स्वाध्याय स्वमन्थन स्वावलम्बन

उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

(उत्तर प्रदेश सरकार द्वारा निर्गत अधिनियम संख्या 10, 1999 द्वारा स्थापित)

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGEC-03
प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें

प्रथम खण्ड
सांख्यिकी के मूल सिद्धांत और स्रोत

शान्तिपुरम् (सेक्टर-एफ), फाफामऊ, इलाहाबाद - 211013

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGEC-03
प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें

खंड

1

सांख्यिकी के मूल सिद्धांत और स्रोत

खंड 1 सांख्यिकी के मूल सिद्धांत और स्रोत

अर्थशास्त्र (सामान्य) ई.ई.सी.-03 में तृतीय ऐच्छिक पाठ्यक्रम का विषय मूल सांख्यिकी (basic statistics) है। यहाँ, यथासंभव दिन-प्रतिदिन के अनुभव के आधार पर सांख्यिकी की मूल संकल्पनाओं को उनके प्रारंभिक रूप में बताया गया है। इस पाठ्यक्रम को आठ खंडों में बांटा गया है। जिन सांख्यिकीय संकल्पनाओं और विधियों के द्वारा सांख्यिकीय आंकड़ों को प्रस्तुत किया जाता है उनका परिचय दिया गया है। सांख्यिकी में आवश्यक सरल गणितीय उपकरणों, सांख्यिकीय आंकड़ों के संक्षेपण की संकल्पनाओं, सूचकांकों और काल श्रेणियों (Time Series), प्रतिदर्श (Sampling) के मूल सिद्धांतों और सर्वेक्षण प्रतिचयन के व्यावहारिक पक्षों के सम्बन्ध में विवेचन किया गया है।

कुछ खंडों में परिशिष्ट हैं, जिन्हें एक साथ मिलाकर एक पृथक् खंड का रूप दे दिया जाएगा और यह छात्रों के लिए सांख्यिकी में उन्नत गणितीय उपकरणों का कार्य करेगा। जिन छात्रों ने अर्थशास्त्र को अपने अध्ययन का प्रमुख विषय (कोटि "ख") के रूप में चुना है और जो इस विषय में 48 अथवा उससे अधिक क्रेडिट प्राप्त करना चाहते हैं, केवल उन्हें ही इन परिशिष्टों का स्वतंत्र रूप से अध्ययन करने की आवश्यकता है। इन परिशिष्टों में उनकी उपलब्धि के आधार पर ही अर्थशास्त्र को प्रधान विषय के रूप में लेने की उनकी क्षमता के संबंध में विचार किया जाएगा और इस प्रकार उन्हें दो और क्रेडिट मिल पाएँगे।

इस खंड में सांख्यिकी की विषय-वस्तु का परिचय दिया गया है। इसमें दो इकाइयाँ हैं:

इकाई 1 में सांख्यिकी के अर्थ तथा जीवन के विभिन्न कार्यों में अर्थशास्त्र के उपयोग का विवेचन किया गया है। इकाई 2 में सांख्यिकी के मूल सिद्धांतों, संकल्पनाओं और स्रोतों का परिचय दिया गया है।

इकाई 1 सांख्यिकीः त्रुटियाँ, उपयोग एवं दुरुपयोग

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आपः

- सांख्यिकी की संकल्पना को समझ सकेंगे; और
- जीवन के विभिन्न कार्यों में सांख्यिकी के उपयोग को जान सकेंगे।

1.1 प्रस्तावना

Statistics शब्द संभवतः लेटिन भाषा के शब्द "Status" से लिया गया है, जिसका मौलिक अर्थ राजनीतिक राज्य (स्थिति) था। हिन्दी में "सांख्यिकी" शब्द की व्युत्पत्ति "संख्या" से है। लोकचलन में इससे अब अभिप्राय संख्यात्मक सूचना से है, जो हिन्दी शब्द "सांख्यिकी" के अधिक समीप है। इस अर्थ में इसका उपयोग लगभग दो सदियों से हो रहा है। परन्तु यह जानना आवश्यक है कि इस लोकचलन में भी सभी सांख्यिकीय आंकड़ों की अभिव्यक्ति संख्याओं में की जाती है लेकिन सभी संख्याओं को सांख्यिकी से संबंधित नहीं माना जाता। किसी वृत्त के व्यास के साथ उसकी परिधि का अनुपात अथवा लघुगणकों (logarigthms) की विधि का आधार गणितीय रूप से परिभाषित मात्राएँ होती हैं, सांख्यिकीय आंकड़े नहीं। इसके विपरीत, किसी निश्चित तिथि पर भारत की जनसंख्या, किसी वर्ष विशेष के दौरान भारत के

निर्यात का कुल मूल्य, किसी फैक्टरी द्वारा विनिर्मित वस्तुओं में से दोषपूर्ण वस्तुओं का अनुपात, किसी लेखक के प्रत्येक वाक्य में प्रयुक्त विशेषणों का औसत, या किसी समुदाय के वयस्क पुरुषों की औसत ऊंचाई की अभिव्यक्ति उन संख्याओं में की जाती है, जिन्हें प्रेक्षण गणन अथवा माप द्वारा प्राप्त किया जाता है और जिन्हें सांख्यिकी आंकड़े माना जाता है।

तकनीकी प्रसंग में सांख्यिकी शब्द का प्रयोग कम से कम तीन अलग-अलग अर्थों में किया जाता है: संख्यात्मक सूचना (numerical information), तकनीकी शब्द "सांख्यिकी" का बहुवचन रूप (Statistics) और संख्यात्मक सूचना को संग्रह, संक्षेपण, विश्लेषण, व्याख्या और प्रस्तुत करने की क्रिया-पद्धति (methodology)। इस प्रकार, यह क्रिया-पद्धति का नाम होने के साथ ही साथ उन आंकड़ों का भी नाम है जिन पर यह क्रिया-पद्धति लागू की जाती है। एकवचन रूप में सांख्यिकी शब्द (statistic) का अर्थ सूचना के अलग-अलग मदों से परिकलित संख्यात्मक संक्षेप (numerical summary) से है। अगली इकाई में इसे और सही ढंग से परिभाषित किया जाएगा।

परन्तु क्रिया-पद्धति के रूप में सांख्यिकी की आधुनिक संकल्पना सूचना के संग्रह और उसकी व्याख्या मात्र से अधिक व्यापक है। हम जानते हैं कि व्यक्ति और परिवार, व्यवसाय और उद्योग तथा अनुसंधान और सरकार से संबंधित सभी मानवीय क्रियाओं के दौरान सदा ही छोटे अथवा बड़े निर्णय लेने होते हैं। ये निर्णय आवेग में, अटकल के आधार पर, साधिकार आदेश पर अथवा उपलब्ध विकल्पों और संभाव्य परिणामों के संबंध में तर्कसंगत विश्लेषण करने के बाद में लिए जा सकते हैं। सम्बद्ध सूचना के अभाव में तर्कसंगत निर्णय लेना संभव नहीं होता। ऐसी सूचना उपलब्ध होने पर भी पूर्ण अथवा बिल्कुल निश्चित नहीं हो सकती है। तकनीकी विषय के रूप में सांख्यिकी को विधियों का ऐसा समुदाय माना जाता है, जिसके अंतर्गत अनिश्चित सूचना का प्रयोग करते हुए तर्कसंगत निर्णय लिए जाते हैं।

1.2 त्रुटियाँ और सांख्यिकी

यह कहना भ्रामक-सा लगता है कि अनिश्चित सूचना का प्रयोग करके तर्कसंगत निर्णय लेना संभव हो सकता है। स्वर्गीय प्रोफेसर प्रसांत चन्द्र महलनबीस, जिन्हें भारत में आधुनिक सांख्यिकी का जनक माना जाता है, द्वारा दिए गए एक सरल उदाहरण से स्पष्ट हो जाएगा कि अनिश्चित, त्रुटिपूर्ण और सीमित सूचना का उपयोग अत्यंत लाभप्रद ढंग से किया जा सकता है। मान लीजिए कि पहली बार आप किसी महानगर के रेलवे स्टेशन पर पहुँचते हैं और वहाँ से अपने मित्र के निवास पर जाने के लिए आपको परिवहन के किसी साधन को चुनना है। यदि आपको यह पता लग जाए कि रेलवे स्टेशन से उसका निवास स्थान कितनी दूरी पर है, तब आप यह निश्चित कर पाएंगे कि आपके लिए वहाँ चलकर जाना ठीक रहेगा या टैक्सी अथवा बस द्वारा। परन्तु क्या आपके लिए आवश्यक है कि यह दूरी आप बिल्कुल ही सही रूप में जानें, अर्थात् मीटरों तक में। इसका उत्तर नहीं में दिया जा सकता है। यदि आप जानते हैं कि यह लगभग एक सौ मीटर है तब तो वहाँ पैदल ही पहुँच सकते हैं। यदि कुछ किलोमीटरों में है तब बस से जा सकते हैं और यदि वह इन दोनों के बीच में है तो टैक्सी ले सकते हैं।

अब हम इससे भी बड़ी एक समस्या लेते हैं। विचारणीय प्रश्न यह है कि क्या इस वर्ष तेल का आयात करना होगा ? इस संबंध में निर्णय लेने के संबंध में यह जानना आवश्यक होगा कि देश में कितना तेल निकाला जाएगा और लोगों की मांग को पूरा करने के लिए कितने तेल की आवश्यकता होगी। इन दोनों के बीच का अंतर ही बताएगा कि कितनी मात्रा में तेल का आयात करना होगा। लेकिन इस मात्रा को क्या बिल्कुल ही सही रूप में जानना आवश्यक है। अर्थात् ग्राम, किलोग्राम, टन अथवा यहाँ तक कि हज़ार टनों में। स्पष्ट है कि ऐसा करना आवश्यक नहीं।

1.2.1 त्रुटियों की सहन सीमा (Tolerance margin of Errors)

हम जानते हैं कि जिस व्यावहारिक समस्या के समाधान के लिए संख्यात्मक सूचना की आवश्यकता पड़ती है, वहां सूचना के संबंध में कुछ सीमा तक अनिश्चितता (in-exactitude) और यहाँ तक कि अयथार्थता (inaccuracy) को भी सहन करना होता है। इसे सूचना में

त्रुटियों की सहन सीमा कहा जाता है और इसकी मात्रा इस बात पर निर्भर करती है कि इसका उपयोग किस प्रयोजन से किया जाना है। अधिकाधिक यथार्थ सूचना प्राप्त करना खर्चीला काम होता है। सांख्यिकी के प्रमुख उद्देश्यों में से एक उद्देश्य है आवश्यक सूचना की सहनीय सीमा को निर्धारित करना और यह देखना कि ऐसा करने में कम से कम खर्च करना पड़े।

