स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उ० प्र० राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

(उत्तर प्रदेश सरकार द्वारा निर्गत अधिनियम संख्या 10, 1999 द्वारा स्थापित)

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM -04
(MATHEMATICS)
प्रारंभिक बीजगणित

प्रथम खण्ड
बहुपद समीकरणों के हल

शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, इलाहाबाद - 211013

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-04
प्रारंभिक बीजगणित

खंड

1

बहुपद समीकरणों के हल

प्रारंभिक बीजगणित

बीजगणित (algebra) पर यह हमारा पहला पाठ्यक्रम है । अंग्रेज़ी शब्द "algebra" अरबी शब्द 'अल-जब्र' से बना है, जिसका प्रयोग अरबी में निम्नलिखित प्रक्रिया के लिए किया जाता है :

यदि किसी समीकरण के एक पक्ष या दोनों पक्षों में ऋणात्मक पद हो, तो उसे दूसरे पक्ष में ले लिया जाता है, जिससे कि सभी पद धनात्मक हो जाएं ।

निस्संदेह जैसा कि आप अपने पिछले अध्ययन से जानते हैं, बीजगणित में और भी बहुत कुछ होता है । सदियों से गणितज्ञों ने ज्ञान का एक विशाल भंडार बना रखा है । इसके एक छोटे से ही उस अंश से हम आपको परिचित कराना चाहते हैं जो गणित के दूसरे पाठ्यक्रमों के अध्ययन के लिए आधार का काम करता है । उस स्थिति में भी यह आपके लिए उपयोगी सिद्ध हो सकता है जबकि आप अन्य क्षेत्रों के प्रश्नों को हल करने के लिए गणित को लागू कर रहे होते हैं ।

इस पाठ्यक्रम के शुरू में हम आपका परिचय समुच्चयों की आधारभूत संकल्पना से कराएंगे, जिसकी उत्पत्ति 20वीं शताब्दी में हुई थी । इसके बाद हम आपको 16वीं और 17वीं शताब्दी में ले जाएंगे, जब यूरोप के गणितज्ञ बीजगणित में बहुत बड़े खोज कर रहे थे । इसी काल में ही कुछ इटली के गणितज्ञों ने घात 3 और घात 4 वाले बहुपद समीकरणों को हल करने की विधियों का पता लगाया था । इसी कार्य के दौरान ही संमिश्र संख्या उत्पन्न हुई । इकाई 2 में हम संमिश्र संख्याओं के बारे में चर्चा करेंगे ; और इकाई 3 में हम ऊपर बताए गए इटली के गणितज्ञों के काम के बारे में चर्चा करेंगे ।

पाठ्यक्रम के दूसरे खंड में हम आपका परिचय एकघात समीकरणों के सिद्धांत से कराएंगे जिससे कि प्राचीन भारतीय, मिस्री और बेबीलोनियाई गणितज्ञ परिचित थे । तक्षशिला के निकट पायी गई बख़्शाली पांडुलिपि (लगभग चौथी सदी ई.) में एकघात समीकरणों से संबंधित अनेक श्लोक मिले हैं । हम एकघात समीकरण तथा अनेक एकघात समीकरणों के सामान्य हल प्राप्त करने के लिए तीन विधियों पर चर्चा करेंगे । इनमें से एक विधि महान गणितज्ञ गाउस की देन है । गणितज्ञ क्रेमर द्वारा प्रस्तुत की गई एक और विधि में सारणिकों की संकल्पना का प्रयोग होता है । हम इस संकल्पना पर और क्रेमर विधि पर चर्चा करेंगे । हमने अपने रैखिक बीजगणित के पाठ्यक्रम में समीकरण निकायों के बारे में और गहराई से चर्चा की है ।

इस पाठ्यक्रम की अंतिम इकाई में हम सुपरिचित और अधिक प्रयोग होने वाली असमिकाओं के बारे में बताएंगे । इनमें से कुछ असमिकाओं का ज्ञान प्राचीन गणितज्ञों . था, और कुछ असमिकाओं को 19वीं शताब्दी में विकसित किया गया था । हम इन पर और इनके कुछ अनुप्रयोगों पर चर्चा करेंगे ।

अब, कुछ शब्द इस पाठ्यक्रम को प्रस्तुत करने के तरीके पर । इस पाठ्यक्रम में दो खंड हैं । प्रत्येक खंड में पहले हमने आपको खंड से परिचित कराया है और फिर उस खंड में प्रयोग होने वाले प्रतीकों की सूची दी है । इसके बाद हमने खंड की इकाइयों को प्रस्तुत किया है । प्रत्येक इकाई के पाठ के बीच-बीच में हमने कुछ प्रश्न दिए हैं । ये प्रश्न इसलिए दिए गए हैं कि आप स्वयं यह जांच कर लें कि उस भाग या उपभाग में बतायी गई बातों को आपने अच्छी तरह से समझ लिया है या नहीं । हमने इकाई के अंत में प्रश्नों के उत्तर भी दिए हैं ।

प्रत्येक खंड के अंत में हमने खंड में बतायी गई बातों से संबंधित एक विविध प्रश्नावली दी है । इन प्रश्नों को हल करने से एक तो आपको कुछ अभ्यास हो जाएगा, और दूसरा यह कि इस पाठ्यक्रम में बतायी गई बातों को आप और अच्छी तरह से समझ सकेंगे । हालांकि यह आवश्यक नहीं है कि आप इन्हें हल करें ।

खंड 1 की एक विशेषता है एक **परिशिष्ट** जिसमें प्रायः प्रयोग होने वाले कुछ प्रतीक और उपपत्ति की विधियाँ दी गई हैं । इस परिशिष्ट में दी गई बातों से आपको इस पाठ्यक्रम या गणित के किसी अन्य पाठ्यक्रम के अध्ययन में काफ़ी सहायता मिल सकती है ।

अब हमारे संकेतन पर दो शब्द । प्रत्येक इकाई को कुछ भागों में बाँटा गया है, और भागों को कभी-कभी उपभागों में बाँटा गया है । इकाई में भागों / उपभागों को प्रश्नों तथा महत्वपूर्ण समीकरणों की तरह अनुक्रम में रखा गया है । क्योंकि अलग-अलग इकाइयों की शिक्षण सामग्री

एक दूसरे से काफ़ी संबद्ध है, इसलिए हमने जगह-जगह पर संकेत दिया है कि आप कौन से भाग के किस हिस्से को दोबारा देखें। इस संबंध में **संकेत भाग x.y का अर्थ होगा इकाई x का भाग y।**

इस पाठ्यक्रम का एक और हिस्सा है इसका सत्रीय कार्य जिसे करना ज़रूरी है। आपके शैक्षिक परामर्शदाता इसका मूल्यांकन करेंगे और विस्तृत टिप्पणियों के साथ उसे आपके पास वापस भेज देंगे। इस तरह सत्रीय कार्य शिक्षण और मूल्यांकन दोनों में सहायक है।

जो पाठ्यक्रम सामग्री हमने आपके पास भेजी है वह अपने आप में पर्याप्त है। यदि किसी भाग को समझने में आपको कोई कठिनाई हो, तो आप अपने शैक्षिक परामर्शदाता से मदद ले सकते हैं। और, यदि आप किसी विषय को ज़्यादा गहराई में पढ़ना चाहते हैं, तो आप निम्नलिखित किताबों को पढ़ सकते हैं :

1. इंटरमीडियट बीजगणित, आर.एस. अग्रवाल, एस. चांद।
2. Higher Algebra by Hall and Knight, Book Palace, 1991.

इन पुस्तकों को आप अपने अध्ययन केन्द्र पर पढ़ सकते हैं।

आशा है कि इस पाठ्यक्रम को पढ़कर आपको खुशी होगी।

खंड 1 बहुपद समीकरणों के हल

सदियों से संख्याओं की संकल्पना गणित की एक आधारभूत संकल्पना रही है। लेकिन 20वीं शताब्दी के गणितज्ञों ने एक अन्य अति आधारभूत संकल्पना, समुच्चय की संकल्पना को विकसित किया है। किसी भी गणितीय अध्ययन में समुच्चयों और उनकी संक्रियाओं का प्रयोग अवश्य होता है। अतः उचित है कि हम इस पाठ्यक्रम को समुच्चयों की एक इकाई से शुरू करें।

शायद आप जानते हों कि विभिन्न गणितज्ञों ने आवश्यकता पड़ने पर ऋणात्मक संख्याओं, भिन्नों और वास्तविक संख्याओं (जैसे $\sqrt{2}$) को रूप दिया। इकाई 2 में हम एक और आवश्यकता के बारे में चर्चा करेंगे जिसकी वजह से एक नई प्रकार की संख्या, अर्थात् संमिश्र संख्या का जन्म हुआ। हम संमिश्र संख्या को एक द्विपद के रूप में और एक क्रमित युग्म के रूप में परिभाषित करेंगे। हम संमिश्र संख्याओं के बीजगणित पर भी चर्चा करेंगे।

अपने पिछले गणितीय अध्ययन में घात 1 और घात 2 वाले बहुपद समीकरणों से आपका परिचय हुआ होगा। इकाई 3 में हम उनकी परिभाषाओं और हल समुच्चयों पर फिर से संक्षेप में चर्चा करेंगे। इसके बाद हम घात 3 और 4 वाले बहुपद समीकरणों के हल प्राप्त करने की विधियों पर चर्चा करेंगे। ये विधियाँ 16 वीं शताब्दी के अनेक गणितज्ञों की देन हैं और आज भी सही हल प्राप्त करने के लिए इन्हें लागू किया जाता है।

इन इकाइयों के बाद हमने इस खंड में पढ़ाई गई विषयों से संबंधित एक विविध प्रश्नावली दी है। यूँ तो इन प्रश्नों को हल करना आपकी इच्छा पर निर्भर करता है, पर आप जितने अधिक प्रश्न हल करेंगे आपको उतना ही अधिक लाभ होगा।

खंड के अंत में हमने एक **परिशिष्ट** दिया है जिसमें हमने गणितीय तर्कशास्त्र के बारे में कुछ बताया है। जैसा कि आप जानते हैं, गणितीय अध्ययन का तर्कशक्ति और विचार शक्ति के नियमों से गहरा संबंध है। किसी भी तथ्य को सिद्ध करने या किसी भी प्रश्न को हल करने के लिए तर्कसंगत प्रक्रियाओं का प्रयोग अवश्य करना पड़ता है। संक्षिप्तता के लिए इसमें विभिन्न प्रतीकों का भी प्रयोग किया जाता है। यही कारण है कि हमने सोचा कि ज़्यादा प्रयोग होने वाले कुछ प्रतीकों के बारे में भी हमें संक्षेप में चर्चा करनी चाहिए। हमने परिशिष्ट में ऐसा ही किया है। वहाँ हमने उपपत्ति की कुछ विधियों पर भी चर्चा की है।

जिन बातों का आप इस खंड में अध्ययन करेंगे अगले खंड में उनकी आवश्यकता काफ़ी पड़ेगी। इसलिए आप इस खंड की सभी इकाइयों को ध्यान से पढ़ें।

संकेत और प्रतीक

$\{x \mid x, P$ को संतुष्ट करता है$\}$	ऐसे सभी x का समुच्चय जहां x गुण P को संतुष्ट करता हो
$\mathbf{N}$	प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय
$\mathbf{Z}(\mathbf{Z}^*)$	पूर्णांकों (शून्येतर पूर्णांकों) का समुच्चय
$\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^*)$	परिमेय संख्याओं (शून्येतर परिमेय संख्याओं) का समुच्चय
$\mathbf{R}(\mathbf{R}^*)$	वास्तविक संख्याओं (शून्येतर वास्तविक संख्याओं) का समुच्चय
$\mathbf{C}(\mathbf{C}^*)$	संमिश्र संख्याओं (शून्येतर संमिश्र संख्याओं) का समुच्चय
ϕ	रिक्त समुच्चय
$\in$	का सदस्य है
$\notin$	का सदस्य नहीं है
$\subseteq (\subsetneq)$	का उपसमुच्चय है (का उचित उपसमुच्चय है)
$\not\subseteq$	का उपसमुच्चय नहीं है
$A \cup B$	समुच्चयों A और B का सम्मिलन
$A \cap B$	समुच्चयों A और B का सर्वनिष्ठ
$A \setminus B$	A के उन अवयवों का समुच्चय जो B के अवयव नहीं हैं
A^c	A का पूरक
$A \times B$	A और B का कार्तीय गुणनफल
$\exists$	का अस्तित्व है
$\forall$	सभी के लिए
$\Rightarrow$	निहित है
$\Leftrightarrow$	निहित है और से निहित है (या यदि और केवल यदि)
$< (\leq)$	से कम (से कम या बराबर)
$> (\geq)$	से ज़्यादा (से ज़्यादा या बराबर)
$a \mid b$	a, b को विभाजित करता है
$a \nmid b$	a, b को विभाजित नही करता
$\therefore$	इसलिए
Re z	संमिश्र संख्या z का वास्तविक भाग
Im z	संमिश्र संख्या z का अधिकल्पित भाग
Arg z	संमिश्र संख्या z का कोणांक
$\bar{z}$	संमिश्र संख्या z का संयुग्मी
deg f	बहुपद f का घात

यूनानी अक्षर

α	ऐल्फ़ा	κ	कापा	τ	टाओ
β	बीटा	λ	लैम्डा	υ	अप्सिलॉन
γ	गामा	μ	म्यू	ϕ	फ़ाइ
δ	डेल्टा	ν	न्यू	χ	काइ
ε	एप्सिलॉन	ξ	ज़ाइ	ψ	साइ
ζ	ज़ीटा	o	ओमिक्रॉन	ω	ओमेगा
η	ईटा	$\pi(\Pi)$	पाइ (पाइ का बड़ा अक्षर)		
θ	थीटा	ρ	रो		
ι	आयोटा	$\sigma(\Sigma)$	सिग्मा (सिग्मा का बड़ा अक्षर)		

इकाई 1 समुच्चय

इकाई की रूपरेखा **पृष्ठ सं०**

1.1 प्रस्तावना

किसी शब्दकोश में दिए गए शब्दों का संग्रह लीजिए। इस संग्रह में किसी शब्द का होना या न होना इस बात पर निर्भर करता है कि शब्दकोश में यह शब्द दिया गया है या नहीं। यह संग्रह समुच्चय का एक उदाहरण है, जैसा कि आप भाग 1.2 में देखेंगे। गणित के किसी शाखा के अध्ययन में आपका वास्ता एक या अधिक समुच्चयों से ज़रूर पड़ेगा। इसलिए हम समुच्चयों से संबंधित कुछ आधारभूत संकल्पनाओं और उनके गुणों के बारे में विस्तृत चर्चा करना चाहते हैं।

इस इकाई में हम आपका परिचय समुच्चयों के कुछ विभिन्न उदाहरणों से कराएंगे। इसके बाद हम समुच्चयों पर लागू की जाने वाली कुछ संक्रियाओं पर चर्चा करेंगे। हम आपको वेन आरेखों से भी परिचित कराएंगे, जो कि समुच्चयों को निरूपित करने की एक चित्रीय विधि है।

जैसा कि हम पहले बता चुके हैं, गणित के किसी भी पाठ्यक्रम का अध्ययन करने में इस इकाई के अन्तर्गत दी जाने वाली जानकारी को जानना अति आवश्यक है। इसलिए आप इस इकाई को ध्यान से पढ़िए।

आइए, अब हम इस इकाई के उद्देश्यों को जानें।

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप इस सूची को फिर से देख लें ताकि आप यह सुनिश्चित कर सकें कि आपने बताए गए उद्देश्यों को प्राप्त कर लिया है या नहीं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- समुच्चय को पहचान सकेंगे;
- सूची विधि, गुण विधि और वेन आरेख से समुच्चयों को निरूपित कर सकेंगे;

* समुच्चयों पर पूरकीकरण, सम्मिलन और सर्वनिष्ठ की संक्रियाओं को लागू कर सकेंगे;
* बंटन नियमों को सिद्ध कर सकेंगे और उन्हें लागू कर सकेंगे;
* द मौर्गन नियमों को सिद्ध कर सकेंगे और उन्हें लागू कर सकेंगे;
* दो या अधिक समुच्चयों का कार्तीय गुणनफल प्राप्त कर सकेंगे ।

1.2 समुच्चय

आपको प्रायः वस्तुओं के संवर्ग, वर्ग या संग्रह देखने को मिलते होंगे । गणित में, वस्तुओं के किसी **सुपरिभाषित** (well-defined) संग्रह को **समुच्चय** कहते हैं ।

शब्द "सुपरिभाषित" का अर्थ है कि यदि कोई वस्तु दी हुई हो, तो यह स्पष्ट होना चाहिए कि दी हुई वस्तु संग्रह में है या नहीं । उदाहरण के लिए, सभी विमानचालिकाओं का संग्रह एक समुच्चय है, क्योंकि कोई भी व्यक्ति विमानचालिका है या नहीं, उसी के अनुसार वह व्यक्ति संग्रह में आएगा या नहीं । इसके विपरीत, सभी बुद्धिमान व्यक्तियों का समूह एक समुच्चय नहीं है । ऐसा क्यों? चूंकि कोई भी व्यक्ति विशेष किसी एक व्यक्ति की दृष्टि में बुद्धिमान हो सकता है, और किसी दूसरे व्यक्ति की दृष्टि में नहीं । अर्थात्, ऐसी कोई स्पष्ट कसौटी नहीं है जिससे यह कहा जा सके कि अमुक व्यक्ति बुद्धिमान है या नहीं । अतः यह संग्रह सुपरिभाषित नहीं है ।

अब हम समुच्चयों के कुछ और उदाहरण देंगे जिनसे आप शायद परिचित हों । हम इस पाठ्यक्रम में इन समुच्चयों का काफ़ी प्रयोग करेंगे ।

i) प्राकृतिक संख्याओं (natural numbers) का समुच्चय, जिसे **N** से प्रकट किया जाता है ।

ii) पूर्णांकों (integers) का समुच्चय, जिसे **Z** से प्रकट किया जाता है ।

iii) परिमेय संख्याओं (rational numbers) का समुच्चय, जिसे **Q** से प्रकट किया जाता है ।

iv) वास्तविक संख्याओं (real numbers) का समुच्चय, जिसे **R** से प्रकट किया जाता है ।

अगली इकाई में आप एक अन्य समुच्चय, अर्थात् संमिश्र संख्याओं (complex numbers) का समुच्चय का अध्ययन करेंगे । इसे C से प्रकट किया जाता है ।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए ।

E 1) बताइए कि नीचे दिए गए संग्रहों में से कौन से संग्रह समुच्चय हैं ।
   क) भारत के सभी अच्छे लोगों का संग्रह ।
   ख) उन सभी लोगों का संग्रह जो मंगल ग्रह जा चुके हैं ।
   ग) अभाज्य संख्याओं का संग्रह ।
   घ) सम संख्याओं का संग्रह ।
   ङ) उन सभी आयतों का संग्रह जो वर्ग नहीं हैं ।

अभाज्य संख्या, 1 को छोड़कर एक ऐसी प्राकृतिक संख्या p है जिसके गुणनखंड केवल 1 और p हैं ।

किसी समुच्चय की वस्तु को हम उस समुच्चय का **अवयव** (element) या **सदस्य** (member) कहते हैं । उदाहरण के लिए, 2, प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय का एक अवयव है ।

प्रतीक $\in$, "का सदस्य है" को प्रकट करता है । इस प्रतीक का प्रयोग सबसे पहले इटली के गणितज्ञ पियानो (1858–1932) ने किया था ।

हम समुच्चयों को प्रायः अंग्रेज़ी के बड़े अक्षरों A, B, C, आदि से प्रकट करते हैं, और समुच्चयों के अवयवों को प्रायः अंग्रेज़ी के छोटे अक्षरों a, b, c, x, y, आदि से प्रकट करते हैं ।

हम कथन 'a, समुच्चय A का एक अवयव है' को प्रतीकों में $a \in A$ से व्यक्त करते हैं ।

यदि a, समुच्चय A का अवयव न हो, यानि कि a, समुच्चय A का सदस्य न हो, तो इसे हम $a \notin A$ से व्यक्त करते हैं । उदाहरण के लिए, यदि A **अभाज्य संख्याओं** का समुच्चय है, तो

$5 \in A$ और $9 \notin A$.

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 2) नीचे दिए गए कथनों में से कौन से कथन सत्य हैं?

क) $0.2 \in N$

ख) $2 \notin N$

ग) $\sqrt{2} \in R$

घ) $\sqrt{2} \in Q$

ङ) $\sqrt{-1} \notin R$

च) कोई भी वृत्त E 1(ङ) के समुच्चय का एक सदस्य है।

अब, आप जानते हैं कि कोई संख्या या तो परिमेय होती है या अपरिमेय, पर दोनों नहीं। अतः उन सभी संख्याओं का समुच्चय क्या होगा जो दोनों परिमेय और अपरिमेय हों? इस समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं होगा।

उस समुच्चय को, जिसका कोई भी अवयव न हो, **रिक्त समुच्चय** (empty set) कहा जाता है। इसे यूनानी अक्षर ϕ (फ़ाइ) से प्रकट करते हैं।

जिस समुच्चय में कम से कम एक अवयव हो, उसे **अरिक्त समुच्चय** (non-empty set) कहते हैं। हम अरिक्त समुच्चय को प्रायः दो विधियों – **सूचीयन विधि** (listing method) और **गुण विधि** (property method) से व्यक्त करते हैं।

पहली विधि के अनुसार हम समुच्चय के सभी अवयवों को धनुःकोष्ठकों ({ }) में लिखते हैं। उदाहरण के लिए, उन सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय जो 10 के गुणनखंड हैं, {1, 2, 5, 10} है।

परंतु यदि समुच्चय के अवयवों की संख्या इतनी ज़्यादा हो कि उन सब को लिखना मुश्किल हो, तो ऐसी स्थिति में हम समुच्चय को कैसे व्यक्त करें? ऐसी स्थिति में हम कोष्ठक के अंदर समुच्चय के इतने अवयवों को ही लिखते हैं जिनसे हमें शेष अवयवों का संकेत मिल जाए। उदाहरण के लिए, प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय N को

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$

से व्यक्त कर सकते हैं,

और 10 तथा 100 के बीच के सभी सम संख्याओं के समुच्चय को

$\{12, 14, 16, \ldots, 98\}$

से व्यक्त कर सकते हैं।

समुच्चयों को निरूपित करने की इसी विधि को सूचीयन विधि कहते हैं।

समुच्चयों को निरूपित करने की दूसरी विधि के अनुसार हम समुच्चय के अवयवों को एक ऐसे गुण से निरूपित करते हैं जो सभी अवयवों में हो। उदाहरण के लिए, उन सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय S लीजिए जो कि 5 के गुणज हो। इस समुच्चय को हम

$S = \{x \mid x \in N$ और x, 5 का एक गुणज है$\}$ ......(1)

के रूप में लिख सकते हैं।

(1) बताता है कि S ऐसे सभी x का समुच्चय है जहाँ x एक प्राकृतिक संख्या है और x, 5 का गुणज है।

इसे हम संक्षिप्त रूप में
$S = \{x \in N \mid x, 5$ का एक गुणज है$\}$, या
$S = \{5n \mid n \in N\}$
से भी व्यक्त कर सकते हैं।

समुच्चय को निरूपित करने की इस विधि को **गुण विधि** या **समुच्चय निर्माण विधि** कहते हैं।

कुछ समुच्चयों को हम ऊपर दी गई किसी भी विधि से निरूपित कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, 10 से कम सभी प्राकृतिक संख्याओं के समुच्चय E को हम

$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (सूचीयन विधि से) या

$E = \{x \mid x$, 10 से कम एक प्राकृतिक संख्या है $\}$ (गुण विधि से)

निरूपित कर सकते हैं।

आप देख सकते हैं कि दोनों ही समुच्चय समान हैं, क्योंकि दोनों के अवयव बिलकुल समान हैं। इस स्थिति से संबंधित निम्नलिखित परिभाषा को देखिए।

परिभाषा : दो समुच्चय S और T को समान कहते हैं यदि S का प्रत्येक अवयव T का अवयव हो और T का प्रत्येक अवयव S का अवयव हो। इस तथ्य को हम $S = T$ से प्रकट करते हैं।

अब, किसी समुच्चय को सूचीयन विधि से निरूपित करते समय निम्नलिखित बातों को अवश्य ध्यान में रखनी चाहिए।

टिप्पणी 1 : समुच्चय $\{1, 2, 3, 3\}$ और $\{1, 2, 3\}$ समान हैं। अर्थात्, अवयवों की सूची लिखने के दौरान किसी अवयव को दोहराने से कोई फ़ायदा नहीं। प्रयानुसार हम अवयवों को दोहराते नहीं हैं।

टिप्पणी 2 : समुच्चय $\{1, 2, 3\}$ और $\{2, 1, 3\}$ लीजिए। क्या ये समान हैं ? आप देख सकते हैं कि पहले समुच्चय का प्रत्येक अवयव दूसरे समुच्चय का अवयव है और दूसरे समुच्चय का प्रत्येक अवयव पहले समुच्चय का अवयव है। अतः ये समुच्चय समान हैं। इस उदाहरण से पता चलता है कि **समुच्चय के अवयवों के लिखने के क्रम को बदलने से समुच्चय नहीं बदलता।**

हम गुण विधि के बारे में भी एक टिप्पणी देना चाहेंगे।

टिप्पणी 3 : एक ही समुच्चय को गुण विधि से अनेक तरीकों से लिख सकते हैं। उदाहरण के लिए,
$\{x \mid 3x - 1 = 5\}$
$= \{x \mid x$ एक सम अभाज्य संख्या है $\}$

अब शायद आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करना चाहेंगे।

E 3) सूची विधि से निम्नलिखित समुच्चयों को निरूपति कीजिए।

क) $\{x \mid x$ लघुतम अभाज्य संख्या है $\}$

ख) $\{x \mid x$, 12 का भाजक है $\}$

ग) $\{x \in Z \mid x^2 = 4\}$

घ) $\{x \mid 3x - 5 = 19\}$

ङ) अंग्रेज़ी वर्णमाला के सभी अक्षरों का समुच्चय।

E 4) गुण विधि से निम्नलिखित समुच्चयों को निरूपित कीजिए।

क) $\{1, 4, 9, 16, ...\}$

ख) $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ...\}$

ग) $\{...., -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, ...\}$

घ) ϕ.

E 5) अरिक्त समुच्चय का एक ऐसा उदाहरण दीजिए जिसे केवल गुण विधि से निरूपित किया जा सकता है।

E 3 को हल करते समय आपने ऐसा समुच्चय देखा होगा जिसका केवल एक अवयव है। ऐसे समुच्चय को **एकल** कहते हैं। वह एकल, जिसका अवयव x हो, प्रायः $\{x\}$ से दर्शाया जाता है।

टिप्पणी 4 : अवयव x और समुच्चय $\{x\}$ एक ही नहीं हैं। वास्तव में, $x \in \{x\}$.

जिस समुच्चय के अवयवों की संख्या परिमित हो, उसे **परिमित समुच्चय** कहते हैं। परंपरा के अनुसार, रिक्त समुच्चय को परिमित समुच्चय माना जाता है।

जो समुच्चय परिमित नहीं है, उसे **अनंत समुच्चय** कहते हैं।

अनंत समुच्चयों के कुछ उदाहरण हैं **N, Q, R** और किसी दी हुई रेखा पर सभी बिन्दुओं का समुच्चय।

नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने से आपको परिमित और अनंत समुच्चयों की संकल्पना को समझने में सहायता मिल सकती है।

किसी समीकरण का **हल समुच्चय** उस समीकरण के हलों का समुच्चय होता है।

E 6) निम्नलिखित समुच्चयों में से कौन से समुच्चय परिमित हैं और कौन से अनंत?

क) **Z**,

ख) ϕ,

ग) $2x + 5 = 7$ का हल समुच्चय,

घ) वृत्त की परिधि पर सभी बिन्दुओं का समुच्चय,

ङ) आकाश में तारों का समुच्चय।

अब, आप जानते हैं कि यदि a और b दो वास्तविक संख्याएँ हों, तो $a < b$, $a = b$ या $a > b$. क्या समुच्चयों के बीच भी इसी प्रकार का संबंध होता है? आइए इस प्रश्न का उत्तर ढूंढें।

1.3 उपसमुच्चय

इस भाग में हम देखेंगे कि 'में आविष्ट है' और 'आविष्ट करता है' का अर्थ क्या है।
दो समुच्चय A और B लीजिए, जहाँ
A = इ. गा. रा. मु. वि. के सभी विद्यार्थियों का समुच्चय, और
B = इ. गा. रा. मु. वि. की सभी महिला विद्यार्थियों का समुच्चय।

इ. गा. रा. मु. वि. की प्रत्येक महिला विद्यार्थी इ. गा. रा. मु. वि. की विद्यार्थी है, अतः B का

प्रत्येक अवयव, A का भी अवयव है । ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि B, A में आविष्ट है । परंतु कुछ ऐसे विद्यार्थी भी हैं जो महिला विद्यार्थी नहीं हैं ।

अतः A का एक ऐसा अवयव x है जो कि B का सदस्य नहीं है । गणितीय रूप में, इसे हम निम्न प्रकार से लिखते हैं:

' $\exists$ ', 'का अस्तित्व है' को प्रकट करता है । इससे संबंधित चर्चा के लिए इस खंड के परिशिष्ट को देखिए ।

$\exists\, x \in A$ जिससे कि $x \notin B$.

ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि B, A में उचित रूप से आविष्ट है । अब हम इससे संबंधित कुछ व्यापक परिभाषाएं दे रहे हैं ।

परिभाषाएं : यदि समुच्चय A का प्रत्येक अवयव समुच्चय B का सदस्य हो तो A को B का **उपसमुच्चय** कहते हैं, और इसे हम $A \subseteq B$ से प्रकट करते हैं ।

इस स्थिति में हम कहते हैं कि A, B **में आविष्ट है,** या B, A को **आविष्ट करता है,** जिसे $B \supseteq A$ से दर्शाते हैं ।

यदि $A \subseteq B$ और $\exists\, y \in B$ जहाँ $y \notin A$, तो हम कहते हैं कि A, B का एक **उचित उपसमुच्चय** है (या A, B में **उचित रूप से आविष्ट है**) । इसे हम $A \subsetneq B$ से प्रकट करते हैं ।

यदि X और Y ऐसे दो समुच्चय हों कि X का कोई अवयव x, Y का सदस्य हो, तो हम कहते हैं कि X, Y में **आविष्ट नहीं** है । इस बात को हम $X \not\subseteq Y$ से प्रकट करते हैं ।

आइए उपरोक्त परिभाषाओं से संबंधित कुछ उदाहरणों पर हम विचार करें ।

समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ लीजिए । क्या $A \subseteq A$? चूंकि A का प्रत्येक अवयव, A में है, इसलिए $A \subseteq A$.

वास्तव में यह बात किसी भी समुच्चय के लिए सत्य है । अर्थात् कोई भी समुच्चय स्वयं का उपसमुच्चय होता है । परंतु ध्यान रखें कि कोई भी समुच्चय स्वयं का उचित उपसमुच्चय नहीं होता ।

आइए अब हम समुच्चय $A = \{1, -1\}$ और $B = \{0, 1, 2\}$ लें । हम पाते हैं कि $(-1) \in A$, और $(-1) \notin B$ $\therefore$ $A \not\subseteq B$. इसी प्रकार, $B \not\subseteq A$.

ध्यान दीजिए कि यदि दो समुच्चय A और B दिए हुए हों, तो निम्नलिखित संभावनाओं में से एक और केवल एक ही सही है ।

(i) $A \subseteq B$, या

(ii) $A \not\subseteq B$.

इस तथ्य का प्रयोग करके हम अंतर्विरोध से (इस खंड का परिशिष्ट देखिए) सिद्ध कर सकते हैं कि

किसी भी समुच्चय A के लिए, $\phi \subseteq A$.

रिक्त समुच्चय ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय होता है ।

इसे सिद्ध करने के लिए कोई समुच्चय A लीजिए । मान लीजिए कि $\phi \not\subseteq A$. तब ϕ का एक ऐसा अवयव अवश्य होना चाहिए जो के A का सदस्य न हो । परंतु यह संभव नहीं है, क्योंकि ϕ का कोई अवयव ही नहीं ! यह एक अंतर्विरोध है । अतः जो हम मानकर चले थे, वह सही नहीं है । अर्थात् $\phi \not\subseteq A$ असत्य है ! इसलिए किसी भी समुच्चय A के लिए $\phi \subseteq A$.

' $\Rightarrow$ ', 'निहित है' को प्रकट करता है । (इस खंड का परिशिष्ट भी देखिए ।)

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों का हल करने का प्रयास करें । इन्हें हल करते समय आप ध्यान रखें कि समुच्चयों A और B के लिए, $A \subseteq B$ दिखाने के लिए आपको यह दिखाना होगा कि यदि $a \in A$ तो $a \in B$, अर्थात् $a \in A \Rightarrow a \in B$.

और, यह दिखाने के लिए कि $A \not\subseteq B$, आपको यह दिखाना होगा कि $\exists\, x \in A$, जहां $x \notin B$.

E 7) { 1, 2, 3 } के सभी उपसमुच्चय लिखिए । बताइए कि इनमें से कितने उपसमुच्चयों क) का कोई अवयव नहीं है, ख) का एक अवयव है, ग) के दो अवयव हैं, घ) के तीन अवयव हैं?

समुच्चय A के सभी उपसमुच्चयों के समुच्चय को A का **घात समुच्चय** (power set) कहते हैं ।

E 8) दिखाइए कि यदि $A \subseteq B$ और $B \subseteq C$, तो $A \subseteq C$.
इससे यह पता चलता है कि '$\subseteq$' एक **संक्रामक संबंध** (transitive relation) है ।

E 9) दिखाइए कि '$\not\subseteq$' एक संक्रामक संबंध नहीं है । इसके लिए आपको तीन समुच्चय A, B और C मालूम करने होंगे, जिनके लिए $A \not\subseteq B$, $B \not\subseteq C$, पर $A \subseteq C$.

आइए अब टिप्पणी 1 से पहले बताए गए समान समुच्चयों की परिभाषा पर एक नज़र दौड़ाएं ।

आइए देखें कि उपसमुच्चयों की भाषा में समता को कैसे लिख सकते हैं ।

समुच्चय A और B लीजिए, जहां
A = 10 से कम सम प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय, और
$B = \{ 2, 4, 6, 8 \}$.

ये समान हैं, क्योंकि A का प्रत्येक सदस्य B का सदस्य है और B का प्रत्येक सदस्य, A का सदस्य है । अर्थात् $A \subseteq B$ और $B \subseteq A$.
इस तरह, $A = B \Leftrightarrow$ ($A \subseteq B$ और $B \subseteq A$).

अब आप कुछ रोचक प्रश्नों को हल कीजिए ।

E 10) निम्नलिखित समुच्चय लीजिए :

$A = \{ x \mid x + 1 = 3 \}$, $B = \{ 1, 2 \}$ और C = सभी अभाज्य सम संख्याओं का समुच्चय ।
बताइए कि

(i) A और B, और

(ii) A और C
के बीच क्या संबंध हैं ।

E 11) यदि $A = B$ और $B \supseteq C$, तो A और C के बीच क्या संबंध हैं?

अभी तक आपने समुच्चयों को निरूपित करने की दो विधियों को देखा है । समुच्चयों और इनके बीच के संबंधों को निरूपित करने की एक और विधि भी है । हम अगले भाग में इसी पर चर्चा करने जा रहे हैं ।

1.4 वेन आरेख

यदि हम किसी स्थिति को आरेखी रूप में प्रस्तुत कर सकें तो प्राय: उसे समझना आसान हो जाता है । समुच्चयों और उनके संबंधों से संबंधित अनेक स्थितियों को आसानी से समझने के लिए हम उन्हें सरल आरेखों से निरूपित करते हैं, जिन्हें **वेन आरेख** (Venn diagram) कहते हैं । एक अंग्रेज़ तर्कशास्त्री जॉन वेन (1834 – 1923) ने इस निरूपण का आविष्कार किया था । वेन आरेख खींचने से पहले आपको यह जानना आवश्यक होगा कि समष्टीय समुच्चय (universal set) क्या होता है ।

दो या अधिक समुच्चयों से संबंधित किसी स्थिति को निरूपित करने के लिए, पहले हम एक ऐसा सुविधाजनक बड़ा समुच्चय लेते हैं जो सभी विचाराधीन समुच्चयों को आविष्ट करता हो। हम इस बड़े समुच्चय को **समष्टीय समुच्चय** कहते हैं, और इसे U से प्रकट करते हैं। स्पष्ट है कि U अद्वितीय (unique) नहीं है। उदाहरण के लिए, यदि हम निर्देशिकाओं का समुच्चय D और महिला वैज्ञानिकों के समुच्चय S पर विचार कर रहे हों, तो हम सभी कामकाजी महिलाओं के समुच्चय को समष्टीय समुच्चय U मान सकते हैं, क्योंकि U, D और S दोनों को ही आविष्ट करता है। यहाँ हम सभी महिलाओं के समुच्चय को भी समष्टीय समुच्चय मान सकते हैं।

समष्टीय समुच्चय अद्वितीय नहीं होता।

और, यदि हम पूर्णांको के समुच्चय और परिमेय संख्याओं के समुच्चय पर विचार कर रहे हों, तो हम वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को अपना समष्टीय समुच्चय मान सकते हैं। हम Q को भी अपना समष्टीय समुच्चय मान सकते हैं, क्योंकि यह Z और Q दोनों को आविष्ट करता है।

हम प्रायः समष्टीय समुच्चय को ठीक इतना ही बड़ा लेते हैं जिससे कि वह विचाराधीन सभी समुच्चयों को आविष्ट कर ले।

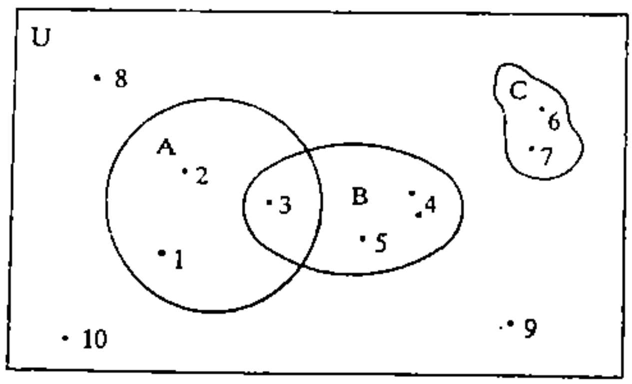
आइए अब देखें कि वेन आरेख कैसे बनाया जाता है। मान लीजिए हम विभिन्न समुच्चयों A, B, C, ... पर विचार कर रहे हैं। हम अपना समष्टीय समुच्चय U चुनते हैं। अतः $A \subseteq U$, $B \subseteq U$, $C \subseteq U$, आदि-आदि। हम इस स्थिति को वेन आरेख के रूप में निम्न प्रकार से प्रदर्शित करते हैं:

आयत के अंदर का क्षेत्र U को निरूपित करता है। उपसमुच्चयों A, B, C, आदि, को आयत के अंदर पूरी तरह से स्थित बंद प्रदेशों के अंदर के क्षेत्रों से निरूपित किया जाता है। ये प्रदेश वृत्त, दीर्घवृत्त या किसी अन्य आकार के हो सकते हैं।

जो कुछ भी हमने ऊपर कहा है, उसे समझने के लिए निम्नलिखित उदाहरण को देखिए।

उदाहरण 1 : समुच्चयों $U = \{1, 2, ..., 10\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4, 5\}$, $C = \{6, 7\}$ को निरूपित करने के लिए एक वेन आरेख बनाइए।

हल : चित्र 1 देखिए।

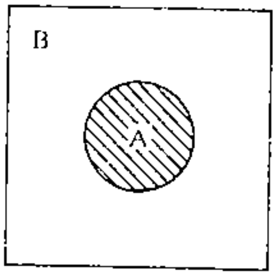


चित्र 1 : वेन आरेख

हमने A को एक वृत्त से, B को एक दीर्घवृत्त से (जो A को प्रतिच्छेद करता है) और C को एक अन्य बंद प्रदेश से निरूपित किया है। बिन्दु 8, 9 और 10, A, B या C में से किसी में भी स्थित नहीं हैं। ये सभी प्रदेश और बिन्दु समष्टीय समुच्चय U में स्थित हैं, जिसे बाहरी आयत से निरूपित किया गया है।

ध्यान दीजिए कि 3, A और B दोनों में है। अतः यह वृत्त और दीर्घवृत्त दोनों में स्थित है। और, यह भी ध्यान दीजिए कि A और C का कोई भी उभयनिष्ठ अवयव नहीं है। अतः इन समुच्चयों को निरूपित करने वाले प्रदेश एक दूसरे को नहीं काटते। इसी कारण से B और C को निरूपित करने वाले प्रदेश एक दूसरे को नहीं काटते।

हाँ, यह बात अवश्य है कि हम B और C को भी वृत्त से निरूपित कर सकते थे।
अब आप निम्नलिखित स्थिति पर विचार कीजिए:
A और B ऐसे दो समुच्चय हैं कि $A \subsetneq B$, अर्थात् A, B का एक उचित उपसमुच्चय है। इस स्थिति को वेन आरेख से कैसे निरूपित करेंगे ? यहां, हम B को अपना समष्टीय समुच्चय मान सकते हैं। तब चित्र 2 का वेन आरेख इस स्थिति को दर्शाता है। यदि हम एक अन्य समुच्चय U को, जो उचित रूप से B को आविष्ट करता हो, अपना समष्टीय समुच्चय मान लें, तो हमें चित्र 3 में दिखाया गया वेन आरेख प्राप्त होता है।

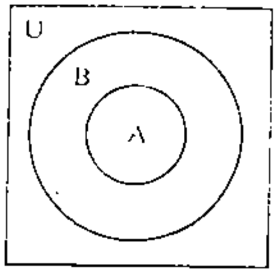


चित्र 2

अब नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 12) आप निम्नलिखित स्थिति को एक वेन आरेख से कैसे निरूपित करेंगें?
सभी आयतों का समुच्चय, सभी वर्गों का समुच्चय और सभी समांतरचतुर्भुजों का समुच्चय।

अब आप वेन आरेखों से अच्छी तरह से परिचित हो चुके होंगे। आइए अब हम समुच्चयों की विभिन्न संक्रियाओं पर चर्चा करें। अपनी चर्चा के दौरान हम प्रायः वेन आरेखों का प्रयोग करेंगे।



चित्र 3

1.5 समुच्चयों पर संक्रियाएँ

आप वास्तविक संख्याओं पर आधारभूत संक्रियाओं, अर्थात् जोड़, घटा, गुणा और भाग से अच्छी तरह से परिचित होंगे। इनके प्रयोग से दो वास्तविक संख्याओं को विभिन्न विधियों से संयोजित करके हम एक अन्य वास्तविक संख्या प्राप्त करते हैं। इसी प्रकार, एक समय में दो दिए हुए समुच्चयों पर कुछ संक्रियाएँ लागू करके हम नए समुच्चय प्राप्त कर सकते हैं। इस भाग में हम पूरकीकरण, सर्वनिष्ठ और सम्मिलन की संक्रियाओं पर चर्चा करेंगे।

1.5.1 पूरकीकरण

समुच्चय N और $\{0, 1\}$ लीजिए। N के कुछ ऐसे अवयव, जैसे 2, 3, आदि हैं, जो $\{0, 1\}$ के सदस्य नहीं हैं। निम्नलिखित परिभाषा के अनुसार इन अवयवों का समुच्चय N में $\{0, 1\}$ का पूरक (complement) है।

परिभाषा : मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं। **B में A का पूरक**, जिसे $B \setminus A$ से प्रकट करते हैं, समुच्चय $\{x \in B \mid x \notin A\}$ है।
इसी प्रकार $A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$.

$A \setminus B \subseteq A$

यदि B, समष्टीय समुच्चय U हो, तो $B \setminus A$, $U \setminus A$ हो जाता है। इस समुच्चय को **समुच्चय A का पूरक** कहते है, और इसे A' या A^c से प्रकट किया जाता है।

यदि आप चित्र 2 को देखें तो वह भाग जो छायादार नहीं है समुच्चय $B \setminus A$ (या A', क्योंकि यहाँ $B = U$) को प्रकट करता है। इस आरेख से पता चलता है कि
$x \in A^c$ यदि और केवल यदि $x \notin A$.

ध्यान दीजिए कि चित्र 2 की स्थिति में $A \setminus B = \phi$, क्योंकि A का प्रत्येक बिन्दु, B का एक बिन्दु है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए।

E 13) क) निम्नलिखित समुच्चयों को एक वेन आरेख में निरूपित कीजिए:
सभी अभाज्य संख्याओं का समुच्चय P, समुच्चय Z और समुच्चय $Q \setminus Z$.

ख) क्या समुच्चय $Z \setminus P$ परिमित है या अनंत ?

E 14) मान लीजिए A कोई समुच्चय है। $A \setminus A$, $\phi \setminus A$, $A \setminus \phi$ और $(A^c)^c$ क्या होंगे?

आइए अब हम समुच्चयों पर एक अन्य संक्रिया पर, अर्थात् दो या अधिक समुच्चयों के सर्वनिष्ठ पर विचार करें।

1.5.2 सर्वनिष्ठ

मान लीजिए A तथा B समष्टीय समुच्चय U के दो उपसमुच्चय हैं। A और B का **सर्वनिष्ठ** (intersection) उन बिन्दुओं का समुच्चय होगा जो A और B दोनों के सदस्य हैं। इसे $A \cap B$ से प्रकट करते हैं।

इस तरह, $A \cap B = \{x \in U | x \in A$ और $x \in B\}$.

इस संकल्पना को और अच्छी तरह से समझने के लिए, निम्नलिखित उदाहरण को देखिए।

उदाहरण 2: मान लीजिए S, अभाज्य संख्याओं का समुच्चय है और T समुच्चय $\{x \in Z | x, 10$ का भाजक है$\}$. $S \cap T$ क्या होगा?

हल : हम Z को अपना समष्टीय समुच्चय लेते हैं।
तब $S \cap T =$ उन पूर्णांकों का समुच्चय जो अभाज्य हैं और जो 10 के भाजक हैं $= \{2, 5\}$.

अब आप निम्नलिखित प्रश्न को हल कर सकते हैं।

E 15) $Z \cap Q$, $Q \cap Z$, $Z \cap Z$ और $N \cap \phi$ प्राप्त कीजिए।

E 15 को हल करने के दौरान आपने सर्वनिष्ठ संक्रिया से संबंधित कुछ तथ्यों की ओर अवश्य ध्यान दिया होगा। इनका उल्लेख हमने निम्नलिखित प्रमेय में किया है।

प्रमेय 1: किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए,

क) $A \cap B \subseteq A$

ख) $A \cap B \subseteq B$

ग) $A \subseteq B \Rightarrow A \cap B = A$

घ) $A \cap A = A$

ङ) $A \cap \phi = \phi$

च) $A \cap B = B \cap A$

(च) बताता है कि समुच्चयों के सर्वनिष्ठ की संक्रिया क्रमविनिमेय होती है।

छ) $A \setminus B = A \cap B^c$

ज) यदि C एक ऐसा समुच्चय हो कि $C \subseteq A$ और $C \subseteq B$, तो $C \subseteq A \cap B$.

उपपत्ति : हम (क) और (ख) को सिद्ध करेंगे और बाकी आपके लिए छोड़ देंगे (E16 देखिए)। मान लीजिए $x \in A \cap B$. तब $x \in A$ और $x \in B$. इस तरह $A \cap B \subseteq A$ और $A \cap B \subseteq B$. इस तरह हमने (क) और (ख) को सिद्ध कर दिया है।

अब, (क) और (ख) की सहायता से नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

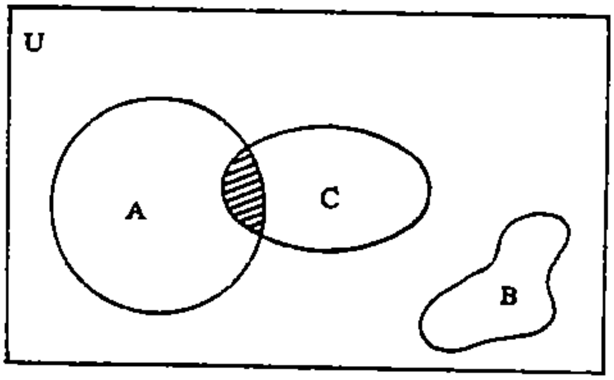
E 16) प्रमेय 1 के (ग) से (ज) तक को सिद्ध कीजिए।

E 17) यदि हम प्रमेय 1(ज) में '$\subseteq$' के बदले '$\subsetneq$' हर जगह लिखें तो क्या प्रमेय सत्य होगा? क्यों ?

अब ऋण परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^- और धन परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q^+ लीजिए। तब $Q^- \cap Q^+ = \phi$. इससे पता चलता है कि Q^- और Q^+ असंयुक्त (disjoint) हैं। इस शब्द की परिभाषा हम नीचे दे रहे हैं।

परिभाषा : मान लीजिए A और B ऐसे दो समुच्चय हैं कि $A \cap B = \phi$. तब हम कहते हैं कि ये **परस्पर असंयुक्त** (या **असंयुक्त**) हैं।

आइए अब हम वेन आरेख से समुच्चयों के सर्वनिष्ठ को निरूपित करें। चित्र 4 का छायादार भाग समुच्चय $A \cap C$ को निरूपित करता है, जो कि अरिक्त समुच्चय है, जैसा कि आप देख सकते हैं।



चित्र 4

आप यह भी देख सकते हैं कि A और B को निरूपित करने वाले प्रदेशों का कोई उभयनिष्ठ क्षेत्र नहीं है, अर्थात् $A \cap B = \phi$. इस आरेख से हम यह भी देख सकते हैं कि न तो $A \subseteq C$ है और न ही $C \subseteq A$ है। इसके अलावा $C \setminus A$ और $A \setminus C$ दोनों ही अरिक्त समुच्चय हैं। देखा आपने, वेन आरेख से हम कितनी जानकारी प्राप्त कर सकते हैं!

आइए अब हम चित्र 2 पर सरसरी निगाह डालें। यह चित्र किस स्थिति को निरूपित करता है? इसमें दो समुच्चय A और B दिखाए गए हैं जहां $A \subseteq B$, अर्थात् A, B का एक उचित उपसमुच्चय है। तब छायादार क्षेत्र से पता चलता है कि $A \cap B = A$.

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास करें।

E 18) मान लीजिए $U = Z, A = \{1, 3, 5\}$, B = विषम पूर्णांकों का समुच्चय। इस स्थिति को निरूपित करने के लिए वेन आरेख खींचिए और भाग $A \cap B$ को छायादार बनाइए।

अभी तक हमने दो समुच्चयों के सर्वनिष्ठ पर विचार किया है। आइए अब हम 3, 4 या अधिक समुच्चयों के सर्वनिष्ठ को परिभाषित करें।

परिभाषा : n समुच्चयों $A_1, A_2, \ldots, A_n$ के **सर्वनिष्ठ** को समुच्चय
$\{x \mid x \in A_i$ प्रत्येक $i = 1, \ldots, n$ के लिए$\}$
से परिभाषित किया जाता है।

इसे $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ या $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ से प्रकट करते हैं।

आइए अब हम 3 समुच्चयों के सर्वनिष्ठ से संबंधित एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 3 : मान लीजिए A, B और C, N में क्रमशः 3, 6 और 10 के गुणजों के समुच्चय हैं। $A \cap B \cap C$ प्राप्त कीजिए।

हल : $A \cap B \cap C$ में वे सभी प्राकृतिक संख्याएँ होंगी जो A, B और C के सदस्य हैं।
इस तरह, $A \cap B \cap C = \{ x \in N \mid 3, 6$ और $10, x$ के भाजक हैं $\}$

$= \{ x \in N \mid 30, x$ को भाजित करता है $\}$

$= \{ 30n \mid n \in N\}$

ध्यान दीजिए कि 30, 3, 6 और 10 का लघुतम समापवर्त्य (l.c.m) है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए।

E 19) मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$ और $C = \{1, 4, 7, 8\}$. $A \cap B \cap C$ ज्ञात कीजिए। साथ ही सत्यापित कीजिए कि

क) $A \cap B \cap C = (A \cap B) \cap C$,

ख) $A \cap B \cap C = A \cap (B \cap C)$.

E 20) यदि $A = \{6n \mid n \in N\}$ और $B = \{15n \mid n \in N\}$, तो $A \cap B \cap A$ क्या होगा?

E 19 में आपने जो कुछ दिखाया है, वह किन्हीं तीन समुच्चयों A, B और C के लिए सही है। [illegible] गुण को **सहचारिता** (associativity) कहते हैं। इस गुण को लागू करके हम n समुच्चयों का सर्वनिष्ठ, एक वक्त पर किन्हीं दो सन्निकट समुच्चयों का सर्वनिष्ठ लेकर प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि A, B, C, D, चार समुच्चय हैं, तब

$$A \cap B \cap C \cap D = [(A \cap B) \cap C] \cap D$$
$$= A \cap [(B \cap C) \cap D]$$
$$= (A \cap B) \cap (C \cap D)$$

आइए अब हम समुच्चयों पर एक अन्य संक्रिया पर विचार करें।

1.5.3 सम्मिलन

'$\leq$' 'से कम या के बराबर' को प्रकट करता है, और '$\geq$' 'से अधिक या के बराबर' को प्रकट करता है।

मान लीजिए दो समुच्चय $A = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq 10\}$ और $B = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 10\}$ हैं। तब **R** का कोई भी सदस्य या तो A का सदस्य होता है या B का, क्योंकि कोई भी वास्तविक संख्या, या तो 10 से कम या इसके बराबर होगी, या 10 से अधिक या इसके बराबर होगी, और 10, A तथा B दोनों का सदस्य होगा। ऐसी स्थिति में हम कहते हैं कि **R**, A और B का सम्मिलन (union) है। इसकी व्यापक परिभाषा है:

परिभाषा : मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं। उन सभी अवयवों का समुच्चय, जो या तो A के या B के या A और B दोनों के सदस्य हैं, A और B का **सम्मिलन** कहलाता है। इसे $A \cup B$ से दर्शाते हैं। इस तरह,
$A \cup B = \{ x \mid x \in A$ **या** $x \in B\}$.

चर्चा को और आगे बढ़ाने से पहले य. हम एक टिप्पणी देना चाहते हैं।

टिप्पणी 5: चूंकि $A \cup B$, A के सभी अवयवों को और B के सभी अवयवों को आविष्ट करता है, इसलिए $A \subseteq A \cup B$, $B \subseteq A \cup B$.
वास्तव में, $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$ और $A \cap B \subseteq B \subseteq A \cup B$.
इसलिए, (और E 8 से) $A \cap B \subseteq A \cup B$.

आइए अब हम एक उदाहरण पर विचार करें।
उदाहरण 4 : $N \cup Z$ ज्ञात कीजिए

हल: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$
$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$
हम $N \cup Z = \{x | x \in N$ या $x \in Z\}$ ज्ञात करना चाहते हैं।
परंतु $N \subseteq Z$. इस तरह, $x \in N \Rightarrow x \in Z$. इससे यह तुरंत पता चलता है कि
$N \cup Z = \{x | x \in Z\} = Z$.

उदाहरण 4, व्यापक तथ्य $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$ की एक विशेष स्थिति है।

'⇔', 'तुल्यता' को या 'निहित करता है और से निहित है' को प्रकट करता है (इस खंड का परिशिष्ट देखिए)।

नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करते समय आप इस तथ्य का प्रयोग कर सकते हैं।

E 21) किन्हीं तीन समुच्चयों A, B और C के लिए दिखाइए कि

क) $A \cup A = A$,

ख) $A \cup B = B \cup A$, अर्थात् सम्मिलन की संक्रिया क्रमविनिमेय है।

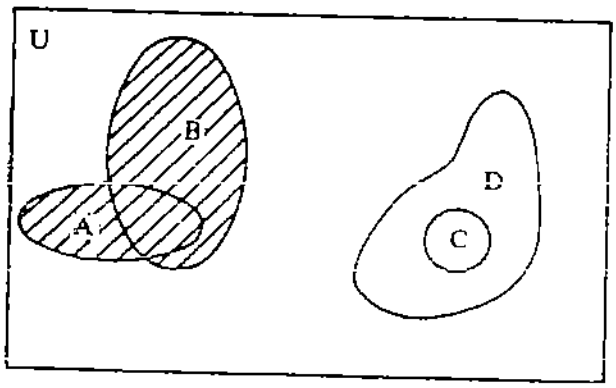
ग) $A \cup \phi = A$,

घ) यदि $A \subseteq C$ और $B \subseteq C$, तो $A \cup B \subseteq C$.

E 22) मान लीजिए U वास्तविक रेखा **R** है,
$A = \{x \in \mathbf{R} | 0 \leq x \leq 1\}$ और $B = \{x \in \mathbf{R} | 1 \leq x \leq 3\}$.
$A \cup B$ ज्ञात कीजिए।

E 23) A और B के बारे में आप क्या कह सकते हैं, यदि $A \cup B = \phi$?

वेन आरेख से समुच्चयों के सम्मिलन को आसानी से दर्शाया जा सकता है। चित्र 5 देखिए। इस आरेख में हम चार समुच्चयों A, B, C और D और समष्टीय समुच्चय U को देखते हैं।



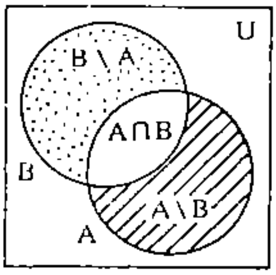
चित्र 5

छायादार क्षेत्र $A \cup B$ को निरूपित करता है। $C \cup D$, C और D दोनों द्वारा परिबद्ध क्षेत्र है, जो कि केवल D होगा, क्योंकि $C \subseteq D$.
क्या आप चित्र 5 में वह क्षेत्र प्राप्त कर सकते हैं जो $A \cup B \cup D$ को निरूपित करता है ?
निम्न परिभाषा को पढ़ने के बाद आप इसे आसानी से प्राप्त कर सकेंगे।
परिभाषा : n समुच्चयों $A_1, A_2, \ldots, A_n$ का **सम्मिलन** समुच्चय
$\{x \mid x \in A_i$, किसी i के लिए जहाँ $1 \le i \le n\}$ होता है।
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ या $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ से इसे प्रकट करते हैं।

अतः अब आप देख सकते हैं कि चित्र 5 में $A \cup B \cup D$ को निरूपित करने वाला क्षेत्र D द्वारा परिबद्ध क्षेत्र और छायादार क्षेत्र है।

आइए अब हम $A \cup B \cup C$ पर विचार करें, जहाँ $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1\}$. तब
$A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.
आप देखेंगे कि यह $(A \cup B) \cup C$ और $A \cup (B \cup C)$ के बराबर है।
आप यह भी सत्यापित कर सकते हैं कि $A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$.

ये कथन उन व्यापक तथ्यों की विशेष स्थितियाँ हैं, जिन्हें हमने नीचे दिए गए प्रश्न में सिद्ध करने के लिए कहा है।



चित्र 6

E 24) क) उदाहरण 3 के समुच्चयों A, B और C के लिए दिखाइए कि
$A \cup B \cup C = (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

ख) किन्हीं दो समुच्चयों A और B के लिए, दिखाइए कि
$A \cup B = (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A)$
(इस स्थिति को हमने चित्र 6 के वेन आरेख में प्रस्तुत किया है।)

E 24) (क) में आपने जो कुछ भी दिखाया है, वह किन्हीं तीन समुच्चयों के लिए सत्य है। अर्थात् समुच्चय सम्मिलन साहचर्य है। इसलिए हम किसी भी संख्या में लिए गए समुच्चयों का सम्मिलन एक वक्त पर किन्हीं दो सन्निकट समुच्चयों का सम्मिलन लेकर प्राप्त कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि A, B, C, D, चार समुच्चय हों, तो

$$\begin{aligned} A \cup B \cup C \cup D &= [(A \cup B) \cup C] \cup D \\ &= A \cup [(B \cup C) \cup D] \\ &= (A \cup B) \cup (C \cup D) \end{aligned}$$

अब तक आप इस भाग में बताई गई संक्रियाओं से अच्छी तरह से परिचित हो गए होंगे। आइए हम इनमें संबंध स्थापित करने वाले कुछ नियमों को सिद्ध करें।

1.6 संक्रियाओं में संबंध स्थापित करने वाले नियम

इस भाग में हम कुछ नियमों पर चर्चा करेंगे जो सम्मिलनों और सर्वनिष्ठों के बीच, कार्तीय गुणनफलों और सम्मिलनों के बीच, तथा कार्तीय गुणनफलों और सर्वनिष्ठों के बीच संबंध स्थापित करते हैं। पहले हम बंटन नियमों (distributive laws) पर चर्चा करेंगे।

1.6.1 बंटन नियम

आप उस बंटन नियम से अवश्य परिचित होंगे जो वास्तविक संख्याओं की गुणन संक्रिया और योग संक्रिया के बीच संबंध स्थापित करता है। इसके अनुसार

$a \times (b+c) = a \times b + a \times c, \ \forall a, b, c \in \mathbf{R}$.

संख्याओं के लिए केवल एक नियम होता है, लेकिन समुच्चयों के लिए दो बंटन नियम हैं, जिनका कथन हम नीचे दे रहे हैं।

प्रमेय 2: मान लीजिए A, B और C तीन समुच्चय हैं। तब,

क) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

ख) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

उपपत्ति: हम (क) को सिद्ध करेंगे। (ख) की उपपत्ति आप पर छोड़ रहे हैं (E 25 देखिए)।

क) हम दिखाएंगे कि

$A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$ ..... (2)

और $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ ..... (3)

अब, $x \in A \cap (B \cup C)$

$\Rightarrow x \in A$ और $x \in B \cup C$

$\Rightarrow x \in A$ और ($x \in B$ या $x \in C$)

$\Rightarrow$ ($x \in A$ और $x \in B$) या ($x \in A$ और $x \in C$)

$\Rightarrow x \in A \cap B$ या $x \in A \cap C$

$\Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

इस तरह हमने पहली आविष्टि (2) को सिद्ध कर दिया है।

(3) को सिद्ध करने के लिए मान लीजिए $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

$\Rightarrow x \in A \cap B$ या $x \in A \cap C$.

