स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-13
विविक्त गणित

प्रथम खण्ड
प्रारंभिक तर्कशास्त्र

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

शान्तिपुरम् (सेक्टर–एफ), फाफामऊ, इलाहाबाद – 211013

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त
विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

UGMM - 13
विविक्त गणित

खंड

1

प्रारंभिक तर्कशास्त्र

विविक्त गणित

'विविक्त' (discrete) का मतलब होता है 'परिमित समुच्चय' और इस पाठ्यक्रम में हम विविक्त वस्तुओं की चर्चा करेंगे। आपका वास्ता ऐसी कई वस्तुओं से पड़ा होगा। मसलन इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के छात्रों का समूह या आसमान में तारों का समूह। मगर आपने इनकी प्रकृति का व्यवस्थित तौर पर अध्ययन नहीं किया होगा। दुनिया में हो रही तकनीकी तरक्की को देखते हुए ऐसा अध्ययन करने की ज़रूरत पड़ती है। उदाहरण के लिए, किसी कम्प्यूटर प्रोग्राम की कार्यक्षमता बेहतर बनाने के लिए हमें उसकी गति व तार्किक बनावट का अध्ययन करने की ज़रूरत है। यह अध्ययन संचयविन्यास (combinatorics) तथा ग्राफ़ के सिद्धांतो के इस्तेमाल से किया जा सकता है, जो कि विविक्त गणित के दो प्रमुख क्षेत्र हैं।

जैसा कि हम कह चुके हैं, विविक्त गणित की उपयोगिता बहुत ज़्यादा है। इसीलिए हमने आपके लिए यह 4-क्रेडिट का पाठ्यक्रम तैयार किया है। इस पाठ्यक्रम में हमने तय किया है कि आपको विविक्त वस्तुओं से संबंधित सिर्फ़ कुछ ही विषयों से परिचित कराया जाए। इससे आप गणित के नवीनतम, विकसित होते क्षेत्रों से कुछ परिचित हो सकेंगे। ये क्षेत्र हैं प्रतीकात्मक तर्क, बूलीय बीजगणित, संचयविन्यास और ग्राफ़ सिद्धान्त। इन्हें 4 खण्डों में पूरा किया जाएगा।

खण्ड 1 में हम आपको बताएंगे कि एक वाक्य और एक कथन में फ़र्क कैसे करें। इसके बाद हम कथनों को संयोजित करने के विभिन्न तरीकों पर विचार करेंगे। हम यह भी देखेंगे कि यह कैसे पता किया जाता है कि कोई कथन सत्य है या नहीं। इसके बाद हम उस सिद्धांत की बातचीत करेंगे जिसका अध्ययन सर्वप्रथम अरस्तू (384-322 ईसा पूर्व) ने किया था, तथा जिसे आगे चलकर बूल, डी मोर्गन, श्रोडर और फ्रेज जैसे उन्नीसवीं सदी के गणितज्ञों ने विकसित किया। यह गणितीय तर्क और गणितीय उपपत्ति का सिंद्धात है। इस संदर्भ में ए.एन. व्हाइटहेड तथा बर्ट्रेण्ड रसल के यादगार काम का ज़िक्र ज़रूरी है जिसे उन्होंने 1913 में 'प्रिन्सिपिया मैथमैटिका' में प्रस्तुत किया था।

खण्ड 1 की आख़िरी इकाई में हम तर्क के एक महत्वपूर्ण उपयोग, यानी बूलीय बीजगणित और परिपथों पर ग़ौर करेंगे।

खण्ड 2 व 3 में हम संचयविन्यास, यानी वास्तव में गिनती किए बगैर गणन के विभिन्न तरीकों पर विचार करेंगे। सर्वप्रथम इस सिंद्धात का विकास पास्कल (1623-1662) तथा जेकब बर्नौली (1645-1705) ने किया था। हम आपका परिचय संचयविन्यासी (combinatorial) तर्क के विभिन्न पहलुओं से कराएंगे। यह तर्क कम्प्यूटर तंत्रों, विविक्त क्रियाविधि अनुसंधान की समस्याओं तथा परिमित प्रायिकता के समस्त विश्लेषण का आधार है। ज़्यादा विशिष्ट तौर पर, आप क्रमसंचय व संयोजन, संख्याओं का विभाजन, पिजन होल नियम, आवर्ती संबंध तथा जनन फलनों का अध्ययन करेंगे। इन सबका प्रस्तुतीकरण अनुप्रयोग के नज़रिये से ही किया जाएगा।

खण्ड 4 में हम ग्राफ़ सिंद्धात पर ग़ौर करेंगे। 'ग्राफ़', यानी 'आलेख' शब्द का प्रयोग सड़क के नक्शे, परिपथ चित्र, प्रवाह चित्र आदि के लिए किया जाता है। यानी ऐसी कोई भी संरचना जिसमें उसके विभिन्न हिस्सों के बीच अन्तर्सम्बंध शामिल हो। इस खण्ड की प्रथम इकाई में हम आपका परिचय ग्राफ़ सिंद्धात की बुनियादी बातों से कराएंगे। इसके बाद की इकाइयों में हम कुछ ख़ास किस्म के ग्राफ़ तथा ग्राफ़ में रंगों के उपयोग पर चर्चा करेंगे। ऑयलर (1707-1783) द्वारा कोनिग्सबर्ग की सात-सेतु पहेली का हल ही ग्राफ़ सिंद्धात का शुरुआती बिन्दु है। इस सिंद्धात के विकास व अनुप्रयोग के क्षेत्र में जिन अन्य गणितज्ञों ने काफ़ी योगदान दिया उनमें हैमिल्टन (1805-1865), आर्थर केली (1821-1895), किरचॉफ (1824-1895), तथा हाल के गणितज्ञ ऐपल और हाकन (जिन्होंने चार रंग वाली प्रमेय को सिद्ध किया) प्रमुख हैं।

और अब दो शब्द हमारी संकेत-पद्धति के बारे में। हर इकाई को भागों में बांटा गया है। कुछ भाग भी

उपभागों में बंटे हो सकते हैं। इन भागों/उपभागों को क्रम से अंक दिए गए हैं। इसी प्रकार से प्रत्येक इकाई के अभ्यासों व महत्वपूर्ण समीकरणों को भी क्रमांक दिए गए हैं। चूंकि अलग-अलग इकाइयों में प्रस्तुत सामग्री का एक-दूसरे से गहरा अन्तर्सम्बंध है, इसलिए हमें क्रॉस रेफरेंसिंग (एक इकाई का दूसरी इकाई में संदर्भ) का काफी सहारा लेना पड़ेगा। ऐसे संदर्भ के लिए हम **भाग x.y** जैसे संकेत का इस्तेमाल करेंगे, जिसका मतलब है इकाई x का भाग y, प्रत्येक इकाई में आपको कई **अभ्यास** (क्रमांक E1, E2,.... वगैरह) और उदाहरण (क्रमांक सहित) भी मिलेंगे। किसी उदाहरण के समाप्त होने की सूचना संकेत * * * से दी जाएगी।

इस पाठ्यक्रम का एक और महत्वपूर्ण घटक इसके सत्रीय कार्य हैं। सत्रीय कार्य 1 खण्ड 1 व 2 पर आधारित है, जबकि सत्रीय कार्य 2 खण्ड 3 व 4 पर आधारित है। आपके शैक्षिक काउंसलर इनका मूल्यांकन करेंगे तथा विस्तृत टिप्पणियों के साथ इन्हें आपको लौटा देंगे। यानी सत्रीय कार्य शिक्षण व मूल्यांकन दोनों के औजार हैं।

जैसा कि आप इस प्रस्तावना से समझ गए होंगे, यह काफी प्रारम्भिक स्तर का पाठ्यक्रम है। इसका एकमात्र **पूर्व शर्त** है प्रथम स्तर का पाठ्यक्रम 'प्रारम्भिक बीजगणित' (MTE-04)। अतः इस पाठ्यक्रम को हम द्वितीय स्तर पर प्रस्तुत कर रहे हैं।

हमें उम्मीद है कि आपको इस पाठ्यक्रम का अध्ययन करने में मज़ा आएगा। यदि आपको इसका कोई हिस्सा समझने में दिक्कत पेश हो, तो कृपया अपने शैक्षिक काउंसलर से मदद लें। और यदि आप किसी विषय का ज्यादा गहराई से अध्ययन करना चाहें तो निम्नलिखित पुस्तकों की मदद ले सकते हैं

1. Elements of Discrete Mathematics, by C.L.Liu, McGraw-Hill, 1985.
2. Graph Theory, by F. Harary, Narosa, 1995.

ये किताबें आपके अध्ययन केन्द्र पर उपलब्ध हैं।

खंड 1 प्रारंभिक तर्कशास्त्र

तर्कशास्त्र (logic) मान्य तर्क (argument) की प्रकृति का विश्लेषण और अध्ययन है। तर्क एक ऐसा साधन है जिसे लागू करके तथ्यों और परिकल्पनाओं से मान्य निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। तर्कशास्त्र के ही आधार पर सभी विज्ञान का निर्माण होता है। प्राचीन यूनान में तर्कशास्त्र का काफ़ी अध्ययन और विकास हुआ। लेकिन तर्कशास्त्र के गणितीय सिद्धांत, जिसे **प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र (symbolic logic)** कहा जाता है, की अपनी पहचान 19वीं शताब्दी में ही हुई। तर्कों का अध्ययन करने की यह बीजीय विधि अंग्रेज़ गणितज्ञ जॉर्ज बूल (1815-1864) ने विकसित की थी।

प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र में हम तर्कों का अध्ययन करते हैं। कोई भी तर्क घोषणात्मक वाक्यों से बनता है। इन वाक्यों को हम कथन बनाने की विधियों से परिचित कराएंगे। यहाँ हम आपको उन कथनों से भी परिचित कराएंगे जिनमें 'प्रत्येक के लिए' और 'का अस्तित्व है' जैसे प्रमात्रक (quantifiers) होते हैं। प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र में हमारा लक्ष्य यह मालूम करना होता है कि कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य। इसे जानने की एक विधि सत्य सारणी है। इकाई 1 में हम सत्य-सारणी के बारे में भी चर्चा करेंगे।

इकाई 2 में हम तर्क की उन विधियों पर चर्चा करेंगे जिन्हें लागू करके हम यह दर्शा सकते हैं कि अमुक कथन सत्य है। इस प्रकार के तर्क को 'उपपत्ति' कहा जाता है। इस इकाई में हम आपको इस बात की समझ देने की कोशिश करेंगे कि उपपत्ति को किस रूप में लिखा जाना चाहिए। यहां हम आपको तर्क देने के उन अनेक प्रतिरूपों से परिचित कराएंगे। जिनसे विभिन्न तरह की उपपत्तियां प्राप्त होती हैं। इस इकाई में हम गणितीय आगमन पर भी चर्चा करेंगे, जो कि कई ऐसे कथनों को सिद्ध करने का एक मूलभूत साधन है जिनमें प्राकृतिक संख्याएँ होती है।

इस खंड की अंतिम इकाई, इकाई 3, का इकाई 1 के साथ निकट का संबंध है। इस इकाई में आप यह देखेंगे कि कुछ संक्रियाओं सहित कथनों के समुच्चय से एक बीजीय संरचना प्राप्त होती है जिसे बूलीय बीजावली (Boolean algebra) कहा जाता है। इस इकाई में आप स्विचों, गेटों और परिपथों के अध्ययन में इस सिद्धांत के अनुप्रयोग के बारे में भी जानकारी प्राप्त करेंगे।

अब कुछ शब्द इस खंड की प्रस्तुति पर। इकाइयों को पढ़ते समय आपको अनेक उदाहरण मिलेंगे। प्रत्येक इकाई में इन्हें क्रम के अनुसार नंबर किए गए हैं। आपकी सुविधा के लिए हमने प्रत्येक उदाहरण की समाप्ति चिह्न *** से की है। इकाईयों में आपको अनेक प्रश्न (E1, E2,...) भी देखने को मिलेंगे। इकाईयों में दी गई पठन सामग्री को अच्छी तरह से समझने के लिए सबसे अच्छा तरीका है कि जब भी आप इन प्रश्नों पर पहुंचें, तब ही आप उन्हें हल करने का प्रयास करें।

इकाई को पढ़ लेने के बाद आपको उसके पहले भाग में दिए गए उद्देश्यों को दुबारा देख लेना चाहिए और यह जाँच कर लेना चाहिए कि आपने उनकी प्राप्ति कर ली है या नहीं। ऐसा करने से आप इस बात की पुष्टि कर सकेंगे कि आप आगे की पढ़ाई करने के लिए तैयार हैं।

उम्मीद है आपको इस खंड की सामग्री रुचिकर लगेगी।

संकेत और प्रतीक

N	प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय
R	वास्तविक संख्याओं का समुच्चय
$p \vee q$	p या q (p, q कथन हैं)
$p \oplus q$	p या q में से कोई एक, किन्तु दोनों नहीं
$p \wedge q$	p और q
$\sim p$	नही p.
$p \rightarrow q$	p में q निहित है q के लिए p पर्याप्त है यदि p, तो q
$p \leftrightarrow q$	p यदि और केवल यदि q q के लिए p आवश्यक और पर्याप्त है p और q का दो तरफ़ी निहितार्थ
$p \Rightarrow q$	यदि p सत्य है तो q भी सत्य है।
$p \Leftrightarrow q$	p सत्य है यदि और केवल यदि q सत्य है
$p \equiv q$	p, q के बराबर है
$\therefore$	इसलिए
iff	यदि और केवल यदि
$\forall$	सभी के लिए
$\exists$	का अस्तित्व है
$\exists!$	एक और केवल एक है
$P(X)$	समुच्चय X के सभी उपसमुच्चयों का समुच्चय
B	दो अवयवी बूलीय बीजावली
B^n	$B \times B \times \ldots \times B$ (n बार)
$X(x_1, \ldots, x_k)$	k - चरों में बूलीय व्यंजक
s.v.	अवस्था मान (state value)
a par b	a और b स्विचों के समांतर संबंध
a ser b	a और b स्विचों के क्रमबद्ध संबंध
CNF	सर्वनिष्ट प्रसामान्य समघात
DNF	सम्मिलन प्रसामान्य समघात

इकाई 1 कथनीय कलन

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ संख्या**

1.1 प्रस्तावना

विकास सिद्धांत के अनुसार ऐसा माना जाता है कि मानव का विकास कई सदियों के दौरान निम्न स्पीशीज़ से हुआ है। अपने पूर्वजों की तुलना में मानव का वरिष्ठ होने का मुख्य कारण है उसके तर्क करने की क्षमता। हम सभी जानते हैं कि किस प्रकार तर्क करने की इस क्षमता को वैज्ञानिक और प्रौद्योगिकीय विकास में लागू किया गया है। लेकिन ऐसा मालूम पड़ता है कि एक लम्बे अर्से से तर्क के विषय पर कोई व्यवस्थित अध्ययन नहीं किया गया है। इस विषय पर पहला व्यवस्थित अध्ययन जो मिला है वह यूनानी दार्शनिक अरस्तू (Aristotle) (384-322 ईसा पूर्व) ने किया था। और, इस बात का भी संकेत मिलता है कि संभवत: मध्य युग में संशोधित रूप में इस तरह के तर्कशास्त्र को पढ़ाया जाता रहा है।

फिर आया तर्कशास्त्र के अध्ययन में एक महत्वपूर्ण परिवर्तन। यह था तर्कशास्त्र का गणितीय रूप में औपचारिक प्रस्तुतिकरण। गणितज्ञों लाइब्नीत्ज़ (1646-1716) और जॉर्ज बूल (1815-1864) ने इस विषय पर गंभीरता से अध्ययन किया था और **प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र (symbolic logic)** नामक सिद्धांत को विकसित किया। इसके पश्चात् कई और गणितज्ञों ने इस सिद्धान्त को काफ़ी आगे बढ़ाया है। इसी सिद्धांत की मूल बातों से हम आपको इस इकाई में (और अगली इकाई में) परिचित कराना चाहते हैं।

इस खंड की प्रस्तावना में तो आप प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र के बारे में कुछ पढ़ ही चुके हैं। इसकी सहायता से हम तर्कों को एक ऐसे औपचारिक रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं जिससे कि यह साफ ज़ाहिर हो सकता है कि तर्क मान्य है या एक हेत्वाभास (fallacy)। तर्क को प्रतीकों में कैसे प्रस्तुत किया जाता है, यही हम आपको इस इकाई में बताएंगे।

भाग 1.2 में इस बात पर चर्चा करेंगे कि गणितीय तर्क में किस प्रकार के वाक्यों को मान्यता दी जाती है। इस प्रकार के वाक्यों को हम कथन (statement / proposition) कहते हैं। आप यह भी देखेंगे कि कथन या तो सत्य हो सकता है या असत्य। तद्नुसार, जैसा कि आप पढ़ेंगे, हम कथन को एक सत्य मान T या F देते हैं।

भाग 1.3 में हम कथनों के बीच के तर्कसंगत संबंधों का अध्ययन शुरू करेंगे। इसे कथनीय कलन (propositional calculus) कहा जाता है। इसमें हम सरल कथनों के संयोजन से अधिक जटिल कथन प्राप्त करने की कुछ विधियों का अध्ययन करते हैं। संयोजन के लिए हम "और" और "अथवा" जैसे तर्कसंगत संयोजकों का प्रयोग करते हैं। यहाँ हम आपको "नहीं", "में अंतर्निहित है" और "में अंतर्निहित है और से अंतर्निहित है" जैसे अन्य संयोजकों से भी परिचित कराएंगे। साथ ही हम ऐसी सारणियाँ भी

बनाएंगी जिनकी सहायता से हम प्राप्त किए गए संयुक्त कथनों के सत्य मान मालूम कर सकते हैं।

भाग 1.4 में हम उन प्रतिबंधों के बारे में चर्चा करेंगे जिनके अधीन दो कथन "समान" होते हैं। ऐसी स्थिति में हम एक कथन के बदले दूसरा बेहिचक ले सकते हैं।

अंत में, अर्थात् भाग 1.5 में, हम कुछ ऐसे सामान्य शब्दावली और संकेतों के बारे में चर्चा करेंगे जो कि किसी कथन में शामिल चीजों का प्रमात्रीकरण करने में उपयोगी हैं।

आपके लिए इस इकाई का बहुत ध्यान से पढ़ना ज़रूरी है क्योंकि इस खंड की अन्य इकाइयाँ इस पर ही आधारित हैं। बीच-बीच में जो प्रश्न दिए गए हैं, उन्हें आप साथ-साथ अवश्य हल करें। ऐसा करने से ही आप निम्नलिखित उद्देश्यों को प्राप्त कर सकेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- कथनों को पहचान सकेंगे;
- तर्कसंगत संयोजकों को पहचान सकेंगे और उनका प्रयोग कर सकेंगे;
- किसी भी संयुक्त कथन की सत्य सारणी बना सकेंगे;
- तर्कसंगततः तुल्य कथनों को पहचान सकेंगे और उनका प्रयोग कर सकेंगे;
- तर्कसंगत प्रमात्रकों को पहचान सकेंगे और उनका प्रयोग कर सकेंगे।

आइए अब हम गणितीय तर्क के बारे में चर्चा शुरू करें।

1.2 कथन

वाक्य 'भारत की राष्ट्रपति एक महिला है' लें। इस घोषणात्मक वाक्य (declarative sentence) को पढ़ते ही आप तुरंत यह निर्णय ले सकते हैं कि यह वाक्य सत्य है या असत्य, और इस प्रकार का निर्णय कोई भी ले सकता है। और ऐसा कभी भी नहीं हो सकता कि कुछ लोग इस कथन को सत्य मानें और कुछ अन्य इसे असत्य मानें। सभी का उत्तर एक ही होगा। अत: यह वाक्य या तो **सार्वत्रिक (universal) रूप से सत्य होगा या सार्वत्रिक रूप से असत्य।**

इसी प्रकार, घोषणात्मक वाक्य 'हाथी का भार इंसान के भार से अधिक है।' या तो सत्य होगा या असत्य, लेकिन दोनों नहीं। गणितीय तर्क में हम इस प्रकार के वाक्यों को **कथन (statement/proposition)** कहते हैं।

इसके विपरीत, घोषणात्मक वाक्य "महिलाएँ पुरुषों से अधिक बुद्धिमान होती हैं।" को लें। कुछ लोग इसे सत्य मानेंगे और कुछ लोग इसे असत्य। अत: यह वाक्य न तो सार्वत्रिक रूप से सत्य है और न ही असत्य। गणितीय तर्क में ऐसे वाक्य को कथन नहीं माना जाता।

ध्यान रहे कि **कथन को या तो सार्वत्रिक रूप से सत्य होना चाहिए या सार्वत्रिक रूप से असत्य।** उदाहरण के लिए, 'अंडे में प्रोटीन होता है।' और 'भारत के प्रधान मंत्री को पुरुष होना चाहिए।' दोनों ही कथन हैं, जिनमें पहला सत्य है और दूसरा असत्य।

क्या आप नीचे दिए गए वाक्यों को कथन कहेंगे?

'फिल्म देखिए।'

'बढ़िया !'

'क्या कहा आपने?'

वास्तव में इनमें से कोई भी वाक्य घोषणात्मक नहीं है। (पहला वाक्य एक आदेश है, दूसरा वाक्य विस्मयादिबोधक है और तीसरा एक प्रश्न है।) अत: इनमें से कोई भी कथन नहीं है।

आइए अब हम कुछ गणितीय कथनों पर विचार करें। गणित को अध्ययन करते समय आपने ऐसे कई कथनों का अध्ययन किया होगा और कइओं को बनाया होगा। कुछ उदाहरण हैं:

दो जमा दो बराबर चार।

दो जमा दो बराबर पाँच।

$x + y > 0$, जहाँ $x > 0$ और $y > 0$.

n अवयवों वाले समुच्चय के 2^n उपसमुच्चय होते हैं।

इन कथनों में से तीन सत्य हैं और एक असत्य (कौन-सा?)।

अब आप बीजीय वाक्य '$x + y > 0$' लीजिए। क्या यह एक कथन है? क्या हम यह बताने की स्थिति में हैं कि यह वाक्य सत्य है या असत्य? नहीं, तब तक नहीं जब तक कि हमें यह पता नहीं चल जाता कि x और y के मान क्या हैं। उदाहरण के लिए, $x = 1$, $y = -2$ पर यह वाक्य असत्य होगा, जबकि $x = 1$, $y = 0$ पर यह वाक्य सत्य होगा। अतः

'$x + y > 0$' एक कथन **नहीं** है, जबकि

'$x + y > 0$, जहाँ $x > 0, y > 0$' एक कथन है।

अब आप नीचे दिए गए इस छोटे प्रश्न को हल कीजिए।

E1) निम्नलिखित वाक्यों में कौन-कौन से वाक्य कथन हैं? अपने उत्तर के कारण दीजिए।

i) सूर्य पश्चिम से निकलता है।

ii) यहाँ से दिल्ली कितनी दूर है?

iii) धूम्रपान स्वास्थ्य के लिए हानिकारक है।

iv) बादल के न होने पर वर्षा नहीं होती।

v) कितना अच्छा दिन है!

vi) वह एक इंजीनियरिंग स्नातिका है।

vii) अनंततः अनेक n के लिए $2^n + n$ एक सम संख्या होती है।

viii) सभी $x, y \in \mathbf{R}$ के लिए $x + y = y + x$.

ix) गणित करने में मज़ा आता है।

x) $2^n = n^2$

ज्यादातर हम कथनों को p, q, आदि जैसे छोटे अक्षरों से प्रकट करेंगे। उदाहरण के लिए, हम 'बर्फ़ हमेशा ठंडी है।' को p से, या '$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, जहाँ $\theta \in [0, 2\pi]$' को q से प्रकट कर सकते हैं।

कभी-कभी हम इस बात को निम्न प्रकार से भी व्यक्त करेंगे:

p : बर्फ़ हमेशा ठंडी है, या

$q : \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, जहाँ $\theta \in [0, 2\pi]$.

अब, हम जानते हैं कि कोई भी कथन या तो सत्य होगा या असत्य, दोनों नहीं। यदि यह सत्य है, तो इसे हम सत्य मान (truth value) T देंगे और यदि असत्य है तो इसे सत्य मान F देंगे। उदाहरण के लिए, 'बर्फ़ 30°C पर पिघलती है।' का सत्य मान F है, जबकि '$x^2 \geq 0$, जहाँ $x \in \mathbf{R}$' का सत्य मान T है।

कभी-कभी, जैसा कि तर्क परिपथ के संबंध में (देखिए इकाई 3), हम T के स्थान पर 1 का और F के स्थान पर 0 का प्रयोग करते हैं।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

E2) E1 में दिए गए कथनों के सत्य मान बताइए।

E3) सत्य मान T और F वाले दो-दो कथन दीजिए। साथ ही, ऐसे दो वाक्यों के उदाहरण दीजिए जो कथन नहीं हैं।

आइए अब हम संयुक्त कथनों को प्राप्त करने के लिए सरल कथनों को संयोजित करने के कुछ तरीके देखें।

1.3 तर्कसंगत संयोजक

जब आप किसी से बात करते हैं, तो क्या आप सिर्फ सरल वाक्यों का प्रयोग करते हैं? क्या आप 'और' 'अथवा' जैसे शब्दों की सहायता से सरल वाक्यों को मिलाकर कुछ अधिक जटिल वाक्यों का प्रयोग नहीं करते हैं? ठीक इसी प्रकार गणितीय तर्क के अधिकांश कथन 'और' 'अथवा', 'यदि , तब', 'यदि और केवल यदि' आदि जैसे शब्दों और वाक्यांशों से जोड़े गए सरल कथनों के संयोजन होते हैं। इन शब्दों और वाक्यांशों को **तर्कसंगत संयोजक (logical connectives)** कहते हैं। इस प्रकार के 6 संयोजक हैं, जिन पर हम अब एक-एक करके चर्चा करेंगे।

1.3.1 वियोजन

वाक्य 'तेनाली या चूहा बाज़ार गया था।' लीजिए। इस वाक्य को 'तेनाली बाजार गया था या चूहा बाज़ार गया था' भी लिख सकते हैं। अत: वास्तव में यह कथन 'या' से जुड़े हुए दो सरल कथनों से बना है। इस प्रकार के संयुक्त कथन का एक खास नाम है।

परिभाषा: दो कथनों p और q का **वियोजन (disjunction)** संयुक्त कथन **p या q** होता है, जिसे $p \vee q$ से दर्शाते हैं।
उदाहरण के लिए, 'जरीना ने एक पुस्तक लिखी है या सिंह ने एक पुस्तक लिखी है।', **p और q** का वियोजन है, जहाँ

p : जरीना ने एक पुस्तक लिखी है।, और

q : सिंह ने एक पुस्तक लिखी है।

इसी प्रकार, यदि p, '$2 > 0$' को प्रकट करता हो, और q, '$2 < 5$' को प्रकट करता हो, तो $p \vee q$ कथन '2, 0 से बड़ा है या 2, 5 से छोटा है।' को प्रकट करता है।

आइए अब हम देखें कि $p \vee q$ के सत्य मान का p और q के सत्य मानों से क्या संबंध है। इसके लिए आइए हम ऊपर दिए गए ज़रीना और सिंह वाले उदाहरण को लें। यदि इन दोनों में से किसी एक ने भी पुस्तक लिखी है तो संयुक्त कथन $p \vee q$ सत्य होगा। और, यदि दोनों ने पुस्तकें लिखी हैं, तब भी संयुक्त कथन $p \vee q$ सत्य होगा। इस तरह हम यह पाते हैं, कि यदि p और q में से किसी एक का भी सत्य मान T हो, तो '$p \vee q$' का सत्य मान भी T होगा। वरना $p \vee q$ का सत्य मान F होगा। यह बात किन्हीं दो कथनों p और q पर लागू होती है। p, q और $p \vee q$ के सत्य मानों के बीच के संबंधों को आसानी से देखने के लिए, हम इन्हें एक सारणी (सारणी 1) के रूप में प्रस्तुत करते हैं। इस प्रकार की सारणी को हम सत्य सारणी (truth table) कहते हैं।

सारणी 1 : वियोजन की सत्य सारणी

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

यह सारणी कैसे बनायी? पहले हम उन सत्य मानों को लेते हैं जो p ग्रहण कर सकता है — T या F अब जब p सत्य होता है, तब q सत्य या असत्य हो सकता है। इसी प्रकार जब p असत्य होता है, तब q सत्य या असत्य हो सकता है। इस तरह, संयुक्त कथन $p \vee q$ के लिए 4 संभावनाएँ होती हैं। यदि इन चारों में से कोई भी एक संभावना दी हुई हो तो हम $p \vee q$ का सत्यमान ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण

के लिए , तीसरी संभावना, अर्थात् p असत्य और q सत्य लीजिए। तब, परिभाषा के अनुसार, $p \vee q$ सत्य होगा। इसी प्रकार, आप जांच कर सकते हैं कि सारणी की अन्य पंक्तियाँ भी संगत हैं।

आइए यहाँ हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 1 : 'पृथ्वी चपटी है।' और '3 + 5 = 2' के वियोजन का सत्य मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए p 'पृथ्वी चपटी है' को प्रकट करता है और q '3 + 5 = 2' को प्रकट करता है। तब, हम जानते हैं कि p और q दोनों के सत्य मान F हैं। अत: $p \vee q$ का सत्य मान F है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए।

E4) निम्नलिखित कथनों का वियोजन लिखिए और उसका सत्य मान बताइए।
   i) 2+3 = 7
   ii) राधा इंजीनियर है।

हम ऊपर चर्चित संयोजक को '**समाविष्ट अथवा' (inclusive or)** भी कहते हैं। ऐसा इसलिए है क्योंकि $p \vee q$ तब भी सत्य होता है जबकि p और q दोनों सत्य होते हैं। लेकिन उस स्थिति में कौन सा संयोजक हो जिसके अधीन संयोजन सत्य सिर्फ़ तब हो जबकि दोनों में से केवल एक ही सत्य हो? वह है निम्नलिखित संयोजक।

परिभाषा: दो कथनों p और q का **अपवर्जी वियोजन (exclusive disjunction)** है कथन **'या तो p सत्य है, या q सत्य है, लेकिन दोनों सत्य नहीं हैं।'** इसे हम $p \oplus q$ से प्रकट करते हैं।
अत: उदाहरण के लिए, अगर p, '2+3=5' है और q, E4 (ii) में दिया गया कथन है, तो $p \oplus q$ कथन 'या तो 2+3=5 या राधा इंजीनियर है' होता है। यह कथन केवल तभी सत्य होगा, जबकि राधा इंजीनियर न हो।

सामान्यत:, $p \oplus q$ का सत्य मान, p और q के सत्य मानों से किस प्रकार संबंधित होता है? नीचे दिया गया प्रश्न इसी बात पर आधारित है।

E5) $\oplus$ की सत्य सारणी बनाइए। ध्यान रहे कि यदि p और q दोनों सत्य हैं, तो $p \oplus q$ सत्य नहीं होगा।

आइए अब हम आम भाषा में इस्तेमाल होने वाले 'और' के तर्कसंगत अनुरूप पर विचार करें।

1.3.2 योग

आम भाषा की तरह, तर्कशास्त्र में भी हम 'और' का प्रयोग सरल कथनों को मिलाकर संयुक्त कथन बनाने के लिए करते हैं। उदाहरण के लिए , '1+4≠5 और प्रोफेसर राव रसायन पढ़ाते हैं।' को कथनों '1+4≠5' और 'प्रोफेसर राव रसायन पढ़ाते हैं।' को 'और' से जोड़कर बनाया गया है। आइए हम इस प्रकार के संयुक्त कथन की औपचारिक शब्दावली की परिभाषा करें।

परिभाषा: हम संयुक्त कथन **'p और q'** को कथनों p और q का **योग (conjunction)** कहते हैं। इसे हम $p \wedge q$ से प्रकट करते हैं।
उदाहरण के लिए , '$3 + 1 \neq 7 \wedge 2 > 0$' कथनों '$3 + 1 \neq 7$' और '$2 > 0$' का योग है। इसी प्रकार '$2+1 = 3 \wedge 3 = 5$' कथनों '$2+1 = 3$' और '$3 = 5$' का योग है।

अब बताइए कि $p \wedge q$ कब सत्य होगा? क्या आप मानते हैं कि यह केवल तभी हो सकता है, जबकि p और q **दोनों** ही सत्य हों, वरना नहीं? उदाहरण के लिए , '$2+1 = 3 \wedge 3 = 5$' सत्य नहीं है, क्योंकि '$3 = 5$' असत्य है।

अत: योग की सत्य सारणी नीचे दी गई सारणी 2 के रूप की होगी।

सारणी 2 : योग की सत्य सारणी

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

यह जानने के लिए कि ऊपर दी गई सत्य सारणी का प्रयोग हम कैसे कर सकते हैं, एक उदाहरण लें।

उदाहरण 2 : '$2 \div 5 = 1$' और 'पद्मा बंगलौर में है।' के योग का सत्य मान ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए $p : 2 \div 5 = 1$. और

q : पद्मा बंगलौर में है।

तब p का सत्य मान F होगा। अतः, सारणी 2 से आपको मालूम हो जाएगा कि $p \wedge q$ का सत्य मान F है।

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E6) उन वास्तविक संख्याओं x का समुच्चय प्राप्त कीजिए जिनके लिए $p \wedge q$ का सत्य मान T होगा, जहाँ $p : x > -2$, और $q : x + 3 \neq 7$.

अब, बताइए कि सारणियों 1 और 2 के अंतिम स्तभों के सत्य मानों के बीच आपको कोई संबंध दिखाई पड़ता है? अगले संयोजक का अध्ययन करने के बाद, आप इस संबंध को औपचारिक रूप दे सकेंगे।

1.3.3 निषेध

आपको कुछ ऐसे बच्चे ज़रूर मिले होंगे जिनसे यदि कोई काम करने को कहा जाए , तो वे उसका ठीक उल्टा करेंगे। या, उनसे जब यह पूछा जाता है कि क्या वे चावल खाना चाहेंगे, तो उनका जवाब होगा 'नहीं', यानी हाँ का 'निषेध'। अब, यदि p, कथन 'मैं चावल खाऊँगी' को प्रकट करता हो, तो हम कथन 'मैं चावल नहीं खाऊँगी' को किस प्रकार प्रकट करेंगे? आइए, उस संयोजक को परिभाषित करें, जिसकी सहायता से हम इसे प्रकट कर सकते हैं।

परिभाषा : कथन p का निषेध **(negation)** कथन **'नहीं p' (not p)** होता है, जिसे **$\sim p$** से प्रकट किया जाता है।

उदाहरण के लिए , यदि p, 'कमला अध्ययन केन्द्र में है।' हो, तो $\sim p$ होगा 'कमला अध्ययन केन्द्र में नहीं है'। इसी प्रकार, यदि p है 'कोई भी व्यक्ति ऑक्सीजन के बिना ज़िन्दा नहीं रह सकता।' तो $\sim p$ होगा 'कम से कम एक व्यक्ति ऑक्सीजन के बिना ज़िन्दा रह सकता है।'

अब, $\sim p$ के सत्य मान के संबंध में आप यह बात तो मानेंगे ही कि यह T होगा जब p का सत्य मान F होगा, और यह F होगा जब p का सत्य मान T होगा। इस बात को ध्यान में रखते हुए आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल कीजिए।

E7) $\sim p$ लिखिए , जहाँ p है:

i) $0 - 5 \neq 5$

ii) प्रत्येक $n \in N$ के लिए , $n > 2$.

iii) अधिकांश भारतीय बच्चे कक्षा 5 तक ही पढ़ पाते हैं।

E8) 'निषेध' की सत्य सारणी बताइए।

आइए अब हम 'यदि ....., तो .....' और 'यदि और केवल यदि' को निरूपित करने वाले संयोजकों के बारे में चर्चा करें।

1.3.4 प्रतिबंधी संयोजक

कथन 'यदि आएशा को परीक्षा में 75% या ज़्यादा अंक प्राप्त होते हैं, तो उसे पाठ्यक्रम में A ग्रेड मिलेगा।' को लीजिए। हम इस कथन को 'यदि p, तो q' भी लिख सकते हैं, जहाँ
p : आयशा को परीक्षा में 75% या ज़्यादा अंक प्राप्त होते है। और
q : आएशा को पाठ्यक्रम में A ग्रेड मिलेगा।
यह संयुक्त कथन p द्वारा q के निहितार्थ (implication) का एक उदाहरण है।

परिभाषा: यदि p और q दो कथन हों, तो हम कथन **'यदि p, तो q'** को $p \to q$ से प्रकट करते हैं। इसे हम 'p में q **निहित है**', या 'q के लिए p **पर्याप्त है**', या 'p **केवल यदि** q' के रूप में भी पढ़ते हैं। हम p को **परिकल्पना (hypothesis)** और q को **निष्कर्ष (conclusion)** भी कहते हैं। आगे, $p \to q$ के रूप के कथन को **प्रतिबंधी कथन (conditional statement)** कहते हैं।

अतः, उदाहरण के लिए , प्रतिबंधी कथन 'यदि m, **Z** का सदस्य है, तो m, **Q** का सदस्य होता है।' में परिकल्पना '$m \in \mathbf{Z}$' है और निष्कर्ष '$m \in \mathbf{Q}$' है।

गणितीय रूप में हम इस कथन को
$m \in \mathbf{Z} \to m \in \mathbf{Q}$
लिख सकते हैं।

आइए , हम सत्य मान के लिए कथन $p \to q$ का विश्लेषण करें। क्या आप नीचे दी गई सत्य सारणी (सारणी 3) से सहमत हैं? शायद आप अपने आसपास से लिए गए किसी उदाहरण को ध्यान में रखकर, इस सत्य सारणी की जांच करना चाहें।

सारणी 3: निहितार्थ की सत्य सारणी

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

शायद आप सारणी 3 की तीसरी पंक्ति को देखकर कुछ अचंभे में पड़ गए हों। लेकिन, उदाहरण '$3 < 0 \to 5 > 0$' लीजिए। यहाँ निष्कर्ष सत्य रहेगा चाहे परिकल्पना कुछ भी क्यों न हों। अतः इस स्थिति में भी प्रतिबंधी कथन सत्य बना रहता है। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि **निष्कर्ष शून्यत: (vacuously) सत्य है।**

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए।

E9) $p \to q$ के संगत कथन को लिखिए , और x के वे मान ज्ञात कीजिए जिन के लिए यह कथन असत्य हैं, जहाँ

$p : x + y = xy$ जहाँ $x, y \in \mathbf{R}$,

$q : x \not< 0$, प्रत्येक $x \in \mathbf{Z}$ के लिए।

अब निहितार्थ 'यदि जहानारा बड़ौदा जाती है, तो वह दिल्ली के सम्मेलन में भाग नहीं ले पाती।' लीजिए। इसका विलोम क्या होगा? इसे ज्ञात करने में निम्नलिखित परिभाषा उपयोगी हो सकती है।

परिभाषा: $p \to q$ का **विलोम (converse)** $q \to p$ है। इस स्थिति में हम यह भी कहते हैं कि 'p, q के लिए **आवश्यक (necessary)** है', या 'p यदि q'.

अतः ऊपर दिए गए उदाहरण में कथन का विलोम होगा 'यदि जहानारा दिल्ली के सम्मेलन में भाग नहीं लेती, तो वह बड़ौदा चली जाती।' इससे यह अर्थ निकलता है कि दिल्ली के सम्मेलन में जहानारा का भाग न लेना उसके बड़ौदा जाने के लिए आवश्यक है।

अब, उस स्थिति पर विचार करें जिसमें हम एक निहितार्थ और उसके विलोम को मिला देते हैं। '$p \to q$ और $q \to p$' को दर्शाने के लिए, हम आपका परिचय एक छोटे संकेत से कराएंगे।

परिभाषा: मान लीजिए p और q दो कथन हैं। समुच्चय कथन

$$(p \to q) \wedge (q \to p)$$

दोनों संयोजक $\to$ और $\leftrightarrow$, प्रतिबंधी संयोजक कहलाते हैं।

p और q का **दो-तरफ़ी निहितार्थ (biconditional)** है। इसे हम $p \leftrightarrow q$ से प्रकट करते हैं, और इसे 'p **यदि और केवल यदि** q' पढ़ते हैं। हम यह भी कहते हैं कि 'p निहित करता है और निहित है q द्वारा' या 'q के लिए p **आवश्यक और पर्याप्त है**'।

उदाहरण के लिए, 'सुधा का वजन बढ़ेगा यदि और केवल यदि वह नियमित रूप से खाना खाती रहे।' का अर्थ यह है कि 'सुधा का वज़न बढ़ेगा यदि वह नियमित रूप से खाना खाती रहे और सुधा नियमित रूप से खाना खाती है यदि उसका वजन बढ़ रहा हो।'

शायद आप सोच रहे हों कथनों $p \leftrightarrow q$ और $q \leftrightarrow p$ में क्या अंतर है। भाग 1.4 का अध्ययन करने पर आप जान पाएंगे कि इन दोनों कथनों में अदल-बदल क्यों हो सकता है।

आइए अब हम दो-तरफ़ी निहितार्थ की सत्य सारणी पर विचार करें। इसके सत्य मान प्राप्त करने के लिए हमें सारणियों 2 और 3 को इस्तेमाल करना होगा, जैसा कि आप सारणी 4 में देखेंगे। ऐसा इसलिए है, क्योंकि $(p \to q) \wedge (q \to p)$ का मान ज्ञात करने के लिए हमें इसमें शामिल सरल कथनों के मान ज्ञात करने होंगे।

सारणी 4 : दो-तरफ़ी निहितार्थ की सत्य सारणी

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T
T	F	F	T	F
F	T	T	F	F
F	F	T	T	T

जैसा कि आप सारणी के अंतिम स्तंभ (और अपने अनुभव) से देख सकते हैं, $p \leftrightarrow q$ केवल तब सत्य होता है जबकि p और q दोनों सत्य होते हैं या p और q दोनों असत्य। दूसरे शब्दों में, $p \leftrightarrow q$ केवल तब सत्य होता है जबकि p और q के सत्य मान बराबर हों। अतः, उदाहरण के लिए, 'परिमला अमरीका में है यदि और केवल यदि $2 + 3 = 5$' केवल तब सत्य होता है जबकि 'परिमला अमरीका में है।' सत्य हो।

अब, इससे संबंधित कुछ प्रश्न।

E10) नीचे दिए गए प्रत्येक संयुक्त कथन के उन सरल कथनों p, q, r, आदि का पता लगाइए जिनके संयोजन से ये कथन बना है। फिर, संयोजकों की सहायता से इसे प्रतीकों में लिखिए और इसका सत्य मान ज्ञात कीजिए।

i) यदि त्रिभुज ABC समबाहु है, तो यह समद्विबाहु (isosceles) त्रिभुज है।

ii) a और b पूर्णांक हैं यदि और केवल यदि ab एक परिमेय संख्या है।

iii) यदि रज़ा पाँच गिलास पानी पीता है और सुधा चार चाय के प्याले पीती है, तो श्याम गणित की परीक्षा में उत्तीर्ण नहीं होगा।

iv) मरियम कक्षा 1 में या कक्षा 2 में है।

E11) ऐसे दो कथन p और q लिखिए जिनके लिए $q \to p$ सत्य है लेकिन $p \leftrightarrow q$ असत्य है।

अब बताइए कि उस कथन का सत्य मान कैसे ज्ञात करेंगे जिसमें एक से अधिक संयोजक हों? उदाहरण

के लिए , क्या $\sim p \vee q$ का अर्थ $(\sim p) \vee q$ है या $\sim (p \vee q)$ है? इससे संबंधित कुछ नियमों पर हम अब चर्चा करेंगे।

1.3.5 पूर्वता नियम

संख्याओं पर संक्रियाएँ लागू करते समय आपने बोडमास (bodmas) नियम को लागू करने की जरूरत महसूस की होगी। इस नियम के अनुसार किसी अंकीय व्यंजक का मान परिकलित करते समय पहले हम कोष्ठक के अंदर की राशियों का मान परिकलित करते हैं, और इसके बाद क्रम से 'का', 'भाग', 'गुणा', 'जोड़' और 'घटाने' की संक्रिया लागू करते हैं। एक से अधिक संयोजक वाले संयुक्त कथनों का सत्य मान परिकलित करने के लिए ऐसा ही एक नियम है, जिसमें संयोजकों को लागू करने का क्रम बताया गया है।

हमें ऐसे नियम की आवश्यकता क्यों है? मान लीजिए हमारे पास पूर्वता का कोई क्रम नहीं है, और हम $\sim p \vee q$ का सत्य मान ज्ञात करना चाहते हैं। हममें से कुछ तो $(\sim p) \vee q$ का मान ले सकते हैं, और कुछ $\sim (p \vee q)$ का मान। इन दोनों के सत्य मान अलग-अलग हो सकते हैं। उदाहरण के लिए , यदि p और q दोनों सत्य हों, तो $(\sim p) \vee q$ सत्य होता है, परन्तु $\sim (p \vee q)$ असत्य होता है। इस तरह की संदिग्धता न हो, इसके लिए हमें क्रम के नियम की आवश्यकता होती है। आइए अब हम देखें कि यह नियम क्या है।

पूर्वता नियम: कथनों के किसी ऐसे सूत्र में जिसमें कोई कोष्ठक नहीं है, जिस पूर्वता के क्रम में संयोजकों को लागू किया जाता है, वह है :

i) $\sim$

ii) $\wedge$

iii) $\vee$ और $\oplus$

iv) $\rightarrow$ और $\leftrightarrow$

यहाँ यह ध्यान दीजिए कि पूर्वता के क्रम में 'समाविष्ट अथवा' और 'अपवर्जी अथवा' दोनों ही तीसरे नंबर पर हैं। इसका अर्थ है कि इन दोनों में से किसी को भी आप पहले लागू कर सकते हैं, और परिणाम वही रहेगा। उदाहरण के लिए $(p \oplus q) \vee r$ के सत्य मान और $p \oplus (q \vee r)$ के सत्य मान बराबर हैं।

इसी प्रकार, 'निहितार्थ' और 'दो-तरफी निहितार्थ' दोनों ही पूर्वता के क्रम में चौथे नंबर पर हैं।

यह नियम किस प्रकार लागू होता है, इसे स्पष्ट रूप से समझने के लिए आइए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 3: $p \rightarrow q \wedge r \leftrightarrow r \oplus q$ की सत्य सारणी बनाइए।

हल: हम दिए गए सूत्र का सत्य मान ज्ञात करना चाहते हैं जबकि हमें p, q और r के सत्य मान ज्ञात हैं। ऊपर दिए गए पूर्वता नियम के अनुसार, हमें पहले $\sim r$ का सत्य मान ज्ञात करना होगा, इसके बाद $(q \wedge \sim r)$ का, इसके बाद $(r \oplus q)$ का, और फिर या तो $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$ का या $(q \wedge \sim r) \leftrightarrow r \oplus q$ का सत्य मान, और अंत में शेष का सत्य मान ज्ञात करना होगा। (यहाँ हम '$\leftrightarrow$' के पहले '$\rightarrow$' को लागू करेंगे।)

उदाहरण के लिए , मान लीजिए p और q सत्य है, और r असत्य है। तब $\sim r$ का मान T होगा, $q \wedge \sim r$ का मान T होगा, $r \oplus q$ का मान T होगा, $p \rightarrow (q \wedge \sim r)$ का मान T होगा, और इसलिए $p \rightarrow q \wedge \sim r \leftrightarrow r \oplus q$ का मान T होगा।

आप जांच कर सकते हैं कि शेष मान वही हैं जो कि सारणी 5 में दिए गए हैं। यहाँ आप नोट करें कि 8 $(=2^3)$ संभावनाएँ हैं क्योंकि इसमें 3 सरल कथन शामिल हैं।

सारणी 5 : $p \to q \wedge \sim r \leftrightarrow r \oplus q$

p	q	r	~r	$q \wedge \sim r$	$r \oplus q$	$p \to q \wedge \sim r$	$p \to q \wedge \sim r \leftrightarrow r \oplus q$
T	T	T	F	F	F	F	T
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	F	T	F
F	T	F	T	T	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	F	F	T	F

* * *

इसी तरह आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्नों को हल कर सकते हैं।

E12) उदाहरण 3 में यदि आप पहले $\leftrightarrow$ लागू करें और उसके बाद $\to$ लागू करें, तो संयुक्त कथन के सत्य मानों में किस प्रकार परिवर्तन होगा?

E13) उदाहरण 3 में, यदि हम $\oplus$ के स्थान पर $\wedge$ लें, तो नयी सत्य सारणी क्या होगी?

E14) $p \wedge q \vee \sim r$ और $(p \wedge q) \vee (\sim r)$ की सत्य सारणियाँ बनाइए और बताइए कि इनमें क्या अंतर है।

E15) निम्नलिखित सूत्रों का सही अर्थ निकालने के लिए आप इन्हें कोष्ठकों में कैसे लिखेंगे? (उदाहरण के लिए, $p \vee \sim q \wedge r$ को $p \vee ((\sim q) \wedge r)$ के कोष्ठक रूप में रखा जाएगा।)
i) $\sim p \vee q$,
ii) $\sim q \to \sim p$,
iii) $p \to q \leftrightarrow \sim p \vee q$,
iv) $p \oplus q \wedge r \to \sim p \vee q \leftrightarrow p \vee r$.

अभी तक हमने पुराने कथनों से नए कथन बनाने की विभिन्न विधियों पर विचार किया है। लेकिन, क्या बनाए गए ये सभी कथन अलग-अलग हैं? या, इनमें से कुछ कथन समान हैं? और "समान" है, तो किस अर्थ में? अब हम इसी बात पर चर्चा करेंगे।

1.4 तर्कसंगत तुल्यता

आम भाषा की तरह, गणित में भी किसी बात को कई तरीकों से कहा जा सकता है। इस भाग में हम तर्कसंगत कथनों के संदर्भ में इस बात पर चर्चा करेंगे।

$\sim q \to \sim p$ कथन $p \to q$ का **प्रतिधनात्मक (contrapositive)** है।

कथनों 'यदि लाला अमीर है, तो उसके पास एक गाड़ी अवश्य होगी' और 'यदि लाला के पास कोई गाडी नहीं है, तो वह अमीर नहीं होगा' पर गौर करें। क्या इन कथनों का समान अर्थ निकलता है? यदि हम पहले कथन को $p \to q$ के रूप में लिखें, तो दूसरा कथन $(\sim q) \to (\sim p)$ होगा। इन दोनों कथनों के सत्य मानों का संबंध क्या होगा? इसके जवाब के लिए हम निम्नलिखित सारणी बनाते हैं।

सारणी 6

p	q	~p	~q	$p \to q$	$\sim q \to \sim p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

सारणी 6 के अंतिम दो स्तंभ लीजिए। यहाँ आप देखेंगे कि p और q के हर सत्य मान के लिए '$p \rightarrow q$' और '$\sim q \rightarrow \sim p$' के सत्य मान बराबर हैं। ऐसी स्थिति में हम कथनों को तुल्य कथन कहते हैं।

परिभाषा: दो कथनों r और s को हम **तर्कसंगततः तुल्य (logically equivalent)** कहते हैं अगर इनमें शामिल सरल कथनों के हर सत्य मान के लिए r और s के सत्य मान बराबर हों। हम इस बात को $r \equiv s$ से प्रकट करते हैं।

सारणी 6 से हम पाते हैं कि $(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$.
आप यह भी जांच कर सकते हैं कि किन्हीं दो कथनों p और q के लिए $(p \leftrightarrow q) \equiv (q \leftrightarrow p)$.

एक और उदाहरण के रूप में निम्नलिखित तुल्यता लीजिए जिसका प्रयोग प्रायः गणित में किया जाता है।

उदाहरण 4: किन्हीं दो कथनों p और q के लिए, दिखाइए कि

$$(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q.$$

हल: निम्नलिखित सत्य सारणी पर ग़ौर कीजिए।

सारणी 7

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p \wedge \sim q$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	F
F	T	T	F	T	F	F
F	F	T	T	F	T	T

आप यहाँ देख सकते हैं कि सारणी 7 के अंतिम दो स्तंभ समान हैं। इस तरह, p और q के सभी सत्य मानों के लिए $\sim(p \vee q)$ और $\sim p \wedge \sim q$ के सत्य मान समान हैं।
अतः $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$.

* * *

चित्र 1 : ऑगस्टस द मॉर्गन (1806-1871) मदुरा में पैदा हुए थे।

जिस तुल्यता के बारे में हमने अभी चर्चा की है, वह द **मॉर्गन नियमों** में से एक है। आप MTE-04 में समुच्चय-संक्रियाओं के संदर्भ में इन नियमों के बारे में पढ़ चुके हैं। द मॉर्गन का दूसरा नियम भी इसी प्रकार का है:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q.$$

वास्तव में, तुल्य कथनों के बारे में इस प्रकार के अनेक नियम हैं। इनमें से कुछ नियम नीचे दिए गए हैं, जहाँ p, q और r, हमेशा की तरह, कथनों को प्रकट करते हैं।

(क) **द्वि-निषेध** (double negation) : $\sim(\sim p) \equiv p$

(ख) **वर्गसम नियम** (idempotent laws) : $p \wedge p \equiv p$,
$p \vee p \equiv p$,

(ग) **क्रमविनिमेयता** (commutativity) : $p \vee q \equiv q \vee p$
$p \wedge q \equiv q \wedge p$

(घ) **सहचारिता** (associativity) : $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

(ङ) **बंटन नियम** (distributivity) : $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

अब हम चाहेंगे कि आप इन नियमों को सिद्ध करें।

E16) सत्य सारणियों की मदद से दिखाइए कि ऊपर (क) से (ङ) तक में दिए गए नियम सही हैं।

E17) सिद्ध कीजिए कि 'तर्कसंगत तुल्यता' एक तुल्यता संबंध है।

E18) जांच कीजिए कि $(\sim p \vee q)$ और $(p \rightarrow q)$ तर्कसंगततः तुल्य हैं या नहीं।

ऊपर दिए गए नियमों और आप द्वारा जांच की गई E18 की तुल्यता का इस्तेमाल काफी होता रहता है। अत: इन्हें याद रखना फायदेमंद रहेगा। इनका प्रयोग आप इकाई 3 में स्विचन परिपथों के संदर्भ में भी करेंगे।

आइए अब हम कुछ ऐसे कथनीय सूत्र लें जो कि हमेशा सत्य होते हैं या हमेशा असत्य। जैसे कि, कथन 'यदि बानो सो रही है और पप्पू आइसक्रीम पसंद करता है, तो बानो सो रही है।' लीजिए। आप इस संयुक्त कथन की सत्य सारणी बना सकते हैं, और देख सकते हैं कि यह हमेशा सत्य होता है। इस संदर्भ में आप निम्नलिखित परिभाषा को देखिए।

परिभाषा: वह संयुक्त कथन जो कि उसमें शामिल सरल कथनों के सभी संभव सत्य मानों के लिए सत्य होता हो, उसे **सर्वसत्य कथन (tautology)** कहते हैं। इसी प्रकार, वह कथन जो कि उसमें शामिल सरल कथनों के सभी संभव मानों के लिए असत्य होता हो, उसे **विरोध (contradiction)** कहते हैं।

आइए हम इस प्रकार के कथनों के कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 5: सत्यापित कीजिए कि $p \wedge q \wedge \sim p$ एक विरोध है, और $p \rightarrow q \leftrightarrow p \vee q$ एक सर्वसत्य कथन है।

हल: आइए हम इन दो कथनों की सत्य सारणियाँ साथ-साथ बनाएं।

सारणी 8

p	q	$\sim p$	$p \wedge q$	$p \wedge q \wedge \sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$	$p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$
T	T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T	T

सारणी के पाँचवें स्तंभ से आप देख सकते हैं कि $p \wedge q \wedge \sim p$ एक विरोध है। यह देख कर आपको हैरत नहीं होनी चाहिए क्योंकि $p \wedge q \wedge \sim p \equiv (q \wedge \sim p) \wedge q$ (ऊपर दिए गए विभिन्न नियमों को लागू करके इसकी जाँच कीजिए)।

अब बताइए कि सारणी के अंतिम स्तंभ से हमें किस बात का पता चलता है? वह है कि $p \rightarrow q \leftrightarrow \sim p \vee q$ एक सर्वसत्य कथन है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते?

E19) मान लीजिए $\mathcal{T}$ एक सर्वसत्य कथन को (अर्थात् उस कथन को जिसका सत्य मान हमेशा T रहता है) प्रकट करता है और $\mathcal{F}$ एक विरोध को प्रकट करता है। तब, किसी भी कथन p के लिए यह दिखाइए कि
i) $p \vee \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}$
ii) $p \wedge \mathcal{T} \equiv p$
iii) $p \vee \mathcal{F} \equiv p$
iv) $p \wedge \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$

किसी कथन को सर्वसत्य सिद्ध करने की एक और विधि है तर्कसंगत तुल्यता के गुणों के इस्तेमाल से। आइए हम निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

पूरकीकरण नियम
$q \wedge \sim q$ एक विरोध है।

उदाहरण 6: दिखाइए कि $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$ एक सर्वसत्य कथन है।

हल: $[(p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$
$\equiv [(\sim p \vee q) \wedge \sim q] \rightarrow \sim p$, E18 और $\equiv$ की सममितता की सहायता से
$\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q)] \rightarrow \sim p$, द मॉर्गन के नियमों से।
$\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \vee \mathcal{F}] \rightarrow \sim p$, क्योंकि $q \wedge \sim q$ हमेशा असत्य है।
$\equiv [(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow \sim p$, E18 से।

जो कि एक सर्वसत्य कथन है।

इसलिए जिस कथन को लेकर हम चले थे, वह सर्वसत्य है।

* * *

तर्कसंगत तुल्यता के नियमों का प्रयोग, सत्य सारणियों की सहायता लिए बिना, कुछ अन्य तर्कसंगत तुल्यताओं को सिद्ध करने में भी किया जा सकता है। आइए इस संबंध में हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 7: दिखाइए कि $(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim r) \equiv \sim [p \wedge (q \vee r)]$

हल: पहले हम ऊपर दिए गए तुल्यता के बाएं पक्ष के कथन को लेंगे। इसके बाद तर्कसंगत तुल्य कथन प्राप्त करने के लिए ऊपर बताए गए नियमों को या E18 में दी गई तुल्यता को लागू करेंगे। इस प्रक्रिया को हम तब तक जारी रखेंगे जब तक कि हमें ऊपर दी गई तुल्यता के दाएं पक्ष में दिया गया कथन प्राप्त नहीं हो जाता।

अब $(p \rightarrow \sim q) \wedge (p \rightarrow \sim r)$

$\equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r)$, E18 से।

$\equiv \sim p \vee (\sim q \wedge \sim r)$, बंटन नियम से।

$\equiv \sim p \vee [\sim (q \vee r)]$, द मॉर्गन नियमों से।

$\equiv \sim [p \wedge (q \vee r)]$, द मॉर्गन नियमों से।

इस तरह हमने इच्छित तुल्यता सिद्ध कर दिया है।

* * *

इसी प्रकार आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E20) इस भाग में दिए गए नियमों को लागू करके यह दिखाइए कि $\sim (\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q) \equiv p$.

E21) कथन 'यदि वर्षा हो रही है और यदि वर्षा होने से निहित है कि कोई भी व्यक्ति फिल्म देखने नहीं जा सकता, तो कोई फिल्म देखने नहीं जा सकता।' को एक संयुक्त कथन के रूप में लिखिए। तर्कसंगत तुल्यता के गुणों की सहायता से दिखाइए कि यह कथन सर्वसत्य है।

E22) कारण सहित संयुक्त कथन का एक ऐसा उदाहरण दीजिए जो कि न तो सर्वसत्य कथन है और न ही विरोध।

आइए अब हम कथन-मानी फलनों पर विचार करें।

1.5 तर्कसंगत प्रमात्रक

भाग 1.2 में आप पढ़ चुके हैं कि 'वह पटना गयी है।' जैसा वाक्य तब तक कथन नहीं होता है, जब तक कि 'वह' कौन है, स्पष्ट नहीं हो जाता।

इसी प्रकार '$x > 5$' तब तक एक कथन नहीं होता, जब तक कि x के वे मान न पता हों जिन पर हम विचार कर रहे हैं। इस प्रकार के वाक्य 'कथनीय फलनों' के उदाहरण हैं।

परिभाषा: एक चर x में एक **कथनीय फलन (propositional function)** या **विधेय (predicate)** एक ऐसा वाक्य $p(x)$ होता है, जिसमें x शामिल है और जो x के निश्चित मानों के लिए एक कथन हो जाता है। हम ऐसे फलनों को प्रायः $p(x)$, $q(x)$, आदि से प्रकट करते हैं।

उन सभी मानों का समुच्चय को जो x ले सकता है, **विमर्श समष्टि (universe of discourse)** कहते हैं। अतः यदि $p(x)$, '$x > 5$' हो, तो $p(x)$ एक कथन नहीं है। लेकिन, जब हम x को विशेष मान, मान लीजिए $x = 6$ या $x = 0$, देते हैं, तब हमें कथन प्राप्त होते हैं। यहाँ $p(6)$ एक सत्य कथन है और $p(0)$ एक असत्य कथन।

इसी प्रकार यदि $q(x)$, 'x पटना में है।' हो, तो x के स्थान पर 'ताजमहल' को लेने पर हमें एक असत्य कथन प्राप्त होता है।

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक विधेय कथन नहीं होता। लेकिन प्रत्येक कथन एक कथनीय फलन होता है, ठीक उसी तरह जिस तरह प्रत्येक वास्तविक संख्या एक वास्तविक मान फलन (अर्थात् , अचर फलन) होती है।

अब प्रश्न यह है कि क्या केवल तर्कसंगत संयोजकों का प्रयोग करके ही सभी वाक्यों को प्रतीकात्मक रूप में लिखा जा सकता है? उदाहरण के लिए, 'किसी x के लिए, x अभाज्य है और x+1 अभाज्य है।' को लीजिए। इसके वाक्यांश 'किसी x के लिए', जिसे हम 'एक x का अस्तित्व है' भी कह सकते हैं, को आप प्रतीकों में कैसे दर्शाएंगे? गणित का अध्ययन करते समय आपने इस वाक्यांश को कई बार पढ़ा होगा। इस **प्रमात्रक, 'का अस्तित्व है' (there exists) को प्रकट करने के लिए हम प्रतीक '$\exists$' का प्रयोग करते हैं।** इसका प्रयोग हम 'कक्षा में कम से कम एक विद्यार्थी अवश्य है' जैसे वाक्य को

∃ को अस्तित्वीय प्रमात्रक (existential quantifier) कहते हैं।

'($\exists$ U में x) p(x)'

के रूप में लिखने के लिए करते हैं, जहाँ p(x), वाक्य 'x कक्षा में है' है और U सभी बच्चों का समुच्चय है।

अब मान लीजिए कि हम अभी बताए गए कथन का निषेध लेते हैं। क्या यह 'कक्षा में कोई विद्यार्थी नहीं हैं।' नहीं होगा? इसे हम प्रतीकों में 'सभी x के लिए, U में q(x)' लिखते हैं, जहाँ विमर्श समष्टि सभी विद्यार्थी हैं, और q(x) वाक्य 'x कक्षा में नहीं है।' को प्रकट करता है, अर्थात् $q(x) \equiv \sim p(x)$.
प्रमात्रक **'सभी के लिए'** (for all) **का गणितीय प्रतीक '$\forall$' है।** अत: ऊपर दिए गए कथन को हम

'$(\forall x \in U) q(x)$' या '$q(x), \forall x \in U$'

लिख सकते हैं।

∀ को सार्वत्रिक प्रमात्रक (universal quantifier) कहते हैं।

अस्तित्वतीय प्रमात्रक के इस्तेमाल का एक उदाहरण है सत्य कथन
$(\exists x \in \mathbf{R})(x + 1 > 0)$, जिसे '**R** में एक ऐसे x का अस्तित्व है जिसके लिए $x+1 > 0$' पढ़ा जाता है।

एक और उदाहरण है असत्य कथन

$(\exists x \in \mathbf{N}) (x-1/2 = 0)$, जिसे '**N** में एक ऐसे x का अस्तित्व है जिसके लिए $x-1/2 = 0$' पढ़ा जाता है।

सार्वत्रिक प्रमात्रक के इस्तेमाल का एक उदाहरण है
$(\forall x \notin \mathbf{N})(x^2 > x)$, जिसको 'प्रत्येक x के लिए, जो **N** में नहीं है, $x^2 > x$' पढ़ा जाता है।
ज़ाहिर है कि यह एक असत्य कथन है, क्योंकि कम से कम एक $x \in \mathbf{R}$ है जिसके लिए $x \notin \mathbf{N}$, यानि कि, जिसके लिए यह कथन असत्य है।

हम प्राय: दोनों प्रमात्रकों का प्रयोग एक साथ करते हैं, जैसा कि निम्नलिखित कथन में, जिसे **बर्ट्रन्ड अभिगृहीत (Bertrand postulate)** कहा जाता है:
$(\forall n \in \mathbf{N} \setminus \{1\})(\exists x \in \mathbf{N})$ (x एक अभाज्य संख्या है और $n < x < 2n$).

शब्दों में इसे 'प्रत्येक पूर्णांक $n > 1$ के लिए, n और 2n के बीच स्थित एक अभाज्य संख्या होती है।' पढ़ते हैं।

जैसा कि आप कक्षा में बच्चों वाले उदाहरण में देख चुके हैं, $(\forall x \in U)\, p(x)$ और $\sim (\exists x \in U) (\sim p(x))$ तर्कसंगतत: तुल्य हैं। इसलिए

$\sim (\forall x \in U)\, p(x) \equiv \sim\sim (\exists x \in U) (\sim p(x)) \equiv (\exists x \in U) (\sim p(x))$.

यह निषेध के नियमों में से एक है जो $\forall$ और $\exists$ के बीच एक संबंध स्थापित करता है। इस संबंध में और दो नियम हैं

$\sim (\forall x \in U)\, p(x) \equiv (\exists x \in U) (\sim p(x))$, और
$\sim (\exists x \in U)\, p(x) \equiv (\forall x \in U) (\sim p(x))$

जहाँ U, x द्वारा ग्रहण किए जाने वाले मानों का समुच्चय है।

अब, निम्नलिखित कथन लीजिए:
'एक अपराधी है जिसने प्रत्येक अपराध किया है।'
इसे हम प्रतीकों में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं:
$(\exists c \in A)(\forall x \in B)$(c ने x किया है)
जहाँ A अपराधियों का समुच्चय है और B (कानूनी) अपराधों का समुच्चय है।
इसका निषेध क्या होगा? वह होगा
$\sim(\exists c \in A)(\forall x \in B)$(c ने x किया है)
$\equiv (\forall c \in A)[\sim(\forall x \in B)$(c ने x किया है)]
$\equiv (\forall c \in A)(\exists x \in B)$(c ने x नहीं किया है)।

हम इसे निम्न प्रकार से पढ़ सकते है:
'प्रत्येक अपराधी के संबंध में एक ऐसा अपराध होता है, जिसे उसने नहीं किया है।'

अभी तक हमने कुछ उदाहरण दिए हैं। जिनमें प्रमात्रक अकेले या एक साथ आते हैं। कभी-कभी आपको ऐसी स्थितियाँ देखने को मिल सकती हैं (जैसा कि E22 में है) जहाँ आपको कथन में $\exists$ या $\forall$ को दो या अधिक बार प्रयोग करना पड़ सकता है। इस प्रकार की स्थिति या इससे भी जटिल स्थिति में जैसे,
$(\forall x_1 \in U_1)(\exists x_2 \in U_2)(\exists x_3 \in U_3)(\forall x_4 \in U_4)\ldots(\exists x_n \in U_n)\, p$

कथनीय कलन एक से ज़्यादा चर वाले भी हो सकते हैं।

हमारा निषेध-नियम उपयोगी सिद्ध होता है। वास्तव में, इसे लागू करके हम तुरंत कह सकते हैं कि इस जटिल उदाहरण का निषेध है

$(\exists x_1 \in U_1)(\forall x_2 \in U_2)(\forall x_3 \in U_3)(\exists x_4 \in U_4)\ldots(\forall x_n \in U_n)(\sim p)$.

अब आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E23) तर्कसंगत प्रमात्रकों का प्रयोग करके आप निम्नलिखित कथनों और उनके निषेधों को किस प्रकार प्रस्तुत करेंगे? आगे, निषेधों को आप शब्दों में किस तरह से पढ़ेंगे?
  i) राजनीतिज्ञ सभी लोगों को हर समय बेवकूफ़ बना सकता है।
  ii) प्रत्येक वास्तविक संख्या किसी वास्तविक संख्या का वर्ग होता है।
  iii) एक ऐसा वकील है जो कभी झूठ नहीं बोलता।

E24) ऐसे उपयुक्त गणितीय कथन लिखिए जिन्हें निम्नलिखित प्रतीकात्मक कथनों से निरूपित किया जा सकता हो। इनके निषेध भी लिखिए। आपके कथनों के सत्य मान क्या हैं?
  i) $(\forall x)(\exists y)\, p$
  ii) $(\exists x)(\exists y)(\forall z)\, p$.

और अंत में, आइए हम एक अति उपयोगी प्रमात्रक पर विचार करें जिसका $\exists$ के साथ गहरा संबंध है। आपको इस प्रमात्रक की आवश्यकता 'डेस्क के ताले में एक और केवल एक ही कुंजी लगती है।' जैसे कथनों को प्रतीकों में लिखने में पड़ती है। प्रतीक $\exists!\, x$ है जो कि **'एक और केवल एक x है'** (या **'एक अद्वितीय x है'**) को प्रकट करता है।

अत: ऊपर का कथन $(\exists!\, x \in A)$ (x डेस्क के ताले में लग जाती है) होगा, जहाँ A कुंजियों का समुच्चय है।
अन्य उदाहरणों के लिए अभी तक के अपने गणित के अध्ययन में अद्वितीयता (uniqueness) के कथनों पर विचार कीजिए। जैसे कि, 'किसी समतल के तीन असरेख बिन्दुओं से होकर जाने वाला एक अद्वितीय वृत्त होता है।' आप इसे प्रतीकों में किस तरह निरूपित करेंगे? यदि x एक वृत्त को और y एक समतल के 3 असरेख बिन्दुओं को प्रकट करता हो, तो कथन होगा
$(\forall y \in P)(\exists!\, x \in C)$ (x, y से होकर जाता है)।
यहाँ C वृत्त-समुच्चय को प्रकट करता है, और P, 3 असरेख बिन्दुओं के त्रिकों के समुच्चय को प्रकट करता है।

अब, आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E2_) _नलिखित कथनों में से कौन से सत्य हैं (जहाँ x, y, **R** में हैं)?
  i) $(x \geq 0) \rightarrow (\exists y)(y^2 = x)$

ii) $(\forall x)(\exists! y)(y^2 = x^3)$

iii) $(\exists x)(\exists! y)(xy = 0)$

iv) $\sim(\exists x)(\exists! y)(x + y = 0)$

इस इकाई को समाप्त करने से पहले, आइए संक्षिप्त में देखें कि हमने इसमें क्या-क्या पढ़ा है।

1.6 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर विचार किया है।

1. गणितीय तौर पर कथन क्या होता है।
2. तर्कसंगत संयोजकों की परिभाषा और प्रयोग:
   दो कथनों p और q के लिए,
   i) इनका वियोजन 'p या q' होता है, जिसे $p \vee q$ से प्रकट करते हैं;
   ii) इनका अपवर्जी वियोजन 'या तो p या q' होता है, जिसे $p \oplus q$ से प्रकट करते हैं;
   iii) इनका योग 'p और q' होता है, जिसे $p \wedge q$ से प्रकट करते हैं;
   iv) p का निषेध 'नहीं p' होता है, जिसे $\sim p$ से प्रकट करते हैं;
   v) 'यदि p, तो q' को $p \rightarrow q$ से प्रकट करते हैं;
   vi) 'p यदि और केवल यदि q' को $p \leftrightarrow q$ से प्रकट करते हैं।
3. 6 तर्कसंगत संयोजकों की सत्य सारणियां।
4. **पूर्वता-नियम:** एक से अधिक संयोजकों वाले किसी भी संयुक्त कथन में, हम पहले '$\sim$' लागू करते हैं, फिर '$\wedge$' लागू करते हैं, फिर '$\vee$' और $\oplus$ लागू करते हैं, और आखिर में '$\rightarrow$' और '$\leftrightarrow$' लागू करते हैं।
5. तर्कसंगत तुल्यता का अर्थ और प्रयोग। इसे '$\equiv$' से प्रकट किया जाता है।
6. तुल्य कथनों को लेकर निम्नलिखित नियम:
   i) द मॉर्गन नियम: $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
      $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
   ii) द्वि-निषेध नियम: $\sim(\sim p) \equiv p$
   iii) वर्गसम नियम: $p \wedge p \equiv p$
      $p \vee p \equiv p$
   iv) क्रमविनिमेयता: $p \vee q \equiv q \vee p$
      $p \wedge q \equiv q \wedge p$
   v) सहचारिता: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
      $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
   vi) बंटन नियम: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
      $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
   vii) $(\sim p \vee q) \equiv p \rightarrow q$ (E 18 देखिए)।
7. तर्कसंगत प्रमात्रक: 'प्रत्येक के लिए', जिसे '$\forall$' से प्रकट करते हैं; 'का अस्तित्व है', जिसे '$\exists$' से प्रकट करते हैं; और 'एक और केवल एक है', जिसे '$\exists!$' से प्रकट करते हैं।
8. प्रमात्रकों से संबंधित निषेध-नियम:
   $\sim(\forall x \in U)\, p(x) \equiv (\exists x \in U)(\sim p(x))$
   $\sim(\exists x \in U)\, p(x) \equiv (\forall x \in U)(\sim p(x))$.

अब हम इस इकाई को यहीं समाप्त कर रहे हैं। इकाई के बीच-बीच में दिए गए सभी प्रश्नों को आपने हल करने का प्रयास किया होगा। आप अपने हलों की जाँच नीचे दिए गए हलों से कर सकते हैं।

1.7 हल/उत्तर

E1) (i), (iii), (iv), (vii), (viii) कथन हैं, क्योंकि इनमें से प्रत्येक कथन सार्वत्रिक रूप से सत्य है या

सार्वत्रिक रूप से असत्य।

(ii) एक प्रश्न है।

(v) विस्मयादिबोधक है।

(vi) की सत्यता या असत्यता इस बात पर निर्भर है कि 'वह' कौन है।

(ix) एक व्यक्तिनिष्ठ वाक्य है।

(x) केवल तभी कथन होगा जबकि ग्रहण किए गए मान n दिए हुए हों।

इसलिए (ii), (v), (vi), (ix) और (x) कथन नहीं हैं।

E2) (i) का सत्य मान F है, और दूसरों का सत्य मान T है।

E4) वियोजन है

'2+3 = 7 या राधा इंजीनियर है।'

चूँकि '2+3=7' हमेशा असत्य होता है, इस वियोजन का सत्य मान 'राधा इंजीनियर है।' के सत्य मान पर निर्भर है। यदि यह T है, हम सारणी 1 की तीसरी पंक्ति से तो अभीष्ट मान T प्राप्त करते हैं। यदि राधा इंजीनियर नहीं है, तो हमें अभीष्ट सत्य मान F प्राप्त होता है।

E5) **सारणी 9: 'अपवर्जी अथवा' की सत्य सारणी**

p	q	$p \oplus q$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

E6) $x \in]-2, \infty[$ के लिए p एक सत्य कथन होगा। $x \neq 4$ के लिए q एक सत्य कथन होगा। इसलिए उन सभी x के लिए $p \wedge q$ सत्य होगा, जहाँ $x \in]-2, \infty[$ और $x \neq 4$, अर्थात् $x \in]-2, 4[\cup]4, \infty[$.

E7) (i) $0 - 5 = 5$

(ii) 'प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए n, 2 से बड़ा नहीं है।', या 'कम से कम एक ऐसा $n \in \mathbf{N}$ अवश्य है जिसके लिए $n \leq 2$'.

(iii) कुछ ऐसे भारतीय बच्चे हैं जो कक्षा 5 तक नहीं पढ़ते।

E8) **सारणी 10: निषेध की सत्य सारणी**

p	~p
T	F
F	T

E9) $p \rightarrow q$ कथन 'यदि $x, y \in \mathbf{R}$ के लिए $x + y = xy$ हो, तो प्रत्येक $x \in \mathbf{Z}$ के लिए $x \nless 0$' है। इस स्थिति में q असत्य है। इसलिए प्रतिबंधी कथन तभी सत्य होगा जबकि p भी असत्य हो, और यह x और y के उन मानों पर असत्य होगा जिन पर p सत्य होता है।

इसलिए $\frac{y}{y-1}$ के रूप के उन सभी वास्तविक संख्याओं x के लिए $p \rightarrow q$ असत्य होता है,

जहाँ $y \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ ऐसा इसलिए है, क्योंकि यदि किसी $y \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ के लिए $y = \frac{y}{y-1}$, तो $x + y = xy$, अर्थात् p सत्य होगा।

E10) (i) $p \rightarrow q$, जहाँ $p : \Delta\, ABC$ समबाहु है, और $q : \Delta\, ABC$ समद्विबाहु है।

यदि q सत्य है, तो $p \rightarrow q$ सत्य होगा। यदि q असत्य है, तो $p \rightarrow q$ केवल तब सत्य होगा जबकि p असत्य हो। इसलिए, यदि Δ ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है, तो दिया हुआ कथन हमेशा सत्य होता है। और, यदि Δ ABC, समद्विबाहु नहीं है, तो यह समबाहु त्रिभुज भी नहीं हो सकता। अतः इस स्थिति में भी दिया हुआ कथन सत्य है।

(ii) p : a एक पूर्णांक है।
q : b एक पूर्णांक है।
r : ab एक परिमेय संख्या है।
दिया हुआ कथन $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ है।
अब, यदि p सत्य है, और q सत्य है, तो r सत्य होगा। यदि $p \wedge q$ असत्य है, तब भी यह संभव है कि r सत्य रहे।
इसलिए $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ सत्य तब होगा जबकि या तो $p \wedge q$ सत्य हो, या $p \wedge q$ असत्य हो और r असत्य हो। अन्य सभी स्थितियों में $(p \wedge q) \leftrightarrow r$ असत्य होगा।

(iii) p : रज़ा पांच गिलास पानी पीता है।
q : सुधा चार चाय के प्याले पीती है।
r : श्याम गणित की परीक्षा में उत्तीर्ण हो जाएगा।
दिया हुआ कथन $(p \wedge q) \leftrightarrow \sim r$ है। यह तब सत्य होता है जबकि $\sim r$ सत्य हो, या जबकि r सत्य हो और $p \wedge q$ असत्य हो।
अन्य सभी स्थितियों में यह असत्य है।

(iv) p : मरियम कक्षा 1 में है।
q : मरियम कक्षा 2 में है।
दिया हुआ कथन $p \oplus q$ है। यह केवल तब सत्य होता है जबकि p सत्य हो या जबकि q सत्य हो।

E11) इस प्रकार के अनंततः अनेक उदाहरण हैं। आपको एक ऐसा उदाहरण देना है जिसमें p सत्य हो परन्तु q असत्य हो।

E12) सत्य सारणी बनाइए। इस सारणी और सारणी 5 के अंतिम स्तंभ समान होंगे।

E13) पूर्वता नियम के अनुसार, यदि p, q, r के सत्य मान दिए हुए हों, तो पहले आपको $\sim r$ के सत्य मान ज्ञात करने होंगे, फिर $q \wedge \sim r$ के, $r \wedge q$ के और $p \rightarrow q \wedge \sim r$ के सत्य मान, और अंत में $(p \rightarrow q \wedge \sim r) \leftrightarrow r \wedge q$ के सत्य मान ज्ञात करने होंगे।

सारणी 5 के छठवें और आठवें स्तंभों के मानों के स्थान पर निम्नलिखित मान होंगे:

$r \wedge q$
T
F
F
F
T
F
F
F

और

$p \rightarrow q \wedge \sim r \leftrightarrow r \wedge q$
F
F
T
T
T
F
F
F

E14) दोनों समान होने चाहिए, अर्थात्

p	q	r	$\sim r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee (\sim r)$
T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	T
T	F	T	F	F	F
T	F	F	T	F	T
F	T	T	F	F	F
F	T	F	T	F	T
F	F	T	F	F	F
F	F	F	T	F	T

E15) i) $(\sim p) \vee q$

ii) $(\sim q) \rightarrow (\sim p)$

iii) $p \rightarrow q \leftrightarrow [(\sim p) \vee q]$

iv) $[p \oplus (q \wedge \sim r)] \rightarrow [(\sim p) \vee q] \leftrightarrow (p \wedge r)$

E16) (क)

p	~p	~(~p)
T	F	T
F	T	F

पहले और तीसरे स्तंभ द्वि-निषेध नियम को सिद्ध करते हैं।

(ग)

p	q	p ∨ q	q ∨ p
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

तीसरे और चौथे स्तंभ ∨ की क्रमविनिमेयता को सिद्ध करते हैं।

अन्य नियमों को भी इसी प्रकार सिद्ध किया जा सकता है।

E17) किन्हीं तीन कथनों p, q, r के लिए:

i) $p \equiv p$ तुच्छतः सत्य है।

ii) यदि $p \equiv q$, तो $q \equiv p$ (क्योंकि, यदि p और q के सभी संभव सत्य मानों के लिए p का वही सत्य मान हो, जो कि q का है, तो स्पष्ट है कि सभी स्थितियों में q के वही सत्य मान होंगे जो कि p के हैं।)

iii) यदि $p \equiv q$ और $q \equiv r$, तो $p \equiv r$ (इसका कारण वही है जो कि ऊपर (ii) में बताया गया है)।

इस तरह '≡' स्वतुल्य (reflexive), सममित और संक्रामक (transitive) है।

E18)

p	q	~p	~p ∨ q	p → q
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

अंतिम दो स्तंभों से पता चलता है कि $[(\sim p) \vee q] \equiv (p \rightarrow q)$.

E19) i)

p	$\mathcal{T}$	$p \vee \mathcal{T}$
T	T	T
F	T	T

इस सारणी के दूसरे और तीसरे स्तंभों से पता चलता है कि $p \vee \mathcal{T} \equiv \mathcal{T}$

ii)

p	$\mathcal{F}$	$p \wedge \mathcal{F}$
T	F	F
F	F	F

इस सारणी के दूसरे और तीसरे स्तंभों से पता चलता है कि $p \wedge \mathcal{F} \equiv \mathcal{F}$

इसी प्रकार आप (ii) और (iii) की जाँच कर सकते हैं।

E20) $\sim(\sim p \wedge q) \wedge (p \vee q)$

$\equiv (\sim(\sim p) \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$, द मॉर्गन नियमों से।

$\equiv (p \vee \sim q) \wedge (p \vee q)$, द्वि-निषेध नियम से।

$\equiv p \vee (\sim q \wedge q)$, बंटन नियम से।

$\equiv p \vee \mathcal{F}$, जहाँ $\mathcal{F}$ एक विरोध को प्रकट करता है।

$\equiv p$, E19 से।

E21) p : वर्षा हो रही है।

q : कोई भी पिकनिक आयोजित नहीं हो सकती।

तब दिया हुआ कथन है

$[p \wedge (p \to q)] \to q$

$\equiv p \wedge (\sim p \vee q) \to q$ क्योंकि $(p \to q) \equiv (\sim p \vee q)$

$\equiv (p \wedge \sim p) \vee (p \wedge q) \to q$, द मॉर्गन नियमों से।

$\equiv \mathcal{F} \vee (p \wedge q) \to q$, क्योंकि $p \wedge \sim p$ एक विरोध है।

$\equiv (\mathcal{F} \vee p) \wedge (\mathcal{F} \vee q) \to q$, द मॉर्गन नियमों से।

$\equiv p \wedge q \to q$, क्योंकि $\equiv \mathcal{F} \vee p \equiv p$

जो कि एक सर्वसत्य कथन है।

E22) ऐसे अनंततः अनेक उदाहरण हैं। इनमें से एक है:

'यदि वेंकट छुट्टी पर है, तो शबनम कंम्प्यूटर पर काम करेगी'।

यह $p \to q$ के रूप का है। इसके सत्य मान T या F होंगे, जो कि p और q के सत्य मानों पर निर्भर है।

E23) i) $(\forall t \in [0, \infty[)\ (\forall x \in H)\ p(x, t)$ दिया हुआ कथन है, जहाँ $p(x, t)$ विधेय 'राजनीतिज्ञ t सेकंड में x को बेवकूफ़ बना सकता/सकती है।' है और H मानवों का समुच्चय है। इसका निषेध $(\exists t \in [0, \infty[)\ (\exists x \in H)\ (\sim p(x, t))$, अर्थात् कम से कम एक ऐसा व्यक्ति है जो कि कम से कम एक क्षण के लिए राजनीतिज्ञ द्वारा बेवकूफ़ नहीं बनता।

ii) दिया हुआ कथन है

$(\forall x \in \mathbf{R})\ (\exists y \in \mathbf{R})\ (x = y^2)$.

इसका निषेध है

$(\exists x \in \mathbf{R})\ (\forall y \in \mathbf{R})\ (x \neq y^2)$, अर्थात्

एक ऐसी वास्तविक संख्या है जो किसी भी वास्तविक संख्या का वर्ग नहीं है।

iii) दिया हुआ कथन है

$(\exists x \in L)\ (\forall t \in [0, \infty[)\ p(x, t)$, जहाँ L, वकीलों का समुच्चय है, और

$p(x, t)$: समय t पर x झूठ नहीं बोलता/बोलती।

इसका निषेध है

$(\forall x \in L)\ (\exists t \in [0, \infty[)\ (\sim p)$

अर्थात्, प्रत्येक वकील किसी न किसी समय झूठ अवश्य बोलता/बोलती है।

E24) i) उदाहरण के लिए,

$(\forall x \in \mathbf{N})\ (\exists y \in \mathbf{Z})\ (x/y \in \mathbf{Q})$ एक सत्य कथन है।

इसका निषेध है

$(\exists x \in \mathbf{N})\ (\forall y \in \mathbf{Z})\ (x/y \in \mathbf{Q})$

इसी प्रकार आप (ii) को भी हल कर सकते हैं।

E25) (i), (iii) सत्य हैं।

(ii) असत्य है (उदाहरण के लिए, $x = -1$ पर ऐसा कोई y नहीं है जिससे कि $y^2 = x^{-1}$)।

(iv), $(\forall x \in \mathbf{R})\ [\sim (\exists!\, y \in \mathbf{R})\ (x + y = 0)]$ के तुल्य है, अर्थात् प्रत्येक x के लिए ऐसा कोई अद्वितीय y नहीं है जिससे कि $x + y = 0$. स्पष्ट है कि यह असत्य है, क्योंकि प्रत्येक x के लिए एक ऐसा अद्वितीय $y(= -x)$ होता है जिससे कि $x + y = 0$.

इकाई 2 उपपत्ति की विधियाँ

इकाई की रूपरेखा — **पृष्ठ संख्या**

2.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आप कथनों और उनके सत्य मानों के बारे में पढ़ चुके हैं। इस इकाई में हम उन विधियों पर चर्चा करेंगे जिनकी सहायता से कथनों को जोड़कर एक तर्कसंगततः मान्य तर्क प्राप्त किया जा सकता है। अपने गणितीय अध्ययनों के दौरान आपने शब्दों 'प्रमेय' और 'उपपत्ति' को ज़रूर देखा होगा। भाग 2.2 में हम इस बात पर चर्चा करेंगे कि प्रमेय क्या होता है और गणितीय दृष्टि से स्वीकार्य उपपत्ति क्या होती है।

चित्र 1 : जॉर्ज बूल (1815-1864)

भाग 2.3 में हम आपको किसी कथन को सिद्ध या असिद्ध करने के लिए लागू की जाने वाली विभिन्न विधियों से परिचित कराएंगे। जब आप विभिन्न प्रकार के मान्य तर्कों का अध्ययन करेंगे, तो आप गणितज्ञों के सोचने के ढंग को और कुछ परिकल्पनाओं के आधार पर उनके गणित आगे बढ़ाने के तरीकों को देखेंगे। इस भाग में चर्चित विचारों को औपचारिक रूप में अंग्रेज़ गणितज्ञ बूल और जर्मन तर्कशास्त्री फ्रेज (1848-1925) ने औपचारिक रूप दिया था।

गणित में गणितीय आगमन नियम की एक खास जगह है इसकी सरलता और इसकी व्यापक तौर पर अनुप्रयोग की वजह से। भाग 2.4 में आप कथनों को सिद्ध करने की इस विधि के बारे में पढ़ेंगे।

आप इस इकाई को ध्यान से पढ़ें। यह इकाई न केवल इस पाठ्यक्रम के अध्ययन की दृष्टि से महत्वपूर्ण है, बल्कि इसकी विषय-वस्तु उस आधार का हिस्सा है जिस पर सभी गणितीय ज्ञान का निर्माण हुआ है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- 'प्रमेय', 'उपपत्ति', 'खंडन' और 'असिद्ध करने' की व्याख्या कर सकेंगे;
- उपपत्ति की प्रत्यक्ष विधि और कुछ परोक्ष विधियों का वर्णन दे सकेंगे;
- आगमन नियम के दोनों रूपों का कथन दे सकेंगे और उन्हें लागू कर सकेंगे।

2.2 उपपत्ति क्या होती है?

मान लीजिए मैं किसी से कहूँ, "मैं तुमसे अधिक बलवान हूँ।" संभव है कि यह सुनकर वह व्यक्ति तुरंत पलटे और घूरकर मुझसे कहे, "सिद्ध करो!" वास्तव में, वह मेरे कथन की सत्यता जानने के लिए कुछ प्रमाण चाह रहा/रही है। (इस मामले में शायद प्रमाण एक जबरदस्त धक्का हो!)

ऐसे ही, सन्देह दूर करने वाले प्रमाण ही तो चाहते हैं लोग किसी वैज्ञानिक के या किसी इतिहासकार के दावों को स्वीकार करने से पहले।

इसी प्रकार, यदि आप चाहते हैं कि किसी गणितीय कथन को सत्य स्वीकार कर लिया जाए, तो यह आवश्यक है कि इस कथन के समर्थन में आप **गणितीय तौर से स्वीकार्य** प्रमाण दिया। कहने का अर्थ है कि आपको यह दर्शाना जरूरी होगा कि कथन **सार्वभिकत: सत्य** है। और यह आपको एक **तर्कसंगतत:** मान्य तर्क के रूप में देना होगा।

परिभाषा : गणित या तर्कशास्त्र में **तर्क** (argument) कथनों का एक परिमित अनुक्रम $p_1, \ldots, p_n, p$ होता है, जहाँ $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \rightarrow p$.

अंतिम कथन को छोड़कर अनुक्रम के बाकी सभी कथन (अर्थात् p_i, जहां $i = 1, \ldots, n$) को **परिकल्पना (assumption / hypothesis / premise)** कहा जाता है। अंतिम कथन p को **निष्कर्ष (conclusion)** कहा जाता है।

आइए हम एक ऐसे तर्क का उदाहरण लें, जिससे हमने दिखाया है कि दिया हुआ कथन सत्य है।

उदाहरण 1 : गणितीय कथन 'किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए $A \cap B \subseteq A$' को सत्य दर्शाने का एक तर्क दीजिए।

हल : एक तर्क निम्न हो सकता है :

मान लीजिए x, $A \cap B$ का कोई अवयव है।

तब '$\cap$' की परिभाषा के अनुसार, $x \in A$ और $x \in B$.

अत: $x \in A$.

यह कथन $A \cap B$ के प्रत्येक x के लिए सत्य है।

अत: '$\subseteq$' की परिभाषा के अनुसार, $A \cap B \subseteq A$.

* * *

उदाहरण 1 में दिया गया तर्क एक विभिन्न प्रकार का तर्क है। इसमें किसी भी परिकल्पना या इसके निष्कर्ष की सत्यता पिछली परिकल्पनाओं की सत्यता पर निर्भर है। हाँ, यह ज़रूर है कि शुरू में हम यह मानकर चलते हैं कि पहला कथन सत्य है। तब, 'प्रतिच्छेद' (intersection) की परिभाषा के अनुसार, दूसरा कथन सत्य होता है। और 'तर्कसंगत निहितार्थ' के गुणों के कारण जब भी दूसरा कथन सत्य होता है, तब तीसरा कथन सत्य होता है और जब कभी पहले तीन कथन सत्य होते हैं, तब चौथा कथन सत्य होता है, शब्द 'सभी के लिए' की परिभाषा और गुणों के कारण। और अंत में, जब पिछले सभी कथन सत्य होते हैं, तब अंतिम कथन सत्य होता है। इस तरह यहां हमने यह दर्शाया है कि दिया हुआ कथन सत्य है। दूसरे शब्दों में, हमने दिए हुए कथन के सत्य होने की उपपत्ति दी है, परिभाषाओं के अनुसार।

परिभाषाएं : हम कहते हैं कि कथनों $p_1, p_2, \ldots$ और p_n से कथन p **तर्कसंगतत: निकलता है** अगर $p_1, p_2, \ldots, p_n$ के सत्य होने पर p ज़रूर सत्य हो, अर्थात् $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow p$.

(यहां आप निहितार्थ तीर '$\Rightarrow$' के प्रयोग पर ध्यान दें। यदि r और s कोई दो कथन हों, तो **'$r \Rightarrow s$' यह प्रकट करता है कि जब भी r सत्य होता है तब s सत्य होता है।** ध्यान दीजिए कि प्रतिधनात्मक (contrapositive) को लागू करने पर यह तीर 'जब भी s असत्य होता है, तब r असत्य होता है।' को भी प्रकट करता है। इस तरह, '$r \rightarrow s$' और '$r \Rightarrow s$' सिर्फ़ तब बराबर होते हैं जबकि r और s दोनों ही सत्य हों, या दोनों ही असत्य हों।)

कथन p की **उपपत्ति (proof)** एक ऐसा गणितीय तर्क है जिसमें कथनों का एक अनुक्रम $p_1, p_2, \ldots p_n$ होता है जिससे p तर्कसंगतत: निकलता है। अत: p इस तर्क का निष्कर्ष है।

उस कथन को, जिसे सत्य सिद्ध किया जाता है, **प्रमेय (theorem)** कहा जाता है।

कभी-कभी, जैसा कि आप भाग 2.3.3 में देखेंगे, कथन p को सत्य सिद्ध करने के बजाए हम उसे असत्य, अर्थात् $\sim p$ को सत्य सिद्ध करने का प्रयास करते हैं। इस प्रकार की उपपत्ति को p का **खण्डन (disproof)** कहा जाता है। हम यह भी कहते हैं कि उपपत्ति p को **असिद्ध करती** है। अगले भाग में आप कथन के खंडन की कुछ विधियों के बारे में पढ़ेंगे।

कभी-कभी ऐसा भी होता है कि हमें लगता है कि अमुक कथन सत्य है, लेकिन हम उसे सिद्ध नहीं कर पाते। ऐसा भी हो सकता है कि हम उसका खंडन भी नहीं कर पाते। इस प्रकार के कथनों को **दावा (conjecture)** कहा जाता है। **जब कभी भी दावे को सिद्ध कर दिया जाता है, तब इसे प्रमेय माना जाता है। और अगर इसका खंडन किया जाता है, तब इसके निषेध को प्रमेय माना जाता है।**

इस संदर्भ में, 1742 में गणितज्ञ गोल्डबाख द्वारा दिया गया एक अति सुप्रसिद्ध दावा है। यह है :

सभी $n \in \mathbf{N}$ के लिए, यदि n सम संख्या है और $n > 2$, तो n दो अभाज्य संख्याओं का जोड़ होता है।

आज तक इस कथन को न तो कोई सिद्ध कर सका है और न ही असिद्ध। इसे असिद्ध करने के लिए लोग कोई ऐसा उदाहरण ढूंढने की कोशिश में हैं जिसके लिए यह कथन सत्य न हो, अर्थात्, एक ऐसी सम संख्या $n > 2$ हो, जहाँ n को दो अभाज्य संख्याओं के जोड़ के रूप में नहीं लिखा जा सकता हो।

अब, जैसा कि आप देख चुके हैं, किसी कथन की गणितीय उपपत्ति में एक या अधिक परिकल्पनाएं होती हैं। यह चार प्रकार की हो सकती हैं :

i) एक कथन जिसे पहले सिद्ध किया जा चुका है (जैसे, यह सिद्ध करने के लिए कि $\mathbf{R}[x]$ के किसी बहुपद के सम्मिश्र मूल युग्मों में होते हैं, हम विभाजन कलन विधि (division algorithm) का प्रयोग करते हैं); या

ii) एक कथन जो कि उपपत्ति में दिए गए पिछले कथनों से तर्कसंगततः प्राप्त होता है (जैसा कि आप उदाहरण 1 में देख चुके हैं); या

iii) एक गणितीय तथ्य जिसे कभी कभी सिद्ध तो नहीं किया गया है, परन्तु जिसे सार्वत्रिक रूप से सत्य मान लिया गया है (जैसे, दो बिन्दुओं से एक रेखा निर्धारित होती है)। इस प्रकार के तथ्य को **अभिगृहीत (axiom / postulate)** कहा जाता है;

iv) एक गणितीय शब्द की परिभाषा (जैसे, $A \cap B \subseteq A$ की उपपत्ति में '$\subseteq$' की परिभाषा को मान लेना)।

इस पाठ्यक्रम और अन्य पाठ्यक्रमों में दी गई उपपत्तियों का अध्ययन करते वक्त और नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने के दौरान प्रत्येक प्रकार के परिकल्पनाओं के उदाहरण आपको देखने को मिलेंगे।

E1) स्कूलीय स्तर की बीजगणित से लिए गए एक प्रमेय और उसकी उपपत्ति (कम से कम चार चरणों वाली) का उदाहरण दीजिए। हर चरण पर यह बताइए कि चार प्रकार की परिकल्पनाओं में से यह किस प्रकार की है।

E2) क्या प्रत्येक कथन एक प्रमेय होता है? क्यों?

अभी तक हमने मान्य, या स्वीकार्य, तर्कों के बारे में चर्चा की है। आइए अब हम कथनों का एक ऐसा अनुक्रम लें जिससे एक मान्य तर्क प्राप्त **नहीं** होता। निम्नलिखित अनुक्रम लीजिए।

> यदि माया सिनेमा देखती है, तो वह घर के लिए दिया गया अपना काम पूरा नहीं कर पाएगी।
> माया घर के लिए दिया गया अपना काम पूरा नहीं कर पायी है।
> अतः, माया ने सिनेमा देखा।

तर्क को देखकर क्या आप यह बता सकते हैं कि यह मान्य है या नहीं? शायद आपको लगे कि यह तर्क मान्य नहीं है। परन्तु, क्या ऐसा कोई औपचारिक तर्कसंगत साधन है जिसे लागू करके यह देखा जा सके कि आपका अंदाज़ा सही है या नहीं? क्या इसमें सत्य-सारणियां काम आ सकती हैं? आइए देखें।

दिए हुए तर्क का रूप है :

$[(p \rightarrow q) \wedge q] \Rightarrow p$

जहाँ

p: माया सिनेमा देखती है, और

q: माया घर के लिए दिया गया अपना काम पूरा नहीं कर पाती।

आइए हम इस तर्क से संबंधित सत्य सारणी (सारणी 1) देखें।

सारणी 1

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	F

अंतिम स्तंभ में परिकल्पनाओं के सत्य मान दिए गए हैं। पहले स्तंभ में निष्कर्ष के संगत सत्य मान दिए गए हैं। **अब तर्क केवल तभी मान्य होगा, जबकि दोनों परिकल्पनाओं के सत्य होने पर निष्कर्ष सत्य हो।** यह बात पहली पंक्ति में होती है, परन्तु तीसरी पंक्ति में **नहीं।** अत: तर्क **मान्य नहीं** है।

अब आप मान्यता के संबंध में निम्नलिखित तर्क की जांच कर सकते हैं।

E3) बताइए कि निम्नलिखित तर्क मान्य है या नहीं।

$(p \to q \vee \sim r) \wedge (q \to p) \Rightarrow (p \to r)$

आप देख चुके हैं कि उपपत्ति एक ऐसा तर्कसंगत तर्क है जो प्रमेय की सत्यता को सत्यापित करता है। किसी प्रमेय को सिद्ध करने के अनेक तरीके हो सकते है, जैसा कि आप अगले भाग में देखेंगे। यह सभी विधियां एक या अधिक **अनुमान के नियमों (rules of inference)** पर आधारित हैं। ये नियम तर्कों के विभिन्न रूप हैं। यहां हम ज़्यादा इस्तेमाल होने वाले चार नियमों का व करेंगे।

मोडस पोनन्ज़ (modus ponens) एक लैटिन शब्द है जिसका अर्थ है "पुष्टि की विधि"।

i) वियोजन-नियम (law of detachment) या (मोडस पोनन्ज़)

निम्नलिखित तर्क पर ग़ौर कीजिए :

यदि काली तस्वीर बना सकती है, तो उसे नौकरी मिल जाएगी।
काली तस्वीर बना सकती है।
अत:, उसे नौकरी मिल जाएगी।

इस तर्क के विश्लेषण के लिए आइए हम p को कथन 'काली तस्वीर बना सकती है।' और q को कथन 'काली को नौकरी मिल जाएगी।' मान लें। तब $(p \to q)$ और p परिकल्पनाएं होंगी। और निष्कर्ष q होगा।

अत: तर्क का रूप होगा :

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{p \qquad} \\ \therefore q \end{array}, \text{ अर्थात् } [(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q.$$

∴, 'इसलिए' को दर्शाता है।

क्या यह तर्क मान्य है? यह मालूम करने के लिए, आइए हम इसकी एक सत्य सारणी बनाएं (देखिए सारणी 2)।

सारणी 2 : $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$ की सत्य सारणी

p	q	$p \to q$	$(p \to q) \wedge p$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	F

इस सारणी के दूसरे स्तंभ (निष्कर्ष) और चौथे स्तंभ (परिकल्पनाओं) को देखिए। जब भी परिकल्पनाएं सत्य होती हैं, अर्थात् पंक्ति 1 में, तब निष्कर्ष सत्य होता है। अत:, तर्क मान्य है।

इस रूप के मान्य तर्क को वियोजन-नियम कहा जाता है क्योंकि इसमे निष्कर्ष q को परिकल्पना $p \to q$ से वियोजित किया जाता है। इसे **प्रत्यक्ष अनुमान का नियम (law of direct inference)** भी कहा जाता है।

(ii) प्रतिस्थिति-नियम (law of contraposition) (या **मोडस तोलन्ज़**)

इस नियम को समझने के लिए निम्नलिखित तर्क पर ग़ौर कीजिए।

यदि काली तस्वीर बना सकती है, तो उसे नौकरी मिल जाएगी।
काली को नौकरी नहीं मिल सकती।
अतः काली तस्वीर नहीं बना सकती।

मोडस तोलन्ज़ (modus tollens) का अर्थ है "खंडन की विधि"।

यदि p और q के वही मान लें जैसा कि ऊपर (i) में माना गया है, तो आप देख सकते हैं कि परिकल्पनाएं $p \to q$ और $\sim q$ हैं और निष्कर्ष $\sim p$ है।
अतः तर्क होगा :

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{\sim q} \\ \therefore \sim p \end{array}, \text{ अर्थात् } [(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p.$$

जाँच करने पर आप यह पाएंगे कि यह तर्क मान्य है।

अनुमान के दो और नियम भी हैं जिनका व्यापक प्रयोग अनेक उपपत्तियों में होता है। इनसे संबंधित प्रश्न नीचे दिए गए हैं।

E4) नीचे तीन तर्क दिए गए हैं। इनमें से प्रत्येक तर्क को आप प्रतीकों की भाषा में लिखिए, और जांच कीजिए कि ये तर्क मान्य हैं या नहीं।

(i) या तो रबड़ सफ़ेद है या ऑक्सीजन एक धातु है।
रबड़ काला है।
अतः, ऑक्सीजन एक धातु है।

(ii) यदि मधु सरपंच है, तो वह पंचायत की मुखिया होगी।
यदि मधु पंचायत की मुखिया है, तो वह जायदाद के मामलों पर अपना निर्णय देगी।
अतः, यदि मधु सरपंच है, तो वह जायदाद के मामलों पर अपना निर्णय देगी।

(iii) या तो मुन्ना खाना बनाएगा या मुन्नी 'कराटे' का अभ्यास करेगी।
यदि मुन्नी 'कराटे' का अभ्यास करती है, तो मुन्ना पढ़ाई करता है।
मुन्ना पढ़ाई नहीं करता।
अतः, मुन्नी 'कराटे' का अभ्यास करेगी।

E5) मोडस पोनन्ज और मोडस तोलन्ज़ के एक-एक उदाहरण दीजिए।

जैसा कि आपने देख लिया होगा, E4(i) और (ii) के तर्क मान्य हैं। इनमें से पहला **वियोजित तर्क (disjunctive syllogism)** का एक उदाहरण है और दूसरा **परिकल्पनात्मक तर्क (hypothetical syllogism)** का एक उदाहरण है।

इस तरह वियोजित तर्क निम्न रूप का होता है

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \underline{\sim p} \\ \therefore q \end{array}, \text{ अर्थात् } [(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q.$$

और परिकल्पनात्मक तर्क निम्न रूप का होता है :

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \underline{q \to r} \\ \therefore p \to r \end{array}, \text{ अर्थात् } [(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r).$$

आइए अब हम देखें कि किसी कथन को सिद्ध या असिद्ध करने के लिए विभिन्न रूपों वाले तर्कों को किस प्रकार एक साथ लिया जा सकता है।

2.3 उपपत्ति की विभिन्न विधियाँ

इस भाग में हम एक कथन को सिद्ध करने के लिए तीन अलग-अलग तरीकों पर विचार करेंगे। यहाँ हम एक ऐसी विधि पर भी चर्चा करेंगे जिसका प्रयोग केवल कथन को असिद्ध करने के लिए किया जाता है। आइए पहले हम पिछले भाग में चर्चित अनुमान के पहले नियम पर आधारित उपपत्ति के तरीके पर विचार करें।

2.3.1 प्रत्यक्ष उपपत्ति

इस प्रकार की उपपत्ति पूरी तरह से मोडस पोनन्ज़ पर आधारित है। आइए हम इस तरीके को औपचारिक रूप में प्रस्तुत करें।

परिभाषा : $p \Rightarrow q$ की प्रत्यक्ष उपपत्ति **(direct proof)** ऐसा तर्कसंगतत: मान्य तर्क है जिसमें शुरू में यह मान लिया जाता है कि p सत्य है, और वियोजन-नियम के एक या अधिक अनुप्रयोगों से यह निष्कर्ष निकाल लिया जाता है कि q भी सत्य होगा।

अत:, $p \Rightarrow q$ की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति प्राप्त करने के लिए हम पहले यह मान लेते हैं कि p सत्य है। तब $p \Rightarrow q_1, q_1 \Rightarrow q_2, \ldots, q_n \Rightarrow q$ के रूप के एक या अधिक चरणों में हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि q सत्य है। इस संबंध में निम्नलिखित उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 2 : कथन 'दो विषम पूर्णांकों का गुणनफल एक विषम् पूर्णांक होता है।' की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए।

हल : आइए पहले हम स्पष्ट कर लें कि हमारी परिकल्पनाएं क्या हैं, और हमें क्या सिद्ध करना है। सबसे पहले हम दो विषम् पूर्णांक x और y लेते हैं। अत: हमारी परिकल्पना है
p: x और y विषम् हैं।
हम निम्न निष्कर्ष पर पहुँचना चाहते हैं :
q: xy विषम् है।
आइए पहले हम सिद्ध करें कि $p \Rightarrow q$.
चूंकि x विषम् है, इसलिए $x = 2m + 1$, किसी पूर्णांक m के लिए।
इसी प्रकार, $y = 2n + 1$, किसी पूर्णांक n के लिए।
तब, $xy = (2m + 1)(2n + 1) = 2(2mn + m + n) + 1$.
अत: xy विषम् है।
इस तरह, हमने दर्शाया है कि $p \Rightarrow q$.

ध्यान दीजिए कि प्रत्यक्ष उपपत्ति मुख्यत: $p \Rightarrow q$ को दर्शाने पर निर्भर करती है।

अब हम $p \wedge (p \Rightarrow q)$ पर मोडस पोनन्ज लागू करके इच्छित निष्कर्ष पर पहुंच सकते हैं।

* * *

उदाहरण 3 : प्रमेय 'एक सम पूर्णांक का वर्ग सम पूर्णांक होता है।' की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए।

हल : आइए सबसे पहले हम दिए हुए कथन को निम्न प्रकार से प्रतीकों में लिखें।
$(\forall x \in \mathbf{Z})(p(x) \Rightarrow q(x))$,
जहाँ p(x): x सम पूर्णांक है, और
q(x): x^2 सम पूर्णांक है, अर्थात् q(x) और $p(x^2)$ बराबर हैं।

तब प्रत्यक्ष उपपत्ति होगी :

> मान लीजिए x एक सम संख्या है (अर्थात् हम मान लेते हैं कि p(x) सत्य है)।
> तब $x = 2n$ किसी पूर्णांक n के लिए (सम संख्या की परिभाषा लागू करते हुए)।
> तब $x^2 = (2n)^2 = 4n^2 = 2(2n^2)$.
> $\therefore$ x^2 सम है (अर्थात् q(x) सत्य है)।

ध्यान दीजिए कि यहां हमने **प्रत्येक x के लिए** कथन को सिद्ध किया है, क्योंकि हमने x को कोई भी सम संख्या माना है, न कि कोई विशेष सम संख्या।

* * *

अब आप एक प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E6) कथन 'यदि x एक वास्तविक संख्या है जहां $x^2 = 9$, तब या तो $x = 3$ या $x = -3$.' की एक प्रत्यक्ष उपपत्ति दीजिए।

आइए अब हम एक अन्य तरह की उपपत्ति पर विचार करें।

2.3.2 परोक्ष उपपत्तियां

इस उपभाग में हम $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के लिए दो चक्करदार विधियों पर चर्चा करेंगे।

प्रतिस्थितक द्वारा उपपत्ति : पहली विधि में हम इस तथ्य को लागू करते हैं कि कथन $p \Rightarrow q$ अपने प्रतिस्थितक (contrapositive) $(\sim q \Rightarrow \sim p)$ के तर्कसंगततः तुल्य है, अर्थात्

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

उदाहरण के लिए 'यदि अम्मू धार्मिक कट्टरपंथियों से सहमत नहीं है, तो वह रूढ़िवादी नहीं है' और कथन 'यदि अम्मू रूढ़िवादी है, तो वह धार्मिक कट्टरपंथियों से सहमत है', तुल्य हैं।

इस तुल्यता को देखते हुए, हम $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के बजाए $\sim q \Rightarrow \sim p$ को सिद्ध कर सकते हैं। इसका अर्थ है कि हम यह मान सकते हैं कि $\sim q$ सत्य है, और तब हम $\sim p$ की सत्यता सिद्ध करने का प्रयास कर सकते हैं। दूसरे शब्दों में, **इस विधि से $p \Rightarrow q$ को सिद्ध करने के लिए, हम यह मान लेते हैं कि q असत्य है और तब दर्शाते हैं कि p असत्य है।** आइए, एक उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : सिद्ध कीजिए कि यदि $x, y \in \mathbf{Z}$, जहाँ xy विषम् है, तो x और y दोनों विषम् होते हैं, इसके प्रतिस्थितक को सिद्ध करते हुए।

हल : मान लीजिए दिए गए कथनों को हम निम्न प्रकार से प्रकट करते हैं :

p : xy विषम है।

q : x और y दोनों ही विषम हैं।

अतः,

$\sim p$: xy सम है, और

$\sim q$: x सम है, या y सम है या दोनों ही सम हैं।

$\sim q \Rightarrow \sim p$ को सिद्ध करके हम $p \Rightarrow q$ सिद्ध करना चाहते हैं।

अतः शुरू में हम यह मान लेते हैं कि $\sim q$ सत्य है, अर्थात् हम मान लेते हैं कि x सम है।

तब $x = 2n$, किसी $n \in \mathbf{N}$ के लिए।

अतः $xy = 2ny$.

अतः परिभाषा के अनुसार, xy सम है।

अर्थात् $\sim p$ सत्य है।

इस तरह हमने दर्शाया है कि $\sim q \Rightarrow \sim p$.

अतः $p \Rightarrow q$.

* * *

अब आप इससे संबंधित कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते?

E7) निम्नलिखित कथन का प्रतिस्थितक लिखिए : 'यदि f एक परिमित समुच्चय से स्वयं में एक 1-1 फलन है, तो f, आच्छादी अवश्य होगा।'

E8) इसके प्रतिस्थितक को सिद्ध करके कथन 'यदि x एक पूर्णांक है और x^2 सम है, तो x भी सम होगा।' को सिद्ध कीजिए।

आइए अब हम कथन को परोक्ष रूप से सिद्ध करने की एक अन्य विधि पर विचार करें।

अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति : इस विधि से q की सत्यता को सिद्ध करने के लिए सबसे पहले हम यह मानकर चलते हैं कि q असत्य है (अर्थात् $\sim q$ सत्य है)। तब मान्य तर्क से हम एक ऐसी स्थिति में आ जाते हैं जिसमें अमुक कथन सत्य भी होता है और असत्य भी, अर्थात् हमें किसी कथन के लिए एक अंतर्विरोध $r \wedge \sim r$ प्राप्त होता है। इसका अर्थ यह है कि $\sim q$ की सत्यता में एक अंतर्विरोध, यानी एक कथन जो सदैव असत्य होता है, निहित है। यह बात तभी हो सकती है जबकि $\sim q$ भी असत्य हो। अतः q सत्य होगा।

इस विधि को **अंतर्विरोध** द्वारा उपपत्ति कहा जाता है। इसे **असंगति प्रदर्शन (reductio ad absurdum)** भी कहा जाता है, क्योंकि यह दी हुई परिकल्पना को असंगतता में समानीत करने पर निर्भर है।

आइए हम इस विधि के इस्तेमाल का एक उदाहरण लें।

उदाहरण 5 : दिखाइए कि $\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

हल : आइए हम दिए हुए कथन को अंतर्विरोध द्वारा सिद्ध करने का प्रयास करें। इसके लिए सबसे पहले हम यह मानकर चलते हैं कि $\sqrt{5}$ परिमेय है।

इसका अर्थ है कि ऐसे दो पूर्णांक a और b हैं जिससे कि $\sqrt{5} = \frac{a}{b}$, जहाँ a और b के कोई सार्व गुणनखंड नहीं हैं। इससे यह पता चलता है कि

$a = \sqrt{5}\, b \Rightarrow a^2 = 5b^2 \Rightarrow 5 \mid a^2 \Rightarrow 5 \mid a.$

अतः परिभाषा के अनुसार, $a = 5c$, जहाँ $c \in \mathbf{Z}$.

अतः $a^2 = 25c^2$.

परन्तु $a^2 = 5b^2$ भी है।

इसलिए $25c^2 = 5b^2 \Rightarrow 5c^2 = b^2 \Rightarrow 5 \mid b^2 \Rightarrow 5 \mid b.$

परन्तु यहाँ हम देखते हैं कि 5, a और b दोनों को विभाजित करता है, जोकि शुरू में की गई इस परिकल्पना का **अंतर्विरोध** करता है कि a और b का कोई सार्व गुणनखंड नहीं है।
अतः हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि हमारी परिकल्पना कि $\sqrt{5}$ परिमेय है असत्य है, अर्थात् $\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

* * *

हम अंतर्विरोध की विधि से किसी निहितार्थ $r \Rightarrow s$ को भी सिद्ध कर सकते हैं। यहाँ हम तुल्यता $\sim(r \rightarrow s) \equiv r \wedge \sim s$ का प्रयोग कर सकते हैं। अतः $r \Rightarrow s$ को सिद्ध करने के लिए सबसे पहले हम मानकर चल सकते हैं कि $r \Rightarrow s$ असत्य है, अर्थात् r सत्य है और s असत्य है। और, तब एक अंतर्विरोध प्राप्त करने के लिए हम एक मान्य तर्क प्रस्तुत कर सकते हैं।

इस विधि के इस्तेमाल को समझने के लिए समतल ज्यामिति से लिए गए निम्नलिखित उदाहरण पर विचार कीजिए।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित को सिद्ध कीजिए :
यदि दो अलग-अलग रेखाएं L_1 और L_2 एक दूसरे को प्रतिच्छेद करती हैं, तो उनका प्रतिच्छेद एक बिन्दु है।

हल : दिए हुए निहितार्थ को अंतर्विरोध से सिद्ध करने के लिए आइए सबसे पहले हम यह मानकर चलें कि दो अलग-अलग रेखाएं L_1 और L_2 एक-दूसरे को एक से अधिक बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हैं। मान लीजिए इनमें से दो बिन्दु A और B हैं।

तब L_1 और L_2 दोनों ही A और B को आविष्ट करेंगी।

लेकिन यह बात ज्यामिति के इस अभिगृहीत का अंतर्विरोध करता है कि 'यदि दो अलग-अलग बिन्दु दिए हों, तो इन्हें आविष्ट करने वाली केवल एक रेखा होती है।'

अतः यदि L_1 और L_2 प्रतिच्छेदी हों, तो ये केवल एक बिन्दु पर ही प्रतिच्छेद करेंगी।

* * *

अंतर्विरोध नियम से अनेक तर्कसंगत पहेलियों को भी हल किया जा सकता है, उन सभी हलों को अस्वीकार करके जिनसे अंतर्विरोध प्राप्त होता है। इस संबंध में निम्नलिखित उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 7 : एक गांव में दो प्रकार के लोग रहते हैं — एक वे जो सदा सच बोलते हैं और दूसरे वे जो सदा झूठ बोलते हैं। मान लीजिए आप इस गांव में जाते हैं जहां आपसे मिलने गांव के दो व्यक्ति A और B आते हैं। आगे, मान लीजिए कि आपसे
A कहती है, "B हमेशा सच बोलती है।"
और B कहती है, "A और मैं विपरीत प्रकार के व्यक्ति हैं।"
A और B किस प्रकार के हैं?

हल : आइए सबसे पहले हम मान लें कि A सत्यवादी है।
∴ A जो कहती है वह सत्य है।
∴ B एक सत्यवादी है।
∴ B जो कहती है वह सत्य है।
∴ A और B विपरीत प्रकार के हैं।
यह एक अंतर्विरोध है, क्योंकि हमारे परिकल्पनाओं के अनुसार A और B दोनों ही सत्यवादी हैं।
∴ शुरू में हम जो मानकर चले थे, वह असत्य है।
∴ A सदा झूठ बोलती है।
∴ A ने जो आपसे कहा है वह झूठ है।
∴ B सदा झूठ बोलती है।
∴ A और B समान प्रकार के हैं, अर्थात् दोनों ही सदा झूठ बोलते हैं।

* * *

नीचे आपके लिए कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं। इन प्रश्नों को हल करते समय आप यह देखेंगे कि कुछ ऐसी स्थितियां आती हैं जिनमें अभी तक चर्चित उपपत्ति की तीनों विधियों को लागू किया जा सकता है।

E9) अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति की विधि से दिखाइए कि
   i) $\sqrt{3}$ अपरिमेय है,
   ii) $x \in \mathbf{R}$ के लिए यदि $x^3 + 4x = 0$, तो $x = 0$.

E10) प्रत्यक्ष विधि से और प्रतिस्थितक विधि से E9(ii) को सिद्ध कीजिए।

किसी कथन को सिद्ध करने के अनेक तरीके हो सकते हैं।

E11) मान लीजिए आप उदाहरण 7 में बताए गए गांव में जाते हैं। वहां गांव के दो और व्यक्ति C और D आपसे मिलने आते हैं। C आपको बताती है, हम दोनों ही सदा सच बोलते हैं, और D बताती है, "C सदा झूठ बोलती है।" C और D किस प्रकार के व्यक्ति हैं?

आइए अब हम किसी कथन को असत्य दर्शाने की समस्या पर विचार करें।

2.3.3 प्रतिउदाहरण

मान लीजिए मैं कहती हूँ कि सभी मनुष्य 5 फुट लंबे हैं। ऐसे में शायद आप तुरंत, मेरी बात को ग़लत साबित करने के लिए, एक ऐसा व्यक्ति दिखा देंगे जिसके लिए मेरा कथन असत्य हो जाता है। और जैसा कि आप जानते हैं, अगर एक भी उदाहरण के लिए कथन $(\forall x)\, p(x)$ असत्य हो [अर्थात $(\exists x)(\sim p(x))$ सत्य हो], तो कथन असत्य हो है।

ऐसा उदाहरण जिसके लिए कोई कथन असत्य है, उस कथन के लिए एक **प्रतिउदाहरण (counterexample)** होता है।

एक आम स्थिति जिसमें हम प्रतिउदाहरण ढूंढते हैं; वह है $p \to q$ के रूप के कथनों को असिद्ध करने के लिए। इकाई 1 में आप पढ़ चुके हैं कि $\sim(p \to q) \equiv p \wedge \sim q$, अतः $p \to q$ का प्रतिउदाहरण एक

ऐसा उदाहरण होना चाहिए जहां $p \wedge \sim q$ सत्य हो, अर्थात् p सत्य हो और $\sim q$ सत्य हो, अर्थात् परिकल्पना p तो लागू होती हो, परन्तु निष्कर्ष q लागू न होता हो।

उदाहरण के लिए, कथन 'यदि n एक विषम पूर्णांक है, तो n एक अभाज्य संख्या है।' के खंडन के लिए हमें एक ऐसे विषम पूर्णांक का पता लगाना होगा जो अभाज्य संख्या न हो। इस प्रकार का एक पूर्णांक 15 है। अतः $n = 15$ दिए हुए कथन का एक प्रतिउदाहरण है।

ध्यान दीजिए कि कथन p का कोई प्रतिउदाहरण होना यह सिद्ध करता है कि p असत्य है, अर्थात् $\sim p$ सत्य है।

आइए हम एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 8 : निम्नलिखित कथन को असिद्ध कीजिए :
$(\forall\, a \in \mathbf{R})\, (\forall\, b \in \mathbf{R})\, [(a^2 = b^2) \Rightarrow (a = b)]$.

हल : इस कथन को असिद्ध करने का एक अच्छा तरीका है एक प्रतिउदाहरण का पता लगाना, अर्थात् ऐसी वास्तविक संख्याओं a और b के युग्म का पता लगाना जिसके लिए $a^2 = b^2$ परन्तु $a \neq b$. क्या आप इस प्रकार के संख्या युग्म का पता लगा सकते हैं? क्या $a = 1$ और $b = -1$ हो सकते हैं? इनसे काम हो जाता है।

वास्तव में दिए गए कथन के अनंततः अनेक प्रतिउदाहरण हैं। (क्यों?)

* * *

अब एक प्रश्न।

E12) उपयुक्त प्रतिउदाहरण देकर निम्नलिखित कथनों को असिद्ध कीजिए।

i) $\forall x \in \mathbf{Z},\, x \in \mathbf{N}$.

ii) $(x+y)^n = x^n + y^n \;\; \forall\, n \in \mathbf{N},\, x, y \in \mathbf{Z}$.

iii) $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, 1-1 होता है यदि और केवल यदि f आच्छादी हो।
(संकेत : $p \Leftrightarrow q$ को असिद्ध करने के लिए यह सिद्ध कर लेना काफी होगा कि $p \Rightarrow q$ असत्य है या $q \Rightarrow p$ असत्य है।)

उपपत्ति के कुछ और तरीके भी हैं, जैसे कि रचनात्मक (constructive) उपपत्ति, जिसे आप इकाई 11 के परिशिष्ट में और गणित के अन्य पाठ्यक्रमों में देखेंगे। यहाँ हम इस विधि पर चर्चा नहीं करेंगे।

अन्य उपपत्तियां जो आपको देखने को मिलेंगी, वे हैं **शून्य उपपत्ति (vacuous proof)** और **तुच्छ उपपत्ति (trivial proof)**।

शून्य उपपत्ति में इस तथ्य का प्रयोग किया जाता है कि यदि p असत्य है, तो $p \to q$ हमेशा सत्य होता है चाहे q का सत्य मान कुछ भी क्यों न हो। अतः $p \to q$ को शून्यतः सिद्ध करने के लिए हमें केवल यह दिखाने की आवश्यकता होती है कि p असत्य है।
उदाहरण के लिए, मान लीजिए हम सिद्ध करना चाहते हैं कि 'यदि $n > n + 1$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$, तो $n^2 = 0$'
चूंकि प्रत्येक $n \in \mathbf{Z}$ के लिए '$n > n + 1$' असत्य होता है, इसलिए दिया हुआ कथन **शून्यतः सत्य** होता है।

इसी प्रकार $p \to q$ की **तुच्छ उपपत्ति** इस तथ्य पर आधारित होती है कि यदि q सत्य है, तो $p \to q$ हमेशा सत्य होता है, चाहे p का सत्य मान कुछ भी क्यों न हो। अतः उदाहरण के लिए,
'यदि $n > n + 1$, जहाँ $n \in \mathbf{Z}$, तो $n + 1 > n$' तुच्छतः सत्य होता है, क्योंकि $n + 1 > n \;\forall\, n \in \mathbf{Z}$. इस पूरी प्रक्रिया में परिकल्पना के सत्य मान का (जो कि इस उदाहरण में असत्य है) कोई प्रयोग नहीं होता।

अब आपके लिए ऐसी उपपत्तियों को बनाने का एक मौका।

E13) शून्य उपपत्ति का और तुच्छ उपपत्ति का एक उदाहरण दीजिए।

आइए अब हम $p(n), n \in N$ के रूप के कथनों की उपपत्ति के एक अति-महत्वपूर्ण तकनीक का अध्ययन करें।

2.4 आगमन नियम

एक दिन, कुछ विद्यार्थियों के साथ एक चर्चा में, एक ने निन्दक तरीके से मुझसे कहा कि भारत के सभी राजनीतिज्ञ भ्रष्ट हैं। मैंने उससे पूछा कि उसने यह निष्कर्ष कैसे निकाला। पुष्टि के लिए उसने ऐसे अनेक राजनीतिज्ञों के नाम लिए, जिनकी भ्रष्टता के बारे में गली-गली में चर्चा है। अत: अनेक विशेष उदाहरणों के आधार पर उसने राजनीतिज्ञों के बारे में अपनी यह व्यापक राय बना ली। यह **आगमनिक तर्क (inductive logic)** का एक उदाहरण है, जो कि तर्क देने की एक ऐसी प्रक्रिया है जिससे अनेक अलग-अलग मामलों को देखकर व्यापक नियम मालूम किए जाते हैं। गणित और दूसरे सभी विज्ञानों में आगमनिक तर्क का प्रयोग किया जाता है। लेकिन, गणित में हम इसका प्रयोग कुछ अधिक परिशुद्ध रूप में करते हैं।

गणितीय आगमन में **परिशुद्धता (precision)** का होना आवश्यक होता है क्योंकि, जैसा कि आप जानते हैं, $(\forall\ n \in N)\ p(n)$ के रूप का कथन केवल तभी सत्य होता है जबकि N के **प्रत्येक** n के लिए इसे सत्य दर्शाया जा सकता हो। (ऊपर के उदाहरण में, यदि विद्यार्थी को एक अभ्रष्ट राजनीतिज्ञ का उदाहरण भी दिया जाए, तब भी संभवत: वह अपनी व्यापक राय नहीं बदलेगी।)

हम इस बात से कैसे सुनिश्चित हो सकते हैं कि हमारा कथन $p(n)$, n के उन सभी मानों के लिए सत्य है जिनपर हम ग़ौर कर रहे हैं? इसका उत्तर मालूम करने के लिए, आइए हम एक उदाहरण लें।

मान लीजिए हम सिद्ध करना चाहते हैं कि

$1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, प्रत्येक $n \in N$ के लिए।

आइए हम विधेय $1 + 2 + \ldots\ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, को $p(n)$ से प्रकट करें। अब हम यह सत्यापित कर सकते हैं कि यह n के कुछ मानों, जैसे $n = 1, n = 5, n = 10, n = 100$, आदि, के लिए सत्य है। परन्तु, अभी भी हम इस बात से सुनिश्चित नहीं हो सकते कि यह n के किसी ऐसे मान के लिए सत्य होगा, जिस पर हमने इसे सत्यापित नहीं किया है।

लेकिन अब मान लीजिए कि हम यह दर्शा सकते हैं कि यदि किसी n (मान लीजिए $n = k$) के लिए $p(n)$ सत्य है, तो यह $n = k + 1$ के लिए भी सत्य होगा। तब हम बहुत अच्छी स्थिति में हैं क्योंकि हम जानते हैं कि $p(1)$ सत्य है। और, क्योंकि $p(1)$ सत्य है, इसलिए $p(1+1)$, अर्थात् $p(2)$ सत्य होगा, आदि। इस तरह हम यह दर्शा सकते हैं कि प्रत्येक $n \in N$ के लिए $p(n)$ सत्य है।

अत: हमारी उपपत्ति निम्नलिखित दो चरणों में बंट जाती है।

i) यह जांच करना कि $p(1)$ सत्य है;

ii) यह सिद्ध करना कि जब कभी $p(k)$ सत्य होता है, तब $p(k+1)$ भी सत्य होता है, जहाँ $k \in N$.

अब हम इसी नियम का औपचारिक कथन अधिक व्यापक रूप में देंगे।

गणितीय आगमन नियम (Principle of Mathematical Induction) : मान लीजिए $p(n)$ एक विधेय है, जहाँ n एक प्राकृतिक संख्या है। और, मान लीजिए कि निम्नलिखित दो प्रतिबंध लागू होते हैं :

i) $p(m)$ सत्य है, जहाँ $m \in N$;

ii) यदि $p(k)$ सत्य है तो $p(k+1)$ भी सत्य होगा, जहाँ $k\ (\geq m)$ एक प्राकृतिक संख्या है।

तब प्रत्येक $n \geq m$ के लिए $p(n)$ सत्य होता है।

नियम के दो प्रतिबंधों को देखकर क्या आप बता सकते हैं कि यह नियम क्यों काम करता है? (संकेत के रूप में, अपने ऊपर के उदाहरण में $m = 1$ लीजिए।)
ऐसा है कि (i) से हमें पता चलता है कि $p(m)$ सत्य है। तब (ii) में $k = m$ लेने पर हम पाते हैं कि $p(m + 1)$ सत्य है। और क्योंकि $p(m + 1)$ सत्य है, इसलिए $p(m + 2)$ भी सत्य होगा, आदि आदि।

ऊपर दिए गए उदाहरण पर लौटते हुए, आइए हम दूसरे चरण को पूरा करें। हम जानते हैं कि $p(k)$ सत्य है, अर्थात् $1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$. हम जाँच करना चाहते हैं कि $p(k + 1)$ सत्य है या नहीं। अतः, आइए हम $p(k + 1)$ ज्ञात करें।

$$\begin{aligned} 1 + 2 .... + (k + 1) &= (1 + 2 + ... + k) + (k + 1) \\ &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1), \text{ क्योंकि } p(k) \text{ सत्य है।} \\ &= \frac{k(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

अतः $p(k + 1)$ सत्य है।

अतः गणितीय आगमन नियम से हम जानते हैं कि प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए $p(n)$ सत्य है।

यह नियम वास्तव में क्या बताता है? यह बताता है कि यदि आप कुछ कदम, मान लीजिए m कदम चल सकते हैं, और यदि प्रत्येक चरण पर आप एक कदम और चल सकते हों, तब आप किसी भी दूरी तक चल कर जा सकते हैं। सुनने में तो यह बात सरल लगती है, लेकिन यह जानकर आपको शायद आश्चर्य होगा कि इस नियम के तकनीक का पहले पहल प्रयोग यूरोप वासियों ने किया था, और वह भी कुछ ही सदियों पहले, अर्थात् 16वीं शताब्दी में जब वेनिस के निवासी एफ. माउरोसाइकस (1494-1573) ने किया था। उन्होंने इस तकनीक का प्रयोग यह दर्शाने के लिए किया था कि

$$1 + 3 + ... + (2n - 1) = n^2.$$

फ़र्मा (1601-1665) ने इस तकनीक में और सुधार लाकर यह सिद्ध किया कि यह नियम प्रायः इस्तेमाल होने वाले गणित के निम्नलिखित नियम के तुल्य है।

सुक्रमण-नियम (Well-ordering principle) : **N** के किसी भी अरिक्त उपसमुच्चय का एक लघुतम अवयव होता है।

इन दोनों नियमों के बीच के संबंध को देखने के लिए गणितीय आगमन नियम के निम्नलिखित तुल्य रूप पर गौर करें।

शब्द 'mathematical induction' का प्रयोग पहली दफ़ा द मॉर्गन ने किया था।

गणितीय आगमन नियम (तुल्य रूप) : मान लीजिए $S \subseteq \mathbf{N}$, जहाँ
i) $m \in S$
ii) प्रत्येक $k \in \mathbf{N}, k \geq m$ के लिए, निम्नलिखित निहितार्थ सत्य होता है :
$k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$.
तब $S = \{m, m + 1, m + 2, ...\}$.

क्या आप गणितीय आगमन नियम के दोनों रूपों की तुल्यता को देख सकते हैं? यदि आप

$$S = \{n \in \mathbf{N} \mid p(n) \text{ सत्य है}\}$$

लें, तो आप देख सकते हैं कि ऊपर लिखा गया नियम पिछले रूप का ही पुनर्लेखन है।

आइए अब हम उपपत्ति का एक ऐसा उदाहरण लें जिसमें गणितीय आगमन नियम को लागू किया गया हो।

उदाहरण 9 : गणितीय आगमन से सिद्ध कीजिए कि

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1) \; \forall \; n \in \mathbf{N}.$$

हल : हम विधेय

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n}{6}(n+1)(2n+1)$$

को $p(n)$ से प्रकट करते हैं।

ध्यान दीजिए कि जब तक हमें n का मान ज्ञात नहीं होता, तब तक p(n) एक विधेय होता है न कि कथन।

चूँकि इसे हम प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए सिद्ध करना चाहते हैं, हम $m = 1$ लेते हैं।

चरण 1 : $p(1)$, $1^2 = \frac{1}{6}(1+1)(2+1)$ है, जो कि सत्य है।

चरण 2 : मान लीजिए किसी $k \in \mathbf{N}$ के लिए $p(k)$ सत्य है,

अर्थात् $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + k^2 = \frac{k}{6}(k+1)(2k+1)$ सत्य है।

चरण 3 : जाँच करना कि चरण 2 में की गई परिकल्पना में $p(k+1)$ की सत्यता निहित है। आइए देखें।

$p(k+1)$ है: $1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3)$

$$\Leftrightarrow (1^2 + 2^2 + \ldots\ldots + k^2) + (k+1)^2 = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{k}{6}(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3),$$ क्योंकि $p(k)$ सत्य है।

$$\Leftrightarrow \frac{k+1}{6}[k(2k+1) + 6(k+1)] = \frac{k+1}{6}(k+2)(2k+3)$$

$$\Leftrightarrow 2k^2 + 7k + 6 = (k+2)(2k+3),$$ दोनों ओर $\frac{k+1}{6}$ से भाग देने पर।

जो कि सत्य है।

अतः '$p(k)$ सत्य है' में यह निहित है कि $p(k+1)$ भी सत्य होगा।

इस तरह हम देखते हैं कि गणितीय आगमन नियम के दोनों प्रतिबंध यहाँ लागू होते हैं। अतः इसका निष्कर्ष भी अवश्य लागू होगा, अर्थात् प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए $p(n)$ सत्य है।

* * *

क्या आपने उदाहरण 9 को ध्यान से पढ़ा है? यदि 'हां' तो इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि उपपत्ति को निम्न तीन चरणों में लागू करना होता है :

चरण 1 (जिसे **आगमन का आधार** कहा जाता है) : यह जांच करना कि किसी एक $m \in \mathbf{N}$ के लिए $p(m)$ सत्य है या नहीं।

चरण 2 (जिसे **आगमन परिकल्पना** कहा जाता है) : यह मान लेना कि किसी भी $k \in \mathbf{N}, k \geq m$ के लिए, $p(k)$ सत्य है।

चरण 3 (जिसे **आगमन चरण** कहा जाता है) : प्रत्यक्ष या परोक्ष उपपत्ति से दिखाना कि $p(k+1)$ सत्य है।

आइए अब हम एक ऐसा उदाहरण लें जिसमें $m \neq 1$.

उदाहरण 10 : दिखाइए कि $2^n > n^3$, जहां $n \geq 10$.

हल : हम विधेय '$2^n > n^3$' को $p(n)$ से प्रकट करेंगे।

चरण 1 : $n = 10$ पर $2^{10} = 1024$, जो 10^3 से बड़ी है। अतः $p(10)$ सत्य है।

चरण 2 : हम यह मान लेते हैं कि किसी भी $k \geq 10$ के लिए $p(k)$ सत्य है। अतः $2^k > k^3$.

चरण 3 : अब हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $2^{k+1} > (k+1)^3$.

ध्यान दीजिए कि $2^{k+1} = 2.2^k > 2.k^3$, हमारी परिकल्पना के अनुसार।

और $2k^3 > \left(1+\frac{1}{10}\right)^3 k^3$, क्योंकि $2 > \left(1+\frac{1}{10}\right)^3$

$\geq \left(1+\frac{1}{k}\right)^3 . k^3$, क्योंकि $k \geq 10$.

$= (k+1)^3$.

इस तरह, $k \geq 10$ के लिए यदि $p(k)$ सत्य है, तो $p(k+1)$ भी सत्य होगा।

इस तरह गणितीय आगमन नियम के अनुसार सभी $n \geq 10$ के लिए $p(n)$ सत्य है।

* * *

अब आप इस नियम को लागू करके नीचे दिए गए प्रश्न हल क्यों नहीं करते?

E14) गणितीय आगमन से सिद्ध कीजिए कि

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\dots\dots\dots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n} \forall n \in \mathbf{N}.$$

E15) दिखाइए कि किसी भी पूर्णांक $n > 1$ के लिए $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

(संकेत : आगमन का आधार $p(2)$ है।)

आगे बढ़ने से पहले **एक चेतावनी!** यदि सिद्ध करना हो, कि $\forall n \geq m$, $p(n)$ सत्य है, तो आगमन का आधार और आगमन चरण **दोनों** ही प्रतिबंध लागू होने चाहिए। यदि इनमें से कोई भी एक प्रतिबंध लागू नहीं होता, तो हम इस निष्कर्ष पर नहीं पहुंच सकते कि $\forall n \geq m$, $p(n)$ सत्य है।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि $p(n)$, $(x+y)^n \leq x^n + y^n \forall x, y \in \mathbf{R}$ है। तब $p(1)$ सत्य होगा। परन्तु चरण 2 और चरण 3 लागू नहीं होते। अतः प्रत्येक $n \in \mathbf{N}$ के लिए $p(n)$ सत्य नहीं होगा। (क्या आप n का एक ऐसा मान ज्ञात कर सकते हैं जिसके लिए $p(n)$ असत्य हो?)

एक और उदाहरण के तौर पर, $p(n)$ को कथन '$1+2+\dots+n < n$' लीजिए। फिर, यदि $p(k)$ सत्य है, तो $p(k+1)$ भी सत्य होगा (इसे सिद्ध कीजिए!)। लेकिन आधार चरण किसी भी $m \in \mathbf{N}$ के लिए सत्य नहीं है। और, जैसा कि आप देख सकते हैं, $p(n)$ असत्य है।

आइए अब हम एक ऐसी स्थिति पर विचार करें जिसमें हमें लगता है कि आगमन नियम लागू होना चाहिए, लेकिन वास्तव में नियम लागू नहीं हो पाता। इस संबंध में संख्या अनुक्रम 1, 1, 2, 3, 5, 8 .... लीजिए। इन संख्याओं को **फिबोनाची संख्याएं** कहते हैं, जो कि इतालवी गणितज्ञ फिबोनाची के नाम पर रखा गया है। तीसरे पद के बाद, इस अनुक्रम का प्रत्येक पद पिछले दो पदों का जोड़ होता है। अतः, यदि a_n, nवाँ पद हो, तो $a_1=1$, $a_2=1$ और $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ \forall n \geq 3$.

मान लीजिए हम गणितीय आगमन नियम की सहायता से दर्शाना चाहते हैं कि $a_n < 2^n \ \forall n \in \mathbf{N}$. तब, यदि $p(n)$ विधेय $a_n < 2^n$ हो, तो हम जानते हैं कि $p(1)$ सत्य है।

अब मान लीजिए कि हम जानते हैं कि किसी $k \in \mathbf{N}$ के लिए $p(k)$ सत्य होता है, अर्थात् $a_k < 2^k$. हम गणितीय आगमन नियम की सहायता से दिखाना चाहते हैं कि $a_{k+1} < 2^{k+1}$, अर्थात् $a_k + a_{k-1} < 2^{k+1}$ लेकिन हमें a_{k+1} के बारे में कुछ भी पता नहीं है। अतः यहाँ हम ऊपर बताए गए रूप में आगमन नियम को किस प्रकार लागू कर सकते हैं? ऐसी स्थिति में आगमन नियम के एक अधिक प्रबल रूप को इस्तेमाल करने की ज़रूरत होती है। आइए, देखें कि यह प्रबल रूप क्या है।

प्रबल गणितीय आगमन नियम (Principle of strong mathematical induction) : मान लीजिए $p(n)$ प्राकृतिक संख्या n में एक विधेय है। और मान लीजिए कि हम यह दर्शा सकते हैं कि

i) किसी $m \in \mathbf{N}$ के लिए $p(m)$ सत्य है, और

ii) जब $p(m)$, $p(m+1)$, ... $p(k)$ सत्य होते हैं, तब $p(k+1)$ भी सत्य होता है, जहाँ $k \geq m$.

तब हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सभी प्राकृतिक संख्याओं $n \geq m$ के लिए $p(n)$ सत्य है।

हम पिछले नियम की तुलना में इस नियम को अधिक प्रबल क्यों कहते है? कारण यह है कि आगमन चरण में हम कुछ अधिक परिकल्पनाएं, अर्थात् **m और k के बीच स्थित प्रत्येक n के लिए p(n) सत्य है,** मान कर चलते हैं, न केवल यह कि $p(k)$ सत्य है।

आइए अब हम पुन: फिबोनाची अनुक्रम को लें। गणितीय आगमन नियम के प्रबल रूप को लागू करने के लिए हम $m = 1$ लेते हैं। हम देख चुके हैं कि $p(1)$ सत्य है। हमें यह भी देखना होगा कि $p(2)$ सत्य है या नहीं। ऐसा इसलिए क्योंकि हमें $n \geq 3$ के लिए संबंध $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ का प्रयोग करना होगा।

अब हम यह जानते हैं कि $p(1)$ और $p(2)$ दोनों सत्य हैं। आइए हम अगले चरण पर विचार करें। चरण 2' में हम किसी स्वेच्छ $k \geq 2$ के लिए मान लेते हैं कि प्रत्येक n के लिए $p(n)$ सत्य है, जहाँ $1 \leq n \leq k$, अर्थात् $a_n < 2^n$, जहाँ $1 \leq n \leq k$.

प्रबल रूप को लागू करने के लिए हमें चरण 1 की जाँच n के एक से अधिक मानों के लिए करनी होती है।

अंत में, अर्थात् चरण 3 में हमें यह दिखाना है कि $p(k+1)$ सत्य है, अर्थात् $a_{k+1} < 2^{k+1}$. अब

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_k + a_{k-1} \\ &< 2^k + 2^{k-1}, \text{ चरण 2 में की गई परिकल्पना के अनुसार।} \\ &= 2^{k-1}(2+1) \\ &< 2^{k-1}\, 2^2 \\ &= 2^{k+1} \end{aligned}$$

$\therefore p(k+1)$ सत्य है।

$\therefore \forall n \in N$, $p(n)$ सत्य है।

यूं तो देखने में गणितीय आगमन नियम का "प्रबल" रूप और "दुर्बल" रूप अलग-अलग लगते हैं। परन्तु **वास्तव में, दोनों रूप तुल्य हैं।** ऐसा इसलिए है, क्योंकि इनमें से किसी भी एक रूप को दूसरे रूप से प्राप्त किया जा सकता है। अत: हम गणितीय आगमन के किसी भी रूप का प्रयोग कर सकते हैं। किसी दी हुई स्थिति में हम उपयुक्त रूप का प्रयोग करते है। जैसे कि, ऊपर दिए गए उदाहरण की तरह नीचे दिए गए उदाहरण में आप मानेंगे कि गणितीय आगमन नियम के प्रबल रूप का प्रयोग करना अधिक उत्तम है।

उदाहरण 11 : आगमन की सहायता से सिद्ध कीजिए कि कोई भी पूर्णांक $n \geq 2$ या तो अभाज्य है या अभाज्य पूर्णांकों का गुणनफल है।

हल : यहाँ $p(n)$ विधेय 'n एक अभाज्य पूर्णांक है या अभाज्य पूर्णांकों का गुणनफल है।' है।

चरण 1 (आगमन का आधार) : चूंकि 2 अभाज्य पूर्णांक है, इसलिए $p(2)$ सत्य है।

चरण 2 (आगमन परिकल्पना) : मान लीजिए कि $p(n)$ सत्य है, जहाँ $2 \leq n \leq k$, अर्थात् $p(3)$, $p(4), \ldots, p(k)$ सत्य हैं।

चरण 3 (आगमन चरण) : अब $p(k + 1)$ लीजिए। यदि $k + 1$ एक अभाज्य पूर्णांक है, तो $p(k + 1)$ सत्य होगा। यदि $k + 1$ अभाज्य नहीं है, तो $k + 1 = rs$ जहाँ, $2 \leq r \leq k$ और $2 \leq s \leq k$. लेकिन हमारी आगमन परिकल्पना के अनुसार $p(r)$ सत्य है और $p(s)$ सत्य है। अत: r और s या तो अभाज्य पूर्णांक होंगे या अभाज्य पूर्णांकों के गुणनफल होंगे। इसलिए, $k + 1$ अभाज्य पूर्णांकों का गुणनफल होगा। अंत:, $p(k + 1)$ सत्य है।

इसलिए $\forall n \geq 2, p(n)$ सत्य है।

* * *

आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E16) यदि $a_1, a_2, \ldots$ फिबोनाची अनुक्रम के पद हों, तो गणितीय आगमन नियम के दुर्बल रूप और प्रबल रूप की सहायता से यह दिखाइए कि $a_n > 3/2\ \forall\ n \geq 3$. बताइए कि नियम का कौन-सा रूप आपको अधिक उपयुक्त लगा है?

E17) कथन 'कोई भी n कंचे बराबर साइज़ के हैं।' के आगमन से निम्नलिखित "उपपत्ति" पर विचार कीजिए, और बताइए कि यह ग़लत क्यों है।

आगमन का आधार : स्पष्ट है कि $n = 1$ के लिए कथन सत्य है।

आगमन परिकल्पना : मान लीजिए कि $n = k$ के लिए कथन सत्य है।

आगमन चरण : अब कोई भी $k + 1$ कंचे $1, 2, \ldots, k + 1$ लीजिए। आगमन परिकल्पना के अनुसार k कंचे $2, 3, \ldots, k + 1$ समान साइज़ वाले हैं। अतः सभी $k + 1$ कंचे समान साइज़ वाले हैं।

अतः प्रत्येक n के लिए दिया हुआ कथन सत्य है।

E18) सिद्ध कीजिए कि निम्नलिखित परिणाम गणितीय आगमन नियम (प्रबल रूप) के तुल्य है।
मान लीजिए $S \subseteq \mathbf{N}$, जहाँ
i) $m \in S$
ii) यदि $m, m + 1, m + 2, \ldots, k$, S के अवयव हैं, तो $k + 1 \in S$.
तब $S = \{ n \in \mathbf{N} \mid n \geq m \}$.

E19) $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1 \ \forall \ n \in \mathbf{N}$ को सिद्ध करने के लिए आप गणितीय आगमन नियम के किस रूप का प्रयोग करेंगे, और क्यों? साथ ही, असमिका को सिद्ध कीजिए।

इसके साथ ही हम गणितीय कथनों को सिद्ध या असिद्ध करने के विभिन्न तकनीकों पर अपनी चर्चा समाप्त कर रहे हैं। इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है आइए उसका संक्षिप्त विवरण देखें।

2.5 सारांश

इस इकाई में आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है।

1. गणितीय कथन की उपपत्ति क्या और कैसी होती है। साथ ही, ज़्यादा इस्तेमाल होने वाले 4 अनुमान-नियम, यानी

   i) वियोजन नियम (या मोडस पोनन्ज) : $[(p \to q) \wedge p] \Rightarrow q$
   ii) प्रतिस्थिति नियम (या मोडस तोलन्ज) : $[(p \to q) \wedge \sim q] \Rightarrow \sim p$.
   iii) वियोजित तर्क : $[(p \vee q) \wedge \sim p] \Rightarrow q$
   iv) परिकल्पनात्मक तर्क : $[(p \to q) \wedge (q \to r)] \Rightarrow (p \to r)$

2. प्रत्यक्ष उपपत्ति का वर्णन और उदाहरण। यह विधि मोडस पोनन्ज़ पर आधारित है।
3. दो प्रकार की परोक्ष उपपत्तियां : प्रतिस्थितक द्वारा उपपत्ति, और अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति।
4. कथन को असिद्ध करने के लिए प्रतिउदाहरण का प्रयोग।
5. गणितीय आगमन नियम का "प्रबल" और "दुर्बल" रूप, और सुक्रमण नियम के साथ उनकी तुल्यता।

2.6 हल/उत्तर

E1) उदाहरण के लिए

प्रमेय : $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$, जहाँ $x, y \in \mathbf{R}$.

उपपत्ति : $x, y \in \mathbf{R}$ के लिए $(x + y)^2 = (x + y)(x + y)$ (वर्ग की परिभाषा से)

$(x + y)(x + y) = x(x + y) + y(x + y)$ (बंटन-नियम से, जिसे पहले सिद्ध किया जा चुका है)

$x(x + y) + y(x + y) = x^2 + 2xy + y^2$ (फिर बंटन-नियम से और बीजीय पदों के जोड़ और गुणा की परिभाषा से)

अतः, $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$ (पहले से सिद्ध किए गए कथन 'a = b और b = c से निकलता है कि a = c' को लागू करने पर।)

E2) नहीं, जब तक कि इसे सत्य सिद्ध नहीं कर दिया जाता।

E3)

p	q	r	~r	q∨~r	p→q∨~r (परिकल्पनाएं)	q→p (परिकल्पनाएं)	p→r (निष्कर्ष)
T	T	T	F	T	T	T	T
T	T	F	T	T	T	T	F
T	F	T	F	F	F	T	T
T	F	F	T	T	T	T	F
F	T	T	F	T	T	F	T
F	T	F	T	T	T	F	T
F	F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

पंक्तियों 1, 2, 4, 7, 8 में परिकल्पनाएं सत्य हैं। इसलिए, यदि इन पंक्तियों में निष्कर्ष भी सत्य हो, तो तर्क मान्य होगा। परन्तु यह बात पंक्ति 2 में लागू नहीं होती। अतः तर्क मान्य नहीं है।

E4) i) मान लीजिए
p: रबड़ सफेद है।
q: ऑक्सीजन धातु है।
तब तर्क होगा :

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

p	q (निष्कर्ष)	~p (परिकल्पनाएं)	p∨q (परिकल्पनाएं)
T	T	F	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	F	T	F

इसकी सत्य सारणी बगल में दी गई है।
केवल तीसरी पंक्ति में सभी परिकल्पनाएं सत्य हैं और, क्योंकि इस पंक्ति में निष्कर्ष भी सत्य है, इसलिए तर्क मान्य है।

ii) तर्क है $(p \to q) \wedge (q \to r) \Rightarrow (p \to r)$, जहाँ
p : मधु सरपंच है।
q : मधु पंचायत की मुखिया है।
r : मधु जायदाद के मामलों पर अपना निर्णय देती है।
यह मान्य है, क्योंकि जब कभी दोनों परिकल्पनाएं सत्य होती हैं, तब निष्कर्ष भी सत्य होता है (नीचे की सारणी देखिए)।

p	q	r	p→q (परिकल्पनाएं)	q→r (परिकल्पनाएं)	p→r (निष्कर्ष)
T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T

iii) तर्क है :

$[(p \vee q) \wedge (q \to r) \wedge \sim r] \Rightarrow q$, जहाँ

p: मुन्ना खाना बनाएगा।

q: मुन्नी कराटे का अभ्यास करेगी।

r: मुन्ना पढ़ायी करता है।

यह मान्य नहीं है, जैसा कि आप नीचे दी गई सत्य सारणी की पंक्ति 4 को देखकर जान सकते हैं।

p	q (निष्कर्ष)	r	$\sim r$ (परिकल्पनाएं)	$p \vee q$ (परिकल्पनाएं)	$q \to r$ (परिकल्पनाएं)
T	T	T	F	T	T
T	T	F	T	T	F
T	F	T	F	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	T	F	T	T
F	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T
F	F	F	T	F	T

E6) हमें सिद्ध करना है कि $p \Rightarrow q$, जहां

p: $x \in \mathbf{R}$ जिससे कि $x^2 = 9$, और

q: $x = 3$ या $x = -3$.

अब, $x^2 = 9 \Rightarrow \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{9} \Rightarrow x = \pm 3$.

अतः, p सत्य है और $(p \Rightarrow q)$ सत्य है से यह निष्कर्ष निकलता है कि q सत्य है।

E7) यदि f आच्छादी नहीं है, तो f, X से स्वयं पर 1-1 फलन नहीं है।

E8) हम सिद्ध करना चाहते हैं कि $\sim q \Rightarrow \sim p$, जहाँ

p: $x \in \mathbf{Z}$ जिसके लिए x^2 सम संख्या है।

q: x सम संख्या है।

हम प्रारंभ में यह मानकर चलते हैं कि q असत्य है, अर्थात् x विषम संख्या है।

तब $x = 2m + 1$, जहाँ $m \in \mathbf{Z}$.

इसलिए $x^2 = 4m^2 + 4m + 1 = 2(2m^2 + 2m) + 1$.

अतः x^2 विषम संख्या है, अर्थात् p असत्य है।

इस तरह, $\sim q \Rightarrow \sim p$, अतः $p \Rightarrow q$.

E9) i) इसे उदाहरण 5 की तरह कीजिए।

ii) आइए, मान लें कि $x^3 + 4x = 0$ और $x \neq 0$.

तब $x(x^2 + 4) = 0$ और $x \neq 0$.

अतः $x^2 + 4 = 0$ अर्थात् $x^2 = -4$.

लेकिन $x \in \mathbf{R}$ और $x^2 = -4$ एक अंतर्विरोध है।

इसलिए हमारी परिकल्पना असत्य है। अतः, दिया हुआ कथन सत्य है।

E10) प्रत्यक्ष उपपत्ति : $x^3 + 4x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 4) = 0$,

$\Rightarrow x = 0$ या $x^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow x = 0$ क्योंकि $x^2 \neq -4 \; \forall \; x \in \mathbf{R}$.

प्रतिस्थितक द्वारा उपपत्ति : मान लीजिए $x \neq 0$.
तब $x(x^2+4) \neq 0$.
$\Rightarrow x^3+4x \neq 0$.
$\therefore$ प्रत्येक $x \in \mathbf{R}\setminus\{0\}$ के लिए $x^3+4x \neq 0$.
इस तरह हमने सिद्ध कर दिया है कि '$x \in \mathbf{R}$ के लिए $x \neq 0 \Rightarrow x^3+4x \neq 0$'.
अर्थात् '$x \in \mathbf{R}$ के लिए $x^3+4x = 0 \Rightarrow x = 0$'.

