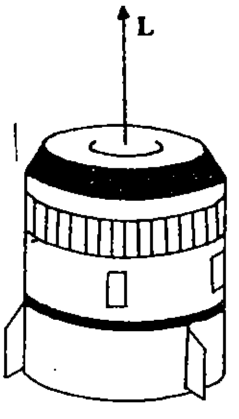
इस तरह, हमें कोणीय संवेग-संरक्षण नियम प्राप्त होता है : **यदि कण पर कोई नेट बाह्य बलआघूर्ण कार्य न कर रहा हो तो कण के कोणीय संवेग का परिमाण और दिशा दोनों ही अचर बने रहते हैं।**

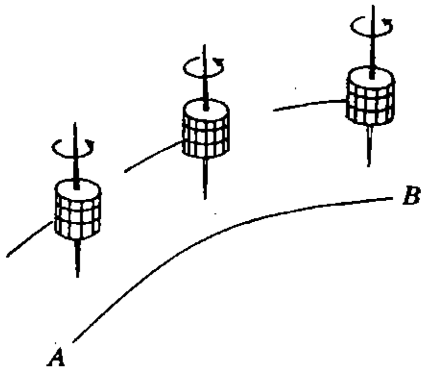
अचर कोणीय संवेग का अर्थ है कि कण एक नियत समतल में ही गति करता है जो **L** पर अभिलंब होता है। ऐसा इसलिए है, क्योंकि परिभाषा के अनुसार $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ और **L**, **r** तथा **p** वाले समतल पर अभिलंब है। और, क्योंकि **L** की दिशा नियत है, इसलिए **r** और **v** उस समतल में स्थित होंगे जो अचर **L** सदिश पर अभिलंब है। अतः कण की गति का अध्ययन करने के लिए हमें केवल द्विविम निर्देश तंत्र ही चाहिए। कोणीय संवेग-संरक्षण नियम अवपरमाण्विक कणों (subatomic particles) से लेकर घूर्णन कर रही विशाल मंदाकिनियों तक के ऊपर लागू होता है। आइए अब हम इस नियम को और अच्छी तरह से समझने के लिए इससे संबंधित कुछ अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ें।

उपग्रह-परिचालन

कोणीय संवेग-संरक्षण का प्रयोग उपग्रह को संचालित करने अर्थात् अध्ययन किए जाने वाले खगोल पिंड (astronomical object) की दिशा में घुमाने के लिए किया जाता है। इसके लिए उपग्रह के अंदर कुछ पहिए लगा दिए जाते हैं।

प्रत्येक पहिए को घुमाने और रोकने के लिए मोटर और ब्रेक लगे होते हैं। जब पहिया घूमना शुरू करता है तब कोणीय संवेग को संरक्षित रखने के लिए उपग्रह विपरीत दिशा में घूमने लगता है। जब उपग्रह एक अपेक्षित कोण तक घूम जाता है तब पहिये को रोक दिया जाता है। फलस्वरूप उपग्रह का घूर्णन रुक जाता है। इसमें प्रायः तीन पहियों का प्रयोग किया जाता है जिससे कि उपग्रह को किसी भी दिशा में मोड़ा जा सके। क्योंकि मोटर और ब्रेक सौर ऊर्जा से जनित बिजली से चलते हैं, इसलिए इसमें कोई ऐसा ईंधन नहीं होता जो समाप्त हो जाता हो।





चित्र 4.17: (क) एक ऐसे उपग्रह के लिए जिस पर कोई नेट बाह्य बलआघूर्ण न लग रहा हो, **L** का परिमाण अचर होता है और उसकी दिशा समष्टि में नियत होती है। क्योंकि उसका घूर्णन अक्ष **L** के अनुदिश होता है, इसलिए वह भी नियत बना रहता है; (ख) इस तथ्य का प्रयोग किसी कक्षा में घूमते कृत्रिम उपग्रह को स्थायी बनाये रखने के लिए भी किया जाता है। उपग्रह को उसके अक्ष के गिर्द स्पिन कर दिया जाता है। क्योंकि **L** नियत होता है, इसलिए घूर्णन अक्ष की दिशा भी नियत बनी रहती है, जिससे कि उपग्रह परिक्रमा करते हुए स्थायी बना रहता है।

कोणीय संवेग-संरक्षण के कारण ही उपग्रह का घूर्णन अक्ष समष्टि में नियत होता है। प्रायः उपग्रह घूर्णतः विमुक्त पिंड (rotationally isolated body) होते हैं यानि उन पर कोई नेट बाह्य बलआघूर्ण कार्य नहीं करता। तो हम पाते हैं कि **L** की दिशा और इस तरह घूर्णन अक्ष की दिशा नियत रहती है। इसलिए, उपग्रह का प्रचक्रण (spinning) होते रहने पर कक्षा में उसका स्थायित्व बना रहता है (देखिए चित्र 4·17)।

रस्सी के संकुचन के साथ-साथ होने वाला कोणीय त्वरण

चित्र 4.18: द्रव्यमान m का एक कण त्रिज्या r_0 के वृत्त में v_0 वेग से गति करता है। यह एक रस्सी S से बंधा हुआ है जो कि एक नली T से होकर जाती है। P पर रस्सी को खींच कर वृत्त की त्रिज्या कम की जा सकती है।

द्रव्यमान m वाले एक पिंड को एक रस्सी में बांधकर एक क्षैतिज वृत्ताकार पथ (चित्र 4·18 में डैश-रेखा वाला वृत्त) में घुमाया गया है। जब वृत्त की त्रिज्या r_0 होती है तब पिंड वेग $\mathbf{v}_0$ से घूमता है। ऐसा देखा गया है कि रस्सी को अंदर की ओर खींच कर छोटा कर देने पर पिंड तेज़ी से घूर्णन करने लगता है। पिंड की चाल में वृद्धि क्यों होती है ?

पिंड पर रस्सी के कारण लगा हुआ बल त्रिज्य होता है अर्थात् यह $\mathbf{r}_0$ के अनुदिश होता है। यहां हम गुरुत्व की उपेक्षा कर रहे हैं। तब पिंड पर नेट बाह्य बलआघूर्ण शून्य होगा और उसका कोणीय संवेग संरक्षित रहेगा। इसलिए रस्सी को छोटा करने पर भी कोणीय संवेग अचर बना रहना चाहिए। क्योंकि शुरु में वृत्त की त्रिज्या r_0 है, इसलिए पिंड के प्रारंभिक कोणीय संवेग का परिमाण होता है :

$$\left| m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 \right| = m r_0 v_0 \sin 90^\circ$$
$$= m r_0 v_0$$

जब रस्सी की लंबाई कम करके वृत्त की त्रिज्या **r** कर दी जाती है, तब पिंड के कोणीय संवेग का परिमाण होता है :

$$\left| m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \right| = m\, r\, v \sin 90^\circ$$
$$= m\, r\, v$$

क्योंकि कोणीय संवेग अचर है, इसलिए

$$m\, r_0 v_0 = m\, r\, v$$

या $$v = \frac{v_0 r_0}{r}.$$

क्योंकि r, r_0 से छोटा है इसलिए v, v_0 से अधिक होगा अर्थात् पिंड और तेज़ी से चलने लगेगा। अब हम इस इकाई में पढ़े हुए तथ्यों का एक संक्षिप्त विवरण यहां देंगे।

4.5 सारांश

- अत्यणु कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग और कोणीय त्वरण सदिश होते हैं। परिभाषा के अनुसार

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}\ ,\ \alpha = \frac{d\omega}{dt}$$

कोणीय विस्थापन और कोणीय वेग सदिश घूर्णन अक्ष के अनुदिश होते हैं और उनकी दिशा दक्षिणहस्त नियम से निर्धारित की जाती है।

- समतल ध्रुवी निर्देशांकों का प्रयोग द्विविम कोणीय गति का वर्णन करने के लिए और रैखिक तथा कोणीय गति के शुद्धिगतिक चरों के बीच के संबंध को व्यक्त करने के लिए किया जा सकता है।

- एकसमान वर्तुल गति में r और ω अचर होते हैं और

$$\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}\,,\ \mathbf{v} = r\,\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}}\,,\ \mathbf{a}_R = -\frac{v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}}$$

- वर्तुल गति में r अचर होता है, ω बदलता रहता है जिससे कि परिमित α प्राप्त होता है और

$$\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}\,,\ \mathbf{v} = r\,\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}},\ \mathbf{a} = -\frac{v^2}{r}\,\hat{\mathbf{r}} + \alpha\, r\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_T$$

- व्यापक कोणीय गति में r एक चर होता है और

$$\mathbf{r} = r\,\hat{\mathbf{r}}\,,\ \mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\dot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = \mathbf{a}_R + \mathbf{a}_T$$

सदिश रूप में इन राशियों के संबंध निम्न होते हैं :

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}\ ,\ \mathbf{a}_R = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}\,,\ \mathbf{a}_T = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

- कोणीय गति में बलआघूर्ण और जड़त्व आघूर्ण, क्रमशः बल और जड़त्वीय द्रव्यमान के अनुरूप होते हैं। मूल बिन्दु के सापेक्ष बल $\mathbf{F}$ के अधीन, $\mathbf{r}$ से विस्थापित कण पर कार्य कर रहा बलआघूर्ण होता है :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुरूप बलआघूर्ण और कोणीय संवेग में निम्नलिखित संबंध होता है :

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt},\ \text{जहां}\ \ \mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

- एक नियत घूर्णन अक्ष के गिर्द त्रिज्या r वाले वृत्त में गतिमान द्रव्यमान m वाले पिंड के लिए

$\boldsymbol{\tau} = I\,\boldsymbol{\alpha}$ जहां $I = mr^2$ उसका जड़त्व आघूर्ण है।

- कोणीय चाल ω से घूर्णन कर रहे द्रव्यमान m वाले पिंड की गतिज ऊर्जा होती है

$$K_{Rot} = \frac{1}{2}\,I\,\omega^2$$

- यदि किसी निकाय पर कार्य कर रहा नेट बाह्य बलआघूर्ण शून्य हो तो कण का कोणीय संवेग अचर होता है । क्योंकि यह एक सदिश है अतः इसका परिमाण और दिशा दोनों ही अचर होते हैं। यही कोणीय संवेग-संरक्षण नियम है और इसके अनेक क्षेत्रों में अनुप्रयोग होते हैं।

4.6 अंत में कुछ प्रश्न

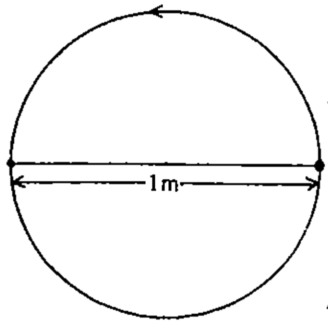
1. एक समकोणीय निर्देशांक पद्धति (rectangular co-ordinate system) लीजिए। एक कण x-अक्ष क समांतर अचर चाल v से चल रहा है। दिखाइए कि इसके कोणीय वेग का परिमाण मूल बिन्दु से उसकी दूरी के वर्ग के प्रतिलोमानुपाती (inversely proportional) होता है। इसके कोणीय त्वरण के परिमाण का भी एक व्यंजक प्राप्त कीजिए।

2. द्रव्यमान 5g वाला एक कण अचर त्रिज्य चाल $\dot{r} = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ से एक समतल में गतिमान है। कोणीय वेग अचर है और इसका परिमाण $\dot{\theta} = 2\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ है। यदि मूल बिन्दु से कण 3 m की दूरी पर हो तो कण का (क) वेग, (ख) त्वरण और (ग) गतिज ऊर्जा क्या होंगे ?

3. द्रव्यमान m वाला एक कण

$$\mathbf{r} = 6t^4\,\hat{\mathbf{i}} - 3t^2\,\hat{\mathbf{j}} + (4t^3 - 5)\,\hat{\mathbf{k}}$$

से परिभाषित एक समष्टि वक्र के अनुदिश गतिमान है। मूल बिन्दु के सापेक्ष उसका (क) कोणीय संवेग, (ख) बलआघूर्ण और (ग) घूर्णी गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए।



चित्र 4.19

4. 20 g और 30 g वाले दो पिंड 1m लंबाई वाले एक हल्के दंड से जुड़े हैं और एक क्षैतिज वृत्त में गतिमान हैं जैसा कि चित्र 4.19 में दिखाया गया है। प्रत्येक पिंड की चाल $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ है। (क) केंद्र के सापेक्ष पिंडों का कुल कोणीय संवेग ज्ञात कीजिए; (ख) यदि दंड एकसमान रूप से सिकुड़कर अपनी मूल लंबाई का आधा हो जाए तो क्या पिंडों की चाल में परिवर्तन आएगा ? यदि हाँ, तो कितना परिवर्तन आएगा ?

4.7 उत्तर

बोध प्रश्न

1. घूर्णन का परिमाण $2\pi/3$ rad होगा।

   अगर घड़ी का सामने का तल आपकी ओर है तो घूर्णन की दिशा घड़ी के तल पर लम्बवत् और आपके विपरीत दिशा में होगी।

2. क्योंकि ω अचर है, अतः $\dfrac{d\omega}{dt} = 0$, या $\dfrac{d(\omega^2)}{dt} = \dfrac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\,.\,\boldsymbol{\omega}) = 0.$

$$\because \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{A}\,.\,\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\,.\,\mathbf{B} + \mathbf{A}\,.\,\frac{d\mathbf{B}}{dt},$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}) = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\cdot\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}\cdot\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = 2\left(\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\right)\cdot\boldsymbol{\omega} \quad (\because \mathbf{A}\,.\,\mathbf{B} = \mathbf{B}\,.\,\mathbf{A})$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dt}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}) = 2\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\omega}, \text{ या } 2\,\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\omega} = 0,$$

यानि $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\omega}$ पर लम्बवत् है।

3. (क) i) $|\hat{\mathbf{r}}| = \sqrt{\hat{\mathbf{r}}\,.\,\hat{\mathbf{r}}} = \sqrt{(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}})\,.\,(\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}})}$

$$= \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1$$

ii) $|\hat{\boldsymbol{\theta}}| = \sqrt{\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}}$

$$= \sqrt{(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}})\cdot(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}})}$$

$$= \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta} = 1$$

iii) $\hat{\mathbf{r}}\,.\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}})\,.\,(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}})$

$$= -\cos\theta\,\sin\theta + \sin\theta\cos\theta = 0$$

(ख) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = (A_r\hat{\mathbf{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})\cdot(B_r\hat{\mathbf{r}} + B_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}})$

$$= A_r B_r(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) + A_r B_\theta(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) + A_\theta B_r(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) + A_\theta B_\theta(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}})$$

$$= A_r B_r(\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}) + A_\theta B_\theta(\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}}) \left[\because\ \hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 0\right]$$

भाग (क) के i) और ii) से $\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}} = 1$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{\theta}} = 1$

इसलिए $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta$

(ग) $\hat{\mathbf{r}}\times\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\cos\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \sin\theta\,\hat{\mathbf{j}})\times(-\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + \cos\theta\,\hat{\mathbf{j}})$

$$= \cos^2\theta\,(\hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}}) - \sin^2\theta\,(\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}})\ (\because\ \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{j}} = \mathbf{0})$$

$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}}\ (\because\ \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{j}} = -\hat{\mathbf{j}}\times\hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{k}})$$

4. हम 4·6 से 4·11 तक के समीकरणों के साथ-साथ सारणी 4·1 में दिए अचर कोणीय त्वरण से संबंधित समीकरणों का प्रयोग करेंगे। यहां $r = 0{\cdot}5$ m, $\alpha = 3{\cdot}0$ rad s^{-2}.

(क) कोणीय विस्थापन का परिमाण होता है

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2}\alpha t^2, \text{ क्योंकि इस प्रश्न में } \omega_o = 0$$

या $\theta = \frac{1}{2}(3\ \text{rad s}^{-2})(2^2\ \text{s}^2) = 6$ rad.

θ की दिशा O से A (चित्र 4·7) की ओर घूर्णन अक्ष के अनुदिश होगी।
कोणीय चाल होगी

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = \alpha t = 3\ \text{rad s}^{-2}\times 2\ \text{s}$$

या $\omega = 6$ rad s^{-1}.

कोणीय वेग की दिशा OA के अनुदिश है।

(ख) रैखिक वेग $\mathbf{v}$ होता है

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = r\,\omega\,\hat{\boldsymbol{\theta}}, \text{ क्योंकि } r \text{ अचर है,}$$

या $\mathbf{v} = (0{\cdot}5\ \text{m})(6\ \text{rad s}^{-1})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$, $\because t = 2$s पर $\omega = 6$ rad s^{-1}

$$= (3\ \text{m s}^{-1})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

अतः कण के रैखिक वेग का परिमाण 3 m s^{-1} है और उसकी दिशा उस बिन्दु पर की स्पर्श रेखा के अनुदिश होती है।

त्रिज्य त्वरण $\mathbf{a}_R = -\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} = -(6\ \text{rad s}^{-1})^2\ (0{\cdot}5\ \text{m})\,\hat{\mathbf{r}}$

$$= -18\ \text{m s}^{-2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

अनुप्रस्थ त्वरण $\mathbf{a}_T = \alpha r\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$= (3{\cdot}0\ \text{rad s}^{-2})\ (0{\cdot}5\ \text{m})\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = 1{\cdot}5\ \text{m s}^{-2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

आपको यहां ध्यान देना चाहिए कि रेडियन (rad) कोण की इकाई है जोकि विमारहित है। इसलिए अन्य किसी इकाई से इसकी गुणा होने पर वह इकाई बदलती नहीं।

5. कण का प्रपथ है

$$r = C\,\theta = \left(\frac{1}{\pi}\ \text{m rad}^{-1}\right)\left(\frac{\alpha}{2}t^2\ \text{rad}\right) = \frac{\alpha t^2}{2\pi}\ \text{m}$$

(क) समीकरण 4·13 क से वेग $\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$

क्योंकि $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{\alpha t}{\pi}\ \text{ms}^{-1}$ और $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \alpha t\ \ \text{rad s}^{-1}$

$$\therefore \quad \mathbf{v} = \left(\frac{\alpha t}{\pi}\ \hat{\mathbf{r}} + \frac{\alpha t^2}{2\pi}\ \alpha t\ \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \text{ms}^{-1}$$

$$= \frac{\alpha t}{\pi}\ \left(\hat{\mathbf{r}} + \frac{\alpha t^2}{2}\ \hat{\boldsymbol{\theta}}\right) \text{ms}^{-1}$$

त्वरण $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\ \dot{\theta}^2)\ \hat{\mathbf{r}} + (r\ \ddot{\theta} + 2\ \dot{r}\ \dot{\theta})\ \hat{\boldsymbol{\theta}}$

$$\because \quad \ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{\alpha}{\pi}\ \text{ms}^{-2},\ \ \ddot{\theta} = \alpha\ \text{rad s}^{-2}$$

$$\therefore \quad \mathbf{a} = \left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha t^2}{2\pi}\ \alpha^2 t^2\right)\ \hat{\mathbf{r}} + \left(\frac{\alpha t^2}{2\pi}\ \alpha + \frac{2\alpha t}{\pi} \cdot \alpha t\right) \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= \left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^3}{2\pi} t^4\right) \hat{\mathbf{r}} + \frac{5}{2\pi}\ \alpha^2 t^2\ \hat{\boldsymbol{\theta}}$$

(ख) $a_R = 0$ का अर्थ है कि $\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^3}{2\pi} t^4 = 0,$ या $\alpha^3 t^4 = 2\alpha$

क्योंकि $\alpha \neq 0$, इसलिए $\alpha^2 t^4 = 2$ या $\left(\frac{\alpha t^2}{2}\right)^2 . 2 = 1$

अर्थात् $\theta^2 = \frac{1}{2}$ rad^2 जिससे $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ rad प्राप्त होता है।

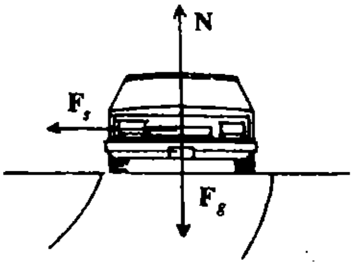
6. चंद्रमा में लगे भारहीन केबल का तनाव अभिकेंद्र बल $\frac{mv^2}{r}$ के बराबर होगा। यदि पृथ्वी और चन्द्रमा के बीच के गुरुत्वाकर्षण बल के कारण चंद्रमा अपनी स्थिति में बना रहता तो $\frac{mv^2}{r} = \frac{Gmm_E}{r^2}$ जहां m और m_E क्रमशः चंद्रमा और पृथ्वी के द्रव्यमान हैं और r उनके बीच की औसत दूरी है।

इसलिए, केबल में तनाव $T = \frac{mv^2}{r} = \frac{Gmm_E}{r^2}$

या $$T = \frac{(6.673 \times 10^{-11}\ \text{Nm}^2\ \text{kg}^{-2})\ (7{\cdot}35 \times 10^{22}\ \text{kg})\ (5{\cdot}97 \times 10^{24}\ \text{kg})}{(3{\cdot}85 \times 10^8\ \text{m})^2}$$

$$= 1{\cdot}98 \times 10^{20}\ \text{N}$$

इस तनाव की तुलना कीजिए कार या ट्रक को ऊपर उठाने के लिए आवश्यक केबल के तनाव से जो लगभग 20,000 N होता है।



चित्र 4.20: N, भार $F_g = (mg)$ के ठीक विपरीत दिशा में बराबर परिमाण वाला अभिलंब प्रतिक्रिया बल है। घर्षण बल F_s द्वारा आवश्यक अभिकेंद्र बल प्राप्त होता है।

7. कार के टायर और सड़क के बीच के घर्षण बल से अभिकेंद्र बल प्राप्त होता है (चित्र 4·20)।
घर्षण बल का परिमाण $F_s = \mu_s N = \mu_s mg$, जहां m कार का द्रव्यमान है।
इसलिए $\mu_s\ mg = \frac{mv^2}{r}$, जहां v = कार की अधिकतम संभव चाल।

$$\therefore \quad v = \sqrt{\mu_s r g}.$$

(क) सूखी सड़क पर, $v = \sqrt{(0{\cdot}88)\ (95\text{m})\ (9{\cdot}8\ \text{ms}^{-2})} = 29\ \text{ms}^{-1}$,

(ख) बर्फ से ढकी सड़क पर, $v = \sqrt{(0{\cdot}21)\ (95\text{m})\ (9{\cdot}8\ \text{ms}^2)} = 14\ \text{ms}^{-1}$,

इससे अधिक चाल होने पर कार को अपेक्षाकृत अधिक त्रिज्या वाले वृत्त पर चलना पड़ेगा यानि वह सड़क से उतर जाएगी।

8. किसी पिंड के बलआघूर्ण और उसके कोणीय त्वरण का संबंध होता है $\boldsymbol{\tau} = I\ \boldsymbol{\alpha}$

यहां $I = 45 \times 10^{36}$ kg m^2 और $\alpha = 5 \times 10^{-5}$ rad s^{-2}

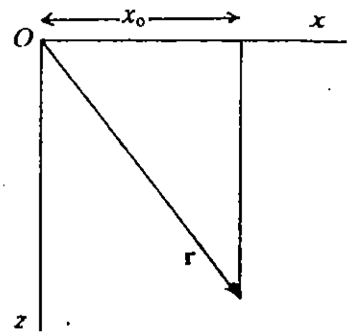
$\therefore$ चुंबकीय बलआघूर्ण का परिमाण $= (45 \times 10^{36}\ \text{kg m}^2)\ (5 \times 10^{-5}\ \text{rad s}^{-2})$

$$= 2{\cdot}3 \times 10^{33}\ \text{N m}$$

9. (क) चित्र 4·21 देखिए। क्षण t पर मूल बिन्दु के सापेक्ष कण का स्थिति सदिश **r** है

$$\mathbf{r} = x_0\hat{\mathbf{i}} + 0\hat{\mathbf{j}} + (z_0 - \frac{1}{2}gt^2)\hat{\mathbf{k}}$$

$$= x_0\hat{\mathbf{i}} + (z_0 - \frac{1}{2}gt^2)\hat{\mathbf{k}}$$



चित्र 4.21

क्षण t पर इसका वेग है

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = -gt\,\hat{\mathbf{k}}$$

(ख) कोणीय संवेग

$$\mathbf{L} = \mathbf{r}\times\mathbf{p} = \mathbf{r}\times m\,\mathbf{v} = m(\mathbf{r}\times\mathbf{v})$$

या $$\mathbf{L} = m\left[x_0\hat{\mathbf{i}} + (z_0 - \frac{1}{2}gt^2)\hat{\mathbf{k}}\right]\times\left[-gt\,\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$= m\left[x_0 gt\,\hat{\mathbf{j}} + \mathbf{0}\right]\left[\because\ \hat{\mathbf{i}}\times\hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{j}},\quad \hat{\mathbf{k}}\times\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}\right]$$

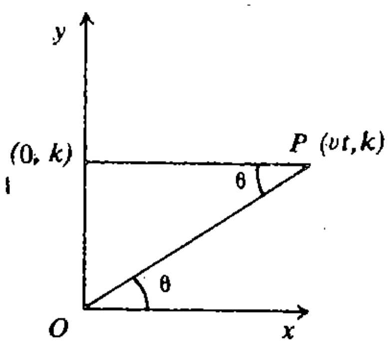
$$= m x_0 g t\,\hat{\mathbf{j}}.$$

(ग) मूल बिन्दु के सापेक्ष कण पर कार्य कर रहा बलआघूर्ण है

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = m x_0 g\,\hat{\mathbf{j}}$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. चित्र 4·22 देखिए। मान लीजिए क्षण t पर कण बिन्दु P पर है। तब इसकी y- अक्ष से दूरी vt है। इसलिए $\theta = \tan^{-1}(k/vt)$. इसके कोणीय वेग का परिमाण होगा :



चित्र 4.22

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{1}{1 + k^2/v^2t^2}\right]\left(\frac{-k}{vt^2}\right) = \frac{-kv}{k^2 + v^2t^2},$$

या $$\omega = \frac{\text{एक अचर}}{OP^2}$$ इसलिए ω, OP^2 के व्युत्क्रमानुपाती है।

कोणीय त्वरण का परिमाण होगा

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{2kv^3t}{(k^2 + v^2t^2)^2}.$$

2. (क) कण का रैखिक वेग है

$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\hat{\mathbf{r}} + r\,\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

यहां $\dot{r} = 4\ \text{m s}^{-1}$, $\dot{\theta} = 2\ \text{rad s}^{-1}$ और $r = 3\text{m}$.

$$\therefore\quad \mathbf{v} = (4\ \text{m s}^{-1})\,\hat{\mathbf{r}} + (3\ \text{m}\times 2\ \text{rad s}^{-1})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= (4\,\hat{\mathbf{r}} + 6\,\hat{\boldsymbol{\theta}})\ \text{m s}^{-1} = \mathbf{v}_R + \mathbf{v}_T$$

वेग की परिमाण $= v = \sqrt{v_R^2 + v_T^2} = \sqrt{4^2 + 6^2}\ \text{m s}^{-1} = 2\sqrt{13}\ \text{m s}^{-1}$.

चित्र 4·23 के अनुसार इसकी दिशा निम्न कोण द्वारा दी जाती है

$$\tan\phi_1 = \frac{v_T}{v_R} = \frac{6}{4} = 1{\cdot}5,$$

जहां ϕ_1 वह कोण है जो **v**, **r** के साथ बनाता है।

(ख) समीकरण 4·14 से

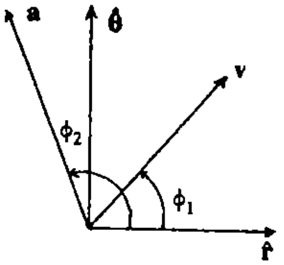
$$\text{त्वरण} \quad \mathbf{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + (r\,\ddot{\theta} + 2\,\dot{r}\,\dot{\theta})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

क्योंकि $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ अचर हैं, इसलिए $\ddot{r} = 0$, $\ddot{\theta} = 0$.

$$\text{अतः} \quad \mathbf{a} = (-r\,\dot{\theta}^2)\,\hat{\mathbf{r}} + 2\,\dot{r}\dot{\theta}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= (-3\text{m} \times 4\text{ rad}^2\text{ s}^{-2})\,\hat{\mathbf{r}} + (2 \times 4\text{ m s}^{-1} \times 2\text{ rad s}^{-1})\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$

$$= -12\text{ m s}^{-2}\,\hat{\mathbf{r}} + 16\text{ m s}^{-2}\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$$



चित्र 4.23

इसका परिमाण $a = \sqrt{(12\times12) + (16\times16)}$ m s^{-2} = 20 m s^{-2} और इसकी दिशा $\tan\phi_2 = \frac{a_T}{a_R} = \left(\frac{-16}{12}\right) = -1{\cdot}3$ द्वारा दी जाती है, जहां ϕ_2 वह कोण है जो $\mathbf{a}$, $\hat{\mathbf{r}}$ के साथ बनाता है (देखिए चित्र 4·23)।

(ग) कण की गतिज ऊर्जा $K_{Rot} = \frac{1}{2} I\,\omega^2$

$$= \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2$$

$$\text{या} \quad K_{Rot} = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{1000}\text{ kg}\right)(3\text{ m})^2\,(2\text{ rad s}^{-1})^2$$

$$= 0{\cdot}1\text{ J}$$

3. क्योंकि $\mathbf{r} = 6t^4\,\hat{\mathbf{i}} - 3t^2\,\hat{\mathbf{j}} + (4t^3 - 5)\,\hat{\mathbf{k}}$

$$\therefore \quad \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 24t^3\,\hat{\mathbf{i}} - 6t\,\hat{\mathbf{j}} + 12t^2\,\hat{\mathbf{k}}$$

(क) कोणीय संवेग $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\;\mathbf{r} \times \mathbf{v}$

$$\text{या} \quad \mathbf{L} = m\left[6t^4\,\hat{\mathbf{i}} - 3t^2\,\hat{\mathbf{j}} + (4t^3 - 5)\,\hat{\mathbf{k}}\right] \times \left[24t^3\,\hat{\mathbf{i}} - 6t\,\hat{\mathbf{j}} + 12t^2\,\hat{\mathbf{k}}\right]$$

$$= m\left[-36\,t^5\,\hat{\mathbf{k}} - 72\,t^6\,\hat{\mathbf{j}} + 72\,t^5\,\hat{\mathbf{k}} - 36t^4\,\hat{\mathbf{i}} + (96\,t^6 - 120\,t^3)\,\hat{\mathbf{j}} + (24\,t^4 - 30t)\,\hat{\mathbf{i}}\right]$$

$$= m\left[-(12\,t^4 + 30t)\,\hat{\mathbf{i}} + (24t^6 - 120\,t^3)\,\hat{\mathbf{j}} + 36\,t^5\,\hat{\mathbf{k}}\right]$$

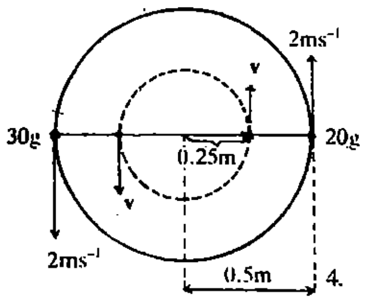
(ख) बलआघूर्ण $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$

$$= m\left[-(48\,t^3 + 30)\,\hat{\mathbf{i}} + (144\,t^5 - 360\,t^2)\,\hat{\mathbf{j}} + 180\,t^4\,\hat{\mathbf{k}}\right]$$

(ग) घूर्णी गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2}\,m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$

$$= \frac{1}{2}\,m\,(576\,t^6 + 36\,t^2 + 144\,t^4)$$

$$= 18\,mt^2\,(16t^4 + 4t^2 + 1)$$



चित्र 4.24

4. (क) चित्र 4·24 देखिए। निकाय का संपूर्ण कोणीय संवेग

$$= (0{\cdot}02\text{ kg})\,(2\text{ m s}^{-1})\,(0{\cdot}5\text{ m}) + (0{\cdot}03\text{ kg})\,(2\text{ m s}^{-1})\,(0{\cdot}5\text{ m})$$

$$= 0{\cdot}05\text{ kg m}^2\text{ s}^{-1}$$

(ख) क्योंकि कोई बाह्य बलआघूर्ण निकाय पर कार्य नहीं करता है, इसलिए इसका कोणीय संवेग संरक्षित बना रहता है। और क्योंकि कण छड़ द्वारा एक दूसरे से जुड़े रहते हैं इसलिए उनके वेग के परिमाण

(= v माना) समान होंगे। जब छड़ सिकुड़कर अपनी मूल लंबाई की आधी हो जाती है तो वृत्तीय पथ (चित्र में बिन्दुदार पथ) की त्रिज्या 0·25 m (चित्र 4·24) हो जाती है।

इसलिए संपूर्ण कोणीय संवेग $= (0{\cdot}02 \text{ kg})\,(v)\,(0{\cdot}25 \text{ m}) + (0{\cdot}03 \text{ kg})\,(v)\,(0{\cdot}25 \text{ m})$

$$= 0{\cdot}05 \times 0{\cdot}25\, v \text{ kg m}$$

कोणीय संवेग-संरक्षण नियम के अनुसार

$$0{\cdot}05 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} = (0{\cdot}05)\,(0{\cdot}25)v \text{ kg m}$$

या $v = 4 \text{ m s}^{-1}$.

अतः प्रत्येक कण की चाल 4 m s^{-1}, यानि उसकी मूल चाल की दोगुनी हो जाती है।

4.8 शब्दावली

अनुप्रस्थ वेग	Transverse velocity
अनुप्रस्थ त्वरण	Transverse acceleration
अनुरूप	Analogous
अभिकेन्द्र बल	Centripetal force
कक्षा	Orbit
कोणीय गति	Angular motion
कोणीय त्वरण	Angular acceleration
कोणीय विस्थापन	Angular displacement
कोणीय वेग	Angular velocity
कोणीय संवेग	Angular momentum
घूर्णन	Rotation
घूर्णन अक्ष	Axis of rotation
घूर्णी गति	Rotational motion
घूर्णी गतिज ऊर्जा	Rotational kinetic energy
जड़त्वीय द्रव्यमान	Inertial mass
दृढ़ पिंड	Rigid body
ध्रुवांतर रेखा	Radius vector
प्रचक्रण	Spinning
बलआघूर्ण	Torque
समतल ध्रुवी निर्देशांक	Plane-polar coordinates
त्रिज्य वेग	Radial velocity
त्रिज्य त्वरण	Radial acceleration

इकाई 5 गुरुत्वाकर्षण

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

पिछली चार इकाईयों में आपने विविध पिंडों की रैखिक और कोणीय गतियों के बारे में पढ़ा है। लेकिन अभी तक आपका अध्ययन अधिकतर धरती पर स्थित पिंडों तक ही सीमित रहा है। हमने अंतरिक्षीय पिंडों के कुछ उदाहरण अवश्य दिए हैं, लेकिन गुरुत्वाकर्षण की जानकारी के बिना हम इन पिंडों की गति का विस्तार से वर्णन नहीं कर पाए। इसलिए इस इकाई में आप गुरुत्वाकर्षण के बारे में पढ़ेंगे।

ग्रहों की गति से संबंधित कैपलर के नियमों को आप जानते ही हैं। इस इकाई में इन नियमों के आधार पर हम सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण के सिद्धांत को प्राप्त करेंगे। फिर हम गुरुत्वीय क्षेत्र और विभव की संकल्पनाओं को समझ कर पृथ्वी के गुरुत्व और पलायन वेग की संकल्पनाओं को दोहराएंगे। अन्त में हम इस बात को समझेंगे कि गुरुत्वाकर्षण बल एक मूलभूत प्राकृतिक बल है और अन्य दो मूलभूत प्राकृतिक बलों — विद्युत्-निर्बल (electroweak) एवम् प्रबल (strong) — का संक्षिप्त विवरण भी देंगे।

खंड 2 में हम इस खंड में विकसित यांत्रिकी की संकल्पनाओं को केन्द्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति पर, अनेक कणों वाले निकायों और दृढ़ पिंडों की गति पर लागू करेंगे। इसके साथ-साथ हम त्वरित निर्देश तंत्रों के सापेक्ष गति के बारे में भी पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- गुरुत्वाकर्षण के सिद्धांत को लागू कर सकेंगे
- यह निष्कर्ष निकाल सकेंगे कि गुरुत्वाकर्षण सिद्धांत सार्वत्रिक है
- गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता और गुरुत्वीय विभव का परिकलन कर सकेंगे
- ऊंचाई, गहराई और स्थान के अक्षांश के साथ गुरुत्वीय त्वरण के परिवर्तन पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकेंगे
- पलायन वेग के व्यंजक को प्राप्त कर सकेंगे
- मूलभूत प्राकृतिक बलों में भेद बता सकेंगे।

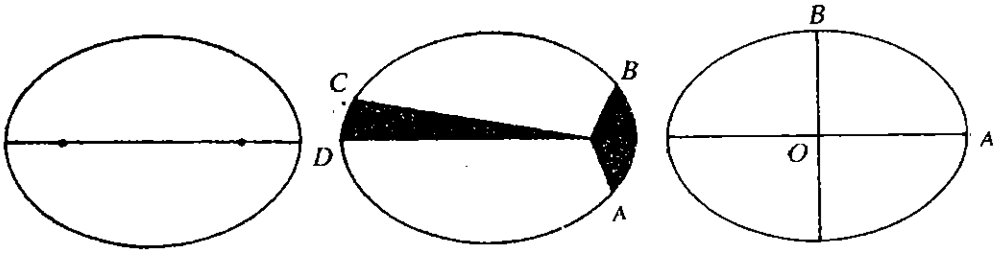
5.2 गुरुत्वाकर्षण का सिद्धांत

आप यह जानते ही होंगे कि गुरुत्वाकर्षण के सिद्धांत की खोज महान् वैज्ञानिक आइज़क न्यूटन ने की थी। एक लोकप्रिय कहानी है कि एक बार जब न्यूटन एक सेब के पेड़ के नीचे बैठे थे तो पेड़ से गिरकर एक सेब उनके सिर पर लगा। कहा जाता है कि इस घटना ने उन्हें गुरुत्वाकर्षण का सिद्धांत खोजने की प्रेरणा दी। शायद उस कहानी में यह बात भी जोड़ी जानी चाहिए थी कि जब न्यूटन पर सेब गिरा तब वे चन्द्रमा की ओर देख रहे थे (चित्र 5·1)।

चित्र 5.1 न्यूटन की विलक्षण प्रतिभा इस बात में थी कि वे यह समझ सके कि पृथ्वी पर स्थित पिंडों और खगोलीय पिंडों की गति एक ही बल-गुरुत्व के अधीन होती है।

न्यूटन की विलक्षण प्रतिभा इसमें थी कि उन्होंने यह समझ लिया कि जिस बल के कारण सेब धरती की ओर गिरता है, उसी के कारण चन्द्रमा भी पृथ्वी की परिक्रमा करता है। वास्तव में न्यूटन गैलीलियो के "गिरते हुए पिंडों के नियम " से लेकर कैपलर के "ग्रहीय गति के नियमों " से जुड़े हुए अनेक प्रश्नों के उत्तर खोज रहे थे और अपने प्रथम प्रयास में वे भी गुरुत्वाकर्षण के सिद्धांत को नहीं समझ पाए थे।

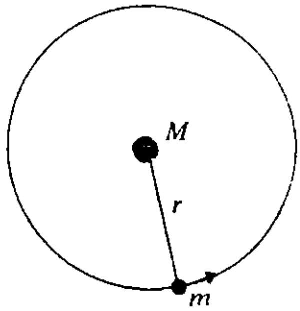
आइए हम पहले कैपलर के नियमों (चित्र 5·2) का प्रयोग करके गुरुत्वाकर्षण के सिद्धांत को प्राप्त करें। उसके बाद हम गिरते हुए सेब और पृथ्वी के गिर्द घूमते हुए चन्द्रमा की गति का विवेचन करके इस सिद्धांत की सार्वत्रिक प्रकृति को समझेंगे।



चित्र 5·2: कैपलर के नियम (क) सभी ग्रह सूर्य के गिर्द दीर्घवृत्तीय कक्षाओं (elliptical orbits) में घूमते हैं जिनके एक फोकस पर सूर्य स्थित होता है; (ख) बराबर क्षेत्रफल का नियम: ग्रह और सूर्य को मिलाने वाली रेखा बराबर समय अन्तरालों में बराबर क्षेत्रफल तय करती है; (ग) सूर्य के गिर्द अपनी कक्षा में घूमते हुए ग्रह के परिक्रमण काल का वर्ग उसकी दीर्घवृत्तीय कक्षा के अर्ध-दीर्घ अक्ष (semi-major axis) के घन के अनुक्रमानुपाती होता है। यहां OA = अर्ध-दीर्घ अक्ष और OB = अर्ध-लघु अक्ष (semi-minor axis)।

5.2.1 सिद्धांत की खोज

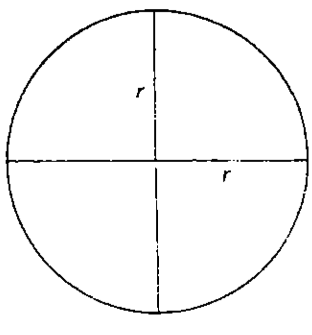
आइए हम मान लेते हैं कि किसी ग्रह की कक्षा दीर्घवृत्तीय न हो कर वृत्ताकार है। मान लीजिए कि द्रव्यमान m का ग्रह द्रव्यमान M के सूर्य के गिर्द r त्रिज्या की वृत्ताकार कक्षा में रैखिक चाल v से घूम रहा है (चित्र 5·3)। हम पृथ्वी और सूर्य दोनों को कण मान सकते हैं, क्योंकि उनकी त्रिज्याएं उनके केन्द्रों के बीच की दूरी की तुलना में बहुत छोटी हैं। जैसा कि हमने इकाई 4 में पढ़ा है ग्रह को अपनी वृत्ताकार कक्षा में घूमने के लिए एक अभिकेन्द्र बल $\mathbf{F} = -\frac{mv^2}{r}\hat{\mathbf{r}}$ की ज़रूरत होती है। क्योंकि ग्रह का अपनी कक्षा में परिक्रमण काल $T = \frac{2\pi r}{v}$ है, तो हमें प्राप्त होता है :



चित्र 5.3: द्रव्यमान M वाले सूर्य का परिक्रमण करता हुआ द्रव्यमान m का ग्रह।

$$F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2} \quad . \qquad (5\cdot1)$$

हमें यह पता है कि वृत उस दीर्घवृत्त का एक विशेष रूप होता है जिसका अर्ध-दीर्घ अक्ष वृत की त्रिज्या के बराबर हो (चित्र 5·4)। अब कैपलर के तृतीय नियम के अनुसार $T^2 = Cr^3$, जहां C एक अचर है।



चित्र 5.4: वृत्त दीर्घवृत्त का एक विशेष रूप होता है।

अतः समीकरण 5·1 से हमें प्राप्त होता है :

$$F = \frac{4\pi^2 m}{Cr^2} = \frac{km}{r^2} \text{ , जहां } k = \frac{4\pi^2}{C} = \text{एक अचर} \qquad (5\cdot2)$$

समीकरण 5·2 से हमें उस अभिकेन्द्र बल **F** का परिमाण मिलता है जो एक वृत्ताकार कक्षा में ग्रह की गति बनाए रखने के लिए आवश्यक है। ग्रह पर लग रहे इस बल **F** की दिशा उसकी वृत्ताकार कक्षा के केन्द्र अर्थात् सूर्य की ओर होती है। इन विचारों को ध्यान में रखते हुए आप निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 1

सूर्य से लेकर ग्रह तक के स्थिति सदिश को ध्रुवांतर रेखा (radius vector) **r** मान कर बल सदिश **F** के लिए एक व्यंजक लिखिए।

अभी हम गुरुत्वाकर्षण के सिद्धांत तक नहीं पहुंचे हैं।

समीकरण 5·2 को हम निम्न रूप में भी लिख सकते हैं :

$$F_{\text{ग्रह}} = \frac{k_{\text{सूर्य}}\, m}{r^2} \qquad (5\cdot2\ \text{क})$$

यह समीकरण दिखाता है कि बल ग्रह पर लग रहा है। अब यदि हम न्यूटन के गति के तीसरे नियम को पुनः याद करें तो हम कह सकते हैं कि ग्रह के कारण सूर्य पर भी वही बल लग रहा है जो ग्रह पर सूर्य के कारण लग रहा है। अतः समीकरण 5·2 क से हम लिख सकते हैं :

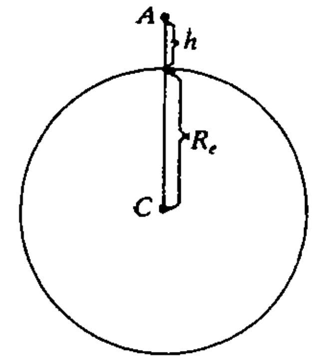
$$F_{\text{ग्रह}} = F_{\text{सूर्य}} = \frac{k_{\text{सूर्य}}\, m}{r^2} = \frac{k_{\text{ग्रह}}\, M}{r^2}. \qquad (5\cdot2\ \text{ख})$$

$$\therefore \quad k_{\text{सूर्य}}\, m = k_{\text{ग्रह}}\, M \quad \text{यानि} \quad \frac{k_{\text{सूर्य}}}{M} = \frac{k_{\text{ग्रह}}}{m}. \qquad (5\cdot3)$$

इस समीकरण से हमें पता चलता है कि स्थिरांक k, संबंधित खगोलीय पिंड के द्रव्यमान पर कैसे निर्भर करता है। k उसके द्रव्यमान के अनुक्रमानुपाती होता है और उस आनुपातिकता स्थिरांक को 'सार्वत्रिक गुरुत्वीय स्थिरांक' कहते हैं और G से प्रकट करते हैं। अभी तक हमने यह नहीं समझा कि इस स्थिरांक को हम 'सार्वत्रिक स्थिरांक' क्यों कहते हैं। यह आप जल्दी ही जान जाएंगे। पहले हम समीकरण 5·3 से लिखते हैं $k_{\text{सूर्य}} = MG$ जिससे कि समीकरण 5·2 ख से हमें मिलता है

$$F_{\text{ग्रह}} = F_{\text{सूर्य}} = \frac{GMm}{r^2}. \qquad (5\cdot4)$$

अतः सूर्य और ग्रह के बीच का बल पारस्परिक आकर्षण का बल है और यह बल दोनों के द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती और उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती (inversely proportional) होता है।



चित्र 5.5: पृथ्वी के केंद्र (C) से $(R_e + h)$ दूरी पर स्थित सेब (A)।

यदि अब आप समीकरण 5·1 से पहले के पैराग्राफ़ को पुनः पढ़ें तो देखेंगे कि हमने m और M द्रव्यमान के पिंडों को कण माना था। इस बात को ध्यान में रखते हुए हम पृथ्वी और सेब A को भी कण मानते हैं जिनके द्रव्यमान क्रमशः M_e और M_a हैं। मान लें कि उनके बीच की दूरी r है, यानि $r = R_e + h$ (देखें चित्र 5·5) जहां R_e = पृथ्वी की त्रिज्या, और h = पृथ्वी की सतह से उस बिन्दु की उंचाई जहां से सेब गिर रहा है। यहां गिरते हुए सेब पर पृथ्वी के कारण एक आकर्षण बल लग रहा है। समीकरण 5·4 के अनुसार इस बल का परिमाण होता है

$$F = \frac{G\, M_e M_a}{r^2}. \qquad (5\cdot5)$$

अब $r^2 = (R_e + h)^2 \simeq R_e^2$ क्योंकि h का मान R_e की तुलना में बहुत कम है। अतः

$$F = \frac{G\, M_e M_a}{R_e^2}.$$

अतः गिरते हुए सेब का पृथ्वी की ओर त्वरण होता है

$$a = \frac{F}{M_a} = \frac{GM_e}{R_e^2}. \qquad (5\cdot6)$$

समीकरण 5·6 को ध्यान से समझें। इसके दाहिनी ओर स्थित सभी संख्याएं पृथ्वी पर अचर हैं और बायीं ओर की राशि पृथ्वी की सतह के निकट गिरते हुए पिंड का त्वरण है। अब क्योंकि आप गैलीलियो के गिरते हुए पिंडों के नियम को जानते हैं इसलिए निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल करने का प्रयास करें।

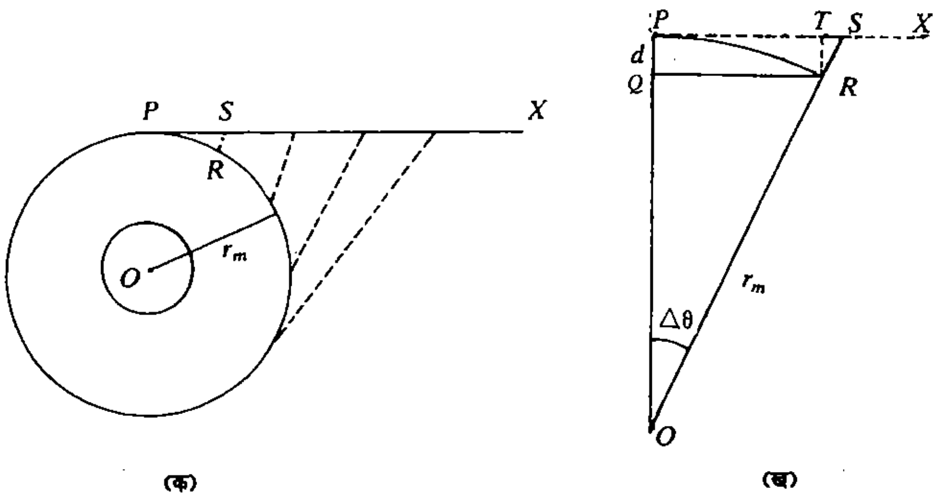
बोध प्रश्न 2

सिद्ध कीजिए कि समीकरण 5·6 "गिरते हुए पिंडों के नियम" के संगत है। (संकेत : पृथ्वी की सतह के निकट गिरने वाले पिंड का त्वरण अचर होता है और उसका मान सभी पिंडों के लिए समान होता है।)

अब हम समीकरण 5·6 की सहायता से इस तथ्य का विश्लेषण करेंगे कि चन्द्रमा भी पृथ्वी की ओर सेब की भांति ही गिरता है।

5.2.2 पृथ्वी के गिर्द चन्द्रमा का परिक्रमण

मान लीजिए कि किसी क्षण पर चन्द्रमा अपनी कक्षा में स्थिति P पर है (चित्र 5·6 क)। अगर उस क्षण पर चन्द्रमा पर कोई बल नहीं लग रहा होता तो वह P पर कक्षा की स्पर्शरेखा PX के अनुदिश चलता। इसके बजाय चन्द्रमा पृथ्वी के केन्द्र के गिर्द त्रिज्या r_m के वृत्ताकार पथ में चलता है।



चित्र 5·6: (क) गुरुत्व के न होने पर चन्द्रमा सरल रेखा PX में चलता। दरअसल हम वृत्ताकार कक्षा में चल रहे चन्द्रमा को इस सरल पथ PX से दूर गिरता हुआ मान सकते हैं; (ख) $\Delta\theta = \omega\Delta t$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ = पृथ्वी के गिर्द घूमते हुए चन्द्रमा की कोणीय चाल। यहां T चन्द्रमा का परिक्रमण काल है।

अब मान लें कि चन्द्रमा एक अत्यन्त छोटे समय अन्तराल Δt में P से R तक पहुंच जाता है (चित्र 5·6 ख)। मान लें कि उसका रैखिक वेग $\mathbf{v}$ है। किसी बल के न लगने पर वह PX के अनुदिश दूरी $v\,\Delta t = (PS,$ माना) चलता। अतः वृत्त की चाप PR में चलते हुए चन्द्रमा को हम पृथ्वी की ओर SR दूरी से नीचे की ओर गिरता हुआ मान सकते हैं। यहां RT और RQ क्रमशः PX और OP पर लम्बवत् हैं। क्योंकि PR अत्यणु है, अतः $SR \simeq TR = PQ = d$, माना। अतः प्रभावी तौर पर Δt समयांतराल में चन्द्रमा d दूरी गिरता है। अब

$$d = r_m(1-\cos\Delta\theta) = 2\,r_m \sin^2\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right) \simeq \frac{r_m}{2}\,(\Delta\theta)^2.$$

(क्योंकि $\Delta\theta$ का मान बहुत कम है इसलिए $\sin\frac{\Delta\theta}{2} \simeq \frac{\Delta\theta}{2}$.)

अब $$\Delta\theta = \omega\,\Delta t = \frac{2\pi}{T}\,\Delta t$$

$$\therefore \quad d = \frac{r_m}{2}\left(\frac{2\pi}{T}\,\Delta t\right)^2 = \frac{2\pi^2 r_m}{T^2}\,(\Delta t)^2. \qquad (5\cdot7)$$

r_m और T के मान क्रमशः $3{\cdot}85 \times 10^8$ m तथा $2{\cdot}4 \times 10^6$ s हैं। यदि हम Δt को 1s मान लें तो समीकरण 5·7 से d का मान $1{\cdot}3 \times 10^{-3}$ m आता है। इसका अर्थ है कि जब चन्द्रमा पृथ्वी के गिर्द 1 s के लिए घूमता है तो उतने समय में वह पृथ्वी की ओर लगभग 1 mm गिर जाता है। यदि पृथ्वी की ओर "गिरते हुए" चन्द्रमा का त्वरण m s^{-2} में a_m हो तथा 1 s में उसके द्वारा तय की गई दूरी d हो तो

$$d = \frac{1}{2} a_m (1s)^2 = 1{\cdot}3 \times 10^{-3} \text{ m} \tag{5·8}$$

$$\therefore \quad a_m = 2{\cdot}6 \times 10^{-3} \text{ m s}^{-2}.$$

अब हम जानते हैं कि प्रयोगों द्वारा पृथ्वी की सतह के निकट गिरते हुए पिंडों के त्वरण की माप लगभग $9{\cdot}8 \text{ms}^{-2}$ पाई गई है। अतः दोनों त्वरणों का अनुपात होता है

$$\frac{a_m}{a} = 2{\cdot}6 \times 10^{-4}. \tag{5·9}$$

ध्यान दें कि अब तक हमने इस अनुपात को निकालने में गुरुत्वाकर्षण सिद्धांत का प्रयोग नहीं किया है। अब हम समीकरण 5·6 का प्रयोग करके लिखते हैं :

$$\frac{a_m}{a} = \frac{GM_e / r_m^2}{GM_e / R_e^2} = \left(\frac{R_e}{r_m}\right)^2. \tag{5·10}$$

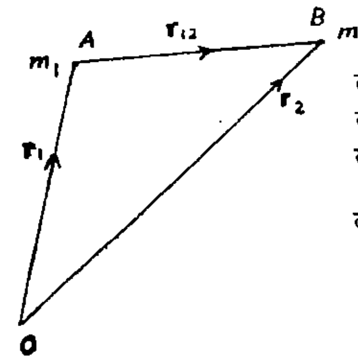
R_e और r_m के मान रखने पर हमें प्राप्त होता है $\frac{a_m}{a} = 2{\cdot}7 \times 10^{-4}$ जो समीकरण 5·9 में दिए मान के बहुत निकट है।

न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण का सिद्धांत दो शताब्दियों की उस क्रांति का परिणाम था जिसकी शुरुआत कोपरनिकस ने 1543 में की थी। उसके बाद टाइको ब्राहे, कैपलर के कार्यों और गैलीलियो के प्रयोग आदि ने वह आधार तैयार किया जिनके सहारे न्यूटन अपने इस महान सिद्धांत तक पहुंचने में सफल हुए।

न्यूटन का तर्क था कि यह समानता मात्र एक संयोग नहीं हो सकती। निश्चय ही दो पिंडों के बीच एक आकर्षण बल होता है जो उनके द्रव्यमानों के गुणनफल के अनुक्रमानुपाती और उनके बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होता है। यह सिद्धांत वास्तव में एक सार्वत्रिक सिद्धांत है जो ब्रह्मांड में स्थित सभी पिंडों पर लागू होता है, चाहे वे धूल के कण हों, सितारे हों या मंदाकिनियां। इसलिए स्थिरांक G एक सार्वत्रिक स्थिरांक है। इस स्थिरांक का मान $6{\cdot}673 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2} है और यह कणों की तमाम जोड़ियों के लिए समान है। अतः अब हम "गुरुत्वाकर्षण के सिद्धांत" का कथन दे सकते हैं :

एक दूसरे से दूरी r पर स्थित द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले किन्हीं दो कणों के बीच सदा एक पारस्परिक आकर्षण का बल होता है जो उनको मिलाने वाली रेखा के अनुदिश होता है और जिसका परिमाण होता है :

$$F = \frac{Gm_1 m_2}{r^2}. \tag{5·11}$$



चित्र 5.7: $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$

लेकिन हम जानते हैं कि बल एक सदिश राशि है। अतः हमें $\mathbf{F}$ की दिशा भी बतानी चाहिए। इसके लिए हम समीकरण 5·11 को सदिश रूप में लिखेंगे। चित्र 5·7 देखिए। मान लीजिए कि m_2 का m_1 के सापेक्ष स्थिति सदिश $\mathbf{r}_{12}$ है, यानि $\mathbf{r}_{12}$ की दिशा m_1 से m_2 की ओर है।

तब m_1 के कारण m_2 पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल $\mathbf{F}_{12}$ है, जहां

$$\mathbf{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}. \tag{5·12}$$

यहां $\hat{\mathbf{r}}_{12}$, m_1 से m_2 की दिशा में उनको मिलाने वाली रेखा के अनुदिश एकक सदिश है। ऋणात्मक चिन्ह यह बताता है कि m_2 पर m_1 के कारण लगने वाले बल की दिशा $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ के विपरीत है। यह बल एक आकर्षण बल है। इसी तरह m_1 पर m_2 के कारण लग रहा बल $\mathbf{F}_{21}$, $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ के अनुदिश होगा। न्यूटन के गति के तीसरे नियम के अनुसार $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

इसलिए हमें समीकरण 5·12 से प्राप्त होता है :

$$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}}_{12}. \tag{5·12 क}$$

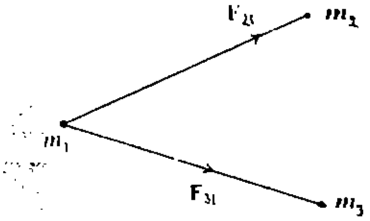
लेकिन, क्या आपने एक बात पर ध्यान दिया ? समीकरण 5·12 को हमने कणों के लिए लिखा है। पृथ्वी और चन्द्रमा के बीच का आकर्षण बल निकालते समय भी हमने दोनों को कण माना था क्योंकि उनके बीच की दूरी उनके विस्तार से बहुत अधिक थी। ऐसा अनुमान हम हर समय नहीं कर सकते। कभी-कभी हमें एक गोले और एक कण के बीच बल — जैसे पृथ्वी और एक कण के बीच बल की गणना भी करनी पड़ सकती है। इस तरह

की स्थितियों से निबटने के लिए हमें अध्यारोपण का सिद्धांत (principle of superposition) जानना ज़रूरी है।

5.3 अध्यारोपण का सिद्धांत

समीकरण 5·12 दो कणों के बीच लग रहे बल का मान बताता है। यदि एक निकाय में अनेक कण m_1, m_2, m_3 आदि हों जैसा चित्र 5·8 में दिखाया गया है तो किसी एक कण, जैसे m_1 पर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल को हम कैसे ज्ञात कर सकते हैं ? यदि निकाय में केवल दो द्रव्यमान m_1 और m_2 होते तो m_1 पर m_2 के कारण लगने वाला बल होता

$$\mathbf{F}_{21} = -G \, \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \, \hat{\mathbf{r}}_{21}.$$



चित्र 5.8: $\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}$

इसी प्रकार निकाय में यदि केवल m_1 और m_3 होते तो m_1 पर m_3 के कारण लगने वाला बल होता :

$$\mathbf{F}_{31} = -G \, \frac{m_1 m_3}{r_{31}^2} \, \hat{\mathbf{r}}_{31}.$$

अब यदि दोनों द्रव्यमान m_2 और m_3 द्रव्यमान m_1 को आकर्षित कर रहे हों तो m_1 पर लगने वाला कुल बल $\mathbf{F}_{21}$ और $\mathbf{F}_{31}$ का सदिश योग होगा, अर्थात्

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31},$$

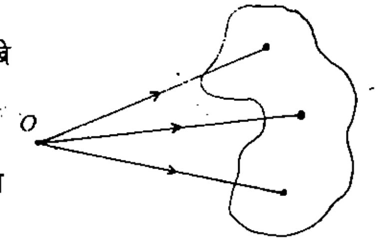
यानि

$$\mathbf{F}_1 = -G \, \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \, \hat{\mathbf{r}}_{21} - G \, \frac{m_1 m_3}{r_{31}^2} \, \hat{\mathbf{r}}_{31}. \qquad (5\cdot13)$$

यह अध्यारोपण का सिद्धांत (principle of superposition) है। इसके अनुसार किसी द्रव्यमान पर लगने वाला परिणामी बल उस पर लगने वाले अलग-अलग बलों का सदिश योग होता है। हम इस सिद्धांत को किसी विस्तृत पिंड के कारण किसी कण पर लगने वाले गुरुत्वाकर्षण बल को निकालने के लिए लागू कर सकते हैं। लेकिन इससे पहले कि हम इस प्रश्न पर विस्तार से चर्चा करें आप एक बोध प्रश्न को हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 3

सिद्ध कीजिए कि m_1 और m_2 द्रव्यमानों वाले दो स्थिर कणों के मध्य स्थित उस बिन्दु की स्थिति जहां पर रखे द्रव्यमान m पर इन दो कणों के कारण लगने वाला परिणामी गुरुत्वाकर्षण बल शून्य होता है, द्रव्यमान m के मान पर निर्भर नहीं करती।



चित्र 5.9: एक कण और विस्तृत पिंड के बीच बल।

यदि किसी कण O और किसी पिंड के मध्य बल (चित्र 5·9) निकालना हो तो हम अध्यारोपण के सिद्धांत का प्रयोग कर सकते हैं। लेकिन यह गणना काफ़ी जटिल होगी क्योंकि किसी भी विस्तृत पिंड में स्थित कणों की संख्या बहुत बड़ी होती है। वास्तव में हमें समाकलन करना पड़ेगा। इस कठिनाई से बचने के लिये हम गुरुत्वीय विभव की संकल्पना प्रस्तावित करते हैं जिसकी चर्चा हम अब करेंगे।

5.4 गुरुत्वीय क्षेत्र और विभव

मान लीजिए कि m_1 द्रव्यमान का एक कण किसी बिन्दु पर स्थित है। यदि एक अन्य द्रव्यमान m_2 इस द्रव्यमान से दूरी r पर स्थित हो तो दोनों द्रव्यमान एक दूसरे को आकर्षित करेंगे। यदि दोनों द्रव्यमानों के बीच की दूरी बदल दी जाए तो भी दोनों एक दूसरे को आकर्षित करते रहेंगे। भले ही उनके बीच की दूरी r कितनी भी ज़्यादा क्यों न हो, इन दोनों के मध्य एक आकर्षण बल बना रहेगा। हम कहते हैं कि m_1 किसी तरह से अपने आसपास के क्षेत्र को परिवर्तित कर देता है और अपने प्रभाव का एक क्षेत्र स्थापित कर देता है जिसे हम m_1 का **गुरुत्वीय क्षेत्र** (gravitational field) कहते हैं।

किसी गुरुत्वीय क्षेत्र की प्रबलता (strength) का अन्दाज़ा उसकी 'तीव्रता' (intensity) से लगता है। द्रव्यमान M के किसी कण के कारण स्थापित गुरुत्वीय क्षेत्र की उससे r दूरी पर स्थित किसी बिन्दु पर तीव्रता का मान उस बिन्दु पर स्थित एकक द्रव्यमान पर उस कण द्वारा लगने वाले गुरुत्वीय बल के बराबर होता है। अतः यदि बिन्दु O पर रखे द्रव्यमान M के किसी कण की बिन्दु P पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता $\mathbf{E}$ हो (चित्र 5·10) तो

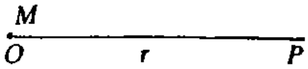
$$\mathbf{E} = -\frac{GM}{r^2}\ \hat{\mathbf{r}}. \qquad (5\cdot14)$$

यहां $\hat{\mathbf{r}}$, OP दिशा में एकक सदिश है, और $OP = r$. बिन्दु P पर रखे m द्रव्यमान के कण पर, O पर रखे M द्रव्यमान के कण द्वारा लगने वाला बल होता है :

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\ \hat{\mathbf{r}}. \qquad (5\cdot14\text{ क})$$

अतः समीकरण 5·14 से

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{E}. \qquad (5\cdot14\text{ ख})$$



चित्र 5.10: बिन्दु O पर रखे द्रव्यमान M के कारण बिन्दु P पर गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता।

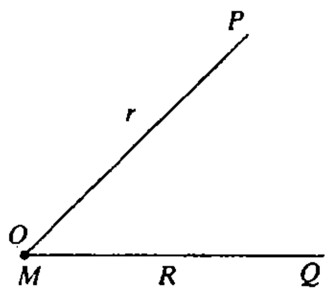
अब अगर हम द्रव्यमान m को इस बिन्दु से हटाकर दूर ले जाना चाहें तो हमें इस आकर्षण बल के विरुद्ध कार्य करना पड़ेगा। इस प्रकार के एक प्रश्न पर हम इकाई 3 में भी चर्चा कर चुके हैं। भाग 3·2·2 को फिर से पढ़िए और निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल कीजिए।

बोध प्रश्न 4

बिन्दु O पर रखे द्रव्यमान M वाले एक कण के गुरुत्वीय क्षेत्र में यदि द्रव्यमान m वाले एक कण को बिन्दु Q से बिन्दु P तक ले जाया जाए (देखें चित्र 5·11) तो सिद्ध कीजिए कि इस प्रक्रिया में किया जाने वाला कार्य W होता है :

$$W = -G\,M\,m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right), \qquad (5\cdot15)$$

जहाँ $OQ = R$, $OP = r$ है।



चित्र 5.11

यानि हमें द्रव्यमान m को M के क्षेत्र में एक बिन्दु से दूसरे बिंदु तक ले जाने में उपरोक्त कार्य करना पड़ता है। इसलिए हम यह कह सकते हैं कि इसके कारण द्रव्यमान m में स्थितिज ऊर्जा निहित हो जाती है जिसे हम उस की **गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा** (gravitational potential energy) कहते हैं। यह स्थितिज ऊर्जा दोनों ही कणों में एक दूसरे के सापेक्ष निहित होती है। किसी द्रव्यमान M के गुरुत्वीय क्षेत्र में उससे दूरी r पर स्थित किसी अन्य द्रव्यमान m की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा, m को अनन्त से उस बिन्दु तक लाने में किए गए कार्य का ऋणात्मक होती है। अतः अगर हम समीकरण 5·15 में $-W$ के व्यंजक में $R = \infty$ रख दें तो हमें U का मान मिल जाएगा यानि

$$U = -\frac{GMm}{r}. \qquad (5\cdot16)$$

अब हम M द्रव्यमान के एक कण के उससे दूरी r पर स्थित बिंदु पर **गुरुत्वीय विभव** (gravitational potential) की परिभाषा दे सकते हैं : यह अनन्त से उस बिंदु पर एकक द्रव्यमान को लाने में किए गए कार्य का ऋणात्मक होता है।

बोध प्रश्न 5

समीकरण 5·14 ख और 5·16 की सहायता से निम्न समीकरण

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{dU}{dr}\right)\hat{\mathbf{r}} \qquad (5\cdot17)$$

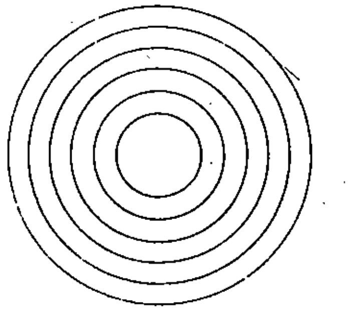
की सत्यता की जाँच कीजिए।

समीकरण 5·17 हमें बताता है कि किन्हीं दो कणों के बीच गुरुत्वीय आकर्षण बल का मान उनकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा के आकाशीय अवकलज (space derivative) के बराबर होता है। यदि आप समीकरण 3·18 को फिर से देखें तो पाएंगे कि हमने एक संरक्षी बल क्षेत्र के संदर्भ में इस विचार की चर्चा की थी। गुरुत्वीय बल भी वास्तव में एक संरक्षी बल है।

अब हम एक कण और एक विस्तृत पिंड के बीच लगने वाले बल को निकालने की समस्या पर फिर से विचार करते हैं। पहले हमें यह समस्या जटिल लगी थी क्योंकि हमें इस को हल करने के लिए अनेक बलों का सदिश योग निकालना पड़ता। लेकिन समीकरण 5·17 की मदद से हम इस समस्या से एक नए तरीके से निपट सकते

हैं। हम अलग-अलग स्थितिज ऊर्जाओं को जोड़ कर परिणामी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा निकालने के बाद समीकरण 5·17 की सहायता से परिणामी बल निकाल सकते हैं।

अभी तक हमने जो कुछ पढ़ा है उसका अनुप्रयोग हम गुरुत्व बल (force of gravity) के अध्ययन के लिए करेंगे। इसके लिए हम पृथ्वी के भूमध्यीय फैलाव की उपेक्षा करके उसे गोलाकार मानेंगे। आइए अब हम एक गोले और एक कण के बीच लगने वाले आकर्षण बल की गणना करें। इस प्रक्रिया में हमें गणित के अनेक सूत्रों का प्रयोग करना पड़ेगा। परन्तु इससे आप घबराइए मत।

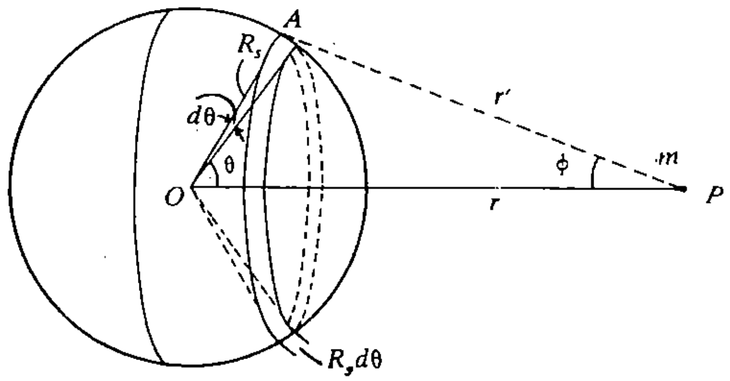


चित्र: 5.12

आपने देखा होगा कि अगर एक प्याज़ को छीला जाये तो एक के बाद एक उसकी पतली-पतली परतें निकलती जाती हैं और अन्त में उसके केन्द्रीय भाग में लगभग कुछ नहीं बचता। इसी तरह हम मान सकते हैं कि एक ठोस गोला अनेक संकेंद्री पतले गोलीय कोशों (spherical shells) से मिल कर बनता है (देखें चित्र 5·12)। इसलिए पहले हम एक गोलीय कोश के कारण एक कण में निहित गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा निकालेंगे।

5.4.1 गोलीय कोश के कारण एक कण की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

मान लीजिए कि m द्रव्यमान का एक कण द्रव्यमान M_s और त्रिज्या R_s वाले गोलीय कोश के केन्द्र से दूरी r पर स्थित है। आइए हम गोलीय कोश के कारण उस कण में निहित गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मान निकालें जबकि i) $r > R_s$ ii) $r < R_s$.



चित्र 5.13: एक पतले गोलीय कोश के एक वलयाकार हिस्से की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा।

चित्र 5·13 देखें। हम पहले कोश का एक वलयाकार (ring-like) हिस्सा लेते हैं जो अक्ष OP से क्रमशः कोण θ और $\theta + d\theta$ बनाने वाली दिशाओं के बीच स्थित है। मान लें कि इस भाग की चौड़ाई अत्यणु है। इसलिए इस भाग के प्रत्येक बिंदु की बिन्दु P से दूरी r' अचर मानी जा सकती है। क्योंकि वलय की कोणीय चौड़ाई $d\theta$ है इसलिए इसकी चौड़ाई $R_s d\theta$ और इसकी त्रिज्या $R_s \sin\theta$ है।

इसका द्रव्यमान क्या होगा ? कोश के एकक क्षेत्र का द्रव्यमान $\sigma = M_s / 4\pi R_s^2$ है। अतः वलय का द्रव्यमान $M_{\text{वलय}} = \sigma\, dA$ जहां dA वलय का पृष्ठीय क्षेत्रफल (surface area) है। वलय की परिधि $2\pi R_s \sin\theta$ है और इसलिए इसका क्षेत्रफल है

$$dA = (2\pi R_s \sin\theta) R_s d\theta, \tag{5·18}$$

या

$$M_{\text{वलय}} = \frac{M_s}{4\pi R_s^2} 2\pi R_s \sin\theta R_s d\theta = \frac{M_s}{2} \sin\theta\, d\theta \cdot \tag{5·19}$$

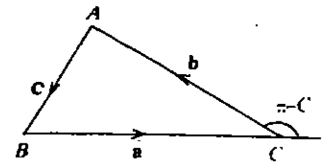
अब हम इस वलय के कारण बिंदु P पर स्थित कण की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा ज्ञात करेंगे। यह वलय अनेक कणों से मिलकर बना है जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान मान लें कि δM है।

इनमें से किसी एक कण के कारण बिंदु P पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $\left[-\frac{Gm\delta M}{r'}\right]$ है। अतः संपूर्ण वलय के कारण बिंदु P पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा होगी

$$dU_{\text{वलय}} = \Sigma \left[\frac{-Gm\delta M}{r'}\right]$$

जहां $\sum$ वलय में स्थित सभी कणों का जोड़ दिखाता है। अब G एक स्थिरांक है। और क्योंकि वलय के प्रत्येक कण की बिंदु P से दूरी r' अचर है अतः r' भी एक स्थिरांक है। अतः

$$dU_{\text{वलय}} = \sum \left[\frac{-Gm\delta M}{r'} \right] = \frac{-Gm}{r'} \sum (\delta M) = \frac{-GmM_{\text{वलय}}}{r'}$$



उपरोक्त चित्र में

$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$

$\therefore \mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{c}$

या $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = c^2$

या $a^2 + b^2 + 2\,\mathbf{a}.\mathbf{b} = c^2$

या $a^2 + b^2 + 2ab \cos(\pi - C) = c^2$

या $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

समीकरण 5·19 से हम पाते हैं कि

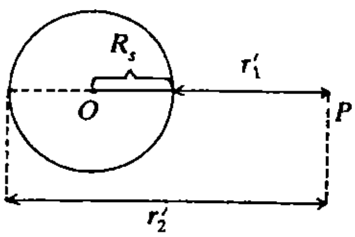
$$dU_{\text{वलय}} = \frac{-GmM_s \sin\theta d\theta}{2r'} \tag{5·20}$$

हम मान सकते हैं कि गोलीय कोश एक ही अक्ष OP वाले ऐसे अनेक वलयों से मिल कर बना है। क्योंकि स्थितिज ऊर्जा अदिश राशि है इसलिए हम समीकरण 5·20 का समाकलन करके संपूर्ण कोश के कारण बिंदु P पर स्थित कण की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा U निकाल सकते हैं। समीकरण 5·20 की दायीं ओर दो परिवर्ती राशियां θ और r' हैं। यदि हम समीकरण में एक ही परिवर्ती राशि का उपयोग कर सकें तो समस्या सरल हो जाएगी। इसके लिए हमें r', r और R_s के बीच के संबंध को लेना पड़ेगा।

त्रिभुज OAP से

$$r'^2 = r^2 + R_s^2 - 2rR_s \cos\theta. \tag{5·21}$$

θ के सापेक्ष इस का अवकलन करने पर



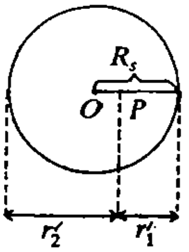
$$2r' \frac{dr'}{d\theta} = 2rR_s \sin\theta$$

या

$$\frac{dr'}{rR_s} = \frac{\sin\theta \, d\theta}{r'} \tag{5·22}$$

अतः समीकरण 5·20 से हमें प्राप्त होता है

$$dU_{\text{वलय}} = -\frac{GmM_s}{2rR_s} dr' \tag{5·23}$$



चित्र 5.14

समीकरण 5·23 का समाकलन करने पर हम पाते हैं कि पूरे गोलीय कोश के लिए

$$U = -\frac{GM_s m}{2rR_s} \int_{r_1'}^{r_2'} dr'. \tag{5·24}$$

यहां r'_2 और r'_1, दूरी r' के क्रमशः अधिकतम और न्यूनतम मान हैं। चित्र 5·14 को ध्यान से देखिए। यदि बिंदु P गोलीय कोश के बाहर हो (अर्थात् $r > R_s$) तो

$$r_1' = r - R_s \; ; \; r_2' = r + R_s. \tag{5·25 क}$$

और यदि बिंदु P कोश के अन्दर हो (अर्थात् $r < R_s$) तो

$$r_1' = R_s - r \; ; r_2' = R_s + r \; . \tag{5·25 ख}$$

अतः समीकरण 5·25 क से गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

$$U = -\frac{GmM_s}{2rR_s}(r'_2 - r'_1) = -\frac{GmM_s}{2rR_s} 2R_s, \quad r > R_s \text{ के लिए}$$

या

$$U = -\frac{GmM_s}{r}, \quad r > R_s \tag{5·26}$$

समीकरण 5·17 से कण m पर लगने वाला बल होता है :

$$\mathbf{F} = -\left(\frac{dU}{dr}\right)\hat{\mathbf{r}} = -\frac{GmM_s}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \tag{5·27}$$

ऋणात्मक चिह्न यह दिखाता है कि यह बल एक आकर्षण बल है। समीकरण 5·26 में U के व्यंजक में ऋणात्मक चिह्न से भी हमें यह पता चलता है कि U आकर्षक (attractive) है। समीकरण 5·12 और

5·27 की तुलना करने पर हम यह कह सकते हैं कि गोलीय कोश अपने केन्द्र पर स्थित अपने बराबर द्रव्यमान वाले एक कण के समतुल्य है।

जब $r < R_s$ हो तो समीकरण 5·25 ख की सहायता से हम पाते हैं कि

$$U = -\frac{Gm\,M_s}{2rR_s}\,(r_2' - r_1') = -\frac{Gm\,M_s}{2rR_s}\,2r$$

अर्थात् $$U = -\frac{GmM_s}{R_s} = \text{एक अचर} = U_0,\ \text{माना},\ r < R_s \text{ के लिए} \qquad (5{\cdot}28)$$

अतः समीकरण 5·17 से हमें मिलता है $\mathbf{F} = -\frac{dU}{dr}\,\hat{\mathbf{r}} = 0$ (5·29)

अतः कोश के अन्दर स्थित किसी कण की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा अचर रहती है और उस पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल शून्य होता है।

अभी तक पढ़ी हुई इन संकल्पनाओं को लागू करके आप निम्नलिखित बोध प्रश्न को हल कर सकते हैं।

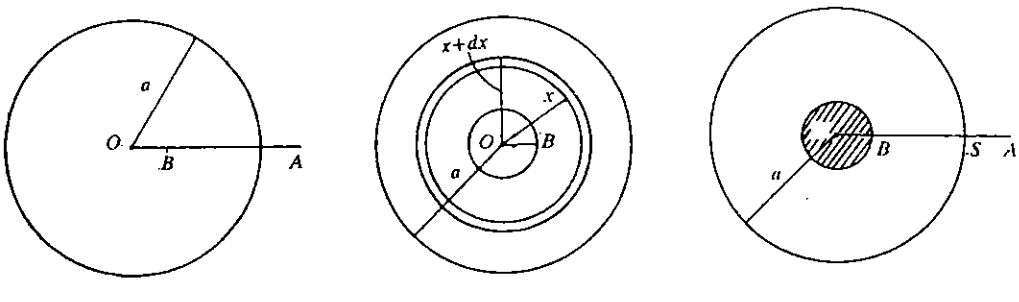
बोध प्रश्न 6

उपरोक्त उदाहरण में U और r के बीच एक ग्राफ़ खींचें। r की सीमाएं $r = 0$ से $r = 2R_s$ तक लें। भौतिकीय तर्कों की सहायता से यह बताएं कि $r = R_s$ पर U संतत है या नहीं। क्या आपका ग्राफ़ आपके तर्कों से मेल खाता है ?