$\Rightarrow$ ($x \in A$ और $x \in B$) या ($x \in A$ और $x \in C$).

$\Rightarrow x \in A$ और ($x \in B$ या $x \in C$)

$\Rightarrow x \in A$ और $x \in B \cup C$.

$\Rightarrow x \in A \cap (B \cup C)$.

इस तरह हमने (3) को सिद्ध कर दिया है।

ध्यान दीजिए कि (3) को सिद्ध करने कि लिएं हमने जो तर्क अपनाया है, वह (2) को सिद्ध करने के लिए अपनाए गए हमारे तर्क के ठीक विपरीत है। वास्तव में हम (2) और (3) की उपपत्तियों को निम्न प्रकार से संयोजित कर सकते हैं:

$x \in A \cap (B \cup C)$

$\Leftrightarrow x \in A$ और $x \in B \cup C$.

$\Leftrightarrow x \in A$ और ($x \in B$ या $x \in C$).

$\Leftrightarrow$ ($x \in A$ और $x \in B$) या ($x \in A$ और $x \in C$).

$\Leftrightarrow x \in A \cap B$ या $x \in A \cap C$.

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

इससे (क) सिद्ध हो जाता है।

अब आप $\Leftrightarrow$ के प्रयोग से नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 25) प्रमेय 2 (ख) सिद्ध कीजिए।

आइए हम निम्नलिखित स्थिति में प्रमेय 2 को सत्यापित करें।

उदाहरण 5 : A, B और C के स्थान पर समुच्चयों N, Q और R के लिए बंटन नियमों को सत्यापित कीजिए।

हल: पहले हम दिखाएंगे कि

$N \cap (Q \cup R) = (N \cap Q) \cup (N \cap R)$.
अब $Q \cup R = R$, क्योंकि $Q \subseteq R$.
अतः $N \cap (Q \cup R) = N \cap R = N$, क्योंकि $N \subseteq R$.
साथ ही $N \cap Q = N$ और $N \cap R = N$.
इसलिए, $(N \cap Q) \cup (N \cap R) = N \cup N = N$.
इस तरह, $N \cap (Q \cup R) = (N \cap Q) \cup (N \cap R)$.

अब यह सत्यापित करने के लिए कि

$N \cup (Q \cap R) = (N \cup Q) \cap (N \cup R)$,
ध्यान दें कि दोनों पक्ष Q के बराबर हैं। अतः नियम लागू होता है।

टिप्पणी 6: प्रमेय 2 (क) के अनुसार $\cup$ पर $\cap$ बंटित होता है और प्रमेय 2 (ख) के अनुसार $\cap$ पर $\cup$ बंटित होता है।

आइए अब हम अन्य नियमों पर विचार करें।

1.6.2 द मौर्गन नियम

अब हम दो नियमों पर चर्चा करेंगे जो किसी समुच्चय का पूरक मालूम करने की संक्रिया को समुच्चयों के सर्वनिष्ठ या सम्मिलन के साथ संबंध स्थापित करते हैं। इन नियमों को द मौर्गन नियम कहते हैं, जो कि अंग्रेज़ गणितज्ञ औगस्टस द मौर्गन (1806 – 1871) के नाम पर रखा गया है।

प्रमेय 3: मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं जो एक समष्टीय समुच्चय U में हैं। तब

(क) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
(ख) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

उपपत्ति : प्रमेय 2 की तरह, यहां भी हम केवल (क) को सिद्ध करेंगे और (ख) की उपपत्ति आप पर छोड़ देंगे।

(क) मान लीजिए $x \in (A \cap B)^c = U \setminus (A \cap B)$.

$\Leftrightarrow x \notin A \cap B$.

$\Leftrightarrow x \notin A$ या $x \notin B$. (क्योंकि यदि $x \in A$ और $x \in B$ तो $x \in A \cap B$).

$\Leftrightarrow x \in A^c$ या $x \in B^c$

$\Leftrightarrow x \in A^c \cup B^c$

इसलिए $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E 26) प्रमेय 3 का (ख) सिद्ध कीजिए।

E 27) A और B के लिए द मौर्गन नियमों को सत्यापित कीजिए, जहां
$A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}$.
(आप $U = \{1, 2, 3, 4\}$, अर्थात् $U = A \cup B$ ले सकते हैं। हां, यदि आप कोई और U लें, तब भी नियम सत्य रहेंगे।)

अभी तक हमने समुच्चय पर संक्रियाओं और उनके बीच के संबंधों पर चर्चा की है। अब हम समुच्चयों के एक गुणनफल के बारे में चर्चा करेंगे, जिसकी एक विशेष स्थिति है निर्देश-तंत्र (coordinate system).

1.7 कार्तीय गुणनफल

चित्र 7: रने देकार्त

हम दो दिए हुए समुच्चयों से एक रोचक समुच्चय प्राप्त कर सकते है — उनका कार्तीय गुणनफल, जो फ्रांसिसी दार्शनिक और गणितज्ञ रने देकार्त (1596 – 1650) के नाम पर रखा गया है। उन्होंने ही कार्तीय निर्देश-तंत्र का आविष्कार किया था। आइए देखें कि यह गुणनफल क्या होता है।

मान लीजिए A और B दो समुच्चय हैं। युग्म (a, b) लीजिए जिसमें पहला अवयव A से है और दूसरा अवयव B से है। तब (a, b) को **क्रमित युग्म** (ordered pair) कहते हैं। क्रमित युग्म में, अवयवों के क्रम का काफ़ी महत्त्व होता है। इस तरह (a, b) और (b, a) अलग-अलग क्रमित युग्म हैं।
दो क्रमित युग्म (a, b) और (c, d) **समान** कहलाते हैं, यदि $a = c$ और $b = d$.

क्रमित युग्मों की सहायता से हम निम्नलिखित परिभाषा देते हैं।
परिभाषा : समुच्चयों A और B का **कार्तीय गुणनफल** $A \times B$ सभी संभव क्रमित युग्मों (a, b) का समुच्चय होता है, जहाँ $a \in A$, $b \in B$.

अर्थात् $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A$ और $b \in B\}$.

उदाहरण के लिए, यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{4, 6\}$, तो

$A \times B = \{(1, 4), (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 4), (3, 6)\}$ और

$B \times A = \{(4, 1), (4, 2), (4, 3), (6, 1), (6, 2), (6, 3)\}$.

आप देख सकते हैं कि $(1, 4) \in A \times B$, परंतु $(1, 4) \notin B \times A$.
अतः $A \times B \neq B \times A$.

अब आप इन प्रश्नों को हल कीजिए,

E 28) यदि $A = \{2, 5\}$ और $B = \{2, 3\}$, तो
$A \times B$, $B \times A$, $A \times A$ ज्ञात कीजिए।

E 29) यदि $A \times B = \{(7, 2), (7, 3), (7, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\}$
तो A और B ज्ञात कीजिए।

दो समुच्चयों के कार्तीय गुणनफल की परिभाषा के बाद आइए अब हम अनेक समुच्चयों के कार्तीय गुणनफल की परिभाषा को देखें।

परिभाषा : मान लीजिए $A_1, A_2, \ldots, A_n$, n समुच्चय हैं। इनका कार्तीय गुणनफल समुच्चय
$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i \; \forall \; i = 1, 2, \ldots, n\}$ होगा।

'$\forall$', 'प्रत्येक के लिए' को प्रकट करता है।

उदाहरण के लिए, यदि $\mathbf{R}$ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय हो, तो

$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in \mathbf{R}, a_2 \in \mathbf{R}\}$

$\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(a_1, a_2, a_3) \mid a_i \in \mathbf{R}\ \forall\ i = 1, 2, 3\}$, आदि आदि ।

प्रायः $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ के लिए $\mathbf{R}^2$, और $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ (n बार) के लिए $\mathbf{R}^n$ लिखा जाता है ।

गणित के प्रारंभिक अध्ययन में आपने इस बात का प्रयोग काफ़ी किया होगा कि $\mathbf{R}$ का ज्यामितीय निरूपण एक रेखा है । क्या आप $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ के ज्यामितीय निरूपण से भी परिचित हैं ?

आप जानते हैं कि समतल के प्रत्येक बिन्दु के दो निर्देशांक, x और y होते हैं और वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक क्रमित युग्म (x, y) समतल के किसी बिन्दु के निर्देशांकों को परिभाषित करता है । इस तरह $\mathbf{R}^2$, x-अक्ष और y-अक्ष का कार्तीय गुणनफल है । इसलिए $\mathbf{R}^2$ एक समतल को निरूपित करता है । इसी प्रकार $\mathbf{R}^3$ त्रिविम समष्टि को निरूपित करता है और $n \geq 1$ के लिए $\mathbf{R}^n$, n - विम समष्टि को निरूपित करता है ।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए ।

E 30) बताइए कि निम्नलिखित में से कौन से कार्तीय गुणनफल $Q \times Z \times N$ के सदस्य हैं ? क्यों ?

(क) $(3,0)$, (ख) $(1/2, 1/2, 1/2)$, (ग) $(1, 1, 1)$, (घ) $(1/2, -5, \sqrt{2})$, (ङ) $\{-2, 2, 3\}$.

E 31) $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ के एक उचित अरिक्त उपसमुच्चय का उदाहरण दीजिए ।

E 32) किन्हीं 3 समुच्चयों A, B और C के लिए सिद्ध कीजिए कि

(क) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(ख) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

$\times$, दोनों $\cup$ और $\cap$ पर बंटित होता है ।

हम समुच्चयों पर अपनी चर्चा यहीं समाप्त करते हैं । आइए संक्षिप्त में देखें कि इस इकाई में हमने क्या किया है ।

1.8 सारांश

समुच्चयों की चर्चा के दौरान हमने निम्नलिखित पर ग़ौर किया है ।

1. वस्तुओं के किसी सुपरिभाषित संग्रह को समुच्चय कहते हैं ।
2. समुच्चयों को निरूपित करने की सूचीयन विधि और गुण विधि ।
3. यदि दो समुच्चय A और B दिए हों, तो $A \subseteq B$, $A \supseteq B$ और $A = B$ से हमारा क्या अर्थ है ।
4. वेन आरेख से समुच्चयों और उनके संबंध का चित्रीय निरूपण, और उसकी उपयोगिता ।
5. समुच्चयों पर पूरकीकरण, सर्वनिष्ठ और सम्मिलन की संक्रियाएँ, और उनके गुण ।
6. बंटन-नियम : यदि A, B और C तीन समुच्चय हों, तो

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

7. द मौर्गन नियम : यदि A और B दो समुच्चय हों, तो

$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

8. समुच्चयों का कार्तीय गुणनफल ।

अब हमारा सुझाव है कि **भाग 1.1 में दिए गए उद्देश्यों को फिर से पढ़कर,** आप यह देखें कि आपने उन उद्देश्यों की प्राप्ति कर ली है या नहीं । इसकी जांच करने की एक विधि है कि आप इस इकाई के सभी प्रश्नों को हल कर सके ।

यदि आप हमारे हल जानना चाहते हैं, तो इन्हें आप अगले भाग में देख सकते हैं ।

1.9 हल/उत्तर

E 1) (ख), (ग), (घ), (ङ)

E 2) (ग), (ङ)

E 3) क) $\{2\}$
ख) $\{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
ग) $\{2, -2\}$
घ) $\{8\}$
ङ) $\{a, b, c, ..., x, y, z\}$

E 4) क) $\{x^2 \mid x \in Z\}$
ख) $\{x \mid x$ एक अभाज्य संख्या है$\}$
ग) $\{x \mid x$ एक सम संख्या है $\}$
घ) अनेक निरूपण हो सकते हैं (टिप्पणी 2 देखिए) । उदाहरण के लिए,
$\phi = \{ x \in N \mid x$ विषम और सम दोनों है $\}$,या
$\phi = \{ x \in N \mid x < 0 \}$

E 5) **R**

E 6) (ख), (ग), और (ङ) परिमित हैं, (क) और (घ) अनंत हैं ।

E 7) $\phi, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}$.
यदि परिमित समुच्चय A के n अवयव हों, तो इसके घात समुच्चय के 2^n अवयव हैं ।

E 8) मान लीजिए $x \in A$. तब
$A \subseteq B \Rightarrow x \in B$, और तब

$B \subseteq C \Rightarrow x \in C$

$\therefore x \in A \Rightarrow x \in C$

$\therefore A \subseteq C$

E 9) $A = \{ 0 \}, B = \{ 1 \}, C = \{ 0 \}$ लीजिए ।

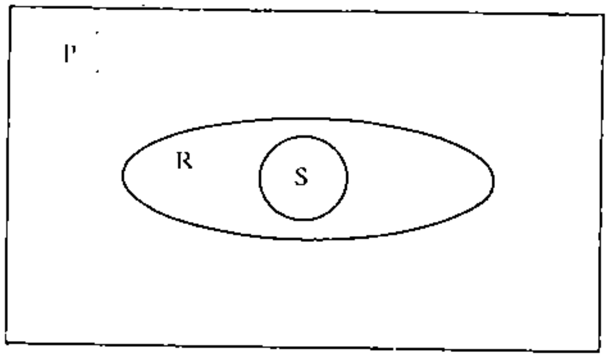
तब $A \not\subseteq B$, $B \not\subseteq C$, पर $A \subseteq C$.

E 10) ध्यान दीजिए कि $A = \{ 2 \} = C, B = \{ 1, 2\}$.

$\therefore A = C$ और $A \subseteq B$

E 11) $A \supseteq C$

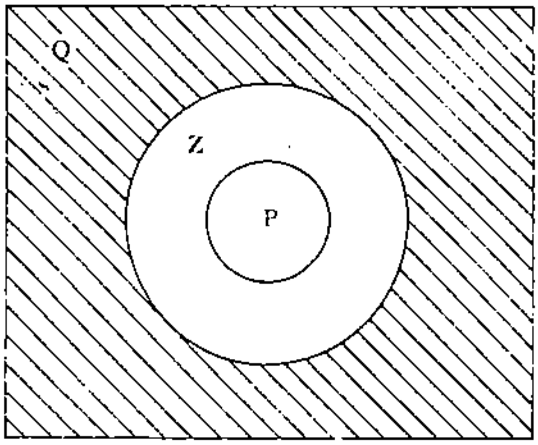
E 12)



चित्र 8

S, R, P क्रमशः वर्ग, आयत और सांमातरचतुर्भुज के समुच्चय हैं। यहाँ हमने $U = P$ लिया है।

E13) क)



चित्र 9

छायादार क्षेत्र $Q \setminus Z$ है।

ख) अनंत

E 14) ϕ, ϕ, A और

$(A^c)^c = A$ क्योंकि $x \in A \Leftrightarrow x \notin A^c \Leftrightarrow x \in (A^c)^c$

E 15) Z, Z, Z, ϕ

E 16) ग) (क) से हम जानते हैं कि $A \cap B \subseteq A$. हमें सिद्ध करना है कि $A \subseteq A \cap B$. इसके लिए, मान लीजिए $x \in A$. तब, क्योंकि $A \subseteq B$. इसलिए $x \in B$. इस तरह $x \in A \cap B$.
$\therefore A \subseteq A \cap B.$
$\therefore A = A \cap B$

घ) $A \cap A \subseteq A$, (क) को लागू करने पर।
$A \subseteq A \cap A$, (ग) की उपपत्ति की तरह।
$\therefore A = A \cap A.$

ङ) $A \cap \phi \subseteq \phi$, (ग) को लागू करने पर।
और $\phi \subseteq A \cap \phi$, क्योंकि ϕ प्रत्येक समुच्चय का उपसमुच्चय है।
$\therefore A \cap \phi = \phi.$

च) $A \cap B \subseteq B$ और $A \cap B \subseteq A$. $\therefore A \cap B \subseteq B \cap A$.
इसी प्रकार $B \cap A \subseteq A \cap B$.
$\therefore A \cap B = B \cap A.$

छ) $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A$ और $x \notin B$

$\Leftrightarrow x \in A$ और $x \in B^c$

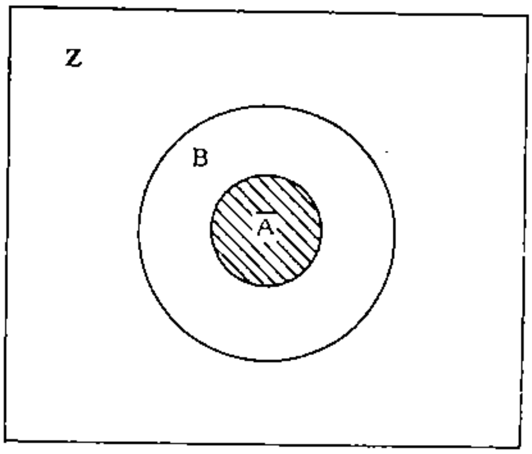
$\Leftrightarrow x \in A \cap B^c$

$\therefore A \setminus B = A \cap B^c$

ज) मान लीजिए $x \in C$. तब $C \subseteq A \Rightarrow x \in A$. इसी प्रकार, $x \in B$. इसलिए $x \in A \cap B$.
अतः $C \subseteq A \cap B$.

E 17) नहीं। उदाहरण के लिए, यदि $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 2, 4\}$, $C = \{1, 2\}$,
तब $C \subsetneq A$ और $C \subsetneq B$. पर C, $A \cap B$ में उचित रूप से आविष्ट नहीं है; यह ठीक $A \cap B$ के समान है।

E 18)



चित्र 10

E 19) $A \cap B \cap C = \{4\} = (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

E 20) $A \cap B \cap A = A \cap (B \cap A) = A \cap (A \cap B) = (A \cap A) \cap B = A \cap B$
$= \{30n \mid n \in \mathbf{N}\}$

E 21) क) $A \subseteq A \Rightarrow A \cup A = A$

ख) $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ या $x \in B$

$\Leftrightarrow x \in B$ या $x \in A$

$\Leftrightarrow x \in B \cup A$

$\therefore A \cup B = B \cup A$

ग) $\phi \subseteq A \Rightarrow A \cup \phi = A$

घ) मान लीजिए $x \in A \cup B$. तब $x \in A$ या $x \in B$. इनमें से किसी भी स्थिति में $x \in C$.
क्योंकि $A \subseteq C$ और $B \subseteq C$. इस तरह
$x \in A \cup B \Rightarrow x \in C$.
$\therefore A \cup B \subseteq C$.

E 22) $\{x \in \mathbf{R} \mid 0 \le x \le 3\}$

E 23) चूंकि $A \subseteq A \cup B = \phi$, इसलिए हम पाते हैं कि $A \subseteq \phi$. और सदा ही $\phi \subseteq A$.
$\therefore A = \phi$. इसी प्रकार $B = \phi$.

E 24) क) $A = \{3x \mid x \in \mathbf{N}\}$, $B = \{6x \mid x \in \mathbf{N}\}$, $C = \{10x \mid x \in \mathbf{N}\}$
ध्यान दीजिए कि $B \subseteq A$.

$\therefore A \cup B = A$

$\therefore (A \cup B) \cup C = A \cup C$

$= \{x \in \mathbf{N} \mid 3, x$ को भाजित करता है या $10, x$ को भाजित करता है$\}$.

साथ ही, $A \cup B \cup C = \{x \in \mathbf{N} \mid 3, 6$ या $10, x$ को भाजित करते हैं $\}$.

$= \{ x \in N \mid 3$ या $10, x$ को भाजित करते हैं $\}$
$= (A \cup B) \cup C$
इसी प्रकार $A \cup B \cup C = A \cup (B \cup C)$

ख) $A \setminus B \subseteq A \subseteq A \cup B$, $B \setminus A \subseteq B \subseteq A \cup B$, $A \cap B \subseteq A \cup B$.
$\therefore (A \setminus B) \cup (A \cap B) \cup (B \setminus A) \subseteq A \cup B$.
विलोमतः मान लीजिए कि $x \in A \cup B$. तब $x \in A$ या $x \in B$.
अब x के लिए केवल तीन संभावनाएँ हैं :

i) $x \in A$ परंतु $x \notin B$, अर्थात् $x \in A \setminus B$, या

ii) $x \in A$ और $x \in B$, अर्थात् $x \in A \cap B$, या

iii) $x \in B$ परंतु $x \notin A$, अर्थात् $x \in B \setminus A$.

इस तरह हमने परिणाम को सिद्ध कर दिया है।

E 25) $x \in A \cup (B \cap C)$
$\Leftrightarrow x \in A$ या $x \in B \cap C$
$\Leftrightarrow x \in A$ या $(x \in B$ और $x \in C)$
$\Leftrightarrow (x \in A$ या $x \in B)$ और $(x \in A$ या $x \in C)$
$\Leftrightarrow x \in A \cup B$ और $x \in A \cup C$
$\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

E 26) $x \in (A \cup B)^c \Leftrightarrow x \notin A \cup B$
$\Leftrightarrow x \notin A$ और $x \notin B$
$\Leftrightarrow x \in A^c$ और $x \in B^c$
$\Leftrightarrow x \in A^c \cap B^c$

E 27) $A \cup B = U \therefore (A \cup B)^c = \phi$
साथ ही, $A^c = \{3, 4\}$, $B^c = \{1\}$
$\therefore A^c \cap B^c = \phi$.
$\therefore (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
ऊपर से, $A \cap B = \{2\} \therefore (A \cap B)^c = \{1, 3, 4\}$.
$\therefore A^c \cup B^c = (A \cap B)^c$

E 28) $A \times B = \{ (2,2), (2,3), (5,2), (5,3) \}$

$B \times A = \{ (2,2), (3,2), (2,5), (3,5) \}$

$A \times A = \{ (2,2), (2,5), (5,2), (5,5) \}$

E 29) $A = \{7,2\}$, $B = \{2,3,4\}$

E 30) केवल (ग). (क) नहीं है, क्योंकि यह केवल एक क्रमित युग्म है, और त्रिक नहीं। (ख) नहीं है, क्योंकि $1/2 \notin \mathbf{N} \cup \mathbf{Z}$. (घ) नहीं है, क्योंकि $\sqrt{2} \notin \mathbf{N}$. (ङ) नहीं है, क्योंकि यह क्रमित त्रिक नहीं है; यह तीन अवयवों का समुच्चय है।

E 31) कोई भी उपसमुच्चय $A \times B$ है, जहाँ $A \subseteq \mathbf{R}$, $B \subseteq \mathbf{R}$.
$\mathbf{R}^2$ के उचित उपसमुच्चय के लिए या तो A को या B को $\mathbf{R}$ का एक उचित उपसमुच्चय होना चाहिए।

E 32) क) $(x, y) \in A \times (B \cup C)$
$\Leftrightarrow x \in A$ और $y \in B \cup C$
$\Leftrightarrow x \in A$ और $y \in B$ या $y \in C$.
$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B$ या $(x, y) \in A \times C$.
$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$

ख) $(x, y) \in A \times (B \cap C)$
$\Leftrightarrow (x, y) \in A$ और $y \in B \cap C$
$\Leftrightarrow (x, y) \in A \times B$ और $(x, y) \in A \times C$
$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times B) \cap (A \times C)$

इकाई 2 संमिश्र संख्याएँ

इकाई की रूपरेखा

2.1 प्रस्तावना

अपने अध्ययन में अभी तक आपको प्राकृतिक संख्याओं, पूर्णांकों, परिमेय संख्याओं और वास्तविक संख्याओं से ही परिचय हुआ होगा । आप यह भी जानते हैं कि N में कुछ कमी होने के कारण गणितज्ञों ने सदियों पहले ही ऋण संख्याओं की संकल्पना को विकसित किया था । और इस तरह समुच्चय Z की उत्पत्ति हुई थी । ऐसे ही कारणों से इतिहास के विभिन्न चरणों पर Z को Q में और Q को R में विस्तारित किया गया । फिर एक समय ऐसा आया जबकि गणितज्ञ $x^2 + 1 = 0$ जैसे समीकरणों के हल ढूंढने में लग गए । क्योंकि $x^2 + 1 = 0$ का R में कोई हल नहीं है, इसलिए बहुत समय तक माना गया कि इस समीकरण का कोई हल है ही नहीं । इस संबंध में भारतीय गणितज्ञ महावीर (850 ई०) और भास्कर (1150 ई०) ने स्पष्ट रूप से कहा था कि ऋण संख्या के वर्गमूल का कोई अस्तित्व नहीं होता । फिर 16वीं शताब्दी में इटली के गणितज्ञ कार्दानो ने द्विघात समीकरण $x^2 - 10x + 40 = 0$ को हल करने की कोशिश की । उन्होंने यह पाया कि $x_1 = 5 + \sqrt{-15}$ और $x_2 = 5 - \sqrt{-15}$, समीकरण को संतुष्ट करते हैं । लेकिन $\sqrt{-15}$ क्या है ? उन्होंने और अन्य गणितज्ञों ने इस व्यंजक को कुछ अर्थ देने की कोशिश की । यहाँ तक कि वास्तविक जीवन की स्थितियों के गणितीय मॉडल बनाते समय 17वीं और 18वीं शताब्दी के गणितज्ञों के सामने ऐसे समीकरणों के अधिक से अधिक उदाहरण आए जिनके कोई वास्तविक मूल नहीं थे । इस कमी को दूर करने के लिए संमिश्र संख्या (complex number) की संकल्पना धीरे धीरे विकसित होने लगी । सुप्रसिद्ध गणितज्ञ गाउस (1777-1855) ही वह पहले व्यक्ति थे जिन्होंने $5 + \sqrt{-15}$ जैसे संख्याओं के लिए "संमिश्र संख्या" के नाम का प्रयोग किया और लोकप्रिय बनाया ।

19वीं शताब्दी के प्रारंभिक वर्षों में संमिश्र संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण विकसित किया गया । इस निरूपण के कारण ही सभी गणितज्ञों ने संमिश्र संख्याओं को स्वीकार कर लिया । तब से अब तक संमिश्र संख्याएँ गणित की लगभग सभी शाखाओं में प्रवेश कर चुकी है । वास्तव में आधुनिक भौतिकी और इंजीनियरी के अनेक क्षेत्रों को विकसित करने में संमिश्र संख्याओं की महत्वपूर्ण भूमिका रही है ।

इस इकाई में हम आपको संमिश्र संख्याओं से और इन्हें निरूपित करने की विभिन्न विधियों से परिचित कराना चाहते हैं । यहाँ हम संमिश्र संख्याओ पर आधारभूत बीजीय संक्रियाओं के बारे

में भी चर्चा करेंगे । अंत में हम आपको एक अति उपयोगी परिणाम, अर्थात् द मुआव्र प्रमेय से परिचित कराएंगे । इस प्रमेय के अनेक अनुप्रयोग हैं । यहाँ हम केवल दो अनुप्रयोगों पर कुछ विस्तार से चर्चा करेंगे ।

यहाँ हम फिर से कहना चाहेंगे कि आप कोई भी गणित पाठ्यक्रम पढ़ें, आपको इस इकाई में दी गई विषयवस्तु के ज्ञान की आवश्यकता पड़ेगी । इसलिए आप कृपया इसे ध्यान से पढ़ें तथा सुनिश्चित कर लें कि आपने निम्नलिखित उद्देश्य प्राप्त कर लिए हैं ।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- संमिश्र संख्या को परिभाषित कर सकेंगे;
- संमिश्र संख्या के ज्यामितीय, ध्रुवीय और चरघातांकीय निरूपणों का वर्णन कर सकेंगे;
- संमिश्र संख्याओं पर विभिन्न बीजीय संक्रियाओं को लागू कर सकेंगे;
- द मुआव्र प्रमेय को सिद्ध कर सकेंगे और उसका प्रयोग कर सकेंगे ।

2.2 संमिश्र संख्या क्या होती है

जब आप रैखिक समीकरण $2x+3=0$ लेते हैं, तो आप जानते हैं कि इसका एक हल है, अर्थात् $x=-\frac{3}{2}$. लेकिन क्या आप हमेशा समीकरण $ax+b=0$ का कोई वास्तविक हल प्राप्त कर सकते है, जहाँ $a, b \in \mathbf{R}$ और $a \neq 0$? क्या हल $x=-\frac{b}{a}$ होगा? यही होगा, क्योंकि

$$a\left[-\frac{b}{a}\right]+b=0.$$

अब, यदि $\mathbf{R}$ पर हम किसी द्विघात समीकरण के वास्तविक हलों को प्राप्त करना चाहें, तो क्या होता है? ऐसा ही एक समीकरण $x^2+1=0$, अर्थात् $x^2=-1$ लीजिए । इस समीकरण का $\mathbf{R}$ में कोई हल नहीं है, क्योंकि किसी भी वास्तविक संख्या का वर्ग ऋणेत्तर होता है ।

लगभग 250 ई० से ही गणितज्ञों को वास्तविक जीवन की स्थितियों से उत्पन्न होने वाले कुछ ऐसे द्विघात समीकरण प्राप्त होते रहे हैं जिनका कोई वास्तविक हल नहीं है । 16वीं शताब्दी में ही जाकर इटली के दो गणितज्ञों कार्दानो और बॉम्बेली ने संख्या-प्रणाली के अंतर्गत ऋण संख्याओं के वर्गमूलों को शामिल करने के बारे में गंभीर विचार विमर्श शुरू किया । अगले दो सौ वर्षों में ऐसे अनेकों उदाहरण प्राप्त हुए जिनमें वास्तविक समस्याओं के हल मालूम करने में ऋणात्मक संख्याओं के वर्गमूलों का प्रयोग काफ़ी सहायक रहा ।

1777 में स्विट्ज़रलैंडवासी गणितज्ञ ऑयलर (Euler) ने "अधिकल्पित इकाई" प्रस्तुत किया जिसे उन्होंने यूनानी अक्षर आयोटा, अर्थात् i, से प्रकट किया । उन्होंने $i=\sqrt{-1}$ परिभाषित किया । इसके तुरंत बाद महान गणितज्ञ कार्ल फ्रेड्रिक गाउस ने $1+i\,(=1+\sqrt{-1})$ या $-2+i\sqrt{5}\,(=-2+\sqrt{-5})$ जैसी संख्याओं के लिए शब्द संमिश्र संख्या का प्रयोग किया ।

आजकल गणित के प्रत्येक क्षेत्र में इन संख्याओं को स्वीकार किया जाता है और उनका प्रयोग किया जाता है ।
आइए अब हम संमिश्र संख्या को परिभाषित करें ।

परिभाषा : संमिश्र संख्या, $x+iy$ के रूप वाली एक संख्या होती है, जहाँ x और y वास्तविक संख्याएँ हैं और $i^2=-1$.

हम x को संमिश्र संख्या $x+iy$ का **वास्तविक भाग** (real part) और y को **अधिकल्पित भाग** (imaginary part) कहते हैं । और हम $x=\mathrm{Re}(x+iy)$ और $y=\mathrm{Im}(x+iy)$ लिखते हैं ।

चेतावनी : i) i एक वास्तविक संख्या **नहीं** है ।
ii) $\mathrm{Im}(x+iy)$ वास्तविक संख्या y **है, न कि** iy.

हम सभी संमिश्र संख्याओं के समुच्चय को C से प्रकट करते हैं।
अतः $C = \{x + iy \mid x, y \in R\}$.
प्रथानुसार हम प्रायः C के अवयव को z से प्रकट करेंगे। अतः जब भी हम संमिश्र संख्या z का प्रयोग करेंगे, तो हमारा मतलब $z = x + iy$ से होगा, किन्हीं $x, y \in R$ के लिए। वास्तव में, $z = \text{Re}\, z + i\, \text{Im}\, z$.

संमिश्र संख्या को लिखते समय हम एक और प्रथा को अपनाते हैं, जिसका उल्लेख हम निम्नलिखित टिप्पणी में कर रहे हैं।

टिप्पणी 1 : भाग 2.4.2 का अध्ययन करने के दौरान आप देखेंगे कि $iy = yi \ \forall y \in R$. **अतः हम संमिश्र** संख्या $x + iy$ को $x + yi$ भी लिख सकते हैं।
प्रथानुसार हम किसी भी संमिश्र संख्या $x + iy$ को, जहाँ $y \in Q$, $x + yi$ के रूप में लिखते हैं। उदाहरण के लिए, हम $2 + i1, 2 + i\frac{3}{2}$ और $2 + i\frac{5}{9}$ के स्थान पर क्रमशः $2 + i, 2 + \frac{3}{2}i$ और $2 + \frac{5}{9}i$ लिखना पसंद करते हैं। परन्तु यदि $z \in C$, $z = a + i\sqrt{b}$, के रूप का हो, जहां $b \in R$, तो इस स्थिति में z को इसी रूप में ही लिखते हैं, न कि $z = a + \sqrt{b}i$ के रूप में।

अब आप संमिश्र संख्याओं से अच्छी तरह से परिचित हो चुके हैं। तो बताइए कि निम्नलिखित संख्याएँ C के सदस्य हैं या नहीं?

$5 + \sqrt{-15}, 3i, \sqrt{2}, \sqrt{-2}$

इनमें से प्रत्येक संख्या संमिश्र संख्या है, क्योंकि

$$5 + \sqrt{-15} = 5 + i\sqrt{15}$$
$$3i = 0 + i3$$
$$\sqrt{2} = \sqrt{2} + i0$$
$$\sqrt{-2} = 0 + i\sqrt{2}$$

$\sqrt{-a} = i\sqrt{a} \ \forall \ a \geq 0.$

इन उदाहरणों से आप शायद समझ गए होगें कि कुछ ऐसी संमिश्र संख्याएँ हैं जिनका वास्तविक भाग या अधिकल्पित भाग शून्य है। ऐसी संख्याओं को हम एक ख़ास नाम देते हैं।
परिभाषा : संमिश्र संख्या $z = x + iy$ लीजिए। यदि $y = 0$, तो हम कहते हैं कि z **शुद्धतः वास्तविक** (purely real) है। यदि $x = 0$, तो हम कहते हैं कि z **शुद्धतः अधिकल्पित** (purely imaginary) है। प्रायः हम शुद्धतः वास्तविक संख्या $x + 0\,i$, के स्थान पर केवल x और शुद्धतः अधिकल्पित संख्या $0 + iy$ के स्थान पर केवल iy लिखते हैं।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

E 1) नीचे दी गई सारणी को पूरा कीजिए:

z	Re z	Im z
$\frac{1 + \sqrt{-23}}{2}$		
i		
	0	0
$\frac{-i + \sqrt{3}}{5}$		

E 2) क्या $R \subseteq C$? क्यों ?

अब, यदि कोई संमिश्र संख्या दी हुई हो, तो हम उससे संबंधित एक संमिश्र संख्या के अति स्वाभाविक

रूप से इस प्रकार परिभाषित कर सकते हैं ।

परिभाषा : मान लीजिए $z = x + iy \in C$. तो z का **संमिश्र संयुग्मी** (complex conjugate) (या केवल **संयुग्मी**) संमिश्र संख्या $\bar{z} = x - iy$ है ।

इस तरह, $Re\,\bar{z} = Re\,z$ और $Im\,\bar{z} = -Im\,z$.

उदाहरण के लिए, यदि $z = 15 + i$, तब $\bar{z} = 15 - i$.

अब आप नीचे दिए गए सरल प्रश्न को हल कीजिए ।

E 3) $2 + 3i, 2 - 3i, 2, 3i$ के संयुग्मी प्राप्त कीजिए ।

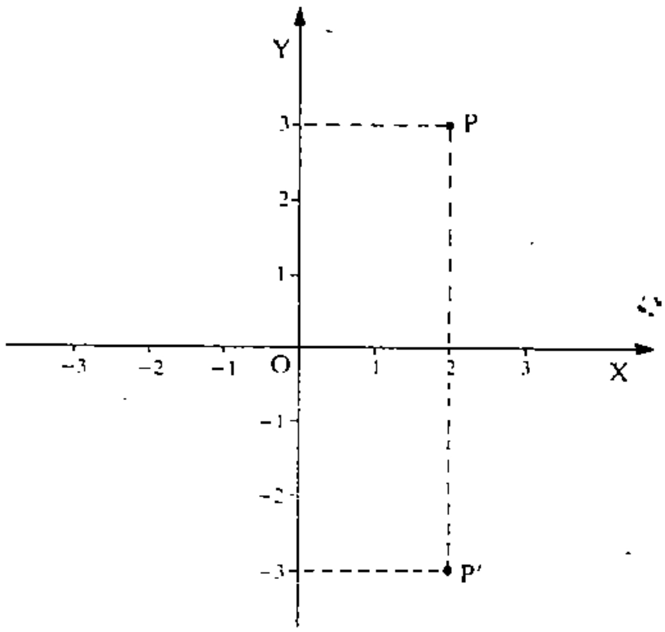
भाग 2.4.2 में आप संमिश्र संयुग्मी का एक महत्वपूर्ण प्रयोग देखेंगे ।

अभी तक हमने आपको संमिश्र संख्याओं को निरूपित करने की एक बीजीय विधि से परिचित कराया है । आइए अब हम एक ज्यामितीय निरूपण पर विचार करें ।

2.3 ज्यामितीय निरूपण

आप जानते हैं कि हम वास्तविक संख्याओं को ज्यामितीय रूप से संख्या रेखा पर निरूपित कर सकते हैं । वास्तव में वास्तविक संख्याओं और संख्या रेखा के बिन्दुओं के बीच एकैक संगति (one-one correspondence) होती है । आपने यह भी देखा है कि कोई भी संमिश्र संख्या दो वास्तविक संख्याओं, अर्थात् उसके वास्तविक भाग और अधिकल्पित भाग से निर्धारित होती है । इस तथ्य के कारण गणितज्ञों वेसल और गाउस ने सोचा कि क्यों न संमिश्र संख्याओं को समतल के बिन्दुओं से निरूपित किया जाए । यह ज्यामितीय निरूपण 19वीं शताब्दी के प्रारंभिक वर्षों में प्रस्तुत किया गया था । इसे **आरगां आरेख** (Argand diagram) कहते हैं, स्विट्ज़रलैंडवासी गणितज्ञ जे. आर. आरगां के नाम पर, जिन्होंने इस संकल्पना का प्रसार किया था ।

आइए देखें कि आरगां आरेख क्या होता है । XOY- समतल में समकोणिक अक्ष OX और OY लीजिए । समतल का कोई भी बिन्दु अपने कार्तीय निर्देशांकों से निर्धारित होता है । अब हम



चित्र 1 : आरगां आरेख

एक संमिश्र संख्या $x + iy$ लेते हैं। इसे हम समतल के उस बिंदु से निरूपित करते हैं, जिसके कार्तीय निर्देशांक (x, y) हैं। यह निरूपण एक आरगां आरेख है। उदाहरण के लिए, चित्र 1 में P संमिश्र संख्या $2 + 3i$ को निरूपित करता है, जिसका वास्तविक भाग 2 है और अधिकल्पित भाग 3 है। और p' किस संख्या को निरूपित करता है? P', $2 - 3i$ के संगत है।

शायद आपने ध्यान दिया होगा कि आरगां आरेख में शुद्धतः वास्तविक संख्याएँ x-अक्ष पर और शुद्धतः अधिकल्पित संख्याएँ y-अक्ष पर स्थित हैं।

तो, आपने देखा है कि यदि $x + iy \in C$, तो इसके साथ हम एक और केवल एक ही बिन्दु $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ का संबंध स्थापित कर सकते हैं। इसका विलोम भी सत्य है। अर्थात् यदि $(x, y) \in \mathbf{R}^2$, तो इसके साथ हम अद्वितीय संमिश्र संख्या $x + iy$ का संबंध स्थापित कर सकते हैं। इसका मतलब है कि संमिश्र संख्या की निम्नलिखित परिभाषा पहले दी गई परिभाषा के बराबर है।

परिभाषा : **संमिश्र संख्या** वास्तविक संख्याओं का एक क्रमित युग्म है। समुच्चयों की भाषा में हम कह सकते हैं कि $C = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$.

इस परिभाषा की सहायता से क्या आप बता सकते हैं कि दो संमिश्र संख्याएँ समान कब होती हैं?

परिभाषा : दो संमिश्र संख्याएँ (x_1, y_1) और (x_2, y_2) **समान** होती हैं यदि और केवल यदि $x_1 = x_2$ और $y_1 = y_2$.

दूसरे शब्दों मे, $x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2$ यदि और केवल यदि $x_1 = x_2$ और $y_1 = y_2$.

इस तरह, C के दो अवयव समान होते हैं, यदि और केवल यदि इनके वास्तविक भाग समान हों और इनके अधिकल्पित भाग समान हों।

अतः, उदाहरण के लिए $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, परन्तु

$\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} \neq -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$.

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

E 4) क) नीचे दिए गए C के अवयवों को एक आरगां आरेख में आलेखित कीजिए।
$3, -1 + i, \overline{-1 + i}, i$.
ख) समुच्चयों $S_1 = \{2 + iy \mid y \in \mathbf{R}\}$, $S_2 = \{x + 3i \mid x \in \mathbf{R}\}$ और $S_3 = \{x + ix \mid x \in \mathbf{R}\}$ को एक आरगां आरेख में आलेखित कीजिए।

E 5) समतल के बिन्दुओं $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$, $(2, 0)$ और $(0, -2)$ से निरूपित C के अवयवों को लिखिए।

E 6) k और m के किन मानों के लिए $k + 3i = \frac{1}{2} + im$?

E4 को हल करते समय इस बात की ओर आपने शायद ध्यान दिया होगा कि किसी भी $z \in C$ के लिए आरगां आरेख का वह बिन्दुं, जो $\bar{z}$ को निरूपित करता है, x-अक्ष के सापेक्ष z को निरूपित करने वाले बिंदु का परावर्तन (reflection) होता है।

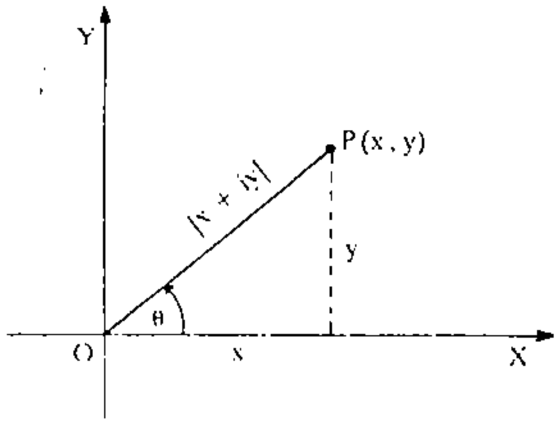
अब संमिश्र संयुग्मी से संबंधित दो प्रश्न और हल कीजिए।

E 7) किन $z \in C$ के लिए $z = \bar{z}$?

E 8) किसी भी $z \in C$ के लिए यह दिखाइए कि $\bar{\bar{z}} = z$, अर्थात् यह दिखाइए कि z के संयुग्मी का संयुग्मी z होता है।

अब कोई शून्येतर संमिश्र संख्या $z = x + iy$ लीजिए। इसे हम चित्र 2 के आरगां आरेख में बिन्दु P से

निरूपित करते हैं । हम दूरी OP को **z का मापांक** (modulus) कहते हैं और इसे $|z|$ से प्रकट करते हैं ।



चित्र 2 : मापांक और कोणांक

पाइथागोरस प्रमेय को लागू करने पर हम पाते हैं कि $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
यदि z वास्तविक है, तो $|z|$ क्या होता है? यह z का निरपेक्ष मान (absolute value) ही है ।

मापांक से संबंधित हम एक अन्य महत्त्वपूर्ण टिप्पणी देने जा रहे हैं ।
टिप्पणी 2: $z \in C$, परन्तु $|z| \in R$.

अब, यदि आप चित्र 2 को फिर से देखें, तो आप पाएंगे कि $\angle XOP = \theta$. हम θ को $z = x + iy$ का **एक कोणांक** (argument) कहते है ।

$z = 0$ यदि और केवल यदि $|z| = 0$

$z = 0$ के लिए $|z| = 0$, और इसका कोणांक परिभाषित नहीं है ।

अब यदि $z \in C$, जहाँ $z \neq 0$, तो क्या इसका एक अद्वितीय कोणांक होगा? यदि θ एक कोणांक है, तो $2\pi + \theta$, $4\pi + \theta$, आदि भी कोणांक होंगे । यदि हम θ को यूं चुने कि $-\pi < \theta \leq \pi$, तो हमें एक अद्वितीय कोणांक प्राप्त होगा । θ के इस मान को हम **Arg z** से प्रकट करते हैं ।

यदि हम चित्र 2 में $|z| = r$ लें, तो आप देख सकते हैं कि $\sin\theta = \frac{y}{r}$ और $\cos\theta = \frac{x}{r}$.
$\therefore x = r\cos\theta, \ y = r\sin\theta$ ....(1)

अतः हम z को

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

भी लिख सकते हैं, जहाँ $r = |z|$ और $\theta = \text{Arg } z$.

इसे z का **ध्रुवीय रूप** (polar form) कहते हैं ।

ध्यान दीजिए कि यदि $z = x + iy$, तो हम (1) का प्रयोग करके $\text{Arg } z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ लिख सकते हैं । लेकिन $-\pi$ और π के बीच एक से ज़्यादा कोणों के tan के मान बराबर हो सकते हैं । इस लिए हमें Arg z का सही मान मालूम करने के लिए आरगां आरेख की सहायता ले लेनी चाहिए ।

आइए एक उदाहरण लें ।
उदाहरण 1. क) $1 + i$ का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए ।
ख) z प्राप्त कीजिए, जबकि $|z| = 2$ और $\text{Arg } z = \frac{\pi}{3}$.

हल : क) मान लीजिए $z = 1 + i$.
तब $\text{Re } z = 1$, $\text{Im } z = 1$. इस तरह $1 + i$, $(1, 1)$ के संगत है, जो कि प्रथम चतुर्थांश में स्थित है । यहाँ

$|z| = \sqrt{(\text{Re } z)^2 + (\text{Im } z)^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$, और

$\text{Arg } z = \tan^{-1}\left(\frac{\text{Im } z}{\text{Re } z}\right) = \tan^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ या $\frac{3\pi}{4}$.

क्योंकि z प्रथम चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए Arg z, 0 और $\frac{\pi}{2}$ के बीच स्थित होगा । इस तरह, $\text{Arg } z = \frac{\pi}{4}$.

ख) $z = |z|[\cos(\text{Arg } z) + i\sin(\text{Arg } z)]$

$$= 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 1 + i\sqrt{3}.$$

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए ।

E 9) E4 (क) में दी गई संमिश्र संख्याओं के ध्रुवीय रूप लिखिए ।

E 10) दिखाइए कि $\{z \in C \mid |z| = 1\}$, R^2 में वृत्त $x^2+y^2 = 1$ का समीकरण है, और इसका विलोम भी सही होता है ।

संमिश्र संख्या को हम एक अन्य विधि से भी निरूपित कर सकते हैं । वास्तव में इस विधि का ध्रुवीय निरूपण से घनिष्ठ संबंध है । इसमें व्यंजक e^z का प्रयोग किया जाता है, जहाँ $z \in C$. आइए हम इस व्यंजक को परिभाषित करें ।

चित्र 3 : **ऑयलर** (1707-1783)

परिभाषा : यदि $z = x + iy \in C$, तो

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y).$$

विशेष रूप में, यदि $z = iy$, एक शुद्धतः अधिकल्पित संख्या हो, तो हमें निम्न सूत्र प्राप्त होता है:

ऑयलर सूत्र : $e^{iy} = \cos y + i\sin y \ \forall \ y \in R$

इस सूत्र को सुप्रसिद्ध स्विस गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर ने प्रस्तुत किया था । संमिश्र संख्याओं का अध्ययन करते समय आप इस सूत्र का प्रयोग काफ़ी करेंगे ।

अब, कोई $z \in C$ लीजिए । इसे हम इसके ध्रुवीय रूप

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ में लिखते हैं ।

अब ऑयलर सूत्र लागू करने पर हम $z = re^{i\theta}$ प्राप्त करते हैं ।

यह संमिश्र संख्या z का **चरघातांकी रूप** (exponential form) है ।

उदाहरण के लिए, $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3i}{2}$ का चरघातांकी रूप $3e^{i\pi/6}$ है, क्योंकि $|z| = 3$ और $\text{Arg } z = \frac{\pi}{6}$.

अब आप नीचे दिया गया प्रश्न हल कीजिए ।

E 11) नीचे दी गई संमिश्र संख्याओं को ध्रुवीय रूप और चरघातांकी रूप में लिखिए:

$$\sqrt{\frac{5}{2}} + i\sqrt{\frac{5}{2}},\ 1+i,\ -1,\ i.$$

अब तक आप संमिश्र संख्या को निरूपित करने की विभिन्न विधियों से अच्छी तरह से परिचित हो चुके होंगे । आइए अब हम संमिश्र संख्याओं पर लागू की जाने वाली कुछ संक्रियाओं के बारे में चर्चा करें ।

2.4 बीजीय संक्रियाएं

इस भाग में हम संमिश्र संख्याओं के जोड़, घटाना, गुणा और भाग पर चर्चा करेंगे । आइए पहले हम C में '+' और '–' पर विचार करें ।

2.4.1 जोड़ना और घटाना

R में जोड़ की परिभाषा की सहायता से हम C में जोड़ की परिभाषा देंगे ।

परिभाषा : दो संमिश्र संख्या $z_1 = x_1 + iy_1$ और $z_2 = x_2 + iy_2$ का **जोड़** संमिश्र संख्या $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$, अर्थात्
$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

आइए एक उदाहरण पर विचार करें ।

उदाहरण 2 : i) $3 + i$ और $-2 + 4i$, और
ii) -5 और $5 - i$
का जोड़ मालूम कीजिए ।

हल : i) $(3+i) + (-2+4i) = (3 + (-2)) + i(1+4)$

$= 1 + 5i$

ii) $(-5) + (5 - i) = (-5 + 0i) + (5 - i) = (-5 + 5) + i(0 - 1)$

$= 0 + i(-1) = -i$

क्या आपने इस बात पर ध्यान दिया है कि कोई भी संमिश्र संख्या, एक शुद्धतः वास्तविक संख्या और एक शुद्धतः अधिकल्पित संख्या का जोड़ होती है? ऐसा इसलिए होता है, क्योंकि $x + iy = (x + 0i) + (0 + iy)$.

नीचे दिए गए प्रश्नों में हमने C पर जोड़ के कुछ महत्त्वपूर्ण गुणों को सत्यापित करने के लिए आपसे कहा है ।

E 12) क) $2 + 3i$ और $\overline{2+3i}$ का जोड़ मालूम कीजिए ।

ख) दिखाइए कि $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}\,z$, जहाँ $z \in C$.

E 13) दिखाइए कि $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \ \forall z_1, z_2 \in C$.

C में जोड़ क्रमविनिमेय और साहचर्य होता है ।

E 14) क) दिखाइए कि $z_1 + z_2 = z_2 + z_1,\ \forall z_1, z_2 \in C$.

ख) दिखाइए कि $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)\ \forall\ z_1, z_2, z_3 \in C$.

E 15) एक ऐसा अवयव $a + ib \in C$ मालूम कीजिए जिससे कि
$z + (a + ib) = z\ \forall\ z \in C$.

यदि आपने इन प्रश्नों को हल कर लिया है, तो आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि C पर जोड़ की संक्रिया करीबन उन सभी गुणों को संतुष्ट करती है जिन्हें R पर जोड़ संतुष्ट करता है। और, जो आपने E15 में सिद्ध किया है, उसके अनुसार हम कहते हैं कि $0 + i0 (= 0)$, C में योज्य तत्समक (additive identity) है।

अब क्या आप C में घटाने की परिभाषा दे सकते हैं ? हम एक बहुत ही स्वाभाविक परिभाषा दे रहे हैं।

परिभाषा : दो संमिश्र संख्याओं $z_1 = x_1 + iy_1$ और $z_2 = x_2 + iy_2$ का **अंतर** $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ होता है, जहाँ $-z_2 = (-x_2) + i(-y_2)$.

किसी $z \in C$ के लिए $(-z)$, z का योज्य प्रतिलोम (additive inverse) होता है।

इस तरह, $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

$$= (x_1 + iy_1) + [(-x_2) + i(-y_2)]$$

$$= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

तो, किसी $z \in C$ के लिए, आपके हिसाब से $z - z$ क्या होगा? आइए देखें। $z = x + iy$ लीजिए। तब $z - z = (x - x) + i(y - y) = 0$, C में योज्य तत्समक।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

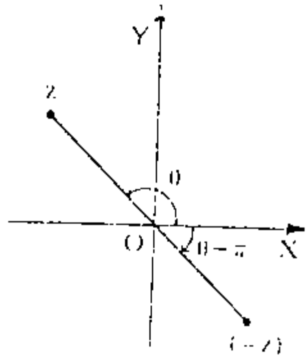
E 16) $(-6 + 3i) - (-3 - 2i)$ ज्ञात कीजिए।

E 17) $z - \bar{z}$ ज्ञात कीजिए, जहाँ $z \in C$.

E 18) (क) $|z|$ और $|-z|$,

(ख) Arg z और Arg $(-z)$

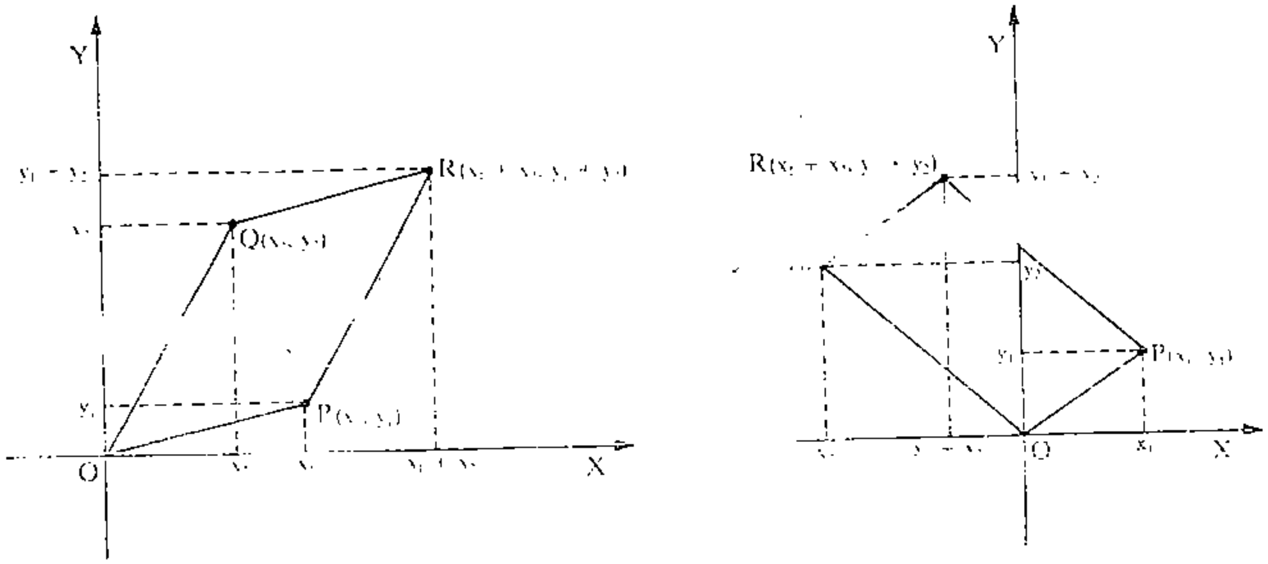
में संबंध मालूम कीजिए, जहाँ $z \in C$ (चित्र 4 देखिए)।



चित्र 4 : z और $-z$

अब हम संमिश्र संख्याओं के जोड़ के आलेखी निरूपण (graphical representation) के बारे में एक संक्षिप्त टिप्पणी देंगे।

टिप्पणी 3 : दो संमिश्र संख्याओं के जोड़ का एक महत्त्वपूर्ण ज्यामितीय निरूपण होता है। एक आरगां आरेख लीजिए जिसमें हमने दो संमिश्र संख्याओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) को क्रमशः बिन्दु P और Q से निरूपित किया है (चित्र 5).



चित्र 5: C में जोड़

यदि हम उस समांतरचतुर्भुज को पूरा करें जिसकी संलग्न भुजाएँ OP और OQ है, तो चौथा शीर्ष बिन्दु R जोड़ $(x_1, y_1) + (x_2, y_2)$ को निरूपित करेगा।

सदिश बीजगणित में आपको इसी प्रकार का समांतरचतुर्भुज योग नियम देखने को मिलेगा।

अभी तक आपने देखा कि किस प्रकार हमने स्वाभाविक रूप से R में जोड़ (और घटाने की) संक्रिया की सहायता से C में जोड़ (और घटाने की) संकिया को परिभाषित किया। आइए देखें कि हम ऐसा ही गुणन-संक्रिया के लिए कर सकते हैं या नहीं।

2.4.2 गुणा और भाग

अब हम R में गुणन-संक्रिया की सहायता से C में गुणन संक्रिया को परिभाषित करेंगे। पर, रास्ता थोड़ा चक्करदार है। दो एकघात बहुपदों $a + bx$ और $c + dx$ का निम्नलिखित गुणनफल लीजिए, जहाँ $a, b, c, d \in R$.

$(a + bx)(c + dx) = ac + (ad + bc)x + bdx^2$.

अब, यदि हम इसमें $x = i$ लें, तो हमें

$(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

प्राप्त होगा, क्योंकि $i^2 = -1$

हम C में गुणनफल की परिभाषा इसी प्रकार देंगे।

परिभाषा: दो संमिश्र संख्याओं $z_1 = x_1 + iy_1$ और $z_2 = x_2 + iy_2$ का **गुणनफल** $z_1 z_2$ निम्नलिखित संमिश्र संख्या होती है :

$z_1 z_2 = (x_1x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

या, क्रमित युग्मों की भाषा में

$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

उदाहरण के लिए,

$(1, 2)(-3, 2) = (1(-3) - 2.2, 1.2 + (-3)2)$

$= (-7, -4)$

आइए जांच करें कि $i^2 = -1$ है या नहीं।

$i^2 = -1 = i.i = (0 + i)(0 + i) = (0 - 1) + i(0 - 0) = -1$.

गुणन के अनेक गुण हैं, जिनका पता आपको नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने पर लगेगा।

E 19) $(x, y)(1, 0), (x, y)(0, 1), (x, y)(0, 0), (x, 0)(y, 0)$ और $(x, y)(1, 1)$ को ज्ञात कीजिए, जहां $(x, y) \in C$.

E 20) सिद्ध कीजिए कि

क) $z_1 z_2 = z_2 z_1 \ \forall \ z_1, z_2 \in C$.

ख) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3) \ \forall \ z_1, z_2, z_3 \in C$.

C में गुणन क्रमविनिमेय और साहचर्य होता है।

ग) $(x, y)\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right) = (1, 0) \ \forall (x, y) \subset C$.

(ध्यान दीजिए कि $x^2 + y^2 \neq 0$, क्योंकि $(x, y) \neq (0, 0)$).

घ) $z\bar{z} = |z|^2 \ \forall \ z \in C$.

यदि आपने इन प्रश्नों को हल कर लिया है तो इस बात पर भी आपने अवश्य ध्यान दिया होगा कि $z.1 = z\ \forall z \in C$.

इसका अर्थ है कि 1, C का **गुणनात्मक तत्समक** (multiplicative identity) है।
E 19 से यह भी पता चलता है कि
$z \, . \, 0 = 0\ \forall z \in C$,
$i(x + iy) = -y + ix\ \ \forall\ x, y \in R$,

और यदि z_1 और z_2 शुद्धतः वास्तविक संख्याएं हों, तो C पर गुणन की परिभाषा के अनुसार इनका गुणनफल वही होगा जो कि R पर गुणन के अनुसार होगा।
साथ ही E20 (क) से आप देख सकते हैं कि गुणन क्रमविनिमेय होता है, और E20(ख) से आप देख सकते हैं कि गुणन साहचर्य होता है।
और, E20 (ग) से हमें क्या पता चलता है? इससे यह पता चल जाता है कि C के किसी शून्येतर अवयव z के लिए $\exists z' \in C$, जिससे कि $zz' = 1$. इस स्थिति में हम कहते हैं कि z', z का **गुणनात्मक प्रतिलोम** (multiplicative inverse) है। अतः $z' = \frac{1}{z}$.

आइए अब हम E20 की सहायता से देखें कि किसी शून्येतर संमिश्र संख्या से एक संमिश्र संख्या के भागफल को मानक रूप में कैसे लिख सकते हैं। इसके लिए हम वैसी ही प्रक्रिया लागू करेंगे जैसे कि हम $\frac{a + b\sqrt{3}}{c + d\sqrt{2}}$ जैसे व्यंजक को हर को परिमेय (rationalize) करने के लिए करते हैं। आइए अब हम निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 3 : $\frac{2 + 3i}{1 - i}$ को $a + ib$ के रूप में प्राप्त कीजिए, जहाँ $a, b \in R$.

हल : E20(घ) से हल को वास्तविक संख्या बनाने की विधि का हमें एक संकेत प्राप्त होता है। इसके लिए आइए हम $\frac{2 + 3i}{1 - i}$ को $\overline{1 - i}$ से गुणा करें और भाग दें। हमें क्या प्राप्त होता है?

$$\left[\frac{2 + 3i}{1 - i}\right]\left[\frac{1 + i}{1 + i}\right] = \frac{(2 + 3i)(1 + i)}{(1 - i)(1 + i)} = \frac{-1 + 5i}{1 + 1} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i.$$

$z\bar{z} \in R\ \forall z \in C$.

इसलिए, $\frac{2 + 3i}{1 - i} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$

जिस विधि से हमने इस उदाहरण को हल किया है, उसे यदि आपने अच्छी तरह से समझ लिया है, तो आपको नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने में कोई परेशानी नहीं होगी।

E 21) [illegible] प्राप्त कीजिए।

E 22) यदि $a, b, c, d \in R$ और $c^2 + d^2 \neq 0$, तो $\frac{a + ib}{c + id}$ को C के एक अवयव के रूप में लिखिए।

E 23) (क) दिखाइए कि $\frac{1}{z} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}\ \forall z \in C \setminus \{0\}$.

(ख) दिखाइए कि $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}\ \forall z \in C \setminus \{0\}$.