E11) मान लीजिए C सत्य बोलती है। इसलिए D सदा सत्य बोलती है। अत: C सदा झूठ बोलती है, जो कि एक अंतर्विरोध है। इसलिए C सत्यवादी नहीं हो सकती, अर्थात् C झूठी है। अत: D सत्यवादी है।

E12) i) $x = 0$, या $x = -1$, या ..... के बारे में क्या विचार है?
ii) उदाहरण के लिए, $n = 2$, $x = 1$ और $y = -1$ लीजिए।
iii) यहाँ हम एक ऐसा f ले सकते हैं, जहाँ f, 1/1 तो है, लेकिन आच्छादी नहीं, या जहाँ f आच्छादी तो है, परन्तु 1-1 नहीं।
$f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$: $f(x) = x + 10$ लीजिए। दिखाइए कि यह 1-1 है, परन्तु आच्छादी नहीं।

E13) i) **प्रमेय** : भुजा a और परिमाप 2a वाले प्रत्येक समबाहु त्रिभुज का क्षेत्रफल 3 से भाज्य होता है।
उपपत्ति : चूंकि ऐसा कोई भी समबाहु त्रिभुज नहीं है जो कि परिकल्पना को संतुष्ट करे, इसलिए कथन शून्यत: सत्य है।
ii) **प्रमेय** : यदि कोई प्राकृतिक संख्या c, 5 से भाज्य हो, तो भुजा c वाले समबाहु त्रिभुज का परिमाप 3c होता है।
उपपत्ति : क्योंकि निष्कर्ष सदैव सत्य होता है, इसलिए कथन तुच्छत: सत्य है।

E14) मान लीजिए p(n) दिया हुआ विधेय है।
चरण 1 : $p(1) : 1 \leq 2-1$, जो सत्य है।
चरण 2 : मान लीजिए कि किसी $k \geq 1$ के लिए p(k) सत्य है,

$$\text{अर्थात्, } 1+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{k^2} \leq 2-\frac{1}{k}.$$

चरण 3 : यह दिखाने के लिए कि $p(k+1)$ सत्य है, निम्नलिखित लीजिए :

$$1+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2} = \left(1+\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{k^2}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}$$
$$\leq \left(2-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{(k+1)^2}, \text{ चरण 2 से।}$$

$$\text{अब, } \left(2-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{(k+1)^2} \leq 2-\frac{1}{(k+1)}$$

$$\text{यदि और केवल यदि } \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k}-\frac{1}{(k+1)}$$

यदि और केवल यदि $k \leq k+1$, जो कि सत्य है।

$$\text{इसलिए, } \left(2-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{(k+1)^2} \leq 2-\frac{1}{(k+1)}.$$

अत: $p(k+1)$ सत्य है।

इस तरह, गणितीय आगमन नियम के अनुसार $\forall\, n \in \mathbf{N}$, p(n) सत्य है।

E15) $p(2) : \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}} > \sqrt{2}$, जो सत्य है।
अब, मान लीजिए कि किसी $k \geq 2$ के लिए p(k) सत्य है।

$$\text{तब } \frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}} > \sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}, \text{ क्योंकि } p(k) \text{ सत्य है।}$$
$$= \frac{\sqrt{k(k+1)}+1}{\sqrt{k+1}}$$
$$> \sqrt{k+1}, \text{ क्योंकि } \sqrt{k+1} > \sqrt{k}.$$

अत: $p(k+1)$ सत्य है।

$\therefore \forall\, n \geq 2$, $p(n)$ सत्य है।

E16) यहाँ हम गणितीय आगमन नियम के प्रबल रूप को लागू करेंगे।

मान लीजिए $p(n) : a_n > \frac{3}{2}$.

चरण 1 : $p(3)$ और $p(4)$ सत्य हैं।

चरण 2 : अब यह मान लीजिए कि $k \in \mathbf{N}, k \geq 3$ के लिए, $p(n)$ सत्य होता है, सभी n के लिए जहाँ $3 \leq n \leq k$.

चरण 3 : हम दिखाना चाहते हैं कि $p(k+1)$ सत्य है। अब

$$a_{k+1} = a_k + a_{k-1} > \frac{3}{2} + \frac{3}{2}, \text{ चरण 2 से।}$$
$$> \frac{3}{2}.$$

$\therefore p(k+1)$ सत्य है।

इस तरह $\forall\, n \geq 3$, $p(n)$ सत्य है।

यहाँ आप दुर्बल रूप को भी लागू कर सकते हैं क्योंकि यह दिखाने के लिए कि $p(k+1)$ सत्य है, केवल यह दिखा देना ही काफी होगा कि $a_k > \frac{3}{2}$

इस तरह, यहाँ पर दुर्बल रूप को लागू करना अधिक उपयुक्त है, क्योंकि कम परिकल्पनाओं से भी वही परिणाम प्राप्त होता है।

E17) प्रश्न आगमन चरण से संबंधित है। पहले कंचे की साइज़ अन्य k कंचों की साइज़ से अलग हो सकती है। इसलिए हमने यह नहीं दर्शाया है कि जब कभी $p(k)$ सत्य होता है, $p(k+1)$ भी सत्य होता है।

E18) गणितीय आगमन नियम के प्रबल रूप के कथन के संदर्भ में मान लीजिए कि $S = \{n \in N \mid p(n) \text{ सत्य है}\}$।

तब आप दर्शा सकते हैं कि किस प्रकार इस प्रश्न में दिया गया रूप वही है जो कि गणितीय आगमन नियम के प्रबल रूप के कथन का है।

E19) मान लीजिए $p(n) : \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{i}} \leq 2\sqrt{n} - 1$.

यहाँ दुर्बल रूप लागू करना ही काफी होगा, क्योंकि $p(k)$ की सत्यता ही काफी है यह सिद्ध करने के लिए कि $p(k+1)$ सत्य है। $p(k+1)$ की सत्यता सिद्ध करने के लिए हमें यह मान लेने की आवश्यकता नहीं हैं कि $p(1), p(2), \ldots\ldots, p(k)$ भी सत्य है। आइए हम सिद्ध करें कि $\forall\, n \in \mathbf{N}$, $p(n)$ सत्य है।

अब, $p(1) : 1 \leq 2 - 1$ जो कि सत्य है।

आगे, मान लीजिए कि किसी $k \in \mathbf{N}$ के लिए $p(k)$ सत्य है।

तब $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots\ldots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leq (2\sqrt{k} - 1) + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$, क्योंकि $p(k)$ सत्य है।

अब $2\sqrt{k} - 1 + \frac{1}{\sqrt{k+1}} \le 2\sqrt{k+1} - 1$

$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right) \ge \frac{1}{\sqrt{k+1}}$

$\Leftrightarrow 2(k + 1 - \sqrt{k(k+1)}) \ge 1.$

$\Leftrightarrow 1 \ge 0$, जो कि सत्य है।

$\therefore p(k+1)$ सत्य है।

$\therefore \forall\, n \in N, p(n)$ सत्य है।

इकाई 3 बूलीय बीजगणित और परिपथ

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ संख्या**

3.1 प्रस्तावना

चित्र 1: क्लौड शैनन, जिन्होंने 1938 मे अनुप्रयुक्त बूलीय बीजावली में पहला बड़ा योगदान दिया था।

पिछली दो इकाइयों में आप प्रतीकात्मक तर्कशास्त्र की प्राथमिक पहलुओं के बारे में पढ़ चुके हैं। सूचना सिद्धांत के संस्थापक सी.ई. शैनन ने स्विचन परिपथों की कार्य प्रणाली और तर्कसंगत संयोजकों की कुछ संक्रियाओं के बीच एक अनुरूपता देखी थी। 1938 में उसने सरल स्विचन परिपथों को बीजीय रूप से प्रकट और प्रकलित (manipulate) करने के लिए इस अनुरूपता पर आधारित एक तकनीक दी। बाद में कुछ नई ठोस अवस्था युक्तियों (जिन्हें इलेक्ट्रॉनिक स्विच या तर्क गेट कहा जाता है) का आविष्कार हो जाने से इन बीजीय तकनीकों में आपरिवर्तन लाने में सहायता मिली और इसी तरह अंकीय तंत्रों (digital systems) से संबंधित अनेक प्रश्नों को बीजीय रूप से हल करने की विधि प्राप्त हो गई।

इस इकाई में हम उन प्रतीकात्मक तर्क तकनीकों पर चर्चा करेंगे जिनकी आवश्यकता परिपथों और अभिकलित्र तर्क (computer logic) को बीजीय रूप में समझने की जरूरत पड़ती है। भाग 3.2 में हम आपको उन अभिलक्ष्यों, जिनसे कि आप पहले से परिचित हैं, पर आधारित कुछ उदाहरणों की सहायता से **बूलीय बीजावली** से परिचित कराएंगे। आप देखेंगे कि इस प्रकार की बीजावलियां अभिकलित्रों में काम आने वाले तर्कसंगत परिपथों की संक्रियाओं के वर्णन में काफी उपयोगी होती हैं।

भाग 3.3 में हमने **बूलीय व्यंजकों** पर चर्चा की है। भाग 3.4 में हमने उस सम्बन्ध (linkage) के बारे में चर्चा की है जोकि इनका तर्क परिपथों के साथ है। भाग 3.5 में आप पढ़ेंगे कि किस प्रकार कुछ विशेष रूप से परिभाषित फलनों, जिन्हें **बूलीय फलन** कहा जाता है के द्वारा परिपथ की सारी कार्य-प्रणाली को बीजीय रूप से व्यक्त किया जाता है। इस भाग में हम बूलीय फलन और परिपथों के संबंध के अनुप्रयोगों को समझाने के लिए **एक सरल परिपथ अभिकल्पना समस्या** पर भी विचार करेंगे।

आइए अब हम इस इकाई के उद्देश्यों पर विचार करें।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- बूलीय बीजावलियों, व्यंजकों और फलनों को परिभाषित कर सकेंगे और उदाहरण दे सकेंगे;
- बूलीय व्यंजक का सम्मिलन प्रसामान्य समघात (DNF) और सर्वनिष्ठ प्रसामान्य समघात (CNF) प्राप्त कर सकेंगे;
- तर्क गेटों की कार्य-प्रणाली की गणितीय व्याख्या दे सकेंगे;
- एक परिपथ को निरूपित करने वाले बूलीय व्यंजक को प्राप्त और इसका सरलीकरण कर सकेंगे;
- बूलीय व्यंजक के लिए एक परिपथ का निर्माण कर सकेंगे;
- बूलीय बीजावली तकनीकों की सहायता से कुछ आसान परिपथों की अभिकल्पना और सरलीकरण कर सकेंगे।

3.2 बूलीय बीजावली

इन प्रश्नों के संबंध में आपकी प्रतिक्रिया क्या होगी : क्या स्विचों (या तर्क गेटों) और तारों का वास्तविक प्रयोग किए बिना ही एक वैद्युत/इलेक्ट्रॉनिक परिपथ की अभिकल्पना की जा सकती है? क्या केवल कागज और कलम की सहायता से एक सरल परिपथ प्राप्त करने के उद्देश्य से एक परिपथ की पुन: अभिकल्पना की जा सकती है जबकि इसकी उपयोगिता भी विफल न हो।

इन दोनों प्रश्न के उत्तर हां में हैं। **बूलीय बीजावली** की संकल्पना ही हमें यह उत्तर देने के लायक बनाती है। इन प्रकार की बीजावलियों के बारे में औपचारिक चर्चा प्रारंभ करने से पहले आइए हम इकाई 1 में बताए गए विषयों पर पुन: विचार करें।

पहले की तरह, यहां भी यह मान लीजिए कि अक्षर p, q, r, ... कथनों को प्रकट करते हैं। सभी कथनों के समुच्चय को हम S से लिखते हैं। आपको याद होगा कि सर्वसत्य कथन (tautology) $\mathcal{T}$ (या विरोध $\mathcal{F}$) एक ऐसा कथन होता है जो सदैव सत्य (या सदैव मिथ्या) होता है। आइए यहां हम यह मान लें कि $\mathcal{T}$ सभी सर्वसत्य कथनों के समुच्चय को प्रकट करता है और $\mathcal{F}$ सभी विरोधों के समुच्चय को प्रकट करता है। इस तरह, $\mathcal{T} \subseteq S$, $\mathcal{F} \subseteq S$.

अरिक्त समुच्चय X पर **द्वि-आधारी संक्रिया** एक फलन $F : X \times X \to X$ होता है।

इकाई 1 में आप यह पढ़ चुके हैं कि यदि दो कथन p और q दिए हुए हों, तो $p \wedge q$ और $p \vee q$ दोनों ही फिर से कथन होते हैं। द्वि-आधारी संक्रिया की परिभाषा से आप यह देख सकते हैं कि $\wedge$ **(सम्मिलन)** और $\vee$ **(सर्वनिष्ठ)** दोनों ही समुच्चय S पर द्वि-आधारी संक्रियाएं हैं जहाँ हम $\wedge(p, q)$ को $p \wedge q$ तरह से और $\vee(p, q)$ को $p \vee q$, $\forall\, p, q \in S$ तरह से लिख रहे हैं और क्योंकि $\sim p$ भी एक कथन है, इसलिए संक्रिया $\sim$ (निषेध (negation)) एकल फलन (unary function) $\sim : S \to S$ को परिभाषित करता है। इस तरह, इन संक्रियाओं के साथ कथन समुच्चय S से एक बीजीय संरचना बन जाती है।

जैसा कि इकाई 1 के भाग 1.3 से स्पष्ट है कि इन तीन संक्रियाओं के अंतर्गत S के अवयव **साहचर्य नियम, क्रम-विनिमेय नियम, बंटन-नियम** और **पूरकीकरण नियम (complementation laws)** को संतुष्ट करते हैं।

इकाई 1 के E19 से आप यह भी जानते हैं कि किसी भी कथन p के लिए $p \vee \mathcal{F} = p$ और $p \wedge \mathcal{T} = p$. इन्हें **तत्समक नियम (identity laws)** कहा जाता है।

ऊपर बतायी गई तीन संक्रियाओं और गुणधर्मों वाला समुच्चय S एक बीजीय संरचना का एक विशेष उदाहरण है जिसे अब हम परिभाषित करेंगे।

परिभाषा : बूलीय बीजावली B एक ऐसा बीजीय संरचना है जिसमें एक समुच्चय $X\ (\neq \phi)$ है, दो द्वि-आधारी संक्रियाओं (जिन्हें $\vee$ और $\wedge$ से प्रकट किया जाता है) और एक एकल संक्रिया (जिसे $'$ से प्रकट किया जाता है) होती है और इसमें विशेष रूप से परिभाषित दो अवयवों **O** और **I** होते हैं जो सभी $x, y, z \in X$ के लिए निम्नलिखित पांच नियमों को संतुष्ट करता है।

B1. साहचर्य नियम :
$x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z.$
$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z.$

B2. क्रम-विनिमेय नियम :
$x \vee y = y \vee x$
$x \wedge y = y \wedge x$

B3. वंटन-नियम :
$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$
$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

B4. तत्समक नियम :
$x \vee \mathbf{O} = x$
$x \wedge \mathbf{I} = x$

B5. पूरकीकरण नियम :
$x \wedge x' = \mathbf{O},$
$x \vee x' = \mathbf{I}.$

हम इस बीजीय संरचना को $B = (X, \vee, \wedge, ', O, I)$ या केवल B के रूप में लिखते है अगर संदर्भ से अन्य शब्दों का अर्थ स्पष्ट हो जाता है। दो संक्रियाओं $\vee$ और $\wedge$ को क्रमश: **सम्मिलन संक्रिया (join operation)** और **सर्वनिष्ठ संक्रिया (meet operation)** कहा जाता है। एकल संक्रिया ' को **पूरकीकरण (complementation)** कहा जाता है।

इस से आप सहमत होंगे कि ऊपर परिभाषा से पहले की गई चर्चा से पता चलता है कि कथनों का समुच्चय S एक बूलीय बीजावली है जहां $\mathcal{T}$ और $\mathcal{F}$ क्रमश: I और O का कार्य करेंगे। इस तरह, $(S, \wedge, \vee, \sim, \mathcal{F}, \mathcal{T})$ बूलीय बीजावली का एक उदाहरण है।

हम एक अन्य बूलीय बीजावली का उदाहरण नीचे दे रहे हैं।

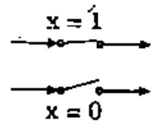
उदाहरण 1 : मान लीजिए X एक अरिक्त समुच्चय है, और $P(X)$ उसके घात समुच्चय को प्रकट करता है, अर्थात् $P(X)$ वह समुच्चय है जिसमें समुच्चय X के सभी उपसमुच्चय अविष्ट हैं। दिखाइए कि $P(X)$ एक बूलीय बीजावली है।

हल : यहां हम $P(X)$ में सामान्य समुच्चय सैद्धांतिक संक्रियाओं सर्वनिष्ठ संक्रिया ($\cap$), सम्मिलन संक्रिया ($\cup$), और पूरकीकरण संक्रिया (^{c}) – को तीन आवश्यक संक्रिया मानते हैं। मान लीजिए ϕ और X क्रमश: O और I की भूमिका निभाते हैं। तब MTE-04 से आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि $P(X), \cup, \cap, ^c, \phi, X)$ को बूलीय बीजावली बनाने वाली सभी प्रतिबंध लागू होते हैं।

उदाहरण के लिए तत्समक नियम (B4) दो समुच्चय सैद्धांतिक तथ्यों अर्थात् 'संपूर्ण समुच्चय के साथ किसी भी उपसमुच्चय का सर्वनिष्ठ स्वयं समुच्चय होता है' और 'रिक्त समुच्चय के साथ किसी भी समुच्चय का सम्मिलन स्वयं समुच्चय होता है' - से प्राप्त होते हैं। जबकि पूरकीकरण नियम **(B5)** समुच्चय सिद्धांत के कुछ अन्य तथ्यों अर्थात् अपने 'पूरक के साथ किसी भी उपसमुच्चय का सर्वनिष्ठ एक रिक्त समुच्चय होता है, और 'अपने पूरक के साथ किसी भी समुच्चय का सम्मिलन संपूर्ण समुच्चय होता है' - से प्राप्त होते हैं।

* * *

बूलीय बीजावली का एक अन्य उदाहरण **स्विचन परिपथों (switching circuits)** पर आधारित है। इसके लिए पहले हमें साधारण स्विचों की कार्य-प्रणाली को गणितीय तरीके से विकसित करने की आवश्यकता होती है। वस्तुत: हम उस मूल विचार को प्रस्तुत करेंगे जिसकी सहायता से अमरीकी सी.ई. शैनन स्विचों की कार्य-प्रणाली और बूल की प्रतीकात्मक तर्क (symbolic logic) के बीच के संबंध का पता लगा सका।



चित्र 2 : ऑफ-ऑन स्थिति।

संभवत: आप साधारण ऑन-ऑफ स्विच की कार्य-प्रणाली से अवश्य परिचित होंगे जिसका प्रयोग सामान्यत: वैद्युत (या इलेक्ट्रॉनिक) नेटवर्क तंत्र के एक अनिवार्य अंग के रूप में किया जाता है। स्विच वह युक्ति है जिससे कि जब यह ऑन स्थिति में होती है अर्थात् जब खाली स्थान को एक चालक दंड से बंद कर दिया जाता है, केवल तभी धारा प्रवाहित होती है। इस तरह, स्विच की **ऑन स्थिति** स्विच की एक अवस्था है जिसे **बंद अवस्था (closed state)** कहा जाता है। स्विच की अन्य अवस्था **खुली अवस्था (open state)** है जबकि इसे ऑफ स्थिति में रखा जाता है। अत: एक स्विच की दो स्थायी अवस्थाएं होती हैं।

स्विच की कार्य-प्रणाली के बारे में चर्चा एक अन्य तरीके से भी की जाती है। हम एक स्विच को x से प्रकट कर सकते हैं और मानों 0 और 1 का प्रयोग इसकी दो अवस्थाओं को प्रकट करने में करते हैं। अर्थात् यह बताने के लिए कि यह खुली अवस्था में है, हम $x = 0$ लिखते हैं और यह बताने के लिए कि यह बंद अवस्था में है हम $x = 1$ लिखते हैं। (देखिए चित्र 2)

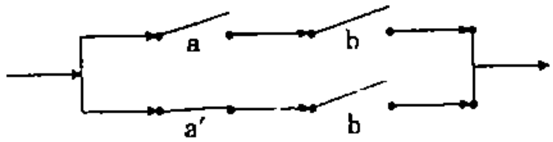
इन मानों को जो स्विच x की अवस्थाएं प्रकट करते हैं, उस स्विच के **अवस्था मान (state values (s.v))** कहलाते हैं।

हम उस स्विच के लिए x' लिखेंगे जो कि सदैव x की विपरीत अवस्था में होता है। जिससे कि

x खुली अवस्था में है $\Rightarrow$ x' बंद अवस्था में है और

x बंद अवस्था में है ⇒ x′ खुली अवस्था में है

स्विच x′ को स्विच x का प्रतिलोम (invert) कहा जाता है। उदाहरण के लिए चित्र 3 में दिखाया गया स्विच a का एक प्रतिलोम है।



चित्र 3: a′, a का प्रतिलोम है।

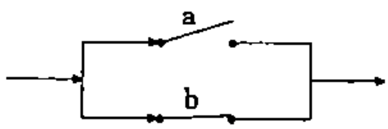
सारणी 1: x′ के अवस्था मान

x	x′
0	1
1	0

बगल में दी गई सारणी 1 में स्विच x के दिए हुए अवस्था मान के लिए x′ का अवस्था मान दिया गया है। ये मान x′ की परिभाषा और पिछली चर्चा से प्राप्त किए गए हैं।

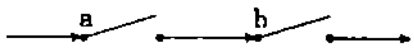
ध्यान दीजिए कि चर x, जो एक स्विच को प्रकट करता है, केवल दो मान 0 और 1 ग्रहण कर सकता है। इस प्रकार के चर को (जो केवल दो मान ग्रहण कर सकता हो) **बूलीय चर (Boolean variable)** कहा जाता है। इस तरह, यदि x एक बूलीय चर है तो x′ भी बूलीय चर होता है।

अब, अनेक स्विचों वाले परिपथ की अभिकल्पना करने में स्विचों का संबंधन दो विधियों से किया जाता है : **पार्श्व संबंधन (parallel connections)** और **श्रेणी संबंधन (series connections)** (देखिए चित्र 4)।



(i) Parallel connection

(i)



(ii) Series connection

(ii)

चित्र 4 : स्विचों का संबंधन करने की दो विधियां।

ऊपर के चित्र 4(i) में आप यह देख सकते हैं कि स्विचों a और b (मान लीजिए) के पार्श्व संबंधन में धारा बायीं से दायीं ओर प्रवाहित होगी अगर दो स्विचों में से **कम से कम एक स्विच** बंद हो। ध्यान दीजिए कि पार्श्व का अर्थ यह नहीं है कि दोनों स्विच समान अवस्था में हैं।

इसके विपरीत, स्विचों के श्रेणी संबंधन में धारा केवल तभी प्रवाहित हो सकती है जबकि **दोनों** स्विच a और b बंद हो। (देखिए चित्र 4(ii))

यदि दो स्विच a और b दिए हुए हों, तो हम इन दो प्रकार के संबंधनों के लिए क्रमशः **a par b** और **a ser b** लिखते हैं।

इन परिभाषाओं और पिछली चर्चा से हम यह देख सकते हैं कि स्विचों a और b के विभिन्न अवस्था मान-युग्मों पर a par b और a ser b के संबंधनों के अवस्था-मान वही होते हैं जो कि नीचे की सारणी में दिए गए हैं।

सारणी 2 : a par b और a ser b के अवस्था मान

a का s.v	b का s.v	a par b का s.v
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

a का s.v	b का s.v	a ser b का s.v
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

अब तक हमने इतनी भूमिका विकसित कर दी है कि हम आपको बूलीय बीजावली का एक उदाहरण दे सकते हैं जोकि स्विचन परिपथों पर आधारित है।

उदाहरण 2 : समुच्चय $S = \{0, 1\}$ एक बूलीय बीजावली है।

हल : बूलीय बीजावली की परिभाषा में आवश्यक तीन संक्रियाओं के लिए $\wedge$ और $\vee$ के स्थान पर क्रमशः **ser** और **par** लीजिए और ~ के स्थान पर प्रतिलोमन (′) लीजिए। और, इस परिभाषा में अवयव **O** के लिए 0 और अवयव **I** के लिए 1 लीजिए।

अब, सारणी 1 और सारणी 2 की सहायता से आप यह जांच सकते हैं कि बूलीय बीजावली के B1 से B5 तक के पांचों नियम यहां लागू होते हैं। इस तरह, **(S, par, ser, ′, 0, 1)** एक बूलीय बीजावली है।

* * *

वह बूलीय बीजावली, जिसके आधारित समुच्चय में केवल दो अवयव होते हैं, परिपथों के अध्ययन में काफी महत्त्वपूर्ण होती है। हम इस प्रकार की बीजावली को **दो अवयव बूलीय बीजावली (two-element Boolean algebra)** कहते हैं। इस पूरी इकाई में हम इस बीजावली को B से प्रकट करेंगे। इस बूलीय बीजावली से हम और अधिक बीजावली का निर्माण कर सकते हैं जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण में दिखाया गया है।

उदाहरण 3: मान लीजिए $B^n = B \times B \times \ldots \times B = \{(e_1, e_2, \ldots, e_n) \mid$ प्रत्येक $e_i = 0$ या 1 जहां $n > 1\}$, B की n प्रतियों का कार्तीय गुणनफल है।
$i_k, j_k \in \{0, 1\}$ $(1 \le k \le n)$ के लिए निम्नलिखित परिभाषित कीजिए।

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n) \wedge (j_1, j_2, \ldots, j_n) = (i_1 \wedge j_1, i_2 \wedge j_2, \ldots, i_n \wedge j_n),$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n) \vee (j_1, j_2, \ldots, j_n) = (i_1 \vee j_1, i_2 \vee j_2, \ldots, i_n \vee j_n), \text{ और}$$

$$(i_1, i_2, \ldots, i_n)' = (i_1', i_2', \ldots, i_n')$$

तब सभी $n \ge 1$ के लिए B^n एक बूलीय बीजावली होती है।

हल : सबसे पहले यह देखिए कि स्थिति $n = 1$ बूलीय बीजावली B है। आइए अब हम B^n के दो अवयवों के लिए जिनमें क्रमशः सभी n-अंक 0 और 1 हैं, $\mathbf{O} = (0, 0, \ldots, 0)$ और $\mathbf{I} = (1, 1, \ldots, 1)$ लिखें। इस तथ्य को लागू करके कि B एक बूलीय बीजावली है, आप ऊपर परिभाषित की गई संक्रियाओं से यह जांच सकते हैं कि प्रत्येक $n \ge 1$ के लिए B^n एक बूलीय बीजावली है।

* * *

अंकीय अभिकलित्रों (digital computers) की यंत्र सामग्री (hardware) और प्रक्रियासामग्री का अध्ययन करने में बूलीय बीजावलियां B^n, $n \ge 1$ (जिन्हें स्विचन बीजावलियां कहा जाता है।) काफी उपयोगी होती हैं।

अब हम उपपत्ति दिए बिना बूलीय बीजावलियों के कुछ अन्य गुणधर्मों का कथन देंगे जिन्हें पांच नियमों (B1 - B5) से निगमित किया जा सकता है।

प्रमेय 1 : मान लीजिए $B = (S, \vee, \wedge, ', O, I)$ एक बूलीय बीजावली है तब $\forall, x, y \in S$ के लिए निम्नलिखित नियम लागू होते हैं।

क) **वर्गसम नियम** (idempotent laws) : $x \vee x = x, x \wedge x = x$

ख) **अवशोषण नियम** (absorption laws) : $x \vee (x \wedge y) = x, x \wedge (x \vee y) = x$

ग) **अंतर्वलन नियम** (involution law) : $(x')' = x$

घ) **द मार्गां नियम** (De morgan's laws) : $(x \vee y)' = x' \wedge y', (x \wedge y)' = x' \vee y'$.

वस्तुतः इकाई 1 में कथनों की बूलीय बीजावली S के लिए आप इन गुणधर्मों का अध्ययन कर चुके हैं। अब आप नीचे दिए गए प्रश्न में इन्हें सत्यापित कीजिए।

E1) क) कथनों की बूलीय बीजावली $(S, \wedge, \vee, \sim, T, F)$ के लिए तत्समक नियमों और अवशोषण नियमों को सत्यापित कीजिए।

ख) बूलीय बीजावली $(P(X), \cup, \cap, {}^c, \phi, X)$ के लिए अवशोषण नियमों को सत्यापित कीजिए।

प्रमेय 1 में इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि $\vee$ और $\wedge$ से संबंधित प्रत्येक कथन में ($\vee$ के स्थान पर) $\wedge$ और ($\wedge$ के स्थान पर) $\vee$ वाला एक अनुरूप कथन होता है। यह एक संयोग नहीं है, जैसा कि निम्नलिखित परिभाषा और परिणाम को देखने से पता चलता है।

परिभाषा : यदि p एक कथन हो जिसमें $\sim$, $\wedge$ और $\vee$ निहित हो, तो p की द्वैती (dual) जिसे p^d से प्रकट करते हैं, p में $\wedge$ (अथवा/या $\vee$) की प्रत्येक प्राप्ति के स्थान पर p^d के $\vee$ (अथवा/या $\wedge$) को प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त कथन होती है।

अब, निम्नलिखित नियम से हमें यह पता चलता है कि यदि हम यह सिद्ध करते हैं कि कोई कथन सत्य है, तो साथ ही हम यह भी सिद्ध कर देते हैं कि इसकी द्वैती भी सत्य है।

प्रमेय 2 (द्वैत नियम) : यदि s एक बूलीय बीजावली से संबंधित एक प्रमेय हो, तो इसकी द्वैती s^d भी एक प्रमेय होता है।

इस नियम के कारण ही आप यह देख सकते हैं कि प्रमेय 1 के कथन आपस में इतने अधिक मिलते-जुलते क्यों दिखाई पड़ते हैं।

आइए अब हम यह देखें कि बूलीय बीजावली विधियों को परिपथ अभिकल्पना में किस प्रकार लागू किया जाता है। इसके लिए अगले भाग में हम आपको आवश्यक गणितीय शब्दावली और संकल्पनाओं से परिचित कराएंगे।

3.3 बूलीय व्यंजक

इकाई 2 में आपने यह देखा है कि किस प्रकार तर्कसंगत संयोजकों (logical connectives) $\wedge$, $\vee$ और $\sim$ की सहायता से कुछ कथनों $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (मान लीजिए) को संयोजित करके एक संयुक्त कथन (compound statement) बनाया जा सकता है।

इसके अनुरूप, परिपथों को गणितीय रूप में व्यक्त करते समय हम प्रत्येक परिपथ को कुछ बूलीय चरों के रूप में पहचान लेते हैं। इनमें प्रत्येक चर या तो एक साधारण स्विच या फिर किसी इलेक्ट्रॉनिक स्विच के एक निवेश (input) को निरूपित करता है।

"पुनरावर्ती" का अर्थ है समुच्चय के पहले से परिभाषित अवयवों के द्वारा समुच्चय के अन्य अवयवों को परिभाषित करना

परिभाषा : मान लीजिए $B = (X, \vee, \wedge, ', O, I)$ एक बूलीय बीजावली है। चरों $x_1, x_2, \ldots x_k$ (मान लीजिए), जिनमें प्रत्येक चर समुच्चय X में अपना मान ग्रहण करता है, वाले **बूलीय व्यंजक (Boolean Expression)** को पुनरावर्ती रूप में इस प्रकार परिभाषित किया जाता है :

i) प्रत्येक चर $x_1, x_2, \ldots, x_k$ और बूलीय बीजावली B के अवयव O और I बूलीय व्यंजक (Boolean expression) होते हैं।

ii) यदि X_1 और X_2 पहले से परिभाषित बूलीय व्यंजक हों, तो गए $X_1 \wedge X_2$, $X_1 \vee X_2$, और X_1' भी बूलीय व्यंजक होते हैं।

उदाहरण के लिए, $x_1 \wedge x'_3$ एक बूलीय व्यंजक है, क्योंकि x_1 और x'_3 बूलीय व्यंजक हैं। इसी प्रकार, क्योंकि $x_1 \vee x_2$ एक बूलीय व्यंजक है, इसलिए $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \wedge x'_3)$ बूलीय व्यंजक है।

यदि X, n चरों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (मान लीजिए) का एक बूलीय व्यंजक हो, तो इसे हम $X = X(x_1, \ldots\ldots, x_n)$ के रूप में लिखते हैं।

प्रत्येक चर x_i और इसके पूरक को x'_i, $1 \le i \le k$ को अक्षर (literal) कहा जाता है। उदाहरण के लिए बूलीय व्यंजक

$X(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \wedge x'_3)$ में तीन अक्षर x_1, x_2 और x'_3 हैं।

परिपथ की अभिकल्पना करने या परिपथ की कुछ कम इलेक्ट्रॉनिक स्विचों से पुनः अभिकल्पना करने के संबंध में हमें बूलीय व्यंजकों का न्यूनतमीकरण करने की तकनीक पर विचार करने की आवश्यकता है। इस प्रक्रिया में नीचे परिभाषित संकल्पनाओं का प्रयोग करना होता है।

परिभाषा : k चरों $x_1, x_2, \ldots x_k$ वाले बूलीय व्यंजक को

i) **गुणद** (minterm) कहा जाता है जबकि यह $y_1 \wedge y_2 \wedge \ldots \wedge y_k$ के रूप का हो;

ii) **योपद** (maxterm) कहा जाता है, जबकि यह $y_1 \vee y_2 \vee \ldots \vee y_k$ के रूप का हो;

जहां प्रत्येक y_j एक अक्षर है (अर्थात् यह या तो कोई x'_i है या कोई x_i है) जहां $1 \le i \le k$ और $i \neq j$ के लिए $y_i \neq y_j$.

इस तरह, k चरों वाला गुणद (या योपद) अलग-अलग ठीक k चरों का सर्वनिष्ठ (या सम्मिलन) होता है। उदाहरण के लिए $x_1 \wedge x'_2$ (और $x'_1 \vee x_2$) दो चरों वाला गुणद (योपद) है।

परिभाषा : k चरों वाला बूलीय व्यंजक **सम्मिलन प्रसामान्य समघात (disjunctive normal form** संक्षेप में DNF) में होता है जबकि यह अलग-अलग गुणदों का सम्मिलन हो, जहां प्रत्येक गुणद में ठीक ठीक k चर हों।

उदाहरण के लिए, दो चरों वाला बूलीय व्यंजक

$X(x_1, x_2) = (x'_1 \wedge x'_2) \vee (x_1 \wedge x'_2) \vee (x'_1 \wedge x_2)$

DNF में है क्योंकि यह तीन गुणदों, अर्थात् $x'_1 \wedge x'_2$, $x_1 \wedge x'_2$ और $x'_1 \wedge x_2$ का सम्मिलन है जहां प्रत्येक गुणद में ठीक-ठीक दो चर हैं।

ध्यान दीजिए कि DNF के प्रत्येक गुणद में व्यंजक $X(x_1, x_2, \ldots x_k)$, $k \geq 2$ के सभी k चर होने चाहिए। उदारण के लिए, बूलीय व्यंजक

$X(x_1, x_2, x_3) = (x'_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x'_2 \wedge x_3)$

DNF में नहीं है, क्योंकि $x'_1 \wedge x_2$ सभी तीन चरों वाला गुणद नहीं है। फिर भी हम यह लिख सकते हैं।

$(x'_1 \wedge x_2)$	$= (x'_1 \wedge x_2) \wedge 1$	(तत्समक नियम से)
	$= (x'_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \vee x'_3)$	(पूरकीकरण नियम से)
	$= (x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3)$	(बंटन-नियम से)

और इसलिए व्यंजक $X(x'_1, x_2, x_3)$, $(x'_1 \wedge x_2)$ के इस मान के साथ सम्मिलन प्रसामान्य समघात में है।

वास्तव में इसी प्रकार की तकनीक को लागू करके किसी भी बूलीय व्यंजक ($\neq 0$) को सम्मिलन प्रसामान्य समघात में लिखा जा सकता है। आइए हम एक उदाहरण लेकर इस तकनीक को अच्छी तरह से समझने का प्रयास करें।

उदाहरण 4 : व्यंजक $X(x_1, x_2, x_3) = (x'_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)$ का एक सम्मिलन प्रसामान्य समघात प्राप्त कीजिए।

हल : यहां हम यह लिख सकते हैं

$x'_1 \wedge x_2$	$= (x'_1 \wedge x_2) \wedge 1$	(तत्समक नियम)
	$= (x'_1 \wedge x_2) \wedge (x_3 \vee x'_3)$	(पूरकीकरण नियम)
	$= (x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3)$	(बंटन नियम)

और

$x_1 \wedge x_3$	$= (x_1 \wedge x_3) \wedge 1$	(तत्समक नियम से)
	$= (x_1 \wedge x_3) \wedge (x_2 \vee x'_2)$	(पूरकीकरण नियम से)
	$= (x_1 \wedge x_3 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge x'_2)$	(बंटन नियम से)
	$= (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x'_2 \wedge x_3)$.	($\wedge$ के क्रमविनिमेयता से)

अतः तीन चरों में दिए गए व्यंजक $X(x_1, x_2, x_3)$ का अभीष्ट सम्मिलन प्रसामान्य समघात यह होता है $(x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x'_2 \wedge x_3)$.

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E2) बूलीय व्यंजक $X(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2)' \vee (x'_1 \wedge x'_3)$ का सम्मिलन प्रसामान्य समघात प्राप्त कीजिए।

सर्वनिष्ठ प्रसामान्य समघात (conjuctive normal form) एक अन्य महत्वपूर्ण प्रकार का व्यंजक है जो कि DNF की संकल्पना के अनुरूप है।

परिभाषा : k चरों वाले बूलीय व्यंजक को **सर्वनिष्ठ प्रसामान्य समघात** (CNF) में तब कहा जाता है जबकि यह योगपदों (maxterms) का सर्वनिष्ठ हो जहांकि प्रत्येक योगपदों में सभी k चर हों।

उदाहरण के लिए, बूलीय व्यंजक

$X(x_1, x_2, x_3) = (x'_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x_2 \vee x'_3)$, CNF में है, क्योंकि यह योगपदों $(x'_1 \vee x_2 \vee x_3)$, $(x'_1 \vee x'_2 \vee x_3)$ और $(x'_1 \vee x_2 \vee x'_3)$ का सर्वनिष्ठ हैं। ध्यान दीजिए कि प्रत्येक योगपद में सभी 3 चर हैं।

आइए अब हम एक उदाहरण लेकर देखें कि किस प्रकार एक बूलीय व्यंजक का CNF प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 5 : बूलीय व्यंजक $X(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2)' \wedge (x'_1 \wedge x_3)$ का CNF प्राप्त कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि

$$\begin{aligned}
(x_1 \wedge x_2)' &= x'_1 \vee x'_2 && \text{(द मार्गों नियम)}\\
&= (x'_1 \vee x'_2) \vee 0 && \text{(तत्समक नियम)}\\
&= (x'_1 \vee x'_2) \vee (x_3 \wedge x'_3) && \text{(पूरकीकरण नियम)}\\
&= (x'_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x'_2 \vee x'_3) && \text{(बंटन नियम)}
\end{aligned}$$

इसी प्रकार आप यह जांच सकते हैं कि

$$(x'_1 \wedge x_3)' = (x_1 \vee x'_2 \vee x'_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x'_3).$$

इस तरह, यहां दिए गए व्यंजक $X(x_1, x_2, x_3)$ का अभीष्ट CNF यह है

$$(x'_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x'_2 \vee x'_3) \wedge (x_1 \vee x'_2 \vee x'_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x'_3)$$

* * *

अब नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E3) बूलीय व्यंजक $X(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \wedge x'_2) \vee (x'_1 \wedge x'_3))'$ का CNF प्राप्त कीजिए।

जैसाकि परिपथों का सरलीकरण करने के संबंध में हम आपको यह पहले बता चुके हैं कि हमें बूलीय व्यंजकों को घटाकर सरल करने की आवश्यकता होती है। यहां 'सरल' का अर्थ उस व्यंजक से है जिसमें कम संयोजक हों और सभी शामिल अक्षर अलग-अलग हों। अब हम एक उदाहरण लेकर इस तकनीक को समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 6 : निम्नलिखित बूलीय व्यंजकों को घटाकर एक सरल रूप में लाइए।

क) $X(x_1, x_2) = (x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \wedge x'_2)$;

ख) $X(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x'_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3)$

हल : (क) यहां हम यह लिख सकते हैं

$$\begin{aligned}(x_1 \wedge x_2)(x_1 \wedge x'_2) &= ((x_1 \wedge x_2) \wedge x_1) \wedge x'_2) && \text{(साहचर्य नियम)}\\ &= (x_1 \wedge x_2) \wedge x'_2 && \text{(अवशोषण नियम)}\\ &= x_1 \wedge (x_2 \wedge x'_2) && \text{(साहचर्य नियम)}\\ &= x_1 \wedge O && \text{(पूरकीकरण नियम)}\\ &= O && \text{(तत्समक नियम)}\end{aligned}$$

इस तरह आपने सरलीकृत रूप में ऊपर (क) में दिया गया व्यंजक O है अर्थात् एक शून्य व्यंजक (null expression) है।

(ख) यहां हम यह लिख सकते हैं

$$\begin{aligned}&(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x'_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3)\\ =\ &[x_1 \wedge \{x_2 \vee (x'_2 \wedge x_3\}] \wedge (x_1 \wedge x_3) && \text{(बंटन-नियम)}\\ =\ &[x_1 \wedge \{(x_2 \vee x'_2) \wedge (x_2 \vee x_3)\}] \wedge (x_1 \wedge x_3) && \text{(बंटन-नियम)}\\ =\ &[x_1 \wedge \{1 \wedge (x_2 \vee x_3)\}] \wedge (x_1 \wedge x_3) && \text{(पूरकीकरण नियम)}\\ =\ &[x_1 \wedge (x_2 \vee x_3)] \wedge (x_1 \wedge x_3) && \text{(तत्समक नियम)}\\ =\ &[(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3)] \wedge (x_1 \wedge x_3) && \text{(बंटन-नियम)}\\ =\ &[(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \wedge x_3)] \vee [(x_1 \wedge x_2) \wedge (x_1 \wedge x_3)] && \text{(बंटन-नियम)}\\ =\ &(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) && \text{(वर्गसम, साहचर्य और क्रम-विनिमेय नियम)}\\ =\ &x_1 \wedge [(x_2 \wedge x_3) \vee x_3] && \text{(बंटन-नियम)}\\ =\ &x_1 \wedge x_3 && \text{(अवशोषण नियम)}\end{aligned}$$

इस तरह, ऊपर (ख) में दिए गए व्यंजक का सरलीकृत रूप $(x_1 \wedge x_3)$ है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को आसानी से हल कर सकते हैं।

E4) बूलीय व्यंजक

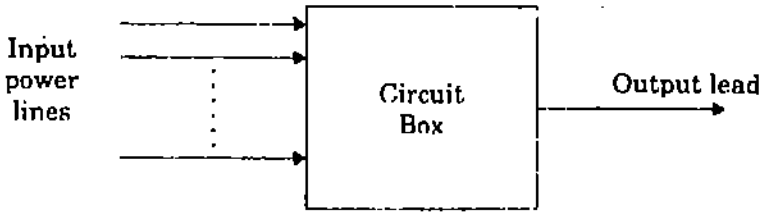
$X(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \wedge x_2) \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_3)$

को सरल कीजिए।

इसी के साथ यहां हम इस भाग को समाप्त करते हैं। अगले भाग में हम ऊपर बतायी गई संकल्पनाओं के एक महत्वपूर्ण अनुप्रयोग पर चर्चा करेंगे।

3.4 तर्क परिपथ

यदि आप अपने आस-पास देखें तो आपको दैनिक प्रयोग में आने वाले अनेक वैद्युत या इलेक्ट्रॉनिक उपकरण देखने को मिलेंगे। इनमें से कुछ में ऑटो-स्टॉप (जैसा कि स्टिरिओ सिस्टम में होता है) का नियंत्रण करने के लिए एक सरल स्विचन परिपथ की आवश्यकता होती है। कुछ लोग वोल्टता में हो रहे उतार-चढ़ाव का नियंत्रण करने के लिए ट्रान्सफार्मरों में प्रयुक्त ऑटो-पावर ऑफ सिस्टम का प्रयोग करते हैं। प्रत्येक परिपथ में प्रायः एक विशेष रूप में तारों से जुड़े ऑन-ऑफ स्विचों का एक संयोजन होता है। आजकल, कुछ प्रकार के **इलेक्ट्रॉनिक ब्लाकों** (अर्थात् ट्रान्जिस्टर, प्रतिरोधक और संधारित्रों जैसी ठोस अवस्था युक्तियों) का प्रयोग काफी होता है। हम इन इलेक्ट्रॉनिक ब्लाकों को **तर्क गेट** (logic gates) या केवल **गेट** (gate) कहते हैं। चित्र 5 में हमने एक बक्स दिखाया है जिसमें कुछ इलेक्ट्रॉनिक स्विच (या तर्क गेट) लगे हैं जो एक-दूसरे से एक विशेष रूप में लगे तारों से जुड़े हैं। बायीं ओर से बक्स के अंदर जाने वाली प्रत्येक लाइन एक स्वतंत्र वैद्युत स्रोत (जिसे **निवेश (input)** कहते हैं) को निरूपित करती है जहां यह आवश्यक नहीं है कि सभी एक दिए हुए समय पर बक्स को वोल्टता की सप्लाई करें। बक्स से बाहर की ओर निकल रही एक लाइन परिपथ बक्स की **अंतिम निर्गम (final output)** प्रदान करती है। निवेश किस प्रकार का है उसी पर निर्गत निर्भर करता है।



चित्र 5 : तर्क परिपथ।

निवेश पॉवर लाइन, **परिपथ बक्स** और **निर्गत तार** की इस प्रकार की व्यवस्था सभी इलेक्ट्रॉनिक परिपथों में होती है। इस इकाई में एक-दूसरे से जुड़े तर्क गेटों के समूह को हम **तर्क परिपथ (logic circuit)** कहेंगे।

जैसा कि आप जानते हैं कि अभिकलित्र **यंत्र सामग्री (computer hardwares)** की डिजाइन इस प्रकार से किया है कि वे **निवेश (input)** और **निर्गम (output)** दोनों के लिए केवल दो वोल्टता स्तरों का संचालन करें। इन दो स्तरों को, जिन्हें 0 और 1 से प्रकट किया जाता है, **द्वयंक (bits) (binary digits** का संक्षिप्त रूप) कहा जाता है। जब एक या दो तारों (निवेश लेड) की सहायता से द्वयंकों को तर्क गेटों पर लागू किया जाता है तो निर्गत पुनः वोल्टताओं 0 और 1 के रूप का होता है। मोटे तौर पर आप यह मान सकते हैं कि निर्गत वोल्टता स्तर 1 पर है या शून्य पर है इसके अनुसार ही गेट ऑन होता है या ऑफ।

सारणी 3 : तथा गेट का निर्गत

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

तीन मूल प्रकार के तर्क गेट **तथा गेट (AND-gate),** **अथवा गेट (OR-gate)** और **न गेट (NOT-gate)** है। अब हम एक-एक करके इन्हें परिभाषित करेंगे।

परिभाषा : मान लीजिए बूलीय चर x_1 और x_2 किन्हीं दो द्वयंकों को निरूपित करते हैं **तथा गेट** निवेश x_1 और x_2 प्राप्त करता हैं और निर्गत उत्पन्न करता है जिसे $x_1 \wedge x_2$ से प्रकट किया जाता है जैसा कि बगल में दी गई सारणी 3 में दिखाया गया है **तथा गेट** का मानक चित्रीय निरूपण नीचे चित्र 6 में दिखाया गया है।

चित्र 6 : तथा गेट का आरेखीय निरूपण।

सारणी 3 की प्रथम तीन पंक्तियों से आप यह देख सकते हैं कि जब कभी **तथा गेट** की किसी भी एक निवेश तार में वोल्टता स्तर 0 पर होती हैं, तो गेट की निर्गत वोल्टता भी स्तर 0 पर होती है। आप इस प्रकार की स्थिति को इकाई 1 में देख चुके हैं। नीचे दिए गए प्रश्न में हमनें आपसे इन दो स्थितियों के बीच एक अनुरूपता लाने को कहा है।

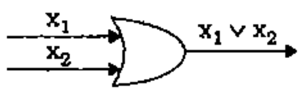
E5) सारणी 3 की तुलना इकाई 1 की सारणी 2 से कीजिए। आप $p \wedge q$ के साथ $x_1 \wedge x_2$ का संबंध किस प्रकार स्थापित करेंगे, जहां p और q कथन हैं?
(संकेत : ऊपर की सारणी 3 में 1 के लिए T और 0 के लिए F लीजिए।)

आइए अब हम एक अन्य प्राथमिक तर्क गेट पर विचार करें।

परिभाषा : **अथवा गेट** निवेशों x_1 और x_2 को प्राप्त करता है और निर्गत उत्पन्न करता हैं जिसे $x_1 \vee x_2$ से प्रकट किया जाता हैं जैसा कि सारणी 4 में दिखाया गया है **अथवा गेट** के लिए प्रयुक्त मानक चित्र निरूपण को चित्र 7 में दिखाया गया है।

सारणी 4 : अथवा गेट का निर्गत

x_1	x_2	$x_1 \vee x_2$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1



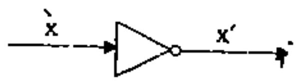
चित्र 7 : अथवा गेट का आरेखीय निरूपण।

सारणी 4 से आप यह देख सकते हैं कि इसकी स्थिति सारणी 3 की स्थिति के बिल्कुल विपरीत हैं अर्थात् जब कभी भी निवेश तारों में से किसी भी एक तार में वोल्टता का स्तर 1 होता है तब **अथवा गेट** की निर्गत वोल्टता स्तर 1 पर होती है। कथनों के संदर्भ में अनुरूप स्थिति क्या होती है? अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E6) सारणी 4 की तुलना इकाई 1 की सारणी 1 से कीजिए। आप $p \vee q$ के साथ $x_1 \vee x_2$ का संबंध किस प्रकार स्थापित करेंगे, जहां p और q कथन हैं।

और अब हम एक सरल स्विच के प्रतिलोम के इलेक्ट्रॉनिक प्रापण (electronic realisation) पर चर्चा करेंगे जिसके बारे में आप भाग 3.2 में पढ़ चुके हैं।

परिभाषा: न गेट निवेश के रूप में द्वयंक x प्राप्त करता है और एक निर्गत उत्पन्न करता है जिसे x' से प्रकट किया जाता है जैसा कि सारणी 5 में दिया गया है। **न गेट** का मानक चित्र निरूपण चित्र 8 में दिखाया गया है।



चित्र 8 : न गेट का आरेखीय निरूपण।

यदि आपने E5 और E6 को हल कर लिया है, तो इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि सारणियाँ 3 और 4 वही हैं जो कि तर्क संयोजकों $\wedge$ (सर्वनिष्ठ) और $\vee$ (सम्मिलन) की सत्य सारणियाँ हैं। और, इकाई 1 की सारणी 3 में T के स्थान पर 1 और F के स्थान पर 0 रखने पर सारणी 5 प्राप्त हो जाती है। यही कारण है कि तीन प्राथमिक गेटों की निर्गत सारणियों को **तर्क सारणियाँ (logic tables)** कहा जाता है। इन तर्क सारणियों को याद कर लेना आपके लिए काफ़ी उपयोगी हो सकता है, क्योंकि तर्क परिपथों की तर्क सारणियों का अभिकलन करने में इनकी आवश्यकता प्रायः पड़ती रहती है।

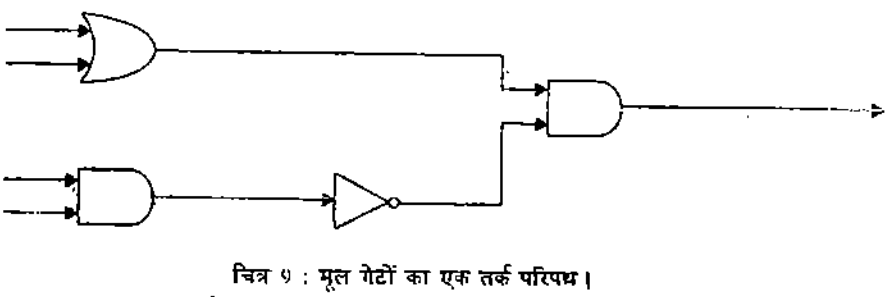
सारणी 5 : पूरक द्वार का निर्गत

x	x'
0	1
1	0

इन तर्क सारणियों के संबंध में एक अन्य महत्वपूर्ण तथ्य यह है कि इनकी सहायता से नीचे दिए गए प्रश्न को हल करना काफ़ी सरल हो जाता है।

E7) मानलीजिए $B = \{0, 1\}$ में द्वयंक 0 और 1 हैं। दिखाइए कि B एक बूलीय बीजावली है अर्थात् द्वयंकों 0 और 1 से एक दो-अवयव बूलीय बीजावली प्राप्त होती है।

जैसा कि पहले कहा जा चुका है कि प्राथमिक गेटों का प्रयोग करके एक तर्क परिपथ की अभिकल्पना की जा सकती है जहां **तथा गेट**, या **अथवा गेट** या **न गेट** के निर्गत का प्रयोग परिपथिकी के इस प्रकार के अन्य गेटों के निवेश के रूप में किया जाता है। निवेश लाइनों से प्रारंभ करके इन परिपथों में वोल्टता के अलग-अलग स्तर केवल तीरों की दिशा में गतिमान होते हैं जैसा कि नीचे दी गई सभी आकृतियों में दिखाया गया है। उदाहरण के लिए, तीन प्राथमिक गेटों का एक संयोजन चित्र 9 में दिखाया गया है।



चित्र 9 : मूल गेटों का एक तर्क परिपथ।

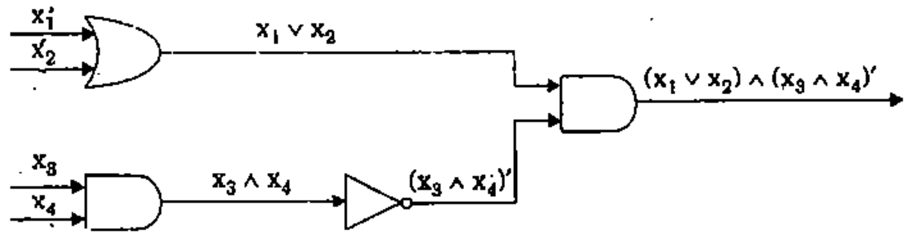
आइए अब हम तर्क परिपथों और बूलीय व्यंजकों के बीच के संबंध को जानने का प्रयास करें। इस संबंध में पहले हम मूल गेटों को लेते हैं। दिए हुए निवेश युग्म x_1 और x_2 के लिए इन गेटों में से प्रत्येक गेट का निर्गत $x_1 \wedge x_2$ या $x_1 \vee x_2$ या x' के रूप का एक व्यंजक होता है।

आइए अब हम बड़े-बड़े परिपथों को लें। क्या प्रतीकों $\wedge, \vee$ और $'$ का प्रयोग करके तर्क परिपथ से संबंधित एक व्यंजक प्राप्त किया जा सकता है? इस प्रश्न का उत्तर 'हाँ' में है। यहाँ हम कुछ उदाहरण लेकर एक दिए हुए तर्क परिपथ का बूलीय व्यंजक प्राप्त करने की विधि प्रदर्शित करेंगें। परन्तु पहले इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि परिपथ के एक गेट का निर्गत परिपथ का निर्गत परिपथ के किसी अन्य गेट के लिए एक निवेश का काम कर सकता है जैसा कि चित्र 9 में दिखाया गया है। अतः तर्क परिपथ का व्यंजक प्राप्त करने के लिए प्रक्रिया सदा ही परिपथिकी में तीरों की दिशा में चलती है। इसको ध्यान में रखते हुए आइए हम कुछ परिपथ लें।

उदाहरण 7: ऊपर चित्र 9 में दिए गए तर्क परिपथ का बूलीय व्यंजक प्राप्त कीजिए।

हल: चित्र 9 में चार निवेश टर्मिनल दिखाए गए हैं। आइए इन्हें हम x_1, x_2, x_3 और x_4 मान लें। अतः x_1 और x_2 एक **अथवा गेट** के निवेश हैं जिससे एक निर्गत व्यंजक के रूप में $x_1 \vee x_2$ प्राप्त होता है। (देखिए चित्र 9 (क))।

इसी प्रकार, अन्य दो निवेश x_3 और x_4 एक **तथा गेट** के निवेश हैं। इनसे एक निर्गत व्यंजक के रूप में $x_3 \wedge x_4$ प्राप्त होगा। यही निर्गत परिपथ के **न गेट** का एक निवेश हो जाता है। अतः इससे निर्गत व्यंजक के रूप में $(x_3 \wedge x_4)'$ प्राप्त होता है। अब, दोनों ही व्यंजक $x_1 \vee x_2$ और $(x_3 \wedge x_4)'$ परिपथ में सबसे दायीं ओर के **तथा गेट** के निवेश हैं। अतः इनसे अंतिम निर्गत व्यंजक के रूप में $(x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \wedge x_4)'$ प्राप्त होता है जो तर्क परिपथ को निरूपित करता है।

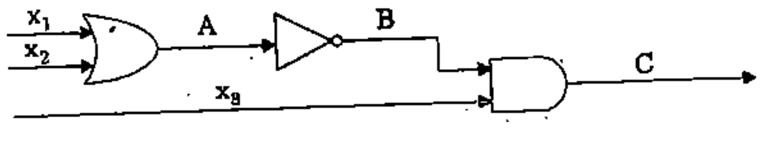


चित्र 9 (क)

* * *

अभी आपने यह देखा है कि किस प्रकार तर्क परिपथ के लिए बूलीय व्यंजक प्राप्त किया जाता है। और अधिक अभ्यास के लिए आइए हम एक अन्य तर्क परिपथ के लिए इसे प्राप्त करें।

उदाहरण 8 : चित्र 10 में दिए गए तर्क परिपथ के लिए बूलीय व्यंजक C ज्ञात कीजिए।



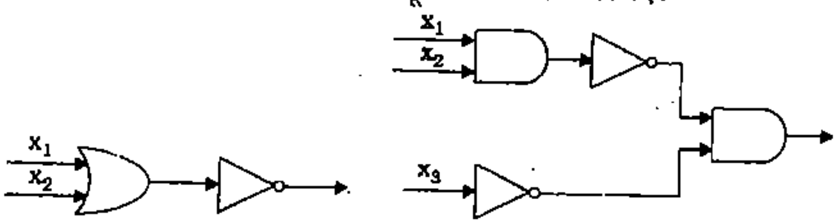
चित्र 10

हल: यहाँ पहला निर्गत एक **अथवा गेट** से है अर्थात् A, $x_1 \vee x_2$ है। यही निर्गत दायीं ओर से जुड़े एक **न गेट** के लिए एक निवेश का काम करता है। परिणामी व्यंजक B, $(x_1 \vee x_2)'$ है। यह और x_3 ऊपर दिए गए परिपथ में सबसे दायीं ओर के **तथा गेट** के लिए निवेश का काम करते हैं। इससे एक निर्गत व्यंजक $(x_1 \vee x_2)' \wedge x_3$ प्राप्त होता है जो कि C है और यह चित्र 10 में दिए गए परिपथ का अभीष्ट व्यंजक है।

* * *

अब आप कुछ और तर्क परिपथों के बूलीय व्यंजक प्राप्त करने का प्रयास क्यों नहीं करते?

E8) नीचे दिए गए तर्क परिपथों के निर्गत का बूलीय व्यंजक प्राप्त कीजिए।

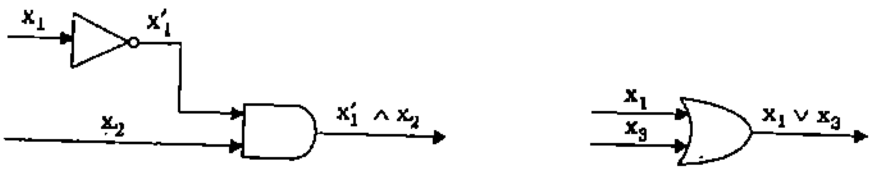


(क) (ख)

अभी तक आपने यह देखा है कि किस प्रकार एक बूलीय व्यंजक प्राप्त किया जाता है जो एक दिए हुए परिपथ को निरूपित करता है। क्या आप इसका विलोम (converse) कर सकते हैं? अर्थात् क्या आप दिए हुए बूलीय व्यंजक के संगत एक तर्क परिपथ का निर्माण कर सकते हैं? वास्तव में ऐसा तब किया जाता है जबकि एक परिपथ की अभिकल्पना से जुड़ी समस्या को हल करना होता है। यह प्रक्रिया काफी सरल है। कुछ उदाहरणों की सहायता से इसे समझाने का हम प्रयास करेंगें।

उदाहरण 9 : बूलीय व्यंजक $(x_1' \wedge x_2) \vee (x_1 \vee x_3)$ द्वारा निरूपित तर्क परिपथ का निर्माण कीजिए जहाँ $x_i\,(1 \le i \le 3)$ को परिपथिकी का निवेश माना गया है।

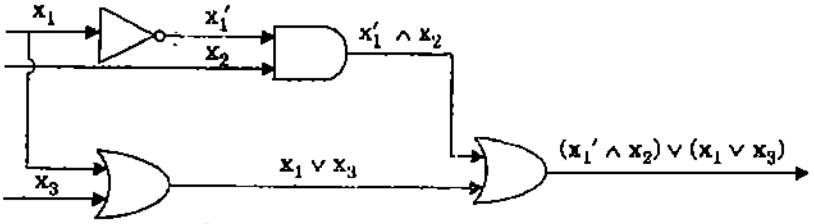
हल: आइए पहले हम यह देखें कि दिए हुए व्यंजक में भाग $(x'_1 \wedge x_2)$ का योगदान पूर्ण परिपथ में क्या है। इस व्यंजक में अक्षर x'_1 और x_2 संयोजक $\wedge$ **(तथा)** से जुड़े हुए है। इस तरह, **न गेट** और **तथा गेट** की परिभाषाओं के अनुसार इस व्यंजक का संगत परिपथ है जो कि नीचे चित्र 11(क) में दिखाया गया है।



(क) (ख)

चित्र 11 : व्यंजक $x'_1 \wedge x_2$ और $x_1 \vee x_3$ के तर्क परिपथ।

इसी प्रकार व्यंजक $x_1 \vee x_3$ के संगत गेट को ऊपर की चित्र 11 (ख) में दिखाया गया है। अंत में, इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि दिए हुए व्यंजक के दो भाग अर्थात् $x'_1 \wedge x_2$ और $x_1 \vee x_3$ हैं जो संयोजक $\vee$ (अथवा) से जुड़े हुए हैं। अत: चित्र 11 में दिए गए दो तर्क परिपथो को जब एक **अथवा गेट** से जोड़ दिया जाता हैं तो हमें एक परिपथ प्राप्त होता हैं जिसे नीचे चित्र 12 में दिखाया गया है।



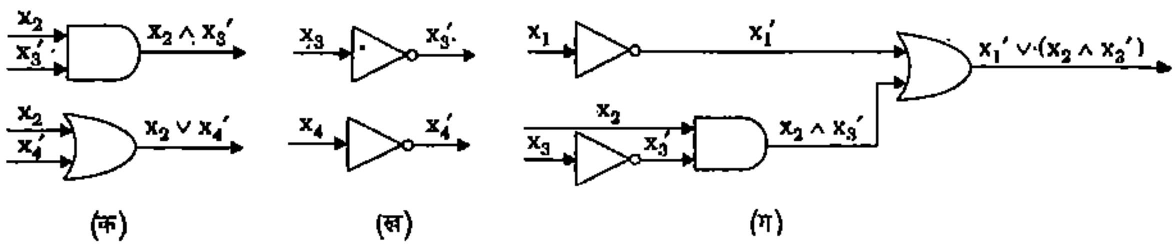
चित्र 12 : व्यंजक $(x_1' \wedge x_2) \vee (x_1 \vee x_3)$ की परिपथिकी।

यह अभीष्ट तर्क परिपथ हैं जो दिए हुए व्यंजक से निरूपित है।

* * *

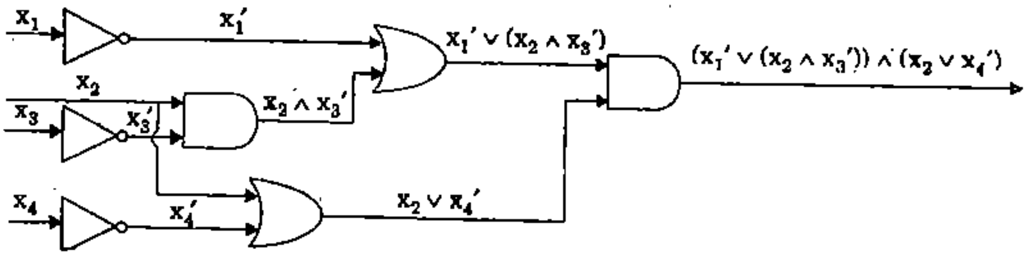
उदाहरण 10 : यदि व्यंजक $(x'_1 \vee (x_2 \wedge x'_3)) \wedge (x_2 \vee x'_4)$ दिया हुआ हो तो इसका संगत परिपथ ज्ञात कीजिए, जहाँ $x_i\,(1 \le i \le 4)$ को परिपथिकी का निवेश मान लिया गया है।

हल: पहले हम उन परिपथों को लेते हैं जो व्यंजकों $x_2 \wedge x'_4$ और $x_2 \vee x'_4$ को निरूपित करते हैं। इन्हें चित्र 13 (क) में दिखाया गया है।



चित्र 13 : तर्क परिपथिकी का निर्माण।

आप यह भी जानते हैं कि अक्षर x'_3 और x'_4 न गेट के निर्गत हैं। अतः इन्हें तर्क गेटों से निरूपित किया जा सकता है जैसा कि चित्र 13 (ख) में दिखाया गया है। तब दिए हुए व्यंजक के भाग $x'_1 \vee (x_2 \wedge x'_3)$ का परिपथ वही है जो कि चित्र 13 (ग) में दिखाया गया है। आप यह जानते है कि किस प्रकार व्यंजक $x_2 \vee x'_4$ के तर्क परिपथ का निर्माण किया जाता है। अंत में, क्योंकि दो व्यंजक $(x'_1 \vee (x_2 \wedge x'_3))$ और $(x_2 \wedge x'_4)$ संयोजक $\wedge$ **(तथा)** से जुड़े हुए हैं, इसलिए इनसे दिए हुए व्यंजक का अभीष्ट परिपथ प्राप्त हो जाता हैं जैसा कि चित्र 14 में दिखाया गया है।



चित्र 14 : व्यंजक $((x'_1 \vee (x_2 \wedge x'_3)) \wedge (x_2 \vee x'_4)$ की परिपथिकी।

* * *

अब आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E9) व्यंजक $x'_1 \wedge (x_2 \vee x'_3)$ का संगत तर्क परिपथ ज्ञात कीजिए।

E10) व्यंजक $x_1 \vee (x'_2 \wedge x_3)$ के तर्क परिपथ का निर्माण कीजिए और तर्क सारणी प्राप्त कीजिए।

अभी तक हमने तर्क परिपथ और बूलीय व्यंजकों के बीच एकैक संगत स्थापित की है। इसकी उपयोगिता को जानकर आपको आश्चर्य हो सकता है। परिपथ को गणितीय दृष्टि से देखने से परिपथ की **समग्र कार्य-प्रणाली (overall functioning)** को समझने में हमें सहायता मिल सकती है। यह कैसे होता है इसे समझने के लिए आइए हम चित्र 10 में दिया गया परिपथ लें। आप निवेश द्वयंकों x_1, x_2 और x_3 को तीन चर मान सकते हैं जिनमें से प्रत्येक चर के केवल दो मान अर्थात् 0 और 1 होते हैं जो कि किसी भी समय इन निवेशों की वोल्टता के स्तर पर निर्भर करते हैं। तब योजना यह रहती है कि हम 3-अंक (x_1, x_2, x_3) के भिन्न-भिन्न मानों के लिए इए परिपथ के संगत व्यंजक $(x_1 \vee x'_2) \wedge x_3$ का मान निकालते हैं।

मान निकालना परिपथ की कार्य-प्रणाली को समझने में किस प्रकार सहायक होता है? इसे समझने के लिए एक ऐसी स्थिति लीजिए जिसमें प्रक्रम के किसी चरण पर x_1, x_2 और x_3 की स्थिति $x_1 = x_3 = 0$ और $x_2 = 1$ है। तब हम यह जानते हैं कि $x_1 \vee x_2 = 0 \vee 1 = 1$ (पहले दी गई सारणी 3 की दूसरी पंक्ति देखिए) और, न गेट की तर्क सारणी का प्रयोग करने पर हमें $(x_1 \vee x_2)' = 1' = 0$ प्राप्त होता है। इस तरह, निवेश द्वयंकों के मान (0, 1, 0) के लिए व्यंजक $(x_1 \vee x_2)' \wedge x_3$ का मान 0 होता है। **इसलिए यदि x_1 और x_3 बंद हैं जबकि x_2 खुला है, तो परिपथ बंद बना रहता है।**

इसी प्रकार के तर्क देकर निवेश द्वयंको के मानों के समुच्चय

$$\{0, 1\}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i = 0 \text{ या } 1, \ 1 \le i \le 3\}$$

के लिए व्यंजक $(x_1 \vee x_2)' \wedge x_3$ के अन्य मान आप सरलता से परिकलित कर सकते है। इन्हें हमने सारणी 6 में प्रस्तुत किया है।

ध्यान दीजिए कि सारणी 6 के प्रथम तीन स्तंभों में पंक्ति की प्रविष्टियाँ उन अलग-अलग मानों को निरूपित करती हैं जिन्हें निवेश द्वयंक (x_1, x_2, x_3) ग्रहण कर सकते हैं। सारणी के अंतिम स्तंभ की प्रत्येक प्रविष्टि (entry) से (x_1, x_2, x_3) के मान के लिए व्यंजक $(x_1 \vee x_2)' \wedge x_3$ से निरूपित परिपथ का निर्गत प्राप्त होता है। उदाहरण के लिए, यदि (x_1, x_2, x_3), (0,1,0) हो, तो निर्गत तार में वोल्टता का स्तर, स्तर 0 पर होता है। (सारणी 6 की तीसरी पंक्ति देखिए)

आपको सत्यापित कर लेना चाहिए कि अन्य पंक्तियों में दिए गए मान सही हैं।

सारणी 6 : व्यंजक $(x_1 \vee x_2)' \wedge x_3$ की तर्क सारणी।

x_1	x_2	x_3	$x_1 \vee x_2$	$(x_1 \vee x_2)'$	$(x_1 \vee x_2)' \wedge x_3$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0
0	1	1	1	0	0
1	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	1	1	0	0

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E11) ऊपर E8 (ख) में दिए गए परिपथ की तर्क सारणी अभिकलित कीजिए।

अभी आपने यह देखा है कि किस प्रकार एक परिपथ को निरूपित करने वाले व्यंजक की तर्क सारणी की सहायता से निवेश टर्मिनलों पर वोल्टता की अवस्था (या स्तर) और तर्क परिपथिकी के निर्गत तार पर वोल्टता की अवस्था (या स्तर) में फलनिक संबंध प्राप्त होता है। इससे हमें बूलीय फलनों (Boolean functions) की संकल्पना के बारे में जानकारी मिलती है जिन पर कि अब हम चर्चा करेंगे।

3.5 बूलीय फलन

पिछले भाग में आप यह पढ़ चुके हैं कि निर्गत व्यंजक गेटों के अंतर्संबंध को निरूपित करने की केवल एक युक्ति ही नहीं है, परन्तु यह निवेश द्वयंकों के एक फलन के रूप में निर्गत मानों को परिभाषित भी करता है। इससे संगत तर्क परिपथ की समग्र कार्य-प्रणाली के बारे में जानकारी प्राप्त हो जाती है। अतः इस फलन से हमें **परिपथ के निवेशों** और इसके **अंतिम निर्गम** के बीच एक संबंध प्राप्त हो जाता है।

इसी से हमें गणितीय दृष्टिकोण से तर्क परिपथों की कार्य-प्रणाली पर किए जाने वाले नियंत्रण को समझने में सहायता मिलती है। इस कथन का अर्थ क्या है इसे जानने के लिए आइए हम निवेश द्वयंकों के फलनों के द्वारा तर्क सारणियों को फिर से बनाएं।

इसके लिए सबसे पहले बूलीय व्यंजक

$$X(x_1, x_2) = x_1 \vee x'_2$$

लीजिए जहां x_1 और x_2 $B = \{1, 0\}$ में मान ग्रहण करते हैं। आप जानते हैं कि बूलीय बीजावली B के गुणधर्मों को लागू करके चरों x_1 और x_2 के विभिन्न मान-युग्मों के लिए इस व्यंजक के सभी मानों को परिकलित किया जा सकता है। उदाहरण के लिए

$$0 \wedge 1' = 0 \wedge 0 = 0 \Rightarrow X(0, 1) = 0.$$

इसी प्रकार आप B पर $X(x_1, x_2) = x_1 \vee x'_2$ के अन्य मानों को परिकलित कर सकते हैं।

इस प्रकार हमें एक फलन $f : B^2 \to B$ प्राप्त होता है जो इस प्रकार परिभाषित होता है
$f(e_1, e_2) = X(e_1, e_2) = e_1 \wedge e'_2$ जहाँ $e_1, e_2 \in \{0, 1\}$

अत: व्यंजक $X(x_1, x_2)$ में x_i के स्थान पर e_i प्रतिस्थापित करने पर f प्राप्त हो जाता है।
उदाहरण के लिए , जब $e_1 = 1, e_2 = 0$ तो हमें $f(1,0) = 1 \wedge 0' = 1$ प्राप्त होता है।

अधिक व्यापक रूप में, k चरों वाला प्रत्येक बूलीय व्यंजक $X(x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots, x_k)$, जहाँ प्रत्येक चर दो-अवयव बूलीय बीजावली B से मान ग्रहण कर सकता है, एक फलन $f : B^k \to B : f(e_1, \ldots\ldots\ldots e_k) = x(e_1, \ldots\ldots\ldots, e_k)$ को परिभाषित करता है।

इस प्रकार के फलन को **बूलीय फलन** कहा जाता है। इस तरह, $B = \{0, 1\}$ पर प्रत्येक बूलीय व्यंजक से एक बूलीय फलन प्राप्त होता है। विशेष रूप से, प्रत्येक परिपथ के संगत हमें एक बूलीय फलन प्राप्त होता है। अत: परिपथ की तर्क सारणी इसके संगत बूलीय फलन को निरूपित करने की एक और विधि है।

उदाहरण के लिए, फलन $\wedge : B^2 \to B, \wedge(e_1, e_2) = e_1 \wedge e_2$ का प्रयोग करके एक **'तथा'** द्वार की तर्क सारणी प्राप्त की जा सकती है।

इसे और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए हम एक उदाहरण हल करें।

उदाहरण 11 : मानलीजिए $f : B^2 \to B$ बूलीय व्यंजक $X(x_1, x_2) = x'_1 \wedge x'_2$ से परिभाषित फलन को प्रकट करता है। f के मानों को सारणी रूप में लिखिए।

हल: f, $f(e_1, e_2) = e'_1 \wedge e'_2$ से परिभाषित है, जहाँ $e_1, e_2 \in \{0, 1\}$ सारणियों 3, 4 और 5 का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता हैं

$f(0,0) = 0' \wedge 0' = 1 \wedge 1 = 1,$ $\quad f(0,1) = 0' \wedge 1' = 1 \wedge 0 = 0$
$f(1,0) = 1' \wedge 0' = 0 \wedge 1 = 0,$ $\quad f(1,1) = 1' \wedge 1' = 0 \wedge 0 = 0.$

हमने इस जानकारी को सारणी 7 में प्रस्तुत किया है।

सारणी 7 : व्यंजक $x'_1 \wedge x'_2$ का बूलीय फलन।

e_1	e_2	e'	e'_2	$f(e_1, e_2) = e'_1 \wedge e'_2$
0	0	1	1	$1 \wedge 1 = 1$
0	1	1	0	$1 \wedge 0 = 0$
1	0	0	1	$0 \wedge 1 = 0$
1	1	0	0	$0 \wedge 0 = 0$

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E12) बूलीय व्यंजक $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x'_3)$ से परिभाषित बूलीय फलन $f : B^2 \to B$ के सभी मान ज्ञात कीजिए।

आइए अब हम व्यंजक $X(x_1, x_2) = (x_1 \vee x_2)'$ से परिभाषित फलन $g : B^2 \to B$ लें।
तब $g(e_1, e_2) = (e_1 \vee e_2)', e_1, e_2 \in B.$

अत: विभिन्न मान, जो कि g ग्रहण करेगा, होंगें

$g(0,0) = (0 \vee 0)' = 0' = 1,$ $\quad g(0,1) = (0 \vee 1)' = 1' = 0$
$g(1,0) = (1 \vee 0)' = 1' = 0,$ $\quad g(1,1) = (1 \vee 1)' = 1' = 0$

सारणी रूप में, g के मानों को सारणी 8 में प्रस्तुत किया गया है

सारणी 8 : व्यंजक $(x_1 \vee x_2)'$ का बूलीय फलन।

e_1	e_2	$e_1 \vee e_2$	$g(e_1, e_2) = (e_1 \wedge e_2)'$
0	0	0	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	0

सारणी 7 और सारणी 8 की तुलना करके आप यह देख सकते हैं कि सभी $(e_1, e_2) \in B^2$ के लिए $f(e_1, e_2) = g(e_1, e_2)$ अतः f और g समान फलन हैं।

इस तुलना से हमने यह देखा है कि **दो अलग-अलग (लगने वाले) व्यंजकों का समान बूलीय फलन हो सकता है जो इन्हें निर्दिष्ट करता है।** ध्यान दीजिए कि यदि हम निवेश द्वयंकों के स्थान पर निहित दो व्यंजकों के कथनों को रखें तो हमें तार्किक रूप से तुल्य कथन प्राप्त होगें। इससे आपको इस बात की कुछ जानकारी मिल सकती है कि दो बूलीय व्यंजक किस प्रकार संबंधित होते हैं। यहाँ नीचे हम एक औपचारिक परिभाषा दे रहे हैं।

परिभाषा: मानलीजिए $X = X(x_1, x_2, ...x_k)$ और $Y = Y(x_1, x_2, ...x_k)$, k चरों $x_1, ..., x_k$ वाले दो बूलीय व्यंजक हैं। हम उस स्थिति में बूलीय बीजावली B पर X को Y के **तुल्य (equivalent)** मानते हैं और जिसे $X \equiv Y$ लिखते हैं, जबकि दोनों व्यंजक X और Y, B पर समान बूलीय फलन को परिभाषित करते हों अर्थात्

$X(e_1, e_2, ...e_k) = Y(e_1, e_2, ...e_k)$ सभी $e_i \in \{0, 1\}$ के लिए

अतः f और g के संगत व्यंजक (जिन्हें सारणी 7 और सारणी 8 में दिया गया है) तुल्य हैं।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते?

E13) दिखाइए कि बूलीय व्यंजक

$$X = (x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x'_3) \text{ और } Y = x_1 \wedge (x_2 \vee x'_3)$$

दो-अवयव बूलीय बीजावली $B = \{0, 1\}$ पर तुल्य हैं।

अभी तक आपने यह देखा है कि यदि एक परिपथ दिया हुआ हो, तो हम उसके संगत बूलीय फलन को परिभाषित कर सकते हैं। हम यह भी जानते हैं कि यदि B पर एक बूलीय व्यंजक दिया हुआ हो तो इसके संगत एक परिपथ होता है। अब आप यह प्रश्न पूछ सकते हैं कि यदि एक बूलीय फलन $f: B^n \to B$ दिया हुआ हो, तो क्या सदैव एक ऐसा बूलीय व्यंजक प्राप्त किया जा सकता है जो B पर f को निर्दिष्ट करे?

इस प्रश्न का उत्तर 'हाँ' में है अर्थात् प्रत्येक फलन $f: B^n \to B$ $(n \geq 2)$ के लिए (n चरों वाला) एक बूलीय व्यंजक होता है जिसका बूलीय फलन स्वयं f होता है।

वस्तुतः भाग 3.3 में बताए गए सम्मिलन (और सर्वनिष्ठ) प्रसामान्य समघात व्यंजक ही हैं जो ऐसे में काम आएंगे।

आप इस मूल प्रक्रिया को अच्छी तरह से समझें इसके लिए निम्नलिखित उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 12: मानलीजिए $f: B^2 \to B$ एक फलन है जो कि

$$f(0,0) = 1,\ f(1,0) = 0,\ f(0,1) = 1,\ f(1,1) = 1$$

से परिभाषित है। फलन f को निर्दिष्ट करने वाला बूलीय व्यंजक (DNF में) ज्ञात कीजिए।

हल: (DNF में) बूलीय व्यंजक जो दिए हुए फलन f को निर्दिष्ट करता है, के निर्माण की मूल प्रक्रिया निम्नलिखित तीन चरणों में दी गई है।

चरण-I: सभी मान-युग्मों $v_i = (e_{i1}, e_{i2})$ जिनके लिए $f(e_{i1}, e_{i2}) = 1$, को एकत्रित कीजिए ; जहाँ $(e_{i1}, e_{i2}) \in B^2$ v_i इस स्थिति में ये निम्नलिखित हैं

$$v_1 = (0, 0), v_2 = (0, 1) \text{ और } v_3 = (1, 1)$$

चरण-II : इन मानों के प्रत्येक युग्म v_i अर्थात् (0,0), (0,1) और (1,1) के लिए एक गुणद (minterm) $m_i = y_{i1} \wedge y_{i2}$ लिखिए, जहाँ $1 \leq i \leq 3$, $1 \leq j \leq 2$ के लिए

$$y_{ij} = \begin{cases} x_j, & \text{यदि } e_{ij} = 1 \\ x'_j, & \text{यदि } e_{ij} = 0 \end{cases}$$

अब, क्योंकि $v_1 = (0,0)$ अर्थात् $e_{11} = 0$ और $e_{12} = 0'$ इसलिए ऊपर दी गई y_{11} और y_{12} की परिभाषा से हमें यह प्राप्त होता है

$m_1 = y_{11} \wedge y_{12} = x'_1 \wedge x'_2$.

इसी प्रकार, आप यह देख सकते हैं कि

$m_2 = x'_1 \wedge x_2$ और $m_3 = x_1 \wedge x_2$.

चरण-III : तीन गुणदों m_1, m_2 और m_3 के सम्मिलन से निम्न प्रकार का व्यंजक प्राप्त होता है

$X(x_1, x_2) = m_1 \vee m_2 \vee x_3 = (x'_1 \wedge x'_2) \vee (x'_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_2)$.

जो कि (DNF में) अभीष्ट बूलीय व्यंजक है जिसका बूलीय फलन वही है जो कि दिया हुआ फलन f है (नीचे दिए गए प्रश्न को देखिए)।

* * *

आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करके उदाहरण 12 को पूरा कर सकते हैं।

E14) पिछले उदाहरण में यह दिखाइए कि

$X(e_1, e_2) = f(e_1, e_2) \;\; \forall \;\; e_1, e_2 \in B$

उदाहरण 12 में आपने यह देखा है कि किस प्रकार एक दिए हुए फलन $f : B^2 \to B$ के लिए (DNF में) एक व्यंजक प्राप्त किया जाता है। अगले उदाहरण में आप यह देखेंगे कि किस प्रकार CNF में व्यंजक प्राप्त किया जाता है।

उदाहरण 13: मानलीजिए $g : B^2 \to B$ एक फलन है जो

$g(0,0) = 0, g(1,0) = 1, g(0,1) = 0, g(1,1) = 1$

से परिभाषित है। CNF में एक ऐसा बूलीय व्यंजक ज्ञात कीजिए जो फलन g को निर्दिष्ट करता हो।

हल: CNF में फलन g को निर्दिष्ट करने वाले बूलीय व्यंजक को प्राप्त करने की प्रक्रिया निम्नलिखित तीन चरणों में पूरी की जाती है।

चरण-I : सभी मान-युग्मों $v_i = (e_{i1}, e_{i2})$, को एकत्रित कीजिए जिनके लिए $g(v_i) = 0$, जहाँ $(e_{i1}, e_{i2}) \in B^2 \; \forall \; i$, यहाँ ऐसे दो युग्म $v_1 = (0,0)$ और $v_2 = (0,1)$ दिए गए हैं।

चरण-II : इन दो युग्मों में से प्रत्येक युग्म $v_i = (e_{i1}, e_{i2})$ के लिए एक योगद (maxterm) $M_i = y_{i1} \vee y_{i2}$
लिखिए जहाँ $1 \leq i, j \leq 2$, के लिए

$$y_{ij} = \begin{cases} x_j, & \text{यदि} \quad e_{ij} = 1. \\ x'_j, & \text{यदि} \quad e_{ij} = 0. \end{cases}$$

अब, क्योंकि $v_1 = (0, 0)$ अर्थात् $e_{11} = 0$ और $e_{12} = 0$, इसलिए ऊपर दी गई y_{11} और y_{12} की परिभाषा को लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$M_1 = y_{11} \vee y_{12} = x'_1 \vee x'_2$.

इसी प्रकार, $M_2 = x'_1 \vee x_2$.

चरण-III : अंत में, इन दो योपदों (maxterms) M_1 और M_2 के सर्वनिष्ठ से व्यंजक

$$X(x_1, x_2) = M_1 \wedge M_2 = (x'_1 \vee x'_2) \wedge (x'_1 \vee x_2)$$

प्राप्त होता है जो कि CNF में फलन g को निर्दिष्ट करने वाला अभीष्ट बूलीय व्यंजक है। (इसे सत्यपित कीजिए)।

* * *

टिप्पणी: बूलीय फलन h (मान लीजिए) का बूलीय व्यंजक प्राप्त करने के लिए पहले हमें यह देखना चाहिए कि **वहाँ कितने v_i हैं जिन पर $h(v_i) = 0$ और कितने v_i हैं जिन पर $h(v_i) = 1$. यदि उन मानों की संख्या जिन जिन पर फलन h, 0 हो, उन मानों की संख्या से कम हो जिन पर फलन h, 1 है, तो हम CNF में, न कि DNF में व्यंजक प्राप्त करना चाहेंगे।** इससे हमें अपेक्षाकृत एक छोटा बूलीय व्यंजक प्राप्त होगा और इस तरह एक सरल परिपथ प्राप्त होगा। और, इन्हीं कारणों से, हम तब DNF में व्यंजक प्राप्त करना चाहेंगे जबकि उन मानों की संख्या, जिन पर h, 0 होता है, अधिक हो।

निम्नलिखित प्रमेय पिछले दो उदाहरणों में बतायी गई प्रक्रियाओं के केवल व्यापकीकरण हैं। (हम इस पाठ्यक्रम में इन प्रमेयों को सिद्ध नहीं करेंगे।)

प्रमेय 3: मानलीजिए $f : B^n \to B$ $(n \geq 1)$ एक फलन है और $v_i = (e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in})$ $(1 \leq i \leq k)$ बूलीय बीजावली B^n के वे अवयव हैं जिनके लिए $f(v_i) = 1$. ऐसे प्रत्येक v_i के लिए $m_i = y_{i1} \wedge \ldots \wedge y_{in}$ लीजिए, जहाँ

$$y_{ij} = \begin{cases} x_j, & \text{यदि } e_{ij} = 1; \\ x'_j, & \text{यदि } e_{ij} = 0, \end{cases} \qquad \text{जहाँ } j = 1, \ldots, n.$$

तब $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = m_1 \vee m_2 \vee \ldots \vee m_k$ (DNF में) एक बूलीय व्यंजक होता है जिसका बूलीय फलन वही है जो कि फलन f है।

प्रमेय 4: मानलीजिए $g : B^n \to B$ एक फलन है और $v_i\,(e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{in})$, $(1 \leq i \leq k)$ बूलीय बीजावली B^n के वे अवयव हैं जिनके लिए $f(v_i) = 0$. ऐसे प्रत्येक v_i के लिए $M_i = y_{i1} \vee \ldots \vee y_{in}$ लीजिए, जहाँ

$$y_{ij} = \begin{cases} x_j, & \text{यदि } e_{ij} = 1; \\ x'_j & \text{यदि } e_{ij} = 0, \end{cases} \qquad \text{जहाँ } j = 1, \ldots, n.$$

तब $X(x_1, x_2, \ldots, x_n) = M_1 \wedge M_2 \wedge \ldots \wedge M_k$ (CNF में) एक बूलीय व्यंजक होता है जिसका बूलीय फलन वही है जो कि फलन g है।

अब आप इन प्रमेयों को लागू क्यों नहीं करते?

E15) (ऊपर टिप्पणी में बतायी गई बातों को ध्यान में रखकर) नीचे सारणी रूप में परिभाषित फलनों के DNF या CNF में बूलीय व्यंजक प्राप्त कीजिए।

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

(क)

x_1	x_2	x_3	$g(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

(ख)

बूलीय फलनों से हमें संगत परिपथ की कार्य-प्रणाली के बारे में जानकारी प्राप्त होती है। अतः दो तुल्य व्यंजकों से निरूपित परिपथों को अनिवार्य रूप से समान कार्य करना चाहिए। हम इस तथ्य का प्रयोग एक अपेक्षाकृत अधिक सरल परिपथ पाने के लिए परिपथ की फिर से अभिकल्पना करते समय करते हैं। वस्तुतः परिपथ के इस प्रकार के सरलीकरण प्रक्रम में हम परिपथ के लिए एक व्यंजक लिखते हैं और तब बूलीय फलन प्राप्त करने के लिए (दो-अवयव बूलीय बीजावली B पर) इसका मान निकालते हैं। इसके बाद हम एक तुल्य और सरलतर व्यंजक प्राप्त करने की प्रक्रिया लागू करते हैं। अंत में, इस सरलतर व्यंजक से प्राप्त परिपथ के निर्माण के साथ ही प्रक्रिया समाप्त हो जाती है। ध्यान दीजिए कि **क्योंकि दो व्यंजक तुल्य हैं, इसलिए सरलतर व्यंजक द्वारा निरूपित परिपथ ठीक वही काम करेगा जो कि मूल व्यंजक द्वारा निरूपित परिपथ करता है।**

आइए हम एक उदाहरण लेकर इस प्रक्रिया को अच्छी तरह से समझने का प्रयास करें।

उदाहरण 14 : एक ऐसे तर्क परिपथ की अभिकल्पना कीजिए जो कि एक हॉल के तीन प्रवेश द्वारों पर रखे तीन स्विचों x_1, x_2, x_3 (मानलीजिए) से हाल के केन्द्र में लगे प्रकाश बल्ब का प्रचालन कर सके।

हल: आइए हम इस प्रक्रिया को चरणशः लें।

चरण 1: अनिर्दिष्ट परिपथ के संगत फलन प्राप्त करना।

प्रारंभ में हम यह मान सकते हैं कि बल्ब ऑफ है अगर सभी स्विच ऑफ हैं। गणितीय रूप में यह एक ऐसी स्थिति होती है, जहाँ $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ से यह अर्थ निकलता है कि $f(0, 0, 0) = 0$ जहाँ f एक ऐसा फलन हैं जो कि अभिकल्पित किए जाने वाले परिपथ की कार्यात्मिक उपयोगिता को प्रदर्शित करता है।

आइए अब हम यह देखें कि किस प्रकार f के अन्य मान प्राप्त किए जाते हैं। ध्यान दीजिए कि स्विच की अवस्था में किए गए प्रत्येक परिवर्तन से प्रकाश बल्ब को बारी-बारी से ऑन या ऑफ होना चाहिए। इस तथ्य को बार-बार लागू करके हम फलन f के अन्य मान प्राप्त करते हैं।

अब, यदि हम (x_1, x_2, x_3) को मान (1,0,0) दें, तो इससे केवल स्विच x_1 की अवस्था में एक परिवर्तन होता है। अतः प्रकाश बल्ब को ऑन अवश्य होना चाहिए। इसे गणितीय विधि से $f(1, 0, 0) = 1$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ f का मान 1 प्रकाश बल्ब की ऑन अवस्था को प्रकट करता है।

तब $f(1,1,0) = 0$ अवश्य होना चाहिए , क्योंकि अब स्विच x_2 की अवस्था में एक अन्य परिवर्तन हो गया है।

आप सत्यापित कर सकते हैं कि $f(x_1, x_2, x_3)$ के अन्य मान वहीं हैं जो सारणी 9 में दिए गए हैं।

सारणी 9 : एक तीन-बिन्दु कार्यात्मिक बल्ब की परिपथिकी का फलन।

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
1	0	0	1
1	1	0	0
1	1	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
0	0	1	1
1	0	1	0

चरण 2: एक बूलीय व्यंजक प्राप्त करना जो फलन f को निदिष्ट करे।
सबसे पहले आप इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि सारणी 9 के अंतिम स्तंभ में 1 की संख्या 0 की संख्या से कम है। अत: हम (CNF के स्थान पर) DNF में व्यंजक प्राप्त करेंगे।

उदाहरण 12 की चरणश: प्रक्रिया को लागू करके तथा प्रमेय 3 का प्रयोग करके आप यह देख सकते हैं कि अभीष्ट बूलीय व्यंजक यह होता है।

$$X(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3)$$

इस चरण पर (भाग 3.3 में चर्चा की गई विधियों को लागू करके) इस व्यंजक से हम सीधे परिपथ के निर्माण पर आ सकते हैं। परन्तु एक सरल परिपथ प्राप्त करने का प्रयास हम क्यों नहीं करें?

चरण 3: ऊपर दिए गए व्यंजक $X(x_1, x_2, x_3)$ का सरल करना।
सबसे पहले बंटन-नियम, पूरकीकरण नियम और तत्समक नियम को (इस क्रम में) लागू करके यह देखिए कि

$$\begin{aligned}(x_1 \wedge x'_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) &= x_1 \wedge [(x'_2 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)] \\ &= x_1 \wedge [(x'_2 \vee x_2) \wedge x_3] \\ &= x_1 \wedge (I \wedge x_3) \\ &= x_1 \wedge x_3\end{aligned}$$

इसी प्रकार आप यह देख सकते हैं कि

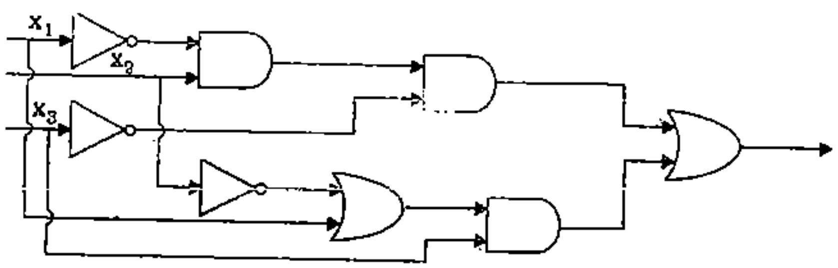
$$(x'_1 \wedge x'_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_3) = (x'_2 \vee x_1) \wedge x_3.$$

इस तरह, हमने एक सरलतर (और तुल्य) व्यंजक अर्थात्

$$X(x_1, x_2, x_3) = (x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3) \vee [(x'_2 \vee x_1) \wedge x_3]$$

प्राप्त कर लिया है जिसका बूलीय फलन वही है जो फलन f है। (इसे सत्यापित कीजिए।)

चरण 4: चरण 3 में प्राप्त किए गए व्यंजक के परिपथ की अभिकल्पना करना।
अब, चरण 3 में प्राप्त किए गए सरलतर (और तुल्य) व्यंजक का संगत तर्क परिपथ वही है जैसा कि चित्र 15 में दिखाया गया है।



चित्र 15 : व्यंजक $(x'_1 \wedge x_2 \wedge x'_3) \vee ((x'_2 \vee x_1) \wedge x_3)$ का परिपथ।

अत: चार चरणों में हमने हॉल के लिए एक 3-स्विच वाले परिपथ की अभिकल्पना करली है।

* * *

अभी आप इस बात का दावा नही कर सकते कि ऊपर के उदाहरण में अभिकल्पित किया गया परिपथ सरलतम परिपथ है। सरलतम परिपथ किस प्रकार प्रकार प्राप्त किया जाता है यह एक अलग ही कहानी है जो कि वर्तमान पाठ्यक्रम के अध्ययन क्षेत्र से बाहर है।

अब आप एक प्रश्न हल क्यों नहीं करते?

E16) दो स्विचों x_1 और x_2 (मानलीजिए) से प्रकाश बल्ब का प्रचालन करने के लिए एक तर्क परिपथ की अभिकल्पना कीजिए।

अब हम तर्क के अनुप्रयोगों से संबंधित चर्चा यहीं समाप्त कर रहे हैं और जो कुछ भी चर्चा हमने यहाँ की हैं उसका संक्षिप्त विवरण यहाँ हम दे रहे हैं।

3.6 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर विचार किया है।

1. बूलीय बीजावली की परिभाषा और उसके उदाहरण। विशेष रूप से हमनें दो-अवयव बूलीय बीजावली $B = \{0,1\}$ और स्विचन बीजावली B^n, $n \geq 2$ पर चर्चा की है।
2. बूलीय व्यंजक की परिभाषा और उसके उदाहरण।
3. सम्मिलन प्रसामान्य समघात (DNF) या सर्वनिष्ठ प्रसामान्य समघात (CNF) में बूलीय व्यंजक किस प्रकार लिखा जाता है।
4. तीन प्रायमिक तर्क गेट, अर्थात् 'तथा' गेट, 'अथवा' गेट और 'न गेट', तर्कसंगत संयोजकों की कार्य-प्रणाली और संक्रियाओं के बीच अनुरूपता।
5. एक दिए हुए बूलीय व्यंजक के संगत तर्क परिपथ के निर्माण की विधि और इसका विलोमत:।
6. बूलीय व्यंजक की तर्क सारणी किस प्रकार प्राप्त की जाए और परिपथ के समग्र कार्य-प्रणाली को समझने में इसकी उपयोगिता।
7. बूलीय व्यंजक को सरल करने की विधि।
8. बूलीय व्यंजक के संगत बूलीय फलन $f : B^n \to B$ के निर्माण की विधि और तुल्य बूलीय व्यंजकों की संकल्पना।
9. एक दिए हुए फलन $f : B^n \to B$, $n \geq 2$ के लिए (CNF या DNF में) बूलीय व्यंजक प्राप्त करने की विधि।
10. एक तर्क परिपथ का उदाहरण जो कि एक विशिष्ट विधि से काम कर सकता है, का बूलीय बीजावली विधियों के प्रयोग से निर्माण।

3.7 हल/उत्तर

E1) क) इकाई 1 के E19 में आप तत्समक नियमों को सत्यपित कर चुके हैं। आइए अब हम यह दिखाएं कि कथन $p \vee (p \wedge q)$ और p तार्किकत: तुल्य है। इसके लिए यह दिखा देना ही पर्याप्त होगा कि इन दोनों कथनों की तर्क सारणियाँ समान हैं। यह नीचे दी गई सारणी के पहले और अंतिम स्तंभ से प्राप्त हो जाता है।

p	q	$p \wedge q$	$p \vee (p \wedge q)$
F	F	F	F
F	T	F	F
T	F	F	T
T	T	T	T

इसी प्रकार आप यह देख सकते हैं कि कथन $p \wedge (p \vee q)$ और p तुल्य कथन हैं। इससे बूलीय बीजावली $(S, \wedge, \vee, ', \mathcal{F}, \mathcal{T})$ के लिए अवशोषण नियम स्थापित हो जाते हैं।

ख) मानलीजिए A और B समुच्चय X के दो उपसमुच्चय हैं। क्योंकि $A \cap B \subseteq A$, इसलिए $(A \cap B) \cup A = A$. इसी प्रकार, क्योंकि $A \subseteq A \cup B$ इसलिए $(A \cup B) \cap A = A$. इस तरह, बूलीय बीजावली $(P(X), \cup, \cap, ^c, X)$ पर दोनों रूप के अवशोषण नियम लागू होते हैं।

E2) यहाँ यह देखिए कि

$$\begin{aligned}
(x_1 \vee x_2)' &= x'_1 \wedge x'_2 && \text{(दमार्गा नियम)}\\
&= (x'_1 \wedge x'_2) \wedge 1 && \text{(तत्समक नियम)}\\
&= (x'_1 \wedge x'_2) \wedge (x_3 \vee x'_3) && \text{(पूरकीकरण नियम)}\\
&= (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x_3) \vee (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3) && \text{(बंटन नियम)}
\end{aligned}$$

इसी प्रकार, आप यह देख सकते हैं कि

$$\begin{aligned}
x'_1 \wedge x_3 &= (x'_1 \wedge x_3) \wedge (x_2 \vee x'_2) = (x'_1 \wedge x_3 \wedge x_2) \vee (x'_1 \wedge x_3 \wedge x'_2)\\
&= (x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x_3)
\end{aligned}$$

इस तरह, बूलीय व्यंजक $X(x_1, x_2, x_3)$ का DNF यह होता है

$$(x'_1 \wedge x'_2 \wedge x_3) \vee (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x_3).$$

E3) हमें यह प्राप्त हैं

$$\begin{aligned}
((x_1 \wedge x'_2) \vee (x'_1 \wedge x'_3))' &= (x_1 \wedge x'_2)' \wedge (x'_1 \vee x'_3)'\\
&= (x'_1 \vee (x'_2)') \wedge ((x'_1)' \wedge (x'_3)')\\
&= (x'_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \wedge x_3)
\end{aligned}$$

अब,

$$\begin{aligned}
(x'_1 \vee x_2) &= (x'_1 \vee x_2) \vee O\\
&= (x'_1 \vee x_2) \vee (x_3 \wedge x'_3)\\
&= (x'_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x_2 \vee x'_3).
\end{aligned}$$

इसी प्रकार, यह दिखाया जा सकता है कि

$$(x_1 \vee x_3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x'_2 \vee x_3)$$

इस तरह, दिए हुए व्यंजक का CNF यह होगा

$$(x'_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x_2 \vee x'_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x_1 \vee x'_2 \vee x_3).$$

E4) हम यह लिख सकते हैं

$$\begin{aligned}
X(x_1, x_2, x_3) &= ((x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \wedge x_2) \wedge x_3)) \vee (x_2 \wedge x_3)\\
&= (x_1 \wedge x_2) \vee (x_2 \wedge x_3) && \text{(अवशोषण नियम से)}\\
&= x_2 \wedge (x_1 \vee x_3) && \text{(बंटन-नियम से)}
\end{aligned}$$

यह दिए हुए व्यंजक का सरलतम रूप है।

E5) द्वयंकों x_1 और x_2 के स्थान पर कथन p और q लीजिए। तब, जब सारणी 3 में 1 और 0 के स्थान पर T और F लिया जाता है, तब हमें कथन $p \wedge q$ की सत्य सारणी प्राप्त होती है

(देखिए इकाई 1 की सारणी 2) इससे "तथा" गेट की कार्य-प्रणाली और कथन-समुच्चय पर सर्वनिष्ठ संक्रिया के बीच की अनुरूपता स्थापित होती है।

E6) व्यंकों x_1 और x_2 के स्थान पर कथन p और q लीजिए। तब, जब सारणी 4 में 1 और 0 के स्थान पर T और F लिया जाता है तब हमें कथन $p \vee q$ की सत्य सारणी प्राप्त होती है। (देखिए इकाई 1 की सारणी 1) इससे 'अथवा' गेट की कार्य-प्रणाली और कथन-समुच्चय पर सम्मिलित संक्रिया के बीच की अनुरूपता स्थापित हो जाती है।

E7) सबसे पहले यह देखिए कि निवेशों के भिन्न-भिन्न मानों के लिए तीन प्राथमिक गेटों के निर्गतों से संबंधित जानकारी को इस प्रकार भी लिखा जा सकता है

$0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0, 1 \wedge 1 = 1;$ (देखिए सारणी 3)

$0 \vee 0 = 0, 0 \vee 1 = 1 \vee 0, 1 \vee 1 = 1;$ (देखिए सारणी 4)

$0' = 1, 1' = 0$ (देखिए सारणी 5)

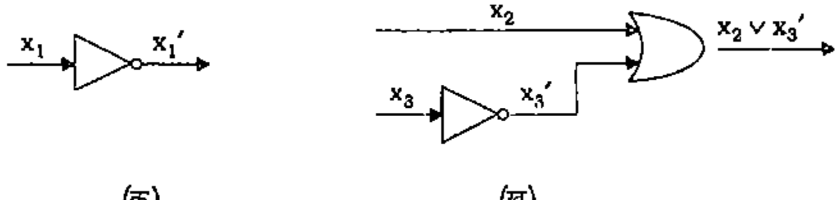
स्पष्ट है कि दोनों संक्रियाएँ $\wedge$ और $\vee$, B पर द्वि-आधारी संक्रियाएँ हैं और $' : B \rightarrow B$ एक एकल संक्रिया है। हम बूलीय बीजावली की परिभाषा में **O** के लिए 0 और **I** के लिए 1 ले सकते हैं।

अब तीन प्राथमिक गेटों की तर्क सारणियों को देखकर आप यह जान सकते हैं कि पाँचों नियम B1 - B5 संतुष्ट हो जाते हैं। अत: B एक बूलीय बीजावली है।

E8) क) क्योंकि यहाँ x_1 और x_2 एक 'अथवा' गेट के निवेश हैं, इसलिए श्रृंखला के अगले **'न गेट'** के लिए हम $x_1 \vee x_2$ को निवेश मान लेते हैं जिससे कि (क) में दिए गए परिपथ के लिए $(x_1 \vee x_2)'$ के रूप में अभीष्ट निर्गत व्यंजक प्राप्त होता है।

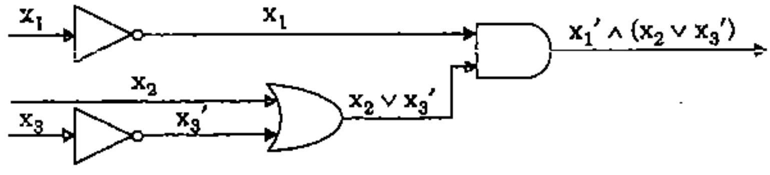
ख) यहाँ x_1 और x_2 एक 'तथा' गेट के निवेश हैं। अत: श्रृंखला का अगला गेट होने के कारण व्यंजक $x_1 \wedge x_2$ **'न गेट'** के लिए एक निवेश का काम करता है। इससे व्यंजक $(x_1 \wedge x_2)'$ प्राप्त होता है जो सबसे दायीं ओर वाले 'तथा' गेट के लिए एक निवेश का काम करता है। और, क्योंकि (**न गेट** से बाहर निकलने के कारण) इस 'तथा' गेट का एक अन्य निवेश है, इसलिए अंतिम निर्गत व्यंजक के रूप में हमें व्यंजक $(x_1 \wedge x_2)' \wedge x'_3$ प्राप्त होता है जो (ख) में दिए गए परिपथ को निरूपित करता है।

E9) आप जानते हैं कि व्यंजकों x_1 और $(x_2 \wedge x_3)'$ को निरूपित करने वाले परिपथ वे ही हैं जो कि नीचे चित्र 16 (क) और (ख) में दिखाए गए हैं।



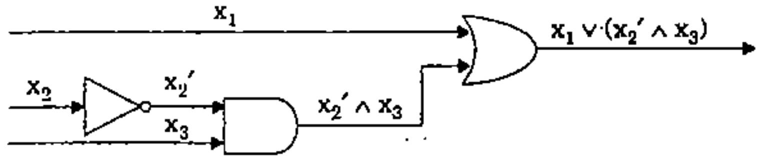
चित्र 16

इस तरह व्यंजक $x'_1 \wedge (x_2 \vee x'_3)$ जो कि प्रतीक $\wedge$ द्वारा जुड़े हुए है, से इसका संगत परिपथ प्राप्त हो जाता हैं जैसा कि नीचे चित्र 17 में दिखाया गया है।



चित्र 17 : व्यंजक $x'_1 \wedge (x_1 \vee x'_3)$ का तर्क परिपथ।

E10) E9 में दिए गए तर्कों से आप यह सरलता से देख सकते हैं कि व्यंजक $x_1 \vee (x'_2 \wedge x_3)$ से निरूपित परिपथ वही है जो कि चित्र 18 में दिया गया है।



चित्र 18

इस व्यंजक की तर्क सारणी वही है जैसा कि नीचे दिखाई गई हैं

x_1	x_2	x_3	x'_2	$x'_2 \wedge x_3$	$x_1 \vee (x'_2 \wedge x_3)$
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1

E11) क्योंकि E8(ख) में दिए गए परिपथ को निरूपित करने वाला निर्गत व्यंजक $(x_1 \wedge x_2)' \wedge x'_3$ है, इसलिए इस परिपथ की सत्य सारणी वही है जैसा कि नीचे दी गई हैं

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge x_2$	$(x_1 \wedge x_2)'$	x'_3	$(x_1 \wedge x_2)' \wedge x'_3$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	0	0
1	1	1	1	0	0	0

E12) क्योंकि व्यंजक $(x_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x'_3)$ में तीन चर हैं, इसलिए संगत बूलीय फलन f (मानलीजिए) एक तीन चर वाला फलन अर्थात् $f: B^3 \to B$ होगा। इसे इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$f(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \wedge e_2) \vee (e_1 \wedge e'_3)$, e_1, e_2 और $e_3 \in B$

अब, आप यह सत्यापित कर सकते हैं कि सारणी रूप में f के मान वहीं हैं जो कि नीचे की सारणी में दिए गए हैं।

e_1	e_2	e_3	$e_1 \wedge e_2$	e'_3	$e_1 \wedge e'_3$	$f(e_1, e_2, e_3) = (e_1 \wedge e_2) \vee (e_1 \wedge e'_3)$
0	0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	0	0	0
1	1	1	1	0	0	1

E13) यह दिखाने के लिए कि दो-अवयव बूलीय बीजावली $B = \{1,0\}$ पर बूलीय व्यंजक X और Y तुल्य हैं, यह दिखा देना ही पर्याप्त होता है कि व्यंजकों X और Y के संगत बूलीय फलन f और g (मानलीजिए) समान है। जैसा कि आप देख सकते हैं कि व्यंजक X के फलन f को ऊपर E12 में परिकलित किया गया है।

इसी प्रकार, आप यह देख सकते हैं कि व्यंजक Y के बूलीय-फलन g को सारणी रूप में वही है जो कि नीचे दिया गया है।

x_1	x_2	x_3	x'_3	$x_2 \vee x'_3$	$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x'_3)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1

इस सारणी और ऊपर E12 में दी गई सारणी के अंतिम स्तंभों की तुलना करके आप यह देख सकते हैं कि

$f(e_1, e_2, e_3) = g(e_1, e_2, e_3), \ \forall \ e_1, e_2, e_3 \in B = \{0,1\}$

इसलिए, X और Y तुल्य हैं।

E14) सबसे पहले आइए हम दो-अवयव बूलीय बीजावली $B = \{0,1\}$ पर दिए हुए व्यंजक $X(x_1, x_2, x_3)$ का मान इस प्रकार निकालें

$$
\begin{aligned}
X(0,0) &= (0' \wedge 0') \vee (0' \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \\
&= (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \\
&= 1 \vee 0 \vee 0 = 1 = f(0,0); \\
X(1,0) &= (1' \wedge 0') \vee (1' \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \\
&= (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \\
&= 0 \vee 0 \vee 0 = 0 = f(1,0); \\
X(0,1) &= (0' \wedge 1') \vee (0' \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\
&= (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\
&= 0 \vee 1 \vee 0 = 1 = f(0,1); \\
X(1,1) &= (1' \wedge 1') \vee (1' \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \\
&= (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\
&= 0 \vee 0 \vee 1 = 1 = f(1,1);
\end{aligned}
$$

इस तरह, $X(e_1, e_2) = f(e_1, e_2), \forall\ e_1, e_2 \in B = \{0, 1\}$.

E15) क) दी हुई सारणी से आप यह देख सकते हैं कि फलन $f(x_1, x_2, x_3)$ के दो मानों 0 और 1 में मान 1 सबसे कम बार आता है। अत: उदाहरण 13 के बाद दी गई टिप्पणी के अनुसार हम DNF में बूलीय व्यंजक प्राप्त करना चाहेंगें।

इसे प्राप्त करने के लिए हम प्रमेय 3 और उदाहरण 12 में अपनायी गई चरणश: प्रक्रिया को लागू करेंगें। सबसे पहले आप यह देखिए कि

$v_1 = (e_{11}, e_{12}, e_{13}) = (1, 1, 1)$, $v_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23}) = (1, 0, 0)$ और
$v_3 = (e_{31}, e_{32}, e_{33}) = (0, 0, 0)$,

मानों v_i के तीन त्रिक हैं जिनके लिए $f(v_i) = 1, 1 \le i \le 3$.
तब, इन तीनों मानों v_1, v_2 और v_3 के संगत तीन गुणद m_1, m_2 और m_3 (मानलीजिए) ये होते हैं

$m_1 = y_{11} \wedge y_{12} \wedge y_{13}$
$\quad = x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$; (क्योंकि $e_{11} = e_{12} = e_{13} = 1$).

$m_2 = y_{21} \wedge y_{22} \wedge y_{23}$
$\quad = x_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3$; (क्योंकि $e_{21} = 1$ और $e_{22} = e_{23} = 0$).

$m_3 = y_{31} \wedge y_{32} \wedge y_{33}$
$\quad = x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3$; (क्योंकि $e_{31} = e_{32} = e_{33} = 0$)

अंत में, DNF में अभीष्ट बूलीय व्यंजक यह होता है

$$X(x_1, x_2, x_3) = m_1 \vee m_2 \vee m_3 = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3) \vee (x'_1 \wedge x'_2 \wedge x'_3).$$

ख) दी हुई सारणी के अनुसार फलन $g(x_1, x_2, x_3)$ के दो मानों 0 और 1 में से मान 0 सबसे कम बार आता है। अत: हम CNF में संगत बूलीय व्यंजक प्राप्त करना चाहेंगें।
इसे प्राप्त करने के लिए हम प्रमेय 4 और उदाहरण 13 में अपनायी गई चरणश: प्रक्रिया को लागू करेंगें। सबसे पहले आप यह देखिए कि

$v_1 = (e_{11}, e_{12}, e_{13}) = (1,0,1)$, $\qquad v_2 = (e_{21}, e_{22}, e_{23}) = (0,1,1)$ और
$v_3 = (e_{31}, e_{32}, e_{33}) = (0,1,0)$

मानों v_i के तीन त्रिक हैं जिनके लिए $g(v_i)=0, 1 \le i \le 3$. तब इन तीन मानों v_1, v_2, और v_3 के संगत तीन योपद M_1, M_2, और M_3 (मानलीजिए) ये होते हैं

$M_1 = y_{11} \vee y_{12} \vee y_{13}$
$\quad = x_1 \vee x'_2 \vee x_3$; (क्योंकि $e_{11} = e_{13} = 1$ और $e_{12} = 0$)

$M_2 = y_{21} \vee y_{22} \vee y_{23}$
$\quad = x'_1 \vee x_2 \vee x_3$; (क्योंकि $e_{21} = 0$ और $e_{22} = e_{23} = 1$)

$M_3 = y_{31} \vee y_{32} \vee y_{33}$
$\quad = x'_1 \vee x_2 \vee x'_3$; (क्योंकि $e_{31} = e_{33} = 0$ और $e_{32} = 1$)

अंत में, (CNF में) अभीष्ट बूलीय व्यंजक यह होता है

$$X(x_1, x_2, x_3) = M_1 \wedge M_2 \wedge M_3 = (x_1 \vee x'_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (x'_1 \vee x_2 \vee x'_3).$$

E16) मानलीजिए g, उस फलन को प्रकट करता है जो कि अभिकल्पित किए जाने वाले परिपथ की कार्यात्मक उपयोगिता प्रदर्शित करता है। यहां हम यह मान सकते हैं कि जब दोनों स्विच x_1 और x_2 ऑफ होते हैं तब प्रकाश बल्ब ऑफ होता है, अर्थात् हम $g(0,0) = 0$ लिखते हैं।

अब सारणी g की प्रविष्टियों का परिकलन करने में प्रयुक्त तर्कों से यह आप सरलता से देख सकते हैं कि फलन g के सभी मान वही होते हैं जो कि नीचे दिए गए हैं

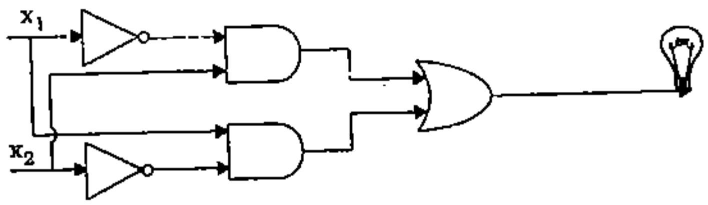
$$g(0,0) = 0,\ g(0,1) = 1,\ g(1,0) = 1,\ g(1,1) = 0.$$

इस तरह, पिछले प्रश्न को हल करने वाली प्रक्रिया को लागू करके यह देखा जा सकता है कि (DNF में) बूलीय व्यंजक, जिससे बूलीय फलन g प्राप्त होता है, निम्नलिखित व्यंजक होता है

$$X(x_1, x_2) = (x'_1 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x'_2)$$

क्योंकि $g(0, 1) = 1$ और $g(1,0) = 1$.

अंत में इस बूलीय व्यंजक के संगत तर्क परिपथ वही होता है जैसा कि चित्र 19 में दिखाया गया है।



चित्र 19

शब्दावली

अंतर्वलन-नियम	-	Involution Law
अंतर्विरोध	-	Contradiction
अक्षर	-	Literal
अथवा	-	Or
अथवा गेट	-	Or Gate
अनुमिति	-	Inference
अपवर्जी वियोजन	-	Exclusive disjunction
अभिकल्पना	-	Design
अभिगृहीत	-	Axiom/postulate
अवशोषण नियम	-	Absorption Law
असंगति प्रदर्शन	-	Reductio ad absurdum
अस्तित्वीय प्रमात्रक	-	Complementation
आगमन नियम	-	Principle of induction
आवश्यक	-	Necessary
उपपत्ति	-	Proof
कथन	-	Statement/proposition
क्रमविनिमेयता	-	Commutativity
खंडन/असिद्ध करना	-	To disprove
गुणद (गुणन योग्य पद)	-	Minterm
गेट	-	Gate
घोषणात्मक वाक्य	-	Declarative sentence
तथा गेट	-	And Gate
तत्समक नियम	-	Identity law
तर्क	-	Logic
तर्क गेट	-	Logic Gates
तर्क परिपथ	-	Logic Circuits
तर्क शास्त्र	-	Logic
तर्क संगत	-	Logical
तर्क सारणी	-	Logic table
तुल्य	-	Equivalent
तुल्यता	-	Equivalence
दावा	-	Conjecture
द्वैती	-	Dual
द्वयंक	-	Bits
दो अवयव बूलीय बीजावली	-	Two element boolean algebra
न गेट	-	Not Gate
ना साबित करना	-	Disprove
निर्गत	-	Out put
निवेश	-	Input
निषेध	-	Negation
निषेधक हेतुफलनानुमान	-	Modus tollens
निष्कर्ष	-	Conclusion
निहितार्थ	-	Implication
न्याय	-	Syllogism
परिकल्पना	-	Hypothesis

NOTES

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त
विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

UGMM - 13
विविक्त गणित

खंड

2

प्रारंभिक संचयविन्यासिकी

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

डॉ. वी.डी. आचार्य
विज्ञान एवं प्रौद्योगिक विभाग
दिल्ली

प्रो. अलोक डे
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान
दिल्ली

डॉ. एन.बी. लिमये
मुम्बई विश्वविद्यालय

डॉ. ए. त्रिपाठी
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान
दिल्ली

संकाय सदस्य
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

प्रो. आर. के. बोस
डॉ. वी. डी. मदान
डॉ. पूर्णिमा मित्तल
प्रो पार्वती सिक्लेयर
डॉ. सुजाता वर्मा

खंड निर्माण दल

प्रो. आर.के. बोस (संपादक)
गणित विभाग
इ.गां.रा.मु.वि.

प्रो. के. बालसुब्रमण्यन
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान
दिल्ली

पाठ्यक्रम समन्वयकर्ता : प्रो. आर.के. बोस

अनुवाद

श्री एच. पी. सिन्हा (सेवानिवृत्त)
वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग
नई दिल्ली

प्रो. आर.के. बोस
विज्ञान विद्यापीठ
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

फरवरी, 1999

ISBN- 81-7605-521-2

इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-68 से प्राप्त की जा सकती है।

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के अनुमति से पुनः मुद्रित। उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से डॉ. ए. के. सिंह, कुलसचिव द्वारा पुनः मुद्रित एवं प्रकाशित, जुलाई 2014
मुद्रक : नितिन प्रिन्टर्स, 1 पुराना कटरा, इलाहाबाद।

खंड 2 प्रारंभिक संचयविन्यासिकी

क्या आपने कभी इस बात की ओर ध्यान दिया है कि किस प्रकार संचार इंजीनियर अलग-अलग विधियों की कुल संख्या ज्ञात कर सकता है जिनसे वह टेलीग्राफी संचार के लिए नियत संख्या में ली गई बिन्दुओं और डेशों का प्रयोग करता है? या, किस प्रकार हम एक दी हुई संख्या से कम या इसके बराबर अभाज्य संख्याओं की संख्या का गणन कर सकते हैं। इस प्रकार की गणन संबंधी समस्याओं पर चर्चा हम संचय विन्यासिकी में करते हैं। इस संबंध में इस खंड में जिन-जिन तकनीकों पर चर्चा की गई है, उन्हें संचयविन्यास तकनीक कहा जाता है। हम इनका प्रयोग खेल, प्रायिकता, कम्प्यूटर प्रोग्राम विश्लेषण और स्वयं गणित जैसे विविध अनुप्रयोगों से संबंधित विभिन्न समुच्चयों के आमाप और कुछ स्थितियों में उनकी संरचना निर्धारित करने से संबद्ध समस्याओं का अध्ययन करने में करते हैं।

इस खंड में तीन इकाइयां हैं। इकाई 4 में क्रमचय तथा संचय, द्विपद तथा बहुपद प्रमेय, और संचय विन्यास प्रायिकता पर चर्चा की गई है।

इस संदर्भ में यह बात आपको रुचिकर लग सकती है कि क्रमचय की अभिधारणा का उल्लेख हिब्रू शोधपत्र सेफर येट जिराह (सृजन पुस्तक), जो कि 200 और 600 के बीच लिखी गई एक पांडुलिपि में मिलता है। द्विपद प्रमेय का जिससे कि हम सभी परिचित हैं, प्रथम उल्लेख यूक्लिड के शोध पत्र (300 ई. पू.) में मिलता है। इस संबंध में ऐतिहासिक रुचि की बात यह रही है कि ब्लास पास्कल (1623-1662) ने 1650 में एक पुस्तक प्रकाशित की थी जिसमें द्विपद गुणांकों, संचयों और बहुपदों के परस्पर संबंधों का उल्लेख मिलता है। इन परिणामों का प्रयोग जैकब बर्नोली (1645–1705) में द्विपद प्रमेय के व्यापक रूप को सिद्ध करने में किया था।

इस खंड की अगली अर्थात् इकाई 5 में प्राकृतिक संख्याओं के विभाजनों और परिमित संख्या में लिए गए पात्रों, जिन्हें प्रायः बक्स कहा जाता है, में परिमित संख्या में ली गई वस्तुओं को बंटित करने की विधियों की संख्या के गणन के बारे में चर्चा की गई है। लियोनार्ड ऑयलर (1707–1783) ही वह पहला व्यक्ति था जिसने 1740 में दो खंडों में लिखी गई "इन्ट्रोडक्शन इन एनेलीसिन इन्फिनीटोरम" नामक पुस्तक में पूर्णांकों के विभाजनों पर उन्नत अध्ययन किया था।

इस खंड की अंतिम इकाई अर्थात् इकाई 6 में कोष्ठ नियम और आविष्टि तथा अपवर्जन नियम पर चर्चा की गई है। आविष्टि तथा अपवर्जन नियम का एक रोचक इतिहास रहा है जिसका उल्लेख विभिन्न पांडुलिपियों में "चालन विधि" या "अनुप्रस्थ वर्गीकरण नियम" जैसे नामों के अंतर्गत मिलता है। इस नियम का समुच्चय सिद्धान्त रूप का, जिसका संबंध स्वयं समुच्चयों के सम्मिलन और सर्वनिष्ठ से है, उल्लेख अब्राहम द मायवर (1667–1754) द्वारा प्रस्तुत किए गए प्रायिकता सिद्धांत के "डाक्ट्रिन ऑफ चान्सेज" नामक लेख में मिलता है। लगभग 1713 में ही पियरे रेमण्ड द मॉन्टमोर्ट (1678–1719) ने इस नियम की अभिधारणा का प्रयोग "le probleme des rencontres" (अपविन्यास) नामक समस्या को हल करने में किया था।

इसके विपरीत कोष्ठ नियम का कोई स्पष्ट उद्गम नहीं मिलता। इसे डिरिश्ले-निर्धारित नियम, जो कि सुप्रसिद्ध जर्मन गणितज्ञ डिरिश्ले (1805–1859) के नाम पर रखा गया है, के नाम से जाना जाता है। इस नियम का एक अति सुव्यवस्थित व्यापकीकरण 1930 में एफ रैमसे द्वारा प्रस्तुत किए गए लेख में मिलता है।

संचयविन्यास संबंधी संकल्पना का, जिसका अध्ययन आप इस खंड में करेंगे, प्रयोग कम्प्यूटर तंत्र के सभी विश्लेषण, विविक्त संक्रिया विज्ञान की शोध समस्याओं और परिमित प्रायिकता में होता है। संचय विन्यासिकी से संबंधित हमारी चर्चा इन इकाइयों में ही समाप्त नहीं हो जाती, अपितु हम इस चर्चा को हम अगले खंड में भी जारी रखेंगे।

अंत में हम आपको यह सलाह देना चाहेंगे कि यदि आप चाहते हैं कि इस खंड में चर्चित तथ्यों पर आपकी पकड़ काफ़ी मजबूत हो, तो इसके लिए यह आवश्यक है कि आप प्रत्येक इकाई के अंत में दी गई विविध प्रश्नावली को अवश्य हल करें। ऐसा करने से आप संबंधित संकल्पनाओं को अच्छी तरह से समझ सकेंगे और साथ ही संचयविन्यास-सिद्धान्त के अध्ययन में आनंद उठा पाएंगे।

संकेत और प्रतीक

$n!$	$n(n-1)\ldots\ldots2.1$
$P(n, r)$	$\dfrac{n!}{(n-r)}$
$C(n, r)$	$\dfrac{n!}{(n-r)!\,r!}$
$P(n, r_1, r_2, \ldots, r_n)$	$\dfrac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_n!}$
$n(A), \lvert A \rvert$	समुच्चय A की गणन-संख्या
$\mathscr{P}(x)$	समुच्चय X का घात समुच्चय
$P(A)$	घटना A की प्रायिकता
P_n	प्राकृतिक संख्या n के विभाजनों की संख्या
P_n^k	ठीक-ठीक k भागों वाले n के विभाजनों की संख्या
Q_n^k	k या इससे कम भागों वाले n के विभाजनों की संख्या
$P_n(k)$	n के विभाजनों, जिसका कोई भाग k से बड़ा न हो, की संख्या
$P_n^{(d)}$	n के अलग-अलग विभाजनों की संख्या
$P_n^{(o)}$	n के विषम विभाजनों की संख्या
$s(n, k), 0 \le k \le n$	प्रथम प्रकार की स्टर्लिंग संख्या
$S_n^m\ (n \ge m)$	द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्या
$[x]_n$	$x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1)$ अर्थात् पतीत क्रमगुणित
B_n	बेल संख्या
$W(A)$	उन वस्तुओं के भारों का योगफल जिनमें समुच्चय A तभी गुणधर्म उपस्थित हों।
$N(p_1)$	गुणधर्म p_1 वाली वस्तुओं की संख्या।
$N(p_1, p_2)$	गुणधर्म p_1 और p_2 वाली वस्तुओं की संख्या।
$N(p_1', p_2')$	उन वस्तुओं की संख्या जिनमें गुणधर्म p_1 और P_2 उपस्थित न हों।
$W(\phi)$	सभी N वस्तुओं के भारों का योगफल
$E(0)$	उन सभी वस्तुओं का भार जिनमें कोई भी गुणधर्म p उपस्थित न हो, या तुल्यता जिनमें ठीक ठीक 0 गुणधर्म हो।
d_n	1 से n तक की संख्याओं के अपविन्यासों की संख्या।

इकाई 4 संचयविन्यासिकी–एक परिचय

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

संचय विन्यासिकी (combinatorics) में किसी प्रतिरूप (सूचीकरण) के अनुसार वस्तुओं के विन्यासों और इन विन्यासों को करने की विधियों की संख्या के गणन के बारे में अध्ययन किया जाता है। इसमें अधिकांशतः परिमित संख्या में ली गई वस्तुओं और किसी प्रतिरूप (pattern) के अनुसार परिमित संख्या में ली गई विधियों से इन्हें विन्यासित करने के बारे में अध्ययन किया जाता है। कभी-कभी अनंत संख्या में ली गई वस्तुओं और अनंत विधियों से इन्हें विन्यासित करने के बारे में भी विचार करना होता है।

यहाँ हम क्रमचयों (permutations) और संचयों (combinations) से संबंधित कुछ आधारभूत सूत्र दे रहे हैं। अंत में, हमने प्रायिकता सिद्धांत (probability theory) के कुछ अनुप्रयोग भी दिए हैं। गणन समस्याएं किस-किस प्रकार की होती हैं इनसे परिचित होने के लिए यहाँ हम कुछ सरल उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण क : अंग्रेजी वर्णमाला 26 अक्षर लीजिए। लंबाई 3 वाले शब्दों (आवश्यक नहीं कि ये सार्थक शब्द ही हों) की संख्या ज्ञात कीजिए।

शब्दों की गिनती aaa, aab, aac, ..., zzz के रूप में की जा सकती है। स्पष्ट है कि शब्दों की संख्या $26 \times 26 \times 26$ होगी।

यह परिमित विधियों से विन्यासित की गई परिमित संख्या में ली गई वस्तुओं से, संबंधित एक उदाहरण है।

उदाहरण ख : पिछले उदाहरण में परिमित लंबाई वाले सभी संभव शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए। क्योंकि शब्दों की लंबाई परिबद्ध (bounded) नहीं है, इसलिए इससे यह स्पष्ट है कि शब्दों की संख्या अनंत होगी। यह अनंत विधियों से संबंधित एक उदाहरण है।

उदाहरण ग : सभी धन पूर्णांकों का समुच्चय लीजिए। इनमें कितने पूर्णांकों 100 से कम होंगे। स्पष्ट है कि उत्तर 99 होगा। यह परिमित विधियों से विन्यासित अनंत संख्या में ली गई वस्तुओं से संबंधित एक उदाहरण है।

उदाहरण घ : सभी धन पूर्णांकों का समुच्चय लीजिए। इनमें कितनी संख्याएं अभाज्य (prime) हैं?

इसका उत्तर अनंत होगा, क्योंकि अभाज्य संख्याएं अनंत होती हैं।

उदाहरण ङ : मान लीजिए एक मेल आर्डर कंपनी 6 स्टाइल की स्लैक बेचती है। प्रत्येक स्टाइल 8 लंबाइयों, 6 कमर साइजों और 4 रंगों में उपलब्ध है। कंपनी को भिन्न-भिन्न कितने प्रकार की स्लैकों का स्टॉक रखना होगा?

उत्तर है $6 \times 8 \times 6 \times 4 = 1152$ प्रकार की स्लैक

यहाँ हमारी अभिरुचि परिमित संख्या में ली गई वस्तुओं को परिमित विधियों से विन्यासित करने में है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- संचय-विन्यासिकी की विषय-वस्तु को समझ सकेंगे,
- क्रमगुणितों का प्रयोग कर सकेंगे,
- क्रमचयों और संचयों को समझ सकेंगे,
- क्रमचयों का परिकलन कर सकेंगे,
- संचयों का परिकलन कर सकेंगे,
- द्विपदी श्रेणी का प्रसार कर सकेंगे,
- बहुपद श्रेणी का प्रसार कर सकेंगे,
- संचय विन्यास प्रायिकताओं का परिकलन कर सकेंगे।

4.2 गुणन नियम और योग नियम

अब हम **गुणन-नियम (multiplication principle)** और **योग-नियम (addition principle)** नामक दो मूलभूत गणन-नियमों पर चर्चा करेंगे। गुणन-नियम क्रमचयों (permutations) से भी अधिक व्यापक नियम है। इस नियम की व्याख्या हम विभिन्न विधियों से कर सकते हैं। मानलीजिए एक कार्य / प्रक्रिया में उपकार्यों या चरणों का एक अनुक्रम है, जैसे उपकार्य 1 .... उपकार्य 2 ... उपकार्य k. आप यह भी मान लीजिए कि उपकार्य 1 को n_1 विधियों से किया जा सकता है, उपकार्य 1 कर लेने के बाद उपकार्य 2 को n_2 विधियों से किया जा सकता है और उपकार्य 1 और उपकार्य 2 को कर लेने के बाद उपकार्य 3 को n_3 विधियों से किया जा सकता है, आदि आदि। तब पूरे कार्य को $n_1 . n_2 ..... n_k$ विधियों से किया जा सकता है। आइए हम इन्हें भरने के लिए बक्सों और वस्तुओं वाला एक मॉडल लें। मानलीजिए बक्सों की संख्या m है। और, मानलीजिए पहले बक्स को k(1) विधियों से भरा जा सकता है यह भी मानलीजिए कि पहले बक्स को भरने की प्रत्येक विधि के साथ दूसरे बक्स को k(2) विधियों से भरा जा सकता है। इस तरह, तब दो बक्सों को $k(1) \cdot k(2)$ विधियों से भरा जा सकता है। व्यापक रूप में, प्रथम $(r-1)$ बक्सों को भरने की प्रत्येक विधि के साथ rवें बक्स को k(r) विधियों से भरा जा सकता

है जहाँ $r = 2, 3, \ldots, m$, तब सभी बक्सों को कुल $k(1) \cdot k(2) \ldots k(m)$ विधियों से भरा जा सकता है।

इस नियम से ऐसी अनेक स्थितियों को सुलझाया जा सकता है। जोकि साधारण क्रमचय से नहीं किया जा सकता। यहां यह सरलता से देखा जा सकता है कि इस नियम की सहायता से ही $p(n, r)$ के सूत्र को व्युत्पन्न किया गया है।

ठीक गुणन-नियम की भांति योग-नियम नामक एक अन्य मूलभूत नियम होता है। मानलीजिए एक कार्य में असंयुक्त (परस्पर अपवर्जी) उपकार्यों, मानलीजिए उपकार्य 1, उपकार्य 2, ..., उपकार्य k के संग्रह से लिए गए ठीक एक कार्य को पूरा करना होता है (अर्थात् कार्य को तब पूरा किया जाता है जबकि या तो उपकार्य 1 पूरा किया गया हो, या उपकार्य 2, ..., उपकार्य k पूरा किया गया हो और यह भी मानलीजिए कि उपकार्य i को n_i विधियों से, जहाँ $i = 1, 2, \ldots, k$, से पूरा किया जा सकता है, अतः कार्य को योगफल $n_1 + n_2 + \cdots + n_k$ विधियों से पूरा किया जा सकता है। मानलीजिए हम कुछ संचय विन्यासों का गणन करना चाहते हैं। यदि इन विन्यासों के समूहन (grouping) के k वर्ग $C_1, C_2, \ldots, C_k$ हों जिससे कि इस अर्थ में ये वर्ग परस्पर अपवर्जी (mutually exclusive) और निश्शेष (exhaustive) होते हैं कि प्रत्येक विन्यास केवल एक वर्ग के अंतर्गत आता हो, तो विन्यासों की कुल संख्या इन वर्गों से संबंधित विन्यासों की संख्या के योगफल के बराबर होती है।

उदाहरण 1: तीन राजनैतिक दल P_1, P_2 और P_3 हैं। एक विधान सभा में दल P_1 के 4 सदस्य हैं, P_2 के 5 सदस्य हैं और P_3 के 6 सदस्य हैं। मानलीजिए हम एक सरकारी संगठन के अध्यक्ष और उपाध्यक्ष पद दोनों के लिए एक ही दल से दो व्यक्तियों का चयन करना चाहते हैं। इसे कितनी विधियों से किया जा सकता है?

हल : गुणन-नियम लागू करके P_1 से इसे हम $4.3 = 12$ विधियों से कर सकते हैं। P_2 से इसे हम $5.4 = 20$ विधियों से कर सकते हैं और P_3 से इसे हम $6.5 = 30$ विधियों से कर सकते हैं। और, योग-नियम को लागू करके इसे हम $12 + 20 + 30 = 62$ विधियों से कर सकते हैं।

यद्यपि देखने में गुणन-नियम के साथ योग-नियम काफी सरल मालूम पड़ता है, परन्तु इनके साथ अनेक संचय विन्यास गणन किया जा सकता है।

* * *

4.3 क्रमचय

क्रमचय (permutations), वस्तुओं का एक क्रमित विन्यास (ordered arrangement) होता है। अधिक स्पष्ट रूप में, यदि वस्तुओं की संख्या दी गई हो, तो एक बार में k वस्तुओं को लेने पर (जहां k, वस्तुओं की संख्या से अधिक न हो) इनके क्रमचय में एक रेखा में इनमें से k वस्तुओं को विन्यासित करना होता है, और किस क्रम में इन्हें विन्यासित किया गया है उसका वहां काफी महत्व होता है (रैखिक विन्यास)।

उदाहरण 2: a, b, c, d के क्रमचय, जबकि एक बार में दो अक्षर लिए गए हों, ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc हैं। इनकी संख्या 12 है। ध्यान दीजिए कि ab और ba अलग-अलग माने गए हैं, यद्यपि इनमें समान वस्तुएँ ही हैं।

4.3.1 संकेत

1 से प्रारंभ होने वाले क्रमागत (consecutive) पूर्णांकों का गुणनफल लिखने के लिए हमें एक संकेतन-पद्धति (notation) की आवश्यकता होती है। गुणनफलों $1, 1 \times 2, 1 \times 2 \times 3, 1 \times 2 \times 3 \times 4$ आदि को संहति रहने में क्रमशः 1!, 2!, 3!, 4!, आदि से लिखा जा सकता है। इन्हें 'एक क्रमगुणित' (factorial), 'दो क्रमगुणित', 'तीन क्रमगुणित', 'चार क्रमगुणित' आदि पढ़ा जाता

व्यापक रूप में हम $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n$ को $n!$ के रूप में लिखते हैं और इसे प्रत्येक धन (पूर्णांक) n के लिए n क्रमगुणित पढ़ा जाता है।

E1) $15!/12!$ का मान ज्ञात कीजिए।

E2) $(3+4)!$ और $3!+4!$ अभिकलित कीजिए। क्या ये दोनों बराबर हैं?

E3) यदि m और n धन पूर्णांक हों, तो दिखाइए कि $(m+n)! \geq m!+n!$

E4) $\frac{n!}{(n-r)!}$ अभिकलित कीजिए जहां $n = 20$ और $r = 17$.

E5) यदि एक नाच में n जोड़े हों, तो केवल एक नाच में कितनी विधियों से पुरुषों और महिलाओं की जोड़ी बनायी जा सकती है?

मानलीजिए n और r दो धन पूर्णांक हैं जहां $r \leq n$, तब अलग-अलग n वस्तुओं के क्रमचयों की संख्या को, जबकि एक बार में k वस्तुएं ली गई हों, $P(n, r)$, ${}^nP_r$, P^n_r, ${}_nP_r$ को किसी से भी प्रकट किया जा सकता है। यहां हम संकेत $P(n, r)$ का प्रयोग करेंगे।

$P(n, r)$ का मान क्या होता है? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए एक पंक्ति में रखे गए r बक्स लीजिए। n से कोई एक वस्तु लीजिए और उसे पहले बक्स में रख दीजिए। इस कार्य को n विधियों से किया जा सकता है। तब शेष $(n-1)$ वस्तुओं में से कोई एक वस्तु लीजिए और इस दूसरे बक्स में रख दीजिए। पहले दो बक्सों को $n(n-1)$ विधियों से भरा जा सकता है। इस प्रक्रिया को हम तब तक करते जाते हैं जब तक कि rवां बक्स भर नहीं जाता। इस कार्य को $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$ विधियों से पूरा किया जाता है। इस तरह हमें यह प्राप्त होता है।

$P(n, r) = n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-r+1)$

यदि हम $P(n, r)$ के व्यंजक को देखें तो यह स्पष्ट हो जाता है कि यह $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1$ में से अंतिम $(n-r)$ पदों $(n-r)(n-r-1)\ldots\ldots 3.2.1$ को हटा देने पर प्राप्त होता है। इस तरह, यहां हमने यह सिद्ध किया है कि

$P(n, r) = n!/(n-r)!$

अब हम इस कथन को एक प्रमेय के रूप में प्रस्तुत कर रहे हैं।

प्रमेय 1: एक n-समुच्चय से, r-क्रमचयों की संख्या, जहां $0 \leq r \leq n$, यह होती है।

$$P(n, r) = n(n-1)(n-1)\ldots\ldots(n-r+1).$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

विशेष रूप से एक n-समुच्चय, जहां $n > 0$, के क्रमचयों की संख्या यह होती है

$P(n, n) = n!$

उदाहरण 3: $P(6, 4) = 6.5.4.3 = 6!/(6-4)!$

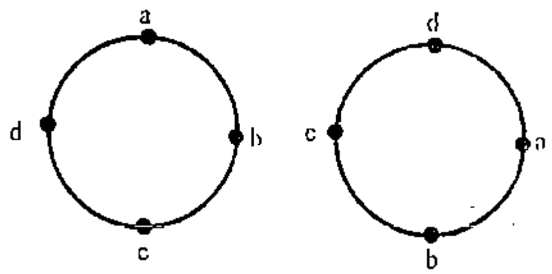
यहां हमने केवल धन पूर्णांकों के क्रमगुणितों को परिभाषित किया है। अतः इस चरण पर 0! या **शून्य-क्रमगुणित** का कोई अर्थ नहीं है। परन्तु, अब आप $P(n, n)$ लीजिए। स्पष्ट है कि इसका मान $n!$ है। इसके विपरीत, पहले व्युत्पन्न किए गए सूत्र के अनुसार $P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!}$. अतः यदि 0! को परिभाषित करना है तो इसका मान केवल 1 ही हो सकता है। अतः इस चरण पर परिभाषा के अनुसार $0! = 1$ लेंगे। इस परिभाषा का प्रयोग हम सर्वत्र करेंगे अतः कोई तर्कसंगत कठिनाई उत्पन्न नहीं होगी। विशेष रूप से, $P(n, 0) = 1$ और $P(0, 0) = 1$, यद्यपि इन सर्वसमिकाओं के

समर्थन में गणितीय अनिवार्यता के अतिरिक्त अन्य कोई गंभीर व्याख्या नहीं दी जा सकती है।

विभेद्य (distinguishable) और अविभेद्य (indistinguishable) वस्तुएँ: क्रमचय की संकल्पना को परिभाषित करते समय हमने यह मानलिया था कि वस्तुएँ विभेद्य हैं। इससे क्या अर्थ निकलता है और ऐसा करने की आवश्यकता क्यों हैं, ? यदि a, b, c, d के क्रमचयों वाले उदाहरण में जिसमें एक बार में दो अक्षर लेने हैं, अर्थात् ab, ba, ac, ca, ad, da, bc, cb, bd, db, cd, dc, यह मानलिया जाए कि d = c = b, जिसका अर्थ केवल यही है कि हमने तीन वस्तुओं b, c, d के बीच कोई भेद नहीं रखा है। तब 12 क्रमचय बदलकर ab, ba, ab, ba, ab, ba, bb, bb, bb, bb, bb, bb हो जाएंगे। इनमें bb के साथ-साथ क्रमचय ab और ba भी बार-बार आते हैं। क्या इन्हें हम क्रमचय मान सकते हैं? बाद में चलकर हम उन क्रमचयों को भी लेंगें जिनमें इनकी पुनरावृत्ति को स्वीकार किया जा सकता है: परन्तु यहाँ पर हम केवल यही मानकर चलेंगें कि सभी वस्तुएं विभेद्य हैं और किसी भी क्रमचय में कोई पुनरावृत्त वस्तु नहीं हैं।

4.3.2 वृत्तीय क्रमचय (Circular permutations)

प्रायः वस्तुओं के क्रमचय को वस्तुओं का एक रैखिक विन्यास (linear arrangement) माना जाता है। परन्तु, एक ऐसा परिवर्त (variant) होता हैं जिसमें वस्तुएँ एक वृत्त की परिधि में विन्यासित होती हैं। इसमें हम यह पाते हैं कि वस्तुएँ दक्षिणावर्त विन्यासित होती हैं। परिधि पर कोई विशेष मूल बिन्दु नहीं होता, अतः क्रमचय abcd, bcda, cdab, dabc ठीक एकसमान दिखाई पड़ेगें। (देखिए चित्र 1) यदि हम n वस्तुओं के सभी n! क्रमचयों को लें, तो रैखिक क्रमचय में प्रथम स्थिति पर स्थित वस्तु को अंतिम स्थिति पर बार-बार स्थानांतरित करने के प्रक्रम से अर्थात् विन्यासों को उस स्थिति में समान माना गया हो, जबकि घूर्णन करके एक को दूसरे से प्राप्त किया जा सकता हो (n – 1) और प्राप्त क्रमचयों से प्रत्येक क्रमचय अभेद्य होगा। इस तरह, वृत्तीय क्रमचयों में $n!/n = (n-1)!$ प्राप्त होगा। इस तरह, हमने यह दर्शाया है कि n वस्तुओं के वृत्तीय क्रमचयों की संख्या, जबकि एक बार में सभी वस्तुओं को लिया गया हो, $(n-1)!$ होता है।



चित्र 1:

उदाहरण 4: एक गोल मेज के चारों ओर आठ व्यक्तियों को कितनी विधियों से बैठाया जा सकता है?

हलः स्पष्ट है कि यहाँ हमें 8 वस्तुओं के वृत्तीय क्रमचयों की आवश्यकता है। अतः उत्तर 7! = 5040 होगा।

* * *

उदाहरण 5: पिछलें उदाहरण में यदि 8 व्यक्तियों में कुछ जोड़े (i) अगल-बगल न बैठें (ii) अगल-बगल बैठें, तो उत्तर क्या होगा?

हलः 5040 में से हमें उन स्थितियों की संख्या को घटाना होगा जिनमें व्यक्तियों का जोड़ा एक साथ बैठता है। यदि हम जोड़े को एक इकाई मान लें तो हमें 6! वृत्तीय क्रमचय अर्थात् (7–1)! प्राप्त होगा। परन्तु एक इकाई के रूप में होने पर भी इन्हें दो विधियों से विन्यासित किया जा सकता है। अतः भाग (i) का अभीष्ट उत्तर $7! - 6! - 6! = 3600$ होगा।

* * *

उदाहरण 6: मानलीजिए 5 विवाहित जोड़े हैं और इन्हें (10 लोगों को) एक गोल मेज के चारों ओर इस तरह बैठाना है कि कोई भी दो पुरूष या कोई भी दो महिलाएं एक साथ न बैठें (अर्थात् एक पुरूष और एक महिला अगल-बगल बैठें। वृत्तीय विन्यासों की संख्या ज्ञात कीजिए।

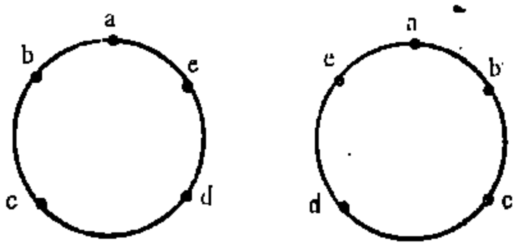
हलः एक गोल मेज़ के चारों ओर 5 महिलाओं को $(5-1) = 4!$ विधियों से बैठाया जा सकता है। दो महिलाओं के बीच एक पुरूष को बैठाया जा सकता है। ऐसी पांच स्थितियां हैं, अतः 5! विधियों से बैठाया जा सकता है। गुणन-नियम के अनुसार, बैठाने की कुल विधियों की संख्या $4! \times 5! = 2800$ होगी।

* * *

उदाहरण 7: यदि एक गोल मेज के चारों ओर सात लोगों को बैठाना हो, तब उस स्थिति में कितने वृत्तीय विन्यास संभव होगें जबकि किन्हीं भी दो विन्यासों में समान पड़ोसी न हों।

हलः निम्नलिखित दो अलग-अलग विन्यासों को देखने से यह पता चलता है कि प्रत्येक में पड़ोसी समान हैं। अतः वृत्तीय विन्यासों की कुल संख्या

$$= (7-1)! \times \frac{1}{2} = 360$$



चित्र 2:

* * *

उदाहरण 8: यदि 7 पुरूष और 5 महिलाएं हों तो उस स्थिति में कितने वृत्तीय विन्यास संभव हैं जबकि महिलाएं एक-दूसरे के अगल-बगल न बैठी हों।

हलः पहले 7 पुरूषों को बैठाया जा सकता है। यह कार्य 6! विधियों से किया जा सकता है। दो पुरूषों के बीच महिलाओं को बैठाया जा सकता है। ऐसे सात स्थान हैं जहां इन्हें बैठाया जा सकता है। इन महिलाओं को $P(7, 5)$ विधियों से बैठाया जा सकता है। अतः उत्तर $6! \times P(7, 5)$ होगा।

* * *

उदाहरण 9: 10 और 99 के बीच अलग-अलग अंकों वाली कितनी संख्याएं होंगी?

हलः कोई भी व्यक्ति इसका उत्तर $P(10, 2)$ देना चाहेगा। परन्तु इनमें उन स्थितियों को भी सम्मिलित करना होगा जिनमें 0 प्रथम स्थिति पर होगा। सही उत्तर $9.9=81$ होगा। क्योंकि, क्योंकि पहली स्थिति को (0 के अतिरिक्त अन्य किसी अंक से) 9 विधियों से भरा जा सकता है, इसलिए पहली स्थिति में भर जाने के बाद दूसरी स्थिति का (प्रथम स्थिति वाले अंक को छोड़कर 9 अंकों में से किसी भी अंक से (जिसमें 0 भी हो सकता है) भरा जा सकता है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E6 ऐसे कितने लाइसेन्स प्लेट बनाए जा सकते हैं, जबकि प्रत्येक प्लेट में 3 अक्षर हों और कोई भी अक्षर दो बार न आया हो? यदि अक्षर दोबारा आए हों, तो उत्तर क्या होगा?

E7) 100 और 999 के बीच अलग-अलग सम अंकों (even digits) वाले कितने पूर्णांक होंगे?

E8) 100 और 999 के बीच अलग-अलग अंकों वाली सभी संख्याएँ लीजिए। इनमें से कितनी संख्याएँ विषम संख्याएँ होंगी?

E9) सत्यापित कीजिए कि

$P(15, 2) = P(7, 3)$ और $P(5, 5) = P(6, 3)$.

E10) 650000 से बड़े ऐसे पांच अंकों वाले पूर्णांक कितने होंगे जिनमें निम्नलिखित दो गुणधर्म हों,

(i) संख्या के अंक अलग-अलग हैं (ii) संख्या में अंक 0 और 1 न हों?

4.3.3 वस्तुओं का क्रमचय जिनका भिन्न-भिन्न होना आवश्यक नहीं है

हमने यह दिखाया है कि अलग-अलग n वस्तुओं से r वस्तुओं का चयन करने और उन्हें एक रैखिक क्रम में रखने का काम $P(n, r)$ विधियों से किया जा सकता है। इस भाग में भी हम उसी समस्या पर विचार करेंगे यहाँ प्रतिबंध केवल यही होगा कि इस संग्रह की कुछ वस्तुएँ अविभेद्य (indistinguishable) हो सकती हैं अर्थात् संग्रहों a, b, π, b, b, π, a जैसी पुनरावृत वस्तुओं वाले वस्तु संग्रह के विन्यासों पर चर्चा करेंगे। मानलीजिए n वस्तुएँ हैं जिनमें m_1 वस्तुएँ संवर्ग 1 की हैं, m_2 वस्तुएँ संवर्ग 2 की हैं, आदि आदि और m_k वस्तुएँ संवर्ग k की हैं और संवर्ग परस्पर अपवर्जी और निश्शेष (exhaustive) हैं जिससे कि $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$, तब इन वस्तुओं के अलग अलग क्रमचयों की संख्या $\frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}$. ऐसा होने का कारण यह है कि उस स्थिति में किसी क्रमचय पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता जबकि संवर्ग 1 की वस्तुओं की स्वयं में $m_1!$ विधियों से क्रमचयित किया गया हो, संवर्ग 2 की वस्तुओं को स्वयं में $m_2!$ विधियों से क्रमचयित किया गया हो, ..., संवर्ग k की वस्तुओं को स्वयं में $m_k!$ विधियों से क्रमचयित किया गया हो। अधिक परिशुद्ध रूप में इस संबंध में हमें निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त होता है:

प्रमेय 2: यदि अलग-अलग k प्रकारों में वर्गीकृत n वस्तुएँ हों, जिनमें पहले प्रकार की m_1 अभिन्न वस्तुएँ हैं, दूसरे प्रकार की m_2 अभिन्न वस्तुएँ हैं, ... k वें प्रकार की m_k अभिन्न वस्तुएँ हैं, जहां $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n$ तब इन n वस्तुओं के विन्यासों की संख्या $\frac{n!}{m_1!\,m_2!\ldots m_k!}$ होती है जिसे $P(n; m_1, m_2, \cdots, m_k)$ से प्रकट किया जाता है।

उपपत्तिः मान लीजिए इस प्रकार के क्रमचयों की संख्या x है। यदि संवर्ग i की वस्तुओं को अलग-अलग माना जाए, तब इन्हें स्वयं में $m_i!$ विधियों से विन्यासित किया जा सकता है जहां $i = 1, 2, \ldots, k$. गुणन-नियम लागू करने पर अलग-अलग n वस्तुओं के क्रमचय की कुल संख्या, जबकि एक बार में सभी वस्तुओं को लिया गया हो $x\, m_1!\, m_2! \cdots m_k!$ होती है। परन्तु, परिशुद्ध रूप में यह संख्या $n!$ है जबकि अलग-अलग n वस्तुएँ हों अतः $x\, m_1!\, m_2! \cdots m_k! = n!$ अर्थात् $x = n!/m_1!\, m_2! \ldots m_k!$

उदाहरण 9: शब्द CHARIVARI के सभी अक्षरों से 9-अक्षर वाले कितने शब्द (जिनका सार्थक होना आवश्यक नहीं है) बनाए जा सकते हैं?

हलः शब्द CHARIVARI में अक्षरों C,H,V का प्रयोग केवल एक बार हुआ है और अक्षर A, R, I में से प्रत्येक अक्षर का प्रयोग दो बार हुआ है। अतः हम इनसे $9!/1!\,1!\,1!\,2!\,2!\,2! = 45360$ शब्द बना सकते हैं।

* * *

E11) शब्दों (क) ASSESSES (ख) PATTIVEERANPATTI के अक्षरों के कितने क्रमचय में होंगे, जबकि एक बार में शब्दों के सभी अक्षर को लिया गया हो ?

4.4 संचय

क्रमचय का संबंध वस्तुओं के क्रमित विन्यास से होता है। परन्तु संचय (combination) का संबंध विभेद्य वस्तुओं के भंडार से नियत संख्या में वस्तुओं के चयन से होता है। मानलीजिए n अलग-अलग वस्तुऐं हैं और इनसे हम r वस्तुओं का, जहाँ $r \le n$ चयन करना चाहते हैं और इसमें चयन क्रम पर ध्यान नहीं देना होता। इसे उस स्थिति में n वस्तुओं का संचय कहा जाता है जबकि एक बार में r वस्तुऐं ली गई हैं। इसे करने की विधियों की संख्या को $nC_r, {}^nC_r, C_r^n, \binom{n}{r}$ और C(n, r) में से किसी से भी निरूपित किया जाता है। यहाँ हम टाइप करने की सुविधा को देखते हुए और साथ ही क्रमचय के संकेत P(n, r) की अनुरूपता को देखते हुए संकेत C (n, r) का प्रयोग करेंगे। यहाँ इस बात को ध्यान में रखकर कि इसका संबंध केवल 'चयन' से है और क्रम से नहीं है, हम C(n, r) को 'n चयन r' के रूप में पढ़ सकते हैं। क्रमचयों और संचयों के संबंध में एक सबसे बड़ी कठिनाई यह आती है कि किस विशेष स्थिति में इनमें से किसका प्रयोग किया जाए। इसके लिए तर्क संगत रूप में विचार करना होता है। केवल अभ्यास से ही इनके अंतर को समझा जा सकता है। समुच्चय सिद्धांत के अनुसार C(n, r) n अवयवों वाले समुच्चय से लिए गए साइज r वाले उपसमुच्चयों की संख्या है। इस दृष्टि से यह स्पष्ट है कि प्रत्येक धन पूर्णांक n के लिए C(n, n), 1 होता है।

4.4.1 C (n, r) का सूत्र

आइए हम P(n, r) और C(n, r) के बीच एक संबंध स्थापित करें। यदि n अलग-अलग वस्तुऐं हों, तो C(n, r), क्रम की ओर ध्यान दिए बिना इससे r चयन करने की विधियों की संख्या का गणन करता है। इन चयनों में से कोई भी चयन r वस्तुओं का एक समुच्चय होता है। इस प्रकार के समुच्चय को r! विधियों से क्रमित किया जा सकता है। इस तरह, प्रत्येक संचय के संगत r! क्रमचय होते हैं। अतः गुणन-नियम से हमें यह प्राप्त होता है

$$P(n, r) = r!\, C(n, r) \quad \text{या} \quad C(n, r) = P(n, r)/r! = \frac{P(n, r)}{P(r, r)} = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

इस तरह हमने इसे सिद्ध कर दिया है।

प्रमेय 3: एक n-समुच्चय से r-संचय की संख्या, जहाँ $0 \le r \le n$, यह होती है

$$C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!\, r!}$$

प्रमेय 4: $C(n, r) = C(n, n-r)$

उपपत्तिः n वस्तुओं से किए गए r वस्तुओं के प्रत्येक चयन के संगत अद्वितीय रूप से n वस्तुओं से किए गए n − r वस्तुओं का एक चयन होता है जिसमें बची हुई वस्तुऐं होती हैं। इस एकैकी संगति (one-to-one correspondence) से यह पता चलता है कि इनकी संख्याऐं समान होंगी। इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाता है। इस प्रमेय की एक अन्य उपपत्ति में यह देखना होता है कि यदि r के स्थान पर n − r किया जाए, तब भी C(n, r) के सूत्र में कोई अंतर नहीं आता।

यद्यपि हमें क्रमगुणितों के रूप में C(n, r) का सूत्र प्राप्त है, फिर भी व्यवहार में हम निम्नलिखित स्पष्ट सर्वसमिका का प्रयोग करते हैं।

$$C(n, r) = \frac{n(n-1)\cdots r \text{ गुणनखंड}}{r(r-1)\cdots r \text{ गुणनखंड}}$$

ऊपर के व्यंजक में हर और अंश दोनों में ही r गुणनखंड हैं। अतः यदि r, (n − r) से कम हो, तो हम इसी रूप में सूत्र का प्रयोग करते हैं। इसके विपरीत, यदि r, (n − r) से बड़ा हो, तो हम अंश और हर दोनों में उपस्थित n − r गुणन खंडों वाले व्यंजक का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 10: $C(10,3) = \frac{10.9.8}{3.2.1}$, परन्तु $C(10,8) = \frac{10.9}{2.1}$

* * *

संख्याओं $C(n, r)$ को द्विपद गुणांक (binomial coefficient) भी कहा जाता है। क्योंकि ये x के आरोही घातों (ascending powers) में $(1+x)^n$ के प्रसार में x^r के गुणांकों के रूप में होते हैं। इन प्रसारों पर चर्चा हम बाद में करेंगे यहाँ हम इससे संबंधित कुछ संख्यात्मक उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 11: $C(6, 2)$, $C(7, 4)$ और $C(9, 3)$ के मान ज्ञात कीजिए।

हल: $C(6,2) = \frac{6.5}{2.1} = 15$, $C(7,4) = \frac{7.6.5}{3.2.1} = 35$,

यहाँ हमने इस तथ्य का प्रयोग किया है कि $C(7, 4) = C(7, 3)$

$C(9.3) = \frac{9.8.7}{3.2.1} = 84$.