सूचना अनेक कारणों से अयथार्थ हो सकती है। इनमें से दो प्रमुख हैं: प्रेक्षण या माप में त्रुटियाँ तथा विवरण का पूर्ण न होना। भारत में खाद्य तेल की कुल वार्षिक माँग के परिकलन के लिए सिद्धांत रूप में पहले प्रत्येक परिवार और भोजनालयों की आवश्यकताओं का पता लगाना होगा और फिर इन्हें जोड़ना होगा। व्यवहार रूप में, प्रत्येक परिवार अथवा भोजनालय अंदाज लगा सकता है कि पूरे वर्ष में उसे लगभग कितने तेल की आवश्यकता होगी। इस प्रकार, किसी एक परिवार अथवा भोजनालय संबंधी आंकड़ों में कुछ गलती होने की संभावना बनी रहती है। दूसरी बात यह है कि भारत के लाखों परिवारों और भोजनाओं से सूचना प्राप्त करना संभव नहीं हो सकता। इस प्रकार हम देखते हैं कि इस सूचना को एकत्र करने के संदर्भ में हमें कुछ हज़ार परिवारों और भोजनालयों के नमूनों से ही संतुष्ट होना होगा। इस प्रकार सूचना का दायरा अपूर्ण ही रह जाएगा और इसमें अयथार्थता का तत्व बना रहेगा। इसके फलस्वरूप वार्षिक माँग के अंतिम प्राक्कलन में अनेक त्रुटियाँ हो सकती हैं। इसीलिए हमें सांख्यिकी की शरण में जाना होता है। यह शास्त्र पता लगाता है कि इन त्रुटियों की मात्रा को कहाँ तक कम किया जा सकता है तथा इन्हें सहन-सीमा के बाहर नहीं जाने देता।

1.2.2 संयोग और त्रुटि

सांख्यिकी में बहुत कुछ अयथार्थता संयोग से होती है। अठारहवीं सदी में एक राजा ने कुछ गणितज्ञों के जिम्मे काम सौंपा कि जुए के खेल में संयोग के संबंध में कहाँ तक निश्चित रूप से कहा जा सकता है। वे लोग (गणितज्ञ) इस नतीजे पर पहुँचे कि किसी एक बार खेले गए खेल के परिणाम के संबंध में पहले से कुछ नहीं कहा जा सकता है, लेकिन बार-बार खेले जाने पर परिणामों में बहुत कुछ तालमेल दिखाई देता है। यदि किसी सिक्के को केवल एक ही बार उछाला जाता है तब कहना कठिन है कि वह चित गिरेगा अथवा पट। परन्तु यदि किसी अच्छे सिक्के को 1000 बार उछाला जाता है तो बहुत कुछ निश्चितता से कहा जा सकता है कि वह 450 और 550 बार के बीच चित गिरेगा। इन निष्कर्षों को संभावना (probability) के गणितीय सिद्धांत का रूप दिया गया और सूचना में अयथार्थता एवं त्रुटियों के निर्धारण के कार्य में सांख्यिकी-विद् इस सिद्धांत का प्रयोग बड़े व्यापक तौर पर करते हैं।

1.3 सांख्यिकी के उपयोग

जैसा कि पिछले भाग में बताया गया है, सांख्यिकीय आंकड़ों की आवश्यकता इसलिए पड़ती है कि अनिश्चितता के बावजूद भी निर्णय लिए जा सकें। इसके कुछ मूर्त उदाहरण नीचे दिए जा रहे हैं, जो अत्यंत महत्वपूर्ण तथा सामान्य प्रकार के हैं:

1.3.1 राष्ट्रीय विकास के लिए योजना बनाना

भारत के सामाजिक-आर्थिक विकास के लिए आयोजन के सांख्यिकीय आधार का निर्माण प्रोफेसर महलनबिस ने किया, जो द्वितीय पंचवर्षीय योजना से संबंधित थे। भारत के विकास के लिए सीमित संसाधनों का उपयोग इस प्रकार करना था कि वर्तमान आवश्यकताओं को पूरा करने तथा दीर्घकालीन संवृद्धि को प्राप्त करने जैसे दोनों ही लक्ष्यों की पूर्ति की जा सके। उनका कहना था, खाद्य पदार्थों के आयात से वर्तमान आवश्यकताओं को तो पूरा किया जा सकता है, परन्तु ऐसा करने से राष्ट्र को सदा ही इन वस्तुओं के आयात पर ही निर्भर रहना होगा। समझदारी की बात तो यह होगी कि उर्वरकों का आयात किया जाए, जिससे अगले वर्ष में अधिक खाद्य पदार्थों का उत्पादन किया जा सके। इससे भी अच्छी नीति तो उर्वरकों का निर्माण करने वाली फैक्टरियों का आयात करना होगा, जिससे उर्वरकों का भी आयात न करना पड़े। परन्तु इन फैक्टरियों द्वारा उत्पादन में अनेक वर्ष लग सकते हैं। दीर्घकाल में तो भारी मशीनें (heavy machines) और निर्माण संयंत्रों (building plants) को बाहर से मंगाना उचित होगा,

 जिनसे उर्वरक तथा अन्य वस्तुओं को बनाने वाली फैक्टरियों का निर्माण किया जा सके। इस प्रकार, सर्वोत्तम तो यह होगा कि कुछ धन को तत्काल ही खाद्य पदार्थों के आयात पर लगाया जाए, कुछ को उर्वरकों के आयात पर और कुछ को मशीनों के निर्माण द्वारा औद्योगीकरण पर। उपर्युक्त प्रकार से निवेश के अनुपातों का निर्धारण उन्होंने अर्थव्यवस्था के एक सरल गणितीय निदर्श (mathematical model) के प्रयोग द्वारा किया। यदि किसी भारी उद्योग और कुटीर उद्योग अथवा हल्के उद्योग में समान राशि का पूंजी निवेश किया जाता है तो भारी उद्योग की अपेक्षा कुटीर या हल्के उद्योग अधिक लोगों को रोज़गार दे सकेंगे। इसके विपरीत, जहाँ तक इस प्रकार की समान राशि के पूंजी निवेश से मिलने वाले उत्पादन मूल्य का प्रश्न है, वह कुटीर या हल्के उद्योग की अपेक्षा भारी उद्योगों से अधिक मिलेगा। इस प्रकार हम देखते हैं कि भारी उद्योग तथा हल्के या कुटीर उद्योग के बीच समझौता कराना आवश्यक हो जाता है।

यह तो शुरुआत थी। तब से योजना आयोग भारतीय अर्थव्यवस्था के ऐसे अधिकाधिक विस्तृत निदर्शों को विकसित करता आ रहा है, जिनकी सहायता से निवेश के विभिन्न स्वरूपों के परिणामों के संबंध में जाना जा सकता है।

राष्ट्र के लिए विकास योजना बनाने के लिए अर्थव्यवस्था में एक गणितीय विवरण या निदर्श का होना आवश्यक है। इस निदर्श को बनाने के लिए जनता की सामाजिक-आर्थिक स्थितियों संबंधी संख्यात्मक सूचना और विभिन्न उद्योगों के आगत और निर्गत के विवरणों का होना आवश्यक है। केन्द्रीय और राज्य सरकारों के विभिन्न अंगों एवं अन्य स्वतंत्र एजेंसियों द्वारा यह सूचना एकत्र की जाती है। योजनाओं को बनाने के बाद इन्हें कार्यान्वित करने के दौरान इस संबंध में होने वाली अन्य प्रगति की निगरानी भी करनी होती है तथा कार्य के पूरा होने के बाद इसका मूल्यांकन भी करना होता है। इस कार्य के लिए भी अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रकों के लिए आंकड़ों को नियमित रूप से एकत्र करना होता है और उनका स्पष्टीकरण करना होता है तथा आवश्यकता के अनुसार विभिन्न क्षेत्रकों के लिए सांख्यिकीय विधियों को काम में लाना होता है।

1.3.2 उपभोक्ता कीमतों के सूचकांक

चूँकि समस्त विश्व के ही समान इस देश में भी कीमतों में लगातार वृद्धि होती जा रही है, इसलिए इसके फलस्वरूप श्रमिकों की क्रय शक्ति में होने वाली कमी को पूरा करना आवश्यक हो जाता है। लेकिन आम तौर पर सभी वस्तुओं की कीमतें समान रूप से नहीं बढ़ती हैं। इसीलिए इस संबंध में एक समग्र सूचक का परिकलन करना आवश्यक हो जाता है। परन्तु यह कार्य उतना सरल नहीं है। कारण, सभी उपभोक्ताओं, सभी वस्तुओं और सभी बाज़ारों से संबंधित आंकड़ों को इकट्ठा नहीं किया जा सकता। भारत सरकार का श्रम ब्यूरो तथा कुछ राज्य सरकारें नियमित रूप से आवधिक आधार पर विभिन्न प्रकार के कीमत सूचकांकों का परिकलन करती हैं।

औद्योगिक और कृषि उत्पादन में वृद्धि के माप के संबंध में भी उत्पादन सूचकांक इसी प्रकार का काम करता है।

1.3.3 जनसंख्या में वृद्धि

पिछले चालीस वर्षों में भारत में कृषि और उद्योग क्षेत्रों में अत्यधिक प्रगति हुई है परन्तु जनसंख्या में भी इसी प्रकार की वृद्धि के कारण देश की समृद्धि में विशेष प्रगति नहीं हो पाई है। प्रति व्यक्ति कृषि और औद्योगिक उत्पादन में इतनी धीमी गति से वृद्धि हुई है कि देश की अधिकांश जनता के जीवन-स्तर में कोई विशेष सुधार नहीं हो पाया है।

इसलिए आवश्यक हो जाता है कि जनसंख्या वृद्धि के संबंध में अंदाज लगाया जाए और उस पर नियंत्रण के प्रयास किए जाएँ। यह कार्य दशवर्षीय जनगणना द्वारा किया जाता है, जबकि भारत के महापंजीयक (Registrar General of India) के अधीन गणनाकारों की एक बहुत बड़ी संख्या भारत के प्रत्येक निवासी की उम्र, लिंग, वैवाहिक स्थिति, शिक्षा, पेशा आदि के संबंध में आधारिक सूचना एकत्र करती है। अगली जनगणना 1991 में होगी।

इस देश में जन्म और मृत्यु का पंजीकरण कराना अनिवार्य है (हालांकि यह प्रणाली अभी कारगर नहीं हो पाई है) और इसकी सहायता से वर्ष-प्रतिवर्ष जनसंख्या में वृद्धि का नियंत्रण करना सिद्धांत रूप में संभव है।

1.3.4 सांख्यिकीय कोटि नियंत्रण

जापान में निर्मित वस्तुएँ अपनी कोटि और विश्वसनीयता के लिए मशहूर हैं। आज विश्वास करना कठिन-सा लगता है, परन्तु यह सच है कि पहले उस देश की वस्तुओं को सस्ती और घटिया माना जाता था। उन वस्तुओं को प्रतिष्ठा मिलने का श्रेय सांख्यिकीय कोटि नियंत्रण तकनीकों को जाता है जिन्हें एक अमरीकी सांख्यिकी-विद् डब्ल्यू. ए. श्यूहॉर्ट ने विकसित किया और जिन्हें जापान में बड़े पैमाने पर अपनाया गया। इन तकनीकों के पीछे मुख्य सिद्धांत यह है कि उत्पादन प्रक्रिया यदि पहचान योग्य अपक्रियाओं (identifiable malfunctioning) से ग्रस्त नहीं है तो विनिर्मित वस्तुओं की कोटि में होने वाले अंतर (variation) अद्भुत सांख्यिकीय नियमितता (statistical regularity) को प्रदर्शित करेंगे। कोटि इंजीनियर का दायित्व होता है कि वह सदा ही उत्पादों के नमूनों की जांच करता रहे और इस बात पर ध्यान दे कि कोटि में आने वाले अंतरों की सांख्यिकीय नियमितता बनी रहे। यदि ऐसा नहीं होता तो आवश्यक हो जाता है कि उसके कारण का पता लगाया जाए और उसे दूर करने के उपाय किए जाएँ।