अभी तक हमने गोलीय कोश के कारण एक कण की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा निकाली है। आइए अब इसकी मदद से ठोस गोले के कारण कण की स्थितिज ऊर्जा मालूम करें।

5.4.2 ठोस गोले के कारण एक कण की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा

हमने पहले देखा है कि एक ठोस गोला अनेकों संकेन्द्री गोलीय कोशों से मिल कर बनता है। इस गोले के कारण इसके बाहर स्थित एक कण की स्थितिज ऊर्जा भाग 5·4·1 में बताई गई विधि को लागू करके आसानी से मालूम की जा सकती है। इसलिए आप इसे स्वयं ही निकालना चाहेंगे।



(क) (ख) (ग)

चित्र 5.15

बोध प्रश्न 7

चित्र 5·15 (क) में द्रव्यमान M और त्रिज्या R वाले एक ठोस गोले को दिखाया गया है। सिद्ध कीजिए कि गोले के कारण बिंदु A पर रखे गए द्रव्यमान m वाले एक कण की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मान है

$$U_A = -\frac{GMm}{r},\ \text{जहां } r = OA. \qquad (5{\cdot}30)$$

हमने एक ठोस गोले के गुरुत्वीय बल का अध्ययन पृथ्वी के गुरुत्व में होने वाले परिवर्तनों को समझने के लिए किया है। इसके लिए हमें गोले के बाहर स्थित कण पर लगने वाले बल के साथ-साथ गोले के अन्दर स्थित कण पर लगने वाले बल की जानकारी भी होनी चाहिए। अतः हम निम्नलिखित उदाहरण को हल करेंगे।

उदाहरण 1

चित्र 5·15 क की सहायता से यह सिद्ध कीजिए कि बिंदु B ($OB = r$) पर स्थित द्रव्यमान m वाले कण की, त्रिज्या R तथा द्रव्यमान M वाले एक ठोस गोले के कारण गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मान है

$$U_B = -\frac{GMm}{2a^3}(3a^2 - r^2). \qquad (5\cdot31)$$

चित्र 5·15 ख को देखें। बिंदु B त्रिज्या r वाले एक ठोस गोले की सतह पर और एक मोटे गोलीय कोश (जो त्रिज्या r और त्रिज्या a के बीच सीमित है) की भीतरी सतह पर स्थित है। बिंदु B पर स्थित द्रव्यमान m वाले कण की स्थितिज ऊर्जा में इन दोनों भागों का योगदान होगा। हम इन भागों के योगदान को क्रमशः U_{B1} और U_{B2} से सूचित करेंगे। बोध प्रश्न 7 के परिणाम से हम पाते हैं कि

$$U_{B1} = -\frac{GM_1m}{r}$$

जहां M_1 त्रिज्या r वाले भीतरी ठोस गोले का द्रव्यमान है। अतः

$$M_1 = \frac{M}{\frac{4\pi}{3}a^3}\cdot\frac{4\pi}{3}r^3 = \frac{Mr^3}{a^3}. \qquad (5\cdot32)$$

अतः समीकरण 5·32 से

$$U_{B1} = -\frac{GMmr^2}{a^3}. \qquad (5\cdot33)$$

U_{B2} का मान मालूम करने के लिए हम त्रिज्या x और $x + dx$ के मध्य स्थित संकेंद्री गोलीय कोश को लेते हैं। इस कोश का आयतन है $4\pi x^2\, dx$ और इसका द्रव्यमान $= \dfrac{M}{\frac{4\pi}{3}a^3}\cdot 4\pi x^2\, dx = \dfrac{3M}{a^3}x^2\, dx$ है।

क्योंकि dx अत्यणु है इसलिए हम इस पतले कोश को त्रिज्या x वाले एक गोलीय कोश के समतुल्य मान सकते हैं। अतः समीकरण 5·28 की सहायता से इस कोश के कारण बिन्दु B पर स्थित द्रव्यमान m के कण की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मान होगा

$$dU_{B2} = -\frac{GM\left(\frac{3M}{a^3}x^2dx\right)}{x}$$
$$= -\frac{3GmM}{a^3}x\, dx. \qquad (5\cdot34)$$

लेकिन मोटा गोलीय कोश, ऐसे अनेक पतले गोलीय कोशों से मिल कर बना है जिनकी त्रिज्याएं r और a के बीच स्थित हैं। इसलिए U_{B2} का मान ज्ञात करने के लिए हम इस समीकरण का r और a सीमाओं के बीच समाकलन करते हैं। अतः

$$U_{B2} = -\int_r^a \frac{3GMm}{a^3}\, x\, dx$$
$$= -\frac{3GMm}{2a^3}(a^2 - r^2) \qquad (5\cdot35)$$

अब $\qquad U_B = U_{B1} + U_{B2}.$

अतः समीकरण 5·33 और 5·35 से

$$U_B = -\frac{GMm}{a^3}\left[r^2 + \frac{3}{2}(a^2 - r^2)\right]$$
$$= -\frac{GMm}{2a^3}(3a^2 - r^2)$$

जो समीकरण 5·31 ही है।

अब हम त्रिज्या a और द्रव्यमान M वाले एक ठोस गोले के कारण द्रव्यमान m वाले किसी कण पर लग रहे आकर्षण बल का मान ज्ञात कर सकते हैं। चित्र 5·15 ग को देखिए। जब m, गोले के बाहर बिंदु A पर स्थित हो तो समीकरण 5·17 और 5·30 से उस पर लगने वाला बल होता है :

$$\mathbf{F}_A = -\frac{d}{dr}\left(-\frac{G\ Mm}{r}\right)\hat{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \qquad (5\cdot36)$$

जो समीकरण 5·14 क ही है।

समीकरण 5·36 हमें यह बताता है कि **किसी ठोस गोले के कारण उससे बाहर रखे द्रव्यमान m वाले किसी कण पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल वही होता है जो कि m पर गोले के केंद्र पर रखे गोले जितने ही द्रव्यमान वाले एक कण के कारण होता है।**

जब m को गोले के किसी भीतरी बिंदु B पर रखा जाता है (यानि $r = OB$ हो) तो हम समीकरण 5·17 और 5·31 से पाते हैं कि उस पर लगने वाला बल है :

$$\mathbf{F}_B = -\frac{d}{dr}\left\{-\frac{GMm}{2a^3}(3a^2 - r^2)\right\}\hat{\mathbf{r}}$$

या

$$\mathbf{F}_B = -\frac{GMm}{a^3}\, r\,\hat{\mathbf{r}}. \qquad (5\cdot37)$$

समीकरण 5·37 में समीकरण 5·32 का प्रयोग करके हम पाते हैं कि

$$\mathbf{F}_B = -\frac{GM_1 m}{r^2}\hat{\mathbf{r}}. \qquad (5\cdot38)$$

चित्र 5·15 ग को फिर से देखें। समीकरण 5·38 यह बताता है कि बिंदु B पर स्थित द्रव्यमान m के कण पर लगने वाला बल वही है जो O पर रखे एक द्रव्यमान M_1 के कण के कारण होगा। ध्यान दें कि M_1, त्रिज्या OB वाले गोले का ही द्रव्यमान है। अतः हम कह सकते हैं :

किसी ठोस गोले के भीतर रखे द्रव्यमान m के किसी कण पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल केवल चित्र 5·15 ग में छायांकित गोलाकार द्रव्यमान के कारण ही होता है। चित्र 5·15 ग में दिखाया गया अछायित मोटा गोलीय कोश इस कण पर कोई बल नहीं लगाता।

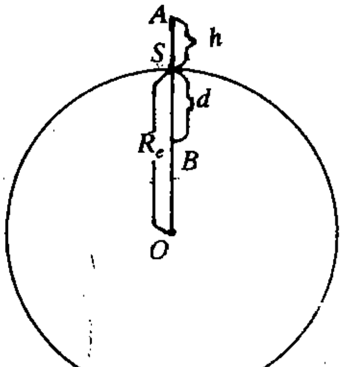
यदि अब हम समीकरण 5·36 और 5·37 में $r = a$ रख दें तो ठोस गोले की सतह S पर स्थित कण m पर लगने वाले बल का मान होता है :

$$\mathbf{F}_S = -\frac{GMm}{a^2}\hat{\mathbf{r}}. \qquad (5\cdot39)$$

अब हम समीकरण 5·36, 5·37 और 5·39 में प्राप्त परिणामों का प्रयोग करके पृथ्वी के गुरुत्व में होने वाले परिवर्तनों का अध्ययन करेंगे।

5.4.3 गुरुत्व और उसमें परिवर्तन

पृथ्वी और किसी अन्य पिंड के बीच के आकर्षण को हम **गुरुत्व** (gravity) कहते हैं। पृथ्वी के इस आकर्षण बल के कारण कोई भी पिंड पृथ्वी के केन्द्र की ओर त्वरित होता है। हम इस त्वरण को गुरुत्व त्वरण (acceleration due to gravity) कहते हैं और इसे g से प्रकट करते हैं। अब हम यह समझेंगे कि किसी विशेष स्थान पर ऊंचाई तथा गहराई के साथ g किस तरह बदलता है।



चित्र 5.16

चित्र 5·16 को देखिए। हम द्रव्यमान m के एक कण की क्रमशः बिंदु A और B पर स्थितियां लेते हैं। यहां $SA = h$ = बिंदु A की ऊंचाई तथा $SB = d$ = बिंदु B की गहराई है। बिन्दु S पृथ्वी की सतह पर स्थित है। इसलिए $OS = R_e$ = पृथ्वी की त्रिज्या। मान लीजिए पृथ्वी का द्रव्यमान M_e है। बिंदु A, B और S पर द्रव्यमान m पर लगने वाले बलों को हम क्रमशः $\mathbf{F}_A$, $\mathbf{F}_B$ और $\mathbf{F}_S$ लिखेंगे। तीनों समीकरणों 5·36, 5·37 और 5·39 में हम $M = M_e$ तथा $a = R_e$ रखते हैं। फिर अगर हम समीकरण 5·36 और 5·37 में क्रमशः $r = R_e + h$ तथा $r = R_e - d$ रखें तो हमें तीनों बलों का परिमाण प्राप्त होता है :

$$F_S = \frac{GM_e m}{R_e^2},\ F_A = \frac{GM_e m}{(R_e + h)^2},\ F_B = \frac{GM_e m}{R_e^3}(R_e - d) \qquad (5\cdot40)$$

मान लीजिए कि पृथ्वी की सतह तथा बिंदु A और B पर गुरुत्वीय त्वरण के परिमाण क्रमशः g_S, g_A और g_B हैं। तब

$$g_S = \frac{F_S}{m} = \frac{GM_e}{R_e^2} = g_0 \text{, माना।} \tag{5·41}$$

$$g_A = \frac{F_A}{m} = \frac{GM_e}{(R_e + h)^2}. \tag{5·42}$$

$$g_B = \frac{F_B}{m} = GM_e \frac{(R_e - d)}{R_e^3} \tag{5·43}$$

समीकरण 5·41 और 5·42 से हमें मिलता है

$$g_A = \frac{g_0 R_e^2}{(R_e + h)^2} \tag{5·42 क}$$

या

$$g_A = g_0\left(1 + \frac{h}{R_e}\right)^{-2} \simeq g_0\left(1 - \frac{2h}{R_e}\right), \text{(जब } h << R_e \text{ हो)} \tag{5·42 ख}$$

इसी प्रकार समीकरण 5·41 और 5·43 से हमें मिलता है

$$g_B = \frac{g_0}{R_e}(R_e - d) \tag{5·43 क}$$

समीकरण 5·42 क और 5·43 क हमें यह बताते हैं कि (i) पृथ्वी के बाहर स्थित बिन्दुओं पर गुरुत्वीय त्वरण उन बिंदुओं की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है ; (ii) पृथ्वी के भीतर स्थित बिंदुओं के लिए गुरुत्वीय त्वरण उन बिंदुओं की पृथ्वी से केन्द्र की दूरी का अनुक्रमानुपाती होता है। अब आप समीकरण 5·42 क और 5·43 क पर आधारित एक बोध प्रश्न हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 8

(क) $r = 0$ से $r = 2R_e$ तक के r के मानों के लिए g और r के बीच एक ग्राफ़ खींचें।

(ख) समुद्री सतह पर g के मान की तुलना में (i) 2500 km की ऊंचाई, तथा (ii) 3000 m की गहराई पर स्थित कोलार स्वर्ण खानों में g के मान में कितने प्रतिशत का अन्तर आता है?

अभी तक हमने ऊंचाई तथा गहराई के साथ g में आने वाले परिवर्तन का अध्ययन किया है। g के मान में अक्षांश के साथ भी परिवर्तन आता है। यह परिवर्तन पृथ्वी की अपने अक्ष के गिर्द घूर्णी गति के कारण आता है। हम इस परिवर्तन से सम्बन्धित सूत्र को इकाई 10 में सिद्ध करेंगे। यहां हम केवल उस सूत्र को लिख रहे हैं

$$g(\lambda) = g_e + \omega^2 R \sin^2 \lambda \tag{5·44}$$

जहां $g(\lambda)$ = पृथ्वी की सतह पर अक्षांश λ पर स्थित जगह पर g का मान

g_e = भूमध्य रेखा पर g का मान = 9·7805 m s^{-2}

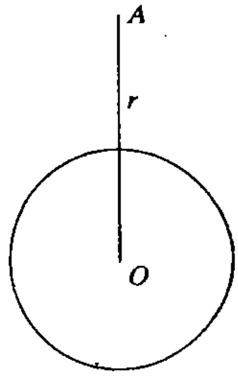
ω = पृथ्वी की अपने अक्ष के सापेक्ष कोणीय चाल

अब तक हमने यह देखा है कि कैसे g का मान अनेक कारणों से प्रभावित होता है। समीकरण 5·42 और 5·42 क हमें यह बताते हैं कि किसी भी परिमित दूरी पर g का मान शून्य नहीं होता। अतः हम पृथ्वी के केन्द्र से चाहे कितनी भी दूरी पर हों, हमें पृथ्वी के गुरुत्व का आभास अवश्य होगा। लेकिन अब हम यह देखेंगे कि किसी भी दूरी पर स्थित किसी कण को यदि एक न्यूनतम वेग दे दिया जाये तो वह पृथ्वी के गुरुत्व की सीमाओं से मुक्त हो सकता है। इस वेग को हम **पलायन वेग** (escape velocity) कहते हैं। यह संकल्पना किसी भी अंतरिक्षीय गोलाकार पिंड पर लागू की जा सकती है। अब हम इस वेग के लिये एक व्यंजक प्राप्त करेंगे।

5.4.4 पलायन वेग

मान लीजिए कि द्रव्यमान m का एक कण द्रव्यमान M के एक विशाल गोलाकार पिंड के केन्द्र से दूरी r पर स्थित है (चित्र 5·17)। इस स्थिति पर उसकी गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $U = -\dfrac{GMm}{r}$ है। अब आप समीकरण 5·27 के बाद के पैराग्राफ़ को फिर से पढ़ें। आपको U के व्यंजक में लगे ऋणात्मक चिह्न का महत्व पता चलेगा। यह चिह्न दिखाता है कि द्रव्यमान m द्रव्यमान M के आकर्षण बल के कारण उससे बद्ध है।

अब यदि हम कण m को M के गुरुत्वीय आकर्षण से मुक्त करना चाहते हैं तो हमें इसे बाहर से ऊर्जा E देनी पड़ेगी जहाँ $E \geq U$. ऐसा करने पर कण की कुल ऊर्जा $E + U$ हो जाएगी, जो ऋणात्मक नहीं होगी। तब कण m पिंड M से बद्ध नहीं रहेगा और उसके आकर्षण से मुक्त होकर पलायन कर सकेगा। यदि ऊर्जा E को कण की गतिज ऊर्जा के रूप में दिया जाए तो $E = \frac{1}{2} mv^2$; यहां v कण को दिया गया वेग है। अतः कण के मुक्त होने की शर्त है कि $\left(\frac{1}{2} mv^2 + U\right)$ ऋणात्मक न हो।



चित्र 5.17

यानि $\qquad \frac{1}{2} mv^2 + U \geq 0,$

या $\qquad v^2 \geq \dfrac{2GM}{r},$

या $\qquad v \nless \sqrt{\dfrac{2GM}{r}}\,.$

अतः कण के पलायन के लिये ज़रूरी न्यूनतम चाल $\sqrt{\dfrac{2GM}{r}}$ है जिसे हम पलायन वेग ($\mathbf{v}_e$) का परिमाण कहते हैं। जैसा कि आप देख सकते हैं, यह वेग कण m के द्रव्यमान पर निर्भर नहीं करता। अतः

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}\,. \qquad (5{\cdot}45)$$

यदि कण प्रारम्भ में पृथ्वी की सतह पर हो तो $r = R_e$, $M = M_e$. अतः समीकरण 5·45 और 5·41 से हम पाते हैं कि

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}} = \sqrt{2g_0 R_e}\,. \qquad (5{\cdot}46)$$

अब $g_0 = 9{\cdot}8 \text{ m s}^{-2}$ लेने पर हम पाते हैं कि

$$v_e = 1{\cdot}1 \times 10^4 \text{ m s}^{-1} = 11 \text{ km s}^{-1}.$$

यदि हम इस चाल से चलें तो हमें श्रीनगर से कन्याकुमारी पहुंचने में करीब 5 मिनट का समय लगेगा।

अब आप एक सरल बोध प्रश्न को हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 9

चन्द्रमा की सतह पर पलायन वेग का परिमाण ज्ञात कीजिए।

अब तक हमने गुरुत्वाकर्षण और उसके कुछ अनुप्रयोगों के बारे में चर्चा की है। इस सारी चर्चा का मुख्य केन्द्र न्यूटन का गुरुत्वाकर्षण संबंधी सिद्धांत था। लेकिन यदि हम यह प्रश्न उठायें — किन्हीं दो कणों के बीच आकर्षण बल होता ही क्यों है तो क्या न्यूटन का सिद्धांत हमें इस प्रश्न का उत्तर दे सकेगा ? यह ऐसा नहीं कर सकता, क्योंकि किन्हीं दो कणों के बीच में गुरुत्वाकर्षण बल प्राकृतिक रूप से ही विद्यमान रहता है। ऐसे बल को हम एक मूलभूत प्राकृतिक बल (fundamental force in nature) कहते हैं। प्रकृति में तीन प्रकार के मूलभूत प्राकृतिक बल हैं। अब हम इन बलों के बारे में संक्षेप में चर्चा करेंगे।

5.5 मूलभूत प्राकृतिक बल

प्रकृति में तीन प्रकार के मूलभूत बल हैं: (i) गुरुत्वीय (gravitational); (ii) विद्युत्-निर्बल (electroweak) और (iii) प्रबल (strong)। इनमें से पहले बल के बारे में हमने विस्तार से बात की है और, जैसा कि हमने देखा, यह बल प्रत्येक पदार्थ पर प्रभाव डालता है। यह दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है लेकिन इसका परास (range) अनन्त है। ग्रह तथा तारों की गति इसी बल के अधीन होती है। यही बल सौरमंडल और मंदाकिनियों के संगठन को सुनियोजित करता है।

दूसरा मूलभूत प्राकृतिक बल, विद्युत्-निर्बल बल है। हम इस बल में विद्युत्-चुम्बकीय (electromagnetic) तथा निर्बल-नाभिकीय बल (weak nuclear force) को एक साथ गिनते हैं। इनमें से बाद के बल के बारे में हम इस भाग के अंत में चर्चा करेंगे। पहले हम विद्युत्-चुम्बकीय बलों की बात करें। जब दो आवेशित कण स्थिर हों (स्थिर विद्युतिकी, electrostatics) या गतिमान हों (विद्युत्-गतिकी, electrodynamics) तो उनके मध्य लगने वाले बल विद्युत्-चुम्बकीय बलों की श्रेणी में आते हैं। किन्हीं दो आवेशित कणों के बीच लगने वाला स्थिर वैद्युत् बल, गुरुत्वाकर्षण बल की भांति दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है। लेकिन इन दोनों बलों के बीच में एक विशेष अन्तर है। आवेश दो तरह के होते हैं — धनात्मक और ऋणात्मक। यदि दोनों कणों पर भिन्न आवेश हों तो उनके बीच आकर्षण का बल और यदि एक ही प्रकार के आवेश हों तो उनके बीच प्रतिकर्षण बल (force of repulsion) लगता है। यह दिखाया जा सकता है कि हाइड्रोजन के परमाणु में स्थित इलेक्ट्रॉन और प्रोट्रॉन के बीच लगने वाला स्थिर वैद्युत् बल उनके बीच के गुरुत्वाकर्षण बल से 10^{39} गुना प्रबल होता है। इससे हम इन दोनों बलों की प्रबलता की तुलना कर सकते हैं।

आइए अब गतिमान आवेशों की बात करें। हम जानते हैं कि गतिमान आवेश एक विद्युत् धारा के समतुल्य है। स्कूल में हमने ओर्स्टेड के प्रयोगों के बारे में पढ़ रखा है। इन प्रयोगों से हम जानते हैं कि जब किसी सुचालक में विद्युत् धारा प्रवाहित हो रही हो तो वह एक चुम्बक के समतुल्य हो जाता है। इसी प्रयोग से यह पता चला कि विद्युत् (electricity) और चुंबकत्व (magnetism) एक ही बल क्षेत्र के दो पहलू हैं। इसलिए इसे हम विद्युत्-चुंबकीय बल क्षेत्र (electromagnetic field) कहते हैं। दैनिक जीवन में दिखने वाले बल — जैसे घर्षण, तनाव आदि — विद्युत्-चुम्बकीय बल क्षेत्रों की सहायता से समझे जा सकते हैं।

अब यदि हम किसी परमाणु के नाभिक में स्थित दो प्रोटॉनों के बीच लगने वाले वैद्युत् प्रतिकर्षण बल की उनके बीच लगने वाले गुरुत्वीय आकर्षण बल से तुलना करें तो हम पाते हैं कि पहला बल दूसरे बल की तुलना में 10^{36}गुना है। ऐसी स्थिति में नाभिक के प्रोटॉन दूर-दूर तक बिखर जाने के बजाय एक ही स्थान पर कैसे बने रहते हैं ? ऐसा प्रकृति में एक तीसरे प्रकार के मूलभूत बल — प्रबल नाभिकीय बल (strong nuclear force) के कारण होता है, जो नाभिक में स्थित प्रोटॉनों के बीच लगता है। यह बल अत्यन्त प्रबल आकर्षण बल है और यह उनके बीच लगने वाले स्थिर वैद्युत् प्रतिकर्षण बल से कई गुना अधिक प्रबल होता है। परमाणु के नाभिक में न्यूट्रॉन भी होते हैं और यह नाभिक के भीतर उतने ही कस कर बद्ध होते हैं जितने कि नाभिकीय प्रोट्रॉन। अतः हमें यह मानना पड़ेगा कि प्रोटॉनों की तरह दो न्यूट्रॉनों के बीच भी सबल नाभिकीय बल लगता है। यही बल एक न्यूट्रॉन और एक प्रोट्रॉन के बीच भी होता है। लेकिन गुरुत्वीय और विद्युत्-चुम्बकीय बलों के विपरीत यह बल दो नाभिकीय कणों (न्यूट्रॉन तथा प्रोटॉन) के बीच तभी प्रभावकारी होता है जब यह कण एक दूसरे के अत्यन्त निकट होते हैं (10^{-15}m की या उससे भी कम दूरी पर)। यह बल दूरी के बढ़ने के साथ अत्यन्त तेज़ी से कम होता जाता है जिससे कि कोई नाभिकीय कण अपने अत्यन्त निकट के पड़ोसी कण पर ही यह बल लगाता है। नाभिकीय भौतिकी (nuclear physics) के पाठ्यक्रम में आप नाभिकीय बलों के बारे में विस्तार से पढ़ेंगे।

अभी हमने समझा कि प्रबल नाभिकीय बलों के कारण परमाण्वीय नाभिक का संबंधन (binding) संभव होता है। लेकिन यह बल रेडियोएक्टिव बीटा क्षय (radioactive beta decay) जैसी प्रक्रियाओं के लिए ज़िम्मेदार नहीं होता। इन प्रक्रियाओं को समझने के लिए हमें निर्बल नाभिकीय बल (weak nuclear force) की बात करनी पड़ती है। नाभिकीय दूरियों पर यह बल विद्युत्-चुम्बकीय बल की तुलना में काफ़ी निर्बल होता है लेकिन फिर भी यह गुरुत्वीय बल से लगभग 10^{34} गुना बड़ा होता है। कुछ साल पहले तक हम इस निर्बल नाभिकीय बल को विद्युत्-चुम्बकीय बलों से अलग मानते थे। लेकिन तब एक नया सिद्धांत दिया गया था जिसके द्वारा इन दो बलों का एकीकरण संभव हुआ। अतः अब हम विद्युत्-निर्बल बल नाम का प्रयोग करने लग गए हैं।

सारणी 5·1 में हमने संक्षेप में इन मूलभूत प्राकृतिक बलों की कुछ विशेषताएं दी हैं।

सारणी 5.1 : तीन मूलभूत प्राकृतिक बलों की कुछ विशेषताएं

बल	तुलनात्मक प्रबलता	परास	महत्ता
प्रबल नाभिकीय	1	10^{-13} cm	नाभिक में न्यूक्लिऑनों को बद्ध रखता है।
विद्युत्-निर्बल: विद्युत्-चुंबकीय	10^{-2}	अनन्त	दैनिक घटनाओं, जैसे घर्षण, तनाव आदि को नियंत्रित करता है ।
विद्युत्-निर्बल: निर्बल-नाभिकीय	10^{-5}	10^{-5} cm	नाभिकीय तत्वांतरण (nuclear transmutation
गुरुत्वाकर्षण	10^{-39}	अनन्त	ब्रह्मांड तथा अन्य बड़े पैमाने पर हो रही घटनाओं को नियंत्रित करता है ।

अभी तक इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है उसका एक संक्षिप्त विवरण हम यहां दे रहे हैं।

5.6 सारांश

- न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण के सार्वत्रिक सिद्धांत के अनुसार ब्रह्मांड में स्थित कोई भी दो कण एक दूसरे के ऊपर आकर्षण बल लगाते हैं। यह आकर्षण बल निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है

$$\mathbf{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^2}\,\hat{\mathbf{r}}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$$

  यहां $\mathbf{F}_{12}$ कण m_2 पर कण m_1 द्वारा लगाया गया बल तथा $\hat{\mathbf{r}}_{12}$ कण m_1 से कण m_2 की ओर, उन्हें मिलाने वाली रेखा के अनुदिश एकक सदिश है।

- कोई भी द्रव्यमान अपने निकट अपने प्रभाव का एक क्षेत्र स्थापित कर लेता है। द्रव्यमान M के एक कण द्वारा स्थापित गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता $\mathbf{E}$ और विभव U के किसी बिंदु पर मान निम्नलिखित सूत्र से मिलते हैं :

$$\mathbf{E} = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \text{ और } U = -\frac{GM}{r}$$

  यहां $\hat{\mathbf{r}}$, M से उस बिंदु की ओर, उनको मिलाने वाली रेखा के अनुदिश एकक सदिश है।

- किसी ठोस गोले के द्वारा उससे बाहर स्थित किसी कण पर लगने वाला गुरुत्वाकर्षण बल वही होगा जो उसके केन्द्र पर रखे गये, गोले के बराबर द्रव्यमान वाले कण के कारण होता है।

- जब कण गोले के अंदर किसी बिंदु पर स्थित होता है तो उस पर उसी संकेंद्री भीतरी गोले द्वारा गुरुत्वाकर्षण बल लगता है जिसकी सतह पर वह कण स्थित है। इस सतह के बाहर स्थित गोलीय कोशों का गुरुत्वाकर्षण बल में कोई योगदान नहीं होता।

- अपनी सतह से ऊपर और सतह के भीतर के बिंदुओं पर पृथ्वी का गुरुत्व त्वरण, क्रमशः बिंदु की पृथ्वी के केन्द्र से दूरी के वर्ग का व्युत्क्रमानुपाती होता है, और उस दूरी का अनुक्रमानुपाती होता है।

- द्रव्यमान M के गोलाकार पिंड के केन्द्र से r दूरी पर स्थित द्रव्यमान m के किसी कण को उस पिंड के गुरुत्वीय बंधन से छूटने के लिये आवश्यक न्यूनतम वेग उस कण का पलायन वेग कहलाता है। पलायन वेग का परिमाण $v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$ होता है।

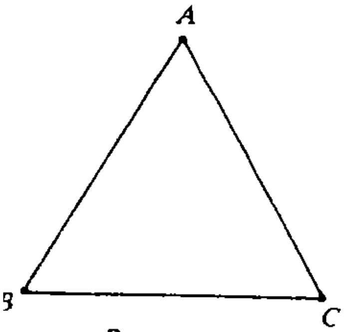
- गुरुत्वाकर्षण एक मूलभूत प्राकृतिक बल है। प्रकृति में दो और मूलभूत बल — विद्युत्-निर्बल तथा प्रबल नाभिकीय बल होते हैं।

5.7 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक पिंड का पृथ्वी पर भार 900 N है। इसी पिंड का मंगल ग्रह पर भार क्या होगा ? मंगल का द्रव्यमान पृथ्वी के द्रव्यमान का 1/9 तथा त्रिज्या पृथ्वी की त्रिज्या की 1/2 है।

2. समीकरण 5·30 के अनुसार द्रव्यमान m के किसी पिंड की पृथ्वी की सतह से h ऊंचाई पर गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा $\frac{GM_e m}{(R_e + h)}$ है। सिद्ध कीजिए कि यह सूत्र गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा के सूत्र 'mg_0h' के संगत है जहां g_0 पृथ्वी की सतह पर गुरुत्व त्वरण का मान है।

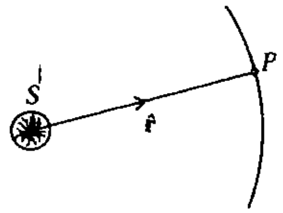
3. तीन पिंड A, B, C जिनमें से प्रत्येक का द्रव्यमान 5×10^6 kg है एक समबाहु त्रिभुज (equilateral triangle) के तीन कोणों पर रखे गए हैं। त्रिभुज की भुजा का मान 2 km है (चित्र 5·18 देखिए)। इन पिंडों को एक दूसरे से अनंत दूरी पर ले जाने के लिये कितना कार्य करना पड़ेगा ?



चित्र 5·18

5.8 उत्तर

बोध प्रश्न



चित्र 5.19

1. चित्र 5·19 को देखें। S और P क्रमशः सूर्य और ग्रह की स्थितियां दिखाते हैं।

$$\mathbf{F} = -\frac{km}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}$$

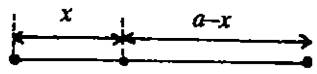
2. क्योंकि पृथ्वी की सतह के निकट a एक अचर है इसलिए जब कोई पिंड मुक्त रूप से t s के लिए गिरता है तो

$$v = at\ ,\ s = \frac{1}{2}at^2,$$

यानि $v \propto t$ और $s \propto t^2$.

ये सूत्र 'गिरते हुए पिंडों के नियम' के संगत हैं।

3. चित्र 5·20 को देखें। मान लीजिए कि m_1 और m_2 के बीच की दूरी a है। यदि m की m_1 से दूरी x हो तो उसकी m_2 से दूरी $(a-x)$ होगी। मान लीजिए कि स्थिति x पर m पर लगने वाला परिणामी बल शून्य है। अतः स्थिति x पर, m पर m_1 और m_2 द्वारा लगने वाले बलों का परिमाण एक ही होना चाहिए। अतः



चित्र 5.20

$$\frac{Gm_1m}{x^2} = \frac{Gm_2m}{(a-x)^2}$$

$$\therefore \quad \frac{a-x}{x} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} = b \text{ (मान लें)}$$

यहां b, m_2 और m_1 के अनुपात का धनात्मक वर्गमूल है क्योंकि $x < a$ है।

$$\therefore \quad x = \frac{a}{b+1} = \text{एक अचर}$$

स्पष्ट ही यह अचर, m के मान पर निर्भर नहीं करता।

4. आवश्यक कार्य का मान है

$$W = \int_{Q}^{P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \text{ जहां } \mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

अब $\quad \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{GMm}{r^2} dr$

(जैसा कि भाग 3.2.2 में समझाया गया है)

$$\therefore \quad W = -\int_{R}^{r} \frac{GMm}{r^2} dr = GMm\left[\frac{1}{r}\right]_{R}^{r}$$

$$= -GMm\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)$$

5. समीकरण 5·16 के अनुसार

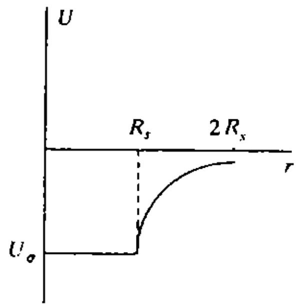
$$U = -\frac{GMm}{r}$$

$$\therefore \quad \frac{dU}{dr} = \frac{GMm}{r^2}$$

समीकरण 5·14 क के अनुसार

$$\mathbf{F} = \frac{-GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$$

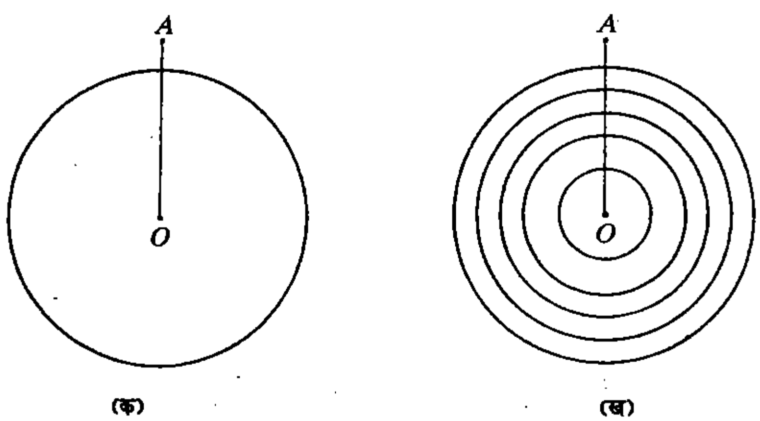
अतः $\quad \mathbf{F} = \frac{-dU}{dr}\hat{\mathbf{r}}.$



चित्र 5.21: U और r का ग्राफ़।
$U_o = -\frac{GMm}{R_s}$

6. U और r के बीच का ग्राफ चित्र 5·21 में दिखाया गया है। यदि U के वक्र में $r = R_s$ पर कोई भंग (discontinuity) है तो इस बिंदु पर, यानि गोलीय कोश की सतह पर गुरुत्वीय आकर्षण बल भी अनन्त होना चाहिए। लेकिन यह एक बेतुकी बात है। अतः हर बिंदु पर U और r के ग्राफ़ को संतत (continuous) होना चाहिए जैसा कि चित्र में दिखाया गया है।

7. चित्र 5·22 क और ख को देखें। हमें बिंदु A पर स्थितिज ऊर्जा का मान ज्ञात करना है।



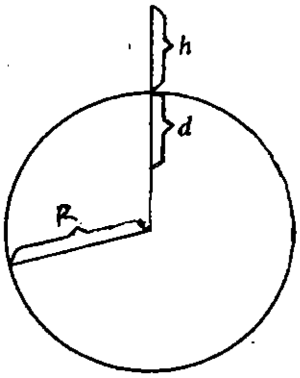
चित्र 5.22

जैसा कि आप पढ़ चुके हैं, एक ठोस गोले को हम अनेकानेक पतले गोलीय कोशों से मिलकर बना हुआ मान सकते हैं, जिनके द्रव्यमान $m_1, m_2, \ldots$ हों, जहां

$$m_1 + m_2 + \ldots = M \qquad (5\cdot47)$$

बिंदु A प्रत्येक कोश के केन्द्र से दूरी r पर स्थित है। समीकरण 5·26 के अनुसार कोशों की स्थितिज ऊर्जाएं

$$U_1 = -\frac{Gm_1m}{r}, U_2 = -\frac{Gm_2m}{r}, U_3 = -\frac{Gm_3m}{r}, \ldots \text{ हैं।}$$



चित्र 5.23

अतः यदि बिंदु A पर संपूर्ण गोले की स्थितिज ऊर्जा का मान U_A है तो

$$U_A = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots$$

या $$U_A = -\frac{Gm}{r}(m_1 + m_2 + m_3 + \ldots)$$

अतः समीकरण 5·47 के अनुसार

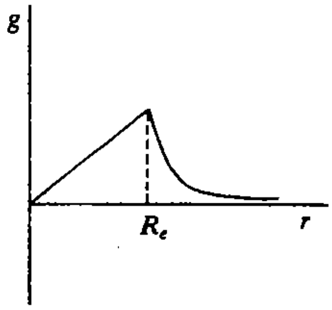
$$U_A = -\frac{GMm}{r}$$

8. (क) चित्र 5·23 को देखें। जब $r > R_e$ है तो $r = R_e + h$ और जब $r < R_e$ है तो $r = R_e - d$. समीकरण 5·43 और 5·42 के अनुसार

$$g = g_0 \frac{r}{R_e} \quad (\text{जब } r < R_e)$$

और $$g = \frac{g_0 R_e^2}{r^2} \quad (\text{जब } r > R_e)$$

चित्र 5·24 में g में r के साथ होने वाले परिवर्तन को दिखाया गया है।



चित्र 5.24

(ख) i) $$g = g_0 \left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^2$$

$R_e = 6{,}370$ km, $h = 2{,}500$ km

$$\therefore \left(\frac{R_e}{R_e + h}\right)^2 = \left(\frac{6370}{8870}\right)^2 = 0{\cdot}5157$$

$$\therefore \quad g = g_0(0{\cdot}5157)$$

प्रतिशत कमी $= \dfrac{g_0 - g}{g_0} \times 100 = 48{\cdot}4$

ii) $$g = \frac{g_0}{R_e}(R_e - d)$$

$d = 3$ km, $R_e - d = 6{,}367$ km

$$\therefore \quad g = g_0 \frac{6367}{6370} = g_0(0{\cdot}9995)$$

$\therefore$ प्रतिशत कमी $= \dfrac{g_0 - g}{g_0} \times 100 = 0{\cdot}05$

9. चन्द्रमा पर पलायन वेग का परिमाण $v_{em} = \sqrt{\dfrac{2GM_m}{R_m}}$

जहां M_m = चन्द्रमा का द्रव्यमान, R_m = चन्द्रमा की त्रिज्या। अतः G, M_m, R_m के मान रखने पर

$$v_{em} = 2{\cdot}37 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. पृथ्वी का द्रव्यमान $= M_e$, पृथ्वी की त्रिज्या $= R_e$, कण का द्रव्यमान $= m$,

न्यूटन के गुरुत्वाकर्षण सिद्धांत के अनुसार

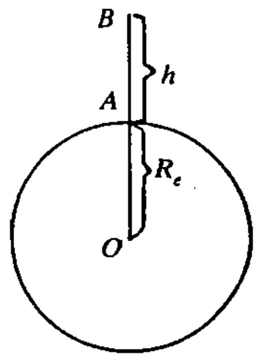
$$F = \frac{GM_e m}{R_e^2} = 900 \text{ N}$$

मंगल का द्रव्यमान $= \frac{M_e}{9}$

मंगल की त्रिज्या $= \frac{R_e}{2}$

मान लीजिए कि मंगल पर पिंड का भार x है। अतः

$$x = \frac{\frac{GM_e m}{9}}{\left(\frac{R_e}{2}\right)^2} = \frac{4}{9}\frac{GM_e m}{R_e^2} = \frac{4}{9} \times 900 \text{ N} = 400 \text{ N}.$$



चित्र 5.25

2. चित्र 5·25 को देखें। बिंदु A पृथ्वी की सतह पर स्थित है और $AB = h$. बिंदु A के लिए $h = 0$ है। अतः प्रश्न में दिए गए परिणाम के अनुसार, बिंदु A और B पर स्थितिज ऊर्जा का मान, क्रमशः

$$U_A = -\frac{GM_e m}{R_e}, \; U_B = -\frac{GM_e m}{(R_e + h)}$$

होगा ।

अतः पृथ्वी की सतह के सापेक्ष पिंड की स्थितिज ऊर्जा का मान

$$U_{BA} = U_B - U_A = -GM_e m \left[\frac{1}{R_e + h} - \frac{1}{R_e}\right]$$

$$= \frac{GM_e mh}{(R_e + h)R_e}$$

होगा।

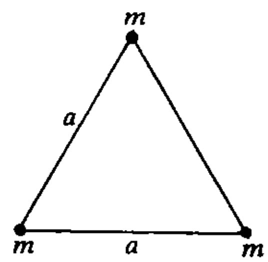
आम तौर पर $h << R_e$. अतः

$$R_e\,(R_e + h) \simeq R_e^2 . \text{ अतः } U_{BA} = \frac{GM_e mh}{R_e^2}$$

अब समीकरण 5·41 का प्रयोग करने पर हम कह सकते हैं कि

$$U_{BA} = m\,g_0\,h .$$

3. द्रव्यमान m_2 वाले कण के गुरुत्व क्षेत्र में उससे r दूरी पर रखे द्रव्यमान m_1 वाले कण की गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा का मान $-\frac{Gm_1m_2}{r}$ होता है। अब चित्र 5·26 को देखें। मान लीजिए कि समबाहु त्रिभुज के प्रत्येक कोने पर रखे द्रव्यमान का मान m है और त्रिभुज की प्रत्येक भुजा a है। अतः सारे समूह की कुल स्थितिज ऊर्जा यदि U है तो



चित्र 5.26

$$U = \left(-\frac{Gmm}{a}\right) + \left(-\frac{Gmm}{a}\right) + \left(-\frac{Gmm}{a}\right)$$

$$= -\frac{3Gm^2}{a}$$

यहां $m = 5 \times 10^6 \text{ kg}, a = 2 \times 10^3 \text{ m}$

$$\therefore \quad U = -\frac{3 \times (6{\cdot}673 \times 10^{-11}\,\mathrm{Nm^2\,kg^{-2}})\,(25 \times 10^{12}\mathrm{kg^{-2}})}{2 \times 10^3\mathrm{m}}$$

$$= -2{\cdot}5\ \mathrm{J}$$

क्योंकि इस स्थितिज ऊर्जा का मान ऋणात्मक है इसलिए दिया गया समूह 2·5 J की ऊर्जा के कारण बद्ध है। अतः समूह के कणों को एक दूसरे से अनन्त दूरी पर ले जाने के लिए 2·5 J की बाह्य ऊर्जा की आवश्यकता होगी।

5.9 शब्दावली

अध्यारोपण	Superposition
अक्षांश	Latitude
आकर्षण बल	Force of attraction
गुरुत्वाकर्षण	Gravitation
गुरुत्व बल	Force of gravity
गुरुत्वीय त्वरण	Gravitational acceleration
गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा	Gravitational potential energy
गुरुत्वीय विभव	Gravitational potential
गुरुत्वीय क्षेत्र	Gravitational field
गुरुत्वीय क्षेत्र की तीव्रता	Gravitational field intensity
गोलीय कोश	Spherical shell
निर्बल-नाभिकीय बल	Weak nuclear force
पलायन वेग	Escape velocity
प्रतिकर्षण बल	Force of repulsion
प्रबल नाभिकीय बल	Strong nuclear force
मूलभूत प्राकृतिक बल	Fundamental force of nature
रेडियोएक्टिव बीटा क्षय	Radioactive beta decay
वलयाकार	Ring-like
विद्युत्-गतिकी	Electrodynamics
विद्युत्-चुंबकीय बल	Electromagnetic force
विद्युत्-चुंबकीय बल क्षेत्र	Electromagnetic force field
विद्युत्-निर्बल बल	Electro-weak force
स्थिर विद्युतिकी	Electrostatics

कुछ उपयोगी पुस्तकें

1 *यांत्रिकी तथा द्रव्य के सामान्य गुणधर्म,* डॉ. वीरेन्द्र कुमार खरे, मध्य प्रदेश हिंदी ग्रंथ अकादमी, 1990

2 *भौतिकी भाग - 1,* संपादक : एन· एन· सक्सेना, मध्य प्रदेश हिंदी ग्रंथ अकादमी, 1990

3 *भौतिकी की पाठ्यपुस्तक,* संपादक : डॉ. आर· के· सिंह, मध्य प्रदेश हिंदी ग्रंथ अकादमी, 1990

खंड में सामान्यतः इस्तेमाल की गइ राशियों, उनके मात्रक-संकेतों, विशेष नामों (यदि हों तो) और विमाओं की सूची नीचे दी गई है। विमाएं, लंबाई (L), द्रव्यमान (M), समय (T), ताप (K) और आवेश (Q) के पदों में दी गई हैं।

राशि	एस. आई. मात्रक		विमाएं
	विशेष नाम	संकेत	
विस्थापन		m	[L]
वेग		$m\,s^{-1}$	$[LT^{-1}]$
त्वरण		$m\,s^{-2}$	$[LT^{-2}]$
कोणीय विस्थापन	रेडियन	rad	–
कोणीय वेग		$rad\,s^{-1}$	$[T^{-1}]$
कोणीय त्वरण		$rad\,s^{-2}$	$[T^{-2}]$
कोणीय संवेग		$kg\,m^2s^{-1}$	$[ML^2T^{-1}]$
बल	न्यूटन	N	$[MLT^{-2}]$
कार्य, ऊर्जा	जूल	J	$[ML^2T^{-2}]$
शक्ति	वॉट	W	$[ML^2T^{-3}]$
गुरुत्वीय विभव		$J\,kg^{-1}$	$[L^2T^{-2}]$
गुरुत्वीय तीव्रता		$N\,kg^{-1}$	$[LT^{-2}]$
संवेग, आवेग		$kg\,m\,s^{-1}$	$[MLT^{-1}]$
आवर्त काल		s	[T]
जड़त्व आघूर्ण		$kg\,m^2$	$[ML^2]$
क्षेत्रफल		m^2	$[L^2]$
आयतन		m^3	$[L^3]$
घनत्व		$kg\,m^{-3}$	$[ML^{-3}]$
बलआघूर्ण		N m	$[ML^2T^{-2}]$
ताप	केल्विन	K	[K]
विद्युत् आवेश	कूलम्ब	C	[Q]
विद्युत् धारा	एम्पियर	A	$[T^{-1}Q]$

नियतांकों की सारणी

भौतिक नियतांक

संकेत	राशि	मान
c	निर्वात में प्रकाश की चाल	$2{\cdot}998 \times 10^{8}$ m s^{-1}
μ_0	मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	$1{\cdot}257 \times 10^{-6}$ N A^{-2}
ε_0	मुक्त आकाश की विद्युत्शीलता	$8{\cdot}854 \times 10^{-12}$ C^{2} N^{-1} m^{-2}
$1/4\pi\varepsilon_0$		$8{\cdot}988 \times 10^{9}$ N m^{2} C^{-2}
e	प्रोटॉन का आवेश	$1{\cdot}602 \times 10^{-19}$ C
$-e$	इलेक्ट्रॉन का आवेश	$-1{\cdot}602 \times 10^{-19}$ C
h	प्लांक नियतांक	$6{\cdot}626 \times 10^{-34}$ J s
$\hbar$	$h/2\pi$	$1{\cdot}055 \times 10^{-34}$ J s
m_e	इलेक्ट्रॉन का विराम-द्रव्यमान	$9{\cdot}109 \times 10^{-31}$ kg
$-e/m_e$	इलेक्ट्रॉन आवेश-द्रव्यमान अनुपात	$-1{\cdot}759 \times 10^{11}$ C kg^{-1}
m_p	प्रोटॉन का विराम-द्रव्यमान	$1{\cdot}673 \times 10^{-27}$ kg
m_n	न्यूट्रॉन का विराम-द्रव्यमान	$1{\cdot}675 \times 10^{-27}$ kg
R	रिडबर्ग नियतांक	$1{\cdot}097 \times 10^{7}$ m^{-1}
a_0	बोर त्रिज्या	$5{\cdot}292 \times 10^{-11}$ m
N_A	आवोगाद्रो की संख्या	$6{\cdot}022 \times 10^{23}$ mol^{-1}
R	सार्वत्रिक गैस नियतांक	$8{\cdot}314$ J K^{-1} mol^{-1}
k_B	बोल्ट्समान नियतांक	$1{\cdot}381 \times 10^{-23}$ J K^{-1}
G	सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक	$6{\cdot}673 \times 10^{-11}$ N m^{2} kg^{-2}

खगोल-भौतिकीय आंकड़े

खगोलीय पिंड	द्रव्यमान (kg)	माध्य त्रिज्या (m)	पृथ्वी के केंद्र से माध्य दूरी (m)
सूर्य	$1{\cdot}99 \times 10^{30}$	$6{\cdot}96 \times 10^{8}$	$1{\cdot}50 \times 10^{11}$
चन्द्रमा	$7{\cdot}35 \times 10^{22}$	$1{\cdot}74 \times 10^{6}$	$3{\cdot}85 \times 10^{8}$
पृथ्वी	$5{\cdot}97 \times 10^{24}$	$6{\cdot}37 \times 10^{6}$	0

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

U. G. P. H. S. - 01
प्रारंभिक यांत्रिकी

खंड
2
कणों के निकाय

प्रस्तावना

खंड 1 में आपने यांत्रिकी की मूलभूत संकल्पनाओं के बारे में पढ़ा है। आपने गति का वर्णन करने की भाषा सीखी है। साथ ही आपने रैखिक और कोणीय गति कर रहे अनेक प्रकार के निकायों पर न्यूटन के गति-नियम लागू किए हैं। इसके अलावा इस खंड में आपने कार्य, ऊर्जा और गुरुत्वाकर्षण की संकल्पनाओं को भी पढ़ा है। इस प्रक्रिया में आपने संवेग, कोणीय संवेग और ऊर्जा संरक्षण-नियमों को लागू करना भी सीखा है।

इन संकल्पनाओं के लगभग सभी अनुप्रयोगों में आपने एक आम बात ज़रूर देखी होगी। हमने हरेक वस्तु को, चाहे वह क्रिकेट की गेंद हो, कार हो या चंद्रमा हो, एकल कण से निरूपित किया है और पाया है कि यह मॉडल काफ़ी काम का रहा है। फिर भी ऐसी अनेक स्थितियां होती हैं जिनमें हमें ऐसे निकायों पर विचार करना होता है जिनमें बहुत से कण होते हैं। मिसाल के तौर पर, सौर-परिवार जिसमें सूर्य, ग्रह, उनके उपग्रह, पुच्छल तारे और ग्रहिकाएं होती हैं, एक बहु-कण निकाय है। गैस से भरा सिलिंडर और दृढ़ पिंड भी बहु-कण निकाय के उदाहरण हैं। ऐसे निकायों की गति को समझने के लिए हमें खंड 1 की संकल्पनाओं का विस्तार करना होगा।

अपनी चर्चा की शुरुआत हम इकाई 6 में केन्द्रीय संरक्षी बलों के अधीन पिंडों की गति से करेंगे। हम मुख्यतः उन बलों पर विचार करेंगे, जो कणों के बीच की दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती होते हैं, जैसे कि गुरुत्वाकर्षण बल। इससे ग्रहों, उनके उपग्रहों और पुच्छल तारों की गति को आसानी से समझा जा सकता है। इकाई 7 में पहले हम दो कणों वाले निकायों पर विचार करेंगे। आप संहति केन्द्र (centre-of-mass) और आपेक्षिक (relative) निर्देशांकों के पदों में गति को व्यक्त करना सीखेंगे। तब हम इन संकल्पनाओं को तीन कणों वाले निकायों और N-कणों वाले निकायों की गति पर लागू करेंगे।

इकाई 8 में आप दो या अधिक कणों के प्रकीर्णन के बारे में पढ़ेंगे। इस इकाई में आप कुछ नई संकल्पनाएं समझेंगे जैसे कि प्रकीर्णन परिक्षेत्र (scattering cross-section) और संघट्ट प्राचल (impact parameter)। इकाई 9 में आप दृढ़ पिंडों की गति के बारे में पढ़ेंगे। हम मुख्यतः उनकी घूर्णी गति की चर्चा करेंगे।

खंड 1 में आपने जड़त्वीय प्रेक्षक की दृष्टि से पिंडों की गति का अध्ययन किया है। यही बात इस खंड की इकाई 9 तक लागू होती है। फिर भी, ऐसी अनेक परिघटनाएं हैं जिनका अजड़त्वीय प्रेक्षक का दृष्टि से विश्लेषण करना अधिक सरल होता है। इनमें से अनेक परिघटनाओं का अनुभव हम रोज़ करते हैं। मिसाल के तौर पर, जब कोई बस मोड़ पर घूमती है तो हम एक ओर गिरने लगते हैं। चक्रवात, अक्षांश के साथ g के मान में परिवर्तन आदि जैसी अनेक महत्वपूर्ण प्राकृतिक परिघटनाएं पृथ्वी के घूर्णन के कारण होती हैं। अतः इकाई 10 में हम अजड़त्वीय निर्देश तंत्रों में पिंडों की गति पर चर्चा करेंगे।

हमारे हिसाब से प्रत्येक इकाई को पढ़ने में आपको लगभग बराबर समय लगेगा, यानि कि लगभग 4 घंटे। यह अवधि इस बात पर भी निर्भर करेगी कि आपने खंड 1 को कितनी अच्छी तरह समझा है। आपकी आसानी के लिए खंड 1 में दी गई स्थिरांक-सारणियां यहां फिर से दी गई हैं।

अध्ययन निर्देशिका

इस खंड को समझने के लिए आपको खंड 1 की अध्ययन निर्देशिका में दिए गए सुझावों को ध्यान में रखना होगा। उस निर्देशिका को फिर पढ़ लीजिए और वहां दिए गए सुझावों के अनुसार इस खंड को भी पढ़िए। खंड 1 की तरह यहां भी हमने प्रत्येक इकाई में अंत में बोध प्रश्नों और इकाई के अंत में दिए गए प्रश्नों के उत्तर दिए हैं। पर हम चाहते हैं कि आप उन प्रश्नों को स्वयं हल करने का प्रयास करें।

इस खंड में दी गई कुछ व्युत्पत्तियां, ख़ास तौर पर भाग 8.2.4 और 10.3.1 की व्युत्पत्तियां, आपको कठिन लग सकती हैं। पर इन्हें याद करने की आवश्यकता नहीं। इन्हें देने का मुख्य उद्देश्य यह रहा है कि आप जान जाएं कि प्रत्येक परिणाम के पीछे एक तर्क होता है। खंड के अंत में दिए गए परिशिष्ट केवल और अधिक जानकारी देने के लिए ही हैं। आपके इम्तहान में इन परिशिष्टों में दी गई सामग्री पर आधारित सवाल नहीं दिए जायेंगे।

हम पुनः यह आशा करते हैं कि आपको ये इकाइयां रोचक लगेंगी। हमारी शुभकामनाएं आपके साथ हैं।

इकाई 6 केन्द्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति

इकाई की रूपरेखा

6.1 प्रस्तावना

खंड 1 में आप यांत्रिकी की मूलभूत संकल्पनाओं के बारे में पढ़ चुके हैं। और खंड 1 की इकाई 5 में हम गुरुत्वाकर्षण पर चर्चा कर चुके हैं। हम जानते हैं कि सूर्य के गुरुत्वीय क्षेत्र के प्रभाव के कारण ग्रह घूमते रहते हैं। अब सवाल उठता है कि हम एक ग्रह का गति-समीकरण किस प्रकार हल करेंगे? इस सवाल और इसी तरह के अन्य सवालों को हल करने की कोशिश हम इस इकाई में करेंगे।

वास्तव में यांत्रिकी के सवालों में एक महत्वपूर्ण सवाल है, एक बल क्षेत्र के अधीन गति कर रहे कण की गति को समझना। यह बल-क्षेत्र या तो एक अन्य कण के कारण हो सकता है, जैसे कि इकाई आवेश, या कणों के निकाय के कारण हो सकता है जैसे कि सौर मंडल या नियत आवेश वाले कण के निकाय। यह बल-क्षेत्र एक वैद्युत चुंबकीय क्षेत्र के कारण भी हो सकता है, पर, यहां हम अपना अध्ययन केन्द्रीय संरक्षी बलों तक ही सीमित रखेंगे। इसके लिए पहले आप यह समझेंगे कि केन्द्रीय संरक्षी बल क्या होता है। ऐसे बलों के अधीन गतिमान कणों की गति के कुछ विशेष गुणधर्म होते हैं जिनसे इन कणों की गति का वर्णन आसान हो जाता है। इसलिए यहां आप इन गुणधर्मों के बारे में भी पढ़ेंगे।

इस प्रकार की गति के अनेक उदाहरण हैं। सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति का उदाहरण तो हम ऊपर दे ही चुके हैं। इसके अन्य उदाहरण हैं पृथ्वी के चारों ओर उपग्रहों की गति, ब्रह्मांड के बारे में जानकारी प्राप्त करने के लिए भेजे गए अंतरिक्ष यानों की गति और दो आवेशित कणों की एक दूसरे के सापेक्ष गति, आदि। इन निकायों से संबंधित बल, यानि कि गुरुत्वाकर्षण और स्थिर वैद्युत बल, व्युत्क्रम वर्ग-नियम का पालन करते हैं। इस इकाई में हम यह देखेंगे कि व्युत्क्रम-वर्ग केन्द्रीय संरक्षी बलों (inverse square central conservative forces) का विशेष महत्व है। इसलिए हम अपना अध्ययन मुख्यतः व्युत्क्रम-वर्ग केन्द्रीय संरक्षी बलों तक ही सीमित रखेंगे। हम इन बलों के अधीन गति कर रहे कण का गति समीकरण हल करेंगे। फिर प्राप्त परिणामों की सहायता से सूर्य के चारों ओर घूम रहे पिंड की संभव कक्षाएं निर्धारित करेंगे। इस तरह हमें कैपलर के, प्रेक्षण पर आधारित, नियमों का सैद्धांतिक आधार मिलेगा। हम परमाणु के नाभिक की ओर गतिमान अल्फा कण का पथ भी निकालेंगे। ऐसी ही एक गणना से परमाणु का नाभिकीय मॉडल जाना गया था।

अभी तक हमने केवल एक कण की गति के बारे में पढ़ा है। अगली इकाई में हम 3, 4 और 5 इकाइयों के तथ्यों का प्रयोग बार-बार करेंगे। अतः हमारा सुझाव है कि इस इकाई को पढ़ने से पहले आप 3, 4 और 5 इकाइयों को फिर से पढ़ लें। भाग 6.3 को पढ़ने से पहले हो सके तो आपको शंकु परिच्छेदों (conic sections) से संबंधित परिशिष्ट "क" को भी पढ़ लेना चाहिए। यह परिशिष्ट इकाई 10 के बाद दिया गया है।

उद्देश्य

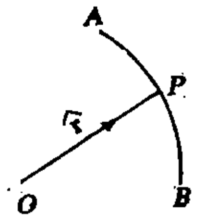
इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- केन्द्रीय संरक्षी बल को पहचान सकेंगे,

- एक केन्द्रीय संरक्षी बल के अधीन गति के गुणधर्मों को लागू करके प्रश्नों को हल कर सकेंगे,
- दिए हुए व्युत्क्रम-वर्ग केन्द्रीय संरक्षी बल के अधीन संभव कक्षाओं को ज्ञात कर सकेंगे।

6.2 केन्द्रीय संरक्षी बल

प्रकृति में आपको ऐसे अनेक बल देखने को मिलते हैं जो या तो एक नियत बिंदु की ओर, या उससे विपरीत दिशा में लग रहे होते हैं। उदाहरण के लिए एक नियत बिंदु-द्रव्यमान (point mass) के कारण एक अन्य कण पर लग रहा गुरुत्वाकर्षण बल (gravitational force) उस बिंदु-द्रव्यमान की ओर होता है। इसी तरह एक नियत धन आवेश के कारण एक अन्य धन आवेश पर लग रहा बल नियत धन आवेश की विपरीत दिशा में होता है। रस्सी से बंधे द्रव्यमान m वाले कण पर, जो एक क्षैतिज समतल में एक वृत्त में गतिमान है, लग रहा बल भी वृत्त के केन्द्र की ओर होता है (देखिए इकाई 4 का चित्र 4.17)। इस प्रकार के सभी बल केन्द्रीय बल के उदाहरण हैं। अतः हम उस बल को **केन्द्रीय बल (central force)** कहते हैं **जो सर्वत्र या तो एक नियत बिंदु की ओर या उससे विपरीत दिशा में लग रहा होता है।** इस नियत बिंदु को **बल-केन्द्र** (centre of force) कहा जाता है। गणितीय रूप में हम एक कण पर लग रहे केन्द्रीय बल को



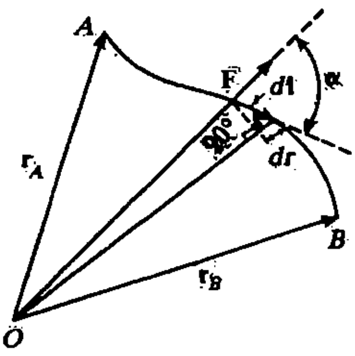
चित्र 6.1 : केन्द्रीय बल के अधीन गतिमान कण। O – बल केन्द्र P – कण, APB – कण का प्रपथ।

$$\mathbf{F} = F\,\hat{\mathbf{r}} \tag{6.1}$$

से व्यक्त कर सकते हैं, जहां $\hat{\mathbf{r}}$ एक एकक सदिश (unit vector) है जिसकी दिशा बल-केन्द्र से कण की ओर होती है (देखिए चित्र 6.1)। ऊपर बताए गए केन्द्रीय बल के पहले तीन उदाहरणों में, $\mathbf{F}$ केवल बल-केन्द्र और कण के बीच की दूरी पर निर्भर करता है। ऐसे बलों के लिए समीकरण 6.1 को हम लिख सकते हैं :

$$\mathbf{F} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}} \tag{6.2}$$

हम यह दिखा सकते हैं कि समीकरण 6.2 द्वारा दिए गए केन्द्रीय बल संरक्षी भी होते हैं। इसके लिए आप इकाई 3 के भाग 3.3 में दी गई संरक्षी बल की परिभाषा को फिर से याद करें। आइए अब हम बिंदु A से बिंदु B तक गतिमान कण पर लग रहे बल द्वारा किया गया कार्य निकालें (चित्र 6.2)।



चित्र 6.2 : A से B तक गतिमान कण पर किया गया कार्य। चूंकि $d\mathbf{l}$ अत्यणु है, इसलिए दोहरी लाइनों से दिखाए गए कोण को एकान्तर कोण माना जा सकता है। अतः यह कोण α के बराबर है।

मान लीजिए कि पथ के अनुदिश कण के विस्थापन $d\mathbf{l}$ के दौरान केन्द्रीय बल द्वारा किया गया कार्य dW है। गणितीय रूप में इसे हम इस तरह लिखते हैं :

$$dW = \mathbf{F}.d\mathbf{l} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}}.\,d\mathbf{l} = f(r)\,dl\cos\alpha, \tag{6.3}$$

जहां α, $\hat{\mathbf{r}}$ और $d\mathbf{l}$ के बीच का कोण है। क्योंकि $d\mathbf{l}$ अत्यणु है, इसलिए चित्र 6.2 से हम यह देख सकते हैं कि

$$dl\cos\alpha = dr,$$

जहां dr, कण में विस्थापन $d\mathbf{l}$ होने पर O से कण की दूरी में होने वाला परिवर्तन है। अतः समीकरण 6.3 हो जाता है

$$dW = f(r)\,dr.$$

कण के A से B तक गति करने पर बल द्वारा उस कण पर किया गया कार्य होगा

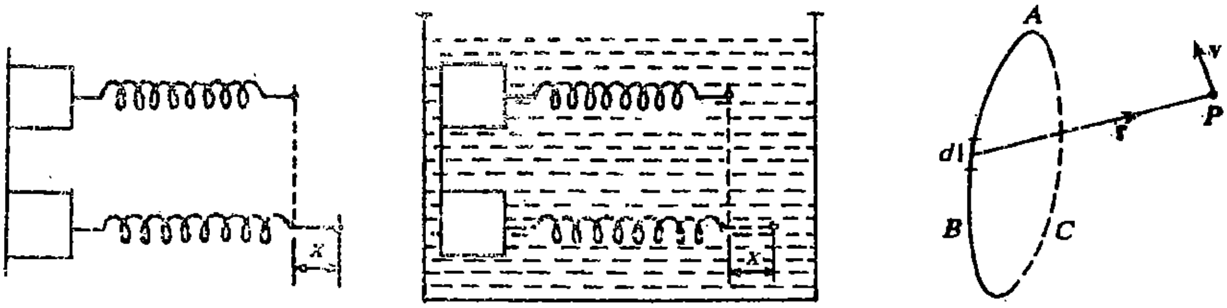
$$W = \int_{r_A}^{r_B} f(r)\,dr. \tag{6.4}$$

अब क्योंकि इस समाकल का मान केवल उसकी सीमाओं (limits) पर निर्भर करता है, इसलिए किया गया कार्य केवल अंत्य बिंदुओं (end points) पर निर्भर करता है, न कि कण द्वारा चले गए पथ पर। अतः समीकरण 6.2 द्वारा दिया गया केन्द्रीय बल संरक्षी (conservative) होता है। हम समीकरण 6.2 द्वारा निरूपित किए गए बलों को **केन्द्रीय संरक्षी बल** (central conservative force) कहते है।

इस संकल्पना की मदद से आप नीचे दिए गए सवाल में कुछ केन्द्रीय संरक्षी बलों को पहचानना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 1

निम्नलिखित बलों में से कौन-से बल केन्द्रीय बल हैं? यह भी बताइए कि इनमें कौन से केंद्रीय संरक्षी बल हैं?



(क) (ख) (ग)

चित्र 6.3 : (क) आदर्श कमानी-द्रव्यमान तंत्र; (ख) वास्तविक कमानी-द्रव्यमान तंत्र; (ग) धारावाहक चालक।

(क) चित्र 6.3 क में दिखाए गए कमानी-द्रव्यमान तंत्र में द्रव्यमान m वाले कण पर लग रहा बल, जिसके लिए

$$\mathbf{F} = -\,k\mathbf{x}.$$

(ख) चित्र 6.3 ख में दिखाए गए पानी के अंदर रखे वास्तविक कमानी-द्रव्यमान तंत्र के द्रव्यमान पर लग रहा बल। पानी के कारण इसके कंपन (vibration) में अवमंदन (damping) होता है। ऐसे तंत्र के लिए

$$\mathbf{F} = -\,k_2\,\mathbf{x} - k_3\,\dot{\mathbf{x}},$$

जहां k_2 और k_3 अचर हैं।

(ग) चित्र 6.3 ग में दिखाए गए धारा-वाहक चालक के एक अवयव $d\mathbf{l}$ के कारण आवेश P पर लग रहा बल जिसके लिए

$$\mathbf{F} = \frac{k_1(\mathbf{v}.\hat{\mathbf{r}})\,d\mathbf{l} - (\mathbf{v}.d\mathbf{l})\,\hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

जहां $\mathbf{v}$ आवेश का वेग है और k_1 एक अचर है जो धारा के परिमाण और माध्यम की प्रकृति पर निर्भर करता है।

अब आप केन्द्रीय संरक्षी बल को अच्छी तरह से समझ चुके हैं। आइए अब हम इस बल के अधीन गति कर रहे द्रव्यमान m वाले कण का गति समीकरण ज्ञात करें। न्यूटन के द्वितीय नियम से यह होता है

$$m\mathbf{a} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}}. \qquad (6.5)$$

हम पाते हैं कि केन्द्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति का अध्ययन काफ़ी आसान हो जाता है क्योंकि इसके कुछ व्यापक गुणधर्म होते हैं। इसलिए आइए पहले हम इन गुणधर्मों पर चर्चा करें।

6.2.1 केन्द्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के गुणधर्म

आप जानते हैं कि केन्द्रीय बल $\hat{\mathbf{r}}$ के अनुदिश होता है। इसलिए बल-केन्द्र के प्रति कण पर बल आघूर्ण (torque) होगा

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times F\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{0}.$$

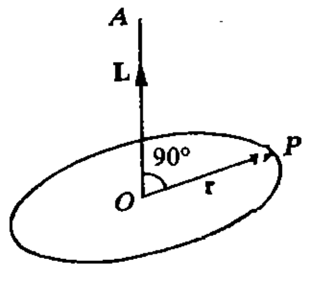
कोणीय संवेग अचर होता है

इकाई 4 के अध्ययन से आप यह जानते हैं कि $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{L}}{dt}$ · अतः नेट बल आघूर्ण शून्य होने पर, $\mathbf{L}$ एक अचर होता है। इससे यह अर्थ निकलता है कि **केन्द्रीय बल के अधीन गति के लिए कोणीय संवेग का परिमाण और दिशा दोनों अचर होते हैं।**

अब हम यह देखेंगे कि इस तथ्य से कि कोणीय संवेग की दिशा अचर होती है, एक अन्य रोचक गुणधर्म प्राप्त होता है।

गति एक समतल में सीमित होती है

इकाई 4 में आपने पढ़ा है कि $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. अतः **L** एक सदिश है जो **r** पर लंब है। यानि कि हम यह कह सकते हैं कि सदिश **r** सदा ही **L** के लांबिक समतल में रहता है। और, क्योंकि **L** की दिशा नियत है, इसलिए यह समतल भी नियत होता है (चित्र 6.4)।



चित्र 6.4 : अचर कोणीय संवेग **L** वाला कण, **L** के लंबवत् नियत समतल पर ही गति करता है।

चूंकि गति केवल एक समतल में हो रही है इसलिए कण की गति का वर्णन करने के लिए हम द्विविम निर्देशांक तंत्र (two-dimensional coordinate system) का प्रयोग कर सकते हैं। और, क्योंकि परिकलन के दौरान **r** बार-बार आएगा इसलिए यहां पर समतल ध्रुवी निर्देशांकों का, जिन्हें आप इकाई 4 में पढ़ चुके हैं, प्रयोग ज़्यादा आसान रहेगा।

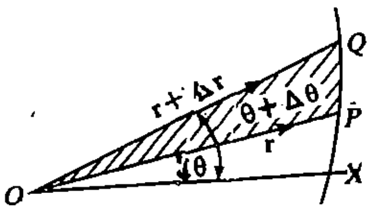
हम इकाई 4 में **L** का परिमाण निकाल चुके हैं। समीकरण 4.25 से

$$L = mr^2\dot{\theta}, \tag{6.6}$$

जो कि केन्द्रीय बल के लिए अचर है।

इस गुणधर्म से, कि केन्द्रीय बल के अधीन गति के लिए कोणीय संवेग अचर होता है, निम्नलिखित नियम भी प्राप्त होता है।

समान-क्षेत्रफल नियम



चित्र 6.5 : स्थिति सदिश **r** द्वारा निर्धारित क्षेत्रफल। OX – ध्रुवी अक्ष, $\mathbf{OP} = \mathbf{r}, \mathbf{OQ} = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$.

चित्र 6.5 देखिए। मान लीजिए कि केन्द्रीय बल के अधीन गति कर रहे एक कण का क्षण t पर स्थिति सदिश **r** है। मान लीजिए कि क्षण $t + \Delta t$ पर इसका स्थिति सदिश $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ है। t और $t + \Delta t$ पर कण के ध्रुवी निर्देशांक क्रमशः (r, θ) और $(r + \Delta r, \theta + \Delta\theta)$ हैं। इस समयांतराल Δt में स्थिति सदिश द्वारा निर्धारित किए गए क्षेत्रफल ΔA को चित्र में छायांकित भाग से दिखाया गया है। यदि $\Delta\theta$ बहुत छोटा हो तो क्षेत्रफल ΔA, त्रिभुज OPQ *के क्षेत्रफल के लगभग बराबर होता है, अर्थात्*

$$\Delta A = \frac{1}{2}\, r(r + \Delta r)\sin\Delta\theta \simeq \frac{r}{2}(r + \Delta r)\,\Delta\theta$$

$$(\because \Delta\theta \text{ के छोटे मानों के लिए } \sin\Delta\theta \simeq \theta)$$

पद $\Delta r\,\Delta\theta$ की उपेक्षा कर देने पर हमें मिलता है :

$$\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{1}{2}\, r^2\, \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

अतः क्षेत्रफल जिस दर से निर्धारित होता है वह है

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{1}{2}\, r^2\, \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\, r^2 \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\, r^2\dot{\theta}.$$

त्रिभुज के क्षेत्रफल को किन्हीं भी दो भुजाओं की लंबाइयों और इनके बीच के कोण के साइन (sin) के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

समीकरण 6.6 से हम जानते हैं कि नियत द्रव्यमान m वाले कण के लिए $r^2\dot{\theta}$ एक अचर होता है। अतः $\frac{dA}{dt}$ भी अचर होगा। इससे निम्नलिखित समान-क्षेत्रफल नियम (law of equal areas) प्राप्त होता है : **किसी भी केन्द्रीय बल के अधीन गतिमान कण का स्थिति सदिश समान समयांतराल में समान क्षेत्रफल निर्धारित करता है।** ग्रहीय गति का केपलर का दूसरा नियम दरअसल यही नियम है। पर इस नियम के भौतिक अर्थ को आप केपलर के प्रथम नियम की व्युत्पत्ति के बाद ही अच्छी तरह से समझ पाएंगे।

यह गुणधर्म, कि कोणीय संवेग एक अचर सदिश होता है, सभी केन्द्रीय बलों पर लागू होता है। केन्द्रीय संरक्षी बल के अधीन गति का एक अन्य गुणधर्म यह है कि तंत्र की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा (total mechanical energy) अचर रहती है।

संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा अचर होती है

इकाई 3 के समीकरण 3.21 से आप यह जानते हैं कि संरक्षी बल के अधीन गति कर रहे तंत्र की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा E अचर होती है, अर्थात्

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + U(r) = \text{अचर।} \tag{6.7 क}$$

स्थितिज ऊर्जा (potential energy) $U(r)$ होती है :

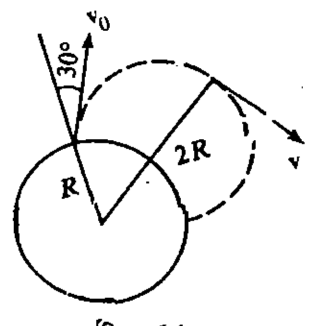
$$U(r) - U(r_0) = -\int_{r_0}^{r} f(r)\, dr, \tag{6.7 ख}$$

जहां r_0 एक स्वेच्छ (arbitrary) निर्देश स्थिति है। समीकरण 6.7 क और समीकरण 6.7 ख दोनों ही उन केन्द्रीय बलों पर लागू होते हैं जो संरक्षी हैं।

आइए अब हम एक उदाहरण में इन संकल्पनाओं को लागू करें कि केन्द्रीय संरक्षी बल के अधीन गतिमान कण का कोणीय संवेग और संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा गति के अचर हैं।

उदाहरण 1

द्रव्यमान M वाले एक गोलाकार ग्रह, जहां वायुमंडल नहीं है, की सतह के बिंदु A से एक अंतरिक्ष यान को त्रिज्य दिशा से 30° के कोण पर चाल v_0 से छोड़ा गया है। जब वह कक्षा में पहुंच जाता है तो ग्रह के केन्द्र से उसकी अधिकतम दूरी OB, उसकी त्रिज्या R की दूनी होती है। G, R और M के पदों में v_0 ज्ञात कीजिए।



चित्र 6.6

चित्र 6.6 देखिए। मान लीजिए कि अंतरिक्षयान का द्रव्यमान m है। जब ग्रह के केन्द्र के सापेक्ष अंतरिक्षयान स्थिति $\mathbf{r}$ पर होता है, तो इस पर गुरुत्वीय बल $\mathbf{F} = \frac{GMm}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ होता है। समीकरण 6.2 से इसकी तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि यह एक केन्द्रीय संरक्षी बल है। इसका मतलब है कि अंतरिक्षयान एक केन्द्रीय संरक्षी बल के अधीन घूम रहा है। अतः इसका कोणीय संवेग और संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा E अचर हैं। हम जानते हैं कि संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा = गतिज ऊर्जा + स्थितिज ऊर्जा। समीकरण 5.16 से हम यह भी जानते हैं कि द्रव्यमान M वाले गोलाकार पिंड के केन्द्र से दूरी r पर स्थित द्रव्यमान m की स्थितिज ऊर्जा $-\frac{GMm}{r}$ होती है। अतः ग्रह की सतह के बिन्दु A पर अंतरिक्षयान की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा हैं

$$E_A = \frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{GMm}{R}.$$

अधिकतम दूरी $2R$ के संगत बिन्दु B पर अंतरिक्षयान की संपूर्ण गतिज ऊर्जा है

$$E_B = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{GMm}{2R}.$$

और क्योंकि संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा अचर होती है, इसलिए $E_A = E_B$. कोणीय संवेग के संरक्षण से हमें एक अन्य संबंध प्राप्त होता है। आपको याद होगा कि $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$. अतः बिन्दु A और बिन्दु B पर कोणीय संवेग के परिमाण होंगे :

$$L_A = mRv_0 \sin 30° = \frac{mRv_0}{2},$$

$$L_B = mv\,(2R) \sin 90° = 2mrv.$$

चूंकि $L_A = L_B$ इसलिए

$$v = \frac{v_0}{4}.$$

$E_A = E_B$ रखने पर और इस समीकरण में $v = \frac{v_0}{4}$ लेने पर हमें मिलता है

$$\frac{1}{2} mv_0^2 - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2} m\left[\frac{v_0}{4}\right]^2 - \frac{GMm}{2R}.$$

इसे सरल करने पर प्राप्त होता है

$$v_0 = 4\sqrt{\frac{GM}{15R}}$$

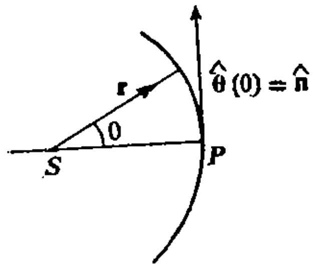
अभी तक आपने केन्द्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के कुछ व्यापक गुणधर्मों को जाना है। अब हम इन गुणधर्मों की मदद से व्युत्क्रम-वर्ग केन्द्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति कर रहे कण का प्रपथ निकालेंगे। गुरुत्वाकर्षण बल और स्थिर वैद्युत बल इस प्रकार के बल के उदाहरण हैं।

6.3 व्युत्क्रम-वर्ग केन्द्रीय संरक्षी बल

किसी भी व्यापक व्युत्क्रम-वर्ग केन्द्रीय संरक्षी बल के लिए समीकरण 6.2 को निम्न रूप में लिखा जा सकता है

$$\mathbf{F} = \frac{k}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{6.8}$$

जब k धनात्मक होता है तब बल प्रतिकर्षी (repulsive) बल होता है और जब k ऋणात्मक होता है, तब बल आकर्षण (attractive) बल होता है। उदाहरण के लिए, आप यह जानते हैं कि दो सजातीय आवेशों (like charges) के बीच का बल प्रतिकर्षी बल होता है और दो विजातीय आवेशों (unlike charges) के बीच का बल आकर्षण-बल होता है। आइए अब हम सूर्य के गुरुत्वीय बल के अधीन गति कर रहे पिंड की कक्षा निकालने के लिए गति समीकरण हल करें। हम यहां यह मान कर चलेंगे कि सूर्य स्थिर है। पिंड की कक्षा निकालने के लिए हमें $r(t)$ और $\theta(t)$ या θ के एक फलन के रूप में r निकालना होता है। अब हम $r(\theta)$ निकालने के लिए एक आसान तरीका इस्तेमाल करेंगे।



चित्र 6.7 : सूर्य (S) के गुरुत्वीय बल के अधीन गतिमान पिंड की गति। क्षण $t = 0$ पर पिंड की स्थिति P है।

चित्र 6.7 देखिए। जैसा कि भाग 6.2.1 में बताया जा चुका है हम यहां समतल ध्रुवी निर्देशांकों का प्रयोग करेंगे। मान लीजिए कि सूर्य मूल बिंदु पर है जहां बल-केन्द्र को मूल बिंदु मान लिया गया है। सूर्य के गुरुत्वाकर्षण के अधीन गतिमान पिंड का गति समीकरण होता है :

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}, \tag{6.9क}$$

जहां m और M क्रमशः पिंड और सूर्य के द्रव्यमान हैं।

$$\therefore\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}} \tag{6.9 ख}$$

आइए पहले हम $\mathbf{v}$ निकालने के लिए इस समीकरण को हल करें। तब हम समीकरण 4.13क की सहायता से $\mathbf{v}$ के व्यंजक से r निकालेंगे।

चूंकि गुरुत्वाकर्षण बल केन्द्रीय बल है, इसलिए समीकरण 6.6 से $L = mr^2\dot{\theta}$ = एक अचर। समीकरण 4.10 से हम यह भी जानते हैं कि $\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}}$. समीकरण 4.10 और समीकरण 6.6 की सहायता से हम समीकरण 6.9 ख को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{GM}{r^2\dot{\theta}}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt} = \frac{A}{L}\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{dt},$$

जहां $A = GMm$ = एक अचर।

या $\frac{L}{A}\,d\mathbf{v} = d\hat{\boldsymbol{\theta}}$.

समाकलन करने पर हमें मिलता है

$$\frac{L}{A}\,\mathbf{v} = \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}, \tag{6.10 क}$$

जहां $\mathbf{C}$ समाकलन का अचर सदिश है।

अब हम प्रारंभिक प्रतिबंधों की सहायता से $\mathbf{C}$ का मान निकालेंगे। मान लीजिए कि हम उस क्षण को जब कि पिंड सूर्य के निकटतम दूरी पर होता है, अर्थात् जबकि r न्यूनतम होता है, समय का मूल बिंदु ($t = 0$) मान लेते हैं। इस तरह $t = 0$ पर $\frac{dr}{dt} = 0$.