यदि आपने E22 को हल कर लिया है, तो आप जानते हैं कि किसी शून्येतर संमिश्र संख्या से एक संमिश्र संख्या के भागफल को मानक रूप में कैसे लिखा जाता है।

अब, भाग 2.3 में हम आपको संमिश्र संख्या के ध्रुवीय रूप से परिचित करा चुके हैं। जब संमिश्र संख्याओं का गुणनफल या भागफल ज्ञात करना हो इन संख्याओं को ध्रुवीय रूप में व्यक्त करने से काफ़ी सुविधा हो जाती है। आइए देखें कि ऐसा क्यों है।

मान लीजिए $z_1, z_2 \in C$ के ध्रुवीय रूप क्रमशः $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ और $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ हैं। तब

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$

$$= r_1 r_2 \{(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\}$$

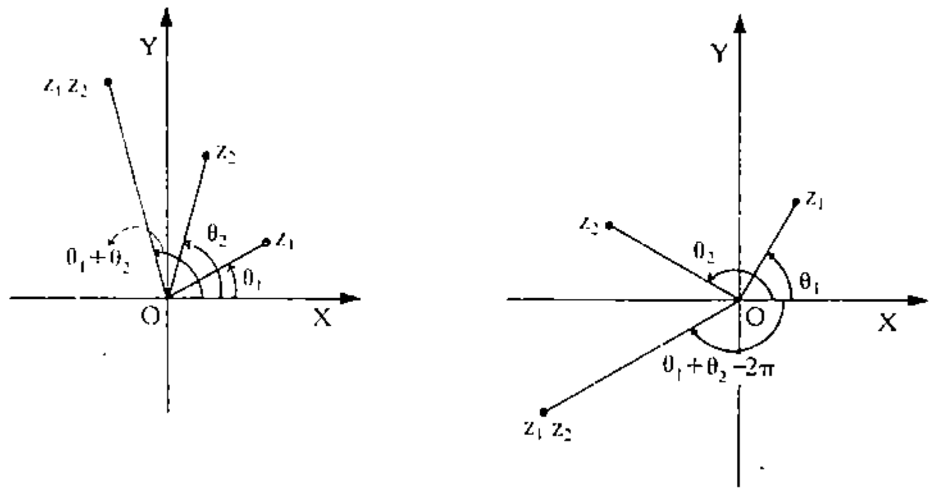
$$= r_1 r_2 \{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\} \qquad \text{............ (2)}$$

$\cos(A+B)$
$= \cos A\cos B - \sin A\sin B$
$\sin(A+B)$
$= \sin A\cos B + \cos A\sin B$

इसलिए, $|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|$.

और $\text{Arg}(z_1 z_2) = (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi$, जहाँ $k \in Z$, को ऐसे चुनते हैं कि $-\pi < (\theta_1 + \theta_2) + 2k\pi \le \pi$.

ऊपर हमने जो कुछ कहा है, उसके आलेखी रूप को हमने चित्र 6 में दिखाया है।



चित्र 6: ध्रुवीय रूप में गुणनफल

आइए हम एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण 4: $z_1 = 2(\cos 1 + i\sin 1)$ और $z_2 = \cos 3 + i\sin 3$ का गुणनफल मालूम कीजिए।

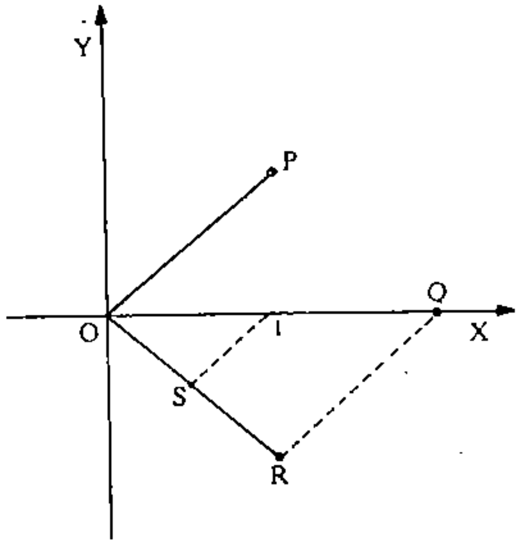
हल : यहाँ $|z_1| = 2$, $\text{Arg}\, z_1 = 1$, $|z_2| = 1$, $\text{Arg}\, z_2 = 3$.
इसलिए, $z_1 z_2 = 2(\cos(1+3) + i\sin(1+3))$

$$= 2(\cos 4 + i\sin 4)$$

यहाँ $\text{Arg}(z_1 z_2) \ne 4$, क्योंकि $4 > \pi$. हमें एक ऐसा पूर्णांक k चुनना होगा जिससे कि $-\pi < 4 + 2k\pi \le \pi$. यहाँ $k = -1$ लेने से हमारा काम चल जाता है। इस तरह,
$\text{Arg}(z_1 z_2) = 4 - 2\pi$.
अतः $z_1 z_2 = 2(\cos(4 - 2\pi) + i\sin(4 - 2\pi))$, $z_1 z_2$ का ध्रुवीय रूप है।

हमारे पास आरगां आरेख में निरूपित किसी शून्येतर संमिश्र संख्या का गुणनात्मक प्रतिलोम मालूम करने का एक अच्छा आसान तरीका है। आइए देखें कि वह क्या है।

मान लीजिए $z \in C \setminus \{0\}$ को बिन्दु P से निरूपित किया गया है (चित्र 7 देखिए)। मान लीजिए Q, वास्तविक संख्या $|z|^2$ को निरूपित करता है। और मान लीजिए कि R, x–अक्ष के सापेक्ष P का परावर्तन है। अतः R, $\bar{z}$ को निरूपित करता है।



चित्र 7 : गुणनात्मक प्रतिलोम मालूम करना

अब (1, 0) से होती हुई एक ऐसी रेखा खींचिए जो QR के समानांतर हो। मान लीजिए रेखा OR को यह रेखा विन्दु S पर काटती है। तब S, $\frac{1}{z}$ को निरूपित करता है।
अब, आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

E 24) z_1 और z_2 के ध्रुवीय रूप मालूम कीजिए, जहाँ $z_1 = -6$ और $z_2 = 1 + i$. इस तरह $|z_1 z_2|$ और $\text{Arg}(z_1 z_2)$ ज्ञात कीजिए।

E 25) यदि आपको $z_1, z_2 \in C$ के ध्रुवीय रूप ज्ञात हों, जहां $z_2 \neq 0$ तो $\frac{z_1}{z_2}$ का ध्रुवीय रूप ज्ञात कीजिए।

E 26) E24 में दिए गए z_1, z_2 के लिए $\frac{z_1}{z_2}$ का ध्रुवीय रूप ज्ञात कीजिए।

$z_1, z_2, \bar{z}_2, \frac{1}{z_2}$ और $\frac{z_1}{z_2}$ को एक आरगां आरेख में निरूपित कीजिए।

अगले भाग में हम ध्रुवीय रूप में गुणा और भाग का काफ़ी प्रयोग करेंगे। पर पहले, आइए हम आपको एक नियम बता दें जो C में '+' और '×' के बीच संबंध स्थापित करता है। क्या आप R में कोई ऐसा नियम जानते हैं? आपने वंटन नियम (distributive law) का प्रयोग काफ़ी किया होगा। इस निगम के अनुसार

$a(b + c) = ab + ac \ \forall \ a, b, c \in \mathbf{R}$.

यही नियम C पर भी लागू होता है। क्यों नहीं आप इस नियम को सिद्ध करते?

E 27) (क) जाचं कीजिए कि

$$(1 + i)\{(\sqrt{2} - 3i) + (5 + i)\} = (1 + i)(\sqrt{2} - 3i) + (1 + i)(5 + i)$$

(ख) सिद्ध कीजिए कि

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3 \ \forall \ z_1, z_2, z_3 \in C.$$

जोड़ पर गुणन वंटित होता है।

आइए अब हम एक अति उपयोगी प्रमेय के बारे में चर्चा करें।

2.5 द मुआव्र प्रमेय

पिछले भाग में हमने सिद्ध किया था कि यदि $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ और
$z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, तो
$z_1 z_2 = r_1 r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\}$.
विशेष रूप से, यदि $z_1 = z_2$ तो $r_1 = r_2$, $\theta_1 = \theta_2$, और तब हमें $z_1^2 = r_1^2(\cos 2\theta_1 + i\sin 2\theta_1)$ प्राप्त होता है।

वास्तव में, यह निम्नलिखित सूत्र की ही एक विशेष स्थिति है:

यदि $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, तो किसी भी पूर्णांक n के लिए $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

इसे सिद्ध करने के लिए हमें द मुआव्र प्रमेय की आवश्यकता पड़ेगी, जो फ्रांसिसी गणितज्ञ इब्राहिम द मुआव्र (1667-1754) के नाम पर रखा गया है। आपको यह जानकर शायद आश्चर्य होगा कि द मुआव्र (De Moivre) ने इस परिणाम को कभी स्पष्ट रूप से व्यक्त नहीं किया था। पर ऐसा जान पड़ता है कि उन्हें इस प्रमेय का ज्ञान था और उन्होंने अपने 1730 के लेखों में इसका प्रयोग किया था। गणितज्ञ ऑयलर ही थे जिन्होंने 1748 में इस परिणाम को स्पष्ट रूप से प्रस्तुत किया और सिद्ध किया।

प्रमेय 1 (द मुआव्र प्रमेय): किसी भी $n \in Z$ और किसी भी कोण θ के लिए,
$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$.

उपपत्ति : आइए पहले हम इसे $n > 0$ के लिए सिद्ध करें। हम इसे निम्नलिखित महत्वपूर्ण नियम की सहायता से सिद्ध करेंगे।

"अमूर्त बीजगणित" के पाठ्यक्रम में आप आगमन के बारे में अधिक अध्ययन कर सकते हैं।

आगमन नियम (principle of induction): मान लीजिए $P(n)$ एक धन पूर्णांक n के बारे में एक कथन है, जहां
i) $P(1)$ सत्य है, और
ii) जब भी किसी $m \in N$ के लिए $P(m)$ सत्य है, तो $P(m+1)$ भी सत्य होता है।
तब $P(n)$ सत्य होता है $\forall\, n \in N$.

हम इस नियम का प्रयोग कैसे करेंगे? किसी $n \in N$ के लिए, हम $P(n)$ को कथन "$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$" मानेंगे।
पहले हम यह सिद्ध करेंगे कि यह $n = 1$ के लिए लागू होता है, अर्थात् $P(1)$ सत्य है। फिर हम यह मान लेंगे कि यह किसी $m \in N$ के लिए लागू होता है, और सिद्ध करेंगे कि यह $m + 1$ के लिए भी सत्य है। इससे यह पता चलेगा कि यदि $P(m)$ सत्य है, तो $P(m+1)$ भी सत्य है।
अब, $n = 1$ के लिए,

$(\cos\theta + i\sin\theta)^1 = \cos\theta + i\sin\theta = \cos 1\cdot\theta + i\sin 1\cdot\theta$.
अतः $n = 1$ के लिए परिणाम सत्य है।

अब मान लीजिए कि यह, $n = m$ के लिए सत्य है, अर्थात्
$$(\cos\theta + i\sin\theta)^m = \cos m\theta + i\sin m\theta \quad \ldots\ldots (3)$$

अब, $(\cos\theta + i\sin\theta)^{m+1}$

$= (\cos\theta + i\sin\theta)^m(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= (\cos m\theta + i\sin m\theta)(\cos\theta + i\sin\theta)$ (3) से।

$= \cos(m\theta + \theta) + i\sin(m\theta + \theta)$, गुणनफलों के सूत्र (2) से।

$= \cos (m+1)\theta + i \sin (m+1)\theta.$
अतः $n = m + 1$ के लिए परिणाम सत्य है ।
इस तरह, आगमन नियम के अनुसार $\forall\ n \in N$ के लिए परिणाम सत्य है ।

आइए अब हम यह देखें कि यदि $n = 0$ तो क्या होता है? हम किसी $z \in C \setminus \{0\}$ के लिए $z^0 = 1$ **परिभाषित करते हैं** । (R की तरह ही C में भी 0^0 परिभाषित नहीं है ।)
इसलिए $(\cos \theta + i \sin \theta)^0 = 1.$
और $\cos 0 \cdot \theta + i \sin 0 \cdot \theta = \cos 0 + i \sin 0 = 1.$
इस तरह, $n = 0$ के लिए भी परिणाम सत्य है ।

अब, यदि $n < 0$, तो क्या होता है?

क्यों नहीं आप इस स्थिति को सिद्ध करते । नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने से आप इच्छित परिणाम प्राप्त कर सकेंगे ।

E 28) सिद्ध कीजिए कि किसी कोण θ के लिए
$$\frac{1}{\cos \theta + i \sin \theta} = \cos \theta - i \sin \theta.$$

E 29) मान लीजिए $n < 0$, अर्थात् $n = -m$, जहाँ $m > 0$. तब
$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^m}.$$
इस तथ्य से और धन पूर्णांकों के लिए द मुआव्र प्रमेय के प्रयोग से सिद्ध कीजिए कि
$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta.$

तो सभी $n \in Z$ के लिए द मुआव्र प्रमेय सत्य है ।

अब, यदि, $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \in C$, तब $\forall\ n \in Z$

$z^n = r^n(\cos \theta + i \sin \theta)^n$

$\quad = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$, द मुआव्र प्रमेय को लागू करने पर ।

यहाँ हमने दिखाया है कि

$$\boxed{[r(\cos \theta + i \sin \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta), \text{ जहाँ } r \in R, \theta \in R, n \in Z.}$$

गणित और भौतिकी में इस परिणाम के अनेक अनुप्रयोग हैं । यहाँ हम दो अनुप्रयोगों पर चर्चा करेंगे ।

2.5.1 त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाएँ

प्रमेय 1 का एक अति उपयोगी अनुप्रयोग है उन सर्वसमिकाओं को सिद्ध करना जिनमें $\sin \theta$, $\cos \theta$ आदि जैसे त्रिकोणमितीय फलन शामिल हों । आइए हम एक उदाहरण पर विचार करें ।

उदाहरण 5 : $\cos \theta$ और $\sin \theta$ के पदों में $\cos 4\theta$ का एक सूत्र ज्ञात कीजिए ।

हल : द मुआव्र प्रमेय के अनुसार

$(\cos \theta + i \sin \theta)^4 = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$ .... (4)

हम (4) का वाम पक्ष का प्रसार द्विपद-प्रसार (binomial expansion) की सहायता से भी कर सकते हैं । तब

$^nC_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$

$\forall \quad n, m \in N$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = (\cos\theta)^4 + {}^4C_1(\cos\theta)^3(i\sin\theta) + {}^4C_2(\cos\theta)^2(i\sin\theta)^2 + {}^4C_3\cos\theta(i\sin\theta)^3 + (i\sin\theta)^4$

$= \cos^4\theta + 4i\sin\theta\cos^3\theta - 6\sin^2\theta\cos^2\theta - 4i\sin^3\theta\cos\theta + \sin^4\theta \qquad .....(5)$

इस तरह, (4) और (5) के वास्तविक भागों की तुलना करने पर हमें

$\cos 4\theta = \cos^4\theta - 6\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta$

प्राप्त होता है, जो कि इच्छित सूत्र है।

इसी प्रकार आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कर सकते हैं।

E 30) $\cos\theta$ के पदों में $\cos 3\theta$ का सूत्र और $\sin\theta$ के पदों में $\sin 3\theta$ का सूत्र ज्ञात कीजिए।

अब, किसी $m \in N$ के लिए आइए हम z^m पर विचार करें, जहाँ $z \in C$ और $|z| = 1$. तब द मुआव्र प्रमेय के अनुसार

$z^m = \cos m\theta + i\sin m\theta$

और, $z^{-m} = \cos m\theta - i\sin m\theta$, क्योंकि $\cos(-\theta) = \cos\theta$ और $\sin(-\theta) = -\sin\theta$, किसी कोण θ के लिए।

$$\left.\begin{aligned} \text{इस तरह, } z^m + z^{-m} &= 2\cos m\theta, \text{ और} \\ z^m - z^{-m} &= 2i\sin m\theta \end{aligned}\right] \qquad ....(6)$$

हम इन संबंधों का प्रयोग $\cos m\theta$ और $\sin m\theta$ के पदों में $\cos^m\theta$ और $\sin^m\theta$ को व्यक्त करने के लिए कर सकते हैं, जहाँ $m = \pm 1, \pm 2, ...$ आइए हम एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 6: θ के गुणजों के कोसाइनों या साइनों के पदों में $2^{4n-2}(\cos^{4n}\theta + \sin^{4n}\theta)$ का प्रसार कीजिए।

हल : समीकरणों (6) में $m = 1$ रखने पर हमें

$2\cos\theta = z + \frac{1}{z}$ और $2i\sin\theta = z - \frac{1}{z}$ प्राप्त होता है।

$\therefore 2^{4n}\cos^{4n}\theta = \left(z + \frac{1}{z}\right)^{4n}$

$= z^{4n} + 4n z^{4n-1}\frac{1}{z} + {}^{4n}C_2 z^{4n-2}.\frac{1}{z^2} + ... + {}^{4n}C_{2n} z^{2n}\frac{1}{z^{2n}} + ... + 4nz.\frac{1}{z^{4n-1}} + \frac{1}{z^{4n}},$

द्विपद-प्रसार से।

$= \left(z^{4n} + \frac{1}{z^{4n}}\right) + 4n\left(z^{4n-2} + \frac{1}{z^{4n-2}}\right) + ... + {}^{4n}C_{2n}.$

और,

$2^{4n}\sin^{4n}\theta = \left(z - \frac{1}{z}\right)^{4n}$, क्योंकि $i^{4n} = (i^4)^n = 1.$

$= \left(z^{4n} + \frac{1}{z^{4n}}\right) - 4n\left(z^{4n-2} + \frac{1}{z^{4n-2}}\right) + ... + {}^{4n}C_{2n}.$

$\therefore 2^{4n}(\cos^{4n}\theta + \sin^{4n}\theta) = 2\left(z^{4n} + \frac{1}{z^{4n}}\right) + 2\left({}^{4n}C_2\right)\left(z^{4n-4} + \frac{1}{z^{4n-4}}\right) + ... + 2\left({}^{4n}C_{2n}\right).$

$= 2\{2\cos 4n\theta + 2({}^{4n}C_2)\cos(4n-4)\theta + ...\} + 2\left({}^{4n}C_{2n}\right),$

(6) के प्रयोग से।

$\therefore 2^{4n-2}(\cos^{4n}\theta + \sin^{4n}\theta) = \cos 4n\theta + {}^{4n}C_2 \cos(4n-4)\theta + \dots + \frac{1}{2}\,{}^{4n}C_{2n}$.

उदाहरण 6 में हमने जो प्रक्रिया लागू की है वह त्रिकोणमितीय फलनों वाले अवकल समीकरणों को हल करने में काफ़ी उपयोगी हैं। यह प्रक्रिया ऐसे फलनों के लाप्लास रूपांतर को ज्ञात करने में भी काफ़ी उपयोगी हैं।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न हल कीजिए।

E 31) द मुआव्र के सूत्र की सहायता से सिद्ध कीजिए कि

i) $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

ii) $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

E 32) θ के गुणजों के कोसाइनों के पदों में $\cos^6\theta - \sin^6\theta$ का प्रसार कीजिए।

आइए अब हम एक अन्य क्षेत्र पर विचार करें जहां हम द मुआव्र प्रमेय को बड़ी सफ़लता से लागू कर सकते हैं।

2.5.2 संमिश्र संख्या के मूल

भाग 2.2 में हमने आपको बताया था कि संमिश्र संख्याओं का विषय -1 के वर्गमूलों को ज्ञात करने की कोशिश के दौरान उत्पन्न हुआ था। वास्तव में, अब जब हमारे पास C है, आपको मालूम ही है कि हम किसी भी शून्येतर वास्तविक संख्या के दो अलग-अलग संमिश्र वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं।

अर्थात् यदि $a \in R \setminus \{0\}$, तो हम ऐसे अलग-अलग $z_1, z_2 \in C$, ढूंढ सकते हैं जिनके लिए $z_1^2 = a, z_2^2 = a$.

वास्तव में, संमिश्र संख्याओं के समुच्चय का एक अधिक प्रबल गुण है जिसकी वजह से गणित में C का इतना महत्वपूर्ण स्थान है। यह गुण है :

यदि $n \in N$ और $z \in C$, $z \neq 0$, तो हम ऐसे अलग-अलग $z_1, \dots, z_n \in C$ प्राप्त कर सकते हैं जिनसे कि $z_k^n = z \;\forall\; k = 1, \dots, n$.

इन z_k में से प्रत्येक को **z का nवाँ मूल** कहते हैं।

किसी संमिश्र संख्या के सभी nवें मूल मालूम करने के लिए हमें द मुआव्र प्रमेय की आवश्यकता पड़ती है, और निम्नलिखित परिणाम की भी, जिसे आप अब सिद्ध कर सकते हैं।

E 33) मान लीजिए x एक धन वास्तविक संख्या है और $n \in N$. दिखाइए कि ऐसी एक और केवल एक धन वास्तविक संख्या b होती है जिससे कि $b^n = x$.

(**संकेत :** मान लीजिए $r, s > 0$ ऐसे हैं कि $r^n = x = s^n$.

मान लीजिए $r \neq s$. अब $r^n - s^n = 0$ और $r - s \neq 0$. तब हमें एक अंतर्विरोध चाहिए।)

हम E 33 में प्राप्त अद्वितीय धनात्मक nवें मूल को $x^{1/n}$ से प्रकट करते हैं।

आइए अब हम संमिश्र संख्या के मूल मालूम करने से संबंधित एक उदाहरण लें।

उदाहरण 7 : C में i के सभी पांचवें मूल प्राप्त कीजिए।

हल : मान लीजिए $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, i का कोई 5वाँ मूल है। तब $z^5 = i$.

i का ध्रुवीय रूप $i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ है।

अब, $z^5 = i \Rightarrow r^5(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

$$\Rightarrow r^5(\cos 5\theta + i\sin 5\theta) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \quad ....(7)$$

द मुआव्र प्रमेय से ।

(7) के दोनों पक्षों की संमिश्र संख्याओं के मापांकों और कोणांकों की तुलना करने पर हमें $r^5 = 1$ और $5\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, जहाँ $k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$, प्राप्त होता है ।

r, 1 का अद्वितीय धनात्मक वास्तविक पांचवाँ मूल है (E 33 देखिए) । क्योंकि $1 \in \mathbf{R}$, $r = 1$, अर्थात् $|z| = 1$.

θ के संभव मान होंगे

$$\theta = \frac{1}{5}\left[\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right],\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

अत: i के संभव पांचवें मूल होंगे

$$z = \cos\left(\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}\right),\ k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

इससे लगता है कि i के अनंततः अनेक 5वें मूल होते हैं — प्रत्येक $k \in \mathbf{Z}$ के लिए एक मूल । पर, यह बात सही नहीं है । इनमें केवल 5 अलग-अलग मान हैं । ये मान $k = -2, -1, 0, 1, 2$ के लिए z के मान होंगे । आइए देखें ऐसा क्यों है ।

जब $k = -2$, तब $z = \cos\left(\frac{\pi}{10} - \frac{4\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} - \frac{4\pi}{5}\right)$

$= \cos\frac{7\pi}{10} - i\sin\frac{7\pi}{10} = z_{-2}$, मान लीजिए ।

जब $k = -1$, तब $z = \cos\frac{3\pi}{10} - i\sin\frac{3\pi}{10} = z_{-1}$, मान लीजिए ।

जब $k = 0$, तब $z = \cos\frac{\pi}{10} + i\sin\frac{\pi}{10} = z_0$, मान लीजिए ।

जब $k = 1$, तब $z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = z_1$, मान लीजिए ।

$\cos(2\pi + \theta) = \cos\theta$,
$\sin(2\pi + \theta) = \sin\theta$

जब $k = 2$, तब $z = \cos\frac{9\pi}{10} + i\sin\frac{9\pi}{10} = z_2$, मान लीजिए ।

जब $k = 3$, तब $z = \cos\frac{13\pi}{10} + i\sin\frac{13\pi}{10} = \cos\left(2\pi - \frac{7\pi}{10}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{7\pi}{10}\right) = z_{-2}$.

जब $k = 4$, तब $z = \cos\frac{17\pi}{10} + i\sin\frac{17\pi}{10} = \cos\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) + i\sin\left(2\pi - \frac{3\pi}{10}\right) = z_{-1}$.

इसी प्रकार, जब $k = 5$, तो आपको z_0 प्राप्त होगा, और यही प्रक्रिया आगे चलती रहेगी । इस तरह, $k = 5, 6, 7, ...$ से हमें z का कोई नया मान प्राप्त नहीं होगा ।

अब, यदि हम $k = -3$ लें, तो हमें $z = \cos\left(\frac{-11\pi}{10}\right) + i\sin\left(\frac{-11\pi}{10}\right) = z_2$ प्राप्त होता है ।

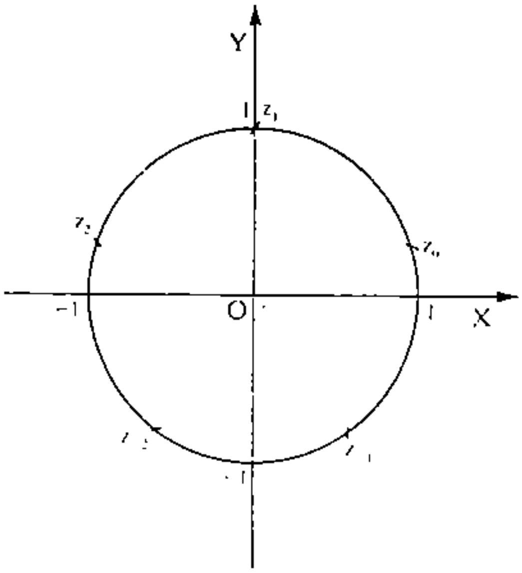
इसी प्रकार, $k = -4, -5, ...$ से हमें z का कोई नया मान प्राप्त नहीं होता ।

अतः i के निम्न 5 मान हैं :

$$\cos\left(\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}\right),\ \text{जहाँ } k = 0, \pm 1, \pm 2.$$

टिप्पणी 4 : हमें i के 5वें मान $\cos\left(\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{10} + 2k\frac{\pi}{5}\right)$ में $k = 0, 1, 2, 3, 4$ लेने पर भी मिलते हैं, जैसा कि आप देख चुके हैं । सिर्फ़ यह ध्यान दीजिए कि $k = 3$ और 4 के लिए θ का मान $-\pi < \theta \le \pi$ को संतुष्ट नहीं करेगा । इसलिए हमने $k = 0, \pm 1, \pm 2$ चुना था ।

अब, i के सभी पांचवें मूलों पर ध्यान दीजिए। इनके मापांकों में क्या संबंध है? सभी के समान मापांक हैं, अर्थात् $|i|^{1/5}(=1)$. इस तरह ये सभी उस वृत्त पर स्थित होते हैं जिसका केन्द्र $(0, 0)$ है और जिसकी त्रिज्या 1 है। वृत्त पर ये बिन्दु एक दूसरे से समान दूरी पर स्थित होंगे, क्योंकि क्रमागत बिन्दुओं के कोणांकों में $\frac{2\pi}{5}$ का अंतर है, और $\frac{2\pi}{5}$ एक अचर है। इन्हें हम चित्र 8 के आरगां आरेख में आलेखित करते हैं।



चित्र 8: i के पांचवें मूल

ऊपर बतायी गई प्रक्रिया लागू करके किसी $n \in N$ के लिए हम किसी शून्येतर संमिश्र संख्या के अलग-अलग nवें मूल प्राप्त कर सकते हैं।

अतः यदि कोई शून्येतर संमिश्र संख्या ω दी हुई हो, तो इसे हम निम्नलिखित ध्रुवीय रूप में लिखते हैं:

$\omega = a(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, जहाँ $a = |\omega|$ और $\alpha = \text{Arg}\,\omega$. E33 के अनुसार, एक ऐसा अद्वितीय $r \in \mathbf{R}, r > 0$ होता है जिससे कि $r^n = a$, अर्थात् $r = a^{1/n}$. तब ω के अलग-अलग

nवें मूल होंगे $z = a^{1/n}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)$, जहाँ $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

ज्यामितीय दृष्टि से, ये त्रिज्या $a^{1/n}$ वाले वृत्त पर समान अंतराल पर स्थित होते हैं। ध्यान दीजिए कि

> किसी $n \in N$ के लिए एक शून्येतर संमिश्र संख्या के अलग-अलग ठीक n, nवें मूल होते हैं। यदि z एक मूल हो, तो अन्य मूल $z\alpha_1, z\alpha_2, \ldots, z\alpha_{n-1}$ होंगे, जहाँ, $1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, 1 के nवें मूल हैं।

अब आप कुछ प्रश्न हल कीजिए।

E 34) 1 के संमिश्र घनमूल (cube roots) ज्ञात कीजिए। अर्थात् ऐसे $z \in C$ ज्ञात कीजिए जिससे कि $z^3 = 1$. इन्हें एक आरगां आरेख में आलेखित कीजिए।

E 35) समीकरण $z^4 - 4z^2 + 4 - 2i = 0$ को हल कीजिए।
(**संकेत:** समीकरण को $(z^2 - 2)^2 = (1 + i)^2$ के रूप में लिखा जा सकता है।)

---

1 के जो घनमूल आपने E34 में प्राप्त किए हैं, उनका काफ़ी महत्त्व है। हम प्रायः घनमूल $\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ को यूनानी अक्षर ω (ओमेगा) से प्रकट करते हैं।

ध्यान दीजिए कि $\omega^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, जो कि 1 का अन्य अवास्तविक घनमूल है। इस तरह,

$$\boxed{1 \text{ के तीन घनमूल } 1, \omega, \omega^2 \text{ हैं, जहाँ } \omega = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}.}$$

और यह भी ध्यान दीजिए कि

$$1+\omega+\omega^2 = 0 \qquad \text{.... (8)}$$

हम इकाई 3 में ω और (8) का काफ़ी प्रयोग करेंगे। हम नीचे दिए गए परिणामों का भी काफ़ी प्रयोग करेंगे, जिन्हें आप अब सिद्ध कर सकते हैं।

E 36) (क) मान लीजिए $a \in \mathbf{R}$. दिखाइए कि a का एक वास्तविक घनमूल r होता है, और a के घनमूल $r, r\omega, r\omega^2$ हैं।

(ख) दिखाइए कि यदि $a \in \mathbf{R}, a < 0$ और n एक सम धन पूर्णांक है, तो a का कोई वास्तविक nवाँ मूल नहीं होगा।

(ग) मान लीजिए $z \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$. दिखाइए कि z के तीन घनमूल होते हैं। और यदि इनमें से एक γ हो, तो अन्य दो मूल $\gamma\omega$ और $\gamma\omega^2$ होंगे।

इसके साथ ही हम संमिश्र संख्याओं पर अपनी चर्चा समाप्त करते हैं। इसका मतलब यह नहीं है कि आप इसका प्रयोग आगे नहीं करेंगे। वास्तविकता तो यह है कि इस इकाई में आपने जो कुछ पढ़ा है उसका प्रयोग आप इस पाठ्यक्रम और गणित के अन्य पाठ्यक्रमों के अध्ययन में प्रायः करेंगे।

आइए अब हम इस इकाई में पढ़ाई गई बातों के संक्षिप्त विवरण पर निगाह डालें।

2.6 सारांश

संमिश्र संख्याओं की इस इकाई में आपने निम्नलिखित तथ्यों का अध्ययन किया है।

1) संमिश्र संख्या की परिभाषा:
संमिश्र संख्या $x+iy$ होता है, जहाँ $x, y \in \mathbf{R}$ और $i = \sqrt{-1}$. समानार्थक रूप में, यह एक युग्म $(x, y) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ है।

2) $x+iy$ का वास्तविक भाग x है और अधिकल्पित भाग y है।

3) $x_1+iy_1 = x_2+iy_2$ यदि और केवल यदि $x_1 = x_2$ और $y_1 = y_2$.

4) $z = x+iy$ का संयुग्मी $\bar{z} = x-iy$ होता है।

5) आरगां आरेखों में संमिश्र संख्याओं का ज्यामितीय निरूपण।

6) $z = x+iy$ का ध्रुवीय रूप $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ है, जहाँ $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ और $\theta = \operatorname{Arg} z = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$, जहाँ हम θ को आरगां आरेख में z की स्थिति के अनुसार चुनते हैं।

7) ऑयलर का सूत्र : $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \ \forall \ \theta \in \mathbf{R}$

8) $z = x+iy$ का चरघातांकी रूप $z = re^{i\theta}$ है, जहाँ $r = |z|$ और $\theta = \operatorname{Arg} z$.

9) C में जोड़ना, घटाना, गुणा और भाग : $\forall \ a, b, c, d \in \mathbf{R}$

$$(a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i\,(b \pm d)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i\,(ad + bc)$$

$$\frac{1}{a + ib} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{ib}{a^2 + b^2}$$, जब $a + ib \neq 0$.

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2}$$, जब $c + id \neq 0$.

10) $z_1, z_2 \in C$ के लिए,

$|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$, $\text{Arg}\,(z_1 z_2) = \text{Arg}\,z_1 + \text{Arg}\,z_2 + 2k\pi$,

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$, $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \text{Arg}\,z_1 - \text{Arg}\,z_2 + 2m\pi$, (जहाँ $z_2 \neq 0$).

यहाँ $k, m \in Z$ ऐसे लिए गए हैं कि

$-\pi < \text{Arg}\,(z_1 z_2) \leq \pi$ और $-\pi < \text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \leq \pi$.

11) द मुआव्र प्रमेय :

$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \;\forall\; n \in Z$ और किसी कोण θ के लिए ।

12) त्रिकोणमितीय सर्वसमिकाओं को सिद्ध करने के लिए और किसी $n \in N$ के लिए संमिश्र संख्याओं के nवें मूल प्राप्त करने के लिए द मुआव्र प्रमेय का प्रयोग ।

13) 1 के घनमूल $1, \omega, \omega^2$ हैं, जहाँ $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

अब, जबकि आपने इस इकाई का अध्ययन कर लिया है, आप भाग 2.1 में दिए गए उद्देश्यों को दोबारा देखिए । क्या आपने इन उद्देश्यों को प्राप्त कर लिया है ? इसका जवाब जानने का एक तरीका है कि आप इस इकाई में दिए गए सभी प्रश्नों को हल करें । यदि आप अपने हल या उत्तर की जांच करना चाहें, तो आप देख सकते हैं कि हमने अगले भाग में क्या लिखा है ।

2.7 हल/उत्तर

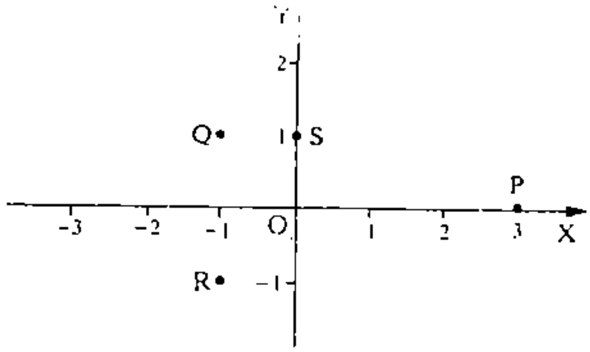
E1)

z	Re z	Im z
$\frac{1 + \sqrt{-23}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{23}}{2}$
i	0	1
0	0	0
$\frac{-1 + \sqrt{3}}{5}$	$\frac{-1 + \sqrt{3}}{5}$	0

E2) हां, क्योंकि प्रत्येक वास्तविक संख्या x, संमिश्र संख्या x + 0i है ।

E3) $2 - 3i, 2 + 3i, 2, -3i$

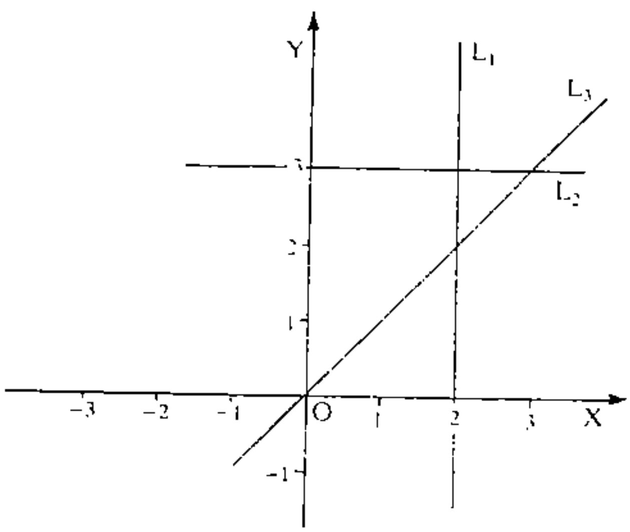
E4) (क)



चित्र 9

P, Q, R और S क्रमशः $3, -1+i, \overline{-1+i}$ और i को निरूपित करते हैं।

(ख)



चित्र 10

L_1, L_2 और L_3 क्रमशः समुच्चयों S_1, S_2 और S_3 को निरूपित करते हैं।

E5) $-\frac{1}{2}+\frac{i}{3}, 2, -2i$

E6) $k = \frac{1}{2}, m = 3$

E7) मान लीजिए $z = x+iy$. तब $\bar{z} = x - iy$.

$\therefore z = \bar{z} \Rightarrow x+iy = x-iy \Rightarrow y = -y \Rightarrow y = 0$

$\therefore \forall\ z \in R, z = \bar{z}.$

E8) मान लीजिए $z = x+iy$. तब $\bar{z} = x - iy$.

$\therefore \bar{\bar{z}} = \overline{x-iy} = x+iy = z.$

E9) $3 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$.

$|-1+i| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ और $\text{Arg}(-1+i) = \tan^{-1}(-1) = -\frac{\pi}{4}$ या $\frac{3\pi}{4}$.

क्योंकि $-1+i$, $(-1, 1)$ के संगत है, जो कि द्वितीय चतुर्थांश में स्थित है, इसलिए $\operatorname{Arg}(-1+i) = 3\pi/4$.

$\therefore (-1+i) = \sqrt{2}\,(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4))$.

$$\overline{-1+i} = -1-i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right)\right]$$

$$= \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$$

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

E10) किसी $z = x + iy \in C$ के लिए,

$|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1.$

E11) $\sqrt{\frac{5}{2}} + i\sqrt{\frac{5}{2}} = \sqrt{5}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (ध्रुवीय रूप)

$= \sqrt{5}\, e^{i\pi/4}$ (चरघातांकी रूप)

$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ (ध्रुवीय रूप)

$= \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$ (चरघातांकी रूप)

$-1 = \cos\pi + i\sin\pi$ (ध्रुवीय रूप)

$= e^{i\pi}$ (चरघातांकी रूप)

$i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$ (ध्रुवीय रूप)

$= e^{i\pi/2}$ (चरघातांकी रूप)

E12) क) $2 + 3i + \overline{2+3i} = 2 + 3i + 2 - 3i = 4 + 0i = 4.$

ख) मान लीजिए $z = x + iy$. तब

$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2\operatorname{Re} z.$

E13) मान लीजिए $z_1 = x_1 + iy_1$ और $z_2 = x_2 + iy_2$. तब

$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$$\therefore \overline{z_1 + z_2} = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2))$$
$$= (x_1 + x_2, -y_1 - y_2)$$
$$= (x_1, -y_1) + (x_2, -y_2)$$
$$= \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

E14) (क) मान लीजिए $z_1 = (x_1, y_1)$ और $z_2 = (x_2, y_2)$.

तब $z_1 + z_2 = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)$

$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$= (x_2 + x_1, y_2 + y_1)$, क्योंकि $a + b = b + a \;\forall\, a, b \in R$.

$= (x_2, y_2) + (x_1, y_1)$

$= z_2 + z_1$.

(ख) मान लीजिए $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3)$. तब परिणाम को सिद्ध करने के लिए तथ्य $(a + b) + c = a + (b + c) \ \forall \ a, b, c \in \mathbf{R}$, को लागू कीजिए।

E15) मान लीजिए $z = x + iy$.

तब $z + (a + ib) = z$

$\Rightarrow (x + iy) + (a + ib) = x + iy$

$\Rightarrow (x + a) + i(y + b) = x + iy$

$\Rightarrow x + a = x$ और $y + b = y$.

$\Rightarrow a = 0, b = 0$

$\therefore \ a + ib = 0 + i0 = 0.$

E16) $(-6 - (-3)) + i(3 - (-2)) = -3 + 5i.$

E17) मान लीजिए $z = x + iy$. तब

$z - \overline{z} = (x + iy) - (x - iy) = (x - x) + i(y + y) = 2iy$

$= i(2\,\mathrm{Im}\,z)$

E18) मान लीजिए $z = x + iy$. तब $-z = (-x) + i(-y)$. इस तरह

क) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, और

$|-z| = \sqrt{(-x)^2 + (-y)^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$

ख) $\mathrm{Arg}\,z = \tan^{-1}(y/x)$

$\mathrm{Arg}\,(-z) = \tan^{-1}\left(\frac{-y}{-x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \mathrm{Arg}\ z - \pi$, क्योंकि $(-z)$ मूल बिन्दु के सापेक्ष z का परावर्तन है।

$z1 = z \ \forall \ z \in C$
$z0 = 0 \ \forall \ z \in C$

E19) $(x, y)(1, 0) = (x, y)$

$(x, y)(0, 1) = (-y, x)$

$(x, y)(0, 0) = (0, 0)$

$(x, 0)(y, 0) = (xy, 0)$

$(x, y)(1, 1) = (x - y, x + y).$

E20) क) मान लीजिए $z_1 = (x_1, y_1)$ और $z_2 = (x_2, y_2)$. तब

$z_1 z_2 = (x_1, y_1)(x_2, y_2)$

$= (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$= (x_2 x_1 - y_2 y_1, x_2 y_1 + x_1 y_2)$, क्यों कि $ab = ba \ \forall \ a, b \in \mathbf{R}$.

$= (x_2, y_2)(x_1, y_1)$

$= z_2 z_1.$

(ख) यदि $z_1 = (x_1, y_1), z_2 = (x_2, y_2), z_3 = (x_3, y_3)$ तो

$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$, और

$z_2 z_3 = (x_2 x_3 - y_2 y_3, x_2 y_3 + x_3 y_2).$

इसलिए

$(z_1 z_2) z_3 = ((x_1 x_2 - y_1 y_2) x_3 - (x_1 y_2 + x_2 y_1) y_3, (x_1 x_2 - y_1 y_2) y_3 + x_3 (x_1 y_2 + x_2 y_1))$

$= (x_1 (x_2 x_3 - y_2 y_3) - y_1 (x_2 y_3 + x_3 y_2), x_1 (x_2 y_3 + x_3 y_2) + (x_2 x_3 - y_2 y_3) y_1)$

$= z_1 (z_2 z_3).$

ग) $(x, y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right) = \left(\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}, \frac{-xy+xy}{x^2+y^2}\right) = (1, 0)$

घ) मान लीजिए $z = x + iy \in C$. तब

$$z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 = \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2 = |z|^2$$

E21) $\frac{-2+i}{i\sqrt{3}+i(2i)} = \frac{-2+i}{-2+i\sqrt{3}}$, क्योंकि $i^2 = -1$.

$$= \frac{(-2+i)(-2-i\sqrt{3})}{(-2)^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{4+\sqrt{3}}{7} + \frac{2}{7}(\sqrt{3}-1)\,i$$

E22) $c^2 + d^2 \neq 0$ का अर्थ है कि या तो $c \neq 0$ या $d \neq 0$. इस तरह, $c + id \neq 0$. अतः $\frac{a+ib}{c+id}$ सार्थक है।

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$$

$$= \left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right) + i\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

E23) क) मान लीजिए $z = x + iy \neq 0$. तब E20 (घ) से हम जानते हैं कि $z\bar{z} = |z|^2$.

इसलिए, $z\left(\frac{1}{|z|^2}\bar{z}\right) = 1$, इस तरह, $\frac{1}{|z|^2}\bar{z}$, z का गुणनात्मक प्रतिलोम है।

ख) $z \neq 0$ के लिए, $z \cdot \frac{1}{z} = 1. \therefore |z|\left|\frac{1}{z}\right| = |1| = 1. \therefore \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$.

E24) $z_1 = 6(\cos\pi + i\sin\pi)$, $z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\therefore |z_1 z_2| = 6\sqrt{2}$ और

$\text{Arg}(z_1 z_2) = \left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$, जहाँ $k \in \mathbf{Z}$ ऐसा है कि

$-\pi < \text{Arg}(z_1 z_2) \leq \pi$.

$\therefore \text{Arg}(z_1 z_2) = -\frac{3\pi}{4}$.

E25) यदि $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ और $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$, तो

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$= \frac{r_1}{r_2}(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$, $(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)$ से गुणा और भाग देने पर।

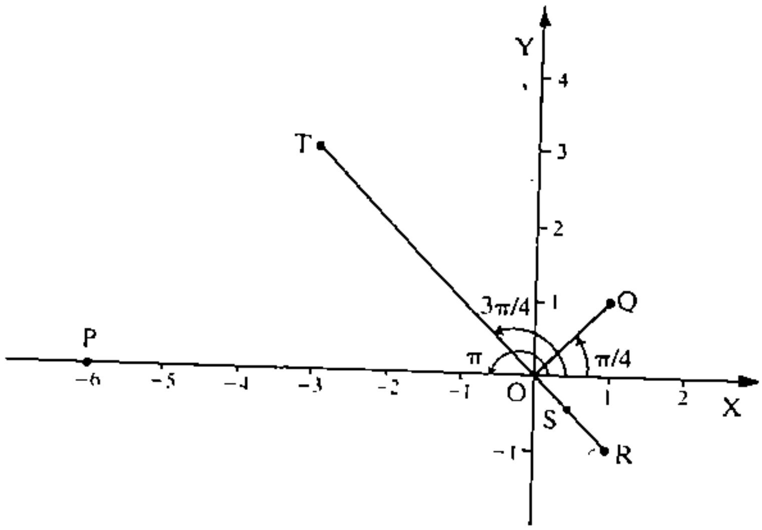
$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)]$

$= \frac{r_1}{r_2}\cos(\theta_1-\theta_2+2k\pi) + i\sin(\theta_1-\theta_2+2k\pi)$, जहाँ $k \in \mathbf{R}$ ऐसा है कि

$-\pi < \theta_1 - \theta_2 + 2k\pi \leq \pi$

E26) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{6}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$$= \frac{6}{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$



चित्र 11

बिन्दु P, Q, R, S और T क्रमशः $z_1, z_2, \bar{z}_2, \frac{1}{z_2}$ और $\frac{z_1}{z_2}$ को निरूपित करते हैं। यहाँ $OT = \frac{OP}{OQ}$ और $\angle XOT = \angle XOP - \angle XOQ$.

E27) क) वाम पक्ष $= (1+i)[(\sqrt{2}+5)-2i] = (7+\sqrt{2}) + i(3+\sqrt{2})$

दक्षिण पक्ष $= [(\sqrt{2}+3) + i(\sqrt{2}-3)] + (4+6i)$
$= (\sqrt{2}+7) + i(\sqrt{2}+3).$

अतः वाम पक्ष = दक्षिण पक्ष

(ख) मान लीजिए $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, z_3 = x_3 + iy_3$.

तब $z_1(z_2+z_3) = (x_1+iy_1)[(x_2+x_3) + i(y_2+y_3)]$

$$= [x_1(x_2+x_3) - y_1(y_2+y_3)] + i[x_1(y_2+y_3) + y_1(x_2+x_3)]$$

$$= (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1x_3 - y_1y_3) + i[(x_1y_2 + x_2y_1) + (x_1y_3 + x_3y_1)$$

$$= [(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)] + [(x_1x_3 - y_1y_3) + i(x_1y_3 + x_3y_1)]$$

$$= z_1z_2 + z_1z_3.$$

आप z_1, z_2 और z_3 को ध्रुवीय रूप में लिखकर भी इस प्रश्न को हल कर सकते हैं। यदि आप ऐसा करें, तो किसी i के लिए $z_i = 0$ की स्थिति की ओर विशेष ध्यान दीजिए।

E28) $\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} = \frac{\cos\theta - i\sin\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos\theta - i\sin\theta.$

E29) मान लीजिए $n < 0$ और $n = -m$, जहां $m > 0$, तब

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \frac{1}{(\cos\theta + i\sin\theta)^m} = \left[\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta}\right]^m$$

$$= (\cos\theta - i\sin\theta)^m$$

$$= [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^m$$

$= \cos(-m\theta) + i\sin(-m\theta)$, क्योंकि $m > 0$.

$= \cos n\theta + i\sin\theta$

E30) $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$.

और, $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3\cos^2\theta(i\sin\theta) + 3\cos\theta\,(i\sin\theta)^2 + (i\sin\theta)^3$

$$= (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i\,(3\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta).$$

अतः इन दो समिकाओं के वास्तविक भागों की तुलना करने पर हम देखते हैं कि

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$= \cos^3\theta - 3\cos\theta\,(1-\cos^2\theta)$$
$$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

इसी प्रकार, अधिकल्पित भागों की तुलना करने पर हम देखते हैं कि

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta\,(1-\sin^2\theta) - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

E31) $(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta$, और

$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$

$\therefore \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$, और

$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

E32) मान लीजिए $z = (\cos\theta + i\sin\theta)$.

तब, (6) को लागू करने पर,

$$(2\cos\theta)^6 = \left(z + \frac{1}{z}\right)^6$$
$$= \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 6\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 15\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) + 20,$$

$$(2i\sin\theta)^6 = \left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) - 6\left(z^4 + \frac{1}{z^4}\right) + 15\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) - 20.$$

$$\therefore 2^6[\cos^6\theta - \sin^6\theta] = 2\left(z^6 + \frac{1}{z^6}\right) + 30\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$$
$$= 4\cos 6\theta + 60\cos 2\theta.$$

$$\Rightarrow \cos^6\theta - \sin^6\theta = \frac{1}{16}(\cos 6\theta + 15\cos 2\theta)$$

E33) मान लीजिए $r, s \in \mathbf{R}$, $r, s > 0$ और $r^n = x = s^n$. हम परिणाम को अंतर्विरोध से सिद्ध करेंगे। (इस खंड का परिशिष्ट देखिए।) मान लीजिए $r \neq s$. तब

$r^n - s^n = (r-s)\,(r^{n-1} + r^{n-2}s + \ldots + rs^{n-2} + s^{n-1}) = 0.$

क्योंकि $r > 0, s > 0, r^{n-1} + r^{n-2}s + \ldots + rs^{n-2} + s^{n-1} > 0.$

साथ ही $r - s \neq 0$.

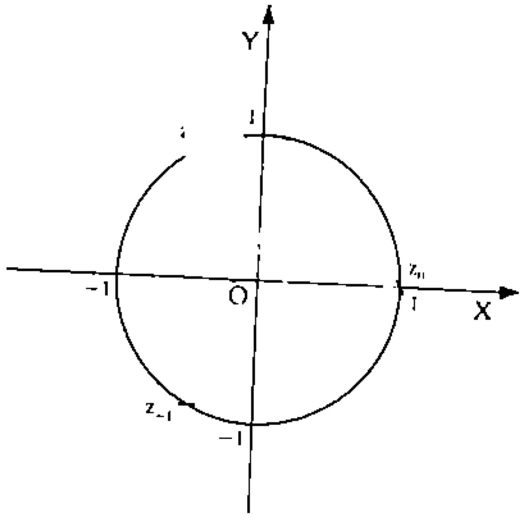
लेकिन दो शून्येतर वास्तविक संख्याओं का गुणनफल शून्य कैसे हो सकता है? अतः हमें एक अंतर्विरोध प्राप्त होता है। इसलिए, जो हम मानकर चले थे, वह असत्य है। इस तरह, $r = s$.

E34) मान लीजिए $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, i का एक घनमूल है। तब, चूंकि

$1 = \cos 0 + i\sin 0,$

$r = 1^{1/3} = 1, \theta = \frac{0 + 2k\pi}{3} = \frac{2k\pi}{3}$, जहाँ $k = 0, 1, -1$.

इसलिए मूल $1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ और $-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ होंगे।



चित्र 12 : i के घनमूल

E35) हम उन $z \in C$ को प्राप्त करना चाहते हैं, जिनके लिए

$(z^2 - 2) = \pm(1 + i)$, अर्थात्

$z^2 - 2 = 1 + i$ और $z^2 - 2 = -(1 + i)$, अर्थात्

$z^2 = 3 + i$ और $z^2 = 1 - i$.

अतः हम $3 + i$ और $1 - i$ के वर्गमूल ज्ञात करना चाहते हैं।

अब, $3 + i = \sqrt{10}\left(\cos\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right) + i\sin\left(\tan^{-1}\frac{1}{3}\right)\right)$

इस तरह, $3 + i$ के वर्गमूल

$10^{1/4}\left[\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right]$ और $10^{1/4}\left[\cos\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2} + \pi\right)\right]$ होंगे,

जहाँ, $\theta = \tan^{-1}\frac{1}{3}$.

और, $1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$. इसलिए $1 - i$ के वर्गमूल होंगे

$2^{1/4}\left[\cos\frac{\pi}{8} - i\sin\frac{\pi}{8}\right]$ और $2^{1/4}\left[\cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}\right]$.

ये चार वर्गमूल दिए गए समीकरण के 4 मूल हैं।

E36) यदि $a \geq 0$, तो E 33 के अनुसार a का एक वास्तविक घनमूल $a^{1/3}$ होगा।

अब $a = a(\cos 0 + i\sin 0)$

इस तरह, a के घनमूल होंगे

$a^{1/3}\left(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2.$

अर्थात् $a^{1/3}, a^{1/3}\omega, a^{1/3}\omega^2$.

यदि $a < 0$, तो $-a > 0$. इस तरह, $-a$ का एक वास्तविक घनमूल, मान लीजिए b, होगा।

तब $r = -b$, a का एक वास्तविक घनमूल है। और, $|r| = |a|^{1/3}$, अर्थात्

$r = -|a|^{1/3}$ (क्योंकि r ऋणात्मक है)।

अब, $a = |a|(\cos\pi + i\sin\pi)$. अतः, a के घनमूल होंगे

$$|a|^{1/3}\left\{\cos\frac{(2k+1)\pi}{3} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}\right\}, k = 0, 1, 2$$

$$= r(\cos\pi + i\sin\pi)\left[\cos\frac{(2k+1)\pi}{3} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{3}\right], k = 0, 1, 2.$$

(क्योंकि $-1 = \cos\pi + i\sin\pi$)

$$= r\left[\cos\frac{(2k+4)\pi}{3} + i\sin\frac{(2k+4)\pi}{3}\right], k = 0, 1, 2.$$

इस तरह a के घनमूल $r, r\omega, r\omega^2$ होंगे ।

ख) मान लीजिए $n = 2m, m \in N$. तब, किसी भी $b \in \mathbf{R}$ के लिए,

$b^n = b^{2m} = (b^2)^m \geq 0$. अतः, $b^n \neq a$, किसी भी $b \in \mathbf{R}$ के लिए । अतः a का वास्तविक n वां मूल नहीं हो सकता ।

ग) मान लीजिए $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ध्रुवीय रूप में ।

तब इसके घनमूल $r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right)$ होंगे, जहां $k = 0, 1, 2$.

अत: यदि $\gamma = r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta}{3} + i\sin\frac{\theta}{3}\right)$, तो अन्य मूल निम्नलिखित होंगे :

$$r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta+2\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2\pi}{3}\right) = \gamma\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \gamma\omega,$$

और $r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta+4\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+4\pi}{3}\right) = \gamma\omega^2$.

इकाई 3 त्रिघात और चतुर्घात समीकरण

3.1 प्रस्तावना

इस इकाई में हम बीजगणित के उस पहलू पर चर्चा करेंगे जो युगों से अनेक गणितज्ञों के दिमाग को परेशान करता आ रहा है। यहां हम **R** पर बहुपद समीकरणों के हलों के बारे में बात कर रहे हैं। प्राचीन हिन्दू, अरबी और बैबिलोनियाई गणितज्ञों ने एकघात और द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियों का पता लगाया था। प्राचीन बैबिलोनियाई और यूनानी गणितज्ञों ने कुछ त्रिघात समीकरणों को हल करने की विधियों का भी पता लगाया था। पर, जैसा कि हम इकाई 2 में बता चुके हैं, उन्होनें संमिश्र संख्याओं के बारे मे नहीं सोचा था। इसलिए, उनके हिसाब से ऐसे अनेक द्विघात और त्रिघात समीकरण थे जिनका कोई हल ही नहीं था।

16वीं शताब्दी में इटली के विभिन्न गणितज्ञ सीधी कोर और कंपस की सहायता से एक कोण को समत्रिभाजित (trisect) करने की ज्यामितीय समस्या को हल करने में जुटे हुए थे। इसके दौरान उन्होनें व्यापक त्रिघात समीकरण को हल करने की एक विधि को प्राप्त किया। इस विधि को जिरोलामो कार्दानो ने प्रस्तुत किया था। अतः यह विधि उन्हीं के नाम से जानी जाती है। ये वही महान कार्दानो हैं, जिन्होनें पहले पहल बीजगणित में संमिश्र संख्याओं का प्रयोग किया था। कार्दानो ने अपने समकालीन गणितज्ञ फ़ेरारी द्वारा विकसित चतुर्घात समीकरणों को हल करने की विधि का प्रचार भी किया। बाद में चलकर 17वीं शताब्दी में फ्रांसिसी गणितज्ञ देकार्त ने चतुर्घात समीकरणों को हल करने की एक अन्य विधि विकसित की।

इस इकाई में हम आपको कार्दानो, फेरारी और देकार्त द्वारा विकसित किए गए हलों से परिचित कराएँगे। लेकिन पहले हम एकघात और द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियों पर एक नज़र डालेंगे। इस चर्चा के दौरान हम कुछ व्यापक समीकरण-सिद्धांत पर भी विचार करेंगे।

गणितज्ञों की स्वाभाविक जिज्ञासा के अतिरिक्त, ऐसे त्रिघात और चतुर्घात समीकरणों के अध्ययन के अनेक कारण हैं। इस इकाई में जिन बातों पर चर्चा की गई है, वे गणितज्ञों, भौतिकीविदों, रसायनज्ञों और समाज शास्त्रियों के लिए भी उपयोगी हैं।

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस बात की ज़रूर जाँच कर लें कि आपने निम्नलिखित उद्देश्यों की प्राप्ति कर ली है या नहीं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- एकघात समीकरण को हल कर सकेंगे;
- द्विघात समीकरणों को हल कर सकेंगे;
- त्रिघात समीकरण को हल करने के लिए कार्दानो की विधि को लागू कर सकेंगे;
- चतुर्घात समीकरण को हल करने के लिए फ़ेरारी या देकार्त की विधि को लागू कर सकेंगे;
- हल प्राप्त करने के लिए बहुपद समीकरण के मूलों और गुणांकों के बीच के संबंध का प्रयोग कर सकेंगे।

3.2 अनुस्मरण

आप $2x+5, -5x^2+\frac{7}{2}, \sqrt{2}\,x^3+x^2+1$ जैसे व्यंजकों से अच्छी तरह से परिचित होंगे। ये सभी व्यंजक R में गुणांकों वाले एक चर में बहुपद हैं। व्यापक रूप से निम्नलिखित परिभाषाओं को देखिए।

परिभाषाएं : $a_0x^0+a_1x^1+a_2x^2+ \ldots\ldots + a_nx^n$, जहाँ $n \in N$ और $a_i \in C \ \forall\ i = 1, \ldots\ldots, n$,

के रूप के व्यंजक को C पर चर x में एक **बहुपद** (polynomial) कहते हैं। यहाँ $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n$, बहुपद के **गुणांक** (coefficients) हैं।

यदि $a_n \neq 0$, तब हम कहते हैं कि **बहुपद का घात** (degree) n है और **अग्रग पद** (leading term) a_nx^n है।

बहुपदों की चर्चा में हम निम्नलिखित परंपराओं का पालन करेंगे। हम

(i) x^0 के स्थान पर 1 लिखेंगे, जिससे कि हम a_0x^0 के स्थान पर a_0 लिखेंगे,

(ii) x^1 के स्थान पर x लिखेंगे ,

(iii) $1.x^m$ के स्थान पर x^m लिखेंगे (अर्थात् जब $a_m = 1$),

(iv) $0.x^m$ के प्रकार के पदों को नहीं लिखेंगे।

इस तरह, बहुपद $2+3x^2-x^3$ और बहुपद $2x^0+0x^1+3x^2+(-1)x^3$ समान है।

हम x में बहुपदों को प्रायः $f(x)$, $g(x)$, आदि से प्रकट करते हैं। यदि यह मान कर चलें कि चर x का अस्तित्व तो है ही, तो हम $f(x)$ के स्थान पर केवल f लिखकर काम चला सकते हैं। हम बहुपद $f(x)$ के घात को **deg f (x)** से प्रकट करते हैं। इस तरह, $f(x)$ में मौजुद x का अधिकतम घात ही $f(x)$ का **घात** होता है। उदाहरण के लिए,

(i) $3x+6x^2+\frac{5}{2}ix^3$, घात 3 वाला बहुपद है,

(ii) x^5, घात 5 वाला बहुपद है, और

(iii) $2+i$, घात 0 वाला बहुपद है, क्योंकि $2+i = (2+i)\,x^0$.

टिप्पणी 1: यदि $f(x)$ और $g(x)$ दो बहुपद हैं, तो

$\deg\,(f(x)+g\,(x)) \leq \max\,(\deg f(x), \deg g(x))$

$\deg\,(f(x) \cdot g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$

हम $f(x)$ को **R** पर एक बहुपद कहते हैं यदि इसके गुणांक वास्तविक संख्याएँ हों, और $f(x)$ को **Q** पर एक बहुपद कहते हैं यदि इसके गुणांक परिमेय संख्याएँ हों। उदाहरण के लिए, **2x + 3**

और x^2+3 दोनों **Q** और **R** पर बहुपद हैं (क्रमशः घात 1 और घात 2 के)। दूसरी ओर, $\sqrt{3}$, **R** पर (घात 0 वाला) एक बहुपद है पर **Q** पर बहुपद नहीं है । इस पाठ्यक्रम में लगभग हमेशा ही हम **R** पर परिभाषित बहुपदों पर चर्चा करेंगे ।

ध्यान दीजिए कि **R** का कोई भी शून्येतर अवयव **R** पर घात 0 वाला एक बहुपद होता है ।

हम 0 का घात, $-\infty$ मानते हैं ।

अब, यदि हम घात n वाले एक बहुपद को शून्य के बराबर कर दें, तो हमें **घात n वाला एक बहुपद समीकरण** या n वें घात वाला समीकरण प्राप्त होता है ।

उदाहरण के लिए,

i) $2x+3=0$, घात 1 वाला बहुपद समीकरण है, और

ii) $3x^2+\sqrt{2}\,x-1=0$, घात 2 वाला बहुपद समीकरण है ।

यदि $f(x)=a_0+a_1x+\dots\dots+a_nx^n$ एक बहुपद हो और $a\in C$, तो हम x के स्थान पर a को प्रतिस्थापित करके f (a) प्राप्त कर सकते हैं, जो कि $x=a$ पर बहुपद का मान है । इस तरह,

$f(a)=a_0+a_1a+a_2a^2+\dots\dots+a_na^n$.