* * *

इस चरण पर, सरलता से प्राप्त किए जाने वाले कुछ मान यहाँ दिए जा रहे हैं।

$C(n, n) = C(n, 0) = P(n, 0) = 1$,

$C(n, 1) = C(n, n-1) = P(n, 1) = n$.

4.4.2 पुनरावृत्तीय संचय (Combinations with repitition)

आइए हम इस संबंध में निम्नलिखित उदाहरण लें। मानलीजिए पांच मित्र हैं जो मिठाई की दुकान पर रुकते हैं और उनमें से प्रत्येक व्यक्ति निम्नलिखित खाने की वस्तुओं में से एक वस्तु लेता है: समोसा, टिक्की और वड़ा। अलग-अलग कितनी खरीददारी संभव है? मानलीजिए s, t और v क्रमशः समोसा, टिक्की और वड़ा को निरूपित करते हैं। नीचे की सारणी में हमने पहले स्तंभ में कुछ संभव खरीदारी की सूची दी है और दूसरे स्तंभ में हमने प्रत्येक खरीददारी का एक अन्य निरूपण दर्शाया है।

1.	s	s	t	t	t	x	x	I	x	x	x	I
2.	s	s	s	s	s	x	x	x	x	x	I	I
3.	v	v	v	t	t	I	x	x	I	x	x	x
4.	v	v	t	t	s	x	I	x	x	I	x	x

यहाँ पहले दंड की बायीं ओर का प्रत्येक x एक s को निरूपित करता है, पहले दंड और दूसरे दंड के बीच का प्रत्येक x एक t को निरूपित करता है, दूसरे दंड की दायीं ओर का प्रत्येक x एक v को निरूपित करता हैं। किसी भी क्रम में पांच x और दो I होंगे। विलोमतः पांच x और दो I वाला अनुक्रम एक क्रम को निरूपित करता है। इससे वस्तुओं के दो संग्रहों के बीच एक संगति स्थापित हो जाती है, जहाँ हम यह जानते हैं कि एक संग्रह में संख्याओं की गिनती किस प्रकार की जाती है। परन्तु पांच x और दो I के अनुक्रम की संख्या, I के अनुक्रम में दो स्थितियों की संख्या होती है। अतः उत्तर $C(7,2)$ या $C(7,5) = \frac{7!}{5!2!}$ होगा।

यदि पुनरावृत्ति की अनुमति हो, तो n अलग-अलग वस्तुओं के संबंध में इन वस्तुओं से साइज r वाले विन्यास को n^r विधियों से प्राप्त किया जा सकता है, जहाँ $r \geq 0$ एक पूर्णांक है। आइए अब हम संचय की एक तुलनीय समस्या पर चर्चा करें। जब हम पुनरावृत्ति के साथ n अलग-अलग वस्तुओं से r वस्तुओं का चयन करना चाहते हैं, तब हम एक प्रकार के (मानलीजिए x) r के सभी विन्यासों पर विचार कर रहे होते हैं और दूसरे प्रकार के (मानलीजिए I) के $(n-1)$ जैसे

$(n-1)$। की आवश्यकता n प्रकारों को अलग करने के लिए होती है और उनकी संख्या $\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = C(n+r-1, r)$ होती है जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

प्रमेय 5: मानलीजिए n और r प्राकृतिक संख्याएँ हैं। तब समीकरण $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$ के प्राकृतिक संख्याओं में हलों की संख्या या तुल्यतः पुनरावृत्ति की अनुमति के साथ n वस्तुओं के संग्रह से r वस्तुओं के चयन करने की विधियों की संख्या $C(n+r-1, r)$ होती है।

उपपत्ति : लंबाई $n+r-1$ वाली सभी रज्जुओं (strips) का समुच्चय लीजिए जिसमें ठीक r तारे और $n-1$ दंड हों। इस समुच्चय की गणन-संख्या (cardinality) $C(n+r-1, r)$ है। अब हम यह दिखाएंगे कि किस प्रकार इस प्रकार की रज्जुएँ समीकरण $x_1 + \cdots + x_n = r$ के हल के संगत होती हैं। तब रज्जु के $n-1$ दंड रज्जु को तारों की n उपरज्जुओं में विभाजित करते हैं। इन n उपरज्जुओं में तारों की संख्या x_n के माध्यम से x_1 के मान होती हैं। क्योंकि कुल तारे r हैं, इसलिए योगफल r होगा। रज्जुओं और हलों के बीच एकैकी संगति है और इस तरह प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

उदाहरण 12: एक लड़का कुछ पालतू पक्षी खरीदना चाहता है। पक्षी की दुकान में तोते, बुलबुल और मैना बिकती हैं। यदि लड़का छः पक्षियों को घर ले जाना चाहता है, तो भिन्न-भिन्न कितने चयन संभव हैं।

हलः यहाँ $r = 6$, $n = 3$ अतः पालतू पक्षियों के संभव चयन की संख्या

$$= C(6+3-1, 6) = C(8, 6) = \frac{8 \times 7}{2} = 28$$

वस्तुतः यहाँ हम छः x और दो दंडों वाले 8 प्रतीकों के सभी विन्यासों का गणन कर रहे होते हैं।

* * *

उदाहरण 13: समीकरण

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$, जहाँ $x_i \geq 0$ और सभी $1 \leq i \leq 4$ के सभी पूर्णांक हल ज्ञात कीजिए।

हलः इस समीकरण का हल पुनरावृत्ति के साथ साइज 4 के संग्रह से साइज़ 7 के चयन के संगत है। अतः $C(4+7-1, 7) = 120$ हल होंगे। $(n = 4, r = 7)$

* * *

हम इस भाग को निम्नलिखित टिप्पणी देकर समाप्त कर रहे हैं। आइए हम निम्नलिखित की तुल्यता को पहचानेः

(क) समीकरण $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = r$, $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, के पूर्णांक हलों की संख्या।

(ख) पुनरावृत्ति के साथ साइज n के संग्रह से साइज r के चयनों की संख्या।

(ग) r अभिन्न वस्तुओं की विधियों की संख्या को n अलग-अलग पात्रों में वितरित किया जा सकता है। (देखिए इकाई 5)।

4.5 द्विपद प्रसार

दो अलग-अलग प्रतीकों के योगफल, जैसे $a+b$, $p+q$, $x+y$ आदि, को द्विपद (binomial) कहा जाता है और द्विपद प्रसार (binomial expansion) यह मानकर कि प्रतीक वास्तविक संख्याओं (real numbers) या सम्मिश्र संख्याओं (complex numbers) को निरूपित करते हैं, इस प्रकार के द्विपद का धन पूर्णांक घात का प्रसार होता है। प्रारंभिक गुणन से निम्नलिखित प्रसार तुरंत प्राप्त हो जाते हैं

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$

$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10\,a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

उदाहरण 14: आइए हम अंतिम सर्वसमिका लें। दक्षिण पक्ष में छः पद $a^5, 5a^4 b, 10a^3 b^2, 10a^2 b^3, 5ab^4$ और b^5 हैं। यहाँ हमारा उद्देश्य गुणांकों 1, 5, 10, 10, 5, 1 की सार्थकता की व्याख्या करना है।

इस संबंध में आइए हम निम्नलिखित लें

$(a+b)^5 = (a+b)(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$

मान लीजिए हम इस प्रसार में $a^3 b^2$ का गुणांक प्राप्त करना चाहते हैं। स्पष्ट है कि पांच कोष्ठकों के प्रत्येक कोष्ठक के द्विपद से एक पद का चयन करके प्रत्येक पद को प्राप्त किया जा सकता है। a^3b^2 प्राप्त करने के लिए हमें 3 कोष्ठकों से a का चयन करना होता है और शेष 2 कोष्ठकों से b का चयन करना होता है। स्पष्ट है कि a के लिए कोष्ठकों का चयन C(5, 3) अर्थात् 10 विधियों से किया जा सकता है।

* * *

ऊपर दिए गए तर्क को $(a+b)^n$ के प्रसार में $a^r b^{n-r}$ का गुणांक प्राप्त करने में लागू किया जा सकता है। $(a+b)^n$ को निरूपित करने वाले n कोष्ठकों से a के लिए r का चयन करना होता है और b के लिए शेष (n − r) का चयन करना होता है। इस कार्य को C (n, r) विधियों से किया जा सकता है। इस तरह, $(a+b)^n$ के प्रसार में $a^r b^{n-r}$ का गुणांक C (n, r) होगा। यह जानते हुए कि C (n, r) = C (n, n − r), $a^r b^{n-r}$ और $a^{n-r} b^r$ के गुणांक समान होंगे। स्पष्ट है कि r केवल मान 0, 1, 2, ... n ले सकता है। हम यह भी जानते हैं कि C (n, 0) = C (n, n) = 1, a^n और b^n के गुणांक हैं। इस तरह, हमने निम्नलिखित द्विपद-प्रसार स्थापित किया है

$$(a+b)^n = a^n + C(n,1)\, a^{n-1} b + C(n,2)\, a^{n-2} b^2 + \cdots + C(n,r)\, a^{n-r} b^r + \cdots + b^n.$$

4.5.1 C (n, r) का पास्कल सूत्र

द्विपद-गुणांकों के एक रोचक गुणधर्म से इनके मानों को सरलता से सारणी रूप में रखा जा सकता है। सूत्र यह है।

प्रमेय 6: सभी धन पूर्णांकों n और सभी r, जहाँ $1 \le r \le n$, के लिए

$C(n+1, r) = C(n, r) + C(n, r-1)$

उपपत्तिः सर्वसमिका का वाम पक्ष (n + 1) अलग-अलग वस्तुओं से r वस्तुओं के चयन करने की विधियों की संख्या को निरूपित करता है। मानलीजिए हम (n + 1) से एक वस्तु का चयन करते हैं और उस पर निशान लगा देते हैं तब स्पष्ट है कि संचयों की संख्या जिनमें निशान लगी वस्तु न हो, C (n, r) होगी क्योंकि तब हमें निशान न लगी वस्तुओं में से r वस्तुओं का चयन करना होता है। संचयों की संख्या जिनमें निशान लगी वस्तु उपस्थिति हो C (n, r − 1) होगी, क्योंकि तब हमें निशान न लगी n वस्तुओं में से (r − 1) वस्तुओं का चयन करना होता है और r वस्तुएँ प्राप्त करने के लिए इसमें निशान लगी वस्तु को जोड़ना होता है। अब पास्कल सूत्र इस तथ्य से प्राप्त होता है कि ऊपर बतायी गई अंतिम दो संख्याओं का योगफल C (n + 1, r) के बराबर होगा।

वैकल्पिक बीजीय उपपत्तिः

$$C(n,r) + C(n, r-1) = \frac{n!}{(n-r)!\, r!} + \frac{n!}{(n-r+1)!\,(r-1)!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n+1-r)!}(n-r+1+r) = C(n+1, r)$$

पास्कल-त्रिभुजः पास्कल के सर्वसमिका-सूत्र से हमें द्विपद-गुणांकों का परिकलन करने की एक पुनरावर्तन (recursive) विधि प्राप्त होती है क्योंकि इससे $C(n, r)$ का मान n के छोटे मानों के साथ द्विपद गुणांकों के रूप में प्राप्त होता है। आधारभूत स्थितियाँ सभी $n \geq 0$ के लिए $C(n, 0) = C(n, n) = 1$ होती है क्योंकि प्रमेय 3 केवल $1 \leq r \leq n$ के लिए लागू होता है। इस पुनरावर्तन विधि से हम पास्कल-त्रिभुज बना सकते हैं, यहाँ आकृति में दिखाए गए द्विपद गुणांक आगे दिए गए हैं।

```
                                  1
                              1       1
                          1       2       1
                      1       3       3       1
                  1       4       6       4       1
              1       5      10      10       5       1
          1       6      15      20      15       6       1
      1       7      21      35      35      21       7       1
  1       8      28      56      70      56      28       8       1
1     9      36      84     126     126      84      36       9       1
1    10     45     120     210     252     210     120      45      10      1
1    11    55    165    330    462    462    330    165    55    11    1
```

पास्कल-त्रिभुज

चित्र 3.

पास्कल-त्रिभुज की n वीं पंक्ति से द्विपद गुणांक $C(n, r)$ प्राप्त होते हैं जबकि r, (बायीं ओर) 0 से (दायीं ओर) n की ओर जाता है। सबसे ऊपर वाली पंक्ति, जिसमें केवल संख्या 1 है, $n = 0$ के लिए है। बायीं और दायीं किनारों में सभी 1 हैं, जो यह बताता है कि सभी n के लिए $C(n, 0) = C(n, n) = 1$ पास्कल-त्रिभुज के अंदर की प्रत्येक प्रविष्टि (entry) इसके ठीक ऊपर बायीं और दायीं ओर की दो प्रविष्टियों का योगफल होती है। हम इस गुणधर्म को पास्कल-गुणधर्म कहते हैं। उदाहरण के लिए पंक्ति 6 का प्रत्येक 15 (ध्यान रहे कि हमने पंक्तियों की गणना 0 से प्रारंभ की है) ठीक इसके ऊपर 10 और 5 का योगफल है।

पास्कल-त्रिभुज के विकर्ण भी काफी रोचक होते हैं: ये विकर्ण, r के अचर मानों के संगत होते हैं। बायें कोर, जिसमें सभी 1 हैं, $r = 0$ के संगत होता है जिससे यह पता चलता है कि $C(n, 0) = 1$ बाएँ कोर के समांतर विकर्ण, जो एक इकाई दायीं ओर होता है (ऊपर से नीचे की ओर) होता है, जिससे यह पता चलता है कि $n \geq 1$ के लिए $C(n, 1) = n$. दायीं ओर के अगले विकर्ण, जो 1, 3, 6, 10, 15, ... हैं से यह पता चलता है कि $n \geq 2$ के लिए $C(n, 2) = n(n-1)/2$. इन संख्याओं को त्रिभुजीय संख्या कहा जाता है और जैसे-जैसे हम विकर्ण पर नीचे की ओर चलते जाते हैं इनके अंतर में 1 की वृद्धि होती जाती है।

4.5.2 द्विपद-गुणांकों से संबंधित कुछ सर्वसमिकाएँ

सर्वसमिका 1: $(a+b)^n$ के द्विपद प्रसार में $a = b = 1$ लेने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$C(n, 0) + C(n, 1) + C(n, 2) + \cdots + C(n, n-1) + C(n, n) = 2^n.$$

इस सर्वसमिका के निर्वचन को समझना आवश्यक है। मानलीजिए n अवयवों वाला एक समुच्चय है। इस समुच्चय से अलग-अलग कितने उप समुच्चय बनाए जा सकते हैं ? ठीक-ठीक r अवयवों वाले उपसमुच्चयों की संख्या $C(n, r)$ है। अतः सर्वसमिका के अनुसार उपसमुच्चयों की कुल संख्या

$\sum_{r=0}^{n} C(n, r) = 2^n$ होगी। इसतरह, हमने निम्नलिखित सिद्ध कर दिया है:

n अवयवों वाले समुच्चय के अलग-अलग उपसमुच्यों की संख्या 2^n होती है।

सर्वसमिका 2: $(a+b)^n$ के प्रसार में $a = 1, b = -1$ के लेने पर हमें यह प्राप्त होता है

$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \cdots + (-1)^n C(n, n) = 0.$

सभी ऋण पदों को दक्षिण पक्ष में लाने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\sum_{r\text{-सम}} C(n, r) = \sum_{r\text{-विषम}} C(n, r) = 2^{n-1}.$$

और इसका निर्वचन यह है कि n अवयवों वाले समुच्चय के सम संख्या में पदों वाले उपसमुच्चयों की संख्या विषम संख्या में पदों वाले उपसमुच्चयों की संख्या के बराबर होती है।

E12) दिखाइए कि $C(n, m)\, C(m, k) = C(n, k)\, C(n-k, m-k)$.

E13) सिद्ध कीजिए कि सभी प्राकृतिक संख्याओं $k \le n$ के लिए

$$C(k, k) + C(k+1, k) + C(k+2, k) + \cdots + C(n, k) = C(n+1, k+1).$$

4.6 बहुपद प्रसार (MULTINOMIAL EXPANSION)

द्विपद के अनुरूप, जो दो प्रतीकों का योगफल होता है, बहुपद (multinomial) होता है, जो अनेक अलग-अलग प्रतीकों (कम से कम तीन, परन्तु परिमित संख्या में) का योगफल होता है। बहुपद प्रसार का संबंध बहुपद के धन पूर्णांकी घात के प्रसार से होता है। विशेष रूप से यहाँ हम $(a_1 + a_2 + \cdots a_m)^n$ के प्रसार पर विचार करेंगे। प्रसार के लिए यहाँ भी हम उसी तकनीक का प्रयोग कर सकते हैं जिसका प्रयोग हमने द्विपद प्रसार में किया है। हम बहुपद के n वें घात को n गुणनखंडों का, जिनमें प्रत्येक बहुपद हो, गुणनफल मान सकते हैं। प्रत्येक गुणनखंड से एक प्रतीक लेकर और उन्हें गुणा करके प्रसार का प्रत्येक पद प्राप्त किया जा सकता है। स्पष्ट है कि कोई भी पद $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_m^{r_m}$ के रूप का होगा जहाँ $r_1, r_2, \ldots, n$ में जुड़ने वाले ऋणेतर पूर्णांक हैं। इस प्रकार के पद को r_1 गुणनखंडों से a_1 का चयन करके, शेष $(n - r_1)$ कोष्ठकों में से r_2 गुणनखंडों से a_2 का चयन करके, और इसी प्रक्रिया को आगे जारी रखकर प्राप्त किया जाता है। इस कार्य को

$$C(n, r_1) \cdot C(n - r_1, r_2) \cdot C(n - r_1 - r_2, r_3) \cdots C(n - r_1 - r_2 - \cdots - r_{m-1}, r_m)$$

विधियों से किया जा सकता है। यह सरलता से देखा जा सकता है कि यह सरल होकर $\dfrac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_m!}$ हो जाता है। इस तरह, हमने यह दिखाया है कि बहुपद प्रसार यह होता है

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n = \sum \frac{n!}{r_1!\, r_2! \ldots r_m!} a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_m^{r_m}.$$

जहाँ संकलन (summation) सभी ऋणेतर पूर्णांकों $r_1, r_2, \ldots r_m$ पर होता है, जो n तक जुड़ जाते हैं।

4.6.1 बहुपद गुणांकों का संकेत

हमने यह देखा है कि $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m)^n$ के प्रसार में $a_1^{r_1} a_2^{r_2} \ldots a_m^{r_m}$ का गुणांक

$\frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_m!}$ होता है। द्विपद गुणांक के अनुरूप इस गुणांक को बहुपद गुणांक (multinomial coefficient) कहा जाता है। हम बहुपद गुणांक को $C(n : r_1, r_2, \ldots, r_m)$ के रूप में प्रकट करते हैं। अनेक लेखक इसे $\binom{n}{r_1, r_2, \ldots, r_m}$ से भी निरूपित करते हैं।

उदाहरण 15: $(x+y+z+t+u)^{10}$ के प्रसार में $x^2 y^2 z^2 t^2 u^2$ का गुणांक क्या होगा ?

हल: स्पष्ट है कि गुणांक $C(10; 2, 2, 2, 2, 2) = 10!/(2!)^5$ होगा।

* * *

उदाहरण 16: $(a+b+c)^7$ के प्रसार में सभी पदों के गुणांकों का योगफल क्या होगा?

हल: अभीष्ट उत्तर यह है

$$\sum \frac{7!}{r!\,s!\,t!}$$

जहाँ संकलन सभी ऋणेतर पूर्णांकों r, s, t, पर किया गया है जो n तक जुड़ जाते हैं। परन्तु, यह $a=b=c=1$ पर निकाला गया

$$\sum \frac{7!}{r!\,s!\,t!} a^r b^s c^t$$

का भी मान है। इस तरह उत्तर $(1+1+1)^7 = 3^7$ होगा।

* * *

E14) $(a+b+c)^4$ का पूरा प्रसार लिखिए।

E15) $\sum \frac{8!}{r!\,s!\,t!} 2^r 3^s 4^t$ का मान क्या है जहाँ संकलन सभी r, s, t ऋणेतर पूर्णांकों पर किया गया है जो जुड़कर 8 हो जाते हैं?

E16) दिखाइए कि

$$C(n, r_1)\, C(n-r_1, r_2)\, C(n-r_1-r_2, r_3) \cdots C(n-r_1-r_2-\cdots-r_{m-1}, r_m)$$

$$= \frac{n!}{r_1!\,r_2!\ldots r_m!}, \quad \text{जबकि } r_1+r_2+\cdots+r_m = n.$$

4.7 संचय विन्यास प्रायिकता के अनुप्रयोग

ऐतिहासिक दृष्टि से देखा जाए, तो गणन-समस्याओं का प्रायिकता (probability) के साथ निकट का संबंध रहा है। एक सिक्के को 10 बार उछालने पर कम से कम 6 बार चित्त पड़ने की प्रायिकता, 25 बल्बों के प्रतिदर्श (sample) में एक खराब बल्ब के होने की प्रायिकता, जबकि जिस समष्टि से प्रतिदर्श किया गया है, उसमें 5 प्रतिशत बल्ब खराब होते हैं– ये सभी प्रायिकताएँ अनिवार्यतः गणन की समस्याएँ हैं। भाग 4.5.1 में चर्चित द्विपद गुणांकों के सुप्रसिद्ध पास्कल-त्रिभुज को पास्कल ने 1650 में जुआ संबंधी कुछ प्रायिकताओं का विश्लेषण करने के दौरान विकसित किया था।

4.7.1 चिरसम्मत प्रायिकता सिद्धांत के अवयव

मानलीजिए N अवयवों वाला एक परिमित समुच्चय X है। X के सभी उपसमुच्चयों के संग्रह को $\mathcal{P}(X)$ या केवल $\mathcal{P}$ से निरूपित किया जाता है। $\mathcal{P}$ के अवयवों को घटनाएँ (events) कहा जाता

है। रिक्त समुच्चय (null set) ϕ को असंभव घटना कहा जाता है और स्वयं समुच्चय X को निश्चित घटना कहा जाता है। आइए हम परिमित समुच्चय A के अवयवों की संख्या को, जिसे की गणन-संख्या (cardinality) भी कहा जाता है, n(A) से निरूपित करें।

परिभाषाः यदि किसी यादृच्छिक विधि से हम यह सुनिश्चित कर सकें कि सभी n(X) स्थितियाँ समप्रायिक (equally likely) हैं, जिसका अर्थ केवल यही है कि कोई भी स्थिति दूसरी स्थिति से अधिक वरीय नहीं है, तो $\mathcal{P}$ में घटना A के घटने की प्रायिकता, जिसे P(A) से निरूपित किया जाता है, अनुपात $\frac{n(A)}{n(X)} = \frac{n(A)}{N}$ होती है, जिसे फ्रांसिसी गणितज्ञ लाप्लास ने परिभाषित किया था।

ध्यान दीजिए कि चिरसम्मत प्रायिकता सिद्धांत (Classical Probability Theory) में 'समप्रायिक' (equally likely) की कल्पना का मूलभूत महत्त्व है। प्रायः इसे ऐसे प्रयोगों को लेकर सुनिश्चित किया जाता है जिनमें सभी n (X) स्थितियों को चयन की समान संभावना होती है। प्रयोग एक स्पष्ट रूप से परिभाषित प्रक्रिया होता है जिससे परिणामों का एक दिया हुआ समुच्चय प्राप्त होता है। इन परिणामों (n (X) स्थितियों) को प्रारंभिक घटनाएँ (elementary events) कहा जाता है और सभी प्रारंभिक घटनाओं के समुच्चय को प्रयोग की प्रतिदर्श समष्टि (sample space) कहा जाता है। जब हम सिक्का उछालने वाली स्थिति पर विचार करते हैं, तब यहाँ हम यह मान लेते हैं कि सिक्का अनभिनत (unbiased) है, जिसका अर्थ यह है कि एक उछाल में चित्त और पट का आना समप्रायिक होता है। स्वयं उछाल को एक यादृच्छिक प्रक्रिया माना जाता है जिससे 'समप्रायिक' परिणामों का आना सुनिश्चित होता है। कुछ ऐसे भी सिक्के होते हैं जो भारित होते हैं अर्थात् जिसमें सिक्के का एक पक्ष दूसरे पक्ष से भारी हो सकता है। अपने इस अध्ययन में हमने इस प्रकार के सिक्कों को नहीं लिया है। प्रायिकता सिद्धांत को सम स्थितियों पर विचार करने के लिए विकसित किया गया है जहाँ X एक परिमित समुच्चय है। परन्तु यहाँ हम उन स्थितियों पर विचार नहीं करेंगे। 'सम प्रायिक' स्थिति के संबंध में किसी कथन के न होने पर इसे हम सदा 'समप्रायिक' स्थिति मान लेते हैं।

कुछ परिणाम : क्योंकि $n(\phi) = 0$, इसलिए इससे यह पता चलता है कि $P(\phi) = 0$. परिभाषा के अनुसार $n(x) = N$, अतः $P(X) = 1$ यदि A और B दो घटनाएँ हों, तो
$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ से यह अर्थ निकलता है कि
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ विशेष रूप से, यदि A और B परस्पर अपवर्जी (mutually exclusive) हों (जिसका अर्थ यह है कि A और B का कोई उभयनिष्ठ अवयव नहीं है), तो $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$. ध्यान दीजिए कि $A \cup B$ को A और B में से कम से कम एक घटना अवश्य माना जा सकता है इस तरह इसे हमने सिद्ध कर दिया है।

4.7.2 प्रायिकता का योग-प्रमेय

यदि A और B दो परस्पर अपवर्जी घटनाएँ हों, तो उनके सम्मिलन (union) की प्रायिकता A और B की प्रायिकताओं का योगफल होती है।

उपप्रमेयः मानलीलिए A एक घटना है, तब A^c की, जो कि A की पूरक घटना या घटना 'A नहीं' है, प्रायिकता $1 - P(A)$ होती है।

ऐसा होने का कारण यह है कि घटनाएँ A और A^c परस्पर अपवर्जी और निश्शेष (exhaustive) घटनाएँ हैं, अतः $A \cup A^c = X$ और $P(A) + P(A^c) = 1$ इसी प्रकार का तर्क लेकर यह सरलता से देखा जा सकता है कि यदि घटनाएँ $A_1, A_2, \ldots, A_m$ युग्मतः असंयुक्त (pairwise disjoint) (परस्पर अपवर्जी) घटनाएँ हों, तो A के सम्मिलन की प्रायिकता A को प्रायिकताओं का योगफल होती है। यह प्रायिकता का व्यापकीकृत योग-प्रमेय है। संचयविन्यास प्रायिकता सिद्धांत (combinatorial probability theory) की विषय-वस्तु परिमित समुच्चयों में, जहाँ सभी अवयव समप्रायिक होते हैं, घटनाओं की प्रायिकताओं का अभिकलन करना है। घटनाओं की प्रायिकताएँ घटनाओं की गणन-संख्याओं और मुख्य समुच्चय X की गणन-संख्या से पूर्णतः ज्ञात हो जाती है। तब प्रायिकता के परिकलन में आने वाली कठिनाई केवल घटनाओं की गणन-संख्या का परिकलन करने की कठिनाई होती है। घटनाओं की व्याख्या प्रायः X के कुछ बिन्दुओं के कुछ गुणधर्मों से

की जाती है और घटना तथा उसकी गणन-संख्या को निर्धारित करना कभी-कभी काफी कठिन हो जाता है।

उदाहरण 17: एक पाशे को एकबार फेंका गया है। निम्नलिखित घटनाओं की प्रायिकताएं क्या होंगी (i) सम संख्या (ii) कम से कम 2 (iii) अधिक से अधिक 2 (iv) कम से कम 10 ?

हलः यदि हम घटनाओं को A, B, C और C मान लें, तो $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 2\}$ और $D = \{\ \}$ अतः $n(X) = 6$, $n(A) = 3$, $n(B) = 5$, $n(C) = 2$, $n(D) = 0$ से उत्तर $P(A) = 3/6$, $P(B) = 5/6$, $P(C) = 2/6$, $P(D) = 0$ प्राप्त होते हैं।

* * *

उदाहरण 18: एक सिक्के को दो बार उछाला गया है। कम से कम एक बार चित्त पड़ने की प्रायिकता क्या होगी?

हलः इस स्थिति में X की व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है

$\{(H, H), (H, T), (T, H), (T, T)\}$

उदाहरण के लिए, युग्म (H, T) उस स्थिति को निरूपित करता है जिसमें पहले उछाल पर चित्त आता है और दूसरे उछाल पर पट आता है। हमारे प्रश्न की घटना A में निम्नलिखित स्थितियां हैं

$(H, T), (T, H), (H, H)$

इस तरह, $n(A) = 3$, $n(X) = 4$, अतः $P(A) = 3/4$.

* * *

उदाहरण 19: एक सिक्के को n बार उछाला गया है। ठीक-ठीक r बार चित्त पड़ने की प्रायिकता क्या होगी?

हलः यदि H और T क्रमशः चित्त और पट को निरूपित करते हों, तो X में लंबाई n वाले अनुक्रम होते हैं जिन्हें केवल अक्षरों H और T का प्रयोग करके बनाया जा सकता है। स्पष्ट है कि $n(X) = 2^n$. घटना A में वे स्थितियाँ होती हैं जिनमें ठीक-ठीक r H होते हैं। स्पष्ट है कि $n(A) = C(n, r)$ अतः अभीष्ट प्रायिकता $C(n, r)/2^n$ होगी।

* * *

उदाहरण 20: यदि दो पाशे फेंके गए हों तो कुल 7 आने की प्रायिकता क्या होगी?

हलः यदि x और y दो पाशों पर आने वाली संख्याओं को प्रकट करती हों तो स्पष्ट है कि X में 36 युग्म (x, y) होंगे, जहां x और y, 1 से 6 तक के कोई भी मान ले सकते हैं। कुल 7 प्राप्त करने की अभीष्ट घटना A में निम्नलिखित 6 स्थितियां होंगी।

$(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)$

इस तरह $n(A) = 6$, $n(X) = 36$ अतः

$P(A) = n(A)/n(X) = 6/36 = 1/6$.

* * *

उदाहरण 21: दो पाशों को, जिनमें से एक लाल है और दूसरा सफ़ेद है, फेंका गया है। लाल पाशे की तुलना में सफ़ेद पाशे पर छोटी संख्या के आने की प्रायिकता क्या होगी ?

हलः पिछले उदाहरण की तरह, यदि लाल पाशे पर संख्या x हो, और सफ़ेद पाशे पर संख्या y हो, तो X में 36 युग्म (x, y) होंगे जहाँ x और y, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ में से कोई भी एक पूर्णांक हो सकता है। घटना A के लिए हमें $x < y$ की आवश्यकता होती है। स्पष्ट है कि $x = 1, 2, 3, 4, 5$ के लिए y, $x + 1, x + 2, \ldots 6$ हो सकता है अर्थात् संख्या में $6 - x$ हो सकता है। इस तरह, योग-नियम के अनुसार

$$n(A) = \sum_{x=1}^{5} (6 - x) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$$

अतः $P(A) = 15/36 = 5/12$

* * *

उदाहरण 22: यदि एक पांच अंकों वाली संख्या यादृच्छया चुनी गई हो, तो अंकों के गुणनफल का 20 होने की प्रायिकता क्या होगी?

हलः X सभी 5 अंकों वाली संख्याओं का संग्रह है। यदि इनमें से कोई भी एक abcde हो, तो a, 1 से 9 तक हो सकता है। परन्तु b, c, d, e, 0 से 9 तक हो सकते हैं। इस तरह, गुणन-नियम के अनुसार $n(X) = 9.10^4 = 90000$, A के अवयवों के लिए हमें $a.b.c.d.e = 20$ की आवश्यकता होती है। स्पष्ट है कि 20 का गुणनखंडन केवल दो विधियों से किया जा सकता है, जैसे पांच गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में (i) 1, 1,1,4,5 और (ii) 5,2,2,1,1, यह बात अवश्य है कि A की सभी संभव स्थितियाँ प्राप्त करने के लिए संख्याओं को क्रमचयित किया जा सकता है। संख्याओं 5, 4, 1, 1, 1 को $5!/1!\,1!\,3! = 20$ विधियों से क्रमचयित किया जा सकता है और संख्याओं 5, 2, 2, 1, 1 को $5!/1!\,2!\,2! = 30$ विधियों से क्रमचयित किया जा सकता है। अतः $n(A) = 20 + 30 = 50$, जिससे $P(A) = 50/9000 = 1/1800$ प्राप्त होता है।

* * *

4.8 सारांश

इस इकाई में हमने संचय विन्यासिकी की प्रकृति के बारे में चर्चा की है। विशेष रूप से यहाँ हमने निम्नलिखित तथ्यों पर चर्चा की है।

1. स्पष्ट रूप से योग-नियम और गुणन-नियम का उल्लेख किए बिना हमने इन नियमों से संबंधित कुछ प्रश्नों को हल किया है।
2. गुणन-नियम से परिचित कराया है और इसकी सहायता से कुछ प्रश्न हल किए हैं।
3. योग-नियम से परिचित कराया है और इसकी सहायता से कुछ प्रश्न हल किए हैं।
4. क्रमचय परिभाषित की हैं और इनका परिकलन करने के लिए सूत्र व्युत्पन्न किए हैं।
5. क्रमचयों से संबंधित कुछ संख्यात्मक प्रश्न हल किए हैं।
6. वृत्तीय क्रमचयों से परिचित कराया है।
7. उन वस्तुओं के, जिनका अलग-अलग होना आवश्यक है, क्रमचयों की संकल्पना से परिचित कराया है।
8. संचयों की संकल्पना से परिचित कराया है और संचयों की संख्या परिकलित करने के लिए एक सूत्र व्युत्पन्न किया है।
9. पुनरावृत्तीय संचय के लिए एक सूत्र व्युत्पन्न किया है।
10. द्विपद-प्रसार के लिए एक सूत्र व्युत्पन्न किया है और इसकी सहायता से कुछ प्रश्न हल किए हैं।
11. द्विपद गुणांकों के पास्कल-सूत्रों और पास्कल-त्रिभुज से परिचित कराया है।
12. द्विपद-प्रसार की संकल्पना को बहुपद प्रसार पर लागू की है।
13. चिरसम्मत संचयविन्यास प्रायिकता से परिचित कराया है।

14. प्रायिकता का योग-प्रमेय व्युत्पन्न किया है।

15. प्रायिकता से संबंधित अनेक प्रश्न हल किए हैं।

4.9 हल/उत्तर

E1) $15!/12! = 15.14.13.12! / 12! = 15.14.13 = 2730.$

E2) $(3+5)! = 7! = 5040.$ परन्तु $3! + 4! = 6 + 24 = 30.$ स्पष्ट है कि दो संख्याएँ बराबर नहीं हैं।

E3) $(m+n)! = (m+n)(m+n-1) \cdots (m+1)\, m!$

$(m+n)! - m! = m!\,[(m+n)(m+n-1) \cdots (m+1) - 1 \geq m!\,(n! + m^n - 1)]$

$(m+n)! - m! - n! \geq m!\,[n! + m^n - 1] - n! = n!\,(n! - 1) + m!\,(m^n - 1) \geq 0.$

E4) $n = 20$ और $r = 3$ पर $\dfrac{n!}{(n-r)!} = \dfrac{20!}{17!} = 20.19.18 = 6840.$

E5) मानलीजिए हम पुरूषों को 1, 2, 3, ..., n के नाम से जानते हैं। तब पहले पुरूष का जोड़ा n महिलाओं में किसी एक महिला के साथ हो सकता है, दूसरे पुरूष का जोड़ा शेष $(n-1)$ महिलाओं में से किसी एक महिला के साथ हो सकता है। आदि, आदि। अतः जोड़ा बनाने की विधियों की संख्या $n\,(n-1) \ldots 1$ होगी।

E6) गुणन-नियन के अनुसार उत्तर 26.25.24 होगा, जबकि अक्षरों की पुनरावृत्ति न होती हो और उत्तर 26.26.26 होगा जबकि अक्षरों की पुनरावृत्ति होती हो।

E7) गुणन-नियम के अनुसार 100 और 999 के बीच के पूर्णांकों की संख्या, जबकि सभी अंक सम हों, 4.5.5 = 100 होगी (ध्यान दीजिए कि पहला अंक शून्य नहीं हो सकता, जबकि दूसरा और तीसरा अंक शून्य हो सकता है)।

E8) संख्या के विषम होने के लिए यह आवश्यक है कि अंतिम अंक विषम हो। अंतिम स्थिति को 5 विधियों से भरा जा सकता है। यदि दूसरी स्थिति को 0 से भरा जाए, तो पहली स्थिति को 8 विधियों से भरा जा सकता है। इस तरह, गुणन-नियम के अनुसार विषम संख्याओं की संख्या, जिनकी मध्य स्थिति में 0 हो और सभी अंक अलग-अलग हों, 40 होगी। यदि दूसरी स्थिति को शून्य के अतिरिक्त किसी अन्य अंक से भरा जाए, तो इसे 8 विधियों से किया जा सकता है। तब, पहली स्थिति को 7 विधियों से भरा जा सकता है। अतः विषम संख्याओं की संख्या, जिनमें सभी अंक अलग-अलग हों और मध्य अंक शून्य न हो, 5.8.7 = 280 होगी। इस तरह योग-नियम के अनुसार उत्तर 40 + 280 = 320 होगा।

E9) $P(15, 2) = 15.14 = 210$ और $P(7, 3) = 7.6.5 = 210.$

$P(5, 5) = 5.4.3.2.1 = 120$ और $P(6, 3) = 6.5.4 = 120.$

E10) हम अभीष्ट संख्याओं को दो वर्गों में बांट देंगे। वर्ग I में वे संख्याएँ होंगी जिनका पहला अंक 6 है। वर्ग II में वे संख्याएँ होंगी जिनका पहला अंक 6 से बड़ा हो। वर्ग I में अवयवों की संख्या 1.4.6.5.4 है (पहले अंक को केवल 1 विधि से चुना जा सकता है, दूसरे को केवल 5, 7, 8, 9 से चुना जा सकता है और तीसरे अंक को 6 विधियों से चुना जा सकता है, आदि आदि) इस तरह, वर्ग I में अवयवों की संख्या 480 होगी। वर्ग II में 3.7.6.5.4 = 2520 होगी। इस तरह योग-नियम के अनुसार अभीष्ट उत्तर 480 + 2520 = 3000 होगा।

E11) (क) शब्द 'ASSESSES' में A एक बार, E दो बार और S पांच बार आते हैं। इस तरह, क्रमचयों की संख्या यह होगी

$8! / 1!\,2!\,5! = 8.7.6 / 2 = 168$

(ख) शब्द 'PATTIVEERANPATTI' में R, N और V एक बार आते हैं, P, E और I दो बार आते हैं, A तीन बार आता है और T चार बार आता है। इस तरह, क्रमचयों की अभीष्ट संख्या यह होगी

$16! / 1!\, 1!\, 1!\, 2!\, 2!\, 2!\, 3!\, 4! = 455.11!$

E12) वाम पक्ष n लोगों के समुच्चय से m लोगों के समूह के चयन करने की विधियों का गणन करता है और तब इस समूह के k नेताओं के उपसमुच्चय का चयन करता है। इसी प्रकार, दक्षिण पक्ष पहले n लोगों के समुच्चय से k नेताओं के उपसमुच्चय का चयन करता है और तब शेष $n-k$ लोगों से समूह के शेष $m-k$ सदस्यों का चयन करता है।

E13) इसे आगमन नियम से (चर n पर आगमन करके) सिद्ध किया जा सकता है। आधार स्थिति तो तुच्छ है, क्योंकि यदि $n=0$, तो $k=0$ और समीकरण $C(0,0)=C(1,1)$ हो जाता है, जो कि सत्य है। आगमन चरण पास्कल-सूत्र/सर्वसमिका और आगमन परिकल्पना से सिद्ध हो जाता है।

E14) $(a+b+c)^4 = (a^4+b^4+c^4) + 4(a^3b+ab^3+a^3c+ac^3+b^3c+bc^3)$
$+ 6(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) + 12(a^2bc+ab^2c+abc^2)$, गुणांक 1, 4, 6, 12, ठीक-ठीक $4!/4!0!0!0!$, $4!/3!\,1!\,0!\,0!$, $4!/2!\,2!\,0!\,0!$, $4!/2!\,1!\,1!$. बहुपद गुणांक हैं।

E15) स्पष्ट है कि $\sum \frac{8!}{r!\,s!\,t!} 2^r 3^s 4^t$, $(2+3+4)^8$ का प्रसार है। अतः अभीष्ट उत्तर 9^8 है।

E16) इसे हम m पर आगमन-नियम लागू करके सिद्ध कर सकते हैं। मानलीजिए कि परिणाम m के लिए सत्य है। $(m+1)$ गुणनखंडों वाला वाम पक्ष लीजिए। आगमन-नियम के अनुसार अंतिम m गुणनखंडों का गुणनफल $\frac{(n-r_1)!}{r_2!\,r_3!\cdots r_{m+1}!}$ इस तरह वाम पक्ष

$\frac{n!}{r_1!\,(n-r_1)!} \frac{(n-r_1)!}{r_2!\,r_3!\cdots r_{m+1}!}$ हो जाता है और यह $\frac{n!}{r_1!\,r_2!\cdots r_{m+1}!}$ के बराबर होता है।

इससे यह पता चलता है कि परिणाम $(m+1)$ के लिए भी सत्य है। परन्तु जब $m = 2$, तब परिणाम $C(n, r)$ का प्रसार हो जाता है और इस तरह $m=2$ के लिए सत्य होता है। आगमन-नियम के अनुसार परिणाम सभी धन पूर्णांकों $m > 1$ के लिए सत्य है।

4.10 विविध प्रश्नावली

E1) IGNOU (प्रत्येक को अधिक से अधिक एक बार) के अक्षरों से कितने "शब्द" बनाए जा सकते हैं :

(क) जबकि सभी पाँच अक्षरों का प्रयोग अवश्य किया जाए;

(ख) जबकि कुछ (या सभी) अक्षरों को छोड़ दिया जाए?

E2) 52 पत्तों को कितने प्रकार से एक गड्डी के रूप में विन्यासित किया जा सकता है ?

E3) चार X और दो Y से कितने "शब्द" बनाए जा सकते हैं।

E4) दस सदस्यों वाले क्लब से चार लोगों की कितनी समितियाँ बनायी जा सकती हैं ?

E5) यदि बिल गणित के दो पाठ्यक्रम और इतिहास के दो पाठ्यक्रम लेना चाहता हो और गणित के पांच उपयुक्त पाठ्यक्रम और इतिहास के चार उपयुक्त पाठ्यक्रम उपलब्ध हों तो वह कितनी विधियों से चार पाठ्यक्रमों का चयन कर सकता है ?

E6) MISSISSIPPI के सभी अक्षरों से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं ?

E7) C(20, 3), C(10, 2) और C(10, 8) ज्ञात कीजिए।

E9) यदि एक बेकरी में पांच प्रकार की कूकी हों, तो कितनी विधियों से एक दर्जन का चयन किया जा सकता है।

E10) जैक के पास छः खिलौने हैं और वह जिम के साथ, जिसके पास आठ खिलौने हैं, दो खिलौने का लेन-देन करना चाहता है। कितनी विधियों से वह लेन-देन कर सकता है ?

E11) कितनी विधियों से पाँच A और सात B को एक पंक्ति में रखा जा सकता है जबकि कोई भी दो A अगल-बगल न हो।

E12) मोर्स कोड में बिन्दु और डैश जैसे निशान होते हैं। उदाहरण के लिए θ का कोड (– –, –) है। क्या कोई ऐसा कोड बनाया जा सकता है जिससे कि वर्णमाला के प्रत्येक अक्षर को अधिक से अधिक तीन निशानों, अधिक से अधिक चार निशानों से निरूपित किया जा सके ?

E13) एक गोल मेज के चारों ओर छः लोगों को कितने क्रम से बठाया जा सकता है, जबकि इनमें से एक व्यक्ति अन्य पांच व्यक्तियों में से एक व्यक्ति को पसंद नहीं करता और उनके साथ बैठना नहीं चाहता ?

E14) यदि 10 लोगों की समिति में चार महिलाएँ हों, तो कितनी विधियों से पांच लोगों की एक उपसमिति का गठन किया जा सकता है, जबकि विधान के अनुसार उपसमिति में कम से कम एक महिला का होना आवश्यक हो ?

E15) यदि एक मानक गड्डी से एक पत्ता खींचा जाए, तो उसकी लाल या फेस पत्ता होने की प्रायिकता क्या होगी ?

E16) एक सिक्के को आठ बार उछालने पर ठीक-ठीक चार बार चित्त पड़ने ? कम से कम चार बार चित्त पड़ने की प्रायिकता क्या होगी ?

E17) यदृच्छया चुने गए तीस लोगों में से कम-से-कम दो लोगों का जन्म दिन होने की प्रायिकता क्या होगी ?

E18) $(x+y)^n$ के प्रसार में Ax^5y^m के रूप का एक पद आता है, जहाँ A एक अचर है। इसमें A क्या है और m क्या है ?

E19) $(2+3x)^{10}$ में x^7 का गुणांक क्या है ?

E20) दोनों पक्षों को क्रमगुणितों में लिखकर और सरल करके निम्नलिखित सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिए :

(क) $\frac{n+1}{r+1} C(n, r) = C(n+1, r+1)$,

(ख) $C(n, m) . C(m, r) = C(n, r) . C(n-r, m-r)$.

E21) दिखाइए कि $\sum_{r=0}^{n} C(n, r) . C(m, k+r) = C(n+m, n+k)$

E22) $(1+x+2x^2)^5$ के प्रसार में x^4 का गुणांक क्या है ?

E23) द्विपद-प्रमेय की सहायता से एक स्वेच्छ संख्या $\Sigma C(n, r) k^r$ ज्ञात कीजिए।

E24) एक दस प्रश्नों वाली सही-गलत परीक्षा में उत्तीर्ण होने के लिए एक छात्रा को छः सही उत्तर देना आवश्यक है। यदि वह अपने उत्तरों को यदृच्छया चुनती है, तो उसके उत्तीर्ण होने की प्रायिकता क्या होगी ?

4.11 विविध प्रश्नावली के हल/उत्तर

E1) (क) $P(5,5) = 5! = 120$. (ख) क्योंकि r-अक्षर वाले शब्दों की संख्या $P(5,r)$ है, इसलिए उत्तर यह होगा

$$\sum_{r=0}^{5} P(5,r) = 1+5+5.4+5.4.3+5.4.3.2+5.4.3.2.1 = 326.$$

ध्यान दीजिए कि इसमें एक शून्य शब्द भी सम्मिलित है।

E2) उत्तर $P(52, 52) = 52!$ है। यह एक बड़ी संख्या है।

E3) उत्तर $\frac{6!}{2!\,4!} = 15$ है।

E4) उत्तर $C(10,4) = \frac{10.9.8.8}{4.3.2.1} = 210$ है।

E5) उत्तर $C(5,2) \,.\, C(4,2) = 60$ है।

E6) उत्तर $\frac{11!}{1!\,2!\,4!\,4!}$ है।

E7) उत्तर है $C(20,3) = \frac{20.19.18}{3.2.1} = 1140 \,.\, C(10,2) = \frac{10.9}{2.1} = 45.\ C(10, 8) = C(10, 2) = 45$ है।

E8) उत्तर है : $C(15; 5, 3, 2, 5) = \frac{15!}{5!\,3!\,2!\,5!}$ और $C(15; 5, 5, 3, 2)$ वही है जो कि पिछला उत्तर $C(15; 5, 3, 2, 5)$ है।

E9) यदि कूकी को A, B, C, D, E के नाम से जाना जाए तो प्रश्न उनसे 12 अक्षरों का चयन करने का हो जाएगा जबकि इनमें से किसी को कितनी ही बार लिया जा सकता है। स्पष्ट है कि यह $(1+x+x^2+\cdots)^5$ के प्रसार में x^{12} का गुणांक है। $(1-x)^{-5}$ में यह x^{12} का गुणांक है और यह $C(9,5) = 126$ है।

E10) उत्तर है : $C(6, 2) \,.\, C(8.2) = 15.28 = 420.$

E11) जब हम 5A को एक पंक्ति में रखते हैं तो छः रिक्तियाँ होती हैं, जिनमें प्रत्येक A होता है। उन्हें अलग रखने के लिए हमें प्रतिबंध $a \geq 0, b, c, d, e \geq 1, f \geq 0$ और $a+b+c+d+e+f = 7$ के साथ हमें a, b, c, d, e, f, g B को रखना चाहिए। उत्तर

$(1+x+x^2+\cdots)(x+x^2+\cdots)^4(1+x+x^2+\cdots)$

में x^7 का गुणांक होगा। यह $(1+x+x^2+\cdots)^3 = (1-x)^{-3}$ में x^3 का गुणांक है। गुणांक $C(5,3) = 10$ है।

E12) तीन निशानों से हम केवल $2+4+8 = 14$ अक्षर बना सकते हैं। चार निशानों से हम $2+4+8+16 = 30$ अक्षर बना सकते हैं, और, क्योंकि वर्णमाला में केवल 26 अक्षर होते हैं, इसलिए इन्हें बनाने के लिए चार निशान ही पर्याप्त हैं।

E13) उत्तर $5! - 2.4! = 120 - 48 = 72$ है।

E14) उत्तर $C(10,5) - C(6,5)$ है।

E15) लाल पत्ते 26 हैं। शेष पत्तों में चेहरे वाले पत्ते 8 (2 इक्का, 2 बादशाह, 2 रानी और 2 गुलाम) हैं। इस तरह ऐसे 34 पत्ते हैं जो हमारी घटना के अनुकूल हैं। अतः प्रायिकता $34/52 = 17/26$ होगी।

E16) ठीक 4 चित्त पड़ने की प्रायिकता $C(8, 4)/2^8 = 35/128$ है। कम से कम 4 चित्त पड़ने की प्रायिकता

$[C(8, 4) + C(8, 5) + C(8, 6) + C(8, 7) + C(8, 8)]/2^8$ है।

यह $(70 + 56 + 28 + 8 + 1)/2^8 = 163/256$ है।

E17) (लीप वर्ष न लिया जाए) 365 जन्म-दिन हो सकते हैं। पूरक घटना यह है कि सभी 30 के जन्म-दिन अलग-अलग हैं। इसकी प्रायिकता $C(365, 30)/365^{30}$ है। यह 0.5 से भी अधिक है।

E18) क्योंकि प्रत्येक पद का x, y में घात n है, इसलिए $m, (n - 5)$ होना चाहिए। $(x + y)^n$ में $x^5 y^{n-5}$ का गुणांक $C(n, 5)$ है। इस तरह, $A = C(n, 5)$

E19) $(2 + 3x)^{10}$ में x^7 वाला पद $C(10, 3) \cdot 2^3 \cdot (3x)^7$ है। अतः उत्तर $C(10, 3) \cdot 8 \cdot 3^7$ है।

E20) (क) $\frac{n+1}{r+1} \cdot \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{(n+1)!}{(r+1)!\,(n+1-r-1)!} = C(n+1, r+1)$.

(ख) वाम पक्ष $\frac{n!}{m!\,(n-m)!} \cdot \frac{m!}{r!\,(m-r)!} = \frac{n!\,(n-r)!}{r!\,(n-r)!\,(m-r)!\,(n-m)!}$ = दक्षिण पक्ष

E21) वामपक्ष $(1 + x)^n \left(1 + \frac{1}{x}\right)^m$ के प्रसार में x^{-k} का गुणांक है, जो कि $(1 + x)^{m+n}$ के प्रसार में x^{m-k} का गुणांक है और जो $C(n + m, m - k) = C(n + m, n + k)$ है।

E22) बहुपद प्रसार से $(1 + x + 2x^2)^5 = \sum \frac{1^r x^s (2x^2)^t\, 5!}{r!\, s!\, t!}$

निम्नलिखित स्थितियों में गुणांकों के साथ x^4 आता है

(क) $r = 3, s = 0, t = 2$. इससे $5!\,4/(3!\,0!\,2!) = 40$ प्राप्त होता है।

(ख) $r = 2, s = 2, t = 1$. इससे $5!\,2/(2!\,2!\,1!\,0!) = 60$ प्राप्त होता है।

(ग) $r = 1, s = 4, t = 0$. इससे $5!/(4!\,1!\,0!) = 5$ प्राप्त होता है। अतः अभीष्ट उत्तर $40 + 60 + 5 = 105$ है।

E23) उत्तर $(k + 1)^n$ है।

E24) उत्तर तो वही है जो कि एक वास्तविक सिक्के को 10 बार उछालने पर कम से कम छः बार चित्त पड़ने की प्रायिकता है। अतः उत्तर यह है

$C(10, 6)/2^{10} + C(10, 7)/2^{10} + C(10, 8)/2^{20} + C(10, 9)/2^{10} + C(10, 10)/2^{10}$

यह सरल होकर $(210 + 120 + 45 + 10 + 1)/1024 = 193/512$ हो जाता है।

इकाई 5 विभाजन और बंटन

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम मुख्यतः प्राकृतिक संख्या के विभाजन, n-समुच्चय के विभाजन, और परिमित संख्या में लिए गए पात्रों में, जिन्हें प्रायः बक्स कहा जाता है, परिमित संख्या में वस्तुओं के बंटन करने की विधियों की संख्या का गणन करने के बारे में चर्चा करेंगे। स्वयं वस्तुओं को बॉल माना जा सकता है। गणन निम्नलिखित दो बातों पर निर्भर करता है

(1) बॉल विभेद्य हैं या अविभेद्य हैं।

(2) पात्र विभेद्य या अविभेद्य हो सकते हैं।

इस इकाई में हम इन पर विस्तार से चर्चा करेंगे। चर्चा के दौरान हम प्रथम और द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्याओं और बेल-संख्याओं से हम आपको परिचित कराएंगे। यहाँ हम आपको विभाजनों और इन संख्याओं से संबंधित कुछ पुनरावृत्ति-संबंधों और जनक फलनों से भी परिचित कराएंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- यह जान सकेंगे कि पूर्णांक-विभाजन क्या होता है और एक पूर्णांक की विभाजन-संख्या का गणन किस प्रकार करते हैं,
- पात्रों में वस्तुओं के बंटन से संबंधित प्रश्नों को समझ सकेंगे,

- विभेद्य पात्रों में विभेद्य वस्तुओं के वंटन करने की विधियों की संख्या का गणन कर सकेंगे,
- अविभेद्य पात्रों में विभेद्य वस्तुओं के वंटन करने की विधियों के वंटन करने की विधियों की संख्या का गणन कर सकेंगे,
- विभेद्य पात्रों में अविभेद्य वस्तुओं के वंटन करने की विधियों की संख्या का गणन कर सकेंगे,
- अविभेद्य पात्रों में अविभेद्य वस्तुओं के वंटन करने की विधियों की संख्या का गणन कर सकेंगे,
- द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग-संख्याओं का परिकलन कर सकेंगे,
- बेल-संख्याओं का परिकलन कर सकेंगे,
- प्रथम प्रकार की स्टर्लिंग संख्या का परिकलन कर सकेंगे।

5.2 पूर्णांक विभाजन (INTEGER PARTITIONS)

मानलीजिए S. n वस्तुओं वाला एक समुच्चय है। सम्मिलन S के साथ s के अरिक्त, असंयुक्त उपसमुच्चयों के किसी भी संग्रह का विभाजन (partition) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, यदि $S = \{a, b, c, d\}$ तो $\{\{a, b\} \{c\} \{d\}\}$ S का एक विभाजन होता है। $\{\{c, d\}, \{a\}, \{b\}\}$, S का एक अन्य विभाजन है। जब कभी भी हम एक समुच्चय लेते हैं, तो समुच्चय के अवयवों को अलग-अलग मानते हैं यदि कुछ अवयव बार-बार आते हों, तो इस स्थिति में संग्रह एक समुच्चय नहीं रह जाता, बल्कि बहु-समुच्चय (multiset) हो जाता है। n अवयवों वाला एक बहु-समुच्चय लीजिए। इसमें एक अवयव n बार आता है। हम इसके विभाजन को किस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं। यदि $S = \{a, a, a, a\}$, तो विभाजन $\{\{a, a\}, \{a\}, \{a\}\}$ और $\{\{a\}, \{a\}, \{a, a\}\}$ अभिन्न होते हैं क्योंकि संग्रह में क्रम का कोई महत्त्व नहीं होता। स्पष्ट है कि यदि विभाजन बनाने वाले प्रत्येक उपसंग्रह के अवयवों की संख्या ज्ञात हो, तो बहुसमुच्चय का विभाजन पूरी तरह से निर्धारित हो जाता है। यहाँ इन संख्याओं के क्रम का कोई महत्त्व नहीं है। इससे हमें धन पूर्णांक के विभाजन की परिभाषा प्राप्त हो जाती है। अ-वर्धमान क्रम (non-increasing order) में धन पूर्णांकों के योगफल के रूप में n के किसी भी निरूपण को n का विभाजन कहा जाता है। अर्थात् हम धन पूर्णांक n के विभाजन को धनात्मक योग खंडों (summands) लेते हैं और क्रम पर ध्यान दिए बिना इस प्रकार के विभाजनों की संख्या ज्ञात करते हैं। क्योंकि क्रम की उपेक्षा कर देनी होती है इसलिए हम अ-वर्धमान क्रम में योगखंडों को लिखने की परंपरा को अपनाते हैं। उदाहरण के लिए, 5 के विभाजन ये हैं: (क) 5, (ख) 4 + 1, (ग) 3 + 2, (घ) 3 + 1 + 1 (ङ) 2 + 2 + 1 (च) 2 + 1 + 1 + 1 और (छ) 1 + 1 + 1 + 1 + 1 यदि P_n पूर्णांक n के विभाजनों की संख्या को निरूपित करता हो, तो हमने यहाँ यह दिखाया है कि $P_5 = 7$. n के किसी भी विभाजन में योगफल को बनाने वाली संख्याओं को भाग (part) कहा जाता है। उदाहरण के लिए, 2 + 2 + 1 में भाग 2, 2 और 1 हैं। इसके तीन भाग हैं। 5 के विभाजनों में 1 भाग वाला 1 है, 2 भागों वाला 2 है, तीन भागों वाला 2 है, 4 भागों वाला 1 हैं और 5 भागों वाला 1 है। ठीक-ठीक k भागों वाले n के विभाजनों की संख्या को P_n^k से निरूपित किया जाता है। इस तरह, $P_5^1 = 1$, $P_5^2 = 2$, $P_5^3 = 2$, $P_5^4 =$, $P_5^5 = 1$.

5.2.1 P_n^k का पुनरावृत्ति-संबंध

आइए सबसे पहले हम पुनरावृत्ति संबंध (recurrence relation) को परिभाषित करें।

परिभाषा: मानलीजिए $\{a_n ; n \geq 0\}$ वास्तविक या सम्मिश्र संख्याओं का एक अनुक्रम है। पुनरावृत्ति संबंध केवल $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, n)$ के रूप का एक व्यंजक होता हैं, जहाँ F चरों $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots$, और n का एक फलन है। दूसरे शब्दों में, इसकी सहायता से हम पिछले एक या अधिक पदों से अनुक्रम का nवाँ पद अभिकलित कर सकते हैं। यहाँ हम मुख्यतः ऐसे फलन F पर चर्चा करेंगे जो बहुपद (polynomial) हैं और जो परिमिततः अनेक चरों $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}$

और n पर निर्भर करते हैं। पुनरावृत्ति-संबंध पर और अधिक चर्चा खंड 3 में की गई है।

प्रमेय 1: $\boxed{\begin{array}{l} P_n^1 + P_n^2 + \cdots + P_n^k = P_{n+k}^k. \\ P_n^1 = P_n^n = 1. \end{array}}$

उपपत्तिः दूसरा सूत्र तो परिभाषा से स्पष्ट है। हम पहले सूत्र को सिद्ध करेंगे। मालीजिए M, n के विभाजनों का समुच्चय है जिनके k या इससे कम भाग हैं, M के प्रत्येक विभाजन को एक k-यक (k-tuples) माना जा सकता है। M पर प्रतिचित्रण (mapping)

$$(p_1, p_2, \ldots, p_m, 0, 0, \ldots, 0) \mapsto (p_1 + 1, p_2 + 1 + 1, \ldots p_m + 1, 1, 1, \ldots, 1)$$

परिभाषित कीजिए। ठीक-ठीक k-भागों में n + k के विभाजनों के समुच्चय M′ में M प्रतिचित्रित हो जाता है। यह प्रतिचित्रण एकैकी आच्छादी (bijective) हो जाता है क्योंकि (1) M के दो अलग-अलग k-यक M′ के दो अलग-अलग k-यकों पर आच्छादी होते हैं (2) M′ का प्रत्येक k-यक, M के k-यक का प्रतिबिंब होता है। इसलिए

$$|M| = P_n^1 + \cdots + P_n^k = |M'| = P_{n+k}^k.$$

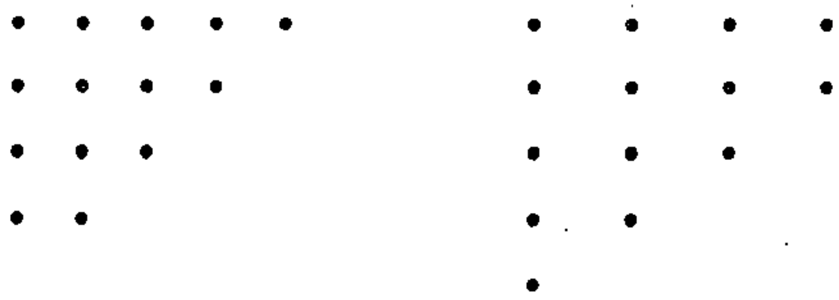
इन सूत्रों से P_n^k को पुनरावर्ती रूप में परिकलित किया जा सकता है जैसे

P_n^k	k = 1	2	3	4	5	6
n = 1	1	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0
3	1	1	1	0	0	0
4	1	2	1	1	0	0
5	1	2	2	1	1	0
6	1	3	3	2	1	1

मानलीजिए Q_n^k, k या इससे कम भागों वाले n के विभाजनों की संख्या को प्रकट करता है। स्पष्ट है कि प्रत्येक n के लिए $Q_n^1 = 1, Q_n^n = P_n$. यदि n = 5 हो, तो हमें $Q_5^1 = 1, Q_5^2 = 3, Q_5^3 = 5,$ $Q_5^4 = 6$ और $Q_5^5 = 7$ प्राप्त होता है। मानलीजिए $P_n(k)$, n के विभाजनों की संख्या को प्रकट करता है जिसका कोई भी भाग k से बड़ा नहीं है। हम $P_n(k)$ को दो चरों n और k का एक फलन मान सकते हैं। तब $P_5(1) = 1, P_5(2) = 3, P_5(3) = 5, P_5(4) = 6$ और $P_5(5) = 7$. स्पष्ट है कि किसी भी n के लिए $P_n(n) = P_n$ अवश्य होना चाहिए। दिए हुए उदाहरण में प्रत्येक k के लिए $P_5(k) = Q_5^k$. क्या व्यापक रूप में यह सत्य है कि प्रत्येक k और n के लिए $P_n(k) = Q_n^k$ यह दिखाने के लिए कि यह परिणाम सत्य है, हम एक विभाजन को उसके फेरर-ग्राफ से निरूपित करते हैं।

5.2.2 फेरर-ग्राफ

मानलीजिए एक विभाजन के भाग $s_1, s_2, \ldots, s_m$ हैं। तब विभाजन के फेरर-ग्राफ में बिन्दुओं की m पंक्तियाँ होती हैं, पहली पंक्ति में s_1 बिन्दु होते हैं, दूसरी पंक्ति में s_2 बिन्दु होते हैं, आदि आदि। इस ग्राफ में बिन्दुओं की पंक्तियों का प्रयोग एक पूर्णांक के विभाजन को निरूपित करने के लिए किया जाता है, जहाँ किसी भी पंक्ति से उसके नीचे वाली पंक्ति की ओर जाने पर प्रति पंक्ति के बिन्दुओं की संख्या में वृद्धि नहीं होती। उदाहरण के लिए, 14 के विभाजन 5 + 4 + 3 + 2 को उसके फेरर-ग्राफ में इस प्रकार निरूपित किया जाता है। चित्र (क)



$14 = 5 + 4 + 3 + 2$ (क) $14 = 4 + 4 + 3 + 2 + 1$ (ख)

चित्र 1.

स्पष्ट है कि यदि फेरर-ग्राफ की पंक्तियों को स्तंभों में बदल दें, तो हमें इसी संख्या के एक अन्य विभाजन का फेरर-ग्राफ प्राप्त होता है। इस तरह प्राप्त नए विभाजन को संयुग्मी विभाजन (conjugate partition) कहा जाता है। स्पष्ट है कि प्रत्येक विभाजन के संगत एक अद्वितीय संयुग्मी (unique conjugate) होता है और, संयुग्मी विभाजन का संयुग्मी मूल विभाजन होता है। परन्तु, एक विभाजन में सबसे बड़े भाग की साइज संयुग्मी विभाजन में भागों की संख्या होती है। इस तरह, एक पूर्णांक के विभाजनों के बीच एकैकी संगति (one-one correspondance) होती है, जहाँ कोई भी भाग k से बड़ा नहीं और k-भागों के साथ n के विभाजन होते हैं। इस तरह $P_n(k) = Q_n^k$. इस तरह, इसे हमने सिद्ध कर दिया है।

प्रमेय 2: किन्हीं भी दो पूर्णांकों n, k, जहाँ $k \le n$ के लिए अधिक से अधिक k भागों वाले n के विभाजनों की संख्या उन विभाजनों की संख्या के बराबर होती है जिनका कोई भी भाग k से बड़ा नहीं है।

E1) P_1, P_3 और P_5 के मान ज्ञात कीजिए।

E2) P_n^1 और Q_n^1 के मान ज्ञात कीजिए।

E3) $Q_5^2, Q_6^2, \ldots$ व्यापक रूप में Q_n^2 के मान ज्ञात कीजिए।

E4) दिखाइए कि $P_n^n = P_n^{n-1} = 1$.

5.2.3 विभाजन-संख्या का पुनरावृत्ति संबंध

अब हम यह देखेंगे कि किस प्रकार $P_n(k)$, लघु स्वतंत्र चरों वाले P के मानों पर निर्भर करता है जहाँ n और k दोनों को स्वतंत्र चर (argument) माना गया है।

प्रमेय 3: किन्हीं धन पूर्णांकों n और k के लिए जहाँ $1 < k < n$, यह प्राप्त होता है

$P_n(k) = P_n(k-1) + P_{n-k}(k)$.

उपपत्ति : $P_n(k)$ उन भागों वाले n के विभाजनों की संख्या का गणन करता है जिनके भाग k से बड़े न हों हम इन विभाजनों को दो वर्गों में वर्गीकृत कर सकते हैं। (i) वह वर्ग जिसमें k एक भाग हो (ii) वह वर्ग जिसमें k एक भाग न हो। स्पष्ट है कि प्रकार (ii) के विभाजनों की संख्या $P_n(k-1)$ है। और, यह भी स्पष्ट है कि प्रकार (i) के विभाजन में एक भाग k होता है और अन्य भागों से $n-k$ का एक विभाजन प्राप्त होता है, जिसका कोई भी भाग k से बड़ा नहीं होता और इसलिए यह $P_{n-k}(k)$ होगा। दो संख्याओं को जोड़ने पर हमें प्रमेय की उपपत्ति प्राप्त हो जाती है।

ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए पुनरावृत्ति-संबंध का प्रयोग n और k के किसी संयोजन के लिए

$P_n(k)$ का मान प्राप्त करने के लिए किया जा सकता है जबकि हम यह देख लें कि $P_n(1) = 1$, क्योंकि $n = 1 + 1 + \cdots + 1$ (n बार) और $P_n(k) = P_n(n)$, यदि $k > n$ उदाहरण के लिए, $P_6(4)$ का परिकलन करने के लिए पुनरावृत्ति संबंध का बार-बार प्रयोग करने पर हमें
$P_6(4) = P_6(3) + P_2(4)$ प्राप्त होता है। परन्तु

$P_2(4) = P_2(2) = 2$

$P_6(3) = P_6(2) + P_3(3) = P_6(1) + P_4(2) + P_3(3) = 1 + 3 + 3 = 7$

जिससे $P_6(4) = 9$ प्राप्त होता है।

ध्यान दीजिए कि $P_n(k) - P_n(k-1) = Q_n^k - Q_n^{k-1}$ इसका अर्थ यह है कि उन विभाजनों की संख्या, जिनमें सबसे बड़ा भाग k है, n के उन विभाजनों की संख्या के बराबर होती है जिनमें ठीक-ठीक k भाग हैं। इस तरह इसे हमने सिद्ध कर दिया है।

प्रमेय 4: प्रत्येक n, k के लिए, जहाँ $k \le n$, ठीक-ठीक k भागों वाले n के विभाजनों की संख्या, n के उन विभाजनों की संख्या के बराबर होती है, जिनमें k सबसे बड़ा भाग है।

उदाहरण 1: यदि विभाजन का संयुग्मी विभाजन स्वयं हो, तो इसे स्वसंयुग्मी (self-conjugate) कहा जाता है। 6 का एक स्वसंयुग्मी विभाजन प्रदर्शित कीजिए।

हल : 6 = 3 + 2 + 1 यह सरलता से देखा जा सकता है कि वह स्वसंयुग्मी है।

* * *

उदाहरण 2: दिखाइए कि यदि n का विभाजन $p_1 + p_2 + \cdots p_k$ हो, तो इसका संयुग्मी विभाजन $q_1 + q_2 + \cdots q_r$ है जहाँ r, p_1 है और q_i p_j की संख्या है जो कम से कम i है।

हलः यदि हम विभाजन का फेरर-ग्राफ बनाएँ, तो प्रश्न में किए गए कथनों को स्पष्ट रूप से देखा जा सकता है।

* * *

उदाहरण 3: दिखाइए कि $n(n+1)/2$ के रूप की संख्या का सदा ही एक स्वसंयुग्मी विभाजन होता है।

हलः हम $n(n+1)/2$ को $1 + 2 + 3 + \cdots + n$ के रूप में लिख सकते हैं। जब इसके क्रम को उलट दिया जाता है तो यह संख्या $n(n+1)/2$ का एक विभाजन हो जाता है। स्पष्ट है कि विभाजन स्व-संयुग्मी है।

* * *

उदाहरण 4: 2 से 8 तक की संख्याओं के, जिनके भाग केवल संख्या 1 और / या 2 हैं, विभाजनों को प्रदर्शित कीजिए।

हलः 2 के विभाजन 1 + 1 और 2 हैं, 3 के विभाजन 1 + 1 + 1 और 2 + 1 हैं, 4 के विभाजन 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 और 2 + 2 हैं। 5 के विभाजन 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1, और 2 + 2 + 1 हैं। 6 के विभाजन 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1 + 1, और 2 + 2 + 2 है, 7 के विभाजन 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1 + 1 + 1, और 2 + 2 + 2 + 1 हैं। 8 के विभाजन 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 1 + 1 + 1 + 1, 2 + 2 + 2 + 1 + 1 और 2 + 2 + 2 + 2 हैं।

* * *

उदाहरण 5: 2n के कितने विभाजन होगें जिनके भाग केवल संख्याएँ 1 और / या 2 हों।

हलः संख्या 2n के विभाजनों की अधिकतम संख्या, जिनके भाग 2 हो, n होगी। अतः अभीष्ट विभाजनों की संख्या n + 1 होगी।

* * *

E5) 2n + 1 के कितने विभाजन होंगे जबकि उनके भाग केवल संख्याऐं 1 और / या 2 हों?

E6) 2n के कितने विभाजन होगें जिनके केवल एक या दो भाग हों और यह आवश्यक नहीं है कि ये भाग अलग-अलग हों?

5.2.4 P_n's का जनक फलन

आइए हम साधारण जनक फलनों (generating functions) को परिभाषित करें।

परिभाषाः वास्तविक (या सम्मिश्र) संख्याओं के अनुक्रम $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ का जनक फलन व्यंजक

$A(x)=\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$ होता है जो कि x में एक घात श्रेणी है।

इसके बारे में और अधिक चर्चा इकाई 8 (खंड 3) में की गई है। श्रेणी $P(x)=\sum_{n=1}^{\infty} P_n x^n$ को P_n का जनक फलन कहा जाता है ऐसा होने का कारण यह है कि इस श्रेणी में x^n का गुणांक संख्या P_n है।

प्रमेय 5: P_n का जनक फलन $(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1}\ldots$ है।

उपपत्तिः गुणनफल

$$(1+x+x^2+x^3+\cdots)(1+x^2+x^4+x^6+\cdots)(1+x^3+x^6+x^9+\cdots)\cdots$$

लीजिए। इस गुणनफल में हम x^n का गुणांक इस प्रकार प्राप्त कर सकते हैं। प्रत्येक कोष्ठक से एक पद लीजिए और x^n प्राप्त करने के लिए उन्हें गुणा कीजिए। n के विभाजन में पहले कोष्ठक के पद से घातांक के रूप में 1 की संख्या प्राप्त होती है, दूसरे कोष्ठक से लिए गए पद से घातांक के रूप में 2 की संख्या प्राप्त होती है। आदि आदि। इस तरह x^n गुणांक को लेकर हम n के सभी विभाजन प्राप्त कर सकते हैं। इससे परिणाम सिद्ध हो जाता है। n के लघु मानों पर P_n का परिकलन।

मानलीजिए हम $n \le 6$ पर P_n को परिकलित करना चाहते हैं। यहाँ जनक फलन के प्रासंगिक भागों को रख लेना पर्याप्त होगा, क्योंकि $n \le 6$ के लिए हमें केवल x^n के गुणांक की ही आवश्यकता होती है। प्रासंगिक भाग यह है :

$$(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6)(1+x^2+x^4+x^6)(1+x^3+x^6)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)$$

हम इन्हें गुणा करके अधिक से अधिक घात 6 वाले x को रख लेते हैं। पहले दो कोष्ठकों से अभीष्ठ पद $1+x+2x^2+2x^3+3x^4+3x^5+4x^6$ होंगे। अंतिम चार कोष्ठकों से अभीष्ट पद $1+x^3+x^4+x^5+2x^6$ होंगे। इस तरह प्राप्त श्रेणियों को गुणा करने और x^6 तक के पदों को रखने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$1+x+2x^2+3x^4+5x^5+7x^5+11x^6.$$

इस तरह, हमें यह प्राप्त होता है

$$P_0=1, P_1=1, P_2=2, P_3=3, P_4=5, P_5=7, P_6=11.$$

उदाहरण 6: दिखाइए कि n के विभाजनों की, जिसमें प्रत्येक भाग कम से कम 2 है, संख्या का जनक फलन $(1-x)P(x)$ है। और, इस तरह यह दिखाइए कि n के विभाजनों को जिसमें प्रत्येक भाग कम से कम 2 है संख्या $P_n - P_{n-1}$ है।

हलः स्पष्ट है कि $(1-x)P(x) = (1-x^2)^{-1}(1-x^3)^{-1} \ldots$. दक्षिण पक्ष से x^n के गुणांक में n के ये विभाजन प्राप्त होते हैं जिनमें प्रत्येक भाग कम से कम 2 हैं। इससे परिणाम सिद्ध हो जाता है। दक्षिण पक्ष में x^n का गुणांक $(1-x)P(x)$ पर x^n का गुणांक होता है, और स्पष्टतः यह $P_n - P_{n-1}$ होता है।

* * *

$P_n^{(d)}$ का, जनक फलन जो कि अलग-अलग पूर्णांकों के योगफल के रूप में n को व्यक्त करने की विधियों की संख्या है, यह होता है

$$P^{(d)}(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^k)\cdots$$

$$= \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i) = \frac{\cancel{(1-x^2)}}{(1-x)}\,\frac{\cancel{(1-x^4)}}{\cancel{(1-x^2)}}\,\frac{(1-x^6)}{(1-x^3)}\,\frac{(1-x^8)}{\cancel{(1-x^4)}}$$

$$\frac{1}{(1-x)}\cdot\frac{1}{(1-x^3)}\cdot\frac{1}{(1-x^5)}\cdots$$

$P_n^{(0)}$ का जनक फलन, जो कि विषम पूर्णांक के गुणनफल के रूप में n को व्यक्त करने की विधियों की संख्या है, यह होता है

$$P^{(0)}(x) = (1+x+x^2+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)(1+x^5+x^{10}+\cdots)(1+x^7+x^{14}+\cdots)$$

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^7}\cdots$$

क्योंकि $P^{(d)}(x) = P^{(0)}(x)$ इसलिए $P_n^{(d)} = P_n^{(0)}$

आपको खंड 3 की इकाई 8 (जनक फलन) में पूर्णांक के विभाजन से संबंधित प्रश्नों को देखने और साथ ही इसके बारे में और अधिक विस्तृत जानकारी प्राप्त करने को मिलेगी।

5.3 बंटन

यहाँ बंटन से हमारा अभिप्राय अनेक पात्रों में अनेक वस्तुओं में बांटना। एक रंगीन निरूपण के रूप में हम बक्सों में बॉल बंटित करने के बारे में बात करेंगे। यहाँ कुछ संभव स्थितियाँ ये हैं।

1. सभी बॉल विभेद्य हो सकते हैं और सभी बक्से विभेद्य हो सकते हैं।
2. बाल विभेद्य हो सकते हैं और बक्से अविभेद्य हो सकते हैं।
3. बाल अविभेद्य हो सकते हैं और बक्से विभेद्य हो सकते हैं।
4. बॉल अविभेद्य हो सकते हैं और बक्से भी अविभेद्य हो सकते हैं।

इन चारों स्थितियों में से प्रत्येक स्थिति में हमें इस प्रकार के बंटनों की संख्या का गणन करना होता है। यह भी संभव है कि इन चार स्थितियों के अतिरिक्त कुछ मिली जुली और स्थितियाँ भी हो सकती हैं। जहाँ कहीं भी संभव होगा हम उनका उल्लेख करेंगे और उन पर भी इन चार स्थितियों के लिए विकसित विधियों को लागू करेंगे।

बंटन समस्याओं का निदर्शन (modelling) करने का एक व्यापक मार्ग दर्शन यह है कि अलग-अलग वस्तुओं का बंटन विन्यास के संगत होता है और अभिन्न वस्तुओं का बंटन चयन के संगत होता है। इन चार स्थितियों से यहाँ हम कुछ उदाहरण दे रहें हैं।

(क) 20 विद्यार्थी हैं और 4 कालेज हैं। कितनी विधियों से इन चार कालेजों में विद्यार्थियों को प्रवेश दिलाया जा सकता है।

इस उदाहरण में स्पष्ट है कि विद्यार्थी विभेद्य हैं और कालेज भी विभेद्य हैं। यह स्थिति (1) के अंतर्गत आता है।

(ख) नियोक्ता अपने छः कर्मचारियों में एक-एक रुपये के 100 नोट बांटना चहता है। इसे करने की विधियों की संख्या ज्ञात कीजिए।

यद्यपि अपने अलग-अलग नंबरों से एक-एक रुपये के नोट विभेद्य हो सकते हैं, फिर भी जहाँ तक उनका इस्तेमाल होने का संबंध है उन्हें हम विभेद्य नहीं मानते। अतः यह विभेद्य बक्सों में अविभेद्य वस्तुओं को वंटित कराने वाली स्थिति है। यहाँ कर्मचारी, जिन्हें विभेद्य माना गया है बक्से हैं। यह स्थिति (3) के अंतर्गत आता है।

(ग) मानलीजिए हम डाक्टरी जाँच के लिए 100 विद्यार्थियों को 10-10 विद्यार्थियों के 10 वर्ग में रखते हैं। तब वर्ग अविभेद्य हो जाते है, यद्यपि इस वर्ग के विद्यार्थी विभेद्य होते हैं। अतः यह, स्थिति (2) के अंतर्गत आता है।

(ख) एक-एक रुपए के 1000 नोट हैं। कितनी विधियों से इनके 20 बंडल बनाए जा सकते हैं?

पहले की तरह यहाँ भी नोटों को अविभेद्य माना गया है। स्पष्ट है कि बंडल स्वयं में विभेद्य नहीं हैं केवल इनके नोट अलग-अलग हो सकते हैं। यह स्थिति (4) के अंतर्गत आता है।

5.3.1 विभेद्य पात्रों मे विभेद्य वस्तुएँ

इस स्थिति का एक विशेष निर्वचन है। क्योंकि, वस्तुएँ विभेद्य हैं, इसलिए इन्हें एक समुच्चय, मानलीजिए O, का अवयव माना जा सकता है। पात्र भी विभेद्य है, जिनसे एक समुच्चय, मान लीजिए C प्राप्त होता है। अब किसी भी वंटन f को C पर O का प्रतिचित्रण माना जा सकता है। क्योंकि इस बात पर कोई प्रतिबंध नहीं है कि किस विधि से पात्रों में वस्तुओं का वंटन किया गया है (अर्थात् एक पात्र में बहुत वस्तुऐं भी रखी जा सकती हैं) अतः यह स्पष्ट है कि ऐसा करने की विधियों की संख्या m^n है, जहाँ n, वस्तुओं की संख्या, अर्थात् समुच्चय O की गणन संख्या $|O|$ है और m पात्रों की संख्या अर्थात् समुच्चय C की गणन संख्या है। यह हमें गुणन-नियम से प्राप्त हो जाता है, जबकि हम इस बात की ओर ध्यान दें कि पात्रों में प्रत्येक वस्तु को m विधियों से वंटित किया जा सकता है।

समुच्चय A से समुच्चय B पर सभी प्रतिचित्रणों के समुच्चय को B^A से निरूपित किया जाता है। इसतरह, हमने यह दिखाया है कि समुच्चय B^A की गणन-संख्या $|B|^{|A|}$ है।

उदाहरण 7: दिखाइए कि m अक्षरों की वर्णमाला पर लंबाई n वाले शब्दों की संख्या m^n होती है।

हलः ध्यान दीजिए कि एक शब्द में वर्णमाला के अक्षरों का प्रयोग अनेक बार किया जा सकता है। n अक्षरों वाले शब्द को n क्रमित बक्से माना जा सकता है, जिनके प्रत्येक बक्से में वर्णमाला का एक अक्षर उपस्थित है। क्योंकि ये बक्से 'क्रमित' है, इसलिए ये विभेद्य हो जाते हैं। स्पष्ट है कि वर्णमाला के अक्षर विभेद्य होते है। इसतरह, लंबाई n वाला कोई भी शब्द बक्सों से अक्षरों पर एक प्रतिचित्र स्थापित करने के तुल्य होता है। स्पष्ट है कि इसे करने की विधियों की संख्या m_n है। यहाँ एक भ्रम हो सकता है। यहाँ बक्सों को वस्तुएं और वर्णमाला के अक्षरों को पात्र माना गया है। (यहाँ बक्से पात्र नहीं हैं)।

* * *

उदाहरण 8: मानलीजिए m वस्तुओं वाला एक समुच्चय S है। इस समुच्चय S से लिया गया एक n-प्रतिदर्श S से लिए गए n अक्षरों का क्रमित विन्यास है जहाँ n प्रतिदर्श-निर्धारणों में से प्रत्येक प्रतिदर्श-निर्धारण प्रतिस्थापन के साथ किया गया है। दिखाइए कि एक m-समुच्चय से लिए गए n-प्रतिदर्शों की संख्या m^n है।

हलः स्पष्ट है कि प्रत्येक n-प्रतिदर्श m अक्षरों वाली वर्णमाला S से लिया गया लंबाई n वाला एक शब्द है। अब पिछले उदाहरण की तरह की प्रक्रिया लागू करने पर परिणाम प्राप्त हो जाता है।

* * *

5.3.2 जनक फलन उपगमन

मानलीजिए हमारे पास दो अक्षर $\{a, b\}$ हैं। यदि हम तीन कोष्ठकों में से प्रत्येक कोष्ठक से लिए गए एक अक्षर को गुणन खंडों के क्रम में परिवर्तन किए बिना गुणा करके $(a+b)^3$ का औपचारिक प्रसार करें, तो हमें निम्नलिखित पद प्राप्त होते हैं: aaa, aab, aba, abb, baa, bab, bba, bbb. स्पष्ट है कि ये वर्णमाला $\{a,b\}$ से लिए गए 3-अक्षर वाले शब्द हैं। इस तरह, प्रसार $(a+b)^3$ को इन सभी शब्दों का जनक माना जा सकता है। स्पष्ट है कि ऐसे शब्दों की संख्या a और b को 1 से प्रतिस्थापन करके परिकलित की जा सकती है। इससे $2^3 = 8$ प्राप्त होता है। व्यापक रूप में यदि m अक्षर $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ हो तो m-अक्षरों की वर्णमाला से लंबाई n वाले सभी शब्दों का जनक फलन $(a_1 + a_2 + \ldots + a_m)^n$ होता है और इस जनक फलन में सभी अक्षरों के स्थान पर 1 प्रतिस्थापित करके शब्दों की संख्या प्राप्त की जा सकती है। स्पष्ट है कि यह संख्या m^n है।

संचयविन्यास वस्तुओं के गणन करने और इसे करने की विधियों की संख्या की गिनती करने में जनक फलन उपगमन काफी उपयोगी होता है। इस संबंध में निम्नलिखित उदाहरण लीजिए।

उदाहरण 9: वर्णमाला $\{a, b\}$ से बनाए गए पांच-अक्षरों वाले शब्दों की संख्या ज्ञात कीजिए जबकि दूसरा अक्षर b हो और चौथा अक्षर a हो।

हल : स्पष्ट है कि इन सभी शब्दों का जनक फलन $(a+b)\,b\,(a+b)\,a\,(a+b)$ है। अतः गुणनखंडों के क्रम को बनाए रखकर इसका औपचारिक रूप से प्रसार करके इन शब्दों को प्राप्त किया जा सकता है। a, b के स्थान पर 1 प्रतिस्थापित करके शब्दों की संख्या ज्ञात की जा सकती है, स्पष्ट है कि उत्तर $2 \times 1 \times 2 \times 1 \times 2 = 8$ होगा।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E7) बताइए कि 26 अक्षरों वाली अंग्रेजी वर्णमाला से तीन-अक्षरों वाले कितने शब्द बनाए जा सकते हैं। इनमें से कितने शब्दों का अंतिम अक्षर x होगा? इनमें से कितने अक्षरों के बीच में एक स्वर-अक्षर (vowel) होंगे ?

E8) पांच-अंकों वाली कितनी संख्याएं सम होती हैं? पांच-अंकों वाली कितनी संख्याएँ केवल विषम अंकों से बनी होती है?

E9) 4 महिलाएं और 5 पुरुष हैं। इनसे तीन व्यक्तियों की एक समिति, जिसमें एक अध्यक्ष, एक उपाध्यक्ष और एक सचिव हो, बनानी है। निम्नलिखित स्थितियों में इस कार्य को कितनी विधियों से किया जा सकता है।

(क) उपाध्यक्ष एक महिला हो?

(ख) उपाध्यक्ष या सचिव एक महिला हो?

(ग) समिति में कम से कम एक महिला अवश्य हो?

5.3.3 अधिक से अधिक एक वस्तु वाले पात्र

मानलीजिए इस प्रतिबंध के साथ कि किसी भी पात्र में एक से अधिक वस्तु न हो, हम n विभेद्य पात्रों में m विभेद्य वस्तुएं बंटित करना चाहते हैं। स्पष्ट है कि यदि $n < m$ तो ऐसा करना संभव नहीं है। इसके विपरीत यदि $n \geq m$, तो पहले ऐसे m पात्रों का चयन करके, जिनमें ठीक-ठीक

एक वस्तु हो, और तब चयन किए गए पात्रों में m वस्तुओं क्रमचय करके इन सभी विन्यासों को प्राप्त किया जा सकता है। स्पष्ट है कि इसे
$C(n, m) \cdot m! = n(n-1)\ldots(n-m+1) = P(n, m)$ में किया जा सकता है।

इस तरह हमें $P(n, m)$ का एक नवीन निर्वचन प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि $n(n-1)\ldots(n-m+1)$ को पतती क्रमागुणित (falling factorial) भी कहा जाता है और इसे $[n]_m$ से निरूपित किया जाता है। यदि $m > n$, तो $[n]_m$ को शून्य मान लिया जाता है। इस तरह, इसे हमने सिद्ध कर दिया है।

प्रमेय 6: n विभेद्य पात्रों में m विभेद्य वस्तुओं को इस तरह बंटित करने की विधियों की संख्या, जिससे कि किसी भी पात्र में एक से अधिक वस्तु न हो, $[n]_m$ होती है।

E10) दिखाइए कि एक वर्णमाला के अलग-अलग अक्षरों से बनाए गए m-अक्षर वाले शब्दों की संख्या $[n]_m$ है।

E11) दिखाई कि एक m-समुच्चय से एक n-समुच्चय पर एकेकी प्रतिचित्रणों (injective mapping) की संख्या $[n]_m$ है।

5.3.4 अविभेद्य पात्रों में विभेद्य वस्तुएं

m अविभेद्य पात्रों में n विभेद्य वस्तुओं को बंटित करने की विधियों की संख्या ज्ञात करने के लिए हमें उस संख्या की आवश्यकता होती है, जबकि ठीक-ठीक k पात्रों में वस्तुए हों। इसके लिए हमें द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्याओं पर विचार करना होता है।

5.3.5 द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्याएं

मानलीजिए $n \geq m$। m अविभेद्य पात्रों में n विभेद्य वस्तुओं के बंटनों की संख्या को जिससे कि कोई पात्र खाली न रहें, S_n^m द्वारा निरूपित किया जाता है। इस संख्या को द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग-संख्या कहा जाता है। यह m वर्गों में n वस्तुओं के समुच्चय के विभाजनों की संख्या भी होती है। अतः हम द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग-संख्याओं को इस प्रकार परिभाषित करते हैं: यदि n और m प्राकृतिक संख्याएँ हों तो, S_n^m ठीक-ठीक m भागों में (आपको याद होगा कि भाग अरिक्त होने चाहिए) एक n-समुच्चय के विभाजनों की संख्या होती है।

स्पष्ट है कि यदि $n < m$, तो $S_n^m = 0$, क्योंकि यदि पात्रों की संख्या वस्तुओं की संख्या से अधिक हो जाए तो ऐसी स्थिति में सभी पात्रो को अरिक्त रखना संभव नहीं होता है।

यहाँ यह दिखाया जा सकता है कि

$$S_n^m = \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C(m, m-k)(m-k)^n.$$

5.3.6 S_n^m का पुनरावृत्ति-संबंध

प्रमेय 7: यदि $1 < m \leq n$, तो $S_{n+1}^m = S_n^{m-1} + m S_n^m$

उपपत्ति : आइए हम $n+1$ वस्तुओं में से एक वस्तु पर निशान लगा दें और $n+1$ वस्तुओं का m वर्गों में विभाजन पर विचार करें।

स्थिति (1) निशान लगी वस्तु से एक अवयव वाला एक वर्ग प्राप्त होता है। तब शेष n वस्तुओं से S_n^{m-1} विधियों से $(m-1)$ वर्ग प्राप्त होंगे।

स्थिति (2) निशान लगी वस्तु एक वर्ग में कम से कम एक और अवयव के साथ होती है। इस प्रकार के विभाजनों की संख्या $m\,S_n^m$ है, क्योंकि पहले निशान न लगी n वस्तुओं से हम m वर्गों का एक विभाजन बना सकते हैं और तब इन m वर्गों में से किसी एक वर्ग के साथ निशान लगी वस्तु को लगा सकते हैं।

अब योग-नियम से हमें $S_{n+1}^m = S_n^{m-1} + m\,S_n^m$ प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि परिभाषा के अनुसार यदि $m > n$, तो $S_n^n = 1$ और $S_n^m = 0$ और तुच्छ रूप में, यदि $m < 0$ या $n < 0$ तो हम $S_n^m = 0$ परिभाषित कर सकते हैं। अब S_n^m के इस निर्वचन के साथ हम यह सरलता से देख सकते हैं। कि $1 \le m \le n$, के लिए $S_{n+1}^m = S_n^{m-1} + m\,S_n^m$.

5.3.7 द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्याओं के पुनरावृत्ति-संबंध का व्यापकीकरण

प्रमेय 8: $S_{n+1}^m = \sum_{k=0}^{n} C(n, k).\, S_k^{m-1}$.

उपपत्ति : आइए हम $(n+1)$ वस्तुओं के समुच्चय से ली गई एक वस्तु पर निशान लगा दें। मान लीजिए निशान लगी यह वस्तु $(n-k+1)$ अवयवों वाले वर्ग में उपस्थित है। यह $C(n, n-k)\, S_k^{m-1}$ विधियों से संभव है क्योंकि हम $C(n, n-k)$ विधियों से निशान लगी वस्तु के साथ $(n-k)$ और वस्तुओं का चयन कर सकते हैं। शेष k वस्तुओं को S_k^{m-1} विधियों से $(m-1)$ वर्गों में बंटित किया जा सकता है। अब k के मान को 0 से n तक लेने पर योग-नियम से परिणाम प्राप्त हो जाता है।

टिप्पणी : यद्यपि पिछले प्रमेय का कथन औपचारिक रूप से सही है, परन्तु यह याद रखना चाहिए कि दक्षिण पक्ष में सार्थक रूप से k केवल मान $m-1 \le k \le n$ ही ले सकता है जबकि अन्य पद शून्य हों। परन्तु एक अर्थ में प्रमेय का कथन अपेक्षाकृत अधिक सरल है।

स्टर्लिंग संख्याएँ और आच्छादक फलन

मानलीजिए $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ और $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ तब N से M पर आच्छादक फलनों (onto functions) की संख्या ठीक-ठीक $S_n^m\, m!$ होती है। इसका पता इस बात से चलता है कि, यदि f, N से M पर एक आच्छादक फलन है, तो **प्रतिलोम प्रतिबिंबों** (inverse images). $f^{-1}(1), f^{-1}(2), \ldots, f^{-1}(k)$ से m वर्गों में N का विभाजन प्राप्त होता है। यहां गुणनखंड m! इसलिए आता है, क्योंकि S_n^m केवल विभाजन को निरूपित करता है और जहां विभाजन के क्रम का कोई महत्व नहीं होता, परन्तु फलनों में इसकी उपेक्षा नहीं की जा सकती है। इसके बारे में और अधिक जानकारी प्राप्त करने के लिए आप इकाई 6 का भाग 6.3.2 देख सकते हैं।

5.3.8 द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्याओं का जनक फलन

यदि x एक चर हो तो x का एक साधारण घात x^n होता है, जहां n एक धन पूर्णांक है। किसी भी धन पूर्णांक n के लिए x का एक क्रमगुणित घात (factorial power) होता है जिसे $[x]_n$ के रूप में लिखते हैं और जिसकी परिभाषा इस प्रकार दी जाती है।

$[x]_n = x(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1).$

इसे पतती क्रमगुणित (falling factorial) भी कहा जाता है। स्टर्लिंग ही वह पहला व्यक्ति था जिसने स्टर्लिंग संख्याओं की सहायता से x के साधारण घातों और x के क्रमगुणित घात के बीच के संबंध का पता लगाया था।

प्रथम प्रकार की स्टर्लिंग संख्याओं की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है : यदि n एक धन पूर्णांक हो और $0 \le k \le n$, तो $s(n, k)$ n गुणनखंडो वाले 'पतती क्रमगुणित' के प्रसार में x^k का गुणांक होता है। अर्थात्

$$[x]_n = x(x-1)(x-2)\ldots(n-x+1) = \sum_{i=0}^{\infty} s(n,i)\, x^i.$$

वस्तुतः द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्या के संबंध में उसका परिणाम यह रहा है।

प्रमेय 9: $x^n = \sum_{j=0}^{n} S_n^j [x]_j$

उपपत्ति : यदि $n > 0$, तो मानलीजिए कि $F(N, J)$ एक n-अवयव समुच्चय से समुच्चय J पर आच्छादक फलनों की संख्या को प्रकट करता है। यदि हम समुच्चय M के सभी उपसमुच्चयों J की संख्याओं $F(N, J)$ को जोड़े तो हमें N से M पर फलनों की कुल संख्या प्राप्त हो जाएगी। इसे हम $\sum_{J \subset M}' F(N, J)$ के रूप में लिखेंगे। परन्तु स्पष्ट है कि N से M पर फलनों की संख्या m^n है। इस तरह,

$$m^n = \sum_{J \subset M} F(N, J) = \sum_{j=0}^{m} C(m, j)\, F(N, \{1, 2, \ldots, j\})$$

$$= \sum_{j=0}^{m} C(m, j)\, j!\, S_n^j = \sum_{j=0}^{m} S_n^j [m]_j$$

परन्तु $[m]_j = 0$, जहाँ $j > m$ और $S_n^j = 0$ जहाँ $j > n$ । अतः हम यह लिख सकते हैं

$$= \sum_{j=0}^{m} S_n^j [m]_j = \sum_{j=0}^{n} S_n^j [m]_j .$$

इस तरह, हमने यह सिद्ध कर दिया कि $m^n = \sum_{j=0}^{n} S_n^j [m]_j$. अब समीकरण $x^n = \sum_{j=0}^{n} S_n^j [n]_j$ लीजिए। यह x में घात n वाला एक बहुपद समीकरण है। परन्तु ऊपर दी गई उपपत्ति के अनुसार यह समीकरण, $x = 0, 1, 2, \ldots, n$ से संतुष्ट हो जाता है। परन्तु x में घात n वाले बहुपद समीकरण का तब तक n से अधिक मूल नहीं हो सकता जबतक कि यह एक सर्वसमिका नहीं हो जाता। इस तरह, वास्तव में हमारा समीकरण एक सर्वसमिका है। इस तरह, हमने यह सिद्ध कर दिया है कि सभी वास्तविक x के लिए

$$x^n = \sum_{j=0}^{m} S_n^j [x]_j$$

उदाहरण 10 : x^4 को पतती क्रमगुणितों के रूप में व्यक्त कीजिए और इस तरह $m = 0, 1, 2, 3, 4$ पर S_4^m ज्ञात कीजिए।

हल : $x^4 - [x]_4 = x^4 - (x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x$, इस तरह,
$x^4 - [x]_4 = x^4 - 6[x]_3 = 7x^2 - 6x$ अतः $x^4 - [x]_4 - 6[x]_3 - 7[x]_2 = x$ या
$x^4 = [x]_4 + 6[x]_3 + 7[x]_2 + [x]_1$

गुणांक ये हैं : $S_4^0 = 0, S_4^1 = 1, S_4^2 = 7, S_4^3 = 6, S_4^4 = 1$.

ध्यान दीजिए कि इसे हम $x^4 = a[x]_4 + b[x]_3 + c[x]_2 + d[x]_1$ लिखकर और दोनों पक्षों में उत्तरोत्तरतः $x = 1, 2, 3, 4$ प्रतिस्थापित करके अचर a, b, c, d निर्धारित करके भी कर सकते हैं।

* * *

E12) {1, 2, 3, 4} के विभाजनों को दो भागों में लिखिए। और इस तरह S_4^2 परिकलित कीजिए।

उदाहरण 11: S_3^2 और S_3^3 परिकलित कीजिए।

हल : $S_3^2 = S_2^1 + 2.S_2^2 = 1 + 2.\ 1 = 3$ यहाँ हमने इस तथ्य का प्रयोग किया है कि $S_n^1 = 1$.

$S_3^3 = 1$, क्योंकि प्रत्येक धन n के लिए $S_n^n = 1$.

* * *

अब हमें सिद्ध करने के लिए सभी आवश्यक तथ्य उपलब्ध हैं।

प्रमेय 10 : m अविभेद्य पात्रों में n विभेद्य वस्तुओं को यंटित करने की संख्या $S_n^1 + S_n^2 + \cdots + S_n^m$ होती है।

उपपत्ति : जब हम m अविभेद्य पात्रों में n विभेद्य वस्तुओं को यंटित करते हैं, तो m स्थितियां उत्पन्न होती हैं। स्थिति (k) यह है कि ठीक ठीक k पात्रों में वस्तुऐं उपस्थित है। (और शेष पात्र रिक्त हैं।) यहां k, 1 से m तक कुछ भी हो सकता है। स्पष्ट है कि स्थिति (k) में बंटनों की संख्या S_n^k है। अब प्रमेय योग-नियम से प्राप्त हो जाता है।

5.3.9 बेल-संख्याएँ

n अविभेद्य पात्रों में n विभेद्य वस्तुओं के यंटन की संख्या को (अमरीकी गणितज्ञ ई. टी. बेल के नाम पर) nवीं बेल-संख्या कहा जाता है और इसे B_n से निरूपित किया जाता है। B_n, n अवयवों मानलीजिए {1, 2, ... , n}, वाले समुच्चय के विभाजनों की संख्या भी है (अर्थात् $B_n \cdot$ n अवयवों वाले समुच्चय पर विभिन्न तुल्यता-संबंधों (equivalence relations) की संख्या भी है)।

उप प्रमेय $B_n = S_n^1 + S_n^2 + \ldots\ldots + S_n^n$

उदाहरण 12 : B_4 परिकलित कीजिए।

हल : परिभाषा के अनुसार

$B_4 = S_4^1 + S_4^2 + S_4^3 + S_4^4$ परन्तु $S_4^1 = 1 \cdot S_4^4 = 1$.

$S_4^2 = 7$, क्योंकि $S_4^2 = S_3^1 + 2.S_3^2 = 1 + 2.3 = 7$ $S_4^3 = 6$, क्योंकि $S_4^3 = S_3^2 + 3.S_3^3 = 3 + 3.1 = 6$ इस तरह $B_4 = 1 + 7 + 6 + 1 = 15$.

* * *

प्रमेय 11 : $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \cdot B_k$.

उपपत्ति : S_n^m का पुनरावृत्ति-संबंध का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$B_{n+1} = \sum_{m=1}^{n+1} S_{n+1}^m = \sum_{m=1}^{n+1} \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, S_k^{m-1} = \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \sum_{m=1}^{n+1} S_k^{m-1}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n, k) \cdot B_k .$$

ऊपर की उपपत्ति में हमने इस तथ्य का प्रयोग किया है कि $S_k^0 = 0$ और $S_k^{m-1} = 0$, जबकि $m - 1 > k$.

ध्यान दीजिए कि इस सूत्र की परिभाषा से हम $B_0 = 1$ लेते हैं।

उदाहरण 13 : उत्तरोत्तरतः $B_1, B_2, \ldots, B_6$ परिकलित कीजिए।

हल :

$B_1 = S_1^1 = 1.$

$B_2 = C(1, 0) \cdot B_0 + C(1,1). B_1 = 1 + 1 = 2$

$B_3 = C(2, 0) \cdot B_0 + C(2, 1). B_1 + C(2, 2). B_2 = 1 + 2.1 + 1.2 = 5$

$B_4 = C(3, 0). B_0 + C(3, 1). B_1 + C(3, 2). B_2 + C(3, 3). B_3 = 1 + 3.1 + 3.2 + 5 = 15$

$B_5 = C(4, 0). B_0 + C(4, 1). B_1 + C(4, 2). B_2 + C(4, 3). B_3 + C(4, 4). B_4$

$= 1 + 4.1 + 6.2 + 4.5 + 15 = 52$

$B_6 = C(5, 0). B_0 + C(5, 1). B_1 + C(5, 2). B_2 + C(5, 3). B_3 + C(5, 4). B_4 +$

$C(5, 5). B_5 = 1 + 5.1 + 10.2 + 10.5 + 5.15 + 52 = 203$

5.3.10 विभेद्य पात्रों में अविभेद्य वस्तुएँ

मानलीजिए कि m अविभेद्य वस्तुएँ है और n विभेद्य पात्र हैं। क्योंकि वस्तुऐं अविभेद्य है, इसलिए बंटन n पात्रों में वस्तुओं की संख्या पर ही केवल निर्भर करेगा। क्योंकि पात्र विभेद्य है इसलिए इन्हें एक पंक्ति में विन्यासित माना जा सकता है। अतः वंटनों की संख्या योगफल $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ के रूप में संख्या m के लिखने की विधियों की संख्या होती है जहां x_i ऋणेतर पूर्णांक है। परन्तु निम्नलिखित विधि से वंटनों की संख्या अधिक सरलता से प्राप्त की जा सकती है।

क्योंकि वस्तुएँ अविभेद्य हैं, इसलिए हम इन सभी को X मान सकते है। m, X को एक पंक्ति में विन्यासित कीजिए। X को पृथक करने वाले $m + 1$ स्थानों (जिनमें पहले X के पहले का स्थान और अंतिम X के बाद का स्थान भी सम्मिलित है), में $n - 1$ भंजन (break) लगाइए। किसी भी स्थान पर लगाए गए भंजनों की संख्या पर कोई रोक नही होता । अब हमें $n + m - 1$ अवयव प्राप्त है m अवयव X है $n - 1$ भंजन प्रतीक है। $n - 1$ भंजन प्रतीक, X को $x_1, x_2, \ldots, x_n$ X में पृथक करता है। इस तरह, इस प्रकार के वंटनों की संख्या $C(n + m - 1, m)$ होती है। इस तरह हमने इस प्रमेय को सिद्ध कर दिया है।

प्रमेय 12 : n विभेद्य पात्रों में m अविभेद्य वस्तुओं के वंटनों की संख्या $C(n + m - 1, m)$ होती है (पात्र के लिए कितनी ही वस्तुएँ क्यों न हों)।

उपप्रमेय : समीकरण $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ के ऋणेतर पूर्णांक होने की संख्या $C(n + m - 1, m)$ होती है।

यहाँ हम यह देखते हैं कि n विभेद्य पात्रों में m अविभेद्य वस्तुओं के वंटनों की संख्या, जबकि प्रत्येक पात्र में अधिक से अधिक एक वस्तु हो, $C(n, m)$ होती है। इस संबंध में और जानकारी प्राप्त करने के लिए इकाई 4 का भाग 4.4.2 देखिए।

उदाहरण 14 : दिखाइए कि n विभेद्य वस्तुओं के संचयों की संख्या, जबकि वस्तुओं को m बार लिया जा सकता है, $C(n + m - 1,\ m)$ है।

हल : यदि वस्तुएँ $\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}$ हों तो हम X_1 को x_1 बार, X_2 को x_2 बार, ... X_n को x_n बार ले सकते हैं। जिससे कि $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$, स्पष्ट है कि इसे $C(n + m - 1, m)$ विधियों से किया जा सकता है।

* * *

वैकल्पिक विधि : मानलीजिए हमें समीकरण $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m$ के ऋणेतर पूर्णांक हलों की संख्या प्राप्त हो जाती है। तब हम n विभेद्य पात्रों में m अविभेद्य वस्तुओं के बंटनों की संख्या प्राप्त कर सकते हैं, क्योंकि दो संख्याएँ बराबर हैं। अब $(1 + t + t^2 + \cdots)^n$ लीजिए। इस व्यंजक को n व्यंजकों $(1 + t + t^2 + \cdots)$ का गुणनफल माना जा सकता है। इसमें पहले कोष्ठक से घातांक x_1 वाला t लेकर, दूसरे कोष्ठक से घातांक x_2 वाला t लेकर, आदि आदि और nवें कोष्ठक से घातांक x_n वाला t लेकर और सभी पदों को गुणा करके, जबकि सभी x_i जुड़कर m हो जाते हों, t^m का गुणांक प्राप्त किया जाता है। इस तरह, समीकरण $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ के हलों की संख्या, $(1 + t + t^2 + \cdots)^n$ (जो कि $(1 - t)^{-n}$ है) के प्रसार में t^m के गुणांक के बराबर होती है। और यह $C(n + m - 1, m)$ होती है। ध्यान दीजिए कि यहाँ हमने ऋण पूर्णांक घातांक वाले द्विपद प्रसार का प्रयोग किया है। ऋण द्विपद प्रसार यह होता है। यदि n एक धन पूर्णांक हो, तो

$$(1 + x)^{-n} = \sum_{r=0}^{\infty} C(n + r - 1, r)(-1)^r x^r$$

इसी कारण से कुछ लेखक $C(n + m - 1, m)$ के स्थान पर संकेत $C(-n, m)(-1)^m$ का प्रयोग करते हैं।

इस तरह, n विभेद्य पात्रों में m अविभेद्य वस्तुओं के बंटनों की संख्या $C(n + m - 1, m)$ होती है।

उदाहरण 15: (क) ऋणेतर पूर्णांकों में और (ख) धन पूर्णांकों में $x + y + z + w = 10$ के कितने अलग-अलग हल हैं ?

हल : (क) स्पष्ट है कि उत्तर $C(4 + 10 - 1, 10)$ है और यह $C(13, 3) = 13.12.11/6 = 286$ हो जाता है।

(ख) यहाँ हम x, y, z, w को धनात्मक मानना चाहते हैं। अतः इन्हें हम क्रमशः $X + 1, Y + 1, Z + 1$ और $W + 1$ के रूप में लिख सकते हैं जहाँ X, Y, Z, W ऋणेतर हैं। अतः हम समीकरण $X + 1 + Y + 1 + Z + 1 W + 1 = 10$ या $X + Y + Z + W = 6$ के ऋणेतर हलों की संख्या प्राप्त करना चाहते हैं। अब, उत्तर $C(4 + 6 - 1, 6) = C(9, 6) = C(9, 3) = 84$ है।

* * *

उदाहरण 16: दिखाइए कि समीकरण $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = m$ के धन हलों की संख्या $C(m - 1, m - n)$ है।

हलः यदि एक धन हल $x_1, x_2, \ldots x_n$ हो, तो इसे $X_1 + 1, X_2 + 1, \ldots X_n + 1$ के रूप में लिखा जा सकता है, जहाँ X_i ऋणेतर है। इस तरह, अभीष्ट संख्या, $X_1 + X_2 + \cdots + X_n + n = m$ के ऋणेतर हलों की संख्या, या $X_1 + X_2 + \cdots + X_n = m - n$ के ऋणेतर पूर्णांक हलों की संख्या होती है और यह $C(n + m - n - 1, m - n) = C(m - 1, m - n)$ के बराबर होती है।

* * *

5.3.11 अविभेद्य पात्रों में अविभेद्य वस्तुएँ

मानलीजिए कि n अविभेद्य वस्तुएं हैं और m अविभेद्य पात्र हैं। किसी भी बंटन का योगफल n वाले ऋणेतर पूर्णांकों के अक्रमित m-यक से निर्धारित किया जाता है। यह योगफल n वाले ऋणेतर पूर्णांकों की लंबाई m वाले अवर्धमान अनुक्रमों (non-increasing sequences) की संख्या के तुल्य होती है। परन्तु, परिशुद्ध रूप में यह अधिक से अधिक m भागों वाले पूर्णांक n के विभाजनों की संख्या होती है अर्थात् $P_n^1 + P_n^2 + \cdots + P_n^m = Q_n^m = P_n(m)$. इसका अध्ययन हम पूर्णांकों के विभाजनों के संबंध में कर चुके हैं।

5.4 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है

1. हमने अपनी चर्चा (अक्रमित) प्राकृतिक संख्या के विभाजन से प्रारंभ की है।
2. विभाजनों की चर्चा के दौरान हमने आपको पुनरावृत्ति संबंधों और जनक फलनों की संकल्पनाओं से परिचित कराया है।
3. अनेक पात्रों में अनेक वस्तुओं बंटन से संबंधित चार स्थितियों पर चर्चा की गई है।
4. इस प्रक्रिया के दौरान हमने आपको बेल-संख्याओं और द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग संख्याओं (तथा प्रथम प्रकार की स्टर्लिंग संख्याओं से परिचित कराया है)

5.5 हल/उत्तर

E1) स्पष्टतः P_1, 1 है क्योंकि 1 का विभाजन केवल एक विधि से किया जा सकता है। P_3 का परिकलन करने के लिए हम सभी विभाजनों को इस प्रकार लिख सकते हैं
$1+1+1, 2+1, 3$ इस तरह $P_3 = 3$. 5 के विभाजन में हैं

$1+1+1+1+1$, $2+1+1+1$, $2+2+1$, $3+1+1$, $3+2$, $4+1$, 5.

इस तरह $P_5 = 7$.

E2) P_n^1 ठीक एक भाग वाले n के विभाजनों की संख्या है। यह केवल विभाजन (n) है। इस तरह $P_n^1 = 1$. Q_n^1 अधिक से अधिक एक भाग वाले n के विभाजनों की संख्या है। स्पष्टतः यह 1 है।

E3) Q_5^2 अधिक से अधिक 2 भागों वाले n के विभाजनों की संख्या है। अर्थात् $Q_5^2 = P_5^1 + P_5^2$. परन्तु $P_5^1 = 1$. P_5^2 के विभाजन $4+1$, $3+2$ हैं। अतः ये विभाजन संख्या में 2 हैं। इस तरह, $Q_5^2 = 3$. इसी प्रकार P_6^2 में $5+1$, $4+2$, $3+3$ हैं। इस तरह $Q_6^2 = 4$. व्यापक रूप में P_n^2 का परिकलन करने के लिए हमें n को $x+y$ के रूप में लिखना होता है, जहाँ $x \geq y$. यदि n विषम, मानलीजिए, $(2r+1)$, हो तो विभाजन
$(2r)+1, (2r-1)+(2r-2)+3, \ldots, (r+1)+r$ होंगे। स्पष्टतः संख्या में $r = (n-1)/2$.
परन्तु, यदि n सम, मानलीजिए 2r, हो, तो विभाजन $(2r-1)+1, (2r-2)+2, \ldots, (r)+r$ होंगे। स्पष्टतः संख्या में $r (= n/2)$. इसतरह, यदि n विषम हो, तो $Q_n^2 = (n-1)/2 + 1$ और यदि n सम है, तो $Q_n^2 = n/2 + 1$.

E4) P_n^n के केवल एक विभाजन में n संख्या में लिए गए 1 का योगफल होता है। इसतरह $P_n^n = 1$ · यदि हम P_n^{n-1} ज्ञात करना चाहते हैं तो इसकी केवल एक विधि एक संख्या में लिए गए 2 और $(n-2)$ संख्या में लिए गए 1 का योगफल प्राप्त करना है। इस तरह, $P_n^{n-1} = 1$.

E5) $2n+1$ के विभाजनों का गणन, जिनका प्रत्येक भाग 2 या 1 हो, आने वाले सभी 2 की संख्या को लेकर किया जा सकता है। स्पष्ट है कि हमे अधिक से अधिक n संख्या में 2 प्राप्त हो सकते हैं। r संख्या में लिए गए 2 के संगत एक अद्वितीय विभाजन होता है, जहाँ $r = 0, 1, 2, \ldots, n$. इस तरह, ऐसे $n+1$ विभाजन होंगे।

E6) हमें परिशुद्ध रूप में Q_{2n}^2 की आवश्यकता है। E3 अनुसार यदि $Q_n^2 = n/2 + 1$, यदि n सम हो। इस तरह, $Q_{2n}^2 = n+1$.

E7) 26 अक्षर विभेद्य वस्तुए हैं। हमें तीन विभेद्य पात्रों में अर्थात् पहली, दूसरी और तीसरी

स्थितियों में तीन-अक्षर वाले शब्द भरने हैं। स्पष्टतः इसका हल 26^3 है। और अंतिम अक्षर को x होना है तो संख्या केवल $26^2 \times 1 = 676$ होगी। यदि मध्य अक्षर एक स्वर अक्षर हो, तो गुणन-नियम के अनुसार उत्तर $26 \times 5 \times 26 = 3380$ होगा।

E8) एक पाँच अंकों वाली संख्या में हम यह नहीं चाहते कि पहला अंक शून्य हो। अतः गुणन-नियम के अनुसार 5-अंक वाली संख्याओं की संख्या 9.10..10.10.10 = 90000 होगी, केवल विषम अंकों (अर्थात् 1, 3, 5, 7, 9) से बनी 5-अंकों वाली संख्याओं की संख्या $5^5 = 3125$ होगी।

E9) (क) हम उपाध्यक्ष के पद के लिए एक महिला का चयन 4 विधियों से कर सकते हैं। शेष दो पदों को भरने के लिए शेष 8 व्यक्तियों में से 2 व्यक्तियों का चयन $8 \times 7 = 56$ विधियों से कर सकते हैं। अतः अभीष्ट संख्या $4 \times 56 = 224$ होगी।

(ख) यदि उपाध्यक्ष के पद पर एक महिला का होना हो (जिसका चयन 4 विधियों से किया जाता है) तो अन्य का चयन $5 \times 4 = 20$ विधियों से किया जा सकता है। यही बात महिला के सचिव पद पर भी लागू होती हैं। अतः योग-नियम और गुणन-नियम से उत्तर $20 \times 4 + 20 \times 4 = 160$ होगा।

(ग) बिना किसी प्रतिबंध के तीन का चयन $9 \times 8 \times 7 = 504$ विधियों से किया जा सकता है। यदि किसी महिला का चयन नहीं होना हो, तो इसे $5 \times 4 \times 3 = 60$ विधियों से किया जा सकता है। यहाँ हमें इसके पूरक की आवश्यकता है। इस तरह, अभीष्ट उत्तर $504 - 60 = 444$ होगा।

E10) यदि वर्णमाला में n अक्षर हों, तो गुणन नियम से अलग-अलग अक्षरों के m-अक्षरों वाले शब्दों को $n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) = \{n\}_m$ विधियों से बनाया जा सकता है।

E11) एकैकी प्रतिचित्रण में अलग-अलग अवयवों के प्रतिबिंब अलग-अलग होने चाहिए। m-समुच्चय के पहले अवयव के n संभव प्रतिबिंब होंगे, दूसरे अवयव के $n-1$ संभव प्रतिबिंब होंगे, आदि-आदि। अतः इस प्रकार के प्रतिचित्रणों की संख्या $n(n-1)\cdots(n-m+1) = \{n\}^m$ होगी।

E12) समुच्चय $\{1, 2, 3, 4\}$ को निम्नलिखित विधियों से दो भागों में विभाजित किया जा सकता है:

(1) $\{2, 3, 4\}$; (2) $\{1, 3, 4\}$; (3) $\{1, 2, 4\}$; (4) $\{1, 2, 3\}$; $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$; $\{1, 3\}$; $\{2, 4\}$; $\{1, 4\}$; $\{2, 3\}$ इस तरह 7 स्थितियाँ है। अतः $S_4^2 = 7$.

5.6 विविध प्रश्नावली

1. रसायन की n अभिन्न पुस्तकों, गणित की r अभिन्न पुस्तकों, भौतिकी की s अभिन्न पुस्तकों, और खगोलिकी की t अभिन्न पुस्तकों को अलमारी के तीन खानों में कितनी विधियों से विन्यासित किया जा सकता है? (यहाँ यह मानलीजिए कि खानों में रखी जाने वाली पुस्तकों की संख्या पर कोई प्रतिबंध नहीं है।)

2. एक स्टोर आठ अलग-अलग प्रकार का कैन्डी बेचता है। 15 टुकड़ों के बैग का चयन आप कितनी विधियों से भर सकते हैं?

3. 40 विद्यार्थियों के बीच एक विषय पर चर्चा करने के लिए एक स्नातक विद्यार्थी के नेतृत्व में 5-5 विद्यार्थियों के चार वर्ग और एक प्रोफेसर के नेतृत्व में 10-10 विद्यार्थियों के दो वर्ग कितनी विधियों से बनाए जा सकते हैं?

4. 20 नगीनों वाले तीन हार और 10 नगीनों वाले चार हार बनाने के लिए 100 अलग-अलग नगीनों का प्रयोग कितनी विधियों से किया जा सकता है?

5. यदि m अभिन्न पाशों और n अभिन्न सिक्कों को फेंका गया हो तो अलग-अलग कितने परिणाम हो सकते हैं?

6. बहुपद $3x^4 + 2x^2 + 1$ को क्रमगुणित पदों $[x]_4, [x]_1,$ आदि के रूप में व्यक्त कीजिए।

7. एक कंप्यूटर के आठ जॉब को अलग-अलग पाँच स्लेव कंप्यूटरों में बांटना है। यह मानकर कि प्रत्येक स्लेव कंप्यूटर को कम से कम एक जॉब अवश्य मिलेगा इस कार्य को कितनी विधियों से किया जा सकता है।

8. एक आठ-अवयव समुच्चय से एक चार-अवयव समुच्चय पर आच्छादित कितने फलन होंगे?

9. दिखाइए कि $S_n^{n-1} = C(n, 2)$.

10. दिखाइए कि $S_n^2 = 2^{n-1} - 1$.

11. दिखाइए कि $P_m^k = \sum_{i=1}^{k} P_{m-k}^i$.

12. निम्नलिखित के संयुग्मी विभाजन ज्ञात कीजिए:
(6, 5, 5, 3), (5, 4, 3, 2, 1), (8, 6, 6, 4, 2, 2).

13. दिखाइए कि 2 भागों में n के विभाजनों की संख्या n/2 होती है जबकि n सम होता है और $(n-1)/2$ होती है जबकि n विषम होता है।

14. दिखाइए कि $P_n - P_{n-1}$, 1 से अधिक भागों में n के विभाजनों की संख्या है।

15. दिखाइए कि $P_{n+2} + P_n \geq 2P_{n+1}$.

5.7 विविध प्रश्नावली के हल

1. अलमारी के खाने विभेद्य हैं। यह मानकर कि सभी पुस्तकें विभेद्य हैं, बंटन N^3 विधियों से किया जा सकता है, जहाँ $N = n + r + s + t$ एकबार बंटन हो जाने के बाद हम जानते हैं कि क्योंकि समान विषय की पुस्तकें विभेद्य नहीं होती इसलिए अलग-अलग बंटन की संख्या केवल $\frac{N^3}{n!r!s!t!}$ होगी।

2. हमें केवल यह ज्ञात करना है कि प्रत्येक प्रकार के कितने कैन्डियों को खरीदना है जिससे कि कुल योग 15 हो जाए। यह $x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 15$ के ऋणेतर पूर्णांक हलों की संख्या है। स्पष्ट है कि उत्तर $C(15 + 8 - 1, 15) = C(22, 15)$ होगा।

3. आइए पहले हम 40 विद्यार्थियों को 20-20 विद्यार्थियों के दो वर्गों में बांट दें। यह कार्य (40, 20) विधियों से किया जा सकता है। प्रथम 20 विद्यार्थियों को 5-5 विद्यार्थियों के वर्गों में $20!(5!)^4$ विधियों से बाँटा जा सकता है। शेष 20 विद्यार्थियों को 10-10 विद्यार्थियों के दो वर्गों में C(20,10) विधियों से बांटा जा सकता है। इस तरह, बाँटने की विधियों की अभीष्ट संख्या $C(40, 20)[20!/(5!)^4]C(20, 10)$ होगी जो सरल होकर $\frac{40!}{(10!)^2(5!)^4}$ हो जाती है।

4. 7 हारों के लिए नगीनों का चयन $\frac{100!}{(20!)^3(10!)^4}$ विधियों से किया जा सकता है। चयन कर लेने के बाद अलग-अलग k नगीनों का चयन वृत्तीय क्रमचय के रूप में $(k-1)!$ विधियों से किया जा सकता है। अभीष्ट उत्तर $\frac{100!}{(20!)^3(10!)^4}(19!)^3(9!)^4$ अर्थात् $\frac{100!}{20^3 10^4}$ है।

5. प्रत्येक पाशे के साथ 6 संभव परिणाम और प्रत्येक सिक्के के साथ 2 संभव परिणाम हो सकते हैं। m पाशों से प्राप्त किए गए परिणाम 1 से 6 तक की संख्याओं का अक्रमित m-यक होगा। यह सभी 2 आदि की संख्या की सभी 1 की संख्या से अलग होता है। यह

संख्या $x_1+x_2+\cdots+x_6=m$ के हलों की संख्या है। यह $C(m+6-1,m)=C(m+5,5)$ है।

इसी प्रकार n सिक्कों से $C(n+1,1)$ प्राप्त होता है। अतः अभीष्ट उत्तर $(n+1)C(m+5,5)$ है।

6. हमें $3x^4+2x^2+1$ को $a[x]_4+b[x]_3+c[x]_2+d[x]_1+e$ के रूप में लिखना है। ऐसा करने की एक सरल विधि यह है इसे उत्तरोत्तरतः मान $x=0,1,2,3,4$ दिए जाएँ और दोनों पक्षों की तुलना की जाए। $x=0$ पर $1=e$ प्राप्त होता है। $x=1$ पर $6=d+e$ अर्थात् $d=5$ प्राप्त होता है। $x=2$ पर $57=2d+2c+e$ अर्थात् $c=23$ प्राप्त होता है $x=3$ पर $262=e+3d+6c+6b$ अर्थात् $b=18$ प्राप्त होता है। $x=4$ पर $801=e+4d+12c+24b+24a$ अर्थात् $a=3$ प्राप्त होता है। इस तरह, अंततः हमें $3x^4+2x^2+1=3[x]_4+18[x]_3+23[x]_2+5[x]_1+1$ प्राप्त होता है।

7. यदि स्लेव कंप्यूटर विभेद्य हों, तो अभीष्ट संख्या समीकरण $x_1+x_2+\cdots+x_5=8$ के धन हलों की संख्या होगी और यह वही संख्या होगी $x_1+\cdots+x_5=3$ के ऋणेतर हलों की संख्या हैं अर्थात् $C(5+3-1,3)=C(7,3)$ है। यदि स्लेव कंप्यूटर अविभेद्य हैं, तो अभीष्ट संख्या ठीक-ठीक 5 भागों वाले 8 के विभाजनों की संख्या होगी और यह संख्या P_8^5 होगी।

8. 8-अवयव समुच्चय से 4-अवयव समुच्चय पर आच्छादक फलनों की संख्या $S_8^4\,4!$ होगी।

9. S_n^{n-1}, $(n-1)$ अरिक्त वर्गों में n वस्तुओं के विभाजनों की संख्या हैं। स्पष्ट है कि $(n-2)$ वर्ग एकल (singleton) होंगे और एक वर्ग द्विकल (doubleton) होगा। इसके लिए हमें एक द्विकल से दो अवयवों का चयन करना होता है और इस कार्य को $C(n,2)$ विधियों से किया जा सकता है।

10. S_n^2 दो अरिक्त वर्गों में n-समुच्चय के विभाजनों की संख्या है। इसके लिए हमें एक वर्ग के सदस्यों का चयन करना होता है। यह सर्वत्र वैश्लेषिक समुच्चय के अतिरिक्त n-समुच्चय का कोई अरिक्त उप-समुच्चय हो सकता है। परन्तु कुल उपसमुच्चयों की संख्या 2^n है। अतः अभीष्ट उत्तर $(2^n-2)/2=2^{n-1}-1$ है। हमें इसे 2 से विभाजित करना होता है क्योंकि दो वर्ग अक्रमित हैं।

11. हमें यह सिद्ध करना है कि $P_m^k=\sum_{i=1}^{k} P_{m-k}^i$ यह P_n^ks के पुनरावृत्ति-संबंध का एक पुनर्कथन होता है।

12. फेरर-ग्राफ़ बनाकर के हम यह सरलता से देख सकते हैं कि (6, 5, 5, 3), (5, 4, 3, 2, 1), (8, 6, 6, 4, 2, 2) के संयुग्मी विभाजन क्रमशः (4, 4, 4, 3, 3, 1), (5, 4, 3, 2, 1), (6, 6, 4, 4, 3, 3, 1, 1) हैं।

13. 2 भागों में n के विभाजनों की संख्या $x+y=n$, जहाँ $x\ge y$ के धन पूर्णांक हलों की संख्या है। यदि n सम है तो x, $n/2, n/2+1, \ldots, n-1$, हो सकता है, अर्थात् संख्या में $n/2$ हो सकता है। यदि n विषम है तो $x=y$ का होना असंभव है और हमें $x>y$ लेना होता है अतः $x=(n+1)/2, \ldots, n-1$ हो सकता है, अर्थात् संख्या $(n-1)/2$ हो सकता है।

14. P_n-P_{n-1}, n के विभाजनों की संख्या और $(n-1)$ के विभाजनों की संख्या का अंतर है। $(n-1)$ का विभाजन लीजिए। एक अतिरिक्त भाग के रूप में 1 जोड़ने पर हमें n का एक विभाजन प्राप्त होता है। अतः $n-1$ के विभाजनों और n के विभाजनों, जिनमें 1 एक भाग है, के बीच एकैकी संगति है। इससे परिणाम प्राप्त हो जाता है।

15. असमिका को $P_{n+2}-P_{n+1}\ge P_{n+1}-P_n$ के रूप में लिखा जा सकता है। पिछले प्रश्न के अनुसार वाम पक्ष 1 से अधिक भागों वाले $n+2$ के विभाजनों की संख्या है। क्योंकि इस प्रकार के विभाजनों की संख्या में n के साथ वृद्धि होती है - अतः इससे परिणाम प्राप्त हो जाता है।

इकाई 6 गणन संबंधी और जानकारी

इकाई की रूपरेखा

6.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम कोष्ठ नियम (pigeon hole principle) आविष्टि-अपवर्जन नियम और संचय विन्यास समस्याओं पर इन दो नियमों के बारे में चर्चा करेंगे। पढ़ेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आप

- समस्याओं पर कोष्ठ नियम लागू कर सकेंगे,
- आविष्टि-अपवर्जन नियम की सहायता से संचयविन्यास वस्तुओं की संख्या का गणन कर सकेंगे।

6.2 कोष्ठ नियम

परिमित समुच्चयों के बारे में एक स्पष्ट तथ्य, जिसे कोष्ठ नियम (pigeon-hole principle) के नाम से जाना जाता है पारदर्शी रूप में एक सरल नियम है जिसका कि संचयविन्यासिकी में अनेक अनुप्रयोग हैं।

मानलीजिए कि 10 बक्स और 11 वस्तुएं है। यदि प्रत्येक वस्तु को किसी न किसी बक्स में स्वेच्छया रखा गया हो, तो कम से कम एक बक्स में एक से अधिक वस्तु अवश्य होगा। देखने में तो यह बिलकुल स्पष्ट लगता है, परन्तु इस बात से सुनिश्चित नहीं हुआ जा सकता कि यदि वस्तुओं की संख्या बक्सों की संख्या से अधिक हो, कि प्रत्येक बक्स में अधिक से अधिक एक वस्तु अवश्य हो। इसके लिए किसी ओपचारिक की आवश्यकता नहीं है। इस नियम को कोष्ठ नियम कहा जाता है। यहाँ हम कोष्ठ नियम का औपचारिक कथन दे रहे हैं।

कोष्ठ नियम : यदि n बक्से हों और $(n+1)$ वस्तुएं हो, तो प्रत्येक वस्तु को किसी न किसी बक्स में रखने के लिए सदा ही एक ऐसा बक्स अवश्य होगा जिसमें एक से अधिक वस्तु हो, या यदि n कोष्ठों में m कबूतर हों और $m > n$, तो कम से कम एक ऐसा कोष्ठ अवश्य होगा जिसमें दो या अधिक कबूतर बैठे होंगे।

अधिकांश उदाहरणों में प्रयुक्त इस प्रकार का परिवर्त (variant) यह होता है : यदि $nm+1$ वस्तुओं को m बक्सों में बांटना हो, तो कम से कम एक बक्स में n वस्तुओं से अधिक वस्तुएं होंगी। इस नियम को व्यापकीकृत कोष्ठ नियम कहा जाता है।

व्यापकीकृत कोष्ठ नियम - कुछ परिवर्तन

प्रमेय 1 : मानलीजिए k और n धन पूर्णांक हैं। यदि k गेंदों को n बक्सों में रखना हो तो किसी न किसी बक्स में कम से कम $[k/n]$ गेंद $(n \leq [x] < x + 1)$ अवश्य होंगे।

उपपत्ति : यदि प्रत्येक बक्स में $[k/n]$ से कम गेंद हों तो अधिक से अधिक $n([k/n]-1)$ गेंद होंगे। परन्तु $n([k/n]-1) < n((k/n)+1-1) = k$, जो एक अंतर्विरोध है। उदाहरण के लिए यदि विविक्त गणित में 479 विद्यार्थी नामांकित हों और यदि पाठ्यक्रम के 9 सेक्शन हों, तो कुछ सेक्शन में कम से कम $\left[\frac{479}{9}\right] = [53.2] = 54$ विद्यार्थी अवश्य होंगे।

प्रमेय 2 : यदि एक परिमित समुच्चय S को k समुच्चयों में विभाजित किया गया हो तो कम से कम एक समुच्चय $\frac{|S|}{k}$ या इससे अधिक अवयव होंगे।

उपपत्ति : मानलीजिए $A_1, \ldots A_k$ समुच्चय S के भाग के समुच्चय हैं। तब $|A|$ का औसत मान $\frac{1}{k}\left[|A_1| + \cdots + |A_k|\right] = \frac{|S|}{k}$ है। अतः सबसे बड़े A_i में कम से कम इतने अवयव अवश्य होंगे।

प्रमेय 3 : फलन $f : S \rightarrow T$ लीजिए जहाँ S और T परिमित समुच्चय हैं जो $|S| > r . |T|$ को संतुष्ट करते है। तब समुच्चयों $f^{\leftarrow}(t)$ में से कम से कम एक समुच्चय के r से अधिक अवयव होंगे। ($f^{\leftarrow}(t)$. समुच्चय $\{t\}$ के प्रतिलोम प्रतिबिंब (inverse image) को प्रकट करता है और $= \{x \in S : f(x) = t\}$).।

उपपत्ति : परिवार $\{f^{\leftarrow}(t) : t \in T\}, k \leq |T|$ के साथ k समुच्चयों को S में विभाजित करता है। ऊपर दिखाए गए नियम के अनुसार $f^{\leftarrow}(t)$ के कुछ समुच्चय के कम से कम $\frac{|S|}{k}$ सदस्य अवश्य होंगे। क्योंकि परिकल्पना के अनुसार $\frac{|S|}{k} \geq \frac{|S|}{|T|} > r$, इसलिए इस प्रकार के समुच्चय $f^{\leftarrow}(t)$ के r से अधिक अवयव होंगे। जब $r = 1$, तब इस नियम का कथन यह होता है, यदि $f : S \rightarrow T$ और $|S| \geq |T|$ तो समुच्चयों $f^{\leftarrow}(t)$ में से कम समुच्चय के एक से अधिक अवयव होगें अर्थात् f एकैकी (injective) नहीं है।

उदाहरण 1: यह मानकर कि मित्रता एक-दूसरे के बीच होती है, यह दिखाइए कि लोगों के किसी भी वर्ग में हमें सदा ही ऐसे दो व्यक्ति मिल सकते है जिनके वर्ग में समान संख्या में मित्र हों। देखने में तो यह काफी आश्चर्यजनक लगता है। यदि वर्ग में n व्यक्ति हों, तो मानलीजिए कि iवे व्यक्ति के वर्ग में मित्रों की संख्या $f(i)$ है। स्पष्ट है कि $f(i)$, 0 और $(n-1)$ के ही मान केवल ले सकता है। यदि कोई $f(i)$, 0 हो, तो इसका अर्थ यह है कि वर्ग में iवें व्यक्ति का कोई मित्र नहीं है। इस स्थिति में कोई भी $f(i)$, $(n-1)$ नहीं हो सकता। अतः $f(i)$ में मानों 0 या $(n-1)$ में केवल एक ही मान उपस्थित हो सकता है। इस तरह, $f(i)$ केवल $(n-1)$ अलग-अलग मान ले सकता है कोष्ठ नियम के अनुसार दो $f(i)$ अवश्य बराबर होंगे।

* * *

उदाहरण 2 : यदि 1 इंच की भुजा वाले समबाहु त्रिभुज के अंदर या उसकी परिसीमा पर यदृच्छया 5 बिन्दुएं ली गई हों, तो दिखाइए कि अधिक से अधिक ½ इंच की दूरी पर हम दो बिन्दु प्राप्त कर सकते हैं।

हल : त्रिभुज की तीन भुजाओं के मध्य-बिन्दुओं को मिलाकर ½ इंच की भुजा वाले चार समबाहु त्रिभुजों में इस त्रिभुज को विभाजित कीजिए। अब इन चार त्रिभुजों के बक्स और पांच बिन्दुओं को वस्तु माना जा सकता है। कोष्ठ-नियम के अनुसार हम एक ऐसा छोटा त्रिभुज प्राप्त कर सकते है जिसके अंदर दो बिन्दु हों। स्पष्ट है कि इन दो बिन्दुओं के बीच की दूरी ½ इंच हो।

* * *

उदाहरण 3 : यदि 107 से कम दस अलग-अलग धन पूर्णांक दिए हुए हों तो दिखाइए कि ऐसे दो असंयुक्त उपसमुच्चय हो सकते हैं जिनका योगफल समान हो।

हल : दी जाने वाली बड़ी से बड़ी संख्याएँ 97, 98, ... 106 हो सकती हैं जिनका योगफल अधिक से अधिक 1015 होगा। अतः 0, 1, 2, ..., 1015 के निशान वाले कोष्ठ लीजिए। 10 धन पूर्णांकों के समुच्चय के $2^{10} = 1024$ उपसमुच्चय होंगे। समुच्चय की संख्याओं के योगफल से निशान लगे कोष्ठ में एक उपसमुच्चय रखिए। हमें 1024 उपसमुच्चयों को 1016 कोष्ठों में रखना है। अतः कुछ कोष्ठ में समान योगफल वाला एक से अधिक उपसमुच्चय अवश्य होगा। समान योगफल होने पर भी इनमें से दो उपसमुच्चय असंयुक्त नहीं हो सकते। इनके सर्वनिष्ठ अवयवों को हटा देने पर हमें समान योगफल वाले असंयुक्त उपसमुच्चय प्राप्त हो जाएंगे।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E1) यदि 3 cm की भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज में 10 बिन्दु लिए गए हों तो दिखाइए कि हम ऐसे दो बिन्दु प्राप्त कर सकते हैं। जिनके बीच की अधिक से दूरी 1 cm हो।

E2) 5 व्यक्तियों के वर्ग से व्यक्तियों के एक जोड़े को 11 अवसरों पर एक समारोह में भाग लेने के लिए बुलाया गया है दिखाइए कि व्यक्तियों के कुछ जोड़े समारोह में कम से कम दो बार अवश्य भाग लिए होंगे।

E3) 25 अवसरों पर चार व्यक्तियों को स्वतंत्र रूप से पंक्ति में लगा पाया गया। दिखाइए कि कम से कम दो अवसरों पर समान पंक्ति में समान क्रम में अवश्य रहे होंगे।

उदाहरण 4 : दिखाइए कि अलग-अलग n^2+1 पूर्णांकों पर प्रत्येक अनुक्रम में या तो $n+1$ संख्याओं का एक वर्धमान उपानुक्रम (increasing subsequence) या $n+1$ संख्याओं का ह्रासमान उपानुक्रम (decreasing subsequence) होगा।

हल : मानलीजिए अनुक्रम $a_1, a_2, \ldots a_{n^2+1}$ है। मानलीजिए कि $n+1$ संख्याओं का कोई वर्धमान उपानुक्रम नहीं है। प्रत्येक a_k के लिए मानलीजिए कि $s(k) \cdot a_k$ से प्रारंभ होने वाले सबसे लंबे वर्धमान उपानुक्रम की लंबाई है। क्योंकि $s(k)$ के सभी n^2+1, 1 और n के बीच है, इसलिए किसी न किसी लेवल को मानलीजिए m, का प्रयोग कम से कम $n+1$ बार अवश्य करना चाहिए। क्योंकि व्यापकीकृत कोष्ठ नियम के अनुसार इन संख्याओं में कम से कम $\left[\frac{n^2+1}{n}\right] = n+1$ समान होंगे। (यहाँ $s(k)$ कबूतर हैं और 1 से n तक की संख्याएँ कोष्ठ हैं)। अब यदि $i<j$ और $s(i)=s(j)$, तो $a_i > a_j$ अन्यथा a_j से प्रारंभ होने वाले सबसे लंबे वर्धमान उपानुक्रम के बाद a_i में वृद्धि होने लगेगी और a_i से प्रारंभ होने वाला लंबाई $s(j)+1$ का उपानुक्रम प्राप्त हो जाएगा, जो कि एक अंतर्विरोध है, क्योंकि $s(i)=s(j)$ तब $n+1$ पूर्णांकों a_k से, जहाँ $s(k)=m$, कम से कम $n+1$ की लंबाई वाला एक ह्रासमान उपानुक्रम अवश्य प्राप्त होगा।

* * *

उदाहरण 5 : यदि हम n पूर्णांक लें, जिनका अलग-अलग होना आवश्यक नहीं है, तो दिखाइए कि इनमें से कुछ संख्याओं का योगफल, n का एक गुणज होता है।

हल : मानलीजिए $S(m)$, प्रथम m संख्याओं का योगफल है। यदि किसी l, m, जहां $l<m$ के लिए $S(m)-S(l)$, n से भाज्य हो, तो $a_{l+1}+a_{l+2}+\cdots+a_m$, n का एक गुणज होगा। इसका अर्थ यह भी होगा कि n से भाग देने पर $S(l)$ और $S(m)$ के शेष समान होंगें। यदि हम इस प्रकार का युग्म प्राप्त न कर सकते हों, तो इसका अर्थ यह होगा कि n से भाग देने पर संख्याओं $S(1), S(2), \ldots, S(n)$ के शेष अलग-अलग होंगे। परन्तु, क्योंकि संभव शेष केवल n हैं,

अर्थात् 0, 1, 2, ... (n – 1) हैं, इसलिए इन संख्याओं में से एक संख्या का शेष अवश्य 0 होगा। इसका अर्थ यह है कि योगफलों S (i) में से एक योगफल n से विभाज्य है। इस तरह उपपत्ति पूरी हो जाती है। वस्तुतः यहाँ हमने यह सिद्ध किया है कि क्रमागत पदों (consecutive terms) के पदों के योगफलों में से एक योगफल n से विभाज्य होता है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E4) यदि 1, ..., 20 से 11 पूर्णांकों का एक समुच्चय लिया गया हो, तो दिखाइए कि इनमें हम ऐसा पूर्णांक प्राप्त कर सकते हैं जो कि दूसरे को भाग देते हों।

E5) यदि 15 बक्सों में 100 गेंद रखे गए हों, तो दिखाइए कि दो बक्सों में समान संख्या में गेंद होगें।

E6) यदि $a_1, a_2, ..., a_n$: 1, 2, ..., n का एक क्रमचय हो और n विषम हो, तो दिखाइए कि गुणनफल $(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_n - n)$ अवश्य सम होगा।

अब कोष्ठ नियम के बारे में कुछ और बताकर तथा कुछ ओर प्रश्न देकर हम इसे यहीं समाप्त कर रहे है। कोष्ठ नियम संबंधी कुछ और जानकारी :

1. मानलीजिए हम परिमित संख्या में लिए गए बक्सों में अनंत वस्तु रखते हैं। तब कम से कम एक बक्स में अनंत वस्तुएं अवश्य होंगी।

   ऐसा इसलिए होता है कि यदि प्रत्येक बक्स में केवल परिमित संख्या में वस्तुएं रखी गई हों, तो इन वस्तुओं की कुल संख्या भी परिमित होगी।

2. मानलीजिए $A_1, A_2, ..., A_n$ परिमित समुच्चय S के उपसमुच्चय हैं जिससे कि S का प्रत्येक अवयव कम से कम 6 समुच्चय A_i में कम से कम t समुच्चय A_i में अवश्य हो। तब A में अवयवों की औसत संख्या कम से कम $t \cdot \frac{|S|}{k}$ होगा। व्यापकीकृत कोष्ठ नियम से समुच्चय A_j अतिव्यापन करते हैं।

   कोष्ठ नियम प्रमेय 2 की एक विशेष स्थिति है, जबकि t = 1.

E7) प्रत्येक धन पूर्णांक को VIBGYOR के सात रंगों में से एक रंग दिया गया है। दिखाइए कि कम से कम एक रंग का प्रयोग अनंत बार अवश्य किया गया होगा।

E8) मानलीजिए A, {1, 2, ..., 50} का एक नियत 10 अवयव उपसमुच्चय है। दिखाइए कि A में दो अलग-अलग 5-अवयव उपसमुच्चय है जिनके अवयवों का योगफल समान है।

E9) धन पूर्णांकों को 100 समुच्चयों में वर्गीकृत किया गया है। दिखाइए कि कम से कम एक समुच्चय की अनंत सम संख्याऐं होंगी। क्या यह आवश्यक है कि कम से कम एक समुच्चय की अनंत सम संख्याएं और अनंत विषम संख्याएं हों?

6.3 आविष्टि अपवर्जन नियम

आइए पहले हम एक उदाहरण लेकर इस नियम को समझने का प्रयास करें।

54 सदस्यों के क्लब में 34 टेनिस खेलते हैं, 22 गोल्फ खेलते हैं और 10 दोनों खेल खेलते हैं। 11 हैंडबाल खेलते हैं जिनमें से 6 टेनिस भी खेलते हैं, 4 गोल्फ भी खेलते हैं और 2 टेनिस और गोल्फ दोनों ही खेतते हैं। ऐसे कितने सदस्य हैं जो तीन खेलों में से कोई भी खेल नहीं खेलते ?

मानलीजिए S क्लब के सभी सदस्यों के समुच्चय को प्रकट करता है, मानलीजिए T टेनिस खेलने वाले सदस्यों को, G गोल्फ खेलने वाले सदस्यों को, और H हैंडबाल खेलने वाले सदस्यों को निरूपित करता है। आइए हम A के अवयवों की संख्या को $|A|$ से निरूपित करें। संख्या $|S|-|T|-|G|-|H|$ लीजिए। क्या यह संख्या हमारे प्रश्न का उत्तर है? नहीं, क्योंकि वे सदस्य जो T और G दोनों में हैं उन्हें दो बार घटा दिया गया है। इस दो बार के घटाने की पूर्ति करने के लिए अब हम संख्या $|S|-|T|-|G|-|H|+|T\cap G|+|G\cap H|+|H\cap T|$ ले सकते हैं। क्या यह हमारे प्रश्न का उत्तर है? नहीं, क्योंकि उन सदस्यों को जो तीनों खेल खेलते हैं उन्हें तीन बार घटाया गया है और तीन बार जोड़ा गया है। परन्तु, इन सदस्यों को पूरी तरह से हटा देना चाहिए। अतः अब हम संख्या $|S|-|T|-|G|-|H|+|T\cap G|+|G\cap H|+|H\cap T|-|T\cap G\cap H|$. यह सही उत्तर है। यह $54-32-22-11+6+4-2=5$ होता है।

इस सूत्र में सही उत्तर प्राप्त करने के लिए हमने बारी-बारी से आविष्टियों (inclusions) और अपवर्जनों (exclusions) का प्रयोग किया है, यह आविष्टि और अपवर्जन नियम की एक सरल स्थिति है। इसे **चालनी नियम (sieve principle)** भी कहा जाता है। ऐसा कहने का कारण यह है कि एक निश्चित कोटि प्राप्त करने के लिए वस्तुओं को और बारीक चालन किया जाता है।

आविष्टि-अपवर्जन नियम से हमें विभिन्न सर्वनिष्ठों (intersections) के आमापों (size) के रूप में सम्मिलिन (union) का आमाप प्राप्त हो जाता है।

$A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n$ का आमाप परिकलित करने के लिए $A_1, A_2, \ldots, A_n$ से समुच्चयों के सभी संभव सर्वनिष्ठों के आमाप परिकलित कीजिए। विषम संख्या में लिए गए समुच्चयों का सर्वनिष्ठ लेने पर प्राप्त परिणामों को जोड़िए और तब सम संख्या में लिए गए समुच्चयों का सर्वनिष्ठ लेने पर प्राप्त परिणामों को घटाइए।

आदर्श रूप में आविष्टि-अपवर्जन नियम उन स्थितियों में उपयुक्त होती हैं जिनमें (i) हम अवयवों की सूची नहीं, अपितु $A_1\cup A_2,\ldots\cup A_n$ का आमाप प्राप्त करना चाहते हैं। और
(ii) बहु-सर्वनिष्ठों का गणन सरलता से किया जा सकता है।

अब हम निम्नलिखित प्रमेय में आविष्ट-अपवर्जन सूत्र का प्रयोग उसके व्यापक रूप में करेंगे :

प्रमेय 4 : मानलीजिए N वस्तुओं का एक समुच्चय है और n गुणधर्मों $p_1, p_2, \ldots, p_n$ का एक समुच्चय है जिन्हें इन वस्तुओं पर लागू किया जा सकता है। यहां गुणधर्म का अभिप्राय उस निकष (criterion) से है जिससे हम यह कह सकते हैं कि कोई वस्तु निकष को संतुष्ट करती है या नहीं। आइए हम यह मान लें कि प्रत्येक वस्तु को एक भार दिया गया है। मानलीजिए P गुणधर्मों के समुच्चय को निरूपित करता है। यदि A, P का एक उपसमुच्चय हो, तो मानलीजिए W (A) उन वस्तुओं के भार के योगफल को निरूपित करता है जिनमें A के सभी गुणधर्म है (जिनमें संभवतः वे गुणधर्म भी हों जो A में नही है) तब हमें यह सूत्र प्राप्त होता है।

$$E(0)=W(\phi)-\sum_{A\subset P, |A|=1} W(A)+\sum_{A\subset P, |A|=2} W(A)-\cdots+(-1)^n W(P).$$

जहाँ $W(\phi)$ सभी N वस्तुओं के भारों का योगफल है और E (0) उन सभी वस्तुओं के भारों का योगफल है जिनमें P का कोई भी गुणधर्म उपस्थित न हो या दूसरे शब्दों इनमें ठीक-ठीक 0 गुणधर्म हों।

ऊपर दिए गए सूत्र से उन वस्तुओं के भारों का योगफल प्राप्त हो जाता है जिनमें P का कोई भी गुणधर्म उपस्थित नहीं है।

उपपत्ति : एक ऐसी वस्तु लीजिए जिसमें P के ठीक-ठीक r गुणधर्म उपस्थित हों। आइए हम यह देखें कि सूत्र के दक्षिण पक्ष में इसके भार को कितने बार लिया गया है। स्पष्ट है कि इसके भार को केवल उन पदों में लिया गया है जहाँ r गुणधर्मों के समुच्चय में A आविष्ट होता है। $W(\phi)$ में इसे एक बार लिया गया है।

$\sum_{A \subset P, |A| = 1}' W(A)$ में इसे (वस्तुतः घटाकर) r बार लिया गया है। अगले पद में इसे $C(r, 2)$ बार जोड़ा गया है और यह प्रक्रिया आगे चलती रहती है। इस तरह योगफल में यह

$C(r, 0) - C(r, 1) + C(r, 2) - C(r, 3) + \cdots + (-1)^r C(r, r)$

बार आता है। इस तरह, उस वस्तु के भार को, जिसमें कोई भी गुणधर्म उपस्थित नहीं होता, योगफल में ठीक-ठीक एक बार जोड़ा जाता है। इससे सूत्र की परिशुद्धता सिद्ध हो जाती है।

ध्यान दीजिए कि $0 = (1-1)^r = 1 - C(r, 1) + C(r, 2) - \cdots + (-1)^r C(r, r)$, यदि $r > 0$ परन्तु, यदि $r = 0$, तो $(1-1)^0 = 1$.

उपप्रमेय 1 : यदि हम प्रत्येक वस्तु का भार 1 ले लें, तो हमें ऐसी वस्तुओं की संख्या, जिनमें सूत्र से P का कोई गुणधर्म उपस्थित नहीं है, यह होती है।

$$N(p_1' p_2' \ldots p_n') = N - \sum_{i=1}^{n} N(p_i) + \sum N(p_i p_j) - \cdots + (-1)^n N(p_1 p_2 \cdots p_n) \qquad (2)$$

जहाँ $N(p_i)$ उन वस्तुओं की संख्या को प्रकट करता है जिनमें गुणधर्म p_i और p_j उपस्थित हैं और $N(p_i')$ उन वस्तुओं की संख्या को प्रकट करता है जिनमें p_i के गुणधर्म न हो।

यदि विशेष रूप से उल्लेख न किया गया हो, तो यह मानलीजिए कि प्रत्येक वस्तु का भार 1 है। तब एक संग्रह के भारों का योगफल संग्रह की गणन-संख्या के ठीक-ठीक बराबर होता है।

मानलीजिए $n(A)$ समुच्चय के अवयवों की संख्या को प्रकट करता है (जिसे हम $|A|$ से प्रकट करते हैं) हम $A_1 \cap A_2 \cap A_3'$ को $A_1 A_2 A_3'$ से प्रकट करते हैं जहां A_3' समुच्चय A_3 का पूरक है। एक अवयव $A_1' A_2' \ldots A_n'$ का एक सदस्य होता है, जबकि यह किसी भी समुच्चय $A_i', i = 1, 2, \ldots, n$ का सदस्य न हो।

उपप्रमेय 2 : मानलीजिए $A_1, A_2, \ldots, A_n$, N अवयवों वाली समष्टि U के n समुच्चय है। मानलीजिए S_k, A_i के सभी k-यक सर्वनिष्ठ के आमापों का योगफल है। तब

$$n(A_1' A_2' \ldots A_n') = N - S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^k S_k + \cdots + (-1)^n S_n' \qquad (3)$$

उपप्रमेय 3 : मानलीजिए $A_1, A_2, \ldots, A_n$ समष्टि U के n समुच्चय हैं। तब

$$n(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{k-1} S_k + \cdots + (-1)^{n-1} S_n \qquad (4)$$

अब यहाँ हम सूत्र को अच्छी तरह से समझने के लिए कुछ उदाहरण दे रहे हैं।

उदाहरण 6 : 1 से 25 तक की उन संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 2 या 3 से भाज्य न हो।

हल : आइए हम $\{1, 2, \ldots, 25\}$ से पूर्णांक r को r का एक भार दें। तब हमें उन सभी वस्तुओं के भारों का योगफल ज्ञात करना है जिनमें दो गुणधर्म (1) 2 से भाज्य और (2) 3 से भाज्य होने का गुणधर्म नहीं है।

इस स्थिति में,

$W(0) = 1 + 2 + \cdots + 25 = 325$

$W(1) = 2 + 4 + \cdots + 24 = 2(1 + 2 + \cdots + 12) = 156$

(उन सभी वस्तुओं के भारों का योगफल जिनमें गुणधर्म (1) उपस्थित है।)

$W(2) = 3 + 6 + \cdots + 24 = 3(1 + 2 + \cdots + 8) = 108$ और

$W(1, 2) = 6 + 12 + 18 + 24 = 60$ छलनी सूत्र (sieve formula) से अभीष्ट उत्तर यह होगा

$325 - 156 - 108 + 60 = 121$.

* * *

हम उपप्रमेय 2 और 3 के अनुप्रयोग को अच्छी तरह से समझने के लिए निम्नलिखित उदाहरण ले रहे हैं।

उदाहरण 7 : पाँच (अलग-अलग) बक्सों में r अलग-अलग वस्तुओं को कितनी विधियों से वंटित किया जा सकता है जबकि (i) कम से कम एक बक्स रिक्त रहे? (ii) कोई भी बक्स $(r \geq 5)$ रिक्त न रहे?