अब $t = 0$ पर $\mathbf{v}$ यानी $\mathbf{v}(0)$ की दिशा वही होगी, जो $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$ (अर्थात् $t = 0$ पर $\hat{\boldsymbol{\theta}}$) की दिशा है। मान लीजिए $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \hat{\mathbf{n}}$. अतः समीकरण 6.10 क से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\frac{L}{A} v(0)\,\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{C},$$

$$\therefore \mathbf{C} = \left[\frac{L}{A} v(0) - 1\right]\hat{\mathbf{n}} = e\,\hat{\mathbf{n}},$$

जहां $e = \left(\frac{L}{A} v(0) - 1\right) =$ एक अचर। (6.10 ख)

अतः समीकरण 6.10 क से हमें मिलता है

$$\frac{L}{A}\mathbf{v} = \hat{\boldsymbol{\theta}} + e\,\hat{\mathbf{n}} \qquad (6.10\text{ ग})$$

अब, जबकि हमने $\mathbf{v}$ का व्यंजक निकाल लिया है, तो हम एक आसान तरीके से r को θ के एक फलन के रूप में निकाल सकते हैं। समीकरण 6.10 ग और $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ का अदिश गुणनफल लेने पर हमें मिलता है

$$\frac{L}{A}\mathbf{v}.\hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{\theta}}\;\hat{\boldsymbol{\theta}} + e\,\hat{\mathbf{n}}\,.\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = 1 + e\cos\theta. \qquad (6.11)$$

समीकरण 4.13 से हम यह जानते हैं कि

$$\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{r}} + r\dot{\theta}\hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

और क्योंकि $\hat{\mathbf{r}}\,.\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}\,.\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = 1$

इसलिए समीकरण 6.6 से

$$\mathbf{v}\,.\,\hat{\boldsymbol{\theta}} = r\dot{\theta} = \frac{1}{r}\,r^2\,\dot{\theta} = \frac{L}{mr}.$$

अतः समीकरण 6.11 से हमें मिलता है

$$\frac{L^2}{Am}\,\frac{1}{r} = 1 + e\cos\theta. \qquad (6.12)$$

समीकरण 6.12 और परिशिष्ट क के समीकरण क.3 की तुलना करने पर हमें मिलता है

$$p = \frac{L^2}{Am}. \qquad (6.13)$$

अतः हम यह कह सकते हैं कि पिंड की कक्षा एक शांकव (conic section) है जिसका ध्रुव (pole) उसके अंदर है। e को हम उस शांकव की **उत्केंद्रता** (eccentricity) कहते हैं। यह शांकव किस आकार का होगा, यह e के मान पर निर्भर करता है। अगर e एक के बराबर है ($e = 1$), तो यह शांकव **परवलय** (parabola) होगा, अगर e एक से बड़ा है ($e > 1$) तो अतिपरवलय (hyperbola), और e के एक से छोटा होने पर ($e < 1$) यह दीर्घवृत्त (ellipse) होगा।

उस विशेष स्थिति में जब e शून्य हो ($e = 0$) तब शांकव एक वृत्त होता है।

इस तरह हमने सूर्य के गुरुत्व क्षेत्र के अधीन गतिमान पिंड की कक्षा का हल निकाला है। लेकिन इस हल को आसानी से निकाल पाने के लिए हमने कुछ बातें अनुमान के रूप में मानी हैं। मसलन हम यह मानकर चले हैं कि सूर्य स्थिर है और पिंड पर केवल सूर्य का गुरुत्वीय बल लग रहा है। हम जानते हैं कि वास्तविक सौर-मंडल के लिए ये दोनों ही बातें सही नहीं हैं। वास्तविकता में सूर्य स्थिर नहीं है और सौर मंडल के अन्य सभी सदस्य भी पिंड पर अपना गुरुत्वीय बल लगाते हैं। लेकिन फिर भी हम विशाल सूर्य के गुरुत्वीय बल की तुलना में सौर-मंडल के अन्य सदस्यों द्वारा पिंड पर लगाए गए गुरुत्वीय बल की उपेक्षा कर सकते हैं। सौर-मंडल जैसे तंत्रों के लिए, जिसमें एक विशाल सूर्य और कुछ छोटे-छोटे ग्रह होते हैं (जिन्हें केपलरी तंत्र कहते हैं), हम यह कह सकते हैं कि हमने जो भी बातें आसानी के लिए मानी थीं वे तर्क संगत थीं।

आइए अब हम देखें कि सौर-मंडल के विभिन्न पिंडों की कक्षाएं किस आकार की (दीर्घवृत्ताकार, परवलयाकार या अतिपरवलयाकार) होती हैं। इसके लिए हम उत्केन्द्रता e और गतिमान पिंड की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा के बीच संबंध स्थापित करेंगे।

ऊर्जा और उत्केन्द्रता

हम जानते हैं कि

$$\text{ऊर्जा } (E) = \text{गतिज ऊर्जा (K.E.)} + \text{स्थितिज ऊर्जा (P.E.)} \qquad (6.14\text{ क})$$

और गतिज ऊर्जा $\text{K.E.} = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}$

ध्रुवी निर्देशांकों के पदों में गतिज ऊर्जा (K.E.) निकालने के लिए समीकरण 6.10 ग का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित मिलता है

$$\text{K.E.} = \frac{m}{2}\frac{A^2}{L^2}(\hat{\theta} + e\hat{n})\cdot(\hat{\theta} + e\hat{n})$$
$$= \frac{A^2 m}{2L^2}(1 + 2e\cos\theta + e^2) \qquad (6.14\text{ ख})$$

इसी प्रकार समीकरण 5.16 से हम यह जानते हैं कि

$$\text{स्थितिज ऊर्जा (P.E.)} = -\frac{GMm}{r} = -\frac{A}{r}.$$

समीकरण 6.12 से स्थितिज ऊर्जा $\text{(P.E.)} = -\frac{A^2 m}{L^2}(1 + e\cos\theta).$ (6.14 ग)

समीकरण 6.14 क, 6.14 ख और 6.14 ग से हमें निम्नलिखित मिलता है :

$$\text{ऊर्जा } (E) = \frac{A^2 m}{2L^2}(e^2 - 1) \qquad (6.15\text{ क})$$

$$\text{या } e = \sqrt{1 + \frac{2L^2 E}{A^2 m}}. \qquad (6.15\text{ ख})$$

समीकरण 6.13 और 6.15 ख से p और e के मान मिलते हैं जिन्हें एक साथ लेने पर सूर्य के गुरुत्वाकर्षण के अधीन गति कर रहे पिंड की कक्षा निर्धारित हो जाती है। अगर E, L और A के मान पता हों तो p और e के मान मालूम किए जा सकते हैं। हालांकि यहां हमने सूर्य के गुरुत्वाकर्षण के अधीन गति कर रहे पिंड की कक्षा निर्धारित की है, पर इन परिणामों को हम अधिक व्यापक रूप से भी लागू कर सकते हैं।

ये समीकरण $\mathbf{F} = -\frac{a}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ द्वारा दिए गए व्युत्क्रम-वर्ग आकर्षण बल के अधीन गति कर रहे द्रव्यमान m वाले हर कण पर लागू होते हैं।

आगे पढ़ने से पहले 6.12 से 6.15 तक के समीकरणों का कुछ अभ्यास करने के लिए आप बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 2

पृथ्वी के गिर्द दीर्घ वृत्तीय कक्षा में गति कर रहे एक 2000 kg वाले उपग्रह की कक्षा का समीकरण है :

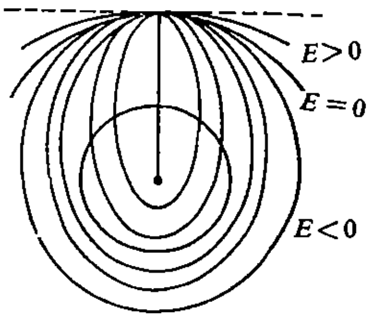
$$r = \frac{8000\text{ km}}{1 + 0.5\cos\theta}$$

उपग्रह की (क) कक्षा की उत्केन्द्रता, उसका (ख) कोणीय संवेग और (ग) संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा ज्ञात कीजिए।

(ध्यान दीजिए कि इस प्रश्न में m और M क्रमशः उपग्रह और पृथ्वी के द्रव्यमान हैं।)

आइए अब हम E के अलग-अलग मानों के संगत अलग-अलग तरह की कक्षाओं पर विचार करें।

स्थिति 1 : $E > 0$. इस स्थिति में $e > 1$ होगा और कक्षा **अतिपरवलयाकार** (hyperbolic) होगी। इसका यह मतलब है कि पिंड की गति सूर्य से अनंत दूरी पर से शुरू होती है और पिंड धीरे-धीरे सूर्य की ओर गिरने लगता है। इसकी स्थितिज ऊर्जा में जितनी कमी आती जाती है उसकी गतिज ऊर्जा में उतनी ही वृद्धि होती जाती है। यह सूर्य के पास से कुछ निम्नतम दूरी से गुज़रकर अतिपरवलय के अनुदिश दूर चला जाता है और फिर कभी भी लौट कर नहीं आता (देखिए चित्र 6.8)। कुछ ऐसे पुच्छल तारे (comets) देखे गए हैं जिनकी कक्षाएं अतिपरलयाकार होती हैं।



चित्र 6.8 : व्युत्क्रम-वर्ग केन्द्रीय संरक्षी आकर्षण बल के अधीन संभव कक्षाएं।

स्थिति 2 : $E = 0$. शून्य ऊर्जा पर $e = 1$ और पिंड एक परवलय के अनुदिश गतिमान होता है। यह भी सूर्य के पास से एक बार गुज़र कर दूर चला जाता है और कभी भी लौटकर नहीं आता। पिंडों की परवलयाकार कक्षाएं लगभग असंभव सी होती हैं, क्योंकि $e = 1$ का मतलब है कि ऋणात्मक स्थितिज ऊर्जा और धनात्मक गतिज ऊर्जा के बीच एक पूर्ण संतुलन बना रहना चाहिए।

स्थिति 3 : $E < 0$. इसके अतिरिक्त हमें E पर एक और प्रतिबंध, अर्थात् $E \geq -\dfrac{A^2 m}{2L^2}$ लागू करना ज़रूरी है। क्योंकि अगर $E < -\dfrac{A^2 m}{2L^2}$ तो समीकरण 6.15 ख के वर्गमूल चिन्ह के अंदर की संख्या ऋणात्मक होगी और तब पिंड की कोई कक्षा संभव हो ही नहीं सकती।

$-\dfrac{A^2 m}{2L^2} \leq E < 0$ के लिए $0 \leq e < 1$ लागू होता है। $0 < e < 1$ पर कक्षा दीर्घवृत्ताकार होगी और $e = 0$ पर कक्षा वृत्ताकार होगी। ऋणात्मक संपूर्ण ऊर्जा का मतलब है कि सदा ही गुरुत्वीय स्थितिज ऊर्जा धनात्मक गतिज ऊर्जा से अधिक होती है। इस स्थिति में पिंड की गतिज ऊर्जा इतनी अधिक नहीं हो पाती कि वह पलायन (escape) कर सके। अतः यह सदा के लिए एक बंद दीर्घवृत्तीय कक्षा में सूर्य से अथवा बल केन्द्र से बंध जाता है। सौर मंडल के सभी ग्रहों और ग्रहिकाओं (asteroids) की ठीक यही स्थिति है। आइए अब हम इन कक्षाओं पर कुछ विस्तार से चर्चा करें।

ग्रहों और पुच्छल तारों की कक्षाएं

आप खंड 1 की इकाई 5 में केपलर के ग्रहीय गति के नियमों के बारे में पढ़ चुके हैं। जैसा कि आप जानते हैं केपलर ने ये नियम टाइको ब्राहे द्वारा किए गए विस्तृत प्रेक्षणों के आधार पर दिए थे। हमने यहां न्यूटन के गति नियम यह दिखाने के लिए लागू किए हैं कि ग्रह, पुच्छल तारे, उल्का (meteor) या कोई भी खगोल पिंड (astronomical objects) जो सूर्य की परिक्रमा करते हैं, समीकरण 6.12 द्वारा दिए गए शांकव के अनुदिश गतिमान होंगे। उनकी कक्षाओं का आकार समीकरण 6.13 और समीकरण 6.15 से निर्धारित होगा।

वस्तुतः स्थिति 3 केपलर के प्रथम नियम के संगत है।

आइए अब हम भाग 6.2.1 में बताए गए समान क्षेत्रफल नियम को फिर से याद करें। जब इसे ग्रहीय गति पर लागू किया जाता है तो यह केपलर का द्वितीय नियम हो जाता है। केपलर ने यह देखा कि ग्रह सूर्य की परिक्रमा एक अचर कोणीय चाल $\dot\theta$ से नहीं करते। यदि $\dot\theta$ अचर हो तो समान क्षेत्रफल नियम के अनुसार r भी अचर होना चाहिए। चूंकि $\dot\theta$ बदलता रहता है, इसलिए केपलर ने यह अनुमान लगाया कि ग्रहीय कक्षाएं वृत्तीय नहीं हैं, बल्कि दीर्घवृत्तीय हैं। उनका यह अनुमान प्रेक्षणों के संगत निकला। पर क्योंकि अधिकांश ग्रहीय कक्षाओं की उत्केन्द्रताएं (e) काफ़ी कम होती हैं (सारणी 6.1) इसलिए इनकी कक्षाएं लगभग वृत्तीय होती हैं। उदाहरण के लिए पूरे वर्ष में सूर्य से पृथ्वी की दूरी में केवल 3% का परिवर्तन आता है। सारणी 6.1 से आप यह देख सकते हैं कि भाग 5.2.1 में लगाया गया यह अनुमान कि ग्रह की कक्षा वृत्तीय होती है, काफ़ी हद तक सही है।

सारणी 6.1

ग्रह	e
बुध	0.2056
शुक्र	0.0068
पृथ्वी	0.0167
मंगल	0.0934
बृहस्पति	0.0483
शनि	0.0560
अरुण	0.0461
वरुण	0.0100
यम	0.2484

आइए अब हम केपलर के प्रथम नियम और द्वितीय नियम से केपलर का तृतीय नियम प्राप्त करके ग्रहीय कक्षाओं पर की जा रही चर्चा को समाप्त करें।

परिणाम $r^2 \dot\theta = \dfrac{L}{m}$ की सहायता से केपलर के द्वितीय नियम को इस तरह लिखा जा सकता है

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot\theta = \frac{L}{2m}. \tag{6.16}$$

यदि एक दीर्घवृत्तीय कक्षा को पूरा करने में लगा समय T हो, तो $t = 0$ से $t = T$ तक समीकरण 6.16 का समाकलन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\int_0^T \frac{dA}{dt}\, dt = \frac{L}{2m} \int_0^T dt = \frac{LT}{2m}.$$

ऊपर के समीकरण में बायीं ओर की राशि दीर्घवृत्त द्वारा घेरे गए प्रदेश का क्षेत्रफल है। अब, हम जानते हैं कि दीर्घवृत्त का क्षेत्रफल $= \pi ab$, जहां a दीर्घवृत्त का अर्ध-दीर्घ अक्ष (semi-major axis) है और b अर्ध-लघु अक्ष (semi-minor axis) है। अत:

$$\pi ab = \frac{L}{2m}\; T,$$

$$\text{या } T^2 = \left(\frac{2m\pi}{L}\right)^2 a^2 b^2.$$

हम जानते हैं कि दीर्घवृत्त के लिए (देखिए परिशिष्ट क के समीकरण क.5 से क.8) $b^2 = a^2(1 - e^2)$ और $p = a(1 - e^2)$. अत: समीकरण 6.13 से

$$a(1 - e^2) = \frac{L^2}{Am}.$$

$$\therefore\; T^2 = \left(\frac{2m\pi}{L}\right)^2 a^4 (1 - e^2) = \left(\frac{2m\pi}{L}\right)^2 \frac{L^2}{Am}\, a^3,$$

$$\text{या } T^2 = \frac{4\pi^2 m a^3}{A}$$

चूंकि $A = GMm$ इसलिए केपलर का तृतीय नियम है

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM} = ka^3, \tag{6.17}$$

जहां $k = \dfrac{4\pi^2}{GM}$ केवल सूर्य के द्रव्यमान पर निर्भर करता है और यह सभी ग्रहों के लिए समान रहता है। केपलर का तृतीय नियम न केवल ग्रहीय कक्षाओं पर ही लागू होता है बल्कि ग्रहों के उपग्रहों की दीर्घवृत्तीय कक्षाओं पर भी लागू होता है। उपग्रहों की गति के संबंध में समीकरण 6.17 का M, ग्रह के द्रव्यमान के लिए होता है।

इस तरह आपने ग्रहीय गति-नियमों का अध्ययन पूरा कर लिया है। अब हम पुच्छल तारे के बारे में संक्षेप में चर्चा करेंगे।

केपलर द्वारा ग्रहीय गति के तीन नियम दिए जाने के बाद भी काफ़ी समय तक पुच्छल तारों की गति एक पहेली बनी रही। वस्तुत: आइज़क न्यूटन ही वह व्यक्ति थे जिन्होंने 1682 में पुच्छल तारा देखने पर पहले पहल उसके पथ की व्याख्या की। उन्होंने देखा कि पुच्छल तारे पर भी गति विज्ञान के वे सिद्धांत लागू होते हैं जो ग्रहों की गति पर लागू होते हैं। उन्होंने अनुमान लगाया कि कुछ पुच्छल तारे पृथ्वी के पास से होकर परवलयिक और अतिपरवलयिक कक्षाओं में जाते हैं और कभी भी नहीं लौटते। पर उनकी यह धारणा थी कि अन्य पुच्छल तारों को ग्रहों की तरह दीर्घवृत्तीय कक्षाओं में ही गति करते रहना चाहिए। केवल इन कक्षाओं की उत्केन्द्रता अधिक होनी चाहिए। न्यूटन की इस समझ से यह निष्कर्ष निकला कि पुच्छल तारे भी सौर मंडल के सदस्य हैं। शायद् आप हेली पुच्छल तारे के बारे में भी जानते हों, जो हर 76 सालों के बाद लौट आता है। इसकी कक्षा दीर्घवृत्तीय होती है जिसकी उत्केन्द्रता ($e = 0.967$) काफ़ी अधिक होती है।

हम यह पहले देख चुके हैं कि $\mathbf{L}$ और E गति के अचर हैं। अब अगर हमें पिंड की कक्षाओं का समीकरण पता हो तो हमें इनके मान भी निकाल सकने चाहिए। इसके लिए हम समीकरण 6.15 क में $p = a(1 - e^2) = \dfrac{L^2}{Am}$ और $A = GMm$ का प्रयोग करके E और a के बीच निम्नलिखित संबंध निकाल सकते हैं :

$$E = -\frac{GMm}{2a} \tag{6.18}$$

अब आप समीकरण 6.15 से समीकरण 6.18 के इन परिणामों को कुछ वास्तविक स्थितियों में लागू करना चाहेंगे। तो अब आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल कीजिए।

बोध प्रश्न 3

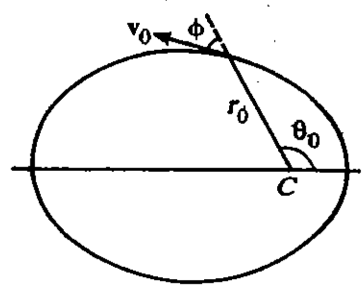
(क) यदि पृथ्वी की कक्षा के लिए $e = 0.0167$ और $a = 1.5 \times 10^8$km दिया हुआ हो तो उसकी ऊर्जा और सूर्य के प्रति उसका कोणीय संवेग ज्ञात कीजिए।

(ख) सूर्य की ओर जा रहे पुच्छल तारे की ऊर्जा का निरपेक्ष परिमाण $|E| = \dfrac{G^2M^2m^3}{L^2}$ है, जहां M और m, क्रमशः पृथ्वी और पुच्छल तारे के द्रव्यमान हैं। L पुच्छल तारे का कोणीय संवेग है। पुच्छल तारे की संभव कक्षाओं के क्या आकार हो सकते हैं?

अभी तक हमने उन कारकों पर विचार किया है जो ग्रह, पुच्छल तारे या उपग्रह की कक्षा निर्धारित करते हैं। आइए अब हम यह देखें कि अगर कुछ प्रारंभिक प्रतिबंध पता हों तो किस तरह पिंड की कक्षा मालूम की जा सकती है।

उदाहरण 2 : प्रारंभिक प्रतिबंधों से कक्षा ज्ञात करना

हम द्रव्यमान m वाले एक उपग्रह का उदाहरण लेंगे जिसे पृथ्वी के केन्द्र (C) से दूरी r_0 पर एक अंतरिक्ष शटल से छोड़ा गया है (देखिए चित्र 6.9)। पृथ्वी के सापेक्ष उपग्रह का प्रारंभिक वेग $\mathbf{v}_0$ और उपग्रह का मोचन कोण (angle of launch) ϕ प्रारंभिक प्रतिबंध के रूप में दिये गये हैं। उपग्रह की कक्षा क्या होगी?



चित्र 6.9 : उपग्रह की कक्षा

आइए पहले हम उपग्रह की ऊर्जा ज्ञात करें जो कि अचर है। जैसा कि आप जानते हैं E के मान से हमें कक्षा का आकार प्राप्त हो जाता है। E का मान है

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

जहां M पृथ्वी का द्रव्यमान है। यदि उपग्रह की कक्षा बंद हो तो $E < 0$, यानी

$$\frac{1}{2}mv_0^2 < \frac{GMm}{r_0}$$

$$\text{या } v_0^2 < \frac{2GM}{r_0} \quad \text{या} \quad v_0 < \sqrt{\frac{2GM}{r_0}}.$$

इस तरह हम पाते हैं कि उपग्रह की कक्षा दीर्घ-वृत्तीय या वृत्तीय होने के लिए यह ज़रूरी है कि v_0 ऊपर दिए गए प्रतिबंध को संतुष्ट करे। कक्षा का आकार दीर्घ अक्ष (major axis) की लंबाई से निर्धारित हो जाएगा जो कि समीकरण 6.18 के अनुसार है

$$2a = -\frac{GMm}{E}$$

इसी प्रकार उपग्रह का कोणीय संवेग अचर बना रहता है और यह

$$L = m\,v_0\,r_0 \sin\phi \tag{6.19}$$

द्वारा दिए गए इसके प्रारंभिक मान के बराबर होता है।

तब समीकरण 6.15 ख से कक्षा की उत्केन्द्रता मालूम की जा सकती है। और तब हम उस बिंदु को निकाल सकते हैं जहां उपग्रह पृथ्वी से निकटतम दूरी पर होता है। इसे **भूमिनीच** (perigee) कहते हैं। और हम वह बिंदु भी मालूम कर सकते हैं जहां उपग्रह पृथ्वी से अधिकतम दूरी पर होता है। इसे **भूमिउच्च** (apogee) कहते हैं। परिशिष्ट क के समीकरण क.6 के अनुसार ये बिंदु क्रमशः

ग्रहीय कक्षा के उस बिंदु को जहां ग्रह सूर्य से निकटतम दूरी पर होता है **रविनीच** (perihelion) कहते हैं और उस बिंदु को जहां ग्रह सूर्य से अधिकतम दूरी पर होता है, **रवि उच्च** (aphelion) कहते हैं।

$$r_p = a(1-e),\; r_a = a(1+e) \tag{6.20}$$

हैं। इस तरह प्रारंभिक प्रतिबंधों से e द्वारा कक्षा का आकार (shape) और a द्वारा उसका विस्तार (size) निर्धारित होता है।

उपग्रह की कक्षा को पूर्णतः निर्धारित करने के लिए हमारे लिए अंतरिक्ष में उसके अभिविन्यास (orientation) को जानना भी ज़रूरी है। नाभि (focus) को भूमिनीच से मिलाने वाली रेखा से यह अभिविन्यास मिलता है। इस रेखा और ज्ञात सदिश $\mathbf{r}_0$ के बीच का कोण θ_0 मालूम करके हम यह

रेखा ज्ञात कर सकते हैं (जैसा कि चित्र 6.9 में दिखाया गया है)। हम r_0, e, m और L के मानों को प्रतिस्थापित करके दीर्घवृत्त के ध्रुवी समीकरण यानि कि

$$r = \frac{L^2}{Am(1 + e\cos\theta)}$$

से कोण θ_0 प्राप्त कर सकते हैं।

फिर भी, इस समीकरण से केवल $\cos\theta_0$ ही मिलता है। इससे हमें θ_0 के चिह्न के बारे में कुछ पता नहीं चलता। हम भूमिनीच से परे जा रहे हैं या उसकी ओर जा रहे हैं, उसके अनुसार θ_0 धनात्मक अथवा ऋणात्मक हो सकता है। यह जानकारी चित्र 6.9 के कोण ϕ को देखकर मालूम की जा सकती है। आप देख सकते हैं कि जब हम भूमिनीच से परे जा रहे होते हैं तो $\phi < 90°$ और जब उसकी ओर जा रहे होते हैं तो $\phi > 90°$. अब आप वास्तविक उपग्रह की कक्षा मालूम करने के लिए इन परिणामों को लागू कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 4

5,000 kg द्रव्यमान वाले एक उपग्रह को पृथ्वी के केन्द्र से 3.6×10^7 m की दूरी पर 4,000 ms^{-1} की प्रारंभिक चाल से अंतरिक्ष में छोड़ा गया है। इसे त्रिज्य दिशा से 30° के कोण पर प्रक्षिप्त किया गया है। (क) अर्ध-दीर्घ अक्ष और अर्ध-लघु अक्ष की लंबाईयां, (ख) कोणीय संवेग और (ग) कक्षा की भूमिउच्च और भूमिनीच दूरियां ज्ञात कीजिए।

अभी तक हमने व्युत्क्रम-वर्ग आकर्षण बल के अधीन गतिमान पिंड की संभव कक्षाएं मालूम की हैं। जैसा कि आप जानते हैं कि दो धन आवेशित कणों के बीच स्थिर वैद्युत बल, प्रतिकर्षी व्युत्क्रम-वर्ग केन्द्रीय संरक्षी बल होता है। उस कण का पथ क्या होगा जिस पर यह बल लग रहा हो?

प्रतिकर्षी व्युत्क्रम-वर्ग बल के अधीन कक्षाएं

यहां भी हम वही तरीका लागू कर सकते हैं जो कि हमने ग्रहीय कक्षाओं को ज्ञात करने के लिए अपनाया था। पर यहां हमें समीकरण 6.9 क के दायीं ओर की राशि की जगह $\frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ प्रतिस्थापित करना होगा, जहां k एक धन अचर है। अब आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करके इस कक्षा को ज्ञात कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 5

दिखाइए कि परमाणु नाभिक की ओर जाने वाला अल्फा-कण एक अतिपरवलयाकार पथ का अनुसरण करता है।

इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है उसका एक संक्षिप्त विवरण हम यहां दे रहे हैं।

6.4 सारांश

- केन्द्रीय बल वह बल होता है जो सर्वत्र एक नियत बिंदु, जिसे बल-केन्द्र कहते हैं, की ओर होता है या उससे विपरीत दिशा में होता है। इसे

  $$\mathbf{F} = F\,\hat{\mathbf{r}}$$

  से निरूपित किया जाता है।

- वह केन्द्रीय बल, जिसका परिमाण केवल r पर निर्भर करता है, संरक्षी बल भी होता है। केन्द्रीय संरक्षी बल को

  $$\mathbf{F} = f(r)\,\hat{\mathbf{r}}$$

  से निरूपित किया जा सकता है।

- केन्द्रीय संरक्षी बलों के अधीन गति के लिए कोणीय संवेग $\mathbf{L}$ और संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा E अचर होती है। इस गति के लिए, जो एक समतल में ही सीमित है, समान-क्षेत्रफल नियम लागू होता है।

- व्युत्क्रम-वर्ग केन्द्रीय संरक्षी बल $\mathbf{F} = \pm \frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ के लिए कक्षा का समीकरण एक शांकव होता है जिसका समीकरण है

$$\frac{1}{r} = \frac{\mp 1 + e\cos\theta}{p}$$

प्रतिकर्षी बल के लिए कक्षा एक अतिपरवलय होगी। आकर्षण-बल के लिए इसका आकार e के मान पर निर्भर करता है। उत्केन्द्रता, E पर निर्भर करती है और वह है

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{k^2m}}$$

6.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. बताइए कि नीचे दिए गए केन्द्रीय बल क्षेत्रों में से कौन कौन से आकर्षण क्षेत्र हैं और कौन-कौन से प्रतिकर्षी क्षेत्र हैं

   (i) $\mathbf{F} = -4\,r^3\hat{\mathbf{r}}$,

   (ii) $\mathbf{F} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\sqrt{r}}$,

   (iii) $\mathbf{F} = \frac{(r-1)}{r^2+1}\hat{\mathbf{r}}$.

2. (क) यदि गुरुत्व-बल व्युत्क्रम-वर्ग के स्थान पर व्युत्क्रम-घन होता, तो केपलर के तीन नियमों में से कौन-सा नियम तब भी लागू होता?

   (ख) निम्नलिखित कथन की पुष्टि कीजिए : अपनी कक्षा में ग्रह की कोणीय चाल रवि उच्च पर निम्नतम होती है और रविनीच पर अधिकतम होती है।

3. थुम्बा से प्रारंभिक चाल

$$v_0 = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{2\,GM_E}{R_E}}$$

   से एक रॉकेट छोड़ा गया है।

वायु प्रतिरोध और पृथ्वी के घूर्णन की उपेक्षा कर दीजिए। ऊर्जा-संरक्षण और कोणीय संवेग का संरक्षण लेकर पृथ्वी के केन्द्र से वह अधिकतम दूरी ज्ञात कीजिए जहां तक कि (क) त्रिज्यतः और (ख) स्पर्शीयतः छोड़ने पर वह पहुँचता है।

4. दिया हुआ है कि हेली पुच्छल तारे की कक्षा की उत्केन्द्रता 0.967 है। और उसके अर्ध-दीर्घ अक्ष की लंबाई लगभग 2.7×10^{12}m है। पुच्छल तारे के लिए निम्नलिखित ज्ञात कीजिए

   (क) रविनीच और रविउच्च दूरियां

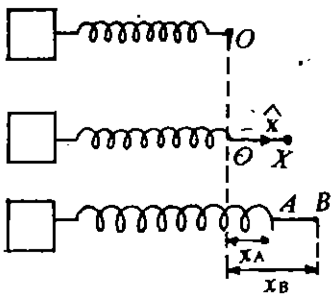
   (ख) आवर्त काल।

6.6 उत्तर

बोध प्रश्न

1. (क) क्योंकि $\mathbf{F} = -k\mathbf{x}$ जहां $\mathbf{x} = \mathbf{OX}$ (चित्र 6.10) इसलिए बल नियत बिंदु O की ओर होगा। अतः यह केन्द्रीय बल है।

   $A\ (x = x_A)$ से $B\ (x = x_B)$ तक इसे खींचने में किया गया कार्य है



चित्र 6.10

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{x} = \int_{x_A}^{x_B} (-kx\hat{\mathbf{x}}) \cdot (-dx\hat{\mathbf{x}})$$

या $W = \int_{x_A}^{x_B} kx\,dx = \frac{k}{2}(x_B^2 - x_A^2)$.

यानि कि किया गया कार्य केवल प्रारंभिक और अंतिम स्थितियों पर ही निर्भर करता है। अतः बल संरक्षी भी है।

(ख) यह बल भी एक नियत बिंदु की ओर है, अतः यह केन्द्रीय बल है। लेकिन भाग (क) के हल से यह साफ़ है कि $x = x_A$ से $x = x_B$ तक कण को ले जाने में किया जाने वाला कार्य न केवल पथ की प्रारंभिक और अंतिम स्थितियों पर निर्भर करता है, बल्कि वेग पर भी निर्भर करता है। अतः यह बल संरक्षी बल नहीं है।

(ग) दिए हुए बल को $\mathbf{F} = m d\hat{\mathbf{l}} - n\hat{\mathbf{r}}$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जहां m और n अदिश राशियां हैं (क्योंकि $\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}$ और $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{l}$ अदिश राशियां हैं)। $\mathbf{F}$ के व्यंजक से यह साफ़ है कि यह $\mathbf{r}$ के अनुदिश नहीं होता, क्योंकि सामान्यतः $m \neq 0$. अतः यह केन्द्रीय बल नहीं है।

2. दिए हुए समीकरण की समीकरण 6.12 से तुलना करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

(क) $e = 0.5$ और

(ख) $\frac{L^2}{Am} = 8000 \times 1000\ \text{m} = 8 \times 10^6\ \text{m}.$

पर $A = GMm$

$= (6.673 \times 10^{-11}\text{Nm}^2\ \text{kg}^{-2}) \times (5.97 \times 10^{24}\text{kg}) \times (2000\ \text{kg})$

$= 7.97 \times 10^{17}\text{Nm}^2$

या $L^2 = (7.97 \times 10^{17}\text{Nm}^2) \times (2000\ \text{kg}) \times (8 \times 10^6\text{m})$

$= 7.97 \times 16 \times 10^{26}\text{kg}^2\text{m}^4\text{s}^{-2}$

या $L = 1.13 \times 10^{14}\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$

(ग) समीकरण 6.15 क से $E = \frac{A^2m}{2L^2}(e^2 - 1)$

या $E = \frac{(7.97 \times 10^{17})^2\text{N}^2\text{m}^4 \times (2000\ \text{kg})}{2 \times (1.13 \times 10^{14})^2\text{kg}^2\text{m}^4\text{s}^{-2}} \times (-\frac{3}{4})$

$= -3.73 \times 10^{10}\ \text{J}$

3. (क) समीकरण 6.18 से $E = -\frac{GMm}{2a}$

या $E = -\frac{(6.673 \times 10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}) \times (1.99 \times 10^{30}\text{kg}) \times (5.97 \times 10^{24}\text{kg})}{2 \times 1.5 \times 10^{11}\text{m}}$

$= -2.6 \times 10^{33}\text{J}.$

क्योंकि समीकरण 6.13 से $p = \frac{L^2}{Am}$ और $p = a(1 - e^2)$ (देखिए परिशिष्ट क का समीकरण क.5), इसलिए $\frac{L^2}{Am} = a(1 - e^2)$, और क्योंकि $A = GMm$

$\therefore L^2 = GMm^2a(1 - e^2)$. पृथ्वी की कक्षा के लिए $e = 0.0167$

$\therefore L^2 = (6.673 \times 10^{-11}\text{Nm}^2\text{kg}^{-2}) \times (1.99 \times 10^{30}\text{kg}) \times (5.97 \times 10^{24}\text{kg})^2$

$\times (1.5 \times 10^{11}\text{m}) \times (0.9997)$

$= 709.71 \times 10^{78}\text{kg}^2\text{m}^4\text{s}^{-2}$

$\therefore L = 26.64 \times 10^{39}\ \text{kg m}^2\text{s}^{-1}$

(ख) समीकरण 6.15 ख से $e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{A^2m}}$

क्योंकि E का निरपेक्ष (absolute) परिमाण दिया हुआ है, इसलिए यह धनात्मक और ऋणात्मक दोनों ही हो सकते हैं

यदि $E > 0, e = \sqrt{1 + \frac{2L^2}{A^2m}\left(\frac{G^2M^2m^3}{L^2}\right)} = \sqrt{3}$

अतः इसकी कक्षा अतिपरवलयिक है।

यदि $E < 0, e = \sqrt{1-2} = \sqrt{-1}$. अतः कक्षा संभव हो ही नहीं सकती।

4. समीकरण 6.18 को लागू करने पर हमें

$$a = -\frac{GMm}{2E} \tag{6.21}$$

प्राप्त होता है। हम जानते हैं कि प्रारंभिक ऊर्जा है

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r_0}$$

जहां $r_0 = 3.6 \times 10^7$m, $v_0 = 4000$ ms^{-1}, $m = 5000$ kg और M पृथ्वी का द्रव्यमान है। G और M के मानों के साथ इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर हमें $E = -1.5 \times 10^{10}$J प्राप्त होता है। इस मान को समीकरण 6.2 में रखने पर हमें

$a = 6.6 \times 10^7$m प्राप्त होता है।

कोणीय संवेग का परिमाण $L = mv_o r_o \sin\phi$ जहां $\phi = 30°$. m, v_0, r_0 और ϕ के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें $L = 3.6 \times 10^{14}$kg m^{2}s^{-1} प्राप्त होता है।

एक बार E और L दोनों मालूम हो जाने पर हम e ज्ञात करने के लिए समीकरण 6.15 ख का प्रयोग कर सकते हैं

$$e = \sqrt{1 + \frac{2L^2E}{A^2m}} \text{ जहां } A = GMm.$$

L, E, G, M और m के मानों को प्रतिस्थापित करने पर हमें $e = 0.9$ प्राप्त होता है। और

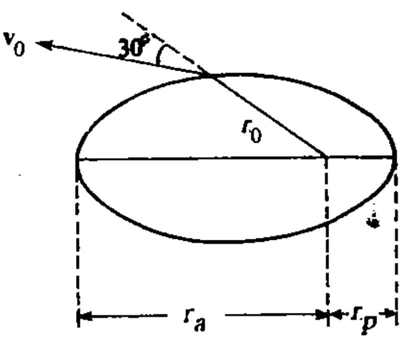
$b = a\sqrt{1-e^2} = 2.9 \times 10^7$m

इस तरह भूमिनीच और भूमिउच्च दूरियां ये हैं

$r_a = a(1+e) = 11.3 \times 10^8$ m

$r_p = a(1-e) = 6.6 \times 10^6$ m.

कक्षा को चित्र 6.11 में दिखाया गया है।



चित्र 6.11

5. चित्र 6.12 देखिए। मान लीजिए कि धनात्मक आवेश युक्त नाभिक N और अल्फा कण A पर आवेश क्रमशः q_1 और q_2 हैं और अल्फा कण का द्रव्यमान m है। अतः जिस तरह हमने समीकरण 6.9 क प्राप्त किया है, उसी तरह हम यहां लिख सकते हैं

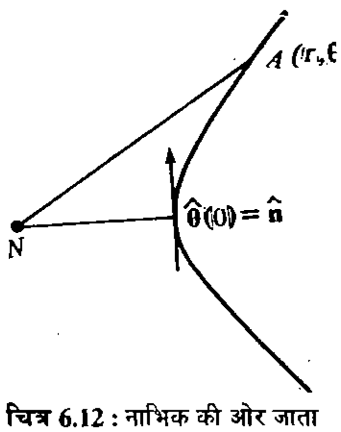
$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = C\frac{q_1q_2}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$ जहां C एक अचर है जो माध्यम की प्रकृति पर निर्भर करता है।

$$\text{या } \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{k}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \tag{6.22}$$

जहां $k = \frac{C}{m}q_1q_2$ = एक धन अचर है। आपको याद होगा कि इकाई 4 के समीकरण 4.10 के अनुसार $\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\hat{\mathbf{r}}$ या $\hat{\mathbf{r}} = -\frac{1}{\dot{\theta}}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$

इस तरह, $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{k}{r^2\dot{\theta}}\frac{d\hat{\theta}}{dt} = -\frac{km}{L}\frac{d\hat{\theta}}{dt}$ $\quad[\because L = mr^2\dot{\theta}]$

या $d\mathbf{v} = -\frac{km}{L}d\hat{\theta}$



चित्र 6.12 : नाभिक की ओर जाता हुआ एक अल्फा कण

$$\therefore \ \mathbf{v} = -\frac{km}{L}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_1 \qquad (6.23)$$

जहां $\mathbf{C}_1$ एक अचर समाकलन सदिश है। अब हम अचर $\mathbf{C}_1$ ज्ञात करेंगे। इसके लिए हम वही तरीक़ा लागू करेंगे जो कि हमने ग्रहों से संबंधित प्रश्न में $\mathbf{C}$ मालूम करने के लिए अपनाया था। समीकरण 6.10 के बाद लागू किए गए कुछ चरणों को देखने पर आप यह पाएंगे कि $\mathbf{v}(0)$ और $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0)$ समान दिशा में हैं।

मान लें कि $\hat{\boldsymbol{\theta}}(0) = \hat{\mathbf{n}}$. तब $\mathbf{v}(0) = v(0)\,\hat{\mathbf{n}}$.

अतः समीकरण 6.23 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$v(0)\hat{\mathbf{n}} = -\frac{km}{L}\,\hat{\mathbf{n}} + \mathbf{C}_1$$

$$\text{या } \mathbf{C}_1 = \left[v(0) + \frac{km}{L}\right]\hat{\mathbf{n}} = k_1\hat{\mathbf{n}}.$$

दोनों ओर $\hat{\theta}$ के साथ अदिश गुणनफल लेने और $\mathbf{v}.\hat{\boldsymbol{\theta}} = r\dot{\theta}$, $\hat{\boldsymbol{\theta}}.\hat{\boldsymbol{\theta}} = 1$ और $\hat{\mathbf{n}}.\hat{\boldsymbol{\theta}} = \cos\theta$ का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$r\dot{\theta} = -\frac{km}{L} + k_1\cos\theta$$

$$\text{या } \frac{L}{mr} = -\frac{km}{L} + k_1\cos\theta \quad [\because L = mr^2\dot{\theta}]$$

$$\text{या } \frac{1}{r} = -\frac{km^2}{L^2} + \frac{mk_1}{L}\cos\theta$$

$$\text{या } \frac{1}{r} = \frac{km^2}{L^2}\left[\frac{Lk_1}{mk}\cos\theta - 1\right] \qquad (6.24)$$

समीकरण 6.24 की तुलना परिशिष्ट क के समीकरण क.9 से की जा सकती है जिसके मुताबिक

$$\frac{1}{r} = \frac{e\cos\theta - 1}{p}, \text{ जहां } p = \frac{L^2}{km^2}, e = \frac{Lk_1}{mk}$$

जो कि उस शांकव का समीकरण है जिसका ध्रुव बाहर है।

चूंकि ऐसा शांकव केवल अतिपरवलय हो सकता है, इसलिए कक्षा अतिपरवलयिक होगी जिसका ध्रुव या नाभि, परमाणु के नाभिक पर है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. (i) ऋणात्मक चिह्न से यह पता चलता है कि बल क्योंकि बल-केन्द्र की ओर है, इसलिए यह आकर्षण बल है।

   (ii) दायीं ओर के धनात्मक चिह्न से यह पता चलता है कि बल क्योंकि केन्द्र से विपरीत दिशा में है, अतः यह प्रतिकर्षी बल है।

   (iii) यह बल $0 < r < 1$ के लिए आकर्षण बल है और $r > 1$ के लिए प्रतिकर्षी बल है। $r = 1$ पर यह शून्य हो जाता है।

2. (क) जब तक बल केन्द्रीय होता है, तब तक भाग 6.2.1 से हमें प्राप्त होता है

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0} \text{ या } \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{0}, \text{ अर्थात् } \mathbf{L} \text{ एक अचर सदिश है।}$$

हमने यह देखा है कि कोणीय संवेग सदिश की अचरता से समान-क्षेत्रफल नियम प्राप्त होता है। वास्तव में केपलर का द्वितीय नियम समान-क्षेत्रफल नियम ही है। अतः केपलर का द्वितीय नियम तब भी लागू होगा।

(ख) समान-क्षेत्रफल नियम से हम यह जानते हैं कि सभी ग्रहों के लिए $r^2\dot{\theta} =$ एक अचर है। क्योंकि रविउच्च पर r अधिकतम होता है, इसलिए $\dot{\theta}$ निम्नतम होता है। और क्योंकि रविनीच पर r निम्नतम होता है, इसलिए $\dot{\theta}$ अधिकतम होता है। इसलिए जब ग्रह सूर्य

की ओर गतिमान होता है तो वह अपेक्षाकृत अधिक तेज़ी से चलता है और जब सूर्य से परे जाने लगता है तो वह अपेक्षाकृत कम तेज़ी से चलता है।

3. चित्र 6.13 देखिए। पृथ्वी की सतह के बिंदु P पर रॉकेट की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा है

$$E_P = \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{GM_E m}{R_E} = -\frac{7}{16}\frac{GM_E m}{R_E}$$

(क) अधिकतम दूरी a के संगत बिंदु A पर रॉकेट की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा है

$$E_A = \frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{GM_E m}{a}$$

जहां $v_A = A$ पर रॉकेट का वेग।

ऊर्जा-संरक्षण नियम से हम यह जानते हैं कि $E_P = E_A$ अर्थात्

$$\frac{1}{2} m v_A^2 - \frac{GM_E m}{a} = -\frac{7}{16}\frac{GM_E m}{R_E} \qquad (6.25)$$

हम जानते हैं कि $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$. P पर, $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$ जो कि $\mathbf{v}_0$ के समांतर है। इसलिए P पर कोणीय संवेग का परिमाण शून्य है। अतः $L_P = 0$; और $L_A = ma\, v_A$ (क्योंकि v_A त्रिज्य दिशा **OA** पर लंब है)।

अब क्योंकि $L_P = L_A$, $\therefore v_A = 0$.

अतः समीकरण 6.25 से हमें प्राप्त होता है कि

$$a = \frac{16}{7} R_E.$$

(ख) अधिकतम दूरी b के संगत बिंदु B पर रॉकेट की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा है

$$E_B = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{GM_E m}{b},$$

जहां $v_B = B$ पर रॉकेट का वेग। अब $E_P = E_B$

$$\therefore \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{GM_E m}{b} = -\frac{7}{16}\frac{GM_E m}{R_E}. \qquad (6.26)$$

अब बिंदु P पर, $\mathbf{r}$, $\mathbf{v}_0$ पर लंब है। $\therefore L_P = mR_E v_0$. और $L_B = mbv_B$.

क्योंकि $L_P = L_B$, इसलिए हमें $v_B = \frac{R_E v_0}{b}$ प्राप्त होता है।

$$\therefore v_B^2 = \frac{R_E^2 v_0^2}{b^2} = \frac{R_E^2}{b^2}\frac{9}{16}\frac{2\,GM_E}{R_E} = \frac{9}{8}\frac{GM_E R_E}{b^2}$$

अतः समीकरण 6.26 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{9}{16}\frac{GM_E mR_E}{b^2} - \frac{GM_E m}{b} = -\frac{7}{16}\frac{GM_E m}{R_E}$$

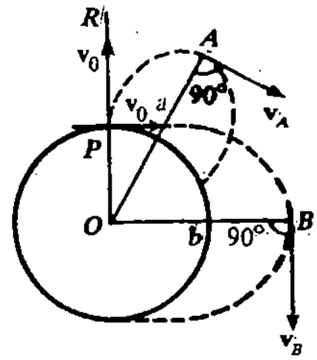
या $\frac{9 R_E}{16 b^2} - \frac{1}{b} = -\frac{7}{16 R_E}$

या $9 R_E^2 - 16 bR_E = -7 b^2$

या $7 b^2 - 16 bR_E + 9 R_E^2 = 0$

या $(7b - 9R_E)(b - R_E) = 0$

पर $b \neq R_E$, इसलिए $b = \frac{9 R_E}{7}$.



चित्र 6.13 : प्रक्षिप्त रॉकेट का प्रपथ। PR और PT, रॉकेट को छोड़ने की, क्रमशः त्रिज्य और स्पशरिखावत् दिशाएं हैं।

4. (क) रविनीच और रविउच्च दूरियां क्रमशः

$r_p = a(1 - e)$ और $r_a = a(1 + e)$ हैं।

हेली पुच्छल तारे के लिए $a = 2.7 \times 10^{12}$m और $e = 0.967$. अतः

$r_p = 8.9 \times 10^{10}$m, $r_a = 5.3 \times 10^{12}$m.

(ख) समीकरण 6.17 से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM}},$$

जहां M सूर्य का द्रव्यमान है। अतः a, G और M के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(2.7 \times 10^{12})^3 \text{ m}^3}{(6.673 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}) \times (1.99 \times 10^{30} \text{ kg})}}$$

$= 24.2 \times 10^8$ s
$= 76.7$ **वर्ष**

6.7 शब्दावली

अतिपरवलय	— hyperbola
कक्षा	— orbit
केन्द्रीय बल	— central force
केन्द्रीय संरक्षी बल	— central conservative force
दीर्घवृत्त	— ellipse
परवलय	— parabola
प्रतिकर्षी	— repulsive
भूमिउच्च	— apogee
भूमिनीच	— perigee
रविउच्च	— aphelion
रविनीच	— perihelion
व्युत्क्रम-वर्ग	— inverse square
व्युत्क्रम-वर्ग आकर्षण बल	— inverse square attractive force
संरक्षी बल	— conservative force

इकाई 7 बहु-कण निकाय

इकाई की रूपरेखा

7.1 प्रस्तावना

अभी तक आपने एकल कणों की गति के बारे में पढ़ा है। इकाई 6 में हमने सूर्य के गुरुत्व क्षेत्र के अधीन गतिमान ग्रह का उदाहरण लिया तो था। पर इस उदाहरण में हम यह मानकर चले थे कि सूर्य अचल है। आपने यह ज़रूर सोचा होगा कि सूर्य और ग्रह के पारस्परिक गुरुत्वाकर्षण की वजह से सिर्फ़ ग्रह ही क्यों गतिमान होते हैं? क्या सूर्य को गतिमान नहीं होना चाहिए? वास्तव में इस इकाई में हम यह देखेंगे कि सूर्य में भी गति होती है। लेकिन अगर ऐसी बात है तो फिर हमने इकाई 6 में इस बात की उपेक्षा क्यों की थी? हमें इस सवाल का जवाब मिल सकता है अगर हम सूर्य और ग्रह के द्वि-पिंड निकाय की गति का विश्लेषण करें।

इस इकाई में पहले हम पारस्परिक क्रिया बल के अधीन गतिमान दो पिंडों की गति की चर्चा करेंगे। हम इस द्वि-पिंड निकाय पर यांत्रिकी की मूलभूत संकल्पनाओं को लागू करेंगे। इसके अलावा इस इकाई में आप संहति केन्द्र की गति और आपेक्षिक निर्देशांकों की संकल्पनाओं के बारे में पढ़ेंगे और उन्हें दो पिंड वाले निकायों पर लागू करेंगे। इसके बाद हम प्रत्येक निकाय के रैखिक और कोणीय संवेग और गतिज ऊर्जा जैसे अन्य गतिक चर निकालेंगे। और फिर हम इन संकल्पनाओं को बहु-कण निकायों की गति के अध्ययन में लागू करेंगे।

बहु-कण निकाय का एक उदाहरण ग्रहों और उनके उपग्रहों, ग्रहिकाओं और पुच्छल तारों से बना सौर-परिवार है। गैस से भरा सिलिंडर भी उस स्थिति में एक बहु-कण निकाय होता है जबकि गैस के अणुओं को बिंदु-द्रव्यमान (point mass) माना जा सकता हो। विस्फोटी तारे, हवाई कलाबाज, हवा में फेंका गया भाला, चाय का प्याला, ग्रह, कार, गेंद आदि सभी ही बहुत सारे कणों से बने हुए निकाय हैं। कुछ निकायों में कणों के बीच की दूरियां नियत रहती हैं जैसे कि धातु के एक ठोस गोले में। इस प्रकार के निकाय की गति के बारे में आप इकाई 9 में पढ़ेंगे। अन्य निकायों में घटक कण एक दूसरे के सापेक्ष गतिमान होते रहते हैं। इस इकाई में हम ऐसे ही जटिल और वास्तविक निकायों की गति को समझने के लिए ज़रूरी मूलभूत संकल्पनाओं की चर्चा करेंगे। लेकिन फिर भी अन्य अनेकों जटिल बहु-कण निकायों, जैसे वायु संहति (air mass) जिससे पृथ्वी का मौसम निर्धारित होता है, आदि की गति का अनुमान लगान काफ़ी कठिन है। ऐसे निकायों पर इन संकल्पनाओं को लागू करने के लिए हमें सुपर कंप्यूटरों की ज़रूरत होती है।

अगली इकाई में हम प्रकीर्णन परिघटना को समझने के लिए यांत्रिकी की संकल्पनाओं को लागू करेंगे।

उद्देश्य

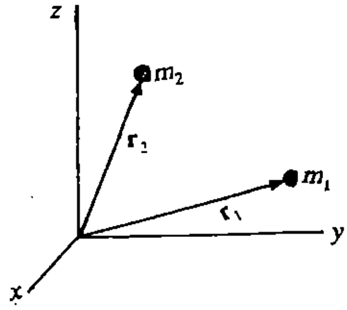
इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- संहति केन्द्र के निर्देशांकों, आपेक्षिक निर्देशांकों, और समानीत द्रव्यमान की परिभाषा दे सकेंगे,
- द्वि-पिंड निकायों की गति से संबंधित प्रश्न हल कर सकेंगे,

- बहु-कण निकाय की गतिज ऊर्जा और रैखिक तथा कोणीय संवेगों के व्यंजक प्राप्त कर सकेंगे और उनकी भौतिक सार्थकता की व्याख्या कर सकेंगे।

7.2 द्वि-पिंड निकायों की गति

सूर्य के चारों ओर ग्रह की गति द्वि-पिंड गति का एक उदाहरण है। इकाई 6 में हमने इस गति को अचल सूर्य के चारों ओर एक पिंड की गति के रूप में निरूपित किया था जो कि वास्तव में एक अनुमान (approximation) ही कहा जायेगा। ऐसा हमने क्यों किया था, यह आप इस इकाई में पढ़ेंगे। लेकिन अगर दोनों पिंडों के द्रव्यमान लगभग बराबर हों, तो हम ऐसा अनुमान लगा ही नहीं सकते। पृथ्वी-चंद्रमा निकाय या एक जैसे दो आवेशों वाले निकाय ऐसे ही निकायों के उदाहरण हैं जहां दोनों पिंडों के द्रव्यमान लगभग बराबर हैं। ऐसे निकायों के लिए हमें परस्पर एक दूसरे के प्रभाव के अधीन गतिमान दोनों पिंडों के गति समीकरण को हल करना होता है। इस भाग में आप इन समीकरणों को हल करने की विधि को समझेंगे।



चित्र 7.1 : द्वि-पिंड निकाय

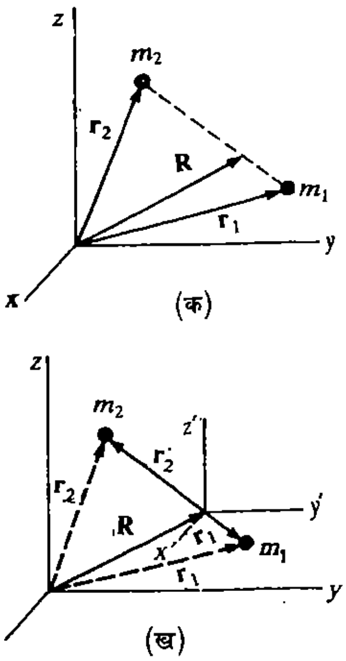
आइए हम क्रमशः द्रव्यमान m_1 और m_2 वाले दो कणों 1 और 2 के द्वि-पिंड निकाय की गति पर विचार करें। मान लीजिए कि जड़त्वीय निर्देश तंत्र (inertial frame of reference) में मूल बिंदु O के सापेक्ष क्षण t पर इनके स्थिति सदिश $\mathbf{r}_1$ और $\mathbf{r}_2$ हैं (चित्र 7.1)। यहां हम यह मानकर चलेंगे कि निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा है। इनकी गति केवल परस्पर क्रिया और प्रतिक्रिया बलों के कारण हो रही है। उदाहरण के लिए, ग्रहों में यह अन्योन्य क्रिया (interaction), गुरुत्वाकर्षण के माध्यम से होती है और अणुओं में अंतरा-अणुक बलों (inter-molecular forces) के माध्यम से। एक जैसे आवेश वाले दो आवेशित पिंड एक दूसरे को प्रतिकर्षित करते हैं। इन सभी स्थितियों में निकायों पर कोई बाह्य बल नहीं लगता।

मान लीजिए कि कण 2 द्वारा कण 1 पर लगा हुआ बल $\mathbf{F}_{21}$ है। तब न्यूटन के तृतीय गति नियम से 1 द्वारा 2 पर लगा हुआ बल $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ है। इन दोनों कणों के गति-समीकरण होंगे :

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21}, \tag{7.1 क}$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \tag{7.1 ख}$$

हमें दोनों कणों का पथ मालूम करने के लिए इन दो अवकल समीकरणों को हल करना होगा। मगर इन दो समीकरणों को हम गति के एक अवकल समीकरण में बदल सकते हैं। गति के इस एक समीकरण को निकालने के लिए हमें निर्देशांकों के एक और समूह का इस्तेमाल करना होगा जिन्हें हम संहति केन्द्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक कहते हैं।



चित्र 7.2 : (क) एक द्वि-पिंड निकाय का संहति केंद्र, (ख) संहति केंद्र के सापेक्ष दोनों कणों के स्थिति सदिश।

7.2.1 संहति केन्द्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक के पदों में गति के समीकरण

चित्र 7.2 क देखिए। हम इस निकाय के **संहति केन्द्र** (centre-of mass) की स्थिति इस तरह परिभाषित करते हैं

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{7.2}$$

R को संहति केन्द्र का निर्देशांक भी कहा जाता है। m_2 के सापेक्ष m_1 आपेक्षिक निर्देशांक को हम इस तरह परिभाषित करते हैं

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \tag{7.3}$$

संहति केन्द्र के सापेक्ष कणों के स्थिति सदिश (चित्र 7.2 ख) हैं

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \frac{m_2}{M}\mathbf{r}, \tag{7.4 क}$$

$$\mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = -\frac{m_1}{M}\mathbf{r}. \tag{7.4 ख}$$

जहां $M = m_1 + m_2$.

समीकरण 7.2 संहति केन्द्र निर्देशांक (centre-of-mass coordinate) की परिभाषा है। इन्हें समीकरण 7.3 के आपेक्षिक निर्देशांक (relative coordinate) के साथ लेने पर एक नया निर्देश तंत्र परिभाषित होता है। इस तंत्र का प्रयोग करके हम द्वि-पिंड गति के बारे में पढ़ेंगे। आइए अब हम गति समीकरणों को इन निर्देशांकों के पदों में लिखें।

समीकरण 7.1 क और समीकरण 7.1 ख को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0}.$$

$$\text{या } \frac{d^2}{dt^2}(m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2) = \mathbf{0}$$

और, समीकरण 7.2 से हमें प्राप्त होता है

$$\frac{d^2}{dt^2}\{ (m_1 + m_2) \mathbf{R} \} = \mathbf{0}$$

$$\text{या } M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{0}. \qquad (7.5\text{ क})$$

और, समीकरण 7.1 क और समीकरण 7.1 ख से हमें प्राप्त होता है

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1}, \quad \ddot{\mathbf{r}}_2 = -\frac{\mathbf{F}_{21}}{m_2}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2 = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{21}$$

समीकरण 7.3 से हम देख सकते हैं कि $\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{r}}_1 - \ddot{\mathbf{r}}_2$.

$$\therefore \; \ddot{\mathbf{r}} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{21}. \qquad (7.5\text{ ख})$$

आइए अब हम एक नई राशि μ लें ताकि

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

$$\text{अर्थात् } \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \qquad (7.6)$$

μ को निकाय का **समानीत द्रव्यमान** (reduced mass) कहा जाता है। अतः समीकरण 7.5 ख हो जाता है

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}.$$

इस तरह, समीकरण 7.1 क और समीकरण 7.1 ख द्वारा दिए गए 1 और 2 कणों के गति समीकरण हो जाते हैं

$$M \ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{0}. \qquad (7.7)$$

$$\text{और } \mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}. \qquad (7.8)$$

आइए अब हम इन दो समीकरणों का अर्थ समझें।

संहति केन्द्र की गति

समीकरण 7.7 संहति केन्द्र की गति निर्धारण करता है। इसे समाकलित करने पर प्राप्त होता है

$$M \dot{\mathbf{R}} = \text{अचर} \qquad (7.9)$$

चूंकि M एक अचर है, इसलिए $\dot{\mathbf{R}}$ = एक अचर यानि कि संहति केन्द्र एक अचर वेग से गति करता है। आइए अब हम एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र लें जो कि वर्तमान तंत्र के सापेक्ष वेग $\dot{\mathbf{R}}$ से गति कर रहा हो। इकाई 1 के समीकरण 1.37 को लागू करने पर हम यह पाते हैं कि इस नए तंत्र में संहति केन्द्र विरामावस्था में होगा।

इस तरह हमने एक ऐसा जड़त्वीय तंत्र प्राप्त कर लिया है जिसमें संहति केन्द्र विरामावस्था में है। इस प्रकार के निर्देश तंत्र को **संहति केन्द्र निर्देश तंत्र** (centre-of-mass frame of reference) कहा जाता है। इसका मूल बिंदु संहति केन्द्र पर होता है। इस निर्देश तंत्र में हमें समीकरण 7.7 को हल करने की ज़रूरत नहीं होती। इस तरह हम यह पाते हैं कि संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में निकायों की गति निर्धारित करना काफ़ी सुविधाजनक होता है। समीकरण 7.4 क और समीकरण 7.4 ख के अनुसार संहति केन्द्र के सापेक्ष 1 और 2 के स्थिति सदिश $\mathbf{r}_1'$ और $\mathbf{r}_2'$ हैं। अब अगर हमें किसी अन्य निर्देश तंत्र में हल निकालना हो तो हम समीकरण 7.4 क और समीकरण 7.4 ख की मदद से $\mathbf{r}_1$ और $\mathbf{r}_2$ का मान $\mathbf{r}_1'$, $\mathbf{r}_2'$ और $\mathbf{R}$ के पदों में निकाल सकते हैं। इनका प्रयोग वेग $\dot{\mathbf{r}}_1$ और $\dot{\mathbf{r}}_2$ ज्ञात करने के लिए भी किया जा सकता है।

आपेक्षिक गति

संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में हमें केवल समीकरण 7.8 को हल करना होता है। यह बल $\mathbf{F}_{21}$ के अधीन गतिमान द्रव्यमान μ वाले एक कल्पित (fictitious) कण का गति समीकरण है। इस अवकल समीकरण (differential equation) को हल करने पर हमें $\mathbf{r}(t)$ प्राप्त होता है जो कण 2 के सापेक्ष कण 1 की आपेक्षिक गति निर्धारित करता है। समीकरण 7.4 क और समीकरण 7.4 ख की मदद से $\mathbf{r}_1$ और $\mathbf{r}_2$ निकाल कर हम दोनों कणों (1 और 2) के पथ भी निर्धारित कर सकते हैं।

इस तरह संहति केन्द्र की संकल्पना को लागू करने से हमें दो द्वितीय कोटि अवकल-समीकरणों (7.1 क और 7.1 ख) को हल करने के बजाय केवल एक समीकरण 7.8 को ही हल करना पड़ेगा। अगर हम इस एक पिंड की गति को निर्धारित कर लें तो हम द्वि-पिंड निकाय की गति भी निर्धारित कर सकते हैं। इस तरह हम यह पाते हैं कि द्वि-पिंड निकाय की गति एक-पिंड निकाय की गति के तुल्य है। अब अगर आपको दोनों पिंडों का पारस्परिक क्रिया बल मालूम हो तो उस निकाय पर आप खंड 1 में दी हुई एक कण की गति से जुड़ी सभी संकल्पनाओं और नियमों को लागू कर सकते हैं। और अगर पारस्परिक क्रिया बल केन्द्रीय संरक्षी बल हो तो इकाई 6 में दी गई संकल्पनाएं लागू होंगी। ध्यान रहे कि यह ज़रूरी नहीं है कि यह पारस्परिक क्रिया बल सदा ही केन्द्रीय बल हो, जैसा कि आपने इकाई 6 के बोध प्रश्न 1 (ग) में हल किया है।

बोध प्रश्न 1

(क) संबंध 7.4 क और 7.4 ख सत्यापित कीजिए।

(ख) उस निकाय के लिए समीकरण 7.1 क और समीकरण 7.1 ख लिखिए जिस पर पारस्परिक क्रिया बलों के साथ-साथ एक बाह्य बल भी लग रहा हो। संहति केन्द्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक का प्रयोग करके इन समीकरणों के परिवर्तित रूप लिखिए। क्या तब भी आपको इस निकाय के तुल्य एक-पिंड गति समीकरण मिलता है?

(ग) अगर (ख) में दिया गया बाह्य बल गुरुत्व बल हो तो क्या होगा?

इस बोध प्रश्न को हल करने पर यह बात आपने ज़रूर देखी होगी कि द्वि-पिंड प्रश्न को तुल्य एक-पिंड प्रश्न में तभी बदला जा सकता है जबकि निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा होता। हां, गुरुत्व बल इसका एक अपवाद है।

आइए अब हम एक ऐसा निकाय लें जिसमें एक पिंड का द्रव्यमान, मान लीजिए कि m_1, दूसरे पिंड के द्रव्यमान की तुलना में काफ़ी अधिक हो, जिससे कि $\frac{m_2}{m_1} << 1$. तब

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \simeq m_2, \tag{7.10 क}$$

$$\text{और } \mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \frac{m_2}{m_1}\mathbf{r}_2}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \simeq \mathbf{r}_1. \tag{7.10 ख}$$

अतः समानीत द्रव्यमान हल्के द्रव्यमान m_2 के बराबर है। और संहति केन्द्र की स्थिति और अधिक द्रव्यमान m_1 की स्थिति लगभग एक ही होती है। तब संहति केन्द्र की स्थिति को नियत माना जा सकता है। इस तरह हम यह पाते हैं कि इस द्वि-पिंड निकाय की गति भारी पिंड के प्रति हल्के पिंड की गति के तुल्य होती है। इस संबंध में आइए हम सूर्य की परिक्रमा कर रहे ग्रह वाला उदाहरण लें

इकाई 6 में सैद्धांतिक रूप में हमें समीकरण 7.8 को हल करके ग्रह की कक्षा निर्धारित करनी चाहिए थी। पर, वहां पर हमने सूर्य को अचल माना और सूर्य के सापेक्ष ग्रह का गति समीकरण हल किया। क्या इस विधि की आलोचना नहीं की जानी चाहिए? हम जानते हैं कि किसी भी ग्रह की तुलना में सूर्य का द्रव्यमान बहुत अधिक है, यहां तक कि सबसे विशाल ग्रह बृहस्पति के लिए अनुपात $\frac{m_2}{m_1}$ का मान 2.5×10^{-4} होता है। अतः आप समीकरण 7.10 क और 7.10 ख लागू करके यह देख सकते हैं कि इकाई 6 में अपनायी गई विधि काफ़ी सही है।

फिर भी, जब एक कण का द्रव्यमान दूसरे कण से बहुत अधिक हो, तो भी हमें उसकी गति को ध्यान में रखना चाहिए और समीकरण 7.8 का ही प्रयोग करना चाहिए। ध्यान दीजिए कि अगर

बल $\mathbf{F}_{21}$ के व्यंजक में m_1 और m_2 हों तो उन्हें उसी तरह रहने देना चाहिए और उनके स्थान पर μ प्रतिस्थापित नहीं करना चाहिए। आइए अब एक उदाहरण में हम ग्रहीय गति का विश्लेषण समीकरण 7.8 के प्रयोग से और इकाई 6 में अपनायी गई विधि से करें और इन दोनों विधियों की तुलना करें।

उदाहरण 1

द्रव्यमान m वाले ग्रह और द्रव्यमान M वाले सूर्य के द्वि-पिंड निकाय के लिए समीकरण 7.8 लिखिए। और यह व्याख्या कीजिए कि किस तरह इकाई 6 के समीकरण 6.17 (केपलर के तृतीय नियम) का रूप बदल जाएगा।

मान लीजिए कि सूर्य के सापेक्ष ग्रह का आपेक्षिक निर्देशांक $\mathbf{r}$ है। तब समीकरण 7.8 हो जाएगा

$$\mu\,\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GMm}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}},$$

$$\text{जहां } \mu = \frac{Mm}{M+m}$$

$$\text{अतः } \mu\,\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_0\,\mu}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}, \text{ जहां } M_0 = M + m = \text{ ग्रह के द्रव्यमान और सूर्य के द्रव्यमान का जोड़}$$

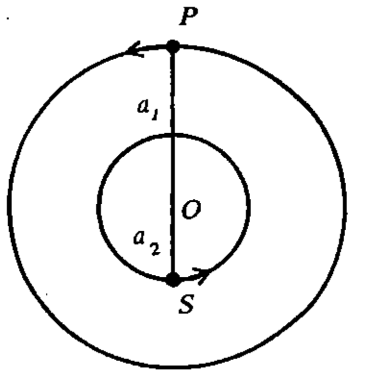
$$\therefore\ \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{GM_0}{r^2}\,\hat{\mathbf{r}}.$$

यह समीकरण इकाई 6 के समीकरण 6.9 ख के समान है। अंतर केवल यह है कि यहां M के स्थान पर M_0 है। अतः इस समीकरण को हम ठीक उसी तरह से हल कर सकते हैं जिस तरह से हमने भाग 6.3 में हल किया था। तब हमें समीकरण 6.17 के स्थान पर निम्नलिखित प्राप्त होगा

$$T^2 = \frac{4\,\pi^2 a_0^3}{GM_0}$$

जहां a_0 आपेक्षिक कक्षा का अर्ध दीर्घ अक्ष है (चित्र 7.3) और $M_0 = M + m$.

इस तरह हम यह पाते हैं कि कक्षीय आवर्त-काल केवल अर्ध-दीर्घ अक्ष पर ही निर्भर नहीं करता बल्कि ग्रह के द्रव्यमान पर भी निर्भर करता है। अतः केपलर का तृतीय नियम पूरी तरह सही नहीं है।



चित्र 7.3 : सूर्य और एक ग्रह की कक्षाएं।
$OP = a_1$, $OS = a_2$,
$SP = a_1 + a_2 = a_0$

अब आप इन संकल्पनाओं पर आधारित एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 2

जाने पहचाने अत्यधिक द्रव्यमान वाले तारों में एक तारा, एक युग्म तारा, (binary star) है यानि कि इसमें दो तारे हैं जो गुरुत्वाकर्षण के कारण एक दूसरे से बंधे हुए हैं। स्पेक्ट्रमी (spectroscopic) विश्लेषण से यह पता चलता है कि

(क) अपने संहति केन्द्र के प्रति तारों का परिक्रमण काल 14.4 दिन (1.2×10^6 s) है।

(ख) प्रत्येक घटक का वेग लगभग 220 km s^{-1} है। चूंकि दोनों घटकों के वेग लगभग बराबर और विपरीत हैं, अतः हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि वे संहति केन्द्र से लगभग समान दूरी पर हैं यानि कि उनके द्रव्यमान लगभग बराबर हैं।

(ग) कक्षा लगभग वृत्तीय है।

इन आंकड़ों से युग्म तारे का समानीत द्रव्यमान और दोनों घटक तारों के बीच की दूरी निकालिए।

इस तरह, हमने यह देखा कि द्वि-पिंड गति को संहति केन्द्र की गति और आपेक्षिक गति के रूप में अभिव्यक्त किया जा सकता है। इन स्थितियों में विभिन्न शुद्धगतिकीय राशियों जैसे कि दोनों पिंडों की गतिज ऊर्जा और रैखिक तथा कोणीय संवेग आदि को संहति केन्द्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक के पदों में व्यक्त किया जा सकता है। आइए देखें कि यह कैसे किया जाता है।

7.2.2 रैखिक तथा कोणीय संवेग और गतिज ऊर्जा

इकाई 2 के समीकरण 2.20 से, चित्र 7.1 के द्वि-पिंड निकाय का संपूर्ण रैखिक संवेग होता है

$\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2$, जहां $\mathbf{p}_1$ और $\mathbf{p}_2$ क्रमशः 1 और 2 के रैखिक संवेग हैं, अर्थात्

$$\mathbf{p} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2. \qquad (7.11 \text{ क})$$

समीकरण 7.2 को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$(m_1 + m_2)\dot{\mathbf{R}} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2$$

$$\text{या } \mathbf{p} = M\dot{\mathbf{R}} \qquad (7.11 \text{ ख})$$

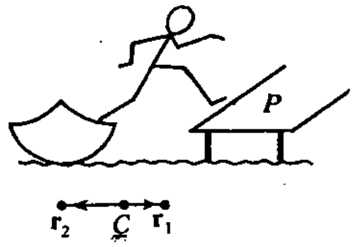
समीकरण 7.9 के अनुसार $M\dot{\mathbf{R}}$ अर्थात् $\mathbf{p}$ एक अचर होता है बशर्ते निकाय पर कोई बाह्य बल न लग रहा हो। इस तरह हमें द्वि-पिंड निकाय का रैखिक संवेग-संरक्षण नियम प्राप्त होता है जो यह है :

जब एक द्वि-पिंड निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लगता तो उसका संपूर्ण रैखिक संवेग अचर बना रहता है।

यदि द्वि-पिंड निकाय का द्रव्यमान अचर बना रहता हो तो उपरोक्त कथन से हमें निम्नलिखित कथन प्राप्त होता है :

जब एक द्वि-पिंड निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लगता तो उसके संहति केन्द्र का वेग अचर बना रहता है।

आइए अब हम इस संकल्पना पर आधारित एक सरल उदाहरण हल करें।



चित्र 7.4

उदाहरण 2

70 kg वज़न का एक आदमी 35 kg वज़न की नाव पर से, जो प्रारंभ में विरामावस्था में है, झील पर बने प्लेटफ़ार्म *P* पर उतरने की कोशिश करता है (चित्र 7.4)। अगर वह प्लेटफ़ार्म को पकड़े बिना नाव के एक ओर 1m दूरी का कदम रखने की कोशिश करे तो क्या होगा?

क्योंकि नाव में कोई नौतल (keel) नहीं है, इसलिए हम यह मान सकते हैं कि उस थोड़े से समय में जबकि यह क्रिया होती है, नाव पर पानी की प्रतिक्रिया उपेक्षणीय है। इस तरह द्वि-पिंड निकाय (आदमी और नाव) पर नेट बाह्य बल शून्य होता है और निकाय के संहति केन्द्र का वेग अचर बना रहता है। चूंकि आदमी के नाव से कूदने से पहले निकाय का संहति केन्द्र विरामावस्था में था अतः इसे विरामावस्था में ही बना रहना चाहिए, यानि कि

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} = \text{एक अचर}$$

जहां m_1, m_2 और $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, क्रमशः आदमी और नाव के द्रव्यमान और स्थिति सदिश हैं। यदि हम संहति केन्द्र की स्थिति को निर्देश तंत्र का एक मूल बिंदु मान लें जैसा कि चित्र 7.2 ख में दिखाया गया है, तो $\mathbf{R} = \mathbf{0}$, अर्थात्

$$m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 = \mathbf{0}.$$

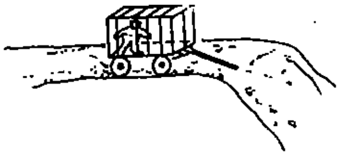
m_1, m_2 और $\mathbf{r}_2$ के मानों को प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

(70 kg) (1 m) $\hat{\mathbf{r}}_1 = -$ (35 kg) $\mathbf{r}_2$, जहां $\hat{\mathbf{r}}_1$, $\mathbf{r}_1$ की दिशा में एकक सदिश है।

या $\mathbf{r}_2 = -2m\hat{\mathbf{r}}_1$

अतः नाव आदमी की विपरीत दिशा में 2m की दूरी तक चली जाएगी। इसलिए आदमी को या तो किसी चीज को पकड़े रहना होगा या नाव को और नज़दीक लाना होगा, नहीं तो उसके झील में गिर जाने का ख़तरा बना रहेगा।

अब आप एक बोध प्रश्न हल कर सकते हैं।



चित्र 7.5

बोध प्रश्न 3

मान लीजिए कि सपने में आप यह देखते हैं कि आप एक भृगु (cliff) के किनारे पर एक पहियेदार हलके पिंजड़े में बंद हैं (चित्र 7.5)। मान लें कि आप से और पिंजड़े से बने निकाय पर कोई बाहरी बल नहीं लग रहा है। आप पिंजड़े को किनारे से दूर ले जाने के लिए क्या करेंगे? वह कौन सा काम है जो आप को नहीं करना चाहिए? यदि आपका वज़न 60 kg हो और पिंजड़े का वज़न 90 kg और उसकी लंबाई 2m हो, तो आप पिंजड़े को कितनी दूर हटा सकते हैं?

अभी तक हमने दो पिंडों के निकाय पर रैखिक संवेग पर चर्चा की है। आइए अब हम द्वि-पिंड निकाय के कोणीय संवेग पर विचार करें।

द्वि-पिंड निकाय का संपूर्ण कोणीय संवेग प्रत्येक पिंड के कोणीय संवेग का सदिश योग होता है :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2$$
$$= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2$$

या $\mathbf{L} = m_1\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2$.

समीकरण 7.4 क और समीकरण 7.4 ख से $\mathbf{r}_1$ और $\mathbf{r}_2$ के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\mathbf{L} = m_1\left(\mathbf{R} + \frac{m_2}{M}\mathbf{r}\right) \times \mathbf{v}_1 + m_2\left(\mathbf{R} - \frac{m_1}{M}\mathbf{r}\right) \times \mathbf{v}_2$$

$$= \mathbf{R} \times (m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2) + \frac{m_1m_2}{M}(\mathbf{r} \times \mathbf{v}_1 - \mathbf{r} \times \mathbf{v}_2)$$

समीकरणों 7.3, 7.5 और 7.11 को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\mathbf{L} = M(\mathbf{R} \times \dot{\mathbf{R}}) + \mu\mathbf{r} \times \mathbf{v}$$

$$\therefore\ \mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mu\mathbf{r} \times \mathbf{v}, \tag{7.12}$$

जहां $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}$ और $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2$.

अब आप एक बोध प्रश्न हल करने की कोशिश कर सकते हैं। प्रश्न के पहले भाग का संबंध समीकरण 7.12 से है और दूसरे भाग का संबंध द्वि-पिंड निकाय की गतिज ऊर्जा से है।

बोध प्रश्न 4

(क) समीकरण 7.12 की मदद से यह सिद्ध कीजिए कि द्वि-पिंड निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित बना रहता है, बशर्ते उस पर कोई बाहरी बल न लग रहा हो और वे केवल अपने पारस्परिक क्रिया बल, जो कि केन्द्रीय है, के अधीन ही गतिमान होते हों।

(ख) द्वि-पिंड निकाय की गतिज ऊर्जा को

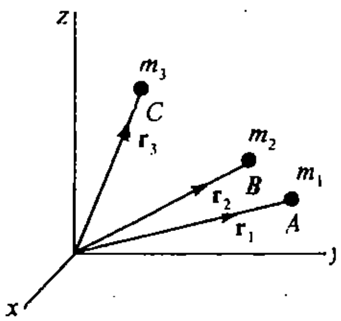
$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{r}_2^2$$

के रूप में लिखिए और उपयुक्त समीकरणों का प्रयोग करके यह दिखाइए कि

$$T = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\dot{r}^2. \tag{7.13}$$

अभी तक हमने द्वि-पिंड निकाय की गति का विश्लेषण किया है। इस विश्लेषण से हमने यह समझा है कि संहति केन्द्र निर्देशांक और आपेक्षिक निर्देशांक ले लेने पर इस निकाय का अध्ययन बहुत आसान हो जाता है। इस तरह हम अलग-अलग पिंडों की गति को संहति केन्द्र के सापेक्ष एक पिंड की गति के तुल्य मान सके हैं। क्या हम इस विश्लेषण को बहु-कण निकाय पर भी लागू कर सकते हैं? आइए अब इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करें।

7.3 बहु-कण निकायों की गतिकी



चित्र 7.6 : त्रि-पिंड निकाय

इसके लिए आइए शुरू में हम एक तीन कण वाला निकाय लें। मान लीजिए कि एक दिए हुए निर्देश तंत्र में मूल बिंदु O के सापेक्ष क्षण t पर तीनों कणों के द्रव्यमान क्रमशः m_1, m_2 और m_3 हैं और स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ और $\mathbf{r}_3$ हैं (चित्र 7.6)। पहले हम इस त्रि-पिंड निकाय (three-body system) की गति का विश्लेषण करेंगे और फिर प्रत्येक परिणाम को एक N-कण निकाय के लिए लिखेंगे। त्रि-पिंड निकाय के संहति केन्द्र के स्थिति सदिश की परिभाषा होगी

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \sum_{i=1}^{3}\frac{m_i\mathbf{r}_i}{M} \tag{7.14 क}$$

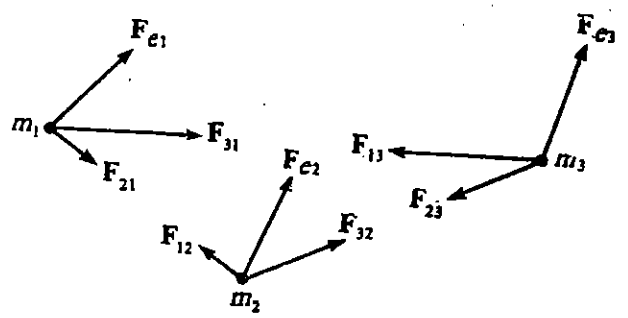
जहां, जैसा कि आप जानते हैं कि Σ समीकरण 7.14 क के अंश के तीन पदों के जोड़ को प्रकट करता है और

$$M = m_1 + m_2 + m_3 = \sum_{i=1}^{3} m_i.$$

i वें कण के सापेक्ष j वें कण का आपेक्षिक निर्देशांक होता है

$$\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i = -\mathbf{r}_{ji}. \tag{7.14 ख}$$

आइए अब हम इस निकाय के कण 1 का गति समीकरण लिखें। सामान्यतः इस कण पर एक बाह्य बल $\mathbf{F}_{e1}$ और निकाय के अन्य दो कणों के पारस्परिक क्रिया बल लग सकते हैं (चित्र 7.7).



चित्र 7.7 : तीन कणों वाले निकाय पर लग रहे बल।

इसलिए कण 1 पर लग रहा नेट बल होगा

$$\mathbf{F}_1 = \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}. \tag{7.15}$$

चूंकि कण स्वयं पर कोई बल नहीं लगाता, इसलिए समीकरण 7.15 में पद $\mathbf{F}_{11}$ नहीं है। तब कण 1 का गति-समीकरण हो जाता है

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31}. \tag{7.16}$$

कण 2 और कण 3 के गति समीकरण निकालने के लिए अब आप नीचे दिया गया बोध प्रश्न हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 3

(क) चित्र 7.7 के त्रि-पिंड निकाय के लिए दूसरे कणों के सापेक्ष प्रत्येक कण का आपेक्षिक निर्देशांक लिखिए।

(ख) मान लीजिए कि कण 2 और कण 3 पर लग रहे बाह्य बल क्रमशः $\mathbf{F}_{e2}$ और $\mathbf{F}_{e3}$ हैं। इन दो कणों के गति समीकरण लिखिए।

अब क्योंकि आपने अन्य दो कणों के गति समीकरण लिख लिए हैं, इसलिए आइए अब हम सभी तीन कणों के गति समीकरणों को जोड़ें। ऐसा करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\begin{aligned} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 + m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 = {} & \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} \\ & + \mathbf{F}_{e2} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} \\ & + \mathbf{F}_{e3} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}. \end{aligned}$$

अब, क्योंकि प्रत्येक कण-युग्म (pair of particles) के बीच पारस्परिक क्रिया बल बराबर और विपरीत हैं, इसलिए

$\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21},\ \mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31},\ \mathbf{F}_{23} = -\mathbf{F}_{32}$ और

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 + m_3\ddot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{e2} + \mathbf{F}_{e3}$$

$$\text{या } \sum_{i=1}^{3} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{3} \mathbf{F}_{ei} = \mathbf{F}_e, \tag{7.17 क}$$

जहां $\mathbf{F}_e$ निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल है। अब, यदि हम समीकरण 7.14 क को समय के सापेक्ष दो बार अवकलित करें, तो हमें $M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{n} m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$ प्राप्त होगा, बशर्ते m_1, m_2, m_3 अचर हों। तब समीकरण 7.17 क हो जाएगा

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_e \tag{7.17 ख}$$

यह बाह्य बल $\mathbf{F}_e$ के अधीन $\mathbf{R}$ पर स्थित द्रव्यमान M वाले एकल कण का गति समीकरण है। इस तरह संहति केन्द्र की संकल्पना की मदद से हम अलग अलग कणों के बजाय पूरे निकाय पर न्यूटन का द्वितीय नियम लागू कर सकते हैं। जहाँ तक इस पूरे निकाय की गति का सवाल है यह कुछ इस तरह गति करता है मानो इसका पूरा द्रव्यमान संहति केन्द्र पर केन्द्रित है। लेकिन

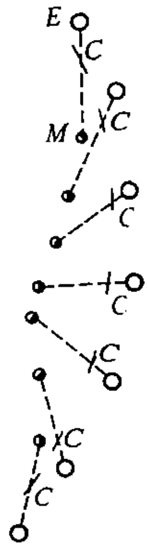
समीकरण 7.17 क और समीकरण 7.17 ख को लागू करके हम तीनों पिंडों की अलग-अलग गति का व्यापक वैश्लेषिक हल (general analytic solution) नहीं जान सकते।

फिर भी, हम संहति केन्द्र की संकल्पना का प्रयोग त्रि-पिंड निकाय की गति के अनेक महत्वपूर्ण पहलुओं की व्याख्या करने के लिए कर सकते हैं। इसे हम पृथ्वी, चन्द्रमा और सूर्य वाले त्रि-पिंड निकाय का उदाहरण लेकर समझने की कोशिश करेंगे।

उदाहरण 3 : त्रि-पिंड निकाय – पृथ्वी, चन्द्रमा और सूर्य

यहाँ आप द्वि-पिंड निकाय के अध्ययन को याद कीजिए। अगर हम केवल पृथ्वी-चंद्रमा (E.M.) निकाय लें, तो दोनों ही पिंड अपने संहति केन्द्र के प्रति दीर्घवृत्तीय गति करेंगे (चित्र 7.8)। आइए अब हम यह देखें कि अगर इस निकाय में सूर्य को भी शामिल कर लिया जाये तो क्या होता है। पृथ्वी-चंद्रमा-सूर्य निकाय के संहति केन्द्र का स्थिति सदिश है

$$\mathbf{R} = \frac{M_e\,\mathbf{R}_e + M_m\,\mathbf{R}_m + M_s\,\mathbf{R}_s}{M_e + M_m + M_s}, \qquad (7.18)$$



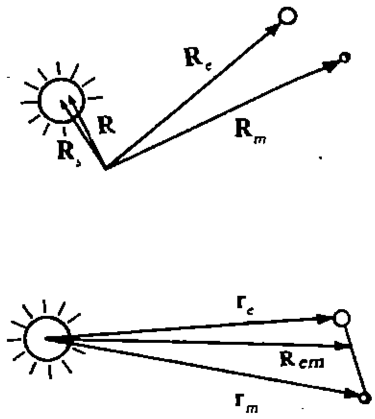
चित्र 7.8 : पृथ्वी-चंद्रमा निकाय अपने संहति केंद्र के प्रति दीर्घवृत्तीय गति करता है।

जहां M_e, M_m, M_s और $\mathbf{R}_e, \mathbf{R}_m, \mathbf{R}_s$ पृथ्वी, चंद्रमा और सूर्य के क्रमशः द्रव्यमान और स्थिति सदिश हैं। हर और अंश को M_s से भाग देकर हम यह दिखा सकते हैं कि $\mathbf{R} \simeq \mathbf{R}_s$ क्योंकि M_e और M_m की तुलना में M_s काफ़ी अधिक है। इस तरह, इस त्रि-पिंड निकाय का संहति केन्द्र लगभग सूर्य के केन्द्र पर ही स्थित है (चित्र 7.9 क)।

अब क्योंकि अन्य खगोलीय पिंडों (celestial bodies) के गुरुत्वाकर्षण के कारण लगे हुए बाह्य बल उपेक्षणीय हैं, इसलिए संहति केंद्र का वेग अचर होगा। भाग 7.2.1 में हमने यह देखा है कि संहति केन्द्र के वेग से गतिमान जड़त्वीय निर्देश तंत्र में संहति केन्द्र विरामावस्था में होगा। इस तरह, ऐसे जड़त्वीय तंत्र में, प्रभावी रूप से सूर्य विरामावस्था में होता है। तब हम इस जड़त्वीय निर्देश तंत्र का प्रयोग कर सकते हैं और इसका मूल बिंदु सूर्य के केन्द्र पर ले सकते हैं जिससे कि $\mathbf{R} = 0$ (चित्र 7.9 ख)। तब हमें सूर्य के प्रति पृथ्वी और चन्द्रमा की गति पर ही विचार करना होगा।

मान लीजिए कि $\mathbf{r}_e$ और $\mathbf{r}_m$ सूर्य के सापेक्ष पृथ्वी और चन्द्रमा की स्थितियां हैं। इनके संहति केन्द्र का स्थिति सदिश है

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{M_e\,\mathbf{r}_e + M_m\,\mathbf{r}_m}{M_e + M_m}.$$



चित्र 7.9 : पृथ्वी-चन्द्रमा-सूर्य निकाय

पृथ्वी-चन्द्रमा निकाय पर लगने वाला बाह्य बल सूर्य का गुरुत्वाकर्षण है जो है

$$\mathbf{F} = -GM_s\left(\frac{M_e}{r_e^2}\hat{\mathbf{r}}_e + \frac{M_m}{r_m^2}\hat{\mathbf{r}}_m\right)$$

संहति केन्द्र का गति समीकरण है

$$(M_e + M_m)\,\ddot{\mathbf{R}}_{cm} = \mathbf{F}.$$

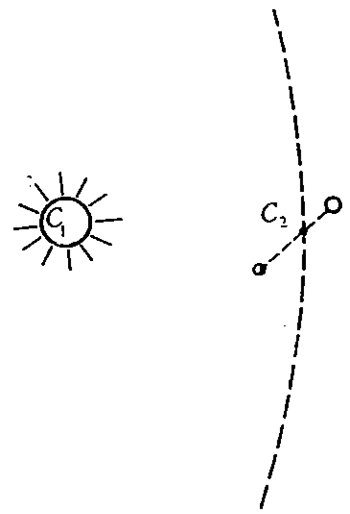
भौतिक स्थिरांकों की सारणी से आप यह देख सकते हैं कि सूर्य से पृथ्वी और चन्द्रमा की दूरियों की तुलना में पृथ्वी और चंद्रमा के बीच की दूरी काफ़ी कम है। इसलिए हम यह मान सकते हैं कि

$$\mathbf{r}_e \simeq \mathbf{r}_m \simeq \mathbf{R}_{cm}$$

इस सन्निकटन (approximation) से संहति केन्द्र का गति समीकरण हो जाता है

$$(M_e + M_m)\,\ddot{\mathbf{R}}_{cm} \simeq -\frac{GM_s}{R_{cm}^2}\,(M_e\,\hat{\mathbf{r}}_e + M_m\,\hat{\mathbf{r}}_m)$$

$$= -\frac{GM_s}{R_{cm}^2}\,(M_e + M_m)\,\hat{\mathbf{R}}_{cm}$$



चित्र 7.10 : पृथ्वी-चन्द्रमा-सूर्य निकाय का संहति केंद्र (C_1) सूर्य केंद्र पर स्थित है। पृथ्वी-चन्द्रमा निकाय का संहति केंद्र (C_2) सूर्य के चारों ओर गति करता है।

इस तरह हम यह पाते हैं कि सूर्य के प्रति पृथ्वी-चन्द्रमा निकाय का संहति केन्द्र द्रव्यमान $(M_e + M_m)$ वाले एक ग्रह की तरह परिक्रमा करता है। इकाई 6 में प्रयुक्त विधि से यह निकाला जा सकता है कि इसकी कक्षा दीर्घवृत्तीय है (देखिए चित्र 7.10)।

N-कण निकाय

आइए अब हम द्रव्यमान $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$ वाले N कणों के निकाय की गति के बारे में पढ़ें। मान लें कि मूल बिंदु O के सापेक्ष क्षण t पर इनके स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots, \mathbf{r}_N$ हैं। इस

N-कण निकाय के संहति केन्द्र का स्थिति सदिश होगा

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + m_3 \mathbf{r}_3 + ... + m_N \mathbf{r}_N}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_N} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i M \tag{7.19}$$

जहां $M = \sum_{i=1}^{N} m_i$.