उदाहरण के लिए, यदि $f(x)=2x+3$, तो $f(1)=2\cdot1+3=5$, $f(i)=2i+3$, और

$f\left(-\frac{3}{2}\right)=2\left(-\frac{3}{2}\right)+3=0$.

क्योंकि $f\left(-\frac{3}{2}\right)=0$, इसलिए $-\frac{3}{2}$ को f(x) का एक मूल कहते हैं ।

परिभाषा: मान लीजिए f(x) एक बहुपद है । $\alpha\in C$ को f(x) का एक **मूल** (या **शून्यक** (zero) कहते हैं, यदि $f(\alpha)=0$.

इस स्थिति में हम α को समीकरण $f(x)=0$ का एक **हल** (या **मूल**) भी कहते हैं ।

एक बहुपद समीकरण के अनेक हल हो सकते हैं । उदाहरण के लिए, समीकरण $x^2-1=0$ के दो हल $x=1$ और $x=-1$ हैं ।

किसी समीकरण के हलों के समुच्चय को **हल समुच्चय** (solution set) कहते हैं । इस तरह, $x^2+1=0$ का हल समुच्चय $\{i,-i\}$ है ।

अब इस परिभाषा को देखिए जिसकी आवश्यकता आपको अकसर पड़ेगी ।

परिभाषा: दो बहुपदों $a_0+a_1x+\dots\dots+a_nx^n$ और $b_0+b_1x+\dots\dots+b_mx^m$ को समान कहते हैं यदि $n=m$ और $a_i=b_i\ \forall\ i=0,1,\dots\dots,n$.

इस तरह, दो बहुपद बराबर होते हैं, यदि और केवल यदि वे समान घात वाले हों और उनके संगत गुणांक बराबर हों । इस तरह, $2x^3+3=ax^3+bx^2+cx+d$, यदि और केवल यदि $a=2, b=0, c=0, d=3$.

आइए अब हम **R** पर घात 1 या घात 2 वाले बहुपदों और उनके हल समुच्चयों पर संक्षेप में विचार करें । हम घात 1 वाले समीकरणों से शुरू करते हैं ।

3.2.1 एकघात समीकरण

बहुपद $ax+b$ लीजिए, जहाँ $a,b\in$ R और $a\neq0$. हम इस प्रकार के बहुपद को **एकघात** (या **रैखिक) बहुपद** कहते हैं । यदि हम इस बहुपद को शून्य के बराबर कर दें, तो यह एक **एकघात** (या **रैखिक) समीकरण** हो जाता है । इस तरह,

$ax+b=0, a,b\in \mathbf{R}, a\neq0$

एकघात समीकरण का अति व्यापक रूप है । आप जानते हैं कि इस समीकरण का **R** में एक हल होता है, अर्थात् $x=-\frac{b}{a}$; और केवल यही इस समीकरण का हल है ।

कभी-कभी आपको ऐसे समीकरण देखने को मिलेंगे, जो एकघात नहीं लगते, पर सरल करने के बाद वे एकघात हो जाते हैं। आइए हम कुछ उदाहरण देखें

उदाहरण 1: $\frac{3p-1}{3} - \frac{2p}{p-1} = p$ को हल कीजिए। (यहाँ हमें $p \neq 1$ अवश्य मानना होगा।)

दो समीकरण तुल्य होते हैं, यदि उनके हल-समुच्चय समान हों।

हल: देखने पर यह समीकरण चर p में एकघात नहीं मालूम पड़ता। पर, वज्र-गुणन (cross-multiplication) करने पर हमें निम्नलिखित तुल्य समीकरण (equivalent equation) प्राप्त होता है।

$(3p-1)(p-1) - 3(2p) = 3(p-1)p.$

इसे सरल करने पर हम देखते हैं कि

$3p^2 - 4p + 1 - 6p = 3p^2 - 3p,$

अर्थात् $7p - 1 = 0.$

इस समीकरण का हल समुच्चय $\left\{\frac{1}{7}\right\}$ है। इस तरह, यही उस समीकरण का हल समुच्चय है जिसे हमने हल करना चाहा था।

उदाहरण 2: मान लीजिए मैं 1,20,000 रु० में दो ज़मीन के टुकड़े खरीदती हूँ और फिर उन्हें बेच देती हूँ। और यह भी मान लीजिए कि पहले टुकड़े को बेचने में मुझे 15% का लाभ होता है और दूसरा बेचने पर मुझे 10% की हानि होती है। यदि कुल मिलाकर मुझे 5,500 रु० का लाभ होता है, तो ज़मीन के प्रत्येक टुकड़े को मैंने कितने में ख़रीदा था?

हल : मान लीजिए पहली ज़मीन की कीमत x रु० थी।

तब दूसरी ज़मीन की कीमत (1,20,000 – x) रु० थी।

इस तरह मेरा लाभ = $\frac{15}{100}x$ रु०, और

मेरी हानि = $\frac{10}{100}(1,20,000 - x)$ रु०

$\therefore \frac{15}{100}x - \frac{10}{100}(1,20,000 - x) = 5500.$

$\Leftrightarrow 25x - 1,750,000 = 0$

$\Leftrightarrow x = 70,000.$

अतः पहली ज़मीन की कीमत 70,000 रु० दूसरी की कीमत 50,000 रु० थी।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E 1) साथ में बताए गए चर के लिए निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए। मान लीजिए कि सभी हर शून्येतर हैं।

क) x के लिए $J\left(\frac{x}{k} + a\right) = x$, जहाँ J, k और a अचर हैं।

ख) R के लिए $\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$, जहाँ r_1 और r_2 अचर हैं।

ग) F के लिए $C = \frac{5}{9}(F - 32)$, जहाँ C अचर है।

E 2) एक समद्विबाहु त्रिभुज (isosceles triangle) का परिमाप 30 से. मी. है। इसकी समान भुजाओं की लम्बाई तीसरी भुजा से दुगनी लंबी है। तीनों भुजाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

E 3) एक छात्रा को अपने घर से अध्ययन केन्द्र तक साइकिल पर जाने में 20 मिनट लगते हैं। वापसी पर चढ़ाई होने के कारण उसे आधा घंटा लगता है। यदि जाने की अपेक्षा वापसी में उसकी रफ़्तार 8 कि.मी. प्रति घंटा कम हो, तो बताइए कि अध्ययन केन्द्र से उसका घर कितनी दूर है?

E 4) साधारण ब्याज मूलधन राशि के, और जितने समय के लिए राशि लगाई गई है उसके, समानुपातिक होता है। यदि 1000 रु० को 2 वर्ष के लिए लगाए जाने पर 110 रु० ब्याज मिलता है, तो 5000 रु० को 3 वर्ष के लिए लगाने पर कितना ब्याज मिलेगा?
(**संकेत:** $S = kPt$, जहाँ k आनुपातिकता स्थिरांक है, S साधारण ब्याज है, P मूलधन है और t समय है।)

अब, जबकि हमने एकघात समीकरणों का अध्ययन कर लिया है, आइए द्विघात समीकरणों, अर्थात् घात 2 वाले समीकरणों पर चर्चा करें।

3.2.2 द्विघात समीकरण

$\mathbf{R}$ पर x में घात 2 वाला व्यापक बहुपद लीजिए :

$ax^2 + bx + c$, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{R}, a \neq 0$.

हम इस बहुपद को **द्विघात बहुपद** (quadratic polynomial) कहते हैं। द्विघात बहुपद को शून्य के बराबर करने से हमें मानक रूप में एक **द्विघात समीकरण** प्राप्त होता है।

क्या आप द्विघात समीकरण का एक उदाहरण बता सकते हैं? एक तो $x^2 = 5$ है जो कि $x^2 - 5 = 0$ के बराबर है। एक अन्य समीकरण वह है जिसे कार्दानो ने हल करने की कोशिश की थी, अर्थात् $x^2 - 10x + 40 = 0$ (भाग 2.1 देखिए)। हम समझते हैं कि आप अनेकों अन्य उदाहरण दे सकते हैं।

बैबिलोनियाई काल से ही लोगों को इस प्रकार के समीकरण हल करने के कई तरीके मालूम हैं। लगभग 628 ई० में ब्रह्मगुप्त ने द्विघात समीकरणों को हल करने के लिए एक विधि बताई थी। यह विधि, जिसका प्रयोग किसी भी द्विघात समीकरण के लिए किया जा सकता है, "वर्ग को पूरा करना" है। इसके प्रयोग से हमें द्विघात समीकरण सूत्र प्राप्त होता है। आइए देखें कि यह सूत्र क्या है।

द्विघात सूत्र (quadratic formula) : द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{R}$ और $a \neq 0$, के हल हैं

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

व्यंजक $b^2 - 4ac$ को $ax^2 + bx + c = 0$ का **विविक्तकर** (discriminant) कहते हैं।

ध्यान दीजिए कि इस सूत्र के अनुसार द्विघात समीकरण के केवल दो मूल होते हैं। ये मूल बराबर हो सकते हैं, या अलग-अलग; ये वास्तविक हो सकते हैं, या संमिश्र संख्याएं।

चेतावनी : परंपरा के अनुसार हम $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$ में स्थित किसी मूल को **संमिश्र मूल** (complex root) कहते हैं। अर्थात् $a + ib$ के रूप का मूल, जहाँ $a, b \in \mathbf{R}$ और $b \neq 0$, संमिश्र मूल होता है। आइए अब हम कुछ उदाहरण लें।

उदाहरण 3 : i) $x^2 - 4x + 1 = 0$

ii) $4x^2 + 25 = 20x$

iii) $x^2 - 10x + 40 = 0$

को हल कीजिए।

हल : i) यह समीकरण मानक रूप में है। इसलिए हम तुरंत द्विघात सूत्र लागू कर सकते हैं। यहाँ $a = 1, b = -4, c = 1$. इन मानों को द्विघात सूत्र में प्रतिस्थापित करने पर हमें समीकरण के निम्नलिखित दो मूल प्राप्त होते हैं :

$$x = \frac{-(-4)+\sqrt{(-4)^2-4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{4+\sqrt{12}}{2} = 2+\sqrt{3}, \text{ और}$$

$$x = \frac{-(4)-\sqrt{(-4)^2-4(1)(1)}}{2(1)} = 2-\sqrt{3}$$

अतः हल $2+\sqrt{3}$ और $2-\sqrt{3}$ हैं, जो **R** के दो अलग-अलग अवयव हैं।

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति मे विविक्तकर धनात्मक था।

ii) इस स्थिति में आइए पहले हम समीकरण को निम्नलिखित मानक रूप में लिखें :

$4x^2-20x+25 = 0.$

अब: द्विघात सूत्र में $a = 4, b = -20, c = 25$ लेने पर हम पाते हैं कि

$$x = \frac{20+\sqrt{400-4(4)(25)}}{2(4)} = \frac{20+\sqrt{0}}{8} = \frac{5}{2}, \text{ और}$$

$$x = \frac{20-\sqrt{400-4(4)(25)}}{2(4)} = \frac{5}{2}.$$

यहाँ हम पाते हैं कि दोनों मूल समान हैं और वास्तविक हैं।

ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में विविक्तकर शून्य है।

(iii) द्विघात सूत्र को लागू करने पर हमें निम्नलिखित हल प्राप्त होते हैं:

$$x = \frac{10\pm\sqrt{100-160}}{2} = 5\pm\frac{\sqrt{-60}}{2} = 5\pm\frac{\sqrt{4(-15)}}{2}$$

$$= 5\pm\sqrt{-15}$$

$$= 5\pm i\sqrt{15}.$$

इस तरह, इस स्थिति में हमें दो अलग-अलग संमिश्र मूल, $5+i\sqrt{15}$, और $5-i\sqrt{15}$ प्राप्त होते हैं। ध्यान दीजिए कि इस स्थिति में विविक्तकर ऋणात्मक है।

संमिश्र मूल से हमारा अर्थ $C \setminus R$ में किसी मूल से है।

ऊपर के उदाहरण में क्या आपको द्विघात समीकरण के विविक्तकर और मूलों के प्रकारों के बीच कोई संबंध नज़र आता है ? ऐसा संबंध है , जिसे हम अब व्यक्त करेंगे।

> समीकरण $ax^2+bx+c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbf{R}$ के दो मूल हैं। ये मूल
> i) वास्तविक और अलग-अलग हैं, यदि $b^2-4ac > 0$;
> ii) वास्तविक और समान हैं, यदि $b^2-4ac = 0$;
> iii) संमिश्र और अलग-अलग हैं, यदि $b^2-4ac < 0$.

अब बताइए कि क्या $ax^2+bx+c = 0$ और $dax^2+dbx+dc = 0$, जहाँ d एक शून्येतर वास्तविक संख्या है, के मूलों के लक्षण (character of roots) में कोई अंतर होता है? उदाहरण के लिए, यदि $b^2-4ac > 0$, तो $(db)^2-4(da)(dc)$ का चिह्न क्या होगा? यह भी धनात्मक होगा। वास्तव में, तुल्य द्विघात समीकरणों के मूलों का लक्षण समान होता है।

आइए अब हम कुछ महत्वपूर्ण टिप्पणियों पर विचार करें जो द्विघात समीकरणों को हल करने में आपके लिए उपयोगी होंगी।

टिप्पणी 2 : α और β द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c = 0$ के मूल होते हैं यदि और केवल यदि

$ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$.

इस तरह, $\alpha \in C$, $ax^2+bx+c = 0$ का एक मूल होता है, यदि और केवल यदि

$(x-\alpha) \mid (ax^2+bx+c)$.

टिप्पणी 3: द्विघात सूत्र से आप देख सकते हैं कि यदि $b^2-4ac < 0$, तो द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c = 0$ के दो संमिश्र मूल होते हैं जो कि एक दूसरे के संयुग्मी होते हैं।

टिप्पणी 4: कभी-कभी द्विघात सूत्र की सहायता के बिना ही द्विघात समीकरण को हल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, स्पष्ट है कि समीकरण $x^2 = 9$ के मूल 3 और -3 हैं। इसी प्रकार, यह स्पष्ट है कि $(x-1)^2 = 0$ के दो संपाती मूल (coincident roots) हैं और दोनों 1 के बराबर हैं (टिप्पणी 2 देखिए)।

अभी तक हमने जो कुछ भी बताया है, उसकी सहायता से नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 5) **R** पर परिभाषित किसी द्विघात समीकरण के संमिश्र मूल हो सकते हैं, जबकि **R** पर परिभाषित किसी एकघात समीकरण का केवल वास्तविक मूल हो सकता है। सत्य है या असत्य? क्यों?

E 6) निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए :

क) $x^2+5 = 0$

ख) $(x+9)(x-1) = 0$

ग) $x^2-\sqrt{5}\,x = 1$

घ) चर m के लिए $pm^2-8qm+\frac{1}{r} = 0$, जहाँ $p, q, r \in \mathbf{R}$ और $p, r \neq 0$.

E 7) k के किन मानों पर समीकरण

$$kx^2+(2k+6)x+16 = 0$$

के संपाती मूल होंगे?

E 8) दिखाइए कि यदि $(2ax+b) \mid (ax^2+bx+c)$, तो द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c = 0$ के समान मूल हैं।

E 9) b और c के वे मान मालूम कीजिए जिनके लिए बहुपद x^2+bx+c के मूल $1+i$ और $1-i$ हों।

E 10) यदि α और β, $ax^2+bx+c = 0$ के मूल हों, तो दिखाइए कि $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$ और $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.

E 11) मान लीजिए $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ ऐसे हैं कि $\alpha+\beta = p \in \mathbf{R}$ और $\alpha\beta = q \in \mathbf{R}$. दिखाइए कि α और β, $x^2-px+q = 0$ के मूल हैं।

E11, E10 का विलोम है। इसका प्रयोग हम अगले भाग में करेंगे।

आइए अब हम कुछ ऐसे समीकरणों पर विचार करें जो द्विघात तो नहीं हैं पर जिनके हल संबंधित द्विघात समीकरणों से प्राप्त किए जा सकते हैं। नीचे दिए गए उदाहरण को देखिए।

उदाहरण 4 : (i) $2x^4+x^2+1 = 0$, और

(ii) $x = \sqrt{15-2x}$

को हल कीजिए।

हल : (i) $2x^4+x^2+1 = 0$ को $2y^2+y+1 = 0$ के रूप में लिख सकते हैं, जहां $y = x^2$. तब y के लिए इसे हल करने पर हमें $y = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$ प्राप्त होता है, अर्थात् हमें C पर दो बहुपद $x^2 = \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$ प्राप्त होते हैं।

इस तरह दिए हुए समीकरण के निम्नलिखित चार हल हैं :

$$\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{7}}{4}},\ -\sqrt{\frac{-1+i\sqrt{7}}{4}},\ \sqrt{\frac{-1-i\sqrt{7}}{4}},\ -\sqrt{\frac{-1-i\sqrt{7}}{4}}$$

ii) $x = \sqrt{15-2x}$ एक बहुपद समीकरण नहीं है। इस समीकरण के दोनों पक्षों का वर्ग करने पर हमें बहुपद समीकरण $x^2 = 15-2x$ प्राप्त होता है

अब, $x = \sqrt{15-2x}$ का कोई भी मूल, समीकरण $x^2 = 15-2x$ का भी एक मूल होगा। लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि इसका विलोम सही हो, क्योंकि $x^2 = 15-2x$ तब भी होगा जबकि $x = -\sqrt{15-2x}$. अतः हम $x^2 = 15-2x$ के मूल प्राप्त करेंगे और देखेंगे कि इनमें से कौन से मूल $x = \sqrt{15-2x}$ को संतुष्ट करते हैं।

अब, द्विघात समीकरण $x^2 = 15-2x$ के मूल $x = -5$ और $x = 3$ हैं। हमें इन मानों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करके ज़रूर देख लेना चाहिए कि समीकरण को ये संतुष्ट करते हैं या नहीं।

अब, $x = -5$ के लिए

$x-\sqrt{15-2x} = (-5)-\sqrt{15+10} = (-5)-5 = -10 \neq 0.$

अतः $x = -5$ दिए हुए समीकरण का हल नहीं है। पर यह समीकरण $x^2 = 15-2x$ का एक हल है। इस हल को हम **अतिरिक्त हल** (extraneous solution) कहते हैं।

यदि हम दिए हुए समीकरण में $x = 3$ प्रतिस्थापित करें, तो क्या होता है? ऐसा करने से हमें $3 = \sqrt{15-6}$, अर्थात् $3 = 3$ प्राप्त होता है, जो कि सत्य है। अतः $x = 3$ दिए हुए समीकरण का हल है।

अब शायद आप नीचे दिए हुए समीकरणों को हल करना चाहेंगे। ध्यान रखिए कि **आपको ज़रूर जांच कर लेना चाहिए** कि प्राप्त किए गए हल दिए हुए समीकरणों को संतुष्ट करते हैं या नहीं। ऐसा करने से आपको

i) यदि कोई अतिरिक्त हल प्राप्त हो गया हो, तो उसे हटाने में सहायता मिलेगी, और

ii) इस बात से सुनिश्चित करने में सहायता मिलेगी कि परिकलन सही हैं।

E 12) निम्नलिखित समीकरणों को द्विघात समीकरणों में बदल कर हल कीजिए :

क) $4p^4-16p^2+5 = 0$

ख) $(5x^2-6)^{1/4} = x$

ग) $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1} = 1.$

E 13) अमीना, अलका से 1 कि.मी. प्रति घंटा तेज़ चलती है। दोनों पैदल अपने गाँव के सबसे नज़दीक के पुस्तकालय को गई। पुस्तकालय गाँव से 24 कि.मी. की दूरी पर है। वहाँ पहुँचने में अलका को अमीना से 2 घंटा अधिक लगा। अलका की औसत गति क्या थी?

इस भाग में हमारा उद्देश्य आपको एकघात और द्विघात समीकरणों को हल करने की विधियों को फिर से याद करने में सहायता देना था। आइए अब हम देखें कि घात 3 वाले समीकरणों को कैसे हल कर सकते हैं।

3.3 त्रिघात समीकरण

इस भाग में हम कुछ ऐसे गणितीय तथ्यों पर चर्चा करने जा रहे हैं जिस पर 11वीं शताब्दी के महान फ़ारसी शायर उमर खय्याम ने काफ़ी सोच, विचार किया था। उन्होंने और उनके पहले के यूनानी गणितज्ञों ने शांकवों (conics) के परिच्छेद से संबंधित ज्यामितीय विधियों को लागू करके त्रिघात समीकरणों के हल प्राप्त किए थे। लेकिन यहाँ पर हम ऐसे समीकरणों के हल प्राप्त करने की बीजीय विधियों [illegible] आधारभूत बीजीय संक्रियाओं को लागू करके तथा करणियों [illegible] में ही चर्चा करेंगे।

आइए पहले हम देखें कि घात 3 वाला समीकरण अर्थात् त्रिघात समीकरण क्या होता है।

परिभाषा : $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, जहाँ $a, b, c, d \in \mathbf{R}, a \neq 0$, के रूप का समीकरण, R पर **त्रिघात समीकरण** (cubic equation) का अति व्यापक रूप है।

उदाहरण के लिए, $2x^3 = 0$, $\sqrt{3}x^3 + 5x^2 = 0$, $-2x = 5x^3 - 1$ और $x^3 + 5x^2 + 2x = -7$ सभी त्रिघात समीकरण हैं, क्योंकि इनमें से प्रत्येक को $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, जहाँ $a \neq 0$, के रूप में लिखा जा सकता है।

इसके विपरीत, $x^4 + 1 = 0$, $x^3 + 2x^2 = x^3 - x$ और $x^3 + \sqrt{x} = 0$ त्रिघात समीकरण नहीं हैं।

ऐसी अनेक स्थितियाँ आती हैं जिनमें त्रिघात समीकरणों को हल करना आवश्यक हो जाता है।

उदाहरण के लिए, सामाजिक, भौतिक और जैव विज्ञानों की अनेक समस्याएँ 3×3 आव्यूह के आइगेनमान (जिसके बारे में आप रैखिक बीजगणित के पाठ्यक्रम में पढ़ सकते हैं) प्राप्त करने की समस्या बन जाती है। और, इसके लिए आपको यह जानना आवश्यक होगा कि त्रिघात समीकरण के हल कैसे प्राप्त किए जाते हैं।

त्रिघात समीकरण या किसी भी बहुपद समीकरण के हल प्राप्त करने के लिए हमें बहुपद समीकरणों के मूलों से संबंधित कुछ परिणाम जानने की आवश्यकता है। हम एक-एक करके इन पर संक्षेप में चर्चा करेंगे। हम पहले परिणाम का केवल कथन देंगे, उपपत्ति बिना।

प्रमेय 1 : घात n वाले बहुपद समीकरण
$a_0 + a_1x + \ldots\ldots + a_nx^n = 0$, जहाँ $a_0, a_1, \ldots\ldots, a_n \in \mathbf{R}$, और $a_n \neq 0$,
के n मूल होते हैं, जो कि वास्तविक या अवास्तविक संमिश्र संख्याएँ होते हैं।

यदि $x_1, \ldots\ldots, x_n$ प्रमेय 1 के समीकरण के n मूल हैं, तो
$a_0 + a_1x + \ldots\ldots + a_nx^n = a_n(x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$.

(ध्यान दीजिए कि मूलों का अलग-अलग होना आवश्यक नहीं। उदाहरण के लिए,
$1 + 2x + x^2 = (x + 1)^2$.

यहाँ हम इस प्रमेय को सिद्ध नहीं करेंगे; पर, हम एक अति महत्त्वपूर्ण परिणाम का कथन देंगे जिसका प्रयोग उपपत्ति में किया जाता है।

प्रमेय 2 (विभाजन कलन-विधि) : यदि R पर बहुपद $f(x)$ और $g(x) (\neq 0)$ दिए हुए हों, तो R पर ऐसे बहुपद $q(x)$ और $r(x)$ हैं जिनसे कि

$f(x) = g(x)\,q(x) + r(x)$ और $\deg r(x) < \deg g(x)$.

हम इस प्रमेय का प्रयोग निम्नलिखित परिणाम को भी सिद्ध करने के लिए करेंगे। यह परिणाम हमें संमिश्र मूलों, अर्थात् वे मूल जो अवास्तविक संमिश्र संख्याएँ हैं, के बारे में बताता है।

प्रमेय 3: यदि R पर किसी बहुपद समीकरण के संमिश्र मूल हों, तो ये मूल, युग्मों में पाए जाते हैं। वास्तव में, यदि $a + ib \in \mathbf{C}$ एक मूल हो, तो $a - ib$ भी एक मूल होता है।

उपपत्ति : मान लीजिए $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots\ldots + a_nx^n$, R पर घात n वाला एक बहुपद है। मान लीजिए $a + ib \in \mathbf{C}$, $f(x) = 0$ का एक मूल है, अर्थात् $(x - (a + ib)) \mid f(x)$. हम दिखाना चाहते हैं कि $(x - (a - ib)) \mid f(x)$.

अब, $(x - (a + ib))(x - (a - ib)) = (x - a)^2 + b^2$.

और, विभाजन कलन-विधि से, R पर ऐसे बहुपद $g(x)$ और $r(x)$ हैं, जिनसे कि

$f(x) = \{(x - a)^2 + b^2\}\,g(x) + r(x)$, जहाँ $\deg r(x) < 2$.
क्योंकि $x - (a + ib)$, $f(x)$ और $(x - a)^2 + b^2$ को विभाजित करता है, इसलिए यह

$f(x) - \{(x - a)^2 + b^2\}\,g(x)$, अर्थात् $r(x)$ को विभाजित करता है।

$f(x) \mid g(x) \Rightarrow \deg f(x) \leq \deg g(x)$ (देखिए टिप्पणी 1)

लेकिन या तो $r(x)$, R पर एकघात है, या R में एक अचर है। अतः $(x - (a + ib))$, $r(x)$ को केवल तब विभाजित कर सकता है, जबकि $r(x) = 0$.

इसलिए, हम पाते हैं कि $f(x) = \{(x - a)^2 + b^2\}\,g(x)$.

क्योंकि $x-(a-ib)$ इस समीकरण के दाएँ पक्ष को विभाजित करता है, इसलिए यह $f(x)$ को भी विभाजित करेगा। अतः $a-ib$ भी $f(x)=0$ का एक मूल है।

ध्यान दीजिए प्रमेय 3 में **यह नहीं कहा गया** है कि $f(x)=0$ का एक संमिश्र मूल ज़रूर होगा। इसमें केवल यही कहा गया है कि **यदि** इसका एक संमिश्र मूल हो, तो इस मूल का संयुग्मी भी एक मूल होगा।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए। इनमें हम सिर्फ़ कुछ ऐसी बातों को दोहरा रहे हैं जिनसे आप परिचित हैं।

E 14) R पर किसी एकघात समीकरण के कितने संमिश्र मूल हो सकते हैं?

E 15) किन परिस्थितियों में R पर द्विघात समीकरण $x^2+px+q=0$ के संमिश्र मूल होते हैं? यदि इस समीकरण के संमिश्र मूल हों तो ये कितने होंगे और इनमें क्या संबंध होगा?

आइए अब त्रिघात समीकरणों के संदर्भ में प्रमेय 1 और 3 पर विचार करें। R पर व्यापक त्रिघात समीकरण

$ax^3+bx^2+cx+d=0, a \neq 0,$

को लीजिए। इस समीकरण का हल समुच्चय, समीकरण $x^3+\frac{b}{a}x^2+\frac{c}{a}x+\frac{d}{a}=0$ के हल समुच्चय के समान है। अतः हम यह मान सकते है कि R पर घात 3 वाला अति व्यापक समीकरण

$x^3+px^2+qx+r=0$ है, जहां $p, q, r \in R$.

प्रमेय 1 के अनुसार इस समीकरण के 3 मूल होते हैं।

प्रमेय 3 के अनुसार या तो तीनों मूल वास्तविक होंगे या एक वास्तविक और दो संमिश्र होंगे। आइए हम इन मूलों को बीजीय विधि से प्राप्त करें।

चित्र 1: कार्दानो

3.3.1 कार्दानो का हल

यह माना जाता है कि त्रिघात समीकरणों को हल करने की बीजीय विधि इटली के गणितज्ञ, देल फ़ेरो (1465-1526) की देन है। पर, इस विधि को कार्दानो विधि कही जाती है, क्योंकि लोगों को इस विधि की जानकारी तब मिली जबकि 1545 में इटली के गणितज्ञ जिरोलामो कार्दानो (Cardano) ने अपने 'आर्स मागना' में इसे प्रकाशित किया।

[illegible] विधि क्या है। पहले हम एक विशेष स्थिति पर विचार करेंगे।

उदाहरण 5 : $2x^3+3x^2+4x+1=0$ को हल कीजिए।

हल : पहले तो हम निम्नलिखित विधि से त्रिघात को पूरा करके घात 2 वाले पद को हटा देते हैं।

$$2x^3+3x^2+4x+1=0$$

$$\Leftrightarrow x^3+\frac{3}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^3-\frac{3}{4}x-\frac{1}{8}\right]+2x+\frac{1}{2}=0.$$

$$\Leftrightarrow \left[x+\frac{1}{2}\right]^3+\frac{5}{4}x-\frac{3}{8}=0$$

$x+\frac{1}{2}=y$ लेने पर, समीकरण $y^3+\frac{5}{4}y-\frac{1}{4}=0$ हो जाता है।

अब मान लीजिए हल $y=m+n$ है, जहाँ $m, n \in C$. तब

$$(m+n)^3+\frac{5}{4}(m+n)-\frac{1}{4}=0$$

$\Leftrightarrow m^3 + 3mn(m+n) + n^3 + \frac{5}{4}(m+n) - \frac{1}{4} = 0$

$\Leftrightarrow m^3 + n^3 + \left(3mn + \frac{5}{4}\right)(m+n) - \frac{1}{4} = 0$ ....(1)

अब हम m और n पर एक और प्रतिबंध लगाते हैं, कि

$3mn + \frac{5}{4} = 0$, अर्थात् $mn = -\frac{5}{12}$ ....(2)

तब (1) से हमें $m^3 + n^3 = \frac{1}{4}$ प्राप्त होता है।

और (2) से हमें $m^3 n^3 = -\frac{125}{1728}$ प्राप्त होता है।

इस तरह, E11 का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि m^3 और n^3 समीकरण

$t^2 + \frac{1}{4}t - \frac{125}{1728} = 0$

के मूल हैं।

अतः द्विघात सूत्र से हम पाते हैं कि $m^3 = \frac{1}{8}\left(1 + \sqrt{\frac{152}{27}}\right) = \alpha$, मान लीजिए,

और $n^3 = \frac{1}{8}\left(1 - \sqrt{\frac{152}{27}}\right) = \beta$, मान लीजिए।

इकाई 2 (E 36) से आप जानते हैं कि α और β के वास्तविक मूल होते हैं। मान लीजिए ये क्रमशः u और v हैं। अतः m मान $u, \omega u, \omega^2 u$ धारण कर सकता है, और n मान $v, \omega v, \omega^2 v$ धारण कर सकता है। अब, ω और ω^2 ऐसी अवास्तविक संमिश्र संख्याएँ है जिनसे कि $\omega(\omega^2) = 1$.

और, (2) से हम जानते हैं कि $mn = -\frac{5}{12}$, एक वास्तविक संख्या।

इस तरह, यदि $m = u$, तो n, v होगा; यदि $m = \omega u$, तो $n = \omega^2 v$, होगा; यदि $m = \omega^2 u$, तो n, ωv होगा। अतः y के संभव मान होंगे

$u + v, \omega u + \omega^2 v, \omega^2 u + \omega v.$

दिए हुए समीकरण के तीन मूल प्राप्त करने के लिए हमें केवल इन मानों को संबंध $x = y - \frac{1}{2}$ में प्रतिस्थापित करना होगा।

इस उदाहरण से आपको व्यापक त्रिघात समीकरण को हल करने की कार्दानो विधि के बारे में थोड़ी बहुत जानकारी अवश्य मिल गई होगी। आइए हम व्यापक समीकरण

$x^3 + px^2 + qx + r = 0,\ p, q, r \in \mathbf{R}$ .... (3)

को हल करने के लिए इस विधि के विभिन्न चरणों को देखें।

चरण 1: पहले हम $x^3 + px^2 = \left(x + \frac{p}{3}\right)^3 - \frac{p^2}{3}x - \frac{p^3}{27}$ लिखते हैं।

तब (3) निम्न समीकरण के तुल्य है।

$\left(x + \frac{p}{3}\right)^3 + qx + r - \left(\frac{p^2}{3}x + \frac{p^3}{27}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{p}{3}\right)^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)x + \left(r - \frac{p^3}{27}\right) = 0$

अब, $y = x + \frac{p}{3}$ लीजिए। तब $x = y - \frac{p}{3}$, और समीकरण

$y^3 + \left(q - \frac{p^2}{3}\right)\left(y - \frac{p}{3}\right) + \left(r - \frac{p^3}{27}\right) = 0$ हो जाता है,

अर्थात् $y^3 + Ay + B = 0,$ .... (4)

जहाँ $A = q - \frac{p^2}{3}$ और $B = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$

चरण 2: आइए अब हम (4) को हल करें।

मान लीजिए $y = \alpha + \beta$ एक हल है। y के इस मान को (4) में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि $(\alpha + \beta)^3 + A(\alpha + \beta) + B = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 + 3\alpha\beta(\alpha + \beta) + \beta^3 + A(\alpha + \beta) + B = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 + \beta^3 + (3\alpha\beta + A)(\alpha + \beta) + B = 0$ .... (5)

अब हम α और β ऐसा लेते हैं जिससे कि $3\alpha\beta + A = 0$. तब हमें निम्नलिखित दो समीकरण प्राप्त होते हैं,

$(\alpha\beta)^3 = \left(-\frac{A}{3}\right)^3$, अर्थात् $\alpha^3\beta^3 = -\frac{A^3}{27}$, ... (6)

और (5) से,

$\alpha^3 + \beta^3 = -B.$ .... (7)

इस तरह, E11 का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि α^3 और β^3, द्विघात समीकरण

$t^2 + Bt - \frac{A^3}{27} = 0$ .... (8)

के मूल हैं।

अतः द्विघात सूत्र लागू करने पर हम पाते हैं कि

$$\left.\begin{aligned} \alpha^3 &= -\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}} = u, \text{ मान लीजिए, और} \\ \beta^3 &= -\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}} = v, \text{ मान लीजिए} \end{aligned}\right\} \quad \text{........... (9)}$$

अब, इकाई 2 (E36) से हम जानते हैं कि किसी भी संमिश्र संख्या के तीन घनमूल होते हैं। हम यह भी जानते हैं कि यदि एक घनमूल γ हो, तो तीनों मूल γ, $\omega\gamma$ और $\omega^2\gamma$ होंगे।

अतः यदि a और b क्रमशः u और v के एक घनमूल हों, तो α, a, $a\omega$ या $a\omega^2$ हो सकता है और β, b, $b\omega$ या $b\omega^2$ हो सकता है। क्या इसका मतलब है कि $y = \alpha + \beta$ के 9 मान हो सकते हैं? ध्यान दीजिए कि α और β, संबंध $\alpha\beta = -\frac{A}{3} \in \mathbf{R}$ को भी संतुष्ट करते हैं। अतः, क्योंकि $\omega \in C, \omega^2 \in C, \omega^3 = 1 \in \mathbf{R}$, इसलिए y केवल $a + b$ या $a\omega + b\omega^2$ या $a\omega^2 + b\omega$ हो सकता है।

चरण 3 : (3) के 3 हल प्राप्त करने के लिए हम y के इन मानों में से प्रत्येक मान को समीकरण $x = y - \frac{p}{3}$ में प्रतिस्थापित करते हैं।

अतः कार्दानो विधि के अनुसार

> $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ के मूल $\alpha + \beta - \frac{p}{3}$, $\alpha\omega + \beta\omega^2 - \frac{p}{3}$ और $\alpha\omega^2 + \beta\omega - \frac{p}{3}$ हैं,
>
> जहाँ $\omega = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$;
>
> α, $\left[-\frac{B}{2} + \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}\right]$ का एक घनमूल है;
>
> β, $\left[-\frac{B}{2} - \sqrt{\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27}}\right]$ का एक घनमूल है;
>
> $A = q - \frac{p^2}{3}$; $B = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r.$

जो सूत्र हमने प्राप्त किया है, उसे लागू करना थोड़ा जटिल है। कैलक्युलेटर के इस्तेमाल से यह काम थोड़ा आसान हो जाता है, जैसा कि आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने के दौरान पाएंगे।

E 16) निम्नलिखित त्रिघात समीकरणों को हल कीजिए:

(क) $2x^3+3x^2+3x+1 = 0$

(ख) $x^3+21x+342 = 0$

(ग) $x^3+6x^2+6x+8 = 0$

(घ) $x^3+29x-97 = 0$

(ङ) $x^3 = 30x - 133$

E16 के प्रत्येक समीकरण में आपने देखा होगा कि $\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27} \geq 0$. लेकिन अगर $\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27} < 0$, तो क्या होता है?

इस स्थिति को **अखंडनीय स्थिति** (irreducible case) कहते हैं। इस स्थिति में (9) से पता चलता है कि α^3 और β^3, $a+ib$ और $a-ib$, $b \neq 0$, के रूप की संमिश्र संख्याएँ हैं। इकाई 2 से हम जानते हैं कि यदि $a+ib$ का ध्रुवीय रूप $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ हो, तो इसके घनमूल

$$r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2,$$ होते हैं।

इसी प्रकार $a-ib$ के घनमूल

$$r^{1/3}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} - i\sin\frac{\theta+2k\pi}{3}\right), k = 0, 1, 2,$$ होते हैं।

अतः (4) में y के 3 मान होंगे

$$2r^{1/3}\cos\frac{\theta+2k\pi}{3}, \text{ जहाँ } k = 0, 1, 2.$$

ये सभी मान वास्तविक संख्याएँ हैं। अतः **इस स्थिति में (3) के सभी मूल वास्तविक हैं** और ये मूल $2r^{1/3}\cos\frac{\theta}{3}-\frac{p}{3}$, $2r^{1/3}\cos\frac{\theta+2\pi}{3}-\frac{p}{3}$, $2r^{1/3}\cos\frac{\theta+4\pi}{3}-\frac{p}{3}$ हैं।

अखंडनीय स्थिति में α और β वास्तविक नहीं होते, लेकिन x वास्तविक होता है।

हल का यह त्रिकोणमितीय रूप फ्रांसोआ वियते (1550-1603) की देन है।

अब आप एक प्रश्न हल कीजिए।

E 17) समीकरण $x^3-3x+1 = 0$ को हल कीजिए।

अभी तक हमने देखा है कि त्रिघात समीकरण के तीन मूल होते हैं। हम यह भी जानते हैं कि या तो तीनों मूल वास्तविक होते हैं या एक मूल वास्तविक और दो मूल संमिश्र संयुग्मी होते हैं। क्या हम केवल गुणांकों को देखकर मूल या उनके लक्षण बता सकते हैं? अब हम इस प्रश्न का उत्तर देंगे।

3.3.2 मूल, और गुणांकों से उनका संबंध

इस उपभाग में पहले हम E10 और E11 के त्रिघात अनुरूप पर विचार करेंगे। वहाँ हमने देखा था कि द्विघात समीकरणों के मूलों और गुणांकों के बीच काफ़ी निकट का संबंध होता है। यही बात त्रिघात समीकरण पर भी लागू होती है। नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने पर आप इस संबंध को सिद्ध कर लेंगे।

E 18) दिखाइए कि α, β और γ, त्रिघात समीकरण $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, a \neq 0$, के मूल होते हैं यदि और केवल यदि

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$$

$$\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a}$$

$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}.$$

(**संकेत** : ध्यान दीजिए कि दिया हुआ त्रिघात समीकरण $a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = 0$ के तुल्य है।)

E18 में दिए गए संबंध की सहायता से हम निम्न प्रकार के प्रश्न हल कर सकते हैं।

उदाहरण 6: यदि α, β, γ समीकरण

$x^3 - 7x^2 + x - 5 = 0$

के मूल हों, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \alpha + \gamma$ हैं।

हल : E18 से हम जानते हैं कि

$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \gamma &= 7 \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma &= 1 \\ \alpha\beta\gamma &= 5 \end{aligned}\right] \qquad \text{............ (10)}$$

इसलिए, $(\alpha + \beta) + (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) = 2(\alpha + \beta + \gamma) = 14$ .... (11)

और $\alpha + \beta = 7 - \gamma, \beta + \gamma = 7 - \alpha, \gamma + \alpha = 7 - \beta$, जिससे कि

$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma) + (\beta + \gamma)(\alpha + \gamma) + (\alpha + \gamma)(\alpha + \beta)$

$= \{49 - 7(\gamma + \alpha) + \gamma\alpha\} + \{49 - 7(\alpha + \beta) + \alpha\beta\} + \{49 - 7(\beta + \gamma) + \beta\gamma\}$

$= 147 - 98 + 1$, (10) और (11) से।

$= 50$, और .... (12)

$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma) = (7 - \gamma)(7 - \beta)(7 - \alpha)$

दक्षिण पक्ष के व्यंजक का मान निकालने के लिए या तो हम (10) का प्रयोग कर सकते हैं या हम इस बात को लागू कर सकते हैं कि

$x^3 - 7x^2 + x - 5 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

$\Rightarrow 7^3 - 7.7^2 + 7 - 5 = (7 - \alpha)(7 - \beta)(7 - \gamma)$.

अतः

$(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\alpha + \gamma) = 2$ .... (13)

अब E18, (11), (12) और (13) से हमें इच्छित समीकरण,

$x^3 - 14x^2 + 50x - 2 = 0$

प्राप्त होता है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कीजिए।

E 19) समीकरण $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ के मूलों के घनों का जोड़ मालूम कीजिए। और, इसकी सहायता से मूलों के चतुर्थ घातों का जोड़ मालूम कीजिए।

आइए अब हम त्रिघात समीकरण के मूलों के लक्षण का अध्ययन करें। इसके लिए हमें विविक्तकर (discriminant) की संकल्पना की आवश्यकता है। जैसा कि आप जानते हैं, द्विघात समीकरण $x^2+bx+c=0$ का विविक्तकर b^2-4c होता है। और, यदि α और β इस समीकरण के दो मूल हों, तो

$\alpha+\beta=-b$, $\alpha\beta=c$. अतः

$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=b^2-4c.$

इस तरह, विविक्तकर $=(\alpha-\beta)^2$, जहाँ α और β द्विघात समीकरण के मूल हैं।

अब आप व्यापक द्विघात समीकरण $ax^2+bx+c=0$ लीजिए।

मान लीजिए इसके मूल α और β हैं। तब इसका विविक्तकर होगा और
$b^2-4ac=a^2(\alpha-\beta)^2.$

हम इस संबंध का प्रयोग किसी भी बहुपद समीकरण के विविक्तकर को परिभाषित करने के लिए करते हैं।

परिभाषा : nवें घात के समीकरण $a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots\ldots+a_nx^n$ का **विविक्तकर**

$a_n^{2(n-1)}\prod\limits_{1\le i<j\le n}(\alpha_i-\alpha_j)^2$ है,

जहाँ $\alpha_1,\ldots\ldots,\alpha_n$ बहुपद समीकरण के मूल हैं।

विशेष रूप में, $n=3$ और $a_n=1$ की स्थिति में हम पाते हैं कि

> त्रिघात समीकरण $x^3+px^2+qx+r=0$ का विविक्तकर
> $$D=-(27B^2+4A^3) \text{ है,}$$
> जहाँ $A=q-\frac{p^2}{3}, B=\frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r.$

आइए अब हम त्रिघात समीकरण (3), अर्थात्
$x^3+px^2+qx+r=0$
के कार्दानो के हल पर विचार करें।

वर्गमूल चिन्ह के अंदर का व्यंजक $\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27}=\frac{-D}{108}$ है, जहाँ D विविक्तकर है।

अब, (9) से यह पता चलता है कि विविक्तकर के चिह्न का समीकरण के मूलों के लक्षणों के साथ निकट का संबंध होता है। आइए हम (3) के मूलों α,β और γ की अलग-अलग संभावनाओं पर विचार करें।

1) (3) के सभी मूल वास्तविक और अलग-अलग हैं। तब $(\alpha-\beta)^2(\beta-\gamma)^2(\alpha-\gamma)^2$, अर्थात् D, धनात्मक होगा।

2) (3) का केवल एक मूल वास्तविक है। मान लीजिए यह मूल α है। तब β और γ संमिश्र संयुग्मी होंगे। अतः $\beta-\gamma$ शुद्धतः अधिकल्पित होगा।
   $\therefore(\beta-\gamma)^2<0$
   और, $\alpha-\beta$ और $\alpha-\gamma$ संयुग्मी हैं। इसलिए इनका गुणनफल धनात्मक होगा।
   अतः इस स्थिति में $D<0$.

3) मान लीजिए $\alpha=\beta$ और $\gamma\neq\alpha$. क्योंकि $\alpha-\beta=0$, इसलिए $D=0$. और $B\neq0$ क्योंकि यदि $B=0$, तो $A=0$ (क्योंकि $D=0$). पर, $A=0\Rightarrow q=\frac{p^2}{3}$, अर्थात्
   $\alpha(\alpha+2\gamma)=\frac{(2\alpha+\gamma)^2}{3}$. [यहाँ पर हमने मूलों के बीच के संबंध का प्रयोग किया है, क्योंकि $p=-(\alpha+\beta+\gamma)=-(2\alpha+\gamma)$ और $q=\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma=\alpha(\alpha+2\gamma)$].

सरल करने पर हमें $\alpha = \gamma$ प्राप्त होता है, जो एक अंतर्विरोध है । अतः $B \neq 0$.

इसलिए, यदि (3) के केवल दो मूल बराबर हों, तो $D = 0$ और $B \neq 0$ और इसलिए $A \neq 0$.

4) यदि (3) के सभी मूल बराबर हों, तो $D = 0$, $B = 0$, और तब $A = 0$.

आइए अब हम मूलों के लक्षण की अलग-अलग संभावनाओं के संक्षिप्त विवरण को देखें ।

त्रिघात समीकरण $x^3 + px^2 + qx + r = 0, p, q, r \in R$ को लीजिए, और

मान लीजिए $B = \frac{2p^3}{27} - \frac{pq}{3} + r$ और $A = q - \frac{p^2}{3}$. तब

1) इसके सभी मूल वास्तविक और अलग-अलग होते हैं यदि और केवल यदि $\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} < 0$.

2) केवल एक मूल वास्तविक होता है यदि और केवल यदि $\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} > 0$.

3) केवल दो मूल बराबर होते हैं, यदि और केवल यदि $\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} = 0$ और $B \neq 0$.
इस स्थिति में सभी मूल वास्तविक होते हैं ।

4) तीनों मूल बराबर होते हैं यदि $\frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} = 0$ और $B = 0$.

ऊपर जो कुछ भी बताया गया है, उसे आपने अच्छी तरह से समझ लिया है या नहीं, यह जानने के लिए आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल कर सकते हैं ।

E 20) $ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0, a \neq 0$,
के गुणांकों पर लगाए गए किन-किन प्रतिबंधों के अधीन इस समीकरण के संमिश्र मूल होंगे?

E 21) क्या $x^3 = 15x + 126$ के सभी मूल वास्तविक हैं? क्यों?

अभी तक हमनें त्रिघात समीकरणों को हल करने की विधि से आपको परिचित कराया है, और इनके हल के बारे में हमने कुछ गहराई से अध्ययन किया है । इसके बारे में हम कोशी-श्वार्त्ज़ असमिका के एक अनुप्रयोग के रूप में इकाई 6 में कुछ और चर्चा करेंगे ।

आइए अब हम घात 4 वाले बहुपद समीकरणों पर चर्चा करें ।

3.4 चतुर्घात समीकरण

त्रिघात समीकरणों की तरह, चतुर्घात समीकरणों का अध्ययन काफ़ी समय से किया जा रहा है । प्राचीन अरबी गणितज्ञों ने इनका अध्ययन ज्यामितीय दृष्टिकोण से किया था । इस भाग में हम ऐसे समीकरणों को हल करने की दो बीजीय विधियों पर चर्चा करेंगे ।

आइए पहले देखें कि चतुर्घात समीकरण होता क्या है ।

परिभाषा : $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, जहाँ $a, b, c, d, e \in R$ और $a \neq 0$, के रूप का समीकरण, R पर **चतुर्घात समीकरण** (biquadratic equation) का अति व्यापक रूप है ।

क्या आप R पर चतुर्घात समीकरण के कुछ उदाहरण दे सकते हैं ? $x^4 + 5 = \sqrt{2}x - x^2$ के बारे में आपका क्या विचार है? निश्चित रूप से यह एक चतुर्घात समीकरण है, क्योंकि यह
$x^4 + x^2 - \sqrt{2}x + 5 = 0$ के तुल्य है ।

$\sqrt{x} = x^4 + 1$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं? यह तो बहुपद समीकरण ही नहीं है । अतः यह चतुर्घात समीकरण नही हो सकता ।

आइए अब हम घात 4 वाले समीकरण को हल करने की विभिन्न विधियों पर विचार करें । कुछ स्थितियों में, जैसा कि आप उदाहरण 4 में देख चुके हैं, सबंधित द्विघात समीकरणों को हल करके इस प्रकार के समीकरण को हल किया जा सकता है । पर, इस विधि से अधिकांश चतुर्घात समीकरणों को हल नहीं

किया जा सकता। ऐसे समीकरणों के मूल प्राप्त करने की दो बीजीय विधियाँ 16वीं और 17वीं शताब्दियों में विकसित की गई थी। ये दोनो विधियाँ त्रिघात समीकरण के हल करने पर निर्भर हैं। आइए अब हम इन विधियों पर चर्चा करें।

3.4.1 फ़ेरारी का हल

चतुर्घात समीकरण को हल करने की जिस पहली विधि पर हम चर्चा करने जा रहे हैं, वह 16वीं शताब्दी के इटली के गणितज्ञ फ़ेरारी (Ferrari) की देन है। फ़ेरारी कार्दानो के साथ काम करते थे। आइए हम एक उदाहरण की सहायता से इस विधि को समझने की कोशिश करें।

उदाहरण 7: समीकरण $x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 3 = 0$ को हल कीजिए।

हलः हम इसे कई चरणों में हल करेंगे।

चरण 1: समीकरण के दोनों पक्षों में द्विघात बहुपद $(ax+b)^2 = a^2x^2 + 2abx + b^2$ को जोड़िए। ऐसा करने पर हमें $x^4 - 2x^3 + (a^2-5)x^2 + 2(ab+5)x + b^2 - 3 = (ax+b)^2$ .... (14)
प्राप्त होता है।

चरण 2: **R** में a और b ऐसे चुनिए कि (14) का वाम पक्ष एक पूर्ण वर्ग बन जाए, मान लीजिए $(x^2 - x + k)^2$, जहाँ k अज्ञात है।

अतः हमें a और b ऐसे चुनना है, जिससे कि

$x^4 - 2x^3 + (a^2-5)x^2 + 2(ab+5)x + b^2 - 3 = x^4 + x^2 + k^2 - 2x^3 - 2kx + 2kx^2.$

समीकरण के दोनों पक्षों के x^2 और x के गुणांकों की और अचर पद की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$a^2 - 5 = 2k + 1 \quad \text{.......... (15)}$$

$$2(ab+5) = -2k \quad \text{.......... (16)}$$

$$b^2 - 3 = k^2 \quad \text{.......... (17)}$$

$(15) \Rightarrow a^2 = 2k + 6$

और, $(16) \Rightarrow a = -\frac{1}{b}(k+5)$

इस तरह, $2k + 6 = \frac{1}{b^2}(k+5)^2$

तब $(17) \Rightarrow k^2 + 3 = \frac{(k+5)^2}{2k+6}$

$\Rightarrow 2k^3 + 5k^2 - 4k - 7 = 0$ .... (18)

इस त्रिघात समीकरण को दिए हुए चतुर्घात समीकरण का **साधक त्रिघाती** (resolvent cubic) कहते हैं। इसे हम समीकरणों (15), (16) और (17) से **a और b का निराकरण करके** प्राप्त करते हैं।

हम इस त्रिघाती का कोई भी एक मूल चुनते हैं।

(18) का एक वास्तविक हल $k = -1$ है। (निरीक्षण से यह आसानी से देख सकते हैं। नहीं तो आप कार्दानो विधि लागू कर सकते हैं।)

तब, (15), (16), और (17) से हम पाते हैं कि
$a^2 = 4, b^2 = 4, ab = -4.$
$a = 2$ और $b = -2$ (या $a = -2$ और $b = 2$) इन समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। हमें a और b का कोई एक मान ही चाहिए। हम $a = 2$ और $b = -2$ लेते हैं।

चरण 3: k, a और b के इन मानों को $(x^2 - x + k)^2 = (ax+b)^2$ में प्रतिस्थापित करने पर और फिर वर्गमूल लेने पर हमें निम्नलिखित दो द्विघात समीकरण प्राप्त होते हैं:

$x^2 - x - 1 = \pm(2x - 2)$, **अर्थात्**

$x^2 - 3x + 1 = 0$ और $x^2 + x - 3 = 0.$

इन समीकरणों पर द्विघात सूत्र लागू करने पर हम पाते हैं कि

$$x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}.$$

क्या आपको उदाहरण 7 से फ़ेरारी द्वारा विकसित व्यापक विधि के बारे में कुछ जानकारी प्राप्त होती है?