उत्पादों की कोटि की सांख्यिकीय नियमितता का यह अर्थ नहीं होता कि सभी विनिर्मित मदें (manufactured items) एकसमान कोटि की हों। अलग-अलग मदों के बीच कोटि का अंतर हो सकता है लेकिन मदों के अधिकांश प्रचयों (lots) में निर्धारण मानक से निर्दिष्ट मात्रा में विचलन (deviation) का अनुपात प्राय: स्थिर बना रहता है। 25 मि. मी. लम्बा पेच (screw) बनाने वाली कोई मशीन यदि अत्यंत सुचारु रूप से चल रही है तब भी उसमें बनने वाले सभी पेच 25 मि. मी. के ही नहीं होंगे। कुछ तो 25 मि. मी. से बड़े हो सकते हैं और कुछ छोटे, लेकिन उनके बीच होने वाले अंतर का स्वरूप इस अर्थ में स्थिर होगा कि पेचों के अधिकांश प्रचयों में निर्दिष्ट लम्बाई से छोटे आकार के पेचों का अनुपात एक प्रचय से दूसरे प्रचय के बीच स्थिर बना रहेगा।

1.3.5 जीवन बीमा

जीवन बीमा व्यवसाय की सफलता भी सांख्यिकीय नियमितता के सिद्धांत पर आश्रित है। किसी व्यक्ति की मृत्यु के समय में उसकी उम्र अत्यंत परिवर्ती (variable) होती है, लेकिन जहाँ तक व्यक्तियों के एक बहुत बड़े सजातीय वर्ग (homogenous group) का संबंध है, किसी निर्दिष्ट उम्र तक पहुंचने से पूर्व मरने वालों का अनुपात स्थिर होता है। लोगों की मृत्यु के समय की उम्र के पिछले रिकार्ड के आधार पर उन व्यक्तियों के अनुपात का परिकलन किया जा सकता है जिनकी मृत्यु 25 वर्ष या कम, 30 वर्ष या कम या 35 वर्ष या कम उम्र में हुई। उसी तरह पूरक अंक (complementary figure) का परिकलन किया जा सकता है, अर्थात् उन लोगों का अनुपात जो 25, 30, 35 आदि वर्षों तक जीवित रहे। अंकों का दूसरा सेट, जो X-उम्र तक जीवित रहने वाले व्यक्तियों के अनुपात को दिखाता है, जीवन तालिका (Life-table) का आधार होता है। चर X यहाँ विभिन्न मूल्य ले सकता है। जीवन तालिका का प्रयोग करके उस वार्षिक प्रीमियम की राशि का परिकलन किया जा सकता है जिसे इसलिए देना होता है क्योंकि नियत समय के पूरा होने पर अथवा मृत्यु हो जाने पर बीमाकृत राशि वापस मिल सके।

1.3.6 बाज़ार सर्वेक्षण और मतगणना

प्रतिस्पर्धी बाज़ार में उत्पादकों के लिए उपभोक्ताओं की पसंदों और बाज़ार में उनके अंश को जानना अत्यंत आवश्यक है। प्रजातंत्र में सरकार जनता के प्रति उत्तरदायी होती है अत: प्रशासन-नीति को लोकमत के अनुरूप होना चाहिए। लेकिन प्रत्येक उपभोक्ता या नागरिक के मत को जानना संभव नहीं होता। इसीलिए बाज़ार सर्वेक्षण और मतगणना किए जाते हैं, जिनके अंतर्गत उपभोक्ताओं और नागरिकों के प्रतिनिधि-नमूने का बड़ी सावधानी से चयन करके उनके मत को जानने का प्रयास किया जाता है।

1.3.7 युद्ध के समय सांख्यिकी

व्यापारी बेड़ा (convoy) का आकार: द्वितीय विश्वयुद्ध के प्रारंभिक वर्षों में अपनी पनडुब्बियों की सहायता से जहाजरानी की नाकाबंदी करने में जर्मनी को बहुत सफलता मिल रही थी। व्यापारिक नौ-परिवहन (merchant shipping) की बहुत अधिक क्षति हो रही थी। मित्र राष्ट्रों ने

व्यापारिक जहाज़ों को झुण्ड में अर्थात् व्यापारी बेड़े के रूप में समुद्र में भेजने का निर्णय लिया। उनकी रक्षा के लिए साथ में युद्धपोत भी जाते थे। इस संबंध में प्रश्न यह उठा कि इस प्रकार के व्यापारी बेड़े का आकार क्या हो, अर्थात् युद्धपोतों से रक्षित व्यापारिक जहाज़ों की संख्या क्या हो, ताकि जहाज़ों को कम से कम क्षति हो सके। पनडुब्बियों के आक्रमण से जहाज़ों को होने वाली क्षति के संबंध में सूचना व्यापारी बेड़े के आकार के रूप में लगाई गई। यह जानकर लोगों को अत्यंत आश्चर्य हुआ कि व्यापारी बेड़ों के आकार के बड़ा अथवा छोटा होने से डुबाए जाने वाले जहाज़ों की संख्या पर कोई अंतर नहीं आ रहा था। अर्थात् सरल शब्दों में कहा जा सकता था कि व्यापारी बेड़ा छोटा रहे अथवा बड़ा परन्तु क्षतिग्रस्त होने वाले जहाज़ों की संख्या उतनी ही होनी थी। इसलिए बड़े आकार के व्यापारी बेड़ों को समुद्र में भेजने का निर्णय लिया गया जिससे खो जाने वाले जहाज़ों के अनुपात और उनके साथ जाने वाले युद्धपोतों पर लगने वाली लागत को कम से कम किया जा सके।

निर्देशित अस्त्र: यूरोप में युद्ध के अंतिम दिनों में जर्मनी ने नव-विकसित मानवहीन V-सीरीज़ के निर्देशित प्रक्षेपास्त्रों द्वारा लंदन की बहुत बरबादी की। मित्र राष्ट्रों के लिए यह जानना अत्यंत आवश्यक था कि जर्मनी की यह निर्देशन प्रणाली (guidance system) पूर्णतः विकसित और सही थी या जर्मनी की हालत इतनी खराब हो चुकी थी कि वह अविकसित अस्त्रों का ही प्रयोग करने को बाध्य हो गया था। इन मिसाइलों से ग्रस्त स्थानों के सांख्यिकीय विश्लेषण से पता चला कि इनसे होने वाली मार निर्देशित नहीं बल्कि दैविक थी। यह इस बात का सबूत था कि मिसाइलों की निर्देशन प्रणाली पूर्णतः विकसित नहीं बल्कि अभी प्रयोग की हालत में थी।

1.3.8 स्वास्थ्य के संबंध में सांख्यिकी

अमरीका तथा पश्चिम के अन्य देशों में यह जानने के लिए महत्वपूर्ण सांख्यिकीय अध्ययन किए गए हैं कि पोलियो का टीका कहाँ तक कारगर सिद्ध हुआ है, धूम्रपान से फेफड़े के कैंसर की संभावना कहाँ तक बढ़ जाती है, आदि।

किसी क्षेत्र के भिन्न-भिन्न सामाजिक-आर्थिक वर्ग के लोगों के बीच अस्वास्थ्यता और रोगों के संबंध में प्राक्कलन की सहायता से वहाँ अस्पतालों और स्वास्थ्य केन्द्र प्रणालियों की योजनाओं को बनाने में सहायता मिलती है।

कलकत्ता के एक अस्पताल के रजिस्ट्रार द्वारा किए गए सर्वेक्षण से पता लगा है कि अस्पताल में दाखिल मरीजों के बीच मरने वालों में से बहुत बड़ी संख्या की मृत्यु रात के अंतिम घंटों में होती है। इस संबंध में यह प्रश्न उठता है कि क्या उन घंटों में रोगियों की देखभाल कम की जाती है ?

1.3.9 एक ज्योतिषी की भविष्यवाणी

एक ज्योतिषी ने दावा किया कि उसके द्वारा की गई भविष्यवाणी में से कम से कम 80 प्रतिशत सही सिद्ध हुई। अपने दावे को सही सिद्ध करने के लिए वह पहले से बताने को तैयार हो गया कि अस्पताल में जन्म लेने वाला कोई शिशु अगले सात दिन तक जीवित रहेगा या इस अवधि में उसकी मृत्यु हो जाएगी। इस संबंध में परीक्षण जब एक हज़ार से अधिक नवजात शिशुओं पर किया गया तब उसका पूर्वकथन 85 प्रतिशत स्थितियों में सही सिद्ध हुआ। लेकिन एक शंकालु सांख्यिकी-विद् ने विस्तारपूर्वक उसके पूर्वकथनों का विश्लेषण किया। उसने इन्हें दो वर्गों में बाँट दिया — (1) कि बच्चे की मृत्यु हो जाएगी; तथा (2) कि बच्चा सात दिन तक जीवित रहेगा। यह पाया गया कि इनमें से केवल 10 प्रतिशत के ही संबंध में उसने मरने की भविष्यवाणी की थी और इनमें से भी केवल आधे ही सही सिद्ध हुए। चूंकि अस्पताल में जन्म लेने वाले अधिकतर बच्चों की सात दिन तक जीवित रहने की संभावना रहती ही है अतः ज्योतिषी ने बड़े दावेपूर्वक अधिकांश के संबंध में जीवित रहने की भविष्यवाणी कर दी थी।

बोध प्रश्न 1

1 सांख्यिकी के प्रयोग के तीन दृष्टांत दीजिए — (i) समाचार-पत्र से, (ii) किसी लोकप्रिय विज्ञान पत्रिका से, और (iii) अर्थशास्त्र की पाठ्य-पुस्तक से।

. . . .

. . . .

. . . .

2 दिन-प्रतिदिन के जीवन में सांख्यिकी के उपयोग के पाँच दृष्टांत दीजिए।

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

1.4 सांख्यिकी का दुरुपयोग

मानव क्रियाओं के अनेक क्षेत्रों में सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग बड़े व्यापक रूप में किया जाता है। किसी दलील के पक्ष में यदि सांख्यिकीय आँकड़े प्रस्तुत किए जाते हैं तब उस पर अधिक विश्वास किया जाता है। परन्तु यह भी सच है कि सांख्यिकी का दुरुपयोग किया जा सकता है और ऐसा प्राय: होता भी है। कभी-कभी तो ऐसा जान-बूझकर कर दिया जाता है ताकि दूसरों को गुमराह किया जा सके या उन्हें भ्रम में डाला जा सके। परन्तु अधिकतर स्थितियों में ऐसा मुख्य सिद्धांतों के संबंध में अज्ञानता या समझ की कमी के कारण होता है। आम आदमी के लिए तो प्राय: सांख्यिकी का अर्थ होता है अंकों के साथ खेल करना, और इस कारण वह सभी सांख्यिकीय आँकड़ों को सन्देह की नज़र से देखता है। इसी कारण सांख्यिकी के संबंध में निम्नलिखित प्रकार के अपमानजनक शब्द तक कहे जाते हैं:

"सांख्यिकी के द्वारा आप कुछ भी सिद्ध कर सकते हैं"

तथा

"झूठ, सफेद झूठ और सांख्यिकी"

जिन स्थितियों में इसका दुरुपयोग होता है वहाँ सांख्यिकी और सांख्यिकीय विधियों के संबंध में अपमानजनक बातें कहना उचित ही लगता है।

नीचे सांख्यिकी के दुरुपयोग के कुछ विशिष्ट दृष्टांत दिए जा रहे हैं, जिससे उनके संबंध में आप सावधान रह सकें।