मान लीजिए कि $\mathbf{F}_{e1}, \mathbf{F}_{e2}, ..., \mathbf{F}_{eN}$ क्रमशः कण 1, 2, ..., N पर लग रहे बाह्य बल हैं। उन कणों के बीच पारस्परिक क्रिया बल भी लगते हैं। अब हम कण निकाय के सभी सदस्यों के गति समीकरण लिख सकते हैं। प्रत्येक कण पर एक बाह्य बल और अन्य $N-1$ कणों के कारण पारस्परिक क्रिया बल लग रहे हैं। इस तरह

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 &= \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{31} + \mathbf{F}_{41} + ... + \mathbf{F}_{N1} + \mathbf{F}_{e1} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 &= \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32} + \mathbf{F}_{42} + ... + \mathbf{F}_{N2} + \mathbf{F}_{e2} \\ m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 &= \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23} + \mathbf{F}_{43} + ... + \mathbf{F}_{N3} + \mathbf{F}_{e3} \\ m_4 \ddot{\mathbf{r}}_4 &= \mathbf{F}_{14} + \mathbf{F}_{24} + \mathbf{F}_{34} + ... + \mathbf{F}_{N4} + \mathbf{F}_{e4} \end{aligned} \tag{7.20}$$

$$m_N \ddot{\mathbf{r}}_N = \mathbf{F}_{1N} + \mathbf{F}_{2N} + \mathbf{F}_{3N} + \mathbf{F}_{4N} + ... + \mathbf{F}_{eN}$$

चूंकि पारस्परिक क्रिया बल न्यूटन के तृतीय नियम का पालन करते हैं, इसलिए

$\mathbf{F}_{ij} = -\mathbf{F}_{ji}$, $i = 1, 2, 3, ..., N$ और $j = 1, 2, 3, ..., N$ के लिए

इस तरह, $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}, \mathbf{F}_{13} = -\mathbf{F}_{31}, ..., \mathbf{F}_{1N} = -\mathbf{F}_{N1}$ आदि।

अब यदि हम इन सभी समीकरणों को जोड़ें तो कणों के पारस्परिक अन्योन्यक्रिया वाले पद कट जाते हैं। इसलिए हमें प्राप्त होता है

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + ... + m_N \ddot{\mathbf{r}}_N = \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{e2} + ... + \mathbf{F}_{eN} \tag{7.21 क}$$

संकलन संकेत (summation notation) $\sum$ की सहायता से हम समीकरण 7.21 क को लिख सकते हैं

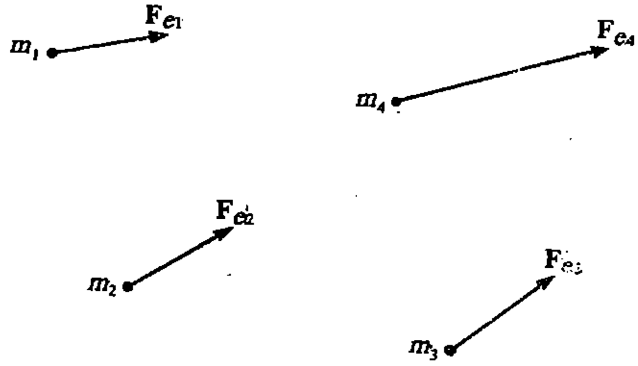
$$\sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{i=1}^{N} \mathbf{F}_{ei} = \mathbf{F}_e, \tag{7.21 ख}$$

जहां $\mathbf{F}_e$, N- कण निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल है।

पहले पहल देखने पर ये समीकरण आपको कुछ कठिन मालूम पड़ सकते हैं। लेकिन आप घबराइए मत। इन्हें याद करने की ज़रूरत नहीं है। इनको लिखने में जिस तर्क का इस्तेमाल हुआ है उसे समझने की कोशिश कीजिए। इसके लिए आप बोध प्रश्न 6 को हल कीजिए।

बोध प्रश्न 6

चित्र 7.11 में दिए गए चार कणों वाले निकाय के प्रत्येक सदस्य पर परस्पर क्रिया और प्रतिक्रिया बलों को खींच कर दिखाइए और इस निकाय का गति समीकरण लिखिए।



चित्र 7.11 : चार कणों का निकाय

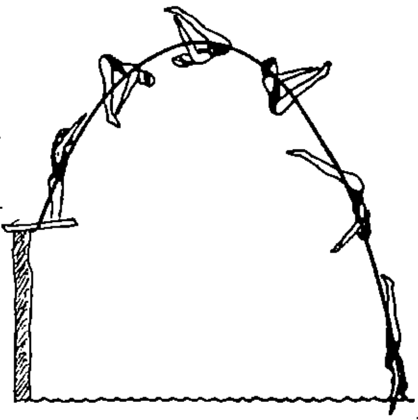
हम समीकरण 7.19 को दो बार अवकलित करके

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$$

प्राप्त कर सकते हैं जिससे कि समीकरण 7.21 ख हो जाता है

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_e. \tag{7.22}$$

यह निकाय के संहति केन्द्र का गति समीकरण है। जब तक हमारी रुचि केवल पूरे पिंड की गति में है तब तक हम इस निकाय के हर कण की जगह संहति केन्द्र पर स्थित द्रव्यमान M वाले एक कण की गति की व्याख्या कर सकते हैं। चित्र 7.12 में आप बाह्य गुरुत्व बल के लिए इस परिणाम का एक उदाहरण देख सकते हैं। इस स्थिति में आप भाग 7.6 में बोध प्रश्न 1 के हल में दी गई समीकरण 7.35 को लागू कर सकते हैं। इस समीकरण के हल से यह पता चलता है कि गुरुत्व बल के अधीन गति कर रही एक जटिल वस्तु का संहति केन्द्र सरल परवलयाकार पथ का अनुसरण करता है (देखिए भाग 2.2.2)।



चित्र 7.12 : तैराक का संहति केंद्र परवलयाकार पथ का अनुसरण करता है, भले ही वह तैराक हवा में कूदते हुए घूर्णन करती हो।

आइए अब हम N-कण निकाय के रैखिक तथा कोणीय संवेग और गतिज ऊर्जा के व्यंजक संहति केन्द्र के पदों में लिखें।

7.3.1 N-कण निकाय का रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और गतिज ऊर्जा

हम N-कण निकाय के संपूर्ण रैखिक संवेग को व्यक्त करने के लिए द्वि-पिंड निकाय से संबंधित समीकरण 7.11 को निम्न रूप में लागू कर सकते हैं

$$\mathbf{P} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2 + m_3\dot{\mathbf{r}}_3 + \ldots + m_N\dot{\mathbf{r}}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\mathbf{r}}_i. \tag{7.23 क}$$

समीकरण 7.19 को समय के सापेक्ष फिर से अवकलित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$M\dot{\mathbf{R}} = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\mathbf{r}}_i, \text{ जिससे कि } \mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} \tag{7.23 ख}$$

अब, यदि निकाय पर लग रहा नेट बाह्य बल शून्य हो तो समीकरण 7.22 से प्राप्त होता है

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}} = \text{अचर} \tag{7.24}$$

यही **रैखिक संवेग-संरक्षण नियम** है जिसका कथन इस प्रकार भी दिया जा सकता है :

अगर N- कण निकाय पर कोई बाह्य बल न लग रहा हो तो उसके संहति केन्द्र का वेग अचर बना रहता है।

अब आप इन संकल्पनाओं को नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करने के लिए लागू कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 7

तीन कणों वाले एक निकाय के प्रत्येक कण का द्रव्यमान m है, और वह सदा ही एक समतल में गतिमान रहता है। तीनों कण न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार परस्पर अन्योन्यक्रिया करते हैं। अलग-अलग समय पर तीनों कणों A, B, C की स्थितियों को सारणी 7.1 में दिखाया गया है अर्थात् इस सारणी में तीन क्षणों पर इनके स्थिति सदिश के (x, y) घटक (m इकाई में) दिखाए गए हैं।

सारणी 7.1

समय (s)	A	B	C
0	(1, 1)	(2, 2)	(3, 3)
1	(1, 0)	(0, 1)	(3, 3)
2	(0, 1)	(1, 2)	(2, 0)

बताइए कि निकाय पर कोई बाह्य बल लग रहा है कि नहीं?

किसी मूल बिंदु O के प्रति N-कण निकाय का संपूर्ण कोणीय संवेग उस मूल बिंदु के प्रति अलग-अलग कणों के कोणीय संवेग का सदिश योग होता है, अर्थात्

$$\mathbf{L} = m_1\mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{r}_2 \times \mathbf{v}_2 + \ldots + m_N\mathbf{r}_N \times \mathbf{v}_N$$
$$= \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i. \qquad (7.25)$$

एकल कण की तरह यहां भी **L** का मान मूल बिंदु के चयन पर निर्भर करता है। समीकरण 7.25 से राशि $\sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{R} \times \mathbf{v}_i$ को घटाकर और जोड़कर **R** के पदों में हम **L** को व्यक्त कर सकते हैं। इस तरह,

$$\mathbf{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) \times \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{R} \times \mathbf{v}_i$$

$(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \mathbf{r}'_i$ (मान लीजिए), संहति केन्द्र के प्रति कण का स्थिति सदिश है। इसलिए $m_i\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i$ संहति केन्द्र के प्रति iवें कण का कोणीय संवेग होगा। इस तरह हम यह पाते हैं कि पहला पद संहति केन्द्र के प्रति कण के कोणीय संवेगों का जोड़ है। इसे $\mathbf{L}_{cm}$ से प्रकट किया जा सकता है।

चूंकि **R** अचर है, इसलिए समीकरण 7.23 क से दूसरे पद को लिखा जा सकता है

$$\mathbf{R} \times \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{v}_i = \mathbf{R} \times \mathbf{P}$$

अतः N-कण निकाय के संपूर्ण कोणीय संवेग को हम निम्न रूप में लिख सकते हैं

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + \mathbf{R} \times \mathbf{P}. \qquad (7.26)$$

यदि निकाय पर कोई नेट बाह्य बल न लग रहा हो, जैसा कि हम उदाहरण 2 में देख चुके हैं, तो संहति केन्द्र को विरामावस्था में माना जा सकता है। अतः हम निर्देश-तंत्र का मूल बिंदु संहति केन्द्र पर ले सकते हैं अर्थात् $\mathbf{R} = \mathbf{0}$. इस स्थिति में **L** का व्यंजक निम्न रूप का हो जाता है

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}'_i \times \mathbf{v}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i \qquad (7.27)$$

ध्यान दीजिए कि समीकरण 7.27 में $\mathbf{r}_i$ **संहति केन्द्र के सापेक्ष iवें कण का स्थिति सदिश है।** हम इस व्यंजक का प्रयोग सौर परिवार का कोणीय संवेग निकालने में कर सकते हैं।

उदाहरण 4 : सौर परिवार का कोणीय संवेग

ग्रहों की तुलना में सूर्य का द्रव्यमान बहुत अधिक है। अतः उदाहरण 3 के अनुसार, सौर मंडल का संहति केन्द्र लगभग सूर्य की स्थिति पर होगा। इस तरह, समीकरण 7.27 के अनुसार सौर मंडल का संपूर्ण कोणीय संवेग सूर्य के केन्द्र के प्रति ग्रहों के कोणीय संवेग और सूर्य के कोणीय संवेग का जोड़ होता है। आइए अब हम एक ग्रह, मान लीजिए बृहस्पति, का कोणीय संवेग निकालें। चूंकि बृहस्पति की कक्षा लगभग वृत्ताकार है इसलिए सूर्य के केन्द्र के प्रति इसके कोणीय संवेग का परिमाण होगा

$$L_J = M_J\, \omega_J r_J^2$$

जहां M_J, ω_J, r_J क्रमशः बृहस्पति के द्रव्यमान, कोणीय चाल और सूर्य से माध्य दूरी हैं। पर $\omega_J = \dfrac{2\pi}{T_J}$, जहां T_J सूर्य के प्रति बृहस्पति का परिक्रमण काल है। इनके संख्यात्मक मान $M_J = 1.90 \times 10^{27}$kg, $T_J = 11.9$ वर्ष, $r_J = 7.78 \times 10^{11}$m प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$L_J = (1.9 \times 10^{27}\text{kg}) \times \left[\frac{2\pi}{(11.9)(365.25)(86400)\text{s}}\right] \times (7.78 \times 10^{11}\text{m})^2$$
$$= 1.92 \times 10^{43}\text{kg m}^2\text{s}^{-1}$$

इसी प्रकार वृत्तीय कक्षाएं मान कर अन्य ग्रहों के कोणीय संवेग भी निकाले जा सकते हैं।

अपने अक्ष के प्रति सूर्य का कोणीय संवेग लगभग 6×10^{41}kg m^{2}s^{-1} होता है। चूंकि सभी ग्रह सूर्य के प्रति एक ही दिशा में परिक्रमा करते हैं और सूर्य अपने अक्ष के प्रति उसी दिशा में घूमता है, इसलिए ग्रहों और सूर्य के कोणीय संवेगों की दिशाएं समान होती हैं।

सूर्य के केन्द्र के प्रति सौर मंडल के संपूर्ण कोणीय संवेग का परिमाण ग्रहों के कोणीय संवेगों और सूर्य के कोणीय संवेग के परिमाणों को जोड़ कर प्राप्त किया जाता है। यह परिमाण 3.2×10^{43}kg m^{2}s^{-1} होता है, जो एक अचर है। आप यह देख सकते हैं कि सौर मंडल को बहुत कम समय में भंग करने के लिए काफ़ी बड़े बलआघूर्ण की ज़रूरत होगी।

आप यह भी देख सकते हैं कि अपने केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के प्रति सूर्य का कोणीय संवेग, सौर मंडल के संपूर्ण कोणीय संवेग के 2% से भी कम होता है। एक विशेष रूप से गर्म तारे का कोणीय-संवेग, सूर्य के कोणीय-संवेग से 100 गुना अधिक हो सकता है। इस तरह ब्रह्मांड में ग्रह तंत्र के निर्माण की प्रक्रिया को एक ठंडे हो रहे तारे से कोणीय संवेग हटा लेने की प्रक्रिया भी माना जा सकता है।

N-कण निकाय की संपूर्ण गतिज ऊर्जा होती है

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\, v_i^2. \tag{7.28}$$

हम संपूर्ण गतिज ऊर्जा को संहति केन्द्र के निर्देशांकों के पदों में लिख सकते हैं। कोणीय संवेग की चर्चा के दौरान हमने संहति केन्द्र के सापेक्ष i वें कण के स्थिति सदिश की परिभाषा इस प्रकार दी है

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i - \mathbf{R},\ i = 1, 2, ..., N. \tag{7.29}$$

संहति केन्द्र की परिभाषा से हमें निम्नलिखित प्रतिबंध प्राप्त होता है

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{R}$$

$$\text{या } m_1(\mathbf{r}_1 - \mathbf{R}) + m_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{R}) + ... + m_N(\mathbf{r}_N - \mathbf{R}) = \mathbf{0}$$

$$\text{या } \sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{r}_i - \mathbf{R}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{r}_i' = \mathbf{0}. \tag{7.30}$$

समीकरण 7.29 और समीकरण 7.30 को समय के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{R}}, \tag{7.31 क}$$

$$\text{और } \sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{v}_i' = \mathbf{0}. \tag{7.31 ख}$$

समीकरण 7.31 क से प्राप्त $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i' + \dot{\mathbf{R}})$ को समीकरण 7.28 में रखने पर

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\mathbf{v}_i \,.\, \mathbf{v}_i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i[\, v_i'^2 + \dot{R}^2 + 2\,\mathbf{v}_i' \,.\, \dot{\mathbf{R}}\,]$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\, v_i'^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\, \dot{R}^2 + \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\, \mathbf{v}_i'\right).\dot{\mathbf{R}}$$

($\because$ $\dot{\mathbf{R}}$, i से स्वतंत्र एक अचर है)।

समीकरण 7.31 ख के अनुसार इस व्यंजक का अंतिम पद शून्य है। और, क्योंकि $\dot{\mathbf{R}}$, i पर निर्भर नहीं करता इसलिए दूसरे पद का मान $\frac{1}{2}M\dot{R}^2$ होगा। अतः संपूर्ण गतिज ऊर्जा

$$T = \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\, v_i'^2 \tag{7.32}$$

समीकरण 7.32 का पहला पद संपूर्ण द्रव्यमान M और संहति केन्द्र की गति पर निर्भर करता है। दूसरा पद निकाय के कणों के आंतरिक निर्देशांकों और वेगों पर निर्भर करता है। समीकरण 7.32 से यह पता चलता है कि निकाय की गतिज ऊर्जा का कुछ हिस्सा संहति केन्द्र की गति में निहित होता है। बाह्य बल न लगने पर क्योंकि $\dot{\mathbf{R}}$ अचर बना रहता है, इसलिए पहले पद में कोई परिवर्तन नहीं आता। इसका मतलब है कि दो वस्तुओं की टक्कर के दौरान उनकी संपूर्ण गतिज ऊर्जा में से केवल कुछ भाग ही अन्य कार्यों के लिए उपलब्ध होता है। आइए अब हम इस बात को अच्छी तरह से समझने के लिए एक सरल उदाहरण लें।

उदाहरण 5

दिखाइए कि यदि द्रव्यमान m_1 (= 2 इकाई) वाला एक गतिमान पिंड द्रव्यमान m_2 (= 1 इकाई) वाले एक स्थिर पिंड से टकराता है, तो प्रारंभिक गतिज ऊर्जा का 66.7% भाग संहति केन्द्र की गति में निहित होता है और केवल बची हुई ऊर्जा ही पिंडों के टक्कर होने पर उनमें बदलाव लाने या अन्य कार्यों के लिए उपलब्ध होती है।

समीकरण 7.32 से हमें मिलता है

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}(m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2) \qquad (7.33)$$

जहां रेखांकित भाग प्रथम पद का योगदान है।

यहां $m_1 = 2, m_2 = 1, \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}$, (मान लीजिए), $\mathbf{v}_2 = 0$.

$$\therefore\ m_1 + m_2 = 3 \text{ और } \dot{\mathbf{R}} = \frac{2}{3}\mathbf{v}$$

और समीकरण 7.31 क से

$$\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 - \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{v}}{3} \text{ और } \mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{v}_1 = -\frac{2}{3}\mathbf{v}.$$

∴ समीकरण 7.33 से

$$T = \frac{3}{2} \times \frac{4}{9}v^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2v^2}{9} + \frac{4v^2}{9}\right) = \frac{2v^2}{3} + \frac{v^2}{3} = v^2.$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि प्रथम पद कुल का दो तिहाई है। या, दूसरे शब्दों में $\frac{2}{3} \times 100\ (= 66.7\%)$ अर्थात् प्रारंभिक गतिज ऊर्जा का 66.7 प्रतिशत भाग संहति केन्द्र की गति में चला जाता है और शेष भाग अन्य कार्यों के लिए उपलब्ध होता है।

इस इकाई को पढ़ते हुए आपने इस बात की ओर ज़रूर ध्यान दिया होगा कि एकल कण के परिणामों और बहु-कण निकाय के परिणामों में काफ़ी समानता है। वाह्य बल के अधीन गतिमान एकल कण और बहु-कण निकाय के लिए रैखिक संवेग के व्यंजक और गति समीकरण दोनों ही में अनुरूपता होती है। बहु-कण निकाय की गतिज ऊर्जा और कोणीय संवेग के व्यजकों में एक अतिरिक्त पद और बढ़ जाता है। हम इन समानताओं को सारणी 7.2 में प्रस्तुत कर रहे हैं।

सारणी 7.2

परिणाम	एकल कण	बहु-कण निकाय
रैखिक संवेग	$\mathbf{p} = m\,\dot{\mathbf{r}}$	$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$
गति समीकरण	$\dot{\mathbf{p}} = m\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_e$	$\dot{\mathbf{P}} = M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_e$
गति समीकरण जबकि बाह्य बल न लग रहा हो	$\dot{\mathbf{p}} = 0$	$\dot{\mathbf{P}} = 0$
कोणीय संवेग	$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$	$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times \mathbf{P} + \mathbf{L}_{cm}$
गतिज ऊर्जा	K.E. $= \frac{1}{2}m\dot{r}^2$	K.E. $= \frac{1}{2}M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i'^2$

आपने इस इकाई में जो कुछ पढ़ा है, उसका एक संक्षिप्त विवरण हम यहां दे रहे हैं।

7.4 सारांश

- द्रव्यमान m_1, m_2 और स्थिति सदिश $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ वाले दो पिंडों के लिए संहति केन्द्र के निर्देशांक, और m_2 के सापेक्ष m_1 के आपेक्षिक निर्देशांक होते हैं, क्रमशः

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

- पारस्परिक क्रिया बल के अधीन गतिमान द्वि-पिंड निकाय में प्रत्येक कण का गति अवकल समीकरण होता है

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21}, \quad m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}.$$

इन्हें गति के एक तुल्य अवकल समीकरण के रूप में लिखा जा सकता है जो है

$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}$ जहां $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$. μ को निकाय का समानीत द्रव्यमान कहा जाता है।

- द्वि-पिंड निकाय के रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और गतिज ऊर्जा के व्यंजक हैं

$$\mathbf{p} = M\mathbf{V}$$
$$\mathbf{L} = \mathbf{R} \times M\mathbf{V} + \mu\, \mathbf{r} \times \mathbf{v}$$
$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \mu v^2$$

जहां $M = m_1 + m_2$

$$\mathbf{V} = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2}{m_1 + m_2} = \text{संहति केन्द्र का वेग}$$

$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2 = m_2$ के सापेक्ष m_1 का आपेक्षिक वेग

- द्रव्यमान $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_N$ और स्थिति सदिश $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \ldots \mathbf{r}_N$ वाले N-कण निकाय में संहति केन्द्र का निर्देशांक होता है

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \Big/ \sum_{i=1}^{N} m_i$$

- संपूर्ण बाह्य बल $\mathbf{F}_e$ और पारस्परिक क्रिया बल के अधीन N-कण निकाय की गति का अवकल समीकरण होता है

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_e \text{ जहां } M = \sum_{i=1}^{N} m_i.$$

इससे यह पता चलता है कि निकाय की गति केवल बाह्य बल के अधीन द्रव्यमान M के संहति केन्द्र की गति के तुल्य होती है।

- N-कण निकाय के रैखिक संवेग, कोणीय संवेग और गतिज ऊर्जा होते हैं, क्रमशः

$$\mathbf{P} = M\dot{\mathbf{R}}$$

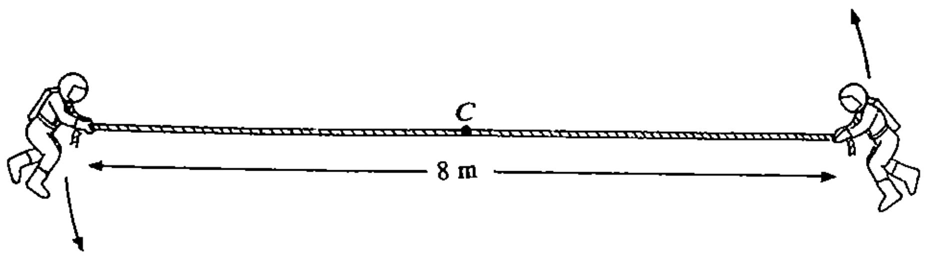
$\mathbf{L} = \mathbf{L}_{cm} + \mathbf{R} \times \mathbf{P}$, जहां $\mathbf{L}_{cm}$ = संहति केन्द्र के प्रति निकाय का कोणीय संवेग और

$$T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i v_i'^2 \text{ जहां } \mathbf{v}_i' = \mathbf{v}_i - \dot{\mathbf{R}}$$

7.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. क्रमशः 0.1 kg और 0.3 kg द्रव्यमान वाले दो कण P और Q शुरू में विरामावस्था में हैं और उनके बीच की दूरी 1 m है। वे एक दूसरे को अचर बल 1 N से आकर्षित करते हैं। निकाय पर कोई भी बाह्य बल नहीं लग रहा है। संहति केन्द्र की गति ज्ञात कीजिए। P की मूल स्थिति से कितनी दूरी पर कण टकराते हैं?

2. (क) 80 kg के वज़न वाले दो अंतरिक्ष यात्री (चित्र 7.13) 8 m लंबी एक हल्की रस्सी से जुड़े हुए हैं। वे अंतरिक्ष में विलगित (isolated) हैं और 5 ms^{-1} की चाल से अपने संहति केन्द्र C की परिक्रमा करते हैं। अंतरिक्ष यात्रियों को कण मानकर (क) निकाय का कोणीय संवेग और गतिज ऊर्जा ज्ञात कीजिए।



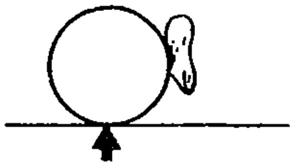
चित्र 7.13

रस्सी खींचकर अंतरिक्ष यात्री एक दूसरे के नज़दीक आ जाते हैं और उनके बीच की दूरी 4 m रह जाती है।

(ख) निकाय का वर्तमान कोणीय संवेग क्या है?

(ग) उनकी नई चाल क्या है?

(घ) क्या निकाय की गतिज ऊर्जा वही बनी रहती है जो कि स्थिति (क) में थी?



चित्र 7.14

3. बिल्कुल एक जैसे दो गुब्बारे एक पतली झिल्ली से जुड़े हुए हैं (चित्र 7.14)। शुरू में एक में गैस भरी हुई है जबकि दूसरा गुब्बारा पिचका हुआ है। गैस के द्रव्यमान की तुलना में गुब्बारों के पदार्थ का द्रव्यमान नगण्य है। अचानक झिल्ली टूट जाती है और दोनों गुब्बारों में बराबर गैस भर जाती है। यह मानकर कि कोई घर्षण नहीं है और केवल क्षैतिज गति हो सकती है, बताइए कि गुब्बारे किस ओर (बाएं अथवा दाएं) जायेंगे?

7.6 उत्तर

बोध प्रश्न

1. (क) समीकरण 7.2 का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_2(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{m_1+m_2} = \frac{m_2\mathbf{r}}{M}$$

$$\text{और } \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1+m_2} = \frac{m_1(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1)}{m_1+m_2} = -\frac{m_1\mathbf{r}}{M}$$

(ख) यदि एक अतिरिक्त बाह्य बल हो तो समीकरण 7.1 क और समीकरण 7.1 ख निम्नलिखित रूप के हो जाते हैं :

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{e1} \qquad (7.34\ \text{क})$$
$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{e2} \qquad (7.34\ \text{ख})$$

समीकरण 7.34 क और समीकरण 7.34 ख को जोड़ने पर और $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_e, \text{ जहां } \mathbf{F}_e = \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{e2} = \text{नेट बाह्य बल।}$$

अतः समीकरण 7.2 का प्रयोग करने पर

$$M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_e$$
$$\text{जहां } M = m_1 + m_2 \qquad (7.35)$$

और समीकरण 7.34 क और समीकरण 7.34 ख से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1} + \frac{\mathbf{F}_{e1}}{m_1},\ \ddot{\mathbf{r}}_2 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} + \frac{\mathbf{F}_{e2}}{m_2}$$

$$\text{या } \frac{d^2}{dt^2}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\mathbf{F}_{21} + \left(\frac{\mathbf{F}_{e1}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{e2}}{m_2}\right)$$

$$(\because \mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12})$$

$$\text{या } \ddot{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{F}_{21}}{\mu} + \left(\frac{\mathbf{F}_{e1}}{m_1} - \frac{\mathbf{F}_{e2}}{m_2}\right). \qquad (7.36)$$

इस तरह हमें दो समीकरण (7.35 और 7.36) प्राप्त होते हैं। अतः इस स्थिति को तुल्य एक-पिंड प्रश्न में नहीं बदला जा सकता।

(ग) अगर बाह्य बल गुरुत्व बल हो तो $\frac{\mathbf{F}_{e1}}{m_1} = \frac{\mathbf{F}_{e2}}{m_2} = \mathbf{g}$.

अतः समीकरण 7.36 को $\mu\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}$ के रूप में लिखा जा सकता है जो कि वही है जो समीकरण 7.8 है। समीकरण 7.35 का दक्षिण पक्ष अभी भी शून्येतर (non-zero) बना

रहता है। पर इस स्थिति में यह $\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{g}$ में बदल जाता है जिसके हल से हम अच्छी तरह से परिचित हैं (देखिए खंड 1 की इकाई 2 का समीकरण 2.9)। यह हल

$\mathbf{R} = \mathbf{v}_0 t + \frac{1}{2} \mathbf{g} t^2 + \mathbf{B}$ है, जहां प्रतीकों के अपने सामान्य अर्थ हैं। अतः यह प्रश्न एक-पिंड प्रश्न के तुल्य हो जाता है जहां हमें समीकरण 7.36 ही को हल करना होता है।

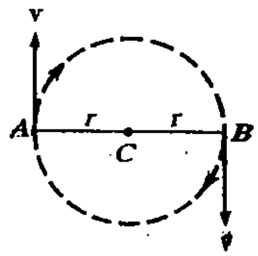
2. चित्र 7.15 देखिए। दो तारे A और B अपने उभयनिष्ठ (common) संहति केन्द्र C के प्रति एकसमान वर्तुल गति कर रहे हैं। मान लीजिए कि उनके द्रव्यमान $m_1 = m_2 = m$ (माना), $AC = BC = r$ और दो तारों के बीच की दूरी $= 2r$.

अब, अगर तारे का घूर्णन काल T हो तो

$$\frac{2\pi r}{T} = v$$

$$\text{या } 2r = \frac{vT}{\pi} = \frac{(220 \times 1000 \text{ ms}^{-1}) \times (1.2 \times 10^6 \text{s})}{\pi}$$

$$= 8.4 \times 10^{10} \text{m}$$



चित्र 7.15

अब हमें समानीत द्रव्यमान μ निकालना है।

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{m^2}{2m} = \frac{m}{2} \text{ या } m = 2\mu.$$

समीकरण 7.8 की सहायता से हम लिख सकते हैं कि

$$\mu a = \frac{G m_1 m_2}{(2r^2)}, \qquad (7.37)$$

जहां a, A और B के आपेक्षिक त्वरण का परिमाण है। किसी भी क्षण पर उनका त्वरण C की ओर होता है। वे परिमाण में बराबर $\left(= \frac{v^2}{r}\right)$ और विपरीत दिशा में हैं। अतः इकाई 1 के समीकरण 1.36 का प्रयोग करने पर हमें $a = \frac{2v^2}{r}$ प्राप्त होता है। इसलिए

$m_1 = m_2 = m = 2\mu$ और $v = \frac{2\pi r}{T}$ रखने पर और समीकरण 7.37 का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है

$$\frac{G \cdot 4\mu^2}{4r^2} = \frac{2\mu}{r} \cdot \frac{4\pi^2 r^2}{T^2}$$

$$\text{या } \mu = \frac{8\pi^2 r^3}{G T^2} = \frac{\pi^2 (2r)^3}{G T^2}$$

$$\therefore \mu = \frac{\pi^2 \times (8.4 \times 10^{10} \text{m})^3}{(6.673 \times 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}) \times (1.2 \times 10^6 \text{s})^2}$$

$$= 6.1 \times 10^{31} \text{ kg}$$

3. हमने यहां माना है कि निकाय पर कोई बाह्य बल कार्य नहीं कर रहा है। इसलिए आपका और पिंजड़े का संहति केन्द्र विरामावस्था में बना रहेगा। अतः पिंजड़े को भृगु के किनारे से दूर हटाने के लिए आप को किनारे की ओर जाना होगा। आपको दूसरी ओर नहीं जाना चाहिए क्योंकि इस स्थिति में पिंजड़ा भृगु के किनारे की ओर जाने लगेगा।

प्रश्न के अंतिम भाग के लिए हम समीकरण $m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ लागू करेंगे (क्योंकि संहति केन्द्र का वेग शून्य है) जहां m_1 और m_2 क्रमशः पिंजड़े का और आपका द्रव्यमान है। अब आपकी चाल $v_2 = x_2/t$, जहां मान लीजिए कि x_2, समय t में आपके द्वारा पिंजड़े के अंदर तय की गई अधिकतम दूरी है, अर्थात् $x_2 = 2m$. तब $v_1 = \frac{x_1}{t}$ जहां x_1 वह अधिकतम दूरी है जिससे समान समय t में पिंजड़े को विपरीत दिशा में ले जाया जा सकता है (क्योंकि $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ के विपरीत होगा)। इस तरह,

$$x_1 = \frac{m_2 x_2}{m_1} = \frac{(60\ \text{kg})\ (2\text{m})}{(90\ \text{kg})} = 1.3\ \text{m}.$$

4. (क) परिणाम $\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt}$, को लागू करने पर समीकरण 7.12 से हमें $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{R}} \times M\mathbf{V} + \mathbf{R} \times M\dot{\mathbf{V}} + \mu\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{v} + \mu\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{v}}$ प्राप्त होता है।

अब क्योंकि $\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}$ और $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$, इसलिए पहला और तीसरा पद शून्य हो जाता है।

और, क्योंकि निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा है, इसलिए संहति केन्द्र का वेग अचर रहता है और $\dot{\mathbf{V}} = 0$. अतः दूसरा पद भी शून्य हो जाता है और तब हमारे पास केवल $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mu\,\dot{\mathbf{v}}$ बच रहता है।

अब $\mu\,\dot{\mathbf{v}} = \mu\,\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_{21}$. समीकरण 7.7 से यह स्पष्ट है कि $\mathbf{F}_{21}$ केन्द्रीय बल है। इसलिए $\mathbf{F}_{21}$ या तो $\mathbf{r}$ के समांतर होगा या प्रति समांतर होगा। अतः $\mathbf{r}$ और $\mathbf{F}_{21}$ का सदिश गुणनफल शून्य हो जाता है। $\therefore \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0$, जिससे यह अर्थ निकलता है कि $\mathbf{L}$ संरक्षित है।

(ख) $T = \frac{1}{2} m_1 \dot{r}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{r}_2^2$

समीकरण 7.4 क और समीकरण 7.4 ख से हम यह जानते हैं कि

$$\mathbf{r}_1 - \mathbf{R} = \frac{m_2}{M}\mathbf{r} \text{ और } \mathbf{r}_2 - \mathbf{R} = -\frac{m_1}{M}\mathbf{r}.$$

इसलिए $\dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{\mathbf{R}} + \frac{m_2}{M}\dot{\mathbf{r}}$ और $\dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{\mathbf{R}} - \frac{m_1}{M}\dot{\mathbf{r}}$.

$$\therefore \dot{r}_1^2 = \dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 = \dot{R}^2 + \frac{m_2^2}{M^2}\dot{r}^2 + \frac{2\,m_2}{M}\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$$

और $\dot{r}_2^2 = \dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 = \dot{R}^2 + \frac{m_1^2}{M^2}\dot{r}^2 - \frac{2\,m_1}{M}\dot{\mathbf{R}} \cdot \dot{\mathbf{r}}$

$$\therefore T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{M^2}\dot{r}^2 (m_1 + m_2)$$

या $T = \frac{1}{2} M \dot{R}^2 + \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{M} v^2$ ($\because m_1 + m_2 = M, \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}$)

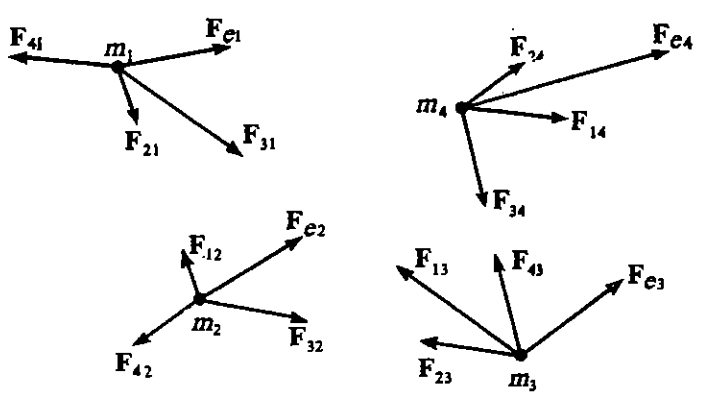
अब क्योंकि $\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$, इसलिए $T = \frac{1}{2} M\dot{R}^2 + \frac{1}{2}\mu\, v^2$

5. (क) समीकरण 7.14 से हमें $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_{23} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$ और $\mathbf{r}_{31} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3$ प्राप्त होते हैं।

(ख) कण 2 और कण 3 के गति समीकरण होंगे $m_2\,\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{e2} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{32}$

और $m_3\,\ddot{\mathbf{r}}_3 = \mathbf{F}_{e3} + \mathbf{F}_{13} + \mathbf{F}_{23}$

6.



चित्र 7.16

इस निकाय का गति समीकरण है

$$m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 + m_3 \ddot{\mathbf{r}}_3 + m_4 \ddot{\mathbf{r}}_4 = \mathbf{F}_{e1} + \mathbf{F}_{e2} + \mathbf{F}_{e3} + \mathbf{F}_{e4}$$

7. पहले हम A, B और C के स्थिति सदिश $\mathbf{r}_A$, $\mathbf{r}_B$ और $\mathbf{r}_C$ और $t = 0$, 1 और 2 s पर संहति केन्द्र का स्थिति सदिश $\mathbf{R}_t$ दिखाने के लिए सारणी 7.1 से सारणी 7.3 बनाएंगे। याद रहे कि $m_A = m_B = m_C = m$.

सारणी 7.3

t	$\mathbf{r}_A$	$\mathbf{r}_B$	$\mathbf{r}_C$	$\mathbf{R}_t = \dfrac{m_A \mathbf{r}_A + m_B \mathbf{r}_B + m_C \mathbf{r}_C}{m_A + m_B + m_C}$
0	$\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$	$2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$	$3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$	$\mathbf{R}_0 = \dfrac{m(6\hat{\mathbf{i}} + 6\hat{\mathbf{j}})}{3m} = 2\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$
1	$\hat{\mathbf{i}}$	$\hat{\mathbf{j}}$	$3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}}$	$\mathbf{R}_1 = \dfrac{m(4\hat{\mathbf{i}} + 4\hat{\mathbf{j}})}{3m} = \dfrac{4}{3}\hat{\mathbf{i}} + \dfrac{4}{3}\hat{\mathbf{j}}$
2	$\hat{\mathbf{j}}$	$\hat{\mathbf{i}} + 2\hat{\mathbf{j}}$	$2\hat{\mathbf{i}}$	$\mathbf{R}_2 = \dfrac{m(3\hat{\mathbf{i}} + 3\hat{\mathbf{j}})}{3m} = \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}$

$t = 0$ से 1s तक के समयांतराल में संहति केन्द्र का औसत वेग $= \dfrac{\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0}{1 - 0} = -\dfrac{2}{3}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}})$.

और $t = 1$ से 2s तक के समयांतराल में संहति केन्द्र का औसत वेग $= \dfrac{\mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_1}{2 - 1}$

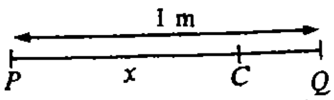
$$= -\frac{1}{3}(\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}).$$

इससे यह पता चलता है कि संहति केन्द्र का वेग बदल गया है। इसलिए निकाय पर कोई बाह्य बल अवश्य लगा हुआ है।

अंत में कुछ प्रश्न

1. चूंकि कोई बाह्य बल नहीं लग रहा है, इसलिए संहति केन्द्र का वेग अचर बना रहता है। दूसरे शब्दों में संहति केन्द्र विरामावस्था में बना रहता है, क्योंकि इसका प्रारंभिक वेग शून्य है।

   चूंकि संहति केन्द्र विरामावस्था में है, इसलिए टक्कर के समय इसकी स्थिति और कणों की स्थिति संपाती होगी। अतः वे अचल संहति केन्द्र C की स्थिति पर टकराते हैं (चित्र 7.17)।



चित्र 7.17

   अब हमें PC निकालना है।

   मान लीजिए कि $PC = x$ m

   तब $CQ = (1 - x)$ m. चूंकि C संहति केन्द्र है, इसलिए $m_P(PC) = m_Q(CQ)$

   या $(0.1 \text{ kg}) \times x \text{ m} = (0.3 \text{ kg}) \times (1 - x) \text{ m}$

   या $4x = 3$

   या $x = \dfrac{3}{4}$, अर्थात् $PC = 0.75$ m.

2. (क) चित्र 7.13 देखिए। अंतरिक्ष यात्रियों के कोणीय संवेग समांतर (कागज़ के समतल पर लंब और हमारी ओर) और परिमाण में बराबर हैं। निकाय के कोणीय संवेग का परिमाण है :

$$L = L_1 + L_2 = mvr + mvr = 2mvr,$$

जहां $m = 80$ kg, $v = 5 \text{ ms}^{-1}$ और $r = \dfrac{8}{2}$ m $= 4$ m

$$\therefore L = 2\,(80 \text{ kg})\,(5 \text{ ms}^{-1})\,(4\text{m}) = 3200 \text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$$

निकाय की गतिज ऊर्जा $= 2\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = (80\text{ kg})(5\text{ ms}^{-1})^2 = 2000\text{ J}$

(ख) बराबर और विपरीत आंतरिक बलों के कारण, जो कि इनको जोड़ने वाली रेखा के अनुदिश कार्य करते हैं, अंतरिक्ष यात्री एक दूसरे के निकट आ सकते हैं। इससे यह अर्थ निकलता है कि पारस्परिक बल केन्द्रीय बल है। और निकाय पर कोई बाह्य बल नहीं लग रहा है। अतः (क) में बतायी गयी दिशा में निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित रहता है अर्थात् उसका मान $3200\text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$ है।

(ग) मान लीजिए कि V और R क्रमशः नई चाल और त्रिज्या हैं। तब

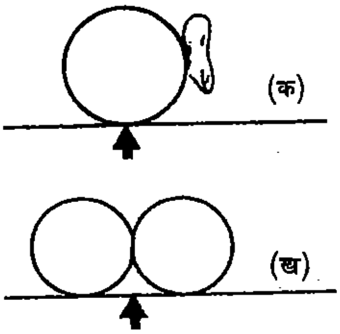
$$2mVR = 3200\text{ kg m}^2\text{s}^{-1}$$

जहां $m = 80$ kg और $R = \frac{4\text{m}}{2} = 2$ m

$$\therefore\ V = \frac{3200\text{ kg m}^2\text{s}^{-1}}{2\,(80\text{ kg})\,(2\text{m})} = 10\text{ ms}^{-1}$$

(घ) नयी संपूर्ण गतिज ऊर्जा $= 2\left(\frac{1}{2}mV^2\right) = (80\text{ kg})(10\text{ ms}^{-1})^2 = 8000$ J.

इसलिए नयी गतिज ऊर्जा (क) की गतिज ऊर्जा से अधिक है।



चित्र 7.18

3. चित्र 7.18 देखिए। यहां नेट बाह्य बल शून्य है। इसलिए संहति केन्द्र का वेग अचर बना रहता है। झिल्ली टूटने के पहले (चित्र 7.18 क) संहति केन्द्र गैस से भरे गुब्बारे के केन्द्र पर विरामावस्था में होता है। इसलिए झिल्ली टूटने के बाद (चित्र 7.18 ख) संहति केन्द्र उसी स्थिति पर बना रहेगा। अब झिल्ली टूटने के बाद संहति केन्द्र की स्थिति गुब्बारों के मिलन बिंदु पर होगी। इसलिए झिल्ली टूटने से पहले और बाद में संहति केन्द्र चित्र 7.18 में तीरों द्वारा दिखाई गई स्थितियों पर होगा। संहति केन्द्र की इस नियत स्थिति को बनाए रखने के लिए गुब्बारों को बायीं ओर जाना चाहिए।

7.7 शब्दावली

आपेक्षिक निर्देशांक	— relative coordinate
द्वि-पिंड निकाय	— two-body system
बहु-कण निकाय	— many-particle system
समानीत द्रव्यमान	— reduced mass
संहति केन्द्र	— centre-of-mass
त्रि-कण निकाय	— three-particle system

इकाई 8 प्रकीर्णन

इकाई की रूपरेखा

8.1 प्रस्तावना

इकाई 7 में आप पढ़ चुके हैं कि किस तरह यांत्रिकी की संकल्पनाओं को बहु-कण निकाय पर लागू किया जाता है। आप संघट्टन के बारे में तो जानते ही हैं जिसके बारे में आपने इकाई 3 में पढ़ा है। संघट्टन को प्रकीर्णन (scattering) भी कहा जाता है। इस इकाई में हम प्रकीर्णन पर ज़्यादा विस्तार से चर्चा करेंगे। आप जानते ही हैं कि संघट्टन में दो या अधिक कण थोड़े समय के लिए एक-दूसरे के साथ अन्योन्यक्रिया करते हैं। कणों का संघट्टन या कणों का प्रकीर्णन हमारे भौतिक जगत की एक महत्वपूर्ण परिघटना है। बड़े पैमाने पर देखें तो हम सोचते हैं कि क्या किसी ग्रहिका (asteroid) के साथ पृथ्वी का संघट्टन होने के कारण ही डाइनोसॉर का नामोनिशान मिट गया। मंदाकिनियां (galaxies) भी एक दूसरे से टकराती हैं और उनके संघट्टन से नई खगोलीय संरचनाएं बनती हैं। परमाणुओं और नाभिकों की संरचना और मूल कणों (elementary particles) के बारे में ज़्यादातर जानकारी हमें प्रकीर्णन के प्रयोगों से मिलती है। इन प्रयोगों में इन सूक्ष्म कणों पर अन्य सूक्ष्म कणों से अभिघात (bombardment) किया जाता है और विभिन्न दिशाओं में भिन्न कोणों पर प्रकीर्ण कणों (scattered particles) की संख्या माप ली जाती है। प्रकीर्ण कणों के कोणीय वितरण (angular distribution) को प्रकीर्णन परिक्षेत्र (scattering cross-section) के पदों में व्यक्त किया जाता है।

आप पूछेंगे कि प्रकीर्णन परिक्षेत्र क्या होता है? इस इकाई में हम अपनी चर्चा प्रकीर्णन परिक्षेत्र से शुरू करेंगे। अब प्रकीर्णन परिक्षेत्रों का परिकलन तो संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में किया जाता है, पर प्रयोगशाला में इनका मापन प्रायोगिक निर्देश तंत्र में किया जाता है। तो आपको इन दोनों निर्देश तंत्रों (frames of reference) के बारे में पढ़ना पड़ेगा। साथ ही इन दोनों तंत्रों में प्रेक्षित विभिन्न भौतिक राशियों का आपसी संबंध भी जानना होगा।

संघट्ट प्राचल विधि (impact parameter method) लागू करने से अधिकांश प्रकीर्णन परिघटनाओं का अध्ययन काफ़ी सरल हो जाता है। अतः इस इकाई में आप इस विधि को भी सीखेंगे। साथ ही आप इसके दो अनुप्रयोगों, अभेद्य गुलिका प्रकीर्णन (hard sphere scattering) और रदरफ़र्ड प्रकीर्णन (Rutherford scattering) के बारे में पढ़ेंगे। रदरफर्ड प्रकीर्णन एक बहुत महत्वपूर्ण प्रकीर्णन प्रयोग है। इस प्रयोग को 1911 में गाइगर और मार्स्डेन ने किया था जिससे परमाणु का नाभिकीय मॉडल प्राप्त हुआ। इकाई 9 में आप यांत्रिकी की संकल्पनाओं को दृढ़ पिंडों की घूर्णन गति पर लागू करना सीखेंगे।

उद्देश्य

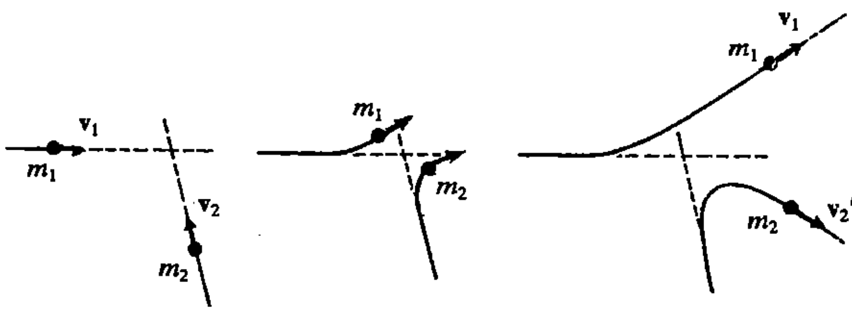
इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- संहति केन्द्र निर्देश तंत्र और प्रायोगिक निर्देश तंत्र में भेद कर सकेंगे

- संहति केन्द्र निर्देश तंत्र और प्रायोगिक निर्देश तंत्र में अवकली परिक्षेत्र एवं पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र का परिकलन कर सकेंगे
- अभेद्य गुलिका प्रत्यास्थ प्रकीर्णन और रदरफ़र्ड प्रकीर्णन पर आधारित प्रश्नों को हल करने के लिए संघट्ट प्राचल विधि लागू कर सकेंगे।

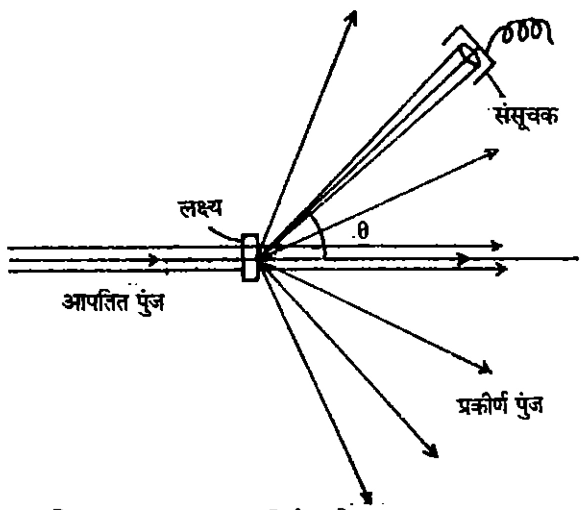
8.2 प्रकीर्णन परिक्षेत्र

कणों के संघट्टन यानि कि प्रकीर्णन को आप अच्छी तरह समझते हैं (खंड 1 की इकाई 3 के भाग 3.4 में दिए गए दो कणों के संघट्टन को याद कीजिए)। हम संपूर्ण प्रकीर्णन प्रक्रिया को तीन चरणों में बांट सकते हैं। संघट्टन के इन तीन चरणों को हमने चित्र 8.1 में दिखलाया है। पहला चरण चित्र 8.1 क में दिखाया गया है जो कि संघट्टनी कणों (colliding particles) की अन्योन्यक्रिया (interaction) होने के बहुत पहले की स्थिति है। इस चरण में प्रत्येक कण मुक्त होता है यानि कि उसकी ऊर्जा धनात्मक होती है। जब कण एक दूसरे के पास आने लगते हैं (चित्र 8.1 ख), तब उन पर लग रहे और किसी भी बल के मुकाबले बहुत प्रबल अन्योन्यक्रिया बल उन पर लगने लगते हैं। अंत में, अन्योन्यक्रिया के काफ़ी बाद (चित्र 8.1 ग) प्रकीर्ण कण (scattered particles) फिर से मुक्त रूप से नई दिशाओं में नए वेगों से सरल रेखाओं में चलने लगते हैं। ये प्रकीर्ण कण, मूल कण हो भी सकते हैं और नहीं भी हो सकते हैं।



चित्र 8.1 : दो कणों का प्रकीर्णन

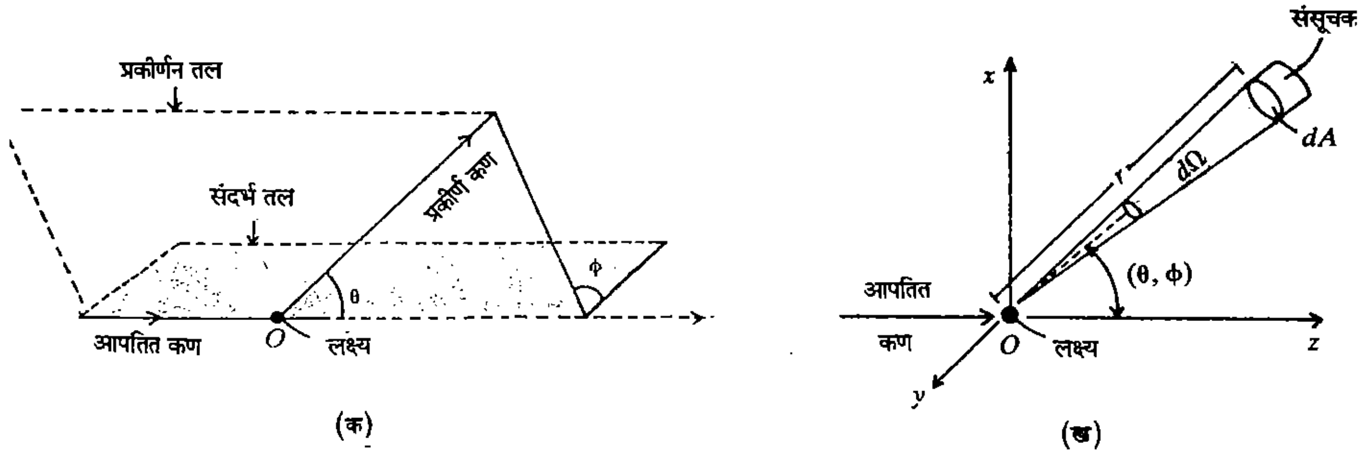
आइए अब देखें कि एक आम प्रकीर्णन प्रयोग में क्या होता है? इन प्रयोगों में दी हुई ऊर्जा और संवेग वाले कणों का, जिन्हें प्रक्षेप्य (projectiles) भी कहा जाता है, एक समांतर पुंज (parallel beam), एक लक्ष्य पर आपतित (incident) होता है (चित्र 8.2)। बहुत थोड़े समय के लिए आपतित कण लक्ष्य के साथ अन्योन्यक्रिया करते हैं, जो उन्हें विभिन्न दिशाओं में बिखरा देता है यानि कि प्रकीर्ण कर देता है। अंत में लक्ष्य से काफ़ी अधिक दूरी पर प्रकीर्ण कणों को गिना जाता है। प्रकीर्ण कणों को गिनने का काम एक संसूचक (detector) करता है। प्रकीर्ण कणों की ऊर्जा और संवेग आपतित कणों के बराबर हो भी सकते हैं और नहीं भी हो सकते हैं।



चित्र 8.2 : एक आम प्रकीर्णन प्रक्रिया

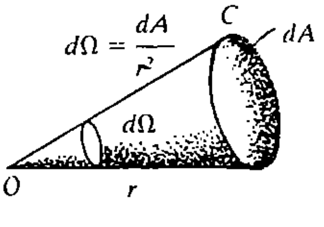
आमतौर पर प्रयोगकर्ता प्रकीर्णन के पहले और बाद में कणों के वेग, रैखिक संवेग और ऊर्जा मालूम करना चाहते हैं। तब इन राशियों में हुए परिवर्तन मालूम किए जा सकते हैं। जैसा कि आप इकाई 3 में पढ़ चुके हैं, रैखिक संवेग-संरक्षण नियम और संपूर्ण ऊर्जा-संरक्षण नियम से इन राशियों में हुए परिवर्तन को मालूम कर सकते हैं। जेम्स चैडविक ने इसी तरीके से न्यूट्रॉन की खोज की थी। जब इन अज्ञात कणों का पुंज हाइड्रोजनी पदार्थ पैराफ़िन पर आपतित किया गया, तब लक्ष्य में स्थित प्रोटॉनों का अधिकतम प्रतिक्षेप वेग (recoil velocity) $3.3 \times 10^6 ms^{-1}$ था। जब इन कणों को नाइट्रोजनी पदार्थ पैरासायनोजन पर आपतित किया गया तब लक्ष्य के नाइट्रोजन नाभिकों का अधिकतम प्रतिक्षेप वेग $4.7 \times 10^6 ms^{-1}$ पाया गया। इकाई 3 में बताए गए तरीकों को लागू करके इन कणों का द्रव्यमान निकाला गया और पाया गया कि ये कण बिल्कुल ही अलग और नये कण थे। इनका नाम न्यूट्रॉन रखा गया।

प्रकीर्णन के अध्ययन में एक और महत्वपूर्ण पहलू यह है : हम जानना चाह सकते हैं कि लक्ष्य के साथ अन्योन्यक्रिया होने के बाद एक दी हुई दिशा में कण की गति की क्या संभावना है? दूसरे शब्दों में हम एक दी हुई दिशा में प्रकीर्णन की प्रायिकता (probability of scattering) निकालना चाह सकते हैं। यह जानकारी महत्वपूर्ण है, क्योंकि इससे ही हमें आपतित कणों और लक्ष्य के बीच के बल की प्रकृति और साथ ही उनकी आंतरिक संरचनाओं के बारे में भी पता चलता है। उदाहरण के लिए, इलेक्ट्रॉन प्रकीर्णन प्रयोगों से इलेक्ट्रॉन का आकार (size) मापा गया। इसी प्रकार इलेक्ट्रॉन-परमाणु प्रकीर्णन प्रयोगों से लक्ष्य परमाणु की आंतरिक संरचना, अर्थात् उनका ऊर्जा-स्तर, विन्यास आदि, के बारे में जानकारी मिलती है। किसी दी हुई दिशा में प्रकीर्णन की प्रायिकता की जानकारी **प्रकीर्णन परिक्षेत्र** (scattering cross-section) से मिलती है। आइए अब हम यह समझें कि प्रकीर्णन परिक्षेत्र का क्या मतलब है। यह संकल्पना आपको कुछ कठिन लग सकती है। इसे समझने के लिए आपको कुछ ज़्यादा समय लगाना पड़ सकता है।

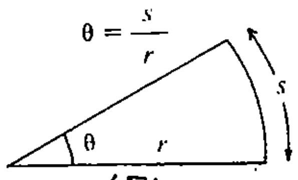


चित्र 8.3 : (क) प्रकीर्णन परिघटना का आरेख जिसमें कोण (θ, ϕ) दिखाए गए हैं; (ख) $d\Omega$, कोण (θ, ϕ) के प्रति घन कोण है। घन कोण $d\Omega$ में प्रकीर्ण कणों को संसूचक की मदद से गिना जाता है। dA संसूचक का परिक्षेत्र है।

मान लीजिए कि समान द्रव्यमान और समान ऊर्जा वाले n कणों का एक एकसमान समांतर पुंज N अभिन्न (identical) कणों (अथवा प्रकीर्णन-केन्द्रों) वाले लक्ष्य पर आपतित होता है। ऐसे प्रकीर्णन केन्द्रों के उदाहरण हैं धातु की एक पतली पन्नी में परमाणुओं के धन नाभिक। इन पर α-कणों को आपतित किया जाता है। मान लीजिए कि आपतित पुंज के कण एक-दूसरे के साथ अन्योन्यक्रिया नहीं करते हैं और लक्ष्य के प्रकीर्णन केन्द्र एक दूसरे से काफ़ी दूरी पर हैं। तब हम यह मान सकते हैं कि प्रकीर्णन के दौरान प्रत्येक आपतित कण अन्य आपतित कणों से और हरेक लक्ष्य कण अन्य लक्ष्य कणों से काफ़ी दूरी पर है। और तब हम प्रभावी तौर पर इस प्रकीर्णन घटना को दो कणों के प्रकीर्णन के रूप में समझ सकते हैं। यानि कि अन्य कणों की उपस्थिति से प्रभावित हुए बिना एक दिए हुए समय में **एक लक्ष्य कण** द्वारा केवल **एक आपतित कण** का प्रकीर्णन हो रहा है। इस तरह हमें एक समय में द्वि-पिंड संघट्टन प्रक्रिया को ही समझना पड़ता है। सुविधा के लिए हम लक्ष्य की स्थिति को निर्देश तंत्र का मूल बिन्दु मान लेते हैं और एक अक्ष को, मान लीजिए कि z- अक्ष को, आपतित पुंज की दिशा में मान लेते हैं।



(क)



(ख)

चित्र 8.4 (क)
मान लीजिए कि क्षेत्र dA का पृष्ठ एक बंद वक्र C से परिबद्ध है जैसाकि चित्र में दिखाया गया है। बिन्दु O से C के बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाओं से एक शंकु (cone) बनता है। अब आप एकक क्षेत्रफल वाले एक गोले की कल्पना कीजिए जिसका केन्द्र O पर है (या O केन्द्र और त्रिज्या r वाले गोले के क्षेत्रफल को r^2 से भाग देने पर प्राप्त परिणाम के बारे में सोचिए)। शंकु द्वारा किया गया इस क्षेत्रफल का अंत: खंड (intercept) एक घन कोण (solid angle) होता है। यह वह घन कोण है जो गोले का, वक्र C द्वारा परिबद्ध, परिक्षेत्र dA, O पर अंतरित करता है। इस बात को आप ऐसे भी समझ सकते हैं कि घन कोण एक शंकु द्वारा घेरा गया स्थान है। घन कोण का माप अंतरित क्षेत्रफल (subtended area) dA और त्रिज्या r के वर्ग का अनुपात होता है अर्थात्

$d\Omega = \dfrac{dA}{r^2}$ इसका मात्रक स्टेरेडियन (sr) है। आप देख सकते हैं कि एक गोले के लिए घन कोण की भूमिका ठीक वही है जो कि वृत्त के लिए कोण की है।

प्रकीर्णन की दिशा कोण (θ, ϕ) से दी जाती है जैसा कि चित्र 8.3 क में दिखाया गया है। कोण θ जिसे **प्रकीर्णन-कोण** (angle of scattering) कहा जाता है, कण की प्रकीर्ण और आपतित दिशाओं के बीच का कोण है। इन दो दिशाओं से प्रकीर्णन-समतल (plane of scattering) परिभाषित होता है :

कोण ϕ क्या होता है? इसके लिए हम एक निर्देश समतल चुनते हैं जो z-अक्ष से होकर जाता है। चित्र 8.3 क में दिखाया गया छायादार समतल ऐसा ही एक निर्देश समतल (reference plane) है। इस निर्देश समतल और प्रकीर्णन समतल के बीच के कोण को ϕ कहते हैं। एक दी हुई दिशा (θ, ϕ) में कण के प्रकीर्णन की प्रायिकता को अवकली परिक्षेत्र (differential cross-section) के पदों में मापा जाता है। आइए अब हम यह समझें कि अवकली परिक्षेत्र क्या होता है।

8.2.1 अवकली परिक्षेत्र

मान लीजिए कि लक्ष्य के प्रति एकक क्षेत्र पर प्रति एकक समय में आपतित कणों की संख्या F है। F को हम **आपतित अभिवाह** (incident flux) कहते हैं। मान लीजिए कि समयांतराल Δt में कोण (θ, ϕ) पर बने एक छोटे घन कोण $d\Omega$ में प्रकीर्ण कणों की संख्या Δn है (चित्र 8.3 ख)। घन कोण का मतलब समझने के लिए चित्र 8.4 क को ठीक से देखिए और उसके नीचे लिखे गए शीर्षक को ध्यान से पढ़िए। तब Δt समय में किसी एक लक्ष्य कण द्वारा प्रकीर्ण कणों की संख्या क्या होगी? निश्चय ही यह संख्या आपाती अभिवाह F, समयांतराल Δt और इस घन कोण के समानुपाती होगी जिसमें कण प्रकीर्ण होते हैं, यानि कि

$$\Delta n \propto F\,(d\Omega)(\Delta t). \qquad (8.1\ \text{क})$$

परिभाषा से समीकरण 8.1 क का आनुपातिकता स्थिरांक (constant of proportionality) **अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र** (differential scattering cross-section) कहलाता है और इसका प्रतीक $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ है। संक्षेप में इसे हम dcs भी लिखते हैं। अत:

$$\Delta n = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) F\,(d\Omega)\,(\Delta t), \text{ या } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\Delta n}{F\,\Delta t\,d\Omega} \qquad (8.1\ \text{ख})$$

इस तरह हम अवकली परिक्षेत्र को निम्नलिखित अनुपात के रूप में लिख सकते हैं :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{दिशा } (\theta, \phi) \text{ में बने घन कोण } d\Omega \text{ में इकाई समय में प्रकीर्ण कणों की संख्या}}{\text{आपाती अभिवाह यानि कि इकाई समय में इकाई लक्ष्य क्षेत्रफल पर आपतित कणों की संख्या}}$$

आप देख सकते हैं कि अनुपात के रूप में परिभाषित अवकली परिक्षेत्र (dcs) वास्तव में एक घटना की प्रायिकता (probability) की माप है। यह उस प्रायिकता की माप है जिससे कि आपतित कण दिशा (θ, ϕ) में घन कोण $d\Delta$ में प्रकीर्ण होंगे। आप यह भी देख सकते हैं कि $\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ की विमा (dimension) क्षेत्रफल की विमा है। इससे यह पता चलता है कि शब्द "परिक्षेत्र" (cross-section) का प्रयोग किसलिए किया जाता है। इस तरह अवकली परिक्षेत्र को हम ऐसे भी समझ सकते हैं : यह लक्ष्य का वह प्रभावी क्षेत्रफल है, जो आपतित कणों को प्रकीर्ण करता है।

इसकी अधिक परिशुद्ध व्याख्या हम ऐसे कर सकते हैं :

$\dfrac{d\sigma}{d\Omega}$ आपतित किरण पुंज के उस परिक्षेत्र के बराबर है जिसमें वे सभी आपतित कण होते हैं जिन्हें लक्ष्य का एक कण घन कोण $d\Omega$ में प्रकीर्ण करता है। अवकली परिक्षेत्र का मात्रक $m^2 sr^{-1}$ है। अवकली परिक्षेत्र का मान केवल आपतित कणों के प्राचलों (parameters), लक्ष्य की प्रकृति और उन दोनों की अन्योन्यक्रिया पर निर्भर करता है।

अभी तक हमने लक्ष्य के एक कण या प्रकीर्णन केन्द्र (scattering centre) से कणों के प्रकीर्णन की बात की है। लक्ष्य के N प्रकीर्णन केन्द्रों के लिए प्रकीर्ण कणों की संख्या क्या होगी? निश्चय ही यह संख्या एक प्रकीर्णन केन्द्र द्वारा प्रकीर्ण कणों की संख्या का ठीक N गुना होगी। इस तरह, N-प्रकीर्णन केन्द्रों द्वारा प्रकीर्ण कणों की संख्या होगी

$$\Delta n = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) NF\,(d\Omega)\,(\Delta t) \tag{8.1 ग}$$

पर 8.1 ग तभी सही होता है जबकि प्रकीर्णन केन्द्रों के बीच की दूरी काफ़ी ज़्यादा हो ताकि एक ही आपतित कण दो केन्द्रों से प्रकीर्ण न हो। अवकली परिक्षेत्र की परिभाषा देने के बाद अब हम आपको पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र (total scattering cross-section) के बारे में बताएंगे।

8.2.2 पूर्ण परिक्षेत्र

आइए अब हम संसूचक को (θ, ϕ) के सभी संभव मानों पर रखकर सभी संगत घन कोणों $(d\Omega)$ में प्रवेश कर रहे प्रकीर्ण कणों की कुल संख्या गिन लें। तब हमें **पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र** (total scattering cross-section) प्राप्त होता है। इसे σ से प्रकट किया जाता है और संक्षेप में tcs भी कहा जाता है। इसका मान $d\Omega$ के सभी संभव मानों पर अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र का समाकलन करके निकाला जा सकता है। इस तरह,

$$\sigma = \int \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) d\Omega. \tag{8.2 क}$$

इस तरह पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र आपतित कणों के इकाई अभिवाह (unit flux) के लिए, सभी दिशाओं में इकाई समय में प्रकीर्ण कणों की संख्या के बराबर है। इसकी विमाएँ भी क्षेत्रफल की विमाएँ होती हैं। इसलिए इसका मात्रक m^2 है। अब परिभाषा से एक क्षेत्र द्वारा अंतरित घन कोण $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$ भी होता है, जहां θ और ϕ की सीमाएँ क्रमशः 0 से π और 0 से 2π हैं। आप इन संबंधों के बारे में भौतिकी में गणितीय विधियां-I नामक पाठ्यक्रम में पढ़ेंगे। इन संबंधों से हमें प्राप्त होता है :

$$\sigma = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \sin\theta\, d\theta\, d\phi. \tag{8.2 ख}$$

हम यह दिखा सकते हैं कि उन स्थितियों में जिनमें बल केन्द्रीय हो और उसका परिमाण केवल r पर निर्भर करता हो, $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, ϕ पर निर्भर नहीं करता। हम इस परिणाम को यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे। तब हम ϕ पर समाकलन कर सकते हैं जिससे कि

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) \sin\theta\, d\theta. \tag{8.2 ग}$$

हम अपनी चर्चा केवल उन स्थितियों तक ही सीमित रखेंगे जिनमें $\frac{d\sigma}{d\Omega}$, ϕ पर निर्भर नहीं करता, अर्थात् यह ϕ के सभी मानों के लिए समान होता है। अब हम इन संकल्पनाओं पर आधारित एक उदाहरण हल करेंगे। इसके बाद, इन संकल्पनाओं को आपने अच्छी तरह से समझा है कि नहीं, यह परखने के लिए आप एक बोध प्रश्न कर सकते हैं।

उदाहरण 1

$3 \times 10^{8}\,m^{-2}s^{-1}$ अभिवाह वाला α-कणों का एक किरण-पुंज एलुमिनियम की एक पतली पन्नी **पर**, जिसमें 10^{21} परमाणु हैं, आपतित होता है। आपाती किरण-पुंज की लांबिक दिशा में लक्ष्य से 0.6 m दूरी पर 400 mm^2 के परिक्षेत्र वाला एक संसूचक रखा गया है। यदि α- कणों का संसूचन-दर (detection rate) $8.1 \times 10^3 s^{-1}$ हो, तो अवकली परिक्षेत्र (dcs) का मान निकालिए।

यहां हम अवकली परिक्षेत्र निकालने के लिए समीकरण 8.1 ग का प्रयोग करेंगे। यहां दिया गया है कि अभिवाह $F = 3 \times 10^{8} m^{-2}s^{-1}$, $\theta = 90°$ α-कणों की संसूचन दर $\frac{\Delta n}{\Delta t} = 8.1 \times 10^3 s^{-1}$ है, और लक्ष्य परमाणुओं की संख्या $N = 10^{21}$

समीकरण 8.1 ग से

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{\Delta n}{\Delta t}\right)\left(\frac{1}{NF}\right)\left(\frac{1}{d\Omega}\right)$$

यहां $d\Omega$, $\theta = 90°$ पर, लक्ष्य पर संसूचक द्वारा अंतरित घन कोण है। चित्र 8.4 क के शीर्षक से आप जानते हैं कि

$$d\Omega = \frac{dA}{L^2},$$

जहां dA संसूचक का क्षेत्रफल है, और L लक्ष्य से उसकी दूरी है।

इस तरह $d\Omega = \dfrac{(400 \times 10^{-6})\ m^2}{(0.6\ m)^2} = 1.1 \times 10^{-3} sr$

इसलिए $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = \dfrac{8.1 \times 10^{3} s^{-1}}{10^{21} \times (3 \times 10^{9} m^{-2} s^{-1}) \times 1.1 \times 10^{-3} sr} = 2.4 \times 10^{-23} m^2 sr^{-1}$

बोध प्रश्न 1

न्यूट्रॉनों के एक किरण पुंज को पैराफ़िन से गुज़ारा जाता है। इसका आपतित अभिवाह $5 \times 10^{10} m^{-2} s^{-1}$ है। कोण 60° पर अवकली परिक्षेत्र का माप $1.5 \times 10^{-26} m^2 sr^{-1}$ है। (i) एक पैराफ़िन अणु और (ii) 10^{12} पैराफ़िन अणुओं द्वारा इकाई समय में घन कोण $10^{-3} sr$ में प्रकीर्ण कणों की संख्या निकालिए।

अभी तक हमने अवकली परिक्षेत्र (dcs) और पूर्ण परिक्षेत्र (tcs) की परिभाषा दी है। अब हम यह देखेंगे कि विभिन्न प्रकीर्णन प्रक्रियाओं के लिए इन्हें किस तरह निकाला जा सकता है। इसके लिए परिक्षेत्रों के बारे में हमें कुछ और जानकारी चाहिए। आइए देखें कि यह अतिरिक्त जानकारी क्या है?

प्रयोगकर्त्ता इन परिक्षेत्रों को प्रयोगशाला में मापते हैं। सैद्धांतिक भौतिकीविद् अन्योन्यक्रिया-बलों के मॉडल बनाकर इन परिक्षेत्रों का परिकलन करते हैं। यदि परिक्षेत्रों के परिकलित किए गए मान, प्रयोगों में मापे गए उनके मानों से मेल खाते हों तो यह माना जाता है कि सैद्धांतिक भौतिकीविद् द्वारा बताया गया मॉडल सही है।

जब प्रयोगशाला में प्रकीर्णन-प्रयोग किया जाता है, तब वहां लक्ष्य को विरामावस्था में रखा जाता है। पर परिक्षेत्र का परिकलन करने में उस निर्देश तंत्र का प्रयोग करना अधिक सरल होता है जिसमें संहति केन्द्र (c.m.) विरामावस्था में हो जैसा कि आप इकाई 7 में पढ़ चुके हैं। इस स्थिति में द्वि-पिंड प्रश्न को एक-पिंड प्रश्न में बदला जा सकता है (देखिए भाग 7.2.1)। ऐसे में हमें केवल लक्ष्य और आपतित कण की सापेक्ष गति पर ही विचार करना होता है। अब हमारा पहला सवाल यह है कि मापे गए परिक्षेत्र की तुलना परिकलित किए गए परिक्षेत्र से कैसे की जाए? इसके लिए हमें इन निर्देश तंत्रों की परिभाषा देनी होगी और इन निर्देश तंत्रों में मापे गए और परिकलित किए गए परिक्षेत्रों का आपसी संबंध मालूम करना होगा।

8.2.3 प्रायोगिक और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र

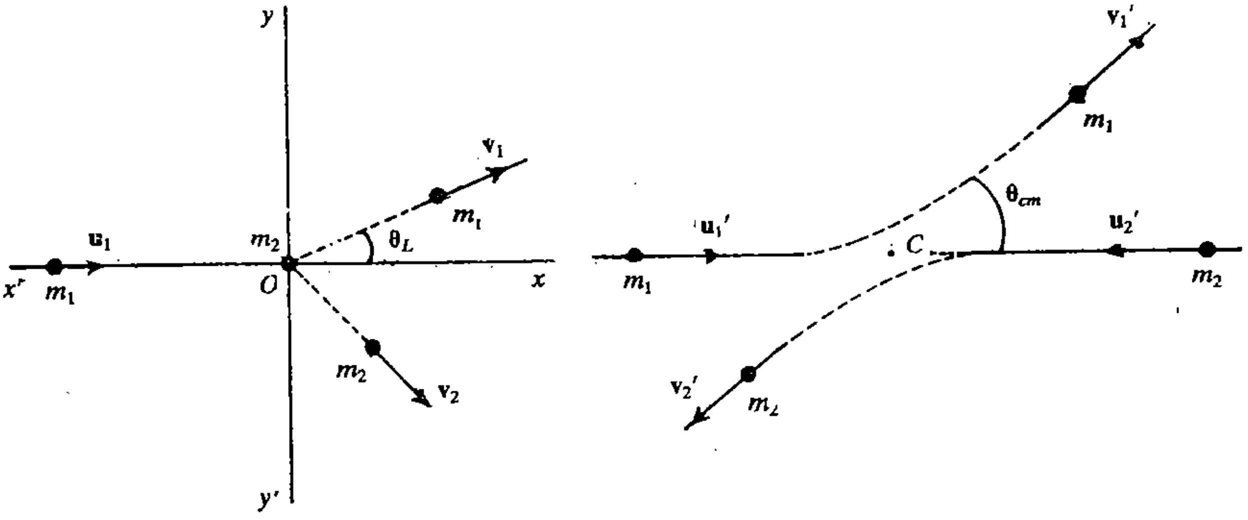
प्रायोगिक निर्देश तंत्र (Laboratory frame of reference) में (चित्र 8.5 क), संघट्टन के पहले, द्रव्यमान m_2 वाले लक्ष्य-कण को विरामावस्था में रखा जाता है। इसे निर्देश तंत्र के मूल बिन्दु O पर स्थित माना जाता है। मान लीजिए कि द्रव्यमान m_1 वाला एक कण, $\mathbf{u}_1$ वेग से लक्ष्य पर आपतित होता है। मान लीजिए कि संघट्टन के बाद क्षण t पर O के सापेक्ष लक्ष्य कण और प्रकीर्ण कण के स्थिति सदिश (position vectors) क्रमशः $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ हैं। समीकरण 7.2 के अनुसार संघट्टन के बाद प्रायोगिक निर्देश तंत्र में संहति केन्द्र के स्थिति सदिश और वेग सदिश होते हैं

$$\mathbf{R} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}, \tag{8.3 क}$$

$$\mathbf{V} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1\mathbf{u}_1}{m_1 + m_2}, \tag{8.3 ख}$$

क्योंकि रैखिक-संवेग-संरक्षण नियम के अनुसार $m_1\mathbf{u}_1 = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$.

संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में संघट्टन का अध्ययन करना ज़्यादा आसान होता है। जैसा कि आप जानते हैं इस निर्देश तंत्र में संहति केन्द्र को शुरू में और हमेशा ही विरामावस्था में रखा जाता है



चित्र 8.5 : (क) प्रायोगिक निर्देश तंत्र जिसमें प्रारंभ में द्रव्यमान m_2 वाला लक्ष्य कण विरामावस्था में होता है; (ख) संहति केंद्र निर्देश तंत्र जिसमें प्रारंभ में और हमेशा संहति केंद्र (C) विरामावस्था में होता है।

(चित्र 8.5 ख)। निर्देश तंत्र का मूल-बिन्दु संहति केंद्र पर होता है। चूंकि संहति केन्द्र हमेशा विरामावस्था में रहता है, इसलिए संघट्टन के पहले और बाद में इसका रैखिक संवेग और इस तरह पूरे निकाय का रैखिक संवेग शून्य होगा। मान लीजिए कि दो कणों वाले इस निकाय के लिए संहति-केन्द्र निर्देश तंत्र में संघट्टन से पहले कणों के वेग $\mathbf{u}_1'$ और $\mathbf{u}_2'$ हैं। तब संहति केन्द्र का वेग शून्य लेने पर हमें प्राप्त होता है

$$m_1\mathbf{u}_1' + m_2\mathbf{u}_2' = \mathbf{0} = m_1\mathbf{v}_1' + m_2\mathbf{v}_2' \qquad (8.4 \text{ क})$$

या $$-\frac{\mathbf{u}_2'}{\mathbf{u}_1'} = \frac{m_1}{m_2} = -\frac{\mathbf{v}_2'}{\mathbf{v}_1'}. \qquad (8.4 \text{ ख})$$

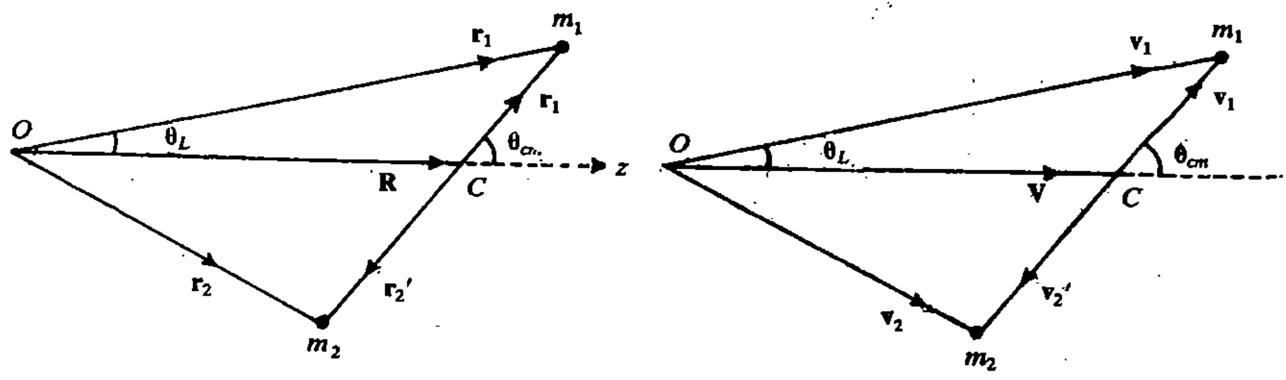
इस तरह, हम यह पाते हैं कि संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में संघट्टन के पहले और संघट्टन के बाद कणों के संवेग बराबर और विपरीत दिशा में होते हैं। आप समीकरण 8.4 क और समीकरण 8.4 ख से यह देख सकते हैं कि प्रत्यास्थ संघट्टन (elastic scattering) में प्रकीर्णन के दौरान कणों की चाल नियत बनी रहती है। इसके लिए आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को स्वयं करके देखिए।

बोध प्रश्न 2

दिखाइए कि संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में प्रत्यास्थ संघट्टनों के लिए $u_1' = v_1'$, $u_2' = v_2'$
(संकेत : भाग 3.4 में दिए गए प्रत्यास्थ संघट्टन की परिभाषा को फिर से याद कीजिए और समीकरण 8.4 क और समीकरण 8.4 ख के साथ गतिज ऊर्जा संरक्षण के प्रतिबंध को लागू कीजिए।)

आपने यहाँ प्रायोगिक निर्देश तंत्र और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र के बारे में पढ़ा। अब हम इन निर्देश तंत्रों में प्रकीर्णन कोणों और अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्रों के बीच के संबंध को मालूम करना चाहेंगे। इसके लिए आइए हम पहले इन दोनों निर्देश तंत्रों में प्रकीर्णन के बाद कणों के स्थिति सदिशों और वेग सदिशों के संबंध पर विचार करें।

आपको याद होगा कि हमने आपाती दिशा को z-अक्ष के अनुदिश माना है। संघट्टन के बाद प्रायोगिक निर्देश तंत्र के मूल बिन्दु O के सापेक्ष m_1 और m_2 के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_1$ और $\mathbf{r}_2$ हैं। मूल बिन्दु O के सापेक्ष संहति केन्द्र (C) का स्थिति सदिश $\mathbf{R}$ है। मान लीजिए कि $\mathbf{r}_1'$ और $\mathbf{r}_2'$ संघट्टन के बाद C के सापेक्ष m_1 और m_2 के स्थिति सदिश हैं। जैसा कि आप संहति केन्द्र की परिभाषा से जानते हैं, यह m_1 और m_2 को मिलाने वाली रेखा पर स्थित होता है। अतः $\mathbf{r}_1'$ और $\mathbf{r}_2'$ भी इसी रेखा पर स्थित होंगे। अतः हम एक सदिश आरेख (vector diagram) द्वारा सदिशों $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{r}_1'$ और $\mathbf{r}_2'$ में संबंध स्थापित कर सकते हैं जैसा कि चित्र 8.6 क में दिखाया गया है।



(क) (ख)

चित्र 8.6 : संघट्टन के बाद प्रायोगिक निर्देश तंत्र और संहति केंद्र निर्देश तंत्र में संघट्टनी कणों के (क) स्थिति सदिशों और (ख) वेगों में संबंध।

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1', \qquad \mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1'. \tag{8.5 क}$$

कण 2 के सापेक्ष कण 1 की आपेक्षिक स्थिति $\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ है। समीकरण 8.5 क से आप यह देख सकते हैं कि

$$\mathbf{r}_{21} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_1' - \mathbf{r}_2' \equiv \mathbf{r}, \text{ माना।} \tag{8.5 ख}$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि दोनों निर्देश तंत्रों में दोनों कणों के बीच की दूरी समान होती है। समीकरण 8.4 क, समीकरण 8.5 क और समीकरण 8.5 ख की मदद से हम $\mathbf{r}_1'$ और $\mathbf{r}_2'$ को $\mathbf{r}$ के पदों में लिख सकते हैं :

$$\mathbf{r}_1' = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\mathbf{r}, \qquad \mathbf{r}_2' = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\mathbf{r}. \tag{8.6}$$

समीकरण 8.5 क को अवकलित करके हम प्रकीर्णन के बाद दोनों निर्देश तंत्रों के वेग सदिशों में संबंध स्थापित कर सकते हैं :

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{v}_1', \tag{8.7 क}$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{V} + \mathbf{v}_2', \tag{8.7 ख}$$

इसी प्रकार के संबंध हम प्रकीर्णन से पहले कण 1 और कण 2 के स्थिति सदिशों और वेग-सदिशों के बीच भी निकाल सकते हैं, जिससे कि

$$\mathbf{u}_1 = \mathbf{V} + \mathbf{u}_1', \tag{8.7 ग}$$

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{V} + \mathbf{u}_2', \tag{8.7 घ}$$

क्योंकि प्रायोगिक निर्देश तंत्र में प्रारंभ में कण 2 विरामावस्था में होता है, इसलिए $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$ और तब

$$\mathbf{u}_2' = -\mathbf{V}. \tag{8.7 ङ}$$

8.3 से 8.7 तक के समीकरणों की मदद से हम प्रायोगिक निर्देश तंत्र और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में क्रमशः प्रकीर्णन कोणों और प्रकीर्णन परिक्षेत्रों के बीच का संबंध निकाल सकते हैं।

8.2.4 प्रायोगिक निर्देश तंत्र और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में कोणों और प्रकीर्णन परिक्षेत्रों में संबंध

मान लीजिए कि θ_L और θ_{cm} क्रमशः प्रायोगिक निर्देश तंत्र और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में प्रकीर्णन कोण हैं (देखिए चित्र 8.6)। समीकरण 8.7 क को प्रारंभिक z-दिशा और इसकी लांबिक

दिशा के घटकों में वियोजित करने पर (देखिए चित्र 8.6 ख) हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$v_1 \cos\theta_L = v_1' \cos\theta_{cm} + V, \tag{8.8 क}$$

$$v_1 \sin\theta_L = v_1' \sin\theta_{cm}. \tag{8.8 ख}$$

समीकरण 8.8 ख को समीकरण 8.8 क से भाग देने पर

$$\tan\theta_L = \frac{v_1' \sin\theta_{cm}}{v_1' \cos\theta_{cm} + V} = \frac{\sin\theta_{cm}}{\cos\theta_{cm} + \dfrac{V}{v_1'}}$$

$$\text{या } \tan\theta_L = \frac{\sin\theta_{cm}}{\cos\theta_{cm} + \gamma}, \text{ जहां } \gamma = \frac{V}{v_1'} \tag{8.9}$$

आप देख सकते हैं कि γ प्रायोगिक निर्देश तंत्र में संहति केन्द्र की चाल और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में प्रेक्षित प्रकीर्ण कण की चाल का अनुपात है। प्रत्यास्थ और अप्रत्यास्थ प्रकीर्णन दोनों में ही γ का मान निकाला जा सकता है। पर, हम अपना अध्ययन केवल प्रत्यास्थ प्रकीर्णन तक ही सीमित रखेंगे। अतः आइए अब हम प्रत्यास्थ प्रकीर्णन के लिए γ का मान निकालें।

प्रत्यास्थ प्रकीर्णन के लिए γ का मान

आप बोध प्रश्न 2 में यह निकाल चुके हैं कि $v_1' = u_1'$.