आइए देखें कि यह विधि क्या है।

हम $\mathbf{R}$ पर व्यापक चतुर्घात समीकरण, अर्थात्

$$x^4 + px^3 + qx^2 + rx + s = 0,\ p, q, r, s \in \mathbf{R} \qquad \text{.........}(19)$$

को हल करना चाहते हैं।

इस विधि में हम समीकरण को दो बहुपदों के वर्गों के अंतर के रूप में व्यक्त करते हैं। फिर इस अंतर को दो द्विघात गुणनखंडों के गुणनफल के रूप में लिखा जा सकता है। और इस तरह प्राप्त दो द्विघात समीकरणों को हम हल कर सकते हैं। आइए हम इसमें लागू किए जाने वाले चरणों को लिखें।

चरण 1 : (19) के दोनों पक्षों में $(ax+b)^2$ को जोड़िए, जहाँ हम a और b को इस तरह चुनेंगे कि वाम पक्ष पूर्ण वर्ग बन जाए। इस तरह (19)

$$x^4 + px^3 + (q+a^2)x^2 + (r+2ab)x + s + b^2 = (ax+b)^2 \qquad \text{.........}(20)$$

हो जाता है।

चरण 2 : हम a और b ऐसा लेना चाहते हैं कि वाम पक्ष एक पूर्ण वर्ग बन जाए, मान लीजिए $\left(x^2 + \frac{p}{2}x + k\right)^2$, जहाँ k अज्ञात है।

ध्यान दीजिए कि x का गुणांक $\frac{p}{2}$ ही होगा, क्योंकि (20) में x^3 का गुणांक p है।

अतः हम पाते हैं कि

$$x^4 + px^3 + (q+a^2)x^2 + (r+2ab)x + s + b^2 = x^4 + px^3 + \left(\frac{p^2}{4}\right)x^2 + 2kx^2 + pkx + k^2.$$

x^2 और x के गुणांकों की और अचर पद की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{p^2}{4} + 2k = q + a^2,\ pk = r + 2ab,\ k^2 = s + b^2.$$

इन समीकरणों से a और b का निराकरण करने पर हमें निम्नलिखित **साधक त्रिघाती** प्राप्त होता है:

$$(pk-r)^2 = 4\left(\frac{p^2}{4} + 2k - q\right)(k^2 - s), \text{ अर्थात्}$$

$$8k^3 - 4qk^2 + 2(pr-4s)k + (4qs - p^2s - r^2) = 0.$$

भाग 3.3 से आप जानते हैं कि इस त्रिघात समीकरण का कम से कम एक वास्तविक मूल, मान लीजिए α, अवश्य होता है।

तब हम α के पदों में a और b प्राप्त कर सकते हैं।

चरण 3 : हम यह मानकर चले थे कि

$$\left(x^2 + \frac{p}{2}x + k\right)^2 = (ax+b)^2.$$

अब, $k = \alpha$ लेने पर और a तथा b के मानों को प्रतिस्थापित करने पर हमें निम्नलिखित द्विघात समीकरण प्राप्त होते हैं:

$$x^2 + \frac{p}{2}x + \alpha = \pm(ax+b), \text{ अर्थात्}$$

$$x^2 + \left(\frac{p}{2} - a\right)x + (\alpha - b) = 0, \text{ और}$$

$$x^2+\left(\frac{p}{2}+a\right)x+(\alpha+b) = 0.$$

द्विघात सूत्र को लागू करके इन समीकरणों के 4 मूल प्राप्त कर सकते हैं, जो कि (20) के, और इसलिए (19) के, मूल होंगे ।

नीचे दिए गए प्रश्न में आपको इस विधि को स्वयं लागू करने का अवसर मिलेगा ।

E 22) निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए:

(क) $x^4-3x^2-42x-40 = 0$

(ख) $4x^4-20x^3+33x^2-20x+4 = 0$

(ग) $x^4+12x = 5$

आइए अब हम चतुर्घात समीकरणों को हल करने की दूसरी विधि पर विचार करें ।

3.4.2 देकार्त का हल

चतुर्घात समीकरणों के बीजीय हल प्राप्त करने की दूसरी विधि 1637 में गणितज्ञ एवं दार्शनिक रने देकार्त द्वारा प्रस्तुत की गई थी । इस विधि में हम चतुर्घात बहुपद को दो द्विघात बहुपदों के गुणनफल के रूप में लिखते हैं । तब हम दिए हुए चतुर्घात समीकरण के 4 मूल प्राप्त करने के लिए परिणामी द्विघात समीकरणों को हल करते हैं ।

आइए हम इस विधि से उदाहरण 7 के प्रश्न को हल करें । अर्थात् हम

$$x^4-2x^3-5x^2+10x-3 = 0 \qquad \text{.........(21)}$$

को हल करना चाहते हैं ।

चरण 1 : त्रिघात पदों को हटाइए । इसके लिए हम x^4-2x^3 को निम्न रूप से लिखते हैं:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{16}.$$

इस तरह, दिया हुआ समीकरण

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^4-\frac{13}{2}x^2+\frac{21}{2}x-\frac{49}{16} = 0$$

हो जाता है ।

अब $x-\frac{1}{2} = y$ लेने पर हम पाते हैं कि

$$y^4-\frac{13}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{21}{2}\left(y+\frac{1}{2}\right)-\frac{49}{16} = 0$$

$$\Rightarrow y^4-\frac{13}{2}y^2+4y+\frac{9}{16} = 0 \qquad \text{.........(22)}$$

चरण 2: (22) के वाम पक्ष को द्विघात बहुपदों के गुणनफल के रूप में लिखिए । इसके लिए आइए हम मान लें कि

$$y^4-\frac{13}{2}y^2+4y+\frac{9}{16} = (y^2+ky+m)(y^2-ky+n)$$

(ध्यान दीजिए कि प्रत्येक द्विघाती गुणनखंड में y के गुणांक क्रमशः k और $-k$ हैं, क्योंकि गुणनफल में y^3 वाला कोई पद नहीं है ।)

गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$m+n-k^2 = -\frac{13}{2},\ k(n-m) = 4,\ mn = \frac{9}{16} \qquad \text{..........(23)}$$

इन समीकरणों से m और n का निराकरण करने पर हम पाते हैं कि

$$\left(k^2-\frac{13}{2}-\frac{4}{k}\right)\left(k^2-\frac{13}{2}+\frac{4}{k}\right)=\frac{9}{4},$$

अर्थात् $k^6-13k^4+40k^2-16=0.$

यदि हम $k^2=t$ लें, तो यह साधक त्रिघाती $t^3-13t^2+40t-16=0$ हो जाता है।

इसका एक वास्तविक मूल है; वास्तव में नीचे दिए गए परिणाम के कारण इसका एक **धनात्मक** वास्तविक मूल होगा।

> प्रत्येक बहुपद समीकरण का, जिसका अग्रग गुणांक 1 है और घात एक विषम संख्या है, कम से कम एक वास्तविक मूल होता है जिसका चिह्न इसके अंतिम पद के चिह्न के विपरीत होता है।

हम इस परिणाम को सिद्ध नहीं करेंगे। लेकिन इसे लागू करने पर हम t का एक धनात्मक मान प्राप्त करने की आशा कर सकते हैं। जांच से हम पाते हैं कि $t=4$ एक मूल है, अर्थात् $k^2=4$, अर्थात् $k=\pm 2$. इनमें से कोई भी एक मान हमारे लिए काफ़ी होता है। अतः आइए हम $k=2$ ले लें, तब (23) के समीकरणों से हम पाते हैं कि $m=-\frac{9}{4}, n=\frac{-1}{4}.$

इस तरह (22)

$$\left(y^2+2y-\frac{9}{4}\right)\left(y^2-2y-\frac{1}{4}\right)=0$$

के तुल्य है।

चरण 3: द्विघात समीकरणों को $y^2+2y-\frac{9}{4}=0$ और $y^2-2y-\frac{1}{4}=0$ को हल कीजिए। द्विघात सूत्र लागू करने पर हम पाते हैं कि $y=\frac{-2\pm\sqrt{13}}{2}$ और $y=\frac{2\pm\sqrt{5}}{2}.$

चरण 4: इन मानों को $x=y+\frac{1}{2}$ में प्रतिस्थापित करने पर हमें (21) के चार मूल प्राप्त होते हैं। अतः (21) के मूल होंगे

$$\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

आइए हम व्यापक चतुर्घात समीकरण

$$x^4+ax^3+bx^2+cx+d=0, a, b, c, d \in \mathbf{R}, \qquad \text{..........(24)}$$

के लिए हल की इस विधि के चरणों को लिखें।

चरण 1: समीकरण को

$$x^4+qx^2+rx+s=0 \qquad \text{...........(25)}$$

के रूप में बदलिए।

चरण 2: मान लीजिए कि

$$x^4+qx^2+rx+s=(x^2+kx+m)(x^2-kx+n).$$

तब, गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$m+n-k^2=q, k(n-m)=r, mn=s.$

इन समीकरणों से हम पाते हैं कि

$m+n=k^2+q, n-m=\frac{r}{k}.$

इसलिए, $2m=k^2+q-\frac{r}{k}, 2n=k^2+q+\frac{r}{k}.$

$mn=s$ में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि

$(k^3+qk-r)(k^3+qk+r)=4sk^2$, अर्थात्

$k^6 + 2qk^4 + (q^2 - 4s)k^2 - r^2 = 0$, अर्थात्

$t^3 + 2qt^2 + (q^2 - 4s)t - r^2 = 0$, $k^2 = t$ रखने पर ।

यह एक त्रिघाती है जिसका कम से कम एक धनात्मक वास्तविक मूल होता है । तब, t के किसी ज्ञात मान से हम k, m और n के मान मालूम कर सकते हैं ।

अतः (25)

$$(x^2 + kx + m)(x^2 - kx + n) = 0$$

के तुल्य है ।

चरण 3 : द्विघात समीकरणों

$x^2 + kx + m = 0$ और $x^2 - kx + n = 0$

को हल कीजिए । इससे हमें (25) के 4 मूल प्राप्त होंगे, जिससे कि हमें (24) के 4 मूल प्राप्त होंगे ।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्न को हल करने की कोशिश कीजिए । इससे आप जान जाएंगे कि आपने देकार्त विधि को समझ लिया है या नहीं ।

E 23) देकार्त विधि से निम्नलिखित समीकरणों को हल कीजिए ।

(क) $x^4 - 2x^2 + 8x - 3 = 0$

(ख) $x^4 + 8x^3 + 9x^2 - 8x = 10$

(ग) $x^4 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$

(घ) $x^4 + 4x^3 - 7x^2 - 22x + 24 = 0$

E 24) समीकरण

$2x^8 + 5x^6 - 5x^2 = 2$

को एक चतुर्घात समीकरण में बदलिए । और इस तरह इसे हल कीजिए ।

चतुर्घात समीकरणों को हल करते समय आप शायद समझ गए होंगे कि जिन विधियों पर हमने चर्चा की है, वे देखने में तो काफ़ी सरल लगती हैं । पर वास्तव में ये काफ़ी जटिल हो सकती हैं । ऐसा इसलिए है, क्योंकि त्रिघाती को हल करने की कार्दानो विधि में प्रायः कैलक्यूलेटर का इस्तेमाल करना पड़ता है ।

अभी तक हमने घात 1, 2, 3 और 4 वाले बहुपद समीकरणों के बीजीय हल प्राप्त करने की विधियों पर चर्चा की है । शायद आप समझें कि हम पंचघात समीकरणों (quintic equations), अर्थात् घात 5 वाले समीकरणों के साथ ऐसा ही कुछ करने जा रहे हैं । पर, 1824 में नॉर्वेवासी बीजगणितज्ञ आबेल (1802-1829) ने निम्नलिखित परिणाम की एक उपपत्ति प्रकाशित की ।

> यदि बहुपद समीकरण का घात 4 से अधिक हो, तो समीकरण के मूल प्राप्त करने के लिए समीकरण के गुणांकों पर स्पष्ट बीजीय संक्रियाओं में व्यक्त कोई व्यापक सूत्र नहीं हो सकता ।

इस परिणाम के अनुसार 4 से अधिक घात वाले बहुपद समीकरणों के कोई व्यापक बीजीय हल नहीं होते । पर, कुछ ऐसी विधियाँ हैं जिनसे अपेक्षित यथार्थता तक किसी भी वास्तविक मूल का मान प्राप्त हो सकता है । हम इन विधियों पर संख्यात्मक विश्लेषण (numerical analysis) के पाठ्यक्रम में चर्चा करेंगे । हाँ, यह बात अवश्य है कि घात ≥ 5 वाले कुछ विशेष बहुपद समीकरण होते हैं जिन्हें हल किया जा सकता है (जैसे कि E24 में) ।

आइए अब हम चतुर्घात समीकरणों के मूलों पर कुछ गहराई से विचार करें । हम देखेंगे कि त्रिघात समीकरणों की तरह चतुर्घात समीकरण के मूलों और गुणांकों में भी संबंध है ।

3.4.3 मूल, और गुणांकों से उनका संबंध

पिछले दो उपभागों में हमनें आपको, चतुर्घात समीकरण के 4 मूल प्राप्त करने की विधि बताई। आइए हम प्रमेय 1 और 3 को दुबारा देखें। प्रमेय 1 के अनुसार एक चतुर्घात समीकरण के 4 मूल होते हैं, जो वास्तविक या संमिश्र हो सकते हैं। प्रमेय 3 के अनुसार निम्नलिखित संभावनाएँ हैं:

i) सभी मूल वास्तविक होते है, या

ii) दो मूल वास्तविक होते हैं और दो मूल एक दूसरे के संमिश्र संयुग्मी होते हैं, या

iii) मूल संमिश्र संयुग्मी के दो युग्म होते हैं, अर्थात्

$a + ib, a - ib, c + id, c - id$, जहाँ $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

अब, यदि r_1, r_2, r_3, r_4 चतुर्घात समीकरण

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$

के मूल हों, तो

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3)(x - r_4)$$

$$= x^4 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)x^3 + (r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4)x^2$$

$$- (r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4)x + r_1r_2r_3r_4.$$

गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$r_1 + r_2 + r_3 + r_4 = -\frac{b}{a},$$

$$r_1r_2 + r_1r_3 + r_1r_4 + r_2r_3 + r_2r_4 + r_3r_4 = \frac{c}{a},$$

$$r_1r_2r_3 + r_1r_2r_4 + r_1r_3r_4 + r_2r_3r_4 = -\frac{d}{a},$$

$$r_1r_2r_3r_4 = \frac{e}{a}.$$

अर्थात्

मूलों का जोड़ $= -\dfrac{x^3 \text{ का गुणांक}}{x^4 \text{ का गुणांक}}$

एक बार में दो दो मूलों का गुणा करके, सभी गुणनफलों का जोड़ $= \dfrac{x^2 \text{ का गुणांक}}{x^4 \text{ का गुणांक}}$

एक बार में तीन-तीन मूलों का गुणा करके, सभी गुणनफलों का जोड़, $= -\dfrac{x \text{ का गुणांक}}{x^4 \text{ का गुणांक}}$

मूलों का गुणनफल $= \dfrac{x^0 \text{ का गुणांक}}{x^4 \text{ का गुणांक}}$, अर्थात् $\dfrac{\text{अचर पद}}{x^4 \text{ का गुणांक}}$

ये चार समीकरण निम्नलिखित परिणाम की एक विशेष स्थिति है। यह परिणाम बहुपद समीकरण के मूलों को उसके गुणांकों के साथ सम्बद्ध करता है।

प्रमेय 4 : मान लीजिए $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ समीकरण $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$, जहां $a_i \in \mathbb{R}$ $\forall i = 0, 1, \ldots, n$, और $a_0 \neq 0$, के n मूल हैं।

$\sum_{i=1}^{n} A_i = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$

तब $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = -\frac{a_1}{a_0}$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j = -\frac{a_2}{a_0}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_i} \alpha_{i_1} . \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_i} = (-1)^i \frac{a_i}{a_n}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}$$

$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 A_2 \ldots A_n$

E10 और E18 में आप देख चुके हैं कि यह परिणाम $n = 2$ और 3 के लिए सही है।

प्रमेय 4 अनेक तरीकों से काफ़ी उपयोगी है। आइए हम $n = 4$ की स्थिति के लिए एक अनुप्रयोग लें।

उदाहरण 8 : यदि समीकरण

$4x^4 - 24x^3 + 31x^2 + 6x - 8 = 0$

के दो मूलों का जोड़ शून्य हो, तो समीकरण के सभी मूल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए मूल a, b, c, d हैं, जहाँ $a + b = 0$. तब

$a + b + c + d = \frac{24}{4} = 6.$

$\therefore c + d = 6$ .... (26)

और $ab + ac + ad + bc + bd + cd = (a + b)(c + d) + ab + cd = \frac{31}{4}.$

$\therefore ab + cd = \frac{31}{4}$ .... (27)

और, $(a + b)cd + ab(c + d) = acd + bcd + abc + abd = -\frac{3}{2}$

$\therefore (26) \Rightarrow ab = -\frac{1}{4}$ .... (28)

अंत में, $abcd = -2$

$\therefore (28) \Rightarrow cd = 8$ .... (29)

अब E11 को लागू करने पर (26) और (29) से हमें पता चलता है कि c और d, समीकरण

$x^2 - 6x + 8 = 0$

के मूल हैं।

इस तरह, द्विघात सूत्र से

$c = 2, d = 4.$

इसी प्रकार क्योंकि a और b, समीकरण $x^2 - \frac{1}{4} = 0$ के मूल हैं, इसलिए

$a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2}$

अतः दिए हुए चतुर्घात समीकरण के मूल $\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 2, 4$ हैं।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल कीजिए।

E 25) समीकरण $x^4 + 15x^3 + 70x^2 + 120x + 64 = 0$
को हल कीजिए जबकि यह दिया हुआ है कि मूल गुणोत्तर श्रेढ़ी (geometrical progression) में हैं।
(**संकेत:** यदि चार संख्याएँ a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हों, तो $ad = bc$.)

E26) दिखाइए कि यदि $x^4 - px^3 + qx^2 - rx + s = 0$ (जहाँ $p, q, r, s \in R$) के दो मूलों का जोड़ अन्य दो मूलों के जोड़ के बराबर हो, तो $p^3 - 4pq + 8r = 0$.

हमने $n = 2, 3, 4$ के लिए मूलों और गुणांकों के बीच के संबंध के बारे में बात की है। पर, आप किसी भी $n \in N$ के लिए प्रमेय 4 को लागू कर सकते हैं। अतः भविष्य में जब भी आपको आवश्यकता पड़े आप इस प्रमेय को किसी भी घात वाले समीकरण के लिए लागू कर सकते हैं। आइए अब हम संक्षेप में देखें कि हमने इस इकाई में किया क्या है।

3.5 सारांश

इस इकाई में हमने आपको छोटे घात वाले समीकरणों के सिद्धांत से परिचित कराया है। विशेष रूप से हमने निम्नलिखित बातों पर ग़ौर किया है।

1. एकघात समीकरण $ax + b = 0$ का एक मूल होता है, यानी $x = -\frac{b}{a}$.
2. द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के दो मूल होते हैं, जो कि द्विघात सूत्र के अनुसार
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ हैं ।}$$
3. **R** पर घात n वाले प्रत्येक बहुपद समीकरण के C में n मूल होते हैं।
4. यदि $a + ib \in C$, वास्तविक बहुपद का एक मूल हो, तो $a - ib$ भी एक मूल होगा।
5. त्रिघात समीकरण को हल करने की कार्दानो विधि।
6. एक त्रिघात समीकरण के
   i) तीन अलग-अलग वास्तविक मूल हो सकते हैं, या
   ii) एक वास्तविक मूल और दो संमिश्र मूल हो सकते हैं (संमिश्र मूल संयुग्मी होंगे), या
   iii) तीन वास्तविक मूल हो सकते हैं, जिनमें केवल दो मूल बराबर हों, या
   iv) तीन वास्तविक मूल हो सकते हैं, जिनमें सभी बराबर हों।
7. चतुर्घात समीकरण को हल करने की फ़ेरारी विधि और देकार्त विधि। इन दोनों विधियों में एक त्रिघात समीकरण और दो द्विघात समीकरणों को हल करना पड़ता है।
8. एक चतुर्घात समीकरण के चार वास्तविक मूल हो सकते हैं, या दो वास्तविक और दो संमिश्र मूल हो सकते हैं, या चार संमिश्र मूल हो सकते हैं।
9. यदि घात n वाले समीकरण
$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n = 0$$
के n मूल $p_1, p_2, \ldots, p_n$ हों, तो
$$\sum_{i=1}^{n} p_i = -\frac{a_1}{a_0},$$
$$\sum_{\substack{i<j \\ i, j = 1, \ldots, n}} p_i p_j = \frac{a_2}{a_0},$$
$$\vdots$$
$$\prod_{i=1}^{n} p_i = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

अर्थात् एक बार में k मूलों का गुणनफल लेकर, सभी गुणनफलों का जोड़ $(-1)^k \frac{a_k}{a_0}$ है, जहाँ $k = 1, ..., n$.

पिछली इकाइयों की तरह, हमने अगले भाग में इस इकाई मे दिए गए प्रश्नों के हल और/या उत्तर दिए हैं। आप चाहें तो आप इन्हें देख सकते हैं। उसके बाद कृपया **आप भाग 3.1 को दोबारा देख लें,** और यह जाँच कर लें कि आपने उद्देश्यों की प्राप्ति कर ली है या नहीं।

3.6 हल/उत्तर

E1) क) यदि $J \neq k$ तो इसका एक हल होता है।

$$J\left(\frac{x}{k}+a\right) = x \Leftrightarrow x\left[\frac{J}{k}-1\right]+Ja = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{Ja}{\left[\frac{J}{k}-1\right]} = \frac{Jak}{J-k}.$$

ख) $\frac{1}{R} = \frac{r_1+r_2}{r_1r_2} \Leftrightarrow R = \frac{r_1r_2}{r_1+r_2}$

ग) $F = \frac{9}{5}C+32.$

E2) मान लीजिए तीसरी भुजा x से. मी. है। तब अन्य दो भुजाओं में से प्रत्येक 2x से. मी. लंबी होगी।

इसलिए, $x+2x+2x = 30 \Rightarrow x = 6.$

इस तरह, भुजाओं की लंबाइयों 6 से. मी., 12 से. मी. और 12 से. मी. हैं।

E3) मान लीजिए वह अध्ययन केन्द्र तक x कि. मी. प्रति घंटा की रफ़्तार से जाती है। अतः घर से अध्ययन केन्द्र की दूरी $\frac{x}{3}$ कि. मी. होगी।

लौटते समय उसकी रफ़्तार $(x-8)$ कि. मी. प्रति घंटा है।

$$\therefore \frac{1}{2}(x-8) = \frac{x}{3} \Rightarrow x = 24.$$

अतः दूरी = $\frac{24}{3}$ कि. मी. = 8 कि. मी.

E4) $S = kPt.$

हम जानते हैं कि $110 = k \times 1000 \times 2 \Rightarrow k = \frac{11}{200}.$

$$\therefore S = \frac{11}{200}Pt$$

इसलिए इच्छित ब्याज होगा $\frac{11}{200} \times 5000 \times 3$, अर्थात् 825 रु० .

E5) सत्य। उदाहरण के लिए, $x^2+1 = 0$ के संमिश्र मूल हैं। R पर किसी भी एकघात समीकरण $ax+b=0$ का केवल एक मूल, अर्थात् $-\frac{b}{a} \in R$ होता है।

E6) क) $x^2 = -5 \Rightarrow x = i\sqrt{5}$ और $-i\sqrt{5}$.

ख) यह $(x-(-9))(x-1) = 0$ है। अतः टिप्पणी 2 के अनुसार मूल –9 और 1 हैं।

ग) हम दिए हुए समीकरण को निम्नलिखित मानक रूप में लिखते हैं :

$$x^2-\sqrt{5}x-1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{5} \pm \sqrt{5+4}}{2} = \frac{\sqrt{5} \pm 3}{2}$$

$$\therefore x = \frac{\sqrt{5}+3}{2} \text{ और } \frac{\sqrt{5}-3}{2}$$

घ) $m = \frac{8q \pm \sqrt{64q^2 - \frac{4p}{r}}}{2p} = \frac{4q}{p} \pm \frac{1}{p}\sqrt{16q^2 - \frac{p}{r}}$

E7) मूल $x = \frac{-(2k+6) \pm \sqrt{(2k+6)^2 - 64k}}{2k}$ हैं।
मूल तब संपाती होंगे, जबकि विविक्तकर शून्य होगा, अर्थात्
$(2k+6)^2 - 64k = 0.$
यह तब होगा जबकि $k^2 - 10k + 9 = 0$, अर्थात् $k = 1$ या $k = 9$.

E8) $(2ax + b) | (ax^2 + bx + c)$
$\Rightarrow 2ax + bx = 0$ का मूल $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल है।
$\Rightarrow x = \frac{-b}{2a}$, $ax^2 + bx + c = 0$ का एक मूल है।

$$\Rightarrow a\left(\frac{-b}{2a}\right)^2 + b\left(\frac{-b}{2a}\right) + c = 0.$$

$\Rightarrow b^2 - 4ac = 0$
$\Rightarrow ax^2 + bx + c = 0$ के संपाती मूल हैं।

E9) टिप्पणी 2 के अनुसार
$x^2 + bx + c = (x - (1+i))(x - (1-i))$
$= x^2 - 2x + 2$
अतः x^1 और x^0 के गुणांको की तुलना करने पर हम पाते हैं कि
$b = -2, c = 2.$

E10) α और β, $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं
$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$
$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = a[x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta]$
$\Leftrightarrow b = -a(\alpha + \beta)$ और $c = a\alpha\beta.$
$\Leftrightarrow \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ और $\alpha\beta = \frac{c}{a}.$

E11) $x = \alpha$ को $x^2 - px + q$ में प्रतिस्थापित करने पर हम देखते हैं कि
$\alpha^2 - p\alpha + q = \alpha^2 - (\alpha + \beta)\alpha + \alpha\beta$, क्योंकि $\alpha + \beta = p$ और $\alpha\beta = q$
$= 0.$
$\therefore \alpha$, $x^2 - px + q = 0$ का एक मूल है।
इसी प्रकार β, $x^2 - px + q = 0$ का एक मूल है।

E12) क) $4p^4 - 16p^2 + 5 = 0$
$p^2 = x$ लीजिए। तब समीकरण $4x^2 - 16x + 5 = 0$ हो जाएगा।
इसके मूल $2 + \frac{\sqrt{11}}{2}$ और $2 - \frac{\sqrt{11}}{2}$ हैं।

अब, $p^2 = 2 + \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow p = \pm\sqrt{2 + \frac{\sqrt{11}}{2}}$

और $p^2 = 2 - \frac{\sqrt{11}}{2} \Rightarrow p = \pm\sqrt{2 - \frac{\sqrt{11}}{2}}.$

p के ये 4 मान इच्छित मूल हैं।

ख) $(5x^2 - 6)^{1/4} = x.$
इसका प्रत्येक मूल निम्नलिखित समीकरण का एक मूल है।

$5x^2 - 6 = x^4$
$\Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 6 = 0,$
$x^2 = y$ लीजिए। तब
$y^2 - 5y + 6 = 0.$
इसके मूल $y = \frac{5 \pm \sqrt{25-24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = 3, 2$ हैं।
अब $x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}$ या $-\sqrt{3}$
और $x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ या $-\sqrt{2}$.
x के इन चार मानों को दिए हुए समीकरण में रखने पर हम पाते हैं कि $\sqrt{3}$ और $\sqrt{2}$ इसके हल हैं।

ग) करणियों को अलग करने पर हम पाते हैं कि
$\sqrt{2x+3} = 1 + \sqrt{x+1}.$
दोनों ओर वर्ग करने पर हम पाते हैं कि
$2x + 3 = 1 + (x+1) + 2\sqrt{x+1}.$
$\Leftrightarrow x + 1 = 2\sqrt{x+1}.$
फिर से दोनों ओर वर्ग करने पर हमें
$x^2 - 2x - 3 = 0$ प्राप्त होता है।
इसके मूल $x = 3$ और $x = -1$ हैं।
x के इन मानों को दिए हुए समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हम पाते हैं कि
$\sqrt{2(3)+3} - \sqrt{3+1} = 1$, और।
$\sqrt{2(-1)+3} - \sqrt{-1+1} = 1.$
अतः दोनों $x = 3$ और $x = -1$ दिए हुए समीकरण के मूल हैं।

E13) मान लीजिए अलका की रफ़्तार x कि. मी. प्रति घंटा है। तब अमीना की रफ़्तार $(x+1)$ कि. मी. प्रति घंटा होगी। पुस्तकालय तक जाने में अमीना द्वारा लगाया गया समय $= \frac{24}{x+1}$ घंटा।
इस तरह, अलका द्वारा लगाया गया समय $= \left[\frac{24}{x+1} + 2\right]$ घंटा।
$\therefore \frac{24}{x} = \frac{24}{x+1} + 2$
$\Rightarrow x(x+1) = 12$
$\Rightarrow x = -4$ या $x = 3.$
क्योंकि(-4) रफ़्तार नहीं हो सकती, इसलिए यह एक अतिरिक्त हल है।
अतः इच्छित रफ़्तार 3 कि. मी. प्रति घंटा होगी।

E14) कोई भी नहीं, क्योंकि
$ax + b = 0, a, b \in \mathbf{R} \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \in \mathbf{R}.$

E15) यदि $p^2 - 4q < 0$.

ऐसे दो मूल होंगे और वे संयुग्मी होंगे।

E16) क) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{1}{2} = 0$
कार्दानो के सूत्र के संदर्भ में इस स्थिति में हम पाते हैं कि
$p = \frac{3}{2}, q = \frac{3}{2}, r = \frac{1}{2}.$
$\therefore A = \frac{3}{4}, B = 0.$

$\therefore \alpha = \frac{1}{2}, \beta = -\frac{1}{2}.$

इसलिए मूल $-\frac{1}{2}, \frac{\omega-\omega^2}{2}-\frac{1}{2}, \frac{\omega^2-\omega}{2}-\frac{1}{2}$ होंगे,

अर्थात् $-\frac{1}{2}, \omega, \omega^2$ (क्योंकि $1+\omega+\omega^2 = 0$).

ख) $x^3+21x+342 = 0$

यहाँ हमें कार्दानो विधि के चरण 1 को लागू करने की आवश्यकता नहीं, क्योंकि इसमें x^2 वाला कोई पद नहीं है।

अब कार्दानो के सुत्र के संदर्भ में

$A = 21-0 = 21,\ B = 0-0+342 = 342$

$$\therefore \alpha = \left(-\frac{342}{2}+\sqrt{\frac{(342)^2}{2}+\frac{(21)^3}{27}}\right)^{1/3} = (-171+172)^{1/3} = 1$$

और $\beta = (-171-172)^{1/3} = -7.$

अतः समीकरण के मूल हैं

$1-7, \omega-7\omega^2, \omega^2-7\omega$, अर्थात् $-6, \omega-7\omega^2, \omega^2-7\omega.$

ग) $x^3+6x^2+6x+8 = 0.$

यहाँ $p = 6, q = 6, r = 8.$

$\therefore A = q-\frac{p^2}{3} = -6,\ B = \frac{2p^3}{27}-\frac{pq}{3}+r = 12.$

$\therefore \alpha = (-6+\sqrt{36-8})^{1/3} = (-6+2\sqrt{7})^{1/3} = -0.891$

और $\beta = (-6-2\sqrt{7})^{1/3} = -2.243.$

(3 दशमलव स्थानों पर α और β के मान मालूम करने के लिए हमने कैलक्यूलेटर इस्तेमाल किया है।)

तब इच्छित मूल $\alpha+\beta-2, \alpha\omega+\beta\omega^2-2, \alpha\omega^2+\beta\omega-2$ होंगे।

घ) $x^3+29x-97 = 0$

यहाँ $p = 0, q = 29, r = -97.$

$$\therefore \alpha = \left[\frac{97}{2}+\sqrt{\frac{(97)^2}{4}+\frac{(29)^3}{27}}\right]^{1/3} = (64.557)^{1/3} = 4.01 \text{ और}$$

$\beta = (-8.557)^{1/3} = -2.045.$

तब मूल $\alpha+\beta, \alpha\omega+\beta\omega^2, \alpha\omega^2+\beta\omega$ होंगे।

ङ) $x^3-30x+133 = 0.$

यहाँ $p = 0, q = -30, r = 133.$

$\therefore A = -30,\ B = 133.$

$$\therefore \alpha = \left[-\frac{133}{2}+\sqrt{\frac{(133)^2}{4}-\frac{(30)^3}{27}}\right]^{1/3} = (-8)^{1/3} = -2, \text{ और}$$

$\beta = (-66.5-58.5)^{1/3} = -5.$

अतः मूल $-7, -2\omega-5\omega^2, -2\omega^2-5\omega$ होंगे।

E17) $x^3-3x+1 = 0$

यहाँ $p = 0,\ q = -3,\ r = 1.$

$\therefore A = -3, B = 1.$

$\therefore \frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27} = -\frac{3}{4} < 0$

अतः यह अखंडनीय स्थिति है।

अब, $\frac{-B}{2}+\sqrt{\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27}} = -\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}.$

अतः दिए हुए समीकरण के हल निम्नलिखित हैं :

$2\cos\left[\frac{\frac{2\pi}{3}+2k\pi}{3}\right]$, जहाँ $k = 0, 1, 2,$ अर्थात्

$2\cos\frac{2\pi}{9}, 2\cos\frac{8\pi}{9}, 2\cos\frac{14\pi}{9}.$

E18) α, β, γ मूल हैं यदि और केवल यदि

$$ax^3+bx^2+cx+d = a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$
$$= a\{x^3-(\alpha+\beta+\gamma)x^2+(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)x+\alpha\beta\gamma\},$$

जो कि गुणांकों की तुलना करने पर, निम्नलिखित के तुल्य हैं :

$$\alpha+\beta+\gamma = -\frac{b}{a}$$
$$\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = \frac{c}{a}$$
$$\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}.$$

E19) मान लीजिए मूल α, β, γ हैं।

तब, $\alpha+\beta+\gamma = 6, \alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma = 11, \alpha\beta\gamma = 6.$

$$\therefore \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = (\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)$$
$$= 36-22 = 14.$$
$$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = (\alpha+\beta+\gamma)^3-3\alpha^2(\beta+\gamma)-3\beta^2(\alpha+\gamma)-3\gamma^2(\alpha+\beta)-6\alpha\beta\gamma$$
$$= 6^3-3\alpha^2(6-\alpha)-3\beta^2(6-\beta)-3\gamma^2(6-\gamma)-6\times 6.$$
$$= 180-18(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+3(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)$$
$$\therefore 4(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3) = 180-18\times 14 = -72$$
$$\therefore \alpha^3+\beta^3+\gamma^3 = -18.$$

अब, α, β, γ में से प्रत्येक

$x^3-6x^2+11x-6 = 0$ को संतुष्ट करता है।

अतः ये $x^4-6x^3+11x^2-6x = 0$ को भी संतुष्ट करेंगे।

$$\therefore \alpha^4-6\alpha^3+11\alpha^2-6\alpha = 0$$
$$\beta^4-6\beta^3+11\beta^2-6\beta = 0$$
$$\gamma^4-6\gamma^3+11\gamma^2-6\gamma = 0$$

इन समीकरणों को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$(\alpha^4+\beta^4+\gamma^4)-6(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)+11(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)-6(\alpha+\beta+\gamma) = 0$$
$$\Rightarrow \alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = 6(-18)-11(14)+6(6) = -226.$$

E 20) यहाँ $p = \frac{3b}{a}, q = \frac{3c}{a}, r = \frac{d}{a}.$

$$\therefore A = \frac{3c}{a}-\frac{1}{3}\left(\frac{3b}{a}\right)^2 = \frac{3(ac-b^2)}{a^2}, \text{ और}$$

$$B = \frac{2}{27}\left(\frac{3b}{a}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{3b}{a}\right)\left(\frac{3c}{a}\right)+\frac{d}{a} = \frac{2b^3-3abc+a^2d}{a^3}$$

इसलिए, हल के संमिश्र मूल होते हैं यदि

$\frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27}>0$, अर्थात्

$\frac{(2b^3-3abc+a^2d)^2}{4a^6}+\frac{(ac-b^2)^3}{a^6}>0$, अर्थात्

$a^2d^2-3b^2c^2-6abcd+4b^3d+4ac^2>0$.

E 21) यहाँ $B=-126$, $A=-15$.

$\therefore \frac{B^2}{4}+\frac{A^3}{27}=3844>0$.

अतः समीकरण का एक वास्तविक और 2 संमिश्र मूल हैं।

E 22) क) $x^4-3x^2-42x-40=0$

दोनों ओर $(ax+b)^2$ को जोड़ने पर हमें

$x^4+(a^2-3)x^2+(2ab-42)x+b^2-40=(ax+b)^2$ प्राप्त होता है।

मान लीजिए कि वाम पक्ष $(x^2+k)^2$ है।

(ध्यान दीजिए कि दिए हुए समीकरण में x^3 का गुणांक शून्य है।)

तब

$x^4+(a^2-3)x^2+(2ab-42)x+b^2-40=x^4+k^2+2kx^2$.

गुणांकों की तुलना करने पर हम पाते हैं कि

$$\left.\begin{aligned}a^2-3&=2k\\2ab-42&=0\\b^2-40&=k^2\end{aligned}\right]\Rightarrow\begin{aligned}a^2&=2k+3\\ab&=21\\b^2&=k^2+40\end{aligned}$$

a और b का निराकरण करने पर हम पाते हैं कि

$(21)^2=(2k+3)(k^2+40)=2k^3+3k^2+80k+120$

$\therefore 2k^3+3k^2+80k-321=0$

इस समीकरण का एक मूल 3 है। k के इस मान पर हमें

$a^2=9$, $b^2=49$, $ab=21$ प्राप्त होता है।

$a=3$, $b=7$ इन समीकरणों को संतुष्ट करते हैं। अतः दिए हुए चतुर्घात समीकरण के हल के लिए हमें निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को हल करना होगा।

$x^2+3=3x+7$ और $x^2+3=-(3x+7)$, अर्थात्

$x^2-3x-4=0$ और $x^2+3x+10=0$.

अतः इच्छित मूल $4, -1$ और $\frac{-3\pm i\sqrt{31}}{2}$ हैं।

ख) दिया हुआ समीकरण

$x^4-5x^3+\frac{33}{4}x^2-5x+1=0$ के तुल्य है।

साधक त्रिघाती

$8k^3-33k^2+42k-17=0$ है।

एक वास्तविक मूल 1 है।

k के इस मान पर हम पाते हैं कि

$a=0$, $b=0$.

इस तरह दिया हुआ समीकरण

$\left(x^2-\frac{5}{2}x+1\right)^2=0$ हो जाता है।

अतः दिए हुए समीकरण के मूल $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}$ हैं, अर्थात् समान मूलों की दो जोड़ियां।

ग) $x^4+12x-5=0$

साधक त्रिघाती
$k^3+5k-18 = 0$ है।
एक वास्तविक मूल $k=2$ है।
तब, दिए हुए समीकरण के हल निम्नलिखित समीकरणों के हल हैं।
$(x^2+2) = \pm(2x-3)$, अर्थात्
$x^2-2x+5 = 0$, और $x^2+2x-1 = 0$.
अतः इच्छित मूल

$\frac{2\pm\sqrt{4-20}}{2}$ और $\frac{-2\pm\sqrt{4+4}}{2}$ होंगे, अर्थात्
$1+2i,\ 1-2i, -1+\sqrt{2}, -1-\sqrt{2}$.

E 23) क) $x^4-2x^2+8x-3 = 0$.
क्योंकि इसमें कोई x^3 वाला पद नहीं है, इसलिए यहाँ हमें चरण 1 को लागू करने की कोई आवश्यकता नहीं है।
अब यह मान लीजिए कि
$x^4-2x^2+8x-3 = (x^2+kx+m)(x^2-kx+n)$.
तब $m+n-k^2 = -2$, $k(n-m) = 8$, $mn = -3$.
अतः m और n का निराकरण करने पर हमें
$k^6-4k^4+16k^2-64 = 0$ प्राप्त होता है।
यह k^2 में एक त्रिघाती है और $k^2 = 4$ इसका एक मूल है।
अतः $k = 2$ एक मूल है। k के इस मान पर हमें $n = 3, m = -1$ प्राप्त होता है।
इस तरह, दिए हुए समीकरण के मूल निम्नलिखित समीकरणों के मूल हैं :
$x^2+2x-1 = 0$ और $x^2-2x+3 = 0$, अर्थात् मूल $-1\pm\sqrt{2}$ और $-1\pm i\sqrt{2}$ हैं।

ख) इस समीकरण को हम
$(x+2)^4-15x^2-40x-26 = 0$ लिख सकते हैं।
$x+2 = y$ लेने पर हमें
$y^4-15y^2+20y-6 = 0$ प्राप्त होता है।
तब k^2 में त्रिघाती होगा
$k^6-30k^4+249k^2-400 = 0$, अर्थात्
$t^3-30t^2+249t-400 = 0$, $k^2 = t$ लेने पर।
एक धनात्मक वास्तविक मूल $t = 16$ है।
अतः हम $k = 4$ ले सकते हैं।
तब हमें द्विघात समीकरणों
$y^2-4y+3 = 0$ और $y^2+4y-2 = 0$ के हल चाहिए।
ये हैं $y = 3, 1, -2\pm\sqrt{6}$.
अतः दिए हुए समीकरण के मूल $(y-2)$ हैं, अर्थात् $1, -1, -4\pm\sqrt{6}$.

ग) $x^4-3x^2-6x-2 = 0$.
k^2 में त्रिघाती
$k^6-6k^4+17k^2-36 = 0$ है।
$k^2 = 4$ एक मूल है। इसलिए हम $k = 2$ ले सकते हैं।
तब, हमें समीकरणों
$x^2+2x+2 = 0$ और $x^2-2x-1 = 0$ को हल करना है।
$\therefore x = -1\pm i, 1\pm\sqrt{2}$.

घ) $1, 2, -3, -4$

E24) समीकरण में $x^2 = y$ रखने पर हमें

$2y^4+5y^3-5y-2 = 0$ प्राप्त होता है ।

तब, या तो फ़ेरारी विधि से या देकार्त विधि से हम y के चारों मान प्राप्त कर सकते हैं, जो कि $1, -1, -2, -\frac{1}{2}$ हैं ।

इन मानों को $x^2 = y$ में रखकर हल करने पर हमें दिए हुए समीकरण के आठों मूल प्राप्त होते हैं । अतः इच्छित मूल होंगे

$\pm\sqrt{1}, \pm\sqrt{-1}, \pm\sqrt{-2}, \pm\sqrt{\frac{-1}{2}}$, अर्थात्

$1, -1, i, -i, i\sqrt{2}, -i\sqrt{2}, \frac{i}{\sqrt{2}}, \frac{-i}{\sqrt{2}}$.

E25) मान लीजिए मूल a, b, c, d हैं । तब ad = bc. अब, हम जानते हैं कि

i) $a+b+c+d = -15 \Rightarrow (a+d)+(b+c) = -15$ .... (30)

ii) $ab+ac+ad+bc+bd+cd = 70$

$\Rightarrow (a+d)(b+c)+ad+bc = 70$ .... (31)

iii) $abc+abd+acd+bcd = -120$ .... (32)

iv) $abcd = 64$.

अब, $(32) \Rightarrow ad(b+c)+bc(a+d) = -120 \Rightarrow ad(a+b+c+d) = -120$

$\Rightarrow -15\,ad = -120 \Rightarrow ad = 8$. इस तरह $ad = 8 =$ bc.

तब $(31) \Rightarrow (a+d)(b+c) = 70-16 = 54$.

(30) के साथ लेने पर इससे पता चलता है कि $a+d$ और $b+c$, $x^2+15x+54 = 0$ के मूल हैं ।

इस तरह, द्विघात सूत्र लागू करने पर हमें

$a+d = \frac{-15+3}{2} = -6$ और $b+c = \frac{-15-3}{2} = -9$ प्राप्त होता है ।

तब $ad = 8$ और $bc = 8$ से पता चलता है कि a और d, $x^2+6x+8 = 0$ के मूल हैं,

और b और c, $x^2+9x+8 = 0$ के मूल हैं ।

$\therefore a = \frac{-6+2}{2} = -2, d = -4, b = \frac{-9+7}{2} = -1, c = -8$.

E26) मान लीजिए मूल a, b, c, d हैं, जहाँ

$a+b = c+d$ ...... (33)

हम जानते हैं कि

$a+b+c+d = p$ .... (34)

$(a+b)(c+d)+ab+cd = q$ .... (35)

$ab(c+d)+(a+b)cd = r$ .... (36)

$abcd = s$.

(33) और $(34) \Rightarrow a+b = \frac{p}{2} = c+d$.

तब $(36) \Rightarrow \frac{p}{2}(ab+cd) = r \Rightarrow ab+cd = \frac{2r}{p}$.

तब $(35) \Rightarrow \frac{p}{2}\cdot\frac{p}{2}+\frac{2r}{p} = q$

$\Rightarrow p^3+8r = 4pq$

$\Rightarrow p^3-4pq+8r = 0$.

विविध प्रश्नावली

यह भाग ऐच्छिक है।

हमने इस खंड में बताई गई बातों से संबंधित कुछ प्रश्न यहाँ दिए हैं। और अधिक अभ्यास करने के लिए संभवतः आप इन प्रश्नों को हल करना चाहेंगे। हमने इन प्रश्नों के उत्तर भी दिए हैं, जिससे आप अपने उत्तर की जाँच कर सकें।

1. मान लीजिए $1, \omega$ और ω^2, 1 के घनमूल हैं। निम्नलिखित के मान ज्ञात कीजिए।

   क) $(1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2)$

   ख) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)$

   ग) $\prod_{i=1}^{5}(1-\omega^i)$

2. मानक रूप में उन समीकरणों को लिखिए जिनके मूल निम्नलिखित हैं :

   क) $2, \frac{-3}{2}, 9$

   ख) $\sqrt{2}, -\sqrt{3}, \pm i$

3. $m\ (\neq -1)$ के किस मान पर समीकरण $\frac{x^2-bx}{ax-c} = \frac{m-1}{m+1}$ के मूल बराबर परंतु चिह्न विपरीत होंगे ? यहाँ $a, b \in \mathbf{R}$ और $a+b \neq 0$.

4. हल कीजिए :

   क) $2\sqrt{\frac{x}{a}} + 3\sqrt{\frac{a}{x}} = \frac{b}{a} + \frac{6a}{b}$, जहाँ $a, b \in \mathbf{R}$

   ख) $\sqrt{2}^x + \frac{1}{\sqrt{2}^x} = 2$

5. $x^4 + 9x^3 + 12x^2 - 80x - 192 = 0$ के दो बराबर मूल हैं। इसके सभी मूल ज्ञात कीजिए।

6. यदि a, b, c समीकरण $x^3 - px^2 + r = 0$ के मूल हैं, तो वह समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके मूल $\frac{b+c}{a}, \frac{c+a}{b}, \frac{a+b}{c}$ हैं।

7. $x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = 0$ को हल कीजिए जबकि इसका एक मूल $2-\sqrt{-3}$ हो।

8. वह त्रिघाती प्राप्त कीजिए जिसके मूल a, b, c हों, जहाँ

   $a+b+c = 3,$
   $a^2+b^2+c^2 = 5,$ और
   $a^3+b^3+c^3 = 11.$

   इस तरह $a^4+b^4+c^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. वह समीकरण प्राप्त कीजिए जिसके मूल, समीकरण $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 17x + 11 = 0$ के मूलों के मानों से 4 कम हों।
   (**संकेत** : समीकरण को $(x-4)$ के पदों में एक समीकरण के रूप में लिखिए।)

10. $\mathbf{R}$ पर निम्नतम घात वाला समीकरण प्राप्त कीजिए जो $1-i$ और $3+2i$ से संतुष्ट होता हो। क्या यह अद्वितीय है ?

11. $x^4 + 9x^3 + 16x^2 + 9x + 1 = 0$

    को हल कीजिए।

    (**संकेत** : ध्यान दीजिए कि इस समीकरण में प्रत्येक $r = 0, 1, 2, 3, 4$ के लिए x^r और x^{4-r} के गुणांक समान हैं। अतः पूरे समीकरण को x^2 से भाग देकर हम इसे

$x+\frac{1}{x} = y$ (मान लीजिए) में एक द्विघात समीकरण के रूप में लिख सकते हैं। अब y के लिए इसे हल कीजिए और फिर x के लिए हल कीजिए।)

यदि आप इस खंड में बताई गई बातों से संबंधित और प्रश्न व हल करना चाहते हैं, तो इसके लिए आप हॉल और नाइट की पुस्तक "Higher Algebra" या अग्रवाल की "इन्टरमीडियट् बीजगणित" देख सकते हैं। ये पुस्तक आपको अपने अध्ययन केन्द्र में मिलेंगी।

हल

1. क) हम जानते हैं कि $1+\omega+\omega^2 = 0$.

$\therefore 1-\omega+\omega^2 = -2\omega$ और $1+\omega-\omega^2 = -2\omega^2$.

$\therefore (1-\omega+\omega^2)(1+\omega-\omega^2) = (-2\omega)(-2\omega^2) = 4\omega^3 = 4$,

क्योंकि $\omega^3 = 1$

ख) $(1-\omega)(1-\omega^2)(1-\omega^4)(1-\omega^5)$

$= (1-\omega)^2(1-\omega^2)^2$, क्योंकि $\omega^3 = 1$.

$= (1-2\omega+\omega^2)(1-2\omega^2+\omega^4)$

$= (-3\omega)(-3\omega^2)$

$= 9$

ग) 0, क्योंकि $1-\omega^3 = 0$.

2. क) समीकरण होगा

$(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-9) = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(2x+3)(x-9) = 0$

$\Leftrightarrow 2x^3-19x^2+3x+54 = 0$, मानक रूप में।

ख) $x^4+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x^3+(1-\sqrt{6})x^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})x-\sqrt{6} = 0$

3. समीकरण निम्न समीकरण के तुल्य है :

$(1+m)x^2+\{(a-b)-m(a+b)\}x+(m-1)c = 0$

मूल बराबर और विपरीत चिह्न वाले होते हैं यदि और केवल यदि इनका जोड़ शून्य हो।

$\therefore (a-b)-m(a+b) = 0$, अर्थात्

$m = \frac{a-b}{a+b}$.

4. क) मान लीजिए $y = \sqrt{\frac{x}{a}}$. तब दिया हुआ समीकरण

$2y+\frac{3}{y} = \frac{b^2+6a^2}{ab}$ हो जाता है, अर्थात्

$2y^2-\frac{b^2+6a^2}{ab}y+3 = 0$.

इसके मूल $\frac{b}{2a}, \frac{3a}{b}$ हैं।

अतः दिए हुए समीकरण के मूल होंगे

$\left(\sqrt{a}\,\frac{b}{2a}\right)^2$ और $\left(\sqrt{a}\,\frac{3a}{b}\right)^2$, अर्थात् $\frac{b^2}{4a}$ और $\frac{9a^3}{b^2}$.

ख) $y = \sqrt{2}^x$ लीजिए। तब y में हमारा समीकरण होगा

$$y + \frac{1}{y} = 2 \Leftrightarrow y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2 = 0.$$

$\therefore\ y = 1$

$\therefore\ \sqrt{2}^x = 1$

$\therefore\ x = 0$ इच्छित मूल है।

5. मान लीजिए इसके मूल a, b, c हैं। तब मूल और गुणांकों में निम्नलिखित संबंध होंगे :

$$2a + b + c = -9 \quad \text{.... (1)}$$

$$a^2 + 2ab + 2ac + bc = 12 \quad \text{.... (2)}$$

$$a^2b + a^2c + 2abc = 80 \quad \text{.... (3)}$$

$$a^2bc = -192 \quad \text{.... (4)}$$

(1), (2) और (3) से हमें
$4a^3 + 27a^2 + 24a = 80$ प्राप्त होता है।

$a = -4$ एक हल है।

तब $(1) \Rightarrow b + c = -1$ और $(4) \Rightarrow bc = -12.$

इस तरह, b और c निम्नलिखित समीकरण

$x^2 + x - 12 = 0$ के मूल हैं।

$\therefore\ b = 3,\ c = -4$

इस तरह, मूल $-4, -4, -4, 3$ हैं।

6. हम जानते हैं कि

$$a + b + c = p \quad \text{.... (5)}$$

$$ab + ac + bc = 0 \quad \text{.... (6)}$$

$$abc = r \quad \text{.... (7)}$$

अब, (5) का प्रयोग करने पर

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \frac{bc(p-a) + ac(p-b) + ab(p-c)}{abc}$$

$$= -3 \quad \text{.... (8)}$$

और (6) का प्रयोग करने पर

$$\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right) + \left(\frac{c+a}{b}\right)\left(\frac{a+b}{c}\right) + \left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right) = \frac{a^3+b^3+c^3}{abc}$$

अब, a, b और c समीकरण $x^3 - px^2 + r = 0$ को संतुष्ट करते हैं।

अतः a, b और c में से प्रत्येक को इस समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर और जोड़ने पर हमें $a^3 + b^3 + c^3 - p(a^2 + b^2 + c^2) + 3r = 0$ प्राप्त होता है।

$$\therefore\ a^3 + b^3 + c^3 = p\{(a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)\} - 3r$$

$$= p^3 - 3r$$

$$\therefore\ \left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right) - \left(\frac{c+a}{b}\right)\left(\frac{a+b}{c}\right) + \left(\frac{a+b}{c}\right)\left(\frac{b+c}{a}\right) = \frac{p^3 - 3r}{r} \quad \text{...(9)}$$

और, (6) और (7) को लागू करने पर

$$\left(\frac{b+c}{a}\right)\left(\frac{c+a}{b}\right)\left(\frac{a+b}{c}\right) = -\frac{r}{r}$$

$$= -1 \qquad \text{.... (10)}$$

(8), (9) और (10) का प्रयोग करने पर हमें निम्नलिखित इच्छित समीकरण प्राप्त होता हैं :

$$x^3 + 3x^2 + \left(\frac{p^3 - 3r}{r}\right)x + 1 = 0$$

7. $2 + i\sqrt{3}$ एक मूल है। अतः दूसरा मूल $2 - i\sqrt{3}$ होगा।

इस तरह, $(x^2 - 4x + 7) \,|\, (x^4 - 4x^2 + 8x + 35)$

लम्बा भाग करके या निरीक्षण से हम पाते हैं कि

$$x^4 - 4x^2 + 8x + 35 = (x^2 - 4x + 7)(x^2 + 4x + 5).$$

अतः दिए हुए समीकरण के अन्य दो मूल समीकरण

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

के मूल, अर्थात् $-2 \pm i$ होंगे।

8. अब, $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + ac + bc)$

$$\therefore\ ab + ac + bc = \frac{9-5}{2} = 2$$

और,

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a + b + c)^3 - 3\{(a^2 + b^2)c + (b^2 + c^2)a + (c^2 + a^2)b\} - 6abc$$

$$\therefore\ abc = \frac{2}{3}.$$

अतः a, b, c निम्नलिखित समीकरण के मूल होंगे

$$x^3 - 3x^2 + 2x - \frac{2}{3} = 0, \text{ अर्थात्}$$

$$3x^3 - 9x^2 + 6x - 2 = 0$$

इस तरह, a, b और c इस समीकरण को और निम्नलिखित समीकरण को संतुष्ट करते हैं:

$$3x^4 - 9x^3 + 6x^2 - 2x = 0$$

$$\therefore\ 3(a^4 + b^4 + c^4) - 9(a^3 + b^3 + c^3) + 6(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a + b + c) = 0$$

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 25$$

9. दिए हुए समीकरण में $y = x - 4$, अर्थात् $x = y + 4$ रखिए।

तब y में प्राप्त समीकरण इच्छित समीकरण होगा। अतः इच्छित समीकरण होगा

$$(y+4)^4 - 5(y+4)^3 + 7(y+4)^2 - 17(y+4) + 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^4 + 11y^3 + 43y^2 + 55y - 9 = 0$$

10. यदि $1 - i$ एक मूल है, तो $1 + i$ भी एक मूल होगा। इसी प्रकार $3 + 2i$ और $3 - 2i$ भी समीकरण के मूल होंगे। अतः निम्नतम घात वाला समीकरण निम्नलिखित चतुर्घात समीकरण होगा :

$$\{x - (1 - i)\}[x - (1 + i)][x - (3 + 2i)][x - (3 - 2i)] = 0, \text{ अर्थात्}$$

$x^4 - 8x^3 + 27x^2 - 38x + 26 = 0.$

यह तुल्यता तक अद्वितीय है।

अर्थात् हमारे प्रतिबंधों को संतुष्ट करने वाला कोई भी वहुपद समीकरण, इस समीकरण के तुल्य होगा।

11. $x^4 + 9x^3 + 16x^2 + 9x + 1 = 0$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 16 = 0$, पूरे समीकरण को x^2 से भाग देने पर।

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 9\left(x + \frac{1}{x}\right) + 14 = 0$

$x + \frac{1}{x} = t$ लेने पर हमें

$t^2 + 9t + 14 = 0$ प्राप्त होता है।

इस तरह, $t = \frac{-9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{-9 \pm 5}{2} = -2, -7.$

इस तरह, x में हमें निम्नलिखित दो समीकरण प्राप्त होते हैं :

$x + \frac{1}{x} = -2$ और $x + \frac{1}{x} = -7$, अर्थात्

$x^2 + 2x + 1 = 0$ और $x^2 + 7x + 1 = 0.$

इन द्विघात समीकरणों को हल करने पर हमें समीकरण के चार हल प्राप्त होते हैं , जो कि

$1, 1, \frac{-7 \pm \sqrt{45}}{2}$ हैं।

परिशिष्ट : सामान्य गणितीय प्रतीक और उपपत्ति की विधियां

कोई भी गणितीय अध्ययन करने के लिए गणित की भाषा जानना आवश्यक होता है। इस परिशिष्ट में हम आपको कुछ प्रतीकों और उनके अर्थ से परिचित कराएंगे। यहाँ हम संक्षेप में कुछ उन विधियों पर भी चर्चा करेंगे जिन्हें आप निष्कर्ष तक पहुँचने के लिए प्रायः लागू करेंगे।

प्रतीक

1. **निहितार्थ** (जिसे $\Rightarrow$ से प्रकट करते हैं): यदि B, A का तर्कसंगत परिणाम हो तो हम कहते हैं कि कथन A में कथन B निहित होता है।

   इसे हम संयुक्त कथन '$A \Rightarrow B$' या 'यदि A, तब B' के रूप में लिखते हैं।

   उदाहरण के लिए, A और B लीजिए, जहाँ

   A: त्रिभुज ABC और DEF सर्वांगसम हैं।

   B: त्रिभुजों ABC और DEF के क्षेत्रफल बराबर हैं।

   तब $A \Rightarrow B$. .... (1)

   इस स्थिति में '$A \Rightarrow B$' एक सत्य कथन है।

   $A \Rightarrow B$ को हम 'B के लिए A **पर्याप्त** है' भी लिख सकते हैं।

   कथन ' यदि A, तब B' का विलोम कथन 'यदि B, तब A', अर्थात् $B \Rightarrow A$ है (जो कि $A \Leftarrow B$ के तुल्य है)।

   उदाहरण के लिए, (1) का विलोम होगा :

   यदि दो त्रिभुजों के क्षेत्रफल बराबर हों, तो वे सर्वांगसम होते हैं।

   ज्यामिती के अध्ययन के दौरान आपने अवश्य सिद्ध किया होगा कि यह कथन असत्य है। (उदाहरण के लिए, दो समकोण त्रिभुज लीजिए, जिनकी भुजाएँ क्रमशः $2, 3, \sqrt{13}$ से.मी. और $1, 6, \sqrt{37}$ सें. मी. हैं। इनके क्षेत्रफल तो बराबर हैं पर , ये सर्वांगसम त्रिभुज नहीं हैं।) इस तरह, हम देखते हैं कि (1) तो सत्य है, पर इसका विलोम सत्य नहीं है।

   $A \Leftarrow B$ को कहने का एक और तरीका है कि 'B के लिए A **आवश्यक** है'।

2. **द्विधा निहितार्थ** (जिसे $\Leftrightarrow$ से प्रकट करते हैं): कभी-कभी हमें ऐसे दो कथन A और B मिलते हैं जिनके लिए $A \Rightarrow B$ और $B \Rightarrow A$. इस स्थिति में हम जगह बचाने के लिए $A \Leftrightarrow B$ लिखते हैं। यह कथन निम्नलिखित कथनों के बराबर है :

   'A,B के **तुल्य** है' ; या

   'A **यदि और केवल यदि** B'; या

   'B के लिए A **आवश्यक और पर्याप्त** है'।

   उदाहरण के लिए, मान लीजिए

   A: $x + 2 = 3$ और

   B: $x = 1$

   तब $A \Rightarrow B$ और $B \Rightarrow A$. इसलिए $A \Leftrightarrow B$.

   ध्यान दीजिए कि संयुक्त कथन 'A यदि और केवल यदि B' के सत्य होने के लिए, आवश्यक है कि दोनों कथन $A \Rightarrow B$ और $B \Rightarrow A$ सत्य हों। अतः कथन 'दो त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं यदि और केवल यदि उनके क्षेत्रफल बराबर हों' एक असत्य कथन है।

3. **सभी के लिए** (जिसे $\forall$ से प्रकट करते हैं) : कभी-कभी चर x वाला कोई कथन, मान लीजिए P(x), x द्वारा ग्रहण किए जाने वाले प्रत्येक मान के लिए सत्य होता है। इस कथन को निम्न प्रकार से लिखते हैं : '$\forall x, P(x)$' या '$P(x)\ \forall x$',

जिसका अर्थ है कि x के प्रत्येक मान के लिए $P(x)$ एक सत्य कथन है ।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए $P(x)$ निम्नलिखित कथन है :

'$x > 0$'.

तब $P(x) \; \forall \, x \in \mathbf{N}$.

4. **का अस्तित्व है** (जिसे $\exists$ से प्रकट करते हैं) : यदि चर x पर निर्भर करने वाला कोई कथन, मान लीजिए $P(x)$, x के किसी मान के लिए सत्य हो, तो हम लिखते हैं कि $\exists \, x$ जिससे कि $P(x)$.
   इसका अर्थ है कि कम से कम एक ऐसा x है जिसके लिए $P(x)$ सत्य होता है ।
   उदाहरण के लिए, $\exists \, x \in \mathbf{R}$ जिससे कि $x - 3 = 2$.

   अब, आप निम्नलिखित दो कथन लीजिए,
   $\forall \, x \in \mathbf{R} \; \exists \, y \in \mathbf{R}$ जिससे कि $x = 2y$, और .... (3)
   $\exists \, y \in \mathbf{R}$ जिससे कि $\forall \, x \in \mathbf{R}$, $x = 2y$. .... (4)
   क्या इन कथनों में कोई अंतर है ? (3) का क्या अर्थ है ?
   इसका अर्थ है कि किसी भी वास्तविक संख्या x के लिए हम एक ऐसी वास्तविक संख्या y प्राप्त कर सकते हैं जिसके लिए $x = 2y$.
   वास्तव में, $y = \frac{x}{2}$ होगा ।

अब आप (4) पर ध्यान दीजिए । इसके अनुसार, एक ऐसी वास्तविक संख्या y होती है , जिससे कि चाहे हम कोई भी वास्तविक संख्या x क्यों न लें, $x = 2y$ सत्य होता है ।
सपष्ट है कि यह एक असत्य कथन है ।
इससे पता चलता है कि गणितीय प्रतीकों का प्रयोग करते समय हमें काफ़ी सावधान रहना चाहिए ।

अभी तक हमने कुछ सामान्य प्रतीकों और उनके अर्थ पर विचार किया है । आइए अब हम उपपत्ति की कुछ सामान्य विधियों पर विचार करें ।

उपपत्ति की विधियां

किसी भी गणितीय सिद्धांत में हम कुछ तथ्यों को मान कर चलते हैं । हम इन्हें अभिगृहीत कहते हैं । इन अभिगृहीतों के प्रयोग से और तर्कशास्त्रीय निगमनों (deductions) की श्रृंखला से हम कुछ परिणाम (प्रमेय) प्राप्त कर लेते हैं । इस प्रकार का प्रत्येक अनुक्रम प्रमेय की एक उपपत्ति होता है । हम विभिन्न विधियों से उपपत्तियां दे सकते हैं ।

1) **प्रत्यक्ष उपपत्ति** (direct proof) : प्रत्यक्ष उपपत्ति, या उपपत्ति का एक चरण, निम्न रूप का होता है:

   A सत्य है और कथन '$A \Rightarrow B$' सत्य है, इसलिए B सत्य है ।
   उदाहरण के लिए, (Δ ABC एक समबाहु त्रिभुज है) और (यदि त्रिभुज समबाहु त्रिभुज हो, तो वह एक समद्विबाहु त्रिभुज होता है), इसलिए (Δ ABC एक समद्विबाहु त्रिभुज है) ।

   एक प्रकार का परिणाम जो प्रायः आपको इस पाठ्यक्रम और गणित के अन्य पाठ्यक्रमों में देखने को मिलेगा, वह है एक ऐसा प्रमेय जो अनेक कथनों, मानलीजिए A,B,C की तुल्यता के बारे में बताता है । हम $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow A$, $A \Rightarrow C$, $C \Rightarrow A$ और $B \Rightarrow C$, $C \Rightarrow B$ को सिद्ध करके इसे सिद्ध कर सकते हैं । परन्तु यदि $A \Rightarrow B$ और $B \Rightarrow C$ दोनों ही सत्य हों, तो $A \Rightarrow C$ भी सत्य होता है । अतः एक लघु उपपत्ति होगा चरण $A \Rightarrow B$, $B \Rightarrow C$, $C \Rightarrow A$.
   संक्षेप में हम इसे $A \Rightarrow B \Rightarrow C \Rightarrow A$ के रूप में लिखते हैं ।
   या, उपपत्ति $A \Rightarrow C \Rightarrow B \Rightarrow A$ हो सकती है ।

   इस तरह हम उपपत्ति में कथनों को किसी भी क्रम में ले सकते हैं, लेकिन पथ चुनते समय

हमें दो बातों को ध्यान में रखना चाहिए – पहले तो, पथ में सारे कथन आ जाने चाहिए ; और दूसरा कि पथ वहीं खत्म होना चाहिए जहां हमने शुरू किया है ।

जब भी आप हमारे पाठ्यक्रमों में इस प्रकार का परिणाम देखेंगे, वहाँ हम उपपत्ति में प्रयोग किए जाने वाले पथ का संकेत करेंगे ।

2. **प्रतिधनात्मक उपपत्ति** (Contrapositive proof): यह उपपत्ति की एक अप्रत्यक्ष विधि है। इसमें इस तथ्य का प्रयोग किया गया है कि '$A \Rightarrow B$' अपने प्रतिधनात्मक कथन 'B नहीं $\Rightarrow$ A नहीं, अर्थात् 'यदि B लागू नहीं होता, तो A भी लागू नहीं होता' के तुल्य होता है ।

(उदाहरण के लिए, $x = -2 \Rightarrow x^2 = 4$ अपने प्रतिधनात्मक $x^2 \neq 4 \Rightarrow x \neq -2$ के तुल्य होता है ।)

कभी-कभी दिए हुए परिणाम के प्रतिधनात्मक परिणाम को सिद्ध करना आसान होता है । ऐसी स्थितियों में हम उपपत्ति की इस विधि को लागू करते हैं । यह विधि किस प्रकार लागू होती है ? '$A \Rightarrow B$' को सिद्ध करने के लिए हम 'B नहीं $\Rightarrow$ A नहीं' सिद्ध करते हैं । अर्थात् हम मान लेते हैं कि B लागू नहीं होता और तब तर्कशास्त्रीय चरणों के अनुक्रम को लागू करके हम यह निष्कर्ष निकाल लेते है कि A लागू नहीं होता ।

आइए हम एक उदाहरण लें । मान लीजिए हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि

'यदि दो त्रिभुज समरूप नहीं हों, तो वे सर्वांगसम नहीं होंगे' । तब हम इसके प्रतिधनात्मक कथन को सिद्ध करते हैं, अर्थात् हम सिद्ध करते हैं कि 'यदि दो त्रिभुज सर्वांगसम हैं तो ये समरूप होते हैं ', जिसे हम आसानी से सिद्ध कर सकते हैं ।

3. **अंतर्विरोध द्वारा उपपत्ति** (proof by contradiction) : यदि हम इस विधि से A की सत्यता को सिद्ध करना चाहते हैं तो हम यह मानकर शुरू करते हैं कि A असत्य है । तब तर्कशास्त्रीय चरणों को लागू करके हम एक ऐसे कथन तक पहुंचते हैं, जो हम जानते हैं कि असत्य है । अतः, हमें एक अंतर्विरोध प्राप्त होता है । इस तरह, हमें यह निष्कर्ष निकालना पड़ता है कि A असत्य नहीं हो सकता । अतः A सत्य है ।

उदाहरण के लिए, यह सिद्ध करने के लिए कि $\sqrt{2} \notin Q$ हम यह मानकर चलते हैं कि $\sqrt{2} \in Q$.

तब किन्हीं $p, q \in Z, q \neq 0$ और $(p, q) = 1$ के लिए, $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p.$

मान लीजिए $p = 2m$.

तब $2q^2 = p^2 = 4m^2$.

$\Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow 2 \mid q^2 \Rightarrow 2 \mid q$, जो कि संभव नहीं है, क्योंकि हम मानकर चले थे कि $(p, q) = 1$. इस तरह हमें एक अंतर्विरोध प्राप्त होता है । अतः हम यह निष्कर्ष निकालते हैं कि $\sqrt{2} \notin Q$.