हल : मानलीजिए U पांच बक्सों में r अलग-अलग वस्तुओं के सभी वंटनों का समुच्चय है। मानलीजिए A_i उन वंटनों का समुच्चय है जिनका iवां बक्स रिक्त है। तब वंटनों की अभीष्ट संख्या, जबकि कम से कम एक बक्स रिक्त हो, $n(A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_5)$ है। यहाँ $N = 5^r$, $n(A_i) = 4^r = (5-1)^2$ वंटनों की संख्या, जिनमें शेष चार बक्सों में से प्रत्येक में एक-एक वस्तु वंटित की गई है $n(A_i A_j) = 3^r = ((5-2)^r)$ आदि आदि। इस तरह, ऊपर के उपप्रमेय 3 से हमें यह प्राप्त होता है।

$$n(A_1 \cup \ldots \cup A_5) = S_1 - S_2 + S_3 - S_4 + S_5$$

$$= C(5, 1)\, 4^r - C(5, 2)\, 3^r + C(5, 3)\, 2^r (- C(5, 4)\, 1^r + 0$$

और उपप्रमेय 2 से N (जबकि कोई बक्स रिक्त न हो)

$$= 5^r - C(5, 1)\, 4^r + C(5, 2)\, 3^r - C(5, 3)\, 2^r + C(5, 4)\, 1^r .$$

* * *

उदाहरण 8 : धन पूर्णांकों $x \leq 6$, $y \leq 7$, $z \leq 8$, $w \leq 9$ में समीकरण $x + y + z + w = 20$ के कितने हल होगें?

हल : आविष्टि-अपवर्जन का प्रयोग करने के लिए हम वस्तुओं को समीकरण का हल (धन पूर्णांकों में) मान लेते हैं। हल में गुणधर्म p_1 होता है जबकि $x > 6$, गुणधर्म p_2 होता है जबकि $y > 7$ गुणधर्म p_3 होता है, जबकि $z > 8$ और गुणधर्म p_4 होता है, जबकि $w > 9$. तब हमें परिशुद्ध रूप में E_0 की आवश्यकता होती है। समीकरण के धन हलों की कुल संख्या
$C(20 - 1, 4 - 1) = C(19, 3)$, है इस तरह $W(\phi) = C(19, 3)$ इसी प्रकार
$W(p_1) = C(20 - 6 - 1, 4 - 1) = C(13, 3)$, $W(p_2) = C(12, 3)$, $W(p_3) = C(11, 3)$] आदि आदि।

आविष्टि-अपवर्जन से हमें यह प्राप्त होता है

$$E(0) = C(19, 3) - C(13, 3) - C(12, 3) - C(11, 3) - C(10, 3)$$

$$+ C(6, 3) + C(5, 3) + C(4, 3) + C(4, 3) + C(3, 3)$$

$$= 969 - 286 - 220 - 165 - 120 + 20 + 10 + 4 + 4 + 1$$

$$= 217$$

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए :

E10) 0 से 999 तक की कितनी संख्याएं या तो 5 या 7 से विभाज्य नहीं हैं?

E11) आठ लोग एक इलेवेटर पर जाते हैं। इलेवेटर चार तलों पर रुकता है और जब भी रुकता है तब कम से कम एक व्यक्ति बाहर अवश्य निकलता है। चार तलों पर रुकने के बाद

इलेवेटर खाली हो जाता है। बताइए कि कितनी विधियों से इसे किया जा सकता है?

E12) कितनी छः अंकों वाली संख्याओं में ठीक-ठीक तीन अलग-अलग अंक होते हैं ?

6.3.1 संख्या सिद्धांत का अनुप्रयोग-ऑयलर-टोटिएण्ट फलन

मानलीजिए m एक धन पूर्णांक है जिसके अलग-अलग अभाज्य गुणनखंड $p_1, p_2, \ldots, p_n$ हैं। तब 1 और m के बीच के पूर्णांकों, जो सापेक्षतः m से अभाजय हैं (जिनका 1 के अतिरिक्त अन्य कोई सर्वनिष्ठ गुणनखंड नहीं है), की संख्या निम्नलिखित के बराबर होती है।

$$m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right)$$

(इस व्यंजक को प्रायः $\phi(m)$ से प्रकट किया जाता है और यह संख्या सिद्धान्त (number theory) में ऑयलर-टोटिएण्ट फलन को परिभाषित करता है)

हल : मानलीजिए वस्तुऐं $\{1, 2, 3, \ldots m\}$ हैं और मानलीजिए कि गुणधर्म i', जहाँ $1 \le i \le n$, वह गुणधर्म है जिसमें एक संख्या p_i से भाज्य होता है। तब इस समुच्चय के पूर्णांक, जो सपेक्षतः m से अभाज्य होते हैं, ठीक-ठीक वे पूर्णांक होते हैं जिनमें गुणधर्म $1, 2, \ldots, n$ में से कोई भी गुणधर्म नहीं होता। अतः (सूत्र (1) से) उत्तर यह होगा

$$\begin{aligned}
&m\\
&- W(1) - W(2) - \cdots - W(n)\\
&+ W(1,2) + W(1,3) + \cdots + W(n-1, n)\\
&- W(1,2,3) - W(1,2, \ldots) - \cdots - W(n-2, n-1, n)\\
&+ \cdots\\
&\vdots\\
&(-1)^n W(1, 2, \ldots n).
\end{aligned}$$

परन्तु $W(i) = \frac{m}{p_i}$, $W(i,j) = \frac{m}{p_i p_j}$ आदि। अतः अभीष्ट संख्या यह है

$$m - \sum_{i=1}^{n} \frac{m}{p_i} + \sum_{i,j} \frac{m}{p_i p_j} - + \cdots + (-1)^n \frac{m}{p_1 p_2 \cdots p_n}.$$

परन्तु, दिया गया व्यंजक निम्नलिखित व्यंजक के बराबर है

$$m\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{p_n}\right).$$

6.3.2 आच्छादक प्रतिचित्रों का अनुप्रयोग

यहाँ हम यह दिखाएँगे कि एक m-अवयव समुच्चय से एक (k-अवयव समुच्चय पर आच्छादक फलनों की संख्या $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C(k,i)(k-i)^m$ है, $(m \ge k \ge 1)$ इसे सिद्ध करने के लिए हम वस्तुओं को एक m-अवयव समुच्चय M से एक k-अवयव समुच्चय K पर सभी प्रतिचित्रणों से परिभाषित करेंगे। इन वस्तुओं के लिए हम k गुणधर्मों को परिभाषित करेंगे। iवाँ गुणधर्म यह है कि प्रतिचित्रण में एक प्रतिबिंब के रूप में K का iवाँ अवयव नहीं होता। स्पष्ट है कि वस्तुओं की संख्या k^m है। K के i अवयवों के एक विशिष्ट समुच्चय को छोड़कर प्रतिचित्रणों की संख्या $(k-i)^m$ होती है और यहाँ ऐसे $C(k, i)$ समुच्चय हैं। अब आविष्टि अपवर्जन नियम के अनुप्रयोग से अभीष्ट उत्तर प्राप्त हो जाता है।

अधिक परिशुद्ध रूप में, ये M से K पर अलग-अलग आच्छादक फलन (subjective functions) $k^m - C(k,1)(k-1)^m + C(k,2)(k-2)^m - \cdots + (-1)^{k-1} C(k,k-1) 1^m$ है।

उदाहरण 9: एक पांच-अवयव समुच्चय से एक तीन अवयव समुच्चय पर कितने फलन होते हैं।

हलः उत्तर है, $\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C(k,i)(k-i)^m$, $m = 5$ और $k = 3$ इसतरह अपेक्षित उत्तर यह होगा

$$3^5 - 3 \times 2^5 + 3 \times 1^5 = 243 - 96 + 3 = 150.$$

* * *

प्रमेय 1: एक m-अवयव समुच्चय का k वर्गों में विभाजनों की संख्या यह होती है

$$\frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C(k,i)(k-i)^m$$

उपपत्तिः यदि k वर्ग विभेद्य हैं तो विभाजनों की संख्या वही होगी जो कि एक m-अवयव समुच्चय से एक k-अवयव समुच्चय पर फलनों की संख्या है। क्योंकि वर्ग अविभेद्य हैं, इसलिए हमें इस संख्या को $k!$ से भाग देना होगा। आच्छादक प्रतिचित्रों के पिछले अनुप्रयोग से परिणाम प्राप्त हो जाता है। इस तरह हमें S_m^k का एक स्पष्ट सूत्र प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण 10: स्टर्लिंग संख्या S_5^3 क्या है ?

हलः हम यह देख चुके हैं कि एक 5-अवयव समुच्चय से एक तीन-अवयव समुच्चय पर फलनों की संख्या 150 होती है। पिछले प्रमेय को लागू करने पर उत्तर $150 / 3! = 25$ प्राप्त हो जाता है।

* * *

उदाहरण 11: मानलीजिए A,B,C समुच्चय X के तीन परिमित उपसमुच्चय हैं। दिखाइए कि

$$|A \cup B \cup C| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |B \cap C| A \cap C| - |A \cap B \cap C| = 0.$$

हलः वस्तुओं के समुच्चय को समुच्चय $A \cup B \cup C$ के रूप में लीजिए। मानलीजिए गुणधर्म p_1 है A का सदस्य नहीं हैं, गुणधर्म p_2 है, B का सदस्य नहीं है, गुणधर्म p_3 है, C का सदस्य नहीं है। तब स्पष्ट है कि उन अवयवों की, जो तीन समुच्चयों मे से किसी भी समुच्चय का सदस्य नहीं है, संख्या का गणन प्रश्न के व्यंजक से किया जाता है। स्पष्ट है कि संख्या 0 है, क्योंकि यहां हम $A \cup B \cup C$ के अवयवों को ही केवल ले रहे हैं।

* * *

6.3.3 प्रायिकता पर आविष्टि-अपवर्जन नियम का अनुप्रयोग

आविष्टि-अपवर्जन नियम का एक महत्त्वपूर्ण अनुप्रयोग प्रायिकता पर होता है, मानलीजिए प्रायिकता समष्टि (probability space) में n घटनाऐं है। तब

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r}).$$

उपपत्ति : इस बात की ओर अवश्य ध्यान दीजिए कि ऊपर दिए गए सूत्र में AB का अर्थ है $A \cap B$, और $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ का अर्थ है घटनाओं $A_1, A_2, \ldots, A_n$ में से कम से कम एक घटना का घटना।

आइए हम प्रत्येक प्रारंभिक घटना को उसकी प्रायिकता के बराबर भार दें। iवाँ गुणधर्म यह है कि प्रारंभिक घटना, घटना A_i का सदस्य है। तब हमें $W(\phi) = 1$ प्राप्त होगा।

मार्ग नियम के अनुसार $A_1' A_2' \ldots A_n'$, $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ का पूरक है। परन्तु आविष्टि-अपवर्जन नियम से हमें यह प्राप्त होता है

$$P(A_1' A_2' \cdots A_n') = 1 - \sum_{r=1}^{n} (-1)^r \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_r \le n} P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_r})$$

अब इस तथ्य से परिणाम प्राप्त हो जाता है कि

$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = 1 - P(A_1' A_2' \ldots A_n')$.

6.3.4 अपविन्यासों का अनुप्रयोग

व्यंजक $a_1 a_2 \cdots a_n$ को $1, 2, \ldots, n$ का क्रमचय कहा जाता है जबकि सभी a_i अलग-अलग हों और $\{1, 2, \ldots, n\}$ से प्राप्त होते हों। क्रमचय $a_1 a_2 \cdots a_n$ को इस स्थिति में अपविन्यास (derangement) कहा जाता है जबकि $a_i \ne i$, जहाँ $i = 1, 2, \ldots, n$. इसतरह 231 एक अपविन्यास है, जबकि 321 एक अपविन्यास नहीं है क्योंकि 2 इसकी प्राकृतिक स्थिति में है।

अब समस्या d_n को, जो कि 1 से n तक की संख्याओं के अपविन्यासों की संख्या है। मानलीजिए 1 से n तक के सभी क्रमचयों का समुच्चय हमारे वस्तु हैं और मानलीजिए इनमें से प्रत्येक वस्तु को हम 1 का भार देते है। गुणधर्म p_i यह है कि संख्या i क्रमचय की iवीं स्थिति पर होती है। तब d_n परिशुद्धतः $W(\phi)$ होगा। इससे यह पता चलता है कि

$W(p_i) = (n-1)!$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $W(p_1 p_2)! = (n-2)!$, $i, j = 1, 2, \ldots n$, $i \ne j$.

स्पष्ट है कि $W(p_{i_1} \cdot p_{i_2} \ldots p_{i_r}) = (n-r)!$, क्योंकि i_j से, जहाँ $j = 1, 2, \cdots, r$, i_j वीं स्थिति को नियत कर लेने के बाद हम शेष $(n-r)$ स्थितियों को शेष $(n-r)$ संख्याओं में $(n-1)!$ विधियों से भर सकते हैं। आविष्टि अपवर्जन नियम से हमें यह प्राप्त है

$$d_n = W(\phi) = n! - C(n,1)(n-1)! + C(n,2)(n-2)! \cdots + (-1)^n C(n,n)\,0!$$

$$= n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

टिप्पणीः व्यंजक $\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right) e^{-1}$ के प्रसार का प्रारंभ है। n का थोड़ा वृहत मान होने पर भी D_n, $n!\,e^{-1} = 0.36788\,n!$ के काफी निकट हो जाता है। इस संबंध में निम्नलिखित सूत्र हैः n वस्तुओं के समुच्चय के संबंध में क्रमचयों की संख्या जिनमें (i) r वस्तुओं के एक उपसमुच्चय को अपविन्यासित किया गया है, निम्नलिखित सूत्र से अभिकलित की जा सकती है

$$n! - C(r,1)(n-1)! + C(r,2)(n-2)! - \cdots + (-1)^r C(r,r)(n-r)! \qquad (5)$$

(ii) जबकि ठीक-ठीक r अवयव अपनी प्राकृतिक स्थिति में हों, $C(n,r)\,d_{n-r}$ है। (6)

उदाहरण 12: मानलीजिए n पुस्तकों को n बच्चों में बाँटना हैं। पुस्तकें लौटा दी जाती हैं और बाद में उन्हें फिर बच्चों में बाँट दी जाती हैं। कितनी विधियों से पुस्तकों को बाँटा जाए जिससे कि किसी भी बच्चे को समान पुस्तक दो बार न मिले।

हलः $(n!)^2 e^{-1}$, क्योंकि प्रत्येक प्रथम बंटन के संगत बंटन की $(n!)\,e^{-1}$ विधियाँ होती है।

* * *

उदाहरण 13: यदि दस लोग उनके हैटों की जांच करते हैं और नशे में धुत हैट की जाँच करने वाली लड़की लोगों को हैट यादृच्छया लौटा देती है। किसी भी व्यक्ति को सही हैट न मिलने की प्रायिकता क्या है?

हल: स्पष्ट है कि घटना के पक्ष में स्थितियों की संख्या d_{10} है। स्थितियों की कुल संख्या 10! है। इस तरह किसी भी व्यक्ति को सही हैट न मिलने की प्रायिकता $d_{10}/10! = 0.36788$ है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E13) कितनी विधियों से पूर्णांकों 1, 2, 3, ..., 7, 8 और 9 को क्रमचयित किया जा सकता है जिससे कि कोई भी विषम पूर्णांक अपनी प्राकृतिक स्थिति में न हो।

E14) क्रमचयों की संख्या ज्ञात कीजिए जिनमें नौ पूर्णांकों में से ठीक-ठीक चार पूर्णांक अपनी प्राकृतिक स्थितियों पर हों (ठीक-ठीक पांच पूर्णांक अपविन्यासित हों)

6.4 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है।

1. अनेक तुल्य रूपों में बताया गया कोष्ठ नियम।
2. विभिन्न प्रकार के व्यापकीकृत कोष्ठ नियम।
3. कोष्ठ नियम के विभिन्न अनुप्रयोग।
4. आविष्टि-अपवर्जन नियम-विभिन्न सूत्र।
5. आविष्टि-अपवर्जन नियम के विभिन्न अनुप्रयोग।

6.5 हल/उत्तर

E1) भुजाओं के समांतर रेखाएं खींचकर जो कि प्रत्येक भुजा को तीन भागों में विभाजित करने वाली बिन्दुओं से होकर जाती हो। हम समबाहु त्रिभुज को 1 cm की भुजा वाले 9 समबाहु त्रिभुजों में विभाजित कर सकते हैं। इसतरह, यदि 10 बिन्दुओं का चयन किया जाए, तो इनमें से कम से कम दो बिन्दुएं 9 त्रिभुओं में से किसी न किसी एक त्रिभुज में अवश्य स्थित होंगी।

E2) 5 व्यक्तियों का जोड़ा C (5, 2) = 10 विधियों से बनाया जा सकता है। अतः यदि जोड़ों को 11 बार निमंत्रित किया गया हो, तो कोष्ठ नियम के अनुसार कम से कम एक जोड़े को दो या अधिक बार अवश्य निमंत्रित किया गया होगा।

E3) चार व्यक्तियों को एक पंक्ति में 4! = 24 विधियों से विन्यासित किया जा सकता है। अतः यदि हम 25 अवसर लें, तो कम से कम दो अवसरों पर कोष्ठ नियम के अनुसार पंक्ति में समान क्रम अवश्य मिलेगा।

E4) सदस्यों का निम्नलिखित वर्ग लीजिए।

{1, 2, 4, 8, 16}, {3, 9, 18}, {5, 15},

{6, 12}, {7, 14}, {10, 20}, {11}, {13}, {17}, {19}

इनमें ऐसे 10 वर्ग हैं जिनमें 1 से 20 तक के सभी 20 पूर्णांक आ जाते हैं। यदि 11 सदस्यों का चयन करना हो, तो प्रत्येक वर्ग से अधिक से अधिक एक सदस्य का चयन करना संभव नहीं है। अतः कुछ वर्ग से दो सदस्यों का चयन करना आवश्यक हो जाता है। स्पष्ट है कि इनमें से एक दूसरे को विभाजित कर देगा।

E5) मानलीजिए $x_1, x_2, ..., x_{15}$ 15 बक्सों में वर्धमान क्रम में रखे गए गेंदों की संख्या है, जिसमें यह मान लिया गया है कि ये सभी संख्याएं अलग-अलग हैं। तब स्पष्ट है कि

$x_i \geq i - 1$ जहां $i = 1, 2 \ldots 15$ परन्तु तब

$\sum_{i=1}^{15} x_i \geq 14 \times 15/2 = 105$. परन्तु गेंदों की संख्या केवल 100 है अतः यह एक अंतर्विरोध है। इस तरह हम यह पाते हैं कि सभी x अलग-अलग नहीं हो सकते।

E6) अनुक्रम $a_1, a_2, \ldots, a_n$ में $(n+1)/2$ विषम संख्याएं और $(n-2)/2$ सम संख्याएं हैं। क्योंकि n विषम है। अतः विपरीत समता (सम और विषम) से संख्याओं $1, 2, \ldots, n$ के साथ सभी a_i का युग्म बनाना संभव नहीं है। अतः कम से कम एक युग्म है (i, a_i) में दोनों संख्याएं समान समता वाली होंगी। इसका अर्थ यह है कि गुणनखंड $(a_i - i)$ सम है और इसलिए गुणनफल भी सम होगा।

E7) सात रंगों को पात्र और रंगों को दी गई संख्याओं को उनकी वस्तु मान लीजिए। तब हमें 7 पात्रों में अनंत वस्तुओं का वंटन प्राप्त होता है। अतः इस पर कोष्ठ-नियम को लागू करने पर कम से कम एक पात्र में अनंत वस्तुएं अवश्य होंगी। इस पात्र के रंग का प्रयोग अनंत बार अवश्य किया गया होगा।

E8) मानलीजिए $\mathcal{H}$, A के 5-अवयव उपसमुच्चयों का परिवार है। $\mathcal{H}$ के प्रत्येक B के लिए मानलीजिए कि $f(B)$, B की संख्याओं का योगफल है। स्पष्ट है कि
$f(B) \geq 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ और $f(B) \leq 46 + 47 + 48 + 49 + 50 = 240$. अतः
$f : \mathcal{H} \to T$, जहाँ $T = \{15, 16, \ldots, 240\}$ क्योंकि $|T| = 226$ और $|\mathcal{H}| = C(10, 5) = 252$.
इसलिए व्यापकीकृत कोष्ठ नियम (3) के अनुसार $\mathcal{H}$ में f के अधीन समान प्रतिबिंब वाले अलग-अलग समुच्चय अर्थात् ऐसे अलग-अलग समुच्चय आविष्ट करता है जिनके अवयवों का योगफल बराबर होता हो।

E9) 100 संग्रहों को पात्र माना जा सकता है। सम संख्याएं अनंत हैं। जब इन सम संख्याओं को 100 पात्रों में वंटित किया जाता है, तब कम से कम एक पात्र ऐसा अवश्य होगा जिनमें अनंत सम संख्याएँ होंगी।

यह आवश्यक नहीं है कि एक पात्र में अनंत सम संख्याएं और अनंत विषम संख्याएं हों। क्योंकि यदि पहले पात्र में हम सभी विषम संख्याओं को रख दें, और दूसरे पात्र में सभी सम संख्याओं को रख दें, तब ऐसी स्थिति में 98 पात्र खाली रह जाएंगे और तब किसी भी पात्र में अनंत विषम संख्याएं और अनंत सम संख्याएं नहीं होगी।

E10) मानलीजिए वस्तुएं पूर्णांक $0, 1, \ldots, 999$ हैं। मानलीजिए कि p_1 यह गुणधर्म है कि संख्या 5 से भाज्य है। मानलीजिए p_2 यह गुणधर्म है कि संख्या 7 से भाज्य है। मानलीजिए इन संख्याओं में से प्रत्येक संख्या का भार 1 है। तब हमें उन वस्तुओं के भारों का योगफल ज्ञात करने की आवश्यकता होती है जिनमें गुणधर्मों p_1, p_2 में से कोई भी गुणधर्म न हो। $W(\phi) = 1000$, $W(p_1) = 200$, क्योंकि, 5 से भाज्य संख्याएं $0, 5, 10 \ldots, 995$ हैं अर्थात् ठीक-ठीक 200 संख्याएँ हैं। $W(p_2) = 143$, क्योंकि 7 से भाज्य संख्याएं $0, 7, 14, \ldots, 994$ हैं अर्थात् ठीक-ठीक 143 संख्याएं हैं। $W(p_1 p_2) = 29$, क्योंकि 5 और 7 दोनों से भाज्य संख्याएं 29 है, इसलिए उत्तर $1000 - 200 - 143 + 29 = 686$ है।

E11) स्पष्ट है कि इस प्रश्न का उत्तर एक 8-समुच्चय से एक 4-समुच्चय पर फलनों की संख्या है। 8-समुच्चय व्यक्तियों का समुच्चय है और 4-समुच्चय तलों का समुच्चय है। यह संख्या यह होगी।

$$\sum_{i=0}^{4} (-1)^i C(4, i)\ (4-i)^8 = 4^8 - 4 \times 3^8 + 6 \times 2^8 - 4 \times 1^8$$

E12) हम तीन अंकों का चयन $C(10, 3)$ विधियां से कर सकते हैं सभी तीन संख्याओं के प्रयोग से बनायी गई 6-अंक संख्याओं की संख्या वही होगी जो कि 6-समुच्चय से 3-समुच्चय पर

फलनों की संख्या है और यह संख्या $3^6 - 3 \times 2^6 + 3.1^6 = 540$ है। अतः उत्तर $120 \times 540 = 64800$ है। परन्तु इसमें 0 से प्रारंभ होने वाली संख्याएं भी सम्मिलित होंगी।

E13) 1, 3, 5, 7, 9 विषम पूर्णांक हैं

सूत्र (5) से विधियों की अभीष्ट संख्या यह होगी

$$9! - C(5,1)\,8! + C(5,2)\,7! - C(5,3)\,6! + C(5,4)\,5! - C(5,5)\,4!$$

E14) सूत्र (6) से क्रमचय की अभीष्ट संख्या यह होगी

$$C(9,4)\,d_{9-4} = C(9,4)\,d_5 .$$

6.6 विविध प्रश्नावली

E1) विवाह संबंधी समस्याओं पर चर्चा करने के लिए कुछ जोड़ों के वर्ग को एक गोल मेज की चारों ओर बैठाया जाता है। कितनी विधियों से इस वर्ग को बैठाया जा सकता है जबकि कोई भी पति-पत्नी एक साथ न बैठते हों।

E2) पुराने कारों के विक्रेता पास 18 कार हैं। इनमें से 9 कारों में आटोमेटिक ट्रान्समीशन हैं, 12 में पावर स्टीयरिंग है और 8 में पावर ब्रेक है। सात कारों में आटोमेटिक ट्रान्समीशन और पावर स्टीयरिंग दोनों है, चार में आटोमेटिक ट्रान्समीशन और पावर-ब्रेक दोनों हैं और पाँच में पावर स्टीयरिंग और पावर ब्रेक दोनों हैं। तीन कारों में पॉवर स्टीयरिंग, ब्रेक और आटोमेटिक ट्रान्स्मीशन तीनों हैं। कितने कारों में केवल ट्रान्समीशन हैं? कितने कारों में कोई व्यवस्था नहीं है?

E3) एक अलमारी में पाँच खाने हैं और प्रत्यक खाने में 10 पुस्तकें हैं। प्रत्येक खाने में पाँच अलग-अलग विषयों में से एक विषय के पुस्तक अवश्य हैं। पुस्तकों से धूल साफ करने के लिए उन्हें कितनी विधियों से खाने से हटाया और पुनः लगाया जा सकता है, जिससे कि प्रत्येक खाने में ऐसी कोई भी पुस्तक पुनः नहीं रखी गई हो, जो पहले रखी गई थी ?

E4) एक क्लब के 10 व्यक्ति टेनिस खेलते हैं, 15 व्यक्ति स्क्वेश खेलते हैं, 6 व्यक्ति दोनों खेल खेलते हैं। कितने व्यक्ति कम से कम एक खेल अवश्य खेलते हैं ?

E5) एक क्लब के 10 व्यक्ति टेनिस खेलते हैं, 15 व्यक्ति स्क्वेश खेलते हैं और 12 व्यक्ति वैडमिंटन खेलते हैं। इनमें से 5 व्यक्ति टेनिस और स्कवेश दोनों खेलते हैं, 4 व्यक्ति टेनिस और वैडमिंटन दोनों खेलते हैं, और 3 व्यक्ति स्क्वेश और वैडमिंटन दोनों खेलते हैं और केवल 2 व्यक्ति ऐसे हैं जो तीनों खेल खेलते है। कितने व्यक्ति तीन खेलों में से कम से कम एक खेल अवश्य खेलते हैं?

E6) 2 से 1000 तक की संख्याओं में कितनी संख्याएं परिपूर्ण वर्ग (perfect squares), परिपूर्ण घन या कोई भी उच्च घात वाली परिपूर्ण संख्या है?

E7) मानलीजिए 2n से कम या 2n के बराबर आपको अलग-अलग n + 1 धन पूर्णांक दिए गए हैं। दिखाइए कि

i) इनमें एक ऐसा युग्म होता है जिनका योग 2n + 1 तक होता है,

ii) ऐसी दो संख्याएं अवश्य होंगी जो सापेक्षतः अभाज्य हो।

E8) यदि n + 1 धन पूर्णांक 2n से कम या 2n के बराबर हों तो दिखाइए कि इनमें से हम ऐसे दो धन पूर्णांक ले सकते हैं जिनमें से एक पूर्णांक दूसरे पूर्णांक का गुणज हो।

E9) सिद्ध कीजिए कि किसी भी n + 1 पूर्णांकों में एक ऐसा युग्म अवश्य होगा जिनमें से n के एक गुणज का अंतर होता हो।

E10) मैं प्रतिदिन एक पिगी-बैंक में 1 या 2 रूपए जमा करता जाता हूं और n दिनों बाद उसमें m रूपया जमा हो जाता है। दिखाइए कि प्रत्येक पूर्णांक k के लिए, जहां $1 \le k \le 2n - m$, क्रमागत दिनों की एक ऐसी अवधि अवश्य होगी जिसमें पिगी-बैंक में जमा की गई कुल राशि ठीक-ठीक k रूपया होगी।

E11) सिद्ध कीजिए कि यदि कोई धन पूर्णांक n दिया गया हो, तो इसके कुछ गुणज 99 . . 900 . . . . 0 के रूप के होंगे।

E12) 1 और 10,000 के बीच ऐसे कितने पूर्णांक होंगे जो कि 2, 3 और 5 में से कम से कम एक संख्या से भाज्य होते हों।

E13) 1 और 10000 के बीच ऐसे कितने पूर्णांक हैं जो 2, 3, 5 और 7 में से कम से कम एक संख्या से भाज्य हों? निगमित कीजिए कि 10000 से कम अधिक से अधिक 2288 अभाज्य संख्याएं होती हैं।

6.7 विविध प्रश्नावली का हल

E1) यहां हम जोड़ों को जोड़ा 1, जोड़ा 2, . . . जोड़ा n का नाम दे देते हैं। मान लीजिए $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, मान लीजिए गुणधर्म P_i यह है कि "पति और पत्नि एक साथ बैठते हैं, जहां $i = 1, 2, \ldots, n$. मान लीजिए P, n गुणधर्मों का समुच्चय है। आइए हम प्रत्येक वस्तु को 1 का भार दे दें। स्पष्टतः यहां हमें $E(0)$ की आवश्यकता है।
$W(A)$, $A \subset P$, $|A| = r$ प्राप्त करने के लिए हम r जोड़ों को एकसाथ बैठाते हैं और शेष $2n - 2r$ लोगों को शेष स्थानों पर बैठाते हैं वास्तव में यहां हम $2n - r$ इकाइयों को एक गोल मेज की चारों ओर विन्यासित कर रहे हैं। इस कार्य को $(2n - r - 1)!$ विधियों से किया जा सकता है। अब, प्रत्येक जोड़ा अपनी कुर्सियों को दो विधियों से ग्रहण कर सकता है। अतः $2n - r$ इकाइयों को अपना स्थान ग्रहण करा लेने के बाद इकाइयों को अपने नियत स्थानों पर 2^r विधियों से बैठाया जा सकता है। इस तरह, लोगों को $2^r(2n - r - 1)!$ विधियों से बैठाया जा सकता है। अतः

$$E(0) = \sum_{A \subset P} (-1)^{|A|} W(A) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C(n, i)\, 2^i (2n - i - 1)!$$

E2) मान लीजिए गुणधर्म T, S, B क्रमशः, 'आटोमेटिक ट्रान्समीशन', 'पावर स्टीयरिंग', 'पावर ब्रेक' वाले गुणधर्म को प्रकट करते हैं। यहां कार हमारी वस्तुएं हैं। तब, $W(\phi) = 18$,

$W(T) = 9$, $W(S) = 12$, $W(B) = 8$, $W(T, S) = 7$, $W(T, B) = 4$, $W(S, B) = 5$, $W(T, S, B) = 3$
किसी भी गुणधर्म का न होना संख्या में E(0) होगा। इस तरह, किसी भी गुणधर्म के न होने की संख्या $= 18 - 9 - 12 - 8 + 7 + 4 + 5 - 3 = 2$ होगी। केवल आटोमेटिक ट्रान्समीशन वाले कारों की संख्या प्राप्त करने के लिए केवल उन कारों को लीजिए जिनमें आटोमेटिक ट्रान्समीशन वाला गुणधर्म हो और अन्य कोई गुणधर्म न हो। स्पष्ट है कि अपेक्षित संख्या $W(T) - W(T, S) - W(T, B) + W(T, S, B) = 9 - 7 - 4 + 3 = 1$.

E3) यहां हमें अलमारी के खानों में पुस्तकों का विन्यास करना है। यदि हम गुणधर्म j यह मान लें कि "खाना j" में वही वस्तु रखी गई है जो कि उसमें पहले थी, तो i खानों के लिए हुए समुच्चय I के लिए i के प्रत्येक खाने में दिए हुए विषय की पुस्तकों को 10! विधियों से लौटाया जा सकता है जिससे कि इन खानों को $(10!)^i$ विधियों से भरा जा सकता है। इसके बाद $(5 - i)$ अन्य खाने बच रहते हैं और इन खानों में विषयों को $(5 - i)!$ विधियों से नियत किया जा सकता है जिससे कि I- के खानों और संभवतः अन्य खानों में मूल विषयों को पुनः रखा जा सके। तब इन खानों में पुस्तकों को $(10!)^{5-i}$ विधियों से रखा जा सके। इस तरह, ऐसे $(10!)^5 (5 - i)!$ विन्यास हैं जिनमें कम से कम I के गुणधर्म हैं, इसलिए $W(I) = (10!)^5 (5 - i)!$ क्योंकि हम $E(0)$ प्राप्त करना चाहते हैं, इसलिए इसे

प्राप्त करने के लिए हम आवष्टि-अपवर्जन नियम लागू करते है, जहाँ $K = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$E(0) = \sum_{I \subseteq K} (-1)^{|I|} (10!)^5 (5-|I|)!$$

$$= (10!)^5 \sum_{i=0}^{5} (-1)^i C(5, i)(-i)!$$

$$= 5!(10!)^5 \sum_{i=0}^{5} \frac{(-1)^i}{i!}$$

E4) अभीष्ट संख्या $10 + 15 - 6 = 19$ है।

E5) अभीष्ट संख्या $10 + 15 + 12 - 5 - 4 - 3 + 2 = 27$ है।

E6) वस्तुएँ $\{2, 3, \cdots, 1000\}$ लीजिए और मानलीजिए के इसके एक सदस्य में 'गुणधर्म i' है जबकि यह किसी पूर्णांक के iवें घात के बराबर हो। क्योंकि, $2^{10} > 1000$, इसलिए समुच्चय में कोई भी दसवाँ घात नहीं होगा और संबंधित गुणधर्म केवल गुणधर्म 2, 3, ..., 9 होंगे।

$W(2) = [(1000)^{1/2}] - 1 = 30$, $W(3) = [(1000)^{1/3}] - 1 = 9$.

$W(2, 3) = W(6) = [(1000)^{1/6}] - 1 = 2$, $W(2, 4) = W(4) = 4$.

$W(2, 3, 4) = W(12) = 0$, $W(2, 3, 6) = W(6) = 2, \ldots$ जहाँ $[x]$, x के पूर्णांक भाग को प्रकट करता है। इस प्रक्रिया को लागू करते रहने पर ऐसी वस्तुओं की संख्या प्राप्त होती है जिनमें कम से कम एक गुणधर्म अवश्य हो

$30 + 9 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 - 2 - 4 - 2 - 1 - 2 - 1 + 2 + 1 = 40$.

E7 (i) मानलीजिए संख्याएँ $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ हैं। ये संख्याएं अलग-अलग हैं और 1 तथा 2n के बीच स्थित हैं। आइए हम यह मान लें कि हम इनका एक ऐसा युग्म प्राप्त कर सकते हैं जिनका योगफल $2n + 1$ हो। यदि हम $b_i = 2n + 1 - a_i$ परिभाषित करें, जहाँ $i = 1, 2, \ldots n + 1$, तब प्रत्येक b_i एक धन पूर्णांक है जो 2n से कम या बराबर है। कोई भी b_i एक a_j नहीं हो सकता। इस तरह संग्रह $a_1, b_1, a_2, b_2 \cdots a_{n+1}, b_{n+1}$ के 1 और 2n के बीच $(2n + 2)$ अलग-अलग पूर्णांक होंगे। स्पष्ट है कि कोष्ठ नियम से यह संभव नहीं हो सकता। इस अंतर्विरोध से यह पता चलता है कि कुछ युग्मों का योग $2n + 1$ अवश्य होगा।

(ii) यहाँ हम यह मान लेते हैं कि संख्याओं में से दो संख्याएं क्रमागत पूर्णांक अवश्य होंगी। मानलीजिए कि वर्धमान क्रम में विन्यासित $(n + 1)$ संख्याएँ $a_1, \ldots, a_{n+1}$ है। यदि दो संख्याएं क्रमगत पूर्णांक नहीं है, तो $a_{i+1} - a_i \geq 2$, जहाँ $i = 1, 2, \ldots, n$. इन्हें जोड़ने पर हमें $a_{n+1} - a_1 \geq 2n$ प्राप्त होता है, और यह असंभव है। अतः दो संख्याएँ क्रमागत पूर्णांक अवश्य होंगी। स्पष्ट है कि एक दूसरे के लिए अभाज्य भी होंगी।

E8) यदि सभी $n + 1$ संख्याएँ अलग-अलग न हो, तो इनमें से दो संख्याएं अवश्य बराबर होंगी, और एक संख्या दूसरी संख्या का एक तुच्छतः गुणज होगी। इसतरह, हम यह मान सकते हैं कि संख्याएँ अलग-अलग हैं। आइए हम $1, 3, 5, \ldots, 2n - 1$ से अंकित कोष्ठ लें। हम r से अंकित कोष्ठ की $n + 1$ दी हुई संख्याओं के संग्रह में एक संख्या रखते हैं, जबकि r, संख्या को विभाजित करने वाली सबसे बड़ी विषम संख्या हो। क्योंकि कोष्ठ केवल n हैं इसलिए दो संख्याएं समान कोष्ठ में अवश्य होंगी। इन दो संख्याओं की समान विषम संख्या अधिकतम विषम विभाजक, मानलीजिए r, है। तब दो संख्याएँ $r \times 2^a$, $r \times 2^b$ के रूप की होनी चाहिए जहाँ $a \leq b$ स्पष्ट है कि $r \times 2^a$, $r \times 2^b$ को विभाजित करता है।

E9) मानलीजिए पूर्णांक $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}$ हैं। आइए हम यह मान लें इनमें से किन्हीं भी दो पूर्णांकों का अंतर n से भाज्य नहीं है। n अंतर $a_i - a_1$ लीजिए जहाँ $i = 2, 3, \ldots n$. जब इन अंतरों को n से भाग दिया जाता है, तो शेष केवल $0, 1, 2, \ldots n-1$ में से ही हो सकते हैं। परन्तु हमने अपनी कल्पना में 0 को अलग कर दिया है। अतः कोष्ठ नियम के अनुसार दो शेष अवश्य बराबर होंगे। मानलीजिए $a_i - a_i$ और $a_i - a_j$ से समान शेष प्राप्त होते हैं। तब इनका अंतर $a_i - a_j$, n से भाज्य होगा।

E10 मानलीजिए iवें दिन तक कुल जोड़ t_i है, जहां $i = 1, 2, \ldots, n$. मानलीजिए $1 \le k \le 2n - m$. 2n संख्याएं $t_1, t_2, \ldots t_n, t_1 + k, t_2 + k, \ldots, t_n + k$ लीजिए। स्पष्ट है कि ये सभी 2n संख्याएं अंतराल $[1, 2n-1]$ में स्थित हैं। कोष्ठ नियम के अनुसार इनमें से दो, मानलीजिए t_i और $t_j + k$ अवश्य बराबर होंगे, तब $t_i - t_j = k$.

E11) n + 1 संख्याएं $1, 10, 10^2, \ldots 10^n$ लीजिए। मानलीजिए कि इन संख्याओं को n से भाग देने पर शेष क्रमशः $r_0, r_1, \ldots, r_n$ होते हैं। ये r केवल मान $0, 2, \ldots, n-1$ ग्रहण कर सकते हैं। इस तरह, कोष्ठ नियम के अनुसार इनमें से दो, मानलीजिए r_a, r_b समान अवश्य होंगे। इसका अर्थ यह है कि n, $10^b - 10^a$ को विभाजित करता है, जबकि यह मानलिया गया हो कि $b > a$. परन्तु $10^b - 10^a$ ठीक-ठीक 99..900..0 के रूप का होगा।

E12) मानलीजिए वस्तुएं 1 से 10000 तक की संख्याएं हैं। मानलीजिए A, B, C गुणधर्म हैं (i) 2 से भाज्य, (ii) 3 से भाज्य और (iii) 5 से भाज्य हैं। तब इन संख्याओं में से कोई भी एक संख्या से अविभाज्य संख्याओं की संख्या यह होती है

$$E(0) = 10000 - W(A) - W(B) - W(C) + W(AB) + W(BC) + W(AC) - W(ABC)$$

परन्तु, $W(A) = 5000, W(B) = 3333, W(C) = 2000$

$$W(AB) = 1666, W(BC) = 666, W(AC) = 1000, W(ABC) = 333.$$

इसतरह, $E(0) = 10000 - 5000 - 3333 - 2000 + 1666 + 666 + 1000 - 333 = 2666.$

अतः अभीष्ठ उत्तर $\{10000 - 2666 = 7334$ है।

E13) पिछले प्रश्न की तरह यहां भी हम A, B, C, D को परिभाषित करते हैं। तब

$$E(0) = 10000 + 1666 + 1000 + 714 + 666 + 476 + 285 + 47$$

$$- (5000 + 3333 + 2000 + 1428 + 333 + 328 + 142 + 95) = 2285.$$

इस तरह, अभीष्ट संख्या $10000 - 2285 = 7715$ है। और 2285 ऐसी संख्याएं हैं जो 2, 3, 5 और 7 से भाज्य नहीं है। केवल इन 2285 संख्याओं में से ही अभाज्य संख्याऐं प्राप्त की जा सकती हैं, और ये संख्याऐं 2, 3, 5 और 7 हैं। परन्तु यहाँ हमें 1 को छोड़ना है। अतः अधिक से अधिक $2285 + 4 - 1 = 2288$ अभाज्य संख्याएं हो सकती हैं।

शब्दावली

अद्वितीय संयुग्मी	unique conjugate
अनभिनत	unbiased
अपवर्जन	exclusion
अपविन्यास	derangement
आच्छादक प्रतिचित्र	onto map
आच्छादक फलन	onto function
अविभेद्य	indistinguishable
आविष्टि	inclusion
उपानुक्रम	subsequence
एकैकी संगति	one-to-one correspondence
क्रमगुणित घात	factorial power
कोष्ठ	pigeon hole
गणन संख्या	cardinality
घटना	event
चालनी नियम	sieve principle
चिरसम्मत	classical
जनक फलन	generating function
निश्शेष	exhaustive
पतती क्रमगुणित	falling factorial
परस्पर अपवर्जी	mutually exclusive
परिवर्त	variant
पुनरावृत्तीय संचय	combination with repetition
पूर्णांक विभाजन	integer partition
प्रतिदर्श समष्टि	sample space
प्रतिबिंब	image
प्रतिलोम प्रतिबिंब	inverse image
प्रायिकता समष्टि	probability sapce
योगखंड	summand
वर्धमान अनुक्रम	increasing sequence
विभाजन	partition
विभेद्य	distinguishable
वृत्तीय क्रमचय	circular permutation
संचय विन्यास	combinatorial
संयुग्मी विभाजन	conjugate partition
समप्रायिक	equally likely
स्वसंयुग्मी	self-conjugate
ह्रासमान अनुक्रम	decreasing sequence

NOTES

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त
विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

UGMM - 13
विविक्त गणित

खंड

3

पुनरावृत्तियाँ

पाठ्यक्रम अभिकल्प समिति

डॉ. वी.डी. आचार्य
विज्ञान एवं प्रौद्योगिकी विभाग
दिल्ली

प्रो. अलोक डे
भारतीय सांख्यिकीय संस्थान
दिल्ली

डॉ. एन.वी. लिमये
मुम्बई विश्वविद्यालय

डॉ. ए. त्रिपाठी
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान
दिल्ली

संकाय सदस्य
विज्ञान विद्यापीठ
इ. गां. रा. मु. वि.
नई दिल्ली

प्रो. आर. के. बोस
डॉ. वी. डी. मदान
डॉ. पूर्णिमा मित्तल
डॉ. परवीन सिंक्लेयर
डॉ. सुजाता वर्मा

खंड लेखन समिति

प्रो. आर.के. बोस (संपादक)
गणित विभाग
इं.गां.रा.मु.वि.

डॉ. ए. त्रिपाठी
भारतीय प्रौद्योगिकी संस्थान
दिल्ली

डॉ० अतुल राजदान
विज्ञान विद्यापीठ
इ.गां.रा.मु.वि.

डॉ. परवीन सिंक्लेयर
विज्ञान विद्यापीठ
इ.गां.रा.मु.वि.

पाठ्यक्रम समन्वयकर्ता : प्रो. आर.के. बोस

अनुवाद

श्री. एच. पी. सिन्हा (सेवानिवृत्त)
वैज्ञानिक तथा तकनीकी शब्दावली आयोग
नई दिल्ली

प्रो. आर.के. बोस
विज्ञान विद्यापीठ
इ.गां.रा.मु.वि.

डॉ. अतुल राज़दान
विज्ञान विद्यापीठ
इ.गां.रा.मु.वि

डॉ. परवीन सिंक्लेयर
विज्ञान विद्यापीठ, इं.गां.रा.मु.वि

अक्तुबर 1998

ISBN-81-7605-417-8

इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी, नई दिल्ली-68 से प्राप्त की जा सकती है।

इन्दिरा गांधी मुक्त विश्वविद्यालय की ओर से निदेशक विज्ञान विद्यापीठ द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित।

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के अनुमति से पुनः मुद्रित। उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद की ओर से डॉ. ए. के. सिंह, कुलसचिव द्वारा पुनः मुद्रित एवं प्रकाशित, July 2014

मुद्रक: **पी. स्क्वायर सॉल्यूशन्स**, मिनी इण्डस्ट्रियल एरिया, बरारी, एन.एच.2, मथुरा (उ.प्र.)

खंड 3 पुनरावृत्तियाँ

मान लीजिए आप संचार प्रौद्योगिकीविद हैं और आप एक विशेष प्रकार के एकल त्रुटि संसूचन कोड का सृजन करना चाहते हैं। तब, इसके लिए आपको सम संख्या में लिए गए 0 (या 1) वाले द्वि-आधारी अनुक्रमों की संख्या ज्ञात करनी होगी। इसे आप कैसे करेंगे ? इस समस्या और अन्य गणन समस्याओं को हल करने की एक सरलतम विधि पुनरावृत्ति संबंधों को लागू करना है। ये संबंध क्या हैं। पुनरावृत्ति संबंध या (संक्षेप में) पुनरावृत्ति एक ऐसा समीकरण होता है जो n वस्तुओं की दी हुई समस्या को n से कम वस्तुओं के लिए बनायी गई समस्या के रूप में व्यक्त करता है। उदाहरण के लिए आइए हम पुनरावृत्ति संबंध/समीकरण का एक अति सुप्रसिद्ध उदाहरण लें जो कि गणितीय पाठों में पाए जाने वाला प्रथम पुनरावृत्ति संबंध भी है। समस्या यह है:

उस स्थिति में n महिनों के बाद खरगोशों के कितने जोड़े पैदा हो जाएंगे जबकि प्रारंभ में एक महिने के खरगोशों के एक जोड़े लिए गए हों और यदि हर महिने में एक महिने के जोड़ों से एक नया जोड़ा पैदा हो जाता हो ?

मानलीजिए $f(n)$ महिने $n, n \geq 1$ के प्रारंभ में उपस्थित खरगोशों के जोड़ों की संख्या है। इकाई 7 में आप यह देखेंगे कि पुनरावृत्ति संबंध $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, $n \geq 3$ जहाँ $f(0) = 1$ और $f(1) = 1$ से स्थिति का विवरण मिल जाता है। इस इकाई में हम विस्तार से ऐसी अनेक समस्याओं पर विचार करेंगे जिनसे पुनरावृत्ति-संबंध प्राप्त होते हैं और इस बात का संकेत मिलता है कि इन समस्याओं के हल किस प्रकार प्राप्त किए जा सकते हैं। फिबोनाशी (1170–1250) के समय से ही पुनरावृत्ति-संबंधों का प्रयोग विभिन्न विधियों में होता रहा है। जैकब बर्नोली (1654–1705), उसका भतीजा डेनियल बर्नोली (1700–1782) जैम्स स्टर्लिंग (1692–1770), ऑयलर और सत्रहवीं शताब्दी के अंत और उठारहवीं शताब्दी के प्रारंभ के अन्य गणितज्ञों ने भी विश्लेषण और संचयविन्यास-विज्ञान की समस्याओं को हल करने में पुनरावृत्ति संबंधों का काफी प्रयोग किया था। हाल ही में, पुनरावृत्ति-संबंधों का प्रयोग अर्थशास्त्र, मनोविज्ञान और समाजविज्ञान जैसे विविध क्षेत्रों में भी किया गया है।

जब हम 'पुनरावृत्तियों का प्रयोग करना' कहते हैं, तो हमारे कहने का अर्थ क्या होता है ? क्या समस्या को पुनरावृत्ति-संबंध के रूप में व्यक्त कर देना ही पर्याप्त होगा ? हर स्थिति में हमें समस्या का हल ज्ञात करना ही है। अतः महत्त्व इस बात का है कि हम पुनरावृत्ति-संबंधों को हल कर सकें और पुनरावर्ती रूप में परिभाषित फलनों के स्पष्ट सूत्र ज्ञात कर सकें। इकाई 8 और इकाई 9 में हमारी चर्चा इसी पर आधारित है।

इकाई 8 में हम आपको अठारहवीं शताब्दी के अंत में विकसित और लाप्लास द्वारा 1812 में अपनी चिरप्रतिष्ठित (Theorie Analytiques des probability) नामक पुस्तक में उल्लेखित संचयविन्यास जनक फलन-सिद्धांत से परिचित कराएंगे। जनक फलन गणन समस्या का एक सरल एवं परिष्कृत गणितीय निदर्श है। इसके प्रयोग से जटिल गणन समस्याओं को भी हल किया जा सकता है, जिनमें से कुछ को खंड 2 के संचयविन्यास तर्कों से हल नहीं किया जा सकता। इस इकाई में हमने यह बताया है कि चयन और विन्यास समस्याओं तथा विभाजन समस्याओं के निदर्शन के लिए जनक फलनों का प्रयोग किस प्रकार किया जा सकता है। पुनरावृत्तियों के संदर्भ में जनक फलनों की सहायता से इन्हें हल करने के बारे में हमने चर्चा की है। हल की इस विधि को द मुआव्र और जेम्स स्टर्लिंग (1692–1770) ने प्रस्तुत किया था।

इकाई 9 में हमने पुनरावृत्ति संबंधों को हल करने को चार अन्य विधियों पर चर्चा की गई है। जैसा कि आप देखेंगे कि हमारी चर्चा मुख्यतः केवल एक प्रकार पुनरावृत्ति-संबंध को हल करने तक ही सीमित है यद्यपि कभी-कभी अन्य प्रकार की पुनरावृत्तियों को इस रूप में समानीत करके इस इकाई में दी गई विधियों से उन्हें किया गया है।

हम आशा करते हैं कि इस खंड के अंत तक पहुँचते-पहुँचते आप पुनरावृत्ति-संबंधों के विभिन्न पहलुओं से अवश्य परिचित हो जाएंगे। हम यह भी आशा करते हैं कि गणन समस्याओं को हल करने के लिए प्रयोग में लायी गई पुनरावृत्ति विधियाँ आपको सरल और स्पष्ट लगी होंगी।

इकाई 7 पुनरावृत्ति संबंध

इकाई की रूपरेखा | पृष्ठ संख्या

7.1 प्रस्तावना

पिछले खंड में हमने विभिन्न साधनों को लागू करके विभिन्न प्रकार की संचय समस्याओं को हल करने के बारे में अध्ययन किया है। फिर भी ऐसी अनेक प्रकार की समस्याएँ हैं जिनका संबंध गणन (counting) से है और जिन्हें केवल पहले बनायी गई विधियों से हल नहीं किया जा सकता। एक उदाहरण के रूप में $1, 2, \ldots, n$ से लेबलित n बक्सों को 0 और 1 से इस तरह भरने की विधियों की संख्या की गणन समस्या हैं जिससे कि किन्हीं भी दो संलग्न बक्सों में 0 न हो। इस समस्या को और इस प्रकार की अनेक समस्याओं को हल करने के लिए हमें 'पुनरावृत्ति संबंधों' की संकल्पना को लागू करने की आवश्यकता होती है।

गणन समस्याओं को हल करने की मूल विधि, जो मूल गणन साधनों को लागू करने से प्राप्त हल का प्रतिरोध करती है, पुनरावृत्ति-विधि है। इस विधि के पहले चरण में समस्या द्वारा संतुष्ट एक अभीष्ट पुनरावृत्ति-संबंध को स्थापित करने की आवश्यकता होती है। यह समस्या ठीक उसी प्रकार की समस्या है जिसमें हम $(n-1)$ के चरण से सीढ़ी का nवां चरण प्राप्त करने के बारे में अध्ययन करते हैं। यही कारण है कि यहाँ हम यह चाहेंगे कि आप गणितीय आगमन को लागू करके पुनरावृत्ति-संबंधों के हलों को सत्यापित करें। इस प्रक्रिया के दूसरे और अंतिम चरण में पुनरावृत्ति को हल करना होता है। इस संबंध में हमें अनेक विधियाँ उपलब्ध हैं और अगली इकाइयों में हम इनका अध्ययन करेंगे।

पहले दो भागों में यहाँ उन समस्याओं पर चर्चा की गई है जिन्हें इन संबंधों की सहायता से हल किया जा सकता है। इन भागों में हम यह बताएंगे कि पुनरावृत्तियों को किस प्रकार स्थापित किया जाता है। अगले भाग में इस खंड के पाठ्यक्रम में प्रयुक्त किए जाने वाले संकेतों और परिभाषाओं पर चर्चा की गई है। अंत में हम कंप्यूटर विज्ञान में प्रयुक्त को 'फूट डालो और जीतो' संबंधों पर चर्चा करेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद, आप

- पुनरावृत्ति संबंध को परिभाषित कर सकेंगे;
- पुनरावृत्ति-संबंधों के उदाहरण दे सकेंगे;
- पुनरावृत्ति-संबंधों को स्थापित कर सकेंगे;
- 'फूट डालो और जीतो' कलन-विधि लागू कर सकेंगे।

7.2 तीन पुनरावर्ती समस्याएँ

आइए सबसे पहले यहाँ हम नमूने के रूप में ऐसी तीन समस्याएँ लें जिनसे आगे अध्ययन की जाने वाली बातों का आभास आपको मिल सके। निम्नलिखित दो अभिलक्षण इन सभी समस्याओं में पाए

जाते हैं: शताब्दियों से इनमें से प्रत्येक समस्या की खोज बार-बार की गई है और प्रत्येक समस्या का एक हल पुनरावृत्तियों (recurrences) की संकल्पना पर आधारित हैं। इसका अर्थ यह है कि प्रत्येक समस्या का हल उसी समस्या से संबद्ध छोटी-छोटी समस्याओं के हल पर आधारित होता है।

चित्र 1

समस्या 1 (खरगोश और फिबोनाशी संख्याएँ) : क्या आपने खरगोश पैदा होने वाली समस्या के बारे में सुना है जिसे पहले-पहल लियोनार्डो डि पिसा ने जिन्हें फिबोनाशी के नाम से भी जाना जाता है, 1202 में अपनी पुस्तक *लिबर एबाकी* में प्रस्तुत की थी ? समस्या यह है: खरगोशों के एक जोड़े को, जिसमें एक नर और एक मादा है एक द्वीप में छोड़ दिया गया है। दो महिने के अंत में इनसे बच्चे पैदा होने लगते हैं और उसके बाद प्रत्येक महिने के अंत में नर और मादा खरगोश पैदा होने लगते हैं। यह मानकर कि द्वीप में किसी खरगोश की मृत्यु नहीं होती है, क्या आप बता सकते हैं कि n महिनों के बाद खरगोशों के कितने जोड़े वहाँ हो जाएंगे।

मान लीजिए $\mathcal{F}_n$, n महिने बाद खरगोशों के जोड़ों की संख्या को प्रकट करता है। तब $\mathcal{F}_1 = 1$. क्योंकि इन जोड़ों से दूसरे महिने में कोई बच्चा पैदा नहीं होता, इसलिए $\mathcal{F}_2 = 1$ भी होगा। n महिनों के बाद जोड़ों की संख्या ज्ञात करने के लिए हमें nवें महिने में पैदा हुए जोडो की संख्या में n – 1 महिने बाद पैदा हुए जोड़ों की संख्या को जोड़ना होगा। परन्तु कम से कम दो महिने के जोड़ों से ही, अर्थात् n – 2 महिने बाद उपस्थित जोड़ों से ही नए बच्चे पैदा होते है, इसलिए इनकी संख्या $\mathcal{F}_{n-2}$ होगी। अतः अनुक्रम $\{\mathcal{F}_n / n \geq 1\}$, $\mathcal{F}_1 = 1 = \mathcal{F}_2$ के साथ-साथ प्रतिबंध $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$, जबकि $n \geq 3$ को भी संतुष्ट करता है। इस अनुक्रम को **फिबोनाशी अनुक्रम** और $\mathcal{F}_n$ को **फिबोनाशी संख्या** कहा जाता है।

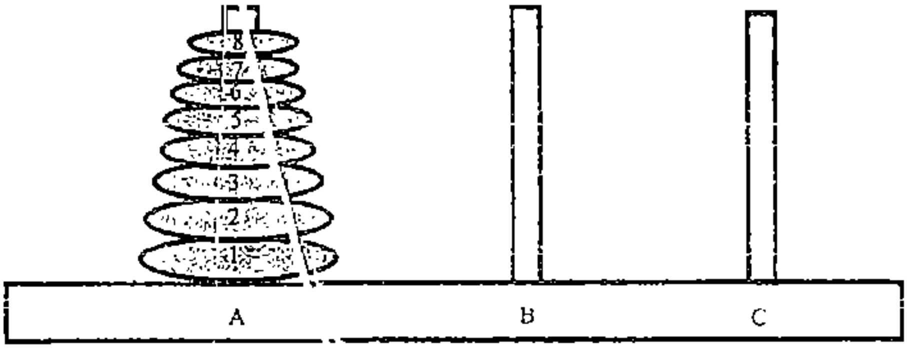
ऐसा करने पर क्या हमने समस्या का हल प्राप्त कर लिया है ? हमने पूरा हल प्राप्त नहीं किया है परन्तु यह उस अनुक्रम को अद्वितीय रूप में परिभाषित कर देता है जिसे हम प्राप्त करना चाहते हैं जो कि कुछ पिछले सदस्यों के रूप में इसके अन्य सदस्यों का निर्धारण कर देता है। हम $\mathcal{F}_n$ को n के एक फलन के रूप में भी परिभाषित कर सकते हैं, जैसा कि नीचे के प्रश्न में दिया गया है।

E1) आगम–विधि से $\sqrt{5}\,\mathcal{F}_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, $n \geq 1$, को सत्यापित कीजिए।

आइए अब हम एक अन्य महत्वपूर्ण समस्या पर विचार करें।

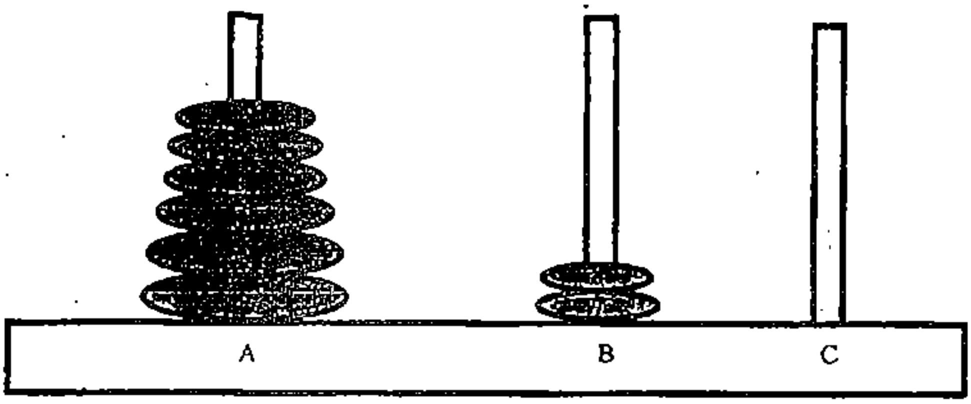
समस्या 2 (हनोई की मीनार) : इस समस्या को फ्रांसिसी गणितज्ञ इडवार्ड लूकास ने 1883 में प्रस्तुत की थी। इसमें आठ डिस्कों की एक मीनार है, जिसमें प्रारंभ में तीन कीलों में से एक पर घटती हुई साइज के अनुसार एक के ऊपर एक रखा गया है। हमारा लक्ष्य छोटे डिस्क पर बडे डिस्क को गति दिए बिना एक बार में केवल एक डिस्क को गति देकर पूरी की पूरी मीनार को तीन कीलों में से केवल एक कील पर स्थानांतरित करना है।

लुकास ने इस खिलौने को एक बहुत बड़ी ब्रह्म-मीनार (Tower of Brahma) के रूप में प्रस्तुत किया था जिसमें शुद्ध सोने के 64 डिस्क थे जो हीरे की तीन सुइयों पर टिके हुए थे। उसका कहना था कि प्रारंभ में ईश्वर ने इन स्वर्ण डिस्कों को पहली सुई पर रखा था और उसका यह भी कहना था कि ऊपर दिए गए नियमों के अनुसार पुरोहितों का एक दल इन्हें एक तीसरे कील पर स्थानांतरित करेगा। और, तब ऐसा करने पर मीनार हिलने-डुलने लगेगा और इस कार्य को समाप्त होते ही विश्व का अंत हो जाएगा।



चित्र 2 (क)

आइए हम इस समस्या को व्यापक रूप में प्रस्तुत करें और देखें कि यदि 8 डिस्कों के स्थान पर n डिस्क हों, तो क्या होता है। आइए हम यह मान लें कि T_n गति देने की वह निम्नतम संख्या है जिससे नियमों के अनुसार n डिस्क एक कील से दूसरे कील पर स्थानांतरित हो जाते हैं। स्पष्ट है कि $T_1 = 1$ और $T_2 = 3$ (क्यों ?)। तीन डिस्कों के साथ थोड़ा-बहुत प्रयोग करने पर हमें व्यापक युक्ति प्राप्त हो जाती है: हम सबसे छोटे $n-1$ डिस्कों को एक अलग कील पर स्थानांतरित करते हैं (जिसके लिए T_{n-1} गतियों की आवश्यकता होती है), तब सबसे बड़े डिस्क को गति देते हैं (इसके लिए एक बार गति देने की आवश्यकता होती है और स्मरण रहे कि ऐसा करने पर उसमें गति आ जाएगी) और अंत में, तब सबसे छोटे $n-1$ डिस्कों को सबसे बड़े डिस्क पर स्थानांतरित करते हैं (इसके लिए T_{n-1} घुमावों की आवश्यकता होती है)। इस तरह, अधिक से अधिक $2T_{n-1} + 1$



चित्र 2 (ख)

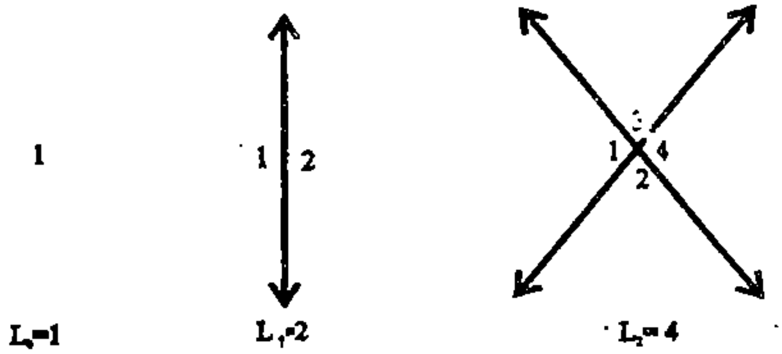
गतियों से हम n डिस्कों ($n \geq 2$) को स्थानांतरित कर सकते हैं। अतः $T_n \leq 2T_{n-1} + 1$, यदि $n \geq 2$. हमने यहाँ "=" के स्थान पर प्रतीक "≤" का प्रयोग क्यों किया है ? हमारे निर्माण से केवल इस बात का पता चलता है कि $2T_{n-1} + 1$ गतियां पर्याप्त हैं, परन्तु क्या हम इससे अच्छा नहीं कर सकते हैं ? इसका उत्तर 'नहीं' में है। किसी न किसी स्थान पर हमें सबसे बड़ा डिस्क अवश्य मिलेगा। और, ऐसा करने पर सबसे छोटे $n-1$ डिस्क एक कील पर होंगे (क्यों ?)। और, इसे वहाँ रखने के लिए कम से कम T_{n-1} गति देनी पड़ेगी। और, सबसे बड़े डिस्क को अंतिम बार गति देने के लिए हमें सबसे छोटे $n-1$ डिस्कों को (जिन्हें पुनः एक कील पर ही होना चाहिए)। सबसे बड़े डिस्क पर स्थानांतरित करना होगा: इसके लिए भी T_{n-1} गतियों की आवश्यकता होती है। अतः $T_n \geq 2T_{n-1} + 1$ जबकि $n \geq 2$.

पहले उदाहरण की तरह यहाँ भी हम अभी-अभी प्राप्त किए गए पुनरावृत्ति संबंध को हल करने की क्रिया इकाई 9 में ही करेंगे। फिर भी, यदि एक बार आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कर लें, तो आप पाएंगे कि स्वर्ण डिस्कों को स्थानांतरित करने के लिए पुरोहितों को कम से कम $2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$ गति देने की आवश्यकता होती है। एक गति प्रति सेकंड की दर से गति देने पर भी इस समस्या को हल करने के लिए 5×10^{11} वर्ष से भी अधिक समय लगेगा, अतः इस समस्या को हल करने के लिए विश्व को इस अवधि से भी अधिक अवधि के लिए अपने को बनाए रखना होगा।

E2) आगम विधि से यह दिखाइए कि $T_n = 2^n - 1, \ n \geq 1$.

आइए अब हम अपनी तीसरी समस्या पर विचार करें। इस पुनरावर्ती समस्या का स्वरूप ज्यामितीय है।

समस्या 3 (समतल में रेखाएँ) : हम ऐसे प्रदेशों की अधिकतम संख्या L_n ज्ञात करना चाहते हैं जिनमें समतल n सरल रेखाओं से कटी होती है। अपने पिछले उदाहरणों की तरह, यहाँ भी हम केवल L_n को एक पुनरावृत्ति–समीकरण के रूप में प्रस्तुत करेंगे और इसे हल करने की क्रिया इकाई 9 में करेंगें।



चित्र 3

प्रथम कुछ स्थिति को देखने पर आप पाएंगे कि इन्हें समझने में चित्र काफी सहायक सिद्ध होता है। यहाँ हमनें $n = 1$ और $n = 2$ पर स्थिति को चित्र रूप में प्रस्तुत किया है। यहाँ हम यह चाहेंगे कि आप $n = 3$ पर स्थिति को चित्र रूप में प्रस्तुत करें। इन तीन रेखाओं से प्राप्त किए गए उत्तर से आपको यह पता चलेगा कि प्रारंभ में किए गए इस अनुमान (जिसके लिए आप एक रेखा और दो रेखा वाली स्थिति को पुनः देखना चाहेंगे) पर अर्थात् $L_n = 2^n$ पर पुनः विचार करने की आवश्यकता है। मान लीजिए हमने $n - 1$ रेखाओं की सहायता से समतल को L_{n-1} प्रदेशों में बाँट दिया है। हमें nवीं रेखा की निविष्टि कुछ इस तरह करनी है जिससे कि प्रदेशों की संख्या में यथासंभव वृद्धि की जा सके। थोड़ा-बहुत इधर-उधर करने पर आप यह पाएंगे कि प्रदेशों की संख्या में k की वृद्धि तब होती है, जबकि nवीं रेखा पिछले प्रदेशों को k में विभाजित कर देती है। यह केवल तभी होगा जबकि यह पिछली रेखाओं को अलग-अलग $k - 1$ स्थानों पर काटता हो। फिर भी, क्योंकि दो रेखाएँ अधिक से अधिक एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं इसलिए नई रेखा $n - 1$ पुरानी रेखाओं को अधिक से अधिक अलग-अलग $n - 1$ बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद कर सकती हैं। अतः $k - 1 \le n - 1$ अर्थात् इससे उपरि परिबंध (upper bound) $L_n \le L_{n-1} + n$, जहाँ $n \ge 2$, स्थापित हो जाता है।

परन्तु, क्या हम इस उपरि परिबंध को प्राप्त कर सकते हैं ? इसके लिए हम nवीं रेखा को इस प्रकार रखते हैं कि यह अन्य किसी भी रेखा के समांतर न हो (और, इस तरह यह इन सभी रेखाओं को प्रतिच्छेद करती हो, और यह वहाँ उपस्थित किसी भी प्रतिच्छेद-बिन्दु से होकर न जाती हो (और, इस तरह, यह इन रेखाओं को अलग-अलग बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करती हो) इससे L_n की पुनरावृत्ति अर्थात् $L_n = L_{n+1} + n, n \ge 2$ जहाँ $L_1 = 2$ स्थापित हो जाती है।

यहाँ हम आपके लिए n के पदों में L_n को परिभाषित करने से संबद्ध एक प्रश्न दे रहे हैं।

E3) आगमन विधि से यह दिखाइए कि $L_n = \frac{1}{2} n(n+1) + 1, \quad n \ge 1.$

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि ऊपर बतायी गई तीन समस्याओं में से प्रत्येक समस्या में हमने अनुक्रम के nवें पद को पिछले एक या अधिक पदों और n के एक फलन के रूप में व्यक्त किया है। अतः यदि आपके पास पर्याप्त समय हो तो इससे आपको अनुक्रम के पदों का ठीक-ठीक अभिकलित करने की विधि प्राप्त हो सकती है। कभी-कभी, यदि पदों के बीच एक उत्तम संबंध हो, तो आप पुनरावृत्ति को भी "हल" कर सकते हैं अर्थात् आप n वें पद को n के एक फलन के रूप में व्यक्त कर सकते हैं। अब आप देखेंगे कि किस प्रकार आप इकाई 9 में बतायी गई विधियों से इन तीन पुनरावृत्तियों को हल करेंगे। आइए अब हम कुछ और पुनरावर्ती समस्याओं पर विचार करें।

7.3 और पुनरावृत्तियाँ

पिछले भाग में आपको कुछ सुप्रसिद्ध पुनरावर्ती समस्याओं से परिचित कराया गया है। इस भाग में हम उस प्रकार की संचय समस्याओं (combinatorial problems) के पुनरावृत्ति-संबंधों को एक अन्य दृष्टिकोण से स्थापित करेंगे जिनसे आप पिछले खंड या कहीं और परिचित हो चुके हैं। आप देखेंगे कि पुनरावृत्ति को ज्ञात करने में वस्तुतः हमें आगमतः गणन-क्रिया लागू करनी होती है। अधिकांश स्थितियों में आप यह देखेंगे कि पुनरावृत्ति संबंध से एक वैकल्पिक हल-विधि प्राप्त हो जाती है, यद्यपि स्वयं विधियों के बारे में चर्चा इकाई 9 में की जाएगी।

समस्या 4 : सबसे पहले हम n संख्याओं की सूची की वर्धमान क्रम में छंटाई करने वाली समस्या पर विचार करेंगे। आइए हम c_n से n चीज़ों की छंटाई के लिए की गई तुलनाओं की संख्या को प्रकट करें। सूची का सबसे छोटा अवयव ज्ञात करने के लिए हमें $n-1$ तुलनाएँ करनी होंगी। (सूची से प्रथम दो मदों को लीजिए, एक छोटे अवयव को लीजिए और इस छोटे मद की तुलना तीसरे मद से कीजिए, और यही प्रक्रिया लागू करते जाइए) यदि अब हम प्रथम अवयव के स्थान पर सबसे छोटा अवयव लें और सबसे छोटे अवयव के स्थान पर प्रथम अवयव लें तो हमें $n-1$ मदों पर प्रक्रिया लागू करनी होगी। क्योंकि शेष $n-1$ मदों पर आवश्यक तुलना तुलनाओं की संख्या c_{n-1} है, इसलिए तुलनाओं की कुल संख्या यह होगी।

$c_n = c_{n-1} + n - 1, n \geq 2,$ जहाँ $c_1 = 0$

E4) c_n के पुनरावृत्ति संबंध का प्रयोग करके यह दिखाइए कि $c_n = \frac{1}{2} n(n-1), n \geq 1.$

समस्या 5: आपको याद होगा कि किसी भी अरिक्त समुच्चय S के सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को **घात समुच्चय (Power set)** कहा जाता है और इसे P(S) से प्रकट किया जाता है। आइए हम $S_n = |P(S)|$ से, जहाँ $|S| = n$, संतुष्ट पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात करें। आइए हम $S = \{1, 2, ..., n\}$ लें। अब, S का कोई भी उपसमुच्चय A या तो संख्या n को आविष्ट करता है या आविष्ट नहीं करता है। आइए हम इन दो पारस्परिक अपवर्जी स्थिति (mutually exclusive case) को अलग-अलग लें और ऐसे उपसमुच्चयों A की संख्या की गिनती करें। यदि $n \in A$, तो $A = A' \cup \{n\}$ जहाँ A', $\{1, 2, ..., n-1\}$ का एक उपसमुच्चय है। अतः उपसमुच्चय A उतने ही होंगे जितने कि उपसमुच्चय A' हैं। क्योंकि $A' \subset \{1, 2, ..., n-1\}$ इसलिए ऐसे S_{n-1} उपसमुच्चय A होंगे। इसके विपरीत यदि $n \notin A$, तो वास्तव में A, $\{1, 2, ..., n-1\}$ का एक उपसमुच्चय होता है और इनका भी उपसमुच्चय S_{n-1} होता है। इन दोनों को संयोजित करने पर हम यह पाते हैं।

$S_n = S_{n-1} + S_{n-1} = 2S_{n-1}, n \geq 0$ जहाँ $S_0 = 1.$

E5) S_n के पुनरावृत्ति संबंध का प्रयोग करके यह दिखाइए कि $S_n = 2^n, n \geq 0$

समस्या 6 : आपको याद होगा कि **एकैकी आच्छादन (bijection)** एक समुच्चय का स्वयं पर एकैकी आच्छादी प्रतिचित्रण (onto mapping) होता है। अतः एक n-समुच्चय (n अवयवों वाले समुच्चय) के एकैकी आच्छादनों की संख्या सरलता से सीधे ज्ञात की जा सकती है। फिर भी, हम किसी भी n-समुच्चय, मान लीजिए $\{1, 2, ..., n\}$ के एकैकी आच्छादनों की संख्या b_n से संतुष्ट एक पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात करना चाहते हैं। इस संबंध में, यदि f इस प्रकार का कोई एकैकी आच्छादन हो तो f(n) समुच्चय $\{1, 2, ..., n\}$ के n अवयवों में से कोई भी एक अवयव हो सकता है। परन्तु इसके लिए हमें एकैकी आच्छादन रूप से $\{1, 2, ..., n-1\}$ के अवयवों को $\{1, 2, ..., n\} \setminus \{f(n)\}$ पर प्रतिचित्रित (mapping) करना होगा ? यह क्रिया b_{n-1} विधियों से की जा सकती है, अतः फलन f के अनेक विकल्प हो सकते हैं। ध्यान दीजिए कि f(n) के प्रत्येक विकल्प से एक $(n-1)$ समुच्चय का एक एकैकी आच्छादन प्राप्त होता है। तब,

$b_n = nb_{n-1}, n \geq 2,$ जहाँ $b_1 = 1.$

E6) b_n के पुनरावृत्ति संबंध का प्रयोग करके यह दिखाइए कि $b_n = n!, n \geq 1.$

पिछले खंड के अंत में बतायी गई खो गई हैटों वाली समस्या पर पुनः विचार करके हम इस भाग को यहीं समाप्त कर रहे हैं।

समस्या 7: आपको याद होगा कि वहाँ समस्या n वस्तुओं के अपविन्यासों (derangements) की संख्या d_n ज्ञात करने से संबद्ध समस्या थी और इसे हमने समावेशन-अपवर्जन (**Inclusion-exclusion**) विधि से हल किया था।

आपको याद होगा कि d_n, n वस्तुओं के क्रमचयों (permutations) की संख्या की गिनती है जिसमें कोई भी वस्तु स्थिर नहीं बची रहती। इस प्रकार के क्रमचय को **अपविन्यास (derangement)** कहा जाता है। आइए सबसे पहले हम इन वस्तुओं को एक अनुक्रम $1, 2, \ldots, n$ में रखें। n वस्तुओं के इस प्रकार के किसी भी उपविन्यास में 1 किसी अन्य i पर चला जाता है जहाँ $i \neq 1$ ऐसी स्थिति में दो स्थितियाँ उत्पन्न होती है: समान अपविन्यास में या तो i, 1 पर पुनः चला जाता है या नहीं जाता है। पहली स्थिति में हम मूल समुच्चय से 1 और i को छोड़ सकते हैं और $n-2$ वस्तुओं का एक अपविन्यास प्राप्त कर सकते हैं: इस प्रकार की d_{n-1} संभावनाएँ हैं। अतः यह मानकर कि 1, i पर चला जाता है, कुल संभावनाएँ $d_{n-1} + d_{n-2}$ होती हैं। यह देखकर कि i, 2 और n के बीच की कोई भी संख्या हो सकती है, हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि $d_n = (n-1)(d_{n-1} + d_{n-2})$, $n \geq 3$. पुनरावृत्ति संबंध को पूरा करने के लिए हम यहाँ यह पाते हैं कि $d_1 = 0$ और $d_2 = 1$.

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि d_n का अभिकलन करने के लिए पिछले दो मानों का ज्ञात होना आवश्यक है। क्या केवल एक पिछले पद d_{n-1} के मान के आधार पर हम d_n का अभिकलन कर सकते हैं। इसका पता लगाने के लिए आइए हम पुनरावृत्ति को $d_n - nd_{n-1} = -[d_{n-1} - (n-1)d_{n-2}]$ के रूप में लिखें। यहाँ अब आप यह देखेंगे कि दक्षिण पक्ष के कोष्ठकों के अंदर का व्यंजक वाम पक्ष के व्यंजक में केवल n के स्थान पर $n-1$ रख देने से प्राप्त हो जाता है। यदि हम $D_n = d_n - nd_{n-1}$ लिखें, तो हमें सरलीकृत व्यंजक $D_n = -D_{n-1}$ प्राप्त होगा। परन्तु, तब ऐसी स्थिति में $D_{n-1} = -D_{n-2}$; और इस तरह $D_n = D_{n-2}$ इस प्रक्रिया को करते रहने पर हमें $D_n = (-1)^{n-2} D_2 = (-1)^n [d_2 - 2d_1] = (-1)^n$ प्राप्त होता है। अतः हमें यह प्राप्त होता है

$$d_n = nd_{n-1} + (-1)^n, \text{ यदि } n \geq 2 \text{ जहाँ } d_1 = 0.$$

E7) ऊपर की चर्चा में दिए गए d_n के किसी भी पुनरावृत्ति संबंध का प्रयोग करके यह दिखाइए कि

$$d_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}, n \geq 1.$$

यहाँ कुछ प्रश्न देकर, जिनमें आपको पुनरावृत्ति समीकरण स्थापित करना है, हम इस भाग को यहीं समाप्त कर रहे हैं।

E8) प्रत्येक $n \geq 1$ के लिए, $a_n = \sum_{k=0}^{n} C(n+k, 2k)$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} C(n+k, 2k+1)$ परिभाषित कीजिए जहाँ $a_0 = 1, b_0 = 0$ प्रत्येक $n \geq 0$ के लिए यह दिखाइए कि $a_{n+1} = a_n + b_{n+1}$, $b_{n+1} = a_n + b_n$.

E9) व्यंजक $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ को कोष्ठक में इस प्रकार रखने की विधियों की संख्या का पुनरावृत्ति संबंध व्युत्पन्न कीजिए जिससे कि एक बार में केवल दो पदों को ही जोड़ा जाए। उदाहरण के लिए व्यंजक $((x_1 + x_2) + x_3)$ पूर्णतः कोष्ठकीकृत है जबकि व्यंजक $(x_1 + x_2) + x_3$ कोष्ठकीकृत नहीं है)।

E10) $n \times n$ आव्यूह (matrix) वाले सारणिक (determinant) का एक पुनरावृत्ति संबंध स्थापित कीजिए जिसमें 1, मुख्य विकर्ण के अनुदिश हो और प्रत्येक पंक्ति में मुख्य विकर्ण के दोनों ओर 1 हो और अन्य स्थानों पर शून्य हो।

E11) केवल पूर्णांकों {0, 1, 2, 3} का प्रयोग करके n-अंक वाली संख्याओं के अनुक्रम का, जिसमें सभी 0 सम संख्या में हों, पुनरावृत्ति-संबंध स्थापित कीजिए।

E12) दिखाइए कि अलग-अलग n वस्तुओं के r-क्रमचयों की संख्या $P(n, r)$ निम्नलिखित पुनरावृत्ति-संबंध को संतुष्ट करती है

$$P(n, r) = P(n-1, r) + rP(n-1, r-1), n \geq 1, r \geq 1.$$

E14) मान लीजिए S_r^n द्वितीय प्रकार की स्टर्लिंग-संख्याओ (**Stirling numbers of the second kind**) अर्थात् अलग-अलग r वस्तुओं को n अभिन्न बक्सों में बंटित करने की विधियों की संख्या, जबकि कोई बक्स खाली न रह जाए, को प्रकट करना है। दिखाइए कि S_r^n पुनरावृत्ति–संबंध $S_{r+1}^n = S_r^{n-1} + n\,S_r^n$; $1 < n < r$ को संतुष्ट करता है।

E14) मान लीजिए $f(n, k)$, n संख्याओं $1, 2, \ldots, n$ से k संख्याओं का चयन करने की विधियों की संख्या को प्रकट करता है जबकि किन्हीं दो क्रमागत संख्याओं का चयन न किया गया हो। $f(n, k)$ का एक पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात कीजिए और प्रतिबंधों $f(n, 1) = n$ और $f(n, n) = 0$ को लागू करके यह सत्यापित कीजिए कि $f(n, k) = C(n-k+1, k)$

E15) मान लीजिए t_n पूर्णांकी भुजाओं और परिमाप n वाले असर्वांगसम त्रिभुजों की संख्या है। दिखाइए कि

$$t_n = \begin{cases} t_{n-3} & \text{, यदि } n \text{ सम हो;} \\ t_{n-3} + \dfrac{n + (-1)^{(n+1)/2}}{4} & \text{, यदि } n \text{ विषम हों।} \end{cases}$$

E16) मान लीजिए समतल पर ऐसे n एकक वृत्त (unit circle) खींचे गए हैं कि प्रत्येक वृत्त अन्य वृत्तों को ठीक दो बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है और कोई भी तीन वृत्त एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद नहीं होते हैं। उन प्रदेशों की संख्या r_n का पुनरावृत्ति संबंध व्युत्पन्न कीजिए जिनमें समतल, n वृत्तों से विभक्त है।

अगले भाग में हम सभी प्रासंगिक परिभाषाएँ देंगे और संकेतनों से आपको परिचित कराएंगे।

7.4 परिभाषाएँ

अब तक आप इस बात से अच्छी तरह से परिचित हो चुके होंगे कि "पुनरावृत्ति-संबंध" क्या होता है और इसे किस प्रकार स्थापित किया जाता है। अब समय आ गया है कि हम इस प्रक्रिया को औपचारिक रूप में प्रस्तुत करें और इसके लिए एक दृढ़ गणितीय पीठिका स्थापित करें। **पुनरावृत्ति-संबंध** वह सूत्र है जो ऐसी प्रक्रिया को निष्पादित करने की विधियों की संख्या की गिनती करता है जिसमें अपेक्षाकृत कुछ कम वस्तुओं के साथ इसे निष्पादित करने की विधियों की संख्या के रूप में n वस्तुऐं हों। इसकी औपचारिक परिभाषा यह है :

परिभाषा : मानलीजिए $\{a_n : n \geq 0\}$ वास्तविक (real) या सम्मिश्र (complex) संख्याओं का एक अनुक्रम है। **पुनरावृत्ति संबंध (या पुनरावृत्ति समीकरण)** निम्न रूप का एक व्यंजक होता है

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, n)$$

जहां F, कुछ चरों $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, n$ का एक फलन है। ध्यान दीजिए कि यहां यह आवश्यक नहीं है कि व्यंजक में सभी a हों।

दूसरे शब्दों में, इसकी सहायता से पिछले एक या अधिक पदों से हम अनुक्रम का nवाँ पद अभिकलित कर सकते हैं। प्रत्येक "F" एक फलन को प्रकट करता है और चर अनुक्रम के पिछले (कुछ या सभी) पद और n होते हैं। यहाँ हम केवल ऐसे फलनों F पर चर्चा करेंगे जो बहुपद हों और केवल परिमिततः (finitely) अनेक चरों $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}, n$ पर निर्भर करते हों।

परिभाषा : $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_{n-k}, n)$ से परिभाषित पुनरावृत्ति-संबंध की **कोटि (order)**, k होती है, जहाँ a_n पिछले k पदों में से एक या अधिक पदों पर निर्भर करता हो और k, इस प्रकार का लघुत्तम पूर्णांक हो। हम $a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, n)$ के रूप के पुनरावृत्ति-संबंधों की जिनमें प्रत्येक अपने पिछले पदों पर निर्भर करता है, कोटि को परिभाषित नहीं करते।

अतः हम पिछले k पदों से न कि पिछले $k-1$ पदों से अनुक्रम के nवें पद को अभिकलित कर सकें, तो हम k को कोटि के रूप में परिभाषित करते हैं।

परिभाषा : पुनरावृत्ति-संबंध का **घात (degree)**; F का, जिसे n को छोड़कर अपने अन्य सभी चरों में एक बहुपद माना जाता है, घात होता है। यदि F अपने चरों के बहुपद न हो, तो ऐसी स्थिति में पुनरावृत्ति संबंध का कोई घात नहीं होता।

बहुपदों की तरह, एक घात वाले पुनरावृत्ति-संबंधों को रैखिक (linear), दो घात वाले संबंधों को **द्विघाती (quadratic)**, आदि कहा जाता है; क्योंकि "घात" की संकल्पना का संबंध परिभाषी बहुपद F के घात के साथ होता है।

परिभाषा : पुनरावृत्ति संबंध को **समघात (homogeneous)** संबंध कहा जाता है। जबकि- इसमें ऐसा कोई भी पद न हो, जो केवल चर n पर निर्भर करता हो। पुनरावृत्ति-संबंध को जो समघात नहीं है, **असमघात (non-homogeneous या inhomogeneous)** संबंध कहा जाता है।

इस तरह, पुनरावृत्ति को समघात मानने के लिए यह आवश्यक है कि पुनरावृत्ति को परिभाषित करने वाले प्रत्येक पद में अनुक्रम के पिछले पदों में से कम से कम एक पद अवश्य आविष्ट हो। कोटि पर ध्यान दिए बिना शब्द **समघात** का प्रयोग प्रायः रैखिक पुनरावृत्तियों के लिए किया जाता है।

उदाहरणः

1. $a_n = 3a_{n-1} + n^2$ कोटि 1 और घात 1 वाला **असमघात** है।
2. $a_n = na_{n-2} + 2^n$ कोटि 2 और घात 1 वाला **असमघात** है।
3. $a_n = \sqrt{a_{n-1}} + a^2_{n-2}$ कोटि 2 वाला **समघात** है और इसका कोई घात नहीं है।
4. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_0$ **समघात** है, परन्तु इसकी कोटि नहीं है और इसका घात 1 है।
5. $a_n = a^2_{n-1} + a_{n-2}\, a_{n-3}\, a_{n-4}$ कोटि 4 और घात 3 वाला समघात है।
6. $a_n = \sin a_{n-1} + \cos a_{n-2} + \sin a_{n-3} + \ldots + e^n$ **असमघात** है और इसकी कोई कोटि और कोई घात नहीं है।
7. $a_n = f_1(n)\, a_{n-1} + f_2(n)\, a_{n-2} + \ldots + f_{n-k}(n)\, a_{n-k} + g(n)$, kवीं कोटि वाले रैखिक पुनरावृत्ति संबंध ($f_{n-k}(n) \neq 0$) के व्यापक रूप को निरूपित करता है। यह **समघात** होता है, जबकि प्रत्येक n पर $g(n) = 0$ अन्यथा **असमघात** होता है।
8. $a_n = a_0\, a_{n-1} + a_1\, a_{n-2} + \ldots + a_{n-1}\, a_0\ (n \geq 2)$, जहाँ $a_0 = 0$ और $a_1 = 0$ एक अरैखिक पुनरावृत्ति-संबंध है।
9. $a_{n,k} = a_{n-1,k} + a_{n-1,k-1}$ दो चरों n और k में एक पुनरावृत्ति-संबंध है। $a_{n,k} = C(n, k)$ लेने पर दिया हुआ संबंध पास्कल सर्वसमिका (Pascal's identity) हो जाता है जिसके प्रारंभिक प्रतिबंध सभी $n \geq 0$ के लिए $a_{n,0} = C(n, 0) = a_{n,n} = C(n, n) = 1$. और $a_{n,k} = 0, k \geq n$..
10. $a_{n,k} = a_{n-2,k-1} + a_{n-3,k-1} + a_{n-4,k-1}$ जिसके प्रारंभिक प्रतिबंध $a_{2,1} = a_{3,1} = a_{4,1} = 1$ और अन्यथा $a_{k-1} = 0$, दो चरों में एक पुनरावृत्ति-संबंध हैं। (यह n एकसमान गेंदों को अलग-अलग k बक्सों में इस तरह रखने की विधियों का पुनरावृत्ति-संबंध है जिससे कि प्रत्येक बक्स में दो और चार के बीच गेंद हों।
11. $a_n = a_{n/2} + 1$, जहाँ $a_1 = 0$ (n, 2 का एक घात) एक अरैखिक पुनरावृत्ति संबंध है।

ऊपर दिए गए विभिन्न उदाहरणों का अध्ययन करते समय इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि केवल पुनरावृत्ति-संबंध से आप अनुक्रम के पदों को परिभाषित नहीं कर सकते। इसके लिए यह जानना आवश्यक है कि कहां से अनुक्रम प्रारंभ किया जाए। यदि a_n को केवल a_{n-1} के पदों में परिभाषित किया गया हो, तो a_0 (या a_1 या जहां से आप अनुक्रम प्रारंभ करना चाहते हैं) के मान का निर्णय ले लेने पर आपका अनुक्रम अद्वितीयतः निर्धारित हो जाता है। अधिक व्यापक रूप में kवीं कोटि वाली पुनरावृत्ति के संबंध में अनुक्रम को अद्वितीयतः परिभाषित करने के लिए अनुक्रम के प्रथम k पदों, विशेष रूप से $a_0, \ldots, a_{k-1}$, को जानना आवश्यक होता है। घात k वाले एक सुपरिभाषित रैखिक पुनरावृत्ति संबंध में एक पुनरावृत्ति भाग और k क्रमागत मानों के प्रारंभिक प्रतिबंध होते हैं।

परिभाषाः उस स्थिति में kवीं कोटि वाले पुनरावृत्ति संबंध के **प्रारंभिक प्रतिबंध (initial conditions)** होते हैं जबकि पदों $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ में से एक या अधिक पदों के मान ज्ञात हों।

परिभाषा : फलन f (n) को पुनरावृत्ति संबंध का **व्यापक हल (general solution)** कहा जाता है, जबकि यह पुनरावृत्ति-समीकरण को संतुष्ट करता हो। फलन g(n) को पुनरावृत्ति-संबंध का विशेष

हल (particular solution) कहा जाता है जबकि वह प्रारंभिक प्रतिबंधों के साथ पुनरावृत्ति-समीकरण को संतुष्ट करता हो।

ध्यान दीजिए कि प्रारंभिक प्रतिबंध रहित किसी भी पुनरावृत्ति संबंध के अनंततः अनेक "व्यापक हल" होते हैं, प्रारंभिक पदों के प्रत्येक मान-समुच्चय के लिए एक व्यापक हल, परन्तु कोटि k वाले पुनरावृत्ति-संबंधों के लिए एक बार प्रथम k पदों के नियत हो जाने पर केवल एक "हल" प्राप्त होता है। आप यह सत्यापित करते आ रहे हैं कि दिए गए फलन वस्तुतः पिछले दो भागों की पुनरावृत्तियों के हल हैं या नहीं। यहाँ हम कुछ और सरल उदाहरण दे रहे हैं। पुनरावृत्ति संबंधों के हल पर चर्चा इकाई 9 में की जाएगी।

उदाहरण :

1. $a_n = a_{n-1}$ का व्यापक हल $a_n = c$ है, जहाँ C एक अचर है, परन्तु, यदि इसके अतिरिक्त $a_0 = 1$ भी हो, तो हल $a_n = 1,\ n \geq 0$ होता है।

2. $a_n = a_{n-1} + 1$ का व्यापक हल $a_n = c + n$ है, जहाँ $a_n = c + n$ जहाँ C एक अचर है; यदि $a_0 = 0$ तो हल $a_n = n, n \geq 0$ हो जाता है।

3. $a_n = ka_{n-1}$ का व्यापक हल $a_n = ck^n$ है, जहाँ C एक अचर है; यदि $a_0 = 1$, तो हल $a_n = k^n, n \geq 0$ हो जाता है।

4. $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ का व्यापक हल यह है

$$a_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$ जहाँ c_1, c_2 अचर हैं।

यदि $a_1 = 1, a_2 = 3$, तो विशेष हल यह होता है

$$a_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n, n \geq 1.$$

5. $a_n - \frac{n}{n-1} a_{n-1} = n^3$, जहाँ $a_1 = 1$ का व्यापक हल यह है

$$a_n = \frac{n^2 (n+1)(2n+1)}{6}$$

इस इकाई के अंतिम भाग में हम विभाजन और विजय से संबद्ध कलन-विधियों (algorithm) से प्राप्त कुछ सामान्य प्रकार के पुनरावृत्ति-संबंधों पर चर्चा करेंगे।

7.5 'फूट डालो और जीतो' संबंध

यह एक वियोजन कलन-विधि (decompositions algorithm) है जो निम्नलिखित क्रिया करके आमाप (size) $n \in Z^+$ वाली समस्या को हल करती है:

i) लघु निदेश प्राचक (input parameter) वाली लगभग समान आमाप वाली अनेक लघु अनतिव्यापी उपसमस्याएँ (non-overlapping subproblems) समान प्रकार की समस्या जैसी कुछ और समस्याओं में विभाजित करना ;

ii) इन उपसमस्याओं को हल करना; और

iii) इनके हलों का प्रयोग आमाप n वाली मूल समस्या के हल का निर्माण करना।

यहाँ हमारी विशेष अभिरुचि उन स्थितियों में है, जहाँ n, 2 के घात वाला है।

आपको प्रेरित करने के लिए यहाँ हम इस प्रकार की कलन-विधियों से संबंधित कुछ चिरप्रतिष्ठित (classical) उदाहरणों पर, अर्थात् 'फूट डालो और जीतो' कलन-विधि से प्राप्त तीन पुनरावृत्ति-संबंधों पर चर्चा करेंगे।

समस्या 8: टेनिस के एक टूर्नामेंट में भाग लेने वाले प्रत्येक खिलाड़ी को प्रथम चक्र में एक मैच

खेलना होता है। इसके बाद, प्रथम चक्र में जीतने वाले प्रत्येक खिलाड़ी को दूसरे चक्र में मैच खेलना होता है। इस मैच को जीतने वाले खिलाड़ी अगले चक्र में पहुँच जाते हैं, और क्रम तब तक चलता रहता है, जब तक कि अंत में टूर्नामेंट के विजेता के रूप में केवल एक खिलाड़ी बच रहता हो। यह मानकर कि टूर्नामेंट में सदा $n = 2^k$, जहाँ k एक संख्या है, खिलाड़ी होते हैं, इस टूर्नामेंट में, जिसमें खिलाड़ियों की संख्या n है, चक्रों की संख्या का पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात कीजिए।

a_n, अर्थात् चक्रों की संख्या का पुनरावृत्ति संबंध $a_n = a_{n/2} + 1$ है, क्योंकि $a_{n/2}$ चक्रों के बाद केवल दो खिलाड़ी बच रहते हैं जो कि प्रथम n/2 खिलाड़ियों के उपटूर्नामेंट के और दूसरे n/2 खिलाड़ियों के उपटूर्नामेंट के विजेता हैं। इसके बाद एक और चक्र करने पर शेष दो खिलाड़ियों से टूर्नामेंट का विजेता मिल जाता है। यहाँ $a_1 = 0$, कि क्योंकि अब केवल एक खिलाड़ी ही बचा रहता है और टूर्नामेंट शून्य हो जाता है। आप इकाई 9 में देखेंगे कि इस समस्या का हल $a_n = \log_2 n$ है।

समस्या 9: मानलीजिए कि A, n अवयवों की एक छाँटी गई सारणी (array) है और हम यह ज्ञात करना चाहते हैं कि कोई संख्या x इस सूची में है या नहीं। इसका एक सीधा ढंग यह है कि x की क्रमिक खोज उत्तरोत्तर रूप से A[1], A[2], . . ., A[n] से तुलना की जाए। इस क्रिया में अधिक से अधिक n तुलनाएँ करनी पड़ती हैं।

यह ज्ञात करने के लिए कि संख्या x एक सारणी के रूप में रखी गई और छाँटी गई सूची में है या नहीं, निम्नलिखित विभाजन और विजय द्विभाजी अन्वेषण खोज कलन–विधि (binary search algorithm) को लागू कीजिए।

यदि सारणी में एक अवयव हो तो x की तुलना इस अवयव से कीजिए। इसमें n = 1 पर आवश्यक तुलनाओं की संख्या (a_n) एक होगी अर्थात् $a_1 = 1$

यदि सारणी में एक से अधिक अवयव हों, तो अवयव M को सरणी के "मध्य" में लाइए। यदि x, M से बड़ा या M के बराबर हो, तो कलन-विधि सारणी के "दूसरे अर्ध" पर पुनरावर्ती रूप में लागू कीजिए, अन्यथा सरणी के "प्रथम अर्ध" पर कलन-विधि लागू कीजिए।

इसे द्विभाजी अन्वेषण (binary search) इसलिए कहा जाता है, क्योंकि यह उत्तरोत्तर रूप से शेष संभव अवयवों में से "अर्ध" को तब तक हटाता जाता है जब तक उसमें एक प्रविष्टि, जो कि x हो सकता है, नहीं रह जाती। मानलीजिए $n = 2^k$, और तुलनाओं की उपेक्षित संख्या a_n है। तब $a_1 = 1$ और $a_n = a_{n/2} + 1$ $(n \geq 2)$.

यदि n = 1, तब सूची के केवल एक अवयव होगा और इसमें एक तुलना करनी होगी। अन्यथा, हमें M के साथ एक तुलना करनी होगी। यह उपरि संक्रिया (overhead) को निरूपित करता है, जो कि उपसमस्या को हल करने के लिए पुनरावर्ती प्रक्रिया में समस्या को अर्ध और $a_{n/2}$ तुलनाओं के लिए आवश्यक है।

प्रायः सूची के n नामों को वर्णक्रम में रखना चाहिए और सूची की n संख्याओं को आरोही क्रम (ascending orders) में रखना चाहिए। इस प्रकार के वर्णानुक्रमण (alphabetization) या पुनर्विन्यास को सरल छाँटना (simple sort) कहा जाता है।

मानलीजिए हमारे पास m (m और n) अवयवों वाली दो सूची हैं जिन्हें पहले ही शाटित किया जा चुका है। इन दो शाटित सूचियों को m(m +n) अवयवों की एक शाटित सूची में विलयित किया सकता है। इस शाटन को 'मिलाना छाँटना' (merge sort) कहा जाता है। अर्थात् यदि शाटित सूचियाँ $A = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ और $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ हों, जहाँ $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ और $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_m$; तो हम एक ऐसी सूची $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n+m})$ प्राप्त करना चाहते हैं जिसमें दो सूचियों A और B के सभी अवयव शामिल हों और पूरी तरह से शाटित हो जिससे कि $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{n+m}$. यहाँ हमने संक्षेप में यह बताएंगे कि किस प्रकार सूची c प्राप्त की जाती है। इसके लिए सबसे पहले हम अपने बाएँ हाथ की सूचक अंगुली को a_1 की ओर और दाएं हाथ की सूचक अंगुली को b_1 की ओर इंगित करते हैं। हम इन दो संख्याओं की तुलना करके छोटी संख्या प्राप्त करते हैं। इस छोटी संख्या को हम सूची c में रखते हैं और इस संख्या की ओर इंगित करने वाली अंगुली को आगे बढ़ाते हैं। इस प्रक्रिया को हम दुबारा करते हैं, अर्थात् इंगित करने वाली संख्याओं की तुलना करते हैं, छोटी संख्या को c का अगला अवयव मान लेते हैं और इस अंगुली को तब तक आगे बढ़ाते जाते हैं, जब तक कि सूची c पूरी तरह से भर नहीं जाती। हर बार, जब b_k के साथ a_j की तुलना की जाती हैं तो विलयित सूची में एक अन्य अवयव सही-सही स्थापित हो जाता है। अतः अपेक्षित तुलनाओं की संख्या 2m – 1 (m + n – 1) होगी।

n अवयवों $x_1, x_2, \ldots, x_n$ की सरणी A को छाँटना कलन-विधि : सूची की सबसे छोटी संख्या ज्ञात करने के लिए लागू की गई सरल शॉटन कलन विधि में पहले हम x_1 की तुलना x_2 से करते हैं, इसमें से छोटी संख्या की तुलना x_3 से करते हैं, और परिणाम की तुलना x_4 से करते हैं, आदि। और, इस संख्या को शाटित की गई अंतिम सूची में जोड़ दीजिए और मूल सूची से इस संख्या को हटाकर $n-1$ अवयवों की एक नई सूची बनाइए। मूल सूची की सबसे छोटी दूसरी संख्या ज्ञात करने के लिए ऊपर बतायी गई प्रक्रिया को प्रथम चरण के बाद बच रहे $n-1$ अवयवों की सूची पर लागू कीजिए और इसी तरह प्रक्रिया को आगे बढ़ाते जाइए (भाग 7.3 की समस्या 1 देखिए)

समस्या 10: अब हम n संख्याओं की सारणी का शाटन करने के लिए विलय शाटन कलन विधि का पुनरावृत्ति-संबंध व्युत्पन्न करेंगे। 'मिलाना छाँटना' कलन-विधि (merge sort algorithm) में हमें निम्नलिखित चरण लागू करने होते हैं। यदि A का एक अवयव हो, तो यह पहले से ही शाटित होता है, अन्यथा हम सरणी को "अर्ध" में विभाजित करते हैं अर्थात् हम मूल सूची को आधे में विभाजित कर देते हैं; प्रथम अर्ध का पुनरावर्ती रूप से शाटन करते हैं और दूसरे अर्ध का पुनरावर्ती रूप से शाटन करते हैं।

इन दो अर्धों का विलय करके एक सारणी बनाइए। मान लीजिए $n = 2^k$. $a_1 = 0$ विलय शाटन द्वारा प्रयुक्त तुलनाओं की संख्या निम्नलिखित संबंध को संतुष्ट करती है

$$a_n = 2a_{n/2} + n - 1 \ (n \geq 2)$$

जहाँ $2a_{n/2}$ पद उपसमस्याओं के लिए आवश्यक कुल तुलनाओं को निरूपित करता है और उपरि संक्रिया का $n-1$ पद परिणामों को संयोजित करने के लिए आवश्यक होता है अर्थात् दो शाटित सूचियों का विलयन जबकि उनमें n/2 अवयव $(2 \times \frac{n}{2} - 1)$ हों। ... हल यह होता है

$$a_n = n \log_2 (n) - n + 1 = k2^k - 2^k + 1$$

हम उस पुनरावृत्ति को 'फूट डालो और जीतो' पुनरावृत्ति कहते हैं जबकि यह $a_n = ba_{n/a} + d(n)$, पूर्णांक $n \geq 1$, के रूप का हो जहाँ b एक अचर है और d, n का एक फलन है। हमने उन स्थितियों पर विचार किया है जहाँ $a = 2$.

E17) i से उत्तरोत्तर गुणन करके एक पूर्णांक का nवाँ घात ज्ञात करने के लिए $n-1$ गुणन-क्रियाओं की आवश्यकता होती है। यह मानकर कि $n = 2^k$, एक ऐसी 'फूट डालो और जीतो' कलन-विधि ज्ञात कीजिए जिससे कि यदि nवाँ घात ज्ञात करने के लिए आवश्यक गुणन-क्रियाओं की संख्या a_n हो, तो $a_n = a_{n/2} + 1$. यदि दिया हुआ हल $a_n = a_{n/2} + 1$ हो, तो क्या कलन-विधि वांछनीय होती है ?

E18) उत्तरोत्तर गुणन से n पूर्णांकों की सूची का गुणनफल ज्ञात करने के लिए $n-1$ गुणन-क्रियाओं की आवश्यकता होती है। यह मानकर कि $n = 2^k$, एक ऐसी 'फूट डालो और जीतो' कलन-विधि ज्ञात कीजिए जिससे कि गुणन क्रियाओं की संख्या a_n, पुनरावृत्ति-संबंध

$$a_n = 2a_{n/2} + 1$$

को संतुष्ट करती हो।

E19) दो n-अंकों वाली संख्या को एक दूसरे से गुणा करने के लिये साधारणतया n^2 गुणन क्रियाओं की आवश्यकता होती है। यह मानकर कि $n = 2^k$, एक ऐसी 'फूट डालो और जीतो' कलन-विधि इस्तेमाल कीजिये जिससे कि गुणन क्रियाओं की संख्या n^2 से कम होगी।

इसके साथ ही हम इस इकाई को समाप्त करते हैं। अगली दो इकाइयों में पुनरावृत्तियों को हल करने का तरीका बताऐंगे। आइए अब हम देखें कि हमने इस इकाई में क्या-क्या पढ़ा है।

7.6 सारांश

इस इकाई में आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है।

1. पुनरावृत्ति संबंधों की इस इकाई में आपके लिए सुप्रसिद्ध समस्याओं और संचय-विज्ञान के आम प्रश्नों से लिए गए पुनरावृत्ति-संबंधों के अनेक उदाहरण दिए गए हैं।

2. इस इकाई को पढ़ लेने के बाद आपको इस बात की अच्छी जानकारी हो जानी चाहिए कि किस प्रकार पुनरावृत्तियों को स्थापित करना चाहिए।
3. और साथ ही बतायी गई विभिन्न परिभाषाओं से भी आपको परिचित हो जाना चाहिए।
4. अंत में आप 'फूट डालो और जीतो' संबंध-विधि की सहायता से पुनरावृत्ति को स्थापित करना सीख लिया है।

7.7 हल/उत्तर

E1) इसकी जांच सरलता से की जा सकती है कि $\mathcal{F}_1 = 1 = \mathcal{F}_2$ यदि $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ तो आप यह पाते हैं कि α, β समीकरण $x^2 - x - 1 = 0$ के हल हैं। यदि $n \geq 3$, तो
$\sqrt{5}\,(\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}) = (\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}) + (\alpha^{n-2} - \beta^{n-2}) =$
$\alpha^{n-2}(\alpha+1) - \beta^{n-2}(\beta+1) = \alpha^{n-2}.\alpha^2 - \beta^{n-2}.\beta^2 = \alpha^n - \beta^n = \sqrt{5}\,\mathcal{F}_n$, जैसा कि अपेक्षित है।

E2) यहाँ देखिए कि $T_1 = 1$ यदि
$n \geq 2, 2T_{n-1} + 1 = 2(2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1 = T_n$ जिससे सूत्र सत्यापित हो जाता है।

E3) ध्यान दीजिए कि $L_1 = 2$ यदि
$n \geq 2, L_{n-1} + n = \frac{1}{2}(n-1)n + 1 + n = \frac{1}{2}n(n+1) + 1 = L_n$ जैसा कि अपेक्षित है।

E4) यह सरलता से देखा जा सकता है कि $C_1 = 0$. यदि
$n \geq 2, C_{n-1} + n - 1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) + (n-1) = \frac{1}{2}n(n-1)$ जैसा कि अपेक्षित है।

E5) ध्यान दीजिए कि $S_0 = 1$ यदि $n \geq 1$, तो $2S_{n-1} = 2.2^{n-1} = 2^n = S_1$. जिससे सूत्र सत्यापित हो जाता है।

E6) हम देखते हैं कि $b_1 = 1$ यदि $n \geq 2$, तो $nb_{n-1} = n(n-1)! = n! = b_n$, जैसा कि अपेक्षित हैं

E7) हम यह जांच कर लेते हैं कि $d_1 = 0, d_2 = 1$ प्रथम कोटि पुनरावृत्ति संबंध को सत्यापित करने के संबंध में हम यह पाते हैं कि यदि $n \geq 2$, तो

$$nd_{n-1} + (-1)^n = n.(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} + (-1)^{n-1}$$

$$= n! \left(\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} - \frac{(-1)^n}{n!}\right) + (-1)^n$$

$$= d_n$$

जैसा कि अपेक्षित है।

द्वितीय कोटि पुनरावृत्ति संबंध को स्थिति में यदि $n \geq 1$, तो

$$(n-1)(d_{n-1} + d_{n-2}) = (n-1)\left[(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} + (n-2)! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!}\right]$$

$$= n(n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} - (n-1)! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} + (n-1)! \sum_{i=0}^{n-2} \frac{(-1)^i}{i!}$$

$$= n! \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!} - (n-1)! \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} = d_n.$$

जैसा कि अपेक्षित है।

E8) $a_n = \sum_{k=1}^{n} C(n+k, 2k) + 1$ लिखने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$a_{n+1} - a_n = \sum_{k=1}^{n} C(n+k+1, 2k) - \sum_{k=1}^{n} C(n+k, 2k) + 1$$

$$= \sum_{k=1}^{n} C(n+k, 2k-1) + 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C(n+k+1, 2k+1) + 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n+k+1, 2k+1)$$

$$= b_{n+1}.$$

इसी प्रकार $b_n = \sum_{k=0}^{n} C(n+k, 2k+1)$ लिखने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$b_{n+1} - b_n = \sum_{k=0}^{n} C(n+k+1, 2k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} C(n+k, 2k+1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C(n+k+1, 2k+1) - \sum_{k=0}^{n-1} C(n+k, 2k+1) + 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} C(n+k, 2k) + 1$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C(n+k, 2k)$$

$$= a_n.$$

E9) यदि व्यंजक $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ का कोष्ठकीकरण करने की विधियों की संख्या a_n हो, तो उप व्यंजकों $x_1 + \ldots + x_k$ और $x_{k+1} + \ldots + x_n$ की अपेक्षित संख्याएँ क्रमशः a_k और a_{n-k} होगी। इससे यह पता चलता है कि कुल व्यंजक का कोष्ठकीकरण करने की विधियाँ $a_k a_{n-k}$ हैं

जहाँ $k \geq 4$.

अतः a_n से संतुष्ट पुनरावृत्ति-संबंध यह होगा

$a_n = a_{n-1} a_1 + a_{n-2} a_2 + \ldots + a_2 a_{n-2} + a_1 a_{n-1}, n \geq 2$ जहाँ $a_1 = 1$.

तथ्य $a_0 = 0$ को लागू करके इसे इस प्रकार विस्तरित किया जा सकता है

$a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_n a_0 + a_{n-1} a_1 + \ldots + a_1 a_{n-1} + a_{n-1} + a_0 a_n \; (n \geq 2)$

E10) मानलीजिए Δn अपेक्षित $n \times n$ सारणिक को प्रकट करता है। प्रथम पंक्ति के प्रति प्रसार करने पर हमें Δ_{n-1} ऋण सारणिक प्राप्त होता है जिसे प्रथम पंक्ति के पंक्ति प्रसार करने पर Δ_{n-2} प्राप्त होता है। संगत पुनरावृत्ति-संबंध $\Delta_n = \Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}, n \geq 3$, जहाँ $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 0$, है।

E11) मानलीजिए a_n एक ऐसे n-अंक अनुक्रमों की संख्या को प्रकट करता है जिसमें सम संख्या में सभी शून्य हैं। तब, a_{n-1} $(n-1)$ अंक–अनुक्रम होंगे जिनमें सम संख्या में सभी शून्य होंगे और $4^{n-1} - a_{n-1}(n-1)$ अंक–अनुक्रम होंगे। जिनमें विषम संख्या में सभी शून्य होंगे। ऐसे a_{n-1} अनुक्रमों में से, जिनमें 0 सम संख्या में है, प्रत्येक अनुक्रम के साथ अंक 1, 2 या 3 जोड़ा जा सकता है जिससे लंबाई n वाले ऐसे अनुक्रम प्राप्त होते हैं जिनमें सभी 0 सम संख्या में होते हैं। $4^{n-1} - a_{n-1}$ अनुक्रमों में से ऐसे प्रत्येक अनुक्रम के साथ, जिनमें सभी 0 विषम संख्या में होते हैं, अंक 0 को अवश्य जोड़ देना चाहिए जिससे कि लंबाई n वाले ऐसे अनुक्रम प्राप्त होते हों, जिनमें सभी 0 सम संख्या में होते हैं। अतः $n \geq 2$ के लिए,

$a_n = 3a_{n-1} + 4^{n-1} - a_{n-1} = 2a_{n-1} + 4^{n-1}$ जहाँ $a_1 = 3$.

E12) अलग-अलग n वस्तुओं में कोई एक वस्तु उठा लीजिए और उसे विशिष्ट वस्तु मान लीजिए। तब r-क्रमचयों की संख्या जिसमें यह विशिष्ट वस्तु नहीं होती हो, $P(n-1, r)$ होगी, क्योंकि

गए शेष n - 1 वस्तुओं के r-क्रमचयों की संख्या है। इसके विपरीत यदि "विशिष्ट" वस्तु उपस्थित होती हो तब r-क्रमचयों की संख्या r ! (n - 1, r - 1) होगी, क्योंकि "विशिष्ट" वस्तु अन्य वस्तुओं के बीच की r स्थितियों में से किसी भी एक स्थिति पर हो सकती है या किसी भी छोर पर हो सकता है और तब हमें n - 1 वस्तुओं के (r - 1)-क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनी होती है। इन दो को संयोजित करने पर हमें अपेक्षित पुनरावृत्ति प्राप्त हो जाती है।

E13) इस प्रश्न का हल भी बहुत-कुछ पिछले हल से मिलता-जुलता है। इसमें भी सबसे पहले एक "विशिष्ट" वस्तु चुन लीजिए। इस वस्तु को आविष्ट करने वाले बक्स में या तो कोई अन्य वस्तु नहीं होगी या कम से कम एक और वस्तु होगी। पहली स्थिति में हमें अलग-अलग r वस्तुओं को n - 1 अभिन्न बक्सों मे वितरित करना है, जबकि कोई बक्सा खाली न रह जाए। ऐसा करने की विधियों की संख्या S_r^{n-1} होगी। अन्यथा, विशिष्ट "वस्तु" को n (अभिन्न) बक्सों में से (इसके n विकल्प हैं) किसी भी एक बक्सा में रखा जा सकता है और तब भी हमें r वस्तुओं को x अभिन्न बक्सों में वितरित करना होगा जबकि कोई बक्सा खाली न रह जाए। रखी गई "विशिष्ट" वस्तु वाले बक्सा के प्रत्येक विकल्प के लिए ऐसे S_r^n विकल्प होते हैं। इन दो स्थितियों को संयोजित करने पर हमें पुनरावृत्ति-संबंध प्राप्त हो जाता है।

E14) पहले हम यह दर्शाते हैं कि f(n, k) = f(n - 1, k) - f (n - 2, k - 1), जहाँ 1 ≤ k ≤ n - 1. यदि संख्या 1 चुनी गई k संख्याओं में से एक हो, तो हमें n - 2 संख्याओं 3, 4, . . . , n में से k – 1 संख्या और चुननी होती है। यदि संख्या 1 चुनी गई k संख्याओं में से एक संख्या नहीं है, तो हमें n – 1 संख्याओं 2, 3, . . . , n मे से k संख्याएं चुननी होती हैं।

सूत्र का सत्यापन करने के लिए हम n + k पर आगम-विधि लागू करते हैं। इसकी आधार स्थिति तुच्छ है। आगम-परिकल्पना से हमें यह प्राप्त होता है।

f(n, k) = f (n – 1, k) + f (n - 2, k – 1) = C (n - k, k) + C (n - k, k - 1) = C (n - k + 1, k) जैसा कि अपेक्षित है

E15) पूर्णांकी भुजाओं a, b, c से, जहाँ a ≥ b ≥ c एक त्रिभुज बनाया जा सकता है, यदि और केवल यदि a + b ≥ a + 1 अतः यदि भुजाओं a, b, c वाला एक त्रिभुज दिया हुआ हो, तो भुजाओं a – 1, b – 1, c – 1 वाला त्रिभुज भी होता है, यदि और केवल यदि b + c ≥ a + 2 विलोमतः यदि भुजाओं a – 1, b – 1, c – 1 वाला त्रिभुज दिया हुआ हो, तो सदा ही भुजाओं a, b, c वाला त्रिभुज भी होता है। अतः पूर्णांकी भुजाओं a, b, c वाले त्रिभुजों की संख्या और पूर्णांकी भुजाओं a – 1, b – 1, c – 1 वाले त्रिभुजों की संख्या का अंतर क्रमित त्रिकों (ordered triples) (a, b, c), a ≥ b ≥ c की संख्या होती है, जिससे कि b + c = a + 1.

आइए हम इस प्रकार के त्रिकों की संख्या की गिनती करें। यदि b + c = a + 1, तो परिमाप n = a + b + c = 2a + 1 एक विषम पूर्णांक होगा जिससे कि उतनी ही संख्या में परिमाप n वाले त्रिभुज होंगे, जितनी संख्या में परिमाप n – 3 वाले त्रिभुज हैं। इससे सम स्थिति वाली पुनरावृत्ति सिद्ध हो जाती है। यदि n विषम है, तो $a = \frac{n-1}{2}$ और c निम्नलिखित असमिकाओं को अवश्य संतुष्ट करेंगे।

$1 \le c \le b = a - c + 1$, या $1 \le c \le \left\lfloor \frac{a+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{4} \right\rfloor$ इस तरह, इस स्थिति में

$$t_n - t_{n-3} = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor = \frac{n + (-1)^{(n+1)/2}}{4}$$

E16) थोड़ा सा प्रयोग करने पर सूत्र $r_1 = 2, r_2 = 4, r_3 = 8$ और $r_4 = 14$ प्राप्त हो जाएंगे। मानलीजिए हमने n – 1 एकक वृत्त खींचे हैं जो समतल को r_{n-1} प्रदेशों में विभक्त करते हैं। इन x – 1 वृत्तों को nवाँ वृत्त 2(n –1) बिन्दुओं पर प्रतिच्छेद करता है अर्थात् nवाँ वृत्त 2(n –1) चापों मे विभक्त हो जाएगा। क्योंकि इन चापों में से प्रत्येक चाप r_{n-1} प्रदेशों में से किसी भी एक प्रदेश को विभक्त कर देगा, अतः हमें निम्नलिखित पुनरावृत्ति प्राप्त होगा।

$r_n = r_{n-1} + 2(n – 1), n \ge 2.$

E17) n को 2 से भाग दीजिए, $i^{n/2}$ ज्ञात कीजिए, और इसे वर्ग कीजिए। इस तरह $a_n = a_{n/2} + 1$. यहाँ कलन-विधि वांछनीय है, क्योंकि n की अपेक्षा $\log_2(n)$ में वृद्धि अधिक धीमी गति से होती है।

E18) n को 2 से भाग दीजिए। प्रथम $\frac{n}{2}$ पूर्णांकों का गुणनफल [illegible] पूर्णांकों का गुणनफल ज्ञात कीजिए। प्राप्त किए गए इन दो गुणनफलों [illegible] $a_n = 2a_{n/2} + 1$.

E19) मान लीजिए $n = 2^k$ और मान लीजिए A और B दो n अंकों वाली संख्या हैं। इन दो संख्याओं को दो $\frac{n}{2}$ अंकों वाले अंश में विभाजित कीजिये :

$A = A_1\, 10^{\frac{n}{2}} + A_2$ और

$B = B_1\, 10^{\frac{n}{2}} + B_2$ (जैसे $1235 = 12 \times 100 + 35$)

तब $A \cdot B = A_1 B_1\, 10^n + A_1 B_2\, 10^{\frac{n}{2}} + A_2 B_1\, 10^{\frac{n}{2}} + A_2 B_2$

$A \cdot B$ को निश्चित करने के लिए हमें केवल तीन $\frac{n}{2}$ अंक संख्याओं को एक दूसरे से गुणन करने की आवश्यकता है, $A_1 \cdot B_1$, $A_2 \cdot B_2$ और $(A_1 + A_2) \cdot (B_1 + B_2)$ जबकि

$A_1 \cdot B_2 + B_1 \cdot A_2 = (A_1 + A_2) \cdot (B_1 + B_2) - A_1 \cdot B_1 - A_2 \cdot B_2$

$(A_1 + A_2)$ या $(B_1 + B_2)$, $(\frac{n}{2} + 1)$ अंक वाली संख्या हो सकती है किन्तु यह तुच्छ भेद हमारे उत्तर पर कोई प्रभाव नहीं डालेगा (जैसे कि $1295 = 12 \times 10^2 + 95$)

मान लीजिए a_n दो n-अंकों वाली संख्या को ऊपर लिखित प्रक्रिया से एक दूसरे से गुणा करने की संख्या का ज्ञात कराती है यह निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध देती है।

$a_n = 3a_{\frac{n}{2}}$

$a_n \propto n^{\log_2 3} = n^{1.6}$ के बराबर है, जो कि n^2 से कम है इसलिए यह प्रक्रिया पिछली प्रक्रिया से बेहतर है।

इकाई 8 जनक फलन

इकाई की रूपरेखा पृष्ठ संख्या

8.1 प्रस्तावना

जनक फलन सिद्धांत, गणित के सिद्धांतों द्वारा प्रकाशित, गणित की सुन्दरता का एक श्रेष्ठ उदाहरण है जिसकी सरलता और शक्ति से अनेक समस्याओं को समझने की सहजानुभूती मिलती है। यद्यपि यह सिद्धांत सरल बहुपदों के अंकगणित पर आधारित है, फिर भी, इससे गणित के अनेक क्षेत्रों के प्रश्नों के लिए एक सम्मिलित दृष्टिकोण प्राप्त होता है। इस इकाई में हम इनका उपयोग, पुनरावृत्तियों सहित, संचयविन्यास-विज्ञान की चर्चा करने में ...

जनक फलन (generating function) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ की प्रकार की एक औपचारिक घात श्रेणी (formal power series) होती है, जहाँ गुणांक a_n एक संचयविन्यास समस्या (combinatorial problem) के हल को निरूपित करने वाले संख्या-अनुक्रम के पद होते हैं और प्रतीक z का घातांक (exponent) समस्या के कुछ गणना-उद्देश्यों को प्रकट करता है।

भाग 8.2 में, हम जनक फलन की संकल्पना और कुछ प्रारंभिक उपयोगों के बारे में चर्चा करेंगे। भाग 8.3 में, हम आपको एक विशेष प्रकार के जनक-फलन से परिचित करायेंगे, जिनका प्रयोग संचयविन्यास विज्ञान की विन्यास संबंधी समस्याओं को हल करने में किया जाता है।

भाग 8.4 में, हम उस स्थिति में जनक फलनों की शक्ति का अनुप्रयोग एक साधन के रूप में करेंगे जबकि, उदाहरण के रूप में, इसका प्रयोग कुछ संचयविन्यास सर्वसमिकाओं (combinatorial identities) को विकसित करने, व्यापक पूर्णांक समीकरणों से संबंधित कुछ संचयविन्यास समस्याओं को हल करने, विभाजनों की संख्या ज्ञात करने और कुछ पुनरावृत्ति संबंधों को हल करने में किया जाता है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद, आप

- विभिन्न प्रकार की संचयविन्यास समस्याओं के लिए जनक फलनों को परिभाषित कर सकेंगे और उनका निर्माण कर सकेंगे;
- एक अनुक्रम से संबंधित जनक फलन को पहचान सकेंगे;
- एक अनुक्रम से संबंधित चरघातांकी जनक फलन को पहचान सकेंगे;
- संचयविन्यास गुणांकों वाली सर्वसमिकाओं को विकसित करने में जनक फलनों का प्रयोग कर सकेंगे;
- व्यापक पूर्णांक समीकरण समस्याओं, विभाजन-सिद्धांत की कुछ समस्याओं और रैखिक पुनरावृत्ति संबंधों को हल करने में जनक फलनों का प्रयोग कर सकेंगे।

8.2 जनक फलन

जैसा कि आप पिछली इकाइयों में देख चुके हैं (अधिकांश स्थितियों में) संचयविन्यास समस्या का हल एक संख्या अनुक्रम (number sequence) होता है। कुछ स्थितियों में तो ये संख्याएँ सरल संचयविन्यास तर्कों से ही स्पष्ट रूप से प्राप्त की जा सकती हैं। परन्तु, अनेक अन्य स्थितियों में इन संख्याओं को कुछ संबंधों से जोड़ दिया जाता हैं (देखिए इकाई 7)। अतः इन्हें स्पष्ट रूप से प्राप्त करने के लिए हमें कुछ और अधिक करने की आवश्यकता होती है।

जनक-फलनों की सुन्दरता इस बात में है कि इनकी सहायता से बहुपदों (संभवतः अनंत) पर कुछ सरल बीजीय संक्रियाएँ लागू करके इस प्रकार की अनेक समस्याओं को हल किया जा सकता है। इसके पीछे मूल आधार यह है कि हम संख्या-अनुक्रम को एक घात-श्रेणी (power series) (एक प्रकार का अनंत बहुपद) के साथ पहचानते हैं जो कि कुछ सरल (बीजीय) संक्रियाएँ लागू करने पर एक ऐसा रूप धारण करती हैं जहाँ से हम गुणांकों के रूप में अपेक्षित संख्याएँ सरलता से प्राप्त कर सकते हैं।

ऐसी अनेक स्थितियाँ हैं जहाँ एक अनुक्रम के पद (जो अन्यथा एक संचयविन्यास समस्या के हल को निरूपित करता है) किसी घात श्रेणी में गुणांकों के रूप में प्रकट होते हैं। हम नीचे दिए गए उदाहरणों की सहायता से इस तथ्य को अच्छी तरह से समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 1: रैखिक समीकरण (Linear equation)

$X_1 + X_2 = 3$, जहाँ $0 \le X_1 \le 1$ और $0 \le X_2 \le 2$, के पूर्णांक हलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः स्पष्ट गणन करने पर निम्नलिखित संभव मान प्राप्त होते हैं

X_1	X_2	योगफल
0	0	0
0	1	1
0	2	2
1	0	1
1	1	2
1	2	3

इस तरह, यहाँ हम देखते हैं कि योगफल 1 (और 2) को दो विधियों से प्राप्त किया जा सकता है, जबकि योगफल 3 को केवल एक विधि से प्राप्त किया जा सकता है।

आइए अब हम निम्नलिखित बहुपदों के गुणनफल को लें :

$(z^0 + z^1)(z^0 + z^1 + z^2)$,

जहाँ पहले गुणनखंड में प्रतीक z के घातांक, X_1 के संभव मानों के अनुरूप हैं और दूसरे गुणनखंड में z के घातांक, X_2 के संभव मानों के अनुरूप हैं। इस गुणनफल का विस्तार करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$(z^0 + z^1)(z^0 + z^1 + z^2) = (z^0 z^0 + z^0 z^1 + z^0 z^2 + z^1 z^0 + z^1 z^1 + z^1 z^2)$$
$$= 1 + 2z + 2z^2 + z^3.$$

गुणन के बाद प्रतीक z के घातांकों का जोड़, X_1 और X_2 के मानों के योगफल को ध्यान में रखने के समान होता है।

यहाँ हम यह पाते हैं कि इस व्यंजक में z^r, $1 \le r \le 3$, के गुणांक से $X_1 + X_2 = r$, जहाँ $0 \le X_1 \le 1$ और $0 \le X_2 \le 2$, के पूर्णांक हलों की संख्या प्राप्त हो जाती है। विशेष रूप में, क्योंकि ऊपर के व्यंजक में z^3 का गुणांक 1 है अतः मानों का केवल एक युग्म अर्थात् (1, 2) प्राप्त होता है जो दिए हुए रैखिक समीकरण को संतुष्ट करता है।

* * *

मान लीजिए हम रैखिक समीकरण

$X_1 + X_2 + X_3 = 10$, जहाँ $0 \le X_1 \le 4$, $X_2 > 0$ और $X_3 \ge 0$ का ऋणेतर (non-negative) पूर्णांक हल ज्ञात करना चाहते हैं।

तब, ऊपर के उदाहरण में दिए गए तर्कों के अनुसार, हम निम्नलिखित तीन बहुपदों का गुणनफल लेते हैं :

$$(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)(z + z^2 + \dots)(1 + z + z^2 + \dots).$$

ऊपर के गुणनफल में, दूसरा और तीसरा गुणनखंड अनंत हैं क्योंकि X_1 और X_2 पर कोई उपरि परिबंध (upper bound) नहीं है। और, इस तथ्य के कारण कि $X_2 > 0$, दूसरे गुणनखंड में कोई अचर पद नहीं है। अतः पहले की ही तरह ऊपर के व्यंजक में z^{10} के गुणांक से हमें ऊपर दिए गए रैखिक समीकरण का हल प्राप्त हो जाता है।

एक घात-श्रेणी के गुणांक ज्ञात करने के लिए हम प्रायः निम्नलिखित परिणामों का प्रयोग करते हैं

परिणाम 1: (द्विपद प्रमेय)

क) $$(1+z)^n = \begin{cases} \sum\limits_{r=0}^{n} C(n, r) z^r, \text{ यदि } n \geq 0 \\ \sum\limits_{r=0}^{\infty} C(n, r) z^r, \text{ यदि } n < 0. \end{cases}$$

ख) $$(1-z)^{-n} = (1 + z + z^2 + \dots)^n = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} C(n-1+r, r) z^r.$$

परिणाम 2: $\frac{1-z^n}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1}, \quad z \neq 1.$

अब हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर एक संचयविन्यास समस्या से संबंधित घात श्रेणी को पहचानने की विधि को अच्छी तरह से समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 2: एक समस्या से संबंधित घात श्रेणी ज्ञात कीजिए जहाँ हमें 5 सेबों, 10 केलों और 15 नारियलों में से एक दर्जन फलों का चयन करने की विधियों की संख्या ज्ञात करनी है।

हल: सबसे पहले यह मान लीजिए कि अक्षर A, B और C क्रमशः सेब (Apple), केला (Banana) और नारियल (Coconut) को प्रकट करते हैं। अतः यदि हमें k सेब, l केले और m नारियलों का चयन करना हो, तो $k + l + m = 12$ होना चाहिए, जहाँ $0 \leq k \leq 5, 0 \leq l \leq 10$ और $0 \leq m \leq 15$. आइए हम यह देखें कि प्रतीकों A, B और C का प्रयोग करके समस्या को स्थापित करने के लिए हम क्या कर सकते हैं।

यहाँ आप यह मान सकते हैं कि A^k, k सेबों को प्रकट करता है, B^l, l केलों को प्रकट करता है और C^m, m नारियलों को प्रकट करता है तब हम उस स्थिति में सही संख्या में फलों का चयन कर लेते हैं, जबकि पद $A^k B^l C^m$ का घात (अर्थात् योगफल $k + l + m$) 12 के बराबर हो। इस तरह, हम यह देखते हैं कि एक दर्जन फलों का चयन करने की विधियों की अपेक्षित संख्या ज्ञात करने के लिए हमें निम्नलिखित विस्तार में केवल उन पदों की संख्या ज्ञात करनी होती है

$$(A^0 + A^1 + \dots + A^5)(B^0 + B^1 + \dots + B^{10})(C^0 + C^1 + \dots + C^k) \quad (1)$$

जिनकी घात 12 हो। यह (1) में सभी पदों $A^k B^l C^m$ जहाँ कि $l + m + n = 12$, जैसे $A^0 B^0 C^{12}$, $A^0 B^1 C^{11}$, आदि के गुणांकों का योगफल होगा।

यहाँ इस बात की ओर ध्यान देना अति आवश्यक हो जाता है कि संख्याओं k, l और m पर लगाए गए प्रतिबंधों के आधार पर किया गया फलों का कोई भी चयन इस गुणनफल का एक पद होता है। उदाहरण के लिए, यदि आप 3 सेबों, 4 केलों और 5 नारियलों का चयन करते हैं, तो गुणनफल (1) में अनुरूप पद $A^3 B^4 C^5$ है। और, इसके विलोम के रूप में, पद $AB^2 C^9$, 1 सेब, 2 केलों और 9 नारियलों के चयन को निरूपित करता है। इस तरह गुणनफल (1) को $\sum_{i,j,k} a_{ijk} A^i B^j C^k$ के रूप में विस्तार करने पर दी हुई समस्या के लिए एक (परिमित) घात श्रेणी प्राप्त हो जाती है।

* * *

अब, क्योंकि हमारी वास्तविक अभिरुचि $A^k B^l C^m$ की घात (अर्थात् योगफल $k + l + m$) में है, इसलिए हम (1) के सभी प्रतीकों के स्थान पर एक सामूहिक प्रतीक, मान लीजिए z, का प्रयोग कर सकते हैं। तब, पहले की तरह, यहाँ भी हमें बहुपदों के निम्नलिखित गुणनफल में z^{12} का गुणांक ज्ञात करना होता है

$(1 + z + ... + z^5)(1 + z + ... + z^{10})(1 + z + ... + z^{15})$.

अब, यहाँ हमें इस बात का पता लगाने की कोई आवश्यकता नहीं होती कि कितनी संभव विधियों से A^k, B^l और C^m का जोड़ 12 फलों के बराबर होता है।

आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण में दी गई समस्या के लिए इसी प्रकार का एक प्रश्न लें।

उदाहरण 3: किस प्रकार एक घात श्रेणी का संबंध उस समस्या के साथ स्थापित किया जा सकता है जिसमें हमें उस स्थिति में फलों का चयन करने की संख्या ज्ञात करनी हो, जबकि हमारे पास 50 रूपए हों और एक सेब 5 रूपए का, एक केला 2 रूपए का और एक नारियल 3 रूपए का है।

हल: क्योंकि यहाँ फलों की संख्या पर कोई प्रतिबंध नहीं है, इसलिए (धनराशि के रूप में) अपेक्षित घात श्रेणी निम्नलिखित रूप की होगी

$(A^0 + A^5 + A^{10} + ...)(B^0 + B^2 + B^4 + ...)(C^0 + C^3 + C^6 + ...)$,

जो कि तीन बहुपदों का गुणनफल है (अनंत क्योंकि फलों की संख्या पर कोई प्रतिबंध नहीं है)। क्योंकि एक सेब 5 रूपए का है, इसलिए k सेब खरीदने का अर्थ होगा $5k$ रूपए खर्च करना। इसी प्रकार l केलें और m नारियल खरीदने का अर्थ होगा, $(2l + 3m)$ रूपए खर्च करना। इस तरह, $(k + l + m)$ फलों की खरीद ऊपर दिए गए तीन बहुपदों के गुणनफल के पद $A^{5k} B^{2l} C^{3m}$ के अनुरूप होगी। और, क्योंकि हमारे पास केवल 50 रूपए हैं, इसलिए $5k + 2l + 3m = 50$ होना चाहिए। इसके विपरीत, ऊपर दी गई श्रेणी में प्रत्येक पद $A^{5k} B^{2l} C^{3m}$ (जहाँ $5k + 2l + 3m = 50$) से k सेब, l केलें और m नारियल खरीदने का एक विकल्प प्राप्त होता है।

इस तरह, सेब, केला और नारियल की दी हुई कीमत को ध्यान में रखने पर पहले, दूसरे और तीसरे बहुपदों में प्रतीकों A, B और C के घात 5, 2 और 3 के क्रमशः गुणज होते हैं। पहले की ही तरह, इस व्यंजक में हमें घात 50 वाले पदों की संख्या ज्ञात करना है। फिर भी, उदाहरण 2 के बाद की गई चर्चा के अनुसार, इन प्रतीकों में से प्रत्येक प्रतीक के स्थान पर एक सामूहिक प्रतीक z (मानलीजिए) का प्रयोग किया जा सकता है। तब अपेक्षित संख्या निम्नलिखित व्यंजक में z^{50} का गुणांक होता है

$$(1 + z^5 + z^{10} + ...)(1 + z^2 + z^4 + ...)(1 + z^3 + z^6 + ...). \qquad (*)$$

अतः विस्तार करने पर इस गुणनफल से ऊपर दी गई समस्या से संबंधित घात श्रेणी प्राप्त हो जाती हैं।

* * *

ऊपर के उदाहरण में, यदि फलों के चयन पर हम कुछ प्रतिबंध लगा दें, तो संबंधित घात-श्रेणी (*) में आपेक्षिक परिवर्तन आ जाएगा। नीचे दिए गए प्रश्न में हम इसी तथ्य को आपको दिखाना चाहते हैं।

E1) उदाहरण 3 में दी गई समस्या से संबंधित घात श्रेणी ज्ञात कीजिए

क) जबकि हमारे सभी चयन में कम से कम 1 सेब का होना आवश्यक है;

ख) जबकि प्रत्येक चयन में हरएक तरह का कम से कम एक फल का होना आवश्यक है।

ऊपर आपने यह देखा है कि किस प्रकार एक घात श्रेणी का संबंध उस संचयविन्यास समस्या के साथ स्थापित किया जाता है जिसका हल उस श्रेणी के कुछ गुणांकों से प्राप्त हो जाता है। इनमें से कुछ को हम फलनिक रूप (functional form) में लिख सकते हैं। जिसे हम संवृत रूप (closed form) कहते हैं। उदाहरण के लिए, द्विपद प्रमेय (देखिए ऊपर दिया गया परिणाम 1) से यह पता चलता है कि $(1 + z)^n$ $(n \in N)$, घात श्रेणी $\sum_{r=0}^{\infty} C(n, r) z^r$ का संवृत रूप (या फलनिक रूप) है।

एक अनुक्रम से संबंधित श्रेणी के फलनिक रूप (या संवृत रूप) को उसका जनक फलन (generating function) कहा जाता है। जनक फलन की औपचारिक परिभाषा नीचे दी गई है।

परिभाषा: वास्तविक (या सम्मिश्र) संख्याओं के अनुक्रम $\{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}$ का जनक फलन $A(z)$ निम्नलिखित घात श्रेणी से दिया जाता है

$$A(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_k z^k = a_0 + a_1 z \; ... + a_n z^n + ... $$

इस तरह, हम यह देखते हैं कि अनुक्रम $\{a_n\}_{n \geq 0}$ का $(n+1)$वाँ पद a_n, $A(z)$ में मात्र z^n का गुणांक होता है। और, जैसा कि पहले बताया जा चुका है, कि इस प्रकार जनक फलन प्रतीक z के विभिन्न घातों से एक अनुक्रम के विभिन्न पदों को पहचानने में सहायक होता है।

घरघातांकी जनक फलन (जिनकी परिभाषा हम अगले भाग में देंगे) और जनक फलनों में भेद करने के लिए इन्हें कभी-कभी **साधारण जनक फलन (ordinary generating function)** कहा जाता है।

उदाहरण के लिए, अचर अनुक्रम $\{a, a, ...\}$ की संबंधित घात श्रेणी यह होती है

$$a + az + az^2 + ... = a\,[1 + z + z^2 + ...]$$
$$= a\,(1 - z)^{-1} \qquad \text{(द्विपद प्रमेय से)}$$

इस तरह, $a(1 - z)^{-1}$ अचर अनुक्रम $\{a, a, ...\}$ का जनक फलन (अर्थात् एक संवृत रूप) होता है।

अधिक व्यापक रूप में, मान लीजिए कि $G(z)$ गुणोत्तर श्रेणी $\{ar^n\}_{n \geq 0}$ का जनक फलन है, अर्थात्

$$G(z) = a + (ar)\,z + (ar^2)\,z^2 + ...$$

तब,

$$G(z) - a = rz\,[a + (ar)z + (ar^2)\,z^2 + ...]$$
$$= rz\,G(z),$$

जिसे सरल करने पर $G(z) = a\,/(1 - rz)$ प्राप्त होता है।

अब, आप क्यों नहीं नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास करें ?

E2) निम्नलिखित में, यह सत्यापित कीजिए कि

क) सांत गुणोत्तर श्रेणी $\{a, ar, ar^2 ... ar^{k-1}\}$ का जनक फलन $a(1 - r^k z^k)\,/\,(1 - rz)$ है।

ख) द्विपद गुणांकों के अनुक्रम

$\{C\,(k, 0), C\,(k, 1)\,a, C\,(k, 2)a^2, ...\}$ का जनक फलन $(1 + az)^k$ है।

ग) द्वितीय गुणांकों के अनुक्रम

$\{C\,(k - 1, 0), C(k, 1)\,a, C\,(k + 1, 2)\,a^2, ...\}$ का जनक फलन $(1 - az)^{-k}$ है।

यहाँ इस बात की ओर ध्यान दीजिए कि सांत अनुक्रम (finite sequence) का जनक फलन उस संगत अनंत अनुक्रम का जनक फलन होता है जिसमें पहले परिभाषित न किए गए प्रत्येक पद को शून्य मानकर प्राप्त किया जा सकता है। इस तरह, एक सांत बहुपद $a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ के लिए हम यह लिख सकते हैं

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + 0.z^3 + 0.z^4 + ...$$

आइए अब हम यह देखें कि एक श्रेणी को एक अनुक्रम के साथ संबंधित कर देने की विधि किस प्रकार एक संचयविन्यास समस्या को हल करने में सहायक होती है। इसे अच्छी तरह से समझने के लिए यहाँ हम एक उदाहरण ले रहे हैं।

उदाहरण 4: n अवयवों $n \geq 0$, वाले समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: मान लीजिए n अवयवों वाले समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या s_n है। पिछली इकाई में आप यह देख चुके हैं कि अनुक्रम $\{s_n\}$ द्वारा संतुष्ट पुनरावृत्ति संबंध यह होता है

$s_n = 2s_{n-1}$, यदि $n \geq 1$ और $s_0 = 1$. (इकाई 7 की समस्या 5 देखिए)

मान लीजिए, $S(z)$ अनुक्रम $(s_n)_{n\geq 0}$, का जनक फलन है।

अतः यहाँ हम यह लिख सकते हैं

$$
\begin{aligned}
S(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^n \\
&= 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} s_{n-1} z^n \qquad (s_n,\ n \geq 1 \text{ की परिभाषा के अनुसार}) \\
&= 1 + 2z \sum_{n=0}^{\infty} s_n z^n = 1 + 2z.\,S(z).
\end{aligned}
$$

अर्थात् $S(z) = 1 + 2z\,S(z)$.

अंतिन समीकरण को $S(z)$ के लिए हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$S(z) = \frac{1}{1-2z} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n z^n. \qquad \text{(द्विपद प्रमेय से)}$$

1 प्रतीकात्मक श्रेणियाँ $\sum a_n z^n$ िए $\sum b_n z^n$ बराबर कही जाती हैं, दि और केवल यदि $a_n = b_n, \forall n$.

अंत में, ऊपर के समीकरन के दोनों पक्षों के z^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें $s_n = 2^n, n \geq 0$, प्राप्त होता है। अतः n अवयवों वाले समुच्चय के उपसमुच्चयों की संख्या $2^n, \forall n$, है।

* * *

जैसा कि आप ऊपर के उदाहरण में देख चुके हैं कि एक अनुक्रम के व्यापक पद को स्पष्ट रूप से लिखते समय बीच के चरणों में कुछ न कुछ (बीजीय) संक्रियाओं को लागू करना आवश्यक हो जाता है। संचयविन्यास समस्याओं को हल करने में जनक फलनों की ये संक्रियाएँ, जिन्हें हम नीचे परिभाषित कर रहे हैं, एक निर्णायक भूमिका निभाती हैं।

श्रेणी के जोड़, घटाना, गुणा और भाग की सामान्य संक्रियाओं को लागू करने के अतिरिक्त हमें घात-श्रेणी का अवकलन (Differentiation) या समाकलन (Integration) करना भी आवश्यक होता है। यहाँ इस बात की ओर ध्यान देना आवश्यक है कि अंतिम दो संक्रियाओं को लागू करते समय हमारा उद्देश्य $\frac{d}{dz}(\sum a_n z^n)$ (और $\int(\sum a_n z^n)\,dz$) के साथ एक नई घात श्रेणी का संबंध स्थापित करना होता है जैसा कि O_3 (और O_4) के दक्षिण पक्ष में दिया गया है।

O_1. **(जोड़ और अंतर)** $\sum a_n z^n \pm \sum b_n z^n = \sum (a_n \pm b_n) z^n$;

O_2. (गुणा) $(\sum a_n z^n)\,(\sum b_n z^n) = \sum \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) z^n$;

O_3. **(अवकलन)** $\frac{d}{dz}(\sum a_n z^n) = \sum (n+1)\, a_{n+1} z^n$;

O_4. **(समाकलन)** $\int(\sum a_n z^n)dz = \sum \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$;

O_5. **(भाग)** $(\sum a_n z^n) / (\sum b_n z^n) = \sum c_n z^n$

$\Leftrightarrow (\sum b_n z^n)(\sum c_n z^n) = \sum a_n z^n$ अर्थात् $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k c_{n-k}$.

ऊपर O_5 में परिभाषित दो घात-श्रेणियों का भागफल सामान्य विधि से किए गए गुणनफल से प्राप्त किया गया है। वस्तुतः भागफल का कोई सुविधाजनक व्यंजक नहीं है।

आइए, अब हम कुछ व्यापक परिणामों पर विचार करें जिनसे हमें विभिन्न अनुक्रमों, जिनके पद किसी न किसी रूप में एक-दूसरे से संबंधित हैं, के जनक फलनों के बीच का संबंध प्राप्त होता है। ये परिणाम विशेष रूप से तब अधिक उपयोगी होते हैं जबकि हमें इनमें से कुछ अनुक्रमों के जनक फलन ज्ञात होते हैं और अन्य अनुक्रमों के जनक-फलन ज्ञात करने होते हैं।

उदाहरण के लिए, नीचे दी गई प्रमेयिका (lemma) उस स्थिति में दो अनुक्रमों के गुणनफल का जनक फलन ज्ञात करने में सहायक हो सकती है जबकि अलग-अलग अनुक्रमों के जनक फलन ज्ञात हों।

प्रमेयिका 1: यदि $A(z)$, अनुक्रम $\{a_n\}_{n \geq 0}$ का जनक फलन हो, और $B(z)$, अनुक्रम $\{b_n\}_{n \geq 0}$ का जनक फलन हो, तो $A(z) \times B(z)$, अनुक्रम $\{c_n\}_{n \geq 0}$ का जनक फलन होता है, जहाँ

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad n \geq 0.$$

उपपत्तिः इसकी उपपत्ति घात श्रेणियों के गुणन की परिभाषा से तुरंत प्राप्त हो जाती है (ऊपर दिया गया O_2 देखिए) परिभाषा के अनुसार, हन पाते हैं

$$\begin{aligned}
A(z) \times B(z) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j z^j\right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) \\
&= a_0\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k\right) + a_1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{k+1}\right) + \ldots \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^{j+k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}\right) z^n.
\end{aligned}$$

जहाँ प्रक्रिया के प्रत्येक चरण पर हमने समान घातों वाले z के गुणांकों को एकत्रित किया है। तब कथन में दी गई c_n की परिभाषा को लागू कर देने पर प्रमेयिका की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

अब आप इसका प्रयोग नीचे दिए प्रश्न को हल करने में क्यों नहीं करते हैं ?

E3) प्रमेयिका 1 की सहायता से, द्विपद सर्वसमिका $\sum_{j=0}^{k} C(m, j)\, C(n, k-j) = C(m+n, k)$ को सिद्ध कीजिए। और, इस तरह निम्नलिखित द्विपद सर्वसमिका निगमित कीजिए

$$\sum_{j=0}^{k} C(k, j)^2 = C(2k, k).$$

अब हम इसी प्रकार की एक अन्य उपयोगी प्रमेयिका को सिद्ध करेंगे।

प्रमेयिका 2: मान लीजिए अनुक्रम $\{a_n\}_{n \geq 0}$ का जनक फलन $A(z)$ है। तब अनुक्रम $\{b_n\}_{n \geq 0}$, जहाँ $b_n = a_n - a_{n-1}$ $(n \geq 1)$ और $b_0 = a_0$, का जनक फलन $B(z)$ (मान लीजिए) यह होता है

$$B(z) = (1-z)\, A(z).$$

उपपत्तिः परिभाषा के अनुसार, अनुक्रम $\{b_n\}$ का जनक-फलन यह है

$$\begin{aligned}
B(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \\
&= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n \\
&= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n - z \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} z^{n-1} && (b_n \text{ की परिभाषा से}) \\
&= a_0 + [A(z) - a_0] - n \,.\, A(z) && (A(z) \text{ की परिभाषा से}) \\
&= (1-z)\, A(z).
\end{aligned}$$

इस तरह, प्रमेयिका की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E4) क) प्रमेयिका 2 की सहायता से समांतर श्रेणी $\{a, a+d, a+2d, \ldots\}$ के अनुक्रम का जनक फलन A(z) (मान लीजिए) ज्ञात कीजिए।

ख) मान लीजिए कि A(z) अनुक्रम $\{a_n\}_{n\geq 0}$ का जनक-फलन है। दिखाइए कि इसके आंशिक योगफलों (partial sums) अर्थात् $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ $(n \geq 0)$ के अनुक्रम $\{s_n\}$ का जनक फलन S(z) (मान लीजिए) यह होता है

$$S(z) = \frac{A(z)}{1-z}.$$

ग) (ख) की सहायता से अनुक्रम $\{1, 3, 6, \ldots\}$ का जनक फलन ज्ञात कीजिए।

अब हम उन समस्याओं पर विचार करेंगे जिन्हें हम पहले अन्य विधियों से हल कर चुके हैं। यहाँ हम जनक फलनों की सहायता से इन्हें हल करने की वैकल्पिक विधियों से आपको परिचित कराएंगे। यहाँ यह उदाहरण kवें घात वाले प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के योगफल से संबंधित है जिसे हम σ_n^k से प्रकट करते हैं,

अर्थात् $\sigma_n^k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k = \sum_{i=1}^{n} i^k, k \geq 1.$

आप इस बात से भलीभांति परिचित हैं कि किस प्रकार $\sigma_n^k (1 \leq k \leq 3)$ के सूत्र को निगमन विधि से सत्यापित किया जाता है (देखिए इकाई 2)। आइए हम यह देखें कि जनक फलन विधि लागू करने पर यह प्रक्रिया कैसे सरल हो जाती हैं। इस कार्यवाही को आप नीचे दिए गए उदाहरण में $\sigma_n^2 = \sum_{j=1}^{n} j^2$ के गानांकन करने में देख सकते हैं।

उदाहरण 5: प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योगफल σ_n^2 ज्ञात कीजिए।

हल: द्विपद फलन $(1-z)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j$ का अवकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\sum_{j=0}^{\infty} j z^{j-1} = (-1)(1-z)^{-2}(-1) = (1-z)^{-2} \qquad \text{(देखिए } O_3\text{)}$$

दोनों पक्षों को z से गुणा करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$A(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j^2 z^j = z(1+z)(1-z)^{-3},$$

जहाँ A(z), अनुक्रम $\{j^2\}_{j\geq 1}$ का जनक फलन है। तब

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^2 z^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} j^2\right) z^k \\ &= \frac{A(z)}{(1-z)}, \qquad \text{(E4 (ख) से)} \\ &= z(1+z)(1-z)^{-4}.\end{aligned}$$

अतः σ_n^2, श्रेणी के z^n का गुणांक है जिसे फलन $z(1+z)(1-z)^{-4}$ का विस्तार करके प्राप्त किया जा सकता है।

अब, क्योंकि

$z(1+z)(1-z)^{-4} = z(1-z)^{-4} + z^2(1-z)^{4}$,

इसलिए, यह वही है जो कि द्विपद फलन $(1-z)^{-4}$ के विस्तार रूप में z^{n-1} और z^{n-2} के गुणांकों के योगफल से मिलता है। इस तरह, द्विपद सर्वसमिका $C(n, k) = C(n, n-k)$ को ध्यान में रखते हुए, हमें यह प्राप्त होता है

$\sigma_n^2 = C(n+2, 3) + C(n+1, 3) = n(n+1)(2n+1)/6.$

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E5) जनक फलनों की सहायता से प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योगफल σ_n^1 ज्ञात कीजिए।

अभी तक, आपने जनक फलनों को पहचानने और उनकी सहायता से कुछ सरल संचयविन्यास समस्याओं को हल करने की विधि के बारे में जानकारी प्राप्त की है। फिर भी ऐसी अनेक संचयविन्यास समस्याएँ हैं जिन्हें इन जनक-फलनों की सहायता से हल करना एक कठिन कार्य है। यह बात विशेष रूप से उन समस्याओं के बारे में सही उतरती हैं जो अलग-अलग वस्तुओं के विन्यासों (जिनमें क्रम एक निर्णायक भूमिका निभाता है) और उनके बंटनों से संबंधित होती हैं (अधिक विस्तृत जानकारी के लिए खंड 2 देखिए)। अगले भाग में हम आपको थोड़े-से अलग प्रकार के जनक-फलन से परिचित कराएंगे जो इन प्रकार की समस्याओं को हल करने में उपयोगी सिद्ध होते हैं।

8.3 चरघातांकी जनक फलन

इस भाग में, हम पिछले भाग में बतायी गई श्रेणी के एक बदले रूप (modified form) के बारे में अध्ययन करेंगे। इन दोनों में अंतर जानने के लिए आइए हम तीन अक्षर वाले शब्दों की संख्या ज्ञात करने वाली समस्या पर विचार करें अर्थात् ऐसे तीन अक्षर वाली माला (string of three letters) पर विचार करें जिन्हें दो वर्ण समुच्चय {a, b} (मान लीजिए) से, इस प्रतिबंध के साथ कि इन शब्दों के सभी अक्षर अभिन्न न हो, प्राप्त किया जा सकता हो।

इस तरह, यहाँ हम या तो दो a और एक b का या दो b और एक a का प्रयोग करके दो अवयवों वाले समुच्चय {a, b} से सभी तीन अक्षर वाले शब्द बना सकते हैं। इन दो संभावनाओं में से प्रत्येक संभावना (खंड 2 में वस्तुओं के, जिनका अलग-अलग होना आवश्यक नहीं है, के क्रमचयों पर की गई चर्चा) से पहली स्थिति में 3!/2! 1! = 3 अलग-अलग शब्द अर्थात् aab, aba, baa और दूसरी स्थिति में तीन अलग-अलग शब्द bba, bab, abb और कुल 6 शब्द प्राप्त होते हैं।

घन पूर्णांकों का एक क्रमित युग्म (x, y), रैखिक समीकरण m + n = 3 का एक हल होता है, यदि और केवल यदि x + y = 3.