हम समीकरण 8.7 ग और समीकरण 8.3 ख से V के पदों में u_1' प्राप्त कर सकते हैं :

$$\mathbf{u}_1' = \mathbf{u}_1 - \mathbf{V} = \frac{(m_1 + m_2)}{m_1}\mathbf{V} - \mathbf{V} = \frac{m_2}{m_1}\mathbf{V},$$

$$\text{या } u_1' = \frac{m_2}{m_1} V \tag{8.10 क}$$

इस तरह, प्रत्यास्थ प्रकीर्णन के लिए

$$\gamma = \frac{V}{v_1'} = \frac{V}{u_1'} = \frac{m_1}{m_2} \tag{8.10 ख}$$

अब आप इन संबंधों को लागू करने के लिए एक प्रश्न हल करने की कोशिश कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 3

पायॉन-प्रोटॉन प्रकीर्णन (pion-proton scattering) में अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र मापने के लिए एक प्रयोग की व्यवस्था की गई है। संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में प्रकीर्णन कोण 70° है और पायॉन की गतिज ऊर्जा 490 keV है (eV ऊर्जा का परमाणु मात्रक है)। प्रायोगिक निर्देश तंत्र में वह संगत कोण मालूम कीजिए जिस पर प्रकीर्ण पायॉनों का संसूचन किया जा सके और eV मात्रक में पायॉन पुंज की अपेक्षित प्रायोगिक गतिज ऊर्जा निकालिए। पायॉन-द्रव्यमान और प्रोटॉन द्रव्यमान का

आइए अब हम प्रायोगिक निर्देश तंत्र और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्रों के बीच का संबंध निकालें। प्रायोगिक निर्देश तंत्र और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र दोनों में ही आपाती अभिवाह F बराबर होगा। साथ ही घन कोण $d\Omega$ में इकाई समय में प्रकीर्ण कणों की संख्या (Δn) भी बराबर होगी। अतः समीकरण 8.1 क से हमें निम्नलिखित प्रतिबंध मिलता है

$$\Delta n = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} F\,(d\Omega)_{lab}\,\Delta t = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} F\,(d\Omega)_{cm}\,\Delta t.$$

$$\text{या } \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} (d\Omega)_{lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} (d\Omega)_{cm} \tag{8.11 क}$$

समीकरण 8.2 क और समीकरण 8.2 ख से हम यह जानते हैं कि $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\phi$. चूंकि यहां हम उस स्थिति पर विचार कर रहे हैं जिसमें परिक्षेत्र ϕ से स्वतंत्र है, इसलिए हम $d\phi_{lab} = d\phi_{cm}$ लिख सकते हैं, जिससे कि

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} \frac{\sin\theta_{cm}\, d\theta_{cm}}{\sin\theta_L\, d\theta_L},$$

$$\text{या} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} \frac{d(\cos\theta_{cm})}{d(\cos\theta_L)}, [\because d(\cos\theta) = -\sin\theta\, d\theta] \qquad (8.11 \text{ ख})$$

समीकरण 8.9 की मदद से हम समीकरण 8.11 ख को और अधिक सरल कर सकते हैं।

चूंकि $\tan\theta_L = \dfrac{\sin\theta_{cm}}{\cos\theta_{cm} + \gamma}$

इसलिए आप यह दिखा सकते हैं कि

$$\cos\theta_L = \frac{\cos\theta_{cm} + \gamma}{(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\theta_{cm})^{1/2}},$$

$$\text{और } \frac{d(\cos\theta_L)}{d(\cos\theta_{cm})} = \frac{1 + \gamma\cos\theta_{cm}}{(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\theta_{cm})^{3/2}}$$

इस तरह, हमें निम्नलिखित संबंध प्राप्त होता है :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \frac{(1 + \gamma^2 + 2\gamma\cos\theta_{cm})^{3/2}}{(1 + \gamma\cos\theta_{cm})} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} \qquad (8.11 \text{ ग})$$

हमें $\left(\dfrac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$ का मान सैद्धांतिक मॉडल से प्राप्त होता है। समीकरण 8.11 ग हमें बताता है कि प्रयोग से प्राप्त आंकड़ों से इसकी तुलना करने के लिए किस प्रकार प्रायोगिक निर्देश तंत्र में इसका मान निकाला जा सकता है।

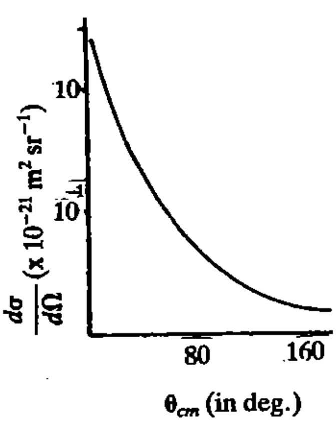
क्योंकि प्रत्यास्थ प्रकीर्णन के लिए $\gamma = \dfrac{m_1}{m_2}$ इसलिए

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \frac{(1 + m_1^2/m_2^2 + 2\, m_1/m_2 \cos\theta_{cm})^{3/2}}{(1 + m_1/m_2 \cos\theta_{cm})} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} \qquad (8.12)$$

यदि लक्ष्य और आपतित कण के द्रव्यमान बराबर हों, अर्थात् $m_2 = m_1$ तो समीकरण 8.12 हो जाएगा

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = 4\cos\frac{\theta_{cm}}{2} \cdot \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} \qquad (8.13)$$

दोनों ही निर्देश तंत्रों में पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र समान होंगे। इन समीकरणों को लागू करने के लिए आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करें।



चित्र 8.7

बोध प्रश्न 4

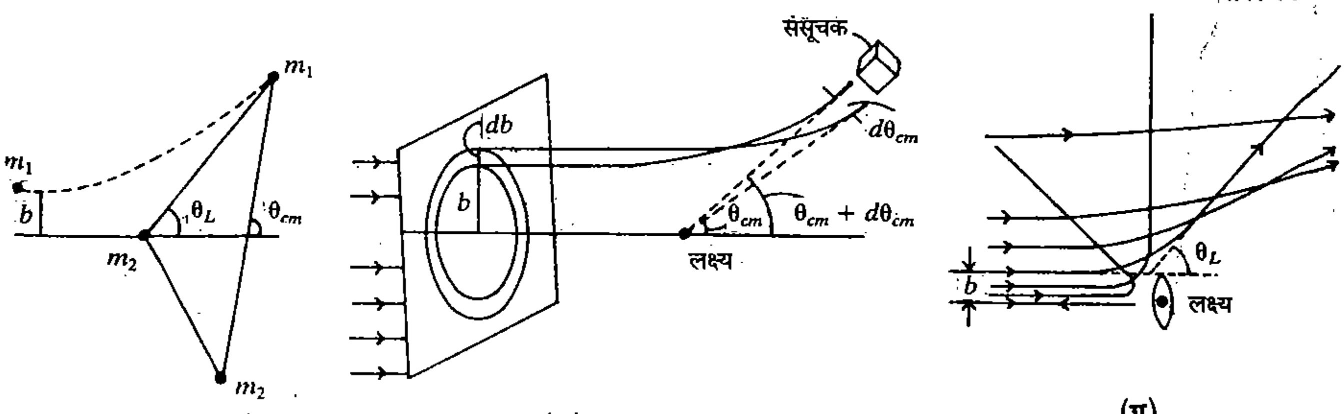
(क) एक प्रोटॉन-प्रोटॉन प्रत्यास्थ प्रकीर्णन प्रयोग में 30° और 60° के प्रकीर्णन कोणों पर मापे गए अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्रों के मान क्रमशः $2.3 \times 10^{-27} m^2 sr^{-1}$ और $2.6 \times 10^{-28} m^2 sr^{-1}$ हैं। संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में संगत राशियाँ ज्ञात कीजिए।

(ख) चित्र 8.7 में, संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में इलेक्ट्रॉनों के लिथियम-परमाणुओं द्वारा प्रत्यास्थ प्रकीर्णन के लिए प्रकीर्णन कोण के साथ अवकली परिक्षेत्र (dcs) में हो रहे परिवर्तन को दिखाया गया है। प्रायोगिक निर्देश तंत्र में संगत वक्र क्या होगा?

अभी तक हमने प्रायोगिक निर्देश तंत्र और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में प्रकीर्णन परिक्षेत्रों की परिभाषा दी है और प्रकीर्णन कोणों और परिक्षेत्रों के बीच के संबंधों को निकाला है। आइए अब हम कुछ प्रकीर्णन प्रक्रियाओं के लिए प्रकीर्णन परिक्षेत्र निकालें। इसके लिए आम तौर पर इस्तेमाल होने वाले तरीके में संघट्ट प्राचलों (impact parameters) का प्रयोग होता है। आइए अब हम इस तरीके के बारे में पढ़ें।

8.3 संघट्ट प्राचल

माना कि आपतित कण की लक्ष्य के साथ सीधे टक्कर नहीं होती बल्कि वह लक्ष्य से दूरी b पर एक सीधी रेखा में आपतित होता है (चित्र 8.8क)। प्रकीर्णन प्रयोगों में ऐसा अक्सर ही होता है। दूरी b को **संघट्ट प्राचल** (impact parameter) कहा जाता है। आप यह देख सकते हैं कि दूरी b आपतित कणों के प्रारंभिक पथ और लक्ष्य के बीच की लांबिक दूरी है।



चित्र 8.8 : (क) संघट्ट प्राचल b; (ख) b और $b + db$ के बीच के संघट्ट प्राचल वाले कण, θ_{cm} और $\theta_{cm} + d\theta_{cm}$ के बीच के कोण में प्रकीर्ण होते हैं; (ग) संघट्ट प्राचल का मान बढ़ने के साथ प्रकीर्णन कोण का मान कम हो जाता है।

आइएँ अब हम अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्रों को संघट्ट प्राचल के पदों में लिखें। इसके लिए हम संहति केन्द्र निर्देश तंत्र का इस्तेमाल करेंगे जहाँ θ_{cm} प्रकीर्णन कोण है (चित्र 8.8 ख)। अब सवाल यह उठता है कि समय Δt में लक्ष्य पर आपतित उन कणों की संख्या क्या है जिनके संघट्ट प्राचलों के मान b और $b + db$ के बीच में हों? इसके लिए आइए हम b और $b + db$ के बीच की त्रिज्याओं वाला एक वृत्ताकार वलय लें। यदि db का मान अत्यणु (infinitesimal) हो तो वलय का क्षेत्रफल $2\pi b\, db$ होगा। यदि F आपाती अभिवाह हो तो

b और $b + db$ के बीच संघट्ट प्राचल वाले आपाती कणों की संख्या $= F(\Delta t)(2\pi b\, db)$. (8.14)

आइए हम यह मान लें कि ये कण θ_{cm} और $\theta_{cm} + d\,\theta_{cm}$ के बीच के कोणों में प्रकीर्ण होते हैं। अधिक b वाले कण छोटे कोणों में प्रकीर्ण होंगे जैसा कि चित्र 8.8 ग में दिखाया गया है। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि b के अधिक मान का अर्थ है कि आपतित कण लक्ष्य से ज़्यादा दूरी पर हैं यानि कि इनके बीच की अन्योन्यक्रिया कम है। अर्थात् ऐसे कणों का प्रकीर्णन कम होगा। अगर b का मान बहुत अधिक हो तो बहुत ही कम प्रकीर्णन होगा और तब आपतित कण बिना विचलित हुए एक सीधी रेखा में जाने लगेंगे। अब, समीकरण 8.1 क के अनुसार संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में समय Δt में घन कोण $d\Omega$ में प्रकीर्ण कणों की संख्या है :

$$\Delta n = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} F\,(d\Omega)_{cm}\,\Delta t.$$

यह संख्या वही है जो कि समीकरण 8.14 के अनुसार समय Δt में b और $b + db$ के बीच के संघट्ट प्राचलों वाले आपाती कणों की संख्या है, अर्थात्

$$F(\Delta t)\,2\pi b\,db = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} F\,(d\Omega)\,\Delta t,$$

$$\text{या } 2\pi b\,db = -\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} 2\pi\sin\theta_{cm}\,d\theta_{cm}. \qquad (8.15\text{ क})$$

यहाँ हमने यह मान लिया है कि $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$, ϕ पर निर्भर नहीं करता। $d\Omega$ में ϕ के सभी मानों को लेने पर $d\Omega = 2\pi\sin\theta\, d\theta$. समीकरण 8.15 क में ऋण चिह्न से यह पता चलता है कि b में वृद्धि होने पर θ_{cm} में कमी आती है अर्थात् db और $d\theta_{cm}$ विपरीत चिह्न वाले हैं। समीकरण 8.15 क से हमें प्राप्त होता है

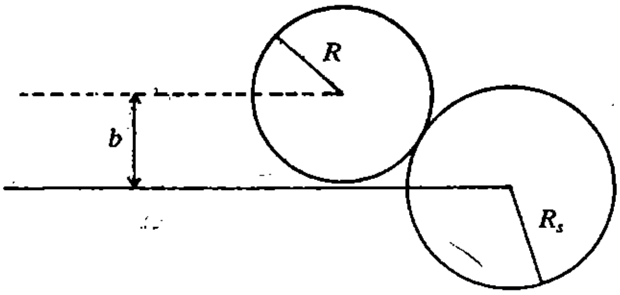
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{b}{\sin\theta_{cm}}\left|\frac{db}{d\theta_{cm}}\right| \qquad (8.15\text{ ख})$$

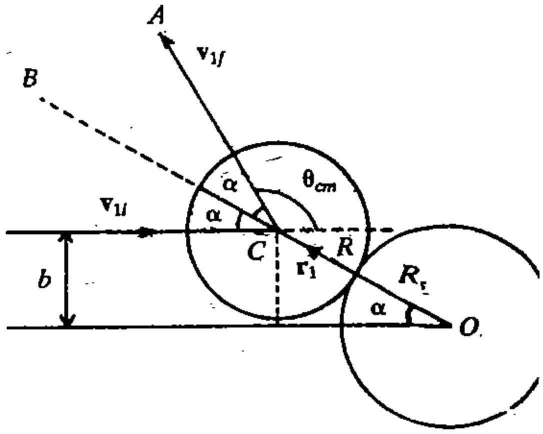
हमने समीकरण 8.15 ख में ऋण चिह्न नहीं लगाया है क्योंकि $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$ की विमाएं क्षेत्रफल की विमाएं हैं। और इसका परिमाण हमेशा धनात्मक होगा। अतः किसी भी प्रकीर्णन प्रक्रिया के लिए अगर हम b को प्रकीर्णन कोण θ_{cm} के एक फलन के रूप में निकाल सकें तो समीकरण 8.15 ख की सहायता से हम अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र परिकलित कर सकते हैं।

अब प्रश्न उठता है कि हम किस तरह b को θ_{cm} के एक फलन के रूप में ज्ञात करेंगे? b **(θ_{cm}) ज्ञात** करने के लिए यहाँ हम किसी व्यापक विधि की चर्चा नहीं करेंगे। यहाँ हम समीकरण 8.15 ख के अनुप्रयोग के रूप में दो विशिष्ट स्थितियों अर्थात् **अभेद्य गुलिका प्रकीर्णन** (hard sphere scattering) और **रदरफ़र्ड प्रकीर्णन** के बारे में बताएंगे।

8.3.1 अभेद्य गुलिका प्रत्यास्थ प्रकीर्णन

आइए हम द्रव्यमान m_2 और त्रिज्या R_S वाले लक्ष्य गोले द्वारा द्रव्यमान m_1 और त्रिज्या R वाले गोले के प्रत्यास्थ प्रकीर्णन पर विचार करें (चित्र 8.9 क)। मान लीजिए कि किसी भी समय पर इन दोनों के केन्द्रों के बीच की दूरी r है।





चित्र 8.9 : (क) दो अभेद्य गोलों का प्रत्यास्थ प्रकीर्णन; (ख) लक्ष्य अभेद्य गोले से प्रकीर्ण होने के बाद आपतित अभेद्य गोला α के बराबर कोण से ही प्रतिक्षिप्त (rebound) होता है। ध्यान दें कि α आपतन कोण है।

लक्ष्य अभेद्य गोले से प्रतिक्षिप्त (rebound) होने के बाद आपाती अभेद्य गोला प्रकीर्ण होता है। आप जानना चाहेंगे कि अभेद्य गुलिका या अभेद्य गोले (hard sphere) का क्या मतलब है? इसका अर्थ यह है कि इन गोलों के बीच की दूरी $(R + R_S)$ से कम नहीं हो सकती। अतः हम यह कह सकते हैं कि $r < (R + R_S)$ पर इनके बीच का बल या विभव अनंत होता है। दूरी $r > (R + R_S)$ पर संघट्टन से पहले और बाद में गोले मुक्त रूप से घूम सकते हैं, यानि कि इन दूरियों पर उनके बीच कोई बल नहीं लगता। गणितीय रूप में हम इस स्थिति को विभव $V(r)$ के पदों में व्यक्त कर सकते हैं जिससे कि

$$V(r) = \infty, \; r < (R + R_S) \text{ के लिए}$$
$$= 0, \; r > (R + R_S) \text{ के लिए।} \quad (8.16)$$

हम जानते हैं कि $F = -\dfrac{dV}{dr}$. अतः आप यह देख सकते हैं कि इस विभव के संगत गोले पर लगा हुआ बल $r < (R + R_S)$ पर अनंत और $r > (R + R_S)$ पर शून्य होता है। इसका मतलब है कि $r > (R + R_S)$ पर बलआघूर्ण (torque) शून्य है। और क्योंकि बल आघूर्ण $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{L}}{dt}$, इसलिए संघट्टन के पहले और बाद में संपूर्ण कोणीय संवेग अचर बना रहेगा।

आइए अब हम इस प्रक्रिया के लिए b और θ_{cm} में संबंध निकालें। इसके लिए चित्र 8.9 ख देखिए। प्रत्यास्थ संघट्टन में गतिज ऊर्जा (K.E.) संरक्षित होती है। बोध प्रश्न 2 में आप यह हल कर ही चुके हैं कि प्रत्यास्थ प्रकीर्णन में, संघट्टन के पहले और बाद लक्ष्य की चाल और आपतित कण की चाल समान बनी रहती है। मान लीजिए कि m_1 के प्रारंभिक वेग $\mathbf{v}_{1i}$ की दिशा, और संघट्टन के क्षण पर दोनों गोलों के केन्द्रों को मिलाने वाली रेखा के बीच का कोण α है जैसा कि चित्र 8.9 ख में दिखाया गया है। मान लीजिए कि लक्ष्य गोले के केन्द्र के सापेक्ष आपतित गोले के केन्द्र का स्थिति सदिश $\mathbf{r}_1$ है। संघट्टन के ठीक पहले m_2 के सापेक्ष m_1 के कोणीय संवेग का परिमाण होगा

$$L_1 = m_1 |\mathbf{v}_{1i} \times \mathbf{r}_1| = m_1 v_{1i} r_1 \sin(\pi - \alpha) = m_1 v_{1i} r_1 \sin\alpha$$

और संघट्टन के ठीक बाद परिमाण होगा

$$L_1 = m_1 |\mathbf{v}_{1f} \times \mathbf{r}_1| = m_1 v_1 \; r_1 \sin \angle ACB$$

क्योंकि बोध प्रश्न 2 से, प्रत्यास्थ प्रकीर्णन के लिए $v_{1i} = v_{1f}$ इसलिए

$$m_1 v_{1i} r_1 \sin \alpha = m_1 v_{1i} r_1 \sin \angle ACB \text{ यानि कि } \angle ACB = \alpha$$

इस तरह गोले m_2 से टकराकर गोला m_1 अभिलंब से आपतन कोण (angle of incidence) α के बराबर कोण बनाते हुए प्रतिक्षिप्त होगा। इसलिए चित्र 8.9 ख से आप देख सकते हैं कि

$$\theta_{cm} = \pi - 2\alpha. \tag{8.17}$$

अब हम चित्र 8.9 ख की मदद से संघट्ट प्राचल b का α के साथ संबंध निकाल सकते हैं।

$$b = r_1 \sin \alpha = (R + R_S) \sin \alpha$$

$$= (R + R_S) \sin \frac{\pi - \theta_{cm}}{2}, \text{ समीकरण 8.17 से।}$$

$$\text{या } b = (R + R_S) \cos \frac{\theta_{cm}}{2}, \tag{8.18 क}$$

$$\therefore \left(\frac{db}{d\theta_{cm}} \right) = - \frac{R + R_S}{2} \sin \frac{\theta_{cm}}{2}. \tag{8.18 ख}$$

तब समीकरण 8.15 ख से इस प्रक्रिया के लिए अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र होगा

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{b}{\sin \theta_{cm}} \frac{R + R_S}{2} \sin \frac{\theta_{cm}}{2}$$

$$= \left(\frac{b}{2 \cos \theta_{cm}/2} \right) \left(\frac{R + R_S}{2} \right)$$

समीकरण 8.18 क से $\dfrac{b}{\cos \theta_{cm}/2} = R + R_S$ का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{(R + R_S)^2}{4} \tag{8.19}$$

पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र होगा

$$\sigma = 2\pi \int_0^{\pi} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} \sin \theta_{cm} \, d\theta_{cm}$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi} \frac{(R + R_S)^2}{4} \sin \theta_{cm} \, d\theta_{cm},$$

$$\text{या } \sigma = \frac{2\pi (R + R_S)^2}{4} \times 2 = \pi (R + R_S)^2 \tag{8.20}$$

यदि आपतित गोले के स्थान पर एक बिन्दु कण होता तो पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र πR_S^2 होता जो कि लक्ष्य गोले का परिक्षेत्र है। अब आप इस भाग में बतायी गई संकल्पनाओं को लागू करने के लिए एक बोध प्रश्न को हल कर सकते हैं।

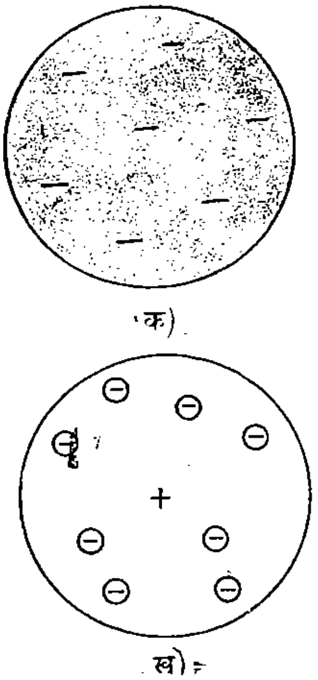
बोध प्रश्न 5

बिन्दु कणों का एक किरण पुंज एक दीवार पर आपतित होता है। दीवार का प्रत्येक परमाणु 3×10^{-15}m की त्रिज्या वाले एक गोले की तरह व्यवहार करता है। परमाणु के द्रव्यमान की तुलना में आपतित कण का द्रव्यमान काफ़ी कम है। किरण पुंज की दिशा से 60° पर रखे एक संसूचक में प्रवेश करने वाले कणों के अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र, पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र और संघट्ट प्राचल ज्ञात कीजिए।

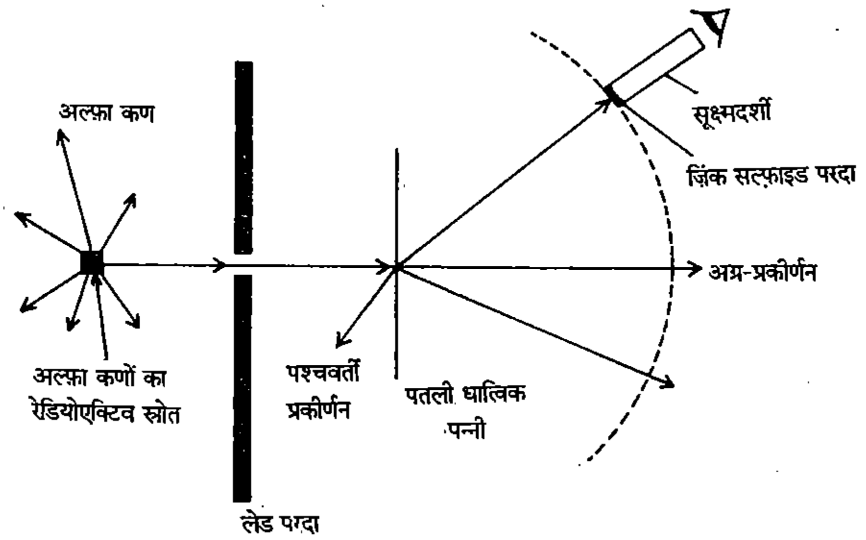
आइए अब हम समीकरण 8.15 ख के एक अन्य अनुप्रयोग, रदरफ़र्ड प्रकीर्णन का अध्ययन करें।

8.3.2 रदरफ़र्ड प्रकीर्णन

परमाणु की संरचना समझने में रदरफ़र्ड प्रकीर्णन प्रयोग एक महत्वपूर्ण मील का पत्थर रहा है। बीसवीं सदी की शुरुआत तक परमाणु के संबंध में थॉमसन का प्लम पुडिंग मॉडल (plumpudding model) ही सही माना जाता रहा। 1898 में जे.जे. थॉमसन ने यह मॉडल सुझाया था कि परमाणु धन आवेश के एक-समान गोले होते हैं जिनमें इलेक्ट्रॉन जड़े रहते हैं (चित्र 8.10 क)। इस मॉडल के दिए जानें के लगभग 13 वर्ष बाद ही इसका एक निश्चित प्रायोगिक परीक्षण किया जा सका। किसी भी चीज़ के अंदर क्या है, यह जानने का एक तरीक़ा है कि इसमें हाथ या उंगली डाल कर देखा जाये। ऐसा ही तरीक़ा 1911 में गाइगर और मार्स्डेन ने, जो लार्ड रदरफ़र्ड के साथ कार्य कर रहे थे, अपने प्रयोग में अपनाया। यह एक महत्वपूर्ण प्रयोग था। उन्होंने α-कणों (हीलियम नाभिक) द्वारा विभिन्न पदार्थों की पतली पन्नियों का अभिघात किया और प्रकीर्ण α-कणों के कोणीय वितरण को मापा (देखिए चित्र 8.11)।



चित्र 8.10 : (क) परमाणु के लिए थॉमसन का मॉडल; (ख) रदरफ़र्ड का नाभिकीय मॉडल।



चित्र 8.11 : रदरफ़र्ड प्रकीर्णन प्रयोग। एक छोटे छेद वाले लेड के पर्दे के पीछे α-कणों का स्रोत रख दिया गया है जिससे कि धातु की पतली पन्नी पर बारीक किरण पुंज पड़े। पन्नी के दूसरी ओर एक ज़िंक सल्फ़ाइड पर्दा रखा गया है जिसे एक स्थिति से दूसरी स्थिति तक खिसकाया जा सकता है। जब α-कण पर्दे पर पड़ता है, तो पर्दे में से प्रकाश का फ्लैश निकलता है जिससे कण की उपस्थिति का पता लग जाता है।

प्रयोग में यह पाया गया कि अधिकांश α-कण तो पन्नी से होकर गुज़र जाते हैं (अर्थात् $\theta < 90°$ के कोण पर प्रकीर्ण होते हैं)। फिर भी 6.17×10^6 अल्फ़ा कणों में से एक कण ऐसा भी पाया गया जो पीछे की ओर प्रकीर्ण हुआ अर्थात् 90° से अधिक कोण पर विक्षेपित हुआ। थॉमसन मॉडल के अनुसार इस प्रकार के परिणाम की आशा नहीं की जाती थी। इस मॉडल द्वारा यह अनुमान लगाया गया था कि पन्नी से गुज़रते समय अल्फ़ा-कणों में बहुत थोड़ा विचलन होगा।

गाइगर और मार्स्डेन द्वारा प्रयुक्त पन्नी की मोटाई 10^{-7}m थी। इसकी तुलना मनुष्य के बालों से कीजिए जिनका व्यास लगभग 10^{-4}m होता है।

इन परिणामों को देखकर रदरफ़र्ड ने कहा था कि "यह बात उतनी ही अविश्वसनीय है जितनी की यह घटना कि आप एक 15 इंच का गोला एक पतले कागज़ पर मारें और वह लौटकर आप पर ही आ लगे।"

इस मॉडल के अनुसार धातु की पतली पन्नी से होकर जाने वाले अल्फ़ा कणों पर केवल दुर्बल वैद्युत बल ही लगते हैं। ऐसी स्थिति में उनके प्रारंभिक संवेग का मान ही इतना अधिक होगा कि अपने पथ से वे थोड़ा सा ही विचलित होंगे यानि कि यह दुर्बल बल उनके संवेग में बहुत थोड़ा परिवर्तन ही कर सकेगा।

α-कणों में काफ़ी ज्यादा विचलन लाने के लिए प्रबल बलों का होना आवश्यक है।

इन परिणामों की व्याख्या करने के लिए रदरफ़र्ड ने परमाणु का एक नाभिकीय मॉडल दिया। इस मॉडल के आधार पर उन्होंने अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र परिकलित किया। ऐसा करते समय उनका तर्क यह था कि परमाणु के इलेक्ट्रॉनों के कारण अल्फ़ा कणों का पश्चवर्ती प्रकीर्णन (backward scattering) नहीं हो सकता, क्योंकि इलेक्ट्रॉनों की तुलना में अल्फ़ा कण इतने अधिक भारी होते हैं कि इलेक्ट्रॉन उन्हें इस तरह प्रकीर्ण नहीं कर सकते। वह यह मानकर चले कि परमाणु का धन आवेश बहुत छोटे आयतन में, जिसे उन्होंने नाभिक कहा, केन्द्रित होता है। अत अल्फ़ा-कणों का प्रकीर्णन परमाणु के धन आवेशित नाभिक के कारण होता है। और आप जानते हैं कि α-कण और नाभिक के बीच का अन्योन्यक्रिया बल एक प्रतिकर्षी व्युत्क्रम-वर्ग स्थिर वैद्युत बल (repulsive inverse square electrostatic force) होता है। इस मॉडल के आधार पर रदरफ़र्ड ने अवकली परिक्षेत्र परिकलित किया।

उन्होंने पाया कि परिकलित परिक्षेत्र और मापे गए परिक्षेत्रों के मानों में बहुत अधिक समानता थी। इससे परमाणु का नाभिकीय मॉडल स्थापित हो गया जिसके अनुसार एक परमाणु का धन आवेश एक नाभिक के रूप में संकेन्द्रित रहता है। यह धन आवेशित नाभिक इलेक्ट्रॉनों से घिरा होता है (चित्र 8.10 ख)।

आइए अब हम आवेश q' वाले एक परमाणु-नाभिक द्वारा आवेश q वाले कणों के प्रकीर्णन पर विचार करें। इस प्रकीर्णन प्रक्रिया के लिए रदरफ़र्ड ने संघट्ट प्राचल b और प्रकीर्णन कोण θ_{cm} के बीच निम्नलिखित संबंध स्थापित किया:

$$b = \frac{r_0}{2}\cot\frac{\theta_{cm}}{2}, \qquad (8.21)$$

जहां $r_0 = \dfrac{qq'}{4\pi\,\epsilon_0\,E_{cm}}$ · E_{cm} संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में आपतित कण और लक्ष्य के निकाय की संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा है। ϵ_0 को मुक्त आकाश की विद्युतशीलता (permittivity of free space) कहा जाता है। इसका मान $8.8 \times 10^{-12}C^2N^{-1}m^{-2}$ है। तब समीकरण 8.15 ख से संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में रदरफ़र्ड प्रकीर्णन के लिए अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र होता है

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{b}{\sin\theta_{cm}}\left|\frac{db}{d\theta_{cm}}\right|$$

$$= \frac{r_0\cot\theta_{cm}/2}{2\sin\theta_{cm}}\,\frac{r_0}{2}\cdot\frac{1}{2}\,\text{cosec}^2\frac{\theta_{cm}}{2}$$

$$= \frac{r_0^2\cot\theta_{cm}/2}{16\sin\theta_{cm}/2\cos\theta_{cm}/2}\quad\text{cosec}^2\frac{\theta_{cm}}{2}$$

$$\text{या}\ \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{r_0^2}{16}\,\text{cosec}^4\frac{\theta_{cm}}{2},\ \text{जहां}\ r_0 = \frac{qq'}{4\pi\,\epsilon_0\,E_{cm}} \qquad (8.22)$$

यह रदरफ़र्ड अवकली परिक्षेत्र (Rutherford differential cross-section) कहलाता है।
परमाणु-संख्या Z वाले नाभिक द्वारा α-कणों के प्रकीर्णन के लिए $qq' = (2e)\,(Ze) = 2Ze^2$, जहां e इलेक्ट्रॉन का आवेश है। आप यह देख सकते हैं कि रदरफ़र्ड अवकली परिक्षेत्र आपतित कण की ऊर्जा और प्रकीर्णन कोण दोनों पर निर्भर करता है। साथ ही परमाणु संख्या में वृद्धि होने पर Z^2 के अनुसार प्रकीर्ण कणों की संख्या में वृद्धि होनी चाहिए। आइए अब हम इस भाग में दी गई संकल्पनाओं को एक वास्तविक स्थिति पर लागू करें।

उदाहरण 2

α-कणों के प्रकीर्णन पर किए गए एक प्रयोग में गाइगर और मार्स्डेन ने एक स्वर्ण-पन्नी पर, जिसके लिए $Z = 79$, 7.7 MeV ऊर्जा वाले α-कणों का अभिघात किया। सोने का परमाणु भार 197 amu है। (i) 10°, (ii) 90° और (iii) 150° के कोणों से प्रत्यास्थतः प्रकीर्ण α-कणों के संघट्ट प्राचल और अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र निकालिए।

यहाँ यह दिया हुआ है कि प्रायोगिक निर्देश तंत्र में, आपतित α-कणों की गतिज ऊर्जा 7.7 MeV अर्थात् 1.2×10^{-12}J है। प्रायोगिक निर्देश तंत्र में प्रकीर्णन कोण (i) $\theta_L = 10°$, (ii) $\theta_L = 90°$, और (iii) $\theta_L = 150°$, हैं। समीकरण 8.21 और समीकरण 8.22 लागू करने के लिए हमें संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में प्रकीर्णन कोण θ_{cm} और संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा E_{cm} निकालनी होगी। हमें r_0 भी निकालना होगा।

प्रायोगिक निर्देश तंत्र में संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा α-कणों की प्रारंभिक गतिज ऊर्जा होती है, क्योंकि प्रारंभ में लक्ष्य विरामावस्था में होता है और दोनों कण मुक्त होते हैं। इसलिए स्थितिज ऊर्जा शून्य होती है। अतः निकाय की संपूर्ण ऊर्जा 1.2×10^{-12}J है। हमें E_L के पदों में E_{cm} ज्ञात करना है। जैसा कि आप जानते हैं कि प्रकीर्णन के पहले संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में संपूर्ण यांत्रिक ऊर्जा होती है

$$E_{cm} = \frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2.$$

अब समीकरण 8.10 क, 8.3 ग और 8.3 ख से

$$u_1' = \frac{m_2}{m_1}V,\ u_2' = -V\ \text{और}\ V = \frac{m_1u_1}{m_1+m_2}$$

$$\text{यानि कि}\ E_{cm} = \frac{1}{2}m_1\frac{m_2^2}{m_1^2}\frac{m_1^2u_1^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{1}{2}m_2\frac{m_1^2u_1^2}{(m_1+m_2)^2}$$

$$\text{या}\ E_{cm} = \frac{1}{2}m_1u_1^2\left[\frac{m_2^2}{(m_1+m_2)^2} + \frac{m_2\,m_1}{(m_1+m_2)^2}\right] = E_L\frac{m_2}{m_1+m_2} = \frac{E_L}{(1+m_1/m_2)} \qquad (8.23)$$

स्वर्ण-परमाणुओं से प्रकीर्ण हो रहे α-कणों के लिए

$m_1 = 4\ amu$ और $m_2 = 197\ amu$

$$\therefore\ E_{cm} = \frac{1.2 \times 10^{-12}J}{(1 + 4/197)} = 1.2 \times 10^{-12}J$$

समीकरण 8.22 से

1a mu $= 1.67 \times 10^{-27}$kg

$$r_0 = \frac{qq'}{4\pi\ \epsilon_0\ E_{cm}} = \frac{2Ze^2}{4\pi\ \epsilon_0\ E_{cm}}$$

$$= \frac{2 \times 79 \times (1.6 \times 10^{-19}C)^2}{(4\pi) \times (8.8 \times 10^{-12} C^2N^{-1}m^{-2}) \times (1.2 \times 10^{-12}J)}$$

या $r_0 = 3.0 \times 10^{-14}$m.

आइए अब हम (i) $\theta_L = 10°$ (ii) $\theta_L = 90°$, और (iii) $\theta_L = 150°$ पर θ_{cm}, b और $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$ परिकलित करने के लिए समीकरण 8.9, 8.21 और 8.22 का प्रयोग करें।

चूंकि $\frac{m_1}{m_2} = 0.02 << 1$, इसलिए हम इसकी उपेक्षा कर सकते हैं जिससे कि $\theta_{cm} \simeq \theta_L$.

आप स्वयं समीकरण 8.9 की सहायता से θ_{cm} का सही मान परिकलित करके इस संबंध ($\theta_{cm} \simeq \theta_L$) को सत्यापित कर सकते हैं।

(i) $\theta_{cm} = 10°$ पर $b = \frac{r_0}{2}\cot 5° = \frac{(3.0 \times 10^{-14}m)^2 \times 11.4}{2} = 1.7 \times 10^{-13}m$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{(3.0 \times 10^{-14}m)^2}{16}\text{cosec}^4(5°) = \frac{(3.0 \times 10^{-14}m)^2}{16} \times (11.5)^4$$

$$= 9.8 \times 10^{-25}\ m^2sr^{-1}$$

(ii) $\theta_{cm} = 90°$ पर, $b = 1.5 \times 10^{-14}m$, $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = 2.2 \times 10^{-28}m^2sr^{-1}$

(iii) $\theta_{cm} = 150°$ पर, $b = 4 \times 10^{-15}m$, $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = 6.5 \times 10^{-29}m^2sr^{-1}$

आइए अभी तक आपने जो कुछ भी पढ़ा है उसे ध्यान में रखकर रदरफ़र्ड प्रकीर्णन परिक्षेत्र के भौतिक अर्थ को फिर से समझने की कोशिश करें। अल्फा-कण और नाभिक के बीच निकटतम पहुँच की दूरी (distance of closest approach) $r_{min} = \frac{r_0 + \sqrt{r_0^2 + 4b^2}}{2}$ जहाँ $r_o = \frac{qq'}{4\pi\ \epsilon_0\ E_{cm}}$.
अतः लघु दूरियों पर परमाणु की संरचना का पता लगाने के लिए E_{cm} वृहत् (large) होना चाहिए, क्योंकि E_{cm} के केवल बड़े मानों पर ही r_{min} काफ़ी छोटा होगा। अतः हमें लक्ष्य का अभिघात उच्च ऊर्जा वाले कणों से करना चाहिए और साथ ही वृहत् कोण प्रकीर्णन (large-angle scattering) की जाँच करनी चाहिए जिसके लिए b छोटा होता है।

उदाहरण 2 से आप यह देख सकते हैं कि अगर प्रकीर्णन कोण छोटा है तो परिक्षेत्र वृहत् होगा। पर, यहां हमारी रुचि वृहत् कोण प्रकीर्णन में है। इसका कारण यह है कि बहुत कम दूरियों पर लग रहे केवल अति प्रबल बल से ही वृहत् कोणों पर प्रकीर्णन हो सकता है। आप पूछ सकते हैं कि यह बात हम किस आधार पर कह रहे हैं? आइए देखें कि इस बात का **क्या आधार है?**

थॉमसन के मॉडल के अनुसार परमाणु का धन आवेश बड़े आयतन वाले एक गोले पर फैला होता है। तब आपतित कण और लक्ष्य परमाणु के बीच का बल इस गोले की त्रिज्या के बराबर दूरी तक ही व्युत्क्रम-वर्ग नियम बल होगा। इस दूरी के बढ़ने पर, यानि कि गोले के अंदर, इस बल का मान कम होता जाएगा। याद कीजिए इकाई 5 के भाग 5.4 का उदाहरण 2। वहाँ पर r पर इसी तरह की निर्भरता वाले बल का व्यंजक आप निकाल चुके हैं। ठीक उसी उदाहरण का ही बल नियम गोलीय आवेश वितरण के अंदर रखे आवेश पर भी लागू होगा। हाँ, यह बात अवश्य है कि स्थिरांक बदल जाएंगे। नतीजा यह है कि आवेशित गोले के अंदर जाने वाले आपतित कणों पर व्युत्क्रम-वर्ग बल की अपेक्षा, दुर्बल बल लगेगा। इस तरह, इस मॉडल से हम यह पाते हैं कि

b और r_{min} के कम मानों वाले कण छोटे कोणों से प्रकीर्ण होंगे। पर, प्रयोग के नतीजे एकदम इसके विपरीत निकले।

यही कारण है कि रदरफ़र्ड ने एक नया मॉडल दिया जिसमें नाभिकीय आवेश एक बहुत छोटे आयतन में संकेन्द्रित है। केवल ऐसी ही स्थिति में r_{min} की अति लघु दूरियों पर प्रबल व्युत्क्रम-वर्ग बल लगेगा जिससे कि प्रकीर्णन कोण का मान अधिक होगा। सिद्धांत से प्राप्त परिणाम और प्रयोग से प्राप्त परिणाम एक जैसे होने के कारण रदरफ़र्ड के नाभिकीय मॉडल को मान्यता प्रदान की गई। इस तरह परमाणु नाभिक की "खोज" का श्रेय रदरफ़र्ड को दिया जाता है। अगर हम थॉमसन मॉडल में इलेक्ट्रॉनों की पूरी उपेक्षा कर दें तो परमाणु की सतह पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता का मान होगा लगभग $10^{13} Vm^{-1}$। इसके विपरीत अगर हम रदरफ़र्ड मॉडल का प्रयोग करें तो नाभिक की सतह पर विद्युत् क्षेत्र की तीव्रता $10^{21} Vm^{-1}$ होगी। यह पहली तीव्रता से 10^8 गुना अधिक है। और यह तीव्रता इतनी अधिक है कि यह अल्फ़ा-कणों की दिशा उलट सकती है।

इस प्रकीर्णन प्रयोग का एक अन्य रोचक पहलू यह है कि यह परमाणु नाभिक की त्रिज्या की ऊपरी सीमा भी निर्धारित करता है। यह सीमा, प्राचल r_0 के अतिरिक्त और कुछ नहीं है, क्योंकि $b = 0$ पर $r_{min} = r_0$. उदाहरण 2 में चर्चित एक आम α-कण प्रकीर्णन प्रयोग में $r_0 = 3.0 \times 10^{-14}$m. अत: स्वर्ण नाभिक की त्रिज्या 3.0×10^{-14}m से कम होगी। हाल ही के वर्षों में नाभिक की त्रिज्या निकालने के लिए उच्च ऊर्जा वाले α-कणों का प्रयोग किया गया। इन प्रयोगों में यह पाया गया कि रदरफ़र्ड प्रकीर्णन परिक्षेत्र का सूत्र भी प्रयोग के साथ मेल नहीं खाता।

इन प्रयोगों से प्राप्त स्वर्ण-नाभिक की त्रिज्या उदाहरण 2 में प्राप्त किए गए r_0 के मान का $\frac{1}{6}$ होती है।

समीकरण 8.22 के अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र का एक अन्य महत्वपूर्ण लक्षण यह है कि संगत पूर्ण परिक्षेत्र अनंत होता है। ऐसा इसलिए है कि कूलॉम बल का परास (range) अनंत होता है। यहाँ तक कि यदि कोई कण नाभिक से बहुत अधिक दूरी पर भी हो तो भी उस पर कुछ बल लगता है और वह शून्येतर (छोटे) कोण द्वारा प्रकीर्ण होता है। अत: वास्तव में प्रकीर्ण कणों की कुल संख्या अनंत होती है।

इन अनुप्रयोगों से आपने यह ज़रूर अनुभव किया होगा कि सूक्ष्म स्तर पर पदार्थ की संरचना का पता लगाने में प्रकीर्णन की एक महत्वपूर्ण भूमिका है।

आपने इस इकाई में जो कुछ भी पढ़ा है उसका संक्षिप्त विवरण हम यहां दे रहे हैं।

8.4 सारांश

- जब कणों का पुंज एक लक्ष्य पर आपतित होता है तो (θ, ϕ) के अलग-अलग मानों पर प्रकीर्ण कणों का कोणीय वितरण अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)$ से प्राप्त किया जा सकता है। θ और ϕ के सभी मानों पर अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र (dcs) का समाकलन करके पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र प्राप्त किया जाता है।

- प्रायोगिक निर्देश तंत्र में अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र मापा जाता है पर संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में परिकलित किया जाता है। प्रत्यास्थ प्रकीर्णन के लिए प्रायोगिक निर्देश तंत्र और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में प्रकीर्णन कोणों और अवकली परिक्षेत्रों में निम्नलिखित संबंध होते हैं :

$$\tan\theta_L = \frac{\sin\theta_{cm}}{\cos\theta_{cm} + m_1/m_2}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Lab} = \frac{(1 + m_1^2/m_2^2 + 2\, m_1/m_2 \cos\theta_{cm})^{3/2}}{(1 + m_1/m_2 \cos\theta_{cm})} \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$$

- अगर हमें θ_{cm} के फलन के रूप में संघट्ट प्राचल b ज्ञात हो तो एक दी हुई प्रकीर्णन प्रक्रिया में हम निम्नलिखित संबंध की सहायता से अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र ज्ञात कर सकते हैं :

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{b}{\sin\theta_{cm}}\left|\frac{db}{d\theta_{cm}}\right|$$

- दो अभेद्य गोलों के प्रत्यास्थ प्रकीर्णन के लिए

$$b = (R + R_S)\cos\left(\frac{\theta_{cm}}{2}\right), \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{(R + R_S)^2}{4}$$

$$\sigma = \pi(R + R_S)^2$$

- एक अन्य बिन्दु आवेश q' से बिन्दु आवेश q के प्रकीर्णन के लिए

$$b = \frac{r_0}{2}\cot\frac{\theta_{cm}}{2}, \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{r_0^2}{16}\operatorname{cosec}^4\frac{\theta_{cm}}{2} \text{ जहां } r_0 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 E_{cm}}.$$

इसे रदरफ़र्ड प्रकीर्णन परिक्षेत्र कहा जाता है। कूलॉम बल के अनंत परिसर के कारण इस प्रक्रिया में पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र (tcs) अनंत होता है।

8.5 अंत में कुछ प्रश्न

1. दिखाइए कि रदरफ़र्ड प्रकीर्णन में निम्न सीमा θ_0 से बड़े किसी भी कोण θ' से प्रकीर्ण कणों का पूर्ण परिक्षेत्र होता है :

$$\sigma\ (\theta' > \theta_0) = \frac{\pi r_0^2}{4}\cot^2\frac{\theta'}{2}$$

2. कम ऊर्जा वाले न्यूट्रॉन और प्रोटॉन लगभग 1.3×10^{-12}cm की त्रिज्या वाले अभेद्य गोलों की तरह व्यवहार करते हैं। 3×10^6 न्यूट्रॉन $cm^{-2}s^{-1}$ के अभिवाह वाला न्यूट्रॉनों का एक समांतर पुंज 4×10^{22} प्रोटॉनों वाले लक्ष्य पर आपतित होता है। लक्ष्य से 70 cm की दूरी पर 2 cm की त्रिज्या वाला एक गोल संसूचक रखा गया है। $\theta_L = 30°$ के प्रकीर्णन कोण पर न्यूट्रॉनों की संसूचन दर अर्थात् $\frac{\Delta n}{\Delta t}$ ज्ञात कीजिए।

3. $\theta_L = 30°$ पर लेड लक्ष्य ($Z = 82$, परमाणु भार = 207 amu) से प्रकीर्ण 7 MeV α-कणों का अवकली परिक्षेत्र ज्ञात कीजिए जबकि यह दिया हुआ है कि 1 amu = 1.67×10^{-27} kg.

8.6 उत्तर

बोध प्रश्न

1. (i) यहाँ हम समीकरण 8.1 ख का प्रयोग करेंगे। हमें $\frac{\Delta n}{\Delta t}$ निकालना है जबकि दिया हुआ है

कि $F = 5 \times 10^{10}m^{-2}s^{-1}$, $\frac{d\sigma}{d\Omega} = 1.5 \times 10^{-26}m^2sr^{-1}$ और $d\Omega = 10^{-3}$sr.

समीकरण 8.1 ख से

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(F)\,(d\Omega)$$

$$= (1.5 \times 10^{-26}m^2sr^{-1})\,(5 \times 10^{10}m^{-2}s^{-1})\,(10^{-3}sr)$$

$$= 7.5 \times 10^{-19}s^{-1}$$

(ii) $N = 10^{22}$ के लिए

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(NF)\,(d\Omega) = (7.5 \times 10^{-19}s^{-1}) \times 10^{22}$$

$$= 7.5 \times 10^3s^{-1}$$

2. प्रत्यास्थ संघट्टन में निकाय की संपूर्ण गतिज ऊर्जा अचर बनी रहती है यानि कि संघट्टन के पहले और बाद पूरे निकाय के लिए इसका मान समान रहता है। इस तरह,

$$\frac{1}{2}m_1u_1'^2 + \frac{1}{2}m_2u_2'^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2$$

समीकरण 8.4 ख से u_1' और v_1' के पदों में u_2' और v_2' के मान प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} u_1'^2 \right) = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1^2}{m_2^2} v_1'^2 \right)$$

या $\frac{1}{2} u_1'^2 \left[m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right] = \frac{1}{2} v_1'^2 \left[m_1 + \frac{m_1^2}{m_2} \right]$.

या $u_1' = v_1'$.

इसी तरह आप यह दिखा सकते हैं कि $u_2 = v_2'$.

3. यहाँ $\gamma = \frac{1}{7}$, $\theta_{cm} = 70°$, पायॉन का $E_{cm} = 490$ keV. समीकरण 8.9 से

$$\tan \theta_L = \frac{\sin 70°}{\cos 70° + 1/7} = 1.938 \text{ या } \theta_L = 62.7°.$$

प्रायोगिक निर्देश तंत्र और संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में पायॉन की गतिज ऊर्जाएं क्रमशः

$E_L = \frac{1}{2} m_1 u_1^2$ और $E_{cm} = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2$ है। समीकरण 8.10 क और 8.3 ख से

$$E_{cm} = \frac{1}{2} m_1 \frac{m_2^2}{m_1^2} \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right)^2 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2}$$

$$\text{या } E_{cm} = \frac{E_L}{(1 + m_1/m_2)^2}. \qquad (8.24)$$

इस तरह, $E_L = \left(1 + \frac{1}{7} \right)^2 \times 490 \text{ keV} = 640 \text{ keV}.$

4. (क) यहाँ हमें समीकरण 8.9 और समीकरण 8.13 को लागू करना है। प्रत्यास्थ प्रकीर्णन के लिए $\gamma = \frac{m_1}{m_2}$ और इस स्थिति में $m_1 = m_2$. इसलिए $\gamma = 1$.

आइए पहले हम (i) $\theta_L = 30°$ और (ii) $\theta_L = 60°$ पर संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में प्रकीर्णन कोण ज्ञात करें।

$$\gamma = 1 \text{ पर } \tan \theta_L = \frac{\sin \theta_{cm}}{\cos \theta_{cm} + 1} = \frac{2 \sin \theta_{cm}/2 \cos \theta_{cm}/2}{2 \cos^2 \theta_{cm}/2} = \tan \frac{\theta_{cm}}{2}$$

या $\theta_{cm} = 2\,\theta_L$.

इसलिए $\theta_L = 30°$ पर, $\theta_{cm} = 60°$ और $\theta_L = 60°$ पर $\theta_{cm} = 120°$.

अब हम संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र (dcs) निकालने के लिए समीकरण 8.13 का प्रयोग कर सकते हैं।

(i) $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{lab} = 2.3 \times 10^{-27} \text{m}^2 \text{sr}^{-1}$, $\theta_L = 30°$ पर।

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm.} = \frac{1}{4 \cos 30°} \times (2.3 \times 10^{-27} \text{m}^2 \text{sr}^{-1}) = 6.60 \times 10^{-28} \text{m}^2 \text{sr}^{-1}$$

(ii) $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{lab} = 2.6 \times 10^{-28} \text{m}^2 \text{sr}^{-1}$, $\theta_L = 60°$ पर।

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{cm} = \frac{1}{4 \cos 60°} \times (2.6 \times 10^{-28} \text{m}^2 \text{sr}^{-1}) = 1.3 \times 10^{-28} \text{m}^2 \text{sr}^{-1}$$

(ख) इस स्थिति में $m_1 << m_2$ क्योंकि $m_1 =$ इलेक्ट्रॉन का द्रव्यमान $= 9.31 \times 10^{-31}$ kg और $m_2 = L_i$ परमाणु का द्रव्यमान $= 1.5 \times 10^{-26}$ kg.

इसलिए $\gamma = \frac{m_1}{m_2} = 8.09 \times 10^{-5}$ यानि कि $\frac{m_1}{m_2} << 1$.

इस तरह समीकरण 8.9 से $\tan \theta_L \simeq \tan \theta_{cm}$ या $\theta_L \simeq \theta_{cm}$ और, समीकरण 8.12 से

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = \frac{(1+\gamma^2+2\gamma\cos\theta_{cm})^{3/2}}{(1+\gamma\cos\theta_{cm})}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} \simeq \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$$

क्योंकि $\gamma << 1$ और सभी θ_{cm} के लिए $\gamma\cos\theta_{cm} << 1$, इसलिए प्रायोगिक निर्देश तंत्र में अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र (dcs) और प्रकीर्णन कोण θ का वक्र वही होगा जैसा कि चित्र 8.7 में दिखाया गया है।

5. क्योंकि $m_1 << m_2$ इसलिए $\theta_L \simeq \theta_{cm}$ और क्योंकि आपतित कण एक बिन्दु द्रव्यमान है इसलिए समीकरण 8.19, 8.20 और 8.18 क में $R = 0$ रखने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{R_S^2}{4} = \frac{(3\times10^{-15}\text{m})^2}{4}\text{sr}^{-1} = 2.2\times10^{-30}\text{m}^2\text{sr}^{-1}$$

$$\sigma_{cm} = \pi R_S = \pi\times(3\times10^{-15}\text{m})^2 = 2.8\times10^{-29}\text{m}^2.$$

$\theta_{cm} = 60°$ पर

$$b = R_S\cos\frac{\theta_{cm}}{2} = (3\times10^{-15}\text{m})\times0.87 = 2.6\times10^{-15}\text{m}.$$

अंत में कुछ प्रश्न

1. रदरफ़र्ड प्रकीर्णन का अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र है

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{r_0^2}{16}\operatorname{cosec}^4\frac{\theta_{cm}}{2},\ \text{जहां}\ r_0 = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 E_{cm}}.$$

हम हल निकालने के लिए समीकरण 8.2 ग का प्रयोग कर सकते हैं, क्योंकि अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र, ϕ पर निर्भर नहीं करता। अब इस प्रश्न में θ पर समाकलन की निम्न सीमा शून्य न होकर θ_0 से बड़ा कोई भी कोण θ' होता है।

अत:

$$\sigma = 2\pi\int_{\theta'}^{\pi}\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}\sin\theta_{cm}\,d\theta_{cm}$$

$$= 2\pi\int_{\theta'}^{\pi}\frac{r_0^2}{16}\operatorname{cosec}^4\left(\frac{\theta_{cm}}{2}\right)\sin\theta_{cm}\,d\theta_{cm}$$

अब

$$\operatorname{cosec}^4\left(\frac{\theta_{cm}}{2}\right) = \frac{1}{(\sin^2\theta_{cm}/2)^2} = \frac{1}{\left(\frac{1-\cos\theta_{cm}}{2}\right)^2}\quad[\because\ \cos2\theta = 1-2\sin^2\theta]$$

$$\therefore\ \sigma = \frac{\pi r_0^2}{8}\int_{\theta'}^{\pi}\frac{4\sin\theta_{cm}\,d\theta_{cm}}{(1-\cos\theta_{cm})^2}$$

$\cos\theta_{cm} = t$ लेने पर

$$\sigma = \frac{\pi r_0^2}{2}\int_{-1}^{\cos\theta'}\frac{dt}{(1-t)^2} = \frac{\pi r_0^2}{2}\left[+\frac{1}{1-t}\right]_{-1}^{\cos\theta'}$$

$$= \frac{\pi r_0^2}{2}\left[\frac{1}{1-\cos\theta'} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi r_0^2}{4}\left[\frac{1+\cos\theta'}{1-\cos\theta'}\right] = \frac{\pi r_0^2}{4}\frac{2\cos^2\theta'/2}{2\sin^2\theta'/2}$$

$$\text{या}\ \sigma(\theta') = \frac{\pi r_0^2}{4}\cot^2\frac{\theta'}{2}.$$

2. समीकरण 8.1 ग से प्रकीर्ण न्यूट्रॉनों की संसूचन दर है:

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)NF\,d\Omega = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)NF\frac{dA}{L^2}.$$

जहा dA, लक्ष्य से दूरी L पर रखे हुए संसूचक का परिक्षेत्र है। यहां हमें निम्नलिखित आंकड़े दिए गए हैं:

आपतित अभिवाह $F = 3 \times 10^{6}\ cm^{-2}s^{-1} = 3 \times 10^{10}m^{-2}s^{-1}$
लक्ष्य के प्रकीर्णन केन्द्रों की संख्या $N = 4 \times 10^{22}$
संसूचक का परिक्षेत्र, $dA = \pi r^2 = \pi\ (0.02\ m)^2 = 1.2 \times 10^{-3}m^2$
संसूचक और लक्ष्य के बीच की दूरी $L = 70\ cm = 0.7\ m$.

आइए अब हम दो अभेद्य गोलों के प्रत्यास्थ प्रकीर्णन के लिए समीकरण 8.19 की सहायता से अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र निकालें। संहति केन्द्र निर्देश तंत्र में यह परिक्षेत्र है

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm} = \frac{(R + R_S)^2}{4} = \frac{1}{4}(1.3 \times 10^{-14}m + 1.3 \times 10^{-14}m)^2sr^{-1} = 1.7 \times 10^{-28}m^2sr^{-1}$$

हमें $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab}$ ज्ञात करना है, जिसके लिए हम समीकरण 8.13 का प्रयोग करेंगे। और इसके लिए हमें θ_{cm} की भी ज़रूरत होगी। समीकरण 8.9 से, $m_1 = m_2$ के लिए

$$\theta_L = \frac{\theta_{cm}}{2}$$

$\theta_L = 30°$ के लिए $\theta_{cm} = 60°$, जिससे कि

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{lab} = 4\cos 30° \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{cm}$$

$$= 2\sqrt{3} \times 1.7 \times 10^{-28}m^2sr^{-1}$$

$$= 5.9 \times 10^{-28}m^2sr^{-1}$$

इसलिए न्यूट्रॉनों का संसूचन दर होगा

$$\frac{\Delta n}{\Delta t} = (5.9 \times 10^{-28}m^2sr^{-1}) \times (4 \times 10^{22}) \times (3 \times 10^{10}m^{-2}s^{-1}) \times \left[\frac{(1.2 \times 10^{-3}m^2)}{(0.7\ m)^2}sr\right]$$

$$= 1.7 \times 10^{3}s^{-1}$$

3. यहाँ हमें ठीक वही विधि लागू करनी है जिसे हमने उदाहरण 2 में दिया है। यहां

$$E_L = 7\ MeV$$
$$= 7 \times 1.6 \times 10^{-13}J$$
$$= 1.1 \times 10^{-12}J$$

समीकरण 8.23 में $m_1 = 4$ amu और $m_2 = 207$ amu लेने पर हमें प्राप्त होता है

$$E_{cm} = \frac{E_L}{1 + m_1/m_2} = \frac{1.1 \times 10^{-12}J}{1 + 4/207} = 1.1 \times 10^{-12}J.$$

समीकरण 8.22 से

$$r_0 = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E_{cm}} = \frac{2 \times 82 \times (1.6 \times 10^{-19}C)^2}{(4\pi) \times (8.8 \times 10^{-12}C^2N^{-1}m^{-2}) \times (1.1 \times 10^{-12}J)}$$

$$= 3.4 \times 10^{-14}m$$

क्योंकि $\frac{m_1}{m_2} = 0.019 << 1,\ \therefore\ \theta_L \simeq \theta_{cm}$

$\theta_L = 30°$ पर $\theta_{cm} \simeq 30°$ और

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \frac{r_0^2}{16}\operatorname{cosec}^4\frac{\theta_{cm}}{2}$$
$$= \frac{(3.4 \times 10^{-14}m)^2}{16}sr^{-1}\operatorname{cosec}^4(15°)$$
$$= 1.6 \times 10^{-26}m^2sr^{-1}$$

8.7 शब्दावली

अभेद्य गुलिका प्रकीर्णन	— hard-sphere scattering
अवकली प्रकीर्णन परिक्षेत्र	— differential scattering cross-section
आपतन कोण	— angle of incidence
आपतित अभिवाह	— incident flux
घन कोण	— solid angle
आपतित पुंज	— incident beam
पश्चवर्ती प्रकीर्णन	— backward scattering
परिक्षेत्र	— cross-section
पूर्ण प्रकीर्णन परिक्षेत्र	— total scattering cross-section
प्रकीर्णन कोण	— scattering angle
प्रतिक्षेप	— recoil
प्रत्यास्थ	— elastic
प्रायोगिक निर्देश तंत्र	— laboratory frame of reference
लक्ष्य	— target
संघट्टन	— collision
संघट्ट प्राचल	— impact parameter
संसूचक, संसूचन	— detector, detection.

इकाई 9 दृढ़ पिंड की गतिकी

इकाई की रूपरेखा

9.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आपने प्रकीर्णन के बारे में पढ़ा। वहां हमने आपतित कण को एक बिन्दु-द्रव्यमान (point mass) के रूप में माना है। इकाई 6 और 7 में भी आपने ग्रहों और सूर्य को बिन्दु-द्रव्यमान मानकर सूर्य के चारों ओर ग्रहों की गति का अध्ययन किया। वास्तव में इस पाठ्यक्रम में अभी तक आपने मुख्यतः बिन्दु-द्रव्यमान की गति के बारे में ही पढ़ा है। पर प्रकृति में शायद ही हमें कोई आदर्श बिन्दु-द्रव्यमान देखने को मिलता है। ज़्यादातर परिस्थितियों में हमें ऐसे ही पिंडों की गति को समझना होता है जो परिमित (finite) आकार के होते हैं। इसलिए हमें ऐसी वस्तुओं की गति को समझने के लिए एक विधि विकसित करने की ज़रूरत है।

इन पिंडों में से एक विशेष वर्ग के पिंडों को दृढ़ पिंड (rigid body) माना जाता है। इस इकाई में पहले आप यह समझेंगे कि दृढ़ पिंड किसे कहते हैं। हम पायेंगे कि दृढ़ पिंड की परिभाषा से हमें एक ऐसा मॉडल मिलता है जिससे विभिन्न प्रकार के भौतिक पिंडों की गति का अध्ययन आसान हो जाता है। इसके बाद आप दृढ़ पिंड की विभिन्न प्रकार की गतियों के बारे में पढ़ेंगे। दृढ़ पिंड स्थानांतरण गति (translational motion) और घूर्णी गति (rotational motion), दोनों प्रकार की गति कर सकता है। हम यह भी देखेंगे कि दृढ़ पिंड की व्यापक गति, स्थानांतरण गति और घूर्णी गति का संयोजन होती है।

इस इकाई में आप यह भी पढ़ेंगे कि दृढ़ पिंड की स्थानांतरण गति को उसके संहति केन्द्र की गति के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। अतः स्थानांतरण गति के विवरण के लिए हम बिन्दु-द्रव्यमानों की गतिकी को लागू कर सकते हैं। इसलिए इस इकाई में आप मुख्यतः दृढ़ पिंडों की घूर्णी गतिकी का अध्ययन करेंगे।

खंड 1 की इकाई 4 में आप कण की घूर्णी गतिकी के बारे में पढ़ ही चुके हैं। आप कण के कोणीय विस्थापन, कोणीय वेग, कोणीय त्वरण, जड़त्व आघूर्ण, गतिज ऊर्जा, बलआघूर्ण और कोणीय संवेग की संकल्पनाओं से परिचित हैं। इस इकाई में हम कण से संबंधित इ ा संकल्पनाओं को दृढ़ पिंडों पर लागू करेंगे। इससे हम विविध पिंडों की गति, जैसे गतिपालक चक्र (flywheel) का घूर्णन, उपग्रहों का विचक्रण (despinning), लुढ़कती वस्तुओं (rolling objects) की गति आदि को समझ सकेंगे।

अंत में, इस इकाई में हम कोणीय संवेग-संरक्षण के महत्वपूर्ण नियम पर पुनः विचार करेंगे और यह देखेंगे कि यह नियम दृढ़ पिंडों तथा अन्य पिंडों पर भी लागू होता है। हम इस नियम का

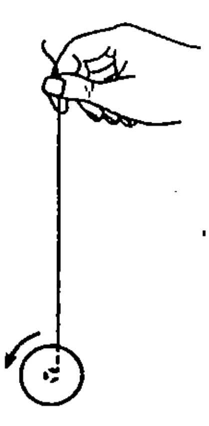
प्रयोग गोताखोर और नर्तकी की गति की व्याख्या करने में करेंगे। अंत में हम पुरस्सरण (precession) की संक्षेप में चर्चा करेंगे।

इस इकाई में हम बार-बार खंड 1 की इकाई 4 के तथ्यों का प्रयोग करेंगे। इसलिए हमारा यह सुझाव है कि इस इकाई को पढ़ने से पहले आप इकाई 4 को फिर से पढ़ लें। अगली इकाई में हम अजड़त्वीय प्रेक्षक की दृष्टि से गति का विश्लेषण करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप
- दृढ़ पिंड की पहचान कर सकेंगे
- दृढ़ पिंड की स्थानांतरण गति और घूर्णी गति के लक्षणों में भेद कर सकेंगे
- दृढ़ पिंड की व्यापक गति के लक्षणों को बता सकेंगे
- एक अक्ष के प्रति दृढ़ पिंड के जड़त्व आघूर्ण का महत्व बता सकेंगे
- दृढ़ पिंडों की घूर्णी गतिकी की संकल्पना पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

9.2 दृढ़ पिंड और उसकी गति

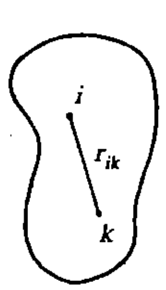


चित्र 9.1 : यो-यो की गति समझना

आइए हम एक यो-यो (yo-yo) की गति पर विचार करें (चित्र 9.1)। यह एक खिलौना होता है जो चरखी के लिपटने और खुलने पर ऊपर-नीचे आता जाता है। यो-यो अपने केन्द्र से गुज़रने वाले उस अक्ष के प्रति घूर्णन करता है जो इस कागज़ के समतल पर लंब है। आप देख सकते हैं कि यह अक्ष समष्टि में नियत नहीं रहता। यह यो-यो के साथ ऊर्ध्वाधरतः नीचे या ऊपर की ओर आता जाता है। यो-यो की गति को समझने के लिए सैद्धांतिक रूप से तो आप इस पर न्यूटन के गति नियम लागू कर सकते हैं क्योंकि "यो-यो" का प्रत्येक कण इन नियमों का पालन करता है। पर, एक-एक कण की गति का विश्लेषण करके यो-यो की गति को समझना बहुत मुश्किल है, क्योंकि कणों की संख्या बहुत अधिक होती है। अतः यो-यो जैसे विस्तारित पिंड (extended body) की व्यापक गति का विश्लेषण करने के लिए हम एक सरल विधि जानना चाहेंगे। हमें इस प्रकार की विधि दृढ़ पिंड (rigid body) के मॉडल का प्रयोग करके मिल सकती है। तो आइए पहले हम यह समझें कि दृढ़ पिंड होता क्या है।

9.2.1 दृढ़ पिंड क्या है?

आपने अपनी धुरी पर घूमते हुए पहिए को तो देखा ही होगा। आइए हम पहिए पर दो बिन्दु लें। हम देखते हैं कि पहिया जब घूमता रहता है तब उनके बीच की आपेक्षिक दूरी में कोई अंतर नहीं आता। पर, यदि हम चित्र 7.12 में दिखाए गए गोताखोर वाला उदाहरण लें तो हम देखेंगे कि उसके शरीर के किन्हीं दो अंगों के बीच की आपेक्षिक दूरी बदलती रहती है। पहला उदाहरण दृढ़ पिंड का उदाहरण है जबकि दूसरा नहीं है।



चित्र 9.2 : दृढ़ पिंड की किसी भी स्थिति के लिए, r_{ik} = एक अचर

परिभाषा से, दृढ़ पिंड ऐसे बिन्दु-द्रव्यमानों का समुच्चय होता है जिससे कि पिंड की किसी भी स्थिति में उसके किन्हीं भी दो बिन्दु-द्रव्यमानों के बीच की आपेक्षिक दूरी सदा निश्चर (invariant) बनी रहती है। अर्थात् r_{ik} = अचर (चित्र 9.2)। इसे हम यों भी समझ सकते हैं कि दृढ़ पिंड का एक निश्चित आकार होता है—विरूपी बल (deforming force) लगने पर भी इसका आकार नहीं बदलता। प्रकृति में कोई भी पिंड एक पूर्णतः दृढ़ पिंड (perfectly rigid body) नहीं होता क्योंकि बल लगने पर सभी वास्तविक पिंडों में कुछ न कुछ परिवर्तन अवश्य होता है। इसलिए एक पूर्णतः दृढ़ पिंड की कल्पना आदर्श के तौर पर ही की जा सकती है। पर हम देखेंगे कि उन स्थितियों में यह मॉडल काफ़ी उपयोगी होता है जहां विरूपणों (deformations) की उपेक्षा की जा सकती हो। उदाहरण के लिए, ज़मीन से उछलते समय क्रिकेट की गेंद में हुए विरूपण की उपेक्षा की जा सकती है। आप जानते हैं कि जब एक भारी ब्लॉक को एक समतल पर खींचा जाता है तो उस पर घर्षण बल (frictional force) कार्य करता है (देखिए खंड 1 का भाग 2.2.2)। पर घर्षण बल के कारण उसमें होने वाले विरूपण की उपेक्षा की जा सकती है। पर ध्यान रहे कि ट्रेन के वज़न के कारण रेल की पटरी में होने वाले विरूपण की उपेक्षा नहीं की जा सकती। इसी तरह लग्गा-कूद (pole-vaulting) करते समय कूदने वालों के फ़ाइबर ग्लास के बने लग्गे (pole) के विरूपण की उपेक्षा नहीं की जा सकती। अतः अंतिम दो स्थितियों में हम दृढ़ पिंड का मॉडल लागू नहीं कर सकते।

अब आप कुछ ऐसी वस्तुओं को पहचानिए जिन पर दृढ़ पिंड का मॉडल लागू किया जा सकता है।

बोध प्रश्न 1

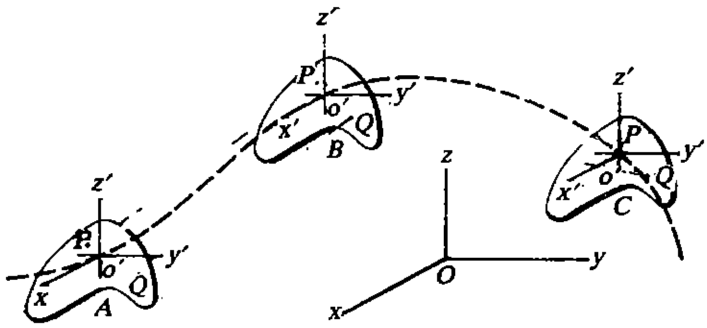
निम्नलिखित पिंडों में से किन-किन पिंडों को दृढ़ पिंड माना जा सकता है?

(क) लट्टू, (ख) रबर बैंड, (ग) बंदूक की गोली (घ) गुब्बारा, (ङ) पृथ्वी।

आइए, अब हम दृढ़ पिंड की गति का अध्ययन करें। दृढ़ पिंड, स्थानांतरण और घूर्णी, दोनों प्रकार की गति करते हैं। आइए, इन दोनों प्रकार की गतियों के कुछ प्रमुख लक्षणों को समझें।

9.2.2 दृढ़ पिंड की स्थानांतरण गति

मान लीजिए कि आप ट्रेन में सफ़र कर रहे हैं। अब अगर आप और आपके पास बैठा मुसाफ़िर ट्रेन के सापेक्ष अपनी जगह से नहीं हिलते तो कुछ समयांतराल के बाद आपका विस्थापन उसके विस्थापन के ठीक बराबर होगा। यही बात ट्रेन में लगी किन्हीं दो वस्तुओं, जैसे बल्ब और स्विच, के लिए भी सही होगी। यह स्थानांतरण गति (translational motion) का एक अभिलक्षण है। दृढ़ पिंड की गति को स्थानांतरण गति तभी कहा जाता है जबकि एक दिए हुए समयांतराल में इसके प्रत्येक कण में उतना ही विस्थापन हो जितना उसके किसी दूसरे कण में। दृढ़ पिंड की स्थानांतरण गति को चित्र 9.3 में दिखाया गया है। ध्यान दें कि ज़रूरी नहीं है कि स्थानांतरण गति में पिंड एक सीधी रेखा में ही चले।



चित्र 9.3 : दृढ़ पिंड की स्थानांतरण गति

आइए अब हम बिन्दुओं P, O', Q के विस्थापनों के परिमाण मापें जबकि पिंड स्थिति A से स्थिति B तक गतिमान होता है। इसमें से प्रत्येक विस्थापन 3.9cm के बराबर है और इन स्थितियों को मिलाने वाली रेखाएं परस्पर एक दूसरे के समांतर हैं। अतः उनमें समान विस्थापन होता है। आप इसी बात को पिंड की स्थितियों B और C के बीच पिंड की गति के लिए सत्यापित कर सकते हैं

बोध प्रश्न 2

क) पिंड की स्थितियों B और C के बीच, P, O' और Q के विस्थापनों के परिमाण मापिए और सत्यापित कीजिए कि वे बराबर हैं।

ख) दृढ़ पिंड की केवल स्थानांतरण गति के दो उदाहरण दीजिए।

अब, क्योंकि आपने बोध प्रश्न 2 हल कर लिया है, तो आप यह समझ सकते हैं कि अगर हम दृढ़ पिंड के किसी एक कण की गति निर्धारित कर सकें, तो हम पूरे पिंड की गति को निर्धारित कर सकते हैं। आप ऐसे सवालों को पहले अनेक बार हल कर चुके हैं। फिर भी, नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करके आप अपनी समझ को पक्का कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 3

द्रव्यमान M वाला एक दृढ़ पिंड एक बाह्य बल $\mathbf{F}_e$ के अधीन स्थानांतरण गति कर रहा है। पिंड की गति का एक उपयुक्त अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए।

बोध प्रश्न 3 के उत्तर से किस बात का पता चलता है? आप जानते हैं कि दृढ़ पिंड के किन्हीं दो बिन्दुओं की आपेक्षिक दूरी नहीं बदलती, यानी

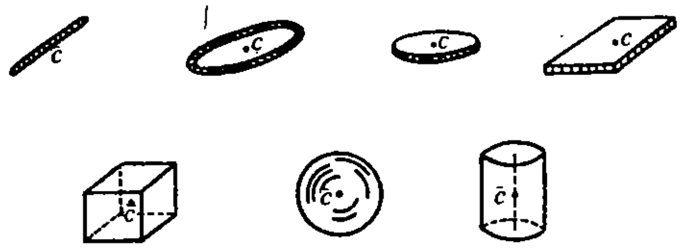
$$\frac{dr_{ik}}{dt} = 0 \qquad (9.1)$$

इसलिए सभी बिन्दु उसी प्रकार के प्रपथ पर चलते हैं जिस पर संहति केन्द्र चलता है। अतः पिंड की स्थानांतरण गति को समझने के लिए उसे द्रव्यमान M वाला एक कण माना जा सकता है जो

उसके संहति केन्द्र (c.m.) पर स्थित हो। आपको याद होगा कि इकाई 6 में हमने सूर्य और ग्रह को भी कण माना था। पर उन्हें वहां कण इसलिए माना गया था क्योंकि उनके बीच की दूरियों की तुलना में उनके विस्तार (size) की उपेक्षा की जा सकती है। यहां हम दृढ़ पिंड को एक अन्य कारण से, जिसका उल्लेख ऊपर किया जा चुका है, कण मान रहे हैं।

इस तरह हम संपूर्ण दृढ़ पिंड की स्थानांतरण गति को उसके संहति केन्द्र की गति के रूप में निरूपित कर सकते हैं। ऐसा करने से हम दृढ़ पिंड की स्थानांतरण गति को सरलता से निर्धारित कर सकते हैं। पिछली इकाइयों में आप एक नत समतल पर गिरते हुए पिंड की गति, बल्ले से मारी गयी क्रिकेट की गेंद की गति का अध्ययन कर चुके हैं। वहां भी हमने ऊपर बतायी गई संकल्पना को लागू किया था। पर इस संकल्पना को लागू करने के लिए दृढ़ पिंड के संहति केन्द्र की स्थिति मालूम होनी चाहिए। अतः अगले भाग को पढ़ने के पहले यह जानकारी पा लेना ठीक होगा।

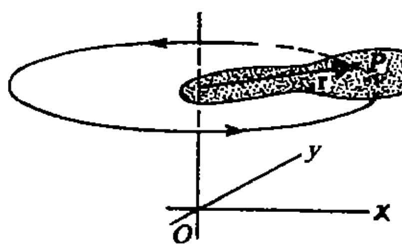
अगर दृढ़ पिंड का आकार असममित हो (asymmetric) तो उसके संहति केन्द्र का पता लगाना कठिन होगा। पर, ज़्यादातर हम सममित (symmetrical) आकार वाले पिंडों की गति का ही अध्ययन करेंगे। इसीलिए अनेक सममित पिंड के संहति केन्द्रों की स्थितियां (C) चित्र 9.4 में दिखाई गई हैं।



चित्र 9.4 : कुछ सममित दृढ़ पिंडों के संहति केंन्द्र

आइए अब हम दृढ़ पिंड की घूर्णी गति पर विचार करें।

9.2.3 दृढ़ पिंड की घूर्णी गति



चित्र 9.5 : दृढ़ पिंड की घूर्णी गति का एक उदाहरण।

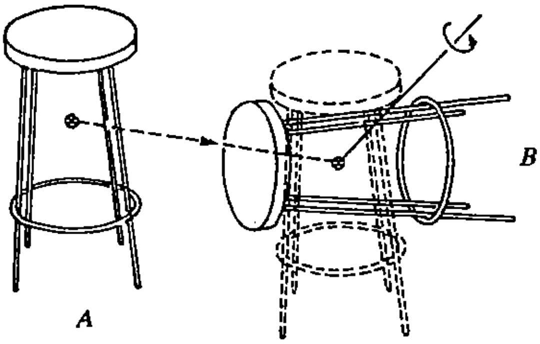
आइए पहले हम पृथ्वी की गति पर विचार करें। इसका प्रत्येक बिन्दु एक वृत्त (संगत अक्षांश) में घूमता है, जिसका केन्द्र ध्रुवी अक्ष पर होता है। यह गति घूर्णी गति का एक उदाहरण है। दृढ़ पिंड को घूर्णी गति करता हुआ तब माना जाता है जबकि इसके सभी कण ऐसे वृत्तों में घूमते हों जिनके केन्द्र एक सरल रेखा पर स्थित हों। इस सरल रेखा को **घूर्णन-अक्ष** (axis of rotation) **कहा जाता है।**

चित्र 9.5 में z-अक्ष के प्रति दृढ़ पिंड की घूर्णी गति को दिखाया गया है। जब कोई दृढ़ पिंड एक अक्ष के प्रति घूर्णन करता है तो इसका प्रत्येक कण उस अक्ष से एक नियत दूरी पर बना रहता है. अतः पिंड का प्रत्येक बिन्दु, जैसे P, इस अक्ष के प्रति एक वृत्त में घूमता है। आपने यह बात भी देखी होगी कि एक दिए समयांतराल में पिंड के किन्हीं भी दो बिन्दुओं से अक्ष पर डाले गए लंब, बराबर के कोण से विस्थापित होते हैं।

अब आप दृढ़ पिंड की व्यापक गति के बारे में पढ़ेंगे।

9.2.4 दृढ़ पिंड की व्यापक गति

दृढ़ पिंड की व्यापक गति स्थानांतरण गति और घूर्णी गति का संयोजन होती है। चित्र 9.6 में दिखाए गए उदाहरण से इसे अच्छी तरह समझा जा सकता है।



चित्र 9.6 : पिंड को स्थिति A से स्थिति B तक लाने के लिए, पहले उसे स्थानांतरित कीजिए ताकि उसका संहति केंद्र, नये संहति केंद्र की स्थिति पर आ जाए। फिर पिंड को संहति केंद्र से गुज़रने वाले एक उपयुक्त अक्ष के प्रति घुमाइए जब तक कि वह अभीष्ट स्थिति में न आ जाए।

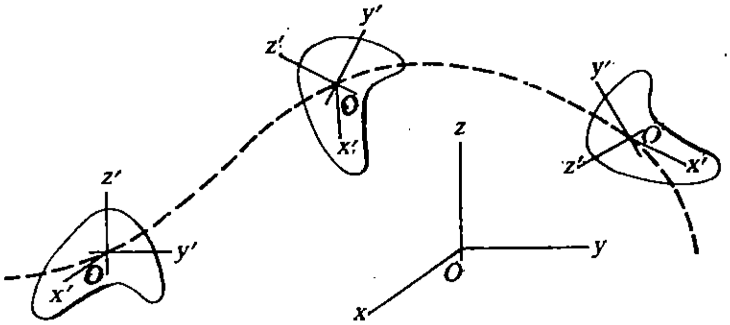
अब आप दृढ़ पिंड की व्यापक गति को और अच्छी तरह से समझने के लिए एक कार्यकलाप कर सकते हैं।

कार्यकलाप

अपनी मेज़ पर से कोई पुस्तक उठा लीजिए और उसे अलमारी में खड़ी स्थिति में रख दीजिए।

यहां पर पहले आप पुस्तक के संहति केन्द्र को एक नई स्थिति में लाते हैं। और तब अलमारी में पुस्तक को खड़ी रखने के लिए संहति केन्द्र से होते हुए एक उपयुक्त अक्ष के प्रति आप पुस्तक को घुमाते हैं। अतः आप यह देख सकते हैं कि पुस्तक की गति स्थानांतरण और घूर्णन का एक संयोजन है। अब आप नीचे दिए गए चित्र को सावधानी से समझिए।

चित्र 9.7 में दृढ़ पिंड की संयोजित स्थानांतरण और घूर्णी गति की एक स्थिति को दिखाया गया है। चित्र 9.7 को समझकर नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल कीजिए।



चित्र 9.7 : निर्देश तंत्र (x, y, z) से प्रेक्षित, एक दृढ़ पिंड की संयोजित स्थानांतरी और घूर्णी गति। ध्यान दें कि पिंड में नियत निर्देश तंत्र (x', y', z') का (x, y, z) के प्रति अभिविन्यास पिंड की गति के साथ साथ बदलता है।

बोध प्रश्न 4

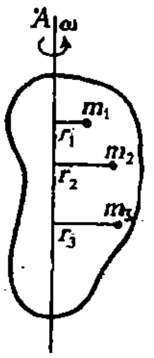
चित्र 9.3 और चित्र 9.7 की तुलना कीजिए। संक्षेप में बताइए कि गति के दौरान प्रेक्ष निर्देशांक अक्षों (x, y, z) और पिंड में नियत अक्षों (x', y', z') के लक्षणों में क्या फ़र्क .