4. **प्रति-उदाहरण द्वारा उपपत्ति** : एक कथन $P(x)$ लीजिए जो चर x पर निर्भर करता है । मान लीजिए हम इस कथन को असिद्ध करना चाहते हैं, अर्थात् हम यह सिद्ध करना चाहते हैं कि यह कथन असत्य है । इसकी एक विधि यह है कि हम एक ऐसा x प्राप्त करें जिसके लिए $P(x)$ असत्य है । ऐसे x को $P(x)$ का **प्रति-उदाहरण** (counter-example) कहते हैं ।

उदाहरण के लिए, मान लीजिए $P(x)$ निम्नलिखित कथन है :

'प्रत्येक प्राकृतिक संख्या अलग-अलग अभाज्य संख्याओं का गुणनफल होती है ।'

तब $x = 4$ एक प्रति-उदाहरण होगा, क्योंकि $4 \in N$ और $4 = 2 \times 2$ अलग-अलग

अभाज्य संख्याओं का गुणनफल नहीं है। वास्तव में, इस स्थिति में हमें अनेक प्रति-उदाहरण प्राप्त होते हैं।

यह विधि हमेशा किसी कथन को असिद्ध करने के लिए सर्वोत्तम विधि नहीं है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए आप निम्नलिखित कथन की सत्यता की जांच करना चाहते हैं :

'यदि $a, b, c \in \mathbf{Z}$ दिए हुए हों तो $\exists\, n \in \mathbf{Z}$ जिससे कि $an^2 + bn + c$ एक अभाज्य संख्या नहीं है'।

यदि आप प्रति-उदाहरण प्राप्त करने की कोशिश करेंगे, तो आप परेशानी में पड़ सकते हैं, क्योंकि प्रत्येक त्रिक $(a, b, c) \in \mathbf{R}^3$ के लिए आपको एक प्राप्त करना पड़ेगा। यानि कि आपको अनंततः अनेक उदाहरण ढूंढने पड़ेंगे। अतः ऐसी स्थिति में निम्नलिखित प्रत्यक्ष उपपत्ति को क्यों न लागू किया जाए।

उपपत्ति : नियत $a, b, c \in \mathbf{Z}$ के लिए कोई $n \in \mathbf{Z}$ लीजिए और मान लीजिए

$an^2 + bn + c = t$.

तब $a(n+t)^2 + b(n+t) + c = t(2 + 2an + b)$, जो कि t का एक उचित गुणज है। अतः हमारा कथन सत्य है।

शब्दावली

अखंडनीय	irreducible
अग्रग पद	leading term
अतिरिक्त हल	extraneous solution
अद्वितीय	unique
अधिकल्पित संख्या	imaginary number
आरगां आलेख	Argand diagram
आगमन नियम	principle of induction
उपपत्ति	proof
उपसमुच्चय	subset
एकैक संगति	one-one correspondence
ऋणेतर	non-negative
कंपस	compass
करणी	radical
कलन विधि	algorithm
कार्तीय गुणनफल	Cartesian product
कोणांक	argument
क्रमविनिमेय	commutative
क्रमागत	consecutive
क्रमित युग्म	ordered pair
गुणनात्मक प्रतिलोम	multiplicative inverse
गुण विधि	property method
गुणांक	coefficient
घनमूल	cube root
घात	degree
चतुर्घात समीकरण	biquadratic equation, quartic equation
तुल्य समीकरण	equivalent equation
त्रिक	triple
त्रिघात समीकरण	cubic equation
द मुआव्र	De Moivre
द्विधा निहितार्थ	two-way implication
ध्रुवीय रूप	polar form
निरपेक्ष मान	absolute value
निराकरण	elimination
निष्कर्ष	conclusion
निहितार्थ	implication
पूरक	complement
पूरकीकरण	complementation

पूर्ण वर्ग	perfect square
प्रति-उदाहरण	counter-example
प्रतिधनात्मक	contrapositive
प्रतीक	symbol
प्रत्यक्ष उपपत्ति	direct proof
बंटन नियम	distributive law
बहुपद	polynomial
बीजीय संक्रिया	algebraic operation
मापांक	modulus
मूल	root
योज्य तत्समक	additive identity
योज्य प्रतिलोम	additive inverse
वज्र-गुणन	cross multiplication
वर्गमूल	square root
वास्तविक संख्या	real number
विभाजन कलन-विधि	division algorithm
विरोधी उपपत्ति	contrapositive proof
विविक्तकर	discriminant
वेन आरेख	Venn diagram
शुद्धतः अधिकल्पित	purely imaginary
शुद्धतः वास्तविक	purely real
शून्यक	zero (of a polynomial equation)
शून्येतर	non-zero
संक्रिया	operation
संमिश्र संख्या	complex number
संयुग्मी	conjugate
समबाहु त्रिभुज	equilateral triangle
समद्विबाहु त्रिभुज	isosceles triangle
समष्टीय समुच्चय	universal set
समानयन	reduction
सम्मिलन	union
समुच्चय	set
सर्वसमिका	identity
सहचारिता	associativity
साधक त्रिघाती	resolvent cubic
सीधी कोर	straight edge
सूची विधि	listing method

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGMM-04
प्रारंभिक बीजगणित

खंड

2

समीकरण और असमिकाएं

खंड 2 समीकरण और असमिकाएं

मान लीजिए आप बढ़ते हुए बच्चे के लिए तीन प्रकार के भोजनों से आहार की योजना बनाना चाहते हैं। प्रत्येक प्रकार के भोजन में तीन विटामिन अलग-अलग मात्राओं में हैं। आपको प्रत्येक प्रकार के भोजन की उस मात्रा की गणना करने की आवश्यकता होगी जो प्रतिदिन बच्चों को न्यूनतम आवश्यक मात्रा में विभिन्न विटामिन प्रदान कर सके। यह आप कैसे करेंगे? बीजगणित आपको एक आसान तरीका बताता है जिसके बारे में आप इकाई 4 व 5 में पढ़ेंगे। इन इकाइयों में हम अनेक रैखिक समीकरणों के सर्वनिष्ठ हल ज्ञात करने की तीन विधियों की चर्चा करेंगे। ये विधियाँ नई नहीं हैं, वास्तव में इनमें से एक प्राचीन समय से प्रयोग की जा रही है। अन्य दो विधियाँ 18वीं शताब्दी में विकसित की गई थी। यह सभी विधियाँ आज भी रैखिक समीकरणों के निकायों को हल करने की मानक विधियाँ हैं।

इकाई 6, इस पाठ्यक्रम की अंतिम इकाई, में हम कुछ बीजीय असमिकाओं को देखेंगे। पहले हम कुछ ऐसी असमिकाओं की चर्चा करेंगे, जो प्राचीन यूनानियों को भी ज्ञात थीं। फिर हम तीन ऐसी असमिकाओं के बारे में पढ़ेंगे जिनकी खोज का श्रेय 19वीं शताब्दी के प्रमुख यूरोपीय गणितज्ञों को जाता है। ये सब असमिकाएँ गणित तथा अन्य विज्ञानों के लिए उपयोगी हैं, तथा इनको सिद्ध करना या प्रयोग करना बहुत सरल है। इसलिए हमने इन्हें बीजगणित के इस प्रारंभिक पाठ्यक्रम में शामिल किया है।

अब कुछ सुझाव जो इस खंड की इकाइयों को पढ़ने में आपकी सहायता कर सकते हैं। इस खंड का अध्ययन आरंभ करने से पहले हमारा सुझाव है कि आप खंड 1 के आरंभ में दिए गए संकेतन को देख लें। आप इस खंड की इकाइयों में दिए गए प्रश्नों को भी, वहाँ पहुंचने पर, हल करने का प्रयास अवश्य करें। इससे आपको यह पुष्टि करने में सहायता मिलेगी कि संबंधित अध्ययन सामग्री आपने समझ ली है। इस खंड के अंत में हमने कुछ प्रश्न दिए हैं। इनको हल करना आपके लिए उपयोगी होगा, लेकिन इन्हें हल करना ज़रूरी नहीं है। इस खंड को समाप्त करने के बाद आप इस पाठ्यक्रम पर आधारित सत्रीय कार्य करने का प्रयास करें।

इकाई 4 रैखिक समीकरणों के निकाय

इकाई की रूपरेखा

4.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हमने आपको एक चर (variable) वाले बहुपद समीकरणों के विषय में बताया था। इस इकाई के प्रारंभ में हम **एक या एक से अधिक चरों** के रैखिक समीकरणों का अध्ययन करेंगे। उसके बाद, हम इस प्रकार की विभिन्न समीकरणों का सर्वनिष्ठ हल प्राप्त करने की विधियों का अध्ययन करेंगे। रैखिक समीकरणों के समुच्चय को हम रैखिक समीकरणों का निकाय कहते हैं। इस प्रकार के समीकरणों के निकाय विभिन्न व्यावहारिक समस्याओं के अध्ययन के दौरान उत्पन्न हो सकते हैं। इनमें दोलनों (oscillations) का; धाराओं के प्रवाह का, अभिगमन प्रतिरूप (migration patterns) का, विभिन्न विलयनों के रासायनिक अंशों का, औद्योगिक उत्पादन के निवेश-निर्गत (input-output) मॉडल का अध्ययन सम्मिलित है।

एकघात समीकरण को ही रैखिक समीकरण कहते हैं।

रैखिक समीकरणों के निकायों के संबंध में सर्वप्रथम जानकारी चुई चांग सुआन-शु, अर्थात् "गणितीय कला के नौ अध्यायों," में मिलती है। यह गणित का एक प्राचीन चीनी मूल-ग्रन्थ है जो संभवतः 1100 ई.पू. में लिखा गया था। इसके बहुत समय पश्चात्, तीसरी शताब्दी ई.पू. में, यूनानियों ने कुछ समीकरणों के निकायों को हल करने के लिए कुछ विधियों का प्रयोग किया। गणित के इस क्षेत्र में आगे महत्वपूर्ण विकास 17 वीं शताब्दी में हुए। जापानी गणितज्ञ सेकी कोवा ने (1683 के आसपास) रैखिक समीकरणों के निकायों के सिद्धांतों के विकास में बहुत योगदान दिया। लगभग उसी समय यूरोपीय गणितज्ञ लाइब्नीत्ज (Leibniz) ने भी रैखिक समीकरणों के निकायों को हल करने की एक विधि की खोज की। अगली शताब्दी में गाउस (Gauss) एवं क्रेमर (Cramer) नामक गणितज्ञों ने आव्यूहों तथा सारणियों के प्रयोग द्वारा युगपत् समीकरणों को हल करने की विधियों को प्रकाशित किया।

इस इकाई में हम रैखिक समीकरणों के निकायों को हल करने की दो विधियों पर चर्चा करेंगे। क्रेमर-विधि के बारे में आप अगली इकाई में पढ़ेंगे।

आइए, अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची बनाएं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- एक या एक से अधिक चरों वाले रैखिक समीकरण के हल का समुच्चय प्राप्त कर सकेंगे;
- n चरों में m रैखिक समीकरणों को परिभाषित कर सकेंगे;
- युगपत् रैखिक समीकरणों को हल करने के लिए प्रतिस्थापन एवं निराकरण विधियों का प्रयोग कर सकेंगे;
- किसी दिए गए रैखिक निकाय को हल करने के लिए बताई गई दो विधियों में से उपयुक्त विधि का चयन कर सकेंगे।

आइए अब हम रैखिक समीकरणों पर अपनी चर्चा शुरू करें।

4.2 रैखिक निकाय

आप जानते हैं कि **एक चर x में $\mathbf{R}$ पर रैखिक समीकरण** का सामान्य स्वरूप $ax+b=0$ होता है, जहाँ $a, b \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. आप यह भी जानते हैं कि इसका एक मात्र हल $x = -\frac{b}{a}$ होता है।

अब, क्या आप दो चरों में कोई रैखिक समीकरण का उदाहरण दे सकते हैं? $2x+5y+5=0$ के विषय में आपका क्या विचार है? निम्नलिखित परिभाषा के अनुसार यह दो चरों में रैखिक है।

परिभाषा : कोई समीकरण जो $ax+by+c=0$ के रूप में लिखा जा सके, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{R}$ तथा a और b दोनों शून्य नहीं हैं, **दो चरों x और y में रैखिक समीकरण** कहलाता है।

उदाहरण के लिए,

$-x+\frac{1}{2}y=0$, $x=25$ तथा $2s-4t=2$ दो चरों में रैखिक समीकरण हैं। अतिपरवलय (hyperbola) के समीकरण $xy=1$ के बारे में क्या विचार है? क्या यह दो चरों में एक रैखिक समीकरण है? नहीं, क्योंकि x तथा y दोनों चर हैं; अतः यह $ax+by+c=0$, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{R}$, के रूप का नहीं है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 1) निम्नलिखित में से कौन-से समीकरण दो चरों में रैखिक हैं? आप बता सकते हैं कि क्यों?

क) $2x+3xy-4y=10$

ख) $x+y^2=6$

ग) $\sqrt{u}+v=2$, जहाँ u और v चर हैं।

घ) $2x=\frac{5x-2y}{4}+1$

E 2) "एक चर वाला प्रत्येक रैखिक समीकरण दो चरों में भी एक रैखिक समीकरण होता है।" क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

अब, रैखिक समीकरण $2x+3y+1=0$ का कोई हल किस प्रकार होगा? यह वास्तविक संख्याओं का एक क्रमित युग्म होगा, मान लीजिए (a, b), जहाँ $2a+3b+1=0$. उदाहरण के लिए, $(1,-1)$ इसका एक हल है क्योंकि $2(1)+3(-1)+1=0$.

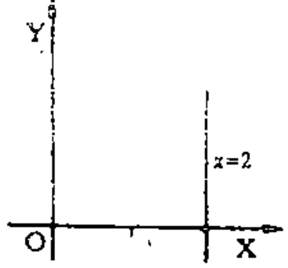
आप जाँच कर सकते हैं कि $\left(\frac{1}{2}, \frac{-2}{3}\right)$ तथा $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ भी हल हैं। वास्तव में, दी गई समीकरण के अनंततः अनेक हल हैं, जो $\left(x, \frac{-(2x+1)}{3}\right)$ के रूप के हैं, जहाँ $x \in \mathbf{R}$. हम हल का यह सामान्य रूप कैसे प्राप्त करते हैं? हम समीकरण को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$y=-\frac{(2x+1)}{3}$$

तब x के किसी दिए गए मान $x=a$ के लिए, y का मान $-\frac{(2a+1)}{3}$ होगा।

अतः $\left(a, \frac{-(2a+1)}{3}\right)$ समीकरण का हल होगा $\forall\, a \in \mathbf{R}$. नोट कीजिए कि हल समुच्चय $\mathbf{R}^2$ का एक उपसमुच्चय है।

अब, हम $2x+3y+1=0$ को $x=-\frac{(3y+1)}{2}$ के रूप में भी लिख सकते थे। तब हल समुच्चय $\left\{\left(\frac{-(3y+1)}{2}, y\right) \middle|\, y \in \mathbf{R}\right\}$ होता। क्या दोनों हल समुच्चय अलग हैं? बिल्कुल नहीं। यदि हम $-\frac{(3y+1)}{2}=x$ लिखें, तब $-\frac{(2x+1)}{3}=y$. अतः दोनों समुच्चय समान हैं। इससे पता चलता है कि हम हल समुच्चय को x के पदों में या y के पदों में मालूम कर सकते हैं।



चित्र 1 : x = 2

अब, दो चरों में रैखिक समीकरण $x-2=0$ पर विचार कीजिए। इसका हल समुच्चय क्या होगा? y का मान कुछ भी हो, किन्तु x का मान हमेशा 2 होगा। अतः हल समुच्चय $\{(2, y) \mid y \in \mathbf{R}\}$ है। यह रेखा $x-2=0$ (चित्र 1) पर सब बिंदुओं का समुच्चय है।

> दो चरों वाले किसी रैखिक समीकरण को ज्यामितीय रूप में XY—समतल में एक सीधी रेखा द्वारा दर्शाया जा सकता है।

अब, हम n चरों में रैखिक समीकरण की परिभाषा देंगे, जहाँ $n \in \mathbf{N}$.

परिभाषा : R पर n चरों $x_1, x_2, ..., x_n$ **वाले रैखिक समीकरण** का सामान्य रूप $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n + b = 0$ होता है, जहाँ $a_1, a_2, ..., a_n, b \in \mathbf{R}$ तथा $a_1, a_2, ..., a_n$ में से सब शून्य नहीं हैं।

इस प्रकार, $2x + 3y = 11z$, 3 चरों x, y तथा z में एक रैखिक समीकरण है। इसका हल कैसा होगा? यह वास्तविक संख्याओं का ऐसा क्रमित त्रिक (ordered triple) होगा जो समीकरण को संतुष्ट करता हो। उदाहरण के लिए, (0, 0, 0) तथा (22, 0, 4) हल हैं। किन्तु, (1, 1, 1) हल नहीं हैं।

आइए देखें कि एक सामान्य रैखिक समीकरण का हल कैसा होता है।

परिभाषा : $\mathbf{R}^n$ में n-यक $(b_1, b_2, ..., b_n)$ रैखिक समीकरण $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$ का एक **हल** कहलाएगा, यदि
$a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = b$.

इस स्थिति में हम यह भी कहते हैं कि $x_1 = b_1, x_2 = b_2, ..., x_n = b_n$, **रैखिक समीकरण को संतुष्ट करते हैं।**

नोट कीजिए कि n - यक का प्रथम अवयव पहले चर के स्थान पर प्रतिस्थापित किया गया है, दूसरा दूसरे चर के स्थान पर, इत्यादि।

याद रखिए कि **दो या दो से अधिक चरों वाले रैखिक समीकरण के अनंततः अनेक हल होते हैं।**

अब आप देखिए कि जो कुछ अभी तक हमने किया है, वह आपने समझ लिया है या नहीं।

E 3) निम्नलिखित में से कौन-से $3x - 2y + 5z = 80$ के हल हैं?
(क) $(0, -40)$, (ख) $(0, -40, 0)$, (ग) $(2, 3, 15)$,
(घ) $\left(1, 1, \frac{79}{5}\right)$.

E 4) $x = y$ का हल समुच्चय प्राप्त कीजिए। इसका ज्यामितीय निरूपण भी दीजिए।

एक समय में सिर्फ़ एक रैखिक समीकरण का अध्ययन वास्तविक समस्याओं की गणितीय व्याख्या एवं हल के लिए पर्याप्त नहीं पाया गया है। बहुत सी समस्याओं के गणितीय मॉडल में कई रैखिक समीकरणों को एक ही समय में हल करने की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए भारत सरकार को भूकम्प से प्रभावित क्षेत्र में अचानक खून, चिकित्सा किट, भोजन तथा पानी भेजना है। वह इन वस्तुओं की प्रत्येक इकाई का भार तथा आयतन जानती है। वह यह भी जानती है कि प्रत्येक हवाई जहाज़ अधिकतम 600 घन मी. तथा 20,000 कि.ग्रा. सामान ले जा सकता है। इन तथ्यों को एक साथ रखने से निम्नलिखित दो समीकरण प्राप्त होते हैं:

$2x_1 + 3x_2 + 0.8x_3 + 0.6x_4 = 600$
$75x_1 + 50x_2 + 30x_3 + 35x_4 = 20{,}000$,

जहाँ x_1, x_2, x_3, x_4 क्रमशः खून, चिकित्सा किट, भोजन तथा पानी रखने के पात्रों की संख्या को दर्शाते हैं। हमें इन दोनों समीकरणों का उभयनिष्ठ हल प्राप्त करने की ज़रूरत है ताकि भेजी जाने वाली मात्राएँ ज्ञात हो सकें। दूसरे शब्दों में, दोनों समीकरणों का युगपत् हल प्राप्त करने की आवश्यकता है। इसलिए हम समीकरणों के इस प्रकार के समुच्चय को युगपत् रैखिक समीकरण (simultaneous linear equations) कहते हैं।

परिभाषा : रैखिक समीकरणों के किसी परिमित समुच्चय को रैखिक समीकरणों का निकाय, या रैखिक निकाय या युगपत् रैखिक समीकरण कहते हैं।

अभी आपने आपात्कालीन हवाई सहायता का एक उदाहरण देखा है। दूसरे उदाहरण के रूप में निम्नलिखित तीन समीकरणों पर विचार कीजिए।

$$\left.\begin{aligned} 2x+\frac{7}{2}y+3z &= 1200 \\ 3x+\frac{5}{2}y+2z &= 1150 \\ 4x+3y+2z &= 1400 \end{aligned}\right] \qquad \text{.......................... (1)}$$

ये एक रैखिक निकाय बनाते हैं। यह निकाय निम्नलिखित प्रश्न का गणितीय सूत्रीकरण है :

एक कंपनी 3 उत्पादों का उत्पादन करती है, जिनमें से प्रत्येक को तैयार होने के लिए 3 प्रभागों A, B, C से गुज़रना होता है। प्रत्येक प्रभाग में उत्पाद की प्रत्येक इकाई द्वारा लिए गए घंटों की संख्या तथा प्रत्येक सप्ताह उत्पादन के लिए उपलब्ध कुल घंटों की संख्या सारणी 1 में दी गई है।

सारणी 1

प्रभाग	उत्पाद			प्रति सप्ताह कुल घंटों की संख्या
	1	2	3	
A	2	3.5	3	1200
B	3	2.5	2	1150
C	4	3	2	1400

तीनों प्रभागों की साप्ताहिक क्षमता का पूर्ण उपयोग करने के लिए प्रत्येक उत्पाद की कितनी इकाइयां उत्पादित की जानी चाहिए?

इस प्रश्न से निकाय (1) कैसे प्राप्त होता है? यदि x, y, z प्रत्येक उत्पादों की संख्या दर्शाते हों, तो हमें निकाय (1) प्राप्त होता है।

नीचे दिए गए प्रश्नों में आप व्यावहारिक समस्याओं से उत्पन्न रैखिक निकायों के कुछ और उदाहरण देख सकते हैं।

E 5) एक आहार विशेषज्ञ स्कूल के बच्चों के भोजन की योजना बना रहा है। इसमें 3 प्रकार के भोजन हैं। वह भोजन में 4 विटामिनों की इकाइयां जानना चाहता है जिससे कि न्यूनतम दैनिक आवश्यकताएं (minimum daily requirements) (एम.डी.आर.) सुनिश्चित की जा सकें। सारणी 2 में हमने प्रत्येक प्रकार के भोजन में पाई जाने वाली प्रति इकाई विटामिन की मात्रा मिलीग्राम में दी है तथा एम.डी.आर. दिया है।

सारणी 2

भोजन का प्रकार	प्रति इकाई विटामिन की मात्रा (मि.ग्रा. में)			
	V_1	V_2	V_3	V_4
1	3	1	0	1
2	5	7	2	6
3	2	3	0	2
एम.डी.आर.	55	45	10	45

इस समस्या का गणितीय सूत्रीकरण क्या है?

E 6) 20% विलयन तथा 70% विलयन को मिलाकर 50% ऐल्कोहॉल का 30 लीटर विलयन तैयार करना है। हम यह जानना चाहते हैं कि प्रत्येक प्रकार के विलयन की कितनी मात्रा प्रयोग करनी चाहिए। इस समस्या को रैखिक निकाय के रूप में परिवर्तित कीजिए।

आइए, अब हम रैखिक समीकरण निकाय के हल समुच्चयों पर चर्चा करें।

एक चर वाले निम्नलिखित रैखिक निकाय पर विचार कीजिए :

$$ax + b = 0$$
$$cx + d = 0$$

जहाँ, $a, b, c, d \in R, a \neq 0, c \neq 0.$

इस निकाय का कोई हल तभी और केवल तभी होगा जब दोनों समीकरणों का कोई उभयनिष्ठ हल हो। अर्थात्, यदि और केवल यदि $-\frac{b}{a} = -\frac{d}{c}$ और तब $x = -\frac{b}{a}\left(\text{या } -\frac{d}{c}\right)$ इसका एकमात्र हल होगा।

उदाहरण के लिए, निकाय

$$x + 1 = 0$$
$$3x + 3 = 0$$

का एकमात्र हल $x = -1$ है, और निकाय

$$3x = 0$$
$$2x + 5 = 0$$

का कोई हल नहीं होगा।

अब निम्नलिखित निकाय पर विचार कीजिए :

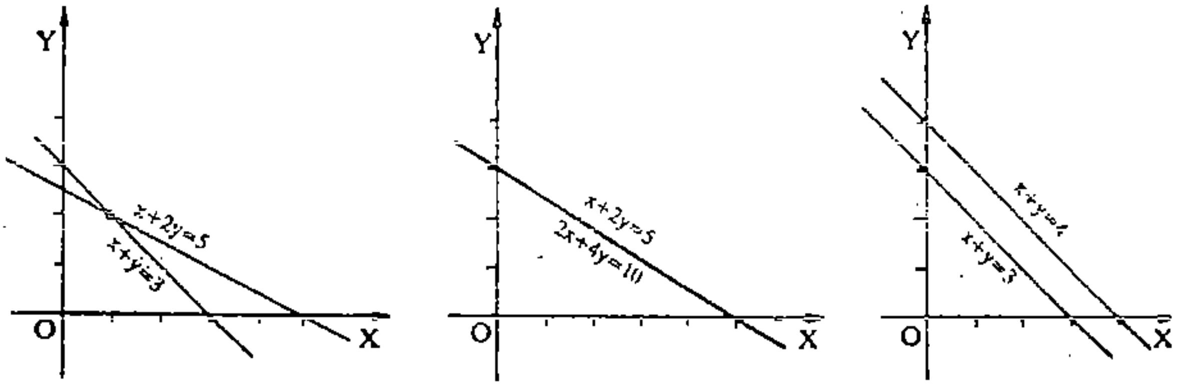
$$\left.\begin{array}{l} x + 2y = 5 \\ x + y = 3 \end{array}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

दूसरे समीकरण से हमें $y = 3 - x$ प्राप्त होता है। इस मान को पहले समीकरण में रखने पर हमें

$$x + 2(3 - x) = 5$$

अर्थात्, $x = 1$ प्राप्त होता है।
तब $y = 3 - x = 3 - 1 = 2.$
इसलिए निकाय (2) का एक हल $x = 1$ तथा $y = 2$, अर्थात् क्रमित युग्म $(1, 2)$ है।

अब याद कीजिए कि दो चरों में किसी रैखिक समीकरण के हल उस समीकरण से निरूपित होने वाली रेखा पर बिन्दुओं के संगत होते हैं। इस प्रकार निकाय (2) के हल दोनों समीकरणों से निरूपित रेखाओं के प्रतिच्छेदी बिन्दुओं के संगत होंगे। चित्र 2 (क) से आप देख सकते हैं कि इन रेखाओं का केवल एक प्रतिच्छेदी बिन्दु है, यानि $(1, 2)$. अतः निकाय (2) का एकमात्र हल है।



(क) (ख) (ग)

चित्र 2 : एक रैखिक निकाय जिसका
(क) एकमात्र हल है, (ख) अनंततः अनेक हल हैं, (ग) कोई हल नहीं।

अब निम्नलिखित निकाय पर विचार कीजिए :

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=5 \\ 2x+4y=10 \end{array}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

आप यह जाँच कर सकते हैं कि किसी $y \in \mathbf{R}$ के लिए क्रमित युग्म $(5-2y, y)$ निकाय (3) का एक हल होगा। इस प्रकार, इस निकाय के अनंततः अनेक हल होंगे। ज्यामितीय रूप में, चूँकि निकाय (3) के दोनों समीकरण एक-दूसरे के गुणज हैं, ये समतल में एक ही रेखा को निरूपित करेंगे। (चित्र 2 (ख) देखें)। इस प्रकार, रेखा पर प्रत्येक बिन्दु एक उभयनिष्ठ बिन्दु होता है। अतः निकाय (3) में अनंततः अनेक उभयनिष्ठ बिन्दु हैं।

अंत में निम्नलिखित निकाय पर विचार कीजिए :

$$\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ x+y=4 \end{array}\right] \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

आप देख सकते हैं कि इस निकाय का कोई हल नहीं है, क्योंकि किसी भी हल से हमें गलत कथन $3=4$ प्राप्त होगा। ज्यामितीय रूप में, निकाय (4) के दोनों समीकरण अलग-अलग समानान्तर रेखाओं को निरूपित करते हैं (चित्र 2 (ग) देखें)। अतः इनका कोई उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं होगा।

अतः आपने निम्न तीन स्थितियां देखीं।

i) रैखिक निकाय का एकमात्र हल हो सकता है; या
ii) रैखिक निकाय के अनंततः अनेक हल हो सकते हैं; या
iii) हो सकता है रैखिक निकाय का कोई भी हल न हो।

वास्तव में, किसी भी रैखिक निकाय के लिए केवल यही स्थितियां संभव हैं। इस कथन को हम यहाँ पर सिद्ध नहीं करेंगे।

आइए अब हम सामान्य रैखिक निकाय पर वापस चलें। हम निम्नलिखित परिभाषा देते हैं।

परिभाषा : यदि किसी रैखिक समीकरण निकाय का कोई हल हो, तो हम उसे **संगत** (consistent) कहते हैं, अन्यथा **असंगत** (inconsistent) कहते हैं।

इस प्रकार, (2) और (3) संगत निकाय हैं, जबकि (4) असंगत है।

अब आप निम्नलिखित प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें।

E 7) समीकरणों के निम्नलिखित निकायों का ज्यामितीय निरूपण दीजिए। इस प्रकार यह भी बताइए कि इनमें से कौन-से निकाय संगत हैं।

क) $x+y=3$
$x=0$
$y=0$

ख) $x+y=2$
$2x+2y=10$
$x=y$

ग) $3x+y=0$
$3x-y=0$
$x-y=0$

घ) $x=3$
$y=4$

अब हम रैखिक समीकरणों के निकाय को हल करने की एक विधि पर चर्चा करेंगे।

4.3 प्रतिस्थापन द्वारा हल

आइए, हम एक चर वाले रैखिक समीकरणों के निम्नलिखित निकाय पर विचार करें :

$$\left.\begin{array}{l} 3x+5=0 \\ 6x+10=0 \end{array}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

पहले समीकरण से हमें $x=\frac{-5}{3}$ प्राप्त होता है। x के इस मान को दूसरे समीकरण में रखने पर, हम पाते हैं कि

$-5+5=0$, एक सत्य कथन।

इस प्रकार, निकाय (5) में दिए गए समीकरण संगत हैं तथा इनका एकमात्र हल $x=\frac{-5}{3}$ है।

जिस विधि का प्रयोग अभी हमने निकाय (5) को हल करने के लिए किया, प्रतिस्थापन-विधि कहलाती है।

आइए, अब हम देखें कि इस विधि का प्रयोग दो चरों वाले रैखिक निकाय को हल करने के लिए कैसे किया जा सकता है।

निम्नलिखित निकाय पर विचार कीजिए :

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=7 \\ 5x+3y=18 \end{array}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

हम निकाय (6) में दिए गए समीकरणों को प्रतिस्थापन द्वारा एक समय में हल करना चाहते हैं। इसके लिए हम सबसे पहले एक चर को किसी भी समीकरण का प्रयोग करके दूसरे चर के पदों में लिखते हैं। हम पहले समीकरण का उपयोग y को x के पदों में लिखने के लिए करेंगे। इससे हमें $y=7-2x$ प्राप्त होता है।

इसके बाद, y के इस मान को दूसरे समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें $5x+3(7-x)=18$, अर्थात् $21-x=18$ प्राप्त होता है।

इससे $x=3$ प्राप्त होता है।

x के इस मान को $y=7-2x$ में रखने पर हमें $y=1$ प्राप्त होता है।

लेकिन, क्या (3, 1) एक हल है? इन मानों को निकाय (6) में रखकर दुबारा जाँच करनी चाहिए। हमें $2\times3+1=7$ प्राप्त होता है, जो कि सत्य है, तथा $(5\times3)+(3\times1)=18$ प्राप्त होता है, जो कि सत्य है। इस प्रकार निकाय (6) का एकमात्र हल (3, 1) है।

हम निकाय (6) के दूसरे समीकरण से $x=\frac{18-3y}{5}$ लिखकर भी निकाय को हल कर सकते हैं। तब पहली समीकरण में x का मान रखने से हमें $\frac{2(18-3y)}{5}+y=7$ प्राप्त होता है जिससे $y=1$ प्राप्त होता है।

और तब $x=\frac{18-3y}{5}=\frac{18-(3\times1)}{5}=3.$

प्रतिस्थापन द्वारा समीकरण निकाय को हल करने के अभ्यास के लिए नीचे दिए गए प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 8) निम्नलिखित युगपत् समीकरणों के निकायों का हल, यदि कोई हो तो, प्रतिस्थापन-विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।

क) $x+y=-2$
$y=3$

ख) $3a+7b=33$
$a+3b=13$

ग) $2s + t = 20$
$2s - 5t = 30$

घ) $x + y = 2$
$2x + 2y = 4$

ङ) $3x = y + 5$
$9 + y = 3x$

चित्र 3 : गाउस

समीकरणों के दो निकाय तुल्य होते हैं यदि उनके हल समुच्चय समान हों।

प्रतिस्थापन-विधि, जिसका प्रयोग हमने दो चरों में दो समीकरणों के लिए किया है, अनेक चरों वाले दो या अधिक समीकरणों के लिए भी इस्तेमाल की जा सकती है। किन्तु जैसे-जैसे समीकरणों तथा चरों की संख्या बढ़ती है, इस विधि का प्रयोग अधिक कठिन हो जाता है। अगले भाग में हम अनेक चरों वाले अनेक समीकरणों को हल करने के लिए इससे बेहतर तरीके की चर्चा करेंगे।

4.4 निराकरण द्वारा हल

युगपत् समीकरणों को हल करने की इस विधि का श्रेय महान जर्मन गणितज्ञ कार्ल फ़्रैडरिक गाउस (1777-1855) को जाता है। गणित के विकास के लिए उनके महान योगदान के कारण उन्हें गणितज्ञों का युवराज कहा जाता है। हल करने की इस विधि को **गाउसीय निराकरण** (Gaussian elimination) (या उत्तरोत्तर निराकरण विधि) कहते हैं। इस विधि में हम गुणा तथा योग का प्रयोग समीकरणों में से एक-एक करके **चरों का निराकरण** करने के लिए करते हैं। प्रत्येक चरण पर हम समीकरण के निकाय को तुल्य निकाय में रूपांतरित (transform) करते हैं।

निम्नलिखित रूपांतरणों में से कोई भी किया जा सकता है :

1) निकाय के समीकरणों के क्रम में परिवर्तन करना;
2) निकाय के किसी भी समीकरण के दोनों पक्षों को किसी शून्येतर वास्तविक संख्या से गुणा करना;
3) किसी समीकरण को उस समीकरण तथा निकाय के किसी दूसरे समीकरण के शून्येतर गुणज के योग से प्रतिस्थापित करना।

आइए, इस विधि का प्रयोग करके एक आसान उदाहरण को हल करें। नीचे दिए गए निकाय पर विचार कीजिए :

$x + 2y + z = 4$ .... (7)
$3x - y - 4z = -9$ .... (8)
$x + y + z = 2$ .... (9)

आइए, हम आरंभ करें समीकरण (8) व (9) से योग द्वारा y का निराकरण करके। हम पाते हैं कि

$4x - 3z = -7$ .... (10)

अब हम समीकरण (7) व (8) में से y का निराकरण करते हैं। इसके लिए हम समीकरण (7) को समीकरण (8) के दुगने में जोड़ते हैं। हम पाते हैं कि

$(x + 2y + z) + 2(3x - y - 4z) = 4 + 2(-9)$, अर्थात्
$7x - 7z = -14$

समीकरण को 7 से भाग देने पर हम पाते हैं कि

$x - z = -2$ .... (11)

अब हम समीकरण (11) को (-4) से गुणा करके समीकरण (10) में जोड़कर, समीकरण (10) व (11) में से x का निराकरण कर सकते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$(4x - 3z) - 4(x - z) = -7 - 4(-2)$,

अर्थात् $z = 1$.

के इस मान को समीकरण (11) में रखकर हम पाते हैं कि $x = -2 + 1 = -1$.

समीकरण (9) में $x = -1, z = 1$ रखने पर हम पाते हैं कि $y = 2$.

हमें यह जाँच करनी चाहिए कि क्रमित त्रिक $(-1, 2, 1)$ तीनों समीकरणों को संतुष्ट करता है। इस त्रिक को प्रत्येक समीकरण में रखने पर हम पाते हैं कि यह वास्तव में हल है।

जब भी हम इस विधि, या अन्य किसी विधि, का प्रयोग रैखिक निकाय के हल के लिए करते हैं तो निम्नलिखित टिप्पणियों को ध्यान में रखना चाहिए।

टिप्पणी 1 : जब भी हम किसी समीकरण अथवा समीकरणों के निकाय को हल करें तो हमें यह **जाँच अवश्य करनी चाहिए** कि हल सही है या नहीं।

टिप्पणी 2 : रैखिक निकाय को हल करते समय यदि हम असत्य कथन पर पहुंचते हैं तो इसका अर्थ है कि निकाय का कोई हल नहीं है।

अब आप कुछ रैखिक निकायों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 9) निम्नलिखित निकायों को गाउसीय निराकरण विधि द्वारा हल कीजिए।

क) $2x + y + z = 9$
$-x - y + z = 1$
$3x - y + z = 9$

ख) $-3x + 4y + 5z = 6$
$6x + 7y = 8$
$2x - 3y + z = 1$

E 10) E 5 में जो निकाय आपको प्राप्त हुआ था, उसे निराकरण विधि द्वारा हल कीजिए।

E 11) निम्नलिखित निकाय के हल समुच्चय का निराकरण विधि द्वारा निर्धारण कीजिए।

$2x + y + 3z = 12$
$x + 2y + 5z = 10$
$6x - 3y + 9z = 24$
$5x + 5y + 2z = 0$

E 10 और E 11 में आपके सम्मुख ऐसे निकाय आए जिनमें समीकरणों की संख्या चरों की संख्या से अधिक थी। ऐसी स्थिति में भी निकाय का एकमात्र हल हो सकता है, अनंततः अनेक हल हो सकते हैं या हो सकता है कि कोई भी हल न हो।

ऐसे समीकरण निकाय भी हो सकते हैं, जिनके चरों की संख्या समीकरणों की संख्या से अधिक हो। ऐसे निकाय का एकमात्र हल नहीं होगा। अतः, या तो यह असंगत होगा, या इसके अनंततः अनेक हल होंगे।

आइए, हम निम्नलिखित उदाहरण पर विचार करें।

$$4x - y + z = 0 \quad \text{.......................} (12)$$
$$x + y + z = 5 \quad \text{.......................} (13)$$

$$(12) - 4 \times (13) \implies -5y - 3z = -20$$
$$\implies 5y + 3z = 20 \quad \text{.......................} (14)$$

पहले हम x का निराकरण करते हैं। सकते क्योंकि (14) तथा मूल निकाय पर इस प्रक्रिया को आगे जारी रखने से x का पुनः प्रवेश हो जाएगा। इसलिए इसके बजाय हम समीकरण (14) का उपयोग y को z के पदों में लिखने के लिए करते हैं। तब हमें

$y = \dfrac{20 - 3z}{5}$ प्राप्त होता है।

तब समीकरण (13) $\Longrightarrow x = 5 - \frac{(20-3z)}{5} - z = \frac{5-2z}{5}$.

त्रिक $\left(\frac{5-2z}{5}, \frac{20-3z}{5}, z\right)$, जहाँ

$z \in \mathbf{R}$, को समीकरण (12) एवं (13) में यह जाँच करने के लिए रखिए कि यह एक हल है। आप क्या पाते हैं? किसी भी $z \in \mathbf{R}$ के लिए, त्रिक दिए गए निकाय का हल है।

उदाहरण के लिए, जब $z = 0$ तो हमें एक हल $(1, 4, 0)$ प्राप्त होता है, और जब $z = 1$ तो हमें एक हल $\left(\frac{3}{5}, \frac{17}{5}, 1\right)$ प्राप्त होता है, इत्यादि। इस प्रकार दिए गए रैखिक निकाय के अनंततः अनेक हल हैं।

हम कहते हैं कि हल $\left(\frac{5-2z}{5}, \frac{20-3z}{5}, z\right)$ हैं, जहाँ z एक **स्वेच्छ** (arbitrary) वास्तविक संख्या है, या **प्राचल** (parameter) है।

अब, निम्नलिखित निकाय पर विचार कीजिए।

$$x + 2y + z = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$
$$x + 2y + z = -1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

(15) − (16) $\Longrightarrow 0 = 2$, जो कि एक असत्य कथन है।

अतः निकाय असंगत है।

अब आप निराकरण विधि का कुछ और अभ्यास कीजिए।

E 12) यदि संगत हो तो, E 6 में प्राप्त निकाय को हल कीजिए।

E 13) निकाय (1) को, जिसे हमने भाग 4.2 के प्रारंभ में दिया था, हल कीजिए।

E 14) निम्नलिखित निकाय को हल कीजिए –

$$x + y + z = 20$$
$$10x + y - 2z = 5$$

E 15 (क) और E 15 (ख) के बीच के संबंध को नोट कीजिए।

E 15) निम्नलिखित निकायों को हल कीजिए –

क) $x + y + z = 0$
$\quad y + 2z = 3$

ख) $x + y + z = 0$
$\quad y + 2z = 3$
$\quad z = 4$

अभी तक हमने रैखिक निकायों को हल करने की दो विधियों पर चर्चा की है। अगली इकाई में हम एक और विधि पर विचार करेंगे जो ऐसे रैखिक निकायों के लिए हैं जिनमें समीकरणों की संख्या चरों की संख्या के बराबर है।

आइए अब संक्षेप में देखें कि हमने इस इकाई में क्या किया है।

सारांश

इस इकाई में हमने रैखिक समीकरणों के निकायों पर चर्चा की है। विशेष रूप से आपने निम्नलिखित का अध्ययन किया है :

1) रैखिक निकाय क्या होता है तथा यह व्यावहारिक समस्याओं से किस प्रकार उत्पन्न हो सकता है।

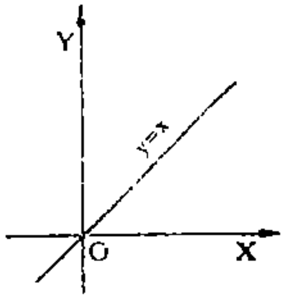
2) किसी रैखिक निकाय का एकमात्र हल हो सकता है, अनंततः अनेक हल हो सकते हैं, या हो सकता है कि कोई हल न हो।

3) "छोटे" रैखिक निकायों को एक साथ हल करने के लिए प्रतिस्थापन-विधि।

4) गाउसीय निराकरण विधि, जो रैखिक निकायों को हल करने के लिए सबसे अधिक प्रयोग होने वाली विधि है।

हमें आशा है कि आपने इकाई के सभी प्रश्नों को हल करने का प्रयास किया होगा। आप शायद देखना चाहेंगे कि उनको हमने कैसे हल किया है।

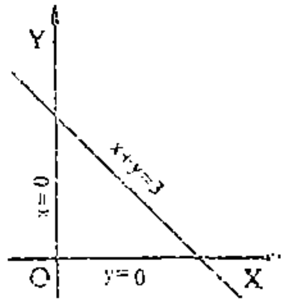
4.6 हल/उत्तर



चित्र 4 : $y = x$

E 1) (क) नहीं है, क्योंकि इसमें द्विघाती पद xy आता है।
(ख) नहीं है, क्योंकि इसमें द्विघाती पद y^2 आता है।
(ग) नहीं है, वास्तव में यह बहुपद समीकरण ही नहीं है।
(घ) रैखिक है, क्योंकि यह रैखिक समीकरण $3x + 2y - 4 = 0$ के तुल्य है।

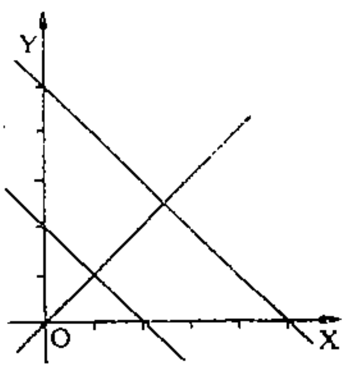
E 2) यह सत्य है क्योंकि एक चर में कोई भी रैखिक समीकरण $ax + b = 0$ के रूप का है, जहाँ $a \neq 0$. यह $ax + 0.y + b = 0, a \neq 0$, के तुल्य है, जो दो चरों में रैखिक समीकरण है।



चित्र 5 : एक असंगत निकाय

E 3) (ख) तथा (च) हैं। (क)$\in \mathbf{R}^2$, और इसलिए यह एक हल नहीं हो सकता। (ग) नहीं है क्योंकि
$3(2) - 2(3) + 5(15) \neq 80$

E 4) $\{(x, x) \mid x \in \mathbf{R}\}$
इसका ज्यामितीय निरूपण चित्र 4 में दिया गया है।



चित्र 6 : एक असंगत निकाय

E 5) मान लीजिए x, y, z, प्रत्येक प्रकार के भोजन की मात्राओं को दर्शाते हैं। तब

$$
\begin{aligned}
3x + 5y + 2z &= 55 \\
x + 7y + 3z &= 45 \\
2y \quad\quad &= 10 \\
x + 6y + 2z &= 45
\end{aligned}
$$

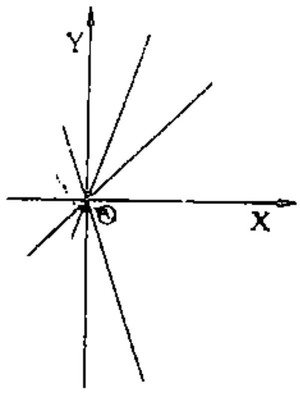
E 6) मान लीजिए, हम x लीटर 70% विलयन तथा y लीटर 20% विलयन, 30 लीटर 50% विलयन बनाने के लिए लेते हैं। तो

$$\frac{70}{100}x + \frac{20}{100}y = \frac{50}{100} \times 30.$$

साथ ही $x + y = 30$.
इस प्रकार, प्रश्न रैखिक निकाय

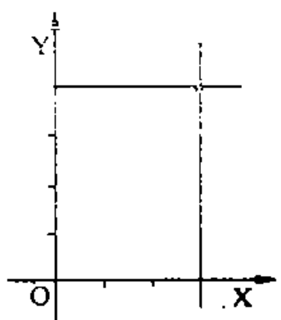
$$
\begin{aligned}
7x + 2y &= 150 \\
x + \ y &= 30
\end{aligned}
$$

को हल करने का रह जाता है।



चित्र 7

E 7) क) चित्र 5 से आप देख सकते हैं कि तीनों रेखाओं में कोई भी उभयनिष्ठ बिन्दु नहीं है। अतः इसका निकाय असंगत है।
ख) इस निकाय का ज्यामितीय निरूपण हमने चित्र 6 में दिया है। आप देख सकते हैं कि निकाय असंगत है।
ग) चित्र 7 में आप देख सकते हैं कि तीनों रेखाओं का एकमात्र उभयनिष्ठ बिंदु (0, 0) है। इस प्रकार निकाय का एकमात्र हल (0, 0) है।
घ) चित्र 8 से आप देख सकते हैं कि इस निकाय का एकमात्र हल (3, 4) है।



चित्र 8

E 8) क) दूसरे समीकरण के अनुसार $y = 3$. इस मान को पहले समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर हमें $x + 3 = -2$, अर्थात् $x = -5$ प्राप्त होता है। अतः $(-5, 3)$ निकाय का हल है।
ख) $a + 3b = 13 \Longrightarrow a = 13 - 3b$
$\therefore\ 3a + 7b = 33 \Longrightarrow 3(13 - 3b) + 7b = 33$
$\Longrightarrow 2b = 6 \Longrightarrow b = 3.$

$\therefore\ a = 13 - 3(3) = 4$

$\therefore$ (4, 3) हल है।

ग) $2s + t = 20 \Longrightarrow t = 20 - 2s$

$\therefore 2s - 5t = 30 \Longrightarrow 2s - 5(20 - 2s) = 30$

$\Longrightarrow s = \frac{65}{6}$

$\therefore\ t = 20 - \frac{65}{3} = -\frac{5}{3}$

$\therefore \left(\frac{65}{6}, \frac{-5}{3}\right)$ हल होगा।

घ) $x + y = 2 \Longrightarrow y = 2 - x$

$\therefore\ 2x + 2y = 4 \Longrightarrow 2x + 2(2 - x) = 4 \Longrightarrow 0 = 0.$

नोट कीजिए कि दूसरा समीकरण पहले के तुल्य है। इस प्रकार, निकाय का कोई भी हल $x + y = 2$ का हल होगा।

इस प्रकार, $x \in \mathbf{R}$ के किसी मान के लिए $(x, 2 - x)$ एक हल है। उदाहरण के लिए, (0, 2) एक हल है। इस निकाय के अनंततः अनेक हल हैं।

ङ) $3x = y + 5 \Longrightarrow y = 3x - 5$

$\therefore\ 9 + y = 3x \Longrightarrow 9 + 3x - 5 = 3x$

$\Longrightarrow 4 = 0$, एक असत्य कथन।

इस प्रकार निकाय असंगत है।

E 9) क) $2x + y + z = 9$ .... (17)

$-x - y + z = 1$ .... (18)

$3x - y + z = 9$ .... (19)

y के निराकरण के लिए हम समीकरण (17) व (18) को जोड़ते हैं। हम पाते हैं कि

$x + 2z = 10$ .... (20)

z के निराकरण के लिए हम समीकरण (18) को समीकरण (19) में से घटाते हैं। हम पाते हैं कि

$4x = 8$; अर्थात् $x = 2$.

x के इस मान को समीकरण (20) में रखने पर, हम पाते हैं कि

$2z = 10 - 2 = 8 \Longrightarrow z = 4.$

फिर समीकरण 17 हमें देता है

$2(2) + y + 4 = 9 \Longrightarrow y = 1.$

इस प्रकार, (2, 1, 4) हल है। (इसे सत्यापित कीजिए!)

ख) $\left(\frac{29}{41}, \frac{22}{41}, \frac{49}{41}\right)$

E 10) $3x + 5y + 2z = 55$ .... (21)

$x + 7y + 3z = 45$ .... (22)

$2y = 10$ .... (23)

$x + 6y + 2z = 45$ .... (24)

$(23) \Longrightarrow y = 5.$

तब $(21) \Longrightarrow 3x + 2z = 30$ .... (25)

तथा $(22) \Longrightarrow x + 3z = 10$ .... (26)

समीकरण (25) व (26) में से x का निराकरण करने पर, हम पाते हैं कि

$z = 0.$

तब $(24) \Longrightarrow x + 6(5) + 2(0) = 45 \Longrightarrow x = 15.$

अब हमें यह जाँच करने की आवश्यकता है कि क्या (15, 5, 0) निकाय में तीनों समीकरणों को संतुष्ट करता है। यह समीकरण (21) को संतुष्ट नहीं करता है। लेकिन हमारी गणनाएं सही हैं।

निष्कर्ष—निकाय असंगत है।

आहार विशेषज्ञ को अपने प्रतिबंधों को बदलना होगा!

E 11) $\left(-\frac{32}{15}, -\frac{34}{15}, \frac{10}{3}\right)$

E 12) निकाय है

$7x + 2y = 150$

$x + y = 30.$

इसका एकमात्र हल है (18, 12).

E 13) (200, 100, 150).

E 14) हल समुच्चय $\{(x, 15 - 4x, 3x + 5) \mid x \in \mathbf{R}\}$ है।

E 15) क) $\{(z - 3, 3 - 2z, z) \mid z \in \mathbf{R}\}$ हल समुच्चय है।

ख) $(1, -5, 4)$ एकमात्र हल है।

इकाई 5 क्रेमर-नियम

इकाई की रूपरेखा

5.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में हमने आपको रैखिक समीकरणों के निकाय तथा उन्हें हल करने की दो विधियों के बारे में बताया था। इस इकाई में हम एक विशेष प्रकार के रैखिक निकाय को हल करने की एक विधि की चर्चा करेंगे। पहले हम आपको रैखिक समीकरणों के निकायों के निरूपण के लिए एक कार्यक्षम संकेतन, यानि कि आव्यूह के बारे में बताएंगे। इसका विस्तृत अध्ययन आप हमारे रैखिक बीजगणित के पाठ्यक्रम में कर सकते हैं।

इसके बाद हम आपको एक ऐसी संकल्पना के विषय में बताएंगे जो कुछ विशेष प्रकार के आव्यूहों, और इस प्रकार कुछ विशेष प्रकार के रैखिक समीकरणों के निकायों के हलों, से घनिष्ठ रूप से जुड़ा हुआ है। यह संकल्पना है सारणिकों की, जिसका सर्वप्रथम प्रयोग प्राचीन चीनी गणितज्ञों ने युगपत् रैखिक समीकरणों को हल करने के लिए किया था। सन् 1683 में जापानी गणितज्ञ सेकी कोवा ने इसी उद्देश्य से सारणिकों के सिद्धांतों के विकास का कार्य आरंभ किया। लगभग उसी समय जर्मन गणितज्ञ लाइब्नीत्ज़ ने सारणिकों की व्याख्या की तथा युगपत् समीकरणों को हल करने के लिए इनका उपयोग किया। अतः आप देख सकते हैं कि युगों से समस्त संसार के गणितज्ञ यह महसूस करते आए हैं कि सारणिक अत्यंत महत्वपूर्ण हैं। आजकल, वैज्ञानिक और समाजशास्त्री भी इसको समझने तथा प्रयोग करने की आवश्यकता महसूस करते हैं।

इकाई के अंत में हम एक ऐसी विधि की चर्चा करेंगे जिसमें सारणिकों का प्रयोग कुछ रैखिक समीकरणों के निकायों को हल करने के लिए किया जाता है। इस विधि की खोज 18वीं शताब्दी के गणितज्ञ क्रेमर ने की थी। यह केवल कुछ ऐसे रैखिक निकायों पर लागू होती है जिनमें चरों की संख्या समीकरणों की संख्या के बराबर हो।

आइए, अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची बनाएं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप

- **आव्यूह, विशेष रूप से वर्ग-आव्यूह, की परिभाषा दे सकेंगे;**
- 1, 2 या 3 कोटि के किसी भी सारणिक का मान प्राप्त कर सकेंगे;
- व्युत्क्रमणीय आव्यूह को पहचान सकेंगे;
- उन रैखिक निकायों को पहचान सकेंगे जिन्हें क्रेमर-नियम द्वारा हल किया जा सकता है, तथा उनको इस नियम से हल कर सकेंगे।

5.2 आव्यूह क्या होता है?

रैखिक समीकरणों के निम्नलिखित निकाय पर विचार कीजिए :

$$\left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 5 \\ x + 5y - 3z = -6 \\ -x + 2y + 2z = 1 \end{array}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

समीकरण निकाय (1) को लिखते समय हमें प्रत्येक चर को तीन बार लिखना पड़ा। क्या यह अच्छा न होगा कि दुहराव से बचने के लिए कोई संकेतन हो? समीकरणों के निकाय को हल करने में महत्व तो केवल चरों के गुणांकों का है। चलिए, हम x, y, z को बार-बार नहीं लिखेंगे; केवल उनके गुणांकों को एक सारणी में निम्न प्रकार से लिखेंगे;

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

हमने यह सारणी क़िस प्रकार तैयार की? पहली पंक्ति, पहले समीकरण में क्रमशः x, y, z के गुणांकों से बनी है, दूसरी पंक्ति दूसरे समीकरण में गुणांकों से बनी है; तथा तीसरी पंक्ति तीसरे समीकरण में गुणांकों से बनी है।

वास्तव में, हम प्रतीकात्मक ढंग से निकाय (1) को निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

संख्याओं अथवा चरों का प्रत्येक समूह जो गुरुकोष्ठकों ([ ]) के अंदर है, आव्यूह का एक उदाहरण है।

समीकरणों के निकायों को आव्यूह संकेतन में लिखने से निकायों से व्यवहार करने में आसानी होती है, विशेषकर जब समीकरणों की संख्या अधिक हो। आजकल रैखिक समीकरणों के बड़े निकायों को हल करने के लिए कंप्यूटर का प्रयोग बढ़ता जा रहा है। आव्यूह विधियों के प्रयोग से उनकी कार्यक्षमता में बहुत वृद्धि होती है। आपको यह जानने में रुचि होगी कि आव्यूहों का सर्वप्रथम उपयोग 250 ई.पू. में गणित के चीनी मूल-पाठ "गणितीय कला के नौ अध्याय" में रैखिक समीकरणों के निकायों को हल करने के लिए किया गया था। लेकिन आव्यूह सिद्धांत के विकास का श्रेय मुख्यतः 19वीं शताब्दी के अंग्रेज़ गणितज्ञों आर्थर केली (Arthur Cayley) और जे.जे. सिल्वेस्टर (Sylvester) को जाता है।

आव्यूह सिद्धांत की विस्तृत चर्चा हम अपने रैखिक बीजगणित के पाठ्यक्रम में करेंगे। इस भाग में हम केवल आव्यूहों से आपका परिचय कराएंगे। आइए परिभाषा से शुरू करें।

परिभाषा : आड़ी और खड़ी रेखाओं के रूप में संख्याओं के किसी आयताकार व्यवस्था को **आव्यूह** (matrix) कहते हैं।

आव्यूह में आने वाली संख्याओं को हम **अवयव** (elements) या **प्रविष्टियाँ** (entries) कहते हैं।

आव्यूह की एक आड़ी रेखा के अवयवों के समुच्चय को आव्यूह की **पंक्ति** (row) कहते हैं तथा खड़ी रेखा के अवयवों के समुच्चय को आव्यूह का **स्तंभ** (column) कहते हैं।

उदाहरण के लिए,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & \frac{1}{2} & 5 \end{bmatrix}$$ एक आव्यूह है जिसमें दो पंक्तियाँ तथा तीन स्तंभ हैं,

तथा $[-1]$ एक आव्यूह है जिसमें एक पंक्ति तथा एक स्तंभ है।

ध्यान दीजिए कि आव्यूह की प्रत्येक पंक्ति में अवयवों की संख्या समान होती है। इसी प्रकार, आव्यूह के प्रत्येक स्तंभ में अवयवों की संख्या समान होती है। इसलिए, हम कहते हैं कि आव्यूह में संख्याओं की व्यवस्था "आयताकार" है।

अब कुछ शब्द संकेतन-पद्धति के बारे में। जैसा कि आपने अभी तक दिए गए आव्यूहों के उदाहरणों में देखा, **हम आव्यूहों के अवयवों को गुरुकोष्ठकों के अंदर रखते हैं।**

सामान्यत: हम आव्यूहों को अंग्रेज़ी के वर्णमाला के बड़े अक्षरों से दर्शाते हैं। उदाहरण के लिए, m पंक्तियों तथा n स्तंभों का व्यापक आव्यूह होगा

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} = [a_{ij}], \text{ संक्षेप में।}$$

यहाँ पर, a_{11} पहली पंक्ति तथा पहले स्तंभ में आने वाले अवयव को दर्शाता है, a_{12} पहली पंक्ति तथा दूसरे स्तंभ में आने वाले अवयव को दर्शाता है, और व्यापक रूप से a_{ij}, i वीं पंक्ति तथा j वें स्तंभ में आने वाले अवयव को दर्शाता है। हम यह भी कहते हैं कि a_{ij}, **A का (i, j) वाँ अवयव है।**

इस प्रकार, $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0.3 & -1 \end{bmatrix}$ का (1, 3) वाँ अवयव 0 है,

तथा (3, 1) वाँ अवयव 3 है।

हम किसी आव्यूह A को, जिसमें m पंक्तियां तथा n स्तंभ हैं $A_{m\times n}$ या $A_{(m,\, n)}$ से भी दर्शाते हैं; और तब हम कहते हैं कि **इसकी कोटि m × n** है या **यह m × n आव्यूह है।**

हम प्राय: आव्यूह की i वीं पंक्ति' की बात करेंगे। इससे हमारा मतलब ऊपर से i वीं पंक्ति से होगा। इसी प्रकार, i वें स्तंभ से हमारा मतलब आव्यूह में **बांयी से दांयी ओर** गिनने पर i वें स्तंभ से होगा।

यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तंभों की संख्या के बराबर हो तो ऐसे आव्यूह को **वर्ग आव्यूह** (square matrix) कहते हैं। है न यह नाम उपयुक्त!

वर्ग आव्यूह के कुछ उदाहरण हैं [2], $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

ऐसे आव्यूहों का आव्यूह सिद्धांतों में बहुत महत्व है।

अब शायद आप आव्यूहों पर कुछ प्रश्नों को हल करना चाहेंगे।

E 1) नीचे दिए गए आव्यूहों की कोटि लिखिए।

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -4 & i & 9 \\ 3 & 0 & 8i \end{bmatrix}, [5], \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, [2 \ -2 \ i]$$

इनका (2, 3) वां तथा (1, 1) वां अवयव तथा तीसरा स्तंभ, यदि हो तो, लिखिए।

E 2) एक ऐसा 3×4 आव्यूह लिखिए जिसमें $i<j$ के लिए (i, j) वां अवयव 0 है, और दूसरे अवयव शून्येतर हैं।

E 3) क) इकाई 4 की E 5 तथा E 6 में दिए गए रैखिक निकायों को आव्यूह संकेतन में लिखिए।

ख) यदि प्रत्येक निकाय में पहले और दूसरे समीकरणों का अदल-बदल करें, तो आव्यूहों में क्या परिवर्तन होगा?

किसी रैखिक निकाय का **गुणांक आव्यूह** एक ऐसा आव्यूह है जो निकाय के समीकरणों के गुणांकों को लेकर बनता है।

अब, समीकरणों के निकाय (1) पर वापस चलिए। हमने इन समीकरणों को (2) में आव्यूह संकेतन में पुनः लिखा था। (2) को हम संक्षिप्त संकेतन में $AX = B$ के रूप में भी लिख सकते हैं, जहाँ A 3×3 गुणांक आव्यूह है,

X, 3×1 आव्यूह $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ है तथा

B, 3×1 आव्यूह $\begin{bmatrix} 5 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix}$ है।

यदि किसी रैखिक निकाय में समीकरणों की संख्या चरों की संख्या के बराबर हो तो गुणांक आव्यूह एक वर्ग आव्यूह होगा। ऐसी स्थिति में हम निकाय को हल करने के लिए कभी-कभी सारणिकों (determinants) का प्रयोग कर सकते हैं। आइए, देखें कि ये क्या होते हैं।

5.3 सारणिक

अभी आपने देखा है कि n चरों में n समीकरणों के समुच्चय को हम एक आव्यूह समीकरण $AX = B$ से निरूपित कर सकते हैं, जहाँ A एक $n \times n$ आव्यूह है। इस वर्ग आव्यूह A से संबद्ध हम एक एकमात्र वास्तविक संख्या परिभाषित कर सकते हैं, अर्थात् इसका सारणिक। इस भाग में हम उन आव्यूहों के सारणिकों की चर्चा करेंगे जिनके अवयव वास्तविक संख्याएं हैं। हम इनके कुछ गुणों की भी चर्चा करेंगे।

आइए एक परिभाषा से आरम्भ करें।

परिभाषा : 1×1 **आव्यूह** $A = [a]$ **का सारणिक**, जिसे $|A|$ अथवा $\det(A)$ से दर्शाया जाता है, a होता है।

उदाहरण के लिए, यदि $A = [3]$, तो $|A| = 3$. इसी प्रकार यदि $A = \left[-\frac{1}{2}\right]$, तो $|A| = -\frac{1}{2}$.