क्या अब हम यह कह सकते हैं कि ऊपर की समस्या में अलग-अलग संभावनाओं की संख्या सरलता रैखिक समीकरण m + n = 3 के घन पूर्णांक हलों की संख्या होती है जबकि हम यह मान लें कि यहाँ हम m संख्या में a और n संख्या में b का प्रयोग कर रहे हैं, जहाँ m, n ≥ 1? ऐसा तभी होता जबकि हमारी रुचि a और b की स्थिति में नहीं होती अर्थात् ऐसी स्थिति में जहाँ हमारे लिए aab और aba में कोई अंतर नहीं होता। परन्तु, वास्तव में स्थिति ऐसी नहीं है। यहाँ हम तीन अक्षर वाले शब्दों अर्थात् विभिन्न तीन अक्षर वाली मालाओं की संख्या पर विचार कर रहे हैं। इसलिए यहाँ पर अक्षरों की स्थिति का काफी महत्व है। अतः हम यह चाहेंगे कि शब्दों की कुल संख्या में प्रत्येक पूर्णांकी हल का योगदान 1 न हो, बल्कि 3 हो जिससे कि कुल जोड़ 3! हो)।

अब, क्योंकि हम तीन अक्षर वाले शब्दों की संख्या गिनना चाहते हैं, इसलिए एक श्रेणी के z^3 के उस गुणांक का पता लगाना चाहिए जो हर बार श्रेणी में $z^m z^n = z^3$ आने पर $(m+n)!/m!\,n!$ की गिनती करता हो। अतः यहाँ हम निम्नलिखित गुणनफल लेते हैं

$$\left(\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}\right)\left(\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}\right)=\frac{z^2}{1!\,1!}+\frac{z^3}{1!\,2!}+\frac{z^3}{2!\,1!}+\frac{z^4}{2!\,2!}$$

क्योंकि r = 1, 2, 3, 4 के लिए, इसमें z^r का गुणांक $1/m!\,n!$ के रूप का पद है, जहाँ $m+n=r$, $m, n \geq 1$. हमें अब अपेक्षित उत्तर प्राप्त करने के लिए चाहिए कि हम इसे $(m+n)!$ से गुणा करें। क्योंकि ऊपर के विस्तार में z^3 का गुणांक 1 है, इसलिए इसे 3! से गुणा कर देने पर हमें ऊपर की समस्या का सही उत्तर प्राप्त हो जाता है।

सही रूप में चरघातांकी जनक फलन (exponential generating function) इसी प्रकार की एक घात श्रेणी होती है। इसकी औपचारिक परिभाषा नीचे दी जा रही है।

परिभाषा: वास्तविक या सम्मिश्र संख्याओं के अनुक्रम $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ का चरघातांकी जनक फलन निम्नलिखित घात-श्रेणी होती है

$$A_{exp}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{k!}z^k = a_0+\frac{a_1}{1!}z+\ldots+\frac{a_n}{n!}z^n+\ldots$$

जैसा कि आप देख सकते हैं, दिए हुए अनुक्रम का nवाँ पद a_n, $A_{exp}(z)$ के z^n का गुणांक नहीं होता, बल्कि यह उस गुणांक का n! गुना होता है।

उदाहरण के लिए, अचर अनुक्रम {1, 1, 1, ...} का चरघातांकी जनक फलन यह होता है

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} \dots .$$

क्या इसे देखकर आपको किसी फलन की याद आती है ? निश्चय ही यह उस चरघातांकी फलन से मिलता-जुलता है जिससे कि आप भलीभांति परिचित हैं, अंतर केवल यही है कि यहाँ z एक चर नहीं है, बल्कि एक प्रतीक है। इसी सादृश्य के कारण इन प्रकार के-जनक फलनों को चरघातांकी जनक फलन के नाम से जाना जाता है।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E6) एक नियत $n \in N$ पर, अनुक्रम $\{P(n, k)\}_{k=1}^{n}$ का चरघातांकी जनकफलन ज्ञात कीजिए, जहाँ P(n, k), n वस्तुओं के k-क्रमचयों की संख्या को प्रकट करता है।

पहले की तरह, आइए यहाँ भी नीचे के उदाहरण में दी गई संचयविन्यास समस्या से संबंधित चरघातांकी जनक फलन को पहचानने का प्रयास करें।

उदाहरण 6: दिखाइए कि m वस्तुओं के कुछ उपसमुच्चयों का चयन करने और उन्हें इस प्रकार n बक्सों में रखने की विधियों की संख्या ज्ञात करने, जिससे कि समान बक्स में क्रम की गिनती की जा सके, वाली समस्या से संबंधित चरघातांकी जनक फलन $e^z(1-z)^{-n}$ होता है।

हल: आपको याद होगा कि इकाई 5 में हम यह देख चुके हैं कि m वस्तुओं से k वस्तुओं का चयन करने की C (m, k) विधियाँ होती हैं और इन्हें n बक्सों में रखने की n(n + 1) ... (n + k − 1) विधियाँ होती हैं। इस तरह, m वस्तुओं के कुछ उपसमुच्चयों का चयन करने और इन्हें n बक्सों में इस तरह रखने, जिससे कि समान बक्स में क्रम की गिनती की जा सके, की विधियों की कुल संख्या यह होती है

$$C(m, 0) + \sum_{k=1}^{m} n(n+1)\dots(n+k-1)\, C(m, k)$$

$$= m!\left[\frac{1}{m!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(m-k)!\,k!} \times n(n+1)\dots(n+k-1)\right]$$

यहाँ हम n को नियम मान सकते हैं और इसे हम केवल m में एक अनुक्रम मान सकते हैं। अतः इस अनुक्रम का संगत चरघातांकी जनक फलन यह होगा

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left[\frac{1}{m!} + \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{(m-k)!\,k!} \times n(n+1)\dots(n+k-1)\right] z^m$$

जो कि निम्नलिखित श्रेणियों का गुणनफल है

$$\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m\right) \text{ और } \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{n(n+1)\dots(n+m-1)}{m!} z^m\right) \qquad \text{(देखिए } O_2\text{)}$$

अब, (परिभाषा के अनुसार) पहली श्रेणी e^z के बराबर है, जबकि द्विपद प्रमेय के अनुसार दूसरी श्रेणी $(1-z)^{-n}$ के बराबर है। इस तरह, हमने संबंधित चरघातांकी जनक फलन प्राप्त कर लिया है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते ?

E7) दिखाइए कि पुनरावृत्ति $\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, \mathcal{B}_k$, $n \geq 2$ जहाँ $\mathcal{B}_0 = 1$ को संतुष्ट करने वाले बेल-संख्या के अनुक्रम $\{\mathcal{B}_n\}_{n=0}^{\infty}$ का चरघातांकी जनक फलन $z/(e^z - 1)$ होता है।

आइए अब हम कुछ उदाहरण लेकर देखें कि संचयविन्यास समस्याओं को हल करने में चरघातांकी जनक फलनों का प्रयोग किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण 7: n अवयवों वाले, $n \geq 1$, समुच्चय पर एकैकी आच्छादनों (bijections) की संख्या ज्ञात कीजिए।

हलः मान लीजिए b_n, $n \geq 1$, n अवयवों वाले समुच्चय पर एकैकी आच्छादनों की संख्या को प्रकट करता है, पिछली इकाई (समस्या 6) में आपने यह देखा है कि अनुक्रम $\{b_n\}$ से संतुष्ट पुनरावृत्ति संबंध यह होता है

$b_n = nb_{n-1}$, यदि $n \geq 2$ और $b_1 = 1$.

क्योंकि यहाँ हमें b_0 ज्ञात नहीं है, अतः हम इस पद पर गौर नहीं करेंगे। अनुक्रम $\{b_n\}$ का चरघातांकी जनक फलन B(z) (मान लीजिए) यह होता है

$$B(z) = \frac{b_1}{1!} z + \frac{b_2}{2!} z^2 + \frac{b_3}{3!} z^3 + \ldots + \frac{b_r}{r!} z^r + \ldots .$$

तब,

$$B(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n.$$

$$= z + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n\, b_{n-1}}{n!} z^n \qquad (b_n,\ n \geq 2, \text{ की परिभाषा से})$$

$$= z + z \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} z^n = z + z \,.\, B(z).$$

B(z) के लिए हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$B(z) = z/(1 - z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n. \qquad (\text{द्विपद प्रमेय से})$$

अतः z^n के गुणांकों की तुलना करने पर अंतिम समता (equality) से हमें $b_n = n!$, $n \geq 1$, प्राप्त होता है।

* * *

कभी-कभी अनंत श्रेणी के योगफल का परिकलन करने में भी चरघातांकी जनक फलन उपयोगी सिद्ध होता है। आइए यहाँ हम इससे संबंधित एक उदाहरण लें।

उदाहरण 8: चरघातांकी जनक फलनों का प्रयोग करके श्रेणी

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k+1)^2}{k!} = \frac{1^2}{0!} + \frac{2^2}{1!} + \ldots + \frac{(n+1)^2}{n!} + \ldots .$$

का योगफल ज्ञात कीजिए।

हलः $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ के दोनों पक्ष को z से गुणा करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$ze^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!}$$

इस समीकरण को एक बार अवकलित करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$(1 + z)e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\, z^n}{n!} \qquad (\text{देखिए } O_3)$$

अंश में एक $(n+1)$ पद के आ जाने से यह पता चलता है कि हमारी प्रक्रिया ठीक चल रही है। हम पहले दो चरणों को दोबारा करते हैं अर्थात् अंतिम समीकरण के प्रत्येक पक्ष को z से गुणा करते हैं और तब अवकलित करते हैं। ऐसा करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$(1+3z+z^2)e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2 z^n}{n!}$$

आगे की प्रक्रिया काफ़ी सरल है। अंतिम समीकरण में $z=1$ रखने पर हमें $5e = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2/n!$ प्राप्त होता है। अतः दी हुई श्रेणी का अभीष्ट योगफल 5e है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए।

E8) चरघातांकी जनक फलनों का प्रयोग करके n वस्तुओं के अपविन्यासों (derangements) की संख्या d_n ज्ञात कीजिए। (अपविन्यास के संबंध में और अधिक जानकारी प्राप्त करने के लिए इकाई 6 और 7 देखिए।)

पिछले दो भागों में आपने दो प्रकार के जनक फलनों के कुछ प्रारंभिक प्रयोग के बारे में जानकारी प्राप्त की हैं। अगले भाग में हम जनक फलनों के कुछ और अनुप्रयोगों के बारे में चर्चा करेंगे।

8.4 अनुप्रयोग

भाग 8.2 में, कुछ समस्याओं के संबंध में हमने केवल जनक फलन के बारे में बात की है और उन्हें हल करने का प्रयास नहीं किया है। मिसाल के तौर पर यह बात उदाहरण 2 और उदाहरण 3 पर लागू होती है क्योंकि इन्हें हल करने के लिए आपका रैखिक समीकरणों को हल करने की विधियों से परिचित होना आवश्यक है। यहाँ हम रैखिक समीकरण को हल करने के लिए जनक फलनों से संबंधित विधियों पर चर्चा करेंगे। यहाँ हम विभाजनों, जिनका अध्ययन आप इकाई 5 में कर चुके हैं, से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए भी जनक फलनों के प्रयोग पर चर्चा करेंगे। अंत में, इस भाग में आप यह देखेंगे कि किस प्रकार जनक फलनों का प्रयोग करके विभिन्न प्रकार की पुनरावृत्तियों को हल किया जाता है।

अतः आइए सबसे पहले हम जनक फलनों को लागू करके कुछ सरल संचयविन्यास सर्वसमिकाओं, विशेष रूप से द्विपद गुणांकों से संबंधित, को हल करें।

8.4.1 संचयविन्यास सर्वसमिकाएँ

द्विपद प्रमेय

$$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} C(n,k)\, z^k \tag{2}$$

से हम यह जानते हैं कि $(1+z)^n$, सांत अनुक्रम $\{C(n,k)\}_{k=0}^{n}$ का जनक फलन है। हम इसका प्रयोग नीचे दिए गए दो उदाहरणों में कुछ संचयविन्यास सर्वसमिकाओं (combinatorial identities) को विकसित करने में करेंगे।

उदाहरण 9: द्विपद सर्वसमिका

$$C(n,1)+3\,C(n,3)+5\,C(n,5)+\ldots = n\,2^{n-2} = 2\,C(n,2)+4\,C(n,4)+6\,C(n,6)+\ldots,$$

को सिद्ध कीजिए।

हलः (2) के दोनों पक्षों को z के सापेक्ष अवकलित करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$n(1+z)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k\, C(n,k) z^{k-1}.$$

परिणामी व्यंजक में $z=1$ और $z=-1$ रखने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\, C(n, k) = n\, 2^{n-1}, \text{ और} \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k\, C(n, k) = 0 \tag{4}$$

(4) के ऋण पदों को दक्षिण पक्ष में ले जाने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$C(n, 1) + 3\,C(n, 3) + 5\,C(n, 5) + \ldots = 2\,C(n, 2) + 4\,C(n, 4) + 6\,C(n, 6) + \ldots$$

अब ऊपर की सर्वसमिका के दोनों पक्षों में पदों $2\,C(n, 2), 4\,C(n, 4), 6\,C(n, 6) \ldots$ आदि को जोड़ने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\sum_{n=1}^{\infty} k\, C(n, k) = 2\,[2\,C(n, 2) + 4\,C(n, 4)\, 6\,C(n, 6) + \ldots]. \tag{5}$$

(3) का प्रयोग करने पर इससे यह पता चलता है कि (5) का दक्षिण पक्ष $\frac{n\,2^{n-1}}{2} = n\,2^{n-2}$ के बराबर है। इस तरह हमने ऊपर बतायी गई द्विपद सर्वसमिका को स्थापित कर दिया है।

* * *

हमारा अगला अनुप्रयोग n अवयवों वाले समुच्चय के k-क्रमचयों से संबंधित है। इकाई 7 के E12 से हम यह जानते हैं कि अलग-अलग n वस्तुओं के k-क्रमचयों की संख्या P(n, k) निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को संतुष्ट करती है

$$P(n, k) = P(n-1, k) + kP(n-1, k-1), \qquad n, k \geq 1. \tag{6}$$

उदाहरण 10: यदि n नियत हो, तो नीचे परिभाषित चरघातांकी जनक फलन $\mathcal{P}_{exp}(z\,;n)$ का प्रयोग करके P(n, k) का स्पष्ट सूत्र ज्ञात कीजिए

$$\mathcal{P}_{exp}(z\,;n) = \sum_{k=0}^{\infty} (P(n, k)/k!)z^k.$$

हल: (6) और $\mathcal{P}_{exp}(z\,;k)$ की परिभाषा का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(n,k)}{k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(n-1,k)}{k!} z^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kP(n-1,k-1)}{k!} z^k$$

अर्थात् $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(n,k)}{k!} z^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P(n-1,k)}{k!} z^k + z \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kP(n-1,k-1)}{(k-1)!} z^{k-1}$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{exp}(z\,;n) - P(n, 0) = [\mathcal{P}_{exp}(z\,;n-1) - P(n-1, 0)] + z\,\mathcal{P}_{exp}(z\,;n-1)$

$\Rightarrow \mathcal{P}_{exp}(z\,;n) = (1+z)\,\mathcal{P}_{exp}(z\,;n-1)$ (क्योंकि $P(n, 0) = P(n-1, 0)$)

$\Rightarrow \mathcal{P}_{exp}(z\,;n) = (1+z)^n\,\mathcal{P}_{exp}(z\,;0) = (1+z)^n$ (पुनरावृत्ति से)

क्योंकि $(1+z)^n$ में z^k का गुणांक C (n, k) है (द्विपद प्रमेय से) इसलिए गुणांकों की तुलना करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\frac{P(n,k)}{k!} = C(n, k) \Rightarrow P(n, k) = k!\,C(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

और, यदि $k > n$, तो $C(n, k) = 0$, अतः $P(n, k) = 0$.

इस तरह हमने P(n, k) को स्पष्ट रूप से प्राप्त कर लिया है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए।

E9) जनक फलन विधि से योगफल $\sum_{k=1}^{n} k\,3^k\,C(n, k)$ का मान ज्ञात कीजिए।

अब हम व्यापक पूर्णांकी समीकरणों में जनक फलनों के अनुप्रयोग पर चर्चा करेंगे।

8.4.2 रैखिक समीकरण

जनक फलन विशेष रूप से तब और अधिक उपयोगी सिद्ध होते हैं जबकि $a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$ के प्रकार के रैखिक समीकरणों के पूर्णांकी हल प्राप्त करना होता है। आपको याद होगा कि पहले (इकाई 4 का प्रमेय 5 देखिए) हम यह बता चुके हैं कि प्रारंभिक गणन विधियों को लागू करने पर यह $C(n + k - 1, k - 1)$ के बराबर होता है। इसके विपरीत, यदि प्रत्येक a_j एक धन पूर्णांक हो, तो इस प्रकार के हलों की संख्या $C(n - 1, k - 1)$ के बराबर होती है (इकाई 5 का उदाहरण 16 देखिए)।

प्रायः इस प्रकार के समीकरणों को हल करने में जनक फलनों से एक सरलतर विधि प्राप्त हो जाती है। इसे नीचे दिए गए उदाहरण में दर्शाया गया है।

उदाहरण 11: जनक फलन विधियों से रैखिक समीकरण

$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$

के ऋणेतर पूर्णांकी हल की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: पहली स्थिति में, जहाँ प्रत्येक $a_j \geq 0$, अपेक्षित संख्या नीचे दिये हुए बहुपदों के गुणनफल में z^n का गुणांक है (उदाहरण-1 के बाद की गई चर्चा को देखिए)

$(1 + z + z^2 + \ldots) \ldots (1 + z + z^2 + \ldots)$. (k बार)

इस गुणनफल का प्रत्येक पद $(1 - z)^{-1}$ के बराबर है (द्विपद-प्रमेय से) और $(1 - z)^{-k}$ में z^n का गुणांक यह है

$C(n + k - 1, n) = C(n + k - 1, k - 1)$;

यदि प्रत्येक $a_j \geq 1$, तो हम विस्तार

$(z + z^2 + z^3 + \ldots) \ldots (z + z^2 + z^3 + \ldots)$, (k बार)

में z^n का गुणांक प्राप्त करना चाहेंगे।

इस गुणनफल का प्रत्येक पद $z(1 - z)^{-1}$ के बराबर होता है (द्विपद प्रमेय से) और $z^k(1 - z)^{-k}$ में z^n का गुणांक, $(1 - z)^{-k}$ में z^{n-k} का गुणांक होता है। यह $C((n - k) + k - 1, n - k)$ $= C(n - 1, k - 1)$ के बराबर होता है।

इससे यह अर्थ निकलता है कि यदि $n < k$, तो इसका कोई हल नहीं होता, जैसा कि होना भी चाहिए।

* * *

ऊपर के उदाहरण में यदि हम यह चाहते हों कि एक या अधिक हल a_j दोनों सिरों से परिबद्ध हों और यदि हम a_j को ऋणात्मक होने दें, तो ऐसी स्थिति में $k = 2$ या 3 के लिए भी हलों की संख्या का अभिकलन करना काफी कठिन हो जाता है। ऐसी ही समस्याओं के लिए जनक फलन विधि का प्रयोग किया जा सकता है। इसे हम नीचे दिए गए उदाहरण में दर्शाएंगे।

उदाहरण 12: $a_1 + a_2 + a_3 = n$, जहाँ $-1 \leq a_1 \leq 1$, $1 \leq a_2 \leq 3$ और $a_3 \geq 3$, के पूर्णांकी हलों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: आइए हम इस उदाहरण को उदाहरण 11 की स्थिति में लाएं। इसके लिए हम $b_1 = a_1 + 1$ और $b_3 = a_3 - 3$ लेते हैं। तब हमारी समस्या वही हो जाती है जो कि

$b_1 + b_2 + b_3 = n - 2$, जहाँ $0 \leq b_1 \leq 2$, $1 \leq b_2 \leq 3$ और $b_3 \geq 0$,

के पूर्णांकी हलों की संख्या ज्ञात करने वाली समस्या है।

अब, सभी b_j पर लगाए गए परिबंधों से यह पता चलता है कि द्विपद प्रमेय और परिणाम 2 का प्रयोग करने पर संबंधित जनक फलन यह होता है

$$(1+z+z^2)(z+z^2+z^3)(1+z+z^2+\ldots)=\frac{1-z^3}{1-z}\times\frac{z(1-z^3)}{1-z}\times\frac{1}{1-z}.$$

पहले की ही तरह हम इस विस्तार में z^{n-2} का गुणांक प्राप्त करना चाहते हैं जो कि वही है जो कि

$$(1-z^3)^2(1-z)^{-3}=(1-z)^{-3}-2z^3(1-z)^{-3}+z^6(1-z)^{-3}$$

में z^{n-3} का गुणांक है।

यह हम आप पर छोड़ रहें हैं कि आप यह जांच कर लें कि इसका उत्तर यह है :

$C(n-1,2)-2C(n+2,2)+C(n+5,2)$.

इसे सरल करने पर 9 प्राप्त होता है जबकि $n \geq 7$. यदि $n < 7$ होता, तो क्या होता ? निम्नलिखित दो स्थितियाँ $4 \leq n < 7$ और $n = 3$ को अलग-अलग लेने पर आपको उत्तर आसानी से प्राप्त हो सकता है। निश्चित ही यह $n < 3$ के लिए 0 होगा।

* * *

ऊपर दिए गए उदाहरण में अपनायी गेई विधि उस स्थिति में कोई अलग विधि नहीं होती, जबकि योगखंड (summands) तीन से अधिक हों या जबकि परिबंध अधिक व्यापक हों। अतः सिद्धांत रूप में हम ऐसी स्थिति में आ गए हैं कि हम

$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = n$, जहाँ $m_j \leq a_j \leq M_j$, $m_j, M_j \in \mathbf{Z}\ (1 \leq j \leq k)$

के पूर्णांकी हलों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं।

आप इस विधि को कितना समझ पाए हैं, इसकी जाँच के लिए आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल क्यों नहीं कर लेते ?

E10) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 28$, जहाँ $a_k > k$ प्रत्येक k के लिए, $1 \leq k \leq 5$, के कितने पूर्णांकी हल हैं ?

जनक-फलन का एक अन्य अनुप्रयोग गणितीय विभाजन सिद्धांत में होता है जो कि ऐतिहासिक दृष्टि से संभवतः प्रथम समस्या है जिसका अध्ययन जनक फलनों के साथ किया गया। अगले भाग में हम इस पर चर्चा करेंगे।

8.4.3 विभाजन

यहाँ हम विभाजन (partitions) के केवल एक पहलू अर्थात् जनक फलनों के साथ इनके संबंध, पर ही विचार करेंगे। इनके बारे में आप थोड़ा-बहुत इकाई 5 में पढ़ चुके हैं। यहाँ हम इस पर कुछ और अधिक गंभीरता से विचार करेंगे। इसके लिए पहले हमें विभाजनों P_n के अनुक्रम को परिभाषित करना होगा।

परिभाषा: अनुक्रम $\{P_n\}$, $n \geq 1$, का nवाँ पद उन विधियों की संख्या का गणन करता है जिनमें n को ऐसे धन पूर्णांकों के योगफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है जिससे कि योगखंडों (भागों) के क्रम का कोई महत्व न होता हो। हम $P_0 = 1$ परिभाषित करते हैं।

उदाहरण के लिए, $P_4 = 5$ क्योंकि $4 = 3+1 = 2+2 = 2+1+1 = 1+1+1+1$. अतः n का विभाजन करने का अर्थ वही है जो कि n अभिन्न वस्तुओं को n अभिन्न बक्सों में रखना जबकि बक्से खाली भी रखे जा सकते हैं (अर्थात् $4 = 3+1+0+0$) ऊपर बताए गए रैखिक समीकरणों के रूप में P_n पूर्णांकी समीकरण

$X_1 + X_2 + \ldots X_k + \ldots = n$, $X_i = i\,a_i\ (\forall i)$,

के ऋणेतर पूर्णांकी हलों की संख्या है जहाँ a_k, विभाजन में k की संख्या को प्रकट करता है।

आइए अब हम उस रूप का पता लगाएँ जिस रूप में अनुक्रम $\{P_n\}$ $n \geq 0$ का जनक फलन $\mathcal{P}(z)$ होना चाहिए।

ध्यान दीजिए कि ऊपर के रैखिक समीकरण में $a_k \geq 0$ के मान के अनुसार प्रत्येक $k \geq 1$ के लिए हम कोई भी नहीं, एक या अधिक k का प्रयोग कर सकते हैं। यहाँ a_k पर कोई प्रतिबंध नहीं है। अतः प्रत्येक पद $X_i = i\, a_i (a_i \geq 0)$ के लिए संबंधित जनक फलन में संगत पद मात्र $(1 + z^k + z^{2k} + ...)$ होता है। अतः सभी $i \geq 1$ के लिए गुणनफल लेने पर हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$\mathcal{P}(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^k + z^{2k} + ...) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^k}.$$

संबंधित अनुक्रमों के जनक फलन प्राप्त करने में कोई विशेष कठिनाई नहीं होती है। ये फलन विभाजनों वाली सर्वसमिकाओं को सिद्ध करने में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाती है। यहाँ एक उदाहरण लेकर इसे अच्छी तरह से समझने का प्रयास हम करेंगे।

उदाहरण 13: दिखाइए कि प्रत्येक ऋणेतर पूर्णांक n को 2 के अलग-अलग घातों के एक अद्वितीय (unique) योगफल के रूप में लिखा जा सकता है।

हलः अनुक्रम $\{a_n\}$, जहाँ a_n उन विधियों की संख्या को प्रकट करता है जिनमें n को 2 के अलग-अलग घातों के योगफल के रूप में लिखा जा सकता है, का जनक फलन यह होता है

$$(1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4)(1 + z^8) ...$$

अब,

$$\begin{aligned}(1 - z)(1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4)(1 + z^8) ...\\
&= (1 - z^2)(1 + z^2)(1 + z^4)(1 + z^8) ...\\
&= (1 - z^4)(1 + z^4)(1 + z^8) ...\\
&= ...\\
&= (1 - z^{2n})(1 + z^{2n}) ...\\
&= 1.\end{aligned}$$

(यह मानकर कि $|z| < 1$)

इस तरह, संक्रिया O_5 और द्विपद-प्रमेय लागू करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$(1 + z)(1 + z^2)(1 + z^4)(1 + z^8) ... = \frac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + ...$$

गुणांकों की तुलना करने पर इससे हम यह निष्कर्ष निकाल लेते हैं कि समीकरण के वाम पक्ष में z^n का गुणांक 1 है। अतः आमाप 1, 2, 4, 8, 16, ... के अलग-अलग भागों में n के विभाजनों की संख्या a_n, 1 होती है। दूसरे शब्दों में, प्रत्येक ऋणेतर पूर्णांक को 2 के अलग-अलग घातों के योगफल के रूप में अद्वितीयतः (uniquely) व्यक्त किया जा सकता है।

* * *

अब, आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E11) दिखाइए कि n के विभाजनों की संख्या के अनुक्रम का जनक फलन, जबकि

क) प्रत्येक भाग अधिक से अधिक m हों,

$\prod_{k=1}^{m} (1 - z^k)^{-1}$ होता है

ख) असमान भाग हो, $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^k)$ होता है

ग) प्रत्येक भाग विषम हो, $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z^{2k-1})^{-1}$ होता है।

E12) n के विभाजनों की संख्या के अनुक्रम का जनक फलन

i) अभाज्यों में

ii) अलग-अलग अभाज्यों में

ज्ञात कीजिए।

अब हम ज़नक फलन के एक अति महत्वपूर्ण अनुप्रयोग अर्थात्, पुनरावृत्ति संबंधों को हल करने में एक साधन के रूप में इसकी उपयोगिता, पर चर्चा करेंगे।

8.4.4 पुनरावृत्ति संबंध

इकाई 7 में, आप यह पढ़ चुके हैं कि किस प्रकार संचयविन्यास समस्याओं की पुनरावृत्तियाँ स्थापित की जाती है। यद्यपि इन्हें हल करने के बारे में हमने चर्चा नहीं की है फिर भी हमने कुछ हल प्रस्तुत किए हैं जिन्हें आप सत्यापित कर चुके हैं।

पुनरावृत्ति को हल करने के लिए हमें अनुक्रम के पदों को स्पष्ट रूप से जानना आवश्यक होता है। दूसरे शब्दों में, अनुक्रम $\{a_n\}$ के लिए, जो एक दी हुई पुनरावृत्ति को संतुष्ट करता हो, हम इसके जनक फलन A(z) (मानलीजिए) का प्रयोग n के पदों में a_n के स्पष्ट सूत्र को ज्ञात करने में करेंगे।

जैसा कि उदाहरण 4, उदाहरण 7 और उदाहरण 10 के हल से स्पष्ट है, कि एक कलन-विधि (algorithm) से संबंधित प्रक्रिया को चरणों में इस प्रकार लिख सकते हैं :

1. सभी पूर्णांकों $n \geq n_0$, जहाँ n_0 कोई संख्या है, के लिए मान्य एक समीकरण के रूप में a_n को अनुक्रम के पिछले पदों में व्यक्त कीजिए। (प्रायः पुनरावृत्ति संबंध इसी रूप में होता है।)

2. समीकरण के दोनों पक्षों को z^n से गुणा कीजिए और सभी $n \geq n_0$ के लिए परिणामी समीकरणों को जोड़ दीजिए। वाम पक्ष से a_n का जनक फलन प्राप्त होता हैं जिसमें कि अधिक से अधिक परिमित संख्या में पद नहीं होते हैं जबकि दक्षिण पक्ष को बीजीयतः सरल करना होता है जिससे कि यह A(z) वाला एक व्यंजक हो जाता है। यहाँ A(z), अनुक्रम $\{a_n\}$ से संबंधित जनक फलन है।

3. परिणामी समीकरण को A(z) के लिए हल कीजिए।

4. (द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके) A(z) के संवृत्त रूप का एक घात श्रेणी में विस्तार कीजिए और z^n के गुणांक को पढ़ लीजिए। इससे, सभी n के लिए, a_n का एक स्पष्ट व्यंजक प्राप्त हो जाता है।

ध्यान दीजिए कि चरण 2, जहाँ हमें दक्षिण पक्ष को A(z) के रूप में व्यक्त करना होता है, एक अति महत्वपूर्ण चरण है। यहाँ थोड़ा-बहुत बीजीय सरलीकरण करना आवश्यक होता है।

आइए हम नीचे दिए गए उदाहरण से कलन-विधि के चरणों को समझने का प्रयास करें।

उदाहरण 14: उन क्षेत्रों की अधिकतम संख्या L_n ज्ञात कीजिए जिनमें n सरल रेखाओं से एक समतल कटता है। (इकाई 7 की समस्या 3)।

हलः अनुक्रम $\{L_n\}$ से संतुष्ट पुनरावृत्ति संबंध $L_n = L_{n-1} + n$, जहाँ $n \geq 2$ और $L_1 = 2$ होता है। यदि इसी पुनरावृत्ति को $n \geq 1$ के लिए लागू होना हो, तो L_0, 1 के बराबर होगा। (वस्तुतः इससे यह स्पष्ट हो जाता है, यदि समतल पर कोई रेखा नहीं है, तो ऐसी स्थिति में क्षेत्र केवल एक ही होगा।) अतः यहाँ हमें कलन-विधि के चरण 1 को लागू करने की आवश्यकता नहीं है।

अनुक्रम को L_0 से प्रारंभ करने पर अनुक्रम $\{L_n\}_{n>0}$ का जनक फलन L(z) (मानलीजिए) यह होता है

$$L(z) = \sum_{n=1}^{\infty} L_n z^n.$$

<u>चरण 2:</u> अब, ऊपर दिए गए पुनरावृत्ति-संबंध का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
L(z) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (L_{n-1} + n) z^n. \\
&= 1 + z \sum_{n=1}^{\infty} L_{n-1} z^{n-1} + z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}. \\
&= 1 + z \sum_{n=0}^{\infty} L_n z^n + z \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}. \\
&= 1 + z \,.\, L(z) + \frac{z}{(1-z)^2}.
\end{aligned}$$

चरण 3: अंतिम समीकरण को L(z) के लिए हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$L(z) = \frac{1}{1-z} + \frac{z}{(1-z)^3}.$$

चरण 4: अतः द्विपद प्रमेय का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{1 + \frac{1}{2} n(n+1)\right\} z^n.$$

अंत में, अंतिम समीकरण के दोनों पक्षों में z^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$L_n = \frac{1}{2} n(n+1) + 1, n \geq 1.$$

इसके साथ ही कलन विधि समाप्त हो जाती है और हमें $L_n, \forall n$, के लिए एक स्पष्ट सूत्र प्राप्त हो जाता है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते ?

E13) प्रमेय 1 की सहायता से

$\mathcal{L}_n = \mathcal{L}_{n-1} + \mathcal{L}_{n-2}, n \geq 3$, जहाँ $\mathcal{L}_1 = 1, \mathcal{L}_2 = 3$. द्वारा दिए गए लूकास–अनुक्रम का nवाँ पद $\mathcal{L}_n$ ज्ञात कीजिए।

अब हम फिबोनाशी संख्याओं के अनुक्रम $\{\mathcal{F}_n\}$ पर चर्चा करेंगे जो पुनरावृत्ति संबंध $\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}$, यदि $n \geq 3$, और $\mathcal{F}_1 = 1 = \mathcal{F}_2$ (इकाई 7 की समस्या 1) को संतुष्ट करता है।

उदाहरण 15: फिबोनाशी संख्याओं के अनुक्रम $\{\mathcal{F}_n\}$ $n \geq 1$ से संबंधित जनक फलन ज्ञात कीजिए। तब $\mathcal{F}_n, n \geq 1$, के लिए एक सूत्र ज्ञात कीजिए !

हल: हम संबंधित जनक फलन के लिए $\mathcal{F}(z)$ लिखते हैं। तब परिभाषा के अनुसार

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n z^n$$

$$= z + z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (\mathcal{F}_{n-1} + \mathcal{F}_{n-2}) z^n \qquad \text{(चरण 2)}$$

$$= z + z^2 + z \sum_{n=2}^{\infty} \mathcal{F}_n z^n + z^2 \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n z^n.$$

$$= z + z^2 + z[\mathcal{F}(z) - z] + z^2 . \mathcal{F}(z).$$

तब $(1 - z - z^2)\mathcal{F}(z) = z$. अतः $\alpha = (1+\sqrt{5})/2$ और $\beta = (1-\sqrt{5})/2$ लेने पर

$$\mathcal{F}(z) = \frac{z}{(1-\alpha z)(1-\beta z)} \qquad \text{(समीकरण } z^2 + z - 1 = 0 \text{ को हल करने पर)}$$

$$= \frac{1}{\alpha - \beta}\left(\frac{1}{1-\alpha z} - \frac{1}{1-\beta z}\right)$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha^n - \beta^n) z^n. \qquad \text{(द्विपद प्रमेय से)}$$

अब z^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें $\mathcal{F}_n = (\alpha^n - \beta^n)/(\alpha - \beta)$ $(n \geq 1)$ प्राप्त होता है।

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

B14) जनक फलन विधि से पुनरावृत्ति संबंध $T_n = 2T_{n-1} + 1$, यदि $n \geq 2$ और $T_1 = 1$, को हल कीजिए।

यदि आपने पिछले उदाहरण में फिबोनाशी अनुक्रम से संबंधित पुनरावृत्ति-संबंध को हल करने के लिए हमारे द्वारा लागू किए गए चरणों को अच्छी तरह से समझ लिया है तो आपको निम्नलिखित व्यापक परिणाम की उपपत्ति को समझने में कोई कठिनाई नहीं होनी चाहिए।

प्रमेय 1: कोटि k के, अचर गुणांकों वाले व्यापक रैखिक समघात पुनरावृत्ति संबंध, का जनक फलन, जिसे $U(z)$ से प्रकट किया जाता है

$u_n = a_1u_{n-1} + a_2u_{n-2} + \dots + a_ku_{n-k}, n \geq k$, जहाँ $u_0 = c_0, \dots\dots, u_{k-1} = c_{k-1}$.

समीकरण

$$(1 - a_1z - a_2z^2 \dots - a_kz^k)\, U(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{k-1} (c_n - a_1c_{n-1} - \dots - a_nc_0)\, z^n$$

को संतुष्ट करता है।

उपपत्ति : परिभाषा के अनुसार

$$\begin{aligned}
U(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n \\
&= (u_0 + u_1z + \dots + u_{k-1}z^{k-1}) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n z^n. \\
&= (c_0 + \dots + c_{k-1}\, z^{k-1}) + \sum_{n=k}^{\infty} (a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_k u_{n-k})\, z^n \\
&= (c_0 + \dots + c_{k-1}\, z^{k-1}) + a_1 z \sum_{n=k}^{\infty} u_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_k z^k \sum_{n=k}^{\infty} u_{n-k} z^{n-k} \\
&= (c_0 + \dots + c_{k-1}\, z^{k-1}) + a_1 z\, [U(z) - c_0 - c_1z - \dots c_{k-2}\, z^{k-2}] + \dots + a_k z^k\, U(z) \\
&= p_{k-1}(z) + [a_1z + a_2 z^2 + \dots + a_k z^k]\, U(z)
\end{aligned}$$

जहाँ $p_{k-1}(z) = c_0 + \sum_{n=1}^{k-1} (c_n - a_1c_{n-1} - \dots - a_nc_0)\, z^n$, अधिक से अधिक $(k-1)$ घात वाला एक बहुपद है।

और अधिक सरलीकरण करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$[1 - a_1z - a_2 z^2 - \dots - a_k z^k]\, U(z) = p_{k-1}(z)$$

इस तरह, प्रमेय की उपपत्ति पूरी हो जाती है।

ऊपर के प्रमेय से जो पहला निष्कर्ष आप सरलता से निकाल सकते हैं उसे निम्नलिखित परिणाम के रूप में प्रस्तुत किया गया है।

उपप्रमेय 1: प्रमेय में दिए गए अचर गुणांकों वाले रैखिक, समघात पुनरावृत्ति संबंधों का जनक फलन एक परिमेय फलन $p(z) / q(z)$ होता है जिसका अंश $p(z)$ पुनरावृत्ति की कोटि से अधिक से अधिक एक कम घात वाला बहुपद होता है।

आप यहाँ यह देख सकते हैं कि $1 + q(z)$ प्रमेय 1 में दिए गए पुनरावृत्ति संबंध के वाम पक्ष में u_{n-i} के स्थान पर z^i $(1 \leq i \leq k)$ प्रतिस्थापित करने पर प्राप्त बहुपद के बराबर होता है। इस उपप्रमेय (corollary) को लागू करते समय आपको $q(z)$ के रूप पर विशेष ध्यान देने की आवश्यकता होती है। आपको $p(z)$ को रटने की कोशिश नहीं करनी चाहिए, क्योंकि एक बार $q(z)$ ज्ञात हो जाने पर, इस $q(z)$ को जनक श्रेणी $\sum_{n=k}^{\infty} u_n z^n$ से गुणा करके $p(z)$ प्राप्त किया जा सकता है।

आइए हम प्रमेय 1 और उपप्रमेय 1 की सहायता से निम्नलिखित पुनरावृत्ति संबंध को हल करें।

उदाहरण 16: तृतीय कोटि वाली पुनरावृत्ति

$u_n - 9u_{n-1} + 26u_{n-2} - 24u_{n-3} = 0,\ n \geq 3.$

को हल कीजिए, जहाँ प्रारंभिक प्रतिबंध $u_0 = 6, u_1 = 17$ और $u_2 = 53$ है।

हल: हम अनुक्रम $\{u_n\}$ के जनक फलन को $U(z)$ से प्रकट करते हैं। तब, प्रमेय 1 से हम यह जानते हैं कि

$(1 - 9z + 26z^2 - 24z^3)\, U(z) = p(z),$

z में घात 4 वाला बहुपद होता है। इसका थोड़ा-बहुत परिकलन करके आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि

$$\begin{aligned}
&(1 - 9z + 26z^2 - 24z^3)\, U(z) = (1 - 2z)(1 - 3z)(1 - 4z)\, U(z) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n - 9 \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+1} + 26 \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+2} - 24 \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+3} \\
&= u_0 + (u_1 - 9u_0) z + (u_2 - 9u_1 + 26u_0) z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (u_n - 9u_{n-1} + 26u_{n-2} - 24u_{n-3}) z^n \\
&= 6 - 37z + 56z^2, \text{ दिए हुए पुनरावृत्ति-संबंध का प्रयोग करने पर}
\end{aligned}$$

इसलिए,

$U(z) = (6 - 37z + 56z^2) / (1 - 2z)(1 - 3z)(1 - 4z).$

तब, दक्षिण पक्ष को आंशिक भिन्नों (partial fractions) में वियोजित करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$U(z) = 3(1 - 2z)^{-1} + (1 - 3z)^{-1} + 2(1 - 4z)^{-1}.$

अब द्विपद-प्रमेय को लागू करने और परिणामी श्रेणी में z^n के गुणांकों की तुलना वाम पक्ष अर्थात् $U(z)$ की श्रेणी के साथ करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$u_n = 3 \cdot 2^n + 3^n + 2 \cdot 4^n,\ n \geq 0.$

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E15) पुनरावृत्ति संबंध $(n \geq 3)$

$$t_n = \begin{cases} t_{n-3}, & \text{यदि } n \text{ सम है;} \\ t_{n-3} + \dfrac{n + (-1)^{(n+1)/2}}{4}, & \text{यदि } n \text{ विषम है} \end{cases}$$

का जनक फलन ज्ञात कीजिए जहाँ t_n, पूर्णांकी भुजाओं और परिमाप n वाले असर्वांगसम त्रिभुजों की संख्या को प्रकट करता है। आप यहाँ $t_0 = t_1 = t_2 = 0$ ले सकते हैं।

एक अन्य स्थिति में आइए अब हम असमघात पुनरावृत्तियों वाली स्थिति अर्थात् जबकि असमघात पद या तो r^n $(r \in C)$ के प्रकार के हों या n^k $(k \in N \cup \{0\})$ के प्रकार के हों, पर विचार करें। नीचे हम r^n के रूप वाली स्थिति ले रहे हैं। इस संबंध में जनक फलन विधि, और विशेष रूप से प्रमेय 1 का प्रयोग, अधिक प्रभावी सिद्ध होता है जैसा कि नीचे दिए गए उदाहरण को देखने से पता चलता है।

उदाहरण 17: अचर गुणांकों वाली तृतीय कोटि की असमघात रेखिक पुनरावृत्ति अर्थात् $u_n - 3u_{n-2} - 2u_{n-3} = a_n + b \cdot 2^n$ को प्रारंभिक प्रतिबंधों u_0, u_1 और u_2 के रूप में हल कीजिए।

हल: मान लीजिए $U(z)$ अनुक्रम $(u_n)_{n \geq 0}$ का जनक फलन है, तब

$(1 - 3z^2 - 2z^3)\, U(z) = (1 + z)^2 (1 - 2z)\, U(z).$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n - 3 \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+2} - 2 \sum_{n=0}^{\infty} u_n z^{n+3}$$

$$= u_0 + u_1 z + (u_2 - 3u_0) z^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (u_n - 3u_{n-2} - 2u_{n-3}) z^n.$$

$$= u_0 + u_1 z + (u_2 - 3u_0) z^2 + az \sum_{n=3}^{\infty} nz^{n-1} + b \sum_{n=3}^{\infty} (2z)^n.$$

$$= (u_0 - b) + (u_1 - a - 2b) z + (u_2 - 3u_0 - 2a - 4b) z^2$$

$$-\frac{a}{(1-z)^2} - \frac{a}{1-z} + \frac{b}{1-2z}$$

आगे का परिकलन कुछ कठिन अवश्य है, परन्तु इसे करना पड़ता है। U(z) को निम्न रूप में प्राप्त करने के लिए हम आंशिक भिन्नों का प्रमेय करते हैं

$$A(1-z)^{-1} + B(1-z)^{-2} + C(1+z)^{-1} + D(1+z)^{-2} + E(1-2z)^{-1} + F(1-2z)^{-2},$$

जहाँ A, ..., F अचर हैं। इन अचरों के रूप में

$$u_n = A + B(n+1) + C(-1)^n + D(-1)^n (n+1) + E \cdot 2^n + F \cdot 2^n (n+1), n \geq 0.$$

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E16) प्रमेय 1 की सहायता से, पुनरावृत्ति $a_n - 3a_{n-1} - 10a_{n-2} = 28 \times 5^n, n \geq 2$, जहाँ $a_0 = 25$ और $a_1 = 120$, को हल कीजिए।

कभी-कभी जनक-फलनों की सहायता से अरैखिक पुनरावृत्तियों को भी हल किया जा सकता है। इसे हम एक पुनरावृत्ति का, जिसे आप पहले इकाई 7 में पढ़ चुके हैं, हल करके दर्शाएंगे।

उदाहरण 18: पुनरावृत्ति संबंध

$a_n = a_{n-1} a_1 + a_{n-2} a_2 + \ldots + a_2 a_{n-2} + a_1 a_{n-1}, n \geq 2$, जहाँ $a_n \geq 0\ (\forall n)$ और $a_1 = 1$.

हल: दी हुई पुनरावृत्ति को $n \geq 1$ तक लागू होने के लिए हम $a_0 = 0$ परिभाषित करते हैं। यदि हम इसके जनक फलन को A(z) से प्रकट करें तो

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=2}^{\infty} (a_{n-1} a_1 + a_{n-2} a_2 + \ldots + a_2 a_{n-2} + a_1 a_{n-1}) z^n.$$

$$\Rightarrow A(z) - a_1 z - a_0 = \{A(z)\}^2 - (a_1 a_0 + a_0 a_1) z - a_0^2 \qquad (O_2 \text{ से})$$

$$\Rightarrow \{A(z)\}^2 - A(z) + z = 0$$

$$\Rightarrow \qquad A(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4z}}{2}$$

अब द्विपद-प्रमेय लागू करने पर $(1-4z)^{1/2}$ में z^n का गुणांक यह होता है

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4)^n,$$

जिसे आप सरलता से $-\frac{2}{n} C(2n-2, n-1)$ में सरलीकृत कर सकते हैं।

यहाँ हम हल $A(z) = \left(1 - \sqrt{1-4z}\right)/2$ लेते हैं जिससे कि पद a_n ऋणेतर हों। इस तरह, $n \geq 1$ के लिए

$$a_n = \frac{1}{2} C(2n-2, n-1) = \frac{(2n-2)!}{(n-1)!\, n!}$$

* * *

अभी तक हमने विभिन्न क्षेत्रों में जनक-फलनों के अनुप्रयोग के बारे में चर्चा की है। ऐखिक पुनरावृत्ति-संबंधों के बारे में हमने यह देखा है कि इस प्रकार के समीकरणों के हल ज्ञात करने में ये कितने उपयोगी होते हैं। ऐसी अनेक अन्य विधियां हैं। जिनसे इन समीकरणों को हल किया जा सकता है। इस पर चर्चा हम अगली इकाई में करेंगे। अभी तो, इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है : उसका संक्षिप्त विवरण दे रहे हैं।

8.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर चर्चा की है।

1. साधारण और चरघातांकी, दोनों ही जनक फलनों को कुछ संचयविन्यास समस्याओं का विश्लेषण करके परिभाषित किया गया है।
2. जनक फलनों के कुछ प्रारंभिक प्रयोगों को कुछ उदाहरणों के माध्यम से दर्शाया गया है।
3. संचयविन्यास सर्वसमिकाओं को हल करने में जनक-फलनों के अनुप्रयोग प्रदर्शित किए गए हैं।
4. जनक-फलनों का प्रयोग व्यापक रूप में रैखिक समीकरण के पूर्णांकी हलों की संख्या ज्ञात करने और पूर्णांकों के विभाजन से संबद्ध कुछ परिणामों में किया है।
5. अचर गुणांकों वाले कुछ रैखिक, समघात (और असमघात) पुनरावृति समीकरणों को हल किया गया है।
6. यह बताया गया है कि कुछ अरैखिक पुनरावृत्ति संबंधों को हल करने के लिए जनक फलन का प्रयोग किस प्रकार किया जाता है।

8.6 हल/उत्तर

टिप्पणी: नीचे दिए गए हलों में हमने कुछ चरण छोड़ दिए हैं जिन्हें आपको पूरा करना है जिससे यह पता चल सके कि आपने अभिकल्पनात्मक प्रक्रिया को अच्छी तरह से समझ लिया है। अधिकांश स्थितियों में, पिछले खंड भी उपयोगी सिद्ध होंगे।

E1) क) संबंधित घात-श्रेणी यह है

$$(z^5 + z^{10} + \ldots)(1 + z^2 + z^4 - \ldots)(1 + z^3 + z^6 + \ldots)$$

यहाँ दिए हुए प्रतिबंध के कारण पहले बहुपद में कोई अचर पद नहीं है।

ख) क्योंकि दिए हुए प्रतिबंध के अनुसार प्रत्येक k, l, m धनात्मक हैं, और इसलिए, ($5k + 2l + 3m = 50$ के साथ) $(k + l + m)$ फलों के विकल्प का संबंधित घात श्रेणी यह है

$$(z^5 + z^{10} + \ldots)(1 + z^2 + z^4 + \ldots)(1 + z^3 + z^6 + \ldots)$$

E2) क) सांत गुणोत्तर श्रेढ़ी का जनक फलन यह है

$$\sum_{n=0}^{k-1} a\, r^n z^n = a \sum_{n=0}^{k-1} (rz)^n = a(1 - r^k z^k)/(1 - rz). \quad \text{(परिणाम 2 से)}$$

ख) द्विपद-प्रमेय में z के स्थान पर az रखने पर अनुक्रम $\{C(k, n)\, a^n\}_{n=0}^{\infty}$, जबकि k ऋणात्मक हो, का जनक फलन $(1 + az)^k$ होता है। इससे (ख) का हल प्राप्त हो जाता है।

ग) (ख) में दिए गए $(1 + az)^k$ के विस्तार में a और k के स्थान पर उनके ऋणात्मक मानों को रखने पर हमें $(1 - az)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} C(-k, n)(-1)^n a^n z^n$ प्राप्त होता है, जहाँ

$C(-k, n)$ पद $(-k)(-k-1) \ldots (-k-(n-1))/n! =$

$(-1)^n k(k+1) \ldots (k+n-1)/n! = (-1)^n C(n+k-1, n)$ को प्रकट करता है। इसलिए, हमें $(1-az)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} C(k+(n-1), n)\, a^n z^n$ प्राप्त होता है। और, इस तरह (ग) प्राप्त हो जाता है।

E3) क्योंकि, ऋणात्मक m और n के लिए, $(1+z)^m$ अनुक्रम $\{C(m,k)\}_{k=0}^{\infty}$ का जनक फलन होता है और $(1+z)^n$, अनुक्रम $\{C(n,k)\}_{k=0}^{\infty}$ का जनक फलन होता है इसलिए, फलन $(1+z)^m (1+z)^n$ उस अनुक्रम का जनक फलन होता है जिसका प्रमेयिका 1 के अनुसार kवाँ पद $\sum_{j=0}^{k} C(m,j)\, C(n,k-j)$ है। फिर भी, $(1+z)^{m+n}$ अनुक्रम $\{C(m+n,k)\}_{k=0}^{\infty}$ का जनक फलन होता है। इस तरह पहली सर्वसमिका प्राप्त हो जाती है।

$m = n = k$ लेने और सर्वसमिका $C(n,k) = C(n, n-k)$ का प्रयोग करने पर दूसरी सर्वसमिका प्राप्त हो जाती है।

E4) क) $a_n = a + nd,\ n \ge 0$, लीजिए। तब $a_n - a_{n-1} = d,\ \forall\, n \ge 1$, और $a_0 = a$. मान लीजिए $\{b_n\}$ उस अनुक्रम को प्रकट करता है जहाँ $b_0 = a$ और $b_n = d,\ \forall\, n \ge 1$.

परिभाषा के अनुसार

$B(z) = a + dz + dz^2 + \ldots = a + zd\,[1 + z + z^2 + \ldots] = a + dz\,(1-z)^{-1}$

जो कि अनुक्रम $\{b_n\}_{n \ge 1}$ का जनक फलन है। इस तरह, प्रमेयिका 2 के अनुसार $B(z) = (1-z)\,A(z)$

$\Rightarrow A(z) = a(1-z)^{-1} + zd\,(1-z)^{-2} = \{a + (d-a)z\}\,(1-z)^{-2}$.

ख) क्योंकि $a_n = s_n - s_{n-1},\ n \ge 1$ और $a_0 = s_0$, इसलिए $(1-z)\,S(z) = A(z)$ (प्रमेयिका 2 से) अंत में, श्रेणी के भागफलों की परिभाषा O_5 को लागू करने पर उपपत्ति पूरी हो जाती है।

ग) दिए हुए अनुक्रम का nवाँ पद अनुक्रम $\{1, 2, 3, \ldots\}$ का nवाँ आंशिक योगफल होता है जिसका (क) के अनुसार जनक-फलन $A(z)$ (मान लीजिए) $(1-z)^{-1}$ है। अतः (ख) के अनुसार अनुक्रम $\{1, 3, 6, \ldots\}$ का जनक फलन $(1-z)^{-3}$ होता है।

E5) द्विपद-फलन $(1-z)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} z^j$ का अवकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$\sum_{j=0}^{\infty} j\, z^{j-1} = (1-z)^{-2} \qquad \text{(देखिए } O_3\text{)}$$

दोनों पक्षों को z से गुणा करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$A(z) = \sum_{j=1}^{\infty} j\, z^j = z\,(1-z)^{-2}$$

जहाँ $A(z)$, अनुक्रम $\{j\}_{j \ge 1}$ का जनक फलन है।

तब,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k^1 z^k &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{k} j \right) z^k \\ &= \frac{A(z)}{(1-z)} \qquad \text{(E 4(ख) से)} \\ &= z\,(1-z)^{-3}\end{aligned}$$

अतः σ_n^1 श्रेणी में z^n का गुणांक है जिसे फलन $z(1-z)^{-3}$ का विस्तार करके प्राप्त किया जा सकता है। फिर भी, यह वही होता है जो कि द्विपद-प्रमेय के विस्तार रूप में z^{n-1} का गुणांक होता है। इस तरह, द्विपद-सर्वसमिका $C(n,k) = C(n, n-k)$ से हमें यह प्राप्त होता है

$\sigma_n^1 = C(n+1, n-1) = C(n+1, 2) = n(n+1)/2.$

E6) परिभाषा के अनुसार, अनुक्रम $\{P(n, k)\}_{k=1}^{n}$ का चरघातांकी जनक फलन यह है
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{P(n, k)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} C(n, k)\, z^k = (1+z)^n.$$

E7) बेल-संख्याओं के अनुक्रम का चरघातांकी जनक फलन $\mathcal{B}_{exp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathcal{B}_n/n!)\, z^n$. अब,

$$\begin{aligned}
(e^z - 1)\,\mathcal{B}_{exp}(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!} z^n\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!} z^n \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\mathcal{B}_{n-k}}{(n-k)!}\right) z^n\right] - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!} z^n \\
&= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{\sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, \mathcal{B}_{n-k}\right\} z^n\right] - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{B}_n}{n!} z^n \\
&= \mathcal{B}_0 z + \left[\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{\sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, \mathcal{B}_{n-k} - \mathcal{B}_n\right\} z^n\right] \\
&= \mathcal{B}_0 z = z.
\end{aligned}$$

E8) एक प्रथम कोटि वाली पुनरावृत्ति समीकरण, जिसे अनुक्रम (d_n) संतुष्ट करता है, यह होता है

$d_n = n d_{n-1} + (-1)^n$, $n \geq 2$, जहाँ $d_1 = 0$, $d_2 = 1$ (इकाई 7 की समस्या 7 देखिए) $n = 1$ पर भी पुनरावृत्ति लागू हो, इसके लिए हम $d_0 = 1$ परिभाषित करते हैं।

तब, $\mathcal{D}_{exp}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (d_n/n!)\, z^n$ से हमें यह प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n!} z^n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, d_{n-1}}{n!} z^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} z^n. \\
\Rightarrow \mathcal{D}_{exp}(z) - d_0 &= z\,\mathcal{D}_{exp}(z) + (e^{-z} - 1) \\
\Rightarrow \mathcal{D}_{exp}(z) &= \frac{e^{-z}}{1-z}.
\end{aligned}$$

अब, e^{-z} के विस्तार में z^n का गुणांक $(-1)^n/n!$ के बराबर है, अतः $\mathcal{D}_{exp}(z)$ के विस्तार में z^n का गुणांक $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k!$ होगा (देखिए E 3(ख))। तब z^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें $d_n = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k/k!$, $\forall\, n$ प्राप्त होता है।

E9) सर्वसमिका $\sum_{k=0}^{n} C(n, k)\, z^k = (1+z)^n$ को अवकलित करने और दोनों पक्षों को z से गुणा करने पर हमें $\sum_{k=1}^{n} k\, C(n, k)\, z^k = nz(1+z)^{n-1}$ प्राप्त होता है। इसमें $z = 3$ रखने पर हमें $\sum_{k=1}^{n} k\, 3^k\, C(n, k) = 3 \times 4^{n-1}\, n$ प्राप्त होता है।

E10) क्योंकि अपेक्षित जनक फलन यह है
$$(z^2 + z^3 + z^4 + \ldots)(z^3 + z^4 + z^5 + \ldots)(z^4 + z^5 + z^6 + \ldots)$$
$$(z^5 + z^6 + z^7 + \ldots)(z^6 + z^7 + z^8 + \ldots) = z^{20}(1 + z + z^2 + \ldots)^5.$$

इसलिए, पूर्णांकी हलों की संख्या $(1-z)^{-5}$ में z^8 का गुणांक होती है जो कि $\binom{12}{4} = 495$ के बराबर है।

E11) क) भाग k से जनक फलन में योगदान $(1 + z^k + z^{2k} + \ldots)$ है। क्योंकि $1 \leq k \leq m$, इसलिए अपेक्षित जनक फलन यह होगा

$$\prod_{k=1}^{m} (1 + z^k + z^{2k} + \ldots) = \prod_{k=1}^{m} (1 - z^k)^{-1}$$

ख) यदि हम असमान भागों का प्रयोग करें तो किसी भी भाग k की पुनरावृत्ति नहीं हो सकती। जनक फलन में संगत पद $(1+z^k)$ है जिससे कि k का प्रयोग अधिक से अधिक एक बार किया जा सकता है। अतः जनक फलन $\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^k)$ होगा।

ग) विषम भाग $2k-1$ का योगदान

$(1+z^{2k-1}+z^{2(2k-1)}+\ldots)$ है। इस तरह, अपेक्षित जनक फलन यह होगा

$\prod_{k=1}^{\infty}(1+z^{2k-1}+z^{2(2k-1)}+\ldots)=\prod_{k=1}^{\infty}(1-z^{2k-1})^{-1}$.

E12) i) ऊपर की गई चर्चा के अनुसार अपेक्षित जनक फलन यह होगा

$(1+z^{p_1}+z^{2p_1}+\ldots)(1+z^{p_2}+z^{2p_2}+\ldots)\ldots$

ii) इसी प्रकार, यहाँ जनक फलन यह होगा

$(1+z^{p_1})(1+z^{p_2})\ldots$

E13) हम $L_0=L_2-L_1=2$ लेते हैं जिससे कि, $n\ge 2$ के लिए, पुनरावृत्ति मान्य हो। प्रमेय 1 से

$(1-z-z^2)L(z)=L_0+(L_1-L_0)z=2-z.$

इसलिए,

$L(z)=(1-\alpha z)^{-1}+(1-\beta z)^{-1}$,

जहाँ $\alpha+\beta=1=-\alpha\beta$. तब, z^n के गुणांकों की तुलना करने पर, हमें $L_n=\alpha^n+\beta^n, n\ge 0$, प्राप्त होता है!

E14) $T_0=0$ से परिभाषित करें ताकि पुनरावृत्ति $n\ge 1$ के लिए मान्य हो, और $\{T_n\}_{n=0}^{\infty}$ के लिए जनक फलन के लिए $T(z)$ लिखने पर हमें $T(z)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n z^n=T_0+2\sum_{n=1}^{\infty}T_{n-1}z^n+\sum_{n=1}^{\infty}z^n=2z.\,T(z)+z/(1-z)$ प्राप्त होता है। इसलिए, $T(z)=z/(1-z)(1-2z)=(1-2z)^{-1}-(1-z)^{-1}$.

अतः अंतिम समता के दक्षिण पक्ष पर द्विपद प्रमेय लागू करने के बाद गुणांकों की तुलना करने पर $T_n=2^n-1, n\ge 0$, प्राप्त होता है।

E15) मान लीजिए $T(z)=\sum_{n=0}^{\infty}t_n z^n$, तब

$$T(z) = (t_0+t_1z+t_2z^2)+\sum_{n=3}^{\infty}t_{n-3}z^n$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1+(-1)^{n+1}}{4}z^{2n+1}$$

$$=z^3.\,T(z)+\frac{z}{4}\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)z^{2n}+\frac{z^3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}.$$

$$\Rightarrow (1-z^3)T(z) = \frac{z}{4}\frac{d}{dz}\sum_{n=1}^{\infty}z^{2n+1}+\frac{z^3}{4(1-z^2)}$$

$$=\frac{3z^3}{4(1-z^2)^2}+\frac{z^3}{4(1-z^2)}$$

$$\Rightarrow T(z) = \frac{z^3(4-3z^2-2z^3+z^6)}{4(1-z^3)^3(1-z^2)}.$$

E16) मान लीजिए $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ तब

$$\begin{aligned}(1-3z-10z^2)\,A(z) &= a_0 + (a_1 - 3a_0)\,z + \sum_{n=2}^{\infty} (a_n - 3a_{n-1} - 10a_{n-2})\, z^n. \\ &= 25 + 45z + 28 \sum_{n=2}^{\infty} (5z)^n \\ &= (25 - 80z + 475z^2)\,/(1-5z).\end{aligned}$$

आंशिक भिन्नों का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned}A(z) &= (25 - 80z + 475z^2)\,/(1+2z)\,(1-5z)^2 \\ &= 15(1+2z)^{-1} - 10\,(1-5z)^{-1} + 20\,(1-5z)^{-2}.\end{aligned}$$

z^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$a_n = 15(-2)^n - 10.5^n + 20(n+1)\,5^n = 15(-2)^n + (10 + 20\,n)\,5^n,\ n \geq 0.$$

इकाई 9 पुनरावृत्तियों को हल करना

इकाई की रूपरेखा | पृष्ठ संख्या

9.1 प्रस्तावना

इस खंड की पिछली दो इकाइयों में पुनरावृत्तियों को स्थापित करने और जनक फलनों की सहायता से इन्हें हल करने के बारे में आप पढ़ चुके हैं। इस इकाई में हम पुनरावृत्ति-समीकरणों को हल करने की अन्य विधियों पर चर्चा करेंगे।

इस संबंध में सबसे पहले हम अचर गुणांकों वाली रैखिक समघात पुनरावृत्ति को हल करने का एक व्यापक सिद्धांत विकसित करेंगे। इसके बाद हम ऐसे रैखिक असमघात पुनरावृत्तियों के हलों पर चर्चा करेंगे जिनका असमघात भाग एक बहुपद या चरघातांकी फलन (exponential function) है। इस इकाई के अंत में हम पुनरावृत्तियों को हल करने के लिए विकसित की गई अनेक तरीक़ों के उदाहरण देंगे। इन उदाहरणों के ज़रिये आप देखेंगे कि कई प्रश्न जिन्हें मानक विधियों से हल करने में कठिनाई हो सकती है, उन्हें ऐसे तरीक़ों से आसानी से हल किया जा सकता है। हम चर्चा के दौरान सिद्धांतों के साथ-साथ उनसे जुड़े वास्तविक जीवन के उदाहरण भी देते जाएंगे।

जैसा कि आप देख सकते हैं, इस इकाई का इकाई 7 के साथ निकट का संबंध है। अतः यह आवश्यक है कि आगे पढ़ने से पहले आप उस इकाई पर दोबारा एक नज़र डाल लें।

आइए अब हम इस इकाई के उद्देश्यों को स्पष्ट रूप से देख लें।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद, आप

- अचर गुणांकों वाले रैखिक समघात पुनरावृत्ति संबंध के अभिलक्षणिक बहुपद, समीकरण और मूल ज्ञात कर सकेंगे;
- अचर गुणांकों वाले किसी भी रैखिक, समघात पुनरावृत्ति संबंध को हल कर सकेंगे;
- ऐसे अचर गुणांकों वाले रैखिक असमघात पुनरावृत्तियों को हल कर सकेंगे जिनका असमघात भाग या तो बहुपद हो या चरघातांकी फलन;
- निरीक्षण/अंतःसर्पी योगफल/आवर्तन/प्रतिस्थापन विधि से पुनरावृत्ति-संबंधों को हल कर सकेंगे, जब भी यह विधियां लागू हों।

9.2 रैखिक समघात पुनरावृत्तियाँ

इकाई 7 से आपको याद होगा कि कोटि k वाली रैखिक असमघात पुनरावृत्ति का व्यापक रूप

$u_n = f_1(n)\, u_{n-1} + f_2(n)\, u_{n-2} + \dots + f_k(n)\, u_{n-k} + g(n), \qquad n \geq k,$

है, जहाँ प्रत्येक f_j और g, n का फलन है। यदि g शून्य फलन हो, तो यह समघात होता है, अन्यथा असमघात।

अब, मान लीजिए कि g शून्येतर (non-zero) है। तब, असमघात पुनरावृत्ति से संबंधित समघात पुनरावृत्ति

$$u_n = f_1(n)\, u_{n-1} + f_2(n)\, u_{n-2} + \ldots + f_k(n)\, u_{n-k}, \qquad n \geq k,$$

होती है, जो कि असमघात भाग को शून्य के बराबर कर देने से प्राप्त हो जाती है।

आइए ऐसे पुनरावृत्तियों पर ध्यान दें जिनके समघात भाग रैखिक हैं। आप जानते हैं कि अचर गुणांकों वाला सबसे व्यापक रैखिक समघात समीकरण

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k}, \qquad n \geq k, \tag{1}$$

है, जहाँ c_i अचर हैं अर्थात् $c_i \in \mathbf{C}\ \forall\, i$.

इससे संबंधित एक समीकरण होता है जिसे अब हम परिभाषित करेंगे।

परिभाषाएं : रैखिक समघात पुनरावृत्ति (1) का **अभिलक्षणिक समीकरण (characteristic equation)** या **सहायक समीकरण (auxiliary equation)** है:

$$z^k - c_1 z^{k-1} - c_2 z^{k-2} - \ldots - c_{k-1} z - c_k = 0. \tag{2}$$

अभिलक्षणिक समीकरण (2) के मूलों को (1) के **अभिलक्षणिक मूल (characteristic root)** कहते हैं।

(1) के अभिलक्षणिक मूल α की **बहुकता (multiplicity)** वह सबसे बड़ा पूर्णांक m है जिससे कि $(z-\alpha)^m$, (1) के **अभिलक्षणिक बहुपद (characteristic polynomial)**, अर्थात् $z^k - c_1 z^{k-1} - \ldots - c_k$, का गुणनखंड हो।

यहाँ आप देख सकते हैं कि पुनरावृत्ति (1) में अनुक्रम $\{u_n\}$ के mवें पद को z^m के बराबर करने से, और उसे सरल करने से ही अभिलक्षणिक समीकरण प्राप्त हो जाता है।

उदाहरण के लिए, पुनरावृत्ति

$$u_{n+2} = 2\, u_n - u_{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

का अभिलक्षणिक समीकरण है

$$z^{n+2} = 2\, z^n - z^{n-2}, \text{ अर्थात् } z^4 = 2\, z^2 - 1.$$

अतः इस पुनरावृत्ति के अभिलक्षणिक मूल 1 और –1 हैं, और दोनों की बहुकता 2 है।

अब, यदि पुनरावृत्ति के अभिलक्षणिक मूल दिए हुए हों, तो हम इसे किस प्रकार हल कर सकते हैं ? जैसा कि आप इकाई 8 में पढ़ चुके हैं, **पुनरावृत्ति को हल करने** का मतलब है एक ऐसा अनुक्रम $\{a_n\}$ मालूम करना जो उसे संतुष्ट करता हो, जहां a_n, n का फलन है। जब ऐसा अनुक्रम हमें मालूम हो जाए, तो हम अक्सर कहेंगे कि a_n एक हल है।

अब, (1) जैसी पुनरावृत्तियों को हल करने के तरीके को समझने के लिए, आइए एक उदाहरण के तौर पर पुनरावृत्ति

$$a_n = 16 a_{n-2}$$

को लें। इकाई 8 से आप जानते हैं कि इसका हल

$$a_n = A\, 4^n + B(-4)^n$$

के रूप का होगा, जहां A और B अचर हैं।

यहां ध्यान दीजिए कि 4 और (–4) इस पुनरावृत्ति के अभिलक्षणिक समीकरण $z^2 = 16$ के मूल हैं। इन दोनों मूलों की बहुकता 1 है।

आइए अब पुनरावृत्ति

$a_{n+2} = 2a_{n+1} + 4a_n - 8a_{n-1}$

को लें। आप जांच कर सकते हैं कि इसका अभिलक्षणिक बहुपद

$z^3 - 2z^2 - 4z + 8$, अर्थात्, $(z-2)^2 (z+2)$ है।

इसलिए इसके अभिलक्षणिक मूल 2 (बहुकता 2 वाली) और –2 (बहुकता 1 वाली) हैं।

इकाई 8 में दिए गए तरीकों से आप यह भी जांच कर सकते हैं कि दी गई पुनरावृत्ति का व्यापक हल है :

$a_n = (A_0 + A_1 n)2^n + B_0 (-2)^n,\ A_0, A_1, B_0 \in C.$

हम इसे

$a_n = A_0' C(n, 0)\, 2^n + A_1' C(1+n, 1)\, 2^n + B_0 C(n, 0)\, (-2)^n$

भी लिख सकते है, जहां $A_0', A_1', B_0 \in C$.

क्या इन उदाहरणों से आपको कोई संकेत मिला कि (1) के व्यापक हल को उसके अभिलक्षणिक मूलों के पदों में कैसे मालूम किया जा सकता है ? इस संबंध में अपने निष्कर्षो को निम्नलिखित प्रमेय से मिलाइए।

प्रमेय 1: अनुक्रम $\{a_n\}$ अचर गुणांकों वाले रैखिक समघात पुनरावृत्ति संबंध

$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \dots + c_k u_{n-k},\ n \ge k,$

को संतुष्ट करता है यदि और केवल यदि प्रत्येक a_n निम्नलिखित रूप के व्यंजकों का जोड़ हो :

$b_0 C(n, 0)\, \alpha_i^n + b_1 C(1+n, 1)\, \alpha_i^n + \dots + b_{m_i-1} C(m_i - 1 + n, m_i - 1)\, \alpha_i^n,$

जहां $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ बहुकता $m_1, m_2, \dots$ वाले अभिलक्षणिक मूल हैं और सभी b_j अचर हैं।

उपपत्तिः इकाई 8 के प्रमेय 1 में आप देख चुके हैं कि अनुक्रम $\{u_n\}$ का जनक फलन $U(z)$, $p(z)/q(z)$ के रूप का होता है, जहां p और q बहुपद हैं, $\deg p < \deg q$ और $q(z) = 1 - c_1 z - c_2 z^2 - \dots - c_k z^k$.

अब, $z^k - c_1 z^{k-1} - c_2 z^{k-2} - \dots - c_{k-1} z - c_k = \prod_i (z - \alpha_i)^{m_i}$

$$\Leftrightarrow z^k \left[1 - c_1 \left(\frac{1}{z}\right) - c_2 \left(\frac{1}{z}\right)^2 - \dots - c_k \left(\frac{1}{z}\right)^k\right] = z^k \prod_i \left(1 - \frac{\alpha_i}{z}\right)^{m_i}$$

$\Leftrightarrow 1 - c_1 t - c_2 t^2 - \dots - c_k t^k = \prod_i (1 - \alpha_i t)^{m_i}$, जहाँ हमने $t = \frac{1}{z}$ लिया है।

$\therefore U(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, जहाँ $q(z) = \prod_i (1 - \alpha_i z)^{m_i}$ और $\deg p < \deg q$.

अब, आंशिक भिन्नों (partial fractions) का प्रयोग करके हम $U(z)$ को $(1 - \alpha_i z)^{-j-1}$ के रूप के पदों के एकघात संचय (linear combination) के रूप में व्यक्त कर सकते हैं, जहाँ $0 \le j \le m_i - 1$.

आगे, $(1 - \alpha_i z)^{-j-1}$ के प्रसार में z^n का गुणांक, $C(-j-1, n)\alpha_i^n$,

अर्थात् $C(j+n, j)\, \alpha_i^n$ के बराबर होता है। इस तरह प्रमेय प्राप्त हो जाता है।

$j \ge 0$ के लिए,
$C(-j, n)$
$= (-1)^n C(j+n-1, n)$.

ध्यान दीजिए कि प्रमेय का प्रत्येक a_n वास्तव में $n^j \alpha^n$ के रूप के पदों का एक परिमित एकघात संचय होता है, जहाँ α बहुकता m वाला एक अभिलक्षणिक मूल है और $0 \le j \le m - 1$. ऐसा इसलिए है, क्योंकि द्विपद गुणांक $C(j+n, j)$ स्वयं चर n में घात j वाले बहुपद होते हैं। अक्सर हल को इस रूप में व्यक्त करना अधिक सरल होता है, जैसा कि उस स्थिति में जबकि सभी अभिलक्षणिक मूल अलग-अलग हों, अर्थात् बहुकता एक वाले हों। इस स्थिति में हल अनुक्रम का रूप

$$u_n = \sum_{j=1}^{k} A_j \alpha_j^n, \qquad n \geq 0,$$

है, जहाँ a_j अभिलक्षणिक मूल हैं और A_j अचर हैं जिन्हें प्रारंभिक प्रतिबंधों (initial conditions) को लागू करके ज्ञात करना होता है।

प्रमेय 1 को किस प्रकार लागू किया जा सकता है, आइए यहाँ हम इससे संबंधित कुछ उदाहरण लें। पहले उदाहरण के दौरान देखिए कि किस प्रकार हल प्रारंभिक प्रतिबंधों पर निर्भर करता है।

उदाहरण 1: पुनरावृत्ति $a_n = 4\, a_{n-2}$ हल कीजिए, जहाँ

क) $a_0 = 4, \quad a_1 = 6$

ख) $a_0 = 6, \quad a_2 = 20$

ग) $a_1 = 6, \quad a_2 = 20$

हल: पुनरावृत्ति के अभिलक्षणिक समीकरण $z^2 = 4$ के मूल ± 2 हैं। इसलिए, प्रमेय 1 के अनुसार इसके व्यापक हल का रूप

$$a_n = A(2)^n + B(-2)^n$$

है, जहाँ A और B स्वेच्छ अचर हैं।

क) अब, यदि $a_0 = 4$ और $a_1 = 6$, तो व्यापक हल से हमें प्राप्त होता है कि

$A + B = 4$ और $2A - 2B = 6$

$\therefore A = \frac{7}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$

अतः हल होगा

$a_n = 7(2)^{n-1} - (-2)^{n-1}.$

ख) यदि $a_0 = 6$ और $a_2 = 20$, तो व्यापक हल से हमें प्राप्त होता है कि

$A + B = 6$ और $4A + 4B = 20.$

चूंकि ये समीकरण असंगत (inconsistent) हैं, अतः पुनरावृत्ति का कोई हल नहीं होगा।

ग) यदि $a_1 = 6, a_2 = 20$, तो हमें प्राप्त होता है कि

$2(A - B) = 6$ और $4\,(A + B) = 20.$

इसलिए $A = 4, B = 1$, और हल होगा

$a_n = 4(2)^n + (-2)^n.$

* * *

ऊपर के उदाहरण में आपने देखा कि यहाँ प्रारंभिक प्रतिबंधों का कितना महत्त्व है। आपने यह भी देखा कि कभी-कभी ये प्रतिबंध ऐसे भी हो सकते हैं कि इनके अधीन पुनरावृत्ति का कोई हल नहीं हो सकता है।

आइए अब हम अचर गुणांकों वाली एक द्विकोटि रैखिक समघात पुनरावृत्ति लें जिसे आप इकाई 8 में जनक फलनों का प्रयोग करके हल कर चुके हैं। प्रमेय 1 को लागू करके भी इस समीकरण को हल किया जा सकता है जैसा कि आप अब देखेंगे।

उदाहरण 2: फिबोनाची अनुक्रम (देखिए इकाई 7 की समस्या 1) से संतुष्ट पुनरावृत्ति संबंध का हल प्राप्त कीजिए।

हलः आपको याद होगा कि फ़िबोनाची अनुक्रम $(\mathcal{F}_n)$ निम्नलिखित को संतुष्ट करता है :

$$\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_{n-1} - \mathcal{F}_{n-2} = 0, \text{ यदि } n \geq 3 \text{ और } \mathcal{F}_1 = 1 = \mathcal{F}_2 \quad (3)$$

अभिलक्षणिक समीकरण $z^2 - z - 1 = 0$ के अलग-अलग मूल $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ और $\beta = (1 - \sqrt{5})/2$ हैं। अत: प्रमेय 1 के अनुसार

$$\mathcal{F}_n = A\,\alpha^n + B\,\beta^n, \qquad n \geq 1, \quad (4)$$

जहाँ A और B अचर है।

यही पुनरावृत्ति (3) का व्यापक हल है।

जैसा कि आप पिछले उदाहरण में देख चुके हैं, A और B के मान प्रारंभिक प्रतिबंधों, अर्थात् अनुक्रम के प्रथम दो पदो पर निर्भर करते हैं.

चूंकि $\mathcal{F}_1 = 1$, इसलिए (4) $\Rightarrow 1 = A\,\alpha + B\,\beta$.

चूंकि $\mathcal{F}_2 = 1$, इसलिए (4) $\Rightarrow 1 = A\,\alpha^2 + B\,\beta^2$.

और, क्योंकि α और β समीकरण $z^2 - z - 1 = 0$ के मूल है, इसलिए

$\alpha^2 = \alpha + 1$ और $\beta^2 = \beta + 1$.

अत: हम पाते हैं कि

$$1 = A\,\alpha^2 + B\,\beta^2 = A\,(\alpha + 1) + B\,(\beta + 1) = (A\,\alpha + B\,\beta) + (A + B) = 1 + (A + B)$$

इसलिए, $A + B = 0$.

अत: $A\,(\alpha - \beta) = 1$, और

$$\mathcal{F}_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right\}, n \geq 1.$$

* * *

आइए अब हम एक ऐसा उदाहरण लें जिसमें कोई भी प्रारंभिक प्रतिबंध नहीं दिए गए हैं।

उदाहरण 3: छठवीं कोटि की रैखिक समघात पुनरावृत्ति संबंध

$$u_n + u_{n-1} - 11u_{n-2} - 13u_{n-3} + 26u_{n-4} + 20u_{n-5} - 24u_{n-6} = 0$$

को हल कीजिए।

हलः इसमें सबसे पहले हमें बहुकताओ के साथ अभिलक्षणिक मूलों को पहचानना होगा। अभिलक्षणिक समीकरण है

$$z^6 + z^5 - 11\,z^4 - 13\,z^3 + 26z^2 + 20\,z - 24 = 0,$$

अर्थात् $(z - 1)^2\,(z - 3)\,(z + 2)^3 = 0$.

चूंकि मूल 1 की बहुकता दो है, मूल 3 की बहुकता एक है और मूल (–2) की बहुकता तीन है, इसलिए प्रमेय 1 से हम जानते हैं कि u_n, निम्नलिखित 6 पदों का एकघात संचय होगा:

$C(0 + n, 0)1^n$, $C(1 + n, 1)1^n$, $C(0 + n, 0)\,3^n$, $C(0 + n, 0)\,(-2)^n$, $C(1 + n, 1)\,(-2)^n$

और $C(2 + n, 2)\,(-2)^n$,

अर्थात् $u_n = a + b\,(1 + n) + c \cdot 3^n + d\,(-2)^n + e(1 + n)\,(-2)^n + f \cdot \dfrac{(1 + n)\,(2 + n)}{2}\,(-2)^n$,

जहां a, ..., f अचर है जिन्हे ज्ञात किया जा सकता है अगर अनुक्रम के कोई भी 6 क्रमागत पद (जैसे कि प्रथम 6 पद) हमें ज्ञात हों। चूंकि यहाँ कोई प्रारंभिक प्रतिबंध नहीं दिए गए हैं, इसलिए हम व्यंजक को केवल निम्नलिखित रूप तक सरल कर सकते हैं :

$u_n = A + Bn + C \cdot 3^n + (D + En + Fn^2)(-2)^n$

जहाँ A, ..., F अचर हैं।

* * *

अभी तक हमने प्रमेय 1 के इस्तेमाल से रैखिक पुनरावृत्तियों को हल किया है। आइए अब हम एक अरैखिक (non-linear) पुनरावृत्ति संबंध को एक रैखिक संबंध में समानीत (reduce) करके उसे हल करें।

उदाहरण 4: पुनरावृत्ति $a_{n+1}^2 = 5a_n^2$, जहाँ $a_n > 0$ और $a_0 = 2$ को हल कीजिए। a_8 भी ज्ञात कीजिए।

हल: दी हुई पुनरावृत्ति एक द्विघाती संबंध है। परन्तु, यदि हम $b_n = a_n^2$ लें, तो संबंध

$b_{n+1} = 5b_n$, $b_0 = 4$ हो जाएगा।

और, प्रमेय 1 से आप जानते हैं कि इसका हल $b_n = A(5)^n$ है, जहाँ A एक अचर है।

अब, $b_0 = 4 \Rightarrow A = 4$.

$\therefore b_n = 4(5)^n$.

चूंकि a_n, b_n का घन वर्गमूल है, इसलिए

$a_n = 2(5)^{n/2}$, जहाँ $n \geq 0$.

$\therefore a_8 = 1250$.

* * *

अब आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E1) पुनरावृत्ति संबंध $a_n = 3a_{n-1}$ का व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

E2) अचरों c_1 और c_2 के ऐसे मान ज्ञात कीजिए जिनसे कि पुनरावृत्ति

$u_n + c_1u_{n-1} + c_2u_{n-2} = 0$ के अभिलक्षणिक मूल $1 \pm \sqrt{-1}$ हों।

E3) अवर्धमान क्रम में दो भागों में n के विभाजनों की संख्या P_n^2 द्वारा संतुष्ट निम्नलिखित पुनरावृत्ति समीकरण का हल ज्ञात कीजिए :

$$P_n^2 = P_{n-1}^2 + P_{n-2}^2 - P_{n-3}^2, \qquad n \geq 3, \qquad P_1^2 = 0, P_2^2 = 1, P_3^2 = 1.$$

आइए अब हम देखें कि हमने इस भाग में जिन बातों की चर्चा की है, उनकी सहायता से अचर गुणांकों वाली असमघात पुनरावृत्तियों को कैसे हल किया जाता है।

9.3 रैखिक असमघात पुनरावृत्तियाँ

इस भाग में हम $u_n = 3u_{n-2} + 3n^5 - (2)^n$ जैसे समीकरणों के हल मालूम करने से संबंधित कुछ व्यापक सिद्धांत पर चर्चा करेंगे। सामान्य रूप में हम

$$u_n = c_1u_{n-1} + c_2u_{n-2} + \dots + c_ku_{n-k} + g(n), \quad n \geq k, \tag{5}$$

के रूप के समीकरणों का अध्ययन करेंगे।

समीकरण (5) को देखने पर शायद आप सोचें कि (1) और (5) के हल एक-दूसरे से संबंधित हैं। निम्नलिखित प्रमेयों से हमें इसके बारे में कुछ जानकारी प्राप्त हो जाती है।

प्रमेय 2: यदि $\{a_n\}_{n\geq 0}$ और $\{b_n\}_{n\geq 0}$ दो ऐसे अनुक्रम हों जो असमघात पुनरावृत्ति (5) को संतुष्ट करते हों, तो $\{d_n\}$, जहाँ $d_n = a_n - b_n$, $n \geq 0$, संबंधित समघात पुनरावृत्ति (1) को संतुष्ट करता है।

उपपत्तिः चूंकि $\{a_n\}$ और $\{b_n\}$, (5) को संतुष्ट करते हैं, और $d_n = a_n - b_n$, जहाँ $n \geq 0$, इसलिए

$$\begin{aligned} d_n &= a_n - b_n \\ &= [c_1 a_{n-1} + \dots + c_k a_{n-k} + g(n)] - [c_1 b_{n-1} + \dots + c_k b_{n-k} + g(n)] \\ &= c_1 d_{n-1} + \dots + c_k d_{n-k} \end{aligned}$$

इससे पता चलता है कि $\{d_n\}$, (1) को संतुष्ट करता है, अर्थात् हमने दिए हुए कथन को सिद्ध कर दिया है।

अब, क्या आप बता सकते हैं कि हम प्रमेयों 1 और 2 को लागू करके, (5) के हल का व्यापक रूप कैसे प्राप्त कर सकते हैं ? निम्नलिखित परिणाम से आप इसका जवाब स्पष्ट रूप से दे सकेंगे।

प्रमेय 3: पुनरावृत्ति (5) का प्रत्येक हल $a_n + b_n$ के रूप का होता है, जहाँ a_n, (5) का कोई एक विशेष हल (particular solution) है और b_n इससे संबंधित समघात पुनरावृत्ति (1) का कोई हल है।

(5) का विशेष हल, कोई एक अनुक्र (a_n) होता है, जो (5) को संतुष्ट करता है।

उपपत्तिः मान लीजिए a_n, (5) का कोई विशेष हल है। अब, प्रमेय 2 के अनुसार, (5) के किन्हीं दो हलों का अंतर, (1) का हल होता है। अतः (5) का प्रत्येक हल u_n, $u_n - a_n = b_n$ को संतुष्ट करता है, जहाँ b_n, (1) को संतुष्ट करता है। इसलिए, $u_n = a_n + b_n$, जहाँ a_n, (5) का विशेष हल है और b_n, (1) का हल है।

हमने ऊपर दो प्रमेयों को केवल अचर गुणांक वाले रैखिक पुनरावृत्ति संबंधों के लिए सिद्ध किया है। परन्तु, ये प्रमेय व्यापक स्थिति में भी लागू होते हैं। नीचे दिया गया प्रश्न इसी पर आधारित है।

E4) $u_n = f_1(n)u_{n-1} + f_2(n)u_{n-2} + \dots + f_k(n)u_{n-k} + g(n)$, जहाँ f_i और g, n के फलन हैं, के रूप की व्यापक पुनरावृत्तियों के लिए प्रमेय 2 और प्रमेय 3 के अनुरूप प्रमेयों का कथन दीजिए और उन्हें सिद्ध कीजिए।

ऊपर दिए गए दो प्रमेयों को ध्यान में रखकर (5) को हल करने के लिए हमें (5) का कोई एक हल और (1) का व्यापक हल ज्ञात करना होगा। इस संबंध में आइए यहाँ हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 5: पुनरावृत्ति $a_n = 3a_{n-1} - 4n$, $n \geq 1$, का पूरा हल ज्ञात कीजिए।

हलः पुनरावृत्ति का समघात भाग $a_n = 3a_{n-1}$ है, जिसे आप E1 में हल कर चुके हैं। इस भाग का व्यापक हल

$a_n = b \cdot 3^n$ है, जहाँ b एक अचर है।

आइए अब हम असमघात भाग पर भी विचार करें। यह है

$a_n = 3a_{n-1} - 4n.$

आइए देखें कि क्या a_n, $An + B$, जहाँ $A, B \in C$, के रूप का हो सकता है।

यदि ऐसा है, तो

$An + B = 3[A(n-1) + B] - 4n = n(3A - 4) - 3A + 3B.$

n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$A = 3A - 4$ और $B = 3B - 3A,$

अर्थात् $A = 2$ और $B = 3$

इसलिए, $a_n = 2n + 3$ लागू होता है। अतः यह दी हुई पुनरावृति का एक विशेष हल है।

अतः पुनरावृत्ति का पूरा हल होगा

$a_n = b \cdot 3^n + 2n + 3, b \in C.$

* * *

ऊपर के उदाहरण में हमने अनुमान लगाकर विशेष हल प्राप्त किया था। अनेक स्थितियों में हमें यही तरीक़ा अपनाना पड़ता है। समघात स्थिति के विपरीत, असमघात पुनरावृत्ति का विशेष हल प्राप्त करने की कोई व्यापक विधि नहीं होती। परन्तु, कुछ पुनरावृत्तियों के लिए, जिनमें उदाहरण 5 में दी गई पुनरावृत्ति भी सम्मिलित है, कुछ तकनीक उपलब्ध हैं। निम्नलिखित प्रमेय ऐसे ही दो विशिष्ट स्थितियों से संबंधित है।

प्रमेय 4: समीकरण (5) का विशेष हल, जबकि असमघात भाग an^d हो, जहाँ a एक ज्ञात अचर है और $d \in \mathbf{N}$, निम्न रूप का होता है:

i) $A_0 + A_1n + A_2n^2 + \ldots + A_dn^d$, यदि 1, (5) का अभिलक्षणिक मूल न हो;

ii) $A_0n^m + A_1n^{m+1} + \ldots + A_dn^{m+d}$, यदि 1, (5) का बहुकता m वाला एक अभिलक्षणिक मूल हो,

जहाँ $A_0, A_1, \ldots, A_d$ अचर हैं।

प्रमेय 5: समीकरण (5) का विशेष हल, जबकि असमघात भाग ar^n हो, जहाँ a एक ज्ञात अचर है, निम्न रूप का होता है:

i) Ar^n, यदि r, (5) का एक अभिलक्षणिक मूल न हो;

ii) An^mr^n, यदि r, (5) का बहुकता m वाला एक अभिलक्षणिक मूल हो,

जहाँ A एक अचर है।

यहाँ हम इन परिणामों को सिद्ध नहीं करेंगे, परन्तु इनसे संबंधित कुछ उदाहरणों पर विचार करेंगे। आपको याद होगा कि इनमें से कुछ उदाहरणों को आप पिछली इकाइयों में देख चुके हैं।

उदाहरण 6: भाग 7.2 की समस्या 3 में दी गई पुनरावृत्ति, अर्थात् $L_n = L_{n-1} + n, n \geq 2$, जहाँ $L_1 = 2$, का हल ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ आप देख सकते हैं कि सिर्फ़ 1 ही इस पुनरावृत्ति का अभिलक्षणिक मूल है। अतः इस पुनरावृत्ति के समघात भाग का व्यापक हल केवल $a \cdot 1^n = a$ है, जहाँ a एक अचर है।

अब, इस पुनरावृत्ति का असमघात भाग n है। अतः, प्रमेय 4(ii) के अनुसार $m = 1$ और $d = 1$ के लिए, इस पुनरावृत्ति का विशेष हल

$A_0n + A_1n^2, A_0, A_1 \in C,$

के रूप का होता है।

A_0 और A_1 के मान मालूम करने के लिए, पुनरावृत्ति संबंध में $L_n = A_0n + A_1n^2$ लेने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{aligned} A_0n + A_1n^2 &= A_0(n-1) + A_1(n-1)^2 + n \\ &= (-A_0 + A_1) + (A_0 - 2A_1 + 1)n + A_1n^2 \end{aligned}$$

अचर पदों और n के गुणांकों की तुलना करने पर हम देखते हैं कि

$0 = -A_0 + A_1, A_0 = A_0 - 2A_1 + 1.$

इसलिए, $A_0 = A_1 = \frac{1}{2}$.

$\therefore L_n = a + \frac{n(n+1)}{2}$.

ंभिक प्रतिबंध $L_1 = 2$ से यह पता चलता है कि $a = 1$, जिससे कि

$= 1 + \frac{n(n+1)}{2}$, $n \geq 1$.

* * *

ाहरण 7: रानी R रुपया ऋण के रूप में लेती है जिसका भुगतान उसे T महीनों में करना है। ै I ऋण का मासिक ब्याज दर हो, तो प्रत्येक अवधि के अंत में उसे कितना अचर भुगतान P ना होगा ?

: मान लीजिए nवें महीने के अंत में, अर्थात् nवें भुगतान के बाद, रानी के ऊपर ऋण a_n बचा ता है। तब समस्या को

$_{+1} = a_n + Ia_n - P, 0 \leq n \leq T - 1, a_0 = R, a_T = 0$

रूप में लिखा जा सकता है। इसके समघात भाग का हल $b(1 + I)^n$ प्राप्त होता है, जहाँ b एक र है।

1 पर प्रमेय 5(i) को लागू करने पर हम पाते हैं कि असमघात भाग का हल एक अचर, मान जिए A है।

न्तु, अपने पुनरावृत्ति संबंध में $a_n = A$ रखने पर हमें

$= A(1 + I) - P \Rightarrow A = P/I$ मिलता है।

तरह, $a_n = b(1 + I)^n + P/I$.

$a_0 = R \Rightarrow b + P/I = R \Rightarrow b = R - P/I$.

थ ही, $a_T = 0 \Rightarrow b(1 + I)^T + P/I = 0$

$$P = \frac{IR(1+I)^T}{[1 - (1+I)^T]}$$

* * *

ाहरण 8: पुनरावृत्ति $u_n = au_{n-1} + c \cdot a^n, n \geq 1$ (जहाँ a और c ज्ञात अचर हैं) को हल जिए।

: प्रमेय 5 को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है कि

$= Aa^n + Bna^n$, जहाँ A और B अचर हैं।

$= a^n(A + Bn)$, जहाँ $n \geq 0$.

* * *

आपके लिए कुछ साधारण प्रश्न।

) भाग 7.2 की समस्या 2 की पुनरावृत्ति $T_n = 2T_{n-1} + 1, n \geq 2$, जहाँ $T_1 = 1$, को हल कीजिए।

) एक झील में रह रहे एक स्पीशीज़ के घोंघों की संख्या प्रति वर्ष तिगुनी हो जाती है। शुरू में 1000 घोंघों को झील में डालकर अगले साल उनसे 1500 घोंघें प्राप्त होते हैं। इनमें से 200 घोंघों को हटाकर दूसरे झीलों में संख्या बढ़ाने के लिए डाल दिया जाता है।

इसी प्रकार, प्रत्येक वर्ष के अंत में 200 घोंघे निकाल लिए जाते हैं। यदि a_n, n वर्षों बाद झील में घोंघों की संख्या को प्रकट करता हो, तो $a_n, n \geq 0$, के लिए एक पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात कीजिए और उसे हल कीजिए।

आइए अब हम एक ऐसे परिणाम पर गौर करें जिससे ऐसी पुनरावृत्तियों का विशेष हल मालूम हो सकता है जिनका असमघात भाग n^d और r^n (जहाँ r अचर है) का एकघात संचय है।

प्रमेय 6 (अध्यारोपण सिद्धांत): यदि $\{a_n\}$,

$u_n = c_1u_{n-1} + c_2u_{n-2} + \dots + c_ku_{n-k} + g_1(n)$

का एक हल हो, और $\{b_n\}$

$u_n = c_1u_{n-1} + c_2u_{n-2} + \dots + c_ku_{n-k} + g_2(n)$

का एक हल हो, तो

$Aa_n + Bb_n$, जहाँ A और B अचर हैं,

$u_t = c_1u_{n-1} + \dots + c_ku_{n-k} + Ag_1(n) + Bg_2(n)$

का एक हल होगा।

उपपत्तिः $n \ge k$ के लिए, $Aa_n + Bb_n$

$= A[c_1a_{n-1} + \dots + c_ka_{n-k} + g_1(n)] + B[c_1b_{n-1} + \dots + c_kb_{n-k} + g_2(n)]$

$= c_1(Aa_{n-1} + Bb_{n-1}) + \dots + c_k(Aa_{n-k} + Bb_{n-k}) + \{Ag_1(n) + Bg_2(n)\}$.

इसका अर्थ है कि $Aa_n + Bb_n$, (5) का एक हल है, जहाँ $g(n) = Ag_1(n) + Bg_2(n)$.

प्रमेय 6 के अनुसार हम प्रमेयों 4 और 5 को संयोजित करके निम्नलिखित पुनरावृत्ति जैसी असमघात पुनरावृत्तियों के हल प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 9: पुनरावृत्ति $v_n - 7v_{n-1} + 12v_{n-2} = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n, n \ge 2$,

का व्यापक हल प्राप्त कीजिए।

हलः चूंकि यहाँ कोई प्रारंभिक प्रतिबंध नहीं है और समीकरण द्वितीय कोटि वाला है, इसलिए हम केवल दो अचरों वाले व्यापक हल की ही आशा कर सकते हैं।

सबसे पहले हम देखते हैं कि समघात भाग $v_n - 7v_{n-1} + 12v_{n-2} = 0$ का अभिलक्षणिक बहुपद $z^2 - 7z + 12$, अर्थात् $(z-3)(z-4)$ है। अतः इसका व्यापक हल $a \cdot 3^n + b \cdot 4^n$ के रूप का होगा, जहाँ $a, b \in C$.

आइए, अब हम असमघात भाग लें। इसमें दो पद हैं जिसमें से एक पद एक अभिलक्षणिक मूल का घात है। प्रमेयों 5 और 6 के अनुसार, विशेष हल प्राप्त करने के लिए हमें $v_n = c \cdot 2^n + dn \cdot 3^n$ लेना होगा।

ऐसा करने पर पुनरावृत्ति संबंध से हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है :

$2^{n-2}c(4 - 14 + 12) + 3^{n-2}d[9n - 21(n-1) + 12(n-2)] = 5 \cdot 2^n - 4 \cdot 3^n$

$\Rightarrow 2^{n-1}(c - 10) = 3^{n-1}(d - 12)$

चूंकि यह समता सभी $n \ge 1$ के लिए मान्य है, हम देखते हैं कि $2^{n-1} \mid (d-12) \; \forall \, n \ge 1$. यह तभी हो सकता है जबकि $d - 12 = 0$, अर्थात् $d = 12$. और तब $c - 10 = 0$, यानी $c = 10$.
इन सभी तथ्यों को एक साथ लेने पर हमें प्राप्त होता है कि

$v_n = 10 \cdot 2^n + (a + 12n)3^n + b \cdot 4^n$, जहाँ $a, b \in C$.

* * *

आइए हम प्रमेय 6 को एक क्षण के लिए लौटें। क्या अध्यारोपण सिद्धांत रैखिक समघात पुनरावृत्तियों के लिए भी लागू हो सकता है ? वास्तव में, यह लागू होता है, और इस बात का इस्तेमाल हम कई बार कर चुके हैं। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसी पुनरावृत्तियों के लिए इसे हमने पहली बार कहाँ लागू किया है ?

E7) यदि पुनरावृत्ति $u_n + c_1u_{n-1} + c_2u_{n-2} = an + b$ का एक व्यापक हल $u_n = A \cdot 2^n + B \cdot 5^n + 3n - 5$ हो, तो a, b, c_1 और c_2 ज्ञात कीजिए।

E8) पुनरावृत्ति $v_n - 7v_{n-1} + 16v_{n-2} - 12v_{n-3} = 2^n + 3^n$ को हल कीजिए, जहाँ प्रारंभिक पद $v_0 = 1, v_1 = 0, v_2 = 1$ हैं।

अभी तक हमने देखा है कि किस प्रकार (5) को हल किया जाता है जबकि $g(n)$, an^d, ar^n या इस प्रकार के पदों के एकघात संचय के रूप का है। आइए अब एक और प्रकार के असमघात भाग पर चर्चा करें।

प्रमेय 7: समीकरण (5) का विशेष हल, जबकि असमघात भाग an^dr^n हो, (जहाँ a और r ज्ञात अचर हैं और $d \in N$) निम्नलिखित रूप का होता है :

i) $Ar^n (A_0 + A_1n + ... + A_d n^d)$, यदि न तो r और न ही 1 (5) के अभिलक्षणिक मूल हों;

ii) $An^m r^n (A_0 + A_1 n + ... + A_d n^d)$, यदि या तो r या 1 (परन्तु दोनों नहीं) (5) का बहुकता m वाला एक अभिलक्षणिक मूल हो;

iii) $An^{m_1 + m_2}r^n (A_0 + A_1n + ... + A_d n^d)$, यदि r और 1 दोनों ही (5) के अभिलक्षणिक मूल हों, बहुकताओं क्रमशः m_1 और m_2 के साथ

जहाँ $A, A_0, A_1, ..., A_d$ अचर हैं।

पहले की तरह, यहाँ भी हम इस परिणाम को सिद्ध नहीं करेंगे। हम केवल इस परिणाम को लागू करने के कुछ उदाहरण देखेंगे।

उदाहरण 10: अचर गुणांकों वाली एक ऐसी रैखिक समघात पुनरावृत्ति ज्ञात कीजिए जिसके अभिलक्षणिक मूल 1, –1 और 2 हों, बहुकता क्रमशः 2, 3 और 5 के साथ। आगे, मान लीजिए कि असमघात भाग $n(-1)^n$, $n^2 . 2^n$ और 3^n का एकघात संचय और घात तीन वाले एक बहुपद का जोड़ है।

हल: हम 10 अभिलक्षणिक मूल वाले पुनरावृत्ति को हल करना चाहते हैं। अतः यह

$$u_n = c_1u_{n-1} + ... + c_{10}u_{n-10} + (a_0 + a_1n + a_2n^2 + a_3n^3) + bn (-1)^n + c \cdot n^2 2^n + d \cdot 3^n$$

के रूप का है, जहाँ हम जानते हैं कि समघात भाग का अभिलक्षणिक बहुपद

$(z-1)^2 (z+1)^3 (z-2)^5$ है,

अर्थात् $z^{10} - c_1z^9 - ... - c_9 z - c_{10} = (z-1)^2 (z+1)^3 (z-2)^5$.

अतः प्रमेय 1 के अनुसार समघात भाग के व्यापक हल का रूप होगा

$$(A_0 + A_1n) \cdot 1^n + (B_0 + B_1n + B_2n^2) (-1)^n + (C_0 + C_1n + ... + C_4n^4)2^n, \qquad (6)$$

जहाँ सभी A, B और C अचर हैं।

अब, प्रमेय 4 से आप जानते हैं कि त्रिघाती बहुपद के संगत विशेष हल का रूप

$n^2 (D_0 + D_1n + D_2n^2 + D_3n^3)$ है, जहाँ सभी D अचर हैं।

प्रमेय 7 से आप जानते हैं कि $bn (-1)^n$ के संगत हल का रूप $n^5(-1)^n (E_0 + E_1n)$ होता है, और

$cn^2 . 2^n$ के संगत हल का रूप $n^7 2^n (F_0 + F_1n + F_2n^2)$ होता है, जहाँ सभी E और F अचर हैं।

प्रमेय 5 से आप जानते हैं कि $d . 3^n$ के संगत हल का रूप $G \cdot 3^n$ है, जहाँ G एक अचर है। इस तरह, विशेष हल निम्नलिखित रूप का होगा :

$$n^2 (D_0 + D_1n + D_2n^2 + D_3n^3) + n^5(-1)^n (E_0 + E_1n) + n^7(2^n) (F_0 + F_1n + F_2n^2) + G(3)^n \quad (7)$$

अतः पूरा हल (6) और (7) के व्यंजकों का योगफल है।

* * *

अब इसी तरह का एक प्रश्न आपके लिए।

E9) अचर गुणांकों वाला एक ऐसा पुनरावृत्ति संबंध ज्ञात कीजिए जिसके अभिलक्षणिक मूल 3 और -2 हों, बहुकता क्रमशः 1 और 2 के साथ। इस संबंध का एक असमघात भाग भी है जो कि 2^n, $n(-1)^n$ और घात 2 वाला एक बहुपद का एकघात संचय है।

इस भाग में हमने कुछ विशेष प्रकार की असमघात पुनरावृत्तियों को हल करने की कुछ व्यापक विधियों पर चर्चा की है। इनका अध्ययन करते समय इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि असमघात भाग का हल इस बात पर निर्भर करता है कि पुनरावृत्ति का अभिलक्षणिक मूल का पद इस भाग में है या नहीं।

अब जबकि आप इस भाग और इकाई 8 का अध्ययन कर चुके हैं, तब क्या आप इकाई 7 में दिए गए सभी प्रश्नों को हल कर सकते हैं ? क्या 'फूट डालो और जीतो' समस्या को हल कर सकेंगे ? इस प्रश्न को तथा इस भाग में अध्ययन की गई पुनरावृत्तियों से अलग असमघात भाग वाली अन्य पुनरावृत्तियों को हल करने के लिए, हमें कुछ अन्य विधियों को देखने की आवश्यकता होती है। आइए अब हम यही बात करें।

9.4 कुछ अन्य विधियाँ

पिछले भाग में हमने दो प्रकार के असमघात भागों वाली रैखिक पुनरावृत्तियों का हल निकालने का तरीका देखा है। अनेक प्रकार की ऐसी पुनरावृत्तियाँ भी होती हैं। जिनका हल कुछ विशेष विधियों से किया जा सकता है। इस भाग में हम इनमें से चार विधियों पर ही चर्चा करेंगे।

9.4.1 निरीक्षण विधि (Method of Inspection)

पुनरावृत्ति को हल करने की एक सरल विधि है कि इसके अनुक्रम के कई सारे पदों को लिखते चले जाएं तब तक जब तक कि पदों को देखकर हल का अनुमान आसानी से लगाया जा सके। लेकिन, अगर अनुक्रम का पैटर्न बहुत स्पष्ट न हो एक अच्छा अनुमान सरलता से नहीं लगाया जा सकता। ज़्यादातर, अगर हम एक सही अनुमान यहाँ लगा लेते हैं, तो गणितीय आगमन नियम (देखिए इकाई 2) की सहायता से इस अनुमान को सिद्ध किया जा सकता है। आइए हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 11: पुनरावृत्ति संबंध $a_n = a_{n-1} + n!\,n,\ n \geq 1$ के लिए और $a_0 = 0$, को निरीक्षण विधि से हल कीजिए।

हल: यदि हम इस अनुक्रम के पहले पाँच पदों का परिकलन करें, तो हमें 0, 1, 5, 23 और 119 प्राप्त होते हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इस अनुक्रम का nवाँ पद क्या होगा ? क्या अनुक्रम के प्रत्येक पद में एक जोड़ देने से कुछ मदद मिलती है ? ऐसा करने से हमें एक ऐसा अनुक्रम प्राप्त होगा जिसे आप पहचान सकते हैं, अर्थात् $(n+1)!$. अतः हमारा प्रारंभिक अनुमान $a_n = (n+1)! - 1$ है।

अनुमान लगाने से संबद्ध पहले कदम के बाद आइए अब हम n पर आगमन नियम लागू करके इसे सिद्ध करने का प्रयास करें।

आधार स्थिति की जाँच सरलता से की जा सकती है :

$a_0 = (0+1)! - 1 = 0.$

यदि हम $n = k$ के लिए परिणाम को मान लेते हैं, जहाँ $k \geq 0$, तब

$$a_{k+1} = a_k + (k+1)!\,(k+1) = [(k+1)! - 1] + (k+1)!\,(k+1)$$

$$= (k+1)!\,(k+2) - 1 = (k+2)! - 1,$$ जैसा कि हमने आशा की थी।

इस तरह हमने आगमन द्वारा उपपत्ति पूरी की है, और अपना अनुमान सिद्ध कर दिया है।

* * *

अब आपके लिए एक अभ्यास।

E10) निरीक्षण विधि से निम्नलिखित पुनरावृत्ति को हल कीजिए :

$b_n = b_{n-1} + 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$, जहाँ $n \geq 1$ और $b_0 = 0$.

आइए अब पुनरावृत्तियों को हल करने की एक और विधि पर चर्चा करें।

9.4.2 टेलिस्कोपी योगफल (Method of Telescoping Sums)

यह विधि $u_n = u_{n-1} + g(n)$ के रूप की पुनरावृत्तियों को हल करने में उपयोगी होती है, विशेष रूप से जबकि $\sum_{n=1}^{k} g(n)$ को सरलता से ज्ञात किया जा सकता है। अधिक व्यापक तौर पर, श्रेणियों के योगफलों और गुणनफलों का मान ज्ञात करने में इस विधि का प्रयोग किया जा सकता है।

यह टेलिस्कोपी (या अंतःसर्पी) विधि इस तथ्य पर आधारित है कि जिस श्रेणी का nवाँ पद $a_n - a_{n-1}$ के रूप का है, उसके प्रथम N पदों का योगफल

$(a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + \ldots + (a_{N-1} - a_{N-2}) + (a_N - a_{N-1}) = a_N - a_0$ होता है।

ठीक इसी प्रकार, जिस श्रेणी का nवाँ पद a_n / a_{n-1} है, उसके प्रथम N पदों का गुणनफल केवल a_N / a_0 होता है, बशर्ते कोई भी a_k शून्य न हो।

$\sum_i [f(i+1) - f(i)]$ को टेलिस्कोपी इसलिए कहते हैं क्योंकि किसी बैठे हुए दूरबीन की मोटाई उसके बाह्यतः ट्यूब की बाहरी त्रिज्या और अन्तरतः ट्यूब की भीतरी त्रिज्या का अंतर है

हालांकि यह विधि आसान लगती है, इसे कई बार लागू नहीं किया जा सकता, और कई दफा जब लागू किया भी जा सकता है तो यह पता लगाना आसान नहीं होता कि इसे लागू किया कैसे जाए। आइए यहाँ हम कुछ ऐसे उदाहरण लें जहाँ यह विधि आसानी से लागू की जा सकती है।

उदाहरण 12: निम्नलिखित रैखिक पुनरावृत्ति को हल कीजिए :

$a_n - a_{n-1} = \mathcal{F}_{n+2} \cdot \mathcal{F}_{n-1}$, $n \geq 1$,

जहाँ $a_0 = 2$ और $\mathcal{F}_i$, iवें फिबोनाची संख्या को प्रकट करता है।

हल: उदाहरण 2 से हम जानते हैं कि

$$\mathcal{F}_{n+2} \cdot \mathcal{F}_{n-1} = (\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n)(\mathcal{F}_{n+1} - \mathcal{F}_n) = \mathcal{F}_{n+1}^2 - \mathcal{F}_n^2.$$

अतः, पुनरावृत्ति में $n = 1, 2, \ldots$ रखने पर, हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं।

$$\begin{aligned}
a_1 - a_0 &= \mathcal{F}_2^2 - \mathcal{F}_1^2 \\
a_2 - a_1 &= \mathcal{F}_3^2 - \mathcal{F}_2^2 \\
a_3 - a_2 &= \mathcal{F}_4^2 - \mathcal{F}_3^2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots \\
a_n - a_{n-1} &= \mathcal{F}_{n+1}^2 - \mathcal{F}_n^2
\end{aligned}$$

इन समीकरणों को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$a_n - a_0 = \mathcal{F}_{n+1}^2 - \mathcal{F}_1^2$

$\Leftrightarrow a_n = 2 + \mathcal{F}_{n+1}^2 - 1 = \mathcal{F}_{n+1}^2 + 1.$

* * *

अगले उदाहरण से आप अवश्य परिचित होंगे। आपको भाग 8.2 से याद होगा कि σ_n^k प्रथम n धन पूर्णांकों के kवें घातों के योगफल को प्रकट करता है।

उदाहरण 13: σ_n^1, σ_n^2 और σ_n^3 का अभिकलन कीजिए।

हल: σ_n^1 ज्ञात करने के लिए हम $k = 1$ से $k = n$ तक सर्वसमिका $(k+1)^2 - k^2 = 2k + 1$ के दोनों पक्षों को जोड़ते हैं। ऐसा करने पर हमें प्राप्त होता है

$$(n+1)^2 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \{(k+1)^2 - k^2\} = 2\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1 = 2\sigma_n^1 + n.$$

$\therefore \sigma_n^1 = n(n+1)/2.$

आइए अब हम σ_n^2 और σ_n^3 ज्ञात करें।

$k = 1$ से $k = n$ तक सर्वसमिकाओं $(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$ और $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ के दोनों पक्षों को जोड़ने पर हमें प्राप्त होता है

$$(n+1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \{(k+1)^3 - k^3\} = 3\sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1.$$

$$= 3\sigma_n^2 + 3\sigma_n^1 + n, \quad \text{और}$$

$$(n+1)^4 - 1 = \sum_{k=1}^{n} \{(k+1)^4 - k^4\} = 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 4\sigma_n^3 + 6\sigma_n^2 + 4\sigma_n^1 + n.$$

इन समीकरणों में से पहले को लेने पर और ऊपर प्राप्त किए गए σ_n^1 के मान को प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होता है

$\sigma_n^2 = n(n+1)(2n+1)/6.$

दूसरे समीकरण में σ_n^1 और σ_n^2 के मानों को प्रतिस्थापित करने पर अब हमें प्राप्त होता है

$\sigma_n^3 = \{n(n+1)/2\}^2.$

* * *

ऊपर दिए गए उदाहरण को पढ़ते वक़्त आपको लगा होगा कि σ_n^1 को एक ज़्यादा आसान तरीके से निकाला जा सकता है। परन्तु, टेलिस्कोपी योगफलों का प्रयोग करने का लाभ यह है कि k के बड़े मानों पर भी σ_n^k का अभिकलन करने में इसे लागू किया जा सकता है न कि आसान तरीके को।

अब आप $\sigma_n^k, k \geq 1$ के लिए, व्यापक सूत्र प्राप्त कीजिए।

E11) अनुक्रम $\{\sigma_n^k\}_k$ द्वारा संतुष्ट एक पुनरावृत्ति संबंध प्राप्त कीजिए, और इस तरह σ_n^4 को अभिकलित कीजिए।

आइए अब हम इकाई 7 के समस्या 7 पर चर्चा करें, अर्थात् k प्रतीकों पर अपविन्यासों (derangements) की संख्या d_k की बात करें।

उदाहरण 14: निम्नलिखित पुनरावृत्ति को हल कीजिए:

$d_k = k\,d_{k-1} + (-1)^k$, यदि $k \geq 2$, जहाँ $d_1 = 0$.

हल: पुनरावृत्ति को देखने से नहीं लगता कि हम इसे हल करने के लिए टेलिस्कोपी योगफल-विधि को लागू कर सकेंगे। परन्तु, इसमें थोड़ा सा परिवर्तन करके इसे हम एक उपयुक्त रूप में लिख सकते हैं। इसके लिए हम प्रत्येक पद को k! से भाग देते हैं, जिससे कि समीकरण

$$\frac{d_k}{k!} - \frac{d_{k-1}}{(k-1)!} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

हो जाता है।

अब हम इस विधि को लागू कर सकते हैं क्योंकि पद ऐसे हैं कि यदि हम $k = 2$ से $k = n$ तक समीकरणों को लिखें और उन्हें जोड़ें तो अधिकांश पद कट जाएंगे। और, केवल निम्नलिखित पद बचे रहेंगे।

$$\frac{d_n}{n!} - \frac{d_1}{1!} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

इसलिए,

$$d_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},\ n \geq 1.$$

* * *

अगले उदाहरण में हम देखेंगे कि 'टेलिस्कोपी गुणनफलों' (telescoping products) से पुनरावृत्तियों को कैसे हल किया जा सकता है।

उदाहरण 15: पुनरावृत्ति $a_n = n^3 a_{n-1}, n \geq 1, a_0 = 2$ को हल कीजिए।

हल: आइए हम समीकरण $\frac{a_k}{a_{k-1}} = k^3$ में $k = 1, 2, \ldots, n$ लें। (यहाँ ध्यान दें कि $a_n \neq 0\ \forall\ n$.)

तब हमें प्राप्त होता है

$$\frac{a_1}{a_0} = 1^3$$
$$\frac{a_2}{a_1} = 2^3$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = n^3.$$

इन समीकरणों को गुणा करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{a_n}{a_0} = (n!)^3$$
$$\Rightarrow a_n = 2(n!)^3$$

* * *

ऊपर दिए गए उदाहरण के तकनीक का इस्तेमाल

$$a_n = f(n)\, a_{n-1} + g(n),\ \text{जहाँ } f(n) \neq 0\ \forall\ n,$$

के रूप के असमघात पुनरावृत्तियों के हल निकालने के लिए भी किया जा सकता है।

आइए इसका एक उदाहरण लें।

उदाहरण 16: $u_n = \frac{1}{n} u_{n-1} + \frac{1}{n!},\ n \geq 1,\ u_0 = 1$, को हल कीजिए।

हल: इस पुनरावृत्ति का समघात भाग $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{1}{n}$ है। टेलिस्कोपी गुणनफल विधि से हम पाते हैं कि

$$a_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n-1} \cdots \frac{1}{1} = \frac{1}{n!}.$$

अब, मान लीजिए कि दिए हुए पुनरावृत्ति का हल $u_n = a_n b_n$ के रूप का है, जहाँ $b_0 = 1$. तब

$$a_n b_n = \frac{1}{n} a_{n-1}\, b_{n-1} + \frac{1}{n!}$$
$$= a_n b_{n-1} + \frac{1}{n!},\ \text{क्योंकि } a_n = \frac{1}{n} a_{n-1}$$

यह विधि यहाँ लागू की जा सकती है क्योंकि $\frac{1}{n} \neq 0\ \forall\ n \geq 1$.

$\Rightarrow b_n = b_{n-1} + \dfrac{\frac{1}{n!}}{a_n} = b_{n-1} + 1$, क्योंकि $a_n = \dfrac{1}{n!}$

अब हम टेलिस्कोपी योगफल विधि से पुनरावृत्ति $b_n = b_{n-1} + 1, b_0 = 1$, को हल कर सकते हैं। हम पाते हैं कि

$b_n = n + 1.$

अतः, $u_n = a_n b_n = \dfrac{n+1}{n!}$.

* * *

क्या आप स्पष्ट रूप से बता सकते हैं कि हम उदाहरण 16 में किन चरणों से गुज़रे हैं ? पुनरावृत्ति $u_n = f(n)\, u_{n-1} + g(n)$ का हल मालूम करने में निम्नलिखित चरण शामिल हैं :

चरण 1: जाँच करें कि $f(n) \neq 0 \;\forall\, n$ वरना यह विधि लागू नहीं की जा सकती।

चरण 2: पुनरावृत्ति के समघात भाग का हल $\{a_n\}$ निकालिए। तब

$$a_n = f(n) a_{n-1} \;\forall\, n \geq 1.$$

चरण 3: मान लीजिए कि दी हुई पुनरावृत्ति का हल $u_n = a_n b_n$ के रूप का है। तब

$$\begin{aligned} a_n b_n &= f(n)\, a_{n-1}\, b_{n-1} + g(n) \\ &= a_n b_{n-1} + g(n) \end{aligned}$$

अतः, $b_n = b_{n-1} + g(n)/a_n$.

यहाँ पर हम इस बात का इस्तेमाल करते हैं कि $f(n) \neq 0 \;\forall\, n$. (कैसे ?)

चरण 4: पुनरावृत्ति $b_n = b_{n-1} + \dfrac{g(n)}{a_n}$ को हल करें, किसी भी उपयुक्त विधि से।

चरण 5: तब दी हुई पुनरावृत्ति का हल $u_n = a_n b_n$ है।

अब आप कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E12) दिखाइए कि $C(2n, n)$ पुनरावृत्ति

$$x_n = \frac{2(2n-1)}{n}\, x_{n-1},\; n \geq 1,$$

का एक हल है।

E13) अंतःसर्पी योगफल और गुणनफल विधि से पुनरावृत्ति
$a_n = n^3 a_{n-1} + (n!)^2$, यदि $n \geq 1$ और $a_0 = 1$,
को हल कीजिए।

E14) पुनरावृत्ति $a_n = (n!n)\, a_{n-1},\; n \geq 1,\; a_0 = 5$, को हल कीजिए।

आइए अब हम देखें कि एक अनंत श्रेणी का योगफल निकालने में अंतःसर्पी योगफलों का प्रयोग किस प्रकार किया जा सकता है। हालांकि यह पुनरावृत्ति संबंधों का उदाहरण नहीं है, फिर भी आप इससे भांप सकते हैं कि विभिन्न स्थितियों में इस विधि को किस प्रकार लागू किया जा सकता है।

उदाहरण 17: टेलिस्कोपी योगफल-विधि से निम्नलिखित अनंत श्रेणी का योगफल ज्ञात कीजिए :

$$\frac{3}{1.2.3} + \frac{5}{2.3.4} + \frac{7}{3.4.5} + \ldots + \frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)} + \ldots .$$

हलः टेलिस्कोपी योगफल विधि में अनुक्रम के nवें पद को उत्तरोत्तर पदों के अंतर में व्यक्त किया जाता है। इसे हम यहाँ तब लागू कर सकते थे जबकि इस श्रेणी के nवें पद का हर केवल दो पदों का गुणनफल होता। लेकिन, कोई बात नहीं ! चलिए इस तकनीक का विस्तार करें।

हर में तीन पद होने की वजह से सबसे पहले हम nवें पद को आंशिक भिन्न के रूप में व्यक्त करते हैं :

$$\frac{2n+1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{3/2}{n+2}.$$

अब यदि a_i श्रेणी के iवें पद को प्रकट करता हो, तो

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ &= \left(\frac{1/2}{1} + \frac{1}{2} - \frac{3/2}{3}\right) + \left(\frac{1/2}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3/2}{4}\right) + \left(\frac{1/2}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3/2}{5}\right) \\ &\quad + \ldots + \left(\frac{1/2}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{3/2}{n+2}\right) \end{aligned}$$

चूंकि $\frac{-3/2}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1/2}{n} = 0$, इसलिए इस प्रकार के पदों के कटने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1/2}{1} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1/2}{2}\right) + \left(\frac{-3/2}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{3/2}{n+2}\right) \\ &= \frac{5}{4} - \frac{1/2}{n+1} - \frac{3/2}{n+2}. \end{aligned}$$

इसलिए श्रेणी का जोड़ होगा

$$S = \lim_{n \to \infty} S_n = 5/4.$$

* * *

अब आप कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E15) इस उपभाग में दी गई विधियों से पुनरावृत्ति $nx_n = (n-2)\,x_{n-1} + 1,\ n \geq 1$, जहाँ $x_0 = 0$, को हल कीजिए!

E16) टेलिस्कोपी योगफल विधि से निम्नलिखित फिबोनाची सर्वसमिकाओं को हल कीजिए :

क) $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k = \mathcal{F}_{n+2} - 1$;

ख) $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_{2k-1} = \mathcal{F}_{2n}$;

ग) $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k^2 = \mathcal{F}_n \mathcal{F}_{n+1}$;

घ) $\sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{F}_k / (\mathcal{F}_{k-1} \mathcal{F}_{k+1}) = 2$;

ङ) $\sum_{k=2}^{\infty} (\mathcal{F}_{k-1} \mathcal{F}_{k+1})^{-1} = 1$.

और अब हम पुनरावृत्तियों को हल करने के लिए एक अन्य सामान्य विधि पर चर्चा करेंगे।

9.4.3 आवर्तन विधि (Method of Iteration)

आवर्तन का अर्थ है दोहराना। और यही करते हैं हम इस विधि में। पुनरावृत्ति समीकरण का बार-बार प्रयोग करके हम nवें पद को पिछले $(n-1)$ पदों $u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$ में से कुछ के व्यंजक के रूप में उत्तरोत्तरतः व्यक्त करते हैं। ऐसा करते वक़्त हम एक ऐसा पैटर्न ढूंढने की कोशिश करते हैं जिसकी मदद से हम u_n को स्पष्टतः n के फलन के रूप में लिख सकते हैं।

आइए इससे संबंधित एक उदाहरण लें।

उदाहरण 18: $u_n = 2u_{n-1} + 2^n - 1$, जहां $n \geq 1$ और $u_0 = 0$,

द्वारा दिए गए पुनरावृत्ति संबंध को हल कीजिए।

हलः पुनरावृत्ति समीकरण में n के बदले $n-1$, $n-1$ के बदले $n-2$, ... आदि प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$$\begin{aligned}
u_n &= 2\,u_{n-1} + 2^n - 1\\
&= 2(2\,u_{n-2} + 2^{n-1} - 1) + 2^n - 1\\
&= 2^2\,u_{n-2} + 2.2^n - (1+2)\\
&= 2^2(2\,u_{n-3} + 2^{n-2} - 1) + 2.2^n - (1+2)\\
&= 2^3\,u_{n-3} + 3.2^n - (1+2+2^2)\\
&\ \ \vdots\\
&= 2^n\,u_0 + n\cdot 2^n - (1+2+2^2+\dots+2^{n-1})\\
&= (n-1)2^n + 1, \text{ क्योंकि } 1+2+2^2+\dots+2^{n-1} = \frac{2^n-1}{2-1}.
\end{aligned}$$

* * *

ऊपर के उदाहरण में, हमने पुनरावृत्ति संबंध से शुरू किया और nवें पद को n के व्यंजक में प्राप्त किया। सैद्धांतिक तौर पर हम यह विधि सदा लागू कर सकते हैं। परन्तु, कभी-कभी इसका अभिकलन काफ़ी जटिल हो जाता है। इसलिए इसे हमेशा लागू करना सरल नही होता।

अब आप इस विधि से संबंधित एक प्रश्न कीजिए। इसमें आपको अभिकलन करने में कोई कठिनाई नहीं होनी चाहिए। वल्कि इसे हल करने के लिए जो विधि आपने पहले लागू की थी उसके मुकाबले में शायद आपको यह विधि ज़्यादा आसान लगे।

E17) आवर्तन विधि से पुनरावृत्ति $u_n = \frac{1}{n}u_{n-1} + \frac{1}{n!}$, $n \geq 1$, $u_0 = 1$, को हल कीजिए।

आइए अब हम एक ऐसा उदाहरण लें जिसे आवर्तन से हल किया जा सकता है, या पहले a_k के लिए पुनरावृत्ति को हल करके और तब श्रेणी का जोड़ करके हल किया जा सकता है। आइए हम इसे पहली विधि से हल करें।

उदाहरण 19: उस श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका kवां पद a_k पुनरावृत्ति $a_k = 3a_{k-1} + 1$ को संतुष्ट करता है और जिसका प्रारंभिक पद $a_1 = 2$ है।

हलः पुनरावृत्ति से हम पाते हैं कि

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} &= \sum_{k=1}^{n-1} a_k + (3a_{n-1} + 1)\\
&= \sum_{k=1}^{n-2} a_k + (1+3)(3a_{n-2} + 1) + 1\\
&= \sum_{k=1}^{n-3} a_k + (1+3+3^2)(3a_{n-3} + 1) + \{1 + (1+3)\}\\
&= \sum_{k=1}^{n-4} a_k + (1+3+3^2+3^3)(3a_{n-4} + 1) + \{1 + (1+3) + (1+3+3^2)\}\\
&\ \ \vdots\\
&= a_1 + (1+3+\dots+3^{n-2})(3a_1 + 1) + \{1 + (1+3) + \dots + (1+3+\dots+3^{n-3})\}\\
&= 2(1+3+\dots+3^{n-1}) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(3^k - 1), \text{ क्योंकि } a_1 = 2 \text{ और } 1+3+\dots+3^{k-1} = \frac{3^k-1}{3-1}.\\
&= \frac{5.3^n - 3 - 2n}{4}
\end{aligned}$$

* * *

अब शायद आप इसी प्रकार के प्रश्न को हल करना चाहें।

E18) आवर्तन विधि से उस श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए जिसका kवाँ पद, u_k, पुनरावृत्ति $u_k = u_{k-1} + k$ को संतुष्ट करता है और जिसका प्रारंभिक पद $u_1 = 1$ है।

आइए अब हम इस भाग की चौथी विधि पर चर्चा करें।

9.4.4 प्रतिस्थापन विधि (Method of Substitution)

अभी तक हमने विभिन्न प्रकार की रैखिक और अरैखिक पुनरावृत्तियों को हल करने की अनेक विधियों पर चर्चा की है। परन्तु, कुछ ऐसी भी पुनरावृत्तियाँ हैं जिनके सामने हमारे सभी शस्त्र बेकार हो जाते हैं। उदाहरण के लिए, चर गुणांकों वाली कई सरल से सरल अरैखिक और रैखिक पुनरावृत्तियों को हल करने में ऊपर बतायी गई कोई भी विधि लागू नहीं होती। कुछ ऐसी स्थितियों में हम इस मुश्किल से बचने के लिए प्रतिस्थापन का सहारा ले सकते हैं।

प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग दी हुई पुनरावृत्ति को एक ऐसे रूप में परिवर्तित करने में किया जाता है जिसे पहले बतायी गई किसी विधि से तुरंत हल किया जा सकता है। जैसा कि शायद आप समझ गए होंगे, इस विधि का कठिन भाग है उपयुक्त प्रतिस्थापन का पता लगाना। आइए, इस विधि को समझने के लिए 'फूट डालो और जीतो' संबंधों से जुड़े कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण 20: इकाई 7 की समस्या 8 के पुनरावृत्ति संबंध, अर्थात् $a_n = a_{n/2} + 1$, $n = 2^k$ के लिए, जहाँ $k \geq 1$ और $a_1 = 0$, को हल कीजिए।

हल: आइए हम $a_{2^k} = u_k$ लें। इस प्रतिस्थापन से पुनरावृत्ति

$u_k = u_{k-1} + 1$, $u_0 = 0$, हो जाती है।

अब अंतःसर्पी योगफल विधि लागू करने पर हमें निम्नलिखित हल प्राप्त होता है :

$u_n = u_0 + n = n$, अर्थात् $a_{2^n} = n$, अर्थात् $a_m = \log_2 m$, जहाँ $m \geq 1$.

* * *

उदाहरण 21: भाग 7.4 में दिए गए 'मिलाना छांटना' से प्राप्त पुनरावृत्ति, अर्थात् $a_n = 2a_{n/2} + n - 1$, $n = 2^k$, $k \geq 1$, $a_1 = 0$, को हल कीजिए।

हल: पिछले उदाहरण की तरह, यहाँ भी हम $a_{2^k} = u_k$ रखते हैं। तब पुनरावृत्ति

$u_k = 2u_{k-1} + 2^k - 1$, $u_0 = 0$,

बन जाता है।

अब, उदाहरण 18 की तरह, हम पाते हैं कि

$u_k = (k-1)2^k + 1$,

अर्थात् $a_{2^k} = (k-1)2^k + 1$

अर्थात् $a_n = (\log_2 n - 1)n + 1$

* * *

अब कुछ पुनरावृत्तियाँ आपको हल करने के लिए।

E19) उपयुक्त प्रतिस्थापन के इस्तेमाल से पुनरावृत्ति

$$y_n = \frac{n-1}{n} y_{n-1} + \frac{1}{n}, n \geq 1, \text{ जहाँ } y_0 = 5,$$

E20) प्रतिस्थापन विधि से पुनरावृत्ति $t_n = 3t_{n/2} + n^2$, $t_1 = 2$, को हल कीजिए, और बताइए कि n के किन मानों पर प्रतिस्थापन मान्य होता है।

आइए, एक और उदाहरण लें, जिसे देखते ही लगता है कि प्रतिस्थापन तकनीक को लागू करने की आवश्यकता है।

उदाहरण 22: द्वितीय कोटि अरैखिक पुनरावृत्ति

$$x_n = \left(2\sqrt{x_{n-1}} + 3\sqrt{x_{n-2}}\right)^2, n \geq 2, \text{ और } x_0 = 1, x_1 = 4, \text{ को हल करें।}$$

हल: इस पुनरावृत्ति को देखने पर शायद आपको लगे कि अभी तक हमने इस प्रकार के समीकरण को हल करने के लिए कोई साधन विकसित नहीं किया है। आइए देखें कि हम इसे एक रैखिक पुनरावृत्ति में रूपांतरित कर सकते हैं या नहीं। क्या प्रतिस्थापन $y_n = \sqrt{x_n}$, $n \geq 0$, करने से हमें कोई फ़ायदा होगा ? (ध्यान दीजिए कि यह प्रतिस्थापन मान्य है क्योंकि प्रत्येक x_n ऋणेतर है।)

प्रतिस्थापन से पुनरावृत्ति रैखिक तो नहीं हो जाती, परन्तु इससे कम से कम वर्ग मूल प्रतीक से छुटकारा मिल जाता है, और प्रश्न अब

$y_n^2 = (2y_{n-1} + 3y_{n-2})^2, n \geq 2, y_0 = 1, y_1 = 2$

हो जाता है।

दोनों तरफ़ वर्ग मूल लेने पर, हम पाते हैं कि

$y_n = 2y_{n-1} + 3y_{n-2}, \; n \geq 2.$

यह अचर गुणांकों वाली एक द्वितीय कोटि की रैखिक पुनरावृत्ति है और इसे पहले बतायी गई विधियों से हल किया जा सकता है। हम आप पर यह सत्यापित करने के लिए छोड़ देते हैं कि इस पुनरावृत्ति का हल है

$y_n = A \cdot 3^n + B(-1)^n, n \geq 0$, जहाँ A, B अचर हैं।

प्रारंभिक प्रतिबंधों को लागू करने पर हम पाते हैं कि $A + B = 1$ और $3A - B = 2$, जिससे कि $A = 3/4$ और $B = 1/4$.

$$\therefore x_n = y_n^2 = \frac{\{3^{n+1} + (-1)^n\}^2}{16}, n \geq 0.$$

* * *

एक अंतिम उदाहरण के रूप में हम एक अन्य अरैखिक पुनरावृत्ति लेते हैं जिसके पदों के बीच एक चरघातांकी प्रकार का संबंध है।

उदाहरण 23: $x_n = x_{n-1}^7 / x_{n-2}^{12}$ द्वारा दी गई पुनरावृत्ति को हल कीजिए जहाँ प्रारंभिक प्रतिबंध $x_0 = 1$ और $x_1 = 2$ हैं।

हल: किसी भी सुविधाजनक आधार पर लघुगणक लेने पर (क्योंकि इस अनुक्रम में हम केवल धन संख्याएँ ही ले रहे हैं) दिए गए समीकरण का दक्षिण पक्ष एक ऐसे रूप का हो जाता है जिससे हम सरलता से निपट सकते हैं।

$\log_2 x_n = 7 \log_2 x_{n-1} - 12 \log_2 x_{n-2}.$

अब, मान लीजिए $y_n = \log_2 x_n$. तब अनुक्रम $\{y_n\}$ निम्नलिखित पुनरावृत्ति को संतुष्ट करता है :

$y_n - 7y_{n-1} + 12y_{n-2} = 0.$

इसके अभिलक्षणिक मूल 3 और 4 हैं।

अतः, $y_n = a \cdot 3^n + b \cdot 4^n, n \geq 0, a, b \in C.$

अब, प्रारंभिक प्रतिबंधों $x_0 = 1$ और $x_1 = 2$ से $y_0 = 0$ और $y_1 = 1$ प्राप्त होते हैं।

$y_n = a \cdot 3^n + b \cdot 4^n$ में $n = 0$ और 1 रखने पर $a = -1, b = 1$ प्राप्त होता है।

इसलिए, $y^n = 4^n - 3^n$.

इस तरह, $x_n = 2^{y_n} = 2^{4^n - 3^n}, n \geq 0$.

* * *

यहाँ आप देख सकते हैं कि ऊपर के उदाहरण में कोई भी आधार लेने पर अंतिम उत्तर में कोई अंतर नहीं आता, और आना भी नहीं चाहिए ! हमने आधार 2 इसलिए लिया था क्योंकि x_0 और x_1 दोनों ही 2 के घात हैं।

अब आप कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E21) $\sqrt{x_n} - 5\sqrt{x_{n-1}} + 6\sqrt{x_{n-2}} = 0, n \geq 2$, का हल ज्ञात कीजिए जहाँ $x_0 = 4$ और $x_1 = 25$.

E22) पुनरावृत्ति $x_n = 4n(n-1)\,x_{n-2} + \frac{5}{9} n!\,(3)^n, n \geq 2$, को हल कीजिए यदि $x_0 = 1$ और $x_1 = -1$.

E23) मान लीजिए $\{u_n\}$ असमघात पुनरावृत्ति

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + c_3 u_{n-3} + c_4 u_{n-4} + g(n)$$

को संतुष्ट करता है और इसकी संगत समघात पुनरावृत्ति का अभिलक्षणिक बहुपद $(z-2)(z-3)(z-4)^2$ है। आगे, मान लीजिए कि $\{g(n)\}$ अचर गुणांकों वाली 5 कोटि की रैखिक समघात पुनरावृत्ति को संतुष्ट करता है जिसका अभिलक्षणिक बहुपद $(z-2)^2(z-3)(z-5)^2$ है। तब u_n ज्ञात कीजिए।

E24) मान लीजिए $\{v_n\}$ द्वितीय कोटि पुनरावृत्ति

$$v_n + b_1 v_{n-1} + b_2 v_{n-2} = 5r^n$$

को संतुष्ट करता है, जहाँ b_1, b_2 और r अचर हैं। सिद्ध कीजिए कि यह अनुक्रम उस अचर गुणांकों वाली तृतीय कोटि समघात रैखिक पुनरावृत्ति को भी संतुष्ट करता है जिसका अभिलक्षणिक बहुपद $(z^2 + b_1 z + b_2)(z - r)$ है।

E25) मान लीजिए $\{x_n\}_{n \geq 0}$ और $\{y_n\}_{n \geq 0}$ पुनरावृत्ति $u_n + a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} = 0$ के दो हल हैं, जहाँ a_1 और a_2 अघर हैं।

क) दिखाइए कि $\{x_n y_n\}_{n \geq 0}$ अचर गुणांकों वाली तृतीय कोटि रैखिक समघात पुनरावृत्ति को संतुष्ट करता है।

ख) दिखाइए कि $\{x_{2n}\}_{n \geq 0}$ अघर गुणांकों वाली द्वितीय कोटि रैखिक समघात पुनरावृत्ति को संतुष्ट करता है।

E26) मान लीजिए कि धन वास्तविक संख्याओं a, b और r के लिए एक ऐसे $m \in N$ का अस्तित्व होता है जिससे कि $(a + bn)\,r^n < n!$, जहाँ $n \geq m$.

इसकी सहायता से सिद्ध कीजिए कि अचर गुणांकों वाली ऐसी कोई द्वितीय कोटि समघात रैखिक पुनरावृत्ति नहीं है जो कि अनुक्रम $\{n!\}$ से संतुष्ट होती हो।

इसके साथ ही हम पुनरावृत्तियों से संबंधित इस खंड और इकाई को समाप्त कर रहे हैं। इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए उसका संक्षिप्त विवरण देखें।

9.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों पर चर्चा की है।

1. अचर गुणांकों वाली रैखिक समघात पुनरावृत्ति

$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k},\ n \geq k,$

का हल

$$\sum_{j=1}^{m} \left[\sum_{i=0}^{t_j} b_{ij}\, c\,(i+n, i) \right] \alpha_j^n$$

है, जहाँ $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ बहुकता क्रमशः $t_1, \ldots, t_m$ वाले इस पुनरावृत्ति के अलग-अलग अभिलक्षणिक मूल हैं।

2. रैखिक असमघात पुनरावृत्ति का हल इसके समघात भाग के व्यापक हल और पूरी पुनरावृत्ति के विशेष हल का जोड़ होता है।

3. $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} + an^d,\ n \geq k,$ का विशेष हल

   $n^m (A_0 + A_1 n + \ldots + A_d n^d)$

   के रूप का होता है, जहाँ $m \geq 0$ समीकरण के अभिलक्षणिक मूल 1 की बहुक m है और सभी A_i अचर हैं। (यदि 1 अभिलक्षणिक मूल नहीं है, तो $m = 0$.)

4. $u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \ldots + c_k u_{n-k} + ar^n$

   का विशेष हल

   $An^m r^n$

   है, जहाँ $m \geq 0$ समीकरण के अभिलक्षणिक मूल के रूप में r की बहुकता है औ A एक अचर है।

5. $u_n = c_1 u_{n-1} + \ldots + c_k u_{n-k} + an^d r^n$

   का विशेष हल

   $n^{m_1 + m_2} r^n (A_0 + A_1 n + \ldots + A_d n^d)$

   के रूप का है, जहाँ $m_1 \geq 0$ और $m_2 \geq 0$ समीकरण के अभिलक्षणिक मूलों के रूप में क्रमशः r और 1 की बहुकताएँ हैं, और सभी A_i अचर हैं।

6. अचर गुणांकों वाली रैखिक पुनरावृत्तियों को हल करने की निरीक्षण विधि और अंतःसर्पी योगफल विधि।

7. अचर और चर गुणांकों वाली रैखिक पुनरावृत्तियों को हल करने की आवर्तन विधि और प्रतिस्थापन विधि।

9.6 हल/उत्तर

E1) अभिलक्षणिक समीकरण $z = 3$ है। अतः अभिलक्षणिक मूल 3 है बहुकता 1 के साथ। इसलिए, हल होगा

$a_n = b\,C\,(0+n, 0)\,.\,3^n;\ b \in \mathbb{C},$

अर्थात् $a_n = b\,3^n$.

E2) पुनरावृत्ति $u_n + c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} = 0$ का अभिलक्षणिक समीकरण $z^2 + c_1 z + c_2 = 0$ है।

हम यह भी जानते हैं कि इस समीकरण के मूल $1+i$ और $1-i$ हैं।

अतः, MTE-04 से आप जानते हैं कि $(-c_1)$ इसके अभिलक्षणिक मूलों का योगफल है, अर्थात् 2, और c_2 इन मूलों के गुणनफल, अर्थात् 2, के बराबर होता है। $\therefore c_1 = -2,\ c_2 = 2.$

E3) दी हुई पुनरावृत्ति का अभिलक्षणिक समीकरण है

$z^3 - z^2 - z + 1 = (z-1)^2(z+1) = 0.$

इसलिए, $P_n^2 = (an + b) + c(-1)^n, n \geq 0,$ जहाँ a, b, c अचर हैं। प्रारंभिक प्रतिबंध $a + b - c = 0, 2a + b + c = 1$ और $3a + b - c = 1$ हैं। अतः

$P_n^2 = \frac{2n - 1 + (-1)^n}{4}, n \geq 0.$

E4) कथनः 1) यदि $\{a_n\}$ और $\{b_n\}$ असमघात पुनरावृत्ति

$$u_n = f_1(n)\, u_{n-1} + f_2(n)\, u_{n-2} + \ldots + f_k(n)\, u_{n-k} + g(n) \qquad (8)$$

के दो हल अनुक्रम हों, तो $\{c_n\}$ इसकी संगत समघात पुनरावृत्ति का हल अनुक्रम होगा, जहाँ $c_n = a_n - b_n$.

2) (8) का प्रत्येक हल, $a_n + b_n$ के रूप का होता है, जहाँ a_n, (8) का विशेष हल है और b_n, इसकी संगत समघात पुनरावृत्ति

$$u_n = f_1(n)\, u_{n-1} + \ldots + f_k(n)\, u_{n-k} \qquad (9)$$

का एक हल है।

इनकी उपपत्तियाँ ठीक वैसी ही हैं जैसी कि अचर गुणांकों वाली स्थिति की उपपत्तियाँ हैं।

E5) पुनरावृत्ति $T_n = 2T_{n-1}$ का अभिलक्षणिक मूल $z = 2$ है। इसलिए, समघात भाग का व्यापक हल $T_n = a \cdot 2^n, n \geq 1,$ है। प्रमेय 5 के अनुसार, असमघात भाग का विशेष हल $T_n = b$ है। T_n के इस मान को पुनरावृत्ति में रखने पर हमें $b = -1$ प्राप्त होता है।

समघात और असमघात भागों के हलों को जोड़ने और प्रारंभिक प्रतिबंध $T_1 = 1$ को लागू करने पर हमें प्राप्त होता है

$T_n = 2^n - 1, \quad n \geq 1.$

E6) यहाँ $a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n) - 200, n \geq 0,$

अर्थात् $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = -200.$

समघात भाग का हल है

$a \cdot 3^n + b(1)^n$, अर्थात् $a \cdot 3^n + b$, जहाँ $a, b \in C$.

अब, $-200 = (-200)(1)^n$, और 1 एक अभिलक्षणिक मूल है। अतः प्रमेय 5 के अनुसार एक विशेष हल An है, जहाँ A एक अचर है।

पुनरावृत्ति में $a_n = An$ रखने पर हमें प्राप्त होता है

$A(n+2) - 4A(n+1) + 3A_n = -200 \Rightarrow A = 100.$

$\therefore a_n = a \cdot 3^n + b + 100n.$

इसमें $a_0 = 1000$ और $a_1 = 1500 - 200 = 1300$ लेने पर हमें

$a_n = 100(3)^n + 900 + 100n, n \geq 0,$ प्राप्त होता है।

E7) पुनरावृत्ति $u_n + c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} = 0$ का अभिलक्षणिक समीकरण $z^2 + c_1 z + c_2 = 0$ है। दिए हुए हल से हम पाते हैं कि इसके मूल 2 और 5 हैं।

अतः $c_1 = -(2+5) = -7$ और $c_2 = 2 \times 5 = 10.$

अब, दिए हुए समीकरण में दिए हुए विशेष हल $u_n = 3n - 5$ को रखने पर हमें प्राप्त होता है

$(3n - 5) - 7(3n - 8) + 10(3n - 11) = an + b.$

इसलिए $a = 12$ औ

E8) पुनरावृत्ति $v_n - 7v_{n-1} + 16v_{n-2} - 12v_{n-3} = 0$ का अभिलक्षणिक समीकरण $z^3 - 7z^2 + 16z - 12 = 0$, अर्थात् $(z-2)^2(z-3) = 0$ है।

इसलिए $v_n = (an + b)2^n + c \,.\, 3^n, n \geq 0$, जहाँ a, b, c अचर हैं।

विशेष हल $v_n = An^2 2^n + Bn\, 3^n$ के रूप का है।

अतः पुनरावृत्ति हो जाती है :

$$A \,.\, 2^{n-1}\{2n^2 - 7(n-1)^2 + 8(n-2)^2 - 3(n-3)^2\}$$

$$+ B \,.\, 3^{n-2}\{9n - 21(n-1) + 16(n-2) - 4(n-3)\} = 2^n + 3^n.$$

इसे हल करने पर हमें $A = -1, B = 9$ प्राप्त होता है।

इसलिए, $v_n = (-n^2 + an + b)2^n + (9n + c)3^n, n \geq 0.$

प्रारंभिक प्रतिबंधों को लागू करने पर हमें निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होते हैं :

$b + c = 1$, $2(a + b - 1) + 3(c + 9) = 0$ और $4(2a + b - 4) + 9(c + 18) = 1.$

इन समीकरणों को हल करने पर हमें $a = 7, b = 42$ और $c = -41$ प्राप्त होता है।

अतः, $v_n = (-n^2 + 7n + 42)2^n + (9n - 41)3^n, \quad n \geq 0.$

E9) हम जानते हैं कि इसके अभिलक्षणिक मूल 3 और -2 ही हैं, और इनकी बहुकता 1 और 2 हैं। अतः समघात भाग का हल होगा

$A \,.\, 3^n + (Bn + c)(-2)^n.$

पुनरावृत्ति का असमघात भाग

$a \cdot 2^n + bn(-1)^n + (cn^2 + dn + e)$ है, जहाँ a, ..., e अचर हैं।

अतः इस भाग का हल है

$D(2)^n + (-1)^n(E_0 - E_1 n) + Fn^2 + Gn + E.$

पूरा हल इन दो हलों का योगफल है।

E10) अनुक्रम के प्रथम कुछ पद 0, 1, 16, 81, ..., हैं। इन्हें देखने से लगता है कि

$b_n = n^4, n \geq 0$, होना चाहिए।

आइए हम इस अनुमान की जाँच आगमन विधि से करें।

अब, $n = 0$ और $n = 1$ के लिए यह अनुमान सही है।

आइए हम मान लें कि यह $n - 1$ पर भी सही है।

अब, $n^4 = (n-1)^4 + (4n^3 - 6n^2 + 4n - 1)$, जहाँ $n \geq 1$.

अतः गणितीय आगमन नियम से हमारा अनुमान सिद्ध हो जाता है।

E11) $j = 1$ से $j = n$ तक सर्वसमिका

$$(j+1)^{k+1} - j^{k+1} = \sum_{r=0}^{k} C(k+1, r) j^r$$

के दोनों पक्षों का योग करने पर हमें निम्नलिखित पुनरावृत्ति समीकरण प्राप्त होता है :

$$\begin{aligned}(n+1)^{k+1} - 1 &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{r=0}^{k} C(k+1, r) j^r \\ &= \sum_{r=0}^{k} \{C(k+1, r) \sum_{j=1}^{n} j^r\} \\ &= \sum_{r=0}^{k} \{C(k+1, r)\, \sigma_n^r\}\end{aligned}$$

विशेष रूप से, $k = 4$ से हमें प्राप्त होता है कि

$$(n+1)^5 - 1 = \sum_{r=0}^{4} \{C(5, r)\,\sigma_n^r\} = \sigma_n^0 + 5\,\sigma_n^1 + 10\,\sigma_n^2 + 10\,\sigma_n^3 + 5\,\sigma_n^4.$$

इसलिए,

$$\sigma_n^4 = \frac{n^5 + 5\,n^4 + 10\,n^3 + 10\,n^2 + 4^n}{5} - \frac{n^2(n+1)^2}{2} - \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(6\,n^3 + 9\,n^2 + n - 1)}{30}$$

E12) विधि 1: क्योंकि $C(2n, n) = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{2(2n-1)}{n}\,\frac{(2n-2)!}{\{(n-1)!\}^2}$, इसलिए $C(2n, n)$ दी हुई पुनरावृत्ति का एक हल है।

विधि 2: $x_n = x_0 \prod_{k=1}^{n} x_k / x_{k-1} = x_0 \prod_{k=1}^{n} 2(2k-1)/k.$

$$= x_0\, 2^n\,[1.3.5 \,..\, (2n-1)] / n! = x_0\,(2n)! / (n!)^2,\ n \geq 0.$$

E13) आइए, उदाहरण 16 का तरीका लागू करें। चूंकि $n^3 \neq 0\ \forall\ n \geq 1$, हम ऐसा कर सकते हैं।

उदाहरण 15 से हम जानते है कि समघात भाग का हल

$u_n = u_0\,(n!)^3$ है।

मान लीजिए कि दी हुई पुनरावृत्ति का हल

$a_n = u_n\,v_n$ है, जहाँ $u_0\,v_0 = 1.$

तब $u_n\,v_n = n^3\,u_{n-1}\,v_{n-1} + (n!)^2$

$= u_n\,v_{n-1} + (n!)^2$

$\Rightarrow v_n = v_{n-1} + \frac{1}{u_0}.\frac{1}{n!}.$

अब अंतःसर्पी योगफल विधि को लागू करने पर, हम पाते हैं कि

$$v_n = v_0 + \frac{1}{u_0}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right).$$

फिर पुनरावृत्ति का हल होगा

$$a_n = (n!)^3\left[1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\right].$$

E14) $\frac{a_n}{a_{n-1}} = n!\,n\ \forall\ n \geq 1.$

$\therefore \frac{a_n}{a_0} = \prod_{k=1}^{n} \frac{a_k}{a_{k-1}} = \prod_{k=1}^{n} k!\,k = 1!\,2! \ldots (n-1)!\,(n!)^2$

$\therefore a_n = 5\,[1!\,2! \ldots (n-1)!\,(n!)^2]$

E15) $n-1$ से गुणा करने पर पुनरावृत्ति हो जाती है

$n(n-1)\,x_n - (n-1)\,(n-2)\,x_{n-1} = n-1,\ n \geq 1.$

$d_n = n(n-1)\,x_n$ प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$d_n - d_{n-1} = n - 1,\ d_0 = 0.$

$\therefore d_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1) = n(n-1)/2.$

$\therefore x_n = 1/2,\ n \geq 1.$

E16) सुविधा के लिए, आइए हम $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_2 - \mathcal{F}_1 = 0$ परिभाषित करें।

क) $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k = \sum_{k=1}^{n} (\mathcal{F}_{k+1} - \mathcal{F}_{k-1}) = (\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n) - (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_0) = \mathcal{F}_{n+2} - 1.$

ख) $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_{2k} - \mathcal{F}_{2k-2} = \mathcal{F}_{2n} - \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{2n}.$

ग) $\sum_{k=1}^{n} \mathcal{F}_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (\mathcal{F}_{k+1}\mathcal{F}_k - \mathcal{F}_k\mathcal{F}_{k-1}) = \mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_n - \mathcal{F}_1\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_n.$

घ) $\sum_{k=2}^{\infty} \mathcal{F}_k/(\mathcal{F}_{k-1}\mathcal{F}_{k+1}) = \sum_{k=2}^{\infty} (\mathcal{F}_{k-1}^{-1} - \mathcal{F}_{k+1}^{-1})$

$= \lim_{n\to\infty} \{(\mathcal{F}_1^{-1} + \mathcal{F}_2^{-1}) - (\mathcal{F}_n^{-1} + \mathcal{F}_{n+1}^{-1})\} = 2.$

ङ) $\sum_{k=2}^{\infty} (\mathcal{F}_{k-1}\mathcal{F}_{k+1})^{-1} = \sum_{k=2}^{\infty} \{(\mathcal{F}_{k-1}\mathcal{F}_k)^{-1} - (\mathcal{F}_k\mathcal{F}_{k+1})^{-1}\}$

$= \lim_{n\to\infty} \{(\mathcal{F}_1\mathcal{F}_2)^{-1} - (\mathcal{F}_n\mathcal{F}_{n+1})^{-1}\} = 1.$

E17) n के स्थान पर n − 1 बार-बार रखने पर हमें प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{1}{n}u_{n-1} + \frac{1}{n!}\\
&= \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{n-1}u_{n-2} + \frac{1}{(n-1)!}\right\} + \frac{1}{n!} = \frac{1}{n(n-1)}u_{n-2} + \frac{2}{n!}\\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left\{\frac{1}{n-2}u_{n-3} + \frac{1}{(n-2)!}\right\} + \frac{2}{n!}\\
&= \frac{1}{n(n-1)(n-2)}u_{n-3} + \frac{3}{n!}\\
&= \frac{1}{n!}u_0 + \frac{n}{n!} = \frac{n+1}{n!}, n \ge 0.
\end{aligned}$$

E18)
$$\begin{aligned}
u_n &= u_{n-1} + n\\
&= u_{n-2} + (n-1) + n\\
&\ \ \vdots\\
&= u_1 + \{n-(n-2)\} + \ldots + (n-1) + n\\
&= 1 + 2 + \ldots + n\\
&= \frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \sum_{k=1}^{n+2} u_k &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+2} k(k+1)\\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_1^{n+2} k^2 + \sum_1^{n+2} k\right)\\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{(n+2)(n+3)(2n+5)}{6} + \frac{(n+2)(n+3)}{2}\right]\\
&= \frac{(n+2)(n+3)(n+4)}{6}
\end{aligned}$$

E19) पुनरावृत्ति को $ny_n - (n-1)y_{n-1} = 1$ के रूप में लिखने पर यह संकेत मिलता है कि प्रतिस्थापन $x_n = ny_n, n \ge 1$, करना उचित होगा। तब पुनरावृत्ति $x_n - x_{n-1} = 1$ के रूप की हो जाती है, और निम्नलिखित रूप में अंतःसर्पित हो जाती है :

$$x_n - x_0 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = n.$$

इसलिए $x_n = n$ और $y_n = 1\ \forall\ n \ge 1.$

E20) पुनरावृत्ति का मान्य होने के लिए यह आवश्यक है कि $n, 2^k$ के रूप का हो।

आइए अब हम पुनरावृत्ति में $t_{2^k} = u_k$ लें। तब पुनरावृत्ति

$u_n = 3u_{n-1} + 2^{2n}, n \geq 1, u_0 = 2.$

हो जाती है।

समघात भाग का हल $u_n = A \cdot 3^n$ है।

असमघात भाग का हल $u_n = B \cdot 2^{2n} = B\,4^n$ है।

पुनरावृत्ति में इसे प्रतिस्थापित करने पर हमें $B = 4$ प्राप्त होता है।

$\therefore u_n = A \cdot 3^n + 4^{n+1}.$

अब, प्रारंभिक प्रतिबंध लागू करने पर हमें $A = -2$ प्राप्त होता है।

$\therefore u_n = (-2)3^n + 4^{n+1}$

$\therefore t_{2^n} = (-2)3^n + 2^{2(n+1)}$

E21) मान लीजिए $y_n = \sqrt{x_n}$, तब, $y_n - 5y_{n-1} + 6\,y_{n-2} = 0$ के अभिलक्षणिक मूल 2 और 3 होंगे।

इसलिए किन्हीं a, b के लिए, $y_n = a \cdot 2^n + b \cdot 3^n$.

चूंकि $y_0 = 2$ और $y_1 = 5$, इसलिए $a = 1 = b$.

अतः, $x_n = y_n^2 = (2^n + 3^n)^2$, $n \geq 0$ के लिए

E22) असमघात भाग के पद $n!$ से हमें यह संकेत मिलता है कि हमें दोनों पक्षों को $n!$ से भाग दे देना चाहिए। ऐसा करने पर हम पाते हैं कि

$y_n - 4\,y_{n-2} = \frac{5}{9} \times 3^n, n \geq 2$, जहाँ $y_0 = 1, y_1 = -1$ और जहाँ $y_n = x_n/n!$.

क्योंकि इसके समघात भाग का अभिलक्षणिक बहुपद $z^2 - 4 = 0$ है, इसलिए किन्हीं a, b, c के लिए

$y_n = a \cdot 2^n + b\,(-2)^n + c \cdot 3^n, n \geq 0.$

पुनरावृत्ति में इस मान को रखने पर $c = 1$ प्राप्त होता है, जबकि प्रारंभिक प्रतिबंधों से

$a + b + c = a + b + 1 = 1$ और $2a - 2b + 3c = 2a - 2b + 3 = -1$ मिलता है, जिन्हें हल करने पर हमें $a = 1, b = -1$ प्राप्त होता है।

अतः $x_n = \{2^n - (-2)^n + 3^n\}\,n!, n \geq 0.$

E23) u_n को इसके समघात हल $u_n^{(h)}$ और विशेष हल $u_n^{(p)}$ के योगफल के रूप में लिखिए। तब,

$u_n^{(h)} = a_1 \cdot 2^n + a_2 \cdot 3^n + (a_3 + a_4 n)\,4^n, a_i \in C \;\forall\, i.$

क्योंकि g(n), $(A + Bn)2^n + C \cdot 3^n + (D + En)\,5^n$ के रूप का है, इसलिए विशेष हल का रूप होगा

$u_n^{(p)} = [A_0 n + (b_0 + b_1 n)\,n]\,2^n + C_0 n \cdot 3^n + D_0 \cdot 5^n + (E_0 + E_1 n)\,5^n$

$= (A_1 n + B_1 n^2)2^n + C_0 n \cdot 3^n + D_0 \cdot 5^n + (E_0 + E_1 n)5^n$, जहाँ बड़े अक्षर अचर हैं।

इसलिए, $u_n = u_n^{(h)} + u_n^{(p)}$.

E24) मान लीजिए r_1, r_2 अभिलक्षणिक बहुपद

$z^2 + b_1 z + b_2 = 0$ के मूल हैं। तब

$$v_n = \begin{cases} a_1 r_1^n + a_2 r_2^n + cr^n, & \text{जबकि } r_1, r_2, r \text{ अलग-अलग हों,} \\ (a_1 + cn) r_1^n + a_2 r_2^n, & \text{यदि } r = r_1 \neq r_2 \\ (a + bn) r_1^n + cr^n, & \text{यदि } r_1 = r_2 \neq r \\ (a + bn + cn^2) r^n, & \text{यदि } r_1 = r_2 = r \end{cases}$$

इनमें से किसी भी स्थिति में (v_n) द्वारा संतुष्ट अचर गुणांकों वाली रैखिक समघात पुनरावृत्ति के अभिलक्षणिक बहुपद के मूल r_1, r_2 और r होने चाहिए, जहाँ इनका अलग-अलग होना आवश्यक नहीं है। दूसरे शब्दों में, बहुपद होगा :

$(z - r_1)(z - r_2)(z - r) = (z^2 + b_1 z + b_2)(z - r)$.