अब, क्योंकि आपने बोध प्रश्न 4 हल कर लिया है, इसलिए आप यह समझ सकते हैं कि चित्र 9.7 में स्थिति O निर्धारित करना दरअसल संहति केन्द्र की गति से संबंधित प्रश्न है जिसे हम विस्तार से पढ़ चुके हैं। जैसा कि पहले बताया जा चुका है इस इकाई में हमें मुख्यतः घूर्णी गति को समझना है। इसके लिए हमें दृढ़ पिंड की घूर्णी गति का विश्लेषण करने के लिए एक विधि विकसित करनी होगी। अब, खंड 1 की इकाई 4 में आप एक कण की कोणीय गति की गतिकी तो समझ ही चुके हैं, इसलिए यहां हम उन्हीं संकल्पनाओं का दृढ़ पिंड के लिए विस्तार करेंगे।

खंड 1 के भाग 4.3.3 के अध्ययन से आपको याद होगा कि घूर्णी गति कर रहे कण में जड़त्व आघूर्ण होता है (जिसे I से प्रकट किया जाता है)। घूर्णी गति में I वही भूमिका निभाता है जो कि स्थानांतरण गति में कण का द्रव्यमान। घूर्णी गति के लिए दृढ़ पिंड के जड़त्व आघूर्ण के अर्थ को समझना काफ़ी महत्वपूर्ण है। तो आइए अब हम दृढ़ पिंड के "जड़त्व आघूर्ण" के बारे में पढ़ें। इसके लिए पहले हम घूर्णन अक्ष के प्रति घूर्णन कर रहे दृढ़ पिंड का कोणीय संवेग निकालेंगे।

9.3 जड़त्व आघूर्ण

हम जानते हैं कि पृथ्वी ध्रुवों को मिलाने वाली उस रेखा के प्रति घूर्णन करती है जो पृथ्वी के केन्द्र से होकर जाती है। पृथ्वी का कोणीय संवेग हम कैसे निकालेंगे? हम जानते हैं कि जब पृथ्वी अपने अक्ष के प्रति घूर्णन करती है तो इसका प्रत्येक बिन्दु इस अक्ष के प्रति एकसमान वर्तुल गति करता है। बिन्दु के अक्षांश कम होने के साथ-साथ इस वृत्त की त्रिज्या भी कम होती जाती है। कहने का मतलब है कि जिस वृत्त में दिल्ली घूमता है, उसकी त्रिज्या उस वृत्त की त्रिज्या से कम होती है जिस पर त्रिवेन्द्रम घूम रहा है। इसलिए, सामान्यतः प्रत्येक बिन्दु का रैखिक वेग (linear velocity) भिन्न होता है। किसी पिंड का कोणीय संवेग मालूम करने के लिए पहले हमें उसके प्रत्येक कण का कोणीय संवेग मालूम करना होगा। और क्योंकि कोणीय संवेग एक सदिश राशि है इसलिए पिंड का कोणीय संवेग निकालने के लिए हमें अलग-अलग कोणीय संवेगों को सदिश रूप में जोड़ना होगा। आइए अब हम एक व्यापक स्थिति लें।



चित्र 9.8 : अक्ष AB के प्रति घूर्णन करता हुआ दृढ़ पिंड।

चित्र 9.8 देखिए। एक जड़त्वीय निर्देश तंत्र में नियत अक्ष AB के प्रति दृढ़ पिंड एकसमान कोणीय चाल ω से घूर्णन कर रहा है। AB से क्रमशः r_1, r_2, r_3 की दूरियों पर तीन बिन्दु द्रव्यमान m_1, m_2, m_3 दिखाए गए हैं। m_1, त्रिज्या r_1 वाले वृत्त में घूमता है। मान लीजिए कि इसका वेग $\mathbf{v}_1$ है। खंड 1 के समीकरण 4.23 का प्रयोग करके हम यह कह सकते हैं कि m_1 का कोणीय संवेग $\mathbf{L}_1$ है

$$\mathbf{L}_1 = m_1 \mathbf{r}_1 \times \mathbf{v}_1.$$

द्रव्यमान m_1, त्रिज्या r_1 वाले वृत्त में घूर्णन कर रहा है जिसका तल, AB के लंबवत् है। वस्तुतः प्रत्येक बिन्दु द्रव्यमान एक वृत्त में घूम रहा होता है जिसका तल AB पर लंब होता है। खंड 1 के समीकरण 4.13क का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

जैसा कि आपने भाग 9.2.3 में पढ़ा, दृढ़ पिंड की व्यापक गति को उसके संहति केंद्र की स्थानांतरण गति, और संहति केंद्र के प्रति घूर्णी गति का संयोजन माना जा सकता है। अतः इस इकाई में की गई चर्चा, उस अक्ष के प्रति किए गए घूर्णनों पर भी लागू होती है जो जड़त्वीय निर्देश तंत्र में नियत न हो, बशर्ते वह अक्ष संहति केंद्र से गुज़रता हो और उस अक्ष की **दिशा** समष्टि में नियत रहती हो।

$$\mathbf{v}_1 = \dot{r}_1 \hat{\mathbf{r}}_1 + r_1 \dot{\theta}_1 \hat{\boldsymbol{\theta}}_1$$

जहां $\hat{\mathbf{r}}_1$, $\mathbf{r}_1$ के अनुदिश एकक सदिश है और वर्धमान कोण θ_1 की दिशा में $\hat{\theta}_1$, $\hat{\mathbf{r}}_1$ पर लंब है। आपको याद होगा कि समय के साथ $\hat{\mathbf{r}}_1$ और $\hat{\theta}_1$ की दिशाओं में परिवर्तन होता रहता है। और, क्योंकि $\dot{\theta}_1 = \omega$, जो कि सभी बिन्दु-द्रव्यमानों के लिए समान है, इसलिए

$$\mathbf{L}_1 = m_1 r_1 \hat{\mathbf{r}}_1 \times (\dot{r}_1 \hat{\mathbf{r}}_1 + r_1 \dot{\theta}_1 \hat{\boldsymbol{\theta}}_1.)$$

अब, $\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{0}$ और $\hat{\mathbf{r}}_1 \times \hat{\boldsymbol{\theta}}_1 = \hat{\mathbf{n}}$, जहां $\hat{\mathbf{n}}$, BA के अनुदिश एकक सदिश है (देखिए खंड 1 की इकाई 4 का बोध प्रश्न 3 ग)।

$$\therefore \mathbf{L}_1 = m_1 r_1^2 \omega \hat{\mathbf{n}} = m_1 r_1^2 \boldsymbol{\omega}.$$

इसी प्रकार $\mathbf{L}_2 = m_2 r_2^2 \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{L}_3 = m_3 r_3^2 \boldsymbol{\omega}$, आदि।

अतः पिंड का कोणीय संवेग होगा

$$\begin{aligned}\mathbf{L} &= \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 + \mathbf{L}_3 + \ldots\ldots \\ &= (m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots\ldots)\,\boldsymbol{\omega} \\ &= I\boldsymbol{\omega},\end{aligned} \tag{9.2}$$

असममित पिंडों की गति के लिए **L** और **ω** भिन्न दिशाओं में हो सकते हैं। उस स्थिति में I को संख्या-रूप में नहीं प्रकट किया जा सकता। तब जड़त्व आघूर्ण को प्रदिश (tensor) नामक अधिक जटिल गणितीय राशि के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

जहां $$I = \sum_i m_i r_i^2 \tag{9.3}$$

को दिए हुए घूर्णन अक्ष के प्रति पिंड का जड़त्व आघूर्ण कहा जाता है। यह जोड़ (summation) पिंड के सभी बिन्दु-द्रव्यमानों पर होता है। जड़त्व आघूर्ण का मात्रक kg m² है।

यदि पिंड का द्रव्यमान M हो तो हम I को

$$I = Mk^2 \tag{9.4}$$

के रूप में व्यक्त कर सकते हैं जहां k लंबाई की विमा वाली एक राशि है। इस राशि को **परिभ्रमण-त्रिज्या** (radius of gyration) कहा जाता है। यदि हम समीकरण 9.4 की तुलना खंड 4 के समीकरण 4.21 ख से करें तो हम पाएंगे कि k, घूर्णन अक्ष से उस बिन्दु की दूरी है जिस पर पिंड के पूरे द्रव्यमान को केन्द्रित माना जा सकता है। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि यह घूर्णन अक्ष और पिंड के संहति केन्द्र के बीच की दूरी है।

क्या आपने समीकरण 9.2 के व्यंजक और रैखिक संवेग के व्यंजक (अर्थात् $M\mathbf{v}$) में कोई समानता देखी? चूंकि ω, $\mathbf{v}$ के अनुरूप है (देखिए सारणी 4.1), इसलिए I, M के अनुरूप होगा। दूसरे शब्दों

में, I द्रव्यमान का घूर्णी अनुरूप होता है जिसके बारे में आप भाग 4.3.3 में पढ़ चुके हैं। यह अनुरूपता घूर्णन की गतिज ऊर्जा K के व्यंजक से भी स्पष्ट हो जाती है जिसे आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न में निकाल सकते हैं।

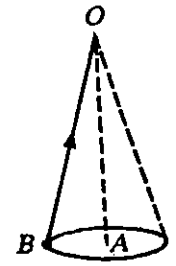
बोध प्रश्न 5

दिखाइए कि चित्र 9.8 के पिंड के घूर्णन की गतिज ऊर्जा है

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \tag{9.5}$$

K के व्यंजक की तुलना रैखिक गति के लिए गतिज ऊर्जा के व्यजंक से कीजिए और द्रव्यमान का घूर्णी अनुरूप ज्ञात कीजिए।

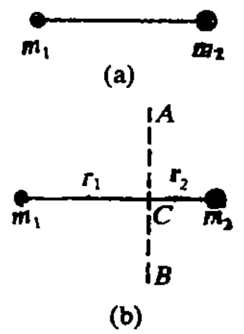
इस भाग में अभी तक हमने उस स्थिति पर विचार किया है जिसमें घूर्णन अक्ष पिंड से होकर गुज़रता है। ऊपर दिया गया विश्लेषण तब भी लागू होता है जबकि घूर्णन अक्ष पिंड के बाहर स्थित हो जैसे शंक्वाकार लोलक (conical pendulum) का गोलक (चित्र 9.9)। अब, क्योंकि आप जड़त्व आघूर्ण की संकल्पना अच्छी तरह से समझ गए हैं, इसलिए हम इसे ज्ञात करने की विधि संक्षेप में बताएंगे।



चित्र 9.9 : B, शंक्वाकार लोलक का गोलक है और OA, घूर्णन अक्ष।

9.3.1 दृढ़ पिंड का जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना

अब हम समीकरण 9.3 का प्रयोग करेंगे। आइए पहले हम एक डम्ब-बेल (dumb-bell) का जड़त्व आघूर्ण मालूम करें (चित्र 9.10क)। यहां हम यह मान लेंगे कि द्रव्यमान m_1 और m_2 को मिलाने वाला बारीक छड़ नगण्य द्रव्यमान का है। हम यह भी मानेंगे कि m_1 और m_2 बिन्दु-द्रव्यमान हैं। आपको लग सकता है कि यह बातें मानने से यह प्रश्न कुछ ज़्यादा ही आसान हो जाएगा। पर डम्ब-बेल के इस मॉडल के आण्विक स्पेक्ट्रम-विज्ञान (molecular spectroscopy) में अनेक अनुप्रयोग हैं, क्योंकि यह एक द्विपरमाणुक अणु (diatomic molecule) को निरूपित कर सकता है। आइए पहले हम डम्ब-बेल का जड़त्व आघूर्ण निकालने के लिए एक उदाहरण को हल करें। इसके बाद हम इस मॉडल के अनुप्रयोग का अध्ययन करेंगे।



चित्र 9.10 : (क) एक डम्ब-बेल जिसके सिरों पर द्रव्यमान m_1 और m_2 स्थित हैं, (ख) एक ऐसे अक्ष के प्रति डम्ब-बेल का जड़त्व आघूर्ण निकालना, जो m_1 और m_2 के संहति केंद्र से गुज़रता हो और दोनों द्रव्यमानों को मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् हो।

उदाहरण 1

चित्र 9.10 ख देखिए। द्रव्यमान m_1 और m_2 को मिलाने वाली रेखा पर AB लंब है और यह संहति केन्द्र C से होकर जाती है। डम्ब-बेल के बारे में ऊपर मानी गई बातों के आधार पर दिखाइए कि चित्र 9.10 ख के निकाय का जड़त्व आघूर्ण μr^2 है, जहां μ निकाय का समानीत द्रव्यमान है और r द्रव्यमानों के बीच की दूरी है।

दिए गए निकाय के लिए समीकरण 9.3 के जोड़ में दो ही पद होंगे, यानि कि

$$I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2$$

क्योंकि C संहति केन्द्र है, इसलिए $m_1 r_1 = m_2 r_2$

$$\text{या } \frac{r_1}{m_2} = \frac{r_2}{m_1} = \frac{r_1 + r_2}{m_2 + m_1} \text{ (योगानुपात से)}$$

$$\therefore\ r_1 = \frac{m_2 r}{m_1 + m_2},\ r_2 = \frac{m_1 r}{m_1 + m_2} \cdot\ (\because\ r = r_1 + r_2)$$

$$\therefore\ I = m_1 \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} r \right)^2 + m_2 \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} r \right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} r^2$$

अतः समीकरण 7.6 से हमें प्राप्त होता है।

$$I = \mu r^2.$$

अब आप नीचे दिए गए बोध प्रश्न को हल करके उदाहरण 2 का अनुप्रयोग जान सकते हैं।

बोध प्रश्न 6

ऑक्सीज़न अणु (O_2) के परमाणुओं को एक दूसरे से 1.2 °A की दूरी पर स्थित बिन्दु-द्रव्यमान माना जा सकता है। मानक ताप और दाब (s.t.p.) पर ऑक्सीज़न के अणु की चाल 460 m s^{-1} है। हमें यह पता है कि अणु की घूर्णी गतिज ऊर्जा उसकी स्थानांतरण गतिज ऊर्जा की दो-तिहाई है। यह मानकर कि संहति केन्द्र में होकर जाने वाली और परमाणुओं को मिलाने वाली रेखा पर लंब अक्ष के प्रति अणु घूर्णन कर रहा है, s.t.p. पर उसका कोणीय वेग ज्ञात कीजिए।

अभी हमने अलग-अलग कणों से बने निकाय का जड़त्व आघूर्ण निकालने के लिए समीकरण 9.3 लागू किया है। प्रत्येक निकाय में (डम्ब-बेल और द्विपरमाणुक अणु) कुल द्रव्यमान उन कणों में वितरित होता है जो एक-दूसरे से जुड़े नहीं हैं यानि कि हम निकाय के इन कणों की गिनती कर सकते हैं। अब हम उन निकायों पर विचार करेंगे जिनमें पदार्थ का संतत वितरण (continuous distribution) होता है। इसमें निकाय के कणों को गिना नहीं जा सकता। मिसाल के तौर पर, समांग छड़, गोला, बेलन आदि जैसे पिंड। इसके लिए हमें समीकरण 9.3 को फिर से लिखना होगा।

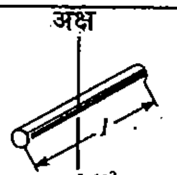
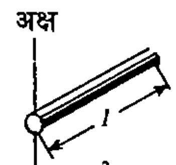
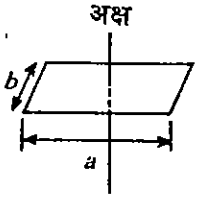
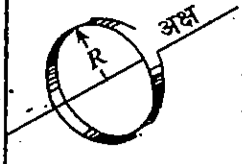
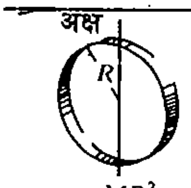
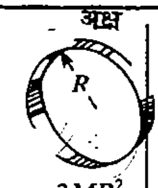
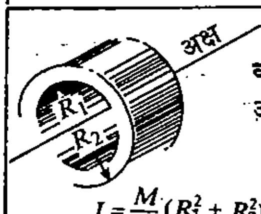
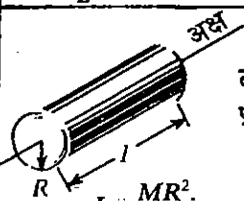
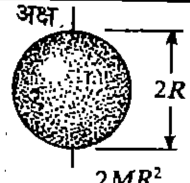
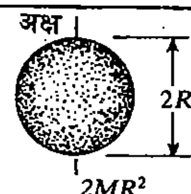
मान लीजिए कि अक्ष से पिंड के अत्यणु द्रव्यमान Δm की लांबिक दूरी r है। तब समीकरण 9.3 से

$$I = \lim_{\Delta m \to 0} \sum r^2 \Delta m = \int r^2\, dm, \qquad (9.6)$$

जहां Δm के स्थान पर dm द्रव्यमान का अवकल और संकलन चिह्न (Σ) के स्थान पर चिह्न ($\int$) का प्रयोग किया गया है। यह एक निश्चित समाकल (definite integral) है जो पूरे पिंड पर विस्तारित है। समीकरण 9.6 का प्रयोग करके कुछ अक्षों के प्रति सममित पिंडों के जड़त्व आघूर्ण निकाले जा सकते हैं।

कुछ अक्षों के प्रति कुछ सामान्य सममित पिंडों के जड़त्व आघूर्ण सारणी 9.1 में दिए गए हैं। (आरेख में सभी स्थितियों में M पिंड के द्रव्यमान को निरूपित करता है)। हमने इन परिणामों की उपपत्ति परिशिष्ट ख में दी है।

सारणी 9.1

 अक्ष, l; $I = \frac{Ml^2}{12}$ — केंद्र से गुज़रने वाले, **पतली छड़** के लंबवत् अक्ष के प्रति (क)	 अक्ष, l; $I = \frac{Ml^2}{3}$ — एक सिरे से गुज़रने वाले, **पतली छड़** के लंबवत् अक्ष के प्रति (ख)
 अक्ष, a, b — केंद्र से गुज़रने वाले, **आयताकार प्लेट** के तल के लंबवत् अक्ष के प्रति (ग)	 अक्ष, R; $I = MR^2$ — केंद्र से गुज़रने वाले, **वलय** के तल के लंबवत् अक्ष के प्रति (घ)
 अक्ष, R; $I = \frac{MR^2}{2}$ — **वलय** के किसी भी व्यास के प्रति (ङ)	 अक्ष, R; $I = \frac{3MR^2}{2}$ — **वलय** की किसी भी स्पर्श रेखा के प्रति (च)
 अक्ष, R_1, R_2; $I = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)$ — **वलयाकार बेलन** के अक्ष के प्रति (छ)	 अक्ष, R, l; $I = \frac{MR^2}{2}$ — **ठोस बेलन** के अक्ष के प्रति (ज)
 अक्ष, $2R$; $I = \frac{2MR^2}{5}$ — **ठोस गोले** के किसी भी व्यास के प्रति (झ)	 अक्ष, $2R$; $I = \frac{2MR^2}{3}$ — **पतले गोलीय कोश** के किसी भी व्यास के प्रति (ञ)

इस तरह आप जड़त्व आघूर्ण की संकल्पना अच्छी तरह से समझ गए हैं। आप कुछ अक्षों के प्रति अनेक पिंडों के जड़त्व आघूर्णों के मान भी जान गए हैं। अतः अब आप घूर्णी गति की गतिकी समझ सकते हैं।

9.4 दृढ़ पिंड की घूर्णी गतिकी

आप जानते हैं कि त्वरित गति (accelerated motion) और उसके कारणों के अध्ययन को गतिकी कहते हैं। स्थानांतरण गति न्यूटन के द्वितीय नियम के अनुसार होती है:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

जैसा कि आप जानते हैं (देखिए खंड 1 का समीकरण 4.24) न्यूटन के द्वितीय गति-नियम का घूर्णी अनुरूप निम्नलिखित व्यंजक है

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

जहां $\boldsymbol{\tau}$ कण पर लग रहा बलआघूर्ण है और $\mathbf{L}$ उसका कोणीय संवेग है। आपको याद होगा कि आप खंड 1 के भाग 4.3 में कण की कोणीय गति की गतिकी के बारे में पढ़ चुके हैं। खंड 1 की इकाई 4 में दी हुई संकल्पनाओं में से अधिकांश को हम दृढ़ पिंड पर लागू करेंगे। आपने उस इकाई में आवश्यक नियमों को भी पढ़ा है। हम उन्हें सारणी 9.2 में प्रस्तुत करेंगे। इस सारणी में हमने स्थानांतरण गति और घूर्णी गति की तुल्य (equivalent) राशियों को साथ-साथ रखा है। कुछ खाली स्थान छोड़ दिए गए हैं जिन्हें आप भर सकते हैं।

सारणी 9.2

क्रम सं०	स्थानांतरण गति	घूर्णी गति
i)	स्थिति, $\mathbf{r}$	कोणीय स्थिति, θ
ii)	वेग, $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$	कोणीय वेग, $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\boldsymbol{\theta}}{dt}$
iii)	त्वरण, $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$	कोणीय त्वरण, $\boldsymbol{\alpha} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{\theta}}{dt^2}$
iv)	द्रव्यमान, m	जड़त्व आघूर्ण I
v)	रैखिक संवेग $\mathbf{p} = m\,\mathbf{v}$	कोणीय संवेग, $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$
vi)	बल, $\mathbf{F}$	बल आघूर्ण, $\boldsymbol{\tau}$
vii)	न्यूटन का द्वितीय नियम $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = m\,\mathbf{a}$	द्वितीय नियम का घूर्णी अनुरूप $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = \ldots\ldots$
viii)	किया गया कार्य $= \int \mathbf{F} \,.\, d\mathbf{r}$	किया गया कार्य $= \int \boldsymbol{\tau} \,.\, d\boldsymbol{\theta}$
ix)	गतिज ऊर्जा $= \frac{1}{2} mv^2$	गतिज ऊर्जा = ...
x)	संवेग-संरक्षण का नियम: जब पिंड पर लगा रहा नेट बाह्य बल शून्य हो, तो संहति केन्द्र का रैखिक संवेग अचर बना रहता है	....
xi)	आवेग $= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(t)\,dt = \mathbf{p}(t_2) - \mathbf{p}(t_1)$	कोणीय आवेग = ...

अब जबकि आप सारणी 9.2 को पढ़ चुके हैं और बोध प्रश्न 7 हल कर चुके हैं हम घूर्णी गतिकी के सिद्धांतों के कुछ अनुप्रयोगों पर चर्चा कर सकते हैं। हम अपनी चर्चा न्यूटन के द्वितीय नियम के घूर्णी अनुरूप से शुरू करेंगे।

9.4.1 न्यूटन के द्वितीय नियम का घूर्णी अनुरूप

हमने पिंड की रैखिक गति की गतिकी को समझने के लिए समीकरण $\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ का प्रयोग किया है। अचर द्रव्यमान वाले निकाय के लिए यह समीकरण $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ हो जाता है। पिंड की घूर्णी-गतिकी समझने के लिए पहले हमें घूर्णन-अक्ष के प्रति उसका जड़त्व-आघूर्ण I निकालना होगा। तब हम ऊपर दिए गए समीकरण के घूर्णी अनुरूप का प्रयोग करेंगे, जो निम्नलिखित है

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

चूँकि समीकरण 9.2 से हम जानते हैं कि $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$

$$\therefore \boldsymbol{\tau} = \frac{d}{dt}\,(I\boldsymbol{\omega}).$$

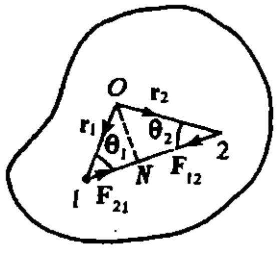
अचर I वाले निकाय के लिए

$$\boldsymbol{\tau} = I\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha} \qquad (9.7)$$

समीकरण 9.7 में, $\boldsymbol{\tau}$ पिंड पर लग रहा नेट बलआघूर्ण है। अतः हमें पिंड पर लग रहे सभी बलआघूर्णों को काफी सावधानी से निकालना चाहिए और नेट बलआघूर्ण निकालने के लिए उनका सदिश योगफल लेना चाहिए।

आप भाग 7.3 में बहु-कण निकाय की रैखिक गति के बारे में पढ़ चुके हैं। वहां आपने यह देखा था कि इस गति में केवल बाह्य बलों का महत्व है। न्यूटन के तृतीय नियम के अनुसार आंतरिक बल एक दूसरे को निरस्त कर देते हैं। आइए अब हम यह देखें कि आंतरिक बलआघूर्ण के संबंध में क्या होता है। इसके लिए चित्र 9.11 देखिए। इसमें दृढ़ पिंड के दो कण 1 और 2 दिखाए गए हैं। 2 के कारण 1 पर लग रहा आंतरिक बल $\mathbf{F}_{21}$ है और 1 के कारण 2 पर लग रहा आंतरिक बल $\mathbf{F}_{12}$ है। आइए अब हम इन बलों के कारण बिन्दु O के प्रति नेट आंतरिक बलआघूर्ण निकालें। आपको याद होगा कि खंड 1 के समीकरण 1.16 के अनुसार नेट बलआघूर्ण होता है:

$$\boldsymbol{\tau}_{12} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12}$$



चित्र 9.11 : दृढ़ पिंड के दो कणों पर लग रहे आंतरिक बल।

अब, $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{21} = r_1F_{21}\sin(\pi - \theta_1)\hat{\mathbf{n}} = F_{21}\, r_1 \sin\theta_1\, \hat{\mathbf{n}}$

जहां $\hat{\mathbf{n}}$ इस पृष्ठ के समतल पर लंब एकक सदिश है और इसकी दिशा आपकी ओर है। और

$$\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{12} = r_2F_{12}\sin(\pi - \theta_2)(-\hat{\mathbf{n}}) = -F_{12}\, r_2 \sin\theta_2\, \hat{\mathbf{n}}$$

$$\therefore \boldsymbol{\tau} = (F_{21}\, r_1 \sin\theta_1 - F_{12}\, r_2 \sin\theta_2)\hat{\mathbf{n}} \qquad (9.8)$$

न्यूटन के तृतीय नियम से हम यह जानते हैं कि $\mathbf{F}_{12}$ और $\mathbf{F}_{21}$ बराबर और विपरीत दिशा में होते हैं। और चित्र 9.11 से आप यह देख सकते हैं कि

$$r_1 \sin\theta_1 = r_2 \sin\theta_2 = ON,$$

जहां ON, बिन्दुओं 1 और 2 को मिलाने वाली रेखा पर O से डाले गए लंब की लंबाई है। अतः समीकरण 9.8 से

$$\boldsymbol{\tau}_{12} = \mathbf{0}.$$

इस तरह, हम यह पाते हैं कि आंतरिक बलआघूर्णों का निरसन हो जाता है। अतः समीकरण 9.7 का बलआघूर्ण नेट बाह्य बलआघूर्ण ही है।

आइए अब हम समीकरण 9.7 को और अच्छी तरह से समझने के लिए एक उदाहरण हल करें। आप पाएंगे कि यह स्थिति त्वरित रैखिक गति के अनुरूप है क्योंकि घूर्णन कर रहे पिंड पर लगा बलआघूर्ण और उसका कोणीय वेग एक ही दिशा में हैं।

उदाहरण 2

एक कुएं की क्षैतिज धुरी पर द्रव्यमान M वाला एक ठोस बेलन लगा है (चित्र 9.12क)। बेलन पर एक रस्सी लपेटी गई है और रस्सी से द्रव्यमान m वाली एक बाल्टी लटका दी गई है। m, M और g के पदों में बाल्टी के त्वरण का व्यंजक निकालिए जबकि वह नीचे गिरती हो। रस्सी के

द्रव्यमान, और धुरी तथा बेलन के बीच के घर्षण की उपेक्षा कर दीजिए। यह भी मान लीजिए कि रस्सी खुलने पर वह बेलन पर फिसलती नहीं।

अगर बाल्टी बेलन से जुड़ी न होती तो वह दर g से नीचे की ओर गिरती। पर अब रस्सी के कारण बाल्टी पर एक उपरिमुखी तनाव **T** लगता है। इससे बाल्टी पर लग रहा नेट अधोमुखी बल कम हो जाता है। यह बल बेलन पर वलआघूर्ण लगाता है। बाल्टी पर अधोमुखी बल (चित्र 9.12 ख) का परिमाण होता है

$$F = mg - T.$$

पर $F = ma$, जहां **a** बाल्टी का रैखिक त्वरण है।

$$\therefore \; ma = mg - T. \tag{9.9}$$

अगर हम बेलन के सिरे को देखें (चित्र 9.12ग), तो हम पाएंगे कि रस्सी बेलन पर परिमाण $\tau(= RT)$ का बलआघूर्ण लगाती है। इससे कोणीय त्वरण α उत्पन्न होता है जो समीकरण 9.8 के अनुसार है

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{RT}{I}, \tag{9.10}$$

जहां I अक्ष के प्रति बेलन का जड़त्व आघूर्ण है।

क्योंकि रस्सी फिसले बिना खुलती है, इसलिए a और α एक दूसरे से संबंधित होते हैं। खंड 1 के समीकरण 4.11 क का प्रयोग करने पर हमें समीकरण 9.10 से निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$a = \alpha R = \frac{R^2 T}{I} \tag{9.11}$$

अतः समीकरण 9.9 और समीकरण 9.11 से

$$ma = mg - \frac{Ia}{R^2},$$

$$\therefore \left(m + \frac{I}{R^2} \right) a = mg$$

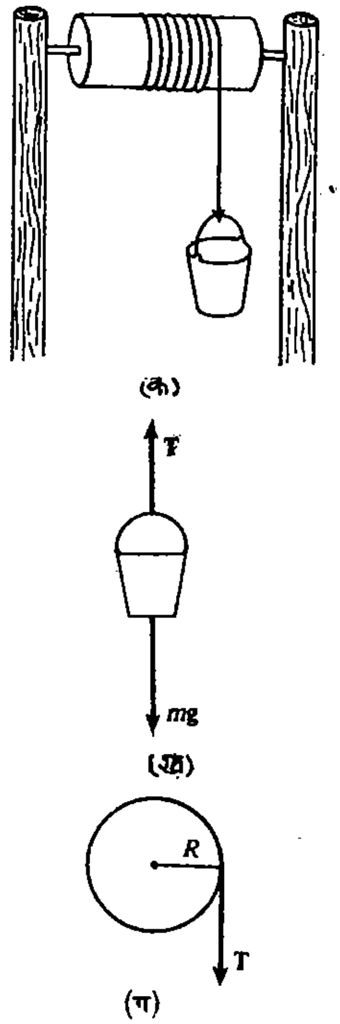
या

$$a = \frac{mg}{\left(m + \frac{I}{R^2} \right)} \tag{9.12 क}$$

सारणी 9.1 के परिणाम (ज) से हम यह जानते हैं कि बेलन के लिए $I = \frac{1}{2} MR^2$ इसलिए हम समीकरण 9.12 क को इस रूप में लिख सकते हैं

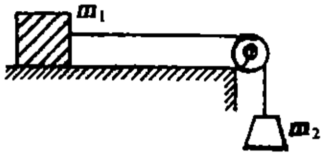
$$a = \frac{mg}{\left(m + \frac{M}{2} \right)} \tag{9.12 ख}$$

समीकरण 9.12 ख से यह पता चलता है कि यदि $M < < m$, तब $a \simeq g$. दूसरे शब्दों में यदि बाल्टी के द्रव्यमान की तुलना में बेलन का द्रव्यमान बहुत कम हो तो बेलन के घूर्णन का कोई महत्व नहीं होता। बाल्टी का त्वरण केवल g के बराबर होता है। फिर भी, व्यापक रूप में हम यह कह सकते हैं कि बाल्टी पर लग रहे गुरुत्व बल से न केवल उसमें रैखिक त्वरण ही पैदा होता है बल्कि इससे बेलन में कोणीय त्वरण भी पैदा होता है। परिणामस्वरूप, बाल्टी का रैखिक त्वरण कम होता जाता है।



चित्र 9.12

आप जानते हैं कि एक गिरता हुआ पिंड एक दूसरे पिंड में क्षैतिज त्वरण उत्पन्न कर सकता है (चित्र 9.13)। उदाहरण 2 से अभी हमने देखा है कि एक गिरता हुआ पिंड एक अन्य पिंड में कोणीय त्वरण भी उत्पन्न कर सकता है।



चित्र 9.13 : एक गिरता हुआ पिंड (m_2), दूसरे पिंड (m_1) में क्षैतिज त्वरण उत्पन्न कर सकता है

इस तरह आपने यह जाना कि न्यूटन के द्वितीय गति नियम के घूर्णी अनुरूप को कैसे लागू किया जाता है। इस अध्ययन से हमें पिंड की साम्यावस्था (equilibrium) के बारे में भी कुछ जानकारी मिलती है। खंड 1 के भाग 2.2.2 में आप बलों की साम्यावस्था के बारे में पढ़ चुके हैं। पिंड को साम्यावस्था में तब कहा जाता है जबकि उस पर लग रहे सभी बलों का सदिश योगफल शून्य हो। दूसरे शब्दों में हम कह सकते हैं कि पिंड के संहति केन्द्र का रैखिक त्वरण शून्य हो। पर हम यह जानते हैं कि दृढ़ पिंड की व्यापक गति स्थानांतरण गति और संहति केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के प्रति घूर्णी गति का संयोजन है। अतः हम यह कह सकते हैं कि खंड 1 के भाग 2.2.2 का

हमारा अध्ययन केवल स्थानांतरण साम्यावस्था तक ही सीमित था। पिंड की साम्यावस्था के व्यापक प्रतिबंध में घूर्णी पहलू भी अवश्य शामिल होना चाहिए। अब हम साम्यावस्था का संक्षेप में अध्ययन करेंगे।

दृढ़ पिंड की साम्यावस्था

दृढ़ पिंड को यांत्रिक साम्यावस्था में तब कहा जाता है जबकि जड़त्वीय निर्देश तंत्र के सापेक्ष (i) इसके संहति केन्द्र का रैखिक त्वरण $\mathbf{a}_{cm}$ शून्य हो और (ii) इस निर्देश तंत्र में नियत किसी अक्ष के प्रति इसका कोणीय त्वरण शून्य हो।

ऊपर दिए गए प्रतिबंधों का यह मतलब कतई नहीं है कि निर्देश तंत्र के सापेक्ष पिंड को विरामावस्था में होना चाहिए। इनका मतलब सिर्फ़ इतना है कि पिंड की गति अत्वरित होनी चाहिए। उदाहरण के लिए, इसका संहति केन्द्र अचर वेग $\mathbf{v}_{cm}$ से गतिमान हो सकता है और एक नियत अक्ष के प्रति पिंड अचर कोणीय वेग से घूर्णन कर सकता है।

जैसा कि आप जानते हैं, पिंड की स्थानांतरण गति निम्नलिखित नियम के अनुसार होती है

$$\mathbf{F}_e = M\,\mathbf{a}_{cm}$$

जहां $\mathbf{F}_e$ द्रव्यमान M वाले पिंड पर लग रहा नेट बाह्य बल है। अतः प्रतिबंध (i) को इस तरह भी लिखा जा सकता है : **पिंड पर लग रहे सभी बाह्य बलों का सदिश योगफल शून्य होता है।** दूसरे शब्दों में अगर एक दृढ़ पिंड पर कई बाह्य बल $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3$ .... आदि लग रहे हों और वह स्थानांतरण साम्यावस्था में हो, तो हम ऊपर दिए गए प्रतिबंध को इस रूप में लिख सकते हैं:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \ldots = 0 \qquad (9.13\text{ क})$$

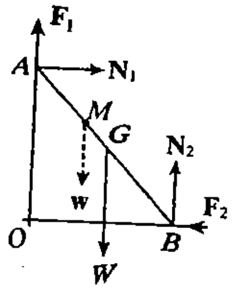
दूसरा प्रतिबंध है कि किसी भी अक्ष के प्रति $\boldsymbol{\alpha} = 0$. हम जानते हैं कि दृढ़ पिंड का कोणीय त्वरण नेट बाह्य बलआघूर्ण $\boldsymbol{\tau}$ से निम्न रूप में संबंधित होता है

$$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}$$

जहां I घूर्णन अक्ष के प्रति पिंड का जड़त्व आघूर्ण है। अतः प्रतिबंध (ii) को इस तरह भी लिखा जा सकता है : **पिंड पर लग रहे सभी बाह्य बलआघूर्णों का सदिश योगफल शून्य होता है।** दूसरे शब्दों में अगर एक दृढ़ पिंड पर कई बाह्य बलआघूर्ण $\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2, \boldsymbol{\tau}_3, \ldots$ आदि लग रहे हों और वह पिंड घूर्णन साम्यावस्था में हो तो हम इस प्रतिबंध को निम्न रूप में व्यक्त कर सकते हैं:

$$\boldsymbol{\tau}_1 + \boldsymbol{\tau}_2 + \boldsymbol{\tau}_3 + \ldots = 0. \qquad (9.13\text{ ख})$$

अतः पिंड को यांत्रिक साम्यावस्था (mechanical equilibrium) में तब कहा जाता है जबकि उस पर दोनों प्रतिबंध 9.13क और 9.13ख लागू होते हों।



चित्र 9.14 : साम्यावस्था में स्थित (सीढ़ी + आदमी) निकाय

आइए अब हम सीढ़ी पर खड़े आदमी का उदाहरण लें (चित्र 9.14)। मान लीजिए कि जब आदमी सीढ़ी AB के बिन्दु M पर होता है तो पूरा निकाय साम्यावस्था में होता है। पहले हम देखेंगे कि निकाय पर कौन-कौन से बल कार्य कर रहे हैं। आदमी का भार $\mathbf{w}$ है जो M से होते हुए ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी (vertically downwards) लग रहा है। सीढ़ी का भार $\mathbf{W}$ है जो मध्य बिन्दु G से होते हुए ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी लग रहा है। सीढ़ी और ऊर्ध्वाधर तथा क्षैतिज सतहों के संपर्क बिन्दुओं A और B पर अभिलंब प्रतिक्रियाएं (normal reactions) क्रमशः $\mathbf{N}_1$ और $\mathbf{N}_2$ हैं। चूंकि A की प्रवृत्ति O की ओर फिसलने की होती है इसलिए घर्षण-बल $\mathbf{F}_1$, OA के अनुदिश A पर लग रहा है। और क्योंकि B की प्रवृत्ति OB के अनुदिश फिसलने की होती है, इसलिए B पर घर्षण बल $\mathbf{F}_2$, BO के अनुदिश होगा। अतः प्रतिबंध 9.13क के अनुसार

$$\mathbf{w} + \mathbf{W} + \mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2 + \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0$$

आइए अब हम OB और OA के अनुदिश कार्तीय x-अक्ष और y-अक्ष लें। तब ऊपर दिए गए प्रतिबंध को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$$-w\hat{\mathbf{j}} - W\hat{\mathbf{j}} + N_1\hat{\mathbf{i}} + N_2\hat{\mathbf{j}} + F_1\hat{\mathbf{j}} - F_2\hat{\mathbf{i}} = 0$$

या $(N_1 - F_2)\hat{\mathbf{i}} + (N_2 + F_1 - w - W)\hat{\mathbf{j}} = 0.$

अतः $N_1 - F_2 = 0, \quad N_2 + F_1 - w - W = 0$

अर्थात् $N_1 = F_2$ और $N_2 + F_1 = w + W.$ (9.14क)

अब हम प्रतिबंध (9.13ख) पर विचार करेंगे। इसके लिए हमें किसी बिन्दु के प्रति निकाय पर लग रहा नेट बलआघूर्ण निकालना है। इस बिन्दु का चुनाव काफ़ी महत्वपूर्ण है। अगर सही बिन्दु का

चुनाव किया जाए तो अंतिम प्रतिबंध का रूप सरल हो जाता है। आइए देखें कि सही बिन्दु का चुनाव किस तरह किया जाता है। अगर हम बिन्दु A लें तो $\mathbf{F}_1$ तथा $\mathbf{N}_1$ के बलआघूर्ण लुप्त हो जाएंगे। इसी प्रकार अगर हम बिन्दु B लें तो $\mathbf{F}_2$ और $\mathbf{N}_2$ के बलआघूर्ण लुप्त हो जाएंगे। अतः इन दो बिन्दुओं में से अगर कोई एक बिन्दु हम लें तो प्रतिबंध (9.13 ख) लिखते समय हम बलयुग्म के बलआघूर्ण का व्यंजक लिखने से बच जाएंगे। ऐसा करने से अंतिम प्रतिबंध काफ़ी सरल हो जाएगा। फिर भी, प्रतिबंध अपनेआप में उस बिन्दु पर निर्भर नहीं करता जिसके प्रति बलआघूर्ण निकाले जाते हैं। बिन्दु के उपयुक्त चुनाव से केवल प्रतिबंध का परिकलन आसान हो जाता है।

आइए अब हम बिन्दु B के संदर्भ में प्रतिबंध (9.13 ख) लिखें। हम जानते हैं कि

$$\mathbf{AB} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{AB} \times \mathbf{N}_1 + \mathbf{MB} \times \mathbf{w} + \mathbf{GB} \times \mathbf{W} = 0$$

अब मान लीजिए कि $AB = 2l$, $BM = a$ और $\angle OBA = \theta$ (चित्र 9.14)।

अतः $2lF_1 \sin(90° + \theta)\,\hat{\mathbf{k}} + 2lN_1 \sin\theta\,\hat{\mathbf{k}} - aw\sin(90° - \theta)\,\hat{\mathbf{k}} - lW\sin(90° - \theta)\,\hat{\mathbf{k}} = \mathbf{0}$,

जहां $\hat{\mathbf{k}}$, xy समतल पर लंब और आपकी ओर की दिशा में एकक सदिश है।

या $$2lF_1\cos\theta + 2lN_1\sin\theta - aw\cos\theta - lW\cos\theta = 0$$

या $$\cot\theta = \frac{2lN_1}{aw + lW - 2lF_1} \qquad (9.14\ \text{ख})$$

अतः निकाय (आदमी और सीढ़ी) के साम्यावस्था में होने के लिए दोनों समीकरण (9.14 क और 9.14 ख) लागू होने चाहिए।

अभी तक आपने पढ़ा है कि किस तरह न्यूटन के द्वितीय गति-नियम के घूर्णी अनुरूप को लागू किया जाता है। खंड 1 की इकाई 3 में आप रैखिक गति के संदर्भ में "कार्य और ऊर्जा" के बारे में भी पढ़ चुके हैं। अब हम दृढ़ पिंड की घूर्णी गति के लिए इन राशियों का अध्ययन करेंगे।

9.4.2 घूर्णी गति में कार्य और ऊर्जा

व्यापक रूप में रैखिक गति में बल $\mathbf{F}$ द्वारा किया गया कार्य होता है

$$W = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

जहां $d\mathbf{r}$ अत्यणु विस्थापन है। $\boldsymbol{\tau}$, बल $\mathbf{F}$ का घूर्णी अनुरूप है। कोणीय विस्थापन $\boldsymbol{\theta}$, $\mathbf{r}$ का अनुरूप है। अतः घूर्णी गति में बलआघूर्ण द्वारा किए गए कार्य को ऊपर दिए गए W के व्यंजक में $\mathbf{F}$ के स्थान पर $\boldsymbol{\tau}$ और $\mathbf{r}$ के स्थान पर $\boldsymbol{\theta}$ रख कर लिखा जा सकता है। अर्थात्

$$W_{rot} = \int \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta} \qquad (9.15\ \text{क})$$

कोणीय विस्थापन की दिशा में कार्य कर रहे अचर बलआघूर्ण के लिए

$$W_{rot} = \tau\Delta\theta, \qquad (9.15\text{ख})$$

जहां $\Delta\theta$ कुल कोणीय विस्थापन है।

आइए अब हम समीकरण 9.15ख को एक सरल उदाहरण पर लागू करें।

उदाहरण 3

1800 r.p.m. की दर से घूर्णन करने पर कार के इंजन में 72 kW की शक्ति उत्पन्न होती है। बताइए कि बलआघूर्ण कितना होता है।

शक्ति, कार्य करने की दर है। अब, अगर दिए समय Δt में किया गया कार्य W_{rot} ($= \tau\,\Delta\theta$) हो, तो शक्ति

$$P = \frac{\tau\,\Delta\theta}{\Delta t}$$

जहां $\dfrac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega =$ कोणीय चाल

या $\tau = \dfrac{P}{\omega}$

इस उदाहरण में $P = 72 \times 10^3\,\mathrm{W} = 72 \times 10^3\ \mathrm{kg\,m^2\,s^{-3}}$

और $\omega = 2\pi \times \dfrac{1800}{60}\ \mathrm{rad\,s^{-1}} = 60\pi\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$.

$$\therefore\ \tau = \frac{72 \times 10^3\ \mathrm{kg\,m^2 s^{-3}}}{60\ \pi\ \mathrm{rad\ s^{-1}}} = 382\ \mathrm{Nm}.$$

आपको याद होगा कि यहां Nm जूल के बराबर नहीं होगा।

आइए अब हम घूर्णन की गतिज ऊर्जा (K.E. of rotation) पर विचार करें। हम भाग 9.3 में घूर्णी पिंड की गतिज ऊर्जा K_{rot} का व्यंजक निकाल चुके हैं:

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2, \tag{9.16}$$

जहां I घूर्णन-अक्ष के प्रति पिंड का जड़त्व आघूर्ण है और ω उसकी कोणीय चाल है। अब हम लुढ़कती हुई वस्तुओं यानि कि बेलनी वस्तुओं (rolling objects) की गति पर समीकरण 9.16 लागू करेंगे।

बेलनी वस्तुएं

किसी बेलनी वस्तु (rolling object) में घूर्णी गति और स्थानांतरण गति दोनों ही होती हैं। जैसे-जैसे वस्तु आगे की ओर बढ़ती है वैसे ही वैसे वह एक बिन्दु के प्रति घूर्णन भी करती है। यह बिन्दु स्वयं भी एक सरल रेखा के अनुदिश गतिमान होता है। अब सवाल उठता है कि इस तरह की बेलनी वस्तु की कुल गतिज ऊर्जा कैसे व्यक्त की जाए? व्यंजक में स्थानांतरण गतिज ऊर्जा और घूर्णन की गतिज ऊर्जा दोनों ही होनी चाहिएं। अतः कुल गतिज ऊर्जा होगी

$$K = K_{trans} + K_{rot}$$

$$K_{trans} = \frac{1}{2} M v_{cm}^2, \qquad K_{rot} = \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega^2$$

जहां M वस्तु का द्रव्यमान है, v_{cm} संहति केन्द्र की चाल है, I_{cm} संहति केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के प्रति वस्तु का जड़त्व आघूर्ण है और ω उसकी कोणीय चाल है।

इस तरह $K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \frac{1}{2} I_{cm}\, \omega^2$

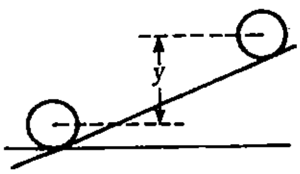
अब यदि वस्तु की त्रिज्या R हो और वह बिना फिसले लुढ़क रही हो, तो $\omega = \frac{v_{cm}}{R}$. अतः फिसले बिना लुढ़क रही वस्तु के लिए

$$K = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_{cm}}{R^2}\right) v_{cm}^2. \tag{9.17}$$

आइए अब हम नीचे दिए गए उदाहरण को हल करने के लिए समीकरण 9.17 लागू करें।

उदाहरण 4

एक ठोस बेलन और एक ठोस गोला, जिनके द्रव्यमान M और त्रिज्या R समान हैं, एक नत समतल (चित्र 9.15) पर विरामावस्था से शुरू करके बिना फिसले नीचे लुढ़क रहे हैं। इनमें से कौन समतल के तल पर पहले पहुंचेगा?



चित्र 9.15

मान लीजिए कि अंतिम रेखा, प्रारंभिक रेखा के नीचे, उससे y की ऊर्ध्वाधर दूरी पर है। साफ़ है कि वह वस्तु, जिसका संहति केन्द्र अधिक चाल से चलता है, पहले नीचे पहुंचेगी। अतः समीकरण 9.17 का प्रयोग करने पर और ऊर्जा संरक्षण नियम लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है।

$$Mgy = \frac{1}{2}\left(M + \frac{I_{cm}}{R^2}\right) v_{cm}^2$$

$$\text{या}\quad v_{cm}^2 = \frac{2gy}{1 + \dfrac{I_{cm}}{MR^2}} \tag{9.18}$$

ठोस बेलन के लिए, $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$ या $\quad v_{cm}^2 = \frac{4}{3} gy$

और ठोस गोले के लिए, $I_{cm} = \frac{2}{5} MR^2$ या $\quad v_{cm}^2 = \frac{10}{7} gy$

चूंकि $(10/7) > (4/3)$, इसलिए हम यह पाते हैं कि तल पर गोला पहले पहुंचता है। अब आप ऊपर बतायी गई संकल्पना पर आधारित एक बोध प्रश्न हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 8

35 cm की ऊर्ध्वाधर ऊंचाई वाले एक ढाल पर एक गोल गेंद बिना फिसले नीचे लुढ़कती है और $2\ \mathrm{ms^{-1}}$ की चाल से तल पर पहुंचती है। बताइए कि गेंद खोखली है या ठोस।

अभी तक आपने घूर्णी गतिकी के नियमों के कुछ अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ा है। खंड 1 के भाग 4.4.2 में आप पढ़ चुके हैं कि भौतिकी में कोणीय संवेग-संरक्षण नियम का काफ़ी प्रयोग होता है। आपने इकाई 4 में इस नियम के कुछ अनुप्रयोगों के बारे में भी पढ़ा है। इस नियम का एक अनुप्रयोग समान-क्षेत्रफल नियम है जिसका अध्ययन आप इकाई 6 में कर चुके हैं। अब हम कोणीय संवेग-संरक्षण नियम पर पुन: विचार करेंगे और कुछ अन्य अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे।

9.4.3 कोणीय संवेग-संरक्षण नियम और उसके अनुप्रयोग

आप जानते हैं कि

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

आपको याद होगा कि खंड 1 में भाग 4.4 के शुरू में हम एकल कण के लिए इस परिणाम को सिद्ध कर चुके हैं। बहु-कण निकाय के लिए $\boldsymbol{\tau} = \sum_i \boldsymbol{\tau}_i$ और $\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i$, जहां $\boldsymbol{\tau}_i$ और $\mathbf{L}_i$, iवें कण पर क्रमशः बलआघूर्ण और कोणीय संवेग हैं। हम यह भी जानते हैं कि

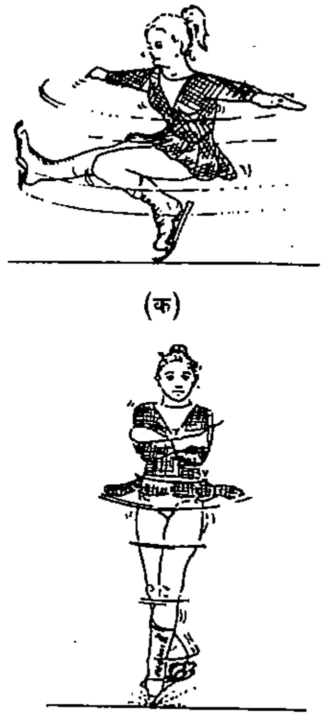
$$\boldsymbol{\tau}_i = \frac{d\mathbf{L}_i}{dt}$$

और $$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_i \mathbf{L}_i\right) = \sum_i \frac{d\mathbf{L}_i}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_i =$$ कण पर लग रहे बलआघूर्णों का जोड़।

पर भाग 9.4.1 में हम यह देख चुके हैं कि आंतरिक बलआघूर्ण एक दूसरे को निरस्त कर देते हैं। अत: बलआघूर्ण का जोड़ नेट बाह्य बलआघूर्ण के बराबर होगा, यानि कि

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau}_e, \qquad (9.19)$$

जहां $\boldsymbol{\tau}_e$ नेट बाह्य बलआघूर्ण है।



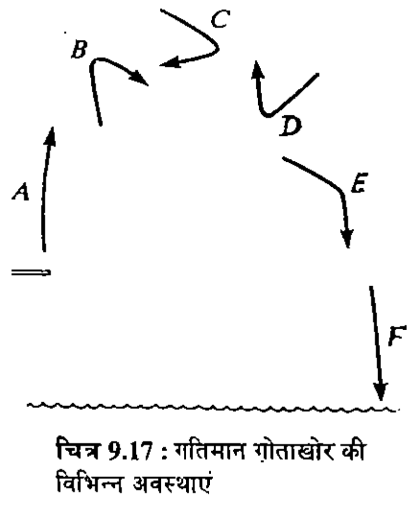
(क)

(ख)

चित्र 9.16 : फ़िगर स्केटर की गति। (क) स्केटर के लिए I बड़ा होता है और ω छोटा; (ख) I छोटा है और ω बड़ा।

जब निकाय पर कोई बाह्य बलआघूर्ण नहीं होता, तो समीकरण 9.19 से यह पता चलता है कि L यानि कि कोणीय संवेग, अचर है। यही कोणीय संवेग-संरक्षण नियम है। इस नियम से यह पता चलता है कि एक विलगित (isolated) निकाय के कोणीय संवेग में परिवर्तन नहीं हो सकता। अब हम इस नियम के कुछ अनुप्रयोगों की चर्चा करेंगे।

क्या आपने ध्यान दिया कि समीकरण 9.19 प्राप्त करते समय हमने यह प्रतिबंध नहीं लगाया कि निकाय दृढ़ पिंड ही होना चाहिए? यानि कि कोणीय संवेग संरक्षण उन निकायों पर भी लागू होता है जिनका विन्यास, और इस तरह उनका जड़त्व आघूर्ण, बदलता रहता है। इसका एक साधारण उदाहरण है फ़िगर स्केटर (figure skater) का जो अपनी बाहों को फैलाकर धीरे-धीरे चक्कर लेना शुरू करती है (चित्र 9.16 क) और फिर अपनी बाहों को अंदर खींच लेती है जिससे कि वह तेज़ी से घूमने लगती है (चित्र 9.16ख)। आइए हम देखें कि ऐसा क्यों होता है। जैसे-जैसे उसकी बाहें अंदर की ओर आने लगती हैं उसका द्रव्यमान घूर्णन-अक्ष की ओर केन्द्रित होने लगता है। दूसरे शब्दों में I के व्यंजक $\Sigma\, mr^2$ में r के मान छोटे हो जाते हैं। इसलिए I कम हो जाता है। पर कोणीय संवेग संरक्षित रहता है। अतः इसकी कोणीय चाल बढ़ जाती है। यह नियम चित्र 7.12 में दिखाए गए गोताखोर पर भी लागू होता है। चित्र 7.12 का एक रेखाचित्र चित्र 9.17 में दिखाया गया है। A, E और F स्थितियों पर I का मान अधिक होता है और ω का मान कम होता है, जबकि स्थितियों B, C और D पर I का मान कम और ω का मान अधिक होता है। इसलिए बीच हवा में कलाबाज़ी करने के लिए और सिर तथा हाथों को नीचे की ओर रखते हुए ताल में प्रवेश करने के लिए गोताखोर कोणीय संवेग-संरक्षण नियम का प्रयोग करते हैं। अब आप ऊपर दी गई संकल्पना पर आधारित एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।



चित्र 9.17 : गतिमान गोताखोर की विभिन्न अवस्थाएं

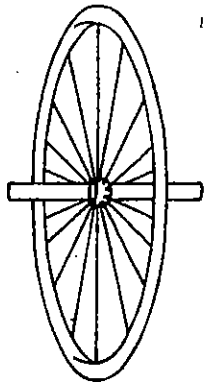
बोध प्रश्न 9

मान लीजिए कि पृथ्वी अचानक संघनित हो जाती है जिससे कि द्रव्यमान में परिवर्तन हुए बिना उसकी त्रिज्या सामान्य त्रिज्या की आधी हो जाती है। उसके दैनिक घूर्णन-काल में क्या परिवर्तन

अभी आपने कोणीय संवेग-संरक्षण नियम के अनुप्रयोगों के बारे में पढ़ा है। आप जानते हैं कि निकाय पर बाह्य बलआघूर्ण लगाने पर कोणीय संवेग सदिश में परिवर्तन आता है। जब लगाया गया बलआघूर्ण कोणीय संवेग की लांबिक दिशा में होता है, तब कोणीय संवेग सदिश में हुए परिवर्तन से एक रोचक स्थिति पैदा होती है। इस प्रकार प्राप्त गति को पुरस्सरण (precession) कहते हैं जिसकी चर्चा हम अब करेंगे।

9.4.4 पुरस्सरण

आपने कभी न कभी लट्टू तो ज़रूर नचाया होगा। आपने यह भी देखा होगा कि नाच रहे लट्टू का घूर्णन अक्ष ऊर्ध्वाधर के प्रति धीरे-धीरे घूर्णन करता है। इसका यह मतलब हुआ कि लट्टू के **L** की दिशा (जो घूर्णन-अक्ष के अनुदिश है) बदलती रहती है। ऐसा लट्टू पर लग रहे बलआघूर्ण के कारण होता है। अगर आप नीचे दिए गए कार्यकलाप को करें तो आप भी इस प्रभाव को देख सकते हैं।

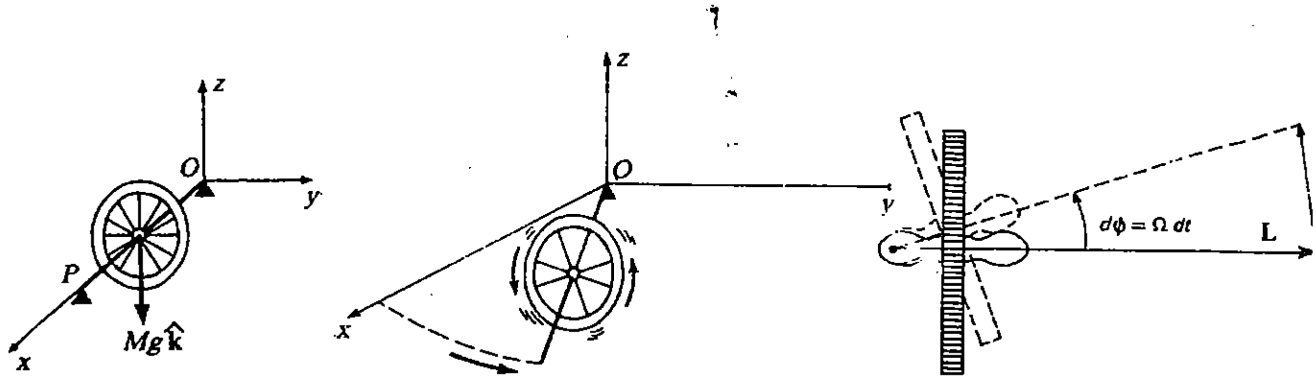


चित्र 9.18 : साइकिल का पहिया

कार्यकलाप

एक साइकिल को उलट दीजिए और सीट तथा हैंडल के बल पर उसे खड़ा कर दीजिए। इसके अगले पहिए को घुमाइए। जब पहिया तेज़ी से घूमने लगे तब उसकी धुरी के एक किनारे पर बल लगाकर उसे ऊपर उठाइए (चित्र 9.18)। ऐसा करने पर क्या होता है।

इस कार्यकलाप को करते समय आपने यह ज़रूर देखा होगा कि बल लगाने पर पहिया घूम जाता है अर्थात् उसके घूर्णन-अक्ष में परिवर्तन आ जाता है। ऐसा क्यों होता है? इसे समझने के लिए चित्र 9.19 का अध्ययन कीजिए।



(क) (ख) (ग)

चित्र 9.19 : (क) पहिए की धुरी के दोनों सिरे आलंबो पर टिके; (ख) तेज़ी से घूमता हुआ पहिया, P पर से टेक हटा लेने पर गिरता नहीं है, बल्कि पुरस्सरण करने लगता है; (ग) पुरस्सरण करते हुए पहिए का ऊपर से दृश्य।

चित्र 9.19 में मुक्त धुरीदार पहिया दिखाया गया है। शुरू में धुरी दो बिन्दुओं O और P पर रखे आलंबों पर टिकी हुई है (चित्र 9.19 क)। अगर P पर आलंब हटा लिया जाए तो गुरुत्व बल mg के कारण उत्पन्न हुए बलआघूर्ण से पहिया गिरने लगता है। अब, मान लीजिए कि आप इस पहिए को वामावर्त (anticlockwise) घूर्णन देते हैं और P पर से आलंब हटा लेते हैं। ऐसी स्थिति मे क्या होता है? इस स्थिति में पहिया नीचे नहीं गिरता बल्कि धुरी लगभग क्षैतिज बनी रहती है और z-अक्ष के प्रति घूमने लगती है (चित्र 9.19ख)। अब प्रश्न उठता है कि ऐसा क्यों होता है?

ऐसा इसलिए होता है, क्योंकि गुरुत्व के कारण उत्पन्न हुआ बलआघूर्ण पहिए पर लगता है और उसके कोणीय संवेग को बदल देता है $\left(\because \boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{L}}{dt}\right)$. चूंकि **L** घूर्णन-अक्ष के अनुदिश होता है, इसलिए घूर्णन-अक्ष भी घूम जाता है। संबंध $\boldsymbol{\tau} = \dfrac{d\mathbf{L}}{dt}$ की सहायता से हम उस कोणीय वेग $\boldsymbol{\Omega}$ को निकाल सकते हैं जिससे घूर्णन-अक्ष घूमता है। मान लीजिए कि समयांतराल dt में घूर्णन-अक्ष कोण $d\phi$ से घूमता है। तब

$$\Omega = \frac{d\phi}{dt}$$

मान लीजिए कि पहिए की कोणीय चाल (ω) अचर है। तब, क्योंकि $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$ इसलिए **L** का परिमाण अचर रहेगा और केवल इसकी दिशा में परिवर्तन होगा। चित्र 9.19ग से

$$d\phi = \frac{dL}{L}, \quad \Omega = \frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{L}\frac{dL}{dt} = \frac{\tau}{L}. \tag{9.20}$$

जिस दिशा में घूर्णन-अक्ष घूमता है वह दिशा $d\mathbf{L}$ अर्थात् बलआघूर्ण की दिशा के अनुदिश होगी। यदि r पहिए के केन्द्र से आलंब-बिन्दु (point of suspension) की दूरी हो तो

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = (r\hat{\mathbf{i}}) \times (-Mg\hat{\mathbf{k}}) = rMg(\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}) = rMg\hat{\mathbf{j}}$$

समीकरण 9.20 में $L = I\omega$ और $\tau = rMg$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\Omega = \frac{rMg}{I\omega} \tag{9.21}$$

समीकरण 9.21 से यह पता चलता है कि ω में कमी आने पर Ω में वृद्धि होती जाती है। चूंकि घर्षण के कारण घूर्णन-ऊर्जा की हानि होती है, इसलिए ω में कमी आ जाएगी और पहिए का घूर्णन-अक्ष तेज़ी से घूमने लगेगा।

इस प्रकार की गति को जिसमें घूर्णन-अक्ष में परिवर्तन आ जाता है **पुरस्सरण** (precession) कहते हैं। **Ω को पुरस्सरण का कोणीय वेग** (angular velocity of precession) कहते हैं। यह वह वेग है जिस पर घूर्णन-अक्ष का पुरस्सरण होता है।

बोध प्रश्न 10

इस भाग में सुझाए गए कार्यकलाप को एक बार फिर कीजिए। इस भाग में जो भी चर्चा हुई है उसे आधार मानकर नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए और साथ ही अपने उत्तर के कारण भी दीजिए।

क) जब आप P पर एक उपरिमुखी बल लगाते हैं तो उस स्थिति में पहिया किस दिशा में घूमेगा जबकि वह (i) दक्षिणावर्त (clockwise) और (ii) वामावर्त (anticlockwise) घूर्णन कर रहा है।

ख) यदि आप P और Q दोनों पर उपरिमुखी बल लगाएं तो क्या पहिए का घूर्णन-अक्ष घूमेगा?

इस इकाई में आपने जो पढ़ा है उसका एक संक्षिप्त विवरण हम यहां दे रहे हैं।

9.5 सारांश

- दृढ़ पिंड वह पिंड होता है जिसके किन्हीं दो कणों के बीच की आपेक्षिक दूरी सदा अचर बनी रहती है।
- जब एक दिए हुए समयांतराल में दृढ़ पिंड के प्रत्येक कण का उतना ही विस्थापन होता हो जितना उसके अन्य किसी कण का, तो कहा जाता है कि दृढ़ पिंड केवल स्थानांतरण गति कर रहा है।
- जब एक दिए हुए समयांतराल में दृढ़ पिंड के सभी कण ऐसे वृत्तों में घूमते हों जिनके केन्द्र एक सरल रेखा, जिसे घूर्णन-अक्ष कहते हैं, पर स्थित हों तो कहा जाता है कि दृढ़ पिंड केवल घूर्णी गति कर रहा है।
- दृढ़ पिंड की व्यापक गति उसके संहति केन्द्र की स्थानांतरण गति और संहति केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के प्रति घूर्णी गति का संयोजन होती है।
- द्रव्यमान का घूर्णी अनुरूप जड़त्व आघूर्ण होता है। यह घूर्णी गति में परिवर्तन लाने में पिंड के प्रतिरोध को मापता है। यह पिंड के द्रव्यमान और घूर्णन-अक्ष के प्रति द्रव्यमान के वितरण पर निर्भर करता है। अलग-अलग द्रव्यमानों वाले निकाय के लिए यह होता है

  $$I = \sum_i m_i r_i^2$$

  और संतत पदार्थ-वितरण वाले पिंड के लिए यह होता है

  $$I = \int r^2\, dm$$

- बल आघूर्ण, बल का घूर्णी अनुरूप होता है। बलआघूर्ण, जड़त्व आघूर्ण और कोणीय त्वरण में संबंध न्यूटन के द्वितीय नियम के घूर्णी अनुरूप से दिया जाता है, अर्थात्

  $$\boldsymbol{\tau} = I\boldsymbol{\alpha}.$$

- कोई दृढ़ पिंड यांत्रिक साम्यावस्था में तब होता है जबकि

  $$\Sigma\,\mathbf{F} = 0, \quad \Sigma\,\boldsymbol{\tau} = 0$$

- घूर्णी गति में बलआघूर्ण द्वारा किया गया कार्य होता है।

  $$W_{rot} = \int \boldsymbol{\tau} \cdot d\boldsymbol{\theta}$$

- घूर्णन की गतिज ऊर्जा (K_{rot}) का व्यंजक वही होता है जो कि रैखिक गति की गतिज ऊर्जा का है। अंतर केवल यह है कि इसमें द्रव्यमान के स्थान पर I और रैखिक चाल के स्थान पर कोणीय चाल प्रतिस्थापित करना होता है। इसका व्यंजक है

$$K_{rot} = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- बेलनी वस्तु की संपूर्ण गतिज ऊर्जा को उसके संहति केन्द्र की स्थानांतरण गतिज ऊर्जा और संहति केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के प्रति घूर्णी गतिज ऊर्जा के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है।
- घूर्णन कर रहे दृढ़ पिंड के कोणीय संवेग का व्यंजक है

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$$

- न्यूटन के द्वितीय नियम के घूर्णी अनुरूप को कोणीय संवेग के पदों में इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

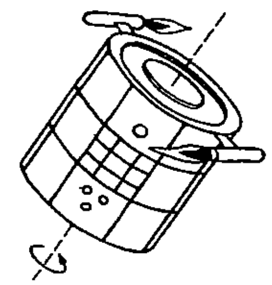
- नेट बाह्य बलआघूर्ण न होने पर निकाय का कोणीय संवेग संरक्षित होता है।
- जब कोणीय संवेग सदिश की लांबिक दिशा में बलआघूर्ण लगाया जाता है तब घूर्णन-अक्ष में पुरस्सरण गति होती है।

9.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. क) तर्क के साथ व्याख्या कीजिए कि जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने के लिए पिंड के द्रव्यमान को उसके संहति केन्द्र पर केन्द्रित माना जा सकता है कि नहीं?

   ख) अलग-अलग घनत्व वाले धातुओं से बने समान द्रव्यमान और समान मोटाई के दो गोल डिस्क हैं। किस डिस्क का अपने केन्द्रीय अक्ष के प्रति अधिक जड़त्व आघूर्ण होगा?

   ग) निम्नलिखित कथन पर अपनी टिप्पणी कीजिए : "संभवतः पृथ्वी के घूर्णन-काल (period of rotation) में हो रहे परिवर्तन के कारण ध्रुवों पर बर्फ़ पिघल रही है।"



चित्र 9.20 : प्रचक्रण करता उपग्रह

2. चित्र 9.20 देखिए। इसमें 960 kg द्रव्यमान वाला उपग्रह दिखाया गया है। मान लीजिए कि यह 1.6m व्यास के एक ठोस बेलन के आकार का है और उसका संपूर्ण द्रव्यमान उसके पूरे आयतन में एकसमान रूप से वितरित है। अब, मान लीजिए कि अपने अक्ष के प्रति उपग्रह 10 r.p.m की कोणीय चाल से चक्कर काट रहा है और इसे रोकना है जिससे कि इसकी मरम्मत की जा सके। उपग्रह पर दो छोटे गैस जेट उसके व्यास के दोनों सिरों पर आमने-सामने लगाए गए हैं जैसा कि चित्र 9.20 में दिखाया गया है। जेट की गैस उपग्रह की सतह की स्पर्शरेखा के अनुदिश निकलती है और इनमें से प्रत्येक जेट 20 N का प्रणोद (thrust) उत्पन्न करता है। कितने समय तक जेट चलाना होगा जिससे कि उपग्रह का घूर्णन रुक जाए?

3. ज्वारीय घर्षण (tidal friction) के कारण पृथ्वी की घूर्णी ऊर्जा में धीरे-धीरे कमी आती जा रही है। एक दिन में पृथ्वी की घूर्णी ऊर्जा में हो रहा परिवर्तन परिकलित कीजिए। यह दिया हुआ है कि पृथ्वी के घूर्णन काल में प्रति वर्ष लगभग 10 माइक्रोसेकंड (μs) की कमी आ रही है। पृथ्वी को एक ठोस गोला मान कर यह गणना कीजिए।

9.7 उत्तर

बोध प्रश्न

1. (क), (ग), (ङ)
2. क) प्रत्येक का परिमाण 4.2 cm है।

   ख) i) गुरुत्व के अधीन मुक्त रूप से गिर रहा पत्थर

   ii) मेज़ पर रखे ब्लॉक की गति जबकि उसे धक्का दिया गया हो।

3. अपेक्षित अवकल समीकरण $M\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{F}_e$ होगा (देखिए समीकरण 7.22), जहां $\mathbf{R}$ पिंड के संहति केन्द्र का स्थिति सदिश है और $\ddot{\mathbf{R}}$ उसका त्वरण है।

4. चित्र 9.3 में x', y', z' अक्ष सदा ही x, y, z अक्ष के समांतर होते हैं जबकि चित्र 9.7 में x', y', z' अक्षों के अभिविन्यास में, x, y, z अक्षों के सापेक्ष लगातार परिवर्तन होता है। चित्र 9.3 की स्थिति में, पिंड का संहति केन्द्र O ज्ञात करके पिंड की स्थिति प्राप्त की जा सकती है जबकि चित्र 9.7 में x, y, z अक्ष के सापेक्ष x', y', z' अक्ष के अभिविन्यास के बारे में जानकारी प्राप्त करनी ज़रूरी होती है।

5. खंड 1 के भाग 4.3.4 से हम यह कह सकते हैं कि बिन्दु द्रव्यमान m_1 की घूर्णी गतिज ऊर्जा K_1 है

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \omega^2$$

इसी प्रकार m_2 और m_3 की घूर्णी गतिज ऊर्जाएं हैं

$$K_2 = \frac{1}{2} m_2 r_2^2 \omega^2, \quad K_3 = \frac{1}{2} m_3 r_3^2 \omega^2$$

इसलिए पिंड के घूर्णन की गतिज ऊर्जा यह है

$$\begin{aligned} K &= K_1 + K_2 + K_3 \ldots \\ &= \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + \ldots)\,\omega^2 \\ &= \frac{1}{2} I \omega^2 \end{aligned}$$

रैखिक गति के लिए गतिज-ऊर्जा का व्यंजक $\frac{1}{2}Mv^2$ है और क्योंकि ω, v के अनुरूप है इसलिए I, M का घूर्णी अनुरूप होगा।

6. मान लीजिए कि kg इकाई में प्रत्येक परमाणु का द्रव्यमान m है। तब समीकरण 7.5 से

$\mu = \frac{m}{2}$. यहां $r = 1.2 \times 10^{-10}$m. यदि अपेक्षित कोणीय चाल ω हो, तो समीकरण 9.5 और उदाहरण 1 से घूर्णी गतिज ऊर्जा होगी

$$E_R = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\text{ kg}\right) \times (1.2 \times 10^{-10}\text{m})^2\,\omega^2$$

स्थानांतरण गतिज ऊर्जा होगी

$E_T = 2 \times \frac{1}{2} mv^2 = mv^2$, जहां $v = 460\ \text{ms}^{-1}$. यह दिया हुआ है कि $E_R = \frac{2}{3} E_T$.

$\therefore\ m\,(0.36 \times 10^{-20}\text{ kg m}^2)\omega^2 = \frac{2}{3} m\,(460)^2\text{ kg m}^2\text{ s}^{-2}$

या $\omega = 6.3 \times 10^{12}\text{ rad s}^{-1}$

7. vii) $\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} = I\boldsymbol{\alpha}$

ix) K.E. $= \frac{1}{2} I\omega^2$

x) कोणीय संवेग-संरक्षण नियम: जब पिंड पर लग रहा नेट बलआघूर्ण शून्य तो हो उसका कोणीय संवेग संरक्षित रहता है।

xi) कोणीय आवेग $= \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{\tau}(t)\, dt = \mathbf{L}(t_2) - \mathbf{L}(t_1)$.

8. (क) खोखले गेंद के लिए $I_{cm} = \frac{2}{3} MR^2$ (क)

(ख) ठोस गेंद के लिए $I_{cm} = \frac{2}{5} MR^2$ (ख)

अब, समीकरण 9.18 से (क) के लिए $(v_{cm}^2)_{\text{क}} = \frac{6}{5} gy$

और (ख) के लिए $(v_{cm}^2)_{\text{ख}} = \frac{10}{7} gy$.