आइए, अब हम 2×2 आव्यूह के सारणिक पर विचार करें।

परिभाषा : 2×2 **आव्यूह** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ **का सारणिक**

$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ होता है। हम इसे $|A|$ से दर्शाते हैं। यह सिर्फ़ वज्र-गुणन

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \\ & a_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & a_{12} \\ a_{21} & \end{bmatrix}$$ है।

उदाहरण के लिए, यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ हो, तो $|A| = 0 \times 5 - 2 \times (-1) = 2$.

$|A|$ को लिखने का दूसरा प्रचलित तरीका है कि इसके अवयवों को गुरुकोष्ठकों के बजाय दो समानांतर खड़ी रेखाओं के बीच में लिखा जाए।

उदाहरण के लिए, हम $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ के सारणिक को $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

लिख सकते हैं। हम प्रायः सारणिक लिखने के इस तरीके का इस्तेमाल करेंगे।

अब, आप कुछ सारणिकों की गणना कीजिए।

E 4) निम्नलिखित के मान प्राप्त कीजिए।

क) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, ख) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$,

ग) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$, घ) $\begin{vmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{vmatrix}$,

ङ) $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, च) $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$.

(क) और (ङ) के मानों को तथा (क) और (च) के मानों को मिलाइए। क्या आपको कोई संबंध नजर आता है?

A के सारणिक को |A| अथवा det (A) से दर्शाते हैं।

अब हम 2×2 आव्यूहों के सारणिकों का प्रयोग 3×3 आव्यूह का सारणिक प्राप्त करने के लिए करेंगे।

परिभाषा : 3×3 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ **का सारणिक होगा :**

$$|A| = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$= (-1)^{1+1} a_{11}|A_{11}| + (-1)^{1+2} a_{12}|A_{12}| + (-1)^{1+3} a_{13}|A_{13}|$$

जहाँ A_{ij} एक ऐसा आव्यूह है जो आव्यूह A में से पहली पंक्ति तथा j वाँ स्तंभ हटाने के बाद प्राप्त होता है, j = 1, 2, 3, के लिए।

|A| का मान प्राप्त करने के लिए हमने **पहली पंक्ति से (या के द्वारा) प्रसार किया।** हम दूसरी पंक्ति, तीसरी पंक्ति या किसी स्तंभ से भी प्रसार कर सकते थे।

अतः, उदाहरण के लिए, तीसरे स्तंभ के द्वारा विस्तार करने पर, हम पाते हैं कि

$$|A| = (-1)^{1+3} a_{13}|A_{13}| + (-1)^{2+3} a_{23}|A_{23}| + (-1)^{3+3} a_{33}|A_{33}|$$

जहाँ A_{i3} एक ऐसा आव्यूह है जो आव्यूह A में से i वीं पंक्ति तथा तीसरा स्तंभ हटाने से प्राप्त होता है।

|A| का मान प्राप्त करने की सभी छः विधियों से एक ही मान प्राप्त होता है। इसको हम यहाँ सिद्ध नहीं करेंगे। लेकिन, हम इसे निम्नलिखित उदाहरण में सत्यापित करेंगे।

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

तब, पहली पंक्ति से प्रसार करने पर, हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 5 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1}.1.\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}.2.\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}.6.\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= (4\times2-1\times3)-2(5\times2-1\times7)+6(5\times3-4\times7)$$
$$= -79.$$

अब, क्यों न आप निम्नलिखित प्रश्न हल करने का प्रयास करें।

E 5) उपरोक्त उदाहरण में $|A|$ का मान तीसरी पंक्ति तथा दूसरे स्तंभ से प्रसार करके प्राप्त कीजिए।

किसी $n\times n$ वर्ग आव्यूह (जहाँ $n\geq2$) के सारणिक का मान हम $(n-1)\times(n-1)$ वर्ग आव्यूहों के सारणिकों के पदों में ठीक उसी प्रकार प्राप्त कर सकते हैं जिस प्रकार 3×3 आव्यूह के सारणिक का किया था।

परिभाषा : किसी $n\times n$ आव्यूह $A=[a_{ij}]$, जहाँ $n>1$, का सारणिक
$|A|=(-1)^{1+1}a_{11}|A_{11}|+(-1)^{1+2}a_{12}|A_{12}|+.....+(-1)^{1+n}a_{1n}|A_{1n}|$ है, जहाँ A_{1j}, A से प्राप्त वह आव्यूह है जो पहली पंक्ति तथा j वें स्तंभ को हटाने से प्राप्त होता है $\forall\, j=1,...,n$.

हमने जो 3×3 आव्यूह के लिए बताया है, वह $n\times n$ आव्यूह (जहाँ $n\geq2$) के लिए भी सत्य है। अर्थात्, हम किसी $n\times n$ आव्यूह A (जहाँ $n\geq2$) का सारणिक प्राप्त करने के लिए A की किसी भी पंक्ति अथवा स्तंभ से प्रसार करके प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार,

$$|A|=(-1)^{i+1}.a_{i1}|A_{i1}|+(-1)^{i+2}.a_{i2}|A_{i2}|+.....+(-1)^{i+n}.a_{in}|A_{in}|\ \forall\ i=1,.....,n,$$

तथा

$$|A|=(-1).a_{1j}|A_{1j}|+(-1).a_{2j}|A_{2j}|+.....+(-1)^{n+j}.a_{nj}|A_{nj}|.\forall\ j=1,.....n.$$

हम $n\in N$ के लिए $n\times n$ आव्यूह के सारणिक को **कोटि n का सारणिक** कहते हैं।

अभी तक हमने 1, 2 और 3 कोटि के सारणिकों के मान प्राप्त किए हैं। इस पाठ्यक्रम में हम इससे उच्च कोटि पर नहीं जाएंगे। इन पर विस्तृत चर्चा हमारे रैखिक बीजगणित के पाठ्यक्रम में की गई है। यहां हम आपको केवल सारणिकों के कुछ प्रारंभिक गुणों के बारे में बताएंगे। E 4 को हल करते समय शायद आप कुछ गुणों को भांप गए होंगे। इन गुणों के प्रयोग से हमें सारणिक का मान कम समय में प्राप्त करने में सहायता मिलती है। आइए, देखें कि ये गुण क्या हैं।

प्रमेय 1 : मान लीजिए A एक वर्ग आव्यूह है। तब $|A|$ निम्नलिखित गुणों को संतुष्ट करता है।

P 1 : यदि A की किसी पंक्ति या स्तंभ के सभी अवयव शून्य हों, तो $|A|=0$.

P 2 : यदि B एक ऐसा आव्यूह हो जो आव्यूह A की किन्हीं दो पंक्तियों (अथवा किन्हीं दो स्तंभों) को आपस में बदलने से प्राप्त हुआ हो, तो $|B|=-|A|$.

P 3 : यदि B एक ऐसा आव्यूह हो जो आव्यूह A की किसी पंक्ति के सभी अवयवों को (अथवा किसी स्तंभ के सभी अवयवों को) किसी संख्या c से गुणा करके प्राप्त हुआ हो, तो $|B|=c|A|$.

P 4 : यदि B आव्यूह A से प्राप्त एक ऐसा आव्यूह हो जो उसकी किसी पंक्ति के गुणज को दूसरी पंक्ति (अथवा स्तंभ के गुणज को दूसरे स्तंभ) में जोड़ने से प्राप्त हुआ हो, तो $|B|=|A|$.

किसी पंक्ति (अथवा स्तंभ) का किसी शून्येतर संख्या k से गुणांक वह पंक्ति (अथवा स्तंभ) होगी जो मूल पंक्ति (अथवा स्तंभ) के अवयवों को k से गुणा करने से प्राप्त होती है।

P 5 : यदि किसी आव्यूह A की दो पंक्तियां (अथवा दो स्तंभ) समान हों, तो $|A|=0$.

हम इन गुणों को यहाँ पर सिद्ध नहीं करेंगे। यदि आप उपपत्तियों के इच्छुक हों, तो आप रैखिक बीजगणित पर हमारे अगले स्तर के पाठ्यक्रम के खंड-3 का अध्ययन कर सकते हैं। इस

पाठ्यक्रम में हम केवल यह देखेंगे कि इन गुणों का प्रयोग कैसे किया जाए। आइए, पहल हम कुछ स्थितियों में इनकी जाँच करें।

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, तो $|A| = 1 \times 0 - 2 \times 0 = 0$ (P 1 का एक उदाहरण)

यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$, अर्थात् B, A के स्तंभों को

आपस में बदलने से प्राप्त होता है, तो $|A| = 15$ तथा $|B| = -15 = -|A|$ (P 2 का एक उदाहरण)।

यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ तथा B, A की दूसरी पंक्ति को 5 से गुणा करने से प्राप्त होता है,

अर्थात् $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 10 & 30 \end{bmatrix}$, तो $|A| = 8$ तथा $|B| = 40 = 5|A|$ (P 3 का एक उदाहरण)।

अब, हम ऐसा उदाहरण लेते हैं जो P 4 की परिकल्पना (hypothesis) को संतुष्ट करता है।

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

क्या आप बता सकते हैं कि P 4 में बताए गए तरीके से B, A से किस प्रकार संबंधित है? हमें B कैसे प्राप्त हुआ? हमने A की दूसरी पंक्ति के अवयवों को (-1) से गुणा किया तथा उनको पहली पंक्ति के संगत अवयवों में जोड़ दिया, अर्थात् हमने A की पहली पंक्ति में से A की दूसरी पंक्ति को घटा दिया।

इस प्रकार, $B = \begin{bmatrix} 1+(-3)(-1) & 2+(-1)(-1) \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$

अब, $|A| = (1)(-1) - (-3)(2) = 5$ तथा $|B| = 5 = |A|$. अतः P 4 इस उदाहरण में ठीक प्रतीत होती है।

अब, मान लीजिए हम A के पहले स्तंभ के 3 गुने को दूसरे स्तंभ में जोड़ते हैं। हमें निम्नलिखित आव्यूह प्राप्त होता है

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2+3 \\ -3 & (-1)+(-9) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -3 & -10 \end{bmatrix}$$

तब $|C| = |A|$, जो P 4 को फिर सत्यापित करता है।

आइए, अब हम देखें कि किसी व्यापक 2×2 आव्यूह के लिए P 5 सत्य है या नहीं। ऐसा एक आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} a & a \\ b & b \end{bmatrix}, a, b \in \mathbf{R}, \text{ है।}$$

तब $|A| = ab - ba = 0$, जो P 5 को सत्यापित करता है।

आइए, अब हम निम्नलिखित 3×3 आव्यूह का सारणिक प्राप्त करने का प्रयास करें।

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 9 & -9 \end{bmatrix}$$

इसका तीसरा स्तंभ दूसरे स्तंभ का (−1) गुना है। अतः हम दूसरे स्तंभ को तीसरे स्तंभ में जोड़ें। P 4 से हम पाते हैं कि

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 \end{vmatrix} = 0, \text{P 1 से।}$$

आपने अभी कुछ ऐसे तरीके देख लिए हैं जिनमें P 1 − P 5 का प्रयोग सारणिकों का मान निकालने के लिए किया जा सकता है।

अब आप इस प्रश्न को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 6) P 1 से P 5 तक का प्रयोग करके, निम्नलिखित आव्यूहों के सारणिकों का मान प्राप्त कीजिए :

क) $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$, जहाँ a, b, c, d, e, f ∈ **R**.

ख) $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

ग) $C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 \\ -3 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

घ) $D = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$

ङ) $E = \begin{bmatrix} a & 2a & d \\ b & 2b & e \\ c & 2c & f \end{bmatrix}$, जहाँ a, b, c, d, e, f ∈ **R**.

जैसा कि हमने पहले बताया है, गुणों P 1 − P 5 का महत्व इस बात में है कि इनके प्रयोग से सारणिक के मान प्राप्त करने में हमारी मेहनत कम हो जाती है। इसका अनुमान आपको E 6 हल करते समय लगा होगा। आइए, इनके उपयोग का एक और उदाहरण देखें। अपनी सुविधा के लिए हम पंक्ति i को R_i तथा स्तंभ i को C_i से दर्शाएंगे।

मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 6 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

किसी पंक्ति अथवा स्तंभ के द्वारा प्रसार करके $|A|$ का मान प्राप्त करने के लिए हमें कोटि 2 के 3 सारणिकों का मान प्राप्त करना होगा। किन्तु, यदि हम P 4 का प्रयोग करें तो हम R_3 को (-2) से गुणा करके R_1 में जोड़ सकते हैं जिससे हमें

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 6 & 5 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$ प्राप्त होता है।

अब, R_1 में दो शून्य हैं। इसलिए, हम $|B|$ का मान, R_1 के द्वारा प्रसार करके प्राप्त कर सकते हैं। यह वही होगा जो $|A|$ का मान है। इसका मतलब यह हुआ कि हमें केवल $|B_{12}|$ का मान प्राप्त करने की आवश्यकता है। इस प्रकार, $|A| = |B| = (-1).1.|B_{12}| = -23.$

किसी सारणिक का मान प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित टिप्पणी आपके लिए बहुत उपयोगी होगी।

टिप्पणी : जब भी आपको किसी सारणिक के मान की गणना करनी हो तो ऐसी पंक्ति या स्तंभ के द्वारा प्रसार करें जिसमें सबसे अधिक शून्य हों। इसलिए, हमें P 4 गुण का प्रयोग इस प्रकार करना चाहिए कि किसी पंक्ति अथवा स्तंभ में जितने अधिक शून्य संभव हों प्राप्त हो जाएं।

आप उपरोक्त टिप्पणी के उपयोग से निम्नलिखित रोचक परिणाम प्राप्त कर सकते हैं।

E 7) मान लीजिए $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$

A और B R पर 3 × 3 त्रिभुजीय आव्यूहों के सामान्य रूप हैं।

तथा $B = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ q & s & 0 \\ r & t & u \end{bmatrix}$, जहाँ $a, b, \ldots, f, p, q, \ldots, u \in \mathbf{R}$.

सिद्ध कीजिए कि

क) $|A| = adf$, अर्थात् मुख्य विकर्ण पर पड़ने वाले अवयवों का गुणनफल

ख) $|B| = psu$.

E 8) मान लीजिए $C = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{R}$.

C, R पर एक सामान्य 3 × 3 विकर्ण आव्यूह है।

सिद्ध कीजिए कि $|C| = abc$.

E 9) $\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 1 \\ -9 & 6 & 12 \end{bmatrix}$ का मान प्राप्त कीजिए।

E 10) सिद्ध कीजिए कि 2 × 2 व्यापक त्रिभुजीय एवं विकर्ण आव्यूहों के लिए E 7 एवं E 8 के अनुरूप सत्य हैं।

अब $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ पर विचार कीजिए $|I|$ क्या है?

हम E 8 का प्रयोग करते हैं, और पाते हैं कि $|I| = 1$, तथा $1 \neq 0$. इसलिए $|I| \neq 0$. $|I|$ के इस गुण के कारण, I आव्यूहों के एक ऐसे वर्ग में है जिसकी हम अब व्याख्या करेंगे।

परिभाषा : किसी वर्ग आव्यूह A को **व्युत्क्रमणीय** (non-singular) आव्यूह कहते हैं, यदि $|A| \neq 0$. अन्यथा A को **अव्युत्क्रमणीय** (singular) कहते हैं।

आप जाँच कर सकते हैं कि व्युत्क्रमणीय आव्यूहों के कुछ और उदाहरण हैं

$$[5], \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} \text{ और } \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

तथा $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ एक अव्युत्क्रमणीय आव्यूह का उदाहरण है।

अब, आप क्यों न कुछ प्रश्न हल करने का प्रयास करें।

E 11) निम्नलिखित आव्यूहों में से कौन-से व्युत्क्रमणीय हैं? अपने चयन का कारण बताइए।

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, [-3], \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 6 \\ \sqrt{2} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

E12) $[a]$, $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ और $\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ f & g & f \end{bmatrix}$ कब व्युत्क्रमणीय होंगे?

यहाँ पर, $a, b, c, d, e, f, g \in R$.

व्युत्क्रमणीय आव्यूह, आव्यूह-सिद्धांत का एक महत्वपूर्ण भाग है। अगले भाग में हम आपको एक ऐसे नियम के बारे में बताएंगे जिसका प्रयोग ऐसे किसी भी रैखिक समीकरण निकाय को हल करने के लिए होता है जिसका गुणांक आव्यूह व्युत्क्रमणीय हो।

5.4 क्रेमर-नियम

सन् 1750 में जर्मन गणितज्ञ गेब्रियल क्रेमर (Cramer) ने n चरों में n समीकरणों के समुच्चय को एक साथ हल करने के लिए एक नियम प्रकाशित किया। यद्यपि इस नियम का नाम क्रेमर के नाम पर है, ऐसा प्रतीत होता है कि इसकी खोज अंग्रेज़ गणितज्ञ कॉलिन मैक्लॉरिन ने 20 वर्ष पहले की थी।

चित्र 3 : क्रेमर (1704—1752)

आइए, देखें कि यह नियम क्या है।

दो चरों वाले दो समीकरणों के व्यापक निकाय पर विचार कीजिए :

$ax + by + c = 0$
$dx + ey + f = 0,$
जहाँ $ae - db \neq 0.$

तब, यदि आप प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग करें, तो आपको क्या हल प्राप्त होता है? हमें

$x = \frac{bf - ce}{ae - db}$, $y = \frac{cd - af}{ae - db}$ प्राप्त होता है।

ध्यान दीजिए कि यह

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c & b \\ -f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}} \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a & -c \\ d & -f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$$ के बराबर है।

लेकिन हमें x तथा y सारणिक रूप में कैसे प्राप्त हुए? पहले हमने समीकरणों के निकाय को निम्न प्रकार से लिखा :

$ax + by = -c$
$dx + ey = -f,$

अर्थात् $AX = B$, जहाँ
A गुणांक आव्यूह $\begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$ है, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

तथा B अचरों का आव्यूह $\begin{bmatrix} -c \\ -f \end{bmatrix}$ है।

फिर हमने $D = |A|$ की गणना की, जो कि शून्येतर दिया है।
उसके बाद हमने D_1 की गणना की, जो कि आव्यूह A में पहले स्तंभ के बदले B रखने से प्राप्त आव्यूह का सारणिक है; इस प्रकार,

$D_1 = \begin{vmatrix} -c & b \\ -f & e \end{vmatrix}$ इसी प्रकार हमने D_2 की गणना की, जो कि आव्यूह A में दूसरे स्तंभ के बदले B रखने से प्राप्त आव्यूह का सारणिक है; इस प्रकार, $D_2 = \begin{vmatrix} a & -c \\ d & -f \end{vmatrix}$

तब $x = \frac{D_1}{D}$ तथा $y = \frac{D_2}{D}$.

क्रेमर ने इस परिणाम को n चरों वाले n समीकरणों के लिए विस्तृत किया।

आइए, हम उनके व्यापक नियम को देखें।

क्रेमर-नियम : n चरों वाले n समीकरणों के निम्नलिखित निकाय पर विचार कीजिए :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\quad & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n, \end{aligned}$$

अर्थात् $AX = B$, जहाँ

$$A = [a_{ij}],\ X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$i = 1, ..., n$ के लिए A के i वें स्तंभ के स्थान पर B को प्रतिस्थापित करके प्राप्त आव्यूह को A_i कहिए। और

$D_i = |A_i|\ \forall i = 1, ..., n$ तथा $D = |A|$ लिखिए।

तब, यदि $D \neq 0$ तो निकाय का एकमात्र हल

$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ ...,\ x_n = \frac{D_n}{D}$ होता है।

क्या यह सब बहुत अधिक लगता है? चिन्ता न कीजिए। इस पाठ्यक्रम में हम इस नियम को केवल $n = 2$ या 3 के लिए प्रयोग करेंगे।

केवल याद रखिए कि

> **क्रेमर-नियम को तभी लागू किया जा सकता है जब**
>
> i) रैखिक निकाय में समीकरणों की संख्या चरों की संख्या के बराबर हो; तथा
>
> ii) गुणांक आव्यूह का सारणिक शून्येतर हो।

आइए, एक उदाहरण में क्रेमर-नियम का प्रयोग करें। निम्नलिखित निकाय पर विचार कीजिए :

$$2x - 3y + z = 1$$
$$x + y + z = 2$$
$$3x - 4z - 17 = 0$$

सबसे पहले हम निकाय को निम्न रूप में लिखते हैं :

$$2x - 3y + z = 1$$
$$x + y + z = 2$$
$$3x + 0.y - 4z = 17$$

यह $AX = B$ के रूप का है, जहाँ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 17 \end{bmatrix}$$

अब, हम सबसे पहले यह देखते हैं कि $|A| = 0$ या नहीं। आइए, हम तीसरी पंक्ति के द्वारा प्रसार करें। हम पाते हैं कि

$$D = |A| = 3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -32 \neq 0.$$

अतः हम क्रेमर-नियम लागू कर सकते हैं। इसके लिए हम निम्नलिखित का मान निकालते हैं :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 17 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -96,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ [illegible] & 17 & -4 \end{vmatrix} = -32,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & [illegible] & 1 \\ 1 & [illegible] & 2 \\ 3 & [illegible] & 7 \end{vmatrix} = 64.$$

तब, $x = \frac{D_1}{D} = 3, y = \frac{D_2}{D} = 1, z = \frac{D_3}{D} = -2.$

जाँच करने पर हम पाते हैं कि (3, 1, − 2) वास्तव में दिए गए निकाय का हल है।

अब आप क्रेमर-नियम स्वयं लागू करने का प्रयास कीजिए।

E 13) निम्नलिखित निकायों को क्रेमर-नियम से हल कीजिए, यदि लागू हो तो। अन्यथा गाउसीय निराकरण विधि का प्रयोग कीजिए (भाग 4.4 देखें)।

क) $x + y + 1 = 0$
$2x - y = 7$

ख) $x + y - z + 2 = 0$
$2x - y + z + 5 = 0$
$x - 2y + 3z - 4 = 0$

ग) $3x + 5y + 2z = 1$
$4x + y - 7 = 0$
$9x + 15y + 6z = 3.$

E 14) निम्नलिखित $n \times n$ रैखिक निकाय पर विचार कीजिए :

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0 \end{matrix}$$

यदि A गुणांक आव्यूह है तथा $|A| \neq 0$, तो क्या हम इस निकाय को हल करने के लिए क्रेमर-नियम का प्रयोग कर सकते हैं? यदि ऐसा है, तो हल समुच्चय प्राप्त कीजिए।

E 15) मेरे पास पाँच, दस तथा बीस रुपये के नोटों में 2480 रु. हैं। नोटों की कुल संख्या 290 है तथा दस रु. के नोटों का कुल मान बीस रु. के नोटों के कुल मान से 60 रु. अधिक है। मेरे पास प्रत्येक प्रकार के कितने नोट हैं?

इस इकाई और पिछली इकाई में हमने रैखिक निकायों को हल करने की तीन विधियों की चर्चा की है। जो उदाहरण व प्रश्न हमने किए हैं उनमें अधिकतम तीन समीकरण तथा अधिकतम चार चर थे। किन्तु, विज्ञान तथा समाज विज्ञान के व्यावहारिक अनुप्रयोगों में बहुत बड़े-बड़े निकायों को हल करने की आवश्यकता होती है। इनमें 15, 20 या अधिक समीकरण और इतने ही या इससे अधिक चरों की संख्या होती है। जैसा कि आपने अनुमान लगाया होगा, इन निकायों को हल करने के लिए कंप्यूटरों की आवश्यकता होती है। तब गाउसीय निराकरण-विधि सर्वोत्तम होती है। हमने अपने रैखिक बीजगणित के पाठ्यक्रम में इस विधि तथा क्रेमर-नियम की विस्तार से चर्चा की है।

अब आप नीचे दिए गए प्रश्नों को इस इकाई तथा पिछली इकाई में दी गई तीनों में से किसी भी विधि से हल करने का प्रयास कीजिए।

E 16) निम्नलिखित निकायों में से कौन-से संगत हैं? जहाँ संभव हो, हल समुच्चयों को प्राप्त कीजिए।

क) $2x - 5y + 7z = 6$
$x - 3y + 4z = 3$
$3x - 8y + 11z = 11$

ख) $2x - y + 3z - 5w = -7$
$-7y + 3z - 7w = -13$
$3x + 4y + 2z = 0$

ग) $x - y + z = 0$
$-3x + y - 4z = 0$
$7x - 3y - 9z = 0$
$4x - 2y - 5z = 0$

घ) $x - 2y + z = 6$
$3x + y - 4z = -7$
$5x - 3y + 2z = 5.$

आइए, अब हम इस इकाई में दिए गए तथ्यों को संक्षिप्त में दोहराएं।

5.5 सारांश

इस इकाई में हमने

1) $m \times n$ आव्यूह, विशेषकर वर्ग आव्यूह, की परिभाषा दी।
2) एक वर्ग आव्यूह के सारणिक के विषय में बताया।
3) सारणिकों के कुछ गुणों की चर्चा की।
4) सारणिकों की परिभाषा एवं गुणों का उपयोग 1, 2 तथा 3 कोटि के सारणिकों का मान प्राप्त करने के लिए किया।
5) व्युत्क्रमणीय आव्यूह की परिभाषा दी।
6) ऐसे समीकरणों के निकाय को हल करने के लिए क्रेमर-नियम का प्रयोग किया, जिनका गुणांक आव्यूह व्युत्क्रमणीय है।

इस इकाई के साथ युगपत् रैखिक समीकरणों पर हमारी चर्चा समाप्त होती है। अगली इकाई में हम कुछ प्रायः प्रयोग होने वाली असमिकाओं पर विचार करेंगे। लेकिन इकाई 6 पर जाने से पहले, आप **भाग 5.1 में दिए गए उद्देश्यों को दुबारा देख लीजिए** तथा यह जाँच कीजिए कि क्या आपने इन्हें प्राप्त कर लिया है। आप अगले भाग को भी शायद देखना चाहेंगे, जिसमें हमने इस इकाई में दिए गए प्रश्नों का हल दिया है। यह आपके लिए अपने हलों की जाँच करने में उपयोगी हो सकता है।

5.6 हल/उत्तर

E 1) उनकी कोटियाँ क्रमशः 3×3, 1×1, 3×3, 3×1 तथा 1×3 हैं। पहले आव्यूह के (2, 3) वें तथा (1, 1)वें अवयव 9 तथा 1 हैं। दूसरे आव्यूह का (1, 1)वां अवयव 5 है। इसका कोई (2, 3)वां अवयव नहीं है।

तीसरे आव्यूह के (2, 3)वें तथा (1, 1)वें अवयव 0 व 1 हैं। चौथे आव्यूह का (1, 1)वां अवयव 4 है; इसका (2, 3)वां अवयव नहीं है। पाँचवें आव्यूह का (1, 1)वां अवयव 2 है, इसका (2, 3)वां अवयव नहीं है।

केवल पहले एवं तीसरे आव्यूहों में तीसरा स्तंभ है, जो कि क्रमशः $\begin{bmatrix} 2 \\ 9 \\ 8 \end{bmatrix}$ तथा $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ हैं।

E 2) इच्छित आव्यूह निम्नलिखित प्रकार का होगा :

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ b & c & 0 & 0 \\ d & e & f & 0 \end{bmatrix}$$, जहाँ a, ..., f ∈ R\{0}.

E 3) क) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 45 \\ 10 \\ 45 \end{bmatrix}$ हमें E 5 का निकाय देता है।

$\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 150 \\ 30 \end{bmatrix}$ हमें E 6 का निकाय देता है।

ख) दोनों गुणांक आव्यूहों और दायीं पक्ष के दोनों आव्यूहों की पहली दो पंक्तियों में अदल-बदल होगा।

E 4) क) $1 \times 0 - (-1)(-1) = -1.$
ख) $1 \times 2 - 1 \times 2 = 0$
ग) 0
घ) $-i^2 = 1$

E 5) तीसरी पंक्ति से प्रसार करने पर हम पाते हैं कि
$|A| = (-1)^{3+1}.7.|A_{31}| + (-1)^{3+2}.3.|A_{32}| + (-1)^{3+3}.2.|A_{33}|$

$$= 7. \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}$$

$= -79$

दूसरे स्तंभ से प्रसार करने पर हम पाते हैं कि
$|A| = (-1)^{2+1}.2.|A_{21}| + (-1)^{2+2}.4.|A_{22}| + (-1)^{2+3}.3.|A_{23}|$
$= -79.$

E 6) क) 0, P 1 से।

ख) $|B| = 3. \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, P 3 से।

$= 3.0$, P 5 से।
$= 0.$

ग) पहली तथा तीसरी पंक्तियों को आपस में बदलकर B से C प्राप्त होता है।
$\therefore |C| = -|B| = 0.$

घ) $|D| = 0$, जैसा कि (ख) में है।

ङ) $|E| = 2 \begin{vmatrix} a & a & d \\ b & b & e \\ c & c & f \end{vmatrix} = 0$, P3 से।

E 7) क) हम ऐसी पंक्ति या स्तंभ से प्रसार करते हैं जिसमें सबसे अधिक शून्य हों। इसलिए C_1 से प्रसार करने पर हम पाते हैं कि

$$|A| = (-1)^{1+1} a . |A_{11}| = a \begin{vmatrix} d & e \\ 0 & f \end{vmatrix} = adf.$$

ख) हम R_1 से प्रसार कर सकते हैं जिससे हम $|B| = psu$ पाते हैं।
यह नोट कर लें कि यदि हम किसी अन्य पंक्ति या स्तंभ से प्रसार करते तो भी यही उत्तर प्राप्त होता।

E 8) R_1 से प्रसार कीजिए। तब, $|C| = abc.$

E 9) मान लीजिए $A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 1 \\ -9 & 6 & 12 \end{vmatrix}$

हम कुछ अवयवों को शून्य बनाना चाहते हैं। C_1 को देखने से ज़ाहिर है कि R_2 को $R_2 + (-2) R_1$ से और R_3 को $R_3 + 3R_1$ से प्रतिस्थापित करने से (2, 1) वें तथा (3, 1) वें अवयव शून्य हो जाएंगे। तब, P 4 से हम पाते हैं कि

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 6+(-2)3 & 8+(-2)(-2) & 1+(-2)(4) \\ -9+(3)3 & 6+(3)(-2) & 12+(3)(4) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 0 & 12 & -7 \\ 0 & 0 & 24 \end{vmatrix}$$

अब E 7 से, $|A| = 3 \times 12 \times 24 = 864.$

E 10) व्यापक 2×2 वास्तविक त्रिभुजीय आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$

या $B = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$ है, जहाँ $a, b, c \in \mathbf{R}$.

$m \times n$ आव्यूह के विकर्ण अवयव इसके (i, i) वें अवयव हैं $\forall\ i = 1, \ldots\ldots, n.$

दोनों स्थितियों में उनका सारणिक ac है, जो कि विकर्ण अवयवों का गुणनफल है।

व्यापक 2×2 वास्तविक विकर्ण आव्यूह है $C = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$, जहाँ $a, b \in R.$

$|C| = ab$, विकर्ण अवयवों का गुणनफल।

E 11) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$; अतः पहला आव्यूह व्युत्क्रमणीय है।

$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है, क्योंकि इसका सारणिक शून्य है।

$|[-3]| = -3 \neq 0$; इस प्रकार $[-3]$ व्युत्क्रमणीय है।

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ -4 & 9 \end{bmatrix}$ एक वर्ग आव्यूह नहीं है; अतः यह व्युत्क्रमणीय नहीं हो सकता।

नोट कीजिए कि यह अव्युत्क्रमणीय भी नहीं है। क्योंकि अव्युत्क्रमणीय आव्यूह को भी वर्ग आव्यूह होना ज़रूरी है।

अंतिम आव्यूह का सारणिक शून्य है, अतः यह अव्युत्क्रमणीय है।

E 12) (a) अव्युत्क्रमणीय है यदि और केवल यदि $a = 0$.

$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है यदि और केवल यदि $ad - bc = 0$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & d \\ f & g & f \end{vmatrix} = (a - c)(ef - dg).$$

यह शून्य है यदि और केवल यदि $a = c$ या $ef = dg$. अर्थात् दिया हुआ आव्यूह अव्युत्क्रमणीय है यदि और केवल यदि $a = c$ या

$\begin{bmatrix} e & d \\ g & f \end{bmatrix}$ अव्युत्क्रमणीय है।

E 13) क) $x + y = -1$

$2x - y = 7$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \end{bmatrix}$ के समान है।

चूँकि $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, क्रेमर-नियम लगाया जा सकता है।

अब,

$D_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -6$, तथा

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 9$.

तब $x = \dfrac{D_1}{D} = 2$ तथा $y = \dfrac{D_2}{D} = -3$,

अतः हल $(2, -3)$ है।

ख) दिया गया निकाय निम्न के तुल्य है :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

अब, $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0.$

अतः हम क्रेमर-नियम लागू कर सकते हैं।

तब, $D_1 = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -7,$

$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 2 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -22,$

$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & -5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -21.$

इसलिए $x = \frac{-7}{3} \cdot y = \frac{22}{3}$ तथा $z = 7.$

ग) निकाय निम्नलिखित के तुल्य है :

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 9 & 15 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

ध्यान दें कि गुणांक आव्यूह की तीसरी पंक्ति पहली पंक्ति की तीन गुनी है। इस प्रकार, इसका सारणिक शून्य होगा। अतः हम क्रेमर-नियम नहीं लगा सकते हैं। आइए, हम इस निकाय को उत्तरोत्तर निराकरण-विधि द्वारा हल करें।

निकाय है :

$3x + 5y + 2z = 1$ .... (3)

$4x + y = 7$ .... (4)

$9x + 15y + 6z = 3$ .... (5)

ध्यान दीजिए कि (5), (3) के तुल्य है। अतः हम (5) को छोड़ सकते हैं। आइए, अब (3) तथा (4) में से y का निराकरण करें। इसके लिए हम $(3) - 5 \times (4)$ की गणना करते हैं, जिससे हमें $-17x + 2z = -34$ प्राप्त होता है। .... (6)

अब हम (3), (4) व (6) से और निराकरण नहीं कर सकते। इसलिए हम (4) व (6) का उपयोग y तथा z को x के पदों में लिखने के लिए करते हैं।

$(4) \Rightarrow y = 7 - 4x$, तथा

$(6) \Rightarrow z = \frac{17}{2} x - 17.$

इस प्रकार, हमें एक अनंततः अनेक हलों का 1-प्राचल वाला समुच्चय

$\{(x, 7-4x, \frac{17}{2}x-17) \mid x \in \mathbf{R}\}$ प्राप्त होता है।

E 14) चूंकि $|A| \neq 0$, हम क्रेमर-नियम लागू कर सकते हैं। इस नियम को लागू करने के लिए हम $i = 1, ..., n$ के लिए D_i की गणना करते हैं, जहाँ D_i, A के i वें स्तंभ को अचर स्तंभ

$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ से प्रतिस्थापित करके प्राप्त आव्यूह है।

इस प्रकार, प्रत्येक $D_i = 0$, प्रमेय 1 के P 1 से।

अतः $x_i = 0 \; \forall \; i = 1, ..., n.$

हल (0, 0, ..., 0) को **तुच्छ हल** (trivial solution) कहते हैं।

E 15) मान लीजिए x, y, z क्रमशः पाँच, दस व बीस के नोटों की संख्या दर्शाते हैं। तब हम जानते हैं कि

$$5x + 10y + 20z = 2480$$
$$x + y + z = 290$$
$$10y - 20z = 60$$

इसको क्रेमर-नियम से हल कर सकते हैं, जिससे हमें $x = 164$, $y = 86$, $z = 40$ प्राप्त होता है।

E 16) क) यह एक 3×3 निकाय है। आइए, पहले हम यह देखें कि क्या हम क्रेमर-नियम लगा सकते हैं। चूँकि गुणांक आव्यूह का सारणिक शून्य है, हम क्रेमर-नियम नहीं लगा सकते हैं। अतः हम इसे निराकरण विधि से हल करने का प्रयास करते हैं।

पहले दो समीकरणों को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$3x - 8y + 11z = 9.$

इसको निकाय के तीसरे समीकरण में से घटाने पर हम पाते हैं कि $0 = 2$, एक असत्य कथन।

अतः निकाय असंगत है।

ख) दिया हुआ निकाय है :

$$2x - y + 3z - 5w = -7 \quad \text{.......................} (7)$$
$$-7y + 3z - 7w = -13 \quad \text{.......................} (8)$$
$$3x + 4y + 2z = 0 \quad \text{.......................} (9)$$

हम इसे निराकरण विधि द्वारा हल करने का प्रयास करेंगे। समीकरण (7) व (8) से y के निराकरण के लिए हम $7 \times (7) - 5 \times (8)$ की गणना करते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$14x + 28y + 6z = 16,$

अर्थात् $7x + 14y + 3z = 8.$ .... (10)

समीकरण (9) व (10) से z का निराकरण करने पर हम पाते हैं कि

$5x + 6y = 16.$ .... (11)

अब हम और निराकरण नहीं कर सकते हैं। अतः हम सब चरों का मान यथासंभव कम से कम चरों के पदों में प्राप्त करने का प्रयास करेंगे।

$$(11) \Longrightarrow x = \frac{16}{5}(1 - y)$$

$$\text{तब } (9) \Longrightarrow \frac{48}{5}(1-y) + 4y + 2z = 0 \Longrightarrow z = \frac{14y - 24}{5}$$

$$\text{तब } (8) \Longrightarrow -7y + \frac{3}{5}(14y - 24) - 7w = -13 \Longrightarrow w = \frac{1}{5}(y - 1)$$

इस प्रकार हमें हलों का निम्नलिखित 1- प्राचल वाला समुच्चय प्राप्त होता है :

$$\left\{\left(\frac{16(1-y)}{5}, y, \frac{14y-24}{5}, \frac{y-1}{5}\right) \middle| \, y \in \mathbf{R}\right\}$$

यह जाँच करने के लिए कि ये वास्तव में हल हैं, हम 4-यक

$\left(\frac{16}{5}(1-y), y, \frac{1}{5}(14y-24), \frac{1}{5}(y-1)\right)$ को निकाय के प्रत्येक समीकरण में रखते हैं तथा पाते हैं कि यह उन्हें सन्तुष्ट करता है।

ग) चूँकि निकाय एक 4×3 निकाय है, हम गाउसीय निराकरण विधि का प्रयोग करेंगे।

$x - y + z = 0$ .... (12)

$-3x + y - 4z = 0$ .... (13)

$7x - 3y - 9z = 0$ .... (14)

$4x - 2y - 5z = 0$ .... (15)

$3 \times (12) + (13) \Longrightarrow -2y - z = 0 \Longrightarrow 2y + z = 0$ .... (16)

$7 \times (12) - (14) \Longrightarrow -4y + 16z = 0 \Longrightarrow y - 4z = 0$ .... (17)

$4 \times (16) + (17) \Longrightarrow y = 0$

तब $(17) \Longrightarrow z = 0$

तब $(12) \Longrightarrow x = 0.$

हम यह जाँच करते हैं कि (0, 0, 0) सभी समीकरणों को संतुष्ट करता है। इस प्रकार, निकाय का केवल तुच्छ हल है।

घ). चूँकि गुणांक आव्यूह का सारणिक शून्येतर है, हम क्रेमर-नियम व निराकरण विधि दोनों का प्रयोग कर सकते हैं। आइए, हम क्रेमर-नियम का प्रयोग करें। इसके लिए हम निम्नलिखित गणना करते हैं :

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 28.$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 1 \\ -7 & 1 & -4 \\ 5 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -32.$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 3 & -7 & -4 \\ 5 & 5 & 2 \end{vmatrix} = -100.$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & -7 \\ 5 & -3 & 5 \end{vmatrix} = 0.$$

$\therefore \; x = \frac{-32}{28}, y = \frac{-100}{28}, z = 0,$

अर्थात् एकमात्र हल $\left(\frac{-8}{7}, \frac{-25}{7}, 0\right)$ है।

इकाई 6 असमिकाएं

इकाई की रूपरेखा

6.1 प्रस्तावना

अभी तक हमने विभिन्न प्रकार के समीकरणों की चर्चा की है। अब हम कुछ **असमिकाओं** (inequalities) पर विचार करेंगे; सामाजिक नहीं बल्कि वास्तविक संख्याओं के बीच। गणितीय असमिका एक ऐसा गणितीय व्यंजक है जो यह बताता है कि दो मात्राओं में से एक दूसरी से बड़ी, बड़ी या बराबर, छोटी, छोटी या बराबर है। कोई असमिका जो प्रत्येक वास्तविक संख्या के लिए सत्य हो **निरपेक्ष असमिका** (absolute inequality) कहलाती है। इस इकाई में हम स्वयं को ऐसी असमिकाओं तक ही सीमित रखेंगे।

हम छः प्रसिद्ध निरपेक्ष असमिकाओं की चर्चा करेंगे। हमने उन्हें दो भागों में विभाजित किया है–वे जो शताब्दियों से प्रयोग होती आ रही हैं और वे जो 19वीं शताब्दी के कुछ विख्यात यूरोपीय गणितज्ञों द्वारा खोजी गई हैं। इन असमिकाओं के कई अनुप्रयोग भी हैं। हम इनमें से कुछ एक की चर्चा करेंगे। कुछ अनुप्रयोगों के बारे में आपको अन्य पाठ्यक्रमों में भी पता लगेगा। हमें आशा है कि उस समय आप यह पाएंगे कि इस इकाई का अध्ययन आपने व्यर्थ नहीं किया!

आइए, अब हम इस इकाई के उद्देश्यों की सूची बनाएं।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप निम्नलिखित असमिकाओं को सिद्ध तथा प्रयोग कर सकेंगे :

- माध्यों की असमिका;
- त्रिभुज असमिका;
- कौशी-श्वार्त्ज़ (बुन्याकोव्स्की) असमिका;
- वायर्स्ट्रास असमिकाएं;
- चेबीचेव असमिकाएं।

आइए, हम इन असमिकाओं पर एक-एक करके चर्चा करें।

6.2 प्राचीन काल से ज्ञात असमिकाएं

इस भाग में हम दो ऐसी असमिकाओं पर चर्चा करेंगे जो प्राचीन काल से इस्तेमाल होती आई हैं। लेकिन पहले हम असमिकाओं के कुछ गुण बताएंगे जिनसे शायद आप परिचित हों। ये हैं :

$a, b, c, d \in \mathbf{R}$ के लिए

i) $a \geq b, c \geq 0 \implies ac \geq bc.$

ii) $a \geq b \iff -a \leq -b.$

iii) $a \geq b \Longleftrightarrow \frac{1}{a} \leq \frac{1}{b}$, बशर्ते $a \neq 0, b \neq 0$.

iv) $a \geq b, c \geq d \Longrightarrow a + c \geq b + d$.

v) $a^n \geq b^n, a \geq 0 \Longrightarrow a \geq b$, जहां $n \in N$.

इकाई के उद्देश्यों में उल्लेखित असमिकाओं को सिद्ध करते समय हम इन गुणों का अकसर प्रयोग करेंगे।

आइए, अब हम तीन माध्यों को सम्बद्ध करने वाली असमिका पर विचार करें।

6.2.1 माध्यों की असमिका

अंकगणित का एक महत्वपूर्ण भाग, जो वैबिलोनियाई तथा पाइथागोरस के काल (लगभग छठी शताब्दी ई.पू.) से है, माध्यों या औसतों का सिद्धांत है। औसत के लिए अंग्रेज़ी शब्द "average" लैटिन शब्द "havaria" से आता है जो कि प्राचीन काल में सामान को एक स्थान से दूसरे स्थान तक लाने-ले जाने में हुए नुकसान की क्षतिपूर्ति के लिए दी गई बीमा राशि थी। हम सब "औसत" शब्द से परिचित हैं। वास्तव में, हम सब ने अक्सर संख्याओं के परिमित समुच्चय का औसत अवश्य निकाला होगा, उनको जोड़कर तथा योग को इन संख्याओं की कुल संख्या से भाग देकर। लेकिन यह विभिन्न प्रकार के औसतों में से एक ही है। हम यहां इसके तीन प्रकारों की चर्चा करेंगे। आइए, हम "सामान्य" औसत से आरंभ करें।

परिभाषा : n वास्तविक संख्याओं $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का **समांतर माध्य** (arithmetic mean) (AM) $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ है, अर्थात्, $\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$ है।

उदाहरण के लिए, $\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ तथा 0 का AM $\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0}{3} = \frac{1}{18}$ है।

AM का सांख्यिकी में आंकड़ों के अध्ययन के लिए अक्सर प्रयोग किया जाता है।

एक अन्य प्रकार का औसत गुणोत्तर माध्य है। यदि हम ऐसी धनात्मक संख्याओं के परिमित समुच्चय का माध्य निकालना चाहते हैं जो गुणोत्तर श्रेणी में हों तो उनके लिए यह सर्वोत्तम माध्य है। इस प्रकार, जनसंख्या वृद्धि के अध्ययन के लिए यह माध्य बहुत उपयोगी है। आइए, इस माध्य की परिभाषा पर गौर करें।

परिभाषा : n धनात्मक वास्तविक संख्याओं $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का **गुणोत्तर माध्य** (geometric mean) **(GM)**

$(x_1 . x_2 \ldots x_n)^{1/n}$ है, अर्थात् $\left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{1/n}$ है।

उदाहरण के लिए, 3 तथा 4 का GM $\sqrt{3 \times 4} = \sqrt{12}$ है, तथा 2, 4 तथा 8 का GM $(2 \times 4 \times 8)^{1/3} = 4$ है।

संख्याओं का और एक प्रकार का औसत उनका हरात्मक माध्य होता है जिसकी हम अब परिभाषा देंगे।

परिभाषा : n शून्येतर वास्तविक संख्याओं $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का **हरात्मक माध्य** (harmonic mean) **(HM)**

$\frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$ है।

इस प्रकार $x_1, x_2, \ldots, x_n$ का HM $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_n}$ के AM का प्रतिलोम (inverse) होता है।

उदाहरण के लिए, $-2, \frac{1}{3}$ तथा 7 का HM $\frac{3}{-\frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{7}} = \frac{42}{37}$ है।

जब हम परिवर्तनशील दरों के समुच्चय की औसत दर ज्ञात करना चाहते हैं तो HM सबसे उपयुक्त प्रकार का औसत होता है। अतः किसी ऐसे वाहन का औसत वेग, जो विभिन्न दूरियाँ विभिन्न गति से तय कर रहा हो, ज्ञात करने के लिए यह सबसे अच्छा औसत है।

यहां हम एक टिप्पणी देना चाहेंगे।

टिप्पणी 1 : हम किन्हीं n **वास्तविक** संख्याओं का AM प्राप्त कर सकते हैं। किन्तु GM हम केवल n **धनात्मक** वास्तविक संख्याओं का ही प्राप्त कर सकते हैं, तथा HM केवल n **शून्येतर** वास्तविक संख्याओं का।

अब, आइए हम तीन विभिन्न माध्यों को एक साथ देखें। ऐसा करने के लिए ज़ाहिर है कि हमें धनात्मक वास्तविक संख्याओं तक अपने को सीमित रखना होगा। 2, 4 व 8 का AM क्या है? यह इनके GM से किस प्रकार संबद्ध है? और इनका GM इनके HM से किस प्रकार संबद्ध है? निम्नलिखित परिणाम इन प्रश्नों का उत्तर देता है।

प्रमेय 1 : मान लीजिए $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ धनात्मक वास्तविक संख्याओं का कोई परिमित समुच्चय है, तथा A, G व H क्रमशः इनके समांतर, गुणोत्तर एवं हरात्मक माध्य हैं। तो,

$A \geq G \geq H$,

तथा $A = G = H$ यदि और केवल यदि $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

इस उपपत्ति का श्रेय कौशी को है जिनसे आप पुनः भाग 6.3 में मिलेंगे।

हम इसके उपपत्ति की केवल मोटी रूपरेखा यहाँ पर देंगे।

असमिका $A \geq G$ को पहले आगमन (इकाई 2 देखें) के द्वारा उन n पूर्णांकों के लिए सिद्ध किया जाता है जो 2 की घात हैं। अर्थात् यह सिद्ध होता है कि

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{2^m}}{2^m} \geq (x_1 \; x_2 \ldots, x_{2^m})^{2^{-m}}, m \in N \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

तथा समता सत्य होगी यदि और केवल यदि $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2^m}$

अब किसी दिए हुए $n \in N$ के लिए, हम सदैव $r \in N$ इस प्रकार चुन सकते हैं कि $2^r > n$. हम (1) को 2^r संख्याओं $x_1, x_2, \ldots, x_n, A, \ldots, A$, जहां A की संख्या $2^r - n$ है, पर लागू करते हैं। हम पाते हैं कि

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n + A + A + \ldots + A}{2^r} \geq (x_1 x_2 \ldots x_n . A \ldots A^2)^{-r}$$

(जहां समता होगी यदि और केवल यदि $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = A$.

$\Longrightarrow \dfrac{nA + (2^r - n)A}{2^r} \geq (G^n A^{(2^r-n)})^{2^{-r}}$, चूँकि $\sum_{i=1}^{n} x_i = nA$.

$\Longrightarrow A^{2^r} \geq G^n A^{2^r - n}$

$\Longrightarrow A^n \geq G^n$

$\Longrightarrow A \geq G$, चूँकि A तथा G धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं।

नोट कीजिए कि $A = G$, यदि और केवल यदि $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
इस प्रकार, यह परिणाम $\forall n \in N$ के लिए सत्य है।

आइए, अब हम n धनात्मक संख्याओं $\dfrac{1}{x_1}, \dfrac{1}{x_2}, \ldots, \dfrac{1}{x_n}$ पर विचार करें। चूँकि इनका AM इनके GM से बड़ा अथवा बराबर है, हम पाते हैं कि

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) \geq \left(\frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{x_n}\right)^{1/n}$$

$\Longrightarrow \dfrac{1}{H} \geq \dfrac{1}{G} \Longrightarrow G \geq H$

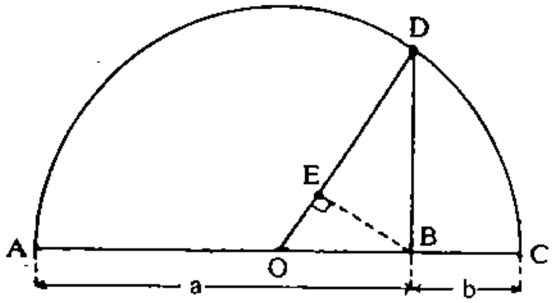
नोट कीजिए कि $H = G$ होगा यदि और केवल यदि

$\dfrac{1}{x_1} = \dfrac{1}{x_2} = \ldots = \dfrac{1}{x_n}$, अर्थात् $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

इस प्रकार $A \geq G \geq H$, जहां समता होगी यदि और केवल यदि $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.

लगभग 320 ई. में ऐलेक्ज़ेंड्रिया के पापस (Pappus) ने दो संख्याओं के AM, GM तथा HM की ज्यामितीय रचना बताई। उनकी रचना निम्नलिखित है :

$a + b$ व्यास का एक अर्धवृत्त खींचिए (चित्र 1 देखें)। मान लीजिए इसका व्यास AC है जिसका मध्य बिन्दु O है।



चित्र 1 : a तथा b के AM, GM तथा HM क्रमशः DO, BB तथा DE हैं।

तो OA वृत्त की त्रिज्या है। AC पर एक बिन्दु B इस प्रकार चुनिए कि $AB = a$, तो $BC = b$. $BD \perp AC$ इस प्रकार खींचिए कि अर्धवृत्त से D पर मिले। चित्र 1 के अनुसार $BE \perp DO$ खींचिए। तब पापस ने सिद्ध किया कि

DO, a तथा b का AM है,
DB, a तथा b का GM है,
DE, a तथा b का HM है।

चूँकि $DO \geq DB \geq DE$, यह हमें प्रमेय 1 की ज्यामितीय उपपत्ति देती है, जबकि $n = 2$ हो।

आइए, अब हम प्रमेय 1 का प्रयोग कुछ और असमिकाओं को सिद्ध करने के लिए करें।

उदाहरण 1 : दिखाइए कि $(\sum_{i=1}^{n} i^r)^n > n^n (n!)^r$, जहां $n!$ क्रमगुणित (factorial) n को निरूपित करता है तथा $r > 0$ है।

हल : मान लीजिए r एक स्थिर धनात्मक वास्तविक संख्या है। n धनात्मक संख्याएं $1^r, 2^r, \ldots, n^r$ लीजिए। प्रमेय 1 से,

$$\frac{1^r + 2^r + \ldots + n^r}{n} \geq (1^r\ 2^r \ldots n^r)^{1/n} = ((n!)^r)^{1/n}$$

चूँकि संख्याएं $1^r, 2^r, \ldots, n^r$ समान नहीं हैं, इनका AM इनके GM से बड़ा है। इस प्रकार,

$$\frac{(1^r + 2^r + \ldots + n^r)^n}{n} > (n!)^r$$

$$\Longrightarrow (\sum_{i=1}^{n} i^r)^n > n^n (n!)^r$$

हम प्रमेय 1 का प्रयोग करके बहुत सी ऐसी असमिकाएं सिद्ध कर सकते हैं जो गणित में विशेष रूप से उपयोगी हैं। निम्नलिखित प्रश्नों में हम आपसे इनमें से कुछ सिद्ध करने को कहेंगे।

E 1) दिखाइए कि $(ab + xy)(ax + by) \geq 4ab\,xy$, जहाँ a, b, x, y धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं। a, b, x, y पर किन प्रतिबंधों के अधीन यह एक समता होगी?

E 2) किसी $n \in N$ तथा धनात्मक वास्तविक संख्याओं x तथा y के लिए, दिखाइए कि

क) $[xy^n]^{1/n+1} \leq \dfrac{x + ny}{n+1}$,

ख) $\left[1 + \dfrac{1}{n}\right]^n < \left[1 + \dfrac{1}{n+1}\right]^{n+1}$

ग) $\left[1 + \dfrac{1}{m}\right]^m < \left[1 + \dfrac{1}{n}\right]^n$, जहां $m \in N$ इस प्रकार है कि $m < n$.

E 3) यदि हम यह शर्त हटा दें कि संख्याएं धनात्मक हैं, तो क्या प्रमेय 1 सत्य होगी? क्यों?

अब, आप जानते हैं कि प्रमेय 1 में असमिकाएं समिकाएं बन जाती हैं जब $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ जब ऐसा होता है तो $x_i = A = G = H, \forall\ i = 1, \ldots, n$. इस प्रकार हम देखते हैं कि

> यदि $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ऐसी n धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं कि $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ अचर है, तो उनके समांतर माध्य का मान न्यूनतम हो जाता है तथा उनके गुणोत्तर माध्य का मान अधिकतम हो जाता है जब $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = A = G$ हो।

आइए, देखें कि कुछ अधिकतम व न्यूनतम मानों को प्राप्त करने के लिए इस तथ्य का कैसे उपयोग किया जाए। सुविधा के लिए हम धनात्मक वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को $\mathbf{R}^+$ से निरूपित करेंगे।

उदाहरण 2 : xyz का अधिकतम मान ज्ञात कीजिए, जहां $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ पर निम्नलिखित प्रतिबंध लागू है :

$yz + zx + xy = 12.$

हल : xyz का मान अधिकतम होगा जब $(xyz)^2 = (yz)(zx)(xy)$ का मान अधिकतम हो। चूँकि $yz + zx + xy$ एक स्थिरांक है, हम जानते हैं कि $(yz)(zx)(xy)$, का मान तब अधिकतम होगा जब $yz = zx = xy$, अर्थात्, जब $x = y = z$ हो।
और तब $yz + zx + xy = 12 \Rightarrow x = y = z = 2.$
अतः xyz का अधिकतम मान $2^3 = 8$ होगा।

उदाहरण 3: यदि किसी त्रिभुज की तीनों भुजाओं का योग अचर 2s हो, तो सिद्ध कीजिए कि उसका क्षेत्रफल तब अधिकतम होगा जब वह एक समबाहु त्रिभुज हो।

हल : मान लीजिए a, b, c त्रिभुज की तीन भुजाएं हैं, जहां

$a + b + c = 2s.$

तथा मान लीजिए Δ त्रिभुज का क्षेत्रफल निरूपित करता है।

तब $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

इसलिए, Δ तब अधिकतम होगा जब $(s-a)(s-b)(s-c)$ अधिकतम हो।
अब, $(s-a) + (s-b) + (s-c) = s$, एक अचर।
इस प्रकार, $(s-a)(s-b)(s-c)$ अधिकतम तब होगा जब
$s - a = s - b = s - c$, अर्थात्, $a = b = c$.
अतः क्षेत्रफल तब अधिकतम होगा जब त्रिभुज एक समबाहु त्रिभुज हो।

अब, आप इन प्रश्नों को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 4) क) सिद्ध कीजिए कि यदि दो धनात्मक संख्याओं का योग दिया हो तो उनका गुणनफल तब अधिकतम होगा जब वे बराबर हों।
ख) क्या (क) सत्य होगा यदि "योग" तथा "गुणनफल" शब्दों को आपस में बदल दिया जाए? क्यों?

E 5) $(5 + x)^3 (5 - x)^4$ का $-5 < x < 5$ के लिए अधिकतम मान ज्ञात कीजिए।
(संकेत : $(5 + x)^3 (5 - x)^4$ का मान अधिकतम तब होगा जब
$\left(\frac{5+x}{3}\right)^3 \left(\frac{5-x}{4}\right)^4$ का मान अधिकतम हो।)

E 6) यदि एक षट्फलक (cuboid) की विमाएं x, y तथा z, इस प्रकार हों कि $x + y + z$ अचर हो, तो उसका आयतन कब अधिकतम होगा?

E 7) विमाओं पर कौन से प्रतिबंध लगाने पर एक स्थिर आयतन के षट्फलक का पृष्ठीय क्षेत्रफल न्यूनतम होगा?
(**संकेत** : असमिका $G \geq H$ का प्रयोग करें।)

अधिकतम मान प्राप्त करने की अन्य विधियों का अध्ययन आप हमारे कलन के पाठ्यक्रम में कर सकते हैं।

प्रमेय 2 : यदि $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$ ऐसे हों कि इनमें से सब बराबर नहीं हैं तथा $m \in \mathbf{Q}$, $m \neq 0, m \neq 1$, तब

$$\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots\ldots + x_n^m}{n} \leq \left[\frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}\right]^m, \text{ यदि } 0 < m < 1 \text{ और}$$

$$\frac{x_1^m + x_2^m + \ldots\ldots + x_n^m}{n} \geq \left[\frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}\right]^m, \text{ यदि } m < 0 \text{ या } m > 1.$$

इस परिणाम की उपपत्ति में प्रमेय 1 का प्रयोग होता है। हम इसको यहां नहीं देंगे।

प्रमेय 2 (तथा प्रमेय 1) से निम्नलिखित परिणाम भी प्राप्त होता है।

> यदि $x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n = c$, एक अचर,
>
> तो $0 < m < 1$ के लिए $\sum_{i=1}^{n} x_i^m$ का अधिकतम मान $n^{1-m} c^m$ है, तथा
>
> $m < 0$ या $m > 1$ के लिए $\sum_{i=1}^{n} x_i^m$ का न्यूनतम मान $n^{1-m} c^m$ है।
>
> ये मान तब प्राप्त होते हैं जब $x_1 = x_2 = \ldots\ldots = x_n$.

हम इस परिणाम को भी इस पाठ्यक्रम में सिद्ध नहीं करेंगे। किन्तु, कुछ अधिकतम व न्यूनतम मानों के प्राप्त करने में इसके उपयोग के एक उदाहरण पर विचार करते हैं।

उदाहरण 4 : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ का न्यूनतम मान प्राप्त कीजिए,

जहां $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ तथा $x + y + z = 27$.

हल : $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, $x^m + y^m + z^m$ के रूप का है, जहां $m = -1 < 0$.

चूंकि $x + y + z = 27$, न्यूनतम मान तब प्राप्त होता है जब $x = y = z$.
और तब $x + y + z = 27$ हमें $x = y = z = 9$ देता है।

इस प्रकार, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ का न्यूनतम मान $\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{1}{3}$ है।

नोट कीजिए कि असमिका $G \geq H$ (प्रमेय 1 की) का प्रयोग करके भी हम यह उत्तर प्राप्त कर सकते थे, ठीक उसी प्रकार जैसे E 7 के हल में।

अब कुछ प्रश्न।

E 8) दर्शाइए कि पहली n सम संख्याओं की mवीं घातों का योग $n(n+1)^m$ से बड़ा है, यदि $m > 1$.

E 9) दर्शाइए कि $\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots\ldots + \sqrt{n} < n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$, जहां $n \in \mathbf{N}$.

E 10) मान लीजिए $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n \in \mathbf{R}^+$ तथा $p, q \in \mathbf{N}$ इस प्रकार हैं कि $p > q$. दर्शाइए कि

$a_1^q + a_2^q + \ldots\ldots a_n^q < n^{p-q} (a_1^p + a_2^p \ldots\ldots + a_n^p)$.