1.4.1 मानकीकरण के अभाव के कारण दुरुपयोग

सभी सांख्यिकी की शुरुआत प्रारंभिक अवस्था में वर्गीकरण, गणना या माप की प्रक्रिया से होती है। जब तक यह प्रक्रिया सुनिश्चित नहीं होती तब तक अंतिम परिणाम का कोई अर्थ नहीं होता। जब कहा जाता है कि भारत में परिवारों का औसत आकार छह व्यक्तियों का है तब हमें यह भी जानना चाहिए कि परिवार की परिभाषा किस प्रकार से की जा रही है। क्या इसका अर्थ है कि परिवार उन व्यक्तियों का समुदाय है जिनमें आपस में जैविक संबंध (biological relations) हैं और जो साथ-साथ रहते हैं ? क्या इसके अंतर्गत नौकर, अस्थायी अतिथि तथा बाहर रहने वाले प्रमुख सदस्य भी आ जाते हैं ? होस्टलों तथा बोर्डिंग हाउसों को क्या कहा जाएगा जिनमें वे व्यक्ति रहते हैं, जिनका आपस में कोई संबंध नहीं होता ? परिवारों के सांख्यिकीय अध्ययन के लिए यह आवश्यक है कि पहले ही इन प्रश्नों का उत्तर दे दिया जाए। यदि दो सर्वेक्षण परिवार की भिन्न-भिन्न परिभाषाओं का प्रयोग करते हैं तब इनके परिणामों के बीच तुलना नहीं की जा सकती। विभिन्न स्रोतों से प्राप्त सांख्यिकीय आँकड़ों के बीच तुलना करने के दौरान यदि यह निश्चित नहीं किया जाता कि समान संकल्पनाओं और मानकों का प्रयोग किया गया है, तब सांख्यिकी के गंभीर प्रकार के दुरुपयोग की संभावना बनी रहती है।

इस प्रकार के दुरुपयोग का एक दृष्टांत है विभिन्न देशों की बेरोज़गारी की दरों के बीच तुलना करना। जब रोज़गार स्थिति (employment status) को जानने का प्रयास किया जाता है

अर्थात् एक सरल द्विभाजन (dichotomy)— रोज़गार युक्त (employed) बनाम बेरोज़गार (unemployed) — तब मनमाने ढंग से परिभाषा इस प्रकार करनी होती है कि कुछ आंशिक रूप से रोज़गार युक्त व्यक्तियों को रोज़गार युक्त मान लिया जाता है तथा दूसरों को बेरोज़गार। यदि आंशिक रूप से रोज़गार युक्त व्यक्तियों को बेरोज़गार लोगों के वर्ग में रखने के बजाए बहुधा नियोज़ितों के वर्ग में रखा जाता है तब बेरोज़गारी की दर कम होगी। जब तक सभी देश आंशिक रूप से रोज़गारशुदा व्यक्तियों के वर्गीकरण के संबंध में कोई मानक प्रक्रिया को स्वीकार नहीं करते तब तक विभिन्न देशों की बेरोज़गारी की दरों के बीच तुलना करना तर्कसम्मत नहीं होगा। इस संबंध में कुछ और भी अधिक जटिल प्रश्न हैं: जैसे कि पूर्ण रोज़गार (full employment) क्या है, क्या परिवार के कार्य को भी रोज़गार माना जा सकता है, मौसमी प्रकार के कार्यों को किस कोटि में रखा जाए? इन प्रश्नों के संबंध में सभी के मत एक जैसे नहीं हैं।

एक समाजशास्त्रीय सर्वेक्षण से पता चला कि माँ द्वारा बताई गई बच्चों की संख्या, अलग से पिता द्वारा बताई गई संख्या से बहुत अधिक है तथा इनके बीच के अंतर को संयोग त्रुटियों (chance errors) के कारण नहीं माना जा सकता। इस सूचना को पाकर लोगों को अत्यंत विस्मय हुआ। बाद में इस विक्षोभी तथ्य के लिए एक अत्यंत सरल प्रकार का स्पष्टीकरण मिला। माँ और पिता से अलग-अलग पूछा गया था: "आपके कितने बच्चे हैं"? इस संबंध में उन्हें यह नहीं बताया गया था कि केवल जीवित बच्चों के संबंध में बताना है या इस संख्या में मरे हुए बच्चों को भी शामिल कर लेना है। अधिकतर उत्तरों में माँ ने तो मरे हुए बच्चों को भी शामिल कर लिया था, परन्तु पिता ने केवल जीवित बच्चों की संख्या ही बताई थी। इस प्रकार, हम देखते हैं कि किसी दम्पत्ति द्वारा पैदा किए हुए बच्चों की संख्या जैसे प्रश्न का भी तर्कसम्मत परिभाषिक आधार होना आवश्यक है।

1.4.2 समूहों के संयोजन में अंतर के कारण दुरुपयोग

संयुक्त राज्य अमेरिका में जब बताया गया कि वहाँ के भारतीय मूल के अमेरिकी नागरिकों की औसत आय अमेरिका में जन्मे नागरिकों की औसत से कई गुना अधिक है तब उस देश में प्रजातीय कटुता (racial bitterness) पैदा हो गई। परन्तु आँकड़ों के विस्तृत अध्ययन से पता चला कि भारतीय मूल के लोगों में उन व्यक्तियों की संख्या बहुत अधिक थी जो वैज्ञानिक, डॉक्टर, इंजीनियर और वकील जैसे अधिक आय वाले पेशों में थे। लेकिन इनमें से प्रत्येक पेशे में भारतीय मूल के लोगों की औसत आय अमेरिका में जन्मे नागरिकों की औसत आय से कम थी। भारतीयों की आय के समग्र औसत से अधिक होने का कारण यह था कि उच्च वेतन वाले पेशों में उनका अनुपात अधिक था।

जब असैनिकों (civilians) के वेतन में संशोधन करके उसको बढ़ा दिया गया, परन्तु साथ ही उनकी सेवा-निवृत्ति की उम्र को घटा दिया गया तब उनका औसत वेतन घट गया क्योंकि सेवा से निवृत्त हो जाने के कारण उच्च वेतन स्तर के अंतर्गत कम लोग ही रह गए। वेतन में संशोधन के पहले के और संशोधन के बाद के औसत वेतन के बीच तुलना करना गलत होगा क्योंकि इस संशोधन के पहले और संशोधन के बाद के वर्गों का संयोजन एक समान नहीं बना रहा।

1.4.3 प्रतिदर्शों के अनुचित चयन के कारण दुरुपयोग (Misuse due to Inappropriate Selection of Samples)

स्कूल के बच्चों के प्रतिदर्श (नमूना) से जब प्रति परिवार के स्कूल जाने वाले बच्चों की औसत संख्या निकाली जाती है तब संभावना इस बात की होती है कि इससे निकलने वाला परिणाम सही मान से बहुत अधिक हो सकता है। इसका कारण यह है कि प्रतिदर्श में प्रत्येक परिवार उतनी बार आएगा जितने कि उस परिवार के बच्चे स्कूल जाते हैं। इसलिए जिन परिवारों में स्कूल जाने वाले बच्चों की संख्या अधिक है, उन्हें उन परिवारों की तुलना में अधिक बार प्रस्तुत किया जाएगा जिनमें एसे बच्चों की संख्या कम है। इसलिए इस प्रतिदर्श से प्रति परिवार स्कूल जाने वाले बच्चों की औसत संख्या सही औसत से अधिक होगी।

बालिकाओं के एक विद्यालय की प्रत्येक छात्रा से पूछा गया कि उसके माता-पिता के कितने बालक-बालिकाएँ हैं। उसे यह भी बता दिया गया कि वह इस संख्या में अपने को भी शामिल

कर ले। सभी छात्राओं से प्राप्त उत्तरों को जोड़ने पर पता चला कि बालकों की अपेक्षा बालिकाओं की संख्या अधिक है। परन्तु जब इसी प्रकार का अध्ययन बालकों के एक स्कूल में किया गया तब वहाँ बालिकाओं की अपेक्षा बालकों की संख्या अधिक निकली। क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों हुआ ?

1.4.4 साहचर्य की दुर्व्याख्या के कारण दुरुपयोग (Misuse due to Misinterpretation of Association)

पिछले कई वर्षों में टेलीविज़न सेटों की संख्या और पागलखानों में पागलों की संख्या में वृद्धि हो गई है। परन्तु इससे निष्कर्ष निकालना गलत होगा कि टेलीविज़नों की संख्या बढ़ने से ही पागलों की संख्या बढ़ी है।

एक मेडिकल जर्नल के एक लेख में बताया गया कि जिन देशों में दूध का उत्पादन और उसका उपभोग बहुत बड़ी मात्रा में होता है वहाँ पर देखा गया कि अन्य देशों की अपेक्षा कैंसर की बीमारी अधिक होती है। परन्तु इस सांख्यिकीय तथ्य से यह निष्कर्ष निकालना गलत होगा कि दूध पीना कैंसर का कारण हो सकता है। हाँ, इसकी व्याख्या इस प्रकार की जा सकती है कि इन देशों के निवासी अधिक उम्र तक जीवित रहते हैं और चूंकि कैंसर की बीमारी प्रौढ़ों और वृद्धों में अधिक होती है इसलिए इन देशों में कैंसर के रोगियों की अधिक संख्या में होने का कारण यह है कि वहाँ पर मध्य-आयु वालों और वृद्धों की संख्या अधिक है।

सांख्यिकी-विदों के मतानुसार सांख्यिकीय चरों (Statistical variables) के साहचर्य की विभिन्न संख्यात्मक विधियाँ हैं। किसी वर्ष में उपयोग में आने वाले टेलीविज़न सेटों की संख्या और उसी वर्ष में पागलखानों में पागलों की संख्या के मान की सीरीज़ को परिकलित करने वाला कोई भी संख्यात्मक विधि मान अधिक होगा। लेकिन हम जानते हैं कि यह साहचर्य कार्यकारण संबंध (causation) को स्पष्ट नहीं करता। गौर करने की बात तो यह है कि यहाँ स्पष्ट साहचर्य एक तीसरे चर के कारण होता है, वह है 'समय' जिसके साथ दोनों का ही संबंध है।

1.4.5 तथ्यों का भ्रमकारी प्रस्तुतीकरण (Misleading Presentation of Facts)

सांख्यिकीय तथ्यों का प्रयोग कभी-कभी ऐसे लोगों के द्वारा किया जाता है जो अपना मतलब निकालने के लिए गुण-दोष का विवेचन न करने वाले पाठकों को निम्नलिखित विधियों द्वारा गुमराह करते हैं: (i) केवल अनुकूल बातों को प्रस्तुत करना और प्रतिकूल बातों को छिपाए रखना; (ii) केवल औसत को ही प्रस्तुत करना और औसत में होने वाले परिवर्तनों के संबंध में न बताना; (iii) तुलना के आधार को हटा देना; (iv) अन्य संभव विकल्पों की ओर संकेत का उल्लेख न करना; और (v) तथ्यों के ग्राफी प्रस्तुतीकरण की विधि में हेर-फेर करना।

बोध प्रश्न 2

क्या निम्नलिखित कथन सत्य है ? यदि नहीं, तो क्यों ?

i) चमत्कारी दवा X से जुकाम सात दिन में ठीक हो जाता है।

....

....

ii) यदि आप तैरना नहीं जानते तो भी इस नहर को पैदल चलकर ही पार कर सकते हैं, क्योंकि इसकी औसत गहराई एक मीटर ही है।

....