हमारे प्रश्न में $y = 0.35$ m और हम $g = 9.8$ ms^{-2} लेते हैं
इसलिए $(v_{cm}^2)_{क} = 4.12$ m^{2}s^{-2}, $(v_{cm}^2)_{ख} = 4.9$ m^{2}s^{-2}.
v_{cm}^2 का प्रेक्षित मान $= 4$ m^{2}s^{-2} जो (क) के मान के काफ़ी निकट है। अतः गेंद खोखला है।

9. कोणीय संवेग-संरक्षण नियम से

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

यहां $I = \frac{2}{5}MR_1^2$, $\quad I_2 = \frac{2}{5}MR_2^2$, $\quad R_2 = \frac{R_1}{2}$

$$\therefore \frac{2}{5}MR_1^2\omega_1 = \frac{2}{5}M\frac{R_1^2}{4}\omega_2$$

या $\omega_2 = 4\,\omega_1$

पर $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$ और $\omega_2 = \frac{2\pi}{T_2}$ जहां T_1 और T_2 पृथ्वी के दैनिक घूर्णन के क्रमशः सामान्य काल और परिवर्तित काल हैं।

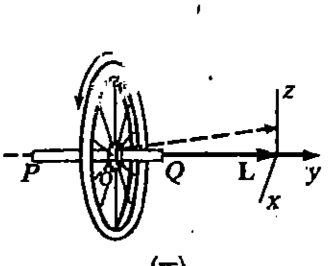
$$\therefore\ T_2 = \frac{T_1}{4} = \frac{24}{4}\text{ h} = 6\text{h}.$$

अतः दैनिक घूर्णन क़ाल 6 घंटा हो जाएगा।

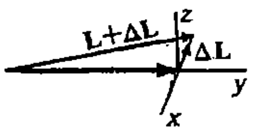
10. क) (i) देखिए चित्र 9.21 क। **L** की दिशा y-अक्ष की धन दिशा के अनुदिश है। P पर एक ऊर्ध्वाधरतः उपरिमुखी (अर्थात् z-अक्ष की धन दिशा के अनुदिश) बल **F** लगाया गया है। O के प्रति परिणामी बलआघूर्ण ($\mathbf{r} \times \mathbf{F}$), x-अक्ष की ऋण दिशा के अनुदिश है। इसलिए कोणीय संवेग सदिश में परिवर्तन $\Delta\mathbf{L}$ उसी दिशा में होगा (चित्र 9.21 ख)। तदनुसार नई दिशा $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$ के अनुदिश होगी। इसलिए पहिया मुड़ जाएगा जिससे कि धुरी xy समतल में $+x$ से $+y$-अक्ष की दिशा में घूम जाऐगी।

(ii) (i) की तरह का तर्क देकर हम कोणीय संवेग सदिश **L**, इसका परिवर्तन $\Delta\mathbf{L}$ और परिणामी सदिश $\mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$ खींच सकते हैं जैसा कि चित्र 9.21ग में दिखाया गया है। अतः पहिया फिर से xy-समतल में $+x$-अक्ष से $-y$-अक्ष की दिशा में घूम जाएगा।

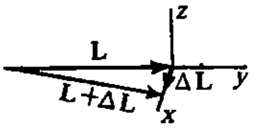
ख) यदि दोनों बिन्दुओं P और Q पर उपरिमुखी बल लगाए जाएं तो इनके कारण O के प्रति उत्पन्न हुए बलआघूर्ण बराबर और विपरीत दिशा में होंगे। इसलिए परिणामी बलआघूर्ण शून्य होगा। अतः **L** में कोई परिवर्तन नहीं होगा। इसलिए पहिए का घूर्णन-अक्ष घूमेगा नहीं।



(क)



(ख)



चित्र 9.21 : (क) अगर एक घूमते हुए साइकिल के पहिए को ऊर्ध्वाधरतः ऊपर उठाया जाता है तो वह क्षैतिजतः घूम जाता है; (ख) (i) के लिए कोणीय संवेग सदिश में परिवर्तन; (ग) (ii) के लिए कोणीय संवेग सदिश में परिवर्तन।

अंत में कुछ प्रश्न

1. क) $I = \sum_i m_i r_i^2$ और r_i, सभी i के लिए समान नहीं हैं। इसलिए पिंड का जड़त्व आघूर्ण निकालने के लिए उसके द्रव्यमान को उसके संहति केन्द्र पर केन्द्रित नहीं माना जा सकता।

ख) वास्तव में मोटाई t, त्रिज्या R और द्रव्यमान M वाला डिस्क समान त्रिज्या और लंबाई t वाला एक लंब वर्तुल बेलन (right circular cylinder) ही है।

$$\therefore I = \frac{1}{2}MR^2$$

पर $M = \pi R^2 t\,\rho$ जहां $\rho =$ उस धातु का घनत्व जिससे डिस्क बना है।

$$\therefore\ I = \frac{\pi\rho t R^4}{2} = \frac{\pi\rho t}{2}\left[\frac{M}{\pi\rho t}\right]^2 = \frac{M^2}{2\pi\rho t}$$

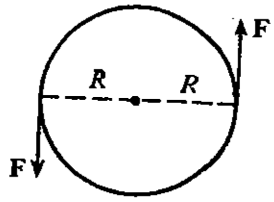
इस तरह हम यह देखते हैं कि समान द्रव्यमान और मोटाई के लिए I, ρ के प्रतिलोमानुपाती (inversely proportional) होता है। अतः कम घनत्व वाले धातु से बने डिस्क का जड़त्व आघूर्ण अधिक होगा।

ग) जब ध्रुव पर का बर्फ़ पिघलता है तो पानी भूमध्य रेखा की ओर बहता है। इसकी वजह से पूरी पृथ्वी पर पदार्थ का पुनर्वितरण होता है। नतीजा यह होता है कि पृथ्वी के लिए I में परिवर्तन आ जाता है। पर क्योंकि पृथ्वी का कोणीय संवेग अचर रहता है, इसलिए इसकी कोणीय चाल बदल जाती है। पर, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ जहां T घूर्णन काल है, इसलिए T भी बदल जाता है।

2. उपग्रह की कोणीय चाल में 10 r.p.m का परिवर्तन होता है। यदि कोणीय त्वरण α अचर हो, तो परिवर्तन में लगा समय होगा

$$\Delta t = \frac{\Delta\omega}{\alpha} = \frac{\Delta\omega I}{\tau} (\because\ I\alpha = \tau)$$

क्योंकि उपग्रह बेलनाकार है, इसलिए $I = \frac{1}{2} MR^2$, जहां M उपग्रह का द्रव्यमान है और R उसकी त्रिज्या है। दो जेटों से, जिनमें से प्रत्येक जेट घूर्णन-अक्ष से दूरी R पर है और त्रिज्या की लांबिक दिशा में है (चित्र 9.22), उपग्रह पर बलआघूर्ण लगाया जाता है। यदि F प्रत्येक जेट का प्रणोद हो तो



चित्र 9.22

$$\tau = 2RF$$

$$\therefore\ \Delta t = \frac{(\Delta\omega)\left(\frac{1}{2}MR^2\right)}{2RF} = \frac{(\Delta\omega)\,MR}{4F}$$

$$\therefore\ \Delta t = \left(\frac{10}{60} \times 2\pi \text{ rad s}^{-1}\right) \times \frac{(960\text{kg}) \times (0.8\text{m})}{4 \times 20\text{N}} = 10\text{s}$$

3. अपने घूर्णन-अक्ष के प्रति पृथ्वी का जड़त्व आघूर्ण होगा

$$I = \frac{2}{5} MR^2, \quad \text{जहां } M = 5.97 \times 10^{24}\text{ kg}, \quad R = 6.37 \times 10^6\text{m}$$

$$\therefore\ I = 9.7 \times 10^{37}\text{ kg m}^2$$

पृथ्वी का दैनिक घूर्णन काल $T = 24$ h $= 86400$ s.
अब घूर्णी गतिज ऊर्जा होगी

$$E = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{2\pi^2 I}{T^2} \left(\because\ \omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

अब, क्योंकि स्वयं E और T की तुलना में, E और T में सापेक्ष परिवर्तन काफ़ी कम हैं इसलिए हम परिवर्तनों को अवकल dE और dT मान सकते हैं। अत:

$$dE = 2\pi^2 I(-2T^{-3}\,dT) = -\frac{4\pi^2 I\,dT}{T^3}.$$

एक वर्ष (365 दिन) में T में 10×10^{-6} s अर्थात् 10^{-5} s का परिवर्तन आता है।

$$\therefore \text{ एक दिन में परिवर्तन } dT = \frac{10^{-5}\text{s}}{365} = 2.7 \times 10^{-8}\text{s}.$$

अत: घूर्णी गतिज ऊर्जा में परिवर्तन होगा

$$dE = -\frac{4\pi^2 \times (9.7 \times 10^{37})\text{kg m}^2 \times (2.7 \times 10^{-8}\text{s})}{(86400)^3\text{s}^3}$$

$$= -1.6 \times 10^{17}\text{ kg m}^2\text{s}^{-2}$$

इसलिए घूर्णी ऊर्जा में प्रतिदिन 1.6×10^{17}J की कमी आएगी।

9.8 शब्दावली

घूर्णी गति	rotational motion
जड़त्व आघूर्ण	moment of inertia
दृढ़ पिंड	rigid body
परिभ्रमण त्रिज्या	radius of gyration
पुरस्सरण	precession
बेलनी पिंड	rolling object
स्थानांतरण गति	translational motion

इकाई 10 अजड़त्वीय निर्देश तंत्रों में गति

इकाई की रूपरेखा

10.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आपने दृढ़ पिंड की गति के बारे में पढ़ा है। यह इकाई इस प्रारंभिक यांत्रिकी पाठ्यक्रम की आखिरी इकाई है। खंड 1 की पहली इकाई में ही आपने निर्देश तंत्र (frame of reference) की संकल्पना को समझा था। खंड 1 की इकाई 2 में आपने जड़त्वीय और अजड़त्वीय प्रेक्षकों के बारे में पढ़ा है। अभी तक हमने जड़त्वीय प्रेक्षक की दृष्टि से ही गति की व्याख्या की है। पर, असलियत में तो हम एक ऐसे निर्देश तंत्र (पृथ्वी) पर रह रहे हैं जो अजड़त्वीय है यानि कि पृथ्वी से जुड़ा कोई भी तंत्र अजड़त्वीय ही होता है। यह बात आप इकाई 2 से जानते ही हैं। साथ-साथ कुछ सवाल ऐसे भी हैं जिनका जवाब, अजड़त्वीय प्रेक्षक की दृष्टि से विश्लेषण करने पर, आसानी से मिल सकता है, जैसे कि पृथ्वी पर वायु की गति का उसके मौसम पर प्रभाव, अक्षांश के साथ g का परिवर्तन, आदि। इसलिए इस इकाई में आप अजड़त्वीय निर्देश तंत्र के सापेक्ष गति का अध्ययन करेंगे। पहले आप यह समझेंगे कि अजड़त्वीय निर्देश तंत्र (non-inertial frame of reference) क्या होता है।

बस में सफ़र करते समय आपको ये अनुभव ज़रूर हुए होंगे: जब बस यकायक तेज़ हो जाती है तो आप पीछे की ओर गिरते हैं और जब वह यकायक धीमे होती है तो आप आगे की ओर गिरते हैं। और जब बस घुमाव लेती है तब आपको ऐसा लगता है जैसे कि आप बाहर या अन्दर की ओर गिर रहे हैं। इन सभी बातों की व्याख्या हम जड़त्वीय बलों (inertial forces) की संकल्पना के आधार पर करेंगे। तब आप यह देखेंगे अजड़त्वीय निर्देश तंत्र में न्यूटन का द्वितीय गति नियम किस तरह रूपांतरित होता है। इसका प्रयोग करके हम भारहीनता की संकल्पना को विकसित करेंगे।

मेरी-गो-राउंड, और पृथ्वी आदि जैसे घूर्णन कर रहे पिंडों से जुड़े तंत्र, अजड़त्वीय निर्देश तंत्र के दिलचस्प उदाहरण हैं। हम ऐसे ही एक निर्देश तंत्र में पिंड का गति-समीकरण प्राप्त करेंगे। इसके बाद हम दो जड़त्वीय बलों, अर्थात् अपकेन्द्री बल (centrifugal force) और कोरिओलिस बल (Coriolis force) का उल्लेख करेंगे। अपकेन्द्री बल का प्रयोग अपकेन्द्रण यंत्र (centrifuge) की क्रिया की व्याख्या करने में किया जा सकता है। आप पृथ्वी से जुड़े एक अजड़त्वीय निर्देश तंत्र में जड़त्वीय बलों के विभिन्न प्रकार के अनुप्रयोगों के बारे में भी पढ़ेंगे जैसे कि स्थान के अक्षांश के साथ g में हो रहे परिवर्तन को समझने में अपकेन्द्री बल का अनुप्रयोग, आदि। अनेक प्राकृतिक घटनाओं जैसे कि नदी के तटों का अपरदन (erosion), चक्रवात (cyclone) का आना, आदि की व्याख्या कोरिओलिस बल की संकल्पना की सहायता से की जा सकती है। अंत में आप फूको लोलक (Foucault pendulum) प्रयोग के बारे में पढ़ेंगे जिससे यह स्थापित होता है कि ध्रुवों से होकर जाने वाले अक्ष के प्रति पृथ्वी घूर्णन करती है।

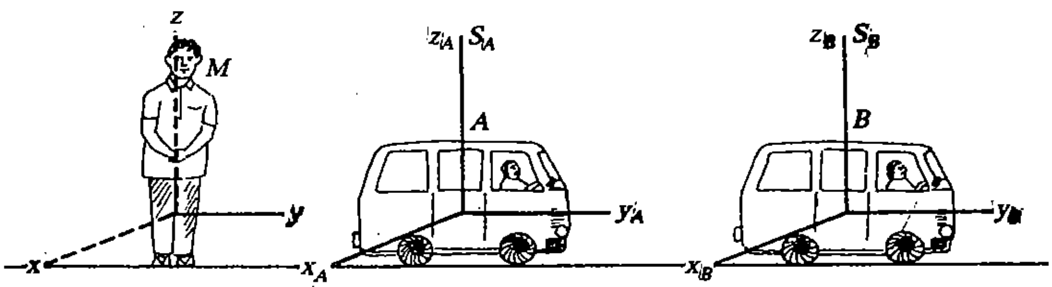
उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- जड़त्वीय निर्देश तंत्र और अजड़त्वीय निर्देश तंत्र में अंतर बता सकेंगे,
- अजड़त्वीय निर्देश तंत्र में पिंड का गति-समीकरण लिख सकेंगे,
- अजड़त्वीय निर्देश तंत्र में उपस्थित जड़त्वीय बलों को पहचान सकेंगे,
- अजड़त्वीय निर्देश तंत्र में गति से संबंधित प्रश्नों को हल कर सकेंगे।

10.2 अजड़त्वीय निर्देश तंत्र

खंड 1 के भाग 2.2.1 में आप जड़त्वीय (inertial) और अजड़त्वीय (non-inertial) प्रेक्षकों के बारे में पढ़ चुके हैं। आपको याद होगा कि अचर चाल से चल रही कार और सड़क पर खड़ा एक आदमी एक दूसरे के सापेक्ष जड़त्वीय हैं जबकि त्वरित चाल से चल रही कार और सड़क पर खड़ा आदमी एक दूसरे के सापेक्ष अजड़त्वीय हैं। आइए अब हम **जड़त्वीय** और **अजड़त्वीय निर्देश तंत्रों** को स्पष्ट करें। इसके लिए चित्र 10.1 देखिए।



चित्र 10.1 : S और S_A एक दूसरे के सापेक्ष जड़त्वीय हैं। S और S_B एक दूसरे के सापेक्ष अजड़त्वीय हैं।

M सड़क पर खड़ा एक आदमी है। हम आदमी M पर कोई बिन्दु लेकर उसे मूल बिन्दु मान लेते हैं और एक त्रिविम कार्तीय निर्देशांक-तंत्र (three-dimensional Cartesian coordinate system) S परिभाषित करते हैं। मान लीजिए कि कार A एकसमान वेग से चलती है और कार B, S के सापेक्ष त्वरित गति से चलती है। आइए अब हम कार A और कार B में से प्रत्येक पर एक बिन्दु लेकर उसे मूल बिन्दु मान लें और निर्देशांक तंत्र S_A और S_B परिभाषित करें।

आदमी M किसी भी वस्तु की स्थिति का पता निर्देशांक तंत्र S के सापेक्ष लगाएगा। कारों के ड्राइवर वस्तुओं की स्थिति का पता S_A और S_B के सापेक्ष लगाएंगे। वे समय के पैमाने पर एक उभयनिष्ठ (common) शून्य चुन सकते हैं। तब आप खंड 1 के भाग 1.2 से याद कीजिए कि परिभाषा के अनुसार S, S_A और S_B निर्देश तंत्र (frames of reference) हैं। S और S_A एक दूसरे के सापेक्ष दो जड़त्वीय निर्देश तंत्र (inertial frame of reference) हैं। दूसरे शब्दों में, **एक दूसरे के सापेक्ष एकसमान वेग से गतिमान निर्देश तंत्र जड़त्वीय होते हैं, जबकि एक दूसरे के सापेक्ष त्वरित गति से गतिमान निर्देश तंत्र अजड़त्वीय होते हैं।** सुविधा के लिए आगे हम निर्देश तंत्र के स्थान पर केवल तंत्र शब्द का प्रयोग करेंगे। आइए अब हम जड़त्वीय और अजड़त्वीय तंत्रों के कुछ उदाहरणों पर चर्चा करें।

मान लीजिए कि पार्क में एक बच्चा घूर्णन कर रहे मेरी-गो-राउंड पर बैठा हुआ है। तब पार्क में स्थित एक स्थायी बेंच S से जुड़ा एक निर्देश-तंत्र और वह बच्चा एक दूसरे के सापेक्ष अजड़त्वीय हैं क्योंकि घूर्णन के कारण मेरी-गो-राउंड में त्वरण होता रहता है। इसी प्रकार एक बच्चे द्वारा हवा में फेंके गए गेंद से जुड़ा हुआ तंत्र और S एक दूसरे के सापेक्ष अजड़त्वीय हैं क्योंकि गेंद में g के बराबर त्वरण हो रहा है। पार्क में रखी किसी और बेंच से जुड़ा तंत्र और S एक दूसरे के सापेक्ष जड़त्वीय हैं क्योंकि दोनों बेंच एक दूसरे के सापेक्ष विरामावस्था में हैं। इसी तरह आराम से (अर्थात् बहुत धीमी एकसमान चाल से) टहल रहे बच्चे से जुड़ा तंत्र और S एक दूसरे के सापेक्ष जड़त्वीय हैं।

आप यह पहचानने के लिए कि दिए हुए तंत्र के सापेक्ष कोई तंत्र जड़त्वीय है या अजड़त्वीय, एक बोध प्रश्न को हल कीजिए।

बोध प्रश्न 1

तर्क देकर बताइए कि निम्न में से कौन सा तंत्र जड़त्वीय है और कौन सा अजड़त्वीय।

i) सड़क पर खड़े आदमी से जुड़े तंत्र के सापेक्ष एक घुमावदार पथ पर एकसमान चाल से चल रही कार से जुड़ा तंत्र।

ii) ज़मीन से जुड़े तंत्र के सापेक्ष हल्की वर्षा में गिरती हुई पानी की बूंद से जुड़ा तंत्र जबकि उसने चरम वेग धारण कर लिया हो।

iii) चुंबक के एक ध्रुव से जुड़े तंत्र के सापेक्ष वैद्युत-चुंबक द्वारा उत्पन्न एकसमान चुंबकीय क्षेत्र में गतिमान इलेक्ट्रॉन से जुड़ा तंत्र।

तो अब आप जड़त्वीय और अजड़त्वीय तंत्रों की पहचान सीख गए हैं। आपको याद होगा कि खंड 1 के भाग 2.2.1 में यह पढ़ चुके हैं कि अनेक प्रश्नों में पृथ्वी की सतह पर नियत तंत्र को जड़त्वीय माना जा सकता है। पिछली सभी इकाईयों में हमने जड़त्वीय तंत्र की दृष्टि से ही गति का विश्लेषण किया है।

इस इकाई में आप देखेंगे कि यदि अजड़त्वीय तंत्र की दृष्टि से विश्लेषण किया जाए तो घूर्णन गतिकी के कुछ प्रश्न सरल हो जाते हैं। आपको भाग 2.2.1 के अध्ययन से याद होगा कि न्यूटन का प्रथम गति नियम केवल जड़त्वीय तंत्र में लागू होता है। आप यह भी जानते हैं कि द्वितीय नियम से प्रथम नियम प्राप्त किया जा सकता है। अतः हम यह कह सकते हैं कि न्यूटन का द्वितीय नियम भी केवल जड़त्वीय तंत्र में लागू होता है। आइए अब हम देखें कि अजड़त्वीय प्रेक्षक के लिए द्वितीय नियम कैसे रूपांतरित होता है।

10.2.1 अजड़त्वीय तंत्र से प्रेक्षित गति

आइए हम एक आसान उदाहरण लें। मान लीजिए कि आप सड़क पर खड़े हैं और एक कार को देख रहे हैं जो चलने वाली है। हम जानते हैं कि कार को चलाने के लिए उसे त्वरित करना होता है। सड़क पर खड़े हुए आप देखते हैं कि कार के अंदर बैठा हुआ व्यक्ति कार में त्वरण होने पर सीट पर पीछे की ओर गिर जाता है। इस परिघटना की व्याख्या आप किस तरह करेंगे? चूंकि एक अन्य जड़त्वीय प्रेक्षक के सापेक्ष आप एक जड़त्वीय प्रेक्षक हैं, इसलिए इस परिघटना की व्याख्या आप इस तरह करेंगे:

यह विरामावस्था के जड़त्व (inertia of rest) के कारण होता है। कार में बैठे आदमी के नितंब और कमर कार की सीट के साथ सीधे संपर्क में हैं जबकि सिर और धड़ सीधे संपर्क में नहीं हैं। इसलिए कार के चलने पर जड़त्व के कारण उसके सिर और धड़ की प्रवृत्ति विरामावस्था में रहने की होती है जबकि नितंब और कमर कार के साथ आगे की ओर गति करते हैं। इस तरह जितनी देर तक कार में त्वरण होता रहता है उतनी देर तक धड़ और सिर की प्रवृत्ति कमर और नितंब के पीछे रहने की होती है। यही कारण है कि आपको कार में बैठा व्यक्ति कार के त्वरण के दौरान सीट पर पीछे की ओर गिरता हुआ दिखता है।

आइए अब हम कार से जुड़े तंत्र S' में इस परिघटना को समझने की कोशिश करें। कार में हो रहे त्वरण के कारण विरामावस्था में सड़क पर खड़े व्यक्ति के सापेक्ष S' अजड़त्वीय है। S' के सापेक्ष कार में बैठे आदमी के शरीर का वह भाग जो कार की सीट के साथ सीधे संपर्क में है, विरामावस्था में बना रहता है। शेष भाग पीछे गिर जाता है। निर्देश तंत्र S' में इस व्यवहार की व्याख्या किस प्रकार की जा सकती है? हम यह कह सकते हैं कि S' में कोई बल कार के त्वरण की विपरीत दिशा में आदमी पर लग रहा है। यह बल कमर और नितंब पर लग रहे त्वरित बल को निष्प्रभावित कर देता है जिससे कि वे विरामावस्था में बने रहते हैं और शेष भाग को पीछे की ओर गति देता है। अब प्रश्न उठता है कि यह बल आता कहां से है?

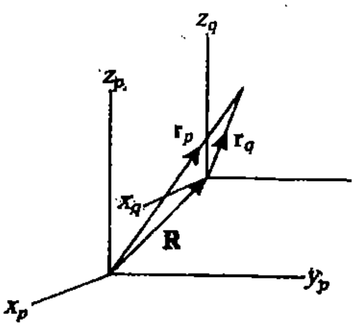
खंड 1 के भाग 5.5 में हमने यह देखा है कि बल या तो संपर्क से (जैसे धक्का देना, खींचना, घर्षण) या कुछ दूरी पर हो रही किसी क्रिया (action at a distance) (जैसे गुरुत्व क्षेत्र अथवा वैद्युत-चुंबकीय) क्षेत्र के कारण लगते हैं। पर यहां जो बल कार्य कर रहा है वह इन दो प्रकार के बलों में से कोई भी बल नहीं है। जड़त्वीय प्रेक्षक की दृष्टि से तो इस प्रकार के बल का कोई अस्तित्व ही नहीं है। फिर भी S' की दृष्टि से ऐसा एक बल लग ही रहा है। यानि कि एक त्वरित निर्देश तंत्र के त्वरण के कारण पिंड पर बल लगता है। इस बल को हम **जड़त्वीय बल** (inertial force) कहते हैं। अभी लिए गए उदाहरण से आप यह समझ सकते हैं कि इस बल का परिमाण त्वरणकारी बल के बराबर होता है और इसकी दिशा उस बल के विपरीत होती है। इस बल का व्यंजक हम इसी भाग में ही निकालेंगे।

इसी उदाहरण पर हम और आगे विचार करें तो हम पाएंगे कि S' में सीट की पीठ द्वारा आदमी पर

लगाए गए बल के कारण आदमी विरामावस्था में बना रहता है। यदि आपको किसी जड़त्वीय निर्देश तंत्र के सापेक्ष विरामावस्था में अथवा एकसमान गति में रहना हो, तो इसके लिए किसी बल की आवश्यकता नहीं होगी। पर त्वरित हो रही कार जैसे अजड़त्वीय निर्देश तंत्र में विरामावस्था में रहना हो तो कुछ बल की आवश्यकता होती है। इससे यह पता चलता है कि अजड़त्वीय निर्देश तंत्र में द्वितीय गति-नियम कुछ अलग तरह का होगा। अब हम द्वितीय गति-नियम का अध्ययन करेंगे और इसी के साथ-साथ जड़त्वीय बल को समझेंगे

10.2.2 न्यूटन का द्वितीय नियम और जड़त्वीय बल

मान लीजिए कि दो वैज्ञानिक P और Q, समय के फलन के रूप में द्रव्यमान m वाले पिंड की स्थिति का प्रेक्षण करने का निर्णय लेते हैं। प्रत्येक वैज्ञानिक के पास मापने के अपने साधन हैं और प्रत्येक अपनी प्रयोगशाला में कार्य करता है। मान लीजिए कि अपनी प्रयोगशाला में किए गए कुछ प्रयोगों से P इस बात की पुष्टि कर लेता है कि पिंड की गति पर द्वितीय गति-नियम ठीक तरह लागू होता है। अतः उसका निर्देश तंत्र जड़त्वीय है। इस बात का पता P किस तरह लगा सकता है कि Q का तंत्र जड़त्वीय है कि नहीं?



चित्र 10.2 : P और Q के निर्देश तंत्र

परंपरा के अनुसार इन निर्देश तंत्रों को समान मापक्रम एककों वाले दो कार्तीय निर्देश तंत्रों से परिभाषित किया जाता है (चित्र 10.2)। आमतौर पर कार्तीय निर्देश तंत्र संपाती नहीं होते। हम यहां यह मान लेंगे कि कोई भी तंत्र घूर्णन नहीं कर रहा है और वे अपने संगत अक्षों के प्रति, जो सदा एक दूसरे के समांतर होते हैं, आपेक्षिक गति कर रहे हैं। मान लीजिए P और Q के सापेक्ष m के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{r}_p$ और $\mathbf{r}_q$ हैं। यदि दो तंत्रों के मूल बिन्दुओं की एक दूसरे से आपेक्षिक दूरी $\mathbf{R}$ हो, तो चित्र 10.2 से

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{r}_p - \mathbf{R} \tag{10.1}$$

यदि P, m को $\mathbf{a}_p = \ddot{\mathbf{r}}_p$ की दर से त्वरित होते हुए देखता है तो वह द्वितीय नियम से यह निष्कर्ष निकाल लेता है कि m पर एक बल लग रहा है जो है:

$$\mathbf{F}_p = m\,\mathbf{a}_p$$

और Q, m को $\mathbf{a}_q = \ddot{\mathbf{r}}_q$ की दर से त्वरित होता हुआ इस तरह देखता है, जैसे कि उस पर निम्नलिखित बल लग रहा हो

$$\mathbf{F}_q = m\,\mathbf{a}_q$$

आइए अब हम $\mathbf{F}_p$ और $\mathbf{F}_q$ के बीच का संबंध निकालें। खंड 1 के भाग 1.5 से हम यह जानते हैं कि अगर Q, P के सापेक्ष एकसमान वेग से चल रहा हो, यानि कि अगर Q भी जड़त्वीय हो तो

$$\mathbf{a}_q = \mathbf{a}_p \text{ और } \qquad \mathbf{F}_q = m\,\mathbf{a}_q = m\,\mathbf{a}_p = \mathbf{F}_p.$$

इस तरह हम यह पाते हैं कि दोनों ही तंत्रों में बल समान हैं। दूसरे शब्दों में, दोनों ही तंत्रों में गति-समीकरण एक जैसे हैं। अतः सभी जड़त्वीय तंत्र तुल्य (equivalent) होते हैं। ऐसा कोई गतिकीय प्रयोग नहीं है जिससे हम यह कह सकें कि हमें अमुक जड़त्वीय तंत्र की तुलना में अमुक जड़त्वीय तंत्र को तरजीह (अधिमान, preference) देनी चाहिए।

आइए अब हम देखें कि यदि P के सापेक्ष Q त्वरित हो रहा हो तो क्या होता है? इस स्थिति में $\mathbf{F}_p$ और $\mathbf{F}_q$ के बीच का संबंध शायद आप स्वयं निकालना चाहेंगे।

स्थिति सदिशों से त्वरण प्राप्त करने के लिए, उन्हें समय के साथ अवकलित करना होता है। सही मायने में P और Q के तंत्रों में मापे गए समयांतराल बराबर नहीं होते। पर, असमान समयांतरालों के लिए गणित जटिल हो जाता है। यह जटिल संकल्पना किन्हीं दो जड़त्वीय तंत्रों के लिए आपेक्षिकता के विशिष्ट सिद्धांत (special theory & relativity) और दो अजड़त्वीय तंत्रों के लिए आपेक्षिकता के व्यापक सिद्धांत (general theory of relativity) के अध्ययन के दौरान समझी जा सकती है। यहां हम सरलता के लिए यह मान लेते हैं कि ये समयांतराल बराबर हैं।

बोध प्रश्न 2

$\mathbf{F}_p$ और $\mathbf{F}_q$ के बीच का संबंध ज्ञात कीजिए जबकि P के सापेक्ष Q का त्वरण $\mathbf{a}$ हो?

अब क्योंकि आपने बोध प्रश्न 2 हल कर लिया है, इसलिए हम $\mathbf{F}_p$ और $\mathbf{F}_q$ के संबंध को लिख सकते हैं:

$$\mathbf{F}_q = \mathbf{F}_p + \mathbf{F}' = m\,\mathbf{a}_q, \tag{10.2 क}$$

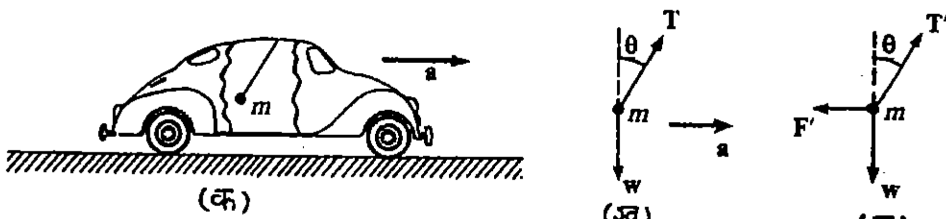
जहां $\quad \mathbf{F}' = -\,m\,\mathbf{a}.$ (10.2 ख)

इस तरह हम पिंड पर लग रहे नेट बल और उसके त्वरण के बीच का संबंध बनाये रख सकते हैं। मगर अब Q तंत्र में नेट बल दो बलों का योग है, एक बल $\mathbf{F}_p$ और एक अन्य बल $\mathbf{F}'$ जो $-\,m\mathbf{a}$ के बराबर है। बाद वाले बल का स्रोत है : तंत्र Q का P के सापेक्ष त्वरण $\mathbf{a}$. इस बल $\mathbf{F}'$ को **जड़त्वीय बल** (inertial force) कहा जाता है। इसका व्यंजक समीकरण 10.2 ख में दिया गया है। इसका परिमाण पिंड के द्रव्यमान और अजड़त्वीय तंत्र के त्वरण का गुणनफल होता है। इसकी दिशा अजड़त्वीय तंत्र के त्वरण की दिशा के विपरीत होती है। समीकरण 10.2 क की एक विशिष्ट महत्वपूर्ण स्थिति वह है जबकि बल $\mathbf{F}_p$ शून्य हो। इस स्थिति में Q में प्रेक्षित पिंड केवल जड़त्वीय बल के अधीन गतिमान होता है। कार में आदमी के धड़ और सिर की स्थिति भी

बहुत-कुछ ऐसी ही होती है। आइए अब हम जड़त्वीय बल को अच्छी तरह से समझने के लिए एक उदाहरण हल करें।

उदाहरण 1

a की दर से त्वरित हो रही कार में एक धागे से द्रव्यमान m वाली एक छोटी गेंद लटकी हुई है (चित्र 10.3 क)। यह धागा ऊर्ध्वाधर के साथ कितना कोण बनाता है और इसमें तनाव का मान कितना है?



चित्र 10.3 : (क) त्वरण **a** से गतिमान कार; (ख) जड़त्वीय तंत्र के सापेक्ष बल आरेख; (ग) कार से जुड़े एक त्वरित निर्देश तंत्र के सापेक्ष बल आरेख।

हम जड़त्वीय तंत्र और कार के साथ त्वरित हो रहे तंत्र दोनों के सापेक्ष प्रश्न का विश्लेषण करेंगे। मान लीजिए कि धागे में तनाव T है और मान लीजिए कि यह ऊर्ध्वाधर के साथ कोण θ बनाता है।

जड़त्वीय तंत्र में गति

चित्र 10.3 ख देखिए। जड़त्वीय तंत्र के सापेक्ष द्रव्यमान m, कार की गति की दिशा में त्वरण $\mathbf{a} = (a\,\hat{\mathbf{i}})$ से गतिमान होता है। यह गति तनाव **T** और भार $m\,\mathbf{g}(\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{j}})$ के कारण होती है। चूंकि y दिशा में कोई गति नहीं हो रही है, इसलिए

$$T\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} + mg\,(-\hat{\mathbf{j}}) = \mathbf{0} \text{ या } \quad T\cos\theta = mg \qquad (10.3\ \text{क})$$

x-दिशा में गति समीकरण होगा: $T\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} = ma\,\hat{\mathbf{i}}$ या $T\sin\theta = ma.$ (10.3 ख)

समीकरण 10.3 क और 10.3 ख से $\tan\theta = \dfrac{a}{g}$ या $\theta = \tan^{-1}\dfrac{a}{g}$, (10.3 ग)

$$\text{और } T = \sqrt{(T\cos\theta)^2 + (T\sin\theta)^2} \;\therefore\; T = m\sqrt{g^2 + a^2}. \qquad (10.3\ \text{घ})$$

कार के साथ त्वरित हो रहे तंत्र में गति

चित्र 10.3 ग देखिए। इस तंत्र में बलों **T** और $m\mathbf{g}$ के अतिरिक्त एक जड़त्वीय बल **F′** भी होता है जो तंत्र के त्वरण के कारण होता है। इस तंत्र के सापेक्ष द्रव्यमान विरामावस्था में है अर्थात् यह **T**, $m\,\mathbf{g}$ और **F′** के अधीन साम्यावस्था में है।

$$\therefore \mathbf{T} + m\,\mathbf{g} + \mathbf{F}' = 0$$

$$\text{या} \quad T\cos\theta\,\hat{\mathbf{j}} + T\sin\theta\,\hat{\mathbf{i}} + mg\,(-\hat{\mathbf{j}}) + F'(-\hat{\mathbf{i}}) = \mathbf{0}$$

$$\text{या} \quad (T\cos\theta - mg)\,\hat{\mathbf{j}} + (T\sin\theta - F')\,\hat{\mathbf{i}} = \mathbf{0}.$$

$$\therefore\; T\cos\theta - mg = 0, \;\; \text{अर्थात्} \; T\cos\theta = mg, \qquad (10.3\ \text{क}')$$

और $T\sin\theta - F' = 0$ या $T\sin\theta = F'$.

F', **F′** का परिमाण है और यह ma के बराबर है। अतः $T\sin\theta = ma.$ (10.3 ख′)

पिछली स्थिति की तरह यहां भी समीकरण 10.3 क′ और 10.3 ख′ से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a}{g}\right), \qquad (10.3\ \text{ग}')$$

$$\text{और} \quad T = m\sqrt{g^2 + a^2} \qquad (10.3\ \text{घ}')$$

यहां भी θ और T के मान वही हैं जो कि हमने समीकरण 10.3. ग और 10.3 घ में प्राप्त किए थे। वास्तव में समीकरण 10.3 क′ तथा 10.3 क समान हैं और समीकरण 10.3 ख′ तथा 10.3 ख समान हैं। पर इनमें एक अंतर है। समीकरण 10.3 क और 10.3 क′ दोनों ही साम्यावस्था के प्रतिबंध के रूप में प्राप्त होते हैं। पर समीकरण 10.3 ख गति-समीकरण के रूप में प्राप्त होता है, जबकि 10.3 ख′ साम्यावस्था के प्रतिबंध के रूप में प्राप्त होता है।

आपको यह बात हमेशा याद रखनी चाहिए कि **जड़त्वीय प्रेक्षक के लिए जड़त्वीय बल का अस्तित्व नहीं होता।** इसका कारण यह है कि त्वरित हो रहे निर्देश तंत्र में जड़त्वीय बल किसी

भौतिक अन्योन्यक्रिया (physical interaction) के कारण उत्पन्न नहीं होते। ये निर्देश तत्र के त्वरण के कारण पिंड पर लगते हैं। इसीलिए केवल अजड़त्वीय प्रेक्षक के लिए इस प्रकार के बलों का अस्तित्व होता है। मिसाल के तौर पर, मान लीजिए कि आप एक अजड़त्वीय निर्देश तंत्र में एक वस्तु को कमानियों से बांधकर विरामावस्था में रखना चाहते हैं। तब आप देखेंगे कि ये कमानियां इस तरह से बढ़ती हैं या संकुचित होती हैं जिससे कि वे जड़त्वीय बल को संतुलित करने के लिए एक विरोधी बल उपलब्ध करा सकें।

कभी-कभी जड़त्वीय बलों को कल्पित बल (fictitious force) भी कहा जाता है क्योंकि यह किसी भौतिक अन्योन्यक्रिया से नहीं उत्पन्न होते। किंतु ये नाम सही नहीं है क्योंकि एक अजड़त्वीय प्रेक्षक के लिए जड़त्वीय बलों का अस्तित्व होता है।

अब आप ऊपर बताई गई संकल्पना को समझने के लिए एक बोध प्रश्न हल कीजिए।

बोध प्रश्न 3

क) एक ट्रेन में रखी क्षैतिज मेज पर पानी से आधा भरा गिलास रखा हुआ है। क्या ट्रेन के चलने पर पानी की मुक्त सतह क्षैतिज बनी रहती है?

ख) द्रव्यमान m वाला एक आदमी लिफ़्ट में खड़ा है जो ऊपर की ओर f की दर से त्वरित हो रही है। आदमी पर लग रहे जड़त्वीय बल का व्यंजक लिखिए और इस तरह यह सिद्ध कीजिए कि वह अपने को सामान्य से अधिक भारी महसूस कर रहा है।

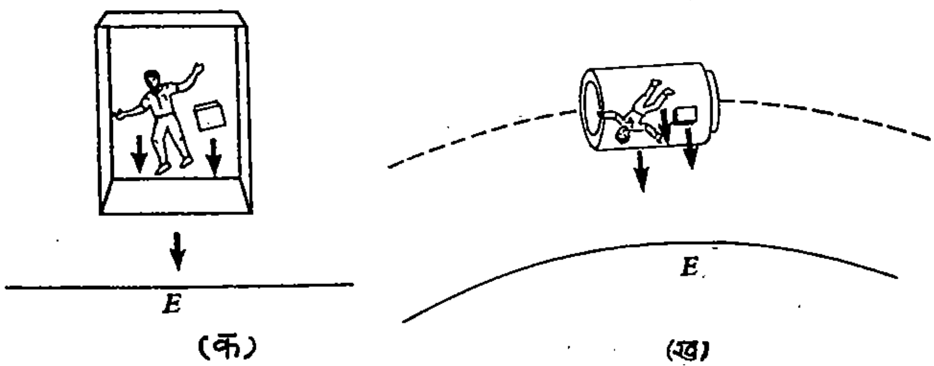
चूंकि आपने बोध प्रश्न 3 (ख) हल कर लिया है, इसलिए अब आप भारहीनता की संकल्पना को समझ सकते हैं।

10.2.3 भारहीनता

मान लीजिए कि लिफ़्ट नीचे की ओर $\mathbf{f}$ की दर से त्वरित हो रही है (चित्र 10.4 क)। तब लिफ़्ट से जुड़े तंत्र में आदमी पर लग रहा नेट बल होगा:

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} - m\mathbf{f} = m(g-f)\,\hat{\mathbf{j}}$$ जहां $\hat{\mathbf{j}}$ ऊर्ध्वाधरतः अधोमुखी दिशा में एकक सदिश है।

अब यदि लिफ़्ट मुक्त रूप से नीचे गिर रही होती अर्थात् $\mathbf{f} = \mathbf{g}$, तो $\mathbf{F} = 0$. इस तरह हम यह पाते हैं कि मुक्त रूप से गिरती लिफ़्ट में आदमी पर लग रहा बल शून्य है। आप जानते हैं कि परिभाषा से किसी वस्तु का भार उस वस्तु को विरामावस्था में रखने के लिए आवश्यक बल होता है। अतः लिफ़्ट के तंत्र में $\mathbf{F}$ की प्रतिक्रिया, आदमी का भार है क्योंकि यही आदमी को विरामावस्था में रखने के लिए आवश्यक बल है। और, क्योंकि मुक्त रूप से गिर रही लिफ़्ट में $\mathbf{F}$ शून्य है, इसलिए आदमी भारहीनता का अनुभव करता है। इसी प्रकार मुक्त रूप से गिर रहा प्रत्येक पिंड स्वयं से जुड़े तंत्र में भारहीन होता है।



चित्र 10.4 : मुक्त रूप से गिर रहे निर्देश तंत्र में वस्तुएं भारहीनता का अनुभव करती हैं, क्योंकि वह तंत्र के त्वरण के बराबर त्वरण से गति करती हैं। (क) पृथ्वी की सतह के निकट मुक्त रूप से गिर रही लिफ़्ट; (ख) पृथ्वी E की परिक्रमा कर रहा एक अंतरिक्षयान। व्यक्ति, किताब और लिफ़्ट का पृथ्वी की ओर त्वरण एक समान है।

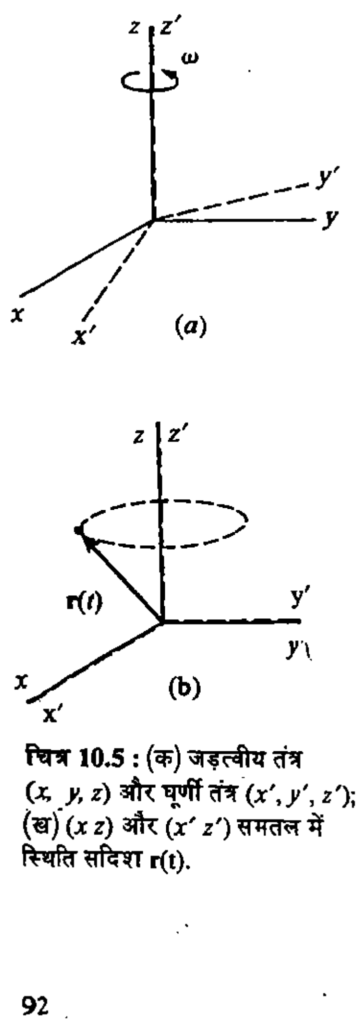
आपने शायद हमारे देश के एकमात्र अंतरिक्ष यात्री स्क्वॉड्रन लीडर राकेश शर्मा को अंतरिक्ष यान में तैरते हुए देखा होगा। वास्तव में उस समय वह किसी भी साथी अंतरिक्ष यात्री को अंगुली की नोक पर उठा सकते थे। आप बता सकते हैं कि ऐसा कैसे हो सकता है?

ऐसा होने का कारण यह है कि परिक्रमा कर रहे किसी भी अंतरिक्ष यान में भारहीनता आ जाती है (चित्र 10.4 ख) क्योंकि वह सदा ही मुक्त रूप से गिरने की अवस्था में होता है। याद रखिए कि भार निर्देश तंत्र पर निर्भर करता है। अंतरिक्ष यात्री केवल मुक्त रूप से गिर रहे अंतरिक्ष यान के तंत्र में भारहीन होता है। अतः भारहीनता से यह नहीं समझ लेना चाहिए कि वहां गुरुत्व बल नहीं है।

आइए अब हम इसी स्थिति को उस तंत्र से देखें जो पृथ्वी के सापेक्ष विरामावस्था में है। इस तंत्र में अंतरिक्ष यात्री पर लग रहा नेट बल $m\mathbf{a}$ है। अतः इस तंत्र के सापेक्ष अंतरिक्ष यान और अंतरिक्ष यात्री दोनों के भार हैं। पर, इस तंत्र में भी अंतरिक्ष यात्री यान में इसलिए तैरता हुआ दिखता है, क्योंकि वह पृथ्वी की ओर उसी दर से गिर रहा है, जिस दर से अंतरिक्ष यान।

अभी तक हमने परस्पर एक दूसरे के सापेक्ष तंत्रों के घूर्णन पर विचार नहीं किया है। हम जानते हैं कि घूर्णन कर रहे पिंड में त्वरण होता है। अतः इस तरह के पिंड से जुड़ा हुआ तंत्र घूर्णन करता है और अजड़त्वीय होता है। घूर्णन कर रहे निर्देश तंत्र में हमारी रूचि होने का मुख्य कारण यह है कि हम इस तरह के एक तंत्र, अर्थात् पृथ्वी, पर रह रहे हैं। घूर्णन कर रहे तंत्र का एक अन्य उदाहरण मेरी-गो-राउंड से जुड़ा तंत्र है। हम घूर्णी तंत्रों को लेकर अनेक प्राकृतिक परिघटनाओं की व्याख्या कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, अगर हम पृथ्वी को घूर्णी तंत्र मान लें तो मौसम में हो रहे परिवर्तन, अक्षांश के साथ g में परिवर्तन तथा अनेक अन्य परिघटनाओं की व्याख्या की जा सकती है। आइए अब हम घूर्णी निर्देश तंत्र की दृष्टि से गति का विश्लेषण करें।

10.3 घूर्णी निर्देश तंत्र



चित्र 10.5 : (क) जड़त्वीय तंत्र (x, y, z) और घूर्णी तंत्र (x', y', z'); (ख) $(x\,z)$ और $(x'\,z')$ समतल में स्थिति सदिश $\mathbf{r}(t)$.

भाग 10.2.2 में आपने यह पढ़ा है कि न्यूटन के द्वितीय गति-नियम का रूप एक जड़त्वीय तंत्र से एक स्थानांतरी अजड़त्वीय तंत्र (translating non-inertialframe) में जाने पर किस तरह बदलता है। यहां अब हम यह समझेंगे कि जब कोई व्यक्ति जड़त्वीय तंत्र से घूर्णी निर्देश तंत्र (rotating frame of reference) में जाता है तो द्वितीय नियम किस तरह रूपांतरित होता है। पहले ही की तरह अब भी द्वितीय नियम के रूपांतरित व्यंजक में जड़त्वीय बल उपस्थित होगा। इस भाग में हम यह देखेंगे कि घूर्णी तंत्र में एक से अधिक जड़त्वीय बल होते हैं। अब हम इन जड़त्वीय बलों को ज्ञात करेंगे।

आइए हम द्रव्यमान m वाला एक कण लें जो जड़त्वीय तंत्र के सापेक्ष $\mathbf{a}_{in}$ की दर से त्वरित हो रहा है। तब उस तंत्र में इसका गति-समीकरण होगा: $\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_{in}$

अब मान लीजिए कि घूर्णी तंत्र के सापेक्ष इसका त्वरण $\mathbf{a}_{rot}$ है।

तब उस तंत्र में इसका गति-समीकरण होगा : $\mathbf{F}_{rot} = m\,\mathbf{a}_{rot}$

मान लीजिए कि घूर्णी तंत्र के सापेक्ष जड़त्वीय तंत्र का आपेक्षिक त्वरण $\mathbf{a}'$ है। तब

$$\mathbf{a}_{in} = \mathbf{a}_{rot} + \mathbf{a}' \quad \text{या} \quad \mathbf{F}_{rot} = m\,(\mathbf{a}_{in} - \mathbf{a}') = \mathbf{F} + \mathbf{F}', \tag{10.4}$$

जहां $\mathbf{F}'$ जड़त्वीय बल है जिसके लिए $\mathbf{F}' = -\,m\,\mathbf{a}'$.

अब हमारा उद्देश्य घूर्णी तंत्र के लिए $\mathbf{a}'$ का व्यंजक ज्ञात करना है। हम जानते हैं कि त्वरण, वेग का समय-अवकलज (time derivative) होता है और वेग, विस्थापन का समय-अवकलज होता है। इसलिए पहले हम जड़त्वीय निर्देश तंत्र और घूर्णी निर्देश तंत्र में मापे गए कण के अत्यणु विस्थापनों (infinitesimal displacement) में संबंध स्थापित करेंगे। इन तंत्रों में मापे गए कण के वेगों के संबंध प्राप्त करने के लिए हम इस संबंध का समय-अवकलज निकालेंगे। तब वेगों के संबंध के समय-अवकलज से त्वरण का अपेक्षित व्यंजक प्राप्त हो जाएगा। अतः सही मायने में अब आप जड़त्वीय निर्देश तंत्र और घूर्णी निर्देश तंत्र में विभिन्न शुद्ध-गतिकीय चरों (kinematical variables) के समय-अवकलजों के संबंधों के बारे में पढ़ेंगे।

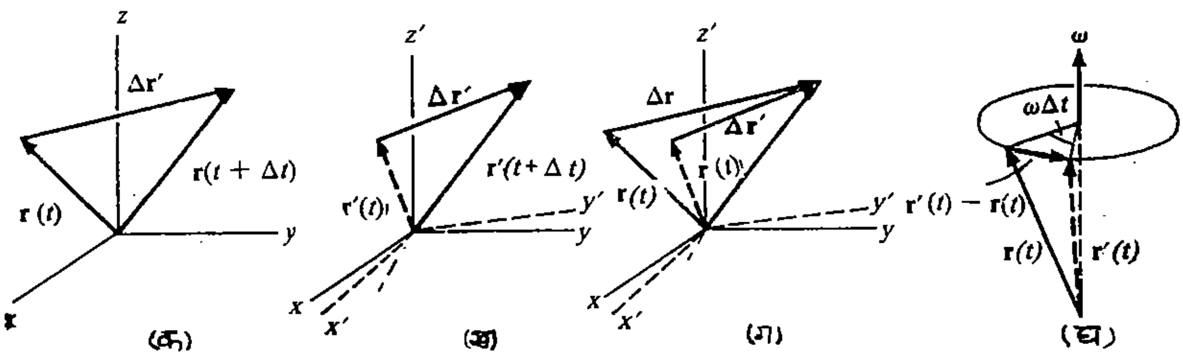
10.3.1 जड़त्वीय निर्देश तंत्र और घूर्णी निर्देश तंत्र में समय-अवकलज

मान लीजिए कि द्रव्यमान m वाले कण की गति का प्रेक्षण कर रहे एक जड़त्वीय प्रेक्षक O का निर्देश तंत्र कार्तीय निर्देश तंत्र (x, y, z) है और, एक दूसरे प्रेक्षक O', जो घूर्णन कर रहा है, का निर्देश तंत्र एक अन्य कार्तीय निर्देश तंत्र (x', y', z') है (चित्र 10.5 क)। व्यवहार में हम उन स्थितियों को लेते हैं जहां अजड़त्वीय तंत्र एक जड़त्वीय तंत्र के सापेक्ष एकसमान रूप से घूर्णन करता है। अतः यहां

हम यह मान लेंगे कि (x, y, z) अक्षों के प्रति (x', y', z') अक्ष एकसमान कोणीय वेग से घूर्णन करते हैं। यहां हमारी रूचि केवल घूर्णन गति में है, अर्थात् O के सापेक्ष O' की कोई स्थानांतरण गति नहीं होती। इसीलिए हमने निर्देश तंत्रों के संपाती मूल बिन्दु लिए हैं। आइए अब हम यह भी मान लें कि तंत्र (x', y', z') इस तरह घूर्णन कर रहा है कि z-अक्ष और z'-अक्ष सदा संपाती रहते हैं। इस तरह, घूर्णी तंत्र का अचर कोणीय वेग $\boldsymbol{\omega}$, z-अक्ष के अनुदिश होता है। और यह भी मान लीजिए कि क्षण t पर x-अक्ष और x'-अक्ष संपाती हैं।

अब मान लीजिए कि क्षण t पर xz-समतल (और $x'z'$-समतल) में कण का स्थिति सदिश $\mathbf{r}(t)$ है (चित्र 10.5 ख)। क्षण $t + \Delta t$ पर स्थिति सदिश $\mathbf{r}(t + \Delta t)$ है। चित्र 10.6 क से जड़त्वीय तंत्र में कण का विस्थापन होगा :

$$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t) \quad (10.5 \text{ क})$$



चित्र 10.6 : (क) जड़त्वीय तंत्र में स्थिति सदिश में परिवर्तन $\Delta\mathbf{r}$; (ख) घूर्णी तंत्र में स्थिति सदिश में परिवर्तन $\Delta\mathbf{r}'$, (ग) $\Delta\mathbf{r}$ और $\Delta\mathbf{r}'$ समान नहीं हैं; (घ) $\{\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t)\}$ और $\boldsymbol{\omega}$ में संबंध।

घूर्णी प्रेक्षक की स्थिति अलग है। वह भी समान अंतिम स्थिति सदिश $\{\mathbf{r}(t + \Delta t)\}$ प्राप्त करता है। पर विस्थापन प्राप्त करने में वह इस बात को सुनिश्चित कर लेता है कि उसके निर्देश तंत्र में (चित्र 10.6 ख) प्रारंभिक स्थिति सदिश $\mathbf{r}'(t)$, $x'z'$ समतल में ही था। अतः वह निम्नलिखित विस्थापन मापता है $\quad \Delta\mathbf{r}' = \mathbf{r}'(t + \Delta t) - \mathbf{r}'(t)$. (10.5 ख)

चित्र 10.6 ग से यह देखा जा सकता है कि Δt अंतराल में, $x'y'$ समतल घूर्णन करते हुए अपनी पिछली स्थिति से हट गया है। इसलिए $\Delta\mathbf{r}$ और $\Delta\mathbf{r}'$ समान नहीं होंगे। समीकरण 10.5 क और 10.5 ख से $\quad \Delta\mathbf{r} = \Delta\mathbf{r}' + \mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t)$. (10.6)

अब हम $\{\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t)\}$ को $\boldsymbol{\omega}$ और Δt के पदों में व्यक्त करेंगे। इसके लिए आइए हम चित्र 10.6 घ देखें। यहां यह देखा जा सकता है कि

$$|\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t)| = (r \sin\theta)(\omega\,\Delta t) = \omega r \sin\theta\,\Delta t = |\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}|\,\Delta t$$

जहां r और $\mathbf{r}$ क्रमशः $r(t)$ और $\mathbf{r}(t)$ के लिए प्रयुक्त हुए हैं। सदिश गुणनफल की दिशा मालूम करने के लिए दक्षिण-हस्त नियम (right hand rule) से हम यह पाते हैं कि $\{\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t)\}$, $(\omega \times \mathbf{r})$ के अनुदिश है। अतः सदिश राशि $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\,\Delta t$ परिमाण और दिशा में $\{\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t)\}$ को निरूपित करती है।

इस तरह

$$\mathbf{r}'(t) - \mathbf{r}(t) = (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})\,\Delta t.$$

अतः समीकरण 10.6 से

$$\frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\mathbf{r}'}{\Delta t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

दोनों ओर सीमाएं लेने पर, जबकि $\Delta t \to 0$ हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

अब $\dfrac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}_{in}$ = जड़त्वीय तंत्र में कण का वेग

और $\dfrac{d\mathbf{r}'}{dt} = \mathbf{v}_{rot}$ = घूर्णी तंत्र में कण का वेग.

इस तरह

$$\mathbf{v}_{in} = \mathbf{v}_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{10.7}$$

आपने यह ज़रूर देखा होगा कि ऊपर दी गई उपपत्ति में हमने किन्हीं विशेष अक्षों का चयन करके उनका प्रयोग नहीं किया है। अतः समीकरण 10.7 से प्राप्त परिणाम एक व्यापक परिणाम है।

समीकरण 10.7 को हम एक और तरह से भी लिख सकते हैं:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rot} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{10.8}$$

समीकरण 10.8 लिखने के लिए हमने $\mathbf{r}$ के केवल ज्यामितीय गुणधर्मों का ही प्रयोग किया है। इसलिए इसे व्यापक रूप से किसी भी सदिश $\mathbf{A}$ के लिए लिखा जा सकता है। इस तरह व्यापक परिणाम निम्नलिखित होगा :

$$\left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\mathbf{A}}{dt}\right)_{rot} + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}) \tag{10.9}$$

अब हम $\mathbf{a}' (= \mathbf{a}_{in} - \mathbf{a}_{rot})$ मालूम करने के लिए समीकरण 10.8 का प्रयोग करेंगे। हम जानते हैं कि

$\mathbf{a}_{in} = \left(\frac{d\mathbf{v}_{in}}{dt}\right)_{in}$, अर्थात् जड़त्वीय तंत्र में $\mathbf{v}_{in}$ का समय-अवकलज, और

$\mathbf{a}_{rot} = \left(\frac{d\mathbf{v}_{rot}}{dt}\right)_{rot}$, अर्थात् घूर्णी तंत्र में $\mathbf{v}_{rot}$ का समय-अवकलज

$\mathbf{A} = \mathbf{v}_{in}$ के लिए समीकरण 10.9 को लागू करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\mathbf{a}_{in} = \left(\frac{d\mathbf{v}_{in}}{dt}\right)_{in} = \left(\frac{d\mathbf{v}_{in}}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{in}$$

समीकरण 10.7 का प्रयोग करने पर

$$\mathbf{a}_{in} = \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

चूंकि ω अचर है, इसलिए

$$\mathbf{a}_{in} = \mathbf{a}_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

या $\mathbf{a}_{in} = \mathbf{a}_{rot} + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$

$$\therefore \mathbf{a}' = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rot} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{10.10}$$

अतः जड़त्वीय बल होगा

$$\mathbf{F}' = -m\mathbf{a}' = -2m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}' - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{10.11}$$

समीकरण 10.11 में केवल सुविधा के लि $\mathbf{v}_{rot}$ के स्थान पर हमने $\mathbf{v}'$ लिखा है।

अतः समीकरण 10.4 से हम लिख सकते हैं:

$$\mathbf{F}_{rot} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}). \tag{10.12}$$

समीकरण 10.12 से यह पता चलता है कि एकसमान रूप से घूर्णन कर रहे निर्देश तंत्र से प्रेक्षित गति की गतिकी का विश्लेषण निम्नलिखित तीन प्रकार के बलों के पदों में किया जा सकता है:

i) $\mathbf{F}$: यह कण पर लगने वाले उन सभी बलों का जोड़ होता है, जो भौतिक अन्योन्यक्रियाओं, संपर्क, रस्सियों में तनाव और मूलभूत अन्योन्यक्रियाओं आदि से उत्पन्न होते हैं। जड़त्वीय तंत्र में केवल ये ही बल उपस्थित होते हैं।

ii) $-2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}')$: इसे **कोरिओलिस बल** (Coriolis force) कहते हैं। यह $\boldsymbol{\omega}$ और $\mathbf{v}'$ से बने समतल की लांबिक दिशा में कार्य करता है और इसकी दिशा दक्षिण-हस्त नियम से मिलती है। जब घूर्णी तंत्र के सापेक्ष कण का वेग शून्य होता है तब यह बल कार्य नहीं करता।

कोरिओलिस बल का नाम, फ्रांसीसी इंजीनियर और गणितज्ञ गुस्ताव कैम्पार्ड कोरिओलिस (1792-1843) के नाम पर रखा गया उन्होंने सबसे पहले इस बल की व्याख्या की।

iii) $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$: इसे अपकेन्द्री बल (centrifugal force) कहते हैं। यह सदा त्रिज्यतः बाहर की ओर काम करता है। एक दिए हुए क्षण पर जड़त्वीय तंत्र और घूर्णी तंत्र में दो प्रेक्षकों के लिए कण का स्थिति सदिश समान होता है। अतः $\mathbf{r}$ के स्थान पर $\mathbf{r}'$ प्रतिस्थापित किया जा सकता है, बशर्ते उनके मूल बिन्दु संपाती हों।

अब हम इन बलों का कुछ उदाहरणों सहित अध्ययन करेंगे। आइए पहले हम अपकेन्द्री बल के बारे में पढ़ें।

10.3.2 अपकेन्द्री बल

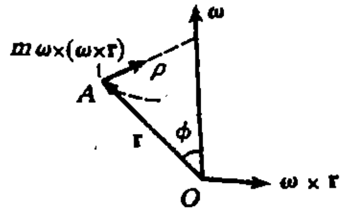
आइए पहले हम अपकेन्द्री बल $\mathbf{F}_{cent} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ का परिमाण और दिशा निकालें। इसके लिए चित्र 10.7 देखिए। $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, $\boldsymbol{\omega}$ और $\mathbf{r}$ को आविष्ट करने वाले समतल पर लंब है। मान लीजिए कि $\boldsymbol{\omega}$ और $\mathbf{r}$ के बीच का कोण ϕ है। तब $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ का परिमाण $\omega r \sin\phi = \omega\rho$ होगा, जहां $\rho = r\sin\phi$ घूर्णन अक्ष से $\mathbf{r}$ के शीर्ष की लांबिक दूरी है। चूंकि $\boldsymbol{\omega}$ और $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ के बीच का कोण 90° हैं अतः $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ एक सदिश है जिसका परिमाण $\omega^2\rho$ है। दक्षिण-हस्त नियम के अनुसार इस सदिश की दिशा घूर्णन-अक्ष की ओर त्रिज्यतः अंतर्मुखी (radially inward) होती है। इसलिए $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$, परिमाण $m\omega^2\rho$ वाला एक सदिश है। इसकी दिशा घूर्णन अक्ष से $\mathbf{r}$ के शीर्ष की ओर त्रिज्यतः बहिर्मुखी (radially outward) होती है। इसलिए हम यह भी लिख सकते हैं कि

$$\mathbf{F}_{cent} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = m\omega^2\rho\,\hat{\boldsymbol{\rho}} = m\omega^2 r\sin\phi\,\hat{\boldsymbol{\rho}}, \qquad (10.13\ \text{क})$$

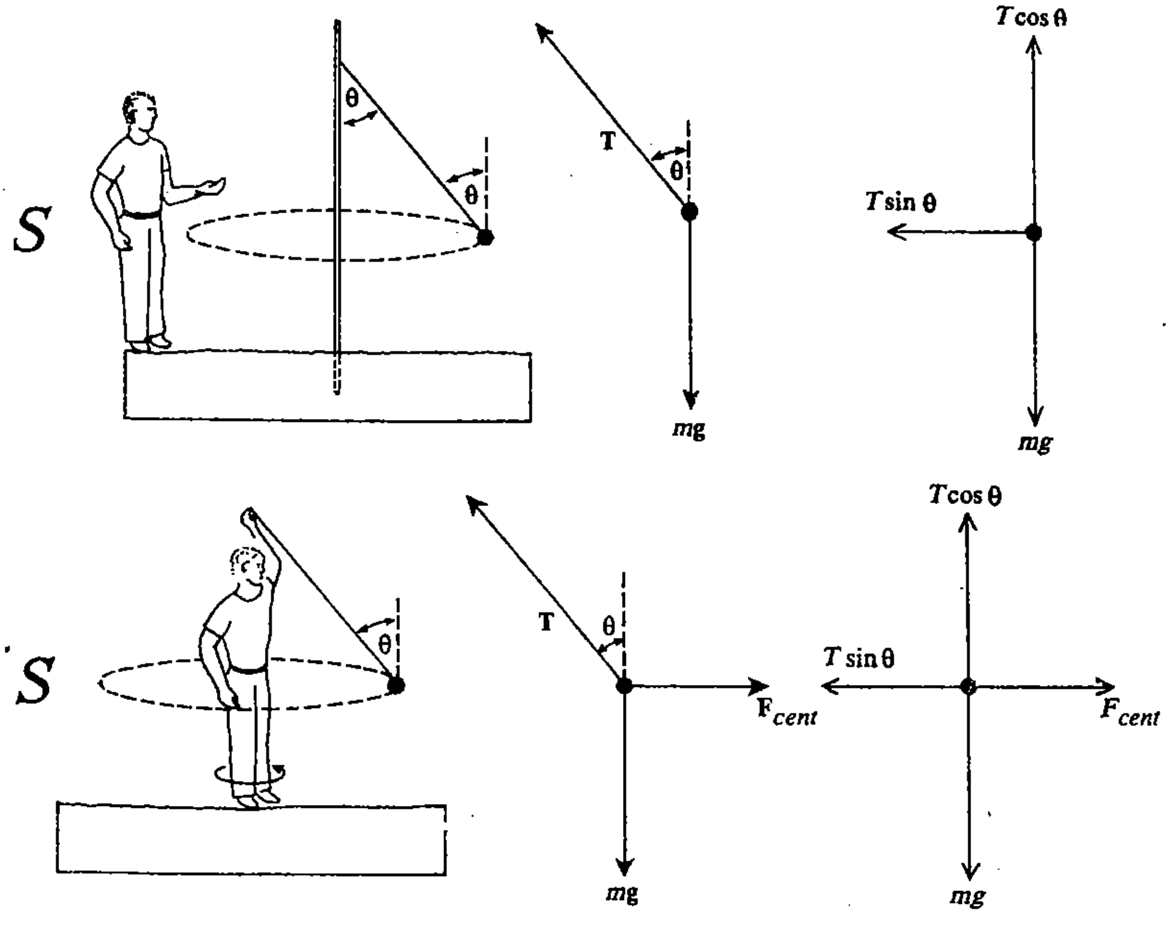
जहां $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ घूर्णन अक्ष से $\mathbf{r}$ के शीर्ष की ओर की दिशा के अनुदिश एकक सदिश है। अगर पिंड के स्थिति सदिश $\mathbf{r}$ को उस वृत्त के केन्द्र से मापा जाए जिसमें वह घूर्णन कर रहा है तो $\phi = 90°$, और

$$\mathbf{F}_{cent} = m\,\omega^2 r\,\hat{\mathbf{r}} \qquad (10.13\ \text{ख})$$

हमें अपने दैनिक जीवन में अपकेन्द्री बल बार-बार देखने को मिलता है। जब हम एक धागे से एक पिंड बांधकर उसे घुमाते हैं तो हमें खिंचाव महसूस होता है। इस प्रभाव की व्याख्या हम अपकेन्द्री बल की मदद से कर सकते हैं। आइए देखें कि यह कैसे होता है।



चित्र 10.7 : अपकेंद्री बल। गणितीय तौर पर, सदिश $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ बिंदु O पर लगता है। परन्तु भौतिक दृष्टि से $-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ पिंड पर लग रहा एक बल है। अतः $\mathbf{F}_{cent}$, A पर लगता है और यह, सदिश $\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ के प्रतिसमांतर है।



चित्र **10.8 :** तंत्र S में पिंड पर लग रहे बल हैं: धागे का तनाव और पिंड का भार। $T\cos\theta$, mg को निरस्त कर देता है और $T\sin\theta$ से आवश्यक अभिकेंद्री बल मिलता है। तंत्र S' में तनाव और भार के अतिरिक्त अपकेंद्री बल भी होता है। ये सभी बल साम्यावस्था में हैं।

मान लीजिए कि एक गेंद को अचर कोणीय चाल ω से एक क्षैतिज वृत्त में घुमाया जा रहा है (चित्र 10.8)। आइए हम दो निर्देश तंत्रों से गेंद की गति का विश्लेषण करें जिनमें से एक निर्देश तंत्र अचल (जड़त्वीय) तंत्र S है और दूसरा एक घूर्णी (अजड़त्वीय) तंत्र S' है जो उसी कोणीय चाल से घूर्णन कर रहा है जिस कोणीय चाल से गेंद घूम रही है। इसलिए S के सापेक्ष S' की कोणीय चाल भी ω होगी। S तंत्र और S' तंत्र में बल-आरेख (force diagrams) देखिए।

S तंत्र में गेंद का अभिकेन्द्री त्वरण है: $-\omega^2 r\hat{\mathbf{r}}$. यह त्वरण धागे के तनाव बल से प्राप्त होता है। बल $\mathbf{T}$ को उसके घटकों में वियोजित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$T\cos\theta = mg$$
$$T\sin\theta = m\,\omega^2\, r.$$

S' तंत्र में गेंद विरामावस्था में है। ऐसा इसलिए है क्योंकि इस तंत्र में $\mathbf{T}$ और mg के अतिरिक्त एक अपकेन्द्री बल $\mathbf{F}_{ccnt}$ भी गेंद पर लग रहा है। बलों का वियोजन करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$T\cos\theta = mg,$$
$$F_{ccnt} = T\sin\theta = m\,\omega^2\, r$$

यह उदाहरण हमने विशेष रूप से यहां इसलिए दिया है जिससे कि आप शब्द "अपकेन्द्री बल" का ग़लत प्रयोग न करें। कभी-कभी शायद आपको ऐसे भी कथन पढ़ने को मिल सकते हैं: "पृथ्वी की परिक्रमा करते समय चंद्रमा इसलिए नीचे नहीं गिरता क्योंकि अपकेन्द्री बल गुरुत्व बल को संतुलित कर लेता है। अतः ऐसा कोई नेट बल उस पर नहीं लगता जो उसे नीचे गिराए।"

इस प्रकार के कथन सरासर ग़लत हैं और वे न्यूटन के प्रथम नियम के विरूद्ध जाते हैं। **क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है?** क्योंकि यदि पिंड पर कोई नेट बल नहीं लग रहा हो, **तो पिंड एक सीधी रेखा में चलता जाएगा।** वक्र पथ में गतिमान पिंड पर अवश्य ही एक असंतुलित बल कार्य करता है। अब क्योंकि जड़त्वीय तंत्र में चंद्रमा (अथवा गेंद) एक वर्तुल पथ में घूमता हुआ नज़र आता है, इसलिए गुरुत्व बल (या धागे के तनाव) से प्राप्त असंतुलित अभिकेन्द्री बल चन्द्रमा (अथवा गेंद) पर कार्य करता है।

लेकिन किसी भी वस्तु की कोणीय चाल के बराबर कोणीय चाल से गतिमान घूर्णी निर्देश तंत्र में ये वस्तुएं विरामावस्था में दिखाई पड़ेंगी। केवल इन तंत्रों में ही अपकेन्द्री बल, चन्द्रमा पर लग रहे गुरुत्व बल (या धागे के तनाव के क्षैतिज घटक) को संतुलित करेंगे। अतः यह ध्यान रखिए कि **अपकेन्द्री बल केवल घूर्णी निर्देश तंत्रों में ही उत्पन्न होते हैं।** मिसाल के तौर पर, यदि हम अघूर्णी तंत्र (non-rotating frame) से घूर्णन कर रहे पिंड की गति का विश्लेषण करें तो उसमें अपकेन्द्री बल जैसा कोई बल नहीं होता। यूं तो आप प्रश्नों के विश्लेषण में किसी भी तंत्र का प्रयोग कर सकते हैं पर **जड़त्वीय तंत्र में जड़त्वीय बलों का प्रयोग कभी भी नहीं कीजिए। ये बल केवल अजड़त्वीय तंत्र में उत्पन्न होते हैं।**

आइए अब हम अपकेन्द्री बल का एक उदाहरण लेकर इस भाग को यहीं समाप्त करें।

उदाहरण 2 : अपकेन्द्रण यंत्र

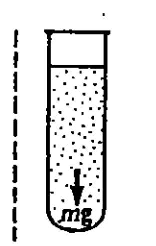
अपकेन्द्री बल का एक रोचक अनुप्रयोग अपकेन्द्रण यंत्र (centrifuge) है। इसका प्रयोग द्रव्यों में पड़े भारी कणों को अलग करने, रासायनिक पदार्थों को अलग करने आदि के लिए किया जाता है। अब आप यह जानना चाहेंगे कि यह यंत्र किस तरह काम करता है।

मान लीजिए कि एक परख नली में द्रव है जिसमें छोटे-छोटे कण निलंबित हैं। यदि कण द्रव से भारी हों, तो वे नली के तल पर बैठ जाएंगे। पर यदि कण बहुत छोटे हों तो इस प्रक्रिया में काफ़ी समय लगेगा। इस प्रक्रिया में तेज़ी लाने के लिए परख नली को एक अपकेन्द्रण यंत्र में रख दिया जाता है। यह एक यांत्रिक युक्ति है जिसका प्रचालन अपकेन्द्री बल पर निर्भर करता है।

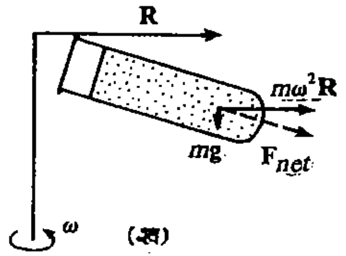
स्थिति का सही सही विश्लेषण करने के लिए हमें निलंबित कणों पर लग रहे उत्प्लावक बल (buoyant force) और गतिशील कणों पर लग रहे श्यान बल (viscous force) को ध्यान में रखना चाहिए। पर, क्योंकि गुरुत्व बल और अपकेन्द्री बल की तुलना में ये बल काफ़ी छोटे हैं, इसलिए यहां हम इनकी उपेक्षा कर देंगे।

शुरू में नली को खड़ा रखा जाता है जैसा कि चित्र 10.9 क में दिखाया गया है। अपकेन्द्रण यंत्र में अन्य परखनलियों (जिन्हें चित्र में नहीं दिखाया गया है) को रखकर संतुलन बनाए रखा जाता है।

जब अपकेन्द्रण यंत्र अपने केंद्रीय ऊर्ध्वाधर अक्ष के प्रति घूर्णन करता है, तब (अपकेन्द्रण यंत्र से जुड़े इसके साथ घूर्णन कर रहे तंत्र में) नली पर क्षैतिज दिशा में अपकेन्द्री बल लगता है। गुरुत्व बल और अपकेन्द्री बल का परिणामी **प्रभावी गुरुत्व बल** (effective force of gravity) की तरह कार्य करता है। उच्च कोणीय चाल पर F_{cent}, mg से काफ़ी अधिक होता है। अतः यह प्रभावी बल F_{net} काफ़ी प्रबल होता है और लगभग क्षैतिज दिशा में लगता है (चित्र 10.9 ख)। नली तब तक ऊपर उठती जाती है जब तक वह अपने पर लग रहे नेट बल F_{net} की दिशा के अनुदिश नहीं हो जाती। द्रव की सतह, लगने वाले नेट बल के लंबवत् होती है। द्रव में निलंबित कण, लग रहे नेट बल की दिशा में गतिमान होते हैं। यह नली के तल की ओर जाने लगते हैं। चूंकि ω के उच्च मानों के लिए mg की तुलना में F_{cent} काफ़ी अधिक होता है, इसलिए निलंबित कण नली के तल पर तेज़ी से जमा होने लगते हैं।



(क)



(ख)

चित्र 10.9 : (क) अपकेंद्रण यंत्र में स्थित परखनली। बिंदुदार रेखा अपकेंद्रण यंत्र का अक्ष दिखाती है; (ख) जब अपकेंद्रण यंत्र घूर्णन करता है, तो अपकेंद्री बल के कारण परखनली का मुक्त सिरा क्षैतिज दिशा में उठ जाता है।

अपकेन्द्री बल को और अच्छी तरह से समझने के लिए अब आप एक बोध प्रश्न हल करना चाहेंगे।

बोध प्रश्न 4

क) जब हम मोड़ पर कार तेज़ी से चलाते हैं तब वह बाहर की ओर फिसल जाती है। कार में बैठे हुए हमें ऐसा लगता है कि जैसे उस पर अपकेन्द्री बल लगा है। यदि सड़क के किनारे खड़े आप इस दृश्य को देख रहे हों तो आप कार की गति की व्याख्या किस तरह करेंगे?

ख) परा-अपकेन्द्रण यंत्र (ultra centrifuge) एक ऐसा अपकेन्द्रण-यंत्र होता है जिसे उच्च कोणीय चाल से चलाया जा सकता है। इस यंत्र में 6×10^{-19} kg के द्रव्यमान का एक छोटा वाइरस कण पानी में निलंबित है। यह कण ऊर्ध्वाधर घूर्णन अक्ष से 4 cm की दूरी पर है। कोणीय घूर्णन चाल $2\pi \times 10^3$ rad s^{-1} है।

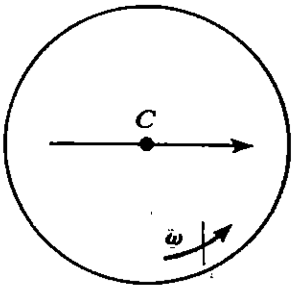
i) परा-अपकेन्द्रण यंत्र के साथ घूर्णन कर रहे तंत्र के सापेक्ष g का प्रभावी मान कितना है?

ii) कण पर लग रहा नेट अपकेन्द्री बल कितना है?

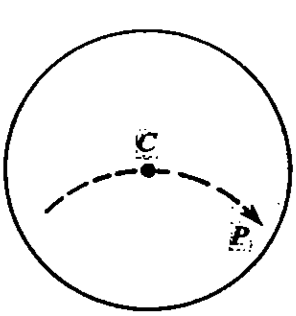
10.3.3 कोरिओलिस बल

आइए हम एक कण लें जो घूर्णी तंत्र के सापेक्ष वेग v_{rot} से गतिमान होता है। कोरिओलिस बल के प्रभाव को घूर्णन अक्ष पर, जहां अपकेन्द्री बल नगण्य होता है, अधिक आसानी से देखा जा सकता है। इसलिए आइए हम इसी स्थिति से शुरू करें।

चित्र 10.10 में घूर्णन कर रहे एक क्षैतिज डिस्क को दिखाया गया है। घूर्णन अक्ष बिन्दु C पर, जो डिस्क का केन्द्र है, इस पन्ने के तल के लंबवत् है। आइए अब हम एक ऐसी गेंद लें जो C से होकर जाती हो। यदि घर्षण बल की उपेक्षा कर दी जाए तो गेंद पर कोई क्षैतिज बल नहीं लगेगा। इसलिए वह जड़त्वीय तंत्र के सापेक्ष अचर वेग v से एक सरल रेखा में (चित्र 10.10 की ठोस रेखा) गतिमान होगी। जड़त्वीय तंत्र से देखने पर घूर्णी डिस्क कोणीय चाल ω से (माना कि वामावर्त दिशा में) घूम जाता है। पर डिस्क में लगे तंत्र से, जड़त्वीय तंत्र एकसमान कोणीय चाल से विपरीत दिशा अर्थात् दक्षिणावर्त (clockwise) दिशा में घूमता हुआ दिखता है। इसलिए घूर्णी तंत्र में गेंद का प्रपथ (trajectory) भी दक्षिणावर्त घूम जाता है और वक्र पथ का अनुसरण करता है जैसा कि चित्र 10.10 ख में डैश-युक्त रेखा से दिखाया गया है। अतः कण के पथ में वक्रता (curvature) लाने के लिए, जो जड़त्वीय तंत्र में नहीं है, घूर्णी तंत्र में एक जड़त्वीय बल अवश्य होना चाहिए। वस्तुतः यही बल **कोरिओलिस बल** है।



(क)



(ख)

चित्र 10.10 : (क) एक जड़त्वीय तंत्र (ठोस रेखा) और (ख) घूर्णी तंत्र (डैश-दार रेखा) में ऊपर से देखी गई घर्षण रहित गेंद की गति जबकि वह C से होकर घूर्णन अक्ष पर से जाती है।

टर्नटेबल या मेरी-गो-राउंड पर कोरिओलिस बल का परिमाण काफ़ी अधिक हो सकता है। उदाहरण के लिए यदि $\omega = 1$ rad s^{-1} और $v_{rot} = 5$ ms^{-1} हों तो कोरिओलिस त्वरण $2\omega v_{rot} = 10$ ms^{-2} होगा जो गुरुत्व त्वरण के बराबर है।

पृथ्वी के घूर्णन से संबंधित कोरिओलिस बल ऊपर दिए गए कोरिओलिस बल की अपेक्षा काफ़ी अधिक दुर्बल होता है क्योंकि कोणीय चाल $\omega \simeq 2\pi \times 10^{-5}$ rad s^{-1} से पृथ्वी दिन में केवल एक घूर्णन पूरा करती है। कण का वेग 10^3 ms^{-1} होने पर भी कोरिओलिस त्वरण का परिमाण केवल 10^{-2} ms^{-2} के लगभग होता है जो g से काफी कम है। यही कारण है कि कोरिओलिस बल से आप सहज रूप से परिचित नहीं होते। फिर भी, पृथ्वी के घूर्णन से संबंधित कोरिओलिस बल अगर लगातार काफ़ी समय तक, मान लीजिए काफ़ी दिनों तक, लगता रहे तो इसके महत्वपूर्ण प्रभाव हो सकते हैं। अनेक प्राकृतिक परिघटनाएं पृथ्वी के घूर्णन से संबंधित अपकेन्द्री बल और कोरिओलिस बल के कारण होती हैं। मिसाल के तौर पर, अक्षांश (latitude) के साथ g के मान में

परिवर्तन, पृथ्वी पर गतिमान वस्तु का विक्षेपण (deflection), दो गोलार्धों में वायु गति के प्रतिरूपों की व्याख्या आदि घूर्णन कर रही पृथ्वी पर लगने वाले अपकेन्द्री अथवा कोरओलिस बल की संकल्पनाओं की सहायता से की जा सकती है। इसलिए आइए अब हम एक घूर्णी तंत्र के रूप में पृथ्वी का अध्ययन करें।

10.4 घूर्णी निर्देश तंत्र के रूप में पृथ्वी

अनेक महत्वपूर्ण परिघटनाएँ पृथ्वी की सतह से जुड़े घूर्णी निर्देश तंत्र में लग रहे जड़त्वीय बलों के कारण होती हैं। आइए अब हम इनमें से कुछ परिघटनाओं का अध्ययन करें।

10.4.1 अक्षांश के साथ g में परिवर्तन

संभवतः आप इस बात को जानते होंगे कि भूमध्य रेखा की अपेक्षा ध्रुवों पर आदमी का भार अधिक होता है। ऐसा पृथ्वी के घूर्णन के कारण होता है। इस परिणाम का उल्लेख हम अक्षांश के साथ g के मान में परिवर्तन की बात करते समय कर चुके हैं (खंड 1 की इकाई 5 का समीकरण 5.44 देखिए)। आइए अब हम इस परिणाम को सिद्ध करें।

मान लीजिए कि एक कण P पृथ्वी की सतह के पास अक्षांश λ पर पृथ्वी के सापेक्ष विरामावस्था में है। तब पृथ्वी के तंत्र में इस पर गुरुत्व बल $\mathbf{F}_g = (m\mathbf{g})$ और अपकेन्द्री बल $\mathbf{F}_{cent}$ लगता है जैसा कि चित्र 10.11 क में दिखाया गया है। इस कण के लिए कोरिओलिस बल शून्य है, क्योंकि घूर्णी तंत्र में यह विरामावस्था में है। समीकरण 10.13 क से $\mathbf{F}_{cent}$ का परिमाण यह है:

$$F_{cent} = m\,\omega^2 R \sin\phi = m\,\omega^2 R \cos\lambda, \quad [\because \lambda = \frac{\pi}{2} - \phi]$$

जहां R पृथ्वी की त्रिज्या है। मान लीजिए कि $\mathbf{F}_g$ और $\mathbf{F}_{cent}$ का परिणामी $\mathbf{F}_g^*$ है। आइए अब हम इन तीन बलों को त्रिज्य (radial) और अनुप्रस्थ (transverse) दिशाओं में वियोजित करें। ध्यान दीजिए कि पृथ्वी पर त्रिज्य दिशा ऊर्ध्वाधर ($\mathbf{F}_g$ के विपरीत) के संगत है और अनुप्रस्थ दिशा क्षैतिज के। मान लीजिए कि g_v^* और g_h^*, g^* के क्रमशः ऊर्ध्वाधर घटक और क्षैतिज घटक को निरूपित करते हैं (चित्र 10.11 ख)। इसलिए

$$mg_v^* = F_g - F_{cent}\cos\lambda = mg - m\omega^2 R\cos^2\lambda$$

$$\text{या } g_v^* = g - \omega^2 R\cos^2\lambda \qquad (10.14\text{ क})$$

$$\text{और } mg_h^* = F_{cent}\sin\lambda = m\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda$$

$$\text{या } g_h^* = \omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda. \qquad (10.14\text{ ख})$$

अब, अपकेन्द्री त्वरण $\mathbf{F}_{cent}/m$ का अधिकतम परिमाण $\omega^2 R$ है। आइए हम इसका मान परिकलित करें।

$$\omega^2 R = \left(\frac{2\pi\,\text{rad}}{24\times 60\times 60\text{s}}\right)^2 \times (6370\text{ km}) = 3.4\times 10^{-2}\text{ ms}^{-2}.$$

इस तरह $\omega^2 R << g$ और $g_v^* \simeq g$, अर्थात् $\mathbf{g}_v^*$ (आभासी ऊर्ध्वाधर) और $\mathbf{g}$ (वास्तविक ऊर्ध्वाधर) के बीच का कोण काफ़ी छोटा है। आइए हम इसका मान निकालें। चित्र 10.11 ख से

$$\tan\alpha \simeq \alpha = \frac{g_h^*}{g_v^*} = \frac{\omega^2 R\cos\lambda\sin\lambda}{g} = \frac{\omega^2 R\sin 2\lambda}{2g}$$

$\lambda = 45°$ पर इसका मान अधिकतम होगा, अर्थात्

$$\alpha_{max} = \frac{(3.4\times 10^{-2}\text{ ms}^{-2})}{2\times 9.8\text{ ms}^{-2}} = 0.0017\text{ rad} = 0°\,6'.$$

अतः प्रभावी रूप से $g_h^* = 0$ और $g_v^* = g^*$

इसलिए समीकरण 10.14 क से हमें प्राप्त होता है:

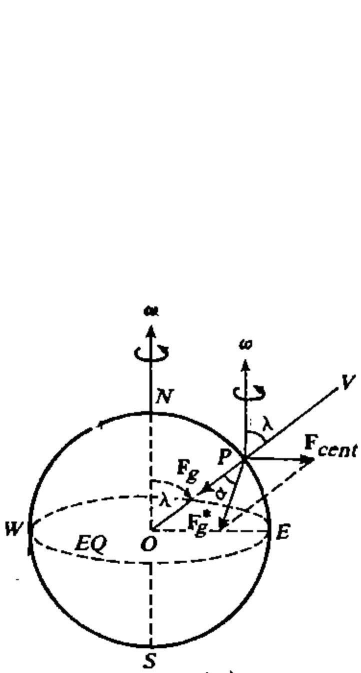
$$g^* \doteq g - \omega^2 R\cos^2\lambda \qquad (10.15)$$

ध्रुवों पर $\lambda = 90°$ और $g_v^* = g$, अर्थात् $g_{pole} = g$

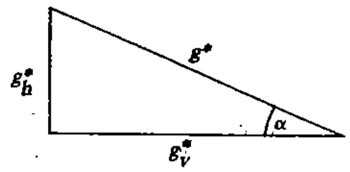
भूमध्य रेखा पर $\lambda = 0°$ जिससे कि

$$g_h^* = 0,\; g_v^* = g - \omega^2 R$$

$\therefore\ g_e = g - \omega^2 R$ जहां g_e भूमध्य रेखा पर g का मान है।



(क)



(ख)

चित्र 10.11 : अक्षांश के साथ g में परिवर्तन। (क) $\mathbf{F}_g$ और $\mathbf{F}_{cent}$ का परिणामी। बिंदु दार रेखा E, भूमध्यरेखा दर्शाती है। PV, P पर ऊर्ध्वाधर दिशा है; (ख) $\mathbf{g}^*$, g_h^* और g_v^*

समीकरण 10.15 की सहायता से हम यह लिख सकते हैं:

$$g^* = g - \omega^2 R(1 - \sin^2\lambda) = (g - \omega^2 R) + \omega^2 R \sin^2 \lambda$$

$$\text{या } g^* = g_e + \omega^2 R \sin^2\lambda$$

जो कि वही है जो खंड 1 का समीकरण 5.44 है।

इसलिए अगर हम पृथ्वी के घूर्णन को ध्यान में रखें तो ध्रुवों पर गुरुत्व त्वरण का मान, भूमध्य रेखा पर इसके मान से 3.4×10^{-2} m s^{-2} अधिक होगा। फिर भी इन मानों में मापा गया अंतर 5.2×10^{-2}ms^{-2} है। इस अंतर का कारण पृथ्वी का पूरी तरह से गोल न होना है। यह ध्रुवों पर चपटी है और भूमध्य रेखा पर उभरी हुई है। पृथ्वी के घूर्णन से उत्पन्न अपकेन्द्री बल के कारण साहुल रेखा (plumb line) ठीक पृथ्वी के केन्द्र की ओर नहीं होती। यह एक छोटे से कोण से विचलित होती है। अब आप ऊपर दी गई संकल्पना पर आधारित एक बोध प्रश्न हल कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 5

क) पृथ्वी की कोणीय चाल क्या हानी चाहिए जिससे कि अपकेन्द्री बल के कारण इसकी सतह से वस्तुएं उड़ जाएं? ($g = 10$ ms^{-2})।

ख) यदि पृथ्वी की कोणीय चाल ठीक इतनी हो कि यह घटना घट सके तो बताइए कि उसके किस भाग से वस्तुएं उड़ जाएंगी।

ऊपर की चर्चा में हमने पृथ्वी के सापेक्ष पिंड को विरामावस्था में माना है। पृथ्वी की सतह के सापेक्ष गतिमान पिंड के बारे में हम क्या कह सकते हैं? अब हमें अपनी चर्चा में कोरिओलिस बल को भी ध्यान में रखना होगा। आइए अब हम इस गति का विश्लेषण करें।

10.4.2 घूर्णन कर रही पृथ्वी पर गति

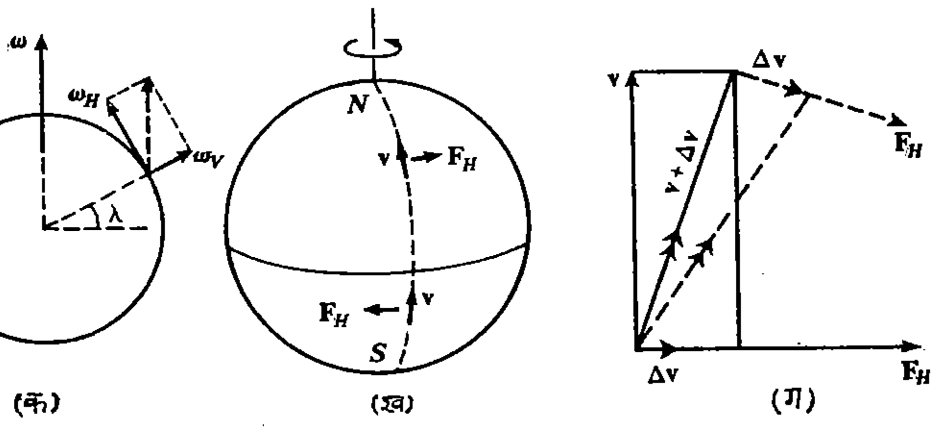
आइए हम द्रव्यमान m वाला एक कण लें जो गोल पृथ्वी की सतह के अक्षांश λ पर वेग $\mathbf{v}$ से गतिमान हो। इसलिए $\mathbf{v}$ गोले पर स्पर्श-रेखावत् होगा। मान लीजिए कि पृथ्वी का कोणीय वेग $\boldsymbol{\omega}$ है। तब पृथ्वी के निर्देश तंत्र में, समीकरण 10.12 से m पर लगा बल यह होगा

$$\mathbf{F} = m\,\mathbf{g} - 2m\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} - m\,\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

आइए अब हम कोरिओलिस बल के कारण व्यंजक में आए हुए अतिरिक्त बल का विश्लेषण करें। इसके लिए चित्र 10.12 क देखिए। आइए हम $\boldsymbol{\omega}$ को ऊर्ध्वाधर भाग $\boldsymbol{\omega}_V$ और क्षैतिज भाग $\boldsymbol{\omega}_H$ में वियोजित करें। तब कोरिओलिस बल होगा:

$$F_{cor} = -(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$$

$$= -(\boldsymbol{\omega}_V \times \mathbf{v}) - 2m\,(\boldsymbol{\omega}_H \times \mathbf{v})$$



चित्र 10.12 : कोरिओलिस बल के कारण एक गतिमान कण का विक्षेपण। (क) $\boldsymbol{\omega}$ का घटकों $\boldsymbol{\omega}_H$ और $\boldsymbol{\omega}_V$ में वियोजन; (ख) उत्तरी और दक्षिणी गोलार्ध में $\mathbf{F}_H$ की दिशाएं (ग) उत्तरी गोलार्ध में $\mathbf{v}$ का दक्षिणावर्त घूर्णन।

अब, क्योंकि $\boldsymbol{\omega}_H$ और $\mathbf{v}$ क्षैतिज हैं, इसलिए $\boldsymbol{\omega}_H \times \mathbf{v}$ ऊर्ध्वाधर होगा। और केवल $\boldsymbol{\omega}_V \times \mathbf{v}$ के कारण ही कोरिओलिस बल का क्षैतिज घटक $\mathbf{F}_H$ प्राप्त होता है। $\boldsymbol{\omega}_V$, $\mathbf{v}$ पर लंब है। इसलिए $\boldsymbol{\omega}_V \times \mathbf{v}$ का परिमाण $\omega_V v$ है।

अब मान लीजिए कि $\hat{\mathbf{r}}$, अक्षांश λ पर सतह की लांबिक दिशा में एक सदिश है अर्थात् $\hat{\mathbf{r}}$, ω_V के अनुदिश है। तब,

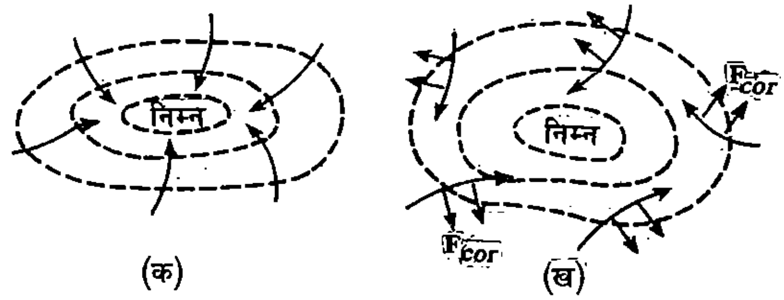
$$\omega_V = \omega_V \hat{\mathbf{r}} = \omega \cos\left(\frac{\pi}{2} - \lambda\right) \hat{\mathbf{r}} = \omega \sin \lambda \, \hat{\mathbf{r}}$$

और $\mathbf{F}_H = -2m(\boldsymbol{\omega}_V \times \mathbf{v}) = -2m\,\omega \sin \lambda\,(\hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{v})$

$\mathbf{F}_H$ का परिमाण $2mv\,\omega \sin \lambda$ है। $\mathbf{F}_H$, $\mathbf{v}$ की लांबिक दिशा में एक बल है (चित्र 10.12 ख)। अतः इसका प्रभाव वर्तुल गति उत्पन्न करना है। $\mathbf{F}_H$ के प्रभाव से उत्तरी गोलार्ध में दायीं ओर एक विक्षेपण उत्पन्न होगा। $\mathbf{F}_H$, $\mathbf{v}$ की दिशा में परिवर्तन ला देता है। मान लीजिए कि अत्यणु समयांतराल Δt में $\mathbf{v}$ में परिवर्तन $\Delta \mathbf{v}$ हुआ है। चित्र 10.12 ग से आप यह देख सकते हैं कि परिणामी वेग सदिश दायीं ओर चला जाता है। अब $\mathbf{F}_H$, $\mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ पर लंब है। इसलिए अगले ऐसे समयांतराल Δt में वेग सदिश और भी दायीं ओर घूम जाएगा। अतः उत्तरी गोलार्ध में $\mathbf{F}_H$ का प्रभाव वेग सदिश में दक्षिणावर्त घूर्णन उत्पन्न करना है। इसी तरह दक्षिणी गोलार्ध में वेग सदिश में वामावर्त घूर्णन होगा।

इस तरह आप यह देख सकते हैं कि कोरिओलिस बल का प्रभाव यह है कि यह सरल रेखा की गति को वर्तुल गति में बदल देता है। इस बात के अनेक रोचक परिणाम होते हैं। मिसाल के तौर पर, उत्तरी गोलार्ध में बहने वाली नदियां अपने दाएं किनारों का अपरदन (erosion) करती हैं जबकि दक्षिणी गोलार्ध में बहने वाली नदियां बाएं किनारों का। यदि रेल की द्विक-ट्रैक (double-track) पटरी हो तो उत्तरी गोलार्ध में रेल-पटरियों में से दायीं ओर की पटरी पहले घिसती है। ऐसा इसलिए है कि प्रत्येक ट्रैक पर ट्रेन केवल एक दिशा में जाती है। $\mathbf{F}_H$ के कारण इसकी गति का एक घटक गति-दिशा की दायीं ओर होता है। इसी तरह दक्षिणी गोलार्ध में बायीं ओर की पटरी जल्दी घिसती है।

इस परिणाम की सहायता से वायुमंडल में वायु-प्रवाह के प्रतिरूपों (air-flow patterns) की भी व्याख्या की जा सकती है। कल्पना कीजिए कि वायुमंडल में वायु के विभिन्न स्तरों में ताप अंतर होने के कारण एक निम्न-दाब क्षेत्र (low-pressure region) पैदा हो गया है (चित्र 10.13 क)। चित्र में दिखाए गए बंद वक्र, अचर दाब की रेखाओं को (जिन्हें समदाब रेखा (isobars) कहते हैं) निरूपित करते हैं। दाब प्रवणता (pressure gradient) के कारण प्रत्येक अवयव पर एक बल लगता है। यदि अन्य बल न हों तो हवा अंदर की ओर बहेगी और क्षेत्र पर दाब एकसमान हो जाएगा।



चित्र 10.13 : वायु-प्रवाह के प्रतिरूपः (क) बिंदुदार रेखाएं समदाब रेखाओं को दर्शाती हैं; (ख) हवा के कणों का दक्षिणावर्त विक्षेपण।

लेकिन कोरिओलिस बल के होने से वायु-प्रवाह काफ़ी बदल जाता है। आइए हम इस घटना को उत्तरी गोलार्ध में लें। निम्न दाब के क्षेत्र में अंदर की ओर बहने वाली हवा दायीं ओर विक्षेपित हो जाती है जैसाकि चित्र 10.13 ख में दिखाया गया है। नतीजा यह होता है कि निम्न-दाब क्षेत्रों के आस-पास हवा वामावर्त दिशा में चक्कर काटने लगती है। यही कारण है कि अधिकांश चक्रवात (cyclone) उत्तरी गोलार्ध में वामावर्त और दक्षिणी गोलार्ध में दक्षिणावर्त होते हैं। इस प्रभाव को आप इन्सैट उपग्रह द्वारा चक्रवात आने पर ली गई बादलों की तस्वीर में साफ़ तौर पर देख सकते हैं।

अभी तक हमने पृथ्वी के घूर्णन से उत्पन्न कुछ प्राकृतिक घटनाओं पर चर्चा की है। फ़ूको लोलक (Foucault's pendulum) की सहायता से हम पृथ्वी के घूर्णन को प्रयोगशाला में भी दिखा सकते हैं।

10.4.3 फ़ूको लोलक

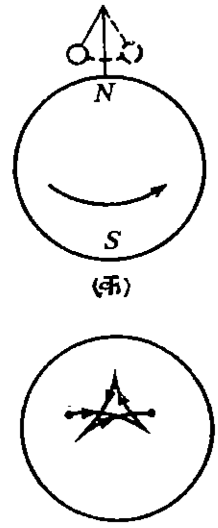
1851 में, जे.बी.एल.फ़ूको ने पहले-पहल पृथ्वी के घूर्णन को एक प्रयोगशाला में प्रदर्शित किया। उन्होंने 70m लंबे तार से 28 kg भार का धातु का बना एक भारी गोला लटका दिया। लोलक का

निलंबन बिन्दु इस तरह रखा गया कि वह किसी भी दिशा में मुक्त रूप से घूम सके। ऊपर के एक स्थान से लोलक की गति का प्रेक्षण किया गया। लोलक के लगातार प्रदोलनों (swings) से यह पता चला कि उसकी गति का समतल (plane of motion) घूम गया है। एक घंटे में प्रदोल का समतल 11° से घूम गया। लगभग 32 घंटे में प्रदोलन का पूरा परिपथ पूरा हुआ।

अब सवाल उठता है कि लोलक का समतल क्यों घूर्णन करने लगता है?