(संकेत : प्रमेय 2 में $m = -\frac{q}{p}$, $x_i = a_i^p$ रखिए।)

अभी तक हमने उन विभिन्न असमिकाओं की चर्चा की जो समांतर, गुणोत्तर व हरात्मक माध्यों से संबद्ध थी। अब, आइए एक ऐसी असमिका पर विचार करें जिसका उद्गम प्राचीन यूनानी ज्यामिती से है।

6.2.2 त्रिभुज असमिका

यदि आप प्राचीन यूनानी गणितज्ञ यूक्लिड (Euclid) की "एलीमेंट्स" के किसी अनुवाद को देखें तो आप पाएंगे कि पुस्तक 1 का साध्य (proposition) 20 कहता है कि
"किसी त्रिभुज में, किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।"

यह परिणाम त्रिभुज असमिका का आधार है जो कि संख्याओं के निरपेक्ष मान के बारे में है।

याद कीजिए कि $x \in \mathbf{R}$ का निरपेक्ष मान निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

$$|x| = x, \text{ यदि } x \geq 0$$
$$= -x, \text{ यदि } x < 0.$$

इस प्रकार, यह निम्नलिखित गुणों को संतुष्ट करता है

i) $|x| = |-x| \ \forall \ x \in \mathbf{R}$, तथा

ii) $x \leq |x| \ \forall \ x \in \mathbf{R}$.

वास्तविक संख्याओं के निरपेक्ष मान का अधिक विस्तृत अध्ययन आप हमारे कलन के पाठ्यक्रम में कर सकते हैं।

आइए, अब हम त्रिभुज असमिका का उल्लेख करें।

प्रमेय 3 : मान लीजिए $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n \in \mathbf{R}$. तब
$|x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots\ldots + |x_n|$.
और, समता तभी होगी जब कि सभी शून्येतर x_i के चिन्ह समान हों।

उपपत्ति : पहले हम इस परिणाम को $n = 2$ के लिए सिद्ध करते हैं।
अब

$$(|x_1 + x_2|)^2 = (x_1 + x_2)^2, \text{ चूँकि } |x|^2 = x^2 \ \forall \ x \in \mathbf{R}$$
$$= x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2$$
$$\leq |x_1|^2 + 2|x_1||x_2| + |x_2|^2, \text{ चूँकि } x \leq |x| \ \forall \ x \in \mathbf{R}$$
$$= (|x_1| + |x_2|)^2$$

अब हम दोनों ओर वर्गमूल यह ध्यान में रखकर लेंगे कि $|x| \geq 0 \ \forall x \in \mathbf{R}$. हम पाते हैं कि $|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|$, जो हम सिद्ध करना चाहते थे।

नोट कीजिए कि यदि $x_1 < 0, x_1 = -a$ (मान लीजिए), तथा $x_2 > 0, x_2 = b$ (मान लीजिए), जहाँ $a, b > 0$, तब

$|x_1 + x_2| = |b - a|$, जबकि $|x_1| + |x_2| = a + b$.

इस प्रकार, जब x_1 तथा x_2 के चिह्न विपरीत हों तब

$|x_1 + x_2| < |x_1| + |x_2|$.

अतः प्रमेय 3, $n = 2$ के लिए सत्य है।

अब आइए इस परिणाम को व्यापक स्थिति में आगमन द्वारा सिद्ध करें। अतः मान लीजिए $n > 2$ तथा यह मान लीजिए कि प्रमेय 3 किन्हीं $n - 1$ संख्याओं के लिए सत्य है। अब

$$|x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n| = |(x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{n-1}) + x_n|$$
$$\leq |x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_{n-1}| + |x_n|$$
$$\leq |x_1| + |x_2| + \ldots\ldots + |x_{n-1}| + |x_n|, \text{ चूँकि परिणाम}$$
$n - 1$ संख्याओं के लिए सत्य है।

इस प्रकार, $|x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots\ldots + |x_n| \ \forall \ n \in \mathbf{N}$.
आगे, जैसा कि हमने $n = 2$ के लिए दर्शाया, यदि सभी शून्येतर x_i का एक सा चिहन न हो, तो हमें समता नहीं प्राप्त हो सकती।

प्रमेय 3 केवल वास्तविक संख्याओं के लिए ही सत्य नहीं है। अपने रैखिक बीजगणित के पाठ्यक्रम में हमने सिद्ध किया है कि यदि

$z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_n \in \mathbf{C}$ तो

$|z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_n| \leq |z_1| + |z_2| + \ldots\ldots + |z_n|$,

जहां $|z|$, z का मापांक है।

आइए, हम संख्याओं $-2, 1, 5, 0$ के लिए प्रमेय 3 की जाँच करें।

चूँकि $|-2+1+5+0| = |4|$ तथा

$|-2|+|1|+|5|+|0| = 2+1+5+0 = 8$

हम पाते हैं कि प्रमेय 3 की असमिका यहाँ पर समता नहीं है। नोट कीजिए कि —2 तथा 1 के चिह्न विपरीत हैं।

अब आप कुछ प्रश्नों को हल कीजिए।

E 11) n संख्याओं के AM का निरपेक्ष मान उनके निरपेक्ष मानों के AM से कम अथवा बराबर होगा। सत्य या असत्य? क्यों?

E 12) सिद्ध या असिद्ध कीजिए कि
$|x-y| \le |x| - |y| \; \forall \; x, y \in \mathbf{R}$.
(किसी कथन को असिद्ध करने के लिए यह दर्शाना होगा कि यह असत्य है। खंड 1 का परिशिष्ट देखें।)

E 13) सिद्ध या असिद्ध कीजिए कि
$|x-y| \ge ||x| - |y|| \; \forall \; x, y \in \mathbf{R}$.
(संकेत : $|x| = |(x-y)+y|$ लिखिए, तथा इस तथ्य का उपयोग कीजिए कि $|x| = |-x| \; \forall \; x \in \mathbf{R}$.)

आइए अब हम कुछ 'नवीनतम' असमिकाओं पर चर्चा करें।

6.3 कम प्राचीन असमिकाएं

इस भाग में हम चार महत्वपूर्ण असमिकाओं की चर्चा करेंगे जिनकी खोज 19वीं शताब्दी के कुछ महान गणितज्ञों ने की थी। हम ऐसी असमिका से प्रारंभ करेंगे जिसका श्रेय तीन गणितज्ञों को है।

चित्र 2 : कौशी (1789-1857)

6.3.1 कौशी-श्वार्त्ज़ (Cauchy-Schwarz) असमिका

विख्यात फ्रांसीसी गणितज्ञ ऑगस्टीन लुई कौशी ने अनंत श्रेणी, फलन सिद्धांत, अवकल समीकरण, सारणिकों, प्रायिकता तथा गणित के अन्य क्षेत्रों का विकास किया। उनका एक योगदान वह परिणाम था जिसका व्यापकीकरण जर्मन गणितज्ञ एच.ए.श्वार्त्ज़ (1848-1921) ने किया। अब हम इस परिणाम का उल्लेख करेंगे, जिसे रूस के गणितज्ञ बुन्याकोव्स्की ने भी स्वतंत्र रूप से सिद्ध किया था।

प्रमेय 4 (कौशी-श्वार्त्ज़ असमिका) : मान लीजिए $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$. तब

$[a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n]^2 \le (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)$ जहां समता होगी यदि और केवल यदि $a_i = cb_i \; \forall \; i = 1, \ldots, n$, जहाँ c एक स्थिर वास्तविक संख्या है।

जब $a_i = cb_i \; \forall \; i = 1, \ldots, n$ जहाँ c एक अचर है, हम कहते हैं कि n-यक $(a_1, \ldots, a_n)$ तथा $(b_1, \ldots, b_n)$ समानुपातिक हैं।

उपपत्ति : समझने में आपकी सहायता के लिए हम इसे पहले $n = 3$ के लिए सिद्ध करेंगे। फिर आप इसको व्यापकीकृत कर सकते हैं (E 14 देखें)।
अब

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$$
$$= (a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_1^2 - 2a_1a_2b_1b_2) + (a_2^2b_3^2 + a_3^2 b_2^2 - 2a_2a_3b_2b_3) + (a_3^2 b_1^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_3a_1b_3b_1)$$
$$= (a_1b_2 - a_2b_1)^2 + (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2$$
$$\ge 0.$$

इसमें समता कब होगी? समता होगी यदि और केवल यदि
$a_1b_2 - a_2b_1 = 0, a_2b_3 - a_3b_2 = 0,$ तथा $a_3b_1 - a_1b_3 = 0$. अर्थात् $a_1 = cb_1, a_2 = cb_2, a_3 = cb_3$ किसी स्थिर वास्तविक संख्या c के लिए।

इस प्रकार हमने $n = 3$ के लिए इस परिणाम को सिद्ध कर दिया है। अब, प्रमेय 4 की उपपत्ति को पूर्ण करने के लिए आप यह प्रश्न करें।

E 14) प्रमेय 4 को किसी $n \in N$ के लिए सिद्ध कीजिए।

आइए, अब हम बहुपद के मूलों का पता लगाने के लिए प्रमेय 4 के एक अनुप्रयोग पर विचार करें। आगे बढ़ने से पहले, आप इकाई 3 को संदर्भ के लिए अपने पास रख लीजिए।

प्रमेय 5 : यदि वास्तविक बहुपद समीकरण

$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots\ldots + a_n = 0$

के सभी मूल वास्तविक हैं तो वे $\frac{-a_1}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \left(\frac{2n}{n-1}\right)a_2}$ तथा

$\frac{-a_1}{n} + \frac{(n-1)}{n}\sqrt{a_1^2 - \left(\frac{2n}{n-1}\right)a_2}$ के बीच होंगे।

उपपत्ति : इकाई 3 के प्रमेय 1 से आप जानते हैं कि दी गई समीकरण के n मूल हैं। मान लीजिए x एक मूल है। यदि $x_1, \ldots\ldots, x_{n-1}$ अन्य मूल हैं तो इकाई 3 के प्रमेय 4 से

$x + x_1 + \ldots\ldots + x_{n-1} = -a_1.$

$\Longrightarrow (a_1 + x)^2 = (x_1 + \ldots\ldots + x_{n-1})^2$

$\leq [1^2 + 1^2 + \ldots\ldots + 1^2]\ [x_1^2 + \ldots\ldots + x_{n-1}^2]$, $(n-1)$ बार

प्रमेय 4 से।

और, इकाई 3 के प्रमेय 4 से

$x^2 + x_1^2 + \ldots\ldots + x_{n-1}^2 = a_1^2 + 2a_2.$

$\therefore [a_1 + x]^2 \leq (n-1)(a_1^2 - 2a_2 - x^2)$

$\Longrightarrow nx^2 + 2a_1x - (n-2)a_1^2 + 2a_2(n-1) \leq 0.$

$$\Longrightarrow \left[x - \left\{\frac{-a_1}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \left(\frac{2n}{n-1}\right)a_2}\right\}\right]$$

$$\left[x - \left\{\frac{-a_1}{n} - \frac{(n-1)}{n}\sqrt{a_1^2 - \left(\frac{2n}{n-1}\right)a_2}\right\}\right] \leq 0,$$ द्विघाती सूत्र से।

यह x के उन सभी मानों के लिए सत्य है, जिनके लिए

$$\frac{-a_1}{n} - \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \left(\frac{2n}{n-1}\right)a_2} \leq x \leq \frac{-a_1}{n} + \frac{n-1}{n}\sqrt{a_1^2 - \left(\frac{2n}{n-1}\right)a_2}.$$

इस प्रकार, दिए गए बहुपद समीकरण के मूल, प्रमेय के कथन में दिए गए बंधों के बीच होना चाहिए।

प्रमेय 5 के प्रयोग का उदाहरण देने से पहले हम कुछ संबंधित टिप्पणियां देंगे।

टिप्पणी 2 : बहुपद समीकरण $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots + a_nx^n = 0$, जहां $a_i \in Z\ \forall\ i = 0, \ldots\ldots, n$ तथा $a_n \neq 0$, पर विचार कीजिए। इस समीकरण का कोई परिमेय मूल $\frac{d}{a_n}$ के रूप का होता है, जहां d, a_0 का एक गुणनखंड है।

टिप्पणी 3 : त्रिघातों के लिए, हम विविक्तकर (भाग 3.3.2) से जानते हैं कि, सारे मूल कब वास्तविक होते हैं। और तब प्रमेय 5 बहुत उपयोगी हो सकता है, विशेषकर यदि हम जानते हों कि मूल परिमेय संख्याएं हैं।

आइए, अब हम प्रमेय 5 के उपयोग के एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 5 : $x^3 - 23x^2 + 167x - 385 = 0$ को हल कीजिए।

हल : इस समीकरण का विविक्तकर (भाग 3.3.2 देखें) धनात्मक है। अतः दी गई समीकरण के तीन भिन्न वास्तविक मूल हैं।

यदि मूल परिमेय संख्या हों, तो ये -385 के पूर्णांकीय गुणनखंड होंगे। इस प्रकार, ये समुच्चय $\{\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 11, \pm 35, \pm 55, \pm 77, \pm 385\}$ के सदस्य होंगे।

किन्तु, प्रमेय 5 से मूल $\frac{23}{3} - \frac{4}{3}\sqrt{7}$ तथा $\frac{23}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{7}$ के बीच होने चाहिए। इस प्रकार, यदि वे परिमेय हैं तो वे केवल 5, 7, 11 हो सकते हैं। इन मानों को समीकरण में रखने पर हम पाते हैं कि ये वाकई में दी गई समीकरण के मूल हैं। और, आप जानते हैं कि इस समीकरण के केवल 3 मूल हो सकते हैं। अतः 5, 7 और 11 ही मूल हैं।

अब आप स्वयं प्रमेय 5 को प्रयोग करने का प्रयास करें।

E 15) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ को हल कीजिए।

अब आइए, हम प्रमेय 4 के उपयोग का अन्य उदाहरण देखें। इस उदाहरण में हम इच्छित असमिका प्राप्त करने के लिए कौशी-श्वार्त्ज़ असमिका का दो बार प्रयोग करेंगे।

उदाहरण 6 : मान लीजिए $x, y, z \in \mathbf{R}^+$ इस प्रकार के हैं कि $x^2 + y^2 + z^2 = 27$, तो दर्शाइए कि $x^3 + y^3 + z^3 \geq 81$.

हल : पहले हम प्रमेय 4 को वास्तविक संख्याओं के दो निम्नलिखित त्रिकों पर लागू करते हैं:
$(x^{3/2}, y^{3/2}, z^{3/2})$ तथा $(x^{1/2}, y^{1/2}, z^{1/2})$
हम पाते हैं कि
$[x^{3/2}x^{1/2} + y^{3/2}y^{1/2} + z^{3/2}z^{1/2}]^2 \leq (x^3 + y^3 + z^3)(x + y + z)$,
अर्थात् $(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq (x^3 + y^3 + z^3)(x + y + z)$ .... (2)
अब हम त्रिकों (x, y, z) तथा $(1, 1, 1)$ पर कौशी-श्वार्त्ज़ असमिका का इस्तेमाल करते हैं। हम पाते हैं कि

$(x.1 + y.1 + z.1)^2 \leq (x^2 + y^2 + z^2)(1^2 + 1^2 + 1^2)$
अर्थात, $(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$
$= 81$
$\Longrightarrow x + y + z \leq 9$
इस प्रकार, (2) से
$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq 9(x^3 + y^3 + z^3)^2$
किन्तु $x^2 + y^2 + z^2 = 27$.
इस प्रकार, $(x^3 + y^3 + z^3) \geq \left(\frac{27^2}{9}\right)$,
अर्थात् $x^3 + y^3 + z^3 \geq 81$.
अब आप कुछ प्रश्नों को हल करने का प्रयास करें।

E 16) यदि $a, b, x, y \in \mathbf{R}$ ऐसे हों कि $a^2 + b^2 = 1$ तथा $x^2 + y^2 = 1$, तो सिद्ध कीजिए कि $ax + by \leq 1$.

E 17) सिद्ध कीजिए कि यदि $a_1, \ldots\ldots, a_n \in \mathbf{R}^+$, तो

क) $(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geq n^2$

ख) $(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2)$

ग) $[\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2} + \ldots\ldots + \sqrt{a_n}]^2 \leq n(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)$.

E 18) (त्रिभुज असमिका का एक अन्य रूप) यदि $a, b, x, y \in \mathbf{R}$, तो दिखाइए कि

$\sqrt{(a-b)^2 + (x-y)^2} \leq \sqrt{a^2 + x^2} + \sqrt{b^2 + y^2}$

(**संकेत :** $(a-b)^2 + (x-y)^2 = (a^2 + x^2) + (b^2 + y^2) - 2(ab + xy)$ लिखिए और

तब (a, x) तथा (b, y) पर प्रमेय 4 लागू कीजिए।)

E 19) यदि $x, y, z \in \mathbf{R}^*$ ऐसे हों कि $x^3 + y^3 + z^3 = 81$, तो सिद्ध कीजिए कि $x + y + z \leq 9$.

E 20) प्रमेय 4 के निम्नलिखित व्यापकीकरण को सिद्ध या असिद्ध कीजिए:
मान लीजिए $p \in \mathbf{N}, p \neq 1$ तथा $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$, तब
$[a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots, a_nb_n]^p \leq [a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p].[b_1^p + b_2^p + \ldots b_n^p]$

चित्र 3 : कार्ल थियडोर वायर्स्ट्रास

कौशी-श्वार्त्ज़ असमिका के भौतिकी तथा गणित में, विशेषकर आंतर गुणन समष्टियों (inner product spaces) के संदर्भ में, कई उपयोग हैं।

आइए अब हम कुछ और उपयोगी असमिकाओं पर विचार करें।

6.3.2 वायर्स्ट्रास (Weierstrass) असमिकाएं

आमतौर पर समझा जाता है कि एक अच्छे गणितज्ञ ने गणित का गंभीर अध्ययन कम उम्र में शुरू किया होगा। किन्तु, जर्मन गणितज्ञ वायर्स्ट्रास (1815-1897) इस नियम का एक अपवाद हैं। इस महान गणितज्ञ ने गणित का गंभीर अध्ययन चालीस वर्ष की आयु में शुरू किया। उन्होंने विश्लेषण को अधिक परिशुद्ध बनाया, तथा उन्हें "आधुनिक विश्लेषण का पिता" माना जाता है। उनको ही निम्नलिखित परिणाम के लिये श्रेय जाता है।

प्रमेय 6 (वायर्स्ट्रास असमिकाएं) : मान लीजिए $a_1, a_2, \ldots, a_n$, 1 से छोटी धनात्मक वास्तविक संख्याएं हैं तथा $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, तब

i) $1 - s_n \leq (1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n) < \dfrac{1}{1 + s_n}$,

ii) $1 + s_n \leq (1 + a_1)(1 + a_2) \ldots (1 + a_n) < \dfrac{1}{1 - s_n}$, जहां यह माना गया है कि $s_n < 1$.

उपपत्ति : हम (i) को n पर आगमन से, एक सिद्धांत जिससे आपका परिचय हमने इकाई 2 में कराया था, सिद्ध करते हैं।

यदि $n = 1$, तो $s_1 = a_1$, और इस प्रकार $(1 - s_1) = (1 - a_1)$ और चूँकि $0 < a_1^2 < 1$,

$(1 - a_1)(1 + a_1) < 1$, अर्थात् $(1 - a_1) < \dfrac{1}{1 + s_1}$.

इसलिए, $n = 1$ के लिए (i) सत्य है।

मान लीजिए कि (i) $n = m$ के लिए सत्य है, जहाँ $m \in \mathbf{N}$. हम यह देखेंगे कि क्या यह $n = m + 1$ के लिए भी सत्य है।

अब
$$\begin{aligned} s_{m+1} &= a_1 + \ldots + a_{m+1} \\ &= (a_1 + \ldots + a_m) + a_{m+1} \\ &= s_m + a_{m+1} \end{aligned}$$

और, $(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_m) \geq 1 - s_m$, हमारी परिकल्पना से।
इस प्रकार,
$$\begin{aligned} (1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_m)(1 - a_{m+1}) &\geq (1 - s_m)(1 - a_{m+1}) \\ &= 1 - (s_m + a_{m+1}) + s_m a_{m+1} \\ &= 1 - s_{m+1} + s_m a_{m+1} \\ &> 1 - s_{m+1}, \text{ चूँकि } s_m a_{m+1} > 0 \end{aligned}$$

अतः $(1 - a_1) \ldots (1 - a_{m+1}) > 1 - s_{m+1}$ .... (3)

आगे, चूँकि $(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_m) < \dfrac{1}{1 + s_m}$, हमारी परिकल्पना से,

तथा $(1 - a_{m+1}) < \dfrac{1}{1 + a_{m+1}}$,

हम पाते हैं कि

$$(1-a_1)(1-a_2)\ldots\ldots(1-a_{m+1}) < \frac{1}{(1+s_m)(1+a_{m+1})}$$

$$= \frac{1}{1+s_{m+1}+s_m a_{m+1}}$$

$$< \frac{1}{1+s_{m+1}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

(3) तथा (4) को एक साथ लेने पर यह निष्कर्ष निकलता है कि
(i), $n = m + 1$ के लिए भी सत्य है। अतः आगमन से, (i) $\forall\ n \in N$ के लिए सत्य है।

अब उपपत्ति को पूर्ण करने के लिए आप E 21 को हल करने का प्रयास करें।

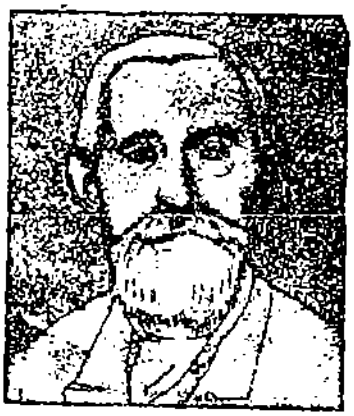
E 21) प्रमेय 6 का (ii) सिद्ध कीजिए।

E 22) $0 < a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n < 1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि

$$1 - \prod_{i=1}^{n} a_i < n - \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

(**संकेत** : $0 < 1 - a_i < 1$.)

E 23) क्या प्रमेय 6 सत्य रहेगा यदि $a_i < 0$ या $a_i > 1$ किसी $i = 1, \ldots\ldots, n$ के लिए? अपने उत्तर का कारण बताइए।



चित्र 4 : चेबीचेव (1821-1894)

जब आप गणितीय विश्लेषण का अध्ययन करेंगे तो आपको ज्ञात होगा कि वायर्स्ट्रास की असमिकाएं तथा उनके व्यापकीकरण कितने उपयोगी हैं।

और अंत में हम एक प्रसिद्ध रूसी गणितज्ञ की कुछ असमिकाओं की चर्चा करेंगे।

3.3.3 चेबीचेव (Tchebychev) असमिकाएं

गणितज्ञ पाफ्न्यूटी एल. चेबीचेव विश्लेषणात्मक संख्या सिद्धांत तथा लाम्बिक बहुपदों के सिद्धांत पर अपने अत्यधिक महत्वपूर्ण कार्य के लिए जाने जाते हैं। यहाँ पर हम ऐसी कुछ असमिकाओं को सिद्ध एवं प्रयोग करेंगे जो उनके नाम पर हैं।

प्रमेय 7 : (चेबीचेव असमिकाएं) : यदि $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n \in \mathbf{R}$ इस प्रकार के हों कि

(i) $a_1 \le a_2 \le \ldots\ldots \le a_n,\ b_1 \le b_2 \le \ldots\ldots \le b_n$, तो
$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n) \ge (a_1 + a_2 + \ldots\ldots a_n)(b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n)$,

(ii) $a_1 \ge a_2 \ge \ldots\ldots \ge a_n,\ b_1 \le b_2 \le \ldots\ldots \le b_n$, तो
$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n) \le (a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n)$.

उपपत्ति : आइए, हम (i) को $n = 3$ के लिए सिद्ध करें ताकि आप उपपत्ति को अधिक आसानी से समझ सकें।

चूंकि $a_1 \le a_2$ तथा $b_1 \le b_2$, हम पाते हैं कि
$(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \ge 0$
अतः $a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$
इसी प्रकार, हम पाते हैं कि
$a_2b_2 + a_3b_3 \ge a_2b_3 + a_3b_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$
$a_3b_3 + a_1b_1 \ge a_3b_1 + a_1b_3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$

(5), (6) व (7) को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$2(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \ge a_1(b_2 + b_3) + a_2(b_3 + b_1) + a_3(b_1 + b_2)$.
अब हम दोनों ओर $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$ जोड़ते हैं। तब सरल करके हम पाते हैं कि
$3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) \ge (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$

किसी $n \in N$ के लिए (i) की उपपत्ति ठीक इसी प्रकार है। आइए, हम इसको आगमन विधि द्वारा n के लिए सिद्ध करें।

यह परिणाम $n = 3$ (और वास्तव में $n = 1$ तथा 2) के लिए सत्य है। हम मान लेते हैं कि $n - 1$ के लिए सत्य है। तो

$$(n-1)(a_1b_1 + \ldots + a_{n-1}b_{n-1}) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{n-1})$$

साथ ही, $a_1b_1 + a_nb_n \geq a_1b_n + a_nb_1$,

चूँकि $(a_1 - a_n)(b_1 - b_n) \geq 0$.

इसी प्रकार, $a_2b_2 + a_nb_n \geq a_2b_n + a_nb_2$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_{n-1}b_{n-1} + a_nb_n \geq a_{n-1}b_n + a_nb_{n-1}$$

इन n असमिकाओं की दायीं पक्षों व बायीं पक्षों को जोड़ने पर हम पाते हैं कि

$$n(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) - a_nb_n \geq (a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n) \times (b_1 + \ldots + b_{n-1} + b_n) - a_nb_n$$

$$\Longrightarrow n(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) \geq (a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n).$$

और अब प्रमेय की उपपत्ति को पूर्ण करने के लिए E 24 को हल करने का प्रयास कीजिए।

E 24) प्रमेय 7 का भाग (ii) सिद्ध कीजिए।
(संकेत : $x_i = -a_i \; \forall \; i = 1, \ldots, n$ रखिए, तथा (i) का प्रयोग कीजिए।)

आइए अब हम चेबीचेव असमिका के एक प्रयोग पर विचार करें।

उदाहरण 7 : दिखाइए कि

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

हल : प्रमेय 7 में $a_i = b_i = \sqrt{i}$ रखिए $\forall \; i = 1, \ldots, n$. तब हम पाते हैं कि

$$n[\sqrt{1}\cdot\sqrt{1} + \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n}\cdot\sqrt{n}] \geq (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n})^2,$$

अर्थात्, $n(1 + 2 + \ldots + n) \geq (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n})^2$,

अर्थात् $n\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right] \geq (\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n})^2$,

चूँकि $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

दोनों ओर का वर्गमूल लेने पर हम पाते हैं कि

$$\sqrt{1} + \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{n} \leq n\sqrt{\frac{n+1}{2}}$$

अब आप कुछ प्रश्न हल करने का प्रयास कर सकते हैं।

E 25) दिखाइए कि

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \ldots + \sqrt{\frac{1}{n}}\right) \leq (2n-1)^{1/4}$$

(संकेत : पहले n-यकों $\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ तथा $\left(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}\right)$ पर चेबीचेव असमिका का प्रयोग कीजिए, इसके बाद इसे पुनः n-यकों $\left(\sqrt{\frac{1}{1}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \ldots, \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ तथा $\left(\sqrt{\frac{1}{1}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \ldots, \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ पर प्रयोग कीजिए।

E-26) यदि $a, b, c \in \mathbf{R}^+$, तो दिखाइए कि

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

(संकेत : यह देखिए कि क्या $b + c, c + a, a + b$ तथा इनके व्युत्क्रमों पर प्रमेय 7 लागू हो सकता है या नहीं।)

इस असमिका के साथ हम इस इकाई के अन्त पर आ गए हैं। इसका यह अर्थ नहीं है कि हमने सारी असमिकाओं पर चर्चा कर ली है। हमने तो सारी महत्वपूर्ण असमिकाओं पर भी चर्चा नहीं की। इस इकाई में हमने केवल कुछ प्रारंभिक असमिकाओं तथा उनके अनुप्रयोगों के बारे में जानकारी दी है। जैसे-जैसे आप गणित का और अध्ययन करेंगे आपके सामने ये तथा बहुत सी अन्य असमिकाएं आएंगी।

अब आइए, हम संक्षिप्त में देखें कि इस इकाई में हमने क्या पढ़ा है।

6.4 सारांश

इस इकाई में हमने अनेकों असमिकाएं तथा उनके प्रयोगों के विषय में चर्चा की है। आइए, हम इन्हें एक-एक करके सूचीबद्ध करें।

1) माध्यों की असमिका : $\mathbf{R}^+$ के अवयवों के किसी परिमित समुच्चय का AM उनके GM से बड़ा अथवा उसके बराबर होगा, और GM उनके HM से बड़ा अथवा बराबर होगा।

2) यदि $x_1, \ldots, x_n \in \mathbf{R}^+$ इस प्रकार के हों कि वे सब बराबर नहीं हैं, तथा $m \in \mathbf{Q}, m \neq 0, 1$, तो

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) \leq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m \text{ यदि } 0 < m < 1, \text{ तथा}$$

$$\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^m\right) \geq \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m \text{ यदि } m < 0 \text{ या } m > 1.$$

3) त्रिभुज असमिका : $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ के लिए

$|x_1 + x_2 + \ldots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

उस स्थिति में जब सब शून्येतर x_i के एक से चिह्न न हों तो समता नहीं हो सकती।

4) कौशी-श्वार्ज़ (या बुन्याकोव्स्की) असमिका :

यदि $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$, तो

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$$

और समता होगी यदि और केवल यदि $(a_1, \ldots, a_n)$ तथा $(b_1, \ldots, b_n)$ समानुपातिक हों।

5) वायरस्ट्रास असमिकाएं : यदि $0 < a_1, \ldots, a_n < 1$ एवं $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$, तो

$$1 - s_n \leq \prod_{i=1}^{n} (1 - a_i) < \frac{1}{1 + s_n},$$

$$1 + s_n \leq \prod_{i=1}^{n} (1 + a_i) < \frac{1}{1 - s_n} \text{ (यहां हमने } s_n < 1 \text{ माना है)।}$$

6) चेबीचेव की असमिकाएं : यदि $(a_1, \ldots, a_n), (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbf{R}^n$ इस प्रकार के हों कि

i) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, तो
$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \geq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$;

ii) $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n, b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$, तो
$n(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n) \leq (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)(b_1 + b_2 + \ldots + b_n)$

हमेशा की तरह हमारा सुझाव है कि आप वापस इस इकाई के प्रारंभ में जाइए तथा देखिए कि क्या आपने उद्देश्यों को प्राप्त कर लिया है। हमने इकाई के प्रश्नों के उत्तर इकाई के अंतिम भाग में दिए हैं। कृपया उनको भी देखें।

इसके साथ हम इस पाठ्यक्रम के अंत पर आ गए हैं। हमें आशा है कि आपको इसे पढ़ने में आनन्द आया होगा तथा आप इसे भविष्य में उपयोगी पाएंगे।

6.5 हल/उत्तर

E 1) धनात्मक वास्तविक संख्याओं ab तथा xy पर असमिका $A \geq G$ का प्रयोग करके हम पाते हैं कि

$ab + xy \geq 2\sqrt{abxy}$ .... (8)

अब हम $A \geq G$ को ax तथा by पर लागू करते हैं तथा यह पाते हैं कि

$ax + by \geq 2\sqrt{abxy}$ .... (9)

(8) और (9) $\implies (ab + xy)(ax + by) \geq 4\sqrt{abxy}\sqrt{abxy} = 4abxy.$

नोट कीजिए कि समता होगी यदि और केवल यदि $ab = xy$ तथा $ax = by$
$\iff a = y$ तथा $b = x$

E 2) क) असमिका $A \geq G$ का प्रयोग $n + 1$ संख्याओं $x, y, y, \ldots, y$ (n बार) करने पर, हम पाते हैं कि

$$\frac{x + ny}{n + 1} \geq [x \cdot y^n]^{\frac{1}{n+1}}$$

ध्यान दें कि समता होगी यदि और केवल यदि $x = y$.

ख) (क) में $x = 1$ तथा $y = 1 + \frac{1}{n}$ रखने पर हम पाते हैं कि

$$\left[1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{\frac{1}{n+1}} < \frac{1 + n\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{n + 1}$$

$$\iff \left[1 \cdot \frac{1}{n}\right]^n < \left[1 + \frac{1}{n}\right]^{n+1}$$

ग) मान लीजिए $m, n \in N$ तथा $m < n$ तब (ख) से

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m < \left(1 + \frac{1}{m+1}\right)^{m+1} < \left(1 + \frac{1}{m+2}\right)^{m+2} < \cdots\cdots < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

जिससे हमें परिणाम प्राप्त होता है।

E 3) नहीं; क्योंकि ऋणात्मक संख्याओं का GM परिभाषित नहीं है। $A \geq H$ भी सत्य नहीं रह जाता है। उदाहरण के लिए, तीन संख्याएं -2, 1 व 3 लीजिए। इनका AM, $\frac{2}{3}$ है तथा इनका

HM, $\frac{3}{-\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{3}} = \frac{18}{5}$ है, और $\frac{2}{3} \not\geq \frac{18}{5}$

E 4) क) मान लीजिए $x, y \in R^+$ इस प्रकार के हैं कि $x + y = c$, एक अचर। तब, xy अधिकतम होगा जब $\sqrt{xy}$ अधिकतम हो, अर्थात् जब $x = y$.

ख) नहीं। उदाहरण के लिए, मान लीजिए $x, y \in R^+$ इस प्रकार के हैं कि $xy = 1$. यदि $x = y$, तो $x = 1 = y$. और तब $x + y = 2$. किन्तु यह $x + y$ का अधिकतम मान नहीं है, चूँकि $x = 5$, $y = \frac{1}{5}$, उदाहरण के लिए, $x + y$ का इससे बड़ा मान देते हैं।

E 5) चूँकि $-5 < x < 5$, $5 + x > 0$ तथा $5 - x > 0$. चूँकि $3\left(\frac{5+x}{3}\right)+4\left(\frac{5-x}{4}\right)=10$,

एक अचर, इसलिए $\left(\frac{5+x}{3}\right)^3\left(\frac{5-x}{4}\right)^4$ का मान अधिकतम तब होगा जब

$\frac{5+x}{3}=\frac{5-x}{4}$,

अर्थात् जब $x = -\frac{5}{7}$.

इस प्रकार, $(5+x)^3(5-x)^4$ अधिकतम होगा जब $x = -\frac{5}{7}$.

E 6) मान लीजिए $x + y + z = c$.
षट्फलक का आयतन xyz है। यह अधिकतम होगा जब $x = y = z$ हो, क्योंकि $x + y + z = c$. अतः दिए गए प्रतिबंधों के अधीन, घन अधिकतम आयतन का षट्फलक है।

E 7) मान लीजिए x, y तथा z एक षट्फलक की विमाएं हैं, जहाँ $xyz = c$, एक अचर।
अब, षट्फलक का पृष्ठीय क्षेत्रफल $2(xy + yz + zx)$ है। यह न्यूनतम होगा जब $xy + yz + zx$ न्यूनतम हो, अर्थात्, जब $xyz\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right]$ न्यूनतम हो।

अब $xyz = c$ तथा x, y, z का HM $\dfrac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$ है।

प्रमेय 1 से हम जानते हैं कि HM अधिकतम होता है जब $x = y = z$. अतः,
$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ न्यूनतम होगा जब $x = y = z$.
अतः, एक स्थिर आयतन वाले षट्फलक का पृष्ठीय क्षेत्रफल तब न्यूनतम होगा जब षट्फलक एक घन हो।

E 8) हम n संख्याओं $2, 4, 6, \ldots, 2n$ पर प्रमेय 2 लागू करते हैं। हम पाते हैं कि

$$\frac{2^m + 4^m + 6^m + \ldots + (2n)^m}{n} > \left[\frac{2+4+6+\ldots+2n}{n}\right]^m$$
$$= 2^m\left[\frac{1+2+\ldots+n}{n}\right]^m$$
$$\Longleftrightarrow 2^m + 4^m + \ldots + (2n)^m > n \,.\, 2^m\left[\frac{n(n+1)}{2n}\right]^m, \text{ चूँकि } \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$
$$= n(n+1)^m$$

E 9) $1, 2, \ldots, n$ पर प्रमेय 2 लागू करने पर हम पाते हैं कि

$$\frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{n}}{n} < \sqrt{\frac{n(n+1)}{2n}}$$

इस प्रकार हमें इच्छित परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E 10) $m = \frac{q}{p}$ रखिए। तब $0 < m < 1$. अब हम n धनात्मक संख्याओं $a_1^p, a_2^p, \ldots, a_n^p$ पर प्रमेय 2 लागू करते हैं। हम पाते हैं कि

$$\frac{(a_1^p)^m + (a_2^p)^m + \ldots + (a_n^p)^m}{n} \le \left[\frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n}\right]^m$$
$$\Longleftrightarrow \frac{a_1^q + a_2^q + \ldots + a_n^q}{n} \le \left[\frac{a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p}{n}\right]^{q/p}$$
$$\Longleftrightarrow a_1^q + a_2^q + \ldots + a_n^q \le [n^{p-q}]^{1/p}[a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p]^{q/p}$$
$$< n^{p-q}[a_1^p + a_2^p + \ldots + a_n^p],$$
$$\text{चूँकि } \frac{1}{p} < 1 \text{ तथा } \frac{q}{p} < 1.$$

E 11) मान लीजिए $x_1, \ldots\ldots, x_n$, n संख्याएं हैं।

उनका AM, $A = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$

$\therefore |A| = \left|\dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}\right| \le \dfrac{|x_1| + |x_2| + \ldots\ldots + |x_n|}{n}$, प्रमेय 3 से

$= |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|$ का AM.

अत: कथन सत्य है।

E 12) असत्य। उदाहरण के लिए, $x = 1$ तथा $y = -3$ लीजिए।

तब $|x - y| = |4| = 4$,

तथा $|x| - |y| = 1 - 3 = -2$.

E 13) $|x| = |(x - y) + y| \le |x - y| + |y|$

$\therefore |x| - |y| \le |x - y|$ ....(10)

इसी प्रकार, $|y| = |x + (y - x)| \le |x| + |y - x|$

$= |x| + |x - y|$, चूँकि $|x| = |-x|$.

इसलिए, $|y| - |x| \le |x - y|$ ....(11)

(10) तथा (11) $\Longrightarrow ||x| - |y|| \le |x - y|$.

E 14) $(a_1^2 + \ldots\ldots + a_n^2)(b_1^2 + \ldots\ldots + b_n^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n)^2$

$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \ne j}}^{n} (a_ib_j - a_jb_i)^2 \ge 0$$

यह समता होगी यदि और केवल यदि $a_ib_j = a_jb_i \; \forall \; i, j = 1, \ldots\ldots, n, i \ne j$

अर्थात्, यदि और केवल यदि $\dfrac{a_i}{b_i} = \dfrac{a_j}{b_j} \; \forall \; i \ne j$

अर्थात्, यदि और केवल यदि $a_i = cb_i \; \forall \; i = 1, \ldots\ldots, n$ जहाँ c एक अचर है।

E 15) समीकरण का विविक्तकर धनात्मक है। अत: समीकरण के तीन अलग-अलग वास्तविक मूल होंगें। वे $\frac{2}{3}(1 - \sqrt{7})$ तथा $\frac{2}{3}(1 + \sqrt{7})$ के बीच में पड़ेंगे। अगर वे परिमेय हैं तो उन्हें 2 का गुणनखंड होना आवश्यक है। अत: वे 1, − 1, 2 या − 2 हो सकते हैं। इनमें से ± 1 तथा 2 दिए गए बंधों के बीच हैं। प्रतिस्थापन से हम पाते हैं कि ये वास्तव में मूल हैं। चूँकि समीकरण के केवल 3 मूल हैं, अत: − 1, 1 तथा 2 इसके मूल हैं।

E 16) संख्याओं a, b, x, y पर प्रमेय 4 लागू करने पर हम पाते हैं कि

$(ax + by)^2 \le (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) = 1$

$\therefore ax + by \le 1$.

E 17) क) हम n-यकों

$$\left(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots\ldots, \sqrt{a_n}\right) \text{ तथा } \left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \frac{1}{\sqrt{a_2}}, \ldots\ldots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right) \text{ पर}$$

कौशी-श्वार्ज़ असमिका का प्रयोग करते हैं, तथा पाते हैं कि

$$\left(\sqrt{a_1}\,\frac{1}{\sqrt{a_1}} + \ldots\ldots + \sqrt{a_n}\,\frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)^2$$

$$\le \left(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

$$\Longleftrightarrow n^2 \le \left(a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n\right)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{a_n}\right)$$

ख) प्रमेय 4 को n-यकों $(1, 1, \ldots\ldots, 1)$ तथा $(a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n)$ पर प्रयोग करने से हमें इच्छित परिणाम प्राप्त होता है।

ग) n-यकों $(1, 1, \ldots, 1)$ तथा $\left(\sqrt{a_1}, \sqrt{a_2}, \ldots, \sqrt{a_n}\right)$ पर प्रमेय 4 के प्रयोग से हमें इच्छित परिणाम प्राप्त हो जाता है।

E 18) $(a-b)^2 + (x-y)^2 = (a^2+x^2) + (b^2+y^2) - 2(ab+xy)$
$\leq (a^2+x^2) + (b^2+y^2) + 2\,|(ab+xy)|$ .... (12)

इसके अतिरिक्त, प्रमेय 4 से

$(ab+xy)^2 \leq (a^2+x^2)(b^2+y^2)$

$\Longrightarrow |ab+xy| \leq \sqrt{a^2+x^2}\sqrt{b^2+y^2}$ .... (13)

(12) तथा (13) $\Longrightarrow (a-b)^2 + (x-y)^2 \leq \left(\sqrt{(a^2+x^2)} + \sqrt{(b^2+y^2)}\right)^2$

जो हमें इच्छित परिणाम देता है।

E 19) (x, y, z) तथा $(1, 1, 1)$ पर कौशी-श्वार्ज़ असमिका लगाने से हम पाते हैं कि

$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2)$ .... (14)

अब, $\left[\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}\right]$ तथा $\left[x^{3/2}, y^{3/2}, z^{3/2}\right]$ पर प्रमेय 4 लगाने पर हम पाते हैं कि

$(x^2+y^2+z^2) \leq (x+y+z)(x^3+y^3+z^3)$
$= 81(x+y+z)$ .... (15)

(14) तथा (15) $\Longrightarrow (x+y+z)^4 \leq 9 \times 81(x+y+z)$
$\Longrightarrow (x+y+z)^3 \leq (9)^3$
$\Longrightarrow (x+y+z) \leq 9.$

E 20) असत्य । उदाहरण के लिए, $p = 3$ तथा युग्म $(1, 0), (1 - 1)$ लीजिए। तब

$\left\{(1)(1) + (0)(-1)\right\}^3 \neq \left[1^3 + 0^3\right]\left[1^3 + (-1)^3\right]$

E 21) हम n पर आगमन के सिद्धांत का प्रयोग करते हैं। $n = 1$ के लिए $a_1 = s_1$, और इस प्रकार, $1 + s_1 \leq 1 + a_1$ और $1 - a_1^2 < 1$. इसलिए, $1 + a_1 < \frac{1}{1-a_1}$.

मान लीजिए कि परिणाम $n = m$ के लिए सत्य है।

तो $(1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_m) \geq 1 + s_m$

$\therefore (1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_m)(1+a_{m+1})$
$\geq 1 + s_m + a_{m+1} + s_m a_{m+1}$
$> 1 + s_{m+1}.$

साथ ही, $(1+a_1)(1+a_2)\ldots\ldots(1+a_m) < \frac{1}{1-s_m}$

$\therefore (1+a_1)\ldots\ldots(1+a_m)(1+a_{m+1}) < \frac{1}{(1-s_m)(1-a_{m+1})}$

$< \frac{1}{1-s_{m+1}}$

इस प्रकार, (ii), $n = m + 1$ के लिए सत्य है,

और इस प्रकार $\forall\ n \in N$ के लिए (ii) सत्य है।

E 22) हम n संख्याओं $1 - a_1, 1 - a_2, \ldots\ldots, 1 - a_n$ पर प्रमेय 6 (i) का प्रयोग करते हैं । तब

$1 - (1 - a_1 + 1 - a_2 + \ldots\ldots + 1 - a_n) \leq a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$

$\Longrightarrow 1 - n + \sum_{i=1}^{n} a_i \leq \prod_{i=1}^{n} a_i$

$\Longrightarrow 1 - \prod_{i=1}^{n} a_i \leq n - \sum_{i=1}^{n} a_i$

E 23) नहीं। उदाहरण के लिए, $a_1 = -1$ तथा $a_2 = 2$ लीजिए। तब

$1 - [a_1 + a_2] \leq [1 - a_1][1 - a_2]$

$\Longrightarrow 0 \leq 2(-1) = -2$, जो असत्य है।

E 24) यदि हम $x_i = -a_i$ रखें, तो

$x_1 \leq x_2 \leq \ldots\ldots \leq x_n$. साथ ही $b_1 \leq b_2 \leq \ldots\ldots \leq b_n$.

अतः प्रमेय 7 (i) से,

$$n[x_1b_1 + x_2b_2 + \ldots\ldots + x_nb_n] \geq [x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n][b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n]$$

$$\Longleftrightarrow -n[a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots\ldots + a_nb_n] \geq -[a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n][b_1 + b_2 + \ldots\ldots + b_n]$$

$$\Longleftrightarrow n[a_1b_1 + \ldots\ldots + a_nb_n] \leq [a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n][b_1 + \ldots\ldots + b_n]$$

E 25) $\left(1, \frac{1}{2}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}\right)$ तथा $\left(1, \frac{1}{2}, \ldots\ldots, \frac{1}{n}\right)$ पर चेबीचेव असमिका का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\right)^2 \leq n\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{1}{n^2}\right)$$

$$\leq n\left[1 + \frac{1}{1.2} + \ldots\ldots + \frac{1}{(n-1)(n)}\right]$$

चूँकि $\frac{1}{i^2} \leq \frac{1}{(i-1)} \forall$ i.

$$= n\left\{1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \ldots\ldots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right\}$$

$$= n\left(1 + 1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$\Longrightarrow 1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n} \leq \sqrt{2n-1} \quad \ldots\ldots (16)$$

$\left(\sqrt{\frac{1}{1}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \ldots\ldots, \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ तथा $\left(\sqrt{\frac{1}{1}}, \sqrt{\frac{1}{2}}, \ldots\ldots, \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$

पर प्रमेय 7 का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं कि

$$\left(\sqrt{\frac{1}{1}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \cdots\cdots + \sqrt{\frac{1}{n}}\right)^2 \leq n\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots\ldots + \frac{1}{n}\right) \quad \ldots\ldots (17)$$

(16) तथा (17) $\Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{\frac{1}{1}} + \sqrt{\frac{1}{2}} + \cdots\cdots + \sqrt{\frac{1}{n}}\right) \leq (2n-1)^{1/4}$

E 26) दिए हुए a, b तथा c को हमेशा क्रमित किया जा सकता है। मान लीजिए कि $a \leq b \leq c$.

तब $a + b \leq a + c \leq b + c$.

इसलिए, $\frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{a+c} \geq \frac{1}{b+c}$

हम प्रमेय 7 (i) को $\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}$ तथा c, b, a पर लागू करते हैं।

हम पाते हैं कि

$$3\left(\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c}\right) \geq (a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \quad \ldots\ldots (18)$$

और, b + c, a + c, a + b तथा इनके प्रतिलोमों पर प्रमेय 7 (ii) लागू करने पर हम पाते हैं कि

$$3(1 + 1 + 1) \leq (b + c + a + c + a + b)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right)$$

$$\Longrightarrow 9 \leq 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{a+b}\right) \quad \ldots\ldots (19)$$

(18) और (19) $\Longrightarrow \left[\frac{c}{a+b} + \frac{b}{a+c} + \frac{a}{b+c}\right] \geq \frac{3}{2}$

विविध प्रश्नावली

इस भाग को करना आप के लिए ऐच्छिक है।

पिछले खंड की तरह, इस भाग में कुछ अतिरिक्त प्रश्न दिए गए हैं जोकि इस खंड में दी गई अध्ययन सामग्री से संबद्ध हैं। इनको करने से आप युगपत् रैखिक समीकरणों तथा असमिकाओं को बेहतर समझ सकेंगे। पहले की तरह, हमने इन प्रश्नों के हल प्रश्नों के बाद दिए हैं।

1) यदि संभव हो तो, निम्नलिखित समीकरण निकाय को हल कीजिए।

$$3x + 6y + 15z + 6t = 42$$
$$3x + 8y + 21z - 2t = -8$$
$$2x + 9y + 25z + 7t = 41$$

2) क) यदि $a + b + c = 0$, तो समीकरण

$$\begin{vmatrix} a-x & c & b \\ c & b-x & a \\ b & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

को हल कीजिए।

ख) समीकरण

$$\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

को हल कीजिए।

3) निकाय

$$x - y + z = 0$$
$$2x + 3y - 5z = 7$$
$$3x - 4y - 2z = -1$$

को हल करने के लिए क्रेमर-नियम का प्रयोग कीजिए।

4) एक कंपनी तीन उत्पाद बनाती है जिनमें से प्रत्येक को तीन अलग-अलग प्रभागों द्वारा तैयार करना पड़ता है। सारणी 1 में हमने बताया है कि प्रत्येक उत्पाद को प्रत्येक प्रभाग में कितने घंटे रहना आवश्यक है; और प्रत्येक प्रभाग की साप्ताहिक क्षमता भी दी है।

सारणी 1

प्रभाग	उत्पाद			प्रति सप्ताह उपलब्ध घंटों की संख्या
	P_1	P_2	P_3	
1	6	2	2	80
2	7	4	1	60
3	5	5	3	100

हर सप्ताह तीनों उत्पादों की कितनी इकाइयां बननी चाहिए जिससे कि साप्ताहिक श्रमिक उपलब्धता का पूरा उपयोग हो सके।

5) निम्नलिखित सर्वसमिकाओं को सिद्ध कीजिए।

क) $$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-c)(c-a)(a-b)$$

ख) $\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$

6) S_1 किस्म की मछली F_1 प्रकार के भोजन का 10 ग्राम और F_2 प्रकार के भोजन का 5 ग्राम प्रतिदिन खाती है। S_2 किस्म की मछली F_1 का 6 ग्राम और F_2 का 4 ग्राम खाती है। अगर किसी परिवेश में F_1 का 2.2 कि.ग्रा. और F_2 का 1.3 कि.ग्रा. प्रतिदिन उपलब्ध हो, तो S_1 और S_2 किस्म की कितनी मछलियाँ उपलब्ध भोजन को बिल्कुल पूरा-पूरा खा सकेंगी।

7) क्या निकाय

$$\begin{aligned} x + y + z + w &= 0 \\ x + 3y - 2z + w &= 0 \\ 2x \quad - 3z + 2w &= 0 \end{aligned}$$

का कोई अतुच्छ हल है?

8) निम्नलिखित निकाय का यदि कोई हल हो, तो उसे प्राप्त कीजिए।

$$\begin{aligned} x + 2y + 4z + t &= 4 \\ 2x \quad - z - 3t &= 4 \\ x - 2y - z \quad &= 0 \\ 3x + y - z - 5t &= 5 \end{aligned}$$

9) दिखाइए कि निम्नलिखित रैखिक निकाय का दो प्राचलों वाला हल समुच्चय है।

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 &= 2 \\ x_1 + x_3 - x_4 + x_5 &= 1 \\ 12x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 2x_5 &= 12 \end{aligned}$$

10) निम्नलिखित रैखिक निकायों को हल करने के लिए, यदि संभव हो तो, क्रेमर-नियम का प्रयोग कीजिए :

क) $3x + y = 3$
$5x + 2y = 1$

ख) $2x - 3y + z = 1$
$x + y - z = 0$
$x - 2y + z = -1.$

11) यदि किसी समतल में निर्देशांक अक्षों को θ कोण से घुमाया जाता है, तो हम पुराने निर्देशांकों (x, y) को नए निर्देशांकों (x', y') के पदों में निम्न प्रकार से लिख सकते हैं :

$x = x' \cos\theta - y' \sin\theta$

$y = x' \sin\theta + y' \cos\theta$

(x', y') को (x, y) के पदों में लिखने के लिए क्रेमर-नियम का प्रयोग कीजिए।

हल

1) हम गाउसीय निराकरण विधि का प्रयोग करते हैं। हमें हल समुच्चय

$\{(4 + z, -1 - 3z, z, 6) \quad z \in \mathbf{R}\}$ प्राप्त होता है।

2) क) सारणिक के पहले स्तंभ में दूसरे व तीसरे स्तंभों को जोड़ने से इसका मान नहीं बदलता है। ऐसा करने पर और तथ्य $a + b + c = 0$ का प्रयोग करने पर, हम पाते हैं कि

$$\begin{vmatrix} -x & c & b \\ -x & b-x & a \\ -x & a & c-x \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-x)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b-x & a \\ 1 & a & c-x \end{vmatrix} = 0,\ \text{P3 से।}$$

$$\Rightarrow (-x)\begin{vmatrix} 1 & c & b \\ 1 & b-x-c & a-b \\ 0 & a-c & c-x-b \end{vmatrix} = 0,\ \text{P4 का दो बार प्रयोग करने पर।}$$

$\Rightarrow (-x)\,[\,(b-c-x)(c-b-x)-(a-c)(a-b)\,] = 0$, पहले स्तंभ से प्रसार करने पर।

इस समीकरण को हल करने पर हम पाते हैं कि $x = 0$ या

$(b-c)^2 - x^2 + a^2 - a(b+c) + bc = 0$, अर्थात्

$2x^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2)$, प्रतिबंध $a + b + c = 0$ का प्रयोग करने पर।

इस प्रकार, हल समुच्चय

$\left\{0, \pm\sqrt{\frac{3}{2}(a^2+b^2+c^2)}\right\}$ है।

ख) सारणिकों के P1 से P5 तक के गुणों का प्रयोग करने पर, हम देखते हैं कि

$$\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 15-2x & 1 & 10 \\ 11-3x & 1 & 16 \\ 7-x & 1 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow x = 4.$

3) आव्यूह संकेतन में निकाय

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{है।}$$

$$\text{यहाँ } D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -32 \neq 0$$

अतः हम क्रेमर-नियम लागू कर सकते हैं।

अब

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 7 & 3 & -5 \\ -1 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -44,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 7 & -5 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -42,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \\ 3 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

इस प्रकार, $x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{11}{8}$, $y = \frac{D_2}{D} = \frac{21}{16}$, $z = \frac{D_3}{D} = \frac{-1}{16}$

4) मान लीजिए x, y तथा z, P_1, P_2 तथा P_3 की आवश्यक मात्राएं हैं। तब हमें निकाय

$$6x + 2y + 2z = 80$$
$$7x + 4y + z = 60$$
$$5x + 5y + 3z = 100$$

को हल करने की आवश्यकता है।
गाउसीय निराकरण (या क्रेमर-नियम) के द्वारा हम पाते हैं कि

$x = 5, y = 0, z = 25.$

इसलिए, उत्पादन का सर्वोत्तम संचय होगा प्रति सप्ताह P_1 की 5 इकाइयाँ, P_3 की 25 इकाइयाँ तथा P_2 की कोई इकाई नहीं।

5) क)
$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

दूसरी व तीसरी पंक्ति में से पहली पंक्ति घटाने पर।

$$= (b-a)(c-a)\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b+a \\ 0 & 1 & c+a \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c-a)(c+a-b-a)$$
$$= (b-c)(c-a)(a-b)$$

ख)
$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -2a & c+a & a+b \\ -2p & r+p & p+q \\ -2x & z+x & x+y \end{vmatrix}$$,पहले स्तंभ में से दूसरे और तीसरे स्तंभों को घटाने पर।

$$= (-2)\begin{vmatrix} a & c+a & a+b \\ p & r+p & p+q \\ x & z+x & x+y \end{vmatrix}$$

$$= (-2)\begin{vmatrix} a & c & b \\ p & r & q \\ x & z & y \end{vmatrix}$$,दूसरे व तीसरे स्तंभों में से पहला स्तंभ घटाने पर।

$$= 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$,दूसरे व तीसरे स्तंभों को आपस में बदलने पर।

6) मान लीजिए x तथा y, S_1 तथा S_2 किस्म की मछलियों की संख्या दर्शाते हैं। हमारे पास नीचे दी गई सारणी 2 में दर्शाई गई जानकारी है।

सारणी 2

मछली की किस्म	प्रति सप्ताह खाए गए भोजन की मात्रा (ग्राम में)	
	F_1	F_2
S_1	10	5
S_2	6	4
प्रति सप्ताह उपलब्ध भोजन की कुल मात्रा	2200	1300

इस प्रकार, हमें निकाय

$10x + 6y = 2200$
$5x + 4y = 1300$

हल करने की आवश्यकता है।
किसी भी विधि से हल करने पर हम पाते हैं कि

$x = 100, \quad y = 200.$

इस प्रकार, S_1 किस्म की 100 मछलियाँ तथा S_2 किस्म की 200 मछलियाँ होनी चाहिए।

7) निराकरण द्वारा हम पाते हैं कि निकाय के अनंततः अनेक हल हैं जो कि $(x, 0, 0, -x)$ के रूप के हैं, जहाँ $x \in \mathbf{R}$. अतः किसी भी $x \neq 0$ के लिए हमें अतुच्छ हल प्राप्त होगा।

8) गाउसीय निराकरण द्वारा हम ऐसी स्थिति में पहुँचते हैं जहाँ हमें $0 = \frac{8}{7}$ प्राप्त होता है। अतः दिया गया निकाय असंगत है।

9) हम गाउसीय निराकरण का प्रयोग करते हैं। कुछ चरणों के बाद हमें निम्नलिखित निकाय प्राप्त होता है।

$x_1 = 1$
$x_2 + 4x_4 - 3x_5 = 0$
$x_3 - x_4 + x_5 = 0$

इस प्रकार, $x_1 = 1, x_2 = -4x_4 + 3x_5, x_3 = x_4 - x_5.$
इसलिए, यदि $x_4 = s$ और $x_5 = t$, तब हमारा हल समुच्चय

$\{(1, -4s + 3t, s - t, s, t) \mid s, t \in \mathbf{R}\}$ होगा।

इस प्रकार, हमने हल को दो प्राचलों s तथा t के पदों में व्यक्त किया है।

10) क) आव्यूह संकेतन में निकाय

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

चूंकि $D = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, हम क्रेमर-नियम लागू कर सकते हैं।

यहां $D_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5$, तथा

$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -12$

इस प्रकार, हल $x = 5$, तथा $y = -12$ है।

ख) यहाँ गुणांक आव्यूह

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \text{ है तथा } D = |A| = 1 \neq 0.$$

अतः, हम क्रेमर-नियम लगा सकते हैं।

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -5,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -8.$$

$\therefore\ x = -3,\ y = -5,\ z = -8.$

11) यहाँ समीकरण को

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

लिख सकते हैं।

चूंकि $D = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \neq 0,$

हम क्रेमर-नियम लागू कर सकते हैं।

अब,

$D_1 = \begin{vmatrix} x & -\sin\theta \\ y & \cos\theta \end{vmatrix} = x\cos\theta + y\sin\theta$, तथा

$D_2 = \begin{vmatrix} \cos\theta & x \\ \sin\theta & y \end{vmatrix} = y\cos\theta - x\sin\theta.$

अत: $x' = x\cos\theta + y\sin\theta,\ y' = y\cos\theta - x\sin\theta.$

शब्दावली

अचर	constant
अतिपरवलय	hyperbola
अनुरूप	analogue
अर्धवृत्त	semicircle
अवयव	element
अव्युत्क्रमणीय	singular
असंगत	inconsistent
असमिका	inequality
आंकड़े	data
आगमन	induction
आयतन	volume
आयताकार	rectangular
आव्यूह	matrix
उत्तरोत्तर निराकरण	successive elimination
उपसमुच्चय	subset
उभयनिष्ठ बिंदु	common point
औसत	average
कौशी	Cauchy
क्रमगुणित	factorial
क्रमित त्रिक	ordered triple
क्रमित युग्म	ordered pair
श्वार्त्ज़	Schwarz
गाउसीय निराकरण	Gaussian elimination
गुणज	multiple
गुणांक	coefficient
गुणांक आव्यूह	coefficient matrix
गुणोत्तर माध्य	geometric mean
गुणोत्तर श्रेढ़ी	geometric progression
गुरुकोष्ठक	square brackets
चर	variable
चेबीचेव	Tchebychev
तुच्छ हल	trivial solution
त्रिघातीय	cubic
त्रिज्या	radius
त्रिभुज	triangle
त्रिभुजीय आव्यूह	triangular matrix
द्विघाती	quadratic
धनात्मक	positive
निरपेक्ष	absolute
पंक्ति	row
परिकल्पना	hypothesis
परिमेय	rational
पूर्णांक	integer

समीकरण और असमिकाएं	पृष्ठीय क्षेत्रफल	surface area
	प्रतिच्छेदन, सर्वनिष्ठ	intersection
	प्रतिच्छेदी बिंदु	point of intersection
	प्रतिलोम	inverse
	प्रतिस्थापन	substitution
	प्राचल	parameter
	बुन्याकोव्स्की	Bunyakovskii
	बहुपद समीकरण	polynomial equation
	माध्य	mean
	मुख्य विकर्ण	principal diagonal
	मूल	root
	युगपत् रैखिक समीकरण	simultaneous linear equations
	रूपांतरण	transformation
	व्रज-गुणन	cross multiplication
	वर्ग आव्यूह	square matrix
	वर्गमूल	square root
	वायर्स्ट्रास	Weierstrass
	वास्तविक संख्या	real number
	विकर्ण आव्यूह	diagonal matrix
	विमा	dimension
	विलयन	(chemical) solution
	विविक्तकर	discriminant
	व्यास	diameter
	व्युत्क्रमणीय	non-singular
	षट्फलक	cuboid
	संगत	consistent
	समबाहु त्रिभुज	equilateral triangle
	समांतर माध्य	arithmetic mean
	समानुपातिक	proportional
	समिका (या समता)	equality
	समीकरण	equation
	सर्वसमिका	identity
	साध्य	proposition
	सारणिक	determinant
	स्तंभ	column
	स्वेच्छ संख्या	arbitrary number
	हरात्मक माध्य	harmonic mean