....

iii) व्यापार मंदी का सामना करने के लिए श्रमिकों ने अपनी मजदूरी में 20 प्रतिशत की कटौती को स्वेच्छा से ही स्वीकार कर लिया। बाद में व्यवसाय की स्थिति सुधर जाने पर उनकी मजदूरी में 10 प्रतिशत वृद्धि कर दी गई, जिससे उनकी मजदूरी में हुई हानि के 50

....

iv) विख्यात दंत-चिकित्सक मानते हैं कि यदि आप X ब्रैंड की टूथपेस्ट का प्रयोग करें तो आपके दांतों में 23 प्रतिशत कम कैविटी होगी।

....

....

v) ग्रुप A और ग्रुप B, 1985–89 की अवधि में किसी कंपनी की बिक्रियों को प्रस्तुत करते हैं जिनकी अभिव्यक्ति आधार वर्ष 1985 की बिक्री के प्रतिशत के रूप में की गई है। एक तो साधारण वृद्धि को दिखाता है परन्तु दूसरा अत्यधिक वृद्धि को दिखाता है।

....

....

1.5 अर्थशास्त्र में सांख्यिकी की भूमिका

अर्थशास्त्र वह विज्ञान है जो मनुष्य के व्यवहार का अध्ययन व्यक्तियों के रूप में तथा छोटे और बड़े संगठनों के लिए निर्णयकर्त्ता के रूप में करता है। अन्य विज्ञानों के ही समान आर्थिक अनुसंधान की प्रक्रियाएँ हैं — आर्थिक घटनावृत्तों (economic phenomena) का प्रेक्षण, ऐसे घटनावृत्तों से आवश्यक विशेषताओं को निकालना और फिर उनका संक्षेपण करके आर्थिक नियमों को बनाना जिससे अन्य आर्थिक घटनावृत्तों के संबंध में पहले से ही बताना संभव हो सके। चूंकि आज सभी प्रकार की सरकारें (साम्यवादी, पूंजीवादी और इन दोनों के बीच की विचारधारा वाली) कराधान, सरकारी व्यय, निर्यात और आयात पर नियंत्रण, ब्याज दरों के विनियमन जैसे विभिन्न प्रकार के आर्थिक और विधिक उपायों द्वारा अर्थव्यवस्था में हस्तक्षेप कर सकती हैं और ऐसा करती भी हैं, इसलिए उनके लिए पहले से जानना आवश्यक होता है कि इन उपायों के क्या परिणाम होंगे। भारत में मिश्रित अर्थव्यवस्था है तथा सार्वजनिक क्षेत्रक के उद्यम अत्यंत महत्वपूर्ण भूमिका निभा रहे हैं, एवं देश के विकास के लिए पंचवर्षीय राष्ट्रीय योजनाएँ भी कार्यान्वित की गई हैं जिनके द्वारा विकास के लिए विशेष प्रकार की परियोजनाओं को बनाया जाता है।

आनुभविक तथ्य (empirical facts) या सांख्यिकी आर्थिक नियमों के निर्माण के आधार होते हैं और इनके सत्यापन के लिए भी इनकी आवश्यकता पड़ती है। सांख्यिकी की आवश्यकता इन कार्यों के लिए पड़ती है — विकास योजनाओं और परियोजनाओं को बनाने, कार्यान्वयन के दौरान उनकी प्रगति का निरीक्षण करने और अंत में यह मूल्यांकन करने के लिए कि योजनाओं या परियोजनाओं के उद्देश्यों को प्राप्त किया जा सका है अथवा नहीं।

व्यवहारवादी अर्थशास्त्र (Applied Economics) के जिन कुछ विशिष्ट क्षेत्रों में सांख्यिकी का प्रयोग व्यापक रूप में किया जाता है, वे ये हैं:

थोक और खुदरा कीमतों के सूचकांक एवं विभिन्न वर्ग की वस्तुओं के उत्पादन सूचकांक का निर्माण, मांग और उपभोग का पूर्वानुमान, जीवन-स्तर और उपभोक्ता व्यवहार का अध्ययन, मांग की लोच, उद्योगों के बीच संबंध —आगत-निर्गत गुणांक — राष्ट्रीय लेखा और राष्ट्रीय आय का परिकलन, आयोजन के लिए आर्थिक मॉडल का विकास, उत्पादन-फलन (production function) का प्राक्कलन, जनमत निर्धारण आदि।

इस तरह, यह स्पष्ट है कि व्यवहारवादी अर्थशास्त्री के लिए आवश्यक होता है कि उसे सांख्यिकी के मूल सिद्धांतों और उपकरणों का ज्ञान हो तथा आर्थिक समस्याओं को सुलझाने में उनके उपयोग के संबंध में उसे पूरी-पूरी जानकारी हो।

इस पाठ्यक्रम में अर्थशास्त्रियों के लिए सांख्यिकी के अनिवार्य तत्वों को आठ खंडों में प्रस्तुत किया जाएगा जिसमें यह पहला प्रवेश खंड है। अन्य खंड इस प्रकार हैं: (2) गणितीय उपकरण, (3) सांख्यिकीय आँकड़ों का प्रस्तुतीकरण, (4) एकचर आँकड़ों (univariate data) का संक्षेपण, (5) द्विचर (bivariate) आँकड़ों का संक्षेपण, (6) सूचकांक और काल श्रेणी (time series), (7) प्रतिदर्श (sampling) के मूल सिद्धांत; और (8) सर्वेक्षण प्रतिचयन के व्यावहारिक पक्ष।

बोध प्रश्न 3

i) मान लीजिए कि किसी दिए हुए क्षेत्र में रहने वाले परिवारों की संख्या को जानने के लिए आप बाज़ार सर्वेक्षण कर रहे हैं। इस सूचना को एकत्र करने वालों के मार्ग-निर्देशन के लिए "परिवार" की परिभाषा लिखिए।

....

....

ii) अर्थशास्त्र में सांख्यिकी के व्यावहारिक उपयोग के संबंध में संक्षेप में लिखिए।

....

....

1.6 सारांश

इस इकाई में सांख्यिकी के विषय-क्षेत्र के संबंध में बताया गया है। इस संदर्भ में कुछ मूल प्रश्नों तथा सांख्यिकीय आँकड़ों और सांख्यिकीय सर्वेक्षण की संकल्पनाओं के संबंध में प्रकाश डाला गया है। सांख्यिकी के विभिन्न प्रकार के उपयोगों और दुरुपयोगों के संबंध में भी आपको बताया गया है।

1.7 शब्दावली

प्रतिदर्शज (Statistic) : एक गणितीय मान, जो किसी प्रतिदर्श की विशेषता को संक्षेप में बताता है।

सांख्यिकी (Statistics) : किसी दृष्टिगोचर घटनावृत्त से संबंधित अनेक संख्यात्मक आँकड़े। ऐसे आँकड़ों के विश्लेषण एवं संग्रह की क्रिया-पद्धति से संबंधित विषय।

1.8 कुछ उपयोगी पुस्तकें

मेहता, बी. सी. 1986. **प्रारम्भिक सांख्यिकी**: राजस्थान हिन्दी ग्रंथ अकादमी, जयपुर द्वितीय संस्करण, अध्याय 1

Asthana, B.N. 1987, *Elements of Statistics.* Dhaitanya Publishing House, Allahabad.

Elhance, D.N. and Elhance, Veena 1988. *Fundamentals of Statistic.* 1988, Kitab Mahal, New Delhi.

1.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

1 i) थोक कीमत सूचकांक

ii) जनसंख्या वृद्धि दर

iii) उपभोक्ता कीमतों का सूचकांक।

किन्हीं और दो को आप स्वयं बताइए।

2 आयोजन, आप स्वयं चार उदाहरण दीजिए।

बोध प्रश्न 2

भाग 1.4 को देखिए।

बोध प्रश्न 3

i) इसे आप स्वयं कीजिए।

ii) भाग 1.5 देखिए।

इकाई 2 सांख्यिकी की कुछ संकल्पनाएँ और स्रोत

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

यह इकाई आपको सांख्यिकी की कुछ संकल्पनाओं और स्रोतों से परिचित कराती है। इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप:

- प्रतिदर्श और प्रतिदर्श की भूल के बारे में जान सकेंगे;
- आँकड़ों के संग्रह के प्राथमिक और गौण स्रोत जान सकेंगे; और
- भारतीय सरकारी आँकड़ों के स्रोत और कुछ समस्याओं के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे।

2.1 प्रस्तावना

यह इकाई आपको सांख्यिकी के मूलभूत सिद्धांतों, संकल्पनाओं और स्रोतों से परिचित कराएगी। हम विस्तारपूर्वक वर्णन करेंगे कि व्यक्ति तथा जनसंख्या शब्द का प्रयोग सांख्यिकी में किस प्रकार किया जाता है। हम प्रतिदर्श की मूलभूत संकल्पना का परिचय देंगे और प्रतिदर्श (नमूना) से होने वाली भूल का विवरण भी देंगे। इसके अतिरिक्त, हम आँकड़े एकत्रित करने के प्राथमिक और गौण तरीकों पर टिप्पणी करेंगे। साथ ही, हम भारतीय अर्थव्यवस्था की दो मुख्य सांख्यिकी श्रृंखलाओं की खुली तस्वीर भी प्रस्तुत करेंगे।

2.2 सांख्यिकी आँकड़े

सांख्यिकी का संबंध संख्या-संबंधी सूचना से है। सांख्यिकी की सामग्री आँकड़े हैं जो निरीक्षण, गणना अथवा किसी इकाई की माप से पैदा होते हैं। उदाहरण के लिए, इकाई एक सजीव और निर्जीव वस्तु, उनका समूह अथवा एक घटना हो सकती है। जब हम कहते हैं कि परिवार विशेष शिक्षित है तो हमारी यह क्रिया उस परिवार को उस वर्ग में स्थापित करती है जिसमें हम अन्य शिक्षित परिवारों को रखते हैं। गणना विधि द्वारा, हम परिवार के सदस्यों की संख्या ज्ञात कर सकते हैं। माप द्वारा, हम जान सकते हैं कि परिवार के सबसे लम्बे सदस्य की लम्बाई 178 सेंटीमीटर है। यहाँ इकाई, जिसपर निरीक्षण, गणना अथवा माप हो रहा है, वह उस परिवार विशेष का पुरुष है। निरीक्षण, गणना और माप का परिणाम सांख्यिकी आँकड़े हैं, इन्हीं का सांख्यिकी अध्ययन में प्रयोग किया जाता है।

यद्यपि एक इकाई पर एकत्र आँकड़े सांख्यिकी अध्ययन की मूलभूत सामग्री है। इसका संबंध कभी भी एक अकेली इकाई से नहीं होता बल्कि इन इकाइयों का एक सुपरिभाषित सेट, समूह अथवा वर्ग होता है। एक परिवार विशेष की आय अथवा सदस्यों की संख्या जानने को एक सांख्यिकी समस्या नहीं माना जाता। लेकिन जब हम परिवारों के एक सुपरिभाषित समूह के बारे में विचार करते हैं, उदाहरण के लिए दिल्ली में रहने वाले परिवार जिनमें गृहस्वामी, केन्द्रीय सरकारी कर्मचारी हैं, और उस समूह के बारे में कुछ निर्धारित करना चाहते हैं, जैसे समूह में पाँच से अधिक सदस्यों वाले और 1000 रुपए महीने से कम आय वाले परिवारों का अनुपात — तब यह निश्चित रूप से एक सांख्यिकी समस्या है। इसे जानने के लिए हमें समूह में प्रत्येक परिवार (या कुछ चुने हुए परिवारों) की संख्या और आय निर्धारित करनी होगी, लेकिन इन परिवारों की समरूपता और इस समरूपता का परिवार की आय और आकार से संबंध सांख्यिकी के लिए असंगत है। सांख्यिकी का संबंध एक समूह से है, न कि आँकड़े प्राप्त कर लेने के पश्चात् समूह में व्यक्तियों की समरूपता से।