इसे समझने के लिए हम यह मानकर चलें कि यह प्रयोग उत्तरी ध्रुव पर हो रहा है (चित्र 10.14 क)। जड़त्वीय तंत्र में लोलक पर लगने वाले बल केवल गुरुत्व बल और तार का तनाव हैं। ये दोनों ही बल दोलन समतल (plane of oscillation) में कार्य करते हैं। अतः इनकी वजह से घूर्णन नहीं हो सकता। इसलिए एक जड़त्वीय तंत्र के सापेक्ष लोलक का दोलन समतल नियत रहेगा। पर, लोलक के नीचे की पृथ्वी हर 24 घंटे पर पश्चिम से पूर्व की ओर एक पूरा चक्कर घूमती है। उत्तरी ध्रुव से देखने पर पृथ्वी का घूर्णन वामावर्त दिखाई पड़ता है। अतः उत्तरी ध्रुव पर खड़े प्रेक्षक के लिए दोलन समतल दक्षिणावर्त (पूर्व से पश्चिम की ओर) घूमता हुआ नज़र आएगा (चित्र 10.14 ख)। यूं तो अलग-अलग अक्षांशों के लिए भी इसी प्रकार की व्याख्या दी जा सकती है पर यहां हम विस्तार से यह चर्चा नहीं करने जा रहे हैं।

इस इकाई में आपने जो कुछ भी पढ़ा है उसका संक्षिप्त विवरण हम यहां दे रहे हैं।



(क)

(ख)

चित्र 10.14 : फूको लोलक। (क) उत्तरी ध्रुव पर लोलक। तीर, पृथ्वी के घूर्णन की दिशा दिखाता है; (ख) दोलन समतल का घूर्णन।

10.5 सारांश

- एक दूसरे के सापेक्ष त्वरित हो रहे निर्देश तंत्रों को अजड़त्वीय तंत्र कहा जाता है।
- जड़त्वीय तंत्र S के सापेक्ष त्वरण $\mathbf{a}$ वाले अजड़त्वीय तंत्र S' में किसी पिंड पर लग रहा नेट बल दो बलों का योग होता है: S तंत्र में पिंड पर लग रहा बल $\mathbf{F}$, और $-m\mathbf{a}$ के बराबर एक जड़त्वीय बल। जड़त्वीय बल केवल अजड़त्वीय तंत्रों में उत्पन्न होते हैं।
- घूर्णी निर्देश तंत्र में पिंड का गति-समीकरण होता है

$$\mathbf{F}_{rot} = \mathbf{F} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}') - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

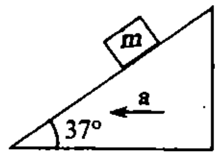
  जहां $\mathbf{F}$ जड़त्वीय तंत्र में पिंड पर लग रहे सभी बलों का जोड़ है। इस व्यंजक के दूसरे और तीसरे पद क्रमशः कोरिओलिस बल और अपकेन्द्री बल हैं।
- पृथ्वी से जुड़ा कोई भी निर्देश तंत्र अजड़त्वीय निर्देश तंत्र होता है। पृथ्वी के घूर्णन के कारण अक्षांश के साथ g में होने वाला परिवर्तन, गतिमान पिंडों का विक्षेपण आदि जैसी अनेक प्राकृतिक परिघटनाएं घटती हैं। फूको लोलक की सहायता से पृथ्वी के घूर्णन को प्रदर्शित किया जा सकता है।

10.6 अंत में कुछ प्रश्न

1. एक नत समतल (चित्र 10.15) क्षैतिजतः बायीं ओर त्वरित हो रहा है। त्वरण के परिमाण को तब तक धीरे-धीरे बढ़ाया जाता है जब तक कि द्रव्यमान m वाला ब्लॉक, जो शुरू में समतल के सापेक्ष विरामावस्था में था, समतल पर ठीक फिसलना शुरू नहीं कर देता। समतल और ब्लॉक के बीच स्थैतिक घर्षण गुणांक 0.8 है। (दिया हुआ है, $\sin 37° = 3/5$, $g = 10\ \text{ms}^{-2}$)।

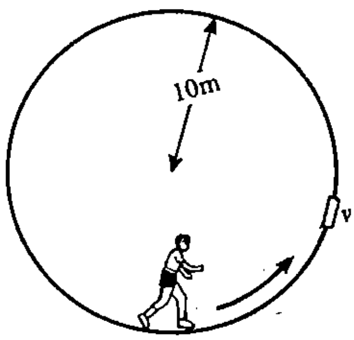
   क) i) फ़र्श से जुड़े जड़त्वीय तंत्र में और (ii) ब्लॉक के साथ गतिमान अजड़त्वीय तंत्र में, ब्लॉक के फिसलने के ठीक पहले उस पर लग रहे बलों को दिखाने के लिए आरेख बनाइए।

   ख) भाग (क) के दोनों आरेखों (i) और (ii) की सहायता से वह त्वरण ज्ञात कीजिए जिससे ब्लॉक फिसलना शुरू करता है।



चित्र 10.15

2) क) 10 m की त्रिज्या वाला एक अंतरिक्ष स्टेशन इस तरह प्रचक्रण (spin) करता है कि उसके अंदर बैठे व्यक्ति को (चित्र 10.16) ''कृत्रिम गुरुत्व'' का अनुभव होता है। प्रचक्रण दर इस तरह लिया गया है कि $g = 10\ \text{ms}^{-2}$ प्राप्त हो जाए। अंतरिक्ष यान की एक खिड़की w से दिखने वाले ''दिन'' की अवधि बताइए।



चित्र 10.16

ख) 4×10^5 kg द्रव्यमान वाली एक ट्रेन 60° के अक्षांश पर दक्षिण की ओर 30 ms^{-1} की चाल से जा रही है। ट्रैक पर लगने वाला क्षैतिज बल क्या है? इस बल की दिशा क्या है?

3) मान लीजिए कि जब आप पृथ्वी के सापेक्ष विरामावस्था में हैं तो आपका भार **W** है। यदि आप पृथ्वी के सापेक्ष गतिमान हों, तो क्या आपका भार **W** से भिन्न होगा?

10.7 उत्तर

बोध प्रश्न

1) i) चूंकि कार एक वक्र पथ पर चल रही है, इसलिए इसके वेग सदिश की दिशा लगातार बदल रही है। अतः सड़क पर खड़े एक आदमी के सापेक्ष इसका शून्येतर (non-zero) त्वरण होगा। इसलिए आदमी के सापेक्ष इससे जुड़ा हुआ तंत्र अजड़त्वीय है।

ii) चूंकि वर्षा की बूंद ने चरम वेग धारण कर लिया है इसलिए भूमि के सापेक्ष यह अचर वेग से गिर रही है। इसलिए इससे जुड़ा तंत्र पृथ्वी के सापेक्ष जड़त्वीय तंत्र है।

iii) एकसमान चुंबकीय क्षेत्र में गतिमान इलेक्ट्रॉन पर एक बल लग रहा है। इसलिए यह चुंबक के ध्रुव के सापेक्ष त्वरित होगा। अतः चुंबकीय ध्रुव के सापेक्ष इलेक्ट्रॉन से जुड़ा तंत्र अजड़त्वीय है।

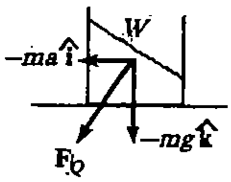
2) समीकरण 10.1 को समय के सापेक्ष दो बार अवकलित करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$\ddot{\mathbf{r}}_q = \ddot{\mathbf{r}}_p - \ddot{\mathbf{R}}$$

या $$\mathbf{a}_q = \mathbf{a}_p - \mathbf{a}$$

$\therefore$ $$\mathbf{F}_q = m\,\mathbf{a}_q = m\,\mathbf{a}_p - m\,\mathbf{a}$$

या $$\mathbf{F}_q = \mathbf{F}_p - m\,\mathbf{a}.$$



चित्र 10.17

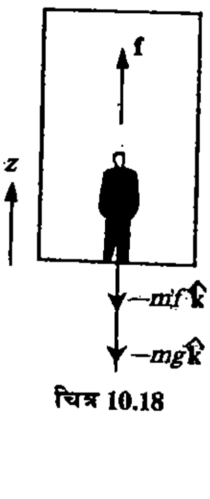
3) क) ट्रेन को चलाने के लिए उसे त्वरित करना होता है। मान लीजिए कि यह त्वरण **a** है और इसकी दिशा x-अक्ष के अनुदिश है। अब समीकरण 10.2 क और 10.2 ख की सहायता से ट्रेन के निर्देश-तंत्र में पानी पर लग रहे कुल बल को हम इस प्रकार (देखिए चित्र 10.17) लिख सकते हैं

$$\mathbf{F}_Q = m\mathbf{g} + (-\,m\,\mathbf{a})$$

जहां m पानी और गिलास का कुल द्रव्यमान है और

$$\mathbf{g} = -g\,\hat{\mathbf{k}} \text{ और } \mathbf{a} = a\,\hat{\mathbf{i}}$$

पानी की सतह N, बल $\mathbf{F}_Q$ के अभिलंबवत् होती है जैसा कि चित्र 10.17 में दिखाया गया है।



चित्र 10.18

ख) मान लीजिए कि लिफ़्ट z-दिशा में त्वरित हो रही है (चित्र 10.18)। आदमी पर लग रहा जड़त्वीय बल होगा

$$\mathbf{F}' = -\,m\,\mathbf{f}$$

जहां m आदमी का द्रव्यमान है। अतः आदमी पर लग रहा कुल बल होगा

$$\mathbf{F} = m\mathbf{g} + \mathbf{F}' = m\mathbf{g} - m\mathbf{f}$$

पर $$\mathbf{g} = -\,g\,\hat{\mathbf{k}},\ \mathbf{f} = f\,\hat{\mathbf{k}}$$

अतः $$\mathbf{F} = -\,m\,(g + f)\,\hat{\mathbf{k}}.$$

इसलिए आदमी पर लग रहे बल का परिमाण mg से अधिक होगा। अतः वह अपने को सामान्य से अधिक भारी महसूस करेगा।

4) क) सड़क के किनारे खड़ा प्रेक्षक स्थिति का विश्लेषण इस तरह करेगा : वक्र के अनुदिश कार को चलाने के लिए अभिकेन्द्री बल $\left(= \dfrac{mv^2}{r_V}\right)$ की आवश्यकता होगी, जहां m कार का द्रव्यमान है, **v** उसका वेग है और r मोड़ की वक्रता त्रिज्या है। खंड 1 के भाग 4.3.1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि सामान्यतः यह बल सड़क की ढाल और टायर तथा

सड़क के बीच के घर्षण से प्राप्त होता है। मान लीजिए कि ढाल के कारण बल F_1 और घर्षण के कारण बल F_2 है। तब कार का गति-समीकरण होगा:

$$F_1 + F_2 = \frac{mv^2}{r} \quad \text{या} \quad \frac{F_1 + F_2}{m} = \frac{v^2}{r}$$

अब, बायीं ओर का व्यंजक एक नियत राशि है जो m पर निर्भर करती है। इसलिए यदि v बड़ा हो तो r भी बड़ा होना चाहिए जिससे कि ऊपर दिया गया समीकरण लागू होता रहे। दूसरे शब्दों में, जब कार तेजी से चल रही हो तो बड़े r के लिए उसे बाहर की ओर जाना होता है।

ख) i) इस प्रश्न के लिए

$\omega^2 r = (2\pi \times 10^3\ s^{-1})^2 \times (0.04m) = 1.6 \times 10^6 m\ s^{-2}$

चूंकि यह g के सामान्य मान से काफ़ी अधिक है, इसलिए g का प्रभावी मान $1.6 \times 10^6\ ms^{-2}$ के बराबर माना जा सकता है।

ii) नेट अपकेन्द्री बल $= m\omega^2 r$, जहां $m = 6 \times 10^{-19}$ kg इसलिए इसका मान होगा

$(6 \times 10^{-19}\ kg) \times (1.6 \times 10^6 ms^{-2}) = 9.6 \times 10^{-13}N$

5) क) अपेक्षित कोणीय चाल $g^* = 0$ के संगत होगी।

समीकरण 10.15 से हम यह जानते हैं कि $g^* = g - \omega^2 R \cos^2\lambda$. अतः अपेक्षित प्रतिबंध होगा:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{R\cos^2\lambda}}$$

अतः ω का निम्नतम मान $\cos^2\lambda$ के अधिकतम मान, अर्थात् $\lambda = 0$ के संगत होगा। यह बात भूमध्य रेखा पर होती है। और पृथ्वी की अपेक्षित कोणीय चाल होगी

$$\omega_{min} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

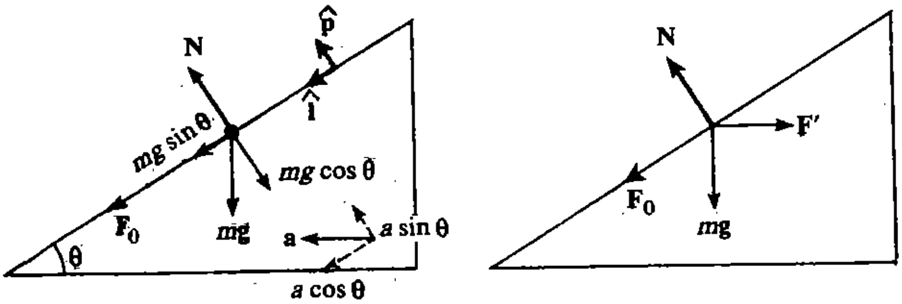
जहां $R =$ पृथ्वी की भूमध्यरेखा की त्रिज्या $= 6.37 \times 10^6$m

$$\therefore\ \omega_{min} = \sqrt{\frac{10ms^{-2}}{6.37 \times 10^6 m}} = 1.3 \times 10^{-3}\ rad\ s^{-1}$$

ख) भूमध्य रेखा पर, जिसकी व्याख्या भाग (क) के उत्तर में दी गई है।

अंत में कुछ प्रश्न

1) क) भाग (i) और (ii) के लिए क्रमशः चित्र 10.19 क और 10.19 ख देखिए।



चित्र 10.19 : F_0 घर्षण बल है, N अभिलंब प्रतिक्रिया है और mg ब्लॉक का भार है। (क) F_0, N और mg का परिणामी ma के बराबर है। $\hat{p}$ और $\hat{i}$ के अनुदिश a के घटक भी दिखाए गए है; (ख) F_0, N और mg के अलावा, जड़त्वीय बल F' ($= -ma$) भी उपस्थित है। सभी बल F_0, N, mg और F' साम्यावस्था में हैं।

ख) भाग (क) के लिए बल आरेख (i) अर्थात् चित्र 10.19 क की सहायता से गति-समीकरण होगा:

$$mg + \mathbf{N} + \mathbf{F}_0 = m\mathbf{a} \qquad (10.16$$

मान लीजिए कि $\mathbf{F}_0$ और $\mathbf{N}$ के अनुदिश एकक सदिश क्रमशः $\hat{\mathbf{l}}$ और $\hat{\mathbf{p}}$ हैं। अतः

$$mg\cos\theta\,(-\hat{\mathbf{p}}) + mg\sin\theta\,(\hat{\mathbf{l}}) + N(\hat{\mathbf{p}}) + F_0(\hat{\mathbf{l}}) = ma\cos\theta\,(\hat{\mathbf{l}}) + ma\sin\theta\,(\hat{\mathbf{p}})$$

इस तरह

$$(F_0 + mg\sin\theta - ma\cos\theta)\,\hat{\mathbf{l}} + (N - mg\cos\theta - ma\sin\theta)\,\hat{\mathbf{p}} = 0$$

$$\therefore\ F_0 + mg\sin\theta - ma\cos\theta = 0$$

$$\text{और } N - mg\cos\theta - ma\sin\theta = 0 \qquad (10.17$$

अब अगर a उस त्वरण का परिमाण हो जिस पर ब्लॉक फिसलना शुरू कर देता है, तो $F_0 = \mu N$ जहां $\mu = 0.8$.

इसलिए समीकरण 10.17 से

$$\mu N = m\,(a\cos\theta - g\sin\theta)$$

$$\text{या } \mu m\,(g\cos\theta + a\sin\theta) = m\,(a\cos\theta - g\sin\theta)$$

$$\therefore\ g\,(\mu\cos\theta + \sin\theta) = a\,(\cos\theta - \mu\sin\theta)$$

$$\text{या } a = g\left(\frac{\mu\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \mu\sin\theta}\right)$$

चूंकि $\sin\theta = 0.6,\quad \cos\theta = 0.8$

$$\therefore\ a = (10\ \text{ms}^{-2})\left(\frac{0.8 \times 0.8 + 0.6}{0.8 - 0.8 \times 0.6}\right) = \mathbf{38.8\ ms^{-2}}.$$

भाग (क) के बल आरेख (ii) अर्थात् चित्र 10.19 ख का प्रयोग करने पर प्राप्त होता है

$$mg + \mathbf{N} + \mathbf{F}_0 + \mathbf{F}' = 0$$

चूंकि $\mathbf{F}' = -m\,\mathbf{a}$, इसलिए

$$m\,\mathbf{g} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_0 = m\,\mathbf{a}.$$

यह समीकरण वही है जो कि समीकरण 10.16 है, इसलिए पहले की तरह विश्लेषण यहां भी किया जाएगा। और हमें $a = 38.8\ \text{ms}^{-2}$ प्राप्त होगा। इस बात की ओर आपको ध्यान देना चाहिए कि जड़त्वीय तंत्र में हमें गति-समीकरण प्राप्त होता है, पर अजड़त्वीय तंत्र में साम्यावस्था का प्रतिबंध प्राप्त होता है।

2) क) मान लीजिए कि अपेक्षित प्रचक्रण दर ω है। तब दिन की अवधि होगी

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

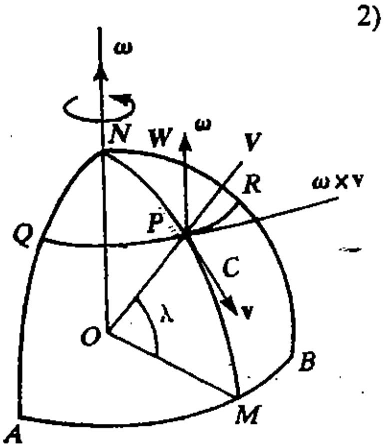
चूंकि अंदर बैठे व्यक्ति को कृत्रिम गुरुत्व का अनुभव होता है इसलिए

$$\omega^2 r = g, \text{ जहां } r = 10\text{m}$$

$$\therefore\ \frac{4\pi^2}{T^2}\,r = g$$

$$\text{या } T = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{10\ \text{m}}{10\ \text{ms}^{-2}}} = 6.3\ \text{s}.$$



चित्र 10.20 : ध्यान दें कि $\angle NOP = 90° - \lambda$ यह संगत कोण $\angle WPV$ के बराबर है। $\angle VPC = 90°$. अतः $\angle WPC = 90° - \lambda + 90°$ $= 180° - \lambda$.

ख) चित्र 10.20 देखिए। NPM और QPR ट्रेन की स्थिति P पर क्रमशः देशांतर (longitude) और अक्षांश हैं। AB भूमध्य रेखा है। क्षैतिज बल कोरिओलिस बल के कारण होता है जो है

$$\mathbf{F}_{cor} = -2\,m\,(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v})$$

चूंकि $\boldsymbol{\omega}$ और $\mathbf{v}$ के बीच का कोण $(180° - \lambda)$ है, (देखिए चित्र का शीर्षक)

इसलिए क्षैतिज बल का परिमाण $2\,mv\omega\sin\lambda$ है।,

जहां $m = 4 \times 10^5\ \text{kg},\ v = 30\ \text{ms}^{-1},\ \omega = \dfrac{2\pi}{24 \times 60 \times 60}\ \text{rad s}^{-1}$ और $\lambda = 60°$

अतः ट्रैक पर क्षैतिज बल का परिमाण है

$$2 \times (4 \times 10^5 \text{ kg}) \times (30 \text{ m s}^{-1}) \times \left(\frac{2\pi}{24 \times 60 \times 60} \text{s}^{-1} \right) \times \sin 60° = 1512 \text{ N}$$

इसकी दिशा $(\omega \times v)$ के विपरीत होती है। $(\omega \times v)$, Q से P की ओर QPR पर स्पर्शरिखावत् होता है। इसलिए F_{cor}, P से Q की ओर, अर्थात् पश्चिम की ओर, QPR पर स्पर्शी होगा।

3) आपका भार होगा

$$F = mg - F_{cent} - F_{cor}$$

जहां m आपका द्रव्यमान है। जब आप पृथ्वी के सापेक्ष विरामावस्था में होते हैं तो $F_{cor} = 0$. पर अगर आप पृथ्वी के सापेक्ष गतिमान होते हैं तो $F_{cor} \neq 0$. इसलिए जब आप पृथ्वी के सापेक्ष गतिमान होंगे तो आपका भार W से भिन्न होगा।

10.8 शब्दावली

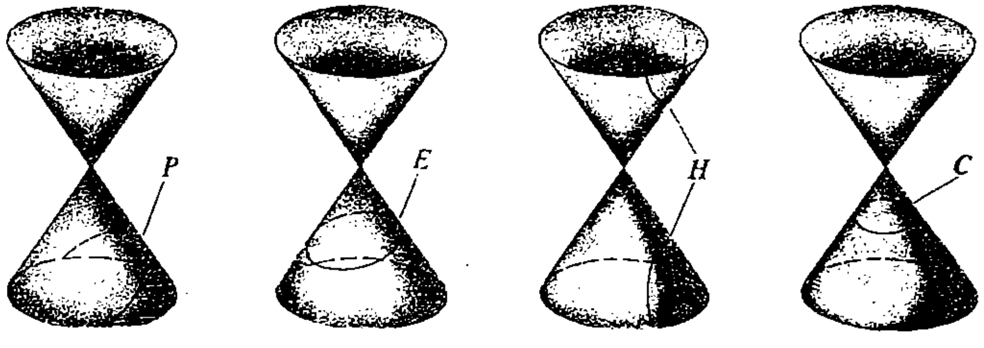
अजड़त्वीय निर्देश तंत्र	:	non-inertial frame of reference
अपकेन्द्री बल	:	centrifugal force
अपकेन्द्रण यंत्र	:	centrifuge
अपरदन	:	erosion
अभिकेन्द्री बल	:	centripetal force
अक्षांश	:	latitude
कोरिओलिस बल	:	Coriolis force
घूर्णी निर्देश तंत्र	:	rotating frame of reference
परा अपकेन्द्रण यंत्र	:	ultra-centrifuge
फ़ूको लोलक	:	Foucault's pendulum
भारहीनता	:	weightlessness
भूमध्य रेखा	:	equator
देशांतर	:	longitude
निर्देश तंत्र	:	frame of reference
निर्देशांक तंत्र	:	coordinate system
स्पर्शरिखावत्	:	tangential
स्थानांतरी अजड़त्वीय यंत्र	:	translating non-inertial frame

कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. *यांत्रिकी के सिद्धांत*, सिज और ग्रीफ़िथ, बिहार हिंदी ग्रंथ अकादमी, 1990
2. *सैद्धांतिक यांत्रिकी*, डॉ० ज्ञानेंद्रनाथ दास, मध्य प्रदेश हिंदी ग्रंथ अकादमी, 1990
3. *यांत्रिकी तथा द्रव्य के सामान्य गुणधर्म*, डॉ० वीरेन्द्र कुमार खरे, मध्य प्रदेश हिंदी ग्रंथ अकादमी, 1990
4. *भौतिकी की पाठ्यपुस्तक*, संपादक : डॉ० आर. के. सिंह, मध्य प्रदेश हिंदी ग्रंथ अकादमी, 1990
5. *सैद्धांतिक भौतिकी* (पृ० 65), अनुवादक : डॉ० वाचस्पति, डॉ० हरि प्रकाश, डॉ० नरेश चन्द्र, उत्तर प्रदेश हिंदी ग्रंथ अकादमी, 1990

परिशिष्ट-क शंकु-परिच्छेद

एक शंकु को उसके शीर्ष से न होकर जाने वाले समतल से काटने पर प्राप्त वक्र को **शंकु-परिच्छेद** (conic-section) या केवल **शांकव** कहा जाता है। यदि काटने वाला समतल शंकु के एक पार्श्व (side) के समांतर हो, जैसा कि चित्र क.1 (क) में दिखाया गया है, तो शांकव **परवलय** (parabola) होता है। अगर समतल, एक नापे (nappe), यानि शंकु के एक भाग, को काटता है तो शांकव **दीर्घवृत्त** (ellipse) होता है और, अगर समतल दोनों नापे (nappes) को काटता तो शांकव **अतिपरवलय** (hyperbola) होता है जैसा कि चित्र क.1 (ख) और क.1 (ग) में दिखाया गया है। वृत्त, दीर्घवृत्त की एक विशिष्ट स्थिति है जबकि प्रतिच्छेदी समतल शंकु के आधार के समांतर होता है (चित्र क.1 घ)।



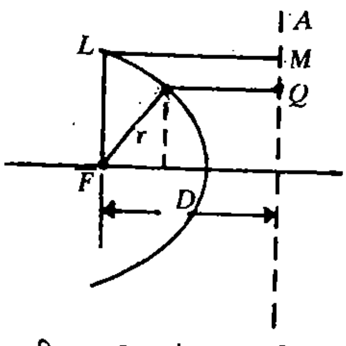
(क) (ख) (ग) (घ)

चित्र क.1 : शांकव : (क) P-परवलय; (ख) E-दीर्घवृत्त; (ग) H-अतिपरवलय; (घ) C-वृत्त

अब हम सभी शांकवों का विश्लेषण एक साथ करेंगे। इसके लिए हम "उत्केन्द्रता" (eccentricity) की परिभाषा देंगे।

क. 1 शांकव की उत्केन्द्रता और ध्रुवी समीकरण

चित्र क.2 देखिए। परिभाषा से शांकव वह वक्र है जो एक समतल में इस तरह गतिमान बिंदु द्वारा अनुरेखित होता है, जिससे कि एक नियत बिंदु F (**नाभि** यानि कि focus) से उसकी दूरी और एक नियत रेखा AB (**नियता** यानि कि directrix) से उसकी दूरी का अनुपात सदा अचर रहता हो। इस अचर अनुपात को **उत्केन्द्रता** (eccentricity) कहा जाता है। इसे e से प्रकट किया जाता है।



चित्र क.2 : शांकव का ध्रुवी समीकरण

यदि $0 < e < 1$ तो शांकव **दीर्घवृत्त** होता है। यदि $e = 1$ तो **परवलय** होता है और यदि $e > 1$ तो यह **अतिपरवलय** होता है।

चित्र क.2 में मान लीजिए कि P, शांकव पर एक बिंदु है। PQ, बिंदु P से AB पर लंब है। तब परिभाषा के अनुसार

$$e = \frac{FP}{QP} \qquad (\text{क}.i)$$

समीकरण क.1 से हम शांकव का ध्रुवी समीकरण (polar equation) प्राप्त करेंगे जबकि ध्रुव (pole) (अर्थात् समतल ध्रुवी निर्देशांक का मूल बिंदु) वक्र के अंदर हो। मान लीजिए कि ध्रुव F पर है। ध्रुवी अक्ष (polar axis) Fx इस तरह लिया जाता है कि यह नियता (directrix) पर लंब हो। L शांकव पर एक ऐसा बिंदु है कि FL, Fx पर लंब होता है। FL को शांकव का **अर्धनाभि-लंब** (semi-latus rectum) कहा जाता है। मान लीजिए कि $FL = p$. यहां LM बिंदु L से AB पर डाला गया लंब है। मान लीजिए कि $LM = D$.

अब क्योंकि

$$FP = r \text{ और } QP = D - r\cos\theta$$

इसलिए समीकरण क.1 से

$$r = e(D - r\cos\theta)$$

$$\text{या } r = \frac{eD}{1 + e\cos\theta} \qquad (\text{क}.2)$$

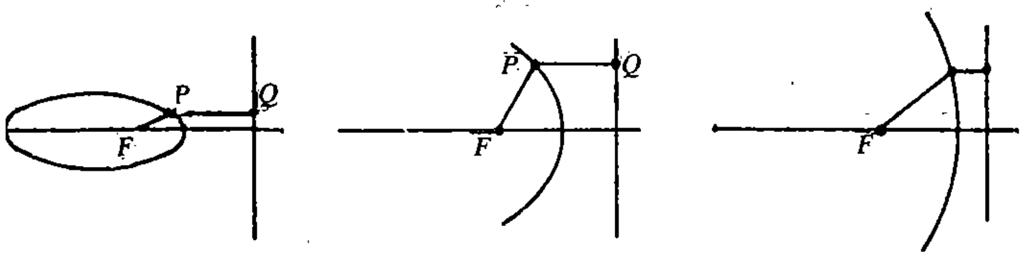
पर e की परिभाषा के अनुसार

$$\frac{FL}{LM} = e \quad \text{अर्थात्} \ \frac{p}{D} = e \quad \text{या} \quad p = eD$$

इसलिए समीकरण क.2 से

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \qquad \text{(क.3)}$$

समीकरण क.3 उस शांकव का ध्रुवी समीकरण है जिसका ध्रुव वक्र के अंदर है।



(क) (ख) (ग)

चित्र क.3 : भिन्न प्रकार के शांकव।

चित्र क.3 में कई प्रकार के शांकव दिखाए गए हैं। और क्योंकि $\cos(-\theta) = \cos\theta$ इसलिए ये तीनों शांकव ध्रुवी अक्ष के प्रति सममित हैं।

चित्र क.3क में दीर्घवृत्त $(0 < e < 1)$ दिखाया गया है। इसमें FP सदा ही PQ से कम होता है। यह वक्र $\theta = 0$ और $\theta = \pi$ के संगत दो बिंदुओं पर ध्रुवी अक्ष को काटता है। सममिति के कारण यह वक्र बंद है।

चित्र क.3 ख में परवलय $(e = 1)$ दिखाया गया है। इसमें FP सदा ही PQ के बराबर होता है। जब $\theta = 0$ तब $r = p$. पर क्योंकि $\theta \to \pi$ होने पर $1 + \cos\theta \to 0$ और $r \to \infty$ इसलिए वक्र, अक्ष को केवल एक बार काटता है और θ के π की ओर प्रवृत्त होने पर यह स्वेच्छतः बड़ी दूरियो तक फैल जाता है।

चित्र क.3 ग में अतिपरवलय $(e > 1)$ दिखाया गया है। इसमें FP सदा ही PQ से अधिक होता है।

जब $\theta = 0$ तब $r = \frac{p}{1+e}$. परिसर $\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ में θ का एक ऐसा मान α होता है कि

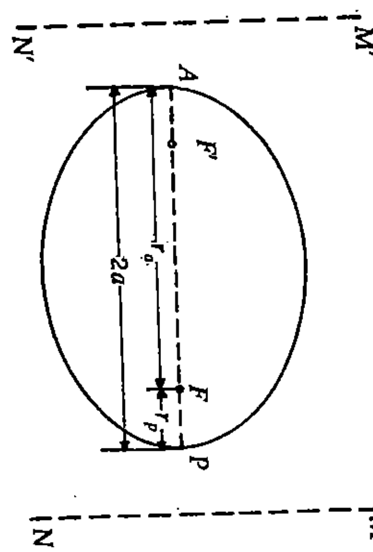
$\cos\alpha = -\frac{1}{e}$. इसकी सहायता से हम समीकरण क.3 को इस रूप में लिख सकते हैं:

$$r = \frac{p}{e(\cos\theta - \cos\alpha)}$$

क्योंकि $\theta \to \alpha$ होने पर $r \to \infty$ इसलिए वक्र खुले सिरे वाला होता है पर यह परवलय की तरह नहीं बल्कि दूसरे ढंग से बाहर की ओर फैलता है। r में वृद्धि होने पर θ में भी वृद्धि होती है। पर इसका मान कभी भी α के मान के बराबर नहीं होता।

वृत्त दीर्घवृत्त की एक विशिष्ट स्थिति है। इसे समीकरण क.2 में $e \to 0$ और $D \to \infty$ *लेकर प्राप्त किया जा सकता है जिससे* eD अर्थात् p एक निश्चित राशि, मान लीजिए कि a, की ओर प्रवृत्त होता हो। तब समीकरण क.2 का सीमांत रूप $r = a$ हो जाता है। परवलय को दीर्घवृत्त और अतिपरवलय के बीच का एक वक्र माना जा सकता है। दूसरे शब्दों में हम यह कह सकते हैं कि यह बंद वक्र से खुले वक्र की ओर जाने की प्रक्रिया का सूचक है।

इन तीनों शांकवों में से हमने दीर्घवृत्त का सबसे अधिक प्रयोग किया है। अतः हम दीर्घवृत्त के गुणधर्मों का अध्ययन कुछ विस्तार से करेंगे।



चित्र क.4

क.2 दीर्घवृत्त के गुणधर्म

चित्र क.4 देखिए। दीर्घवृत्त की दो नाभियां F और F' और दो नियताएं MN और $M'N'$ हैं। दोनों ही बिंदु F और F' वक्र के अन्दर होते हैं।

P और A दीर्घवृत्त पर दो नियत बिंदु हैं जो F से क्रमशः निकटतम और अधिकतम दूरी पर हैं। मान लीजिए कि $FP = r_p$ और $FA = r_a$. सममिति अक्ष (axis of symmetry) को (जिसे बिंदुदार रेखा के रूप में दिखाया गया है) दीर्घवृत्त का **दीर्घ अक्ष** (major axis) कहते हैं। जोड़ $(r_p + r_a)$ दीर्घवृत्त द्वारा अंतः-खंडित दीर्घ अक्ष के रेखा-खंड की लंबाई है। अतः

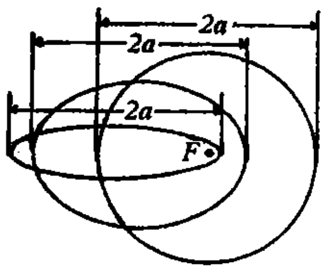
$$r_p + r_a = 2a, \tag{क.4}$$

जहां a को दीर्घवृत्त का **अर्ध-दीर्घ अक्ष** (semi-major axis) कहा जाता है। अब हम r_p और r_a को a और e के पदों में व्यक्त करेंगे।

यहां r_p और r_a, r के क्रमशः निम्नतम और अधिकतम मान हैं। समीकरण क.3 से हम यह देख सकते हैं कि जब $\cos\theta$ अधिकतम $(= 1)$, अर्थात् $\theta = 0$ होता है तो r निम्नतम होता है। और जब $\cos\theta$ निम्नतम $(= -1)$, अर्थात् $\theta = \pi$ होता है, तो r अधिकतम होता है।

$$\therefore\ r_p = \frac{p}{1+e}, \quad r_a = \frac{p}{1-e}.$$

समीकरण क.4 से



चित्र क.5 : विभिन्न आकारों के दीर्घवृत्त

$$p\left(\frac{1}{1+e} + \frac{1}{1-e}\right) = 2a$$

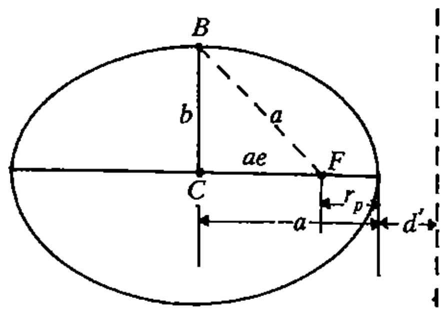
$$\text{या}\quad p = a(1 - e^2). \tag{क.5}$$

$$\therefore\quad r_p = a(1-e), \quad r_a = a(1+e). \tag{क.6}$$

समीकरण क.3 और क.5 की सहायता से हम दीर्घवृत्त का ध्रुवी समीकरण लिख सकते हैं

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos\theta} \tag{क.7}$$

समीकरण क.7 से यह पता चलता है कि दीर्घवृत्त का आकार e के मान पर निर्भर करता है। चित्र क.5 में समान नाभि F और a के समान मान वाले, पर अलग-अलग उत्केन्द्रताओं वाले अनेक दीर्घवृत्त दिखाए गए हैं। समीकरण क.7 से हम यह देखते हैं कि $e \to 0$ होने पर $r \to a$ जिससे पता चलता है कि उत्केन्द्रता जितनी कम होगी दीर्घवृत्त का आकार उतना ही अधिक गोल होता जाएगा। चित्र क.6 देखिए। बिंदुदार रेखा दीर्घवृत्त की नियता को निरूपित करती है।



चित्र क.6 : a, b और e में संबंध

मान लीजिए कि C दीर्घवृत्त का मध्य बिंदु है। इसे दीर्घवृत्त का केन्द्र कहा जाता है। दीर्घवृत्त की उस जीवा को, जो C से होकर जाती है और दीर्घ अक्ष पर लंब है, **लघु-अक्ष** (minor axis) कहा जाता है। मान लीजिए कि C से ठीक ऊपर B, लघु-अक्ष का एक बिंदु है। तब BC दीर्घवृत्त का **अर्ध-लघु अक्ष** (semi-minor axis) होता है। मान लीजिए कि $BC = b$. अब हम b को a और e के पदों में व्यक्त करेंगे।

चूंकि $CP = a$ और $FP = a(1 - e)$

$$\therefore\ CF = CP - FP = ae.$$

अब क्योंकि बिंदु B नियता से $(a + d')$ की दूरी पर है इसलिए उत्केन्द्रता की परिभाषा के अनुसार

$$\frac{FP}{d'} = e \text{ या } d' = \frac{FP}{e} = \frac{a}{e}(1-e)$$

$$\therefore\ a + d' = a + \frac{a}{e} - a = \frac{a}{e}.$$

अब क्योंकि B दीर्घवृत्त का एक बिंदु है, इसलिए

$$\frac{FB}{a+d'} = e$$

या $\frac{FB}{a/e} = e, \quad \therefore FB = a.$

अत: समकोण त्रिभुज BCF में,

$BC = b, CF = ae$ और $FB = a.$

$\therefore a^2 = (ae)^2 + b^2$

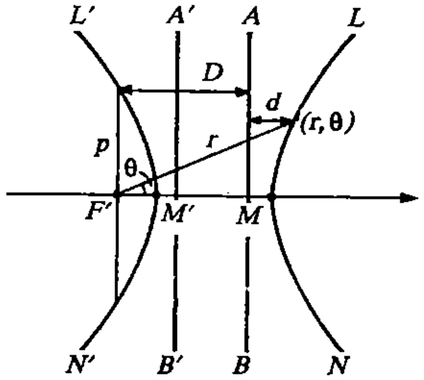
या $\quad b^2 = a^2(1 - e^2).$ (क.8)

हम पाते हैं कि दीर्घवृत्त की दो नाभियां हैं और दोनों ही शांकव के अन्दर स्थित हैं। दीर्घवृत्त की तरह अति-परवलय की भी दो नाभियां और दो नियताएं होती हैं। हम यह देखेंगे कि क्योंकि अतिपरवलय खुले सिरे वाला होता है इसलिए इसके दो खुले खंड होते हैं। प्रत्येक खुले खंड के लिए एक नाभि अंदर और एक नाभि बाहर होती है।

$e > 1$ होने पर समीकरण क.3 अतिपरवलय के उस खंड के समीकरण को निरूपित करता है जिसकी नाभि (अर्थात् ध्रुव) अंदर है। दूसरे खंड के ध्रुवी समीकरण का भी कुछ महत्व है। अत: शांकव के ध्रुवी समीकरण को, जबकि ध्रुव बाहर हो, समझने की दृष्टि से आइए अब हम अतिपरवलय पर चर्चा करें।

क.3 शांकव का ध्रुवी समीकरण जबकि ध्रुव बाहर हो

जैसा कि हमने अभी-अभी देखा है केवल अतिपरवलय ही वह संभव शांकव है जिसकी नाभि बाहर होती है।



चित्र क.7 : शांकव का ध्रुवी समीकरण, जबकि ध्रुव बाहर हो।

चित्र क.7 में एक अतिपरवलय दिखाया गया है। F और F' दो नाभियां हैं। AB और $A'B'$ नियताएं हैं। $e > 1$ होने पर समीकरण क.3 खंड $L'M'N'$ के समीकरण को निरूपित करता है जबकि मूल बिंदु F' पर है। अब हम मूल बिंदु F' के सापेक्ष LMN का समीकरण ज्ञात करेंगे।

जैसा कि समीकरण क.3 को प्राप्त करते समय हमने देखा है कि

$e = \frac{r}{d} = \frac{p}{D}$ या $D = \frac{p}{e}$

और $D = r\cos\theta - d$

$\therefore \frac{p}{e} = r\cos\theta - \frac{r}{e}$

या $p = r(e\cos\theta - 1)$

या $r = \frac{p}{-1 + e\cos\theta}$ (क.9)

अत: **समीकरण क.9 उस शांकव का समीकरण है जिसका ध्रुव बाहर हो।**

समीकरण क.3 और क.9 से यह देखा जा सकता है कि शांकव का ध्रुवी समीकरण होता है

$r = \frac{p}{\epsilon + e\cos\theta}$ (क.10)

जहां अगर ध्रुव अंदर हो तो $\epsilon = +1$ और बाहर है तो $\epsilon = -1.$

परिशिष्ट-ख जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करने की विधियां

इकाई 9 के भाग 9.3 में हम संतत पदार्थ वितरण वाले पिंडों का जड़त्व आघूर्ण निकालने के बारे में चर्चा कर चुके हैं। समीकरण 9.6 से जड़त्व आघूर्ण को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

$$I = \int r^2 dm$$

जहां समाकल निश्चित समाकल है और पूरे पिंड पर विस्तारित होता है।

अब हम यह देखेंगे कि dm को पिंड के स्थिति और कोणीय चरों में व्यक्त किया जा सकता है। तब समाकल सीमाएं इन स्थिति और कोणीय चरों के संगत होंगी। इन्हें इस तरह से लिया जाता है जिससे कि समाकलन पूरे पिंड पर विस्तारित हो सके। आइए अब हम देखें कि हम इसे कैसे कर सकते हैं। हम जानते हैं कि घनत्व (ρ) प्रति इकाई आयतन का द्रव्यमान होता है, अर्थात्

$\rho = \dfrac{dm}{dV}$ जहां dV, dm द्वारा घेरा गया अत्यणु आयतन है। अतः समीकरण 9.6 से हमें प्राप्त होता है

$$I = \int r^2 \rho \, dV,$$

जो एकसमान घनत्व वाले पिंड के लिए हो जाता है

$$I = \rho \int r^2 dV \qquad \text{(ख.1)}$$

वृत्ताकार पंटल जैसे द्विविम पिंड के लिए हम राशि σ को जिसे प्रति इकाई क्षेत्रफल का द्रव्यमान (mass per unit area) कहते हैं $\sigma = \dfrac{dm}{dA}$ से परिभाषित करते हैं, जहां dA, dm द्वारा घेरा गया अत्यणु क्षेत्रफल है।

एकसमान σ वाले पिंड के लिए समीकरण 9.6 से हमें प्राप्त होता है

$$I = \sigma \int r^2 dA. \qquad \text{(ख.2)}$$

इसी प्रकार, बारीक समांग छड़ जैसे एक-विम पिंड के लिए हम राशि λ को, जिसे प्रति इकाई लंबाई का द्रव्यमान (mass per unit length) कहते हैं, $\lambda = \dfrac{dm}{dl}$ परिभाषित करते हैं, जहां dl द्रव्यमान dm की अत्यणु लम्बाई है। अतः एकसमान λ वाले पिंड के लिए समीकरण 9.6 से प्राप्त होता है

$$I = \lambda \int r^2 dl. \qquad \text{(ख.3)}$$

अब हम इन परिणामों को लागू करेंगे। इन्हें लागू करके हम सारणी 9.1 के सभी परिणामों का सत्यापन करेंगे। सबसे पहले हम सारणी 9.1 के परिणाम (क), (ख) और (छ) को सत्यापित करेंगे।

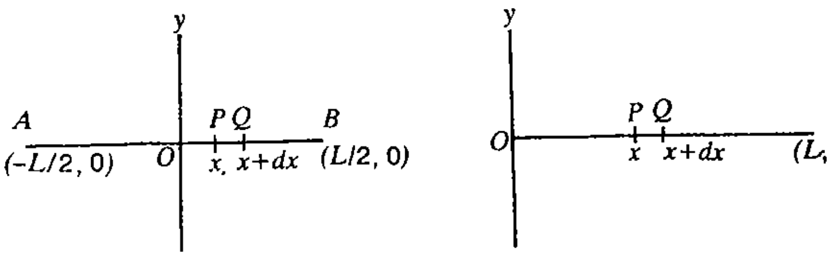
(क) और (ख) का सत्यापन

चूंकि छड़ (rod) बारीक है, इसलिए इसे हम x-अक्ष के अनुदिश स्थित सरल रेखा AB के तुल्य मान लेते हैं (चित्र ख.1 क)। तब y-अक्ष वह अक्ष है जिसके प्रति जड़त्व आघूर्ण निकालना है। इसके लिए हम बिंदुओं P और Q के बीच एक अत्यणु अवयव dx लेते हैं। छड़ ऐसे सभी अवयवों का समूह है और x का परिसर $-\dfrac{L}{2}$ से $+\dfrac{L}{2}$ तक है। समीकरण ख.3 लागू करने पर, जहां हम $\lambda = \dfrac{M}{L}$ रखते हैं, हमें मिलता है

$$I = \frac{M}{L}\int_{-L/2}^{+L/2} x^2\,dx = \frac{2M}{L}\int_0^{L/2} x^2\,dx = \frac{ML^2}{12}$$

(ख) के लिए भी हम यही विधि लागू करेंगे। अंतर केवल यह है कि यहां समाकलन सीमाएं 0 और L हैं (चित्र ख.1 ख)

$$\therefore\ I = \frac{M}{L}\int_0^{L} x^2\,dx = \frac{ML^2}{3}.$$

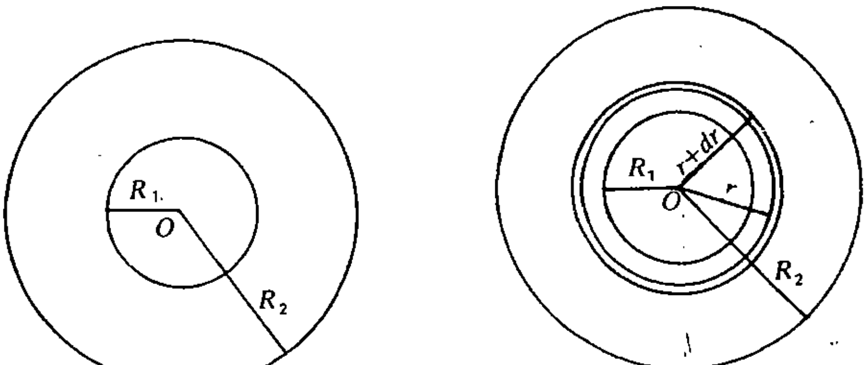


(क) (ख)

चित्र ख.1 : एक बारीक समांग छड़ का जड़त्व आघूर्ण, एक ऐसे अक्ष के प्रति जो उसके लंबवत् हो और (क) उसके केंद्र मे तथा (ख) उसके सिरे से गुज़रता हो।

(छ) का सत्यापन

इसके लिए पहले हम एक वलयाकार पटल (annular circular lamina) का जड़त्व आघूर्ण उस अक्ष के प्रति निकालेंगे जो उसके समतल पर लंब है और उसके केन्द्र से होकर जाता है। इस की अंतः त्रिज्या R_1 और बाहूय त्रिज्या R_2 है। इसे चित्र ख.2 क में दिखाया गया है।



चित्र ख.2 :एक वलयाकार पटल का उसके अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण

मान लीजिए कि इस पटल का द्रव्यमान m है। वलयाकार पटल का क्षेत्रफल $\pi\,(R_2^2 - R_1^2)$ है इसलिए

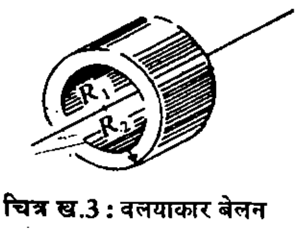
$$\sigma = \frac{m}{\pi\,(R_2^2 - R_1^2)}$$

अब हम समीकरण ख.2 लागू करेंगे। इसके लिए हमने त्रिज्या r और $r + dr$ (चित्र ख.2) के बीच का वृत्तीय पट्टीनुमा एक अल्पांश (element) लिया है। इस अल्पांश का क्षेत्रफल है $dA = 2\pi\, r dr$. वलयाकार पटल ऐसी ही पट्टियों का समूह है जहां r का परिसर R_1 से R_2 तक है। अतः समीकरण ख.2 से हमें प्राप्त होता है

$$I_s = \frac{m}{\pi\,(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} r^2\, 2\pi\, r dr,$$

जहां I_s पटल का जड़त्व-आघूर्ण है।

$$\therefore\ I_s = \frac{2m}{(R_2^2 - R_1^2)} \int_{R_1}^{R_2} r^3\, dr = \frac{m\,(R_2^4 - R_1^4)}{2\,(R_2^2 - R_1^2)} = \frac{m}{2}\,(R_2^2 + R_1^2)$$



चित्र ख.3 : वलयाकार बेलन

अब मान लीजिए कि हम इस तरह के पटलों को एक के ऊपर एक रखकर एक गड्डी बनाते हैं तो हमें क्या मिलेगा? ऐसा करने से हमें एक वलयाकार बेलन (annular cylinder) मिलेगा जिसकी अंतः त्रिज्या और बहिर्त्रिज्या वही होगी जो पटल की है (चित्र ख.3)। अगर गड्डी की ऊंचाई R_2 से काफ़ी कम हो तो हमें वलयाकार डिस्क (annular disc) मिलेगा। मान लीजिए कि वलयाकार बेलन (या डिस्क) का जड़त्व आघूर्ण I है। चूंकि अक्ष में कोई परिवर्तन नहीं होता, इसलिए

$$I = \Sigma\, I_s$$

और, क्योंकि R_1, R_2, अचर हैं इसलिए

$$I = (\Sigma m)\frac{R_1^2 + R_2^2}{2}$$

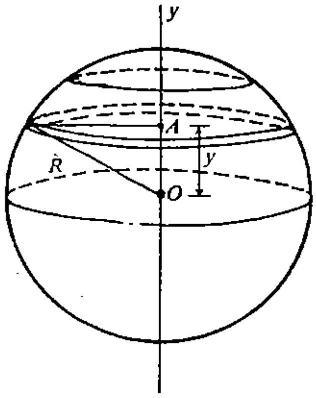
पर $\Sigma m = M =$ वलयाकार बेलन (या डिस्क) का द्रव्यमान।

$$\therefore\ I = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2).$$

अब $R_1 = 0$ और $R_2 = R$ लेकर हम सारणी 9.1 के परिणाम (ज) को (छ) की एक विशिष्ट स्थिति मान सकते हैं। अत:

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

अब हम (झ) प्राप्त करने के लिए (ज) का प्रयोग करेंगे।



चित्र ख.4

(झ) का सत्यापन

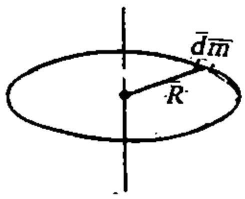
चित्र ख.4 देखिए। इसके लिए व्यास के प्रति गोले का जड़त्व आघूर्ण निकालना होता है। मान लीजिए कि y-अक्ष व्यास के अनुदिश है। अब हम y-अक्ष पर लंब दो समतलों के बीच गोले का एक अत्यणु भाग लेंगे (चित्र ख.4)। ये समतल गोले के केन्द्र से क्रमश: y और $y + dy$ की दूरियों पर हैं। यह भाग अत्यणु मोटाई dy वाला एक वृत्ताकार डिस्क है जिसका केन्द्र A है और त्रिज्या $\sqrt{R^2 - y^2}$ है, जहां $OA = y$. अत: इसका द्रव्यमान $\pi\rho(R^2 - y^2)dy$ के बराबर होगा, जहां ρ गोले के पदार्थ का घनत्व है। इसलिए परिणाम (ज) का प्रयोग करने पर हमें डिस्क का निम्नलिखित जड़त्व आघूर्ण मिलता है

$$dI = \frac{1}{2}\pi\rho(R^2 - y^2)\,dy\,(\sqrt{R^2 - y^2})^2$$

और y के पूरे परिसर पर dI के इस व्यंजक का समाकलन करके गोले का जड़त्व आघूर्ण I निकाला जा सकता है।

$$\therefore\ I = \frac{\pi\rho}{2}\int_{-R}^{+R}(R^2 - y^2)^2\,dy = \pi\rho\int_0^R (R^4 - 2R^2y^2 + y^4)dy = \frac{8\pi\rho}{15}R^5$$

$$\text{या } I = \frac{8\pi}{15}\frac{M}{\frac{4\pi}{3}R^3}R^5 = \frac{2}{5}MR^2.$$



चित्र ख.5 : वलय का जड़त्व आघूर्ण

अब हम परिणामों (घ), (ङ) और (च) को सत्यापित करेंगे।

(घ) का सत्यापन

एक वलय (ring) को एक वृत्त माना जा सकता है अर्थात् उसकी मोटाई की उपेक्षा की जा सकती है। हम वलय के चाप का अल्पांश ds लेते हैं। इस अल्पांश का प्रत्येक बिंदु अक्ष से लांबिक दूरी R पर है (चित्र ख.5)। अत: समीकरण 9.6 का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$I = R^2\int dm = MR^2 \quad (\because \int dm = M)$$

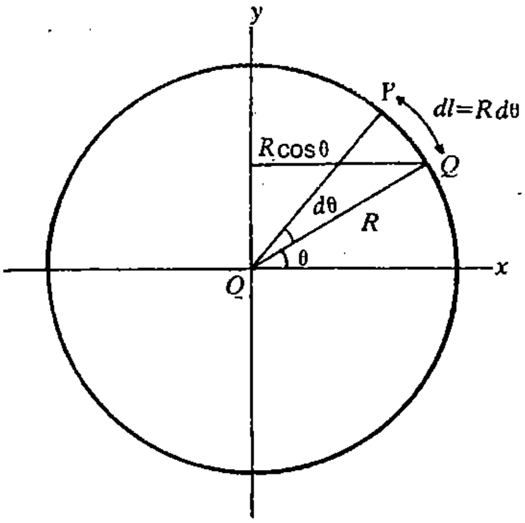
अब हम (ङ) और (च) को सत्यापित करेंगे। आप देखेंगे कि इनके लिए समतल ध्रुवी निर्देशांकों के प्रयोग से अधिक सुविधा हो जाएगी।

(ङ) का सत्यापन

चित्र ख.6 देखिए। हमने y-अक्ष को वह अक्ष माना है जिसके प्रति जड़त्व आघूर्ण ज्ञात करना है। x-अक्ष इस पर लंब होता है और वलय के केन्द्र से होकर जाता है। हम कोणों θ और $\theta + d\theta$ के बीच वलय का एक अल्पांश PQ लेते है। अक्ष से इसकी दूरी $R\cos\theta$ है। अब हम समीकरण ख.3 का प्रयोग करेंगे। यहां $dl = PQ$ के अल्पांश की लंबाई $= Rd\theta$ और $r = R\cos\theta$. ध्यान रहे कि समाकलन पूरे वलय पर करना होता है और समाकलन चर θ है। अत: θ का परिसर 0 से 2π तक है। इस तरह,

$$I = \frac{M}{2\pi R}\int_0^{2\pi} R^2\cos^2\theta\,R\,d\theta = \frac{MR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta$$

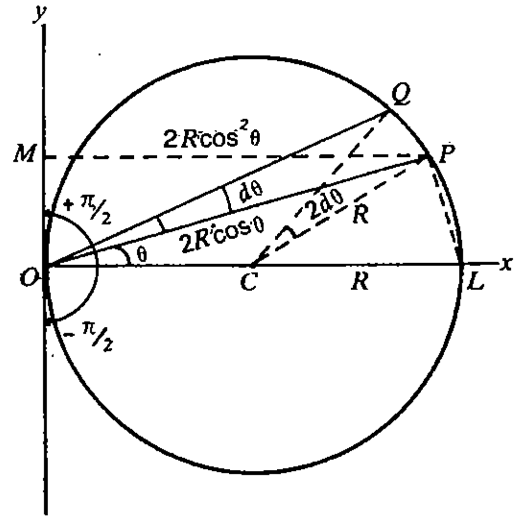
निश्चित समाकल एक मानक समाकल है और इसका मान π है। इसलिए $I = \frac{MR^2}{2}$. अब हम (च) का सत्यापन करेंगे।



चित्र ख.6 : (ङ) का सत्यापन करने के लिए चित्र

(च) का सत्यापन

चित्र ख.7 देखिए। हमने y-अक्ष को वह अक्ष माना है जिसके प्रति जड़त्व आघूर्ण मालूम करना है। x-अक्ष इस पर लंब है और वलय तथा y-अक्ष के संपर्क बिंदु से होकर जाता है। अतः x-अक्ष एक व्यास के अनुदिश है। हम कोण θ और $\theta + d\theta$ के बीच वलय का एक अल्पांश PQ लेते हैं। चूंकि एक चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर बनाया गया कोण उस चाप द्वारा वृत्त के किसी बिंदु पर बनाए गए कोण का दुगुना होता है, इसलिए $\angle PCQ = 2\angle POQ = 2d\theta$.



चित्र ख.7 : (च) का सत्यापन करने के लिए चित्र

$\therefore\ PQ = R\,(2d\theta) = 2R\,d\theta$

चूंकि $\angle OPL = 90°$, $\therefore\ OP = 2R\cos\theta$. अतः y-अक्ष से PQ के अल्पांश की लांबिक दूरी $= PM = OP\cos\theta = 2R\cos^2\theta$.

अब हम समीकरण ख.3 का प्रयोग करेंगे जहां $\lambda = \dfrac{M}{2\pi R}$, $r = 2R\cos^2\theta$ और θ का परिसर

$-\dfrac{\pi}{2}$ (नीचे के अर्ध वृत्त) से $+\dfrac{\pi}{2}$ (ऊपर के अर्धवृत्त) तक होता है।

$$\therefore\ I = \frac{M}{2\pi R}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(2R\cos^2\theta)^2\,2R\,d\theta = \frac{8MR^2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta$$

$$\therefore\ I = \frac{8MR^2}{2}\cdot\frac{3\pi}{16} = \frac{3}{2}MR^2$$

(ङ) और (च) को सत्यापित करने के लिए हमें ज्यामिति और त्रिकोणमिति का थोड़ा बहुत प्रयोग करना पड़ा है। वास्तव में समांतर और लंब अक्षों के प्रमेयों को लागू कर के इस काम को काफ़ी आसान बनाया जा सकता है। अब हम इन प्रमेयों पर विचार करेंगे।

माना कि

$$J_n = \int_0^{\pi/2}\cos^n\theta\,d\theta$$

तब

$$J_n = \frac{n-1}{n}J_{n-2}$$

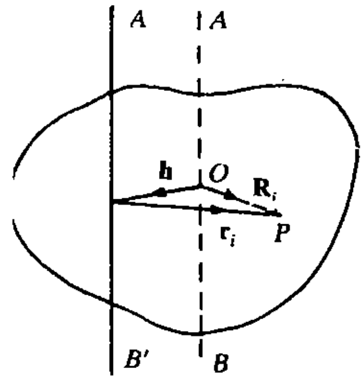
$$\therefore \int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = J_4 = \frac{3}{4}J_2$$

$$J_2 = \frac{1}{2}J_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\pi/2}\cos^4\theta\,d\theta = \frac{3}{4}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{3\pi}{16}$$

समांतर अक्ष प्रमेय



चित्र ख.8 : समांतर अक्ष प्रमेय

चित्र ख.8 देखिए। C, द्रव्यमान M वाले पिंड का संहति केन्द्र है और AB, इस केन्द्र से होकर जाने वाला एक अक्ष है। $A'B'$, AB के समांतर एक अक्ष है। अब हम $A'B'$ के प्रति पिंड का जड़त्व आघूर्ण (I) निकालना चाहते हैं जबकि AB के प्रति उस पिंड का जड़त्व आघूर्ण (I_{cm}) पता हो। मान लीजिए कि अक्षों के बीच की लांबिक दूरी L है। हम P पर एक बिंदु द्रव्यमान m_i लेते हैं। मान लीजिए कि मूल बिंदु C के सापेक्ष बिंदु O और P के स्थिति सदिश क्रमशः $\mathbf{h}$ और $\mathbf{R}_i$ हैं और मान लीजिए कि $\mathbf{OP} = \mathbf{r}_i$. हम जानते हैं कि

$$\mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CP} = \mathbf{CP} - \mathbf{CO} \quad \text{या} \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{R}_i - \mathbf{h}.$$

अब $\quad I = \Sigma\, m_i\, r_i^2 = \Sigma\, m_i\, \mathbf{r}_i \,.\, \mathbf{r}_i$ जहां जोड़ पिंड के सभी बिंदुओं पर है।

या $\quad I = \sum_i m_i\,(\mathbf{R}_i - \mathbf{h})\,.\,(\mathbf{R}_i - \mathbf{h})$

$$= \Sigma\, m_i\,(R_i^2 - 2\mathbf{R}_i\,.\,\mathbf{h} + h^2).$$

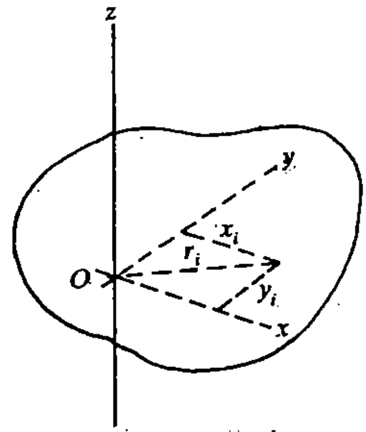
अब, AB और $A'B'$ की आपेक्षिक स्थिति P की स्थिति पर निर्भर नहीं करती। दूसरे शब्दों में $\mathbf{h}$, i पर निर्भर नहीं करता।

$$\therefore\ I = \sum_i m_i\, R_i^2 - 2\,(\sum_i m_i\,\mathbf{R}_i)\,.\,\mathbf{h} + (\sum_i m_i)\, h^2$$

इस समीकरण के दायें हाथ के व्यंजक का पहला पद संहति केन्द्र (c.m.) के प्रति पिंड का जड़त्व आघूर्ण अर्थात् I_{cm} है। और $\dfrac{\Sigma\, m_i\,\mathbf{R}_i}{\Sigma\, m_i}$ = संहति केंद्र का स्थिति सदिश = 0, क्योंकि यह मूल बिंदु पर है। अतः दूसरा पद शून्य है। और $\sum_i m_i = M$. इसलिए तीसरा पद Mh^2 है। अतः

$$I = I_{cm} + Mh^2. \tag{ख.4}$$

समीकरण ख.4 **समांतर अक्ष प्रमेय** (parallel axis theorem) का गणितीय रूप है। इस प्रमेय के अनुसार, एक अक्ष के प्रति पिंड का जड़त्व आघूर्ण, दिए हुए अक्ष के समांतर और पिंड के संहति केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के प्रति पिंड के जड़त्व आघूर्ण, और पिंड के द्रव्यमान तथा अक्षों के बीच की दूरी के वर्ग में गुणनफल का जोड़ होता है।



चित्र ख.9 : पटलीय पिंड के लिए लंब अक्ष प्रमेय

लंब अक्ष प्रमेय (पटलीय पिंड (laminar body) के लिए)

चित्र ख.9 देखिए। मान लीजिए हमें पटल के समतल पर स्थित लगभग दो परस्पर लांबिक अक्षों के प्रति पिंड के जड़त्व आघूर्ण मालूम हैं। तब हम देखेंगे कि हम इस प्रमेय की मदद से एक तीसरे अक्ष के प्रति, जो ऊपर दिए गए दोनों अक्षों के प्रतिच्छेद बिंदु पर लंब है, पिंड का जड़त्व आघूर्ण निकाल सकते हैं।

पिंड में एक बिंदु द्रव्यमान m_i लीजिए। पटल के समतल पर, हम दो अक्ष Ox, Oy लेते हैं जिनके सापेक्ष m_i के निर्देशांक (x_i, y_i) हैं। Oz, Ox और Oy पर लंब है। z-अक्ष से m_i की लांबिक दूरी r_i है, जो है

$$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2.$$

मान लीजिए कि तीन परस्पर लंब अक्षों Ox, Oy और Oz के प्रति पिंड के जड़त्व आघूर्ण क्रमशः I_x, I_y और I_z हैं। आइए अब हम I_z को I_x और I_y के पदों में व्यक्त करें। अब

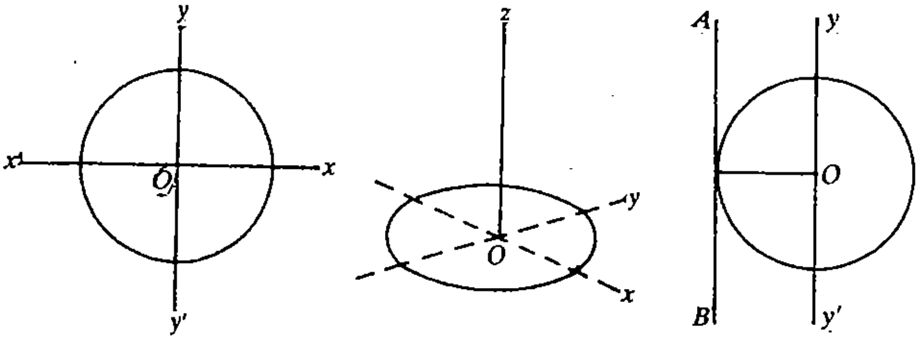
$$I_z = \sum_i m_i\, r_i^2 = \sum_i m_i\,(x_i^2 + y_i^2)$$

या $\quad I_z = \sum_i m_i\, x_i^2 + \sum_i m_i\, y_i^2$

$$\therefore\quad I_z = I_x + I_y. \tag{ख.5}$$

समीकरण ख.5 पटलीय पिंड के लंब अक्ष प्रमेय का गणितीय रूप है जिसके अनुसार एक समतल में दो परस्पर लंब अक्षों के प्रति पटलीय पिंड के जड़त्व आघूर्णों का जोड़ एक तीसरे अक्ष के प्रति, जो उन दोनों अक्षों पर लंब है और उनके प्रतिच्छेद बिंदु से होकर जाता है, पिंड के जड़त्व आघूर्ण के बराबर होता है।

अब हम इन प्रमेयों को (ड) और (च) को सत्यापित करने में लागू करेंगे। चित्र ख.10 (क) देखिए।



(क) (ख) (ग)

चित्र ख.10 : वलय का जड़त्व आघूर्ण निकालना

हमें पिंड का जड़त्व आघूर्ण उसके व्यास के प्रति निकालना है। xx' और yy' इसके व्यासों के अनुदिश दो लांबिक अक्ष हैं। मान लीजिए कि इन अक्षों के प्रति पिंड के जड़त्व आघूर्ण क्रमशः I_x और I_y हैं। अगर अपने समतल पर लंब और O से होकर जाने वाले अक्ष के प्रति, वलय को 90° से घुमाया जाए तो x-अक्ष, y-अक्ष के स्थान पर आ जाएगा और y-अक्ष, x-अक्ष के स्थान पर आ जाएगा। पर, वलय उसी तरह दिखाई पड़ता है और यह अपनी पिछली स्थिति के साथ ठीक संपाती होता है। इसका मतलब यह है कि $I_x = I_y$. आइए अब हम चित्र ख.10(ख) को लें जहां x-अक्ष और y-अक्ष के साथ z-अक्ष को दिखाया गया है। लंब अक्ष प्रमेय (समीकरण ख.5) को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है

$$I_z = I_x + I_y = 2I_y$$

या $$I_y = \frac{1}{2} I_z$$

पर सारणी 9.1 के परिणाम (घ) से हम जानते हैं कि $I_z = MR^2$. इस तरह $I_y = \frac{1}{2} MR^2$ और (ङ) सत्यापित हो जाता है।

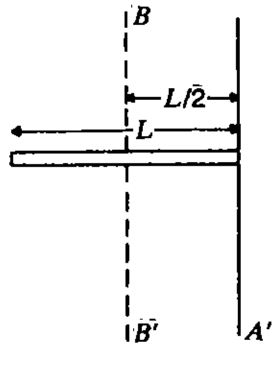
अब हम (च) सत्यापित करेंगे। अक्ष AB जिसके प्रति जड़त्व आघूर्ण निकालना है, yy' के समांतर है जो संहति केन्द्र (c.m.) से होकर जाता है (चित्र ख.10ग). अब समांतर अक्ष प्रमेय (समीकरण ख.4) को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है।

$$I_{AB} = I_{cm} + MR^2$$

पर $I_{cm} = I_y = \frac{1}{2} MR^2$, परिणाम (ङ) से

$$\therefore\ I_{AB} = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2.$$

अतः (च) सत्यापित हो जाता है।



चित्र ख.11

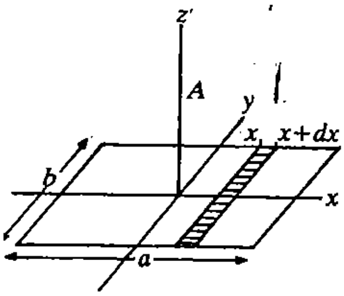
इस तरह हम देखते हैं कि इन दो प्रमेयों को लागू करने से जड़त्व आघूर्ण निकालना आसान हो जाता है। हमने जो तरीके पहले इस्तेमाल किए थे वे कुछ जटिल थे। साथ ही अगर संहति केन्द्र से होकर जाने वाले अक्ष के प्रति पिंड का जड़त्व आघूर्ण पता हो तो समांतर अक्ष के प्रति पिंड का जड़त्व आघूर्ण निकाल सकते हैं। जब I_x और I_y मालूम हों तो लंब अक्ष प्रमेय पटलीय पिंड का I_z निकालने में अधिक उपयोगी होता है। जब I_z पता हो तो सममित पिंडों के लिए I_x और I_y निकाले जा सकते हैं। अब हम समांतर अक्ष प्रमेय लागू करके सारणी 9.1 का परिणाम (ख) सत्यापित कर सकते हैं। दिए हुए अक्ष AA' और इसके समांतर अक्ष BB', जो संहति केन्द्र से होकर जाता है, के बीच की दूरी $\frac{L}{2}$ है (चित्र ख.11)। अतः परिणाम (क) और समीकरण ख.4 लागू करने पर हमें प्राप्त होता है

$$I = \frac{ML^2}{12} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{ML^2}{3}$$

अब हम लंब अक्ष प्रमेय को लागू करके (ग) सत्यापित करेंगे।

चित्र ख.12 देखिए

आइए हम y-अक्ष से दूरी x पर चौड़ाई dx वाली एक अत्यणु पट्टी लें। पट्टी का क्षेत्रफल $b\,dx$ है। और इसका प्रत्येक बिंदु y-अक्ष से दूरी x पर है। अतः समीकरण 9.6ग $\left(\sigma = \dfrac{M}{ab}\right)$ से y-अक्ष के प्रति इसका जड़त्व आघूर्ण होगा



चित्र ख.12

$$I_y = \frac{M}{ab}\int_{-a/2}^{a/2} x^2\, b\, dx$$

$$= \frac{2M}{a}\int_0^{a/2} x^2\, dx = \frac{2M}{a}\frac{a^2}{24} = \frac{Ma^2}{12}.$$

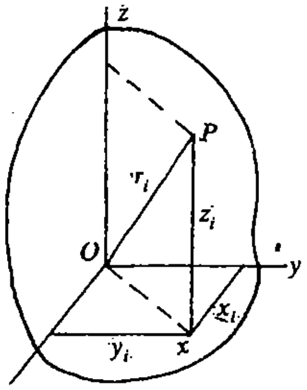
इसी तरह x-अक्ष के प्रति जड़त्व आघूर्ण निकाला जा सकता है, जो है

$$I_x = \frac{M}{12} b^2$$

और समीकरण ख.5 से

$$I_z = I_x + I_y = \frac{M}{12}(a^2 + b^2).$$

आइए अब हम तीन परस्पर लंब अक्ष x, y और z लें जो द्रव्यमान M और त्रिज्या R वाले ठोस गोले के केन्द्र से होकर जाते हैं। चूंकि ये अक्ष गोले के व्यास के अनुदिश हैं इसलिए सारणी 9.1 के परिणाम (झ) से हम यह कह सकते हैं कि $I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5} MR^2$ इसलिए $I_z \neq I_x + I_y$. क्या इससे लंब अक्ष प्रमेय का उल्लघंन होता है? इससे प्रमेय का उल्लंघन नहीं होता क्योंकि गोला एक त्रिविम पिंड है और समीकरण ख.5 द्विविम पिंड के लिए मान्य होता है। फिर भी, त्रिविम पिंड के लिए भी एक लंब अक्ष प्रमेय होता है। अब हम उस प्रमेय की चर्चा करेंगे।



चित्र ख.13

त्रिविम पिंड का लंब अक्ष प्रमेय

चित्र ख.13 देखिए। इसमें एक त्रिविम पिंड दिखाया गया है। P पिंड के अंदर बिंदु-द्रव्यमान m_i की स्थिति है और r_i त्रिविम समकोणिक निर्देशांक तंत्र (three-dimensional rectangular coordinate system) के मूल बिंदु O से इसकी दूरी है। बिंदु P के निर्देशांक (x_i, y_i, z_i) हैं। अतः x-अक्ष, y-अक्ष और z-अक्ष से बिंदु P की लांबिक दूरियाँ क्रमशः $\sqrt{y_i^2 + z_i^2}$, $\sqrt{z_i^2 + x_i^2}$ और $\sqrt{x_i^2 + y_i^2}$ हैं। अतः x-अक्ष के प्रति m_i का जड़त्व आघूर्ण होगा

$$I_{xi} = m_i (y_i^2 + z_i^2)$$

अब, क्योंकि x-अक्ष के प्रति पूरे पिंड का जड़त्व आघूर्ण पिंड के सभी द्रव्यमान बिंदुओं के जड़त्व आघूर्णों यानि कि I_{xi} का जोड़ होता है, इसलिए

$$I_x = \sum_i I_{xi} = \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2).$$

इसी प्रकार

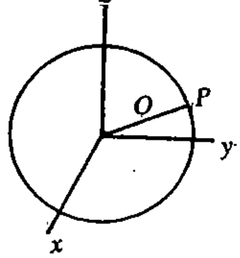
$$I_y = \sum_i m_i (z_i^2 + x_i^2)$$

और $$I_z = \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

$$\therefore\ I_x + I_y + I_z = 2\sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)$$

पर $$r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$$

$$\therefore\ I_x + I_y + I_z = 2\sum_i m_i r_i^2. \qquad (ख.6)$$



चित्र ख.14

समीकरण ख.6 त्रिविम पिंड के लंब अक्ष प्रमेय का गणितीय रूप है। अब हम इस प्रमेय की मदद से सारणी 9.1 के परिणाम (ञ) को सत्यापित करेंगे।

चित्र ख.14 देखिए। Ox, Oy और Oz तीन समकोणिक निर्देश अक्ष हैं जहां O गोलीय कोश का केंद्र है। इसलिए Ox, Oy और Oz गोलीय कोश के तीन व्यासों के अनुदिश होंगे। चूंकि गोलीय कोश सममित है, इसलिए $I_x = I_y = I_z = I$ जहां I, गोलीय कोश के किसी भी व्यास के प्रति गोलीय कोश का जड़त्व आघूर्ण है। अतः समीकरण ख.6 का बायां पक्ष $3I$ होगा। P, कोश पर कोई एक बिंदु है। मान लीजिए कि इसका द्रव्यमान m_i है और O से इसकी दूरी r_i है। अब, क्योंकि कोश के सभी बिंदुओं के लिए r_i गोलीय कोश की त्रिज्या R के बराबर होता है इसलिए समीकरण ख.3 से

$$3I = 2\sum_i m_i R^2$$

या $3I = 2R^2(\sum_i m_i) = 2MR^2$

या $I = \frac{2}{3}MR^2$

समीकरण ख.3 के इस्तेमाल के बिना भी यही परिणाम निकाला जा सकता था, पर उस स्थिति में परिकलन प्रक्रिया काफ़ी लंबी होती।

नियतांको की सारणी

भौतिक नियतांक

संकेत	राशि	मान
c	निर्वात में प्रकाश की चाल	2.998×10^{8} ms^{-1}
μ_0	मुक्त आकाश की चुंबकशीलता	1.257×10^{-6} NA^{-2}
ϵ_0	मुक्त आकाश की विद्युतशीलता	8.854×10^{-12}C^{2} N^{-1} m^{-2}
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$		8.988×10^{9} Nm^{2}C^{-2}
e	प्रोटॉन का आवेश	1.602×10^{-19}C
$-e$	इलेक्ट्रॉन का आवेश	-1.602×10^{-19}C
h	प्लांक नियतांक	6.626×10^{-34} Js
$\hbar$	$\frac{h}{2\pi}$	1.055×10^{-34} Js
m_e	इलेक्ट्रान विराम द्रव्यमान	9.109×10^{-31}kg
$\frac{-e}{m_e}$	इलेक्ट्रॉन आवेश–द्रव्यमान अनुपात	-1.759×10^{11} C kg^{-1}
m_p	प्रोटॉन का विराम–द्रव्यमान	1.673×10^{-27} kg
m_n	न्यूट्रॉन का विराम–द्रव्यमान	1.675×10^{-27} kg
R	रिडबर्ग नियतांक	1.097×10^{7} m^{-1}
a_0	बोर त्रिज्या	5.292×10^{-11}m
N_A	आवोगाद्रो की संख्या	6.022×10^{23}mol^{-1}
R	सार्वत्रिक गैस नियतांक	8.314 JK^{-1} mol^{-1}
k_B	बोल्ट्स्मान नियतांक	1.381×10^{-23} JK^{-1}
G	सार्वत्रिक गुरुत्वाकर्षण नियतांक	6.673×10^{-11} Nm^{2} kg^{-2}

खगोल भौतिकीय आंकड़े

खगोलीय पिंड	द्रव्यमान (kg)	माध्य त्रिज्या (m)	पृथ्वी के केन्द्र से माध्य दूरी (m)
सूर्य	1.99×10^{30}	6.96×10^{8}	1.50×10^{11}
चन्द्रमा	7.35×10^{22}	1.74×10^{6}	3.85×10^{8}
पृथ्वी	5.97×10^{24}	6.37×10^{6}	0

इस खंड में सामान्य रूप से इस्तेमाल हुई राशियों, उनके मात्रक संकेतों, विशेष नामों (यदि हों तो) और विमाओं की सूची नीचे दी गई है। विमाएं, लंबाई (L), द्रव्यमान (M), समय (T), ताप (K), और आवेश (Q) के पदों में दी गई हैं।

राशि	विशेष नाम	एस.आई.मात्रक संकेत	विमाएं
विस्थापन		m	[L]
वेग		ms^{-1}	$[LT^{-1}]$
त्वरण		ms^{-2}	$[LT^{-2}]$
कोणीय विस्थापन	रेडियन	rad	–
कोणीय वेग		rad s^{-1}	$[T^{1}]$
कोणीय त्वरण		rad s^{-2}	$[T^{-2}]$
कोणीय संवेग		$kgm^{2} s^{-1}$	$[ML^{2}T^{-1}]$
बल	न्यूटन	N	$[M LT^{-2}]$
कार्य, ऊर्जा	जूल	J	$[ML^{2} T^{-2}]$
शक्ति	वॉट	W	$[ML^{2} T^{-3}]$
गुरुत्वीय विभव		J kg^{-1}	$[L^{2} T^{-2}]$
गुरुत्वीय तीव्रता		N kg^{-1}	$[LT^{-2}]$
संवेग, आवेग		kg ms^{-1}	$[MLT^{-1}]$
आवर्तकाल		s	[T]
जड़त्व आघूर्ण		kg m^{2}	$[ML^{2}]$
क्षेत्रफल		m^{2}	$[L^{2}]$
आयतन		m^{3}	$[L^{3}]$
घनत्व		kg m^{-3}	$[ML^{-3}]$
बलआघूर्ण		Nm	$[ML^{2} T^{-2}]$
तापमान	केल्विन	K	[K]
विद्युत आवेश	कूलंब	C	[Q]
विद्युत धारा	एम्पीयर	A	$[T^{-1} Q]$