E25) मान लीजिए $z^2 + a_1 z + a_2 = (z - \alpha)(z - \beta)$.

यदि $\alpha \neq \beta$, तो $x_n = A\alpha^n + B\beta^n$ और $y_n = C\alpha^n + D\beta^n$,

जहाँ A, B, C, D अचर हैं और $n \geq 0$.

यदि $\alpha = \beta$, $x_n = (A + Bn)\alpha^n$ और $y_n = (C + Dn)\alpha^n$, जहाँ A, B, C, D अचर हैं और $n \geq 0$.

क) इसलिए, यदि मूल अलग-अलग हों, तो

$x_n y_n = AC(\alpha^2)^n + (AD + BC)(\alpha\beta)^n + BD(\beta^2)^n, n \geq 0$.

अतः, $\{x_n y_n\}$ अचर गुणांकों और अलग-अलग अभिलक्षणिक मूल $\alpha^2, \alpha\beta, \beta^2$ वाली तृतीय कोटि रैखिक समघात पुनरावृत्ति को संतुष्ट करता है।

अधिक स्पष्ट रूप में, अभिलक्षणिक बहुपद

$(z - \alpha^2)(z - \alpha\beta)(z - \beta^2) = z^3 - (a_1^2 - a_2) z^2 + a_2 (a_1^2 - a_2) z - a_2^3$

है, और पुनरावृत्ति संबंध है

$v_n - (a_1^2 - a_2) v_{n-1} + a_2 (a_1^2 - a_2) v_{n-2} - a_2^3 v_{n-3} = 0$.

यदि मूल बराबर हों, तो

$x_n y_n = AC(\alpha^2)^n + (AD + BC)n(\alpha^2)^n + BD n^2 (\alpha^2)^n, n \geq 0$.

अतः, $\{x_n y_n\}$ अचर गुणांकों और बहुकता तीन के अभिलक्षणिक मूल α^2 वाली तृतीय कोटि रैखिक समघात पुनरावृत्ति को फिर से संतुष्ट करता है।

अधिक स्पष्ट रूप में, अभिलक्षणिक बहुपद है

$(z - \alpha^2)^3 = z^3 - 3a_2 z^2 + 3a_2^2 z - a_2^3$,

और पुनरावृत्ति संबंध है

$v_n - 3a_2 v_{n-1} + 3a_2^2 v_{n-2} - a_2^3 v_{n-3} = 0$.

ख) इस स्थिति में, यदि मूल अलग-अलग हों, तो

$x_{2n} = A(\alpha^2)^n + B(\beta^2)^n, n \geq 0$, और $\{x_{2n}\}$ अचर गुणांकों और अलग-अलग अभिलक्षणिक मूलों α^2 और β^2 वाली द्वितीय कोटि रैखिक समघात पुनरावृत्ति को संतुष्ट करता है।

अधिक स्पष्ट रूप में, अभिलक्षणिक बहुपद है

$(z - \alpha^2)(z - \beta^2) = z^2 - (a_1^2 - 2a_2) z + a_2^2$.

और पुनरावृत्ति संबंध है

$w_n - (a_1^2 - 2a_2) w_{n-1} + a_2^2 w_{n-2} = 0$.

यदि मूल बराबर हैं, तो

$x_{2n} = (A + 2Bn)(\alpha^2)^n, n \geq 0$, और $\{x_{2n}\}$ फिर से अचर गुणांकों और बहुकता दो के अभिलक्षणिक मूल α^2 वाली द्वितीय कोटि रैखिक समघात पुनरावृत्ति को संतुष्ट करता है।

अधिक स्पष्ट रूप में, अभिलक्षणिक बहुपद है
$(z-\alpha^2)^2 = z^2 - 2a_2 z + a_2^2$.
और पुनरावृत्ति संबंध है
$w_n - 2a_2 w_{n-1} + a_2^2 w_{n-2} = 0$

E26) यदि अनुक्रम {n!} को अचर गुणांकों वाली द्वितीय कोटि समघात रैखिक पुनरावृत्ति को संतुष्ट करना है, तो इसका nवाँ पद

$a_1 r_1^n + a_2 r_2^n$ के रूप का होना चाहिए, जहाँ a_1, a_2 अचर हैं, अगर $r_1 \neq r_2$, या

$(a + bn) r^3$ के रूप का होना चाहिए अगर $r_1 = r_2 = r$.

यदि $r_1 \neq r_2$, तो $|(a_1 r_1^n + a_2 r_2^n)| \leq |a_1| |r_1|^n + |a_2| |r_2|^n \leq (|a_1| + |a_2| n) r^n$,

जहाँ $r = \max(|r_1|, |r_2|)$.

अतः किसी भी स्थिति में धनात्मक A, B और α के लिए $n! \leq (A + Bn)\alpha^n$, $n \geq 0$ के लिए और धनात्मक A, B और α के लिए। यह हमारी परिकल्पना का विरोध करता है।

शब्दावली

अंतःसर्पी (या टेलिस्कोपी)- योगफल विधि	–	method of telescoping sums
अचर	–	constant
अध्यारोपण सिद्धांत	–	superposition principle
अनुक्रम	–	sequence
अपविन्यास	–	derangement
अभिलक्षणिक मूल	–	characteristic root
अरैखिक	–	non-linear
असमघात हिस्सा	–	non-homogeneous part
आंशिक भिन्न	–	partial fractions
आवर्तन/दोहराई	–	iteration
उत्तरोत्तर पद	–	successive term(s)
औपचारिक घात श्रेणी	–	formal power series
एकघात संचय	–	linear combination
एकैकी आच्छादन	–	bijection
कलन-विधि	–	algorithm
क्रमचय	–	permutation
गणन	–	counting
गुणांक	–	coefficient
घात श्रेणी	–	power series
चर घातांकी	–	exponential
जनक फलन	–	generating function
द्विपद	–	binomial
द्विभाजी अन्वेषण	–	binary search
पद	–	term
पुनरावृत्ति	–	recurrence
पुनरावृत्ति संबंध	–	recurrence relation
पूर्णांक हल	–	integer solution
पूरा हल	–	complete solution
प्रतिस्थापन	–	substitution
प्रतीक	–	symbol
प्राचल	–	parameter
'फूट डालो और जीतो'	-	divide and conquer
बहुपद	–	polynomial
बहुलता	–	multiplicity

'मिलाना छांटना'	–	'merge sort'	पुनरावृत्तियों को हल करना
योगखंड	–	summand	
रैखिक समीकरण	–	linear equation	
विन्यास	–	arrangement	
विभाजन	–	partition	
विशेष हल	–	particular solution	
व्यापक हल	–	general solution	
शून्येतर	–	non-zero	
संचयविन्यासी	–	combinatorial	
संचयविन्यास	–	combinatorics	
संवृत्त रूप	–	closed form	
समानीत करना	–	to reduce	
सारणी	–	array table	
सर्वसमिका	–	identity	

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

UGMM - 13
विविक्त गणित

खंड

4

ग्राफ़ सिद्धान्त

मान लीजिए आप अपनी कार से दिल्ली से कलकत्ता जाना चाहते हैं। दिल्ली से कलकत्ता जाने के अनेक रूट हैं। इनमें सबसे छोटा रूट आप कैसे ज्ञात करेंगे ? या, मानलीजिए आप भारत का मानचित्र इस तरह रंगना चाहते हैं कि अड़ोस पड़ोस के राज्य अलग-अलग रंग से रंगें गए हों। वास्तव में रंगें बिना ही आप यह निष्कर्ष कैसे निकाल लेगें कि मानचित्र को इस तरह रंगने के लिए केवल चार रंगों की ही आवश्यकता होती है।

पहली दृष्टि में ये समस्याएँ, काफी अलग-अलग मालूम पड़ सकती हैं; परन्तु इन्हें कुछ वस्तुओं के विन्यासों और इनके बीच के संबंधों से संबंधित समस्याओं के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। विन्यासों का अध्ययन करने के लिए हम इन वस्तुओं को एक समतल की बिन्दु मान लेते हैं और संबंधों को इन बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाएँ मान लेते हैं। गणित की उस शाखा को जिसमें विन्यास-समस्याओं का अध्ययन इस विधि से किया जाता है, **ग्राफ सिंद्धात** कहा जाता है।

ग्राफ़ सिंद्धात का सबसे पहला उल्लेख (स्विस गणितज्ञ लियानार्ड ऑयलर (1707–1783) द्वारा 1736 में प्रकाशित एक शोध-पत्र में मिलता है। इस शोध-पत्र में उसने एक समस्या को, जिसे कोनिस्वर्ग समस्या के नाम से जाना जाता था, ग्राफ सिद्धांत के रूप में सूत्रबद्ध करके हल किया था। इसके बाद एक शताब्दी तक इस सिद्धांत के विकास के संबंध में थोड़े-बहुत प्रयास ही किए जाते रहे। इस शताब्दी में इसकी उपयोगिता को देखते हुए लोगों का ध्यान इस सिद्धांत की ओर पुनः आकर्षित हुआ। लोगों ने यह देखा कि सिद्धांत को लागू करके एकीकृत परिपथों के निर्माण से संबंधित समस्याओं, परिवहन नेटवर्क की अनुमार्गण समस्याएँ और उद्योग तथा प्रौद्योगिकी के कुछ महत्त्वपूर्ण क्षेत्रों से संबंधित समस्याओं को सरलता से हल किया जा सकता है। हम आशा करते हैं कि आप जैसे–जैसे इस खंड का अध्ययन करते जाएंगे आप इनके कुछ अनुप्रयोगों को अच्छी तरह से समझते जाएगें।

इस खंड का लक्ष्य ग्राफ़–सिद्धांत और उसकी व्यावहारिक उपयोगिता से आपको परिचित कराना है। इसका अध्ययन हम इकाई 10 में करेंगें।

इकाई 11 में हम आपको विशेष प्रकार के अनेक ग्राफों से परिचित कराएगें। इस इकाई में हम "तरूओं" पर भी चर्चा करेंगें जिनका प्रयोग 1847 में गुस्तव किर्शोफ़ (1824 –1887) ने विद्युत-परिपथों का निदर्शन और अध्ययन करने के लिए किया था। आर्थर कैली (1821–1895) ने भी 1857 में तरूओं का प्रयोग संतृप्त हाइड्रोकार्बनों के अलग-अलग आइसोमरों को गिनने में किया था।

इकाई 12 में हम ग्राफ सिद्धांत में ऑयलर के पथ भंजन कार्य को प्रस्तुत करेंगें। यहां हम इतना ही महत्त्वपूर्ण हैमिल्टोनीय चक्र के बारे में भी चर्चा करेंगें। प्रारंभ में उसने इस संकल्पना का, जो कि हैमिल्टन (1805–1865) के नाम पर रखा गया था, प्रयोग एक गणितीय पहेली में किया था। अब इस संकल्पना का प्रयोग सफ़री विक्रेता समस्या जैसी व्यावहारिक समस्याओं को हल करने में किया जाता है जिस पर चर्चा हम इस इकाई में करेंगें।

इस खंड की अंतिम इकाई में हम ग्राफ़–सिद्धांत की एक सुप्रसिद्ध समस्या अर्थात् "चतुर्वर्ण समस्या" पर चर्चा करेंगें। फ्रांसिस गुथरी ने 1850 में अपने भाई के जरिए इस समस्या को अगस्तस दि मोर्गा के पास भेजवाया था। इस समस्या को अंततः 1976 में जाकर ही केनेथ एपल और वुल्गांग हेकेन ने हल किया था जिन्होंने चतुर्वर्ण समस्या की एक कंप्यूटर–सहाय उपपत्ति प्रस्तुत की थी। इस इकाई में हम समतलीय ग्राफ़ के अभिलक्षणीकरण, जिसे 1930 में कासिमिर कुरातोवस्की ने प्रस्तुत किया था, पर भी चर्चा करेंगें।

जिस विषय का अब आप अध्ययन करने जा रहे हैं वह अपनी गणितीय संरचना और वर्तमान विज्ञान और प्रौद्योगिकी में इसके अनुप्रयोग दोनों ही दृष्टि से एक अति उत्तेजक विषय सिद्ध होगा। हम आशा करते हैं कि इस खंड का अध्ययन करने में आपको काफी आनंद आएगा।

संकेत और प्रतीक

$G = (V, E)$	शीर्ष समुच्चय V और कोर समुच्चय E वाला ग्राफ G
K_n	n शीर्ष वाला पूर्ण ग्राफ
$K_{m,n}$	पूर्ण द्विभाजित ग्राफ जहाँ V_1 और V_2 विभाजित समुच्चय है और $\lvert V_1 \rvert = m$ और $\lvert V_2 \rvert = n$
P_n	n शीर्ष सम्बन्धित पथ
C_n	n शीर्ष के ऊपर चक्र
$d_G(x)$	ग्राफ G में शीर्ष x की कोटि
$\delta(G)$	ग्राफ G के शीर्ष का न्यूनतम कोटि
$\Delta(G)$	ग्राफ G के शीर्ष का उच्चतम कोटि
$\langle S \rangle G$	G का उपग्राफ $S \subseteq V$ से प्रेशित
$\chi(G,$	शीर्ष वर्णिक संख्या
$\chi'(G)$	कोर वर्णिक संख्या

इकाई 10 ग्राफ़ों के आधारभूत गुणधर्म

इकाई की रूपरेखा | पृष्ठ संख्या

10.1 प्रस्तावना

अपने दैनिक जीवन में हमें विभिन्न प्रकार की समस्याओं का सामना करना पड़ता है जिन्हें हम वस्तुओं की संरचनाओं के और इन वस्तुओं के उपसमुच्चयों के एक कुल के रूप में देखते हैं। उदाहरण के लिए यह एक बिजली का परिपथ हो सकता है जहाँ अलग-अलग गैज़ेट (gadget) वस्तुएँ होते हैं और ये एक-दूसरे से बिजली की तारों से जुड़े होते है। संभव है कि इनमें लगी तारों की लंबाइयों का कोई विशेष महत्त्व न हो, परन्तु यह जानना अति आवश्यक होता है कि तारें एक-दूसरे के साथ किस प्रकार जुड़ी हुई हैं, अर्थात् यह जानना आवश्यकत होता है कि कौन से गैज़ेट तारों के अंत बिन्दुओं से जुड़े हुए हैं। इसका एक अन्य उदाहरण नगर का सार्वजनिक परिवहन तंत्र है। यहाँ विभिन्न स्थान वस्तुएँ हैं और बस के रूट संबंध हैं और हम यह जानना चाहते हैं कि कौन-कौन से स्थान प्रारंभिक स्थान से जुड़े हुए हैं। यह विभिन्न केन्द्रों के बीच संचार व्यवस्था स्थापित करने की समस्या भी हो सकती है। इन सभी समस्याओं का उल्लेख आरेखों (diagrams) की सहायता से किया जा सकता है। इन्हें बिन्दुओं के समुच्चय, जिन्हें शीर्ष कहते हैं और विभिन्न बिन्दु-युग्मों को जोड़ने वाले कोर-समुच्चय की सहायता से चित्ररूप में निरूपित किया जा सकता है। इस प्रकार के निरूपणों को ग्राफ़ कहा जाता है। दी हुई समस्याओं के हल इनके ग्राफ़ों का विश्लेषण करके प्राप्त किए जा सकते हैं। इस प्रकार की समस्याओं को हल करने के संबंध में विभिन्न गणितज्ञों द्वारा प्रस्तुत की गई विचारधाराओं ने गणित की एक नई शाखा को जन्म दिया जिसे ग्राफ सिद्धांत (graph theory) कहा जाता है।

इस इकाई में सबसे पहले हम ग्राफ़ को परिभाषित करेंगे और इसके कुछ आधारभूत गुणधर्मों का अध्ययन करेंगे। भाग 1.2 और भाग 1.3 में हमने विभिन्न प्रकार के ग्राफ़ों को परिभाषित किया है। सभी भागों में ग्राफ़ों और उनके गुणधर्मों को उदाहरणों की सहायता से प्रस्तुत किया गया है। अंत में, अर्थात् भाग 1.4 में उपग्राफ़ों का अध्ययन किया गया है। इस खंड की बाद वाली इकाइयों में आप यह देखेंगे कि किस प्रकार इन सरल आधारभूत विचारों की सहायता से दैनिक जीवन की अनेक कठिन समस्याओं को हल किया जा सकता है। हमारे ग्राफ़ ऐसे हो सकते हैं जिनके शीर्ष आकाश के बिन्दुओं, लोगों, जानवरों की स्पीशीज़, स्पोर्ट्स टीम आदि को निरूपति करते हों और जिनके कोर सड़कों, टेलीफोन लाइनों, संचार चैनलों आदि को निरूपित करते हों।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद, आप

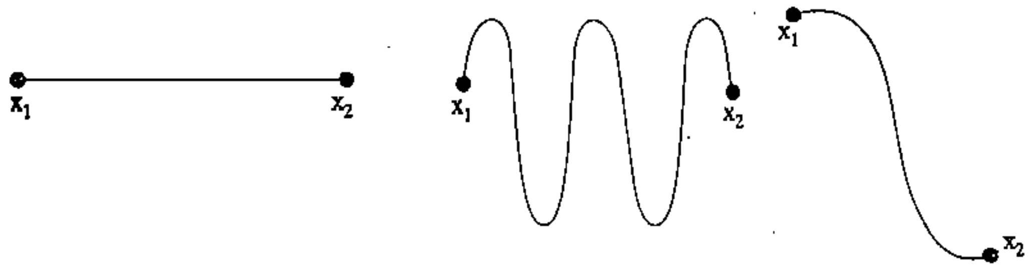
- ग्राफ़ को निरुपित करने की विभिन्न विधियों को पहचान सकेंगे;
- पूर्ण ग्राफ़ों, पथों, चक्रों को पहचान सकेंगे;
- ग्राफ़ का सम्मिलन और पूरक प्राप्त कर सकेंगे;
- ग्राफ़ की कोटि अनुक्रम लिख सकेंगे और शीर्षों की कोटियों की सहायता से ग्राफ़ के कोरों की संख्या प्राप्त कर सकेंगे;
- दिए हुए ग्राफ़ के तुल्याकारी ग्राफ़ों को पहचान सकेंगे;
- दिए हुए उपग्राफ़-समुच्चय से प्रेरित उपग्राफ़ों को पहचान सकेंगे;

- p शीर्षों पर नियमितता की कोटि r वाला ग्राफ़ खींच सकेंगे, जहाँ p और r पूर्णांक है, जिसमें $r < p$, जिससे कि इनमें से कम से कम एक पूर्णांक सम हो।

10.2 ग्राफ़

वास्तविक चर के वास्तविक मान फलनों के कलन का अध्ययन करते समय आपने शब्द ग्राफ़ (आलेख) का प्रयोग अवश्य किया होगा। यह $\{(x, f(x) : x \in$ फलन f के प्रांत $\}$ के रूप का एक समुच्चय होता है। इस प्रकार का समुच्चय फलन f के अध्ययन में काफी सहायक होता है। वस्तु ग्राफ़ जिसे यहाँ हम परिभाषित करेंगे, और फलन के ग्राफ़ में मुख्य अंतर यह है कि हमारा ग्राफ़ हमारे अध्ययन की एक वस्तु है और अन्य किसी वस्तु के अध्ययन का साधन नहीं है। ग्राफ़ की औपचारिक परिभाषा देने से पहले आइए हम कुछ सरल उदाहरणों को देंखे।

उदाहरण 1: समतल में दो बिन्दु x_1, x_2 लीजिए और उन्हें किसी रेखा से मिला दीजिए। यह रेखा एक सरल रेखा या चाप हो सकती है (देखिए चित्र 1)।



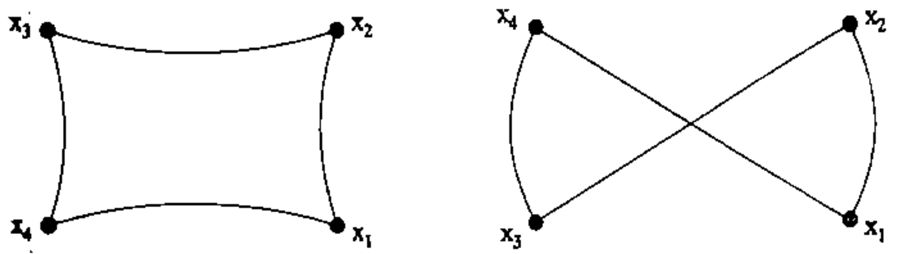
चित्र 1

इन बिन्दुओं को अनेक विधियों से मिलाया जा सकता है। यहाँ हमने तीन विधियाँ दिखाई हैं।

इसी प्रकार उदाहरण 2 और उदाहरण 3 में हमने 4 बिन्दुओं को मिलाने की विभिन्न विधियों को दर्शाया है।

* * *

उदाहरण 2 : समतल में चार बिन्दु x_1, x_2, x_3, x_4 लीजिए। एक रेखा से बिन्दु x_i को बिन्दु x_{i+1} से मिलाइए जहाँ $1 \le i \le 3$ तब x_4 को x_1 से मिलाइए।

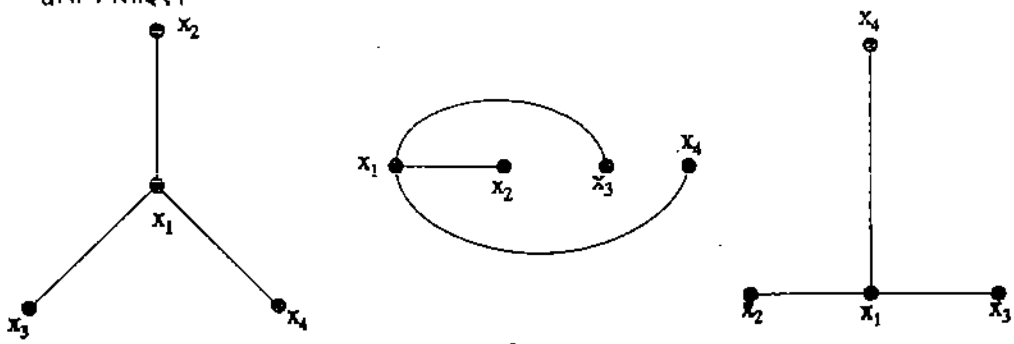


चित्र 2

यहाँ हमने चित्र 2 में दो अलग-अलग आरेखण दिए हैं। जहाँ तक इस खंड में हमारे अध्ययन का संबंध है ये आरेखण समान वस्तु को निरूपित करते हैं।

* * *

उदाहरण 3: समतल में चार बिन्दु x_1, x_2, x_3, x_4 लीजिए। बिन्दु x_1 से अन्य तीन बिन्दुओं को रेखा द्वारा मिलाइए।



चित्र 3

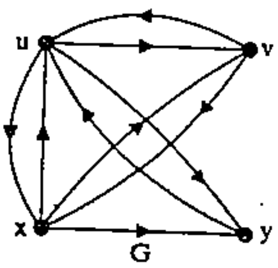
* * *

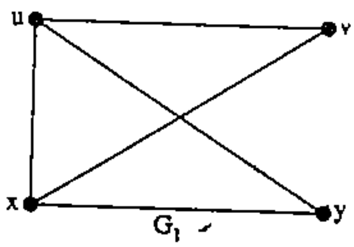
यहाँ भी ऊपर चित्र 3 में दिए गए तीन आरेखण समान वस्तु को निरूपित करते हैं।

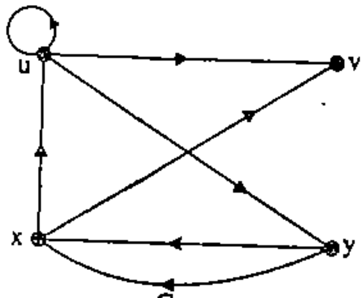
अतः ऊपर के आरेखणों में आपने इस बात की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा कि बिन्दुओं का वस्तु के रूप में महत्त्व है जबकि इन बिन्दुओं की स्थितियों का कोई महत्त्व नहीं। इसी प्रकार, इस बात को जानना आवश्यक होता है कि किन-किन बिन्दु-युग्मों को मिलाया गया है और यह जानना आवश्यक नहीं होता कि इन्हें रेखाओं से मिलाया गया है अथवा वक्रों से। यहाँ आप इस बात की ओर ध्यान दे सकते हैं कि ऊपर के उदाहरणों में दिए गए सभी चित्रों में कुछ न कुछ सामान्य लक्षण हैं। ये चित्र **बिन्दुओं** के और इन बिन्दुओं में से कुछ या सभी बिन्दुओं को मिलाने वाली **रेखाओं या वक्रों** के संग्रह हैं। हम इन बिन्दुओं को **शीर्ष** (vertices) कहते हैं और इन्हें मिलाने वाले वक्रों को कोर (edges) कहते हैं। अतः प्रत्येक आरेखण के संगत दो समुच्चय होते हैं, जिनमे एक समुच्चय शीर्षों का होता है, मानलीजिए यह V है और दूसरा समुच्चय कोरों का होता है, मानलीजिए यह E, है। यदि x_1 और x_2, V में हों और इन्हें एक कोर से मिलाया गया हो, तो E का संगत अवयव युग्म (x_1, x_2) होगा। इस तरह, E, $V \times V$ का एक उपसमुच्चय होता है। कोरों के संबंध में एक स्वाभाविक प्रश्न आपके दिमाग में उठ रहा होगा। क्या (x_1, x_2) वही होता है जो कि (x_2, x_1) है ? दूसरे शब्दों में, क्या कोरों की दिशा होती है ? इस प्रश्न का उत्तर 'हाँ' में है और इससे हमें निम्नलिखित परिभाषाएँ प्राप्त होती हैं।

परिभाषा : एक **सरल ग्राफ़ या अदिष्ट ग्राफ़** G में एक परिमित अरिक्त समुच्चय V और V के 2 अवयव उपसमुच्चय का एक **समुच्चय** E होता है। समुच्चय V को G का **शीर्ष-समुच्चय** (vertex set) कहा जाता है, और **समुच्चय** E को G का **कोर-समुच्चय** (edge set) कहा जाता है और आलेख G को प्रकट करने के लिए हम $G = (V(G), E(G))$ लिखते हैं।

परिभाषा : दिष्ट ग्राफ़ या डाइग्राफ़ G में एक परिमित अरिक्त समुच्चय V के साथ-साथ गुणनफल समुच्चय $V \times V$ का एक उपसमुच्चय A होता है। हम V को G का **शीर्ष-समुच्चय** कहते हैं, A को G का **कोर-समुच्चय** कहते हैं और दिष्ट ग्राफ़ G को प्रकट करने के लिए हम $G = (V(G), A(G))$ लिखते है। चित्र 4(ख) में सरल ग्राफ़ G_1 दिखाया गया हैं और 4(क) और 4(ग) में क्रमशः दिष्ट ग्राफ़ G और G_2 दिखाए गए हैं।







चित्र 4

चित्र 4(क) में दिखाए गए ग्राफ़ $G_1 = (V(G_1), E(G_1))$ में, क्योंकि E एक सममित संबंध है, इसलिए एक-दूसरे से संबंधित दो शीर्षों को मिलाने वाला सदा ही एक कोर-युग्म होता है। समुच्चय V पर इस संबंध E को निरूपित करने के लिए हम प्रत्येक दो शीर्षों के बीच बिना दिशा दिखाए केवल एक कोर खींच सकते हैं जैसाकि हमने चित्र 4(ख) में किया है। दिष्ट ग्राफ़ में, जैसाकि चित्र 4(क) और 4(ग) में दिखाया गया हैं, कोरों की दिशाएँ भी दर्शायी गई हैं। इस तरह, एक अदिष्ट ग्राफ़ एक समुच्चय और समुच्चय पर एक सममित द्वयी संबंध (binary relation) का निरूपण होता है। अदिष्ट ग्राफ़ में शीर्षों u और v को मिलाने वाले कोर को या तो (u, v) से या (v, u) से प्रकट किया जा सकता है, क्योंकि इन दोनों में भेद करने की कोई आवश्यकता नहीं होती।

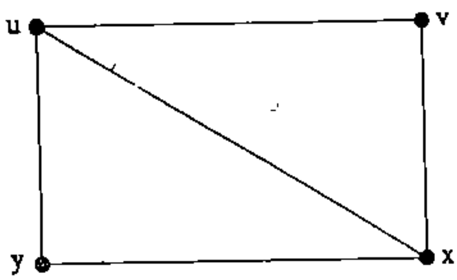
ध्यान दीजिए कि एक समुच्चय और इस समुच्चय पर एक सममित संबंध को या तो एक दिष्ट (दोनों दिशाओं में) या एक अदिष्ट ग्राफ़ के रूप में निरूपित किया जा सकता है। जबकि एक अदिष्ट ग्राफ़ केवल एक समुच्चय और इस समुच्चय पर एक सममित संबंध को ही निरूपित करता है। कभी-कभी ऐसा भी हो सकता है कि ग्राफ़ में एक लूप भी हो अर्थात् शीर्ष को स्वयं शीर्ष से मिलाने वाली कोर जैसा कि चित्र 4(ग) में दिखाया गया है, जहाँ (u, u) एक लूप प्रदर्शित करता है। यह भी हो सकता है कि समान शीर्षों को मिलने वाली दो या अधिक कोर हों, जैसा कि चित्र 4(ग) में दिखाया गया है जहाँ y को x से मिलाने वाली दो कोरें हैं। इस प्रकार की कोरों को समांतर

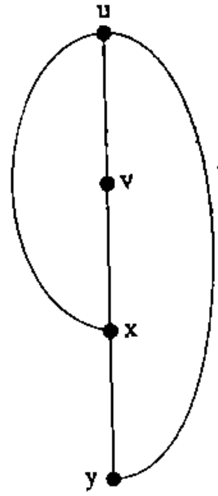
(parallel) या **बहु कोर** (multiple edge) कहा जाता है और इस प्रकार के ग्राफ़ को **बहु ग्राफ़** (multi-graph) कहा जाता है। सरल ग्राफ़ में इन दोनों प्रकार की स्थितियों से बचा जाता है।

इस खंड में हम केवल सरल ग्राफ़ों पर चर्चा करेंगे और सरल ग्राफ़ के स्थान पर केवल शब्द ग्राफ़ का ही प्रयोग करेंगे। और, जहाँ कहीं भी कोई भ्रम नहीं होगा वहाँ हम V(G) और E(G) के स्थान पर केवल V और E ही लिखेंगे।

ग्राफ़ $G = (V, E)$ में V के प्रत्येक अवयव v को G का **शीर्ष** कहा जाता है और E के प्रत्येक अवयव e को G का **कोर** कहा जाता है। यदि $e = \{u, v\}$ एक कोर हो, तो इसे हम केवल $e = uv$ (या $e = vu$) से प्रकट करते हैं। इस स्थिति में u और v को **संलग्न शीर्ष** (adjacent vertices) माना जाता है, u और v को e के साथ **आपतित** (incident) माना जाता है और u तथा v के साथ e **आपतित** होता है। इसी प्रकार, यदि G की अलग-अलग कोरों e_1 और e_2 के शीर्ष उभयनिष्ठ (common) हों, तो e_1 और e_2 को **संलग्न कोर** कहा जाता है। ग्राफ़ $G = (V, E)$ के लिए 'संलग्नता' का संबंध **V** पर **अ-स्वतुल्य** (non-reflexive) और **सममित** संबंध होता है। यदि समुच्चय V परिमित है, तो हमें **परिमित** ग्राफ़ प्राप्त होता है। हम p शीर्षों और q कोरों वाले ग्राफ़ को (p, q) **ग्राफ़** कहते हैं।

उदाहरण 4: चित्र 4 के ग्राफ़ G_1 के लिए, $G_1 = (V, E)$ जहाँ $V = \{u, v, x, y\}$ और $E = \{uv, ux, uy, vx, xy\}$ इस तरह, G_1 के असंलग्न शीर्ष केवल v और y हैं। कोरें uv और vx संलग्न हैं, क्योंकि दोनों ही शीर्ष v के साथ आपतित हैं। कोरें uv और xy असंलग्न हैं। ग्राफ़ G_1 को खींचने की दो वैकल्पिक विधियाँ चित्र 5 में दिखाई गई हैं। इस तरह, ग्राफ़ खींचने की कोई अद्वितीय विधि नहीं होती और बिन्दुओं तथा वक्रों की सापेक्ष स्थितियों का कोई विशेष महत्त्व नहीं होता।





चित्र 5

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E1) तीन शीर्ष x, y, z लीजिए और इन शीर्षों पर सभी संभव (3, 2) ग्राफ़ खींचिए।

E2) चार आधारभूत प्रकार के रक्त ग्रुप होते हैं: A, B, AB और O. ग्रूप O वाला रक्त दाता किसी भी ग्रूप के व्यक्ति को रक्त दे सकता है। ग्रूप A और B वाले रक्त दाता ग्रूप AB वाले और स्वयं अपने ग्रूप वालों को रक्त दे सकते हैं, परन्तु ग्रूप AB वाला रक्त दाता केवल ग्रूप AB वाले व्यक्ति को रक्त दे सकता है। एक ऐसा दिष्ट ग्राफ़ बनाइए जो इन सूचनाओं को प्रस्तुत करता हो।

अभी तक हमनें अपनी चर्चा में आपको उस ग्राफ़ से परिचित कराया है जिसके बारे में हम इस खंड की इस इकाई में और आगे आने वाली इकाइयों में चर्चा करेंगे। अब हम आपको ग्राफ़ों के प्रकार से परिचित कराएगें, परन्तु ऐसा करने से पहले यहाँ हम कुछ परिभाषाएँ दे रहे हैं।

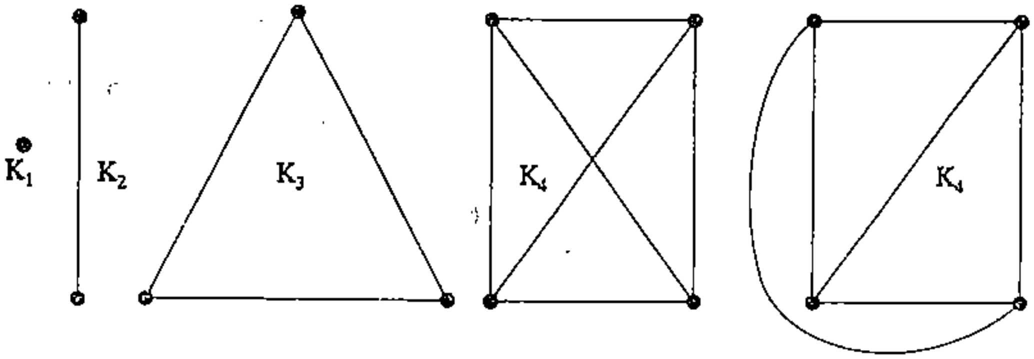
परिभाषा : मानलीजिए $G = (V, E)$ एक ग्राफ़ है। किसी पृष्ठ S जैसे समतल, गोला आदि पर बिन्दुओं का समुच्चय V लीजिए। प्रत्येक कोर $xy \in E(G)$ के संगत पृष्ठ S पर x और y को मिलाने वाला एक ऐसा वक्र खींचिए जिससे कि यह वक्र V के किसी अन्य बिन्दु से होकर न जाता

...। ग्राफ़ G के इस प्रकार के निरूपण को पृष्ठ S पर G का आरेख (diagram) या आरेखण कहा जाता है।

ऊपर के उदाहरणों 1, 2 और 3 में इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि पृष्ठ S पर एक ही ग्राफ़ के अलग-अलग आरेखण हो सकते हैं। वहाँ हमने इन ग्राफ़ों को कोई विशेष नाम नहीं दिया था। अब हम विभिन्न प्रकार के ग्राफ़ों को परिभाषित करेंगे।

परिभाषा : पूर्ण ग्राफ़ K_n, n शीर्षों वाला एक ऐसा ग्राफ़ होता है जिसका प्रत्येक शीर्ष प्रत्येक अन्य शीर्ष से एक कोर से मिला हो।

उदाहरण के लिए, चित्र 6 में K_1 केवल एक शीर्ष है, K_2 में दो संलग्न शीर्ष है। ग्राफ़ K_3 को प्रायः त्रिभुज कहा जाता है।



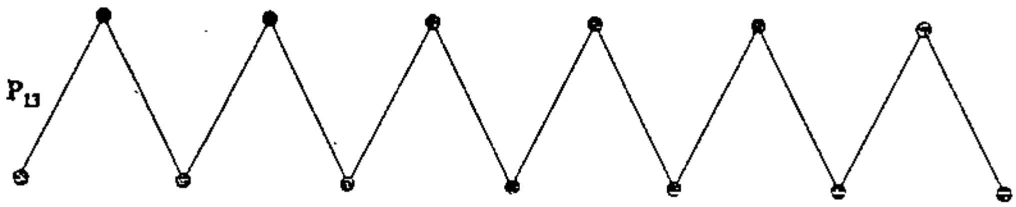
चित्र 6

चित्र 6 की अंतिम दो आकृतियाँ कागज के समतल पर K_4 के दो आरेखणों को निरूपित करती हैं।

n शीर्षों $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ पर ग्राफ़ $G = (V, E)$ के लिए G में $x_1 - x_n$ **गमन** (walk) शीर्षों और कोरों का एक परिमित एकांतर अनुक्रम होता है।

x_1 से प्रारंभ करके x_n पर अंत होने वाला अनुक्रम $x_1, x_1 x_2, x_2, x_2 x_3, \ldots, x_{n-1} x_n, x_n$ ऐसा होता है कि इसका प्रत्येक कोर ठीक पहले और ठीक बाद वाले शीर्षों के साथ आपतित हो। गमन की लंबाई उसमें उपस्थित कोरों की संख्या होती हैं जिसमें बार-बार आने वाली कोरों को भी गिना जाता है। $x_1 - x_n$ गमन संवृत (closed) होता है जबकि $x_1 = x_n$, और विवृत (open) होता है जबकि $x_1 \neq x_n$. $x_1 - x_n$ गमन जिसमें किसी भी कोर को दोहराया नहीं गया हो, $x_1 - x_n$ पथचिह्न (trail) होता है और संवृत पथ चिह्न एक परिपथ (circuit) होता है। और वह पथचिह्न जिसमें कोई भी शीर्ष दोबारा न आया हो, **पथ** (path) होता है। इसकी औपचारिक परिभाषा हम नीचे दे रहे हैं।

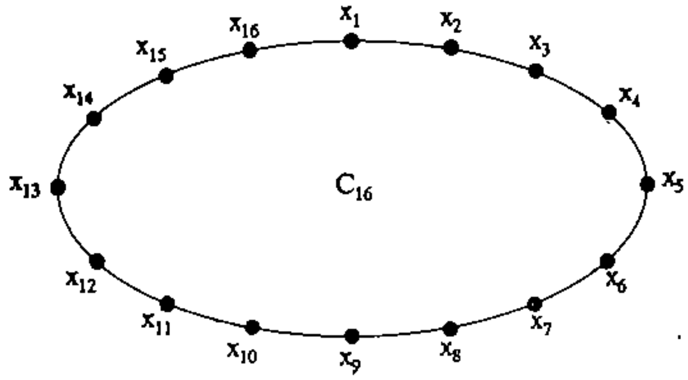
परिभाषा : पथ P_n, n शीर्षों $\{x_1, \ldots, x_n\}$ पर एक ग्राफ़ होता है। जिसका कोर-समुच्चय $E(P_n) = \{x_i x_{i+1} : 1 \le i \le n-1\}$ होता है। उदाहरण के लिए, चित्र 7 में दिखाया गया ग्राफ़ P_{13} है।



चित्र 7

पथ में कोई भी कोर और कोई भी शीर्ष दोबारा नहीं आता। अगली इकाई में हम इस पर विस्तार से चर्चा करेंगे। अब हम चक्र परिभाषित करेंगे।

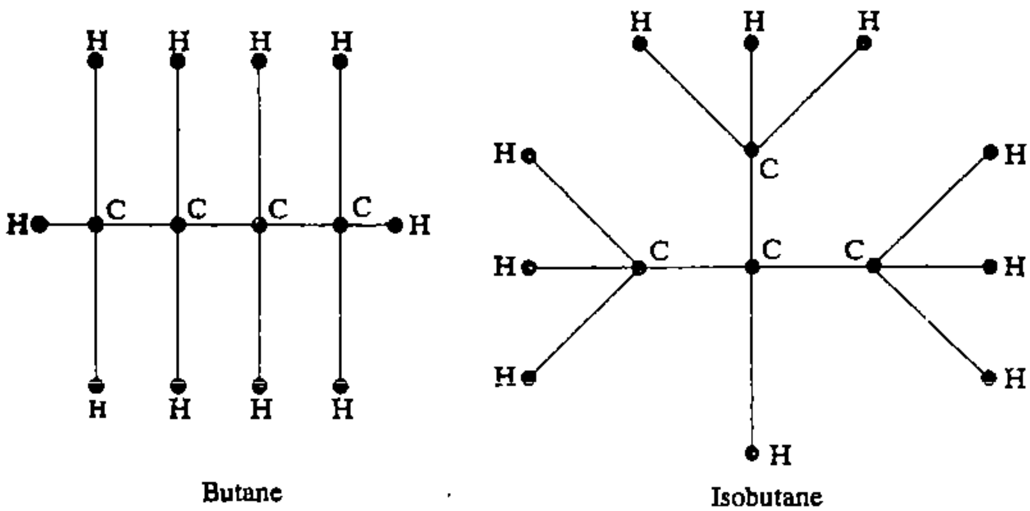
परिभाषा 5 : चक्र C_n, n शीर्षों $\{x_1, \ldots, x_n\}$ पर एक ग्राफ़ होता है, जहाँ $E(C_n) = \{x_i x_{i+1} : 1 \le i \le n-1\} \cup \{x_n x_1\}$. उदाहरण के लिए, चित्र 8 में दिखाया गया ग्राफ़ C_{16} है।



चित्र 8

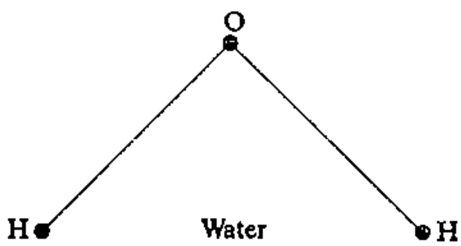
ध्यान दीजिए कि P_n लेकर और उसमें एक और कोर $x_n x_1$ जोड़कर ग्राफ़ C_n प्राप्त हो जाता है। **चक्र एक ऐसा परिपथ होता है जिसमें पुनरावृत्त शीर्ष केवल प्रथम शीर्ष होता है जो कि अंतिम शीर्ष भी होता है।** इस बात की ओर भी ध्यान दीजिए कि व्यवहार में लिखते समय हम केवल गमन के शीर्षों को ही लिखते हैं। गमन के कोरों को लिखने की कोई आवश्यकता नहीं होती। उदाहरण के लिए, चित्र 7 के $x_1 - x_5$ गमन को x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 के रूप में लिया जा सकता है।

यह जानकर आपको अच्छा लगेगा कि अणुओं की संरचना (structures) को भी ग्राफ़ों से निरूपित किया जा सकता है। इसमें विभिन्न परमाणुओं को शीर्षों से निरूपित किया जाता है और संरचनात्मक आबंधों (bonds) को कोरों से निरूपित किया जाता है। उदाहरण के लिए, ब्यूटेन और आइसोब्यूटेन दोनों ही हाइड्रोकार्बन C_4H_{10} है। जिस ढंग से कार्बन और हाइड्रोजन के परमाणुओं के बीच आबंध होते हैं, उसी के कारण इनमें अंतर होता है। (देखिए चित्र 9)।



चित्र 9

दोनों ही यौगिकों (compounds) में प्रत्येक कार्बन-परमाणु अन्य चार परमाणुओं से जुड़ा होता है। आइसोब्यूटेन की तरह ब्यूटेन में ऐसा कोई भी कार्बन-परमाणु नहीं होता जो कि अन्य सभी कार्बन-परमाणुओं से जुड़ा हो। जल-अणु H_2O को पथ P_3 से दर्शाया जा सकता है जैसा कि चित्र 10 में दिखाया गया है।



चित्र 10

आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण लें।

उदाहरण 5 : मानलीजिए a, b, c, d, u, v, x, y भारत के आठ नगरों को निरूपित करते हैं। इनमें से कुछ नगर-युग्मों के बीच राजमार्ग बने हुए हैं। चित्र 11 में इन नगरों के रोडमैप का ग्राफ़ दिखाया गया है जहाँ प्रत्येक नगर को एक शीर्ष से निरूपित किया गया है और दो शीर्षों को एक कोर से मिलाया गया है जबकि इन शीर्षों के संगत नगर एक राजमार्ग से जुड़े हुए हैं। चित्र 11 में दिए गए ग्राफ़ में निम्नलिखित गमन के उदाहरण ज्ञात कीजिए।

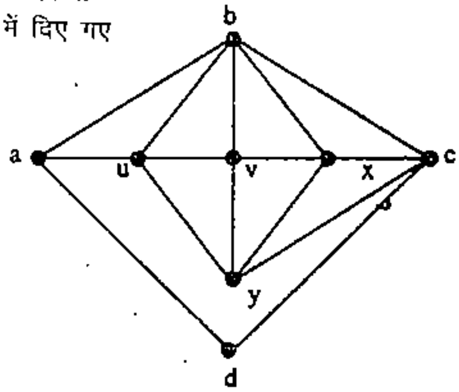
क) एक u – v गमन जो पथचिह्न नहीं है

ख) एक u – v पथचिह्न जो पथ नहीं है

ग) लंबाई 5 वाला एक u – v पथ

घ) एक u – u परिपथ जो चक्र नहीं है।

ङ) लंबाई 8 वाला एक u – u चक्र।



चित्र 11

हल

क) गमन u, v, x, y, v, b, u, v पथचिह्न नहीं है, क्योंकि कोर uv की पुनरावृत्ति हुई है।

ख) पथचिह्न u, b, x, y, c, x, v पथ नहीं है क्योंकि शीर्ष x की पुनरावृत्ति हुई है।

ग) पथ u, a, d, c, x, v की लंबाई 5 है।

घ) परिपथ u, b, v, y, x, v, u चक्र नहीं है, क्योंकि शीर्ष v की पुनरावृत्ति हुई है।

ङ) चक्र u, v, x, y, c, d, a, b, u की लंबाई 8 है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E3) उदाहरण 1), 2) और 3) के प्रत्येक ग्राफ़ का शीर्ष समुच्चय V और कोर-समुच्चय E लिखिए। यदि आप बता सकें तो इन ग्राफ़ों के नाम बताइए।

E4) उदाहरण 5 के (क) से (ङ) तक के प्रत्येक भाग के लिए ऊपर दिए गए उदाहरण से भिन्न उदाहरण दीजिए।

अब हम कुछ और परिभाषाएँ लेंगे।

परिभाषा : दो ग्राफ़ $G = (V(G), E(G))$ और $H = (V(H), E(H))$ असंयुक्त (disjoint) होते हैं जबकि उनका कोई शीर्ष उभयनिष्ठ नहीं होता अर्थात् $V(G) \cap V(H) = \phi$.

उदाहरण के लिए, चित्र 9 में दिखाए गए ब्यूटेन और आइसोब्यूटेन के दो ग्राफ़ असंयुक्त ग्राफ़ हैं।

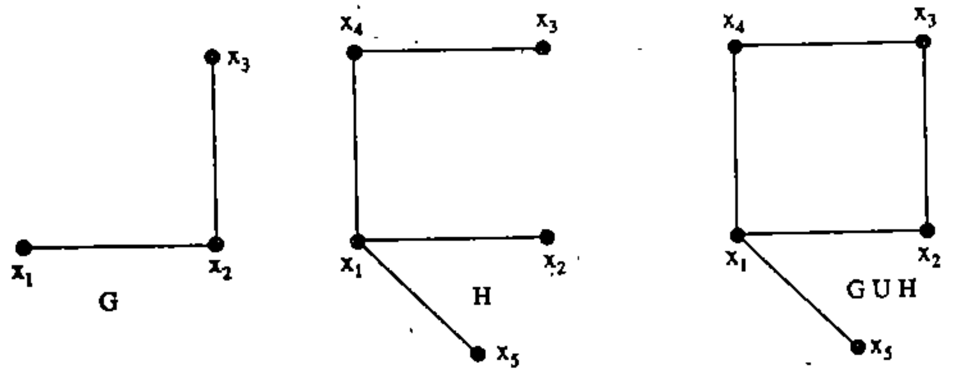
ध्यान दीजिए कि जब दो ग्राफ़ असंयुक्त होते हैं तो उनकी कोरें भी असंयुक्त होती हैं। यदि ऐसा नहीं हो, तो G और H दोनों ही में एक कोर e होगी और तब e के सिरे भी G और H दोनों में होंगे।

परिभाषा : दो ग्राफ़ों G और H का **सम्मिलन** (union) वह ग्राफ़ होता है जिसके शीर्ष समुच्चय में वे सभी शीर्ष होते हैं जो कि या तो G में या H में (या दोनों में) होते हैं और जिसके कोर-समुच्चय में वे सभी कोरें होती हैं जो कि या तो G में या H में (या दोनों में) होती हैं; प्रतीक रूप में

$$V(G \cup H) = V(G) \cup V(H)$$

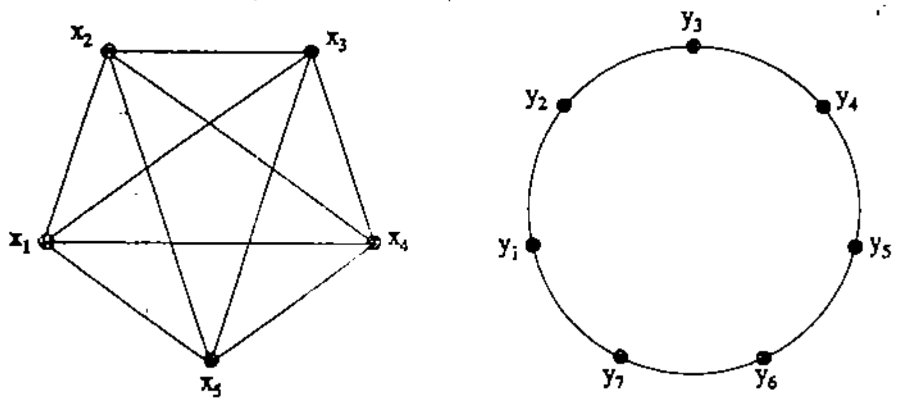
$$E(G \cup H) = E(G) \cup E(H)$$

उदाहरण के लिए, चित्र 12 में दो ग्राफ़ G, H और उनका सम्मिलन $G \cup H$ दिया गया है।



चित्र 12

उदाहरण 6 : निम्नलिखित ग्राफ़ लीजिए।

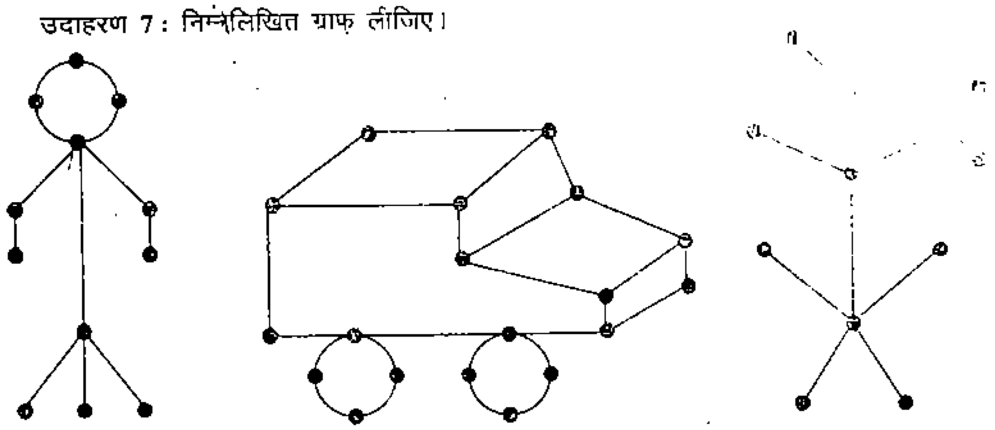


चित्र 13

स्पष्ट है कि यह K_5 और C_7 का सम्मिलन है।

* * *

उदाहरण 7 : निम्नलिखित ग्राफ़ लीजिए।

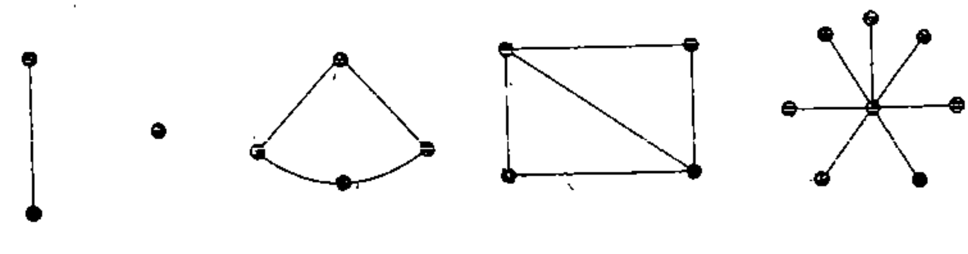


चित्र 14

स्पष्ट है कि यह तीन ग्राफ़ों का सम्मिलन है।

* * *

उदाहरण 8 : नीचे दिया गया ग्राफ़ पांच ग्राफ़ों का सम्मिलन है। इनमें से एक ग्राफ़ केवल एक वियुक्त बिन्दु है।



चित्र 15

* * *

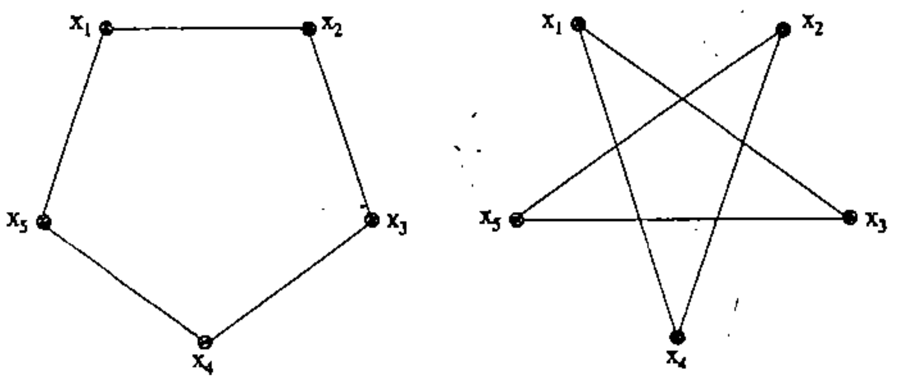
इस तरह, हम अनेक ग्राफ़ों का सम्मिलन ले सकते हैं।

आपको ऐसी स्थितियाँ भी देखने को मिल सकती हैं जहाँ दो ग्राफ़ों के समान शीर्ष-समुच्चय होते हैं, परन्तु उनके कोर-समुच्चय असंयुक्त होते हैं। क्या हम इस प्रकार के ग्राफ़ों को कोई विशेष नाम दे सकते हैं ? आइए अब हम निम्नलिखित परिभाषा लें।

परिभाषा : मानलीजिए $G = (V, E)$ एक (p, q) - ग्राफ़ है। पूरक $\overline{G}$ वह ग्राफ़ होता है जहाँ $V(\overline{G}) = V(G)$ और $E(\overline{G}) = \{xy : xy \notin E(G)\}$. स्पष्ट है कि $\overline{G}$ एक $(p, \overline{q})$ - ग्राफ़ है, जहाँ $\overline{q} = \{$ V के अवयव-युग्मों की संख्या $\} - q$.

क्योंकि p अवयवों वाले समुच्चय V में इस प्रकार के $^pC_2 = \frac{p(p-1)}{2}$ अवयव-युग्म हो सकते हैं, इसलिए $\overline{q} = \frac{p(p-1)}{2} - q$.

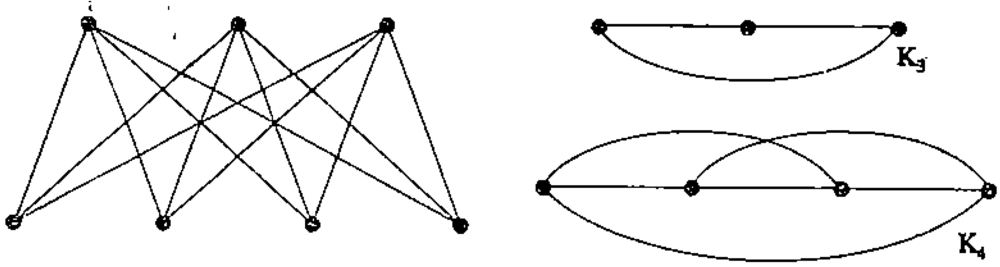
उदाहरण 9 : चित्र 16 में C_5 और उसका पूरक दिखाया गया है।



चित्र 16

***

उदाहरण 10 : चित्र 17(क) में दिखाया गया ग्राफ़ लीजिए। इसका पूरक दो असंयुक्त ग्राफ़ों में बंट जाता है।



चित्र 17

एक ग्राफ़ K_3 है और दूसरा K_4 है। (देखिए चित्र 17((ख))

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 9 में G एक (5, 5) ग्राफ़ है और $\overline{G}$ की 5 कोरें हैं। उदाहरण 10 में, G एक (7, 12) ग्राफ़ है और $\overline{G}$ की 9 कोरें हैं। क्या आप G के शीर्षों और $\overline{G}$ की कोरों के बीच कोई संबंध देखते हैं ? आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए और इसका उत्तर प्राप्त कीजिए।

E5) नीचे तीन ग्राफ़ G_1, G_2 और G_3 दिए गए हैं

$G_1 = (\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}, \{u_1u_2, u_1u_5, u_1u_6, u_2u_3, u_2u_5, u_3u_4, u_4u_5\})$

$G_2 = (\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5\}, \{u_1u_2, u_1u_3, u_1u_4, u_1u_5, u_2u_4, u_2u_5, u_3u_4, u_3u_5\})$

$G_3 = (\{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}, \{u_1u_2, u_1u_4, u_1u_5, u_2u_3, u_3u_4, u_3u_6, u_5u_6\})$

$\overline{G}_1, \overline{G}_2$ और $\overline{G}_3$ ज्ञात कीजिए।

E6) यदि G एक (p, q) ग्राफ़ हो, तो बताइए कि $\overline{G}$ में कितनी कोरें हो सकती हैं ?

आइए अब हम बिजली के नेटवर्क वाली स्थिति को पुनः लें। जब कोई मिस्त्री इस प्रकार के नेटवर्क पर काम करता है, तो स्वयं अपनी सुरक्षा के लिए उसे यह जानना आवश्यक होता है कि कितने गैजेट एक बिन्दु से जुड़े हुए हैं, इसी प्रकार सार्वजनिक परिवहन नेटवर्क का प्रभावी ढंग से प्रयोग करने के लिए यह जानना आवश्यक होता है कि कौन-कौन से स्थान प्रारंभिक स्थान से जुड़े हुए है। अलग-अलग व्यक्तियों के लिए यह प्रारंभिक स्थान भी अलग-अलग होता है। इसका अर्थ यह है कि इस प्रकार के तंत्र का सफलता से प्रयोग करने के लिए उन स्थानों को ध्यान में बनाए रखना उत्तम होता है जहाँ दिए हुए बिन्दु से कोई पहुँच सकता है। हम इस समस्या को ग्राफ़ सिद्धांत की भाषा में रूपांतरित करेंगे।

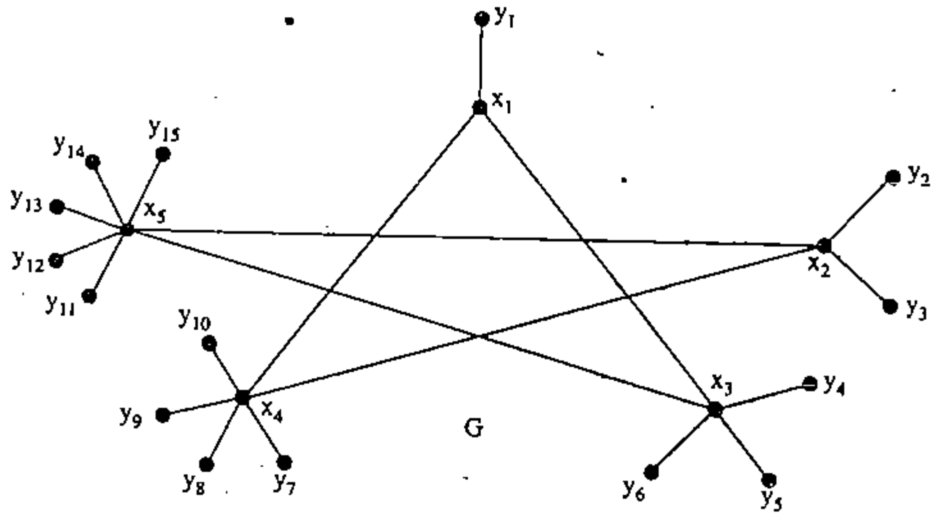
10.3 नियमित ग्राफ़

आपको याद होगा कि प्रारंभ में हमने यह परिभाषित किया था कि ग्राफ़ G के दो शीर्ष तब संलग्न होते हैं जबकि उन्हें एक कोर से मिलाया जा सकता हो। इस प्रकार के शीर्षों को प्रतिवेश (neighbours) भी कहा जाता है। G के एक नियत शीर्ष x के सभी प्रतिवेशों के समुच्चय को x का प्रतिवेश समुच्चय (neighbourhood set) कहा जाता है। इसकी औपचारिक परिभाषा निम्नलिखित है।

परिभाषा : मानलीजिए $G = (V, E)$ एक (p, q)-ग्राफ़ है। शीर्ष $x \in V$ के लिए G में x के **प्रतिवेश** $N_G(x)$ का अर्थ है समुच्चय $\{y \in V : xy \in E\}$ अर्थात्, शीर्ष x के संलग्न सभी शीर्षों का समुच्चय। शीर्ष $y \in N_G(x)$ को G में x का **प्रतिवेश** कहा जाता है।

क्योंकि हमारे ग्राफ़ सरल ग्राफ़ हैं इसलिए $N_G(x)$ और शीर्ष x के साथ आपतित G की सभी कोरों के समुच्चय के बीच एकैक संगति होती है। G के शीर्ष x की कोटि $d_G(x)$ का अर्थ है शीर्ष के साथ आपतित कोरों की संख्या। स्पष्ट है कि $d_G(x) = |N_G(x)|$ जहाँ $|N_G(x)|$ समुच्चय $N_G(x)$ के अवयवों की संख्या को प्रकट करता है और, क्योंकि (p, q) ग्राफ़ में शीर्ष x के साथ आपतित कोरों की अधिकतम संख्या $(p-1)$ हो सकती है, इसलिए G के प्रत्येक शीर्ष x के लिए $0 \le d_G(x) \le (p-1)$, जब कभी भ्रम की कोई आशंका न हो, तो हम $d_G(x)$ के स्थान पर केवल $d(x)$ लिखते हैं। ग्राफ़ G के शीर्ष x को **सम शीर्ष** (even vertex) कहा जाता है जबकि $d_G(x)$ सम हो, अन्यथा इसे **विषम शीर्ष** (odd vertex) कहा जाता है। आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण लें।

उदाहरण 11 : चित्र 18 में दिखाया गया ग्राफ़ G लीजिए।



चित्र 18

पहले शीर्ष x_1 लीजिए। स्पष्ट है कि इसके साथ तीन कोरें आपतित हैं और $d(x_1) = 3$. इसी प्रकार आप यह देख सकते हैं कि

$d(x_2) = 4$, $d(x_3) = 5$, $d(x_4) = 6$ और $d(x_5) = 7$.

हम ऊपर के प्रेक्षणों को $d(x_i) = i + 2$, जहाँ $1 \le i \le 5$. के रूप में भी लिख सकते हैं। इसी प्रकार हम $d(y_j) = 1$, जहाँ $1 \le j \le 15$ लिख सकते हैं।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E7) 6 से 10 तक के उदाहरणों के सभी शीर्षों की कोटि लिखिए।

E8) यदि G एक (p, q) ग्राफ़ हो और x, G का एक शीर्ष हो, तो दिखाइए कि $\overline{G}$ में x की कोटि $p - 1 - d_G(x)$ है।

ध्यान दीजिए कि उदाहरण 11 में

$$d(x_1) + d(x_2) + \ldots + d(x_5) + d(y_1) + \ldots + d(y_{15}) = 40$$
$$= 2 \times 20$$
$$= 2 \times (G \text{ में कोरों की संख्या})$$

यही बात आपको 6 से 10 तक के उदाहरणों में भी देखने को मिलेगी जिन्हें कि अभी आपने E7) में हल किया है। यह कोई संयोग नहीं है। यह निम्नलिखित प्रमेय से प्राप्त होता है।

प्रमेय 1 : यदि G एक (p, q) ग्राफ़ हो, जहाँ $V(G) = \{v_1, \ldots, v_p\}$ और यदि $d_i = d_G(v_i)$, $1 \le i \le p$, तो $2q = \sum_{i=1}^{p} d_i$ अर्थात्, G के शीर्षों की कोटियों का योगफल सम होता है। या किसी भी ग्राफ़ में सभी शीर्ष-कोटियों का योगफल कोरों की संख्या का दोगुना होता है।

उपपत्ति : समुच्चय $S = \{(x, e) : x \in V(G), e \in E(G), x, e \text{ पर आपतित है}\}$ एक शीर्ष $v_i \in V$ लीजिए। इसका चयन p विधियों से किया जा सकता है। अब, क्योंकि $d_i = d(v_i)$, इसलिए इस शीर्ष v_i के साथ आपतित ठीक-ठीक d_i कोरें होंगी। इन कोरों से समुच्चय S के d_i अवयव प्राप्त होते हैं। इस प्रकार G के सभी शीर्षों की कोरों को जोड़ने पर हमें यह प्राप्त होता है

$$|S| = \sum_{i=1}^{p} d_i \qquad (1)$$

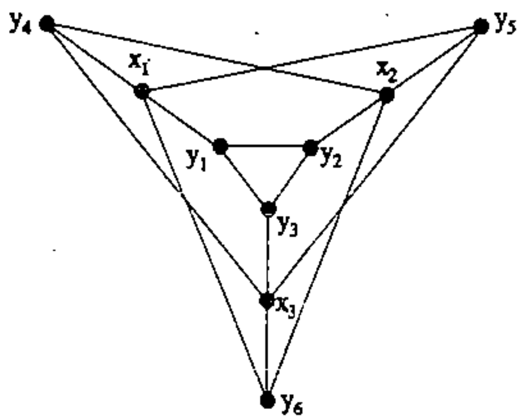
अब E(G) में एक कोर लीजिए। इसका चयन q विधियों से किया जा सकता है। इस कोर के ठीक-ठीक दो अंत शीर्ष होते हैं और इनसे S के दो अवयव प्राप्त होते हैं। प्रत्येक कोर $e \in E(G)$ पर संकलन करने पर हमें यह प्राप्त होता है।

$$|S| = 2q. \qquad (2)$$

ऐसा इसलिए है क्योंकि प्रत्येक कोर को दो बार गिना गया है। एक-एक बारी दोनों शीर्षों के लिए। समीकरण (1) और (2) की तुलना करने पर हमें अभीष्ट परिणाम प्राप्त हो जाता है।

इसतरह, हम यह कह सकते हैं कि किसी भी ग्राफ़ के सभी शीर्षों की कोटियों का योगफल सम होता है। इस परिणाम को **"हाथ मिलाना प्रमेयिका"** (Hand shaking Lemma) के नाम से भी जाना जाता है। आइए हम निम्नलिखित उदाहरण लेकर इसकी जांच करें।

उदाहरण 12 : निम्नलिखित ग्राफ़ लीजिए।



चित्र 19

स्पष्ट है कि प्रत्येक x_i, $1 \le i \le 3$, एक सम शीर्ष है और प्रत्येक की कोटि 4 है। शेष सभी शीर्ष y_i,

$1 \le i \le 6$ विषम शीर्ष हैं जिनमें प्रत्येक की कोटि 3 है। सभी शीर्षों की कोटियों का योगफल क्या होगा ? आप यह जांच कर सकते हैं कि ये योगफल 30 है।

अभी तक की चर्चा में इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि सरल (p, q)-ग्राफ G के लिए कोर-समुच्चय E (G), V(G) के अवयवों के आमाप (size) 2 वाले सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय का एक उपसमुच्चय है। इसका अर्थ यह है कि $q \le \frac{p(p-1)}{2}$. परन्तु, तब आप यह अवश्य जानना चाहेंगे कि क्या इस परिणाम का विपरीत परिणाम भी सदा सही होता है ? अर्थात् किसी भी धन पूर्णांक-युग्म (p, q) के लिए, जहाँ $q \le \frac{p(p-1)}{2}$. क्या सदा ही एक (p, q) ग्राफ़ प्राप्त किया जा सकता है ?

इस प्रश्न का उत्तर प्रमेय 1 से प्राप्त हो जाता है। इससे हमें एक आवश्यक प्रतिबंध प्राप्त होता है जिसके अधीन किसी भी (p, q)-ग्राफ़ का अस्तित्व होता है। इससे हम यह देख सकते हैं कि यह आवश्यक नहीं कि दी हुई कोटियों के शीर्षों वाले ग्राफ़ का अस्तित्व सदा ही हो। मानलीजिए आपसे यह प्रश्न किया जाता है।

12 शीर्षों पर एक ग्राफ़ बनाइए जिसमें 2 शीर्ष कोटि 1 वाले हैं 3 शीर्ष कोटि 3 वाले हैं और शेष 7 शीर्ष कोटि 10 वाले हैं।

क्या आप ऐसा कर सकते हैं ? इसका उत्तर है 'नहीं'। ऐसा इसलिए है क्योंकि यहाँ प्रमेय 1 का प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता। सभी शीर्षों की कोटियों का योगफल है

$1 + 1 + 3 + 3 + 3 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 81$, जो सम नहीं है।

* * *

एक अन्य परिणाम को प्राप्त करने के लिए हम प्रमेय 1 को लागू कर सकते हैं। अब हम इस पर चर्चा करेंगे।

उपप्रमेय : किसी भी ग्राफ़ के विषम शीर्ष सम संख्या में होते हैं।

उपपत्ति : मानलीजिए G एक (p, q)-ग्राफ़ है और मानलीजिए $\{x_1, \ldots, x_t\}$ सभी विषम शीर्षों का समुच्चय है और $\{x_{t+1}, \ldots, x_p\}$, G के सभी सम शीर्षों का समुच्चय है। मानलीजिए, $d_G(x_i) = 2C_i + 1, 1 \le i \le t$ और $d_G(x_i) = 2r_i, t + 1 \le i \le p$. तब

$$2q = \sum_{1}^{p} d_G(x_i) \text{ से यह प्राप्त होता है}$$

$$2q = \sum_{1}^{t} (2C_i + 1) + \sum_{t+1}^{p} (2r_i)$$

$$= 2(C_1 + C_2 + \ldots + C_t) + t + 2(r_{t+1} + \ldots + r_p)$$

इस तरह, $t = 2q - 2(C_1 + \ldots + C_t) - 2(r_{t+1} + \ldots + r_p)$.

इससे यह पता चलता है कि t सम है। अर्थात्, **विषम शीर्ष सम संख्या में होते हैं।**

अब हम इससे प्राप्त एक अन्य रोचक परिणाम प्रस्तुत करेंगे।

उपप्रमेय : एक पार्टी में विषम संख्या में लोगों से हाथ मिलाने वाले लोगों की संख्या सम होती है।

उदाहरण 13 : K_{10} लीजिए। सभी शीर्षों की कोटि 9 है। इसका अर्थ यह है कि सभी दस शीर्ष विषम शीर्ष होते हैं। इसके विपरीत K_{11} में सभी शीर्षों की कोटि 10 है अर्थात् सभी ग्यारह शीर्ष सम शीर्ष होते हैं।

* * *

उदाहरण 13 में आप यह देख सकते हैं कि सम शीर्षों की संख्या विषम है। इससे यह अर्थ नहीं निकाल लेना चाहिए कि यह प्रत्येक ग्राफ़ के लिए सत्य है। ग्राफ़ C_{10} के 10 शीर्ष हैं और सभी शीर्षों की कोटि 2 है। अर्थात्, C_{10} के 'सम शीर्ष' सम संख्या में हैं।

अब हम एक ग्राफ़ G की न्यूनतम और अधिकतम शीर्ष कोटि परिभाषित करेंगे।

परिभाषा : यदि G = (V, E) एक (p, q)-ग्राफ़ हो, तो पूर्णांक $\delta(G) = \min\{d_G(x) : x \in V(G)\}$ को **G की न्यूनतम शीर्ष कोटि** कहा जाता है। और पूर्णांक $\Delta(G) = \max\{d_G(x) : x \in V(G)\}$ को **G की अधिकतम शीर्ष कोटि** कहा जाता है।

वस्तुतः हम शीर्षों को $V(G) = \{v_1, \ldots, v_p\}$ के रूप में संख्या दे सकते हैं जहाँ, $d_i = d(v_i)$.

$1 \le i \le p$ जिससे कि $d_1 \ge d_2 \ge \ldots \ge d_p$. इसे ग्राफ़ G का **कोटि अनुक्रम** (degree sequence) कहा जाता है।

उदाहरण के लिए उदाहरण 12 में ग्राफ़ G का कोटि अनुक्रम 4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3 है।

अब आप कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E9) 1 से 3 तक के उदाहरणों और उदाहरणों 9, 11, 12 के सभी ग्राफ़ों के लिए $\delta(G)$ और $\Delta(G)$ लिखिए।

E10) निम्नलिखित प्रत्येक भाग में ऋणेतर पूर्णांकों की एक सूची दी हुई है। प्रत्येक के लिए, इस कोटि अनुक्रम वाले एक ग्राफ़ का उदाहरण दीजिए या तर्क के साथ यह बताइए कि इस कोटि अनुक्रम वाला कोई भी ग्राफ़ नहीं हो सकता।

(क) (3, 2, 2, 2, 1)   (ख) (3, 2, 2, 2, 1, 1)
(ग) (4, 3, 2, 1, 0)   (घ) (4, 4, 3, 3, 2, 2) (ङ) (5, 5, 5, 4, 4, 3, 3)

E11) मानलीजिए G एक (p, q) ग्राफ़ है जिसके सभी शीर्ष की कोटियाँ या तो k है या k + 1 हैं। यदि G के $p_k > 0$ शीर्ष, k कोटि वाले हों और p_{k+1} शीर्ष k + 1 कोटि वाले हों तो $p_k = (k+1)p - 2q$.

चित्र 9 में आपने ब्यूटेन और आइसोब्यूटेन के दो ग्राफ़ देखे जो कि अलग-अलग दिखाई पड़ते हैं लेकिन इनके कोटि अनुक्रम समान हैं अर्थात

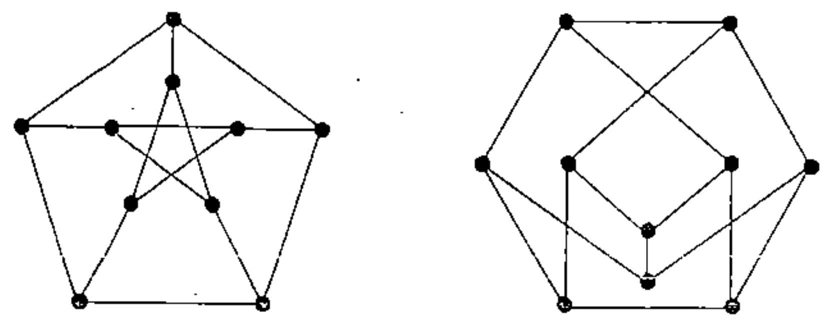
4, 4, 4, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1.

यह भी संभव है कि कुछ ग्राफ़ों के कोटि अनुक्रम अचर हों। अर्थात्, इनके शीर्षों में से प्रत्येक शीर्ष की कोटि समान हो। उदाहरण के लिए, यदि आप C_5 और उसके पूरक को देखें तो आप पाएगें कि $d(x_i) = 2, 1 \le i \le 5$ इस तरह, C_5 और उसके पूरक का कोटि अनुक्रम 2, 2, 2, 2, 2 है। अर्थात्, यह एक अचर 2 है। इस प्रकार ग्राफ़ काफी विशिष्ट होते हैं। इन्हें हम इस प्रकार परिभाषित करते हैं।

परिभाषा : आलेख G को नियमितता कोटि r वाला **नियमित ग्राफ़** कहा जाता है जबकि प्रत्येक शीर्ष $x \in V(G)$ के लिए $d_G(x) = r$. इस स्थिति में प्रायः हम यह भी कहते हैं कि G एक r-नियमित ग्राफ़ है। स्पष्ट है कि $0 \le r \le (p-1)$.

आलेख K_n, C_n नियमित ग्राफ़ हैं जिनकी नियमितता कोटियाँ क्रमशः (n – 1) और 2 हैं।

इस संबंध में विशेष महत्व घन (cubic) ग्राफ़ का है जो कि तीन कोटि वाला नियमित ग्राफ़ है और जिसके बारे में अध्ययन आप अगली इकाई में करेंगे। घन ग्राफ़ का सुप्रसिद्ध उदाहरण **पिटर्सन ग्राफ़** है। पिटर्सन ग्राफ़ के दो आरेखण चित्र 20 में दिखाए गए हैं।



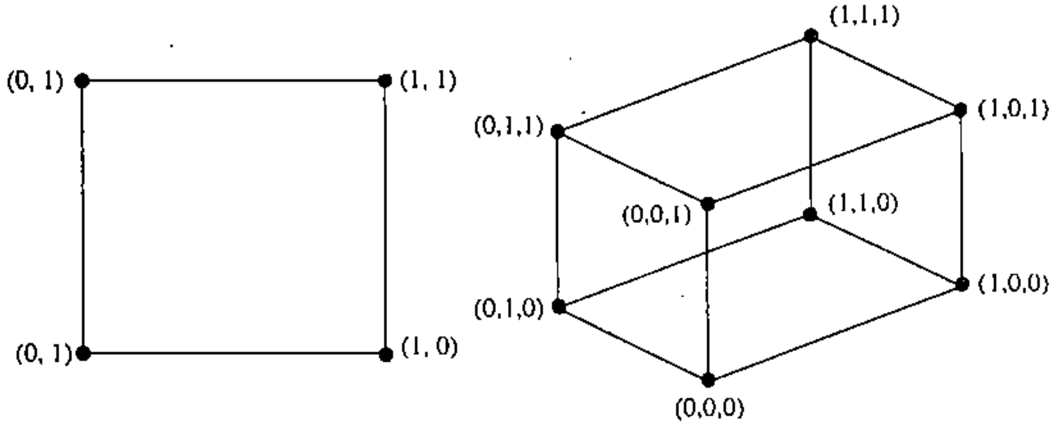
चित्र 20

ध्यान दीजिए कि यह एक (10, 15) ग्राफ़ है। आइए अब हम नियमित ग्राफ़ का निम्नलिखित उदाहरण लें।

उदाहरण 14 : अतिघन (Hypercube) Q_n : मानलीजिए शीर्ष-समुच्चय में सभी n-अंक (n - tuples) हैं। जिनकी प्रविष्टियाँ केवल 0, 1 हैं और कोर-समुच्चय इस प्रकार का है

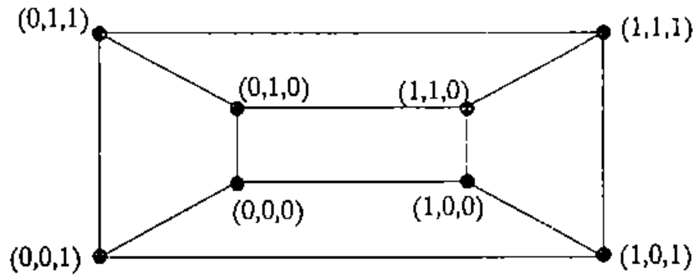
$E(Q_n) = \{\bar{a}\,\bar{b}$: केवल एक ही निर्देशांक पर $\bar{a}$ और $\bar{b}$ में अंतर है$\}$

यहाँ, $\bar{a}$ का अर्थ है n अंक $(a_1, \ldots, a_n)$ जहाँ $1 \le i \le n$ के लिए $a_i = 0$ या 1



क चित्र 21 ख

कोई भी शीर्ष $\bar{a}$ ठीक-ठीक अन्य n शीर्षों के संलग्न होता है। उदाहरण के लिए, $(0, 0, \ldots, 0)$ संलग्न है $(1, 0, 0, \ldots, 0), (0, 1, 0, 0, \ldots, 0) \ldots (0, 0, \ldots, 1)$ के। अतः अतिघन Q_n, n नियमित हैं।



चित्र 22

चित्र 21(क) में, Q_2 का ग्राफ दिखाया गया है, जबकि चित्र 21(ख) और चित्र 22 दोनों में Q_3 का ग्राफ़ दिखाया गया है। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि n-नियमित अतिघन Q_n के 2^n शीर्ष और $n2^{n-1}$ कोरें हैं।

* * *

यदि G, p शीर्षों पर एक r-नियमित ग्राफ़ हो, तो प्रमेय 1 के अनुसार $2q = r \times p$. इस तरह, 2 गुणनफल $p \times r$ को विभाजित करता है। इसका अर्थ यह है कि p अथवा r में से कम से कम एक सम अवश्य है। इससे अब यह प्रश्न उठता है कि यदि पूर्णांक-युग्म p, r, $0 \le r \le (p-1)$ दिए हुए हों, जहाँ $p \times r$ सम हैं तो क्या हम सदा ही p शीर्षों पर एक r-नियमित ग्राफ़ बना सकते हैं ? इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त करने के लिए आइए हम निम्नलिखित प्रमेय लें।

प्रमेय 2: पूर्णांक युग्म p, r दिए हुए हों, जहाँ इनमें से कम से कम एक सम हो और $0 \le r \le (p-1)$ तो सदैव ही p शीर्षों पर नियमितता कोटि r वाले एक नियमित ग्राफ़ का अस्तित्व होता है।

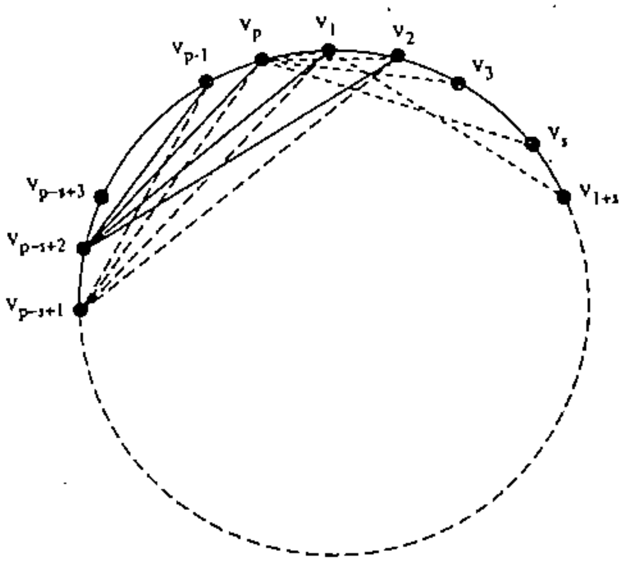
उपपत्ति : इसकी उपपत्ति रचनात्मक है। अर्थात्, हम वास्तव में अभीष्ट कोटि वाले ग्राफ़ों की रचना करते हैं। इस संबंध में दो स्थितियाँ होती हैं :

स्थिति 1 : r सम हो। $r = 2s$ लिखिए जहाँ s कोई पूर्णांक है। अब आप इस प्रकार ग्राफ G की रचना करें कि $V(G) = \{v_1, \ldots, v_p\}$. इन्हें वृत्तीय रूप में रखिए जैसा कि चित्र 23 में दिखाया गया है। एक कोर के द्वारा प्रत्येक v_i को v_{i+j} से मिलाए, जहाँ $1 \le i \le p-s$, $1 \le j \le s$. इसके अतिरिक्त शीर्षों को इस प्रकार मिलाइए

i) शीर्ष v_{p-s+1} को शीर्षों $v_{p-s+2}, v_{p-s+3}, \ldots, v_1$ से मिलाइए।

ii) शीर्ष v_{p-s+2} को शीर्षों $v_{p-s+3}, v_{p-s+4}, \ldots, v_2$ से मिलाइए।

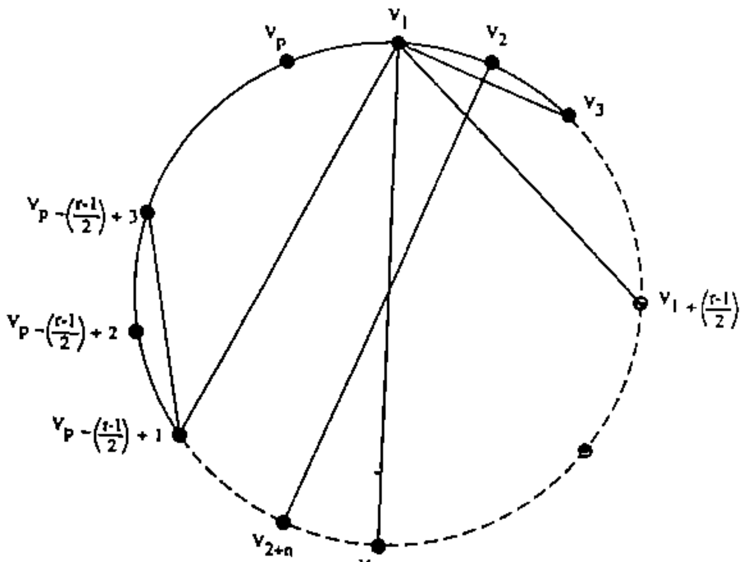
iii) शीर्ष v_p को शीर्षों $v_1, v_2, \ldots, v_s$ से मिलाइए।



चित्र 23

ध्यान दीजिए कि क्योंकि यहाँ p शीर्ष $v_1, v_2, \ldots, v_p$ हैं, इसलिए जब कभी भी s के किसी मान के लिए कोई भी पादाक्षर (subscript) $p-s+2, p-s+3, p-s+4, \ldots, p$ से अधिक हो जाता है तब फिर से $1, 2, \ldots$ से चक्र की पुनरावृत्ति हो जाती है। अर्थात्, संगत शीर्ष $v_1, v_2, \ldots$ आदि हो जाते हैं। आप यहाँ यह जांच कर सकते हैं कि यह एक r-नियमित ग्राफ़ है। यद्यपि इसकी जांच करना कठिन है, परन्तु इस प्रमेय के बाद दिए गए उदाहरणों की सहायता से आप जांच कर सकते हैं।

स्थिति 2 : r विषम हो। तब p अवश्य सम होगा। $p = 2n$ लीजिए। क्योंकि r विषम है, इसलिए $(r-1)$ सम होगा। स्थिति 1 को लागू करके हम शीर्षों $\{v_1, \ldots, v_p\}$ पर एक ग्राफ़ बना सकते हैं जो कि $(r-1)$ नियमित है। (देखिए चित्र 24)

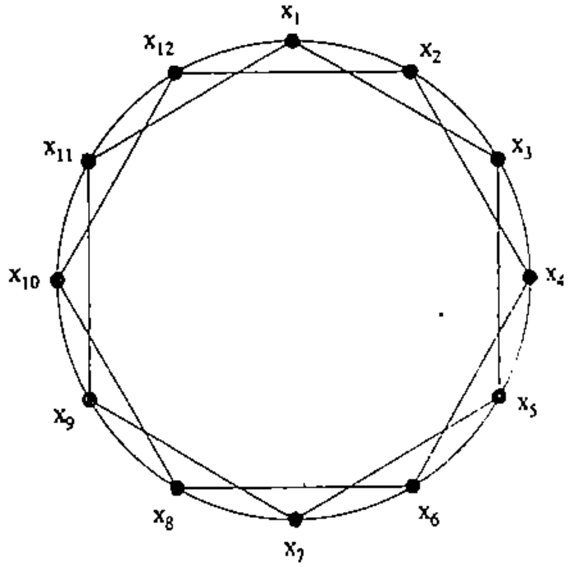


चित्र 24

अब, $\frac{(r-1)}{2} \le \frac{(p-1)}{2} < \frac{p}{2} = n$ (मान लीजिए)। अतः पुनरावृत्ति के भय के बिना हम प्राप्त ग्राफ़ में कोरों $v_i v_{i+n}$, $1 \le i \le n$ को जोड़ सकते हैं। अब क्योंकि प्रत्येक शीर्ष पर एक नयी कोर जोड़ दी गई है, इसलिए ग्राफ़ r-नियमित हो जाता है।

अब हम नीचे दिए गए उदाहरणों की सहायता से इन दो स्थितियों को अच्छी तरह समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 15 : मान लीजिए $p = 12, r = 4$, बारह शीर्ष $\{x_1, \ldots, x_{12}\}$ लीजिए। इन्हें वृत्तीय रूप में रखिए जैसा कि चित्र 25 में दिखाया गया है।

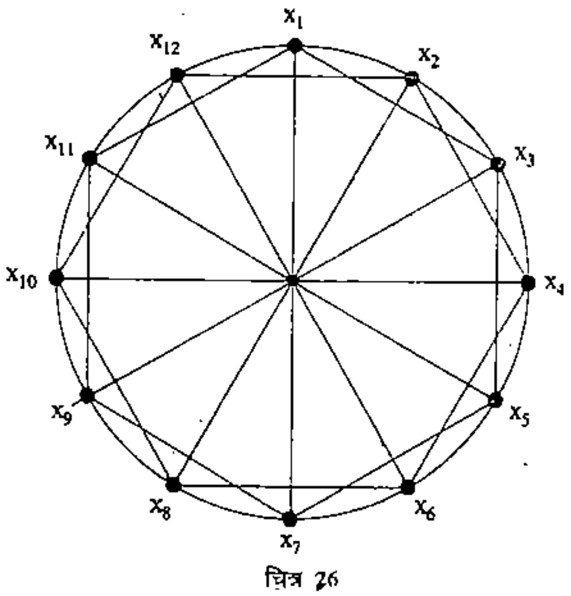


चित्र 25

इस स्थिति में, $s = r/2 = 2$. शीर्ष x_i को x_{i+1} से एक कोर द्वारा मिलाइए जहाँ, $1 \le i \le 11$. अब एक कोर की सहायता से x_{12} को भी x_1 से मिलाइए। अब सभी शीर्षों की कोटि 2 हो गई है। अब, प्रत्येक x_i को x_{i+2} से मिलाइए जहाँ, $1 \le i \le 10$. अंत में, x_{11} को x_1 से और x_{12} को x_2 से मिलाइए। आप यह स्पष्ट रूप से देख सकते हैं कि परिणामी ग्राफ 4-नियमित ग्राफ है।

* * *

उदाहरण 16 : मानलीजिए $p = 12, r = 15$. यहां हम यह देखते हैं कि $\frac{r}{2}$ एक पूर्णांक नहीं हैं। परन्तु, $\frac{(r-1)}{2}$ एक पूर्णांक है। अतः 12 शीर्षों के लिए उदाहरण 15 की रचना को पुनः दोहराते हुए हमें नियमितता $(r-1) = 4$ वाला ग्राफ़ प्राप्त हो जाता है। उदाहरण 15 के इस ग्राफ़ को लीजिए। अब प्रत्येक x_i को x_{i+6} से मिलाइए जहां $1 \le i \le 6$. यहां $\frac{p}{2} = n = 6$.

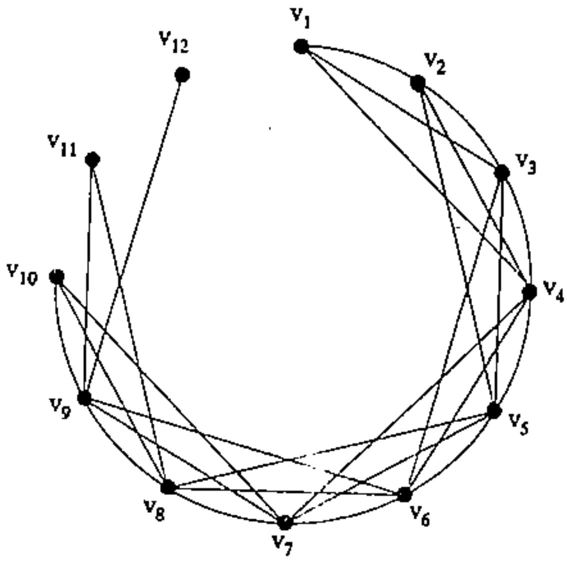


चित्र 26

यहां भी यह सरलता से देखा जा सकता है कि परिणामी ग्राफ़ 5-नियमित ग्राफ़ है (देखिए चित्र 26)।

* * *

उदाहरण 17 : आइए अब हम 12 शीर्षों पर 6-नियमित और 7-नियमित ग्राफ बनाएं। इस संबंध में आइए सबसे पहले हम 6-नियमित ग्राफ़ बनाएँ। यहां $s = 3$, चित्र 27 को देखिए। यहां 12 शीर्ष एक वृत्तीय रूप में रखे गए हैं जहां $v_1, v_2, \ldots, v_9$ में से प्रत्येक को आरोही रूप में अगले तीन शीर्षों से मिलाया गया है। अर्थात् v_1 को v_2, v_3, v_4 से मिलाया गया है, v_2 को v_3, v_4, v_5 से v_3 को v_4, v_5, v_6 से आदि आदि।

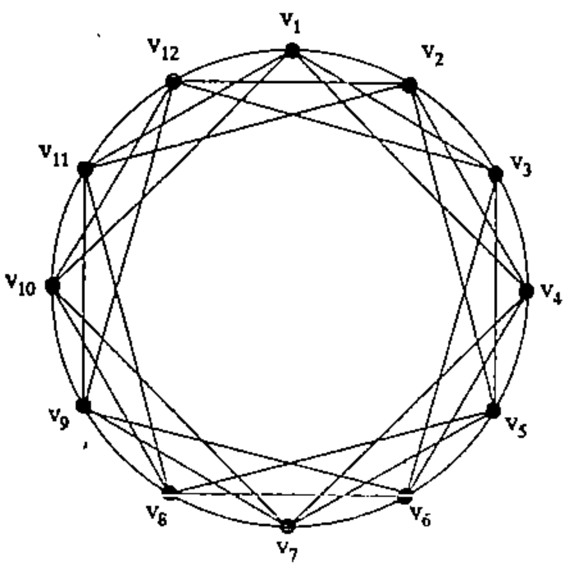


चित्र 27

आप यहां यह देख सकते हैं कि इस चरण के बाद $d(v_1) = 3$, $d(v_2) = 4$, $d(v_3) = 5$, $d(v_i) = 6$, जहां $4 \le i \le 9$, $d(v_{10}) = 3$, $d(v_{11}) = 2$ और $d(v_{12}) = 1$ है।

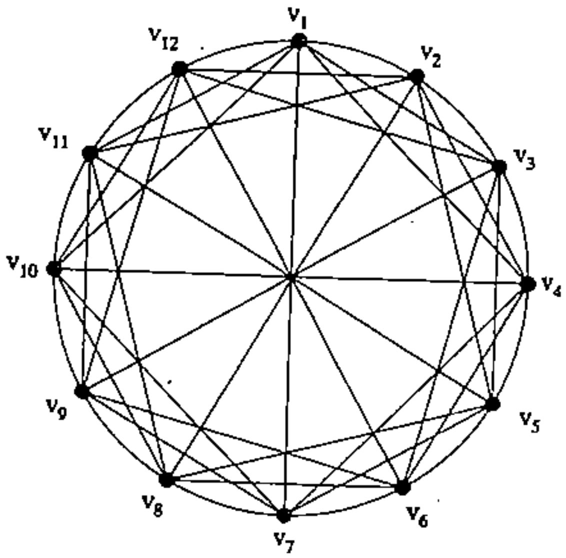
अब चित्र 28 में शेष कोरों $\{v_{10} v_{11}, v_{10} v_{12}, v_{10} v_1\}$, $\{v_{11} v_{12}, v_{11} v_1, v_{11} v_2\}$, $\{v_{12} v_1, v_{12} v_2, v_{12} v_3\}$ को भी मिला दिया गया है।

इन कोरों को मिला देने से v_1 से v_{12} तक के शीर्षों में से प्रत्येक शीर्ष की कोटि 6 हो जाती है। इससे 12 शीर्षों पर एक 6-नियमित ग्राफ़ प्राप्त होता है। (देखिए चित्र 28)।



चित्र 28

चित्र 29 को देखने से यह पता चलता है कि यदि चित्र 28 के ग्राफ़ में कोरों $v_i v_{i+6}$, $i \le i \le 6$ को मिला दिया जाए तो 12 शीर्षों पर एक 7-नियमित ग्राफ़ प्राप्त होता है।



चित्र 29

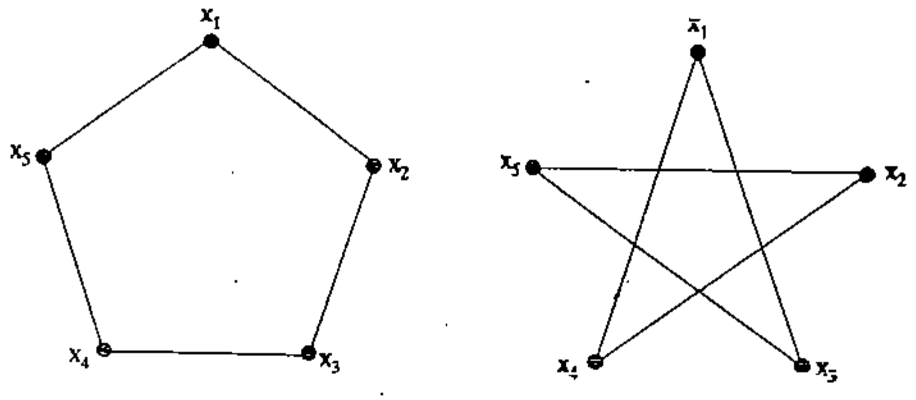
* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करके स्वयं यह देख सकते हैं कि नियमित ग्राफ़ों की रचना के संबंध में आप कितना जान सके हैं।

E12) 10 शीर्षों पर 5, 6 और 7 नियमित ग्राफ़ बनाइए।

आप सदैव ग्राफ़ों को केवल देखकर यह नहीं कह सकते कि ये 'अलग-अलग' ग्राफ़ हैं। वे केवल इस दृष्टि से अलग-अलग हो सकते हैं कि उनके शीर्षों और कोरों को किस तरह रखा गया है या इस दृष्टि से अलग-अलग हो सकते हैं कि ज्यामितीय रूप में उन्हें किस प्रकार निरूपित किया गया है। फिर भी, उनमें कुछ सर्वनिष्ठ लक्षण होते हैं या कुछ समानता होती है। इस समानता को एक विशेष नाम दिया गया है। अब हम इसे औपचारिक रूप से परिभाषित करेंगे।

उदाहरण 9 में आपने यह देखा है कि C_5 का पूरक भी C_5 की एक प्रतिलिपि होता है। इसे हम अधिक परिशुद्ध रूप में व्यक्त कर सकते हैं। आइए हम इन दो ग्राफ़ों को फिर से बनाएँ जैसा कि चित्र 30 में दिखाया गया है।

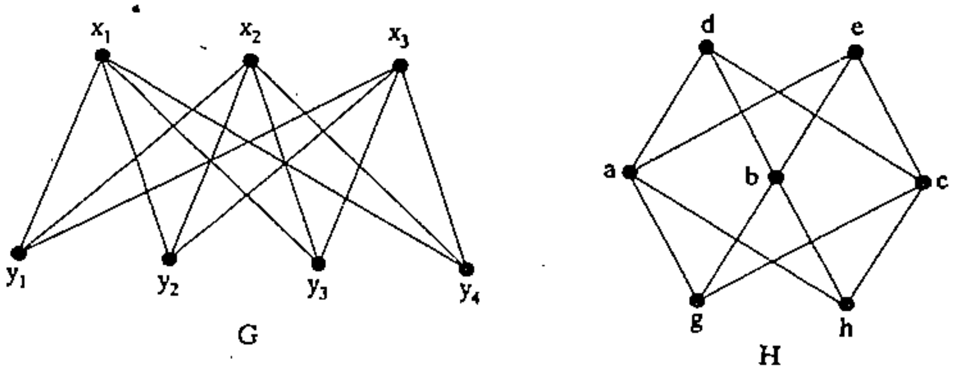


चित्र 30

हम प्रतिचित्र $f : V(C_5) \to V(\overline{C}_5)$ को इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं :

$f(x_1) = x_1$, $f(x_2) = x_3$, $f(x_3) = x_5$, $f(x_4) = x_2$, $f(x_5) = x_4$. इन्हें देखने से आपको किस बात का पता चलता है ? जब कभी $x_i x_j \in E(C_5)$, तब $f(x_i) f(x_j) \in E(\overline{C}_5)$ दूसरे शब्दों में प्रतिचित्र f से ग्राफ़ की संरचना परिरक्षित रहती है। आइए अब हम एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 18 : निम्नलिखित दो ग्राफ़ G और H लीजिए जैसा कि चित्र 31 में दिखाया गया है।



चित्र 31

एक प्रतिचित्र $f : V(G) \rightarrow V(H)$ इस प्रकार परिभाषित कीजिए :

$f(x_1) = a, f(x_2) = b, f(x_3) = c, f(y_1) = d, f(y_2) = e, f(y_3) = g, f(y_4) = h$. आप यहां यह देख सकते हैं कि $uv \in E(G)$ **यदि और केवल यदि** $f(u) f(v) \in E(H)$. शीर्ष $u \in V(G)$ के अनेक गुणधर्म V (H) में इसके प्रतिबिंब में होते है। उदाहरण के लिए यह देखा जा सकता है कि प्रत्येक $u \in V(G)$ के लिए $d_G(u) = d_H(f(u))$.

* * *

इस प्रकार के ग्राफ़ G और H तुल्याकारी (isomorphic) होते हैं। G और H के शीर्षों के बीच एकैकी संगति (one-one correspondence) होती है। आप यह भी देख सकते हैं कि G के किन्हीं दो शीर्षों को मिलाने वाली कोरों की संख्या H के संगत शीर्षों को मिलाने वाली कोरों की संख्या के बराबर होती है। दूसरे शब्दों में, दो ग्राफ़ G और H तुल्याकारी होते हैं जबकि V (G) और V (H) के बीच एकैकी संगति हो जो संलग्नताओं और असंलग्नताओं को परिरक्षित रखती हो। चित्र 31 में दिखाए गए दो ग्राफ़ निम्नलिखित संगति के अधीन तुल्याकारी हैं।

$x_1 \leftrightarrow a, x_2 \leftrightarrow b, x_3 \leftrightarrow c, y_1 \leftrightarrow d, y_2 \leftrightarrow e, y_3 \leftrightarrow g, y_4 \leftrightarrow h$.

अब हम इस संबंध में निम्नलिखित परिभाषा दे रहे हैं :

परिभाषा : मानलीजिए $G = (V(G), E(G))$, $H = (V(H), E(H))$ दो ग्राफ़ हैं। ग्राफ़ G से ग्राफ़ H पर तुल्याकारिता f का अर्थ एक ऐसे प्रतिचित्र $f : V(G) \rightarrow V(H)$ से है जिससे कि

1) f एकैकी और आच्छादी दोनों हो।

2) $xy \in E(G)$ यदि और केवल यदि $f(x) f(y) \in E(H)$.

इस स्थिति में तब हम कहते है कि G और H **तुल्याकारी** है, अन्यथा इन्हें **अ-तुल्याकारी** कहा जाता है।

यह दिखाने के लिए कि दो ग्राफ़ तुल्याकारी हैं, इनमें से एक से दूसरे पर एक तुल्याकारिता उत्पन्न कर देना ही पर्याप्त होता है। परन्तु यदि दो ग्राफ़ दिए हुए हों, तो यह दिखाना सरल नहीं होता कि उनके बीच किसी तुल्याकारिता का अस्तित्व नहीं है। तब प्रश्न उठता है कि हम यह किस प्रकार दिखाएगें कि दिए हुए दो ग्राफ़ तुल्याकारी नहीं हैं ? इस कार्य को करने में निम्नलिखित गुणधर्म काफी सहायक सिद्ध होते हैं। यदि दो ग्राफ़ तुल्याकारी हैं तो इन गुणधर्मों में से प्रत्येक गुणधर्म अवश्य संतुष्ट हो जाना चाहिए। इसतरह, यह दिखाने के लिए कि दो ग्राफ़ तुल्याकारी नहीं है, यह दिखा देना ही पर्याप्त होगा कि इन गुणधर्मों में से कोई-भी एक गुणधर्म लागू नहीं होता। अब हम यहां इन गुणधर्मों को दे रहे हैं।

गुणधर्म : मानलीजिए f, ग्राफ़ G से ग्राफ़ H पर एक तुल्याकारिता है। तब निम्नलिखित कथन लागू होते हैं :

1) यदि G एक (p, q) ग्राफ़ है, तो H भी एक (p, q)-ग्राफ़ होगा।

2) प्रतिलोम प्रतिचित्र f^{-1}, ग्राफ़ H से ग्राफ़ G पर एक तुल्याकारिता होता है।

3) यदि g ग्राफ़ H से ग्राफ़ K पर एक तुल्याकारिता है, तो मिश्र प्रतिचित्र (composite map) $g \circ f$ ग्राफ़ G से ग्राफ़ K पर एक तुल्याकारिता होती है।

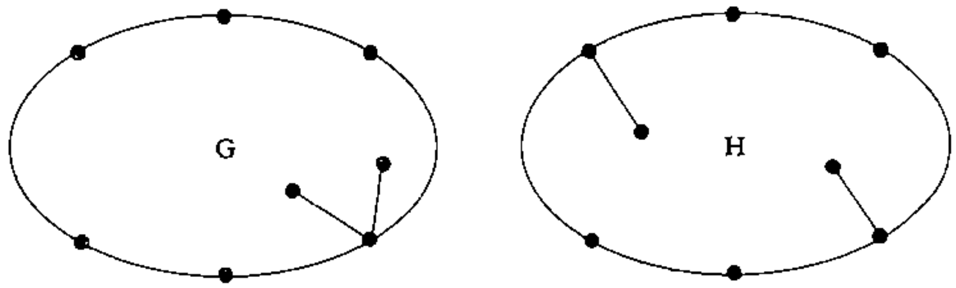
4) f, एक एकैक आच्छादी (bijective) प्रतिचित्र $\bar{f}: E(G) \to E(H)$ प्रेरित करता है, जिसके लिए $\bar{f}(x, y) = f(x)\, f(y)$.

5) प्रत्येक $x \in V(G)$ के लिए शीर्ष $y \in N_G(x)$ यदि और केवल यदि $f(y) \in N_H(f(x))$. इसका अर्थ यह है कि प्रत्येक $x \in V(G)$ के लिए $d_G(x) = d_H(f(x))$. इस तरह, ग्राफ़ G का कोटि अनुक्रम वही होता है जो कि ग्राफ़ H का।

6) यदि G का एक ऐसा शीर्ष-समुच्चय $\{x_1, ..., x_n\}$ हो कि प्रत्येक $1 \le i \le (n-1)$ के लिए $x_n x_i$ और $x_i x_{i+1}$, E (G) में हों, तो V (H) के शीर्ष $\{f(x_1) \ldots, f(x_n)\}$ ऐसे होते हैं कि प्रत्येक $1 \le i \le (n-1)$ के लिए $f(x_n)\, f(x_1)$ और $f(x_i)\, f(x_{i+1})$, E (H) की कोरें होंगी। इस तरह, प्रत्येक धन पूर्णांक $n \ge 3$ के लिए G में C_n की प्रतिलिपियों की संख्या H में C_n की प्रतिलिपियों की संख्या के बराबर होती है।

आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण लें, जहां हमने इन गुणधर्मों का प्रयोग दो ग्राफ़ों की अ-तुल्याकारिता को प्रदर्शित करने के लिए किया है।

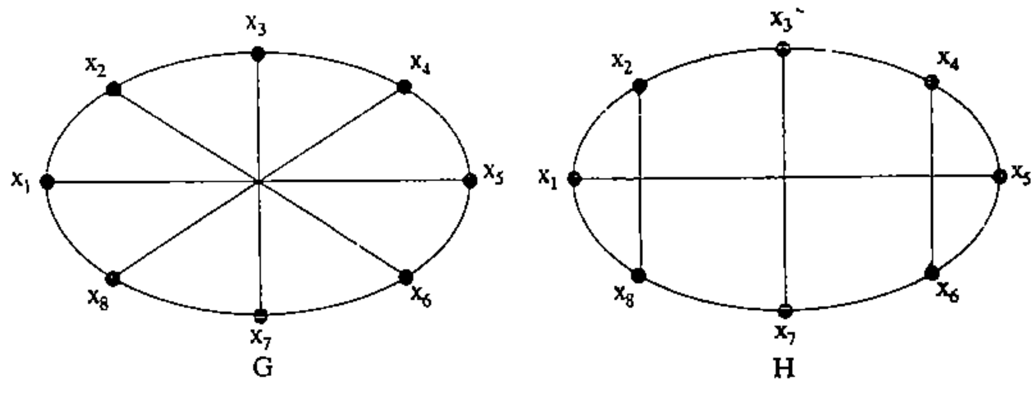
उदाहरण 19 : दो ग्राफ़ लीजिए जैसे कि चित्र 32 में दिखाए गए हैं।



चित्र 32

दोनों ही (8, 8) ग्राफ़ हैं और दोनों ही में C_6 की एक प्रतिलिपि है। फिर भी, ये ग्राफ़ तुल्याकारी नहीं हैं। इनके कोटि अनुक्रम लिखकर इसे सरलता से दिखाया जा सकता है। ग्राफ़ G का कोटि अनुक्रम 4, 2, 2, 2, 2, 2, 1, 1 है और ग्राफ़ H का कोटि अनुक्रम 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1, 1 है।

उदाहरण 20 : निम्नलिखित दो ग्राफ़ G और H लीजिए।

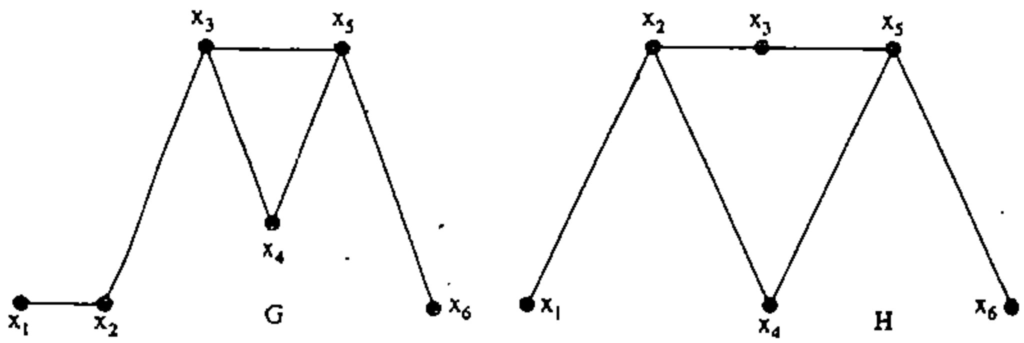


चित्र 33

दोनों ही (8, 12)-ग्राफ़ हैं और दोनों ही में C_8 की एक प्रतिलिपि है। दोनों ही के कोटि अनुक्रम 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3 हैं। फिर भी, ये तुल्याकारी नहीं हैं। यह सरलता से देखा जा सकता है कि आलेख G में त्रिभुज की कोई प्रतिलिपि नहीं है जबकि ग्राफ़ H में दो त्रिभुज $\{x_1, x_2, x_8\}$ और $\{x_4, x_5, x_6\}$ हैं (देखिए चित्र 33)।

* * *

उदाहरण 21 : निम्नलिखित दो ग्राफ़ G और H लीजिए जैसे कि चित्र 34 में दिखाए गए है



चित्र 34

दोनों ही (6, 6)-ग्राफ़ हैं और दोनों के कोटि अनुक्रम 3, 3, 2, 2, 1, 1 हैं। फिर भी ये तुल्याकारी नहीं हैं। ग्राफ़ G में कोटि 3 वाले दो शीर्ष x_3, x_5 संलग्न हैं। किसी भी तुल्याकारिता (यदि इसका अस्तित्व है) के अधीन इन्हें कोटि 3 वाले दो संलग्न शीर्षों पर प्रतिचित्रित होना चाहिए। परन्तु यहां हम यह देखते हैं कि ग्राफ़ H में कोटि 3 वाले दो शीर्ष संलग्न नहीं है।

* * *

ध्यान दीजिए कि चित्र 9 में दिखाए गए ब्यूटेन और आइसोब्यूटेन के संगत दो ग्राफ़ तुल्याकारी नहीं हैं। आइसोब्यूटेन की तरह ब्यूटेन में कोई भी कार्बन-परमाणु अन्य सभी कार्बन-परमाणुओं से जुड़ा नहीं है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E13) चार शीर्षों पर कम से कम 6 अ-तुल्याकारी ग्राफ़ खींचिए।

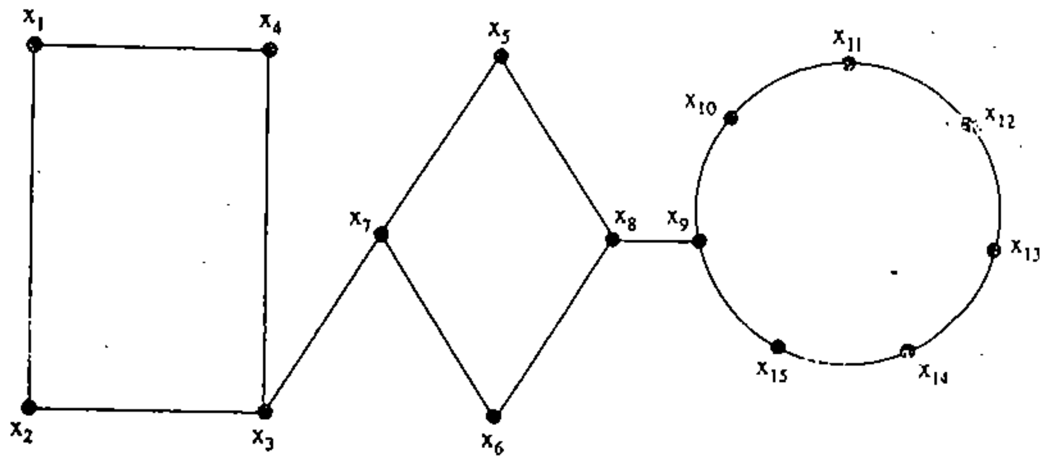
E14) ग्राफ़ G को **स्व-पूरक** (self-complementary) कहा जाता है यदि वह अपने पूरक $\overline{G}$ के तुल्याकारी हो। दिखाइए कि स्व-पूरक (p, q)-ग्राफ़ G में या तो p या फिर p – 1, 4 से विभाज्य है।

प्रायः ऐसी भी स्थिति आती है जबकि विचाराधीन ग्राफ़ किसी बड़े ग्राफ़ में, आविष्ट होता है। जब हम बिजली के परिपथ के बारे में बात कर रहे होते हैं, तो इसका उल्लेख प्रायः विभिन्न उप-परिपथों के रूप में किया जाता है। किसी देश में परिवहन को सदा ही विभिन्न भागों में बाँट दिया जाता हैं। उदाहरण के लिए, भारत में रेल-परिवहन को केन्द्रीय रेलवे, पश्चिमी रेलवे, आदि में बांट दिया जाता है। कहने का अर्थ यह है कि जब कभी हम किसी तंत्र का अध्ययन कर रहें हो, तो उसके उपतंत्रों का अध्ययन कर लेना महत्त्वपूर्ण होता है। इसी प्रकार यहां हम अगले भाग में उपग्राफ़ों (sub graphs) का अध्ययन करेंगे।

10.4 उपग्राफ़

अब हम एक दिए हुए ग्राफ़ के एक उपग्राफ़ की औपचारिक परिभाषा देंगे और विभिन्न प्रकार के उपग्राफ़ों का अध्ययन करेंगे। परन्तु, ऐसा करने से पहले आइए हम पहले निम्नलिखित उदाहरण को देख लें।

उदाहरण 22 : ग्राफ़ G = (V(G), E (G)) लीजिए जैसा कि चित्र 35 में दिखाया गया है।



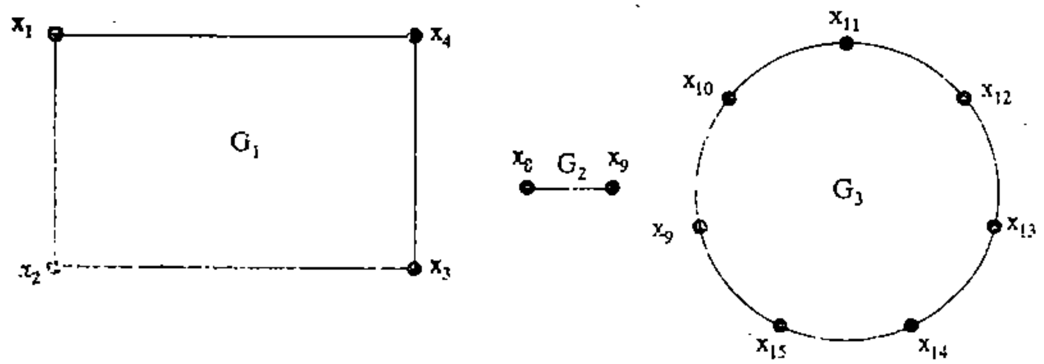
चित्र 35

यदि हम इस ग्राफ़ G का केवल एक भाग लें, तो क्या यह भाग भी एक ग्राफ़ होगा ? जी हाँ यह भी एक ग्राफ़ होगा।

मानलीजिए $V(G_1) = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $E(G_1) = \{x_i x_{i+1} : 1 \leq i \leq 3\} \cup \{x_4 x_1\}$, यहां आप यह देखेंगे कि G_1, C_4 के तुल्याकारी है।

यदि $V(G_2) = \{x_8, x_9\}$, $E(G_2) = \{x_8 x_9\}$

तब G_2, K_2 के तुल्याकारी है। और ग्राफ़ $V(G_3) = \{x_9, \ldots, x_{15}\}$, $E(G_3) = \{x_{15} x_9\} \cup \{x_i x_{i+1} : 9 \leq i \leq 14\}$ C_7 के तुल्याकारी है। (देखिए चित्र 36)।



चित्र 36

* * *

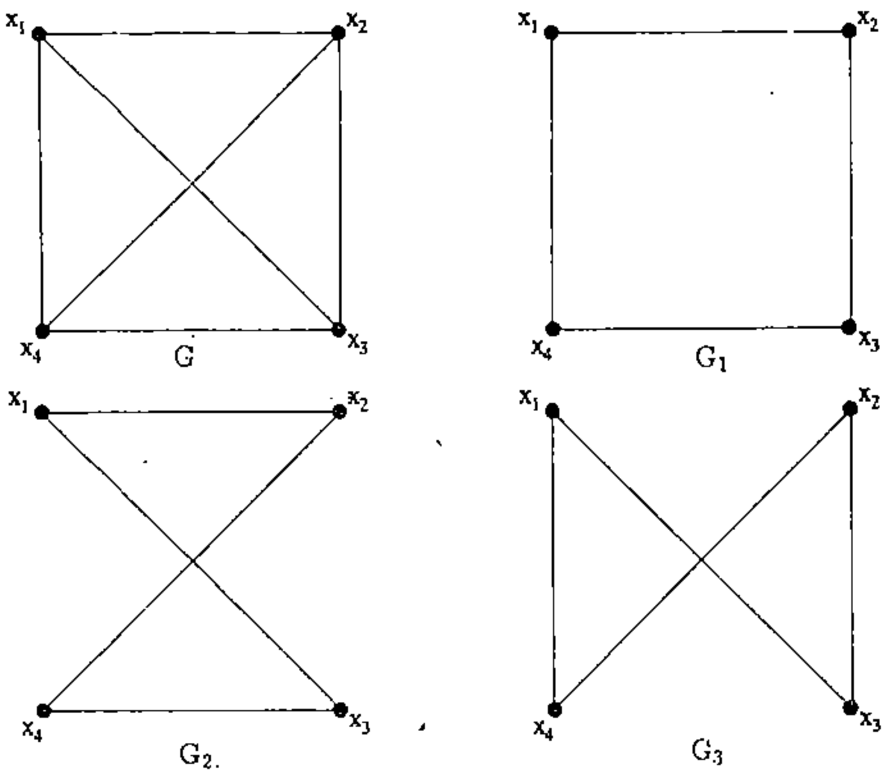
ध्यान दीजिए कि इन सभी ग्राफ़ों में एक बात समान है। इनके शीर्ष-समुच्चय, V (G) के उपसमुच्चय हैं और कोर-समुच्चय, E (G) के उपसमुच्चय हैं। इस प्रकार ये सभी ग्राफ़, ग्राफ़ G के उपग्राफ़ हैं। औपचारिक रूप में इसकी परिभाषा हम नीचे दे रहे हैं।

परिभाषा 12 : मानलीजिए $G = (V(G), E(G))$ एक ग्राफ़ है। ग्राफ़ G का उपग्राफ़ H एक ऐसा ग्राफ़ होता है जिसमें कि H का प्रत्येक शीर्ष G का एक शीर्ष होता है और H की प्रत्येक कोर भी G की एक कोर होती है। अर्थात्, $V(H) \subseteq V(G)$ और $E(H) \subseteq E(G)$. और, यदि H ग्राफ़ G का एक ऐसा ग्राफ़ हो कि $V(H) = V(G)$ और $E(H) \subseteq E(G)$, अर्थात् H और G के ठीक-ठीक समान शीर्ष समुच्चय हों, तो H को G का जनक उपग्राफ़ (spanning sub graph) कहा जाता है।

उदाहरण 23 : उदाहरण 22 में, जहां $V(H) = V(G_3)$, $E(H) = E(G_3) \cup \{x_9 x_{12}\}$, ग्राफ़ H ग्राफ़ G का उपग्राफ़ नहीं है। क्यों ? स्पष्ट है कि कोर $x_9 x_{12}$, E (G) में नहीं है।

* * *

उदाहरण 24 : चार शीर्षों x_1, x_2, x_3, x_4 पर $G = K_4$ लीजिए जैसा कि चित्र 37 में दिखाया गया है।



चित्र 37

इसमें C_4 की निम्नलिखित तीन प्रतिलिपियाँ G_1, G_2 और G_3 है जहाँ,

$V(G_1) = V(G)$, और

$E(G_1) = \{x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, x_4 x_1\}$

$V(G_2) = V(G)$ और

$E(G_2) = \{x_1 x_2, x_2 x_4, x_4 x_3, x_3 x_1\}$

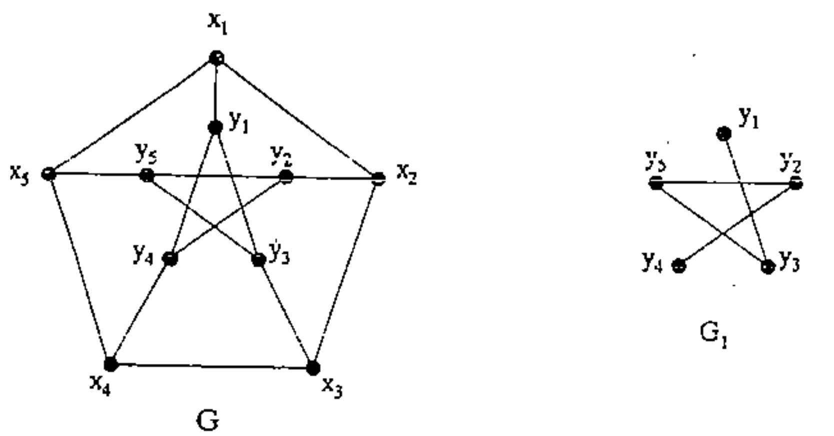
$V(G_3) = V(G)$ और

$E(G_3) = \{x_1 x_3, x_3 x_2, x_2 x_4, x_4 x_1\}$

इस तरह, इस स्थिति में G_1, G_2 और G_3 ग्राफ़ G के जनक उपग्राफ़ हैं।

* * *

उदाहरण 25 : पिटर्सन ग्राफ़ G लीजिए जिसका शीर्ष-समुच्चय $\{x_i : 1 \le i \le 5\} \cup \{y_j : 1 \le j \le 5\}$ है। (देखिए चित्र 38)।



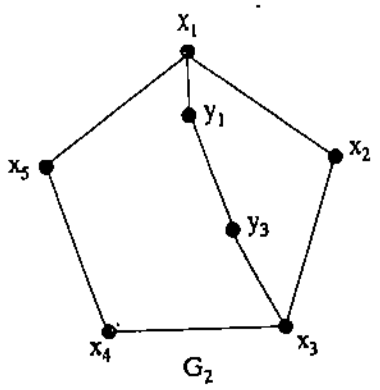
चित्र 38

ग्राफ़ G_1 लीजिए जहाँ,

$V(G_1) = \{y_j : 1 \le j \le 5\}$, $E(G_1) = \{y_1 y_3, y_3 y_5, y_5 y_2, y_2 y_4\}$.

यहां G_1 की प्रत्येक कोर G की एक कोर है। इसके विपरीत, $y_4 y_1$, G की एक कोर है, परन्तु G_1 की कोर नहीं है। इस तरह, G_1, G का एक ग्राफ़ है।

अब आप ग्राफ़ G_2 लीजिए जैसाकि नीचे चित्र 39 में दिखाया गया है।



चित्र 39

$V(G_2) = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, y_1, y_3\}$

$E(G_2) = \{x_1 y_1, x_1 x_2, x_1 x_5, x_2 x_3, x_3 x_4, x_4 x_5, x_3 y_3, y_1 y_3\}$.

स्पष्ट है कि G_2 ग्राफ़ G का एक उपग्राफ़ है। और, यहां आप यह देख सकते हैं कि जब कभी G की एक कोर से G_2 के दो शीर्षों को मिलाया जाता है, तो वह कोर E (G) का एक सदस्य होती है।

* * *

उपग्राफ़ के इस विचित्र गुणधर्म के कारण हम इसकी निम्नलिखित परिभाषा देते हैं।

परिभाषा : मानलीजिए G एक ग्राफ़ है और मानलीजिए $S \subseteq V(G)$. समुच्चय S पर ग्राफ़ G का **शीर्ष प्रेरित उपग्राफ़** (vertex induced subgraph) एक ऐसा ग्राफ़ होता है जिसका शीर्ष समुच्चय S होता है और जिसके कोर समुच्चय में G की वे कोरें होती हैं जो S के शीर्षों को मिलाती हैं। अर्थात्, कोर समुच्चय = $\{xy : x \ne y, x \in S, y \in S, xy \in E(G)\}$. हम इस ग्राफ़ को $\langle S \rangle_G$ से प्रकट करते हैं। **यह S द्वारा प्रेरित G का उपग्राफ़ है।** S के दो बिन्दु $\langle S \rangle_G$ **में संलग्न होते हैं यदि और केवल यदि वे G में भी संलग्न हों।**

उदाहरण 25 का उपग्राफ़ G_2 ग्राफ़ G का एक शीर्ष प्रेरित ग्राफ़ है जबकि उपग्राफ़ G_1 नहीं है।

ध्यान दीजिए कि प्रत्येक ग्राफ़ G स्वयं का उपग्राफ़ होता है। अर्थात्, G, G का एक उपग्राफ़ है। और, किसी भी $v \in V(G)$ के लिए $\{v\}$, G का एक उपग्राफ़ होता है। और, यह भी ध्यान दीजिए कि शीर्ष $v \in V(G)$ के संबंध में $G - v$ का अर्थ है उपग्राफ़ $\langle V(G) - \{v\} \rangle_G$, जो कि G का एक ऐसा उपग्राफ़ है जिसमें v को छोड़कर G के सभी बिन्दु होते हैं और वे सभी रेखाएँ जो v के साथ आपतित होती हैं। V (G) के उपसमुच्चय S के लिए ग्राफ़ $\langle V(G) - S \rangle_G$ को प्रायः $G - S$ के रूप में लिखा जाता है।

अब हम विभिन्न प्रकार के उपग्राफ़ों के उदाहरण लेंगे।

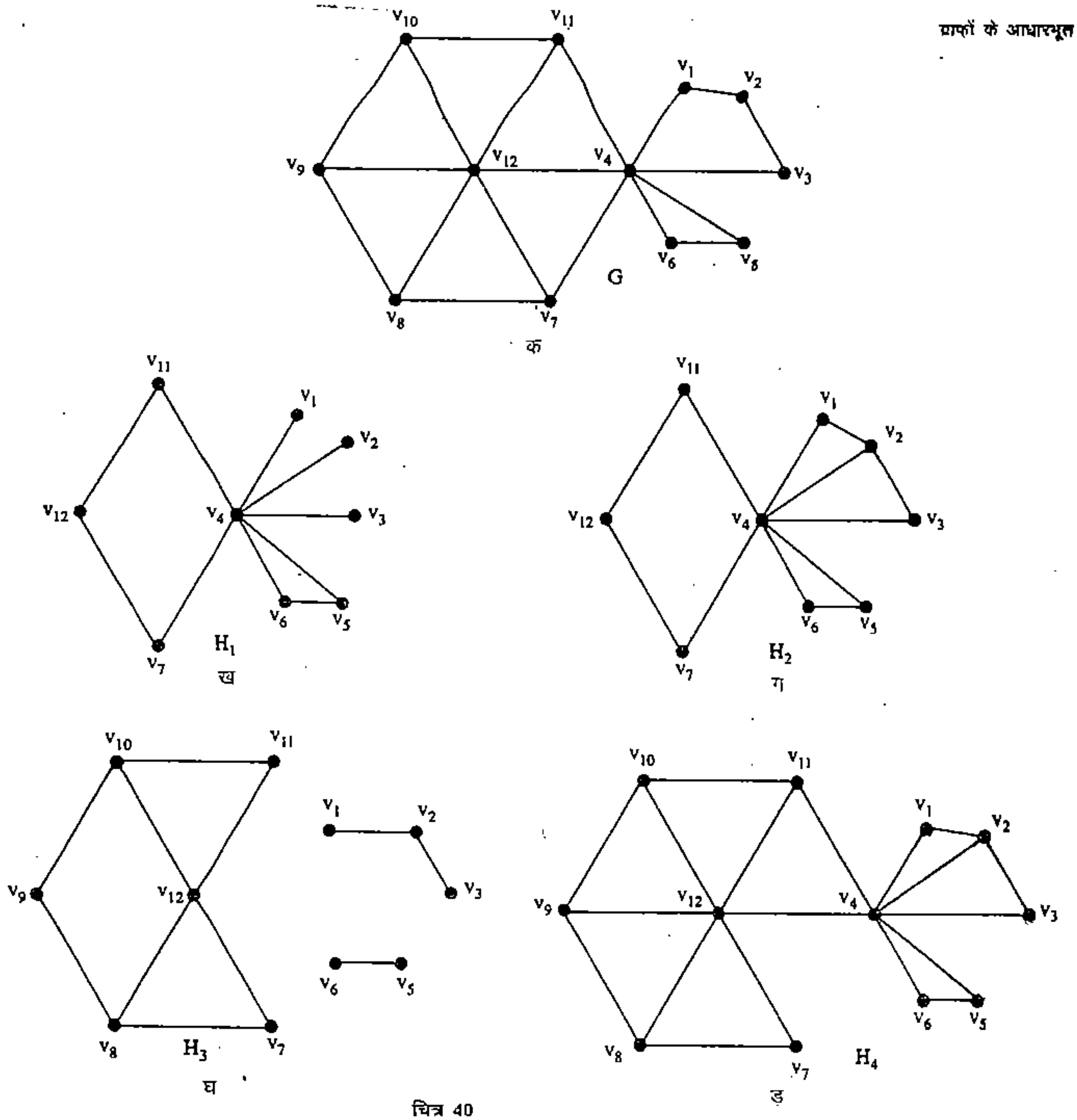
उदाहरण 26 : ग्राफ़ G लीजिए जैसा कि चित्र 40(क) में दिखाया गया है। यहाँ आप ग्राफ़ G के निम्नलिखित उपग्राफ़ों को देख सकते हैं।

चित्र 40(ख) में एक उपग्राफ़ H_1 दिखाया गया है।

चित्र 40(ग) में शीर्ष प्रेरित उपग्राफ़ H_2 दिखाया गया है, जहाँ $V(H_2) = V(H_1)$

चित्र 40(घ) में $H_3 = G - v_4$ दिखाया गया है। और

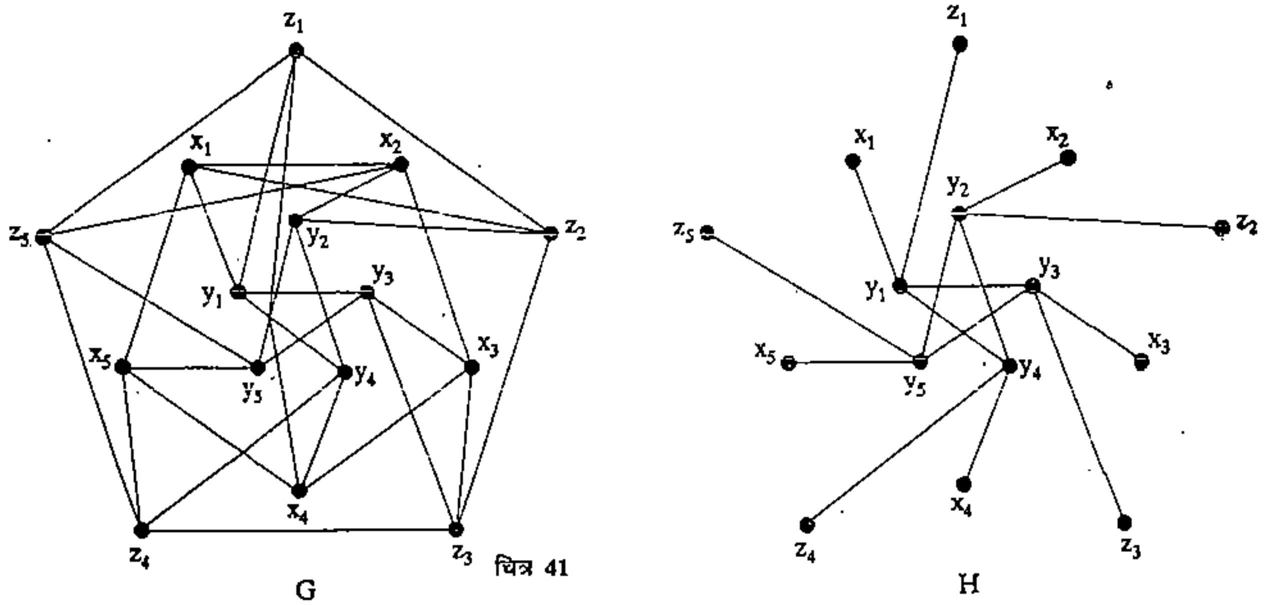
चित्र 40(ङ) में जनक उपग्राफ़ H_4 दिखाया गया है।



चित्र 40

* * *

उदाहरण 27 : ग्राफ़ G और G का उपग्राफ़ H लीजिए जैसा कि चित्र 41 में दिखाया गया है।



चित्र 41

G नियमितता कोटि 4 वाला एक नियमित ग्राफ़ है। परन्तु उपग्राफ़ H नियमित नहीं है। फिर भी, आप यहां यह देख सकते हैं कि $V(H) = V(G)$ यहां $\delta(H) = 1 < 4 = \delta(G) = \Delta(G) = \Delta(H)$. इस तरह इस उदाहरण से यह स्पष्ट है कि नियमित ग्राफ़ का उपग्राफ़ नियमित हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E15) दिखाइए कि ग्राफ़ G के उपग्राफ़ H के लिए, $\Delta(H) \leq \Delta(G)$.

E16) ग्राफ़ G के उपग्राफ़ H का एक उदाहरण दीजिए जहां $\delta(G) < \delta(H)$ और $\Delta(H) < \Delta(G)$.

E17) ग्राफ़ G के उपग्राफ़ H का एक उदाहरण दीजिए जहाँ $\delta(H) < \delta(G)$.

E18) मानलीजिए G, n शीर्षों और m कोरों वाला एक ग्राफ़ है, और मानलीजिए v कोटि k वाला G का एक शीर्ष है। बताइए कि $G - v$ के कितने शीर्ष और कितनी कोरें हैं ?

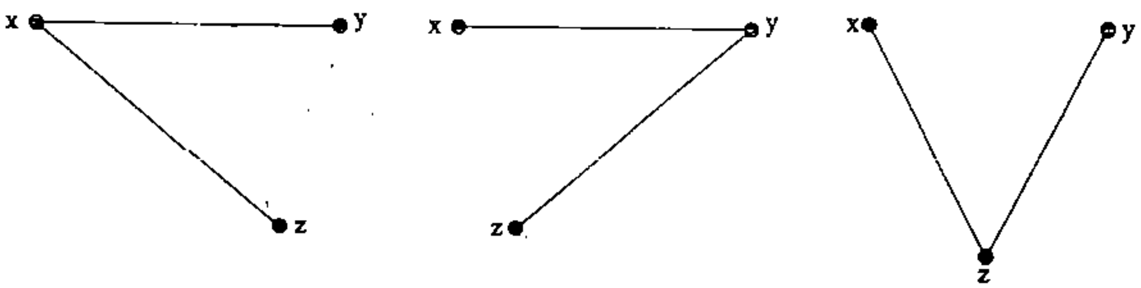
इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है उसका सारांश देते हुए हम इस इकाई को यहीं समाप्त कर रहे हैं।

10.5 सारांश

1. एक सरल ग्राफ़ G में एक परिमित अरिक्त समुच्चय V होता है और V के 2-अवयव उपसमुच्चयों का एक समुच्चय E होता है।
2. पूर्ण ग्राफ़ K_n, n शीर्षों वाला एक ऐसा ग्राफ़ होता है कि जिसका प्रत्येक शीर्ष प्रत्येक अन्य शीर्ष से एक कोर से मिला होता है।
3. पथ P_n, n शीर्षों $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ का एक ग्राफ़ होता है जिसमें कोई भी दो क्रमागत कोरें संलग्न होती हैं और जहाँ किसी भी कोर और किसी भी शीर्ष की पुनरावृत्ति नहीं होती है।
4. चक्र एक परिपथ होता है जिसमें पुनरावृत्त शीर्ष केवल प्रथम शीर्ष होता है, जो अंतिम शीर्ष भी होता है।
5. (p, q) ग्राफ़ G का पूरक एक $(p, \bar{q})$ ग्राफ़ $\overline{G}$ है, जहाँ $\bar{q} = V - q$ के अवयव-युग्मों की संख्या है।
6. एक ग्राफ़ G में शीर्ष के साथ आपतित कोरों की संख्या से शीर्ष की कोटि प्राप्त हो जाती है और वह ग्राफ़, जिसके सभी शीर्ष समान कोटि वाले होते हैं, नियमित ग्राफ़ होता है। और, किसी भी ग्राफ़ में इसके सभी शीर्षों की कोटियों का योगफल सम होता है।
7. p शीर्षों पर सदा ही एक r-नियमित ग्राफ़ होता है जहां p, r पूर्णांक है और इनमें से कम से कम एक सम होता है।
8. ग्राफ़ $G = (V(G), E(G))$, के लिए ग्राफ़ $H = (V(H), E(H))$, G का एक उपग्राफ़ तब होता है, जबकि $V(H) \subseteq V(G)$ और $E(H) \subseteq E(G)$
9. नियमित ग्राफ़ के उपग्राफ़ नियमित हो भी सकते हैं और नहीं भी हो सकते।

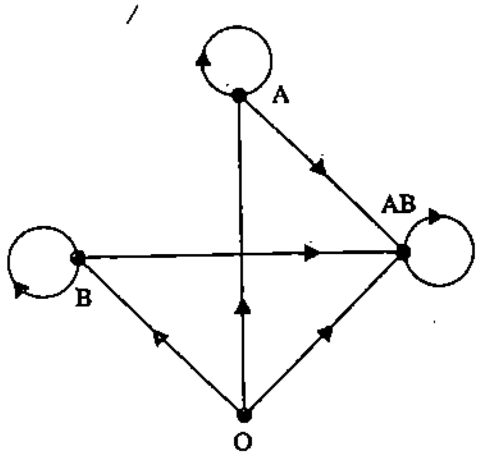
10.6 हल/उत्तर

E1)



चित्र 42

E2)



चित्र 43

E3) उदाहरण 1, $V = \{x_1, x_2\}, E = \{x_1 x_2\}$ पथ, पूर्ण ग्राफ़

उदाहरण 2, $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, E = \{x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, x_4 x_1\}$ चक्र

उदाहरण 3, $V = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, E = \{x_1 x_2, x_1 x_3, x_1 x_4\}$

E4) क) गमन u, v, b, c, y, u, v पथ-चिह्न नहीं है।

ख) पथ-चिह्न u, b, a, u, v पथ नहीं है।

ग) पथ u, a, b, c, x, v की लंबाई 5 है।

घ) परिपथ u, y, v, b, x, v, u चक्र नहीं है।

ङ) चक्र u, b, a, d, c, x, v, y, u की लंबाई 8 है।

E5) $E(\bar{G}_1) = \{u_1u_3, u_1u_4, u_2u_4, u_2u_6, u_3u_5, u_3u_6, u_4u_6, u_5u_6\}$

$E(\bar{G}_2) = \{u_2u_3, u_4u_5\}$

$E(\bar{G}_3) = \{u_1u_3, u_1u_6, u_2u_2, u_2u_5, u_2u_6, u_3u_5, u_4u_5, u_4u_6\}$

E6) $\bar{G}$ की $\frac{p(p-1)}{2} - q$ कोरें हो सकती हैं।

E7) उदाहरण 6, $d(x_i) = 4, 1 \le i \le 5, d(y_i) = 2, 1 \le i \le 7$

उदाहरण 9, $d(x_i) = 2, i \le i \le 5$

इसी प्रकार अन्य भाग कीजिए।

E8) $d_{\bar{G}}(x) = |N_{\bar{G}}(x)| = |\{y \in V(G) : (x, y) \notin E(G)\}|$

$= |V(G)| - 1 - |N_G(x)| = p - 1 - d_G(x)$

E9) (1) 1, 1 (2) 2, 2 (3) 1, 3 (9) 2, 2 (11) 1, 7 (12) 3, 4

E10) ग्राफ़ (ख) में विषम कोटि वाले 3 शीर्ष हैं जो कि प्रमेय-1 के उपप्रमेय-1 के विपरीत है। (ङ) में ग्राफ़ के सभी शीर्षों की कोटियों का योगफल विषम है, जो कि प्रमेय 1 के विपरीत है।

E11) $kp_k + (k+1)p_{k+1} = 2q$ (प्रमेय 1 के अनुसार)

और, $p_k + p_{k+1} = p$

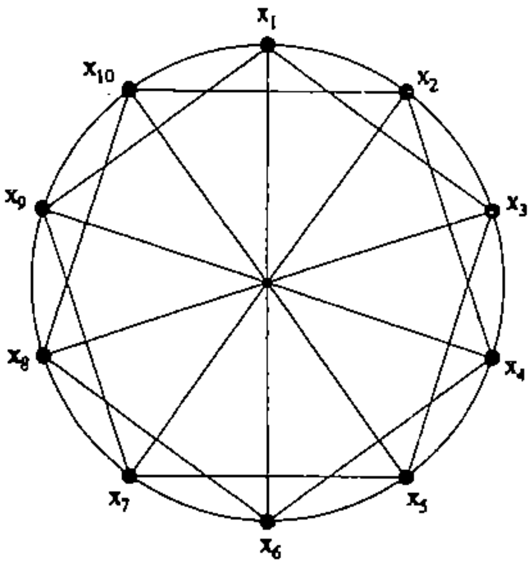
इसलिए, $kp_k + (k+1)(p - p_k) = 2q$

या, $p_k = (k+1)p - 2q$

E12) यहाँ $p = 10, r = 5$, इसलिए $\frac{r-1}{2}$ एक पूर्णांक है। 10 शीर्ष $\{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$ लीजिए। x_i को x_{i+1} से मिलाइए जहां $1 \le i \le 9$. x_{10} को x_1 से मिलाइए। अब सभी शीर्षों की कोटि $\frac{r-1}{2} = 2$ हो गई है। x_i को x_{i+2} से मिलाइए जहां $1 \le i \le 8$. x_9 को x_1 से और x_{10} को x_2 से मिलाइए। अब हमें 4 नियमितता वाला ग्राफ़ प्राप्त हो जाता है।

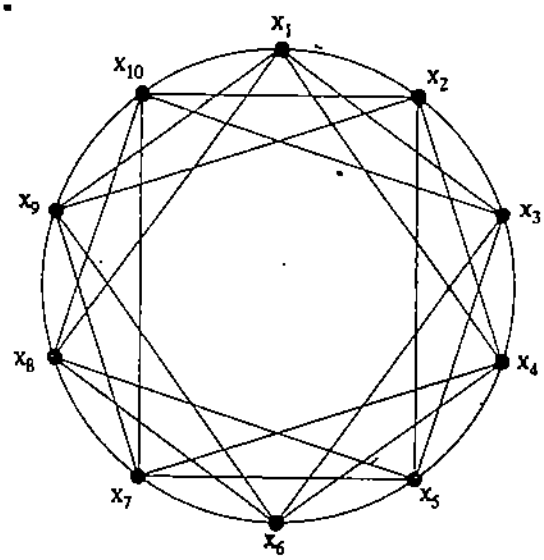
यहां $\frac{p}{2} = n = 5$.

इस तरह 5 नियमितता वाला ग्राफ़ प्राप्त करने के लिए x_i को x_{i+5} से मिलाइए जहां $1 \le i \le 5$ (देखिए चित्र 44)



चित्र 44

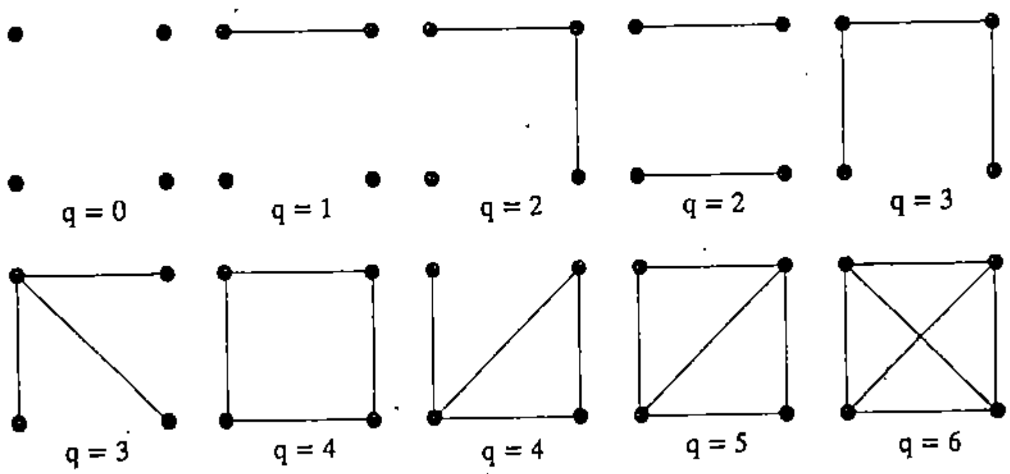
जब $r = 6$ तब $s = 3$. 10 शीर्षों को एक वृत्तीय रूप में रखिए। शीर्षों $v_1, v_2, \ldots, v_7$ में से प्रत्येक शीर्ष को एक आरोही रूप में अगले 3 शीर्षों से मिलाइए। और, कोरों $\{v_8v_9, v_8v_{10}, v_8v_1\}, \{v_9v_{10}, v_9v_1, v_9v_2\}, \{v_{10}v_1, v_{10}v_2, v_{10}v_3\}$ को मिलाइए। ऐसा करने पर 6-नियमितता वाला ग्राफ़ प्राप्त होता है जैसा कि चित्र 45 में दिखाया गया है।



चित्र 45

यदि चित्र 45 में आप कोर $v_i v_{i+5}, 1 \le i \le 5$ को लें तो आपको 10 शीर्षों पर एक 7-नियमितता वाला ग्राफ़ प्राप्त होगा।

E13) $p = 4$ तब $q = 4C_2 = 6$. हम $(4, q)$ ग्राफ़ चाहते हैं, जहाँ $0 \le q \le 6$. यहां हम चित्र 46 में चार शीर्षों पर सभी संभव अ-तुल्याकारी ग्राफ़ दे रहे हैं।



चित्र 46

E14) मानलीजिए G एक (p, q) -ग्राफ है। तब $E(G) \cup E(\bar{G})$ = { V(G) में सभी शीर्ष-युग्मों का समुच्चय } इस तरह, $q + \bar{q} = \frac{p(p-1)}{2}$. यदि ग्राफ़ G स्व-पूरक है, तो $q = \bar{q}$. इस तरह $p(p-1) = 2q + 2\bar{q} = 4q$ अर्थात् $p(p-1)$ को 4 विभाजित करता है। क्योंकि p और $(p-1)$ में केवल एक ही सम है, इसलिए इसका अर्थ यह है कि या तो p, 4 से विभाज्य है, या $(p-1)$, 4 से विभाज्य है।

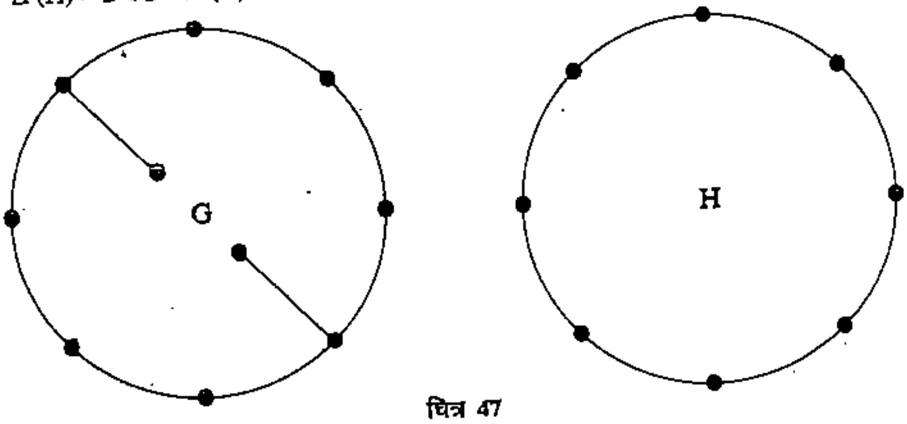
E15) मानलीजिए $x \in V(H)$ जिससे कि $d_H(x) = \Delta H$.

तब $N_H(x) \subseteq N_G(x)$. इस तरह,

$\Delta(H) = |N_H(x)| \leq |N_G(x)| \leq \Delta(G)$.

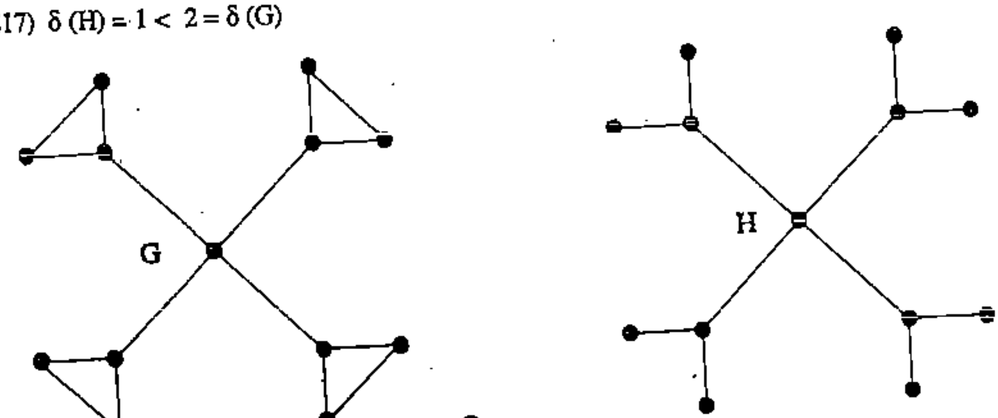
E16) $\delta(G) = 1 < 2 = \delta(H)$.

$\Delta(H) = 2 < 3 = \Delta(G)$.