2.3 व्यक्ति और जनसंख्या

सांख्यिकी में व्यक्ति शब्द का प्रयोग सामान्य रूप में एक इकाई के पर्यायवाची के तौर पर प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, जब हम 1989 के दौरान दिल्ली में प्रतिदिन होने वाली वर्षा की मात्रा में रुचि रखते हैं तब 1989 में दिल्ली में 365 दिनों में से प्रत्येक दिन एक 'व्यक्ति' है और वर्षा की मात्रा को इन व्यक्तियों में से प्रत्येक व्यक्ति पर मापा जाता है। जब हम एक पति और उसकी पत्नी के बीच आयु में अंतर का अध्ययन करना चाहते हैं तब प्रत्येक पति-पत्नी का जोड़ा एक 'व्यक्ति' माना जाता है। यदि हम यह जानना चाहते हैं कि यदि एक सिक्का उछाला जाए तो चित और पट आने की बराबर संभावना है, तो सिक्के की प्रत्येक उछाल सांख्यिकी में एक 'व्यक्ति' है। यदि हम कृषि उत्पादिता के संबंध में भारत के विभिन्न ज़िलों की तुलना करना चाहते हैं तो भारत का प्रत्येक ज़िला एक 'व्यक्ति' है।

एक सांख्यिकी अध्ययन हमेशा व्यक्तियों के एक समूह के बारे में होता है। 1990 में दिल्ली में वर्षा की स्थिति में, 1990 में 365 दिनों का समूह है जिसमें से प्रत्येक एक सांख्यिकी व्यक्ति है। शादीशुदा जोड़े में आयु-भिन्नता तभी अर्थपूर्ण है जब हम जोड़ों के उस समूह को अलग करते हैं जिसमें हम रुचि रखते हैं। हमें दिल्ली में रहने वाले उन सभी जोड़ों में दिलचस्पी हो सकती है जो 1980 अथवा उसके बाद विवाहित हुए थे और तब ये जोड़े वे समूह हैं जिनमें हमें दिलचस्पी है।

समूह, जिसमें हमें सांख्यिकी दिलचस्पी है, को सांख्यिकी शब्दावली में जनसंख्या कहते हैं। शायद विश्व शब्द ज्यादा उचित है लेकिन जनसंख्या शब्द का प्रयोग प्रायः किया जाता है।

सांख्यिकी जनसंख्या कई बार केवल एक संकल्पना हो सकती है, जिसका वास्तविक संसार में अस्तित्व न हो। ऊपर दिए गए तीसरे उदाहरण में जब हम एक सिक्के को यह देखने के लिए उछालते हैं कि क्या यह निष्पक्ष (unbiased) है, तब जनसंख्या सिक्के के अनगिनत संभव उछाल हैं, इनका कभी अन्त नहीं हो सकता। यह अनन्त जनसंख्या का एक उदाहरण है।

2.4 एक व्यक्ति की विशेषताएँ

एक सांख्यिकी व्यक्ति पर निरीक्षण, गणना अथवा माप के द्वारा हम उसकी सांख्यिकी विशेषताएँ निर्धारित करते हैं। एक दिन में वर्षा की मात्रा दिन की सांख्यिकी विशेषता है। एक हिन्दू परिवार की जाति, अथवा परिवार के सदस्यों की संख्या या एक परिवार "गरीब" "मध्यम वर्ग" अथवा "अमीर" है, ये सब परिवार की विशेषताएँ हैं। एक सिक्के को उछालने से चित अथवा पट मिलना, उछाल की विशेषता है।

चूंकि जनसंख्या के एक व्यक्ति की विशेषताएँ सामान्यतया हर व्यक्ति के लिये अलग होती है, इसलिए इसे एक "**सांख्यिकी चर**" (Statistical Variable) कहा जाता है। सांख्यिकी चर गुणात्मक भी हो सकता है, और मात्रात्मक भी।

एक हिन्दू परिवार की जाति एक गुणात्मक चर है। एक गुणात्मक चर हमें बताता है कि कई पारस्परिक निबेधक (mutually exclusive) वर्गों में से एक व्यक्ति किससे संबंध रखता है। जब हम एक परिवार के आर्थिक स्तर को "गरीब", "मध्यम वर्ग" या "अमीर" के तौर पर वर्णित करते हैं तब आर्थिक स्तर एक गुणात्मक चर है। एक व्यक्ति की आंख का रंग — वर्गीकृत चर (Classified Variable) है। गुणात्मक चर को कई बार एक "वर्ग" अथवा एक "वर्गीकृत" (Categorical Variable) चर कहा जाता है।

याद रहे कि कुछ गुणात्मक चरों में एक अतर्निहित वर्गीकरण हो सकता है: जब एक परिवार को "मध्यम वर्ग" के तौर पर वर्गीकृत किया जाता है तो अर्थ यह है कि उसका आर्थिक स्तर "गरीब" से बेहतर है लेकिन "अमीर" से घटिया है। लेकिन आंखों के रंग में ऐसा कोई श्रेणी भाजन नहीं होता।

एक गुणात्मक चर के संभावित वर्गों को कई बार सुविधा के लिए संख्यात्मक रूप में लिखा जाता है। आर्थिक स्तर को "अमीर" के लिए 1, "मध्यम वर्ग" के लिए 2 और "गरीब" के लिए 3 के द्वारा लिखा जा सकता है। यद्यपि ये कोड संख्या की तरह दिखाई देते हैं, वास्तव में ये चिन्ह हैं और इन्हें संक्षेप के तौर पर प्रयोग किया जाता है। इसी प्रकार हम अमीर को R, मध्यम वर्ग को M और गरीब को P के तौर पर भी कोड कर सकते हैं।

एक विशेषता जिसे संख्या के रूप में मापा और व्यक्त किया जा सकता है उसे मात्रात्मक चर कहते हैं। एक दिन में वर्षा की मात्रा, एक विवाहित जोड़े का आयु-अंतर, परिवार के सदस्यों की संख्या, मात्रात्मक चरों के उदाहरण हैं। मात्रात्मक चरों के दो प्रकारों में अंतर किया जा सकता है; असतत् (Discrete) और सतत् (Continuous) एक मात्रात्मक चर असतत होता है यदि यह कई भिन्न-भिन्न मूल्य लेता है। परिवार के सदस्यों की संख्या 1 अथवा 2 अथवा 3 आदि हो सकती है। इसी प्रकार, एक फूल में पत्तियों की संख्या। कुछ मात्रात्मक चर संकल्पनात्मक रूप से किसी सीमा में कोई भी मूल्य ले सकता है। उदाहरण के लिए, यदि हम समय को सैंकड़ों के किसी भाग के रूप में माप सकते हैं, एक व्यक्ति की आयु वर्षों में n से 200 की सीमा में हो सकती है। यह सतत चर का एक उदाहरण है। ध्यान रहे कि सभी मापने के तरीकों की सीमाओं के कारण, संकल्पनात्मक रूप में सतत चर कोई भी मूल्य ले सकता है, जिन्हें माप की प्रत्यक्ष इकाइयों द्वारा अलग-अलग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, आयु को परम्परानुसार वर्षों या वर्षों और महीनों में मापा जाता है और इसलिए वास्तव में असतत है।

हम एक व्यक्ति की केवल एक विशेषता का अध्ययन कर सकते हैं और इस एकल चर के अध्ययन को एकचर अध्ययन (univariate studies) कहा जाता है। जैसा प्राय: होता है, जब एक व्यक्ति पर एक से अधिक चर दर्ज किया जाता है तो उसे बहु-चर अध्ययन (multivariate) कहते हैं। दो चरों वाला द्विचर (bivariate) अध्ययन और तीन चरों वाला त्रिचर (trivariate) अध्ययन विशेष स्थितियाँ हैं।

2.5 संपूर्ण गणना और प्रतिदर्श (नमूना)

एक सांख्यिकी अध्ययन में, अन्वेषक सामान्यतया पहले निरीक्षण करता है कि क्या आवश्यक

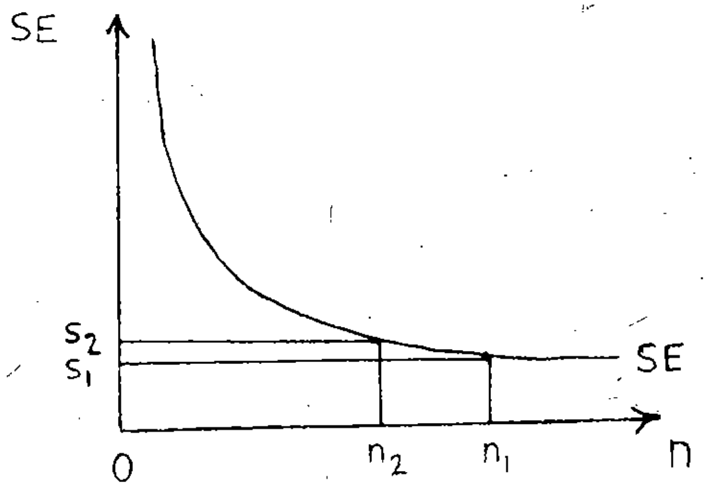
सूचना पहले ही उपलब्ध है — विस्तार में, संक्षेप में अथवा किसी अन्य रूप में। यदि यह प्राप्त नहीं है तो सूचना या तो प्रत्यक्ष रूप से (first-hand) अन्वेषक द्वारा जनसंख्या में सभी व्यक्तियों से या जनसंख्या के कुछ चुने हुए व्यक्तियों से एकत्रित की जा सकती है।

जब सूचना जनसंख्या में सभी व्यक्तियों से ली जाती है तो इसे संपूर्ण गणना कहा जाता है। एक संपूर्ण गणना तब आवश्यक है जब जनसंख्या के बहुत से छोटे भागों के लिए संक्षिप्त विवरण तैयार करना होता है। स्वभावत: एक बड़ी जनसंख्या की संपूर्ण गणना महंगी होती है। इसके लिए कई क्षेत्र-अन्वेषकों की आवश्यकता होती है जिन्हें प्रशिक्षण देना होता है। क्षेत्र-अन्वेषकों के तौर पर काम करने के लिए प्रशिक्षण के लिए बड़ी संख्या में योग्य व्यक्तियों को भर्ती करना कठिन है, विशेषतया जब बजट बाधाओं के कारण उन्हें दिया जाने वाला पारिश्रमिक कम होता है। बड़ी संख्या में क्षेत्र-अन्वेषकों का निरीक्षण और नियंत्रण करने के लिए बड़े स्तर पर संगठनात्मक प्रयत्नों की आवश्यकता है। क्षेत्र-अन्वेषकों में मूलभूत योग्यता और अनुभव की कमी होने और अपर्याप्त प्रशिक्षण तथा निरीक्षण होने के कारण क्षेत्र कार्य की गुणवत्ता प्राय: निम्न श्रेणी की होती है। यदि आवश्यक सूचना जटिल और विस्तृत है तो इस स्थिति में क्षेत्र से प्राप्त किए गए प्राथमिक आँकड़े भूल या अशुद्धता से दूषित होंगे। एकत्रित आँकड़ों की जाँच करने और उनमें से भूल और असंगतियाँ दूर करने में काफी समय और प्रयत्न लगता है। इसके अतिरिक्त बहुत अधिक आँकड़ों का संक्षेप करना स्वयं एक महंगी और समय लेने वाली प्रक्रिया है। आँकड़ों की लागत, समय और यथार्थता संबंधी विचार तथा संगठनात्मक समस्याओं के कारण संपूर्ण गणना प्राय: एक अव्यावहारिक साध्य हो जाता है।

भारत में, बहुत से अन्य देशों की तरह, संपूर्ण गणना 5 अथवा 10 वर्षों के अंतराल पर की जाती है। भारत में 10 वर्षों में एक बार जनसंख्या की जनगणना होती है। अगली जनगणना वर्ष 1991 में होगी। जनसंख्या गणना में, देश में प्रत्येक व्यक्ति से आयु, लिंग, वैवाहिक स्तर, व्यवसाय आदि के बारे में साधारण सूचना एकत्रित की जाती है। हम दस या पाँच वर्षों में पशुधन, कृषि और आर्थिक क्रियाओं की संपूर्ण गणनाएँ भी करते हैं।

2.5.1 प्रतिदर्श और गैर-प्रतिदर्श भूल

चूँकि कई स्थितियों में संपूर्ण गणना संभव नहीं होती, इसलिए सूचना प्राय: सभी व्यक्तियों से एकत्रित न करके सावधानी से चुने हुए व्यक्तियों के प्रतिनिधियों से एकत्रित की जाती है। इसे प्रतिदर्श अथवा नमूना (sampling) के नाम से जाना जाता है। यदि प्रत्येक व्यक्ति से सही सूचना प्राप्त करना संभव होता, तो संपूर्ण गणना जनसंख्या के बारे में त्रुटि-रहित सूचना देगी लेकिन प्रतिदर्श नहीं। प्रतिदर्श से निकाली गई औसत सामान्यतया पूरी जनसंख्या से निकाली गई औसत से कुछ भिन्न होगी। इसके अतिरिक्त, यदि एक भिन्न नमूना चुना जाता है तो संभावना यह है कि परिणाम पहले के नमूने से निकाले गए परिणाम से भिन्न होगा। इन्हें प्रतिदर्श के कारण उतार-चढ़ाव या साधारणत: प्रतिदर्श भूल (sampling error) के नाम से जाना जाता है। जब संपूर्ण गणना का प्रयोग किया जाता है तो कोई प्रतिदर्श भूल नहीं होती।

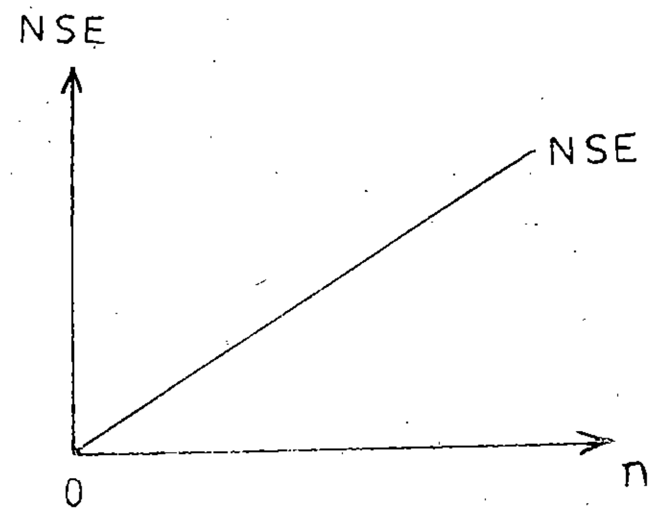


(चित्र 2.1)

प्राय: नमूने के आकार (नमूने में चुनी गई इकाइयों की संख्या) में वृद्धि के साथ प्रतिदर्श भूल कम हो जाती है और वास्तव में बहुत-सी परिस्थितियों में यह कमी नमूने के आकार के वर्गमूल के विपरीत रूप में अनुपातिक होती है (चित्र 2.1)। यहाँ यह देखा गया है कि यद्यपि प्रतिदर्श भूल में कमी नमूने के आकार में प्रारंभिक वृद्धि के समय बहुत अधिक होती है, लेकिन एक अवस्था के पश्चात् यह कम हो जाती है। दूसरे शब्दों में, प्रारम्भिक समय के बाद एक विशेष अवस्था के बाद प्रतिदर्श भूल को कम करने के लिए काफी अधिक प्रयास करना पड़ता है। नमूने का आकार बढ़ाकर हम सर्वेक्षण की लागत में भी वृद्धि करते हैं। इसलिए, एक निश्चित अवस्था के बाद अशुद्धि (प्रतिदर्श भूल में S S की वृद्धि द्वारा) में मामूली कमी करके लागत में काफी कमी (नमूने का आकार n_2 n_1 घटाकर) प्राप्त की जा सकती है। इस दृष्टिकोण से, संपूर्ण गणना सर्वेक्षण की बजाय भूल की अनुज्ञेय सीमा के भीतर अनुमान देने के लिए नमूना सर्वेक्षण का सहारा लेने के लिये मज़बूत तर्काधार है।

प्रतिदर्श भूल के अतिरिक्त, सभी सांख्यिकी सूचनाओं में एक अन्य प्रकार की भूल होती है। इसे गैर-प्रतिदर्श भूल (non–sampling error) के नाम से जाना जाता है। गैर-प्रतिदर्श भूल, मूलभूत रूप से व्यक्तियों से प्राप्त प्राथमिक आँकड़ों में अनिवार्य भूल के कारण होती है। प्रत्यर्थी प्रश्न को न समझने के कारण अशुद्ध सूचना दे सकता है अथवा इसलिए कि वह सही उत्तर नहीं जानता, या किसी न किसी कारण से वह सही सूचना देना नहीं चाहता। हमारे देश में कितने लोग अपनी सही उम्र जानते हैं ? जब आय बहुत से स्रोत से प्राप्त की जाती है तथा आंशिक रूप से वस्तुओं के रूप में प्राप्त की जाती है तो विज्ञापक के लिए क्या अपनी आय बिना सोचे बताना संभव है (यद्यपि वह ऐसा करना चाहता है) ? क्षेत्र-अन्वेषक के द्वारा भूल तब भी पैदा हो सकती है, जब वह ज्ञापक को प्रश्न ठीक प्रकार से समझाने में अथवा उत्तर को ठीक से लिखने में असमर्थ है। यहाँ तक कि संपूर्ण गणना में भी कुछ व्यक्तियों से सूचना एकत्रित करना असंभव हो सकता है — इसे निरुत्तरता (non–response) के तौर पर जाना जाता है। भूल **अन्वेषक पक्षपात** अथवा **मानवीय पक्षपात** के कारण भी पैदा हो जाती है। अन्वेषकों को प्रशिक्षण देते समय काफी सावधानी के बाव ूद, यह संभव है कि एक अन्वेषक प्रश्नों का गलत अर्थ निकाल सकता है। मानवीय पक्षपात एक प्राकृतिक घटना है। लगभग प्रत्येक मनुष्य में अपने मनोवैज्ञानिक दृष्टिकोण के कारण यह पक्षपात होता है। सावधान और सघन प्रशिक्षण के बाद भी इस पक्षपात को पूरी तरह दूर करना बहुत कठिन है। हम केवल इसे न्यूनतम करने का प्रयास कर सकते हैं। इन सभी प्रकार की भूल, जिनका नमूने से कोई संबंध नहीं है, को गैर-प्रतिदर्श भूल के नाम से जाना जाता है।

गैर-प्रतिदर्श भूल नमूने का आकार बढ़ने के साथ बढ़ने की संभावना होती है। गैर-प्रतिदर्श भूल (NSE) की बढ़ने की प्रवृत्ति होती है क्योंकि अन्वेषण में बहुत से व्यक्ति लगे होते हैं। सर्वेक्षण योजना सावधानी से बनाकर, अन्वेषकों को अच्छा प्रशिक्षण देकर, प्रश्नावली को सरल बनाकर, तथा किसी प्रकार का प्रोत्साहन देकर इन भूलों को न्यूनतम करने का प्रयास किया



(चित्र 2.2)

जा सकता है। संपूर्ण गणना प्रतिदर्श भूल से स्वतंत्र है लेकिन इसमें गैर-प्रतिदर्श भूल होती है। दूसरी ओर, नमूने से प्राप्त परिणामों में प्रतिदर्श भूल और गैर-प्रतिदर्श भूल दोनों होती हैं। सामान्य रूप में गैर-प्रतिदर्श भूलें प्रतिदर्श भूलों से कहीं अधिक होती हैं।

2.5.2 भूल: प्रतिदर्श बनाम संपूर्ण गणना

सांख्यिकी सिद्धांत बताता है कि किस प्रकार एक प्रतिनिधि नमूना चुना जाए और किस प्रकार प्रतिदर्श भूल को मापा और नियंत्रित किया जाए। यदि सिद्धांत के अनुसार, नमूना ठीक प्रकार से चुना जाता है तो स्वयं नमूने से प्राप्त सूचना से प्रतिदर्श भूल की कुल मात्रा आंकी जा सकती है। संपूर्ण गणना की तुलना में प्रतिदर्श में काम का पैमाना बहुत छोटा होता है। सूचना बहुत कम लोगों से प्राप्त करनी होती है। बहुत कम क्षेत्र अन्वेषकों की आवश्यकता होती है। उन्हें अधिक वेतन दिया जा सकता है और इसलिए अच्छी योग्यता वाले व्यक्तियों को भर्ती करना सुगम है। उन्हें प्रभावी रूप से प्रशिक्षण दिया जा सकता है और उनका निरीक्षण भी हो सकता है और इससे क्षेत्र-कार्य और क्षेत्र से एकत्रित प्राथमिक आँकड़ों की गुणवत्ता में बहुत सुधार होता है। इसलिए संपूर्ण गणना की तुलना में एक ठीक प्रकार से संचालित नमूना अन्वेषण की स्थिति में गैर-प्रतिदर्श भूल बहुत कम होती है। नमूने की स्थिति में कुल भूल — प्रतिदर्श भूल तथा गैर-प्रतिदर्श भूल — संपूर्ण गणना में कुल भूल की अपेक्षा बहुत कम होती है, यद्यपि संपूर्ण गणना में केवल गैर-प्रतिदर्श भूल ही होती है।

2.5.3 प्राचल, आँकड़ा व अनुमान

जब एक संक्षिप्त संख्या या तो वास्तव में आंकी जाती है या संकल्पनात्मक रूप से सोची जाती है या फिर एक सांख्यिकी जनसंख्या में सभी व्यक्तियों के विशिष्ट-मूल्यों से गणना की जाती है तब इसे जनसंख्या के प्राचल के नाम से जाना जाता है। 1989 में भारत में औसत वार्षिक गृहस्थ उपभोग व्यय जनसंख्या का प्राचल है। इस जनसंख्या में भारत के सारे गृहस्थ परिवार शामिल हों। जब एक विशेष सिक्का उछाला जाता है तो उसमें दिखाई देने वाले चित्त का अनुपात उस सिक्के के अनगिनत संभव उछालों की संकल्पनात्मक जनसंख्या का एक प्राचल है।

जब एक जनसंख्या की संपूर्ण गणना संभव नहीं होती, तब उस जनसंख्या के किसी प्राचल का ठीक मूल्य आंकना संभव नहीं है। ऐसी स्थिति में प्रतिदर्श का सहारा लिया जा सकता है और प्रतिदर्श में इकाइयों पर आधारित एक संख्या निकाली जाती है, जो स्थिरांक के अनुरूप होती है और जिसका मूल्य निकालना है। नमूने से निकाली गई ऐसी मात्रा या संख्या को **आँकड़ा** कहा जाता है और इसे स्थिरांक के लिए एक **अनुमान** के तौर पर लिया जा सकता है। प्रतिदर्श भूल के कारण जनसंख्या के प्राचल के अनुमान अथवा नमूने से आंका गया आँकड़ा, प्राचल के वास्तविक मूल्य से भिन्न होगा।