चित्र 47

E17) $\delta(H) = 1 < 2 = \delta(G)$



चित्र 48

E18) $G - v$ के $(n-1)$ शीर्ष और $m - k$ कोरें होंगी।

इकाई 11 विशिष्ट ग्राफ़

इकाई की रूपरेखा | पृष्ठ संख्या

11.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में आप यह देख चुके हैं कि ग्राफ़ों का प्रयोग प्रायः संचार अथवा परिवहन नेटवर्कों और रासायनिक यौगिक में एक अणु के निरूपण जैसे अन्य अनेक तंत्रों को निरूपित करने अर्थात् निदर्शन के लिए किया जाता है। परिवहन नेटवर्क के संबंध में यह जानना आवश्यक होता है कि किन-किन स्थानों को एक सीधे मार्ग से जोड़ा गया है। उदाहरण के लिए अगर किसी कारणवश किसी देश में विमान सेवा बंद कर दी जाती है और वहाँ बंदरगाह भी नहीं है, ऐसे में वहाँ के लोग देश से बाहर तब तक नहीं जा सकते जब तक पड़ोसी देश अपने क्षेत्र से उनको सड़क मार्ग की सुविधा उपलब्ध न करायें। जब हम इस स्थिति का निदर्शन करने के लिए एक ग्राफ़ का प्रयोग करते हैं, तब एक शीर्ष से किसी अन्य शीर्ष को जोड़ने की एक विधि का होना आवश्यक होता है। इस प्रकार के ग्राफ़ों को संबद्ध ग्राफ़ (connected graphs) कहा जाता है। भाग 11.2 में हम संबद्ध ग्राफ़ों को परिभाषित करेंगें और यह दर्शाएगें कि किसी भी ग्राफ़ को संबद्ध ग्राफ़ों में विभाजित किया जा सकता है।

भाग 11.3 हम आपको एक ऐसे प्रकार के ग्राफ़ से परिचित कराएगें जो इलेक्ट्रॉनिकी तथा अन्य क्षेत्रों में काफी उपयोगी होता है। इन ग्राफ़ों को द्विभाजित ग्राफ़ (bipartite graph) कहा जाता है। इस प्रकार के ग्राफ़ वास्तविक जीवन से जुड़ी समस्याओं का जैसे नसों का नेटवर्क (neural network) के निदर्शन, का अध्ययन करने में काफी उपयोगी होता है।

भाग 11.3 में हम एक अन्य प्रकार के ग्राफ़, जिसे वृक्ष (tree) कहते हैं, के बारे में चर्चा करेंगे। वस्तुतः रासायनिक यौगिकों ब्यूटेन और आइसोब्यूटेन को निरूपित करने वाले ग्राफ़ वृक्ष ही हैं। आप इकाई 10 में इन ग्राफ़ों से परिचित हो चुके हैं। इस प्रकार के ग्राफ़ों का रसायनविदों के लिए काफी महत्व होता है। वे यह ज्ञात करना चाहते हैं कि कोई वृक्ष एक रासायनिक यौगिक के संगत हैं या नहीं। यहाँ हम यह दिखाएगें कि एक वृक्ष के अनेक रोचक गुणधर्म होते हैं और इन गुणधर्मों का प्रयोग वास्तविक जीवन से जुड़ी कुछ स्थितियों का अध्ययन करने में किया जाता है।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद, आप

- एक ग्राफ़ के गमन, पथ, परिपथ और चक्रों के बीच भेद कर सकेगें;
- 1) संबद्ध ग्राफ़

  2) द्विभाजित ग्राफ़

  3) वृक्ष

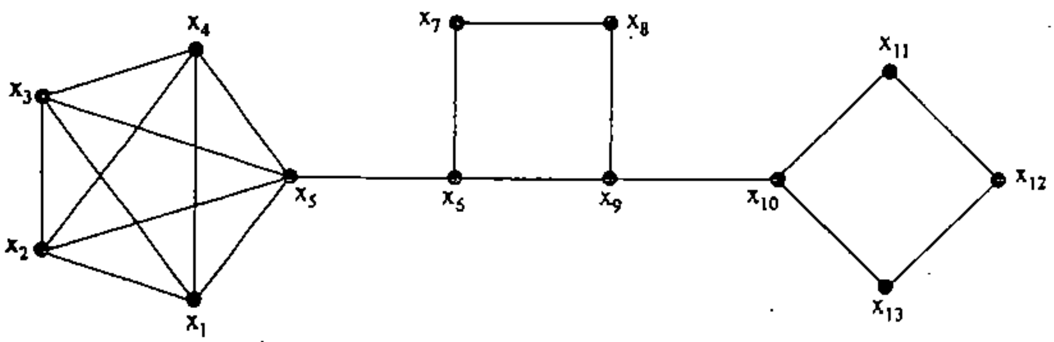
  को पहचान सकेंगें।

11.2 संबद्ध ग्राफ़

इकाई 2 में आप यह पढ़ चुके हैं कि ग्राफ़ वास्तविक जीवन से जुड़ी विभिन्न स्थितियों, विशेष रूप से मार्गों से संबंधित स्थितियों, के निदर्श होते हैं; यहाँ शीर्ष नगरों अथवा जंक्शनों को निरूपित करते हैं और प्रत्येक कोर एक सड़क या संचार लिंक के किसी अन्य रूप को निरूपित करती है। इस कार के चित्र इस भाग में बताए गए संबद्ध ग्राफ़ों (connected graphs) को समझने में काफी सहायक होते हैं। इस प्रकार के ग्राफ़ों को समझने के लिए हमें कुछ परिभाषाओं की आवश्यकता होती है जो कि "एक शीर्ष से एक दूसरे शीर्ष तक जाने की" विधियों को प्रस्तुत करती है। पहले हम नीचे दिए गए उपभाग में इन परिभाषाओं का उल्लेख करेंगें।

11.2.1 पथ (path), परिपथ (circuit) और चक्र (cycle)

चित्र 1 में दिए गए ग्राफ़ को देखिए और कल्पना कीजिए कि एक शीर्ष से दूसरे शीर्ष तक जाने के लिए आप इसकी कोरों पर गमन करते हैं।



चित्र 1

मानलीजिए हम शीर्ष x_1 से चलना प्रारंभ करना चाहते हैं और शीर्ष x_{12} पर पहुँचना चाहते हैं। क्या ऐसा करना संभव है ? ऐसा करने की एक संभव विधि शीर्ष x_1 से चलना प्रारंभ करके कोर $x_1 x_2$ पर चलकर x_2 पर पहुँचा जाए, कोर $x_2 x_3$ पर चलकर x_3 पर पहुँचा जाए, $x_3 x_4$ पर चलकर x_4 पर पहुँचा जाए और यह प्रक्रिया तब तक जारी रखी जाए जबतक कि हम x_{12} पर नहीं पहुँच जाते। मानलीजिए हम x_{i-1} और x_i को मिलाने वाली कोर को $(x_{i-1} x_i)$ से प्रकट करते हैं। तब हम इस गमन को शीर्षों और कोरों के एक एकांतर अनुक्रम जैसे $x_1, (x_1 x_2), x_2, (x_2 x_3), x_3, (x_3 x_4), x_4, (x_4 x_5), x_5, (x_5 x_6), x_6, (x_6 x_9), x_9, (x_9 x_{10}), x_{10}, (x_{10} x_{11}), x_{11}, (x_{11} x_{10}), x_{10}, (x_{10} x_{13}), x_{13}, (x_{13} x_{12}), x_{12}$. के रूप में प्रस्तुत करते हैं। यह अनुक्रम क्या निरूपित करता है ? इकाई 10 में आपने यह देखा है कि यह अनुक्रम एक गमन (walk) को निरूपित करता है। परन्तु यह किसी भी स्थिति में x_1 से चलकर x_{12} पर पहुँचने का लघुतम मार्ग नही है। हम x_1 से चलकर x_5 पर सीधे पहुँच सकते हैं। इसके अतिरिक्त हमें शीर्ष x_{10} से होकर दो बार जाना पड़ता है जो कि आवश्यक नहीं है। अतः ऊपर उल्लेख किए गए गमन को आराम किया गया गमन माना जा सकता है। यदि हमारे पास और अधिक समय हो तो हम और कोरों का अनुरेखण और पुनः अनुरेखण कर सकते हैं। उदाहरण के किए हम x_6 से x_9 पर जा सकते थे और फिर x_6 पर लौट सकते थे।

अतः गमन का चयन करते समय हम क्या कर रहे होते हैं ? वस्तुतः हम एक ऐसे अनुक्रम का चयन कर रहे होते हैं जिनके अवयव एकांतर रूप से शीर्ष और कोर हों।

अब हम गमन की औपचारिक परिभाषा देगें।

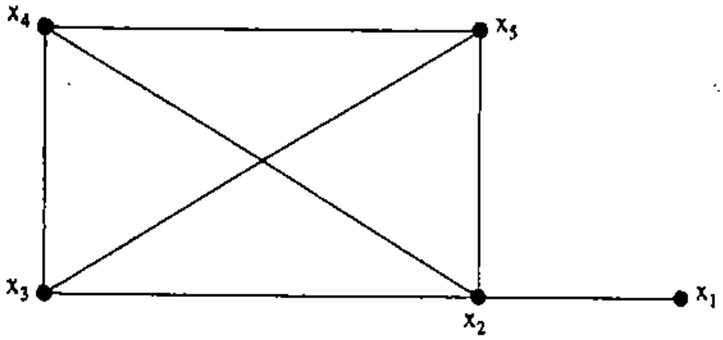
परिभाषाः ग्राफ़ G में गमन एक सोत अनुक्रम $W = \{v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k\}$ होता है जहाँ $v_0, v_1, \ldots, v_k$ शीर्ष हैं और e_i शीर्षों v_{i-1} और v_i, $1 \le i \le k$, को मिलाने वाली कोरे हैं। ध्यान दीजिए कि यह आवश्यक नही है कि सभी v या e अलग-अलग ही हों। इनकी पुनरावृत्ति हो सकती है।

इस स्थिति में तब हम यह कहते हैं कि W, v_0 से v_k तक एक गमन है, या W एक $v_0 - v_k$ गमन

है या W, v_0 और v_k को मिलाने वाला एक गमन है। शीर्ष v_0 को गमन W का **प्रारंभिक शीर्ष** (initial vertex) कहा जाता है और v_k को गमन W का **अंत्य शीर्ष** (end vertex) कहा जाता है। पूर्णांक k को जो कि गमन में आविष्ट कोरों की संख्या है गमन W की **लंबाई** कहा जाता है और इसे l(W) से प्रकट किया जाता है। क्योंकि शीर्षों और कोरों की पुनरावृत्ति हो सकती है, इसलिए गमन की लंबाई ग्राफ़ G की कोरों की संख्या से काफी अधिक हो सकती है।

टिप्पणी : जैसा कि आपने देखा है कि गमन में शीर्षों और कोरों की पुनरावृत्ति हो सकती है, अतः इसे हम तबतक एक उपग्राफ़ (subgraph) नहीं मान सकते जबतक कि गमन के सभी शीर्ष और सभी कोरें भिन्न-भिन्न नहीं होती।

उदाहरण 1: चित्र 2 में दिए गए 5 शीर्षों और 7 कोरों वाला ग्राफ़ लीजिए। लंबाई 8 वाला एक $x_1 - x_5$ गमन ज्ञात कीजिए।



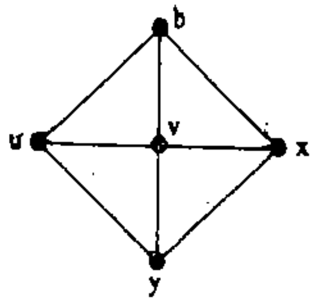
चित्र 2

हल: गमन $W = \{x_1, x_1x_2, x_2, x_2x_3, x_3, x_3x_4, x_4, x_4x_2, x_2, x_2x_5, x_5, x_5x_3, x_3, x_3x_4, x_4, x_4x_5, x_5\}$ तब W, लंबाई 8 वाला $x_1 - x_5$ गमन होता है।

* * *

इसी ग्राफ़ का एक अन्य संभव गमन $\{x_1, x_1x_2, x_2, x_2x_4, x_4, x_4x_3, x_3, x_3x_5\}$ हो सकता है। इसकी लंबाई l(W) = 4 है।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।



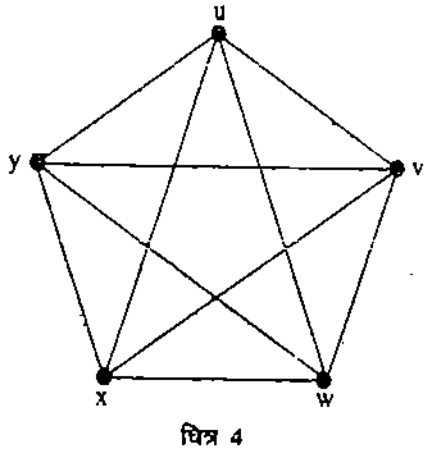
चित्र 3

E1) चित्र 3 में दिए गए ग्राफ़ के लिए लंबाई 7 वाला u-v गमन ज्ञात कीजिए।

क्योंकि यहाँ हम केवल उन्हीं ग्राफ़ों पर विचार कर रहे हैं जिनकी बहु-कोरें या पाश (loop) नहीं हैं, अतः हम गमन W को प्रायः $\{v_0, v_1 ..., v_k\}$ के रूप में लिखते हैं। ऐसा करते समय हम यह मान लेते हैं कि ग्राफ़ में गमन के दो क्रमागत शीर्षों को एक कोर से मिलाया गया है और कोर को गमन में सम्मिलित कर लिया गया है। उदाहरण के लिए, चित्र 1 के संगत गमन को इस प्रकार लिखा जा सकता है

$W = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{10}, x_{13}, x_{12}\}$.

क्योंकि यहाँ गमन की संकल्पना काफी व्यापक है, अतः इस पर हम कुछ और प्रतिबंध लगाएंगे। परन्तु ऐसा करने से पहले आइए हम चित्र 4 में दिए गए ग्राफ़ को लें।



चित्र 4

यह पूर्ण ग्राफ K_5 है। तब $W = \{u, v, x, w, v, x, y\}$, $W_1 = \{u, x, w, v, x, y\}$ और $W_2 = \{u, x, w, v, y\}$, u और y को मिलाने और क्रमशः 6, 5 और 4 लंबाईयों वाले तीन गमन हैं। यहाँ आप यह भी देख सकते हैं कि

i) गमन W में शीर्षों v और x तथा कोर vx की पुनरावृत्ति हुई है,

ii) गमन W_1 में केवल शीर्ष x की पुनरावृत्ति हुई है और किसी भी कोर की पुनरावृत्ति नहीं हुई है, और

iii) गमन W_2 में न तो शीर्ष की और नहीं किसी कोर की पुनरावृत्ति हुई है।

चित्र 4 में दिए गए गमनों W, W_1 और W_2 को नीचे दी गई परिभाषाओं के अनुसार विशिष्ट नाम दिए गए हैं।

परिभाषा : एक गमन को पथ चिह्न (trail) कहा जाता है जबकि इसकी सभी कोरें भिन्न-भिन्न होती हैं। उदाहरण के लिए चित्र 4 का W_1 एक पथ-चिह्न है। ध्यान दीजिए कि पथ-चिह्न में शीर्षों की पुनरावृत्ति हो सकती है। गमन W को **पथ** (path) कहा जाता है जबकि इसके सभी शीर्ष भिन्न-भिन्न हों। उदाहरण के लिए चित्र 4 का W_2 एक पथ है।

यदि एक गमन के सभी शीर्ष भिन्न-भिन्न हों तो क्या कोरों की पुनरावृत्ति हो सकती है ? याद रहे कि अंत्य शीर्ष का अनुरेखण कर लेने के बाद ही कोर का अनुरेखण किया जाता है, अतः सभी कोरें भी भिन्न-भिन्न होती हैं। अतः इस स्थिति में पथ सदा ही एक पथ-चिह्न होता है। इसके विलोम के बारे में क्या कहा जा सकता है ? इसे एक प्रश्न के रूप में हम आपके लिए छोड़ रहे हैं। (देखिए E2)

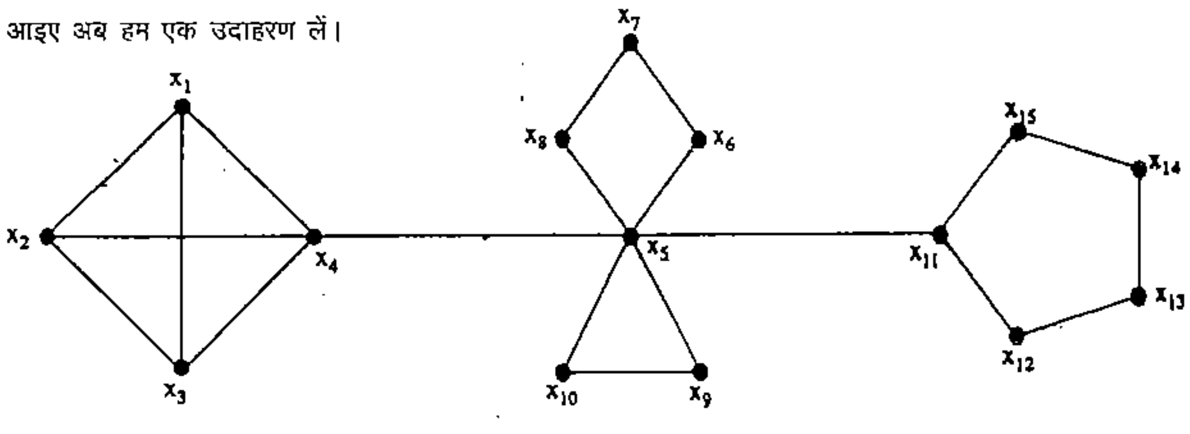
अब हम कुछ और परिभाषाएँ देखें।

परिभाषा : गमन u-v संवृत (closed) होता है, यदि $u = v$ हो और विवृत्त (open) होता है, यदि $u \neq v$ हो।

संवृत्त पथ-चिह्न को **परिपथ** (circuit) कहा जाता है।

वह परिपथ जिसमें पुनरावृत्त शीर्ष केवल प्रथम शीर्ष हो, जो कि वही शीर्ष होता है जो कि अंतिम शीर्ष है, उसे **चक्र** (cycle) कहा जाता है।

आइए अब हम एक उदाहरण लें।



चित्र 5

उदाहरण 2 : इस ग्राफ में निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

i) एक संवृत्त गमन जो परिपथ नहीं है,

ii) एक परिपथ जो चक्र नहीं है।

iii) एक चक्र

हल : हम (i), (ii) और (iii) को बारी बारी से ज्ञात करेंगें।

i) इसमें ऐसे अनेक संवृत्त गमन हैं जो परिपथ नहीं हैं।

$W = \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_5, x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_{11}, x_3\}$

एक संवृत्त गमन हैं। यहाँ कोर x_5x_{11} की पुनरावृत्ति हुई हैं। अतः यह एक परिपथ नहीं है।

ii) $W_0 = \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_5, x_9, x_{10}, x_5\}$ एक परिपथ है। यहाँ शीर्ष x_5 की पुनरावृत्ति तीन बार हुई है। इस तरह, यह एक चक्र नहीं है।

iii) $W = \{x_5, x_6, x_7, x_8, x_5\}$ एक चक्र है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

E2) i) क्या प्रत्येक पथ-चिह्न एक पथ होता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

ii) यदि सभी कोरें भिन्न-भिन्न हों, तो सभी शीर्ष भिन्न-भिन्न होते हैं। कथन सत्य है अथवा असत्य ? क्यों ?

E3) क्या चक्र एक पथ होता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

E4) मानलीजिए एक $G = (V, E)$ एक ग्राफ़ है, जहाँ

$V = \{t, u, v, w, x, y, z\}$ और

$E = \{tu, tv, tw, ux, vw, vy, uz, wx, wz, xy, xz\}$

G में निम्नलिखित ज्ञात कीजिए

i) एक u-v पथ-चिह्न जो पथ नहीं है

ii) एक (u-u) परिपथ जो चक्र नहीं है।

iii) न्यूनतम लंबाई वाला एक चक्र।

E5) मानलीजिए G एक ऐसा ग्राफ़ है कि $\delta(G) \geq k$. आगमन-नियम से यह दर्शाइए कि ग्राफ़ G लंबाई k वाला एक पथ है जो कि किसी भी दिए हुए शीर्ष से प्रारंभ करता है। (आपको याद होगा कि $\delta(G) = \min\{d_G(x) : x \in V(G)\}$

आइए हम चित्र 4 में दिए गए ग्राफ़ को फिर से देखें। इस ग्राफ़ में $W = \{u, v, x, w, v, x, y\}$ एक गमन है। मानलीजिए हम भाग $\{w, v\}$ को छोड़ देते हैं और तब हमें $P = \{u, v, x, y\}$ प्राप्त होता है। आप जानते हैं कि यह वस्तु एक पथ है। अगले प्रमेय में हम यह सिद्ध करेंगे कि व्यापक रूप से यह परिघटना सत्य होती है।

प्रमेय 1 : यदि W, दो भिन्न-भिन्न शीर्षों u और v को मिलाने वाला एक u-v गमन है तो u और v को मिलाने वाला एक पथ होगा जो कि गमन में आविष्ट होगा।

उपपत्ति : मानलीजिए W एक u-v गमन है, जो यह है

$$W = \{u = u_0, e_1, u_1, \dots, e_k, u_k = v\}$$

अब हम गणितीय आगमन-नियम को लागू करके u और v को मिलाने वाला पथ ज्ञात करेगें जो W में आविष्ट है।

मानलीजिए p(k) इस कथन को प्रकट करता है कि यदि W लंबाई k वाला एक u-v गमन है, तो u और v को मिलाने वाला एक पथ होता है जो W में आविष्ट होता है।

यदि $k = 1$, तो p(1) सत्य होता है, क्योंकि लंबाई 1 वाला प्रत्येक गमन एक पथ होता है।

अब हम यह मान लेते हैं कि कथन $p(k-1)$, लंबाई $\leq k-1$ वाले सभी गमनों के लिए सत्य है।

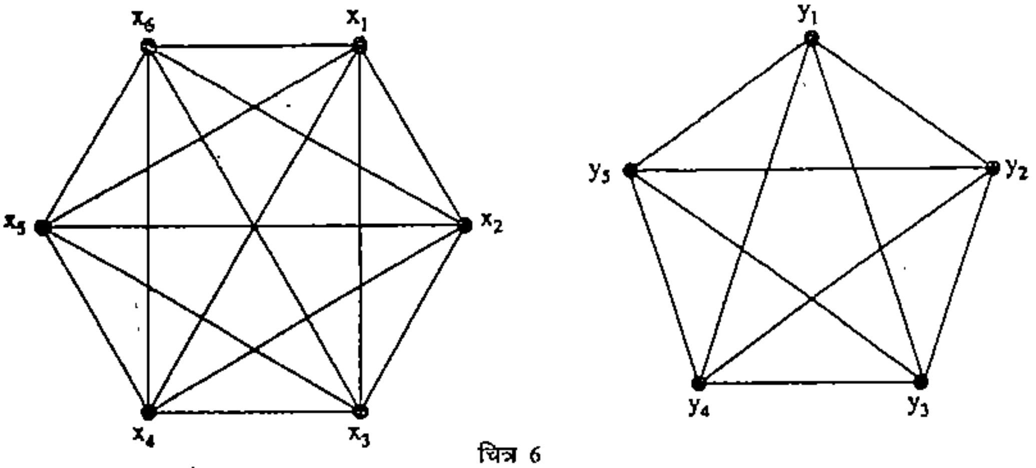
दूसरे शब्दों में हम यह मान लेते हैं कि यदि लंबाई $\leq k-1$ वाला कोई $x-y$ गमन दिया हुआ हो, तो x और y को मिलाने वाला एक पथ होता है जो गमन में आविष्ट होता है। तब हम यह दर्शाना चाहते हैं कि W के लिए कथन p(k) सत्य है।

यदि W एक पथ है, तब तो कथन की सत्यता स्वयं स्पष्ट हो जाती है; अन्यथा कम से कम ऐसा शीर्ष अवश्य होता हैं जिसकी पुनरावृत्ति होती है। मानलीजिए j लघुतम पूर्णांक हैं जिससे कि शीर्ष u_j की पुनरावृत्ति होती है। तब एक ऐसा पूर्णांक $t > j$ होता है जिससे कि $u_j = u_t$. अब भाग $\{e_{j+1}, ..., e_t\}$ को हटाने के बाद प्राप्त किया गया गमन W_1 लीजिए अर्थात् $W_1 = \{u = u_0, e_1, ..., u_j = u_t, e_{t+1}, ... e_k, u_k = v\}$. स्पष्ट है कि W_1 गमन W में आविष्ट एक u-v गमन है और इसकी लंबाई $(W_1) = k - t + j < k$ है, क्योंकि $j < t$. अतः आगमन-नियम से हम u और v को मिलाने वाला एक पथ P प्राप्त कर सकते हैं जो W_1 में आविष्ट है। क्योंकि P गमन W_1 में आविष्ट है और W_1, गमन में आविष्ट है, इसलिए पथ P गमन W में आविष्ट होगा। इस तरह, p(k), W के लिए सत्य है।

अतः आगमन-नियम से p(n) सभी n के लिए सत्य है। इस तरह परिणाम प्राप्त हो जाता है।

ऊपर के प्रमेय के कथनानुसार **यदि ग्राफ़ में दो शीर्षों को मिलाने वाला एक गमन हो, तो हम सदा ही इन्हें मिलाने वाला एक पथ ज्ञात कर सकते हैं।**

अब अनेक व्यावहारिक स्थितियों में यह जानना अति आवश्यक होता है कि ग्राफ़ के किस शीर्ष को एक गमन से और इस तरह एक एक पथ से मिलाया जा सकता है। उदाहरण के लिए, K_6 और K_5 के सम्मिलन (union) से प्राप्त ग्राफ़ G (देखिए चित्र 6) में आप देख सकते हैं कि यहाँ कोई भी $(x_1 - y_5)$ गमन नहीं है। अतः शीर्ष x_1 से शीर्ष y_5 तक जाने का कोई मार्ग उपलब्ध नहीं है।



चित्र 6

अतः ग्राफ़ की आंतरिक संरचना में कभी-कभी इस बात का महत्व काफी हो जाता हैं कि दो शीर्षों को एक गमन से मिलाया गया है या नहीं; इससे हमें संबद्ध ग्राफ़ की परिभाषा प्राप्त होती है जिससे हम आपको अगले उपभाग में परिचित कराएगें।

11.2.2 घटक

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि अभी तक चर्चित लगभग सभी ग्राफ़ एक खंड (one piece) वाले रहे हैं। इसके अपवाद हैं शून्य ग्राफ़ (null graph) और ऐसे ग्राफ़ों का सम्मिलन जिनमें प्रत्येक एक खंड वाले ग्राफ़ रहे हों। हम संबद्धता की संकल्पना को लागू करके इस अंतर को औपचारिक रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं जिसकी परिभाषा हम इस उपभाग में देंगें। यहाँ हमारी रुचि केवल उन मुख्य ग्राफ़ों में नहीं हैं जो संबद्ध ग्राफ़ हैं अपितु हमारी रुचि उन ग्राफ़ों को जानने की होती हैं जो संबद्ध हैं इन ग्राफ़ों को घटक माना जाता हैं। यहाँ हम इन पर विस्तार से चर्चा करेंगें।

उस ग्राफ को जिसका कोर समुच्चय रिक्त है, **शून्य ग्राफ़** कहा जाता है।

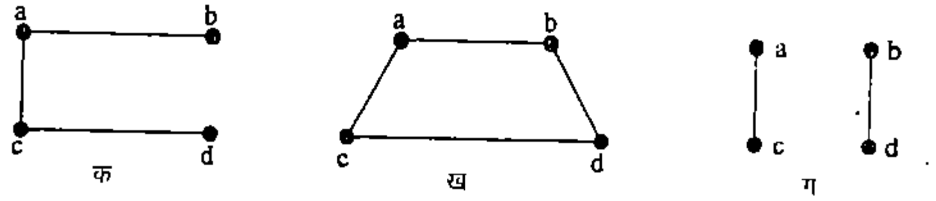
परिभाषा : ग्राफ़ $G = (V, E)$ को संबद्ध ग्राफ़ कहा जाता है, यदि किन्हीं भी दो शीर्षों $u, v \in V$. के लिए G में एक u-v गमन होता हो। यदि G संबद्ध नहीं हैं, तो इस ग्राफ़ को असंबद्ध (disconnected) ग्राफ़ कहा जाता है।

इसका अर्थ यह है कि एक संबद्ध ग्राफ़ में किन्हीं भी दो भिन्न-भिन्न शीर्षों को एक गमन से मिलाया जाता है। चित्र 6 में आप यह देख सकते हैं कि दोनों ही ग्राफ़ K_6 और K_5 संबद्ध हैं, परन्तु उनका सम्मिलन संबद्ध नहीं है, क्योंकि K_6 के शीर्षों को K_5 के शीर्षों से मिलाने वाला कोई गमन नहीं है।

यहाँ नीचे आपके लिए कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं।

E6) क्या एक शीर्ष वाला ग्राफ़ संबद्ध हो सकता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

E7) चित्र 7 में दिए गए कौन-कौन से ग्राफ़ संबद्ध ग्राफ़ हैं ?



चित्र 7

E8) यदि ग्राफ़ G संबद्ध ग्राफ़ हो, तो इसके सभी उपग्राफ़ संबद्ध होते हैं। इस कथन को सिद्ध कीजिए अथवा इसे असत्य सिद्ध कीजिए।

E8 को हल करते समय आपने यह अवश्य अनुभव किया होगा कि यह आवश्यक नहीं है कि संबद्ध ग्राफ़ों के उपग्राफ़ भी संबद्ध हों। परन्तु असंबद्ध ग्राफ़ों के संबंध में हमारा क्या विचार है ? आप यहाँ यह देख सकते हैं कि इस प्रकार के ग्राफ़ के कुछ उपग्राफ़ संबद्ध हैं। आइए अब हम इन पर चर्चा करें।

परिभाषा : मानलीजिए $G = (V, E)$ एक ग्राफ़ है। G के उपग्राफ़ H को **घटक** (component) कहा जाता है,

i) यदि H संबद्ध हो और यह G के किसी अन्य संबद्ध उपग्राफ़ का एक उपग्राफ़ न हो; और

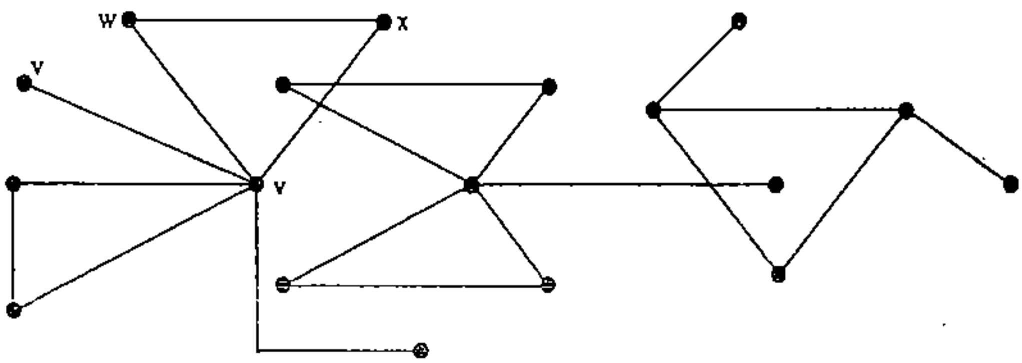
ii) जब कभी K, G का एक संबद्ध उपग्राफ़ हो और H, K में आविष्ट हो, तो $H = K$ होता है।

इस तरह, इस अर्थ में घटक ग्राफ़ G का एक 'महिष्ठ' (maximal) संबद्ध उपलेख होता है। G के घटकों की संख्या को $C(G)$ से प्रकट किया जाता है।

अब, चित्र 6 में दिए गए ग्राफ़ G को लीजिए। आप यहाँ यह देख सकते हैं कि K_6 और K_5 इनके घटक हैं और G इन घटका का सम्मिलन है।

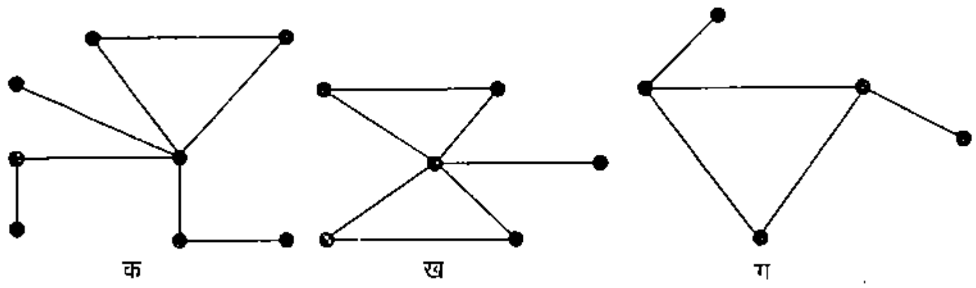
आइए हम एक अन्य उदाहरण लें।

उदाहरण 3: चित्र 8 में दिया गया ग्राफ़ G लीजिए। इस ग्राफ़ के तीन घटक ज्ञात कीजिए।



चित्र 8

हल: G के तीन घटक G_1, G_2 और G_3 हैं (जो कि चित्र 9(क), (ख) और (ग) में दिए गए हैं)।



चित्र 9

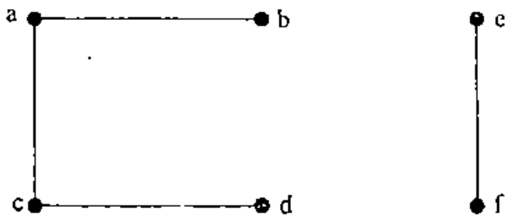
* * *

यहाँ भी G घटकों G_1, G_2 और G_3 का असंयुक्त सम्मिलन है। अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E9) चित्र 10 में दिया गया ग्राफ़ G लीजिए और निम्नलिखित ज्ञात कीजिए।

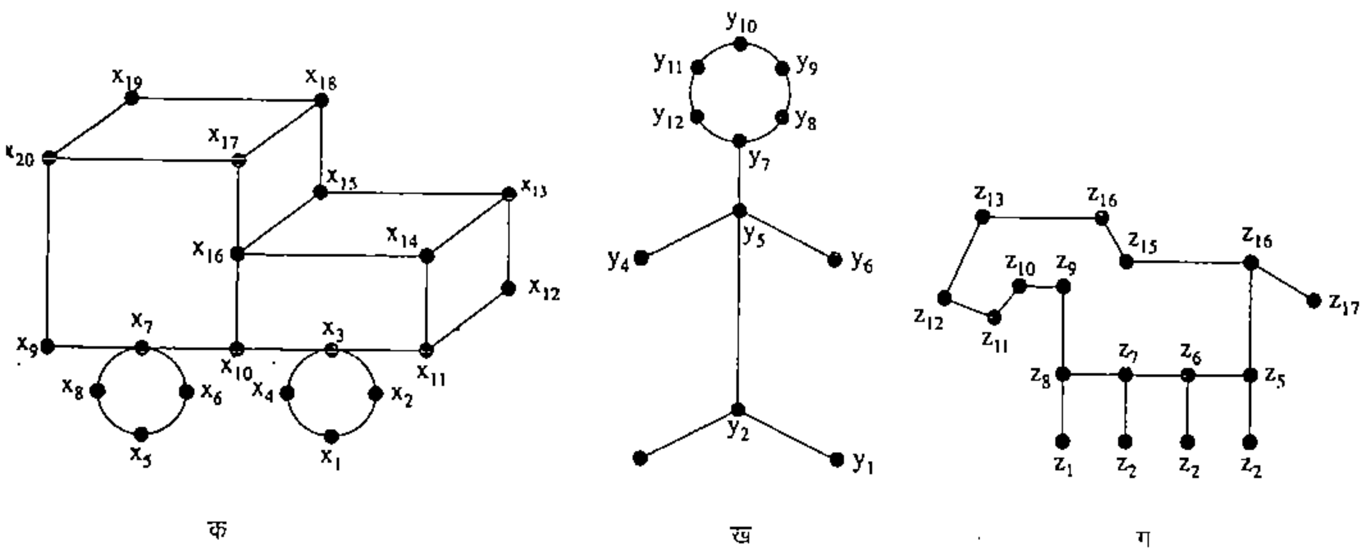
i) G के सभी संबद्ध उपग्राफ़।

ii) G के सभी घटक। क्या ये असंयुक्त हैं ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।



चित्र 10

E10) चित्र 11 में दिया ग्राफ़ लीजिए और दिखाइए कि इस ग्राफ़ को इसके घटकों के असंयुक्त सम्मिलन के रूप में लिखा जा सकता है।



चित्र 11

उदाहरण 3 और E10 के संबद्ध में आपने यह देखा है कि प्रत्येक स्थिति में दिए गए ग्राफ़ों को इनके संगत घटकों के असंयुक्त सम्मिलन के रूप में लिखा जा सकता है। इस परिघटना को किसी भी ग्राफ़ के लिए व्यापकीकृत किया जा सकता है जैसा कि आप नीचे दिए गए प्रमेय में देखेगें। यहाँ हम प्रमेय का केवल कथन देगें। इसकी उपपत्ति को, जो कि बहुत कठिन नहीं है, छोड़ दिया गया है।

प्रमेय 2 : प्रत्येक ग्राफ़ को घटकों में विभाजित किया जा सकता है।

अब, क्योंकि हम यह जानते हैं कि प्रत्येक ग्राफ़ को घटकों में विभाजित किया जा सकता है, इसलिए हम ग्राफ़ के घटकों के बारे में कुछ और अधिक जानकारी प्राप्त करना चाहेंगे। हमारी रुचि उन n शीर्षों वाले ग्राफ़ों जिनके घटकों की संख्या दी गई है, के कारों की संख्या के परिबद्धों (bounds) का पता लगाना हो सकती है। अब हम एक व्यापक परिणाम का कथन देंगे जिससे कि एक विशिष्ट स्थिति में अभीष्ट परिबंध प्राप्त होता है।

प्रमेय 3: यदि G, n शीर्षों वाला एक ग्राफ़ हो और जिसके k घटक हों, तो

$$n - k \le n \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$

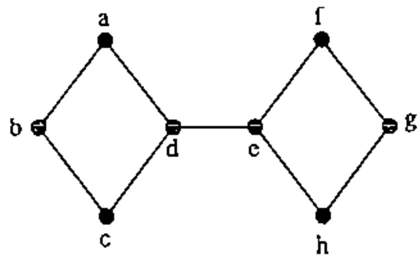
टिप्पणी : यदि G संबद्ध हो, तो k = 1 और हमें परिबंध के रूप में निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$n - 1 \le n \le \frac{1}{2}n(n-1)$$

संबद्ध ग्राफ़ों के अध्ययन में प्रयुक्त किए जाने वाला एक अन्य दृष्टिकोण यह प्रश्न करता है कि "संबद्ध ग्राफ़ किस प्रकार संबंधित है ?" इस प्रश्न का एक संभव निर्वचन यह है कि ग्राफ़ को असंबद्ध करने के लिए कितनी कोरों अथवा शीर्षों को हटाना आवश्यक होगा। इस विषय पर चर्चा हम अगले उपभाग में करेंगें।

11.2.3 संबद्धता

आइए अब हम उस ग्राफ़ को लें जिसमें एक वैद्युत परिपथ दिखाया गया है। (देखिए चित्र 12) यह ग्राफ़ संबद्ध है। मानलीजिए हम वैद्युत परिपथ में d और e को जोड़ने वाले तार को तोड़ देते हैं। इसका अर्थ यह है कि परिपथ को दर्शाने वाले ग्राफ में हम वस्तुतः तार की संगत कोर को हटा रहे हैं। अब, जब हम तार को तोड़ते है, तब परिपथ असंबद्ध हो जाता है। इसका अर्थ यह है कि ग्राफ़ की उस कोर को हटाने पर ग्राफ़ असंबद्ध हो जाता है।

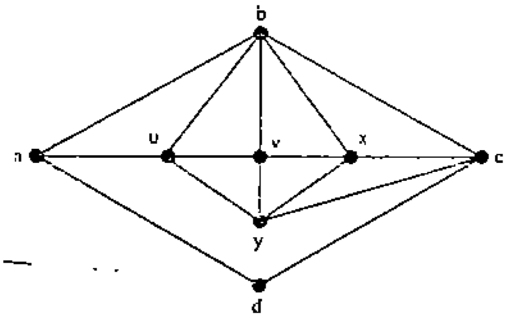


चित्र 12

टिप्पणी : जब भी हम एक कोर, मानलीजिए xy, को हटाने की बात करते हैं, तब हमारे कहने का अर्थ केवल x और y के बीच के संबंधन को हटाना ही होता है अर्थात् कोर को हटाना है, xy को आपतित शीर्ष x और y को हटाना नहीं है।

जब हम ग्राफ़ से एक कोर uv को हटा लेते हैं तब हम परिणामी ग्राफ़ को G – uv से प्रकट करते हैं।

अभी-अभी हमने उस स्थिति को देखा है जिसमें एक कोर को हटाने पर ग्राफ़ असंबद्ध हो जाता है। परन्तु, यह स्थिति सदा नहीं होती। उदाहरण के लिए, यदि हम चित्र 12 में कोर ab को हटा लें, तब भी परिणामी ग्राफ़ असंबद्ध नहीं होता। आप इस स्थिति को चित्र में दिए गए ग्राफ़ में भी देख सकते हैं जो कि एक राज्य के मख्य नगरों को जोड़ने वाली सड़कों को निरूपित करती है।



चित्र 13

इस स्थिति में किसी भी एक कोर को हटा देने से ग्राफ़ असंबद्ध नहीं होता, क्योंकि वहाँ सदा ही वैकल्पिक संबंधन होते हैं।

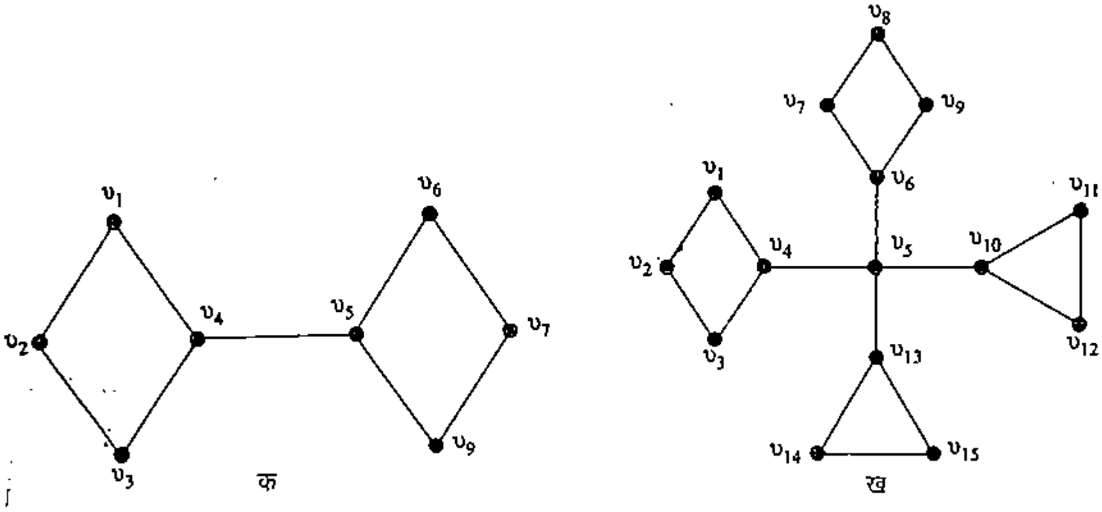
इन प्रकार की कोरों से हमें निम्नलिखित परिभाषा प्राप्त होती है।

परिभाषा : ग्राफ़ G की कोर e को G का **सेतु** (bridge) कहा जाता है, यदि e के हटाने पर G असंबद्ध हो जाता हो।

उदाहरण के लिए, चित्र 12 के ग्राफ़ में कोर uv एक सेतु है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

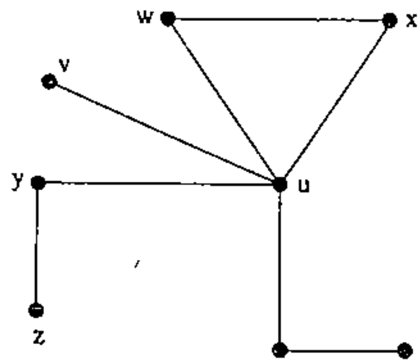
E11) चित्र 14 के प्रत्येक ग्राफ़ के सेतु ज्ञात कीजिए।



चित्र 14

E12) सेतु रहित ग्राफ़ का एक उदाहरण दीजिए।

आइए हम चित्र 15 में दिया गया एक अन्य ग्राफ़ लें।



चित्र 15

यह चित्र संबद्ध है। यहाँ, यदि हम कोर uv को हटा दें, तो परिणामी ग्राफ़ असंबद्ध हो जाता है और इसके घटक {v} और G\{v} हो जाते हैं। परिणामी ग्राफ़ (G – uv) के घटकों की संख्या 2 होती है। इसके विपरीत यदि हम कोर uw को हटा लें, तो इस स्थिति में ग्राफ़ असंबद्ध नहीं होता। ध्यान दीजिए कि कोर uw चक्र (u, w, x, y) का सदस्य है, परन्तु कोर uv इस प्रकार के किसी भी चक्र का सदस्य नहीं है। ऐसा प्रतीत होता है कि चक्र से शीर्षों u और w के बीच एक वैकल्पिक संबंधन उपलब्ध हो जाता है।

वस्तुतः सेतु की परिभाषा से हमें यह प्राप्त होता है कि **ग्राफ़ G की कोर e एक सेतु होती है यदि और केवल यदि e ग्राफ़ G के किसी भी चक्र का सदस्य न हो।**

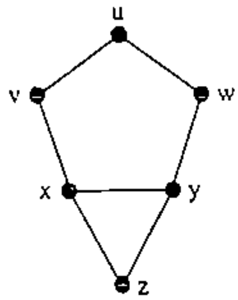
प्रश्न E11 को हल करते समय आपने एक ऐसा ग्राफ़ अवश्य प्राप्त किया होगा जिसका कोई सेतु न हो। केवल एक कोर को हटाकर आप इस प्रकार के ग्राफ़ को असंबद्ध नहीं कर सकते; इसे असंबद्ध करने के लिए एक से अधिक कोरों को हटाने की आवश्यकता होती है। अतः एक ग्राफ़ दिया हुआ हो, तो एक स्वाभाविक प्रश्न यह उठता है कि "G को असंबद्ध करने के लिए कम से कम कितनी कोरों को हटाने की आवश्यकता होती है ? नीचे दी गई परिभाषा के अनुसार इस संख्या को एक विशिष्ट नाम दिया गया है।

परिभाषा : एक संबद्ध ग्राफ़ G का कोर संबद्धतांक $\lambda(G)$, कोरों की वह लघुतम संख्या होती है जिन्हें हटाने पर G असंबद्ध हो जाता है।

उदाहरण के लिए, चित्र 14 में दिए गए ग्राफ़ का कोर-संबद्धतांक (edge-connectivity) 1 है। वास्तव में सेतु वाले किसी भी ग्राफ़ का कोर संबद्धतांक 1 होता है।

आइए अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : चित्र 16 में दिए गए ग्राफ़ G का कोर-संबद्धतांक ज्ञात कीजिए।



चित्र 16

हलः पहले आप यह देखिए कि इस ग्राफ़ में कोई सेतु नहीं है। अतः इसका कोर-संबद्धतांक 1 से अधिक होगा, अब, यदि हम कोरों xz, zy को हटा लें तो ग्राफ़ असंबद्ध हो जाता है। इसी प्रकार, दो कोरों वाले अन्य समुच्चय अर्थात् {xv, vu} और {uw, wy} होते हैं जिन्हें हटाने पर G असंबद्ध हो जाता है। अतः हमें कोर-संबद्धतांक 2 प्राप्त होता है।

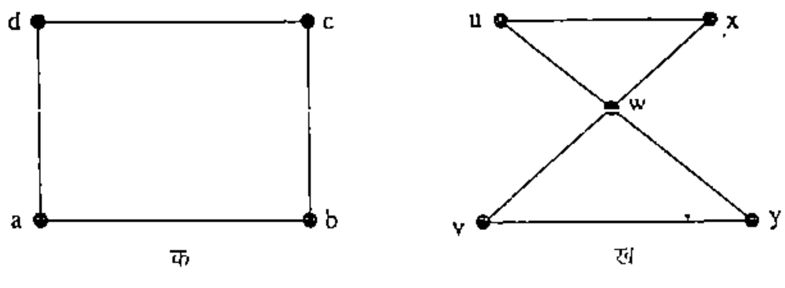
* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास क्यों नहीं करते ?

E13) निम्नलिखित के कोर-संबद्धतांक ज्ञात कीजिए :

i) चित्र 15 में दिया गया ग्राफ़ के,

ii) नीचे दिए गए ग्राफ़ के।



चित्र 17

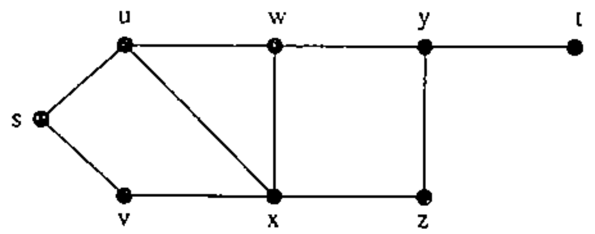
आइए अब हम एक संबद्ध ग्राफ़ का एक कोर-समुच्चय लें।

परिभाषा : संबद्ध ग्राफ़ G का काट-समुच्चय (cut-set) S निम्नलिखित गुणधर्मों वाली कोरों का समुच्चय S होता है :

i) S की सभी कोरों को हटाने पर G असंबद्ध हो जाता हो ;

ii) S के किसी भी उचित उपसमुच्चय को हटाने पर G असंबद्ध न होता हो।

उदाहरण के लिए चित्र 18 में दिया गया निम्नलिखित ग्राफ़ लीजिए।



चित्र 18

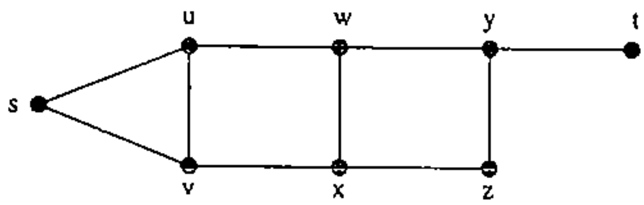
समुच्चय {uw, ux, vx} और {uw, wx, xz} इस ग्राफ़ के काट-समुच्चय हैं : जबकि समुच्चय {uw, wx, xz, yz} इस ग्राफ़ का काट-समुच्चय नहीं है, क्योंकि इस समुच्चय का एक उपसमुच्चय {uw, wx, xz} है जिसे हटाने पर ग्राफ़ G असंबद्ध हो जाता है।

इस बात पर ध्यान दीजिए कि यह आवश्यक नहीं है कि एक ग्राफ़ के काट-समुच्चयों की कोरें, समान संख्या में हों। उदाहरण के लिए, ऊपर चित्र 18 में दिए गए ग्राफ़ में दोनों ही समुच्चय {uw, ux, vx} और {wy, xz} काट-समुच्चय हैं।

इस बात पर ध्यान दीजिए कि ग्राफ़ G का कोर-संबद्धतांक $\lambda(G)$, ग्राफ़ G के लघुतम काट-समुच्चय का आमाप (size) होता है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए।

E14) चित्र 19 में दिए गए ग्राफ़ के निम्नलिखित कोर-समुच्चयों में कौन-कौन से कोर-समुच्चय काट-समुच्चय हैं। और, इसकी कोर-संबद्धतांक क्या है।



चित्र 19

क) {su, sv}

ख) {uv, wx, yz}

ग) {ux, vx, wx, yz}

घ) {yt}

ङ) {wx, xz, yz}

च) {uw, wx, wy}

हम संबद्धतांक को उन शीर्षों की न्यूनतम संख्या मान सकते हैं जिन्हें हटाना, ग्राफ़ को असंबद्ध करने के लिए आवश्यक होता है। ध्यान दीजिए कि जबमी हम एक शीर्ष को हटाते हैं, तब यदि उस शीर्ष के साथ आपतित कोई कोर हो, तो वह भी हट जाती है। आइए इस संबंध में हम कुछ उदाहरण लें। चित्र 17 में दिए गए ग्राफ़ लीजिए। केवल एक शीर्ष w को हटाकर ग्राफ़ 17(ख) को असंबद्ध किया जा सकता है।

परन्तु केवल एक शीर्ष हटाकर ग्राफ़ 17(क) को असंवद्ध नहीं किया जा सकता। इसे असंबद्ध करने के लिए दो असंलग्न शीर्षों (जैसे a और c) को हटाना आवश्यक होता है।

अब हम कोरों की तरह शीर्ष-संबद्धतांक (vertex connectivity) और शीर्ष-काट-समुच्चय (vertex-cut-set) को परिभाषित कर सकते हैं।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल क्यों नहीं करते। (देखिए E15)

E15) शीर्ष-संबद्धतांक और काट शीर्ष-समुच्चय को किस प्रकार परिभाषित करेंगे।

E16) चित्र 17(ख) में दिए गए ग्राफ़ का शीर्ष-संबद्धतांक और काट शीर्ष-समुच्चय ज्ञात कीजिए।

अगले उपभाग में हम आपको एक अन्य प्रकार के ग्राफ़ अर्थात् द्विभाजित ग्राफ़ से परिचित कराएगें।

11.3 द्विभाजित ग्राफ़

इस भाग में हम द्विभाजित ग्राफ़ को परिभाषित करेंगें और विभिन्न प्रश्नों को लेकर इनके महत्व को समझने का प्रयास करेंगें।

आइए सबसे पहले हम निम्नलिखित समस्या को लें। पांच कार्यों y_1, y_2, y_3, y_4 और y_5 को करने के लिए चार कामगार x_1, x_2, x_3 और x_4 उपलब्ध हैं। कामगार x_1 कार्यों y_1 और y_2 के लिए योग्यता प्राप्त है, x_2 कार्यों y_1 और y_3 के लिए योग्यता प्राप्त है x_3 कार्य y_4 के लिए योग्यता प्राप्त है : और x_4 कार्यों y_2, y_3 और y_5 के लिए योग्यता प्राप्त है। किसको कौन-सा कार्य दिया जाए इससे निम्नलिखित प्रश्न जुड़े हुए हैं :

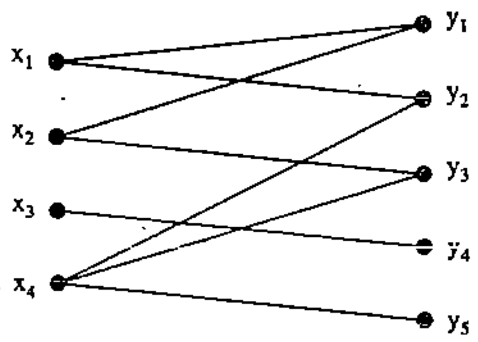
i) क्या प्रत्येक व्यक्ति को केवल एक कार्य दिया जा सकता है जिसके लिए वह योग्यता प्राप्त है ?

ii) यदि ऐसा है, तो इसे कैसे करना चाहिए ?

iii) यदि नहीं है, तो इनमें से कितनों को कार्य करने के लिए दिया जा सकता है ?

जिस प्रकार की समस्या का उल्लेख ऊपर किया गया है ऐसी समस्या को नियतन समस्या (assignment problem) कहा जाता है। इस समस्या को हल करने के लिए हमें समस्या में दी हुई स्थिति के निम्नलिखित ग्राफ़ सैद्धांतिक निदर्श को लेना अधिक सुविधाजनक होता है।

ग्राफ़ G के शीर्ष $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ और y_5 हैं और इनकी कोरें इस प्रकार परिभाषित हैं : x_i और y_j को मिलाने वाली एक कोर होती है, यदि कामगार x_i, कार्य y_j के लिए योग्यता प्राप्त है। आलेख को चित्र 20 में दिखाया गया है।



चित्र 20

तब लोगों को वे कार्य देने की समस्या जिनके लिए वे योग्यता प्राप्त हैं, और कोर-समुच्चय से एक ऐसे उपसमुच्चय का चयन करने की समस्या के बराबर होती है जिससे कि प्रत्येक x इन कोरों में से ठीक-ठीक एक कोर से संबद्ध हो।

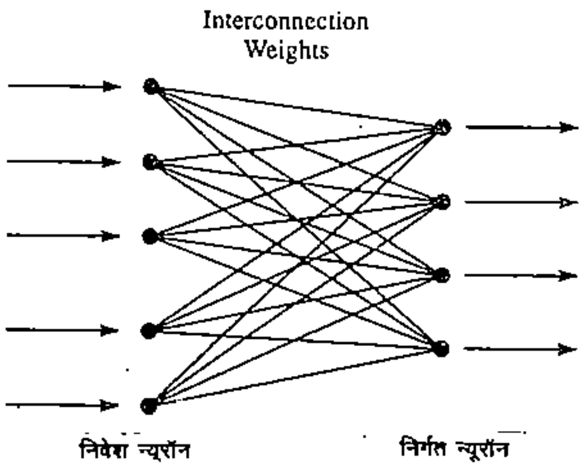
अब, यदि आप चित्र 20 में दिए गए ग्राफ़ को देखें तो आप पाएगें कि इसके शीर्षों के समुच्चय को

दो असंयुक्त उपसमुच्चयों में इस प्रकार विभाजित किया जा सकता हो कि उपसमुच्चय के कोई भी दो शीर्ष संलग्न (adjacent) न हों। आइए हम इस प्रकार के ग्राफ़ों की औपचारिक परिभाषा दें।

परिभाषा : ग्राफ़ G को **द्विभाजित** (bipartite) कहा जाता है, यदि $V(G) = X \cup Y$, जहाँ X और Y. अरिक्त उपसमुच्चय हैं जिससे कि $X \cap Y = \phi$ और E(G) की प्रत्येक कोर का एक अंत्य शीर्ष समुच्चय X में होता है और दूसरा अंत्य शीर्ष समुच्चय Y में होता है। समुच्चयों X, Y से समुच्चय **V(G)** का एक **विभाजन** (partition) प्राप्त होता है और इस स्थिति में तब हम प्रायः यह कहते हैं कि $X \cup Y$ ग्राफ़ G का एक द्विभाजन (bipartition) है।

द्विभाजित ग्राफ़ पर विचार करने की एक वैकल्पिक विधि इसके शीर्षों को दो रंगों से — मानलीजिए लाल और नीले से रंग देना है – इस स्थिति में ग्राफ़ द्विभाजित तब होता है जबकि प्रत्येक शीर्ष को लाल या नीले रंग से इस तरह रंग सकते हों कि प्रत्येक कोर का एक लाल सिरा और एक नीला सिरा प्राप्त होता हो।

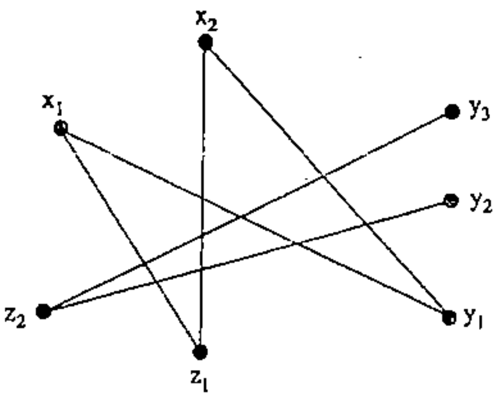
द्विभाजित ग्राफ़ वास्तविक जीवन से जुड़ी विभिन्न समस्याओं का, जैसे तंत्रिक नेटवर्कों का निदर्शन करना, अध्ययन करने में काफी उपयोगी होता है। नसों का नेटवर्को (neural networks) का अध्ययन करने के लिए अनेक प्रकार के निदर्श बनाए गए हैं। ऐसे निदर्शों में से एक निदर्श जो कि ग्राफ़ सिद्धांत की सहायता से नेटवर्क की आवश्यक कार्य-प्रणाली को प्रस्तुत करता है, चित्र 21 में दिया गया है। जैसा कि आप देख सकते हैं, यह एक द्विभाजित ग्राफ़ है और इस निदर्श का अध्ययन करने में द्विभाजित ग्राफ़ों के गुणधर्मों को प्रयोग किया गया है।



चित्र 21

यदि एक द्विभाजित ग्राफ़ दिया हुआ हो तो यह जानकर आपको आश्चर्य हो सकता है कि यह द्विभाजन अद्वितीय (unique) होता है या नहीं। इस प्रश्न का उत्तर आपको नीचे दिए गए उदाहरण से प्राप्त हो जाएगा।

उदाहरण 5: चित्र 22 में दिया गया ग्राफ़ लीजिए। दो भिन्न-भिन्न विभाजन ज्ञात कीजिए जिनसे G द्विभाजित हो जाता हो।



चित्र 22

हलः शीर्ष समुच्चय $\{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2\}$ है। इसका विभाजन करने की एक विधि $X = \{x_1, x_2, z_2\}, Y = \{z_1, y_1, y_2, y_3\}$ लेना एक अन्य विधि $X_1 = \{x_1, x_2, y_3\}, Y_1 = \{z_2, z_1, y_1, y_2\}$ हो सकती है। इन दोनों विभाजनों से G द्विभाजित हो जाता है।

* * *

अब हम एक ऐसे प्रमेय का कथन देगें जिससे द्विभाजित ग्राफ़ों का एक अभिलक्षणीकरण (characterisation) प्राप्त हो जाता है। कथन देने से पहले आइए हम निम्नलिखित टिप्पणी पर विचार कर लें।

टिप्पणी : जब एक ग्राफ़ G, n शीर्षो पर एक चक्र होता है, तब प्राय: हम यह कहते हैं कि G एक **n-चक्र** (n-cycle) है। चक्र C_n को **सम चक्र** (even cycle) कहा जाता है यदि n एक धनात्मक सम पूर्णाक हो और इसे **विषम चक्र** (odd cycle) कहा जाता है, यदि n एक धनात्मक विषम पूर्णांक हो। धन पूर्णाक n को **चक्र की लंबाई** (length of the cycle) कहा जाता है।

अब हम यहाँ प्रमेय का केवल कथन दे रहे हैं और उसकी उपपत्ति नहीं दे रहे हैं।

प्रमेय 4: ग्राफ़ G द्विभाजित होता है यदि और केवल यदि G उपग्राफ़ों के रूपों में किसी विषम चक्र को आविष्ट न करता हो।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E17) जांच कीजिए कि निम्नलिखित ग्राफ़ द्विभाजित हैं या नहीं।

Q_3 द्विभाजित है

i) पूर्ण ग्राफ़ K_3 (इकाई 1 का भाग 10.1 देखिए)

ii) अनविम धन (hypercube) Q_2 और Q_3
(इकाई 2 का भाग 10.2 देखिए)

E18) दिखाइए कि द्विभाजित ग्राफ़ का उपग्राफ़ द्विभाजित होता है।

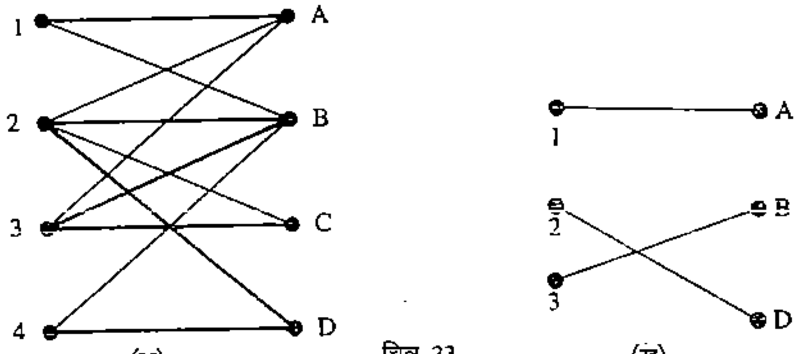
E19) दिखाइए कि यदि $G_1, \ldots, G_n$ द्विभाजित हों, तो $\bigcup_{i=1}^{n} G_i$ द्विभाजित होता है।

आइए अब हम नियतन समस्या पर पुनः विचार करें। उस समस्या में हम द्विभाजित ग्राफ़ के ऐसे विशिष्ट उपग्राफ़ प्राप्त करना चाहते हैं जिनसे समस्या का एक हल प्राप्त हो जाता हो। इस प्रकार के ग्राफ़ों को हमने नीचे परिभाषित किया है।

परिभाषा : मानलीजिए एक द्विभाजित ग्राफ़ में X और Y शीर्षो के दो असंयुक्त उपसमुच्चयों को प्रकट करते हैं। मानलीजिए G के **सुमेलन** (matching) कोरों का एक ऐसा उपसमुच्चय S है जिसके कोई भी दो कोरें (X में या Y में) एक शीर्ष के साथ आपतित नहीं हैं। तब हम S को G में एक सुमेलन कहेंगें। दूसरे शब्दों में सुमेलन, X के उपसमुच्चय के शीर्षो और Y के उपसमुच्चय के शीर्षो के बीच एकैक संगति (one-to-one correspondence) को परिभाषित करता है।

सुमेलन का मतलब है अच्छा जोड़ा होना

उदाहरण के लिए, नीचे के चित्र में एक द्विभाजित ग्राफ़ और इसके एक सुमेलन को दिखाया गया है। चित्र 23(ख) से सुमेलन प्राप्त हो जाता है।



(क) चित्र 23 (ख)

क्या आप कोई अन्य सुमेलन प्राप्त कर सकते हैं ? इसे हम एक प्रश्न के रूप में आपके लिए छोड़ रहे हैं। (देखिए E20(i))

सुमेलन की संकल्पना से संबधित एक अन्य संकल्पना होती है।

परिभाषा : X से Y पर सुमेलन को **X और Y का पूर्ण सुमेलन** कहा जाता है, यदि X के प्रत्येक शीर्ष के साथ आपतित एक-कोर होती हो। दूसरे शब्दों में सुमेलन पूर्ण होता है, यदि एकैक आच्छादी संगति X के सभी शीर्षों और Y के एक उपसमुच्चय के शीर्षों के बीच परिभाषित हो।

क्या चित्र 23(ख) में दिया गया सुमेलन एक पूर्ण सुमेलन है ? नहीं, क्योंकि इस सुमेलन में शीर्ष 4 छूट गया है।

ग्राफ़ सैद्धांतिक शब्दावली में नियतन समस्या का कथन इस प्रकार दिया जा सकता है : यदि $G = G(X, Y)$ एक द्विभाजित ग्राफ़ हो, तो G में X से Y पर पूर्ण सुमेलन कब होगा ? अतः एक दिए हुए द्विभाजित ग्राफ़ के लिए हम यह जानना चाहते हैं कि X के शीर्षों के समुच्चय से Y के शीर्षों के समुच्चय पर कोई पूर्ण सुमेलन है या नहीं। नीचे दिए गए प्रमेय में एक द्विभाजित ग्राफ़ में पूर्ण सुमेलन होने का आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध (necessary and sufficient condition) (भाग 1.3.4 देखिए।) दिया गया है। पहले की तरह यहाँ भी हम केवल प्रमेय का केवल कथन देगें और उपपत्ति छोड़ देगें।

प्रमेय 5: मानलीजिए $G = G(X, Y)$ एक द्विभाजित ग्राफ़ हैं। G में X का Y पर एक पूर्ण सुमेलन होता है, **यदि और केवल यदि X** के प्रत्येक उपसमुच्चय A के लिए $|A| \le R(A)$ जहाँ $|A|$ को A अवयवों की संख्या (जैसे A की गणन-संख्या (cardinality) भी कहते हैं, को प्रकट करता है और R(A), Y के उन शीर्षों के समुच्चय को प्रकट करता हैं जो कि A के शीर्षों के संलग्न हैं।

अब हम नीचे दिए गए उदाहरण में ऊपर दिए गए प्रमेय को नियतन समस्या में लागू करेंगें।

उदाहरण 6: इस भाग के प्रारंभ में दी गई नियतन समस्या के लिए प्रमेय 5 के प्रतिबंधों को सत्यापित कीजिए। (देखिए चित्र 20)

हल: प्रमेय को सत्यापित करने के लिए हमें शीर्ष-समुच्चय $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ के सभी उपसमुच्चयों, उनकी गणन-संख्या, संगत समुच्चय R(A) और उनकी गणन-संख्या पर विचार करना होता है। नीचे की सारणी में सभी संभावनाओं की सूची दी हुई है।

सारणी 1

A	$\|A\|$	R(A)	$\|R(A)\|$
ϕ	0	ϕ	0
$\{x_1\}$	1	$\{y_1, y_2\}$	2
$\{x_2\}$	1	$\{y_1, y_3\}$	2
$\{x_3\}$	1	$\{y_4\}$	1
$\{x_4\}$	1	$\{y_2, y_3, y_5\}$	3
$\{x_1, x_2\}$	2	$\{y_1, y_2, y_3\}$	2
$\{x_2, x_3\}$	2	$\{y_1, y_3, y_4\}$	2
$\{x_3, x_4\}$	2	$\{y_2, y_3, y_4, y_5\}$	4
$\{x_1, x_4\}$	2	$\{y_1, y_2, y_3, y_5\}$	4
$\{x_2, x_4\}$	2	$\{y_1, y_2, y_3, y_5\}$	4
$\{x_1, x_3\}$	2	$\{y_1, y_2, y_4\}$	3
$\{x_1, x_2, x_3\}$	3	$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$	4
$\{x_2, x_3, x_4\}$	3	$\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$	5
$\{x_1, x_3, x_4\}$	3	$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$	4
$\{x_1, x_2, x_4\}$	3	$\{y_1, y_2, y_3, y_5\}$	4
$\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$	4	$\{y_1, y_2, y_3, y_4, y_5\}$	5

सारणी को देखने से यह पता चलता है कि प्रतिबंध $|A| \le |R(A)$, X के सभी उपसमुच्चयों A के लिए संतुष्ट हो जाता है। अतः प्रमेय 1 के प्रतिबंध संतुष्ट हो जाते हैं।

* * *

ऊपर के उदाहरण से यह पता चलता है कि नियतन समस्या के लिए X से Y पर एक पूर्ण सुमेलन होता है। अतः नियतन समस्या हल हो जाती है।

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E20) चित्र 23 में दिए गए द्विभाजित ग्राफ़ के लिए चित्र 23 में दिए गए सुमेलन के अतिरिक्त एक अन्य सुमेलन ज्ञात कीजिए। क्या चित्र 23(क) में दिए गए ग्राफ़ का एक पूर्ण सुमेलन होता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

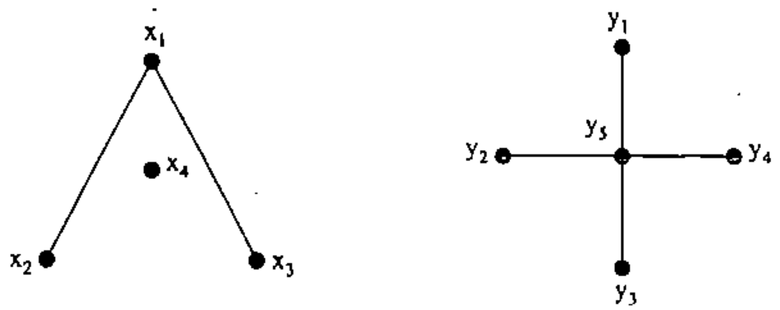
आइए अब हम एक अन्य प्रकार के ग्राफ़ को देखें जिसका कि वैद्युत नेटवर्कों में बहुत अधिक अनुप्रयोग होने के कारण महत्व काफी बढ़ गया है।

11.4 वृक्ष

हम सभी वंश-वृक्ष (family tree) की संकल्पना से परिचित हैं। ग्राफ सिद्धांत में सबसे पहले वृक्ष की संकल्पना गणितज्ञ जी किर्काफ द्वारा 1840 में वैद्युत नेटवर्क पर किए गए कार्य तथा एक अन्य गणितज्ञ कैली द्वारा 1870 में रासायनिक अणुओं के गणन पर किए गए कार्य के संबंध में उभर कर सामने आयी। हाल ही में वृक्षों का प्रयोग भाषा-विज्ञान (linguistics) से लेकर अभिकलन (computing) तक के अनेक क्षेत्रों में किया जाता है।

गणितज्ञों के लिए वृक्षों का महत्व इसलिए है, क्योंकि अनेक विधियों में वृक्ष एक विशेष प्रकार का ग्राफ़ होता है जिसके अनेक रोचक गुणधर्म होते हैं। जिनमें कुछ गुणधर्मों पर चर्चा हम इस भाग में करेंगें।

आइए पहले हम यह देखें कि वृक्ष होता क्या है। इस संबंध में नीचे दिए गए ग्राफ़ लीजिए। क्या आप इनकी संरचनाओं में कोई अंतर देख सकते हैं ?

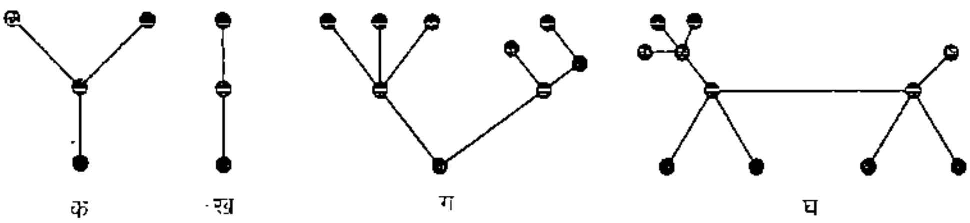


(क) चित्र 24 (ख)

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि (क) असंबद्ध है। और (क) का कोई चक्र नहीं है। नीचे दी गई परिभाषा से आप यह देखेगें कि (ख), वृक्ष का एक उदाहरण है।

परिभाषाः चक्र रहित ग्राफ़ को **अचक्रीय** (acyclic) कहा जाता है। वृक्ष एक संबद्ध अचक्रीय ग्राफ़ है! **वन** (forest) एक ग्राफ़ है जिसका प्रत्येक घटक एक वृक्ष है।

नीचे की ग्राफ़ में एक वन दिखाया गया है जिसके चार घटकों (क), (ख), (ग) और (घ) में से प्रत्येक घटक एक वृक्ष हैं।



चित्र 25

वृक्ष के अनेक रोचक गुणधर्म होते हैं जिनकी सूची हम निम्नलिखित प्रमेय में दे रहे हैं।

प्रमेय 6: मानलीजिए G, n शीर्षो वाला एक ग्राफ़ है। तब निम्नलिखित कथन तुल्य होते हैं।

i) G एक वृक्ष है।

ii) G अचक्रीय है और इसकी (n – 1) कोरें हैं।

iii) G संवद्ध है और इसकी (n – 1) कोरें हैं।

iv) G संवद्ध हैं और प्रत्येक कोर एक सेतु है।

v) G के कोई भी दो शीर्ष ठीक एक पथ से संवद्ध हैं।

उपपत्ति : यदि $n = 1$, तो सभी पांचों परिणाम तुच्छ होते हैं। अतः यहाँ हम यह मानकर चलेगें कि $n \geq 2$. अब, इकाई 2 से आप यह जानते हैं कि यदि हम (i) ⇒ (ii), (ii) ⇒ (iii), (iii) ⇒ (iv), (iv) ⇒ (v) और (v) ⇒ (i) को सिद्ध कर लें तो सभी कथन तुल्य हो जाएगें। अतः आइए हम इसे सिद्ध करें। इसके लिए हम तुल्य कथनों को एक-एक करके सिद्ध करेंगें।

(i) ⇒ (ii) : परिभाषा के अनुसार G का कोई चक्र नहीं है। अतः यह अचक्रीय है। अब हम यह दिखाएगें कि G के (n – 1) शीर्ष हैं। इसे हम आगमन-नियम से सिद्ध करेंगें।

यदि $n = 1$, तो कोरों की संख्या 0 होगी। अतः परिणाम $n = 1$ के लिए सत्य है। इसलिए, आइए अब हम यह मान लें कि p शीर्षों वाले प्रत्येक वृक्ष की (p – 1) कोरें हैं, जहाँ p एक धन पूर्णांक है और $1 < p < n$. तब हमें यह दिखाना होगा कि n शीर्षों वाले प्रत्येक वृक्ष की (n – 1) कोरें होती हैं। अब मानलीजिए कि हम किसी एक कोर को हटा देते हैं। क्योंकि G अचक्रीय है, इसलिए किसी भी एक कोर को हटाने से G दो G_1 और G_2 में असंवद्ध हो जाता है जिससे कि G_1 और G_2 संवद्ध और अचक्रीय हो जाते हैं। अतः G_1 और G_2 वृक्ष हैं और प्रत्येक वृक्ष के n से कम शीर्ष हैं। मानलीजिए n_1 और n_2 क्रमशः G_1 और G_2 के शीर्ष हैं। तब $n_1 + n_2 = n$. क्योंकि हमारी आगमन कल्पना के अनुसार n_1 और n_2, n से कम हैं, इसलिए G_1 और G_2 में कोरों की संख्या क्रमशः $n_1 - 1$ और $n_2 - 1$ होगी। अतः दोनों ग्राफ़ों में कोरों की कुल संख्या $n_1 + n_2 - 2 = n - 2$ होगी। हटायी गई कोर को इसके साथ मिला देने पर मूल ग्राफ़ में कोरों की कुल संख्या प्राप्त हो जाएगी। अतः कुल संख्या, (n – 1) होगी। इस तरह हम यह पाते हैं कि n शीर्षों वाले प्रत्येक वृक्ष की (n – 1) कोरें हैं। यह तथ्य सभी n के लिए सत्य है। अतः यह परिणाम हमें प्राप्त हो जाता है।

(ii) ⇒ (iii) : मानलीजिए कि G असंवद्ध है। और, मानलीजिए कि $c(G) = t > 1$. यह भी मानलीजिए कि $G_1, G_2, ..., G_t$, G के घटक है जिससे कि प्रत्येक G_i में शीर्षों की संख्या p_i होती है, जहाँ $i = 1, 2, ... t$, और प्रत्येक G_i में कोरों की संख्या q_i होती है, जहाँ $i = 1, 2, ..., t$. तब

$$p = p_1 + p_2 + ... + p_t, q = q_1 + ... + q_t.$$

अब, क्योंकि प्रत्येक G_i संवद्ध और अचक्रीय है, इसलिए प्रत्येक G_i एक वृक्ष है, जहाँ $i = 1, 2, ..., t$. अतः (i) ⇒ (ii) को सिद्ध करते समय हमने यह देखा है कि $q_i = p_i - 1, 1 \leq i \leq t$. तब

$$p - 1 = q = q_1 + ... + q_t = p - t.$$

यह केवल तभी संभव है जबकि $t = 1$. यह हमारी इस कल्पना के विरुद्ध है कि $t > 1$. अतः G, संवद्ध है।

(iii) ⇒ (iv) : मानलीजिए इसमें एक कोर है जो सेतु नहीं है। तब इस कोर को हटाने पर n शीर्षों और (n – 2) कोरों वाला ग्राफ़ प्राप्त होगा। परन्तु यह संभव नहीं है, क्योंकि भाग 11.2 के प्रमेय 3 के अनुसार G संवद्ध है। अतः प्रत्येक कोर एक सेतु है।

क्योंकि G संवद्ध है, इसलिए G के कोई भी दो शीर्षो को संबंधित करने वाला कम से कम एक पथ होता है। यदि इनमें से दो शीर्ष दो पथों से संबंधित है तो उससे हमें एक चक्र प्राप्त होता है। ये हमारी कल्पना कि, G का प्रत्येक कोर सेतु है, के विरुद्ध है।

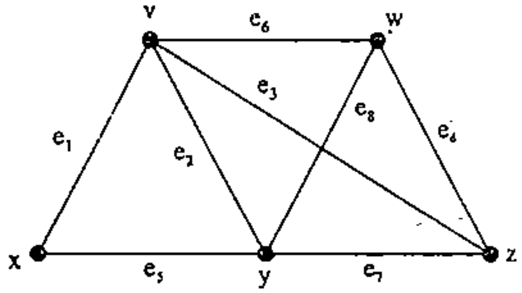
(v) ⇒ (i) : यहाँ हम यह मानकर चल रहे हैं कि कोई भी दो शीर्ष एक अद्वितीय पथ से संवद्ध हैं। इसलिए, ग्राफ़ G एक संवद्ध ग्राफ़ होगा। यह ग्राफ़ चक्रीय भी होगा, क्योंकि यदि इसमें एक चक्र C $= \{x_0, x_1, ..., x_n = x_0\}$ आविष्ट हो तो शीर्षों x_0 और x_1 को मिलाने वाले हमें दो अलग-अलग पथ $p_1 = \{x_0, x_1\}$ और $p_2 = \{x_0, x_{n-1}, ..., x_2, x_1\}$ प्राप्त हो सकते हैं जो कि हमारी कल्पना के विरुद्ध हैं। अतः G एक वृक्ष है।

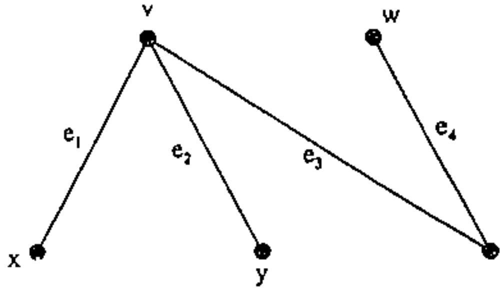
ऊपर दिए गए प्रमेय के अनुसार वृक्ष में अनेक उत्तम गुणधर्म होते हैं जो कि व्यापक ग्राफ़ में नहीं होता है। वस्तुतः आलेख-सिद्धांत में वृक्षों का महत्व इस बात में है कि प्रत्येक संबद्ध ग्राफ़ में एक वृक्ष आविष्ट होता है जिसमें मूल ग्राफ़ के सभी शीर्ष होते हैं जैसा कि अब आप देखेंगें।

आइए हम एक संबद्ध ग्राफ़ G लें। इसमें एक चक्र लीजिए और इसकी एक कोर को हटा दीजिए जिससे कि परिणामी ग्राफ संबद्ध हो जाए। हम इस प्रक्रिया को शेष चक्रों में से एक चक्र के साथ पुनः करते हैं और यह प्रक्रिया हम तब तक लागू करते रहते हैं जब तक कि कोई चक्र शेष नहीं बच रहता। ऐसा करने पर जो ग्राफ़ बच रहता है वह G का, एक संबद्ध उपग्राफ़ होता है जिसका कि कोई चक्र नहीं होता। अतः यह एक वृक्ष होता है। ध्यान दीजिए कि इस वृक्ष में G के सभी शीर्ष होते हैं। इस प्रकार के ग्राफ़ को जनक वृक्ष (spanning tree) कहा जाता है जैसा कि आपको नीचे दी गई परिभाषा से स्पष्ट हो जाएगा।

परिभाषा : ग्राफ़ G का जनक वृक्ष एक संबद्ध अचक्रीय उपग्राफ़ होता है जिसमें G के सभी शीर्ष आविष्ट होते हैं।

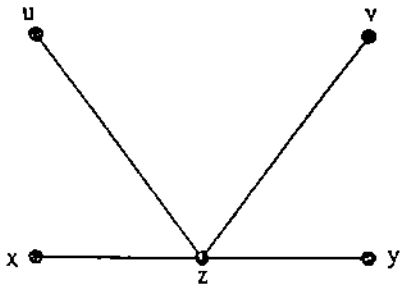
नीचे की चित्र में एक संबद्ध आलेख और इसका एक जनक वृक्ष दिखाया गया है।





चित्र 26

क्या इस ग्राफ़ का केवल एक जनक वृक्ष होता है ? नहीं, चित्र 27 में दिए गए ग्राफ़ में ग्राफ़ का एक अन्य जनक वृक्ष दिया गया है।



चित्र 27

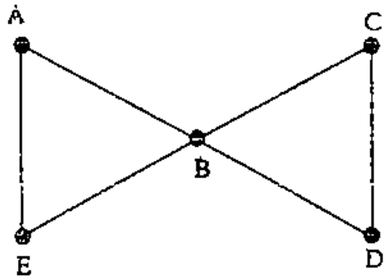
इससे यह पता चलता है कि संबद्ध ग्राफ़ के अनेक जनक वृक्ष हो सकते है। यहाँ अब हम प्रमेय का केवल कथन देगें और इसकी उपपत्ति छोड़ देगें।

प्रमेय 7: G संबद्ध होता है यदि और केवल यदि इसका एक विस्तारण वृक्ष हो।

ऊपर दिए गए प्रमेय से यह पता चलता है कि k घटकों वाले ग्राफ़ में प्रत्येक घटक का एक जनक वृक्ष होता है। ग्राफ़ सिद्धांत के व्यापक परिणाम को सिद्ध करने में इस परिणाम के कारण तथा वृक्षों की विशिष्ट संरचना के कारण कभी-कभी वृक्ष के संगत परिणाम को सिद्ध करना अधिक सुविधाजनक होता है।

अब आप नीचे दिए गए कुछ प्रश्नों को हल कीजिए।

E21) नीचे दिए गए ग्राफ़ के तीन जनक वृक्ष बनाइए।



चित्र 28

E22) क्या प्रत्येक वृक्ष एक द्विभाजित ग्राफ़ होता है ? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

अभी तक हमने तीन प्रकार के ग्राफ़ों पर चर्चा की है : संबद्ध ग्राफ़, द्विभाजित ग्राफ़ और वृक्ष। आगे की इकाइयों में आप कुछ और प्रकार के ग्राफ़ देखेंगे।

इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए उसका एक संक्षिप्त विवरण यहाँ हम दे दें।

11.5 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित मुख्य तथ्यों का अध्ययन किया है।

1. हमने एक ग्राफ़ में, गमन, पथ-चिह्न, पथ, परिपथ और चक्रों को आदि शब्दों को परिभाषित किया है।
2. हमने संबद्ध ग्राफ़ों और घटकों को परिभाषित किया है। हमने विभिन्न उदाहरण लेकर इस बात पर भी चर्चा की है कि ग्राफ के घटक किस प्रकार ज्ञात किए जाते हैं। हमने ग्राफ़ G के घटकों की संख्या C(G) पर शीर्ष अथवा कोर के हटाने के प्रभाव को भी दर्शाया है।
3. हमने द्विभाजित ग्राफ़ों को परिभाषित किया है और इनके चक्रों के रूप में इन ग्राफ़ों का एक अभिलक्षणीकरण प्राप्त किया है।
4. हमने वृक्षों को परिभाषित किया है और सभी संबद्ध ग्राफ़ के वर्ग में इन ग्राफ़ों के महत्व पर चर्चा की है।

11.6 हल/उत्तर

E1) {u, uv, vx, x, xy, y, yv, v, vb, b, bu, u, uv}, लंबाई 7 वाला एक गमन है। केवल यही एक गमन नहीं है। अन्य गमनों के बारे में भी सोचिए।

E2) i) आकृति 4 के W_1 का संगत गमन उस पथ-चिह्न का एक उदाहरण है जो पथ नही है। W_1 में शीर्ष x की पुनरावृत्ति हुई है।

ii) असत्य। कारण वही है जो कि i) में दिया गया है।

E3) नहीं, क्योंकि पहला शीर्ष और अंतिम शीर्ष समान है।

E4) i) यह आप गमन खींचें तो आप उदाहरण सरलता से प्राप्त कर सकते हैं। एक उदाहरण {u, x, w, z, y, x, w, v} है। इसी प्रकार के अन्य उदाहरण भी होते हैं।

ii) W = {u, v, y, z, w, x, z, u} एक परिपथ है जिसमें शीर्ष की पुनरावृत्ति हुई है। अतः W, एक चक्र नहीं है।

iii) W_0 = {u, t, w, x, u} एक चक्र है जिससे कि अन्य सभी चक्रों की लंबाई l(W) से अधिक है।

E5) हमने k पर आगमन-नियम लागू किया है। यदि k = 1, तो प्रत्येक शीर्ष का कम से कम एक प्रतिवेश (neighbour) होता है। इस तरह किसी भी शीर्ष से प्रारंभ होकर लंबाई 1 वाला पथ होता है। अब, आगमन-नियम लागू करके यह मानलीजिए कि प्रत्येक ग्राफ़ H में, जहाँ $\delta(H) \geq (k-1)$, किसी भी दिए गए शीर्ष से प्रारंभ होकर लंबाई (k − 1) वाला एक पथ होता है।

मानलीजिए G एक ग्राफ़ है, जहाँ $\delta(G) \geq k > 1$. मानलीजिए x_0, G में कोई एक शीर्ष है। x_0 पर आपतित एक कोर e_1 लीजिए। $G - e_1$ लीजिए। एक कोर को हटाने पर इसके अंत्य शीर्षों के कोटि में केवल एक की कमी आती है। इस तरह, $\delta(G - e_1) \geq k - 1$. अतः आगमन-नियम से G_1 में लंबाई (k − 1) वाला एक पथ $\{x_1, e_2, ..., e_k, x_k\}$ होता है। और, क्योंकि x_{k-1} का कोटि $d(x_{k-1})$ कम से कम k होता है, इसलिए $x_0, x_1, ..., x_{k-2}$ से भिन्न हम x_k ले सकते हैं। और $\{x_0, e_1, x_1, e_2, ..., x_k\}$, G में लंबाई k वाला एक पथ है। अतः G में किसी भी शीर्ष से प्रारंभ होकर लंबाई k वाला एक पथ होता है। और, क्योंकि यह सभी k के लिए सत्य है इसलिए इससे परिणाम प्राप्त हो जाता है।

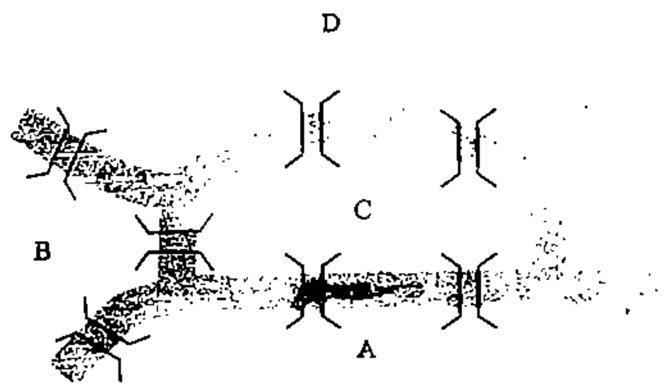
इकाई 12 ऑयलरीय और हैमिल्टोनीय ग्राफ़

इकाई की रूपरेखा — पृष्ठ संख्या

12.1 प्रस्तावना

मानलीजिए आप एक विक्रीकर्त्ता के रूप में एक नए शहर में जाते हैं। स्वाभाविक है कि आप वहाँ के सभी महत्वपूर्ण मार्गों से परिचित हो जाना चाहेंगें। परिचित होने की एक विधि यह है कि आप शहर का एक नक्शा खरीद लें और उस नक्शे के अनुसार शहर का चक्कर लगाएँ। यदि आप किसी उचित योजना के बिना ऐसा करते हैं तो संभव है कि आपको कुछ मार्गों का चक्कर एक से अधिक बार लगाना पड जाए। अतः इस परेशानी से बचने के लिए यह आवश्यक है कि आप शांतपूर्वक बैठकर मार्गों की योजना बना लें। इसकी एक अति दक्ष विधि यही होगी कि आपको एक मार्ग पर केवल एक बार ही जाना पड़े। परन्तु प्रश्न यह उठता है कि क्या इस प्रकार के मार्ग को ज्ञात करना संभव है ?

यह एक ऐसा स्वाभाविक प्रश्न है कि यह जानकर आपको आश्चर्य नहीं होगा कि इसी प्रकार का प्रश्न 250 वर्ष पहले भी उठाया गया था। कोनिस्बर्ग एक शहर था और इस शहर में प्रेगल नदी बहती थी जिससे कि दो द्वीप B और C बन गए थे जैसा कि चित्र 1 में दिखाया गया है।



चित्र 1: कोनिस्बर्ग का व्यवस्था आरेख।

ये दो द्वीप और शहर के अन्य भागों को एक-दूसरे से सात पुलों से जोड़ा गया था। कुछ नागरिक तो इस प्रश्न को हल करने में आनंद उठाते थे कि क्या प्रत्येक पुल का केवल एक बार प्रयोग करके पूरे शहर का चक्कर लगाया जा सकता है ?

1736 में स्विट्जरलैंड वासी गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर ने इस प्रश्न को ग्राफ़ सिद्धांत के एक प्रश्न के रूप में रूपांतरित करके इस प्रश्न का उत्तर ढूंढ निकाला था। ऑयलर के नाम पर रखे गए ग्राफ़ की चर्चा करते समय हम भाग 12.2 में इस प्रश्न पर विचार करेंगे। मनोरंजन गणित ने कोनिस्बर्ग प्रश्न के समान एक और प्रश्न यह उठता है कि क्या कागज पर से कलम को उठाए बिना और किसी भी रेखा पर दो बार जाए बिना कौन-कौन-से चित्र खींचे जा सकते हैं ? इस प्रश्न का उत्तर भी भाग 12.2 में दिया गया है।

जहाँ ऑयलर निकष (Euler's criterion) से हमें इस बात का पता चलता है कि शहर का चक्कर लगाने का कोई दक्ष मार्ग है या नहीं, वहीं फ़्लूरी-कलन विधि (Fleury's algorithm) से, जिसकी चर्चा भाग 12.3 में की गई है, हमें वास्तव में मार्ग का पता लगाने में सहायता मिलती है।

हैमिल्टन द्वारा प्रस्तुत की गई एक गणितीय पहेली में एक ऐसे चक्र को ज्ञात करना है जिसमें एक ग्राफ़ के सभी शीर्ष आविष्ट हों। इस पहेली से प्रेरित होकर हम उस ग्राफ़ के प्रतिबंधों पर चर्चा करेंगे जिसमें ग्राफ़ के सभी शीर्षों को आविष्ट करने वाला चक्र आविष्ट हो। हैमिल्टन के सम्मान में इस ग्राफ़ को हैमिल्टोनीय ग्राफ़ कहा जाता है। भाग 12.4 में हम एक ग्राफ़ का हैमिल्टोनीय ग्राफ़ होने के कुछ आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध (necessary and sufficient conditions) देगें। अंत में, भाग 12.5 में हम संबंधित प्रश्न अर्थात् चल विक्रीकर्ता की समस्या पर चर्चा करेंगें।

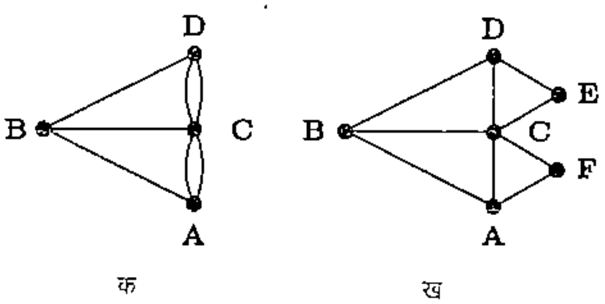
उद्देश्य

इस इकाई को पढ लेने के बाद, आप

- यह देख सकेंगें कि दिया हुआ ग्राफ़ ऑयलरीय है या नहीं;
- एक ऑयलरीय ग्राफ़ में ऑयलरीय परिपथ ज्ञात करने के लिए फ़्लूरी-कलन विधि लागू कर सकेंगें;
- यह देख सकेंगें कि दिया हुआ ग्राफ़ एक हैमिल्टोनीय ग्राफ़ के कुछ आवश्यक प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है या नहीं;
- यह देख सकेगें कि दिया हुआ ग्राफ़ एक हैमिल्टोनीय ग्राफ़ के कुछ पर्याप्त प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है या नहीं;
- एक भारित पूर्ण ग्राफ़ में एक न्यूनतम-भार हैमिल्टोनीय चक्र ज्ञात कर सकेंगें।

12.2 ऑयलरीय ग्राफ़

जैसा कि हम प्रस्तावना में बता चुके हैं ऑयलर ने कोनिस्वर्ग प्रश्न को ग्राफ़ सिद्धांत के एक प्रश्न के रूप में रूपांतरित करके हल किया था। इसके लिए उसने प्रत्येक भूमि-क्षेत्र को एक शीर्ष से और प्रत्येक सेतु को एक कोर से निरूपित किया था (देखिए चित्र 2(क))



चित्र 2

इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि चित्र 2(क) का ग्राफ़ एक **बहु-ग्राफ़ (multigraph)** है। यहाँ A और C दो कोरों से जुड़े हुए हैं : और C और D भी दो कोरों से जुड़े हुए हैं। आइए हम एक नया शीर्ष E लेकर C और D को मिलाने वाली एक कोर को विभाजित करें। इसी प्रकार, एक नया शीर्ष F लेकर A और C को मिलाने वाली एक कोर को विभाजित करें। ऐसा करने पर हमें चित्र 2(ख) में एक सरल ग्राफ़ प्राप्त होता है। यदि हम प्रत्येक कोर का केवल एक बार प्रयोग करके चित्र 2(ख) के ग्राफ़ के चारों ओर जाने की एक विधि ज्ञात कर सकें, तो ऐसा हम चित्र 2(क) के ग्राफ़ के साथ भी कर सकते हैं और इसका विलोम भी लागू होता है। शीर्षों को उप-विभाजित करने का यह प्रक्रम किसी भी बहु-ग्राफ़ पर लागू किया जा सकता है। अतः ऑयलरीय परिपथों पर विचार करते समय हम अपने को सरल ग्राफ़ तक सीमित रख सकते हैं। तब, कोनिस्वर्ग-सेतु समस्या का पुनः सूत्रीकरण इस प्रकार किया जा सकता है :

क्या चित्र 2(ख) के ग्राफ़ में ऐसा कोई परिपथ है जिसमें प्रत्येक कोर केवल एक बार आविष्ट होती हो ? (1)

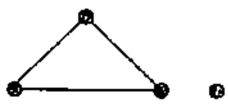
आपको इकाई 11 में दी गई पथ-चिह्न की परिभाषा अवश्य याद होगी। पथ-चिह्न एक गमन होता है जिसमें किसी भी कोर की पुनरावृत्ति नहीं होती। संवृत पथ-चिह्न (closed trail), जिसे परिपथ भी कहा जाता है, एक ऐसा पथ-चिह्न होता है जिसका प्रारंभिक शीर्ष और अंत्य शीर्ष एक ही होता है। इन संकल्पनाओं से संबंधित हमें निम्नलिखित शब्द प्राप्त होते हैं।

परिभाषा: उस पथ-चिह्न को, जिसमें ग्राफ की सभी कोरें आविष्ट होती हैं, **ऑयलरीय पथ-चिह्न** (Eulerian trail) कहा जाता है। एक संबद्ध ग्राफ़ **ऑयलरीय** होता है यदि वह एक ऑयलरीय परिपथ आविष्ट करता हो।

अतः हम (1) में दिए गए प्रश्न को इस रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं :

क्या चित्र 2(ख) का ग्राफ़ आयलरीय है ? (2)

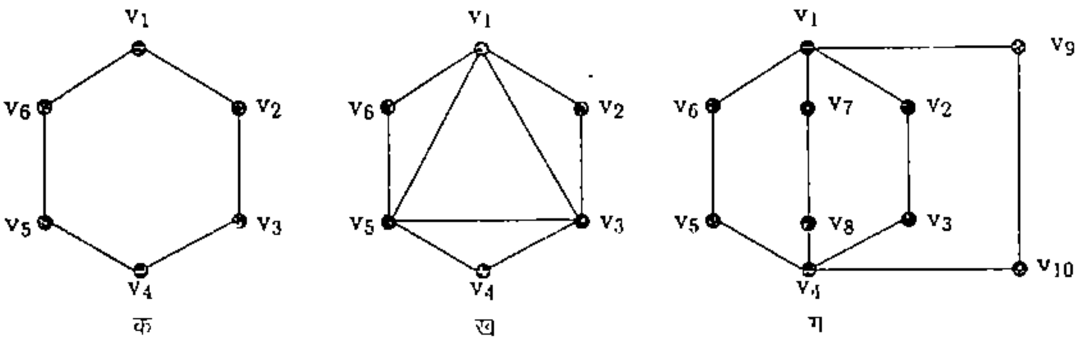
आगे अध्ययन करने से पहले आइए हम ऑयलरीय ग्राफों की अपनी परिभाषा का स्पष्टीकरण निम्नलिखित टिप्पणी के रूप में दें।



चित्र 3

टिप्पणी : इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि हमने संबद्धता को ऑयलरीय ग्राफ़ों की परिभाषा के भाग के रूप में प्रस्तुत किया है। ऐसा चित्र 3 में दिए गए उदाहरण की तरह के उदाहरणों से बचने के लिए किया गया है। ग्राफ़ में एक परिपथ है जो ग्राफ़ की सभी कोरों को आविष्ट करता है। इसमें ऐसी कोई कोर नहीं है जिससे होकर हम वियुक्त शीर्ष (isolated vertex) तक पहुँच सकें। और, जबतक कि कोई विशेष कारण न हो, हम उस स्थान के प्रति अधिक परेशान नहीं होगें जहाँ पहुँचा न जा सकता हो ! अतः इस प्रकार के वियुक्त शीर्षो में हमारी कोई रुचि नहीं होती। संबद्धता को परिभाषा का एक भाग मान लेने पर ऐसी स्थितियों से बचा जा सकता है।

आइए अब हम ऑयलरीय ग्राफ़ों के कुछ सरल उदाहरण लें। उदाहरण का सरलतम वर्ग चक्र है, जैसे ग्राफ़ 4(क) में उदाहरण C_6। v_1 पर चित्र 4(क) के ग्राफ में लंबाई 3 वाला एक चक्र बढ़ाकर हम एक अन्य उदाहरण प्राप्त कर सकते हैं। (देखिए चित्र 4(ख))



चित्र 4

यह भी ऑयलरीय है, क्योंकि हम शीर्ष v_1 से प्रारंभ कर सकते हैं, आंतरिक त्रिभुज की माला रेखा पर चल सकते हैं, v_1 पर लौट सकते हैं और बाह्य चक्र की माला रेखा पर चल सकते हैं। v_1 पर चित्र 4(क) में लंबाई 6 वाला एक चक्र बढ़ा देने पर हमें एक अन्य ऑयलरीय ग्राफ़ प्राप्त होता है। (देखिए चित्र 4(ग))।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए। इससे आप जांच कर सकेंगे कि आपने ऑयलरीय परिपथ की परिभाषा को समझ लिया है या नहीं।

E1) चित्र 4(ग) में दिए गए ग्राफ़ में एक आयलरीय परिपथ उत्पन्न करके यह सिद्ध कीजिए कि यह ग्राफ़ आंयलरीय है।

संभवतः आपको प्रश्न 1 सरल लगा होगा। इस प्रकार के सरल उदाहरण में भूल-चूक विधि से एक ऑयलरीय परिपथ उत्पन्न करके आप सरलता से सिद्ध कर सकते हैं कि ग्राफ़ ऑयलरीय है। ग्राफ़

अनेक स्थितियों में ऐसा करना संभव नहीं हो सकता। भूल-चूक विधि से यह सिद्ध करना संभव नहीं है कि ग्राफ ऑयलरीय नहीं है; इसमें हम ऑयलरीय परिपथ का अनुरेखण करने की कुछ चतुर विधि से वंचित रह सकते हैं। अतः ग्राफ को आयलरीय होने के लिए हमें एक आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध की आवश्यकता होती है।

प्रतिबंध भी इतना सरल होना चाहिए कि उसे लागू किया जा सके। अगले प्रमेय में इस प्रकार का एक प्रतिबंध दिया गया है। प्रमेय के आवश्यक भाग की ऑयलर-उपपत्ति Solutio problematis geometriam situs pertinentis (स्थिति की ज्यामिति से संबंधित प्रश्न का हल) में मिलता है। हेयरहोल्जर ने प्रमेय के पर्याप्त भाग को सिद्ध किया था।

प्रमेय 1: संबद्ध ग्राफ G ऑयलरीय होता है यदि और केवल यदि इसके प्रत्येक शीर्ष का कोटि सम हो।

उपपत्तिः मानलीजिए ग्राफ G ऑयलरीय है और यह भी मानलीजिए कि T, G में एक ऑयलरीय परिपथ है। जब-जब परिपथ एक शीर्ष से होकर जाता है, तब-तब वह दो कोरों का प्रयोग करता है जिनमें एक का प्रयोग शीर्ष तक पहुँचने के लिए और दूसरे का प्रयोग शीर्ष छोड़ने के लिए। उस शीर्ष के बारे में हमारा क्या विचार है जहाँ से हम परिपथ का अनुरेखण करना प्रारंभ करते हैं ? उस कोर को जिससे हम परिपथ को प्रारंभ करते है, उस कोर के साथ युग्मित कर देते हैं जिससे हम परिपथ का अंत करते हैं। इसके अतिरिक्त बीच-बीच में जब-जब हम शीर्ष से होकर जाते हैं, हम पहले की तरह शीर्ष पर आपतित दो कोरों का प्रयोग करते हैं। और, हम प्रत्येक कोर का प्रयोग केवल एक बार करते हैं। अतः ग्राफ़ के सभी शीर्षों का कोटि सम है।

इसके विलोम को सिद्ध करने के लिए एक ऐसा संबद्ध ग्राफ लीजिए जिसके प्रत्येक शीर्ष का कोटि सम हो। अब G की कोरों की संख्या पर आगमन-नियम लागू करके हम यह सिद्ध करेंगे कि G में एक ऑयलरीय परिपथ आविष्ट है। मान लीजिए कोरों की संख्या 0 है, चूंकि हम यह मानकर चले हैं कि ग्राफ संबद्ध है, इसलिए इसमें एक वियुक्त बिन्दु होता है। क्योंकि कोर-समुच्चय रिक्त है, इसलिए यह कथन कि, सभी कोरों को आविष्ट करने वाला एक ऑयलरीय परिपथ होता है, सत्य होता है। मानलीजिए कि G से कम कोरों वाले सभी ग्राफ़ों में एक ऑयलरीय परिपथ होता है। G के सभी शीर्ष सम कोटि वाले हैं और G का कोई-भी शीर्ष शून्य कोटि (वियुक्त शीर्ष) वाला नहीं है, क्योंकि यह संबद्ध है। अतः सभी शीर्षो का कोटि कम से कम 2 होता है। इसलिए हम एक स्वेच्छ बिन्दु $u = u_0$ से प्रारंभ कर सकते हैं और परिपथ C का अनुरेखण इस प्रकार कर सकते हैं : हम u_0 पर आपतित कोई एक कोर u_0u_1 लेते हैं। क्योंकि u_1 का कोटि कम से कम दो है, इसलिए u_1 पर आपतित एक अन्य कोर, मानलीजिए u_1u_2 होगी। हम इसी प्रकार परिपथ का अनुरेखण करते चलते हैं और इस बात से सुनिश्चित बने रहते हैं कि हम किसी भी शीर्ष में प्रवेश और निकास अलग-अलग कोरों से करते हैं। C का अनुरेखण करते समय हम u_0 से होते हुए अनेक बार जा सकते हैं। इस प्रक्रम का अंत तब होता है जबकि हम u_0 पर पहुँच जाते है और यह पाते हैं कि u_0 को छोड़ने के लिए कोई अप्रयुक्त कोर नही बच रहता है। यदि हमारे द्वारा प्राप्त किए गए परिपथ में सभी कोर आविष्ट हो, तो इसका अर्थ यह हुआ कि हमारा काम पूरा हो गया है, अन्यथा हम G से इस परिपथ को हटा देते हैं और परिणामी ग्राफ़ को (संभवतः असंबद्ध) H कहते हैं। H के प्रत्येक घटक के सभी शीर्ष सम कोटि वाले होते हैं और सभी घटकों की कोरों की संख्या G की कोरों की संख्या से कम होती है। अतः सभी घटक ऑयलरीय हैं। अब हम G में एक ऑयलरीय परिपथ इस प्रकार प्राप्त करते हैं : इसके लिए हम परिपथ C के किसी शीर्ष v से प्रारंभ करते हैं, और तबतक C की कोरों पर चलते रहते हैं जबतक कि हम उस शीर्ष तक नहीं आ जाते जो कि H के एक घटक पर स्थित होता है। तब हम उस घटक के ऑयलरीय परिपथ पर चलते हैं और अंततोगत्वा परिपथ C पर लौट आते हैं। इसी प्रकार H के घटकों के ऑयलरीय परिपथों को लेकर C के अनुदिश इस प्रक्रिया को जारी रखते हैं और अंत में हम शीर्ष v पर लौट आते हैं जहाँ से हमने चलना प्रारंभ किया था। इसमें हमने प्रत्येक कोर का प्रयोग केवल एक बार किया है, अर्थात् हमने एक ऑयलरीय परिपथ प्राप्त किया है।

ध्यान दीजिए कि G की संबद्धता से के अनुसार H के प्रत्येक घटक में C का एक बिन्दु आविष्ट होता है।

आइए अब हम देखें कि प्रमेय 1 को लागू करके हम कोनिस्वर्ग सेतु-समस्या को हल कर सकते हैं या नहीं।

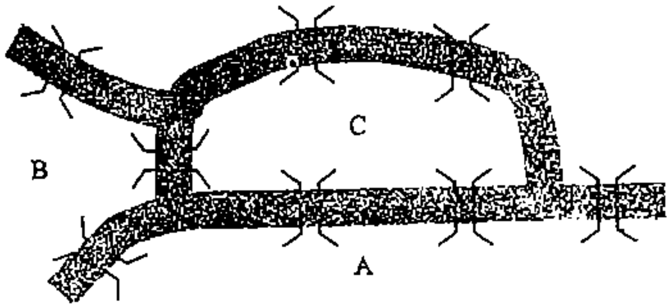
उदाहरण 1: जॉच कीजिए कि प्रत्येक पुल का केवल एक बार प्रयोग करके कोनिस्वर्ग के वासी शहर का चक्कर लगा सकते हैं या नहीं।

हल: आपको याद होगा कि हमने कोनिस्बर्ग सेतु समस्या को चित्र 2(ख) में ऑयलरीय परिपथ ज्ञात करने की समस्या में रूपांतरित कर लिया है। प्रमेय के आवश्यक अंश के अनुसार यदि ग्राफ में एक ऑयलरीय परिपथ हो, तो इसमें विषम कोटि वाली कोई भी कोर नहीं होती। परन्तु, जैसा कि आप देख सकते हैं कि E और F के अतिरिक्त सभी शीर्ष विषम कोटि वाले हैं। अतः इस ग्राफ का कोई भी ऑयलरीय परिपथ नहीं है। इसलिए, प्रत्येक शीर्ष का केवल एक बार प्रयोग करके कोनिस्बर्ग वासी शहर का चक्कर नहीं लगा सकते।

* * *

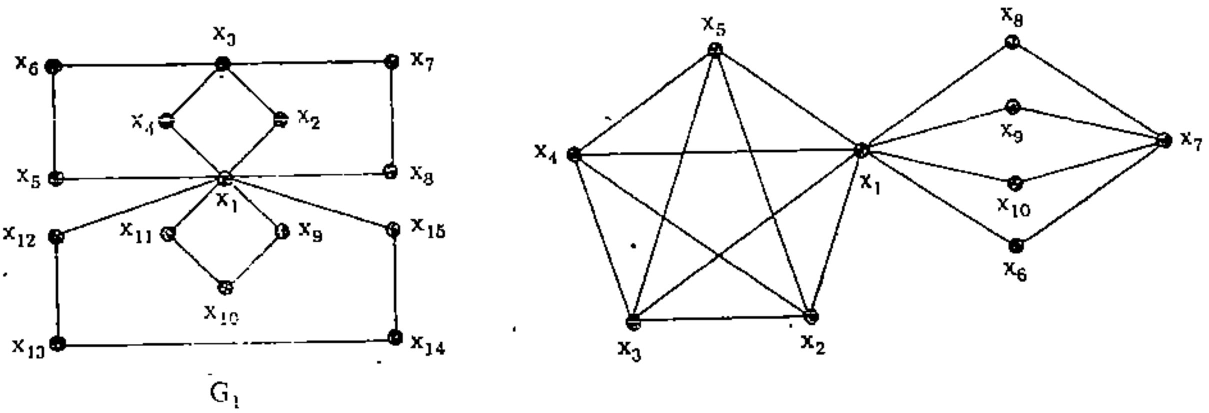
और अब आपकी समझ की जांच करने के लिए नीचे कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं।

E2) जिस समय आयलर ने इस प्रमेय को सिद्ध किया था उसके बाद कोनिस्बर्ग में अनेक परिवर्तन हुए। 1875 में भूमिक्षेत्रों B और C को मिलाने के लिए कोनिस्बर्ग में एक अतिरिक्त पुल का निर्माण किया गया (देखिए चित्र 5)। क्या अब प्रत्येक पुल का केवल एक बार प्रयोग करके कोनिस्बर्ग वासी शहर का चक्कर लगा सकते हैं ?



चित्र 5

E3) निम्नलिखित ग्राफों के कोटि अनुक्रम लिखकर जांच कीजिए कि ये ऑयलरीय हैं और साथ ही कुछ ऑयलरीय परिपथ लिखिए।



चित्र 6

E4) क) n के किन-किन मानों पर K_n, n शीर्षों पर पूर्ण ग्राफ, ऑयलरीय होता है ?

ख) n, m के किन-किन मानों पर $K_{n,m}$ ऑयलरीय होता है ?

E5) ज्ञात कीजिए कि Q_3, Q_4 में कौन ऑयलरीय है और कौन ऑयलरीय नहीं है।

E6) दिखाइए कि संबद्ध ऑयलरीय ग्राफ में किसी भी शीर्ष से प्रारंभ करके एक ऑयलरीय परिपथ का अनुरेखण किया जा सकता है।

मान लीजिए कि कोनिस्बर्ग वासी सारे पुलों का केवल एक बार प्रयोग करके सारे शहर का चक्कर

लगा सकते हैं तो वे इस ओर ध्यान नहीं देंगे कि उन्होंने अपनी यात्रा का प्रारंभ जहाँ से था, वहाँ यात्रा का समापन नहीं किया। क्या यह संभव है ? आइए अब हम इस प्रश्न की जांच करें। इसके लिए हम इस प्रश्न को ग्राफ़-सिद्धांत के एक प्रश्न के रूप में रूपांतरित करेंगे। परन्तु, ऐसा करने से पहले हमें दो परिभाषाओं की आवश्यकता होती है जो हमारे प्रश्न का सूत्रण करने में सहायक होती है।

परिभाषा : **विवृत पथ-चिह्न** वह पथ-चिह्न होता है जिसमें अंत्य शीर्ष भिन्न-भिन्न होते हैं।

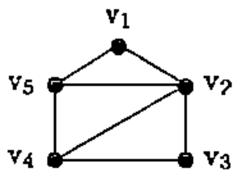
उदाहरण के लिए, {E, C, D, B, C, F} चित्र 2(ख) के ग्राफ़ में एक विवृत पथ-चिह्न है।

परिभाषा: ग्राफ़ G **कोर अनुरेखीय** (edge traceable) होता है, यदि G एक विवृत पथ-चिह्न को आविष्ट करता हो जो कि G की सभी कोरों को आविष्ट करता हो।

आइए अब इस प्रकार के ग्राफ़ का एक उदाहरण लें।

उदाहरण 2: दिखाइए कि चित्र 7 का ग्राफ कोर अनुरेखीय है।

हल: गमन $\{v_5, v_1, v_2, v_5, v_4, v_3, v_2, v_4\}$ लीजिए। इसमें ग्राफ़ की सभी सातों कोर आविष्ट हैं और अंत्य शीर्ष भिन्न-भिन्न हैं। क्योंकि किसी कोर की पुनरावृत्ति नहीं होती है, इसलिए यह गमन विवृत पथ-चिह्न हैं जिसमें ग्राफ़ की सभी कोरें आविष्ट हैं। अतः ग्राफ़ कोर-अनुरेखीय है।



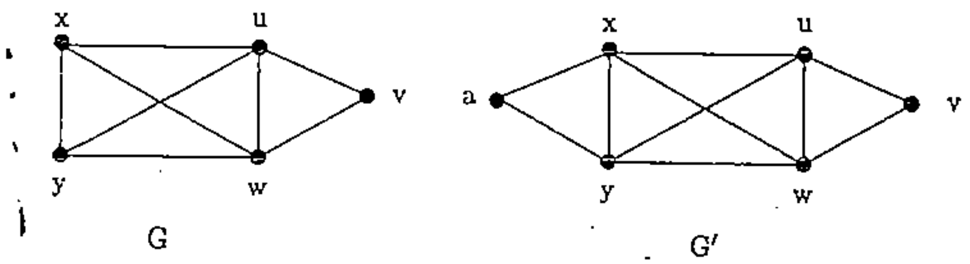
चित्र 7

* * *

कोर-अनुरेखीय ग्राफ़ की परिभाषा से कोनिग्स्बर्ग के नागरिकों को यह जांच करना होगा कि चित्र 2 (ख) का ग्राफ़ कोर-अनुरेखीय है या नहीं। प्रमेय 1 से हमें कोर अनुरेखीय ग्राफ़ों का निम्नलिखित अभिलक्षणीकरण प्राप्त होता है।

प्रमेय 2: संबद्ध ग्राफ़ G कोर अनुरेखीय होता है यदि और केवल यदि इसके विषम कोटि वाले ठीक-ठीक दो शीर्ष होते हों।

उपपत्ति : मानलीजिए G एक कोर अनुरेखीय ग्राफ़ है। तब एक विवृत ऑयलरीय पथ-चिह्न T होता है जिसमें G की सभी कोरें आविष्ट होती हैं। मानलीजिए x और y, T के प्रथम और अंतिम शीर्ष हैं। अब हम इसमें एक नया शीर्ष a बढ़ा देते हैं और इसे x और y से मिला देते हैं। आइए हम प्राप्त किए गए नए ग्राफ़ को G′ कहें। इसे नीचे के चित्र 8 में एक विशेष स्थिति के रूप में प्रदर्शित किया गया है :



चित्र 8

चित्र 8 के ग्राफ़ G′ में ऑयलरीय परिपथ {a, x, u, v, w, y, u, w, x, y, a} है।

ग्राफ़ G′ में हमें एक ऑयलरीय परिपथ इस प्रकार प्राप्त होता है : हम a से प्रारंभ करते है, कोर ax का अनुरेखण करते हैं, विवृत ऑयलरीय पथ-चिह्न T का अनुरेखण करते हैं, और कोर ya का अनुरेखण करते हैं। अतः प्रमेय 1 के अनुसार G′ की सभी कोरों का कोटि सम होता है। कोरें ax और ay को बढ़ा देने से x और y को छोड़कर अन्य सभी शीर्षों के कोटि अप्रभावित रहते हैं। अतः इन्हें G के शीर्ष के रूप में लेने पर सभी का कोटि सम होता है। शीर्षों x और y के संबंध में, कोरों ax और ay को बढ़ा देने अर्थात् इनके कोटियों में एक की वृद्धि कर देने के बाद इनके कोटि सम हो जाते हैं। अतः कोरों को बढ़ाने से पहले इनके कोटि अवश्य विषम होगें।

विलोम के रूप में, मानलीजिए कि ठीक-ठीक दो शीर्षों x और y के विषम कोटि हैं। तब एक नए शीर्ष a और दो नई कोरों ax और ay को बढ़ा देने पर सभी शीर्षों के कोटि सम हो जाते हैं। अतः a से प्रारंभ करके हम एक ऑयलरीय परिपथ प्राप्त कर सकते हैं। मानलीजिए यह ऑयलरीय परिपथ $\{v_0 = a, v_1, ..., v_n = a\}$ है। क्योंकि x और y ही केवल ऐसे शीर्ष हैं जिनसे a संलग्न है, इसलिए या तो $v_1 = x$ या $v_{n-1} = x$. यदि $v_1 = x$ तो हमें $v_{n-1} = y$ प्राप्त होगा और तब $\{v_1 = x,$

$v_2, \ldots, v_{n-1} = y\}$ विवृत ऑयलरीय पथ-चिह्न होगा। इसी प्रकार, यदि $v_1 = y$, तो $v_{n-1} = x$ होगा और $\{v_1 = y, v_2, \ldots, v_{n-1} = x\}$ विवृत ऑयलरीय पथ-चिह्न होगा।

आइए अब हम उस प्रश्न पर ध्यान दें जिससे प्रेरित होकर हमने ऊपर के प्रमेय को सिद्ध किया है।

उदाहरण 3: जांचे कीजिए कि क्या प्रत्येक पुल का केवल एक बार प्रयोग करके और यात्रा का समापन प्रारंभिक स्थल से अलग एक अन्य स्थल पर करके कोनिस्बर्ग वासी शहर का चक्कर लगा सकते हैं या नहीं (देखिए चित्र 2(ख))।

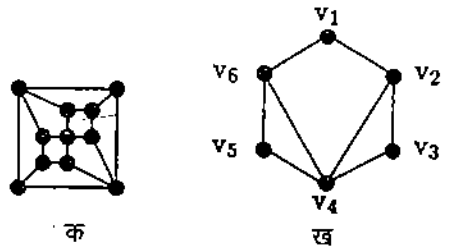
हल: चित्र 2(ख) को देखने पर, जैसा कि हम पहले देख चुके हैं E और F को छोड़कर अन्य सभी शीर्ष के विषम कोटि हैं अर्थात् यहाँ विषम कोटि वाले चार शीर्ष हैं। अतः यात्रा का प्रारंभ कहीं से करके और यात्रा का समापन करके भी प्रत्येक पुल का केवल एक बार प्रयोग करके कोनिस्बर्ग वासी शहर का चक्कर नहीं लगा सकते हैं।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

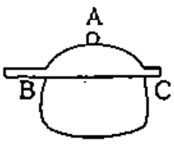
E7) 1875 में एक नया पुल बढ़ा देने के बाद वाली स्थिति को लीजिए (देखिए चित्र 5)। यदि यात्रा का प्रारंभ कहीं और से और यात्रा का समापन कहीं और पर करने की अनुमति प्राप्त हो, तो क्या प्रत्येक पुल का केवल एक बार प्रयोग करके शहर का चक्कर लगाया जा सकता है ?

E8) कोटि-अनुक्रम लिखकर बताइए कि नीचे दिए गए ग्राफ़ों में कौन-कौन कोर-अनुरेखीय हैं।

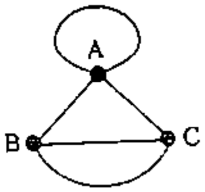


चित्र 9

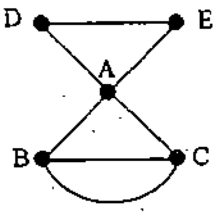
हमने एक और समस्या पर विचार किया है जिसका उल्लेख हमने इस इकाई की प्रस्तावना में किया था। इस प्रश्न में उस विधि को ज्ञात करना है जिसमें कागज पर से पेंसिल उठाए बिना और किसी रेखा पर दोबारा जाए बिना एक दिये हुए चित्र को खींचा जा सकता है या नहीं। ऐसी एक विधि है जिसका उल्लेख अब हम करेंगें।



चित्र 10(क)



चित्र 10(ख)



चित्र 10(ग)

उदाहरण 4: जांच कीजिए कि कागज पर से पेंसिल उठाए बिना और किसी भी रेखा पर दोबार जाए बिना चित्र 10(क) के ग्राफ़ को खींचा जा सकता है या नहीं।

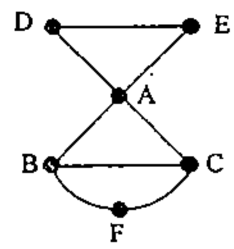
हल : इस विधि में चार चरण लागू करने होते हैं।

चरण 1 (उन सभी संधियों पर जहाँ दो से अधिक रेखाएँ मिलती हैं, शीर्ष बढ़ाइए)। चित्र 10(क) इस प्रकार की तीन संधियाँ A, B और C हैं। अतः A, B और C पर शीर्ष बढाने पर हमें चित्र 10(ख) में पाश वाला बहु-ग्राफ़ प्राप्त होता है। ध्यान दीजिए कि चित्र 10(क) में A और B को मिलाने वाले वक्र के स्थान पर चित्र 10(ख) में एक सरल कोर ली गई है। इसी प्रकार A और C को मिलाने वाले वक्र को कोर AC से निरूपित किया जाता है।

चरण 2 **(यदि कोई पाश नहीं हो, तो सीधे चरण 3 पर आ जाइए। परन्तु, यदि पाश हों, तो कोटि दो वाले दो शीर्षों को बढ़ाकर पाशों का निरसन कर दीजिए।)** यदि हम प्रारंभिक पाश के A पर कोटि 2 वाले दो शीर्ष D और E बढ़ा दें तो हमें चित्र 10(ग) प्राप्त होता है।

चरण 3 (यदि कोई बहु-कोर न हो, तो सीधे चरण 4 पर आ जाइए। अन्यथा, कोटि 2 वाले शीर्षों को बढ़ाकर बहु-कोरों का निरसन कर दीजिए)। चित्र 10(ग) में B और C दो कोरों से जुड़े हुए हैं। एक कोर पर शीर्ष F को बढ़ाकर हम एक बहु-कोर का निरसन कर देते हैं।

चरण 4 (परिणामी ग्राफ़ में विषम कोटि वाली कोरों की संख्या गिनिए यदि, या तो विषम कोटि वाले दो शीर्ष हों या विषम कोटि वाला कोई भी शीर्ष न हो, तो ग्राफ कोर **अनुरेखीय** या **ऑयलरीय** होता है। अतः कागज पर से पेंसिल उठाए बिना ग्राफ़ खींचा जा सकता है। इसलिए **प्रारंभ** वाले चित्र का **अनुरेखण** कागज पर से पेंसिल उठाए बिना किया जा सकता है।) जैसा कि आप चित्र 10(घ) से देख सकते हैं, इसमें विषम कोटि वाली ठीक-ठीक दो कोरें B और C हैं। अतः कागज पर से पेंसिल उठाए बिना चित्र का अनुरेखण किया जा सकता है।



चित्र 10(घ)

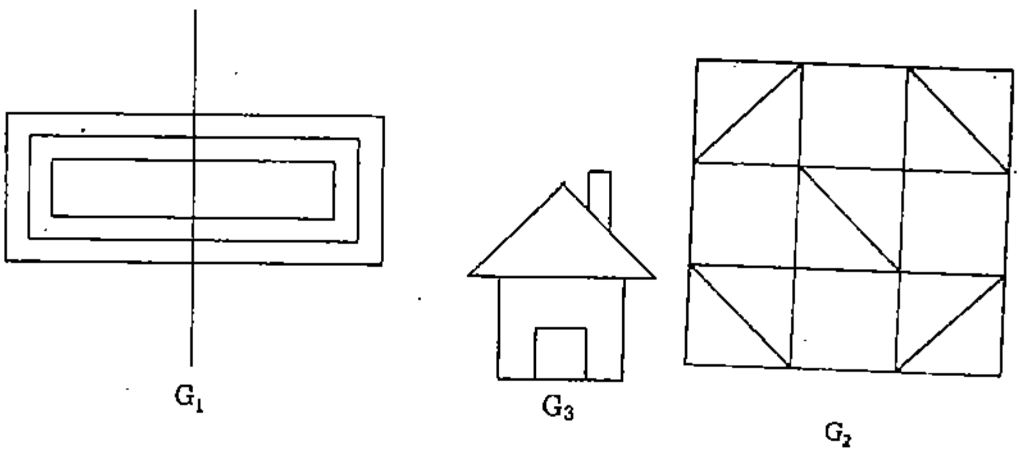
* * *

यदि आप ऊपर के उदाहरण को सावधानी से देखें तो आप यह देख सकते हैं कि यह निर्णय लेने की ओर अधिक सरल विधि हो सकती है कि कागज पर से पेंसिल उठाए बिना और किसी रेखा पर दोबारा जाए बिना चित्र खींचा जा सकता है या नहीं। ग्राफ़ों के अनुरूप आइए हम सुविधा के लिए उन रेखाओं की संख्या को, जो एक संधि पर मिलती हैं, संधि का कोटि कहें। ध्यान दीजिए कि केवल उन संधियों से जहाँ दो से अधिक रेखाएँ मिलती हैं विषम कोटि वाले शीर्ष प्राप्त हो सकते हैं। बढ़ाए गए अन्य सभी शीर्ष सम कोटि वाले होते हैं। इस प्रेक्षण से हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

प्रमेय 3: कागज पर से पेंसिल उठाए बिना और किसी रेखा पर दोबारा जाए बिना चित्र खींचा जा सकता है, यदि और केवल यदि संधियों की संख्या जिसका कोटि विषम हो और कम से कम 3 हो, या तो 2 हो या 0 हो।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E9) कागज पर से पेंसिल उठाए बिना और किसी रेखा-खंड पर एक बार से अधिक जाए बिना निम्नलिखित चित्रों में से किन-किन चित्रों को खींचा जा सकता है।



चित्र 11

E10) यदि संभव हो, तो निम्नलिखित संख्या में दिए गए शीर्षों और कोरों से ऑयलरीय ग्राफ़ बनाइए। यदि बनाना संभव नहीं है, तो बताइए कि यह संभव क्यों नहीं है।

	a	b	c
शीर्षों की संख्या	5	6	7
कोरों की संख्या	10	10	6

इस भाग में हमने यह देखा है कि यदि ग्राफ़ के सभी शीर्ष सम कोटि वाले हैं, तो यह ग्राफ़ ऑयलरीय होता है। फिर भी, कुछ ऐसी स्थितियां होती हैं, जहाँ ग्राफ़ ऑयलरीय तो होता है, परन्तु उसमें हम ऑयलरीय परिपथ ज्ञात नहीं कर पाते हैं। अगले भाग में हम फ्लूरी द्वारा प्रस्तुत की गई कलन विधि (algorithm) पर चर्चा करेंगे जिससे ऑयलरीय ग्राफ़ में एक ऑयलरीय परिपथ ज्ञात करने की विधि प्राप्त हो जाती है।

12.3 फ्लूरी-कलनविधि

वर्ष 1962 में एक चीनी गणितज्ञ मेगू गुओं ने एक समस्या प्रस्तुत की जिसे 'चीनी पोस्टमैन समस्या' के नाम से जाना जाता है। अपने दैनिक कार्यक्रम में एक पोस्टमैन डाक घर से डाक उठाता है, उसे लेकर शहर में जाता है, इसके लिए प्रत्येक सड़क पर एक बार जाता है और डाक बाँट लेने के बाद वह डाकघर लौट आता है। स्वाभाविक है कि इसके लिए वह अपने मार्ग का चयन इस प्रकार करना चाहता होगा जिससे कि उसे कम से कम चलना पड़े। उसे अपने मार्ग का चयन किस प्रकार करना चाहिए ? यहाँ, यदि हम विभिन्न सड़कों को कोरों से निरूपित करें और यह ज्ञात करें कि परिणामी ग्राफ़ ऑयलरीय है तो यह समस्या ग्राफ़ का एक ऑयलरीय परिपथ C ज्ञात करने की समस्या हो जाती है जिसमें डाकघर को निरूपित करने वाले शीर्ष को प्रारंभिक शीर्ष माना गया है। इस स्थिति में चीनी पोस्टमैन समस्या का हल सरलता से हो जाता है, क्योंकि ऑयलरीय परिपथ ज्ञात करने की एक उत्तम कलन-विधि फ्लूरी ने प्रस्तुत की है। इस कलन-विधि का कथन इस प्रकार दिया जा सकता है :

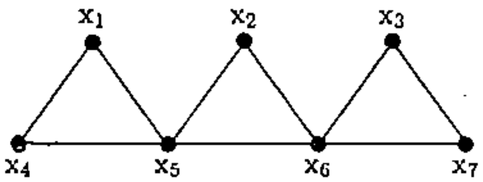
फ्लूरी-कलनविधि : कोई भी शीर्ष लीजिए और निम्नलिखित प्रतिबंधों को छोड़कर कोरों पर स्वेच्छा से जाइए :

i) **प्रत्येक चरण पर एक सेतु का चयन केवल तभी कीजिए जबकि कोई विकल्प न हो।**

ii) **प्रत्येक चरण पर, कोर पर चल लेने के बाद उसे मिटा दीजिए और किसी ऐसे वियुक्त शीर्ष को भी मिटा दीजिए जो कि कोर को हटाने पर प्राप्त होता है।**

आइए हम इस कलन विधि को अच्छी तरह से समझने के लिए एक सरल उदाहरण लें।

उदाहरण 5: फ्लूरी-कलनविधि से चित्र 12 के ग्राफ़ में एक ऑयलरीय परिपथ ज्ञात कीजिए। यह भी बताइए कि आपने किन-किन सेतुओं का चयन किया है।

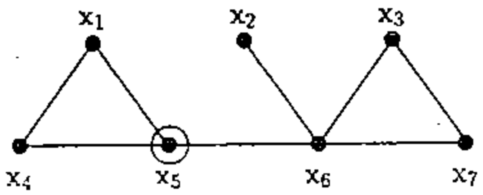


चित्र 12

हल: कलन विधि के अनुसार हम किसी शीर्ष को प्रथम शीर्ष मान सकते हैं। आइए हम यह मान लें कि प्रथम शीर्ष x_2 है।

चरण 1 इस चरण पर ऐसा कोई सेतु नहीं है जिससे बचा जा सके। हम कोर x_2x_5 लेते हैं। x_5 पर पहुँचने के बाद कलन विधि के प्रतिबंध (ii) के अनुसार हम कोर x_2x_5 को मिटा देते हैं। मिटाने के कारण कोई वियुक्त शीर्ष प्राप्त नहीं होता।

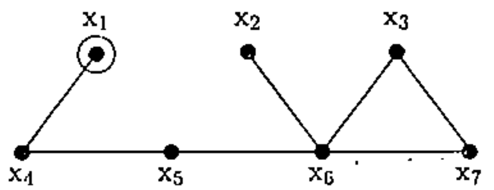
चरण 2 अब हम x_5 पर हैं। ध्यान दीजिए कि x_5x_6 एक सेतु है। (देखिए नीचे दिया गया चित्र 13)



चित्र 13

क्योंकि हमारे पास अन्य विकल्प भी हैं, इसलिए प्रतिबंध (ii) के अनुसार हमें इस कोर से बचना चाहिए। हम x_5x_1 लेते हैं जो सेतु नहीं है। x_1 पर पहुँचने के बाद हम कोर x_5x_1 को हटा देते हैं। ऐसा करने पर कोई भी वियुक्त शीर्ष प्राप्त नहीं होता।

चरण 3 हम x_1x_4 लेते हैं, यद्यपि यह एक सेतु है और ऐसा करने का कारण अन्य किसी विकल्प का न होना है। (देखिए, चित्र 14) x_4 पर पहुँचने के बाद हम x_1x_4 को मिटा देते हैं।



चित्र 14

अब, x_1 एक वियुक्त शीर्ष हो जाता है। अतः इसे हम मिटा देते हैं।

चरण 4 हम सेतु x_4x_5 लेते हैं। यद्यपि यह एक सेतु है, परन्तु ऐसा करने का कारण अन्य किसी विकल्प का न होना है। x_4x_5 को मिटा देने के बाद शीर्ष x_4 वियुक्त हो जाता है। अतः इसे हम हटा देते हैं।

चरण 5 हम सेतु x_5x_6 लेते हैं x_6 पर पहुँचने के बाद x_5x_6 को मिटा देते हैं और शीर्ष x_5 को मिटा देते हैं जो वियुक्त हो गया होता है।

चरण 6 हम सेतु x_6x_2 से बचते हैं, x_6x_7 लेते हैं और x_6x_7 को मिटा देते हैं। इसमें कोई भी वियुक्त शीर्ष प्राप्त नहीं होता।

चरण 7 हम सेतु x_7x_3 लेते हैं x_3 पर पहुँचने के बाद x_7x_3 को मिटा देते हैं और परिणामी वियुक्त शीर्ष x_7 को मिटा देते हैं।

चरण 8 हम सेतु x_3x_6 लेते हैं, x_6 पर पहुँचने के बाद x_3x_6 को मिटा देते हैं और परिणामी वियुक्त शीर्ष x_3 को मिटा देते हैं।

चरण 9 हम सेतु x_6x_2 लेते हैं, x_2 पर पहुँचने के बाद x_6x_2 को मिटा देते हैं और वियुक्त शीर्ष x_6 को मिटा देते हैं।

चरण 10 x_2 पर पहुँचने के बाद, हम यह पाते हैं कि x_2 के संलग्न कोई कोर नहीं हैं।

इस तरह सभी चरण पूरे हो जाते हैं।

अतः प्राप्त किया गया ऑयलरीय परिपथ यह हैं :

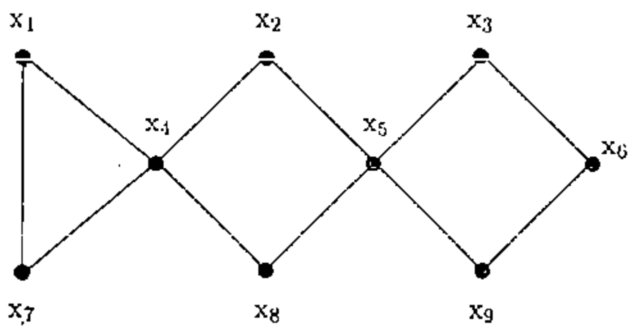
$\{x_2, x_5, x_1, x_4, x_5, x_6, x_7, x_3, x_6, x_2\}$ हमारे द्वारा लिए गए सेतु ये हैं :

$\{x_1x_4, x_4x_5, x_5x_6, x_7x_3, x_3x_6, x_6x_2\}$

टिप्पणी: यदि G, q कोरों वाला एक आयलरीय ग्राफ़ हो तो ठीक-ठीक q चरणों के बाद फ्लूरी कलन-विधि रुक जाती है। जब यह रुकती है, तब हम शीर्ष u पर लौट आए होते है। अतः हमें ग्राफ G का एक ऑयलरीय परिपथ प्राप्त होता है। यहाँ यह सिद्ध किया जा सकता है कि फ्लूरी कलन-विधि से सदा ही एक ऑयलरीय परिपथ प्राप्त होता है। उपपत्ति का जटिल होने के कारण यहाँ हम उसे नहीं दे रहे हैं।

यहाँ कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं जिससे यह जांच की जा सके कि आप फ्लूरी-कलन-विधि को कितना समझ पाए हैं।

E11) चित्र 15 के ग्राफ़ में एक ऑयलरीय परिपथ ज्ञात कीजिए। बताइए कि आपने किन-किन सेतुओं का चयन किया है।



चित्र 15

इस भाग में हमने उन परिपथों को ज्ञात किया है जिनमें ग्राफ़ की सभी कोरें केवल एक बार ही आते हैं। अगले भाग में हम उन चक्रों को ज्ञात करेंगे जिनमें सभी **शीर्ष** ठीक-ठीक एक बार आते हों।

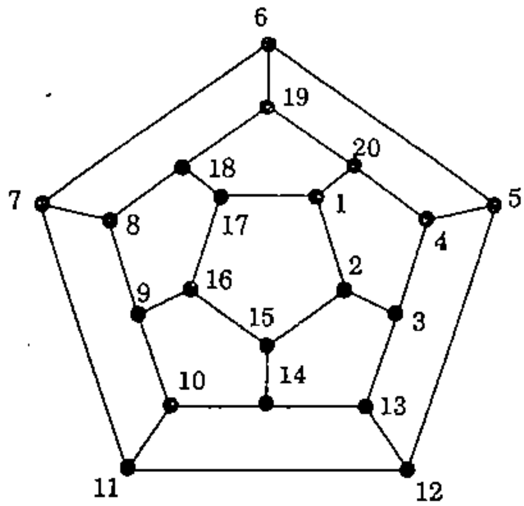
12.4 हैमिल्टोनीय ग्राफ़

मानलीजिए एक परिवहन कंपनी 10 अलग-अलग स्थानों से अपनी बस-सेवाएँ चलाती है। कुछ ऐसे स्थान हैं जहाँ उनके बीच कोई सीधी बस-सेवा उपलब्ध नहीं है, परन्तु दो स्थानों के बीच एक ऐसा मार्ग अवश्य है जो अन्य स्थानों से होकर जाता है। इस स्थिति में एक ऐसी राउंड ट्रिप की व्यवस्था करना चाहती हैं जो प्रत्येक शहर से ठीक एक बार होकर जाए। क्या यह संभव है ?

आइए हम इस प्रश्न को ग्राफ़ सिद्धांत के एक प्रश्न के रूप में प्रस्तुत करें। इसके लिए आइए हम स्थानों को शीर्षों से निरूपित करें। दो शीर्ष संलग्न माने जाते हैं जबकि बस संगत स्थानों को जोड़ती है। क्योंकि एक स्थान से दूसरे स्थान तक जाया जा सकता है, इसलिए जो ग्राफ़ हमें प्राप्त होता है, वह संबद्ध ग्राफ़ होता है। अब प्रश्न यह उठता है कि

क्या ग्राफ़ में ऐसा कोई चक्र है जिसमें प्रत्येक शीर्ष ठीक-ठीक एक बार आता हो ? (3)

इस प्रकार के प्रश्न पर आधारित हैमिल्टन द्वारा प्रस्तुत किया गया एक गणितीय खेल था। इसके लिए उसने एक सम द्वादशफलक (regular dodecahedron) लिया था। यह मानलिया गया था कि इसके 20 शीर्षों में से प्रत्येक शीर्ष विश्व के एक नगर को निरूपित करते हैं। एक खिलाड़ी 5 शीर्षों में 5 पिन लगाता है। इससे दूसरे खिलाड़ी को एक ऐसा "विश्व पर्यटन" ज्ञात करना है जिसमें शेष सभी 15 नगरों का पर्यटन करने के बाद खिलाड़ी प्रारंभिक शीर्ष पर फिर से लौट आए। इसका अर्थ है एक ऐसा चक्र ज्ञात करना है जो सम द्वादशफलक के सभी शीर्षों से होकर जाता हो। इस प्रकार का एक चक्र चित्र 16 में दिया गया है।

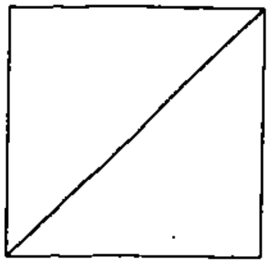


चित्र 16

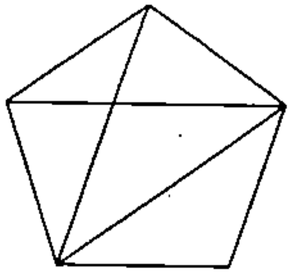
अब वह समय आ गया है जबकि हम इस चक्र को एक नाम दे दें।

परिभाषा : ग्राफ़ G के चक्र C को **हैमिल्टोनीय** चक्र कहा जाता है, यदि इसमें G के सभी शीर्ष आविष्ट हों। ग्राफ़ को **हैमिल्टोनीय** कहा जाता है, यदि वह एक हैमिल्टोनीय चक्र को आविष्ट करता हो। ग्राफ़ को अ-हैमिल्टोनीय कहा जाता है यदि उस में कोई हैमिल्टोनीय चक्र आविष्ट न हो।

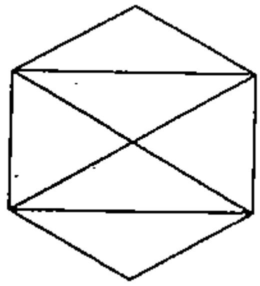
क्या आप चित्र 16 में दिए गए उदाहरण के अतिरिक्त हैमिल्टोनीय ग्राफ़ के कुछ अन्य उदाहरण बता सकते हैं ? क्या कोई चक्र एक हैमिल्टोनीय ग्राफ़ होता है ? क्या हैमिल्टोनीय ग्राफ़ में कुछ कोर बढ़ा देने पर प्राप्त हुआ ग्राफ़ भी हैमिल्टोनीय होता है ? दोनों प्रश्नों का उत्तर 'हाँ' में है। उदाहरण के लिए, चित्र 17 के ग्राफ़ हैमिल्टोनीय हैं।



क



ख

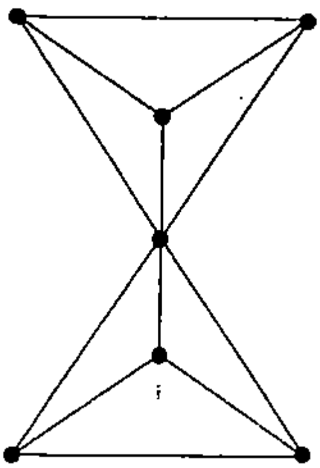


ग

चित्र 17

क्या कोई अ-हैमिल्टोनीय ग्राफ़ होता है ? वृक्ष अ-हैमिल्टोनीय ग्राफ़ के स्पष्ट उदाहरण हैं : क्योंकि इनमें कोई चक्र नहीं होता, इसलिए इसमें ऐसा कोई चक्र नहीं हो सकता जो सभी शीर्षों को आविष्ट करता हो।

ध्यान दीजिए कि परिभाषा के अनुसार हैमिल्टोनीय ग्राफ़ में एक ऐसा चक्र होता हैं जो सभी शीर्षों को आविष्ट करता है। अतः हैमिल्टोनीय ग्राफ़ के काट-शीर्ष या निलंबी शीर्ष (pendant vertices) नहीं हो सकते। (आपको याद होगा कि निलंबी शीर्ष 1 कोटि वाला शीर्ष होता है।) इससे हमें अ-हैमिल्टोनीय ग्राफ़ों के उदाहरण बताने की एक सरल विधि प्राप्त हो जाती है। उदाहरण के लिए नीचे दिया गया चित्र 18 का ग्राफ़ अ-हैमिल्टोनीय है, क्योंकि इसका एक काट-शीर्ष x है।



चित्र 18

यहाँ आपके लिए कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं।

E12) 5 शीर्षों पर एक अ-हैमिल्टोनीय ग्राफ़ बनाइए।

E13) एक ऐसा ग्राफ़ ज्ञात कीजिए जो हैमिल्टोनीय तो है, परन्तु ऑयलरीय नहीं है।

E14) एक ऐसा ग्राफ़ ज्ञात कीजिए जो ऑयलरीय तो हो, परन्तु हैमिल्टोनीय न हो।

E15) ऊनविम घन Q_3 में एक हैमिल्टोनीय चक्र ज्ञात कीजिए।

यह सिद्ध करने के लिए कि चित्र 18 का ग्राफ़ हैमिल्टोनीय नहीं हैं हमने काट-शीर्ष के अस्तित्व का प्रयोग किया है। फिर भी, इससे हमें अ-हैमिल्टोनीय ग्राफ़ों को पहचानने की एक पूर्णरूपेण विधि प्राप्त नहीं होती। उदाहरण के लिए, $K_{m,n}$, $m, n \geq 2$ का कोई काट-शीर्ष या निलंबी शीर्ष नहीं हैं और जब $m + n$ विषम होता है, तब यह हैमिल्टोनीय नहीं होता जैसा कि अब हम देखेंगें।

उदाहरण 6: दिखाइए कि जब $m + n$ विषम होता है, तब $K_{m,n}$ हैमिल्टोनीय नहीं होता।

हलः क्योंकि $K_{m,n}$ द्विभाजित है, इसलिए इसमें विषम लंबाई वाला कोई चक्र नहीं होता। इसके विपरीत, इसमें शीर्ष विषम संख्या में हैं। अतः इस ग्राफ़ का हैमिल्टोनीय चक्र, यदि इसका अस्तित्व है, तो यह विषम लंबाई वाला होगा। इसलिए, जब $m + n$ विषम होता है, तब $K_{m,n}$ हैमिल्टोनीय नहीं होता।

* * *

पिछले उदाहरण से यह स्पष्ट है कि हमें उन अ-हैमिल्टोनीय ग्राफ़ों को पहचानने के लिए कुछ प्रतिबंधों की आवश्यकता होती हैं जो काट-शीर्ष या निलंबी शीर्ष के अस्तित्व पर निर्भर नहीं करते। एक ग्राफ़ को हैमिल्टोनीय होने के संबंध में निम्नलिखित प्रमेय से किंचितमात्र उत्तम आवश्यक प्रतिबंध प्राप्त होता है। यहाँ हम इस प्रमेय की उपपत्ति नहीं देगें।

आपको याद होगा कि $c(G)$, G के घटकों की संख्या को प्रकट करता है।

प्रमेय 4: यदि G एक हैमिल्टोनीय ग्राफ़ हो तो $V(G)$ के प्रत्येक उचित उपसमुच्चय S के लिए हमें यह अवश्य प्राप्त होगा;

$$c(G - S) \leq |S|$$

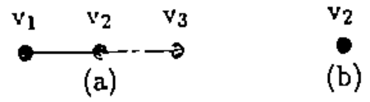
आइए अब हम प्रमेय 4 के प्रयोग को अच्छी तरह से समझने के लिए एक उदाहरण लें।

उदाहरण 7: दिखाइए कि $K_{m,n}$ हैमिल्टोनीय नहीं है, यदि $m < n$.

हलः आपको याद होगा कि $K_{m,n}$ के शीर्ष-समुच्चय को गणन-संख्या m और n वाले दो असंयुक्त उपसमुच्चयों X और Y को इस तरह विभाजित किया जा सकता है कि समान उपसमुच्चय की कोई भी दो कोरें संलग्न न हो और X का प्रत्येक शीर्ष Y के प्रत्येक शीर्ष के संलग्न हो। आइए हम प्रमेय में समुच्चय S को X मान लें। अतः इस स्थिति में $|S| = m$. यदि हम X के सभी शीर्षों को हटा दें, तो ग्राफ़ पूर्णतः असंबद्ध हो जाएगा। इसलिए, $G - S$ में n घटक होगें, जिनमें प्रत्येक घटक, Y के प्रत्येक शीर्ष के संगत होगें। इसलिए, $c(G - S) > |S|$. अतः प्रमेय 4 के अनुसार $K_{m,n}$ अ-हैमिल्टोनीय है।

* * *

यदि प्रमेय 4 में दिया गया प्रतिबंध संतुष्ट न होता हो, तो ग्राफ़ अ-हैमिल्टोनीय होता है। फिर भी, यदि प्रतिबंध संतुष्ट हो जाता हो, तो इसका अर्थ यह नहीं होता कि ग्राफ़ हैमिल्टोनीय है। उदाहरण के लिए चित्र 19(क) का ग्राफ़ लीजिए।



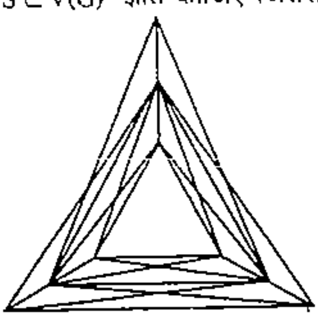
चित्र 19

आइए हम दो अंत्य शीर्षों को हटाएँ जिससे कि $S = \{v_1, v_3\}$ और $|S| = 2$. ऐसा करने पर हमें एक वियुक्त शीर्ष प्राप्त होगा (देखिए चित्र 19(ख)), इसलिए $c(G - S) = 1$ और $c(G - S) < |S|$. अतः प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट हो जाते हैं। यह लंबाई 2 वाला एक पथ है। इसमें कोई चक्र नहीं होता अतः यह अ-हैमिल्टोनीय है।

आप प्रमेय को कितना समझ पाए हैं, इसे देखने के लिए नीचे कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं।

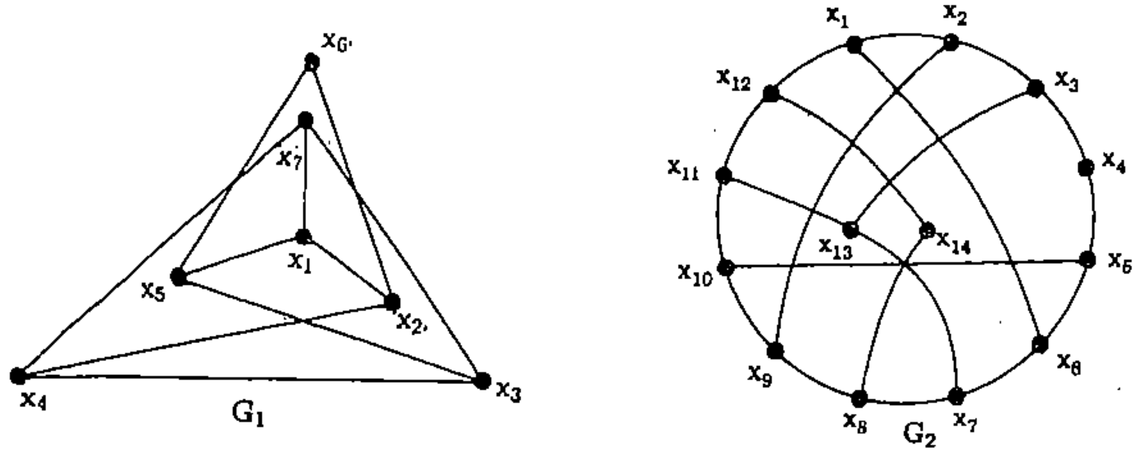
E16) दिखाइए कि नीचे दिया गया ग्राफ़ अ-हैमिल्टोनीय है।

(संकेतः एक ऐसा समुच्चय $S \subset V(G)$ ज्ञात कीजिए जिससे कि $c(G - S) > |S|$.)



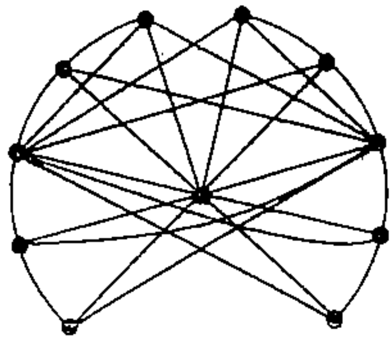
चित्र 20

E17) बताइए कि नीचे दिए गए चित्र हैमिल्टोनीय हैं या नहीं।



चित्र 21

E18) दिखाइए कि नीचे दिया गया ग्राफ़ अ-हैमेल्टोनीय है।



चित्र 22

अभी तक हमने एक ग्राफ़ का हैमिल्टोनीय होने के कुछ आवश्यक प्रतिबंधों पर चर्चा की है। यह उस स्थिति में काफी सहायक होते हैं जब हम यह दिखाना चाहते हैं कि दिया हुआ ग्राफ़ अ-हैमिल्टोनीय है। उस स्थिति में यह निरर्थक होता है जब हम यह दिखाना चाहते हैं कि दिया हुआ ग्राफ़ हैमिल्टोनीय है। इसके लिए हमें कुछ पर्याप्त प्रतिबंधों की आवश्यकता होती है। क्योंकि हम एक ऐसा चक्र प्राप्त करना चाहते हैं, जो सभी शीर्षों से होकर जाता हो, इसलिए हम उस स्थिति में सफलता मिलने की आशा कर सकते हैं जबकि प्रत्येक शीर्ष पर कोरों के पर्याप्त विकल्प हों। इसकी पुष्टि नीचे दिए गए प्रमेयों से हो जाती हैं। प्रमेय 5 को डिराक ने 1952 में सिद्ध किया था। इस प्रमेय का व्यापकीकरण प्रमेय 6 के रूप में ओर ने 1960 में किया।

आपको याद होगा कि $\delta(G) = \min \{\deg_G(x) \mid x \in V(G)\}$

प्रमेय 5: यदि G, p शीर्षों पर $p \geq 3$, एक सरल संबद्ध ग्राफ़ हो, और यदि $\delta(G) \geq \frac{p}{2}$, तो G हैमिल्टोनीय होता है।

प्रमेय 6: मानलीजिए G, p शीर्षों पर, $p \geq 3$, एक सरल संबद्ध ग्राफ़ है जो निम्नलिखित प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

किन्हीं भी दो असंलग्न शीर्षों u और v के लिए $d(u) + d(v) \geq p$. (4)

तब G हैमिल्टोनीय होता है।

क्या यहाँ आप यह देख सकते हैं कि डिराक-प्रमेय ओर-प्रमेय से प्राप्त होता है ? ऐसा इसलिए है, क्योंकि यदि $\delta(G) \geq \frac{p}{2}$, तो किन्हीं भी दो शीर्षों u और v के लिए हमें $d(u) + d(v) \geq 2\delta(G) \geq p$ प्राप्त होता है। अतः जब कभी डिराक-प्रमेय के प्रतिबंध संतुष्ट होते हैं, ओर-प्रमेय के प्रतिबंध भी संतुष्ट हो जाते हैं। इसलिए, यदि हम ओर-निकष को सिद्ध कर लें तो डिराक-निकष को भी सिद्ध हुआ मान लिया जाएगा।

ओर-प्रमेय की उपपत्ति : हम इस परिणाम को अंतर्विरोध से सिद्ध करेंगें (देखिए इकाई 2)। मानलीजिए प्रमेय असत्य हैं। तब 3 से अधिक शीर्षों वाले अ-हैमिल्टोनीय ग्राफ़ होते हैं, जो (4) को संतुष्ट करते हैं। अतः निम्नलिखित समुच्चय अरिक्त होगा :

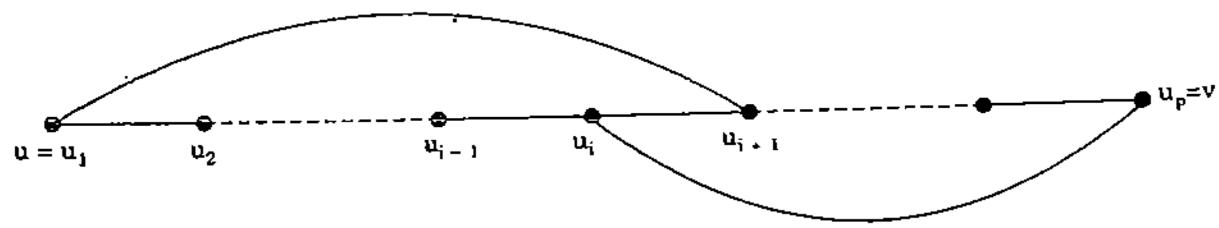
$\mathcal{F} = \{G \,|\, |V(G)| = p$, G अ-हैमिल्टोनीय है और प्रतिबंध (4) को संतुष्ट करता है$\}$

$\mathcal{F}$ में एक ऐसा ग्राफ़ लीजिए जिसके कोरो की संख्या इस प्रकार के अन्य ग्राफ़ों की कोरों की संख्या में अधिकतम हो। आइए हम इस ग्राफ़ को G_M से प्रकट करें। क्योंकि G_M अ-हैमिल्टोनीय है; इसलिए यह पूर्ण नहीं हो सकता। अतः इसमें दो शीर्ष, मानलीजिए u और v, होते हैं जो संलग्न नहीं है। इसलिए G_M में कोर $e = uv$ को बढ़ा देने पर हमें एक नया ग्राफ़ G'_M प्राप्त होता है। अभी भी G'_M में शीर्षों की संख्या 3 से अधिक है, क्योंकि हमने किसी शीर्ष को हटाया नहीं है। क्योंकि हमने किसी कोर को नहीं हटाया है, इसलिए किसी भी शीर्ष की कोटि कम नही होती है। अतः प्रतिबंध (4), G'_M के किन्हीं दो शीर्षों पर भी लागू होता है। तब इस स्थिति में G'_M हैमिल्टोनीय होगा। यदि ऐसा नहीं है, तो यह, $\mathcal{F}$ में होगा। परन्तु, यह संभव नहीं है, क्योंकि $|E(G'_M)| = |E(G_M)| + 1$, और G_M को $\mathcal{F}$ में अधिकतम संभव कोरों वाला ग्राफ़ माना गया है।

अब, क्योंकि G'_M हैमिल्टोनीय है, इसलिए हम G'_M में एक हैमिल्टोनीय चक्र C ले सकते हैं। क्योंकि G_M अ-हैमिल्टोनीय है इसलिए कोर uv, C पर स्थित होगी। (क्यों ?) इस कोर को हटाने पर G_M में हमें एक ऐसा पथ प्राप्त होता हैं जो सभी शीर्षों को आविष्ट करता है। मानलीजिए

$P = \{u = u_1, u_2, ..., u_p = v\}$ यह पथ है।

$S = \{u_i \,;\, uu_{i+1} \in E(G_M)\}$, $T = \{u_j : u_jv \in E(G_M)\}$ परिभाषित कीजिए। स्पष्ट है कि $u_p = v \notin S \cup T$. (क्यों ?) अतः $|S \cup T| < p$. अब, यदि संभव हो, तो मानलीजिए कि $S \cap T \neq \phi$। मानलीजिए कि अब $u_i \in S \cap T$. तब, $\{u_1, ..., u_i, u_p, u_{p-1}, ..., u_{i+1}, u_1\}$, ग्राफ़ G_M में एक हैमिल्टोनीय चक्र होता है (देखिए चित्र 23)। यह हमारी इस कल्पना का अंतर्विरोध करता है कि G_M अ-हैमिल्टोनीय है। अतः $S \cap T = \phi$. अर्थात् $|S \cap T| = 0$.