भारत का राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन पूरे भारत के करोड़ों गृहस्थों में से चुने गए कुछ हज़ार गृहस्थों के नमूने से सूचना एकत्रित करके प्रति वर्ष गृहस्थ उपभोग व्यय के स्वरूप पर सांख्यिकी अन्वेषण संचालित करता है। इस नमूने से हम पूरे भारत के लिए औसत गृहस्थ उपभोग व्यय का अनुमान लगाने के लिए एक उपयुक्त आँकड़े की गणना कर सकते हैं, जो भारत में सभी गृहस्थों की जनसंख्या का प्राचल है।

इसी प्रकार, सभी संभव उछालों में से चित्त के अनुपात का अनुमान करने के लिए हम सिक्के को नियत बार — 1000 बार-उछाल सकते हैं और चित की संख्या की गिनती कर सकते हैं। सिक्के की 1000 उछालों को सिक्के के सभी संभव उछालों की जनसंख्या से नमूने के तौर पर लिया जा सकता है। 1000 उछालों में से चित का अनुपात एक ऐसा आँकड़ा है जिसे संकल्पनात्मक जनसंख्या में अनुरूप प्राचल के लिए अनुमान के तौर पर प्रयोग किया जा सकता है।

प्रतिदर्श के आँकड़े द्वारा जनसंख्या-प्राचल के अनुमान की समस्या का विवेचन खंड 7 में विस्तारपूर्वक किया जाएगा।

बोध प्रश्न 1

1 यदि आपको हाई स्कूल अवस्था पर शिक्षा की लागत का एक सांख्यिकी अन्वेषण करने के

लिए कहा जाता है तो आप सांख्यिकी व्यक्ति को किस प्रकार परिभाषित करेंगे ? प्रत्येक ऐसे व्यक्ति की आप कौन-सी विशेषताओं का निरीक्षण करेंगे ? सांख्यिकी जनसंख्या को आप कैसे सीमित करेंगे ? जनसंख्या के कुछ प्राचलों, जिनका आप मूल्यांकन करना चाहेंगे, का वर्णन कीजिए।

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2 किसी सांख्यिकी रिपोर्ट को देखिए और पता लगाइए कि वह संपूर्ण गणना पर आधारित है अथवा नमूने पर। रिपोर्ट में अध्ययन की गई जनसंख्या का आँकड़ा, व्यक्ति, जनसंख्या, व्यक्तिगत विशेषताएँ और प्राचलों को पहचानिए।

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3 एक विश्वविद्यालय विशेष में अर्थशास्त्र में स्नातकोत्तर (एम.ए.) डिग्री के लिए प्रत्येक विद्यार्थी की निम्न विशेषताएँ नोट की गई: लिंग, आयु, ऊँचाई, चश्मा लगाते हैं अथवा नहीं, परिवार के सदस्यों की संख्या, वार्षिक पारिवारिक आय आदि। इन मदों को वर्गीकृत, मात्रात्मक-असतत अथवा मात्रात्मक-सतत में वर्गीकृत कीजिए।

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

4 तालिका के रूप में संपूर्ण गणना या नमूने द्वारा सूचना एकत्रित करने के तुलनात्मक लाभ और हानियाँ दिखाइए।

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2.6 आँकड़ों के प्राथमिक और गौण स्रोत

जब सांख्यिकी सूचना व्यक्तियों द्वारा प्रत्यक्ष रूप से — प्रत्यक्ष प्रेक्षण, गणना अथवा माप द्वारा — एकत्रित की जाती है, तो ऐसी उपलब्ध सूचना को **प्राथमिक** कहा जाता है चाहे "वह संपूर्ण गणना द्वारा या फिर नमूने द्वारा प्राप्त की गई है"। लेकिन प्राय: आवश्यक सूचना दूसरे लोगों द्वारा पहले ही एकत्रित की जा चुकी होती है और प्रकाशित पुस्तकों अथवा पाण्डुलिपियों में संक्षिप्त रूप में अथवा विस्तार में प्राप्त हो सकती है। सांख्यिकी सूचना के इन स्रोतों को **गौण** कहा जाता है। प्राथमिक आँकड़े एकत्रित करना आरंभ करने से पूर्व, हमेशा साहित्य की खोज और पता कर लेना चाहिये कि क्या वांछित सूचना गौण स्रोतों से प्राप्त की जा सकती है, अथवा नहीं।

2.7 प्राथमिक आँकड़े एकत्रित करने के तरीके

प्राथमिक आँकड़े एकत्रित करने के कई तरीके हैं। जब लोगों से सामाजिक-आर्थिक सूचना प्राप्त करनी है तब आवश्यक सूचना प्राप्त करने के लिए सबसे प्रचलित तरीका व्यक्तियों का साक्षात्कार करने के लिए अन्वेषकों को भेजना है। अन्वेषक एक विस्तृत प्रश्नावली का प्रयोग कर सकते हैं, जिसमें प्रश्न पहले ही मुद्रित होते हैं। प्रत्येक प्रश्न के आगे, उत्तर के लिए खाली स्थान होता है। इसके अतिरिक्त वे सूचियों का प्रयोग कर सकते हैं जिनमें केवल उत्तर तालिका के रूप में रिकार्ड किए जाते हैं। व्यक्तिगत साक्षात्कार का एक लाभ यह होता है कि यदि ज्ञापक को कोई संदेह है तो अन्वेषक प्रश्नों को पूरी तरह व्याख्या कर सकता है। इसके अतिरिक्त, अन्वेषक ज्ञापक को मिलने के लिए कई बार जा सकता है, यदि पहली बार भेंट नहीं होती है। डर यह है कि अन्वेषक जान-बूझकर या बिना जाने सही उत्तर देने की बजाय ज्ञापक को खुश करने वाले उत्तर देने के लिए प्रभावित कर सकता है। कभी-कभी तो एक बेईमान अन्वेषक सूची को कल्पित तथ्यों द्वारा भरकर ही भेज सकता है।

कई बार अन्वेषक ज्ञापकों से प्रश्न पूछने की बजाय प्रत्यक्ष प्रेक्षण अथवा माप द्वारा सूचना प्राप्त कर सकता था।

एक अन्य तरीका, जो विकसित देशों में काफी अपनाया गया है, ज्ञापकों को विस्तृत निर्देश के साथ कि उसे किस प्रकार भरना चाहिए, प्रश्नावलीं डाक द्वारा भेजना है। ज्ञापक स्वयं प्रश्नावली भरता है और उसे सांख्यिकी दफ्तर को वापिस भेज देता है। यदि यह एक निश्चित समय में वापिस नहीं की जाती तो एक स्मरण-पत्र (अनुस्मारक) भेजा जा सकता है या अन्वेषक स्वयं ज्ञापक से भेंट के लिए जा सकता है। हमारे देश में, अज्ञानता और उदासीनता के कारण यह तरीका काम में नहीं लाया जा सकता। प्राय: निरक्षरता की दर काफी अधिक रहती है।

प्रश्नावली अथवा एक सूची को तैयार करना एक काफी कुशलता का कार्य है। प्रश्न या वाक्यों का वर्णन संक्षिप्त होना चाहिए, जिससे संदिग्धता अथवा गलत अर्थ निकालने की संभावना न रहे। प्रत्येक संकल्पना, विशेषतया वे जो प्रतिदिन प्रयोग में आती हैं, को ध्यान से परिभाषित किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए, आयु के बारे में पूछते हुए यह स्पष्ट किया जाना चाहिए कि इसे वर्षों अथवा वर्षों और महीनों में एक निश्चित तिथि या पिछले जन्म-दिन या फिर अगले जन्म-दिन पर व्यक्त करना है। प्रश्नों अथवा वाक्यों को ध्यान से व्यवस्थित करना चाहिए जिससे साक्षात्कार के दौरान एक प्रश्न से दूसरे प्रश्न पर आसानी से पहुँचा जा सके। प्रश्नावली तैयार करते समय सूचना को क्रमबद्ध करने में सुविधा के बारे में भी विचार करना चाहिए।

प्राथमिक आँकड़ों को एकत्रित करने के बाद आंतरिक और बाह्य असंगति के लिए जाँचना और यदि आवश्यक हो तो उन्हें संक्षिप्त करने से पहले संपादित करना पड़ता है। आजकल सांख्यिकी आँकड़ों का विश्लेषण करने के लिए प्राय: कंप्यूटर का प्रयोग किया जाता है। चूँकि कंप्यूटर अभी प्रश्नावली अथवा सूची से प्रत्यक्ष रूप से सूचना नहीं पढ़ सकते, इसलिए इन्हें एक ऐसे माध्यम में लिखना पड़ता है जिसे कंप्यूटर आसानी से पढ़ सके।

2.8 आँकड़ों के गौण स्रोत

बहुत-सी सांख्यिकी सूचना प्रशासनिक अथवा संगठित आर्थिक क्रियाओं का परिणाम होती हैं। वयस्क मताधिकार के अंतर्गत वोटरों की सूची सभी बालिगों की आयु, लिंग और पते के बारे में विस्तृत सूचना देती है। अस्पतालों के पास चिकित्सा/इलाज किए गए सभी मरीज़ों के रिकार्ड होने चाहिए। स्कूलों और कॉलेजों के पास विद्यार्थियों के रिकार्ड होते हैं। आयकर दफ्तरों के पास आयकरदाताओं के रिकार्ड होते हैं। पुलिस स्टेशनों के पास अपराधों के रिकार्ड होते हैं। बैंक में जमा राशि और वापसी तथा ऋण देने तथा वापिसी का लेखा होता है। सामान्यतया, ये लेखे बिखरे हुए होते हैं, लेकिन कानूनी तौर पर इन सूचनाओं का सार विशिष्ट अधिकारियों को भेजा जाना चाहिए, जो उन्हें संकलित और प्रकाशित कर सकें।

इस प्रकार के प्रशासनिक आँकड़ों के अतिरिक्त, भविष्य के लिए योजनाएँ बनाने में सहायता करने के लिए सरकार और अन्य सार्वजनिक अभिकर्ताओं द्वारा और अधिक सूचना नियमित रूप से एकत्रित तथा प्रकाशित की जाती है। प्रत्येक दस वर्ष बाद जनगणना, पाँच वर्ष के बाद पशु-गणना, कृषि, उद्योग और व्यापार की गणना, अधिकांश आधुनिक सरकारों के लिए आवश्यक है।

उन आँकड़ों के अतिरिक्त जो प्रतिदिन, सप्ताह, महीने, छमाही, वर्ष, पाँच वर्ष या दस वर्ष के नियमित अंतराल पर एकत्रित अथवा प्रकाशित किए जाते हैं, जब विशेष समस्याओं का अध्ययन करने के लिए सांख्यिकी सूचना की आवश्यकता होती है, तो ये विशेष तौर पर एकत्रित की जाती हैं।

आँकड़े अनुसंधान संस्थान, विश्वविद्यालयों और नियंत्रक अधिकारियों द्वारा भी एकत्रित किए जाते हैं तथा सामान्य प्रयोग के लिए प्रकाशित किए जाते हैं।

2.9 भारत में सांख्यिकी प्रणाली

भारत में, अपने संघीय संविधान के अनुरूप, प्रशासनिक दायित्वों को केन्द्र और राज्य सरकारों के बीच विभाजित किया