चित्र 23

परन्तु, तब

$$p \leq d_{G_M}(u) + d_{G_M}(v) = |S| + |T| = |S \cup T| < p \text{ अर्थात् } p < p.$$

यह एक अंतर्विरोध है। इस तरह, हमारी यह कल्पना कि प्रमेय असत्य है, गलत रही है। दूसरे शब्दों में, $p \geq 3$ शीर्षों पर प्रत्येक, ग्राफ़ G, जो (4) को संतुष्ट करते हैं, हैमिल्टोनीय हैं।

टिप्पणी: ध्यान दीजिए कि प्रमेय 5 और प्रमेय 6 पर्याप्त प्रतिबंध ही हैं। ये आवश्यक प्रतिबंध बिल्कुल नहीं है। उदाहरण के लिए, C_n, $n > 4$ सदैव हैमिल्टोनीय होता है परन्तु C_n एक 2-नियमित ग्राफ़ होता है। अतः सदा ही $d(u) + d(v) = 4 < n$ होता है।

प्रमेयों के प्रयोग को अच्छी तरह से समझने के लिए यहाँ एक उदाहरण दिया जा रहा है।

उदाहरण 8: चित्र 24 में दिए गए ग्राफ़ों में किस ग्राफ़ पर डिराक-निकष लागू होता है ? किस पर ओर-निकष लागू होता है।

चित्र 24

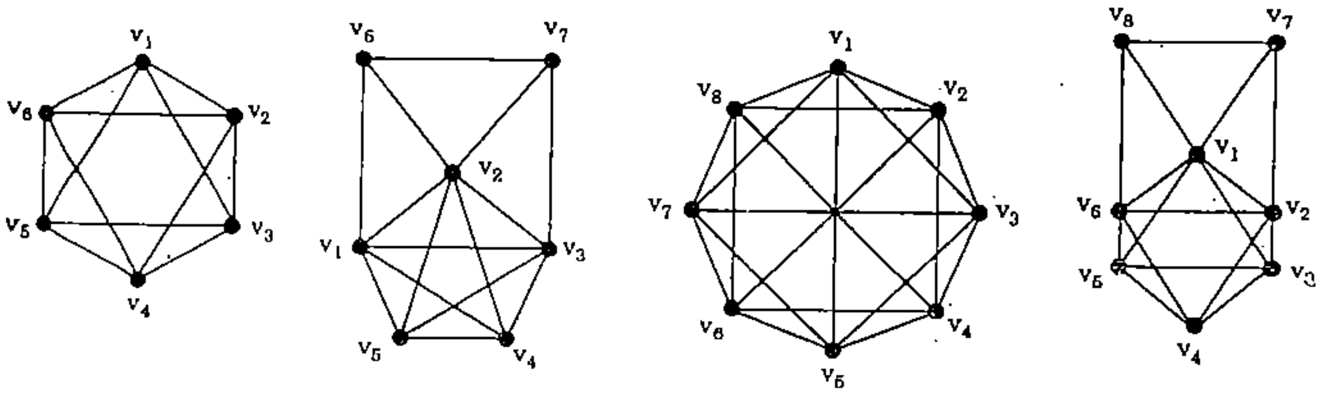
हल: चित्र 24(क) के ग्राफ़ों में $p = 6$ और प्रत्येक शीर्ष v के लिए $\deg(v) = 3$ इसलिए $\delta(G) = 3$. इस तरह, इस ग्राफ़ पर डिराक-निकष संतुष्ट हो जाता है।

चित्र 24(ख) के ग्राफ़ में $p = 5$, परन्तु $\deg(x) = 2$. इसलिए इस ग्राफ़ पर डिराक-निकष संतुष्ट नहीं होता। फिर भी असंलग्न शीर्षों u और v के सभी युग्मों के लिए (वस्तुतः u और v के सभी युग्मों के लिए) $\deg(u) + \deg(v) \geq 2$. अतः इस स्थिति में ओर-निकष लागू होता है।

* * *

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E19) नीचे दिए गए ग्राफ़ों में से किन-किन ग्राफ़ों पर ओर-निकष लागू होता है ? इनमें किन-किन पर डिराक-निकष लागू होता है ?



चित्र 25

अभी तक हमने एक ग्राफ़ का हैमिल्टोनीय होने के लिए कुछ आवश्यक प्रतिबंधों और पर्याप्त प्रतिबंधों पर चर्चा की है। क्या ग्राफ़ को हैमिल्टोनीय होने के लिए कुछ और आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबंध हैं ? इसका उत्तर हैं 'नहीं'। यह सिद्ध करना कठिन है कि दिया हुआ ग्राफ़ हैमिल्टोनीय है या नहीं। उदाहरण के लिए, पेटर्सन ग्राफ हैमिल्टोनीय नहीं है, फिर भी इसे दर्शाना सरल नहीं है। वस्तुतः अभी तक ऐसा कोई प्रतिबंध प्राप्त नहीं हुआ है जो कि एक ग्राफ़ को हैमिल्टोनीय होने के लिए आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध दोनों ही हो।

अब हम इस भाग के प्रारंभ में बतायी गई समस्या से संबंधित चर्चा के समापन पर आ गए हैं। अगले भाग में, इससे संबंधित परन्तु किंचितमात्र भिन्न समस्या पर चर्चा करेंगें जहाँ हम यह मान लेते हैं कि कोई भी दो स्थान एक बस-मार्ग से सीधे जुड़े हुए हैं। हम सभी स्थानों पर जाने की एक ऐसी विधि ज्ञात करना चाहते हैं जिससे कि प्रत्येक स्थान पर केवल एक बार जाया जाए और यह कम से कम संभव समय में किया जाए।

12.5 चल बिक्रीकर्त्ता की समस्या

एक चल विक्रीकर्त्ता अनेक नगरों का दौरा करके अपने अड्डे पर लौट आना चाहता है। किन्हीं दो नगरों के बीच का यात्रा-समय ज्ञात है। वह अपनी यात्रा की योजना किस प्रकार बनाए जिससे कि

वह कम से कम संभव समय में प्रत्येक नगर का एक बार दौरा कर ले ? इसी समस्या को **चल विक्रीकर्त्ता समस्या** (travelling salesperson problem) कहा जाता है। यहाँ यह मानलिया जाता है कि सूची के किसी अन्य नगर से होकर जाए बिना किन्हीं दो नगरों के बीच सीधा मार्ग है। यदि हम नगरों को शीर्षों से और सीधे मार्गों को कोरों से निरूपित करें, तो हमें एक पूर्ण ग्राफ प्राप्त होता है। एक नगर से दूसरे नगर में जाने में लगाने वाले समय को हम किस प्रकार निरूपित करेंगें ? इस प्रश्न से हमें भारित ग्राफ़ (weighted graph) की संकल्पना पर चर्चा करनी होती है।

परिभाषाः भारित ग्राफ़ एक युग्म (G, f) होता है जहाँ G एक ग्राफ़ है और f समुच्चय E(G) पर एक वास्तविक मान फलन है।

सरल भाषा में, हम कुछ वास्तविक संख्या f(e) का संबंध ग्राफ़ G की प्रत्येक कोर e के साथ स्थापित करते हैं। चल विक्रीकर्त्ता की समस्या के संबंध में f(e), e के एक अंत्य शीर्ष से दूसरे अंत्य शीर्ष तक जाने में लगा समय है।

इसी से संबंधित एक अन्य परिभाषा यह है।

परिभाषाः भारित ग्राफ़ G में गमन W के संबंध में **गमन W के भार f(W)** का अर्थ है W की सभी कोरों के भारों का योगफल।

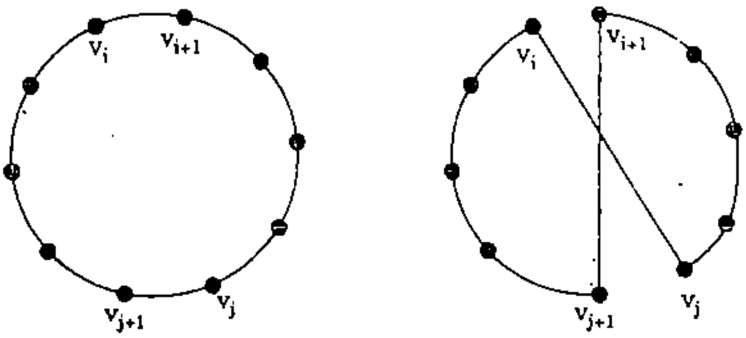
इस तरह हमारी विक्रीकर्त्ता वाली समस्या एक भारित पूर्ण ग्राफ़ में न्यूनतम भार वाले हैमिल्टोनीय चक्र को ज्ञात करने की समस्या के रूप में परिवर्तित हो जाती है। इसे हल करने की एक संभव विधि पहले हैमिल्टोनीय चक्र को ज्ञात करना और तब कम भार वाली कोरों का पता लगाना तथा इनके प्रयोग से चक्र को आपरिवर्तित करना है। आपरिवर्तन इस प्रकार किया जा सकता है :

मानलीजिए $C = \{v_1, \ldots, v_p, v_1\}$ एक भारित **पूर्ण ग्राफ़** में एक हैमिल्टोनीय चक्र है। पहले यह देखिए कि नियत i के लिए एक ऐसा j है कि नहीं जिससे कि

$$f(v_i v_j) + f(v_{i+1} v_{j+1}) < f(v_i v_{i+1}) + f(v_j v_{j+1}).$$

यदि यह असमिका लागू होती हो तो चक्र C के स्थान पर निम्नलिखित लीजिए

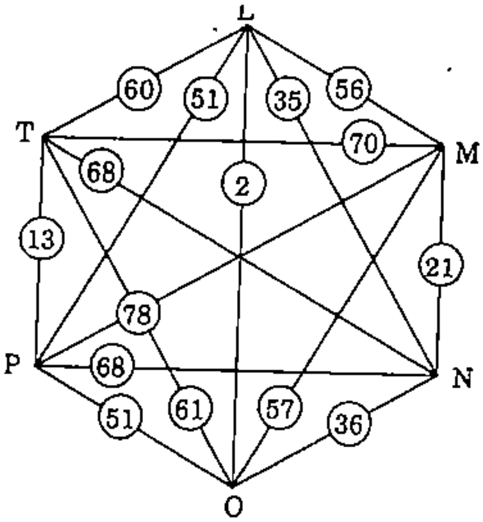
$$C_{i,j} = \{v_1, \ldots, v_i, v_j, v_{j-1}, \ldots, v_{i+1}, v_{j+1}, v_{j+2} \ldots v_p, v_1\}$$ देखिए चित्र 26(ख)।



चित्र 26

स्पष्ट है कि चक्र $C_{i,j}$ का भार चक्र C के भार से कम है। इस प्रकार के आपरिवर्तनों के एक अनुक्रम को निष्पादित कर लेने के बाद एक चक्र बच रहता है जिसके भार को इस प्रक्रम को जारी रख कर और कम नहीं किया जा सकता। फिर भी, यह बात विश्वास के साथ नहीं कही जा सकती कि परिणामी चक्र का न्यूनतम संभव भार होगा। इससे कम भार वाले और भी चक्र हो सकते हैं। परन्तु, यह चक्र भी प्रायः उत्तम सिद्ध होता है। आइए हम इस प्रक्रम से संबंधित एक उदाहरण लें।

उदाहरण 9: भारित K_6 वाली निम्नलिखित कापी लीजिए। चक्र {L, M, N, O, P, T, L} से प्रारंभ करके इसे अपेक्षाकृत कम भार वाले चक्र में आपरिवर्तित कीजिए। कोरों पर दी गई संख्याएँ उनके दिए गए भार को प्रकट करती हैं।



चित्र 27

हल: आप यह देख सकते हैं कि

$$f(LO) + f(MP) = 80 < f(LM) + f(OP) = 107$$

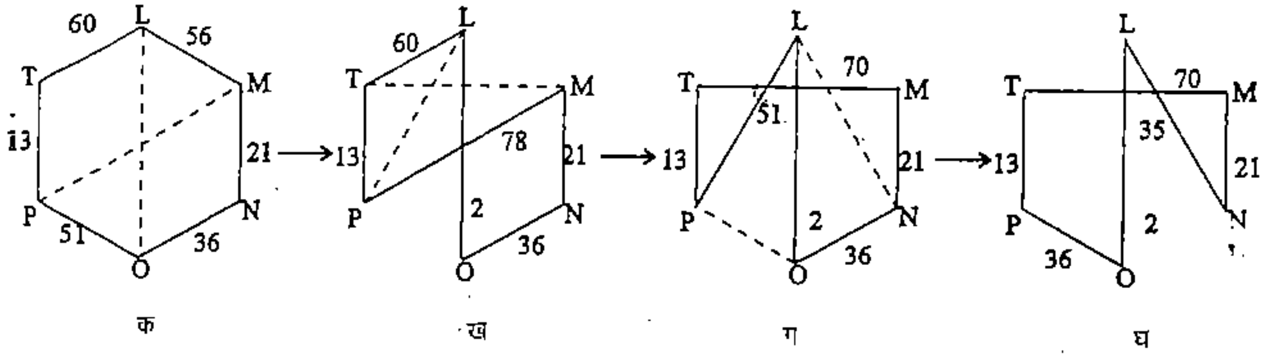
इसलिए, हम चक्र को {L, O, N, M, P, T, L} में आपरिवर्तित करते हैं। (देखिए चित्र 28(क)) अब,

$$f(MT) + f(PL) = 121 < f(MP) + f(TL) = 138.$$

(चित्र 28 देखिए) अतः हम चक्र {L, O, N, M, P, T, L} को फिर से {L, O, N, M, T, P, L} में आपरिवर्तित करते हैं। और,

$$f(OP) + f(NL) = 86 < f(ON) + f(PL) = 87,$$

देखिए चित्र 28(ग)। अतः चक्र {L, O, P, T, M, N, L} के स्थान पर {L, O, N, M, T, P, L} लीजिए। आप यहाँ देख सकते हैं कि चित्र 28(घ) में प्राप्त ग्राफ़ के चक्र के भार को हम कम नहीं कर सकते।



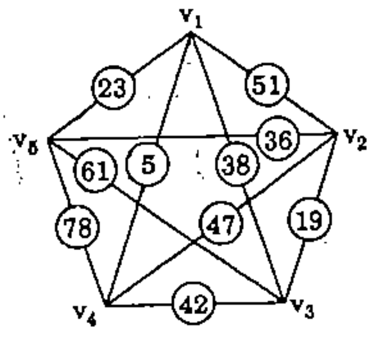
चित्र 28

अतः इस विधि से हमने भार 237 वाले चक्र को भार 192 वाला चक्र बना दिया है।

* * *

यहाँ इससे संबंधित एक प्रश्न दिया गया है, जिसे आप हल कीजिए।

E20) K_5 की निम्नलिखित भारित कापी में चक्र $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1\}$ से प्रारंभ करके और लघुकरण चरण को एक बार लागू करके अपेक्षाकृत कम भार वाला चक्र प्राप्त कीजिए।



चित्र 29

अब हम इस इकाई के अंत पर पहुँच गए हैं। अतः इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है उसका संक्षिप्त विवरण यहाँ हम दे दें।

12.6 सारांश

इस इकाई में हमने निम्नलिखित शब्दों को परिभाषित किया है।

क) **ऑयलरीय परिपथ** : ग्राफ़ के परि थ को ऑयलरीय कहा जाता है, यदि ग्राफ़ की प्रत्येक कोर परिपथ में ठीक-ठीक एक बार आती हो।

ख) **ऑयलरीय ग्राफ़** : संबद्ध ग्राफ़ ऑयलरीय होता है यदि यह एक ऑयलरीय परिपथ को आविष्ट करता हो।

ग) **विवृत पथ-चिह्न्** : पथ-चिह्न विवृत होता है, यदि पथ-चिह्न के प्रारंभिक शीर्ष और अंत्य शीर्ष भिन्न-भिन्न हों।

घ) **कोर-अनुरेखीय ग्राफ़** : संबद्ध ग्राफ़ कोर-अनुरेखीय होता है, यदि इसका एक विवृत पथ-चिह्न होता हो।

ड.) **हैमिल्टोनीय चक्र** : चक्र एक हैमिल्टोनीय चक्र कहलाता है, यदि ग्राफ़ का प्रत्येक शीर्ष चक्र में केवल एक बार आता हो।

च) **हैमिल्टोनीय ग्राफ़** : ग्राफ़ को हैमिल्टोनीय कहा जाता है, यदि इसमें एक हैमिल्टोनीय चक्र आविष्ट होता हो।

इसके अतिरिक्त इस इकाई में हमने इस बात पर भी चर्चा की है कि किस प्रकार :

1) कोटि-अनुक्रम लेकर ऑयलरीय ग्राफ़ को पहचाना जाता है।

2) कोटि-अनुक्रम लेकर यह पहचाना जाता है कि कौन-कौन-से ग्राफ़ कोर-अनुरेखीय हैं।

3) यह पहचाना जाता है कि कागज पर से पेंसिल उठाए बिना और किसी रेखा पर दोबारा जाए बिना किन-किन चित्रों को खींचा जा सकता है।

4) ऑयलरीय परिपथ बनाने के लिए फ्लूरी-कलन-विधि को लागू किया जाता है।

5) यह दिखाने के लिए कि दिया हुआ ग्राफ़ अ-हैमिल्टोनीय है, कुछ आवश्यक प्रतिबंधों को लागू किया जाता है।

6) यह जांच करने के लिए कि एक दिया हुआ ग्राफ़ हैमिल्टोनीय है या नहीं डिराक और ओर द्वारा प्रस्तुत पर्याप्तता प्रतिबंध को लागू किया जाता है।

7) एक पूर्ण भारित ग्राफ़ में दिए गए हैमिल्टोनीय चक्र को अपेक्षाकृत कम भार वाले चक्र में आपरिवर्तित किया जाता है।

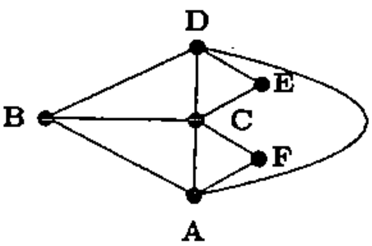
12.7 हल/उत्तर

E1) यहाँ ऑयलरीय परिपथ यह है

$\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1, v_7, v_8, v_4, v_{10}, v_9, v_1\}$

इस प्रकार के अनेक अलग-अलग ऑयलरीय परिपथ होते हैं और आपको एक अलग परिपथ मिल भी सकता था।

E2) स्थिति वही होगी जैसा कि चित्र 30 में दिखाया गया है। नई कोर बढ़ा देने पर दोनों ही शीर्ष A और D सम कोटि वाले शीर्ष हो जाते हैं। परन्तु अभी भी B और C विषम कोटि वाले बने रहते है। अतः अभी भी प्रत्येक पुल का केवल एक बार प्रयोग करके कोनिस्बर्ग वासी शहर का चक्कर नहीं लगा सकते हैं।



चित्र 30

E3) G_1 का कोटि-अनुक्रम {8, 4, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2} है। क्योंकि सभी शीर्ष सम हैं, इसलिए ग्राफ़ ऑयलरीय होगा। आप यह देख सकते हैं कि निम्नलिखित से इसमें एक ऑयलरीय परिपथ प्राप्त होता है।

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_1, x_5, x_6, x_3, x_7, x_8, x_1, x_9, x_{10}, x_{11}, x_1, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{15}, x_1\}$

G_2 का कोटि-अनुक्रम {8, 4, 4, 4, 4, 4, 2, 2, 2, 2} है। क्योंकि सभी कोटि सम हैं, इसलिए यह ऑयलरीय होगा। G_2 में एक ऑयलरीय परिपथ यह होता है :

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_1, x_3, x_5, x_2, x_4, x_1, x_6, x_7, x_8, x_1, x_9, x_7, x_{10}, x_1\}$

E4) क) K_n एक $(n-1)$ नियमित ग्राफ़ है। अतः यह तब ऑयलरीय होता है जबकि $(n-1)$ सम होता है अर्थात् जबकि n विषम होता है।

ख) $K_{n,m}$ में कोटि $m-1$ वाले n शीर्ष हैं और कोटि $n-1$ वाले m शीर्ष हैं। अतः जब n, m विषम होते हैं तो यह ऑयलरीय होता है।

E5) Q_3 में प्रत्येक शीर्ष का कोटि 3 है, इसलिए यह एक अ-ऑयलरीय ग्राफ़ है। इसके विपरीत Q_4 के सभी शीर्षों के कोटि 4 हैं, इसलिए Q_4 ऑयलरीय है।

E6) मानलीजिए G एक ऑयलरीय ग्राफ़ है और $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$, इसमें एक ऑयलरीय पथ-चिह्न है। मानलीजिए $x = v_i$, G में एक शीर्ष है। तब निम्नलिखित एक ऑयलरीय पथ-चिह्न है जिसका प्रारंभ और अंत x पर होता है :

$\{x = v_i, v_{i+1}, ..., v_n, v_0, v_1, ..., v_{i-1}, v_i\}$.

E7) चित्र 30 देखिए। A और D को मिलाकर नया पुल बना लेने के बाद B और C को छोड़कर अन्य सभी शीर्ष सम होते हैं अर्थात् दो शीर्ष विषम कोटि वाले हैं। इसलिये, एक स्थान से प्रारंभ करके और एक अलग स्थान पर समाप्त करके और एक पुल का केवल एक बार प्रयोग करके शहर का चक्कर लगाया जा सकता है।

E8) क) आइए हम ग्राफ़ का कोटि-अनुक्रम लिखें। अनुक्रम यह होगा

{4, 4, 4, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3}

इसके विषम कोटि वाले आठ शीर्ष हैं।

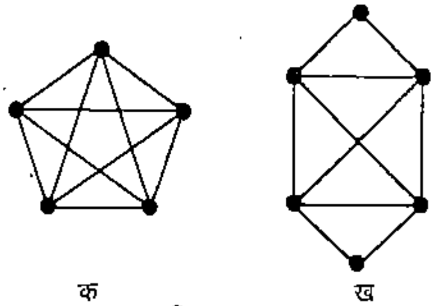
अतः चित्र 9(ख) का ग्राफ़ कोर-अनुरेखीय नहीं है।

ख) चित्र 9(ख) के ग्राफ़ का कोटि-अनुक्रम (4, 3, 3, 2, 2, 2) है। अतः इसके विषम कोटि वाले ठीक दो शीर्ष हैं। इसलिए ग्राफ़ कोर-अनुरेखीय है।

E9) क्योंकि G_1 के विषम कोटि वाले ठीक दो शीर्ष हैं, इसलिए कागज पर से पेंसिल हटाए बिना और किसी शीर्ष पर दोबारा जाए बिना इसे खींचा जा सकता है।

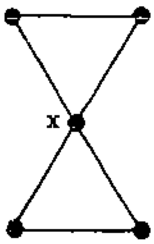
क्योंकि G_2 के विषम कोटि वाले कि दो शीर्ष हैं, इसलिए कागज पर पेंसिल उठाए बिना इसे भी अनुरेखित किया जा सकता है। क्योंकि G_3 के विषम कोटि (कोटि 3) वाले 6 शीर्ष हैं, इसलिए कागज पर से पेंसिल उठाए बिना इसे अनुरेखित नहीं किया जा सकता है।

E10) (क) और (ख) के हल नीचे दिए गए हैं।



चित्र 31

(ग) आपको याद होगा कि ऑयलरीय ग्राफ़ संबद्ध होता है। यहाँ शीर्षों की संख्या कोरों की संख्या से एक अधिक है। इसलिए इस प्रकार का ग्राफ़ एक वृक्ष होता है और यह कोई भी चक्र आविष्ट नहीं करता। इस तरह, दी हुई संख्या में शीर्षों और कोरों वाला कोई ऑयलरीय ग्राफ़ नहीं होता है।



चित्र 32

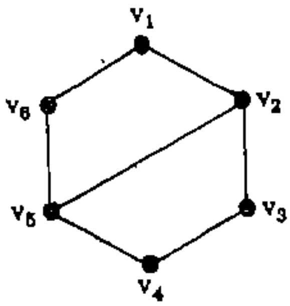
E11) आप देख सकते हैं कि दिए हुए ग्राफ़ में एक ऑयलरीय परिपथ यह होता है

$\{x_1, x_4, x_2, x_5, x_3, x_6, x_9, x_5, x_8, x_4, x_7, x_1\}$

चयन किए गए सेतु ये हैं

$\{x_2x_5, x_3x_6, x_6x_9, x_9x_5, x_5x_8, x_8x_4, x_4x_7, x_7x_1\}$

E12) उदाहरण के लिए, चित्र 32 का ग्राफ़ लीजिए। यह अ-हैमिल्टोनीय है, क्योंकि शीर्ष x एक काट-शीर्ष है।



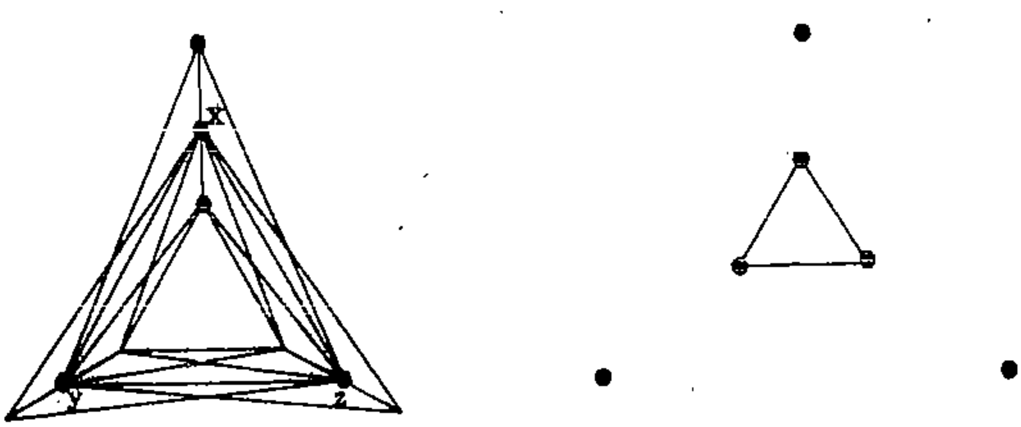
चित्र 33

E13) देखिए चित्र 33. इसका एक हैमिल्टोनीय चक्र $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_1\}$ है। परन्तु यह ऑयलरीय नहीं है, क्योंकि इसके शीर्ष v_2 और v_5 विषम कोटि वाले हैं।

E14) चित्र 32 में दिया गया ग्राफ़ ऑयलरीय है, क्योंकि इसके सभी शीर्ष सम कोटि वाले हैं और जैसा कि हम पहले देख चुके हैं, यह हैमिल्टोनीय नहीं है।

E15) Q_3 में हैमिल्टोनीय चक्र (000, 100, 110, 010, 011, 111, 101, 001, 000) है।

E16) यदि आप चित्र 34 में अंकित शीर्षों x, y और z को इस ग्राफ़ से हटा दें, तो आपको चार संबद्ध घटक अर्थात् एक अंतः त्रिभुज और तीन वियुक्त बाह्य शीर्ष, प्राप्त होंगे।



चित्र 34

अतः प्रमेय 4 के अनुसार दिया हुआ ग्राफ़ अ-हैमिल्टोनीय है।

E17) ग्राफ G_1 में हैमिल्टोनीय चक्र $\{x_7, x_3, x_4, x_2, x_6, x_5, x_1, x_7\}$ है। अब जांच कीजिए कि नीचे दिया गया चक्र ग्राफ़ G_2 का कोटि एक हैमिल्टोनीय चक्र है।

$\{x_{12}, x_{14}, x_8, x_9, x_{10}, x_{11}, x_{13}, x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1, x_{12}\}$

E18) इस ग्राफ़ में कोटि आठ वाले तीन शीर्ष हैं। यदि इन्हें हम हटा दें तो हमें चार संबद्ध घटक प्राप्त होगें। अब प्रमेय 4 लागू कीजिए।

E19) (क) यह एक 4-नियमित ग्राफ़ है। अतः $\delta(G) = 4$. यहाँ $p = 6$, इसलिए प्रतिबंध $\delta(G) \geq p/2$ संतुष्ट हो जाता है। अतः यहाँ पर डिराक-निकष (और, इसलिए ओर-निकष) लागू होता है।

(ख) यहाँ $p = 7$, शीर्ष v_6 और v_7 के कोटि $3 < 7/2$ हैं। इसलिए डिराक-निकष यहाँ लागू नहीं होता। फिर भी इस ग्राफ़ में असंलग्न शीर्षों के युग्म ये हैं

$(v_6, v_4), (v_6, v_5), (v_6, v_3), (v_7, v_4), (v_7, v_5), (v_7, v_1)$

शीर्षों के इन युग्मों पर ओर-प्रतिबंध संतुष्ट हो जाता है। अतः यह ग्राफ़ हैमिल्टोनीय है।

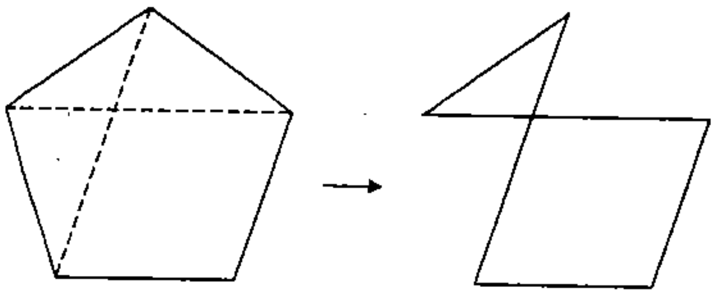
(ग) यहाँ $p = 8$ और ग्राफ़ 4-नियमित है। अतः यहाँ डिराक-निकष संतुष्ट हो जाता है।

(घ) यहाँ $p = 8$, परन्तु शीर्षों v_8 और v_4 के कोटि 3 हैं जो कि $\frac{p}{2} = 4$ से कम है। अतः यहाँ डिराक-निकष संतुष्ट नहीं होता। असंलग्न शीर्षों के युग्म केवल $(v_7, v_3), (v_7, v_4), (v_7, v_5), (v_7, v_6), (v_8, v_2), (v_8, v_3)$ $(v_8, v_4), (v_8, v_5)$ हैं। आप यहाँ देख सकते हैं कि इन शीर्ष-युग्मों पर ओर-निकष संतुष्ट हो जाता है।

E20) ध्यान दीजिए कि

$\phi(v_1 v_2) + \phi(v_4 v_5) = 51 + 78 = 129$

$\phi(v_1 v_4) + \phi(v_2 v_5) = 5 + 36 = 41$



चित्र 35

अपेक्षाकृत कम भार वाले निम्नलिखित चक्र प्राप्त करने के लिए हम दिए हुए चक्र का आपरिवर्तन कर सकते हैं : $\{v_1, v_4, v_3, v_2, v_5, v_1\}$.

इकाई 13 ग्राफ़ रंजन और समतलीय ग्राफ़

इकाई की रूपरेखा पृष्ठ संख्या

13.1 प्रस्तावना

आपने भारत का राजनैतिक मानचित्र अवश्य देखा होगा जिसमें राज्यों में भेद करने के लिए अलग-अलग राज्यों को अलग-अलग रंग से रंगा गया है। क्या इस बात की ओर कभी ध्यान दिया है कि मानचित्र को रंगने के लिए कम से कम कितने रंगों की आवश्कता होती है जिससे कि उभयनिष्ठ परिसीमा वाले किन्हीं दो राज्यों को अलग-अलग रंग से रंगा जा सके ? एक दिए हुए मानचित्र को रंगने के लिए आवश्यक रंगों की न्यूनतम संख्या ज्ञात करने कि समस्या को मानचित्र रंजन समस्या कहा जाता है।

हम इस समस्या को ग्राफ़ सिद्धांत के रूप में प्रस्तुत कर सकते हैं। हम इस प्रकार एक ऐसा ग्राफ़ बना सकते हैं जिससे कि भारत का प्रत्येक राज्य ग्राफ़ के एक शीर्ष के संगत हो और यदि दो राज्य संलग्न हों, तो संगत शीर्ष भी संलग्न होंगे। अतः हमें ग्राफ़ के शीर्षों को इस तरह रंगना चाहिए जिससे कि संलग्न शीर्षों का कोई भी युग्म अलग-अलग रंग का हो। मानचित्र रंजन समस्या (map coloring problem) में इस प्रकार के रंगने के लिए आवश्यक रंगों की न्यूनतम संख्या को ज्ञात करना होता है।

ध्यान दीजिए कि ऊपर बताए गए ग्राफ़ के निर्माण से एक विशेष वर्ग के ग्राफ़ प्राप्त होते हैं जिन्हें समतलीय ग्राफ़ (planar graph) कहा जाता है। यदि हम केवल मानचित्र रंजन समस्या पर ही विचार करना चाहते हैं, तो हमें इस प्रकार के ग्राफ़ों तक ही अपने को सीमित रखना पर्याप्त होता है। यहाँ व्यापक शीर्ष-रंजन समस्या भी हमारे सामने आती है। इस समस्या में यह पूछा जाता है कि दिए गए ग्राफ़ के शीर्षों को रंगने के लिए न्यूनतम कितने रंग चाहिए। यह स्वयं में भी एक रोचक समस्या है। अतः भाग 13.2 में इस समस्या पर चर्चा करके हम अपनी इस इकाई को प्रारंभ करेंगे।

भाग 13.3 में मानचित्र रंजन समस्या से संबंधित अध्ययन की तैयारी के रूप में हम समतलीय ग्राफ़ों का अध्ययन करेंगें। इस भाग में हम समतलीय ग्राफ़ों से संबंधित कुछ आधारभूत परिणामों को सिद्ध करेंगें। हम कुरातोवस्की द्वारा प्रस्तुत समतलीय ग्राफ़ों के अभिलक्षणीकरण को भी सिद्ध करेंगें।

भाग 13.4 में हम मानचित्र रंजन समस्या का अध्ययन करेंगें। यहाँ हम चतुर्वर्ण प्रमेय का एक संक्षिप्त इतिहास देंगें, जिसके कथनानुसार किसी भी मानचित्र को चार रंगों से रंगा जा सकता है। इस प्रमेय की उपपत्ति इस पाठ्यक्रम के अध्ययन-क्षेत्र से परे है। फिर भी, अपेक्षाकृत दुर्बल परिणाम को हम सिद्ध करेगें जिसके कथनानुसार किसी भी मानचित्र को पांच रंगों से रंगा जा सकता है।

भाग 13.5 में हम कोर-रंजन पर एक संक्षित चर्चा करके इस इकाई को यहीं समाप्त कर देंगें। हम अपनी चर्चा को कोर-रंजन की परिभाषा, कोर-रंजन के कुछ उदाहरण और इस क्षेत्र से संबंधित कुछ सुप्रसिद्ध परिणामों के कथन तक ही सीमित रखेंगें।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ लेने के बाद, आप

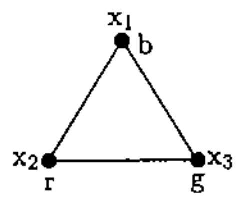
- कुछ सरल ग्राफ़ों की वर्णिक संख्या को अभिकलित कर सकेगें;
- ग्राफ़ G की शीर्ष वर्णिक संख्या $\chi(G)$ के कुछ उपरि और निम्न परिबंधों को अभिकलित कर सकेंगे;
- कुरातोवस्की-प्रमेय की सहायता से सरल स्थितियों में यह सत्यापित कर सकेगें कि दिया हुआ ग्राफ़ समतलीय है या नहीं;
- कुछ सरल ग्राफ़ों के संबंध में $\chi'(G)$ रंगों से कोर-रंजन कर सकेंगें, जहां $\chi'(G)$ ग्राफ़ G की कोर वर्णिक संख्या (edge chromatic number) है।

13.2 शीर्ष रंजन

इस भाग में हम रंजन संबंधी अपना अध्ययन शीर्ष-रंजन से प्रारंभ करेंगें। उपभाग 13.2.1 में हम शीर्ष-रंजन परिभाषित करेंगें और कुछ उदाहरण देगें। भाग 13.2.2 में हम दिए हुए ग्राफ़ के शीर्षों को रंगने के लिए आवश्यक रंगों की न्यूनतम संख्या से संबंधित कुछ सरल परिबंधों को सिद्ध करेगें। आइए अब हम रंजन की परिभाषा और इसके कुछ उदाहरणों के साथ शीर्ष-रंजन अध्ययन प्रारंभ करें।

13.2.1 परिभाषा और उदाहरण

चित्र 1 का ग्राफ़ देखिए। हमने तीन रंगों अर्थात्, लाल, हरा और नीला से K_3 को रंगा है।



चित्र 1

हमने तीन रंगों को क्यों लिया है ? ऐसा इसलिए किया गया है क्योंकि हम चाहते है कि संलग्न शीर्ष अलग-अलग रंग के हो। K_3 में कोई भी दो शीर्ष संलग्न हैं, अत: हमें प्रत्येक शीर्ष को अलग-अलग रंगों से रंगने की आवश्यकता होती है। नीचे दी गई शीर्ष-रंजन की परिभाषा का अध्ययन करते समय आप इस उदाहरण को अपने ध्यान में अवश्य रखिए।

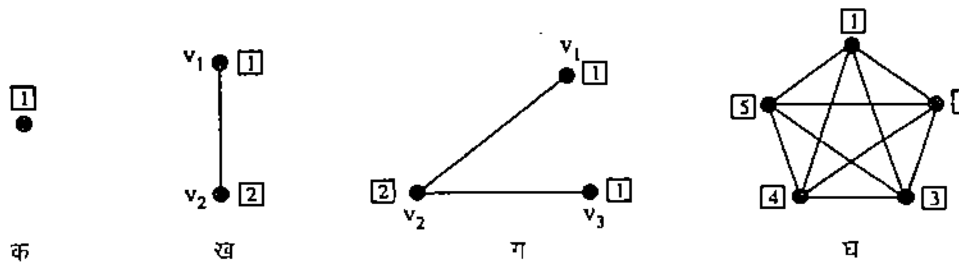
परिभाषा: ग्राफ़ G का **k-शीर्ष** रंजन G के प्रत्येक शीर्ष की रंगों का आवंटन इस प्रकार करता है जिससे कि कोई भी दो संलग्न शीर्ष समान रंग के न हो। ग्राफ़ **k-शीर्ष रंजनीय** (k-vertex colourable) होता है, यदि एक k-शीर्ष रंजन हो। ग्राफ़ G को रंगने के लिए आवश्यक रंगों की न्यूनतम संख्या को G की **शीर्ष वर्णिक संख्या** (vertex chromatic number) कहा जाता है, जिसे प्राय: $\chi(G)$ से प्रकट किया जाता है।

इस भाग में हम केवल शीर्ष-रंजन पर चर्चा करेंगें। अत: यहाँ हम शब्दों **'k-रंजन', 'k-रंजनीय', "वर्णिक संख्या"** का प्रयोग करेंगें। यहाँ हम यह कहेगें कि ग्राफ़ k-वर्णिक होता है, यदि इसकी वर्णिक संख्या k हो।

चित्र 1 में हमने रंगों के नाम अर्थात् लाल, हरा और नीला का प्रयोग किया है, क्योंकि यहाँ हमें केवल तीन रंगों की आवश्यकता थी। मानलीजिए हमें 20 रंगों की आवश्यकता है, तो क्या इस स्थिति में भी हम प्रयुक्त किए जाने वाले रंगों के नाम दे सकेंगें? इसके लिए हमें इतने रंगों के नाम याद करने की आवश्यकता नहीं होती और उन्हें हम-रंग 1, रंग 2 आदि के नाम से जान सकते हैं। इससे हमारा काम अच्छी तरह से चल जाएगा, क्योंकि जब तक आप अलग-अलग रंगों में भेद कर सकते हैं, तब तक रंगों के नाम का कोई महत्त्व नहीं होता। हम अपने रंगों को प्रकट करने के लिए 1, 2, 3, ... का भी प्रयोग करेंगें। फिर भी इन्हें सामान्य संख्याओं से अलग रखने के लिए इन्हे हम $\boxed{1}, \boxed{2}, \ldots$ से प्रकट करेंगे।

आइए अब हम इससे संबंधित कुछ उदाहरण देखें।

उदाहरण 1: चित्र 2 के ग्राफ़ों को न्यूनतम संभव संख्या में लिए गए रंगों से रंगिए। और, ग्राफ़ों की वर्णिक संख्याएँ-भी ज्ञात कीजिए।



चित्र 2 : रंजन के कुछ उदाहरण।

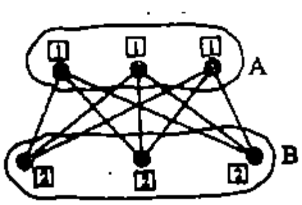
हल: चित्र 2(क) में K_1 का केवल एक शीर्ष है। आइए इसे हम $\boxed{1}$ से रंगे। इस तरह यह ग्राफ़ 1-रंजनीय है और इसकी वर्णिक संख्या 1 है।

चित्र 2(ख) में K_2 के दो संलग्न शीर्ष हैं। हम शीर्ष v_1 को $\boxed{1}$ और शीर्ष v_2 को $\boxed{2}$ आबंटित करते हैं। इस तरह, यहाँ 2-रंजन है। क्या यहाँ एक 1-रंजन है ? नहीं ! क्योंकि दो शीर्ष संलग्न हैं, इसलिए हमें कम से कम दो रंगों की आवश्यकता होती है। दूसरे शब्दों में वर्णिक संख्या $\chi(K_2) = 2$.

चित्र 2(ग) में तीन शीर्ष हैं और इन्हें हम तीन अलग-अलग रंगों से रंग सकते हैं। परन्तु, क्या हम यहाँ दो रंगों का भी प्रयोग कर सकते हैं? ध्यान दीजिए कि v_1 और v_2 संलग्न नहीं है। अतः इन्हें हम एक ही रंग, मानलीजिए $\boxed{1}$, से रंग सकते हैं। v_2, v_1 और v_3 दोनों के संलग्न हैं। अतः इसे हम $\boxed{1}$ आबंटित नहीं कर सकते। आइए हम v_2 को $\boxed{2}$ आबंटित करें। इस तरह, हमें 2-रंजन प्राप्त होता है। और, क्योंकि हमें 1-रंजन प्राप्त नहीं हो सकता, इसलिए इस ग्राफ़ की वर्णिक संख्या 2 होगी।

चित्र 2 (घ) में K_5 है। इसमें कोई भी दो शीर्ष संलग्न है, इसलिए इन्हें रंगने के लिए हमें उतने ही रंगों की आवश्यकता होगी जितने कि शीर्ष हैं अर्थात् हमें पांच रंगों की आवश्यकता होगी। अतः K_5 की वर्णिक संख्या 5 होगी।

* * *



चित्र 3

टिप्पणी: ऊपर के उदाहरण में हमने यह देखा है कि K_1 की वर्णिक संख्या 1 है। अधिक व्यापक रूप में यदि ग्राफ़ में वियुक्त शीर्ष हों, तो उसकी वर्णिक संख्या 1 होती है। विलोमतः यदि ग्राफ़ की वर्णिक संख्या 1 है तो इसमें वियुक्त शीर्ष ही होते हैं।

और, हमने यह भी देखा है कि K_5 की वर्णिक संख्या 5 है। अधिक व्यापक रूप में K_n की वर्णिक संख्या n होती है, क्योंकि K_n में कोई भी शीर्ष-युग्म संलग्न होते है।

उदाहरण 2: अरिक्त कोर-समुच्चय वाले एक द्विभाजित ग्राफ़ की वर्णिक संख्या ज्ञात कीजिए।

हल: इकाई 11 में आपने यह देखा है कि ग्राफ़ G द्विभाजित होता है यदि G के शीर्ष-समुच्चय को दो अरिक्त असंयुक्त उपसमुच्चयों A और B में इस प्रकार विभाजित किया जा सकता हो कि दिए हुए समुच्चय में कोई भी दो शीर्ष असंलग्न रहें। A के शीर्षों को $\boxed{1}$ आबंटित करने पर और B के सभी शीर्षों को $\boxed{2}$ आबंटित करने पर हमें G का 2-रंजन प्राप्त होता है। इसे एक विशेष स्थिति के रूप में चित्र 3 में प्रदर्शित किया गया है। और, यह भी ध्यान दीजिए कि चूंकि A और B अरिक्त हैं और क्योंकि G का कोर-समुच्च अरिक्त है, इसलिए A का कम से कम एक शीर्ष, B के एक शीर्ष के संलग्न होगा और ये दो शीर्ष अलग-अलग रंग के होने चाहिए। अतः दो से कम रंगों के साथ हम रंगने की व्यवस्था नहीं कर सकते हैं। इसलिए,

$\chi(G) = 2$, यदि G, अरिक्त कोर-समुच्चय वाला एक द्विभाजित ग्राफ़ हो।

* * *

टिप्पणी: उदाहरण 2 में हमने यह देखा है कि अरिक्त कोर-समुच्चय वाले द्विभाजित ग्राफ़ की वर्णिक संख्या 2 है। इसका विलोम भी सत्य होता है। यदि एक ग्राफ़ G और G का एक 2-रंजन दिया

हुआ हो, तो हम G के कोर-समुच्चय को निम्न रूप में परिभाषित दो अरिक्त समुच्चयों A और B में विभाजित कर सकते हैं:

$A = \{v \in V(G) \mid v$ को रंग $\boxed{1}$ आवंटित किया गया है।$\}$

$B = \{v \in V(G) \mid v$ को रंग $\boxed{2}$ आवंटित किया गया है।$\}$

रंजन की परिभाषा के अनुसार A के कोई भी दो शीर्ष संलग्न नहीं है और यही बात B पर भी लागू होती है। क्योंकि A और B असंयुक्त हैं, इसलिए परिभाषा के अनुसार G द्विभाजित होगा।

ऊपर दिए गए उदाहरण आप कितना समझ पाए हैं इसकी जांच करने के लिए यहाँ कुछ प्रश्न दिए जा रहे हैं।

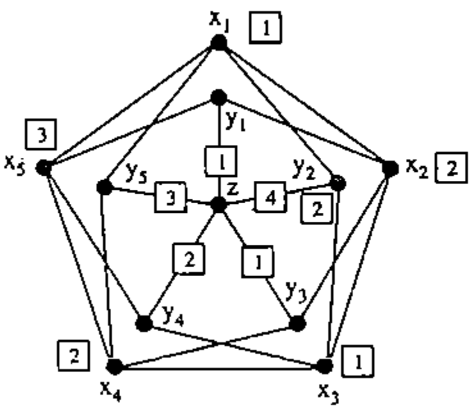
E1) कम से कम दो शीर्षों वाले वृक्ष की वर्णिक संख्या क्या होगी ?

E2) सम चक्र C_{2n}, $n \geq 2$ की वर्णिक संख्या क्या होगी ?

E3) क्या विषम चक्र C_{2n+1}, $n \geq 1$, 2- रंजनीय है ? इसकी वर्णिक संख्या क्या होगी ?

यदि कोई ग्राफ़ k-रंजनीय हो, तो क्या उसके सभी उपग्राफ़ k-रंजनीय होते हैं ? आइए हम इस पर चर्चा करें। मानलीजिए G एक k-रंजनीय ग्राफ़ है और H इसका उपग्राफ़ है। हम H के प्रत्येक शीर्ष को वही रंग आवंटित करते हैं, जो कि हमने उसे G का शीर्ष मानने पर किया था। यदि G में दो शीर्ष असंलग्न हो, तो वे H में भी असंलग्न होगें। अतः इससे H का एक रंजन प्राप्त हो जाता है। दूसरे शब्दों में, G के प्रत्येक उपग्राफ़ H के लिए $\chi(H) \leq k = \chi(G)$. हम इस कथन को इस रूप में भी प्रस्तुत कर सकते हैं। **यदि एक ग्राफ़ G का वर्णिक संख्या k वाला एक उपग्राफ़ H हो, तो G की वर्णिक संख्या कम से कम k अवश्य होगी।** यह तंथ्य कभी-कभी ग्राफ़ की वर्णिक संख्या ज्ञात करने में सहायक होती है। इसे हम अगले उदाहरण में प्रदर्शित करेंगे।

उदाहरण 3 : ग्रोच ग्राफ़ (देखिए चित्र 4) की वर्णिक संख्या ज्ञात कीजिए।



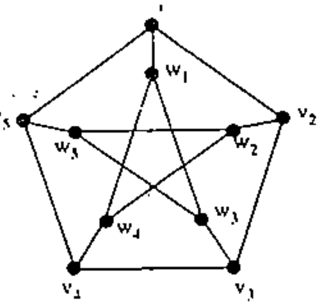
चित्र 4 : ग्रोच ग्राफ़।

हल : ऊपर दिये गये चित्र में इस ग्राफ़ का एक 4-रंजन प्राप्त होता है। क्या इस ग्राफ़ का तीन-रंजन हो सकता है? आइए इसे हम ज्ञात करें। क्योंकि बाह्य 5-चक्र एक विषम चक्र है, इसलिए इसमें तीन रंगों की आवश्यकता होती है। अतः हमें कम से कम तीन रंगों की आवश्यकता होगी। मानलीजिए $x_1, \ldots x_5$ के रंग वहीं हैं जैसा कि चित्र 4 में दिखाया गया है। क्योंकि y_1, x_2 और x_5 के संलग्न है, इसलिए इसे हमें $\boxed{2}$ और $\boxed{3}$ से अलग रंग आवंटित करना होगा। मानलीजिए हम इसे $\boxed{1}$ आवंटित करते हैं। इसी प्रकार, y_4 और y_5 के रंग क्रमशः $\boxed{2}$ और $\boxed{3}$ होगें। क्योंकि शीर्ष z उन शीर्षों से संलग्न है जिन्हें रंग $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ और $\boxed{3}$ आवंटित किया गया है, इसलिए इस शीर्ष के लिए हमें एक चौथे रंग का प्रयोग करना होगा। अतः यह ग्राफ़ 3-रंजनीय नहीं है। इसलिए इसकी वर्णिक संख्या 4 होगी।

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E4) दिखाइए कि चित्र 5 में दिए गए पेटर्सन-ग्राफ़ की वर्णिक संख्या 3 है।

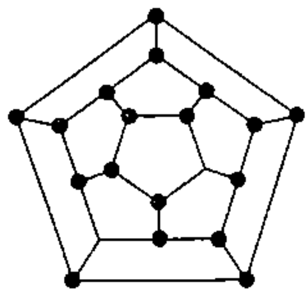


चित्र 5 : पेटर्सन ग्राफ़।

ऊपर दिए गए उदाहरणों और प्रश्नों में हमने यह देखा है कि यदि ग्राफ़ G का वर्णिक संख्या $\chi(H) = n$ वाला उपग्राफ़ H हो, तो $\chi(G) \geq n$. विशेष रूप में, यदि ग्राफ़ G का एक उपग्राफ़ H हो जो कि K_n के तुल्यकारी (isomorphic) हो, (इस प्रकार के उपग्राफ़ H को आमाप n वाला क्लिक कहा जाता है) तो G की वर्णिक संख्या कम से कम n होगी। परन्तु इसका विलोम सत्य नही होता, अर्थात् यदि एक ग्राफ़ की वर्णिक संख्या $\geq n$ हो, तो यह आवश्यक नहीं है कि इसका आमाप n वाला एक क्लिक हो। पेटर्सन ग्राफ़ इसका खंडन करता है। जैसा कि हम पहले देख चुके हैं कि पेटर्सन ग्राफ़ की वर्णिक संख्या 3 है। चूंकि इसे सिद्ध करने की आवश्यकता नही है इसलिए आप यह मान लीजिए कि इसमें आमाप 3 वाला एक क्लिक अर्थात् K_3 का तुल्याकारी ग्राफ़ नहीं होता। अधिक व्यापक रूप में 1955 में माइसेल्स्की ने यह सिद्ध किया था कि किसी भी पूर्णांक k के लिए त्रिभुजों से रहित एक k-वर्णिक ग्राफ़ होता है। इस परिणाम की उपपत्ति इस पाठ्यक्रम के अध्ययन-क्षेत्र से परे है। फिर भी अपेक्षाकृत दुर्बल परिणाम को अर्थात् यदि एक संबद्ध ग्राफ़ की वर्णिक संख्या 2 से अधिक हो, तो यह एक विषम चक्र आविष्ट करता है, सिद्ध करना कठिन नहीं है। अभी तक हमने जो कुछ पढ़ा है उसे आप कितना समझ पाए हैं उसकी जांच करने के लिए अन्य प्रश्नों के साथ यह प्रश्न भी हल करने के लिए आपको दिया गया है।

E5) दिखाइए कि यदि ग्राफ़ G के लिए $\chi(G) \geq 3$, तो यह एक विषम चक्र आविष्ट करता है।

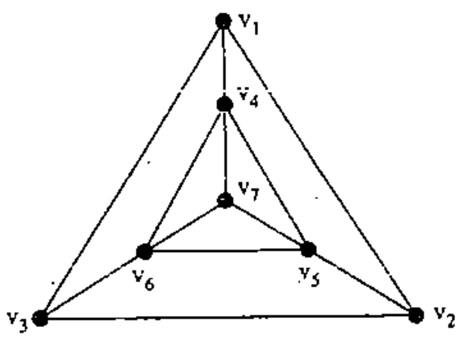
E6) (क) चित्र 6 में दिए गए ग्राफ़ का 3-रंजन ज्ञात कीजिए।



चित्र 6

(ख) चित्र 6 में दिए गए ग्राफ़ की वर्णिक संख्या क्या है ?

E7) नीचे दिए गए ग्राफ़ की वर्णिक संख्या ज्ञात कीजिए।



E8) वर्णिक संख्या 5 वाला एक ग्राफ़ बनाइए।

आपको याद होगा कि हमने यह दिखाया है कि कोई भी 2-रंजनीय ग्राफ़ द्विभाजित होता है। इसे कैसे किया गया था ? इसके लिए हमने समान रंग वाले सभी शीर्षों को एक समुच्चय में रखा था। क्योंकि रंग केवल दो थे, इसलिए हमें दो उपसमुच्चय प्राप्त हुए थे। ये उपसमुच्चय असंयुक्त थे क्योंकि किसी भी शीर्ष को दो रंग आवंटित नहीं किया जा सकता है।

अब हम इस विचार को n-रंजनीय ग्राफ़ों में लागू करेंगे। इसे हम वर्ण-वर्गों (colour classes) की संकल्पना के माध्यम से प्रस्तुत करेंगे। आइए पहले हम रंजन के वर्ण-वर्गों को परिभाषित करें।

परिभाषा : ग्राफ़ G के k-रंजन के लिए मानलीजिए कि समुच्चय $C_i = \{x \in V(G) \mid x$ को रंग $\boxed{i}$ आवंटित किया गया हैं $\}$, जहां $1 \le i \le k$। स्पष्ट है कि $C_i \cap C_j = \phi$, जहाँ $i \ne j$, और $V(G) = C_1 \cup \ldots \cup C_k$. यदि $\chi(G) = k$, तो k रंगों में से प्रत्येक रंग कम से क्रम एक शीर्ष को आवंटित किया जाता है। (क्यों ?) अतः इनमें से कोई भी उपसमुच्चय रिक्त नहीं होता। इसलिए, हमें शीर्ष समुच्चय V(G) का एक विभाजन k परस्पर असंयुक्त अरिक्त उपसमुच्चयों में प्राप्त होता है। उपसमुच्चयों $C_1, \ldots, C_k$ को रंजन द्वारा दिया गया G का वर्ण-वर्ग (colour class) कहा जाता है।

वर्ण-वर्गों को ग्राफ G के किसी भी रंजन के लिए परिभाषित किया जा सकता है, न कि केवल एक $\chi(G)$ रंजन के लिए।

अतः 2-रंजनीय ग्राफ़ के वर्ण-वर्गों से ग्राफ़ के शीर्ष समुच्चय का एक द्विभाजन प्राप्त होता है जो कि इसे द्विभाजित बना देता है।

आइए अब वर्ण-वर्गों से संबंधित कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 4 : एक ही ग्राफ के दो अलग-अलग रंजन-द्रव्यों में वर्ण-वर्ग ज्ञात कीजिए जैसा कि चित्र 8 (क) और 8 (ख) दिया गया है।

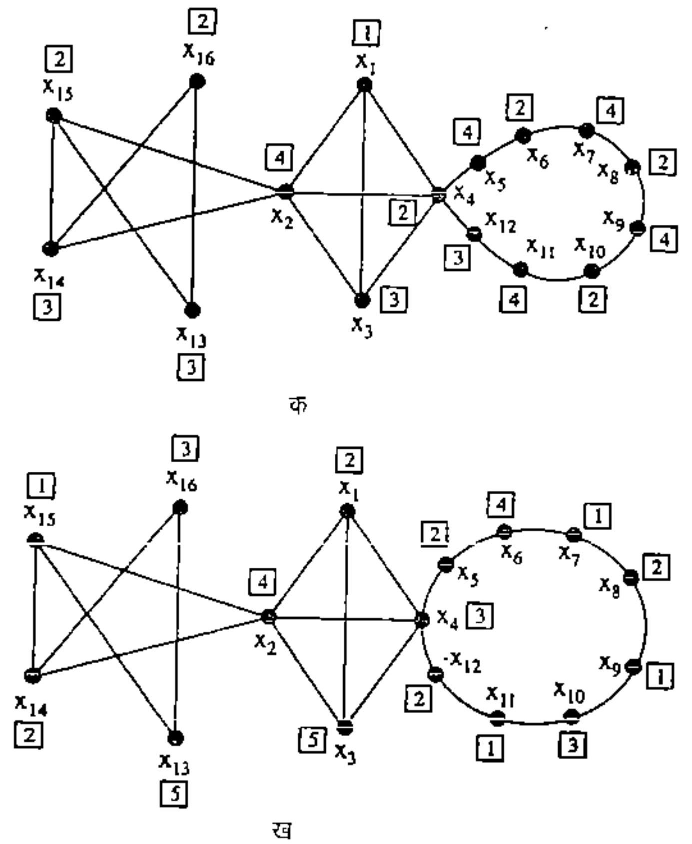
हल : चित्र 8 (क) के रंजन द्वारा दिए गए वर्ण-वर्ग ये हैं :

$$C_1 = \{x_1\}, C_2 = \{x_4, x_6, x_8, x_{10}, x_{15}, x_{16}\},$$

$$C_3 = \{x_3, x_{12}, x_{13}, x_{14}\} \text{ और}$$

$$C_4 = \{x_2, x_5, x_7, x_9, x_{11}\}$$

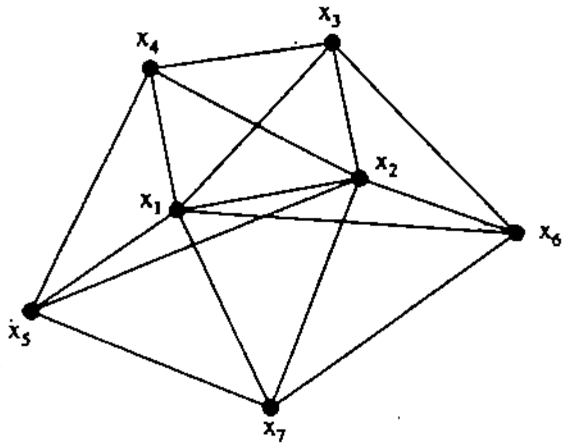
आप यह जांच कर सकते हैं कि $C_1 = \{x_7, x_9, x_{11}, x_{15}\}$, $C_2 = \{x_1, x_5, x_8, x_{12}, x_{14}\}$, $C_3 = \{x_4, x_{10}, x_{16}\}$, $C_4 = \{x_2, x_6\}$ और $C_5 = \{x_3, x_{13}\}$, चित्र 8(ख) के रंजन के संगत वर्ण-वर्ग हैं।



चित्र 8

ऊपर का उदाहरण आप कितना समझ पाए हैं, इसकी जांच करने के लिए नीचे एक प्रश्न दिया गया है।

E9) नीचे दिए गए ग्रॉफ़ को दो अलग-अलग विधियों से रंगिए और प्रत्येक स्थिति के वर्ण-वर्ग बताइए।

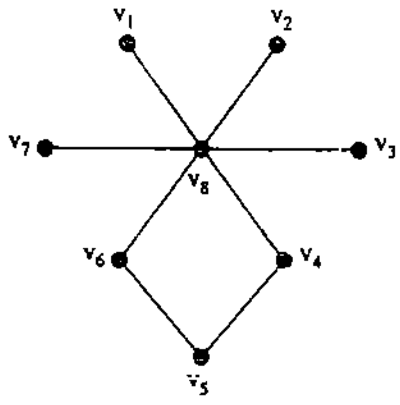


चित्र 9

हमने यह देखा है कि ग्राफ़ G के किसी भी रंजन से वर्ण-वर्ग प्राप्त होते हैं। आप यह जानते हैं कि यदि एक वर्ण वर्ग C_i में दो शीर्ष x, y हों, तो $xy \notin E(G)$. अतः प्रत्येक वर्ण-वर्ग में **परस्पर असंलग्न शीर्ष** होते हैं। अब हम इस गुणधर्म सहित ग्राफ़ के शीर्ष-समुच्चय के इन उप समुच्चयों को एक नाम देगें।

परिभाषा : ग्राफ़ G के शीर्ष समुच्चय V(G) के उपसमुच्चय S को **स्वतंत्र समुच्चय** (independent set) कहा जाता है, यदि S के कोई भी दो शीर्ष असंलग्न हों। स्वतंत्र समुच्चय को **महिष्ठ** (maximal) कहा जाता है यदि यह किसी भी अन्य स्वतंत्र समुच्चय में आविष्ट न हो। G के वृहत्तम स्वतंत्र समुच्चय में शीर्षों की संख्या को ग्राफ़ G की **स्वातंत्र्य संख्या** (independence number) कहा जाता है और इसे $\alpha(G)$ से प्रकट किया जाता है।

उदाहरण 5 : चित्र 10 में दिए गए ग्राफ़ के तीन अलग-अलग महिष्ठ स्वतंत्र समुच्चय ज्ञात कीजिए।



चित्र 10

हल: चित्र 10 में निम्नलिखित महिष्ठ स्वातंत्र्य समुच्चय हैं

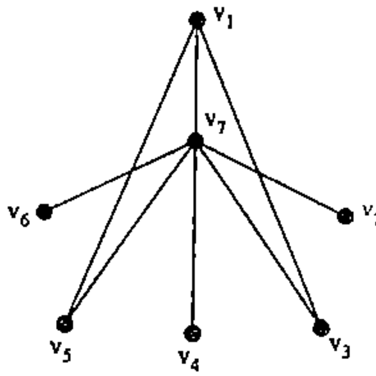
$$\{v_8, v_5\}, \{v_5, v_1, v_2, v_3, v_7\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_6, v_7\}.$$

हम यह जांच कर लेते हैं कि $\{v_8, v_5\}$ एक महिष्ठ स्वतंत्र समुच्चय है। इसे सरलता से देखा जा सकता है, क्योंकि अन्य सभी शेष शीर्ष इन दो शीर्षों में से किसी एक शीर्ष से संलग्न होते हैं। अतः यदि कुछ और शीर्ष बढ़ाए जाएँ, तो परिणामी समुच्चय एक स्वतंत्र समुच्चय नहीं रह जाता। आप यह देख सकते हैं कि इसी प्रकार अन्य दो समुच्चय भी महिष्ठ स्वतंत्र समुच्चय होते हैं।

* * *

स्वतंत्र समुच्चय को आप कितना समझ पाए हैं, इसके लिए आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E10) नीचे दिए गए ग्राफ़ में गणन संख्या 4 वाला एक स्वतंत्र समुच्चय ज्ञात कीजिए।



चित्र 11

E11) चित्र 7 और चित्र 8 में दिए गए ग्राफ़ों का $\alpha(G)$ ज्ञात कीजिए।

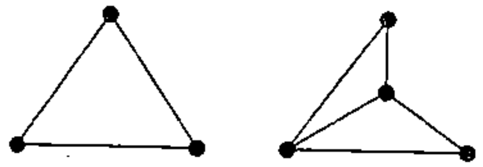
टिप्पणी : हमने देखा है कि रंजन के एक वर्ण-वर्ग और स्वतंत्र समुच्चयों का यह गुणधर्म होता है कि इसके कोई भी दो शीर्ष असंलग्न होते हैं। फिर भी, जहां वर्ण-वर्ग एक विशेष रंजन पर निर्भर करते हैं, वहीं स्वतंत्र समुच्चय के साथ ऐसा नहीं होता। इन दो संकल्पनाओं में यही अंतर है।

13.2.2 वर्णिक संख्याओं के परिबंध

आपको याद होगा कि
$\delta(G) = \min\{d_G(v) | \in E(G)\}$.
$\Delta(G) = \max\{d_G(v) \mid v \in E(G)\}$

इस भाग में हम एक ग्राफ़ की वर्णिक संख्या के कुछ परिबंधों को $\Delta(G)$ के रूप में सिद्ध करेंगे। इसके लिए हमें k- क्रांतिक ग्राफ़ों (k-critical graphs) की संकल्पना की आवश्यकता होती है।

यहां हम एक उदाहरण लेकर इस संकल्पना से आपको परिचित कराएगें। इसके लिए ग्राफ़ K_4 लीजिए। यदि हम इसमें से एक शीर्ष हटा दें, तो हमें जो ग्राफ़ प्राप्त होगा वह चित्र 12(क) के ग्राफ़ के तुल्याकारी होगा।



चित्र 12: K_4 से एक शीर्ष अथवा एक कोर हटाने पर प्राप्त हुए ग्राफ़।

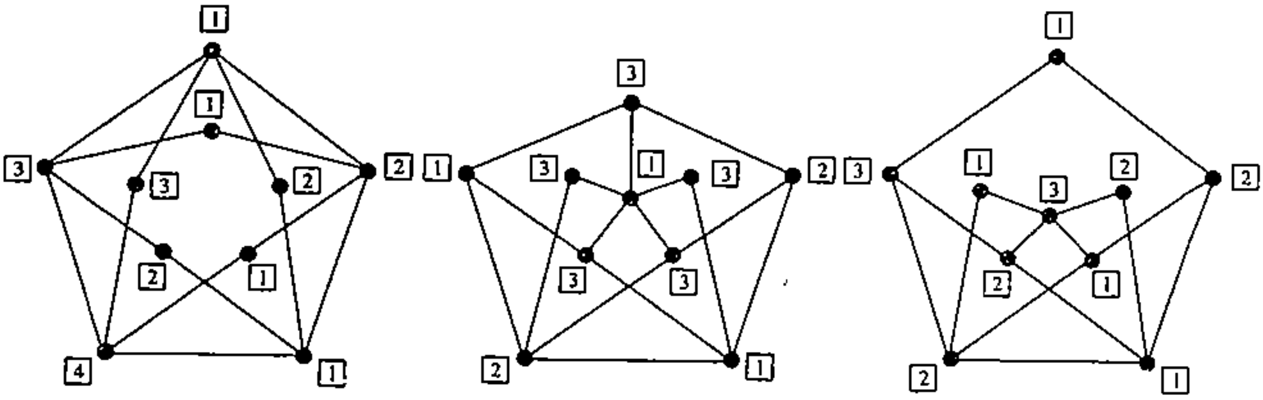
यदि हम एक कोर हटाते हैं तो हमें चित्र 12(ख) के ग्राफ़ के तुल्याकारी एक ग्राफ़ प्राप्त होता है। दोनों ही ग्राफ़ों की वर्णिक संख्या तीन है जिसे कि आप सरलता से सत्यापित कर सकते हैं। और, K_4 का एक अन्य उचित उपग्राफ़ इन ग्राफ़ों में से एक ग्राफ़ में आविष्ट होता है। अतः K_4 के किसी भी उपग्राफ़ की वर्णिक संख्या K_4 की वर्णिक संख्या, जो 4 है, से कम होगी। इससे यह पता चलता है कि K_4 4-क्रांतिक है जैसा कि निम्नलिखित परिभाषा से प्रदर्शित होता है।

परिभाषा : ग्राफ़ G को क्रांतिक या **k-क्रांतिक** या क्रांतिकतः **k-वर्णिक** कहा जाता है, यदि $\chi(G) = k$ और ग्राफ़ G के प्रत्येक उचित उपग्राफ़ H के लिए $\chi(H) < k$.

इस तरह, k-क्रांतिक ग्राफ़ों की परिभाषा से पहले की गई चर्चा में हमने यह दिखाया है कि K_4 4-क्रांतिक हैं। इस संबंध में आइए हम एक और उदाहरण लें।

उदाहरण 6: दिखाइए कि ग्रोच-ग्राफ 4-क्रांतिक है।

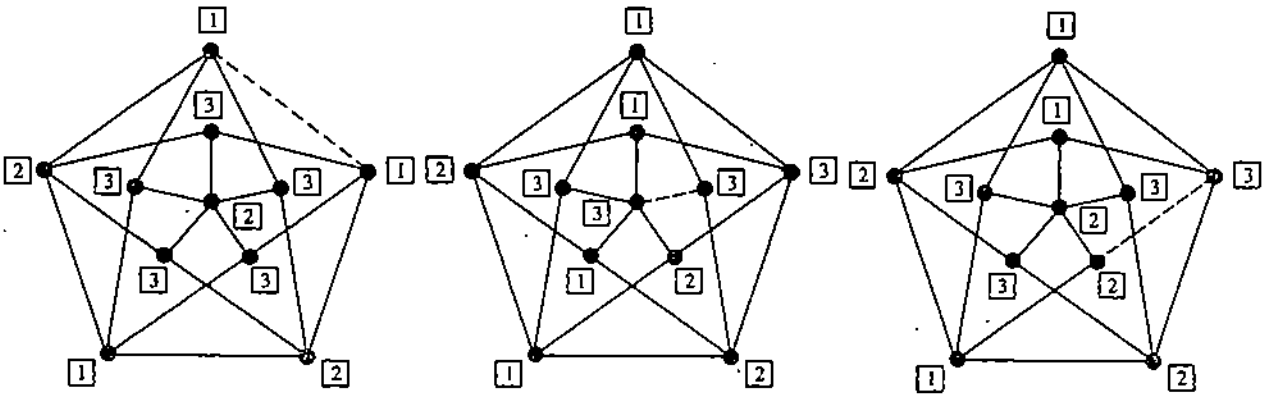
हल : ग्रोच-ग्राफ़ के लिए चित्र 4 देखिए। आइए हम इस ग्राफ़ से एक शीर्ष हटा दें। शीर्ष पर आश्रित हमें एक ग्राफ़ प्राप्त होता है जो नीचे दिए गए तीन ग्राफ़ों में से एक ग्राफ़ के तुल्याकारी



चित्र 13 : ग्रोच-ग्राफ़ से एक शीर्ष हटाने पर प्राप्त ग्राफ़।

इन चित्रों में दिए गए रंजन से यह स्पष्ट है कि ये ग्राफ़ 3-रंजनीय हैं। और, ये सभी 5-चक्र आविष्ट करते हैं अर्थात् ये 2-रंजनीय नहीं हैं। इस तरह, इनकी वर्णिक संख्या $3 < 4 = \chi(G)$ है। इसका अर्थ यह है कि ग्राफ़ G के प्रत्येक शीर्ष v के लिए $\chi(G - v) < \chi(G)$.

अब, यदि हम किसी शीर्ष को हटाए बिना G की एक कोर को हटाएँ, तो हमें चित्र 14 में दिए गए ग्राफ़ों में से एक ग्राफ़ के तुल्याकारी एक उपग्राफ़ प्राप्त होता है। बिन्दुकित रेखाएँ उन कोरों को प्रकट करती है जिन्हें हमने हटा दिया है।



चित्र 14 : ग्रोच-ग्राफ़ से एक कोर हटा देने पर प्राप्त ग्राफ़।

प्राप्त किए गए उपग्राफ़ों के 3-रंजन भी चित्र में दिए गए हैं। और, क्योंकि इन ग्राफ़ों में 5-चक्र भी आविष्ट हैं, इसलिए इनकी वर्णिक संख्या 3 होगी। इस तरह, G की प्रत्येक कोर e के लिए $\chi(G - e) < \chi(G)$. परन्तु, तब G का प्रत्येक उचित उपग्राफ़ वस्तुतः चित्र 13 और चित्र 14 में दिए गए छहों ग्राफ़ों में से एक ग्राफ़ का उपग्राफ़ होता है। इस तरह, ग्राफ़ G के प्रत्येक उचित उपग्राफ़ H के लिए $\chi(H) < \chi(G)$. अतः ग्रोच-ग्राफ़ 4-क्रांतिक है।

* * *

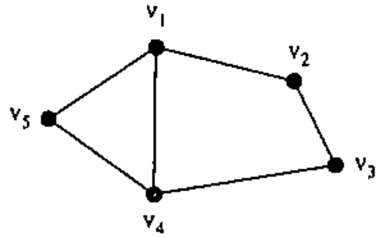
k-क्रांतिक ग्राफ़ों की परिभाषा को आप कितना समझ पाए हैं, इसे जाँचने के लिए नीचे प्रश्न दिए जा रहे हैं।

E12) दिखाइए कि K_n एक n-क्रांतिक ग्राफ़ है।

E13) जांच कीजिए कि पेटर्सन-ग्राफ़ 3-क्रांतिक है या नहीं।

अब वर्णिक संख्या k वाला एक ग्राफ़ लीजिए। क्या इसका k-क्रांतिक होना आवश्यक है ? इस प्रश्न का उत्तर ज्ञात करने में नीचे दिया गया उदाहरण सहायक सिद्ध होगा।

उदाहरण 7: दिखाइए कि चित्र 15 में दिया गया ग्राफ़ 3-वर्णिक है, परन्तु यह 3-क्रांतिक नहीं है।



चित्र 15

हल : हम v_1 और v_3 को $\boxed{1}$, v_2 और v_4 को $\boxed{2}$, v_5 को $\boxed{3}$ आवंटित कर सकते हैं। इससे हमें ग्राफ़ का तीन रंजन प्राप्त होता है। यह ग्राफ़ 3-वर्णिक है क्योंकि इसमें एक 3-चक्र (v_1, v_4, v_5) आविष्ट है। यदि हम शीर्ष v_2 को हटा दें तो परिणामी ग्राफ़ की वर्णिक संख्या 3 ही होगी क्योंकि इसमें अभी भी 3-चक्र v_1, v_4, v_5 आविष्ट हैं। अतः G का एक उपग्राफ़ होता है जिसकी वर्णिक संख्या वही होती है जो कि G की है। इसलिए, यह 3-क्रांतिक नहीं हो सकता।

* * *

अब, क्योंकि हम यह जानते हैं कि वर्णिक संख्या 3 वाले ग्राफ़ के लिए यह आवश्यक नहीं है कि यह 3–क्रांतिक हो, इसलिए यह जानकर आपको आश्चर्य हो सकता है कि यह एक k-क्रांतिक उपग्राफ़ आविष्ट करता है। नीचे दिए गए प्रमेय से यह पता चल जाएगा कि यह सत्य है।

प्रमेय 1 : मानलीजिए G वर्णिक संख्या k वाला एक ग्राफ़ है। तब इसका एक उपग्राफ़ होता है जो k-क्रांतिक होता है।

उपपत्ति : $\chi(G) = k$ वाला ग्राफ़ G लीजिए। यदि यह k-क्रांतिक है, तब तो यह स्वयं सिद्ध हो जाता है। परन्तु, यदि यह k-क्रांतिक नहीं है, तो इसका एक ऐसा शीर्ष v होगा जिससे कि $\chi(G - v) = k$. यदि $G - v$, k-क्रांतिक है, तो हमारा काम फिर बन जाता है। अन्यथा हम एक अन्य शीर्ष हटाकर वर्णिक संख्या k वाला एक उपग्राफ़ प्राप्त कर सकते हैं। हम इस प्रक्रिया को दोबारा करते हैं। सबसे खराब स्थिति में हमें k शीर्षों पर G का एक k-वर्णिक ग्राफ़ प्राप्त होगा। यदि हम इस ग्राफ़ से कोई भी शीर्ष हटा लें, तो हमें $k - 1$ शीर्ष वाला एक ग्राफ़ प्राप्त होगा, जो कि $(k - 1)$ रंजनीय होगा। अतः k शीर्षों पर प्राप्त किया गया k-वर्णिक उपग्राफ़ k-वर्णिक होगा।

अब हम एक उदाहरण लेकर प्रमेय 1 को अच्छी तरह से समझने का प्रयास करेंगें।

उदाहरण 8 : चित्र 15 में दिए गए ग्राफ़ का एक 3-क्रांतिक उपग्राफ़ ज्ञात कीजिए।

हल : शीर्षों v_2 और v_3 को हटाने पर हमें K_3 के तुल्यकारी एक ग्राफ़ प्राप्त होता है। यह 3-क्रांतिक है।

* * *

इससे संबंधित एक प्रश्न आपके लिए दिया जा रहा है।

E14) पेटर्सन-ग्राफ़ का एक 3-क्रांतिक उपग्राफ़ ज्ञात कीजिए।

आइए अब हम अभी तक उल्लेख किए गए कुछ उदाहरणों के $\chi(G)$ और $\Delta(G)$ के मानों की एक सारणी बनाएँ और देखें कि क्या इन दो राशियों के बीच हम कोई संबंध प्राप्त कर सकते हैं।

G	$\chi(G)$	$\Delta(G)$
ग्रोच-ग्राफ़	4	5
पेटर्सन-ग्राफ़	3	3
द्वादश फलक	3	3
C_5	3	2
K_4	4	3
K_5	5	4

यहाँ आप यह देख सकते हैं कि C_5, K_5 और K_4 को छोड़कर अन्य सभी ग्राफ़ संबंध $\chi(G) \leq \Delta(G)$ को संतुष्ट करते हैं। 1941 में आर. आई. ब्रुक्स ने निम्नलिखित परिणाम सिद्ध किया था।

प्रमेय 2 : मानलीजिए G एक संबद्ध ग्राफ़ है जो कि न तो विषम चक्र है और न ही पूर्ण ग्राफ़ तब

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

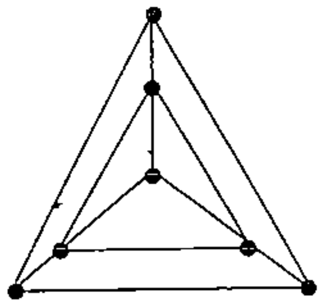
हम इस पाठ्यक्रम में प्रमेय 2 को सिद्ध नहीं करेंगे। परन्तु यहां हम निम्नलिखित अपेक्षाकृत दुर्बल परिणाम को सिद्ध करेगें।

प्रमेय 3 : प्रत्येक k-वर्णिक ग्राफ़ G के लिए

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

आइए अब हम एक उदाहरण लेकर ब्रुक्स प्रमेय के अनुप्रयोग को प्रदर्शित करें।

उदाहरण 9 : चित्र 16 में दिए गए ग्राफ़ की वर्णिक संख्या ज्ञात कीजिए।



चित्र 16

हल : इस ग्राफ़ का अधिकतम कोटि $\Delta(G)$, 4 है। अतः ब्रुक्स-प्रमेय के अनुसार वर्णिक संख्या अधिक से अधिक 4 होगी। परन्तु, क्योंकि इसका K_4 के तुल्याकारी एक उपग्राफ़ होता है (अंतः त्रिभुज और केन्द्र के शीर्ष से बना उपग्राफ़), इसलिए इसकी वर्णिक संख्या कम से कम 4 होगी। अतः इसकी वर्णिक संख्या ठीक-ठीक 4 होगी।

* * *

टिप्पणी : ब्रुक्स-प्रमेय द्वारा दिया गया परिबंध संभवतः उतना उत्तम नहीं हो सकता है जितना कि उदाहरण 9 में दिया गया था। उदाहरण के लिए, $K_{1,n}$ के संबंध में $\Delta(K_{1,n}) = n$, $\chi(K_{1,n}) = 2$ है। अतः जब n वृहत् होता है तो अंतर $\chi(K_{1,n}) - \Delta(K_{1,n}) = n - 2$ भी वृहत् होता है।

अब, हम एक प्रमेयिका सिद्ध करेगें जिसका प्रयोग प्रमेय 2 की उपपत्ति में किया जाएगा।

प्रमेयिका 1 : यदि G न्यूनतम कोटि $\delta(G)$ वाला एक k-क्रांतिक ग्राफ़ हो तो $(k-1) \leq \delta(G)$.

उपपत्ति : यदि संभव हो तो मानलीजिए G एक k-क्रांतिक ग्राफ़ है जहां $\delta(G) < (k-1)$. मानलीजिए $v \in V(G)$ जिससे कि $\delta(G) = d_G(v)$। क्योंकि G, k-क्रांतिक है, इसलिए $\chi(G - v) \leq (k-1)$ अर्थात् $G - v$ का एक $(k-1)$ रंजन है। क्योंकि $d_G(v) < (k-1)$ इसलिए v, $k-1$ शीर्षों से कम शीर्षों के संलग्न होगा। अतः $k-1$ रंगों में से कम से कम एक रंग $\boxed{i}$ ऐसा होगा जो कि v के संलग्न $k-1$ शीर्षों में से किसी भी शीर्ष को आवंटित नहीं किया गया हो। यह इस तथ्य का अंतर्विरोध करता है कि $\chi(G) = k$. अतः हम जो मानकर चले थे वह गलत था अर्थात् $\delta(G) \geq (k-1)$.

उपप्रमेय 1 : प्रत्येक k-वर्णिक ग्राफ़ G का कोटि $\geq k-1$ वाला कम से कम k शीर्ष होता है।

उपपत्ति : मानलीजिए G एक k-वर्णिक ग्राफ़ है अर्थात् $\chi(G) = k$. मानलीजिए H, G का एक k-क्रांतिक उपग्राफ़ है। इसतरह, $|V(H)| \geq k$ और $\delta(H) \geq k - 1$. इसका अर्थ यह है कि H का प्रत्येक शीर्ष x इस गुणधर्म को संतुष्ट करता है कि $d_G(x) \geq d_H(x) \geq \delta(H) \geq (k-1)$. इस प्रकार के कम से कम k शीर्ष होते हैं। इस तरह परिणाम सिद्ध हो जाता है।

अब हम प्रमेय 2 को सिद्ध करेंगे।

प्रमेय 2 की उपपत्ति : उपप्रमेय 1 को प्रमेयिका 1 पर लागू करके एक ऐसा शीर्ष $x \in V(G)$ लीजिए जिससे कि $d_G(x) \geq (k-1)$. परन्तु, तब $\Delta(G) \geq d_G(x) \geq (k-1)$, अर्थात् $\chi(G) = k \leq \Delta(G) + 1$.

प्रस्तावना में हमने यह उल्लेख किया है कि मानचित्र रंजन समस्या को समतलीय ग्राफ़ नामक विशेष वर्ग के ग्राफ़ों को रंगने के लिए आवश्यक न्यूनतम रंगों को ज्ञात करने की समस्या में

परिवर्तित कर सकते हैं। अगले भाग में हम समतलीय ग्राफ़ (planar graphs) परिभाषित करेंगे और कुछ आधारभूत परिणामों को सिद्ध करेंगे जो कि मानचित्र रंजन समस्या के अध्ययन में काफी उपयोगी होंगे।

13.3 समतलीय ग्राफ़

ट्रॉन्जिस्टर, रेडियो और टेलिवीजन सेटों में आपने छपे हुए परिपथ बोर्ड अवश्य देखें होगें। इन बोर्डों में विभिन्न घटकों के लिए खांचे होते हैं और ये खांचे एक-दूसरे से जुड़े होते हैं। इन खांचों के बीच के संबंधन इस प्रकार करने चाहिए जिससे कि कोई भी दो संबंधन एक-दूसरे को क्रासित न करें। यदि एक इलेक्ट्रॉनिक परिपथ दिया हुआ हो, तो क्या इसके संगत एक छपे हुए परिपथ बोर्ड की अभिकल्पना (design) करना सदा संभव होता है ?

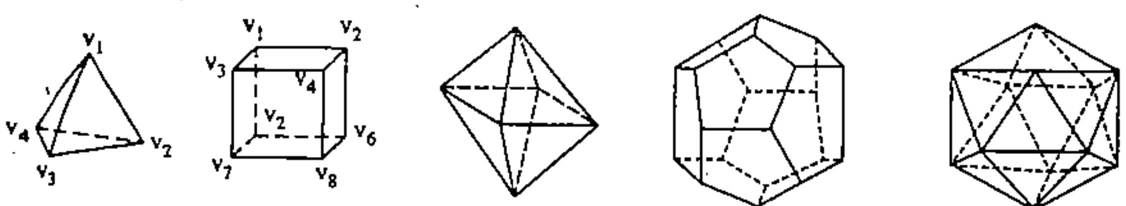
इस समस्या को ग्राफ़ सिद्धांत की एक समस्या के रूप में सूचित किया जा सकता है। हम इसमें इलेक्ट्रॉनिक घटकों के स्थान पर शीर्षों को और इनके बीच के संबंधनों के स्थान पर कोरों को लेते हैं। यदि परिणामी ग्राफ़ को इस प्रकार खींचा जा सकता हो कि केवल शीर्षों को छोड़कर अन्य कहीं भी कोई भी दो कोर एक-दूसरे को क्रासित न करते हों तो हम दिए हुए परिपथ के लिए एक छपे हुए परिपथ बोर्ड की अभिकल्पना कर सकते हैं। इस प्रकार खींचे गए ग्राफ़ों को समतलीय ग्राफ़ कहा जाता है।

इस भाग में हम समतलीय ग्राफ़ों का अध्ययन प्रारंभ करेंगे। सबसे पहले इस भाग में हम समतलीय ग्राफ़ों को परिभाषित करेंगे। इसके बाद कुछ उदाहरण देने के बाद आयलर–सूत्र की तरह समतलीय ग्राफ़ों के कुछ आधारभूत परिणामों को सिद्ध करेंगे। इससे हम एक ग्राफ़ को समतलीय होने के लिए कुछ आवश्यक प्रतिबंधों को व्युत्पन्न करेंगे। और इन प्रतिबंधों को लागू करके हम यह देखेंगे कि $K_{3,3}$ और K_5 असमतलीय हैं।

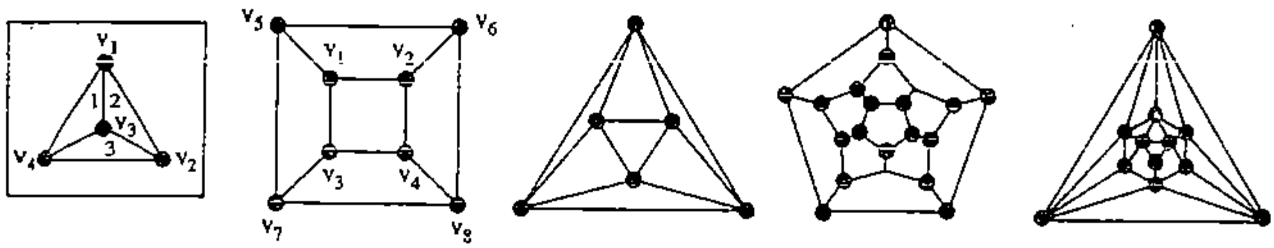
आइए पहले हम देखें कि समतलीय ग्राफ़ होता क्या है।

परिभाषा : ग्राफ़ G को **समतलीय** कहा जाता है, यदि इसे समतल पर इस प्रकार खींचा जा सकता हो कि कोई भी दो कोरें एक-दूसरे को संभवतः सर्वनिष्ठ अन्य शीर्ष को छोड़कर अन्य किसी भी बिन्दु पर क्रासित न करती हों। इस प्रकार के रेखाचित्र को **समतल रेखाचित्र** (plane drawing) कहा जाता है।

यहां समतलीय ग्राफ़ के कुछ उदाहरण दिए गए हैं। चित्र 17 की पहली पंक्ति में हमने पांच सम घनाकृतियां, जिन्हें प्लैटोनिक घनाचित्र कहा जाता है, दी हैं। दूसरी पंक्ति में हमने संगत ग्राफ़ दिए हैं। इनमें से प्रत्येक ग्राफ़ में शीर्ष संगत चित्र के शीर्षों के संगत हैं और कोरें चित्र की कोरों के संगत हैं।



tetrahedron क | cube ख | octahedron ग | dodecahedron घ | icosahedron ङ



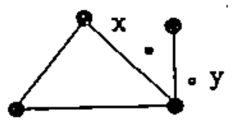
tetrahedron क | cube ख | octahedron ग | dodecahedron घ | icosahedron ङ

चित्र 17 : सम घनाकृति और उनके ग्राफ़।

अब हम आपको प्रदेश (region) की संकल्पना से परिचित कराएगें। चित्र 17(क) में दिया गया चतुष्फलक (tetrahedron) देखिए। इसके चार फलक हैं। इसका संगत ग्राफ़ चित्र 17(क) में दिया गया है। यह समतल को चार फलकों या प्रदेशों में विभाजित करता है। इसी प्रकार चित्र 17(ख) में दिया गया घन समतल को छह प्रदेशों में विभाजित करता है।

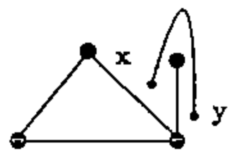
ऊपर की सभी स्थितियों में यह बिल्कुल स्पष्ट है कि भिन्न-भिन्न प्रदेश क्या होते हैं। अब चित्र 18 का ग्राफ़ देखिए। यह चित्र समतल को कितने प्रदेशों में विभाजित करता है ? दो या तीन ? बिन्दुएँ x और y समान प्रदेश में स्थित हैं या अलग-अलग प्रदेश में ? इस प्रकार के भ्रम से बचने के लिए हमें प्रदेश की संकल्पना को परिशुद्ध रूप में परिभाषित करना चाहिए। यहां प्रदेश की परिभाषा दी जा रही है।

परिभाषा : यदि एक समतलीय ग्राफ़ G का एक समतल रेखाचित्र दिया हुआ हो तो G के **प्रदेश** या **फलक** से हमारा अर्थ समतल के उस महिष्ठ भाग (maximal portion) से हैं जिसकी किन्हीं भी दो बिन्दुओं a, b को एक सरल वक्र द्वारा इस प्रकार मिलाया जा सकता हो कि न तो वक्र का कोई ऐसा बिन्दु हो जो किसी कोर को निरूपित करने वाले वक्र के साथ सर्वनिष्ठ हो और न ही कोई शीर्ष उस वक्र पर स्थित हो अर्थात् वक्र पूरी तरह से समतल के उस भाग में स्थित हो। प्रदेश **R** पर विचार कीजिए। **R की परिसीमा** उन सभी x बिन्दुओं का समुच्चय है जिनमें यह गुणधर्म हो कि प्रदेश R में किसी भी बिन्दु को एक सरल वक्र से जोड़ा जा सकता है और इस वक्र के सभी बिन्दु सिवाए x के प्रदेश R में स्थित हो। यहां सदा ही एक अपरिबद्ध प्रदेश (unbounded region) होता हैं और इसे G का **बाह्य प्रदेश** (exterior region) कहा जाता है। अन्य प्रदेश को **अंतः प्रदेश** (interior region) कहा जाता है।



चित्र 18: ध्यान दीजिए कि x और y, समतल में केवल बिन्दु हैं, शीर्ष नहीं है।

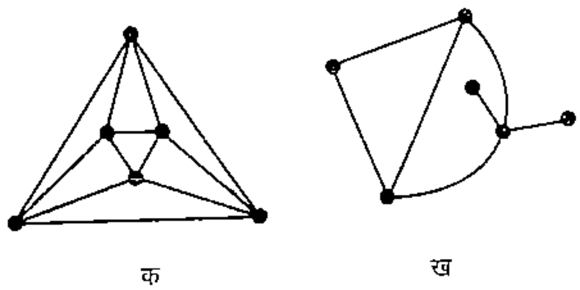
आइए अब हम चित्र 18 को फिर से देखें। परिभाषा प्राप्त हो जाने के बाद अब हम उस प्रश्न को देख सकते हैं जिसे हमने प्रारंभ में उठाया था। जैसा कि आप चित्र 19 में देख सकते हैं बिन्दुओं x और y को उस वक्र से मिलाया जा सकता है जो किसी भी कोर को क्रासित नहीं करता। अतः प्रदेश दो ही हो सकते हैं, एक त्रिभुज के अंदर और एक त्रिभुज के बाहर। दोनों ही बिन्दु त्रिभुज के बाह्य प्रदेश में स्थित हैं।



चित्र 19

इन संकल्पनाओं को और अच्छी तरह से समझने के लिए आइए अब हम एक उदाहरण लें।

उदाहरण 10 : चित्र 20 में दिए गए ग्राफ़ों के प्रदेशों की संख्या, जिसमें बाह्य प्रदेश भी सम्मिलित है, ज्ञात कीजिए।



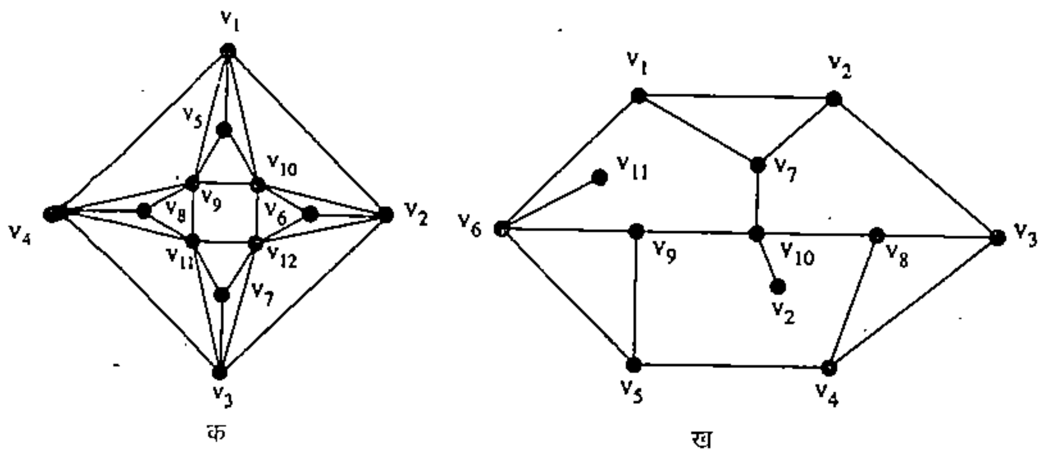
चित्र 20

हल : चित्र 20(क) के ग्राफ़ में 8 प्रदेश हैं। चित्र 20(ख) के ग्राफ़ में 3 प्रदेश हैं।

* * *

आप इसे कितना समझ पाए है, इसके लिए आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E15) चित्र 21 के प्रत्येक ग्राफ़ में प्रदेशों की संख्या ज्ञात कीजिए।



चित्र 21

आइए अब हम चित्र 17 के सभी समतलीय ग्राफ़ों और चित्र 20(ख) के ग्राफ़ के लिए राशि $p - q + r$ परिकलित करें।

	p	q	r	p − q + r
चित्र 20(ख)	6	7	3	2
K_4	4	6	4	2
चतुष्फलक	4	6	4	2
घन	8	12	6	2
अष्टफलक	6	12	8	2
द्वादशफलक	20	30	12	2
विंशतिफलक	12	24	18	2

जैसा कि आप यहाँ देख सकते हैं, इन सभी समतलीय ग्राफ़ों के लिए $p - q + r$ सदा ही 2 होता है।

1736 में ऑयलर द्वारा सिद्ध किया गया यह प्रमेय हमारे प्रेक्षण को सिद्ध कर देता है।

प्रमेय 4 : यदि G एक संबद्ध समतलीय (p, q) -ग्राफ़ हो, तो G के किसी भी समतल रेखाचित्र के लिए G के प्रदेशों की संख्या r अचर होती है और

$$p - q + r = 2 \tag{1}$$

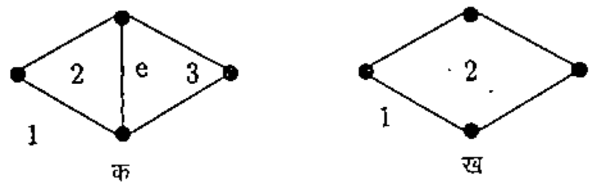
उपपत्ति : हम G के कोरों की संख्या q पर आगमन नियम (देखिए इकाई 2) लागू करेंगे। अपनी सुविधा के लिए आइए हम इस समीकरण को शब्दों में भी लिख दें।

किसी समतलीय ग्राफ़ G के लिए

$$\text{शीर्षों की संख्या} - \text{कोरों की संख्या} + \text{प्रदेशों की संख्या} = 2 \tag{2}$$

यदि $q = 0$ तो G में ठीक p वियुक्त शीर्ष होते हैं। अतः $r = 1$ और सूत्र लागू हो जाता है। अब, आगमन–नियम से यह मानलीजिए कि प्रत्येक $t \le (q - 1)$ के लिए (p, t) ग्राफ़ के समतल रेखाचित्र पर सूत्र लागू होता है और मानलीजिए G एक (p, q)-ग्राफ़ है। यदि G एक वृक्ष है, तो $p = q + 1$ और $r = 1$ जिससे कि सूत्र लागू होता हो। यदि G वृक्ष नहीं है तो मालीजिए कि e एक कोर है जो G के एक चक्र पर स्थित है। और G का उपग्राफ़ $G - e$ लीजिए।

जब हम एक कोर e हटाते है, तो हम दो प्रदेशों को जोड़कर उनसे एक प्रदेश बनाते हैं अर्थात् $G - e$ के p शीर्ष हैं, $(q - 1)$ कोर हैं और $(r - 1)$ प्रदेश हैं। इसे चित्र 22 में एक विशेष स्थिति के रूप में प्रदर्शित किया गया है।



चित्र 22

चित्र 22(क) में 4 शीर्ष, 5 कोर और 3 प्रदेश हैं। e से लेबलित कोर को हटा लेने के बाद प्रदेश 2 और 3 एक-दूसरे में मिल जाते हैं और जिनसे एक प्रदेश बन जाता है। चित्र 22(ख) के नए ग्राफ़ में 4 शीर्ष, 4 कोर और 2 प्रदेश हैं।

अब, आगमन-नियम के अनुसार समीकरण (1) का संबंध इस $G - e$ पर लागू होता है। $G - e$ के लिए समीकरण (2) में दिए गए रूप का प्रयोग करने पर हमें यह प्राप्त होता है

2 = शीर्षों की संख्या − कोरों की संख्या + प्रदेशों की संख्या।

$$= p - (q - 1) + (r - 1)$$

$$= p - q + r$$

अर्थात् $p - q + r = 2$. परन्तु p, q और r, G में क्रमशः शीर्षों की संख्या, कोरों की संख्या और प्रदेशों की संख्या है। इससे ग्राफ़ G के लिए परिणाम सिद्ध हो जाता है।

समीकरण (1) के सूत्र से हमें $r = q - p + 2$ प्राप्त होता है। क्योंकि p और q को एक बार नियत कर लेने पर ग्राफ़ नियत हो जाता है, इसलिए इससे यह भी पता चलता है कि समतलीय ग्राफ़ के एक समतल रेखा चित्र में प्रदेशों की संख्या समतल रेखाचित्र से स्वतंत्र होती है।

आपको याद होगा कि p शीर्षों वाले ग्राफ़ में $\frac{p(p-1)}{2}$ तक कोरें हो सकती हैं। समतलीय ग्राफ़ों के संबंध में परिबंध और अधिक उत्तम होता है। हम इस परिबंध को (उपपत्ति के बिना) अगले प्रमेय में प्रस्तुत करेंगे।

प्रमेय 5 : यदि G एक समतलीय (p, q)-ग्राफ़ हो, जहां $p \geq 3$, तो $q \leq 3p - 6$ और, यदि G द्विभाजित भी है तो हमें $q \leq 2p - 4$ प्राप्त होता है।

अभी तक हमने समतलीय ग्राफ़ के अनेक उदाहरण दिए हैं। परन्तु, असमतलीय ग्राफ़ों का हमने अभी तक कोई उदाहरण नहीं दिया है। इस प्रकार का उदाहरण देने के लिए हम अगले उदाहरण में प्रमेय 5 में दिए गए परिबंध का प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 11 : दिखाइए कि K_5 समतलीय है।

हल : मानलीजिए K_5 समतलीय है। तब K_5 की कोरों और शीर्षों की संख्या प्रमेय 5 में दिए गए संबंध $q \leq 3p - 6$ को संतुष्ट करती है। क्योंकि K_5 के 5 शीर्ष और 10 कोर हैं इसलिए $10 \leq 3 \times 5 - 6$ अर्थात् $10 \leq 9$ जो एक अंतर्विरोध है।

* * *

प्रमेय 5 को आप कितना समझ पाए हैं, इसकी जांच करने के लिए नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E16) प्रमेय 5 की सहायता से सत्यापित कीजिए कि $K_{3,3}$ असमतलीय है।

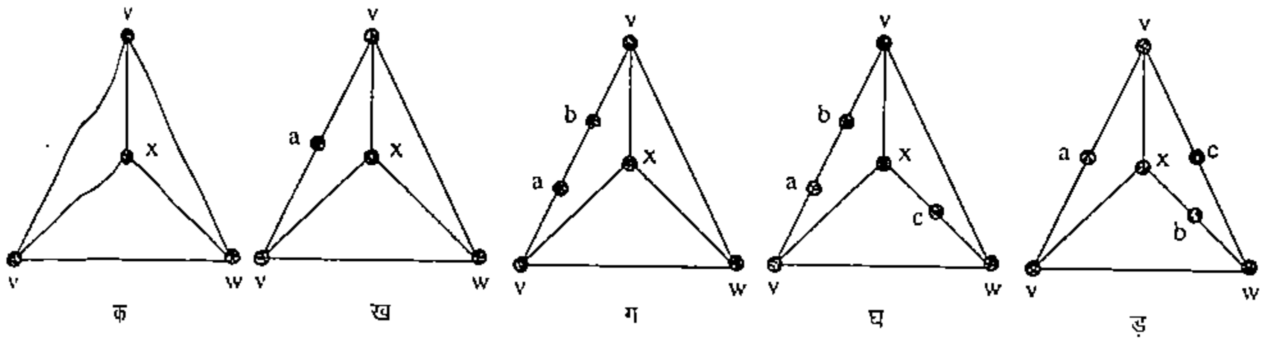
इस बात की ओर आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि अभी तक हमने समतलता के लिए केवल आवश्यक प्रतिबंध दिए हैं। अगले उपभाग में हम आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध देगें।

13.3.1 ग्राफ़ कब समतलीय होता है ?

हम यह देख चुके हैं कि K_5 और $K_{3,3}$ समतलीय नहीं है। इसे सिद्ध करने के लिए हमने ऑयलर–सूत्र से व्युत्पन्न आवश्यक प्रतिबंध का प्रयोग किया था। फिर भी, प्रतिबंध पर्याप्त नहीं है। उदाहरण के लिए ग्रोच-ग्राफ़ में $p = 11, q = 20$ और $20 \leq 33 - 6 = 27$. इस तरह प्रमेय 5 में दिया

गया प्रतिबंध संतुष्ट हो जाता है। परन्तु, जैसा कि हम बाद में देखेंगे ग्रोच–ग्राफ़ समतलीय नहीं है। क्या ग्राफ का समतलीय होने का कोई आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध है ?

हाँ। 1930 में पोलैण्ड के गणितज्ञ क. कुरातोवस्की ने ग्राफ़ के समतलीय होने का एक आवश्यक और पर्याप्त प्रतिबंध सिद्ध किया था। यहाँ हम इस प्रमेय का कथन देंगें और एक उदाहरण लेकर इसके अनुप्रयोग को प्रदर्शित करेंगें। कथन को समझने के लिए आइए पहले हम नीचे दिया गया चित्र 23 लें।



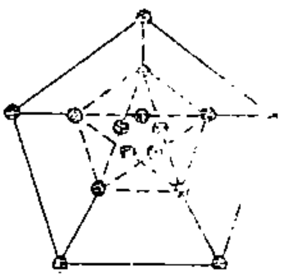
चित्र 23 : ग्राफ़ का उपविभाजन।

इस चित्र में हमने K_4 से प्रारंभ किया है और कुछ वर्तमान कोरों पर कोटि 2 वाले शीर्ष निविष्ट किए हैं। उदाहरण के लिए, चित्र 23(ख) में हमने कोर uv को हटा दिया है और एक नए शीर्ष a और दो और नई कोरें va और au बढा दिए हैं। इसी प्रकार हमने चित्र 23(ख), चित्र 23(ग), चित्र 23(घ) और चित्र 23(ड) के ग्राफ़ों में परिवर्तन किया है। इस प्रकार हमने चित्र 23(क) के ग्राफ़ के **उपविभाजन** (sub division) प्राप्त किए हैं जैसा कि अब आप देखेंगें।

परिभाषा : ग्राफ़ G' ग्राफ़ G का एक **उपविभाजन** होता है, यदि G की वर्तमान कोरों पर कोटि 2 वाले एक या अधिक नए शीर्ष बढ़ाकर इसे प्राप्त किया जा सकता हो।

दूसरे शब्दों में हम कुछ वर्तमान कोरों को 'उप विभाजित' करते हैं।

ध्यान दीजिए कि यदि ग्राफ़ समतलीय है तो उसके सभी उपग्राफ़ समतलीय होते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि ग्राफ़ का एक उपग्राफ़ असमतलीय है तो ग्राफ स्वय असमतलीय होता है। और, यदि ग्राफ़ G' समतलीय ग्राफ़ G का उप-विभाजन हो तो G' भी समतलीय होता है। यदि ग्राफ़ G असमतलीय है तो G का कोई उप-विभाजन भी असमतलीय होता है। अतः यदि ग्राफ में एक असमतलीय उपग्राफ़ या एक ऐसा उपग्राफ हो, जो कि असमतलीय ग्राफ का एक उपविभाजन हो, तो यह असमतलीय होता है। उदाहरण के लिए चित्र 24(क) का ग्राफ़ असमतलीय है क्योंकि यह उपग्राफ़ के रूप में K_5 का एक उपविभाजन (जिसे बिन्दुकित रेखाओं से दिखाया गया है) आविष्ट करता है जो कि एक असमतलीय है।



चित्र 24

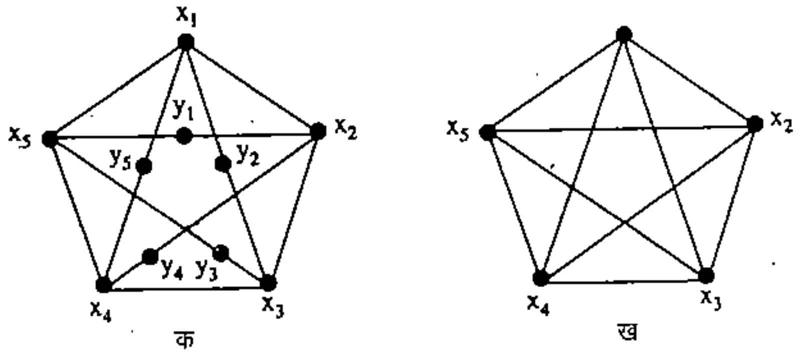
चित्र 24 के ग्राफ़ की असमतलता सिद्ध करने के लिए क्या यह एक परिघटना ही नहीं हैं कि इसका एक उपग्राफ के रूप में K_5 का एक उपविभाजन होता है ? इसका उत्तर है 'नहीं'। कुरातोवस्की–प्रमेय (जिसका कथन नीचे दिया गया है) के अनुसार असमतलीय ग्राफ़ को एक ऐसा उपग्राफ आविष्ट करना होता है जो कि K_5 या $K_{3,3}$ का एक उपविभाजन होता है। अतः असमतलीय ग्राफ़ों (या उनके उपविभाजनों) का पता लगाने के लिए हमें केवल इन दो ग्राफ़ों तक ही अपने को सीमित कर सकते हैं।

अब हम कुरातोवस्की–प्रमेय का कथन नीचे दे रहे हैं।

प्रमेय 6 : ग्राफ़ G असमतलीय होता है यदि और केवल यदि यह उप-ग्राफ़ के रूप में K_5 या $K_{3,3}$, के एक उपविभाजन को आविष्ट करता हो।

आइए अब हम एक उदाहरण लेकर देखें कि असमतलता को सिद्ध करने के लिए इस प्रमेय का प्रयोग किस प्रकार किया जा सकता है।

उदाहरण 12: दिखाइए कि ग्रोच-ग्राफ़ (देखिए चित्र 4) असमतलीय है।



चित्र 25: ग्रोच-ग्राफ़ की असमतलता

हल : कुरातोवस्की–प्रमेय से हम यह जानते हैं कि हमे एक ऐसे उपग्राफ़ का पता लगाना होता है जो K_5 या $K_{3,3}$ का एक उपविभाजन हो। परन्तु, इस स्थिति में, हमें इन दो में से किसे देखना चाहिए ? ध्यान रहे कि ग्राफ़ का उपविभाजन ग्राफ़ के किसी भी शीर्ष के कोटि प्रभावित नहीं करता; इससे केवल कोटि 2 वाले नए शीर्ष आविष्ट हो जाते हैं।

अतः, यदि हमारे ग्राफ़ में K_5 का एक उपविभाजन आविष्ट हो, तो इसमें कोटि 4 वाले कम से कम 5 शीर्ष अवश्य आविष्ट होंगें। यदि इसमें $K_{3,3}$ का एक उपविभाजन आविष्ट हो, तो इसमें कोटि 3 वाले कम से कम छह शीर्ष अवश्य आविष्ट होंगें। आइए पहले हम यह देख लें कि हमारे ग्राफ़ में $K_{3,3}$ का एक उपविभाजन आविष्ट है या नहीं। ग्रोच–ग्राफ़ में कोटि 3 वाले केवल पांच शीर्ष अर्थात् y_1, y_2, y_3, y_4 आविष्ट हैं। अतः यह $K_{3,3}$ का एक उपविभाजन आविष्ट नहीं कर सकता। इसलिए आइए हम यह देखें कि यह K_5 के एक उपविभाजन को आविष्ट करता है या नहीं। K_5 में कोटि 4 वाले पांच शीर्ष आविष्ट हैं। ग्रोच–ग्राफ़ में भी कोटि 4 वाले 5 शीर्ष अर्थात् x_1, x_2, x_3, x_4 और x_5 आविष्ट हैं। आइए हम z से लेबलित मध्य शीर्ष को हटा दें। ऐसा करने पर हमें चित्र 25(क) में दिया गया ग्राफ़ प्राप्त होता है। और, जैसा कि आप देख सकते हैं x_1x_3, x_2x_4, x_2x_5, x_3x_5 और x_1x_5 में कोटि 2 वाले शीर्ष बढ़ाकर चित्र 25(ख) में K_5 से इसे प्राप्त किया जा सकता है। अतः यह असमतलीय होगा।

* * *

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए।

E17) दिखाइए कि पेटर्सन–ग्राफ़ असमतलीय है। (संकेतः दो क्षैतिज कोरों को हटाने पर प्राप्त ग्राफ़ लीजिए)।

अगले भाग में हम मानचित्र रंजन समस्या पर चर्चा करेंगें। यहां हम यह दिखाएगें कि इस समस्या को समतलीय मानचित्रों का रंजन करने की समस्या में परिवर्तित किया जा सकता है। यहां हम यह भी दिखाएंगें कि किसी भी समतलीय मानचित्र को पांच रंगों से रंगा जा सकता है।

13.4 मानचित्र रंजन समस्या

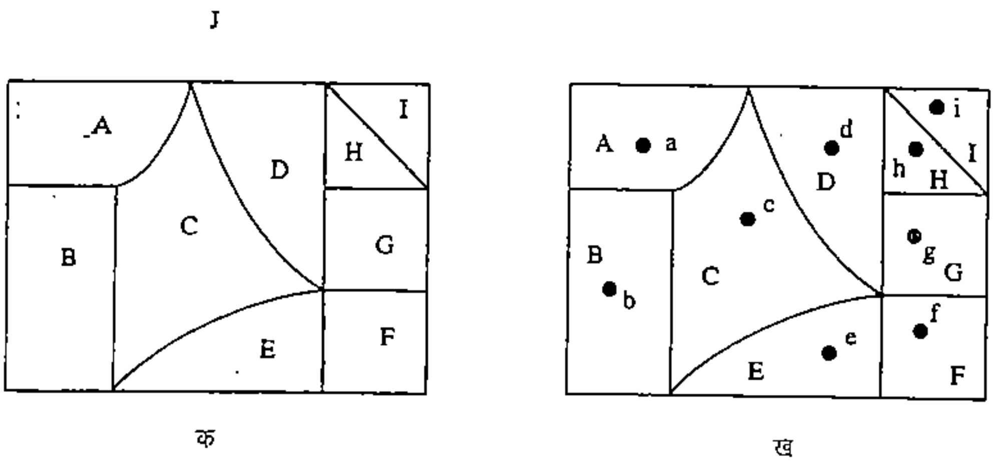
चतुर्वर्ण समस्या यह है कि क्या किसी भी मानचित्र को 4 रंगों से रंगा जा सकता है। इस भाग का प्रारंभ हम चतुर्वर्ण समस्या के इतिहास के बारे में संक्षिप्त चर्चा करके करेंगें। इसके बाद हम यह दिखाएगें कि एक दिए हुए मानचित्र के संगत एक समतलीय ग्राफ़ की रचना किस प्रकार की जाए जिससे कि ग्राफ़ को रंगने का अर्थ मानचित्र को रंगना हो। अतः यदि हम यह सिद्ध कर दें कि किसी भी समतलीय मानचित्र को चार रंगों से रंगा जा सकता है, तो इसके साथ यह भी सिद्ध हो जाएगा कि किसी भी मानचित्र को चार रंगों से रंगा जा सकता है। एपल और हेकन ने 1979 में

यह सिद्ध किया था कि समतलीय ग्राफ़ों को रंगने के लिए चार रंग पर्याप्त होते हैं। इस तरह, अब चतुर्वर्ण समस्या हल हो गई है। इसके लिए उन्होंने उस समय उपलब्ध कुछ तीव्रतम कंप्यूटरों का लगभग 1200 घंटे कंप्यूटर समय का प्रयोग किया। इससे उपपत्ति की जटिलता का आभास हो जाता है। इस पाठ्यक्रम में हम इसकी उपपत्ति नहीं देगें। परन्तु हम अपेक्षाकृत दुर्बल परिणाम को अर्थात् किसी भी समतलीय ग्राफ़ को रंगने के लिए पांच रंग पर्याप्त होते है, सिद्ध करेंगें। आइए अब थोड़ा सा इतिहास पर ध्यान दें।

फ्रांसिस गुथ्री ने अपने भाई फ्रेड्रिक गुथ्री, जो कि उस समय विश्वविद्यालय कालेज, लंदन का एक विद्यार्थी था, के जरिए चतुर्वर्ण समस्या को द मार्गा के पास भेजा। पहले यह समस्या प्रकाशित रूप में तब प्रकाश में आई जबकि 1879 में कैली ने रॉयल जियोग्राफिकल सोसाइटी में इस समस्या पर एक लेख प्रकाशित किया। इस लेख में उसने यह बताया है कि इस समस्या को हल करने में कहां-कहां कठिनाइयाँ आती हैं। उसी वर्ष ए.बी. केम्पे ने अमरीकी गणित पत्रिका (American Journal of Mathematics) में प्रमेय की एक उपपत्ति प्रकाशित की। परन्तु, 1890 में पी. जे. हेवुड ने केम्पे की उपपत्ति में एक गलती निकाल ली। उसने यह भी दिखाया कि उपपत्ति में आपरिवर्तन करके यह दिखाया जा सकता है कि किसी भी मानचित्र को रंगने के लिए पांच रंग पर्याप्त हैं। तब से जी. डी. बिर्काफ, वेब्लेन, आर, फ्रेंक्लिन जैसे अनेक गणितज्ञ इस समस्या के हल में अपना योगदान देते आए है। अंततः 1979 में एपल और हेंकल ने इस समस्या को हल कर ही लिया।

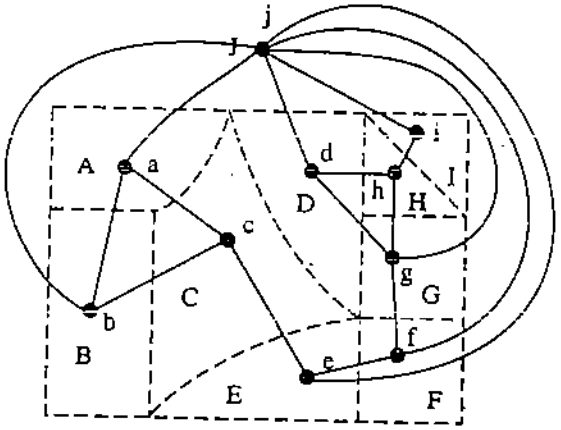
अब हम यह दिखाएगें कि किस एक दिए हुए मानचित्र के संगत एक समतलीय ग्राफ़ की रचना की जाए जिससे कि ग्राफ़ के शीर्षो को रंगने का अर्थ मानचित्र को रंगना हो।

नीचे चित्र 26(क) में दिये गये मानचित्र पर ध्यान दीजिए। इस मानचित्र में 10 प्रदेश A, B, C, D, E, F, G, H, I और J हैं जिनमें बाह्य प्रदेश भी सम्मिलित है। इस मानचित्र में हम मानचित्र के प्रत्येक प्रदेश के संगत एक शीर्ष बढ़ा देते हैं। (देखिए चित्र 26(ख))। ध्यान दीजिए कि हमने बाह्य प्रदेश, अर्थात् J के संगत एक शीर्ष बढ़ाया है।



चित्र 26

यदि संगत प्रदेशों की एक सर्वनिष्ठ कोर हो तो हम दो शीर्षों को मिला देते हैं। उदाहरण के लिए हमने a और c को मिला दिया है, क्योंकि इनकी एक सर्वनिष्ठ परिसीमा है। (देखिए नीचे दिया गया चित्र 27)



चित्र 27

हमने शीर्षों a और e को मिलाया इसलिए नहीं, क्योंकि इनकी कोई सर्वनिष्ठ सीमा नहीं है। हम उस स्थिति में दो शीर्षों को नहीं मिलाते हैं जबकि संगत प्रदेशों के बीच बिन्दु तो केवल एक हो परन्तु परिसीमा एक न हो। उदाहरण के लिए, इसी कारण से हमने c और g को एक कोर से नहीं मिलाया है। जैसा कि आप यहां यह देख सकते हैं कि ऐसा करने पर हमें एक समतलीय ग्राफ़ प्राप्त होता है और ग्राफ़ को रंगने का अर्थ मानचित्र को रंगना है। (यहां हम यह मान लेते हैं कि मानचित्र के बाह्य प्रदेश को एक रंग से ही रंगा गया है।) अतः चतुर्वर्ण समस्या को इस प्रकार प्रस्तुत किया जा सकता है :

क्या किसी भी समतलीय ग्राफ को चार रंगों से रंगना संभव है ? इस प्रश्न का उत्तर निम्नलिखित प्रमेय से प्राप्त हो जाता है।

प्रमेय 7 [एपल-हेकेन] (1979) : किसी भी समतलीय ग्राफ़ को चार रंगों से रंगा जा सकता है।

जैसा कि प्रस्तावना में हम बता चुके हैं कि हम इस प्रमेय को यहां सिद्ध नहीं करेंगे। क्या हम सदा तीन रंगों से ऐसा कर सकते हैं ? इसका उत्तर है 'नहीं'। जैसा कि हमने देखा है कि K_4 (यह चतुष्फलक के संगत एक ग्राफ़ है) समतलीय है, परन्तु इसे तीन रंगों से नहीं रंगा जा सकता। अतः प्रमेय 7 में हम परिणाम में कोई सुधार नहीं ला सकते।

अब हम एक ऐसा परिणाम सिद्ध करेंगे जिसका प्रयोग पांच वर्ण प्रमेय की उपपत्ति में किया जाएगा।

प्रमेय 8 : प्रत्येक समतलीय ग्राफ़ G के लिए न्यूनतम कोटि $\delta(G)$ अधिक से अधिक 5 होता है।

उपपत्ति : यदि संभव हो, तो मानलीजिए G एक ऐसा समतलीय ग्राफ़ है जिससे कि $\delta(G) \geq 6$. परन्तु, प्रमेय 5 के अनुसार

$$\therefore \quad 6p \leq \sum_{n} d_G(x) = 2q \leq 6p - 12.$$

जो कि असंभव है। अतः $\delta(G) \leq 5$.

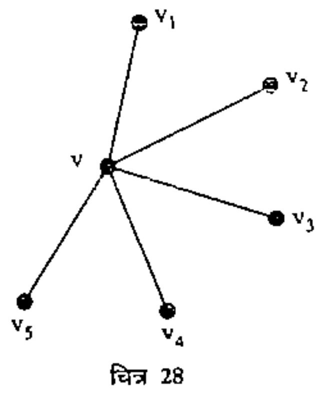
अब हम पंचवर्ण प्रमेय को सिद्ध कर सकते हैं।

प्रमेय 9 : प्रत्येक समतलीय ग्राफ़ 5-रंजनीय होता है।

उपपत्ति : मानलीजिए G, p शीर्षो पर एक समतलीय ग्राफ है। हम p पर आगमन–नियम लागू करके इस प्रमेय को सिद्ध करेंगे। यदि $p \leq 5$, तो स्पष्ट है कि यह प्रमेय सत्य है। अब, मानलीजिए कि $(p-1)$ शीर्षों वाला, जहां $p > 1$, प्रत्येक समतलीय ग्राफ़ 5-रंजनीय है। प्रमेय 8 के अनुसार $\delta(G) \leq 5$. मान लीजिए v, G का एक ऐसा शीर्ष है जिससे कि $\delta(G) = d_G(v)$। अब $G - v$ लीजिए। आगमन–नियम से यह 5-रंजनीय है। आइए हम $G - v$ का एक 5-रंजन लें। इस रंजन में v के अतिरिक्त अन्य सभी शीर्ष को कोई न कोई रंग अवश्य आवंटित होता है। हमें v के अतिरिक्त अन्य सभी शीर्षों को आवंटित रंगों में परिवर्तन करके और, यदि आवश्यक हो, तो v को कोई रंग आवंटित करके ग्राफ़ G का एक 5-रंजन प्राप्त करना होता है। यदि $d_G(v) < 5$, तो G में v के संलग्न अधिक से अधिक चार शीर्ष होते हैं। अतः कम से कम एक ऐसा रंग $\boxed{i}$ अवश्य होता है जो कि v के किसी भी प्रतिवेश (neighbours) को आवंटित नहीं किया गया होता। v को $\boxed{i}$ आवंटित करने और अन्य शीर्षों को आवंटित किए गए रंगों को बनाए रखने पर हमें G का एक 5-रंजन प्राप्त होता है।

यदि $d_G(v) = 5$, परन्तु G में v के प्रतिवेश केवल चार या इससे भी कम रंगों का उपयोग करते हैं, तो पहले की तरह हम G के 5-रंजन को पूरा कर सकते हैं।

अब, मानलीजिए कि $d_G(v) = 5$ और G में v के प्रतिवेश सभी पांच रंगों का उपयोग करते हैं। यदि आवश्यक हो तो शीर्षों को पुनः अंक देकर के हम यह मान सकते हैं कि शीर्ष v के प्रतिवेश v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 को अंक इस प्रकार दिया गया है कि शीर्ष v_i को रंग $\boxed{i}$ आवंटित किया गया है और इन्हें G के एक समतल रेखाचित्र में v के प्रति व्यवस्थित किया गया हो जैसा कि चित्र 28 में दिखाया गया है :

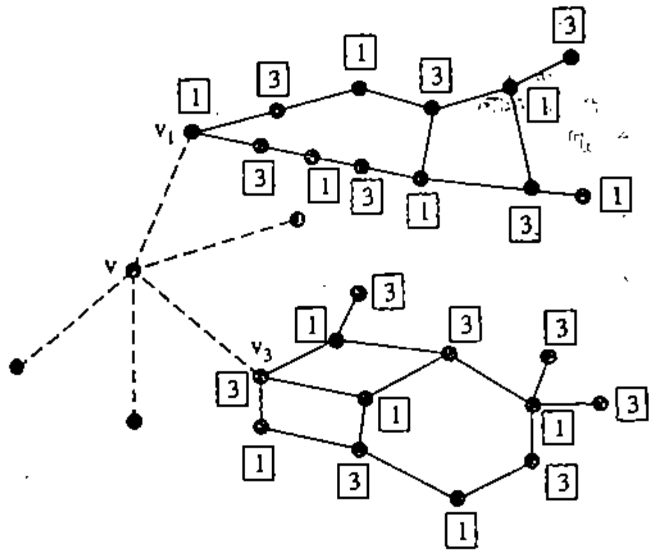


चित्र 28

मानलीजिए $S_1 = \{ x \in V(G) : \boxed{1}$, x को आबंटित किया गया है }

$S_1 \cup S_3$ से प्रेरित G का शीर्ष प्रेरित उपग्राफ $H_{1,3}$ लीजिए।

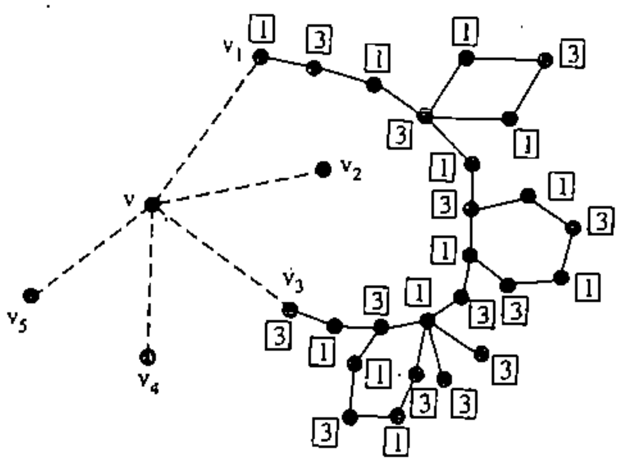
स्थिति 1: यदि शीर्ष v_1 और v_3, $H_{1,3}$ के दो अलग-अलग घटकों के सदस्य हों, तो उस घटक को लीजिए (ग्राफ के घटक की परिभाषा के लिए इकाई 11 देखिए) जिसमें v_1 आविष्ट हो।



चित्र 29

केवल इस घटक में ही रंगों में अदला-बदली कीजिए। दूसरे शब्दों में, उन सभी शीर्षों को जिन्हें $\boxed{3}$ आवंटित किया गया है, रंग $\boxed{1}$ आवंटित कीजिए और उन सभी शीर्षों को जिन्हें $\boxed{1}$ आवंटित किया गया है, $\boxed{3}$ आवंटित कीजिए। इस आपरिवर्तित रंजन में दोनों ही शीर्ष v_1, v_3 को रंग $\boxed{3}$ मिलता है। अब हम शीर्ष v को रंग $\boxed{1}$ आवंटित करके G का 5-रंजन प्राप्त कर सकते है।

स्थिति 2: यदि v_1, v_3 एक ही घटक के सदस्य हों, तो इन्हें मिलाने वाला एक पथ P होता है। रंजन के कारण इस पथ के शीर्षों को v_1 पर रंग $\boxed{1}$ से प्रारंभ करके और v_3 पर रंग $\boxed{3}$ से अंत करके बारी-बारी रंग $\boxed{1}$ और रंग $\boxed{3}$ प्राप्त होगें।



चित्र 30

इसका अर्थ यह है कि P और (v_1v, v_3v) का सम्मिलन एक चक्र C (मानलीजिए) है। v_2 इस चक्र द्वारा सृजित अंतः प्रदेश का सदस्य होता है और शीर्ष v_4 इस चक्र द्वारा सृजित बाह्य प्रदेश का सदस्य होता है। आपको यह स्मरण रखना चाहिए कि v को छोड़कर इस चक्र के सभी शीर्षों को केवल रंग $\boxed{1}$, $\boxed{3}$ प्राप्त होता है। अब $S_2 \cup S_4$ द्वारा प्रेरित G का शीर्ष प्रेरित उपग्राफ $H_{2,4}$ लीजिए। यदि इस उपग्राफ में v_2 और v_4 को मिलाने वाला एक पथ हो तो इसके शीर्षों के रंग केवल $\boxed{2}$, $\boxed{4}$ होंगे। परन्तु तब इसे चक्र C द्वारा उत्पन्न किए अवरोध को पार करना होता है। यह इसे कहाँ पर पार कर सकता है ? C के सभी शीर्षों के रंग केवल 1, 3 हैं। अतः प्रयोग में लाने

के लिए इनका कोई भी सर्वनिष्ठ शीर्ष नहीं हो सकता। इसका अर्थ यह है कि उपग्राफ़ $H_{2,4}$ में v_2 और v_4 को मिलाने वाला कोई पथ नहीं हो सकता अर्थात् शीर्ष v_2 और v_4, $H_{2,4}$ के अलग-अलग घटकों के सदस्य हैं। $H_{1,3}$ लेने के स्थान पर हम $H_{2,4}$ लेते हैं और स्थिति 1 पर लौटकर G के 5-रंजन को पूरा करते हैं।

इस तरह G, 5-रंजनीय है।

यदि हम ग्राफ़ के शीर्षों को रंग सकते हैं तो हम ग्राफ़ की कोरों को क्यों नहीं रंग सकते ? क्या यह एक रोचक प्रश्न है ? अगले भाग में हम इस प्रश्न का उत्तर देंगें।

13.5 कोर रंजन

इस भाग में हम ग्राफ़ की कोरों को इस तरह रंगने की समस्या पर विचार करेगें जिससे कि किन्हीं भी दो संलग्न कोरों को समान रंग प्राप्त न हो। यहां हम इस विषय के किसी भी महत्त्वपूर्ण परिणाम को सिद्ध नहीं करेंगे, यद्यपि इनमें से कुछ का कथन यहां हम अवश्य देगें। इस भाग को प्रस्तुत करने का उद्देश्य कोर रंजन के संबंध में एक संक्षिप्त जानकारी देना है। सबसे पहले हम कोर रंजन को परिभाषित करेंगें।

परिभाषा : ग्राफ़ G का **k-कोर** रंजन G के प्रत्येक कोर को k रंगों का आवंटन इस प्रकार करना है जिससे कि समान शीर्ष पर आपतित कोई भी दो कोर समान रंग के न हों। एक ग्राफ़ **k-कोर रंजनीय** होता है यदि एक k-कोर रंजन होता हो। ग्राफ़ को रंगने के लिए आवश्यक रंगों की **न्यूनतम** संख्या को G की **कोर वर्णिक संख्या** (edge chromatic number) कहा जाता है, जिसे प्रायः $\chi'(G)$ से प्रकट किया जाता है।

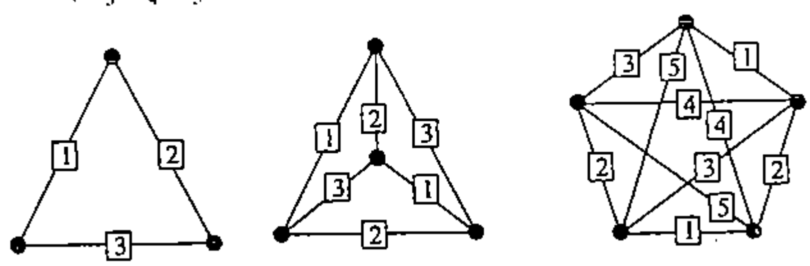
आइए अब हम कोर-रंजन से संबंधित कुछ उदाहरण लें। इसकी सरलतम स्थिति उन ग्राफ़ों का कोर-रंजन हैं जिनकी कोर वर्णिक संख्या 1 है।

उदाहरण 13 : वे सभी ग्राफ़ ज्ञात कीजिए जिनकी कोर-वर्णिक संख्या 1 है।

हल : मानलीजिए ग्राफ़ G की कोर-वर्णिक संख्या 1 है। क्योंकि कोर-वर्णिक संख्या 1 है इसलिए ग्राफ़ 1-कोर रंजनीय होगा और कोई दो कोरों का एक अंत्य शीर्ष नहीं होगा अर्थात् ग्राफ़ कुछ वियुक्त शीर्षों और कुछ परस्पर असंयुक्त कोरों का सम्मिलन होगा। विलोमतः उन ग्राफ़ों की, जो वियुक्त शीर्षों और परस्पर असंयुक्त कोरों का सम्मिलन है, कोर-वर्णिक संख्या 1 होती है।

* * *

उदाहरण 14 : ग्राफ़ों K_3, K_4, K_5 की कोरों को रंगिए।



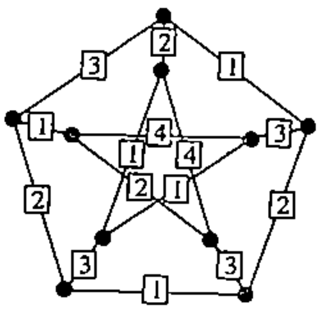
चित्र 31

K_3, K_4, K_5 का रंजन चित्र 31 में दिया गया है। यहां किन्हीं भी दो संलग्न कोरों को समान रंग प्राप्त नहीं हुआ है। सभी स्थितियों में कम से कम संभव रंगों का प्रयोग किया है।

* * *

उदाहरण 15 : पेटर्सन ग्राफ़ का एक कोर-रंजन दीजिए।

हल : चित्र 32 में पेटर्सन ग्राफ़ का एक 4-कोर रंजन दिया गया है।



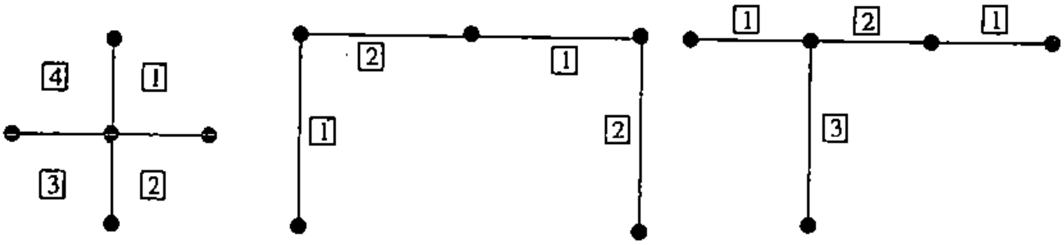
चित्र 32

यहां भी किन्हीं दो संलग्न कोरों को समान रंग प्राप्त नहीं हुआ है। आप तुरन्त यह देख सकते हैं कि इस रंजन के लिए तीन रंग पर्याप्त नहीं होगें।

* * *

उदाहरण 16 : 5 शीर्षों पर सभी वृक्षों का कोर-रंजन दीजिए।

हल : यहां पांच शीर्षों पर सभी वृक्षों के कोर-रंजन दिए गए हैं।

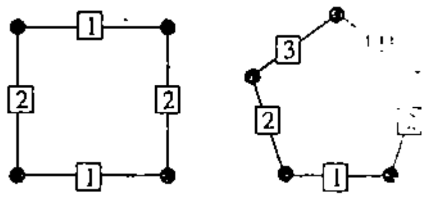


चित्र 33

यहां भी हमने कम से कम संभव संख्या में रंगों का प्रयोग किया है और किन्हीं भी दो संलग्न शीर्षों को समान रंग प्राप्त नहीं हुआ है।

* * *

उदाहरण 17 : C_n की कोर-वर्णिक संख्या ज्ञात कीजिए।



चित्र 34

हल : शीर्ष-रंजन वाली स्थिति की तरह यदि n सम है तो कोर-वर्णिक संख्या 2 होगी। हम दो रंगों से कोरों को बारी-बारी रंग सकते हैं। यदि n विषम है, तो कोर-वर्णिक संख्या 3 होगी। इसे हमने चित्र 34 में C_4 और C_5 के संबंध में प्रदर्शित किया है।

* * *

यदि G एक ग्राफ हो और $v \in V(G)$ जिससे कि $d_G(v) = \Delta(G)$, तो v पर आपतित सभी कोरों को अलग-अलग रंग प्राप्त होगा। अतः G के किसी कोर-रंजन में कम से कम $\Delta(G)$ रंगों की आवश्यकता होगी, अर्थात्

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \qquad (3)$$

$\chi'(G)$ के उपरि परिबंध के संबंध में वाइजिंग ने 1964 में निम्नलिखित परिणाम सिद्ध किया।

प्रमेय 10 : किसी भी ग्राफ़ G के लिए

$$\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \qquad (4)$$

(3) और (4) से हमें यह प्राप्त होता है

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1 \qquad (5)$$

(5) से यह पता चलता है कि ग्राफ़ G की कोर वर्णिक संख्या की केवल दो संभावनाएं हैं या तो $\Delta(G)$ या $\Delta(G)+1$. इस तरह यह परिणाम सभी ग्राफ़ के समुच्चय को दो वर्गों में विभाजित कर देता है। ग्राफ़ G को वर्ग 1 का सदस्य माना जाता है, यदि $\chi'(G) = \Delta(G)$ और वर्ग 2 का सदस्य माना जाता है, यदि $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. तब प्रायः हम यह कहते हैं कि G वर्ग 1 ग्राफ़ है या G वर्ग 2 ग्राफ़ है। ग्राफ़ का वर्ग ज्ञात करने से संबंधित समस्या को **वर्गीकरण समस्या** (classification problem) कहा जाता है। अब हम इस दिशा में ज्ञात कुछ परिणामों पर चर्चा करेंगें।

प्रमेय 11 : K_n की कोर-वर्णिक संख्या n होती है यदि यह विषम ($\neq 1$) हो और $n-1$ होती है यदि यह सम हो।

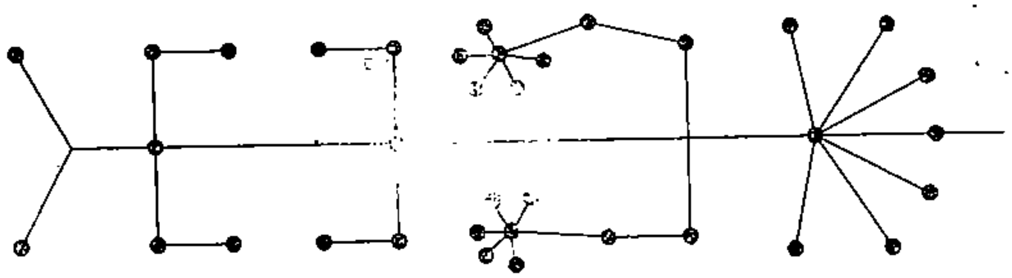
आपको याद होगा कि K_n, $(n-1)$ नियमित है। इसलिए $\Delta(K_n) = n-1$. अतः K_n वर्ग 1 का सदस्य होता है, यदि n सम हो और वर्ग 2 का सदस्य होता है, यदि यह विषम हो।

द्विभाजित ग्राफ़ों के संबंध में 1916 में कोनिग ने यह सिद्ध किया था कि $\chi'(G) = \Delta(G)$, दूसरे शब्दों में यह एक वर्ग 1 ग्राफ़ है।

1977 में डॉ एर्डास और विल्सन ने यह सिद्ध किया था कि यदि यदृच्छया चयन किए गए n शीर्षों वाले ग्राफ़ का वर्ग 1 का सदस्य होने की प्रायिकता p(n) हो, तो $n \to \infty$ होने पर $p(n) \to 1$ अर्थात् लगभग सभी ग्राफ़ वर्ग 1 के सदस्य होते हैं। फिर भी, वर्ग 2 वाले ग्राफ़-परिवार काफी होते हैं।

E18) $K_{m,n}$ की कोर-वर्णिक संख्या क्या है ?

E19) निम्नलिखित वृक्ष T लीजिए।



चित्र 35

एक स्पष्ट $\Delta(T) - T$ का रंजन दीजिए।

अब हम इस इकाई को यहीं समाप्त कर रहे हैं।

अतः इस इकाई में हमने जो कुछ पढ़ा है, आइए उसका संक्षिप्त विवरण यहां हम दे दें।

13.6 सारांश

इस इकाई में आपने निम्नलिखित शब्दों को परिभाषित किया है :

1. **ग्राफ़ का शीर्ष रंजन :** एक ग्राफ़ का शीर्ष-रंजन शीर्षों को रंग इस तरह आबंटित करता है जिससे कि किन्हीं भी दो संलग्न शीर्षों को समान रंजन प्राप्त न हो।

2. **ग्राफ़ की शीर्ष वर्णिक संख्या :** किसी ग्राफ़ की वर्णिक संख्या ग्राफ़ को रंगने के लिए आवश्यक रंगों की न्यूनतम संख्या होती है।

3. **रंजन का वर्ण वर्ग :** रंजन के प्रत्येक रंग के संबंध में उन सभी शीर्षों का समुच्चय जिन्हें उस रंग से रंगा गया है, उस रंग का वर्ण-वर्ग होता है।

4. **स्वतंत्र समुच्चय :** शीर्ष-समुच्चय का उपसमुच्चय स्वतंत्र है यदि उपसमुच्चय में कोई दो शीर्ष जो संलग्न न हो।

5. **समतलीय ग्राफ़** : ग्राफ़ समतलीय होता है, यदि एक ऐसा समतल रेखाचित्र हो जिसमें कोई भी दो कोर शीर्षों को छोड़कर अन्य कही भी एक-दूसरे को क्रांसित न करती हो।

6. **ग्राफ़ का उपविभाजन** : ग्राफ़ G_2 एक अन्य ग्राफ़ G_1 का उपविभाजन होता है, यदि वर्तमान कोरों पर दो कोटि वाले शीर्ष बढ़ाकर इसे G_1 से प्राप्त किया जा सकता हो।

7. **ग्राफ़ का कोर-रंजन** : ग्राफ़ का कोर-रंजन कोरों को इस तरह रंग आबंटित करता है जिससे कि समान शीर्ष पर आपतित किन्हीं भी दो कोरों को समान रंग न दिया गया हो।

8. **ग्राफ़ की कोर-वर्णिक संख्या** : ग्राफ़ की कोर-वर्णिक संख्या ग्राफ़ की कोरों को रंगने के लिए आवश्यक रंगों की न्यूनतम संख्या होती है।

9. **वर्ग 1 और वर्ग 2 ग्राफ़** : एक ग्राफ़ वर्ग 1 वाला होता है यदि इसकी कोर-वर्णिक संख्या $\Delta(G)$ हो, और वर्ग 2 वाला होता है, यदि इसकी वर्णिक संख्या $\Delta(G)+1$ हो।

इस इकाई में हमने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है

क) ग्राफ़ की वर्णिक-संख्या के कुछ उपरि परिबंध।

ख) समतलीय ग्राफ़ों का ऑयलर सूत्र जिसका कथन यह है किसी समतलीय ग्राफ़ के लिए शीर्षों की संख्या – कोरों की संख्या + प्रदेशों की संख्या = 2.

ग) समतलीय ग्राफ़ों का कुरातोवस्की अभिलक्षणीकरण जिसके अनुसार कोई ग्राफ़ समतलीय होता है, यदि और केवल यदि यह $K_{3,3}$ या K_5 का कोई उपविभाजन आविष्ट न करता हो।

घ) (उपपत्ति के बिना) चतुर्वर्ण प्रमेय जिसके कथनानुसार किसी भी समतलीय ग्राफ़ को चार रंगों से रंगा जा सकता है।

ङ) (उपपत्ति सहित) पंच वर्ण प्रमेय जिसके कथनानुसार किसी भी समतलीय ग्राफ़ को पांच रंगों से रंगा जा सकता है।

च) किसी ग्राफ़ की कोर-वर्णिक संख्या का वाइजिंग परिबंध अर्थात् $\chi'(G) \le \Delta(G)+1$.

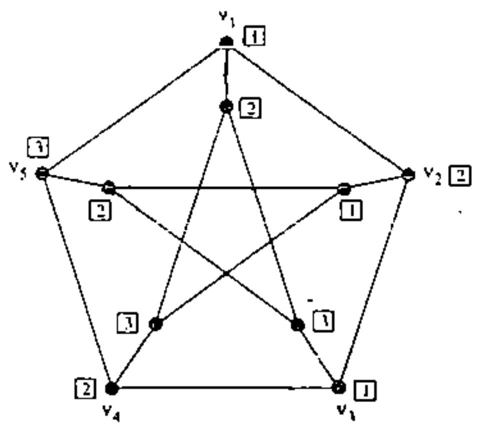
13.7 हल/उत्तर

E1) आपको याद होगा कि द्विभाजित ग्राफ़ वे ग्राफ़ हैं जो कि विषम चक्रों से रहित हैं। वृक्ष अचक्रीय ग्राफ़ हैं अर्थात् ये उपग्राफ़ों के रूप में चक्र आविष्ट नहीं करते। अतः ये द्विभाजित होते हैं। क्योंकि वृक्ष संबद्ध होते हैं, और हमने यह मान लिया है कि इसके कम से कम दो शीर्ष हैं, इसलिए इसकी वर्णिक संख्या 2 है।

E2) सम चक्र उपग्राफ़ों के रूप में विषम चक्र आविष्ट नहीं करते। इसलिए ये द्विभाजित होते हैं। अतः इनकी वर्णिक संख्या 2 है।

E3) एक विषम चक्र की वर्णिक संख्या 3 है। क्योंकि यह द्विभाजित नहीं हैं, इसलिए इसकी वर्णिक संख्या कम से कम 3 होगी। C_{2n+1} का एक 3-रंजन हमें इस प्रकार प्राप्त होता है : मानलीजिए $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2n+1}\}$, C_{2n+1} का शीर्ष समुच्चय है। हम समुच्चय $\{u_i \in V(C_{2n+1}) \mid i$ विषम $1 \le i \le 2n\}$ के सभी शीर्षों को $\boxed{1}$ और समुच्चय $\{v_i \mid i$ सम $2 \le i \le 2n\}$ के सभी शीर्षों को $\boxed{2}$ आवंटित करते हैं। अब, v_{2n+1}, v_1 और v_{2n} दोनों के संलग्न है। अतः हम इस शीर्ष को $\boxed{1}$ या $\boxed{2}$ आबंटित नहीं कर सकते। अतः हम v_{2n+1} को तीसरा रंग $\boxed{3}$ आवंटित करते है।

E4) पेटर्सन-ग्राफ़ का तीन-रंजन नीचे चित्र 36 में दिया गया है :

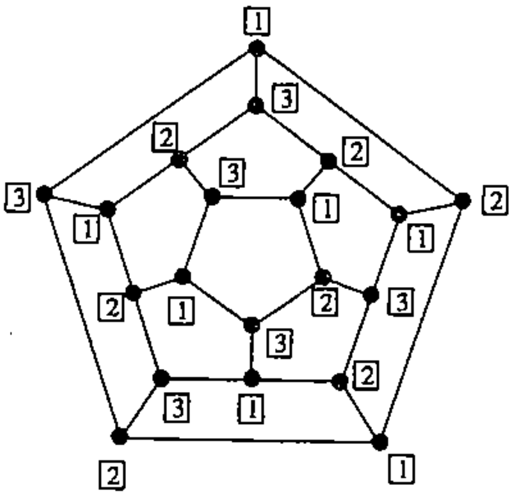


चित्र 36

और, पेटर्सन ग्राफ़ एक 5-चक्र आविष्ट करता है, जिसकी वर्णिक संख्या 3 है।

E5) क्योंकि इसकी वर्णिक संख्या 2 से अधिक है, इसलिए यह द्विभाजित नहीं हो सकता। अतः यह एक विषम चक्र आविष्ट करेगा।

E6) (क) ग्राफ़ का एक 3-रंजन चित्र 37 में दिया गया है :

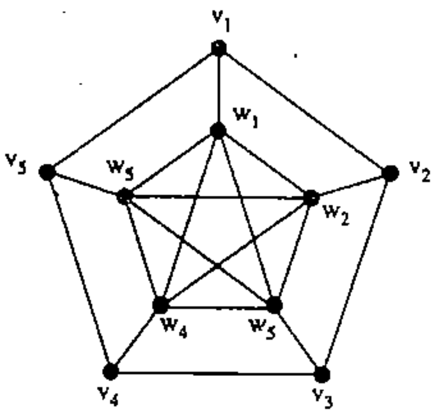


चित्र 37

(ख) इस ग्राफ़ की वर्णिक संख्या 3 है। हम यह देख चुके हैं कि इस ग्राफ़ का एक 3-रंजन है। और, इसके उपग्राफ़ के रूप में लंबाई 5 वाले चक्र हैं और हम यह देख चुके हैं कि विषम लंबाई वाले चक्रों की वर्णिक संख्या 3 होती है।

E7) चित्र 7(क) के ग्राफ़ में v_4, v_5, v_6, v_7 द्वारा प्रेरित ग्राफ़ K_4 है। अतः इसका आमाप 4 वाला एक क्लिक है। इसलिए हमें कम से कम चार रंगों की आवश्यकता होती है। v_1 को $\boxed{1}$, v_2 को $\boxed{2}$, v_3 को $\boxed{3}$, v_4 को $\boxed{2}$, v_5 को $\boxed{3}$, v_6 को $\boxed{1}$ और v_7 को $\boxed{4}$ आबंटित करने पर हमें एक 4-रंजन प्राप्त होता है।

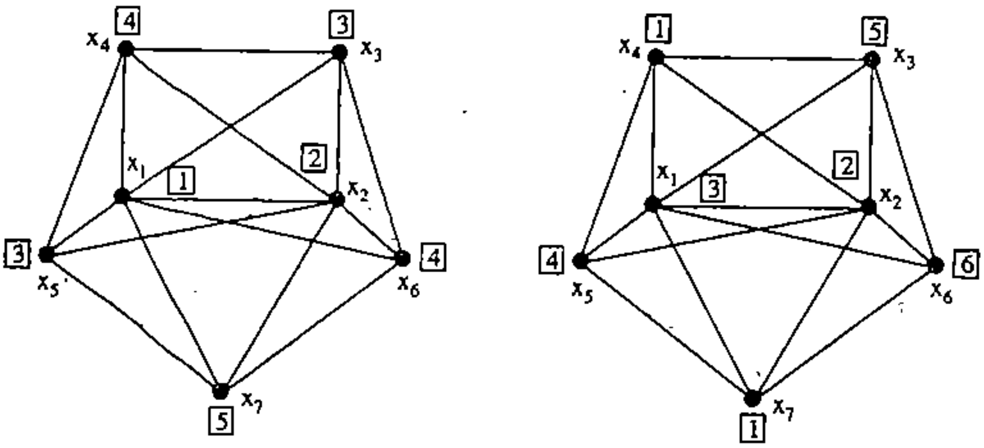
E8) चित्र 38 में दिया गया ग्राफ़ 5-वर्णिक है।



चित्र 38

चित्र 38 का ग्राफ़ आमाप 5 वाला एक क्लिक आविष्ट करता है अर्थात् शीर्षों w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 द्वारा प्रेरित उपग्राफ़। अतः हमें कम से कम 5 रंगों की आवश्यकता होती है। w_i को $\boxed{i}$ आबंटित करके, जहां $1 \leq i \leq 5$, हम सबसे पहले K_5 के तुल्याकारी उपग्राफ़ को एक 5-रंजन प्रदान करते हैं। इसके बाद हम v_1 को $\boxed{2}$, v_2 को $\boxed{3}$, v_3 को $\boxed{1}$, v_4 को $\boxed{2}$ और v_5 को $\boxed{1}$ आबंटित करते हैं।

E9) दो अलग-अलग रंजन चित्र 39 में दिए गए हैं।



चित्र 39

चित्र 39(क) में रंजन के वर्ण-वर्ग $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_7\}$, $\{x_3, x_5\}$, $\{x_4, x_6\}$ हैं। चित्र 39(ख) में रंजन के वर्ण-वर्ग $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4, x_7\}$ और $\{x_5, x_6\}$ हैं।

E10) $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$.

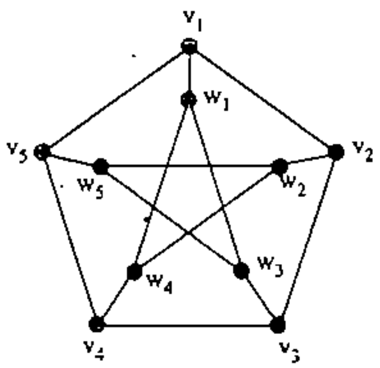
E11) उदाहरण 1 के लिए आप यह देख सकते हैं कि

$\{x_{13}, x_{14}, x_3, x_5, x_7, x_9, x_{11}\}$ एक स्वतंत्र समुच्चय है और किसी अन्य स्वतंत्र समुच्चय में ≤ 7 अवयव है। इस तरह, $\alpha(G) = 7$.

उदाहरण 2 के संबंध में आप यह देखते हैं कि प्रत्येक शीर्ष x_i के लिए G में ठीक-ठीक दो शीर्ष होते हैं जो x_i के संलग्न नहीं होते। परन्तु ये दोनों संलग्न होते हैं। अतः $\alpha(G) = 2$.

E12) K_n से किसी भी एक शीर्ष को हटाने पर हमें K_{n-1} प्राप्त होता है जिसकी वर्णिक संख्या $n-1$ है। मानलीजिए $\{v_1, v_2, v_3, ..., v_n\}$, K_n के शीर्ष समुच्चय को प्रकट करता है। आइए हम K_n से एक कोर हटा दें। यदि आवश्यक हो तो कोरों को पुनः अंक देकर हम यह मान सकते हैं कि हटायी गई कोर $v_1 v_n$ है। तब हमें एक $n-1$ रंजन इस प्रकार प्राप्त होता है : v_1 और v_n दोनों को $\boxed{1}$ आवंटित कीजिए। प्रत्येक v_i के लिए, जहां $2 \leq i \leq n-1$, $\boxed{i}$ आवंटित कीजिए।

E13) यदि हम शीर्षों v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 में से किसी एक को हटा दें (नीचे चित्र 40 देखिए) तो



चित्र 40

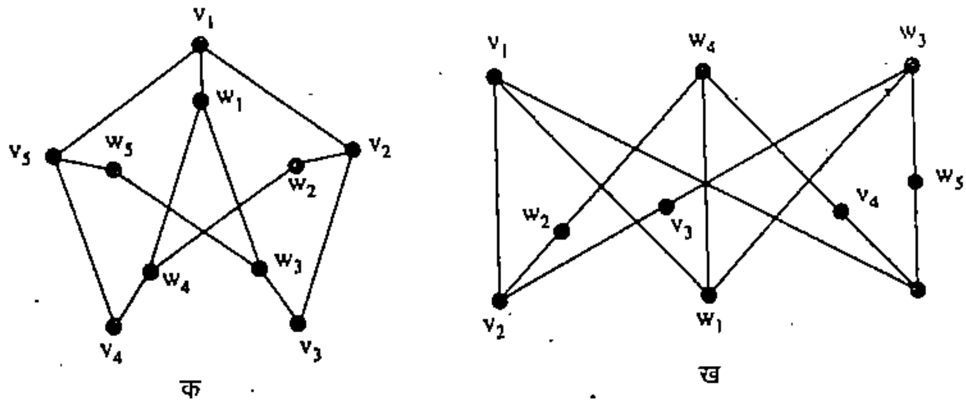
विषम चक्र $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ अप्रभावित रहता है और परिणामी उपग्राफ की वर्णिक संख्या 3 होती है। इसी प्रकार कोरों $v_1 v_2$, $v_2 v_3$, $v_3 v_4$, $v_4 v_5$, $v_5 v_1$ में से किसी एक को हटाने पर प्राप्त ग्राफ की वर्णिक संख्या तीन होती है, क्योंकि यह विषम चक्र $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ आविष्ट करेगा।

E14) चित्र 40 देखिए। विषम चक्र $\{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ एक 3-क्रांतिक उपग्राफ है।

E15) (क) 18 (ख) 7

E16) क्योंकि $K_{3,3}$ द्विभाजित है, इसलिए यहां हम प्रमेय 5 लागू कर सकते हैं। यहां $p = 6$ और $q = 9$. परन्तु $2p - 4 = 10 > 9 = q$. इसलिए $K_{3,3}$ समतलीय नहीं है।

E17) दो क्षैतिज कोरों को हटाने पर प्राप्त ग्राफ़ को चित्र 41(क) में दिखाया गया है।



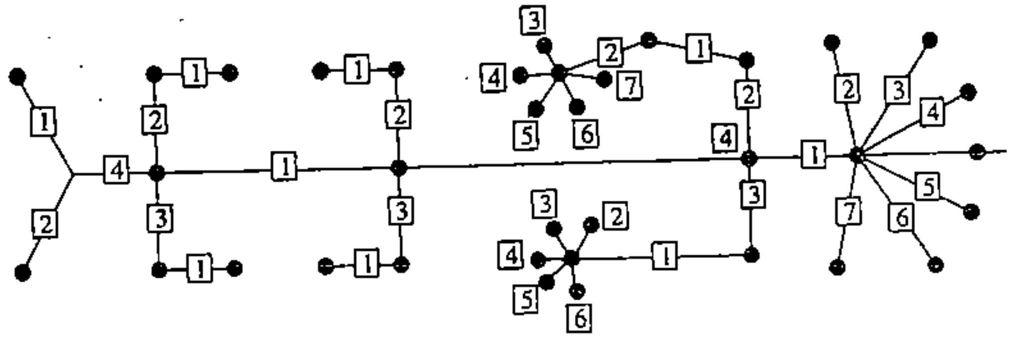
चित्र 41

हमने चित्र 41(क) को चित्र 41(ख) में पुनः खींचा है जिससे कि आप स्पष्ट रूप से यह देख सकें कि यह $K_{3,3}$ का एक उपविभाजन है।

E18) क्योंकि $K_{m,n}$ द्विभाजित ग्राफ़ है, इसलिए कोनिग परिणाम के अनुसार

$$\chi'(K_{m,n}) = \Delta(K_{m,n}) = \text{Min}(m, n).$$

E19) अपेक्षित Δ (T)-रंजन चित्र 42 में दिया गया है, स्मरण रहे कि यह अद्वितीय नहीं होता।



चित्र 42

शब्दावली

आपतित	incident
ग्राफ़	graph
उपग्राफ़	subgraph
कोर	edge
गमन	walk
जनक उपग्राफ़	spanning subgraph
तुल्याकारिता	isomorphism
तुल्याकारी	isomorphic
दिष्ट	directed
नियमित ग्राफ़	regular graph
पथ-चिह्न	trail
पूरक	complementary
प्रतिलिपि	copy
प्रतिवेश	neighbourhood
मिश्र प्रतिचित्र	composite map
शीर्ष	vertex
संलग्न	adjacent
स्वपूरक	self-complementary
पूर्ण	complete
पथ	path
चक्र	cycle
कोटि	degree
प्रेरित	induced
आरेखण	drawings
परिपथ	circuit
घन	cubic
अतिघन	hypercube
उप विभाजन	sub division
क्रांतिक	critical
निकष	criterion
वर्ण-वर्ग	colour class
वर्णिक संख्या	chromatic number
रंजन	colouring
रंजनीय	colourable
समतलीय ग्राफ़	planar graph
अनुरेखण	trace

कलन-विधि	algorithm
कोर-अनुरेखीय	edge-traceable
निलंबी शीर्ष	pendant vertex
भारित ग्राफ़	weighted graph
वियुक्त शीर्ष	isolated vertex
असंबद्ध	disconnected
काट-समुच्चय	cut-set
जनक वृक्ष	spanning tree
द्विभाजित ग्राफ़	bipartite graph
संबद्ध	connected
संबद्धांक	connectivity
सुमेलन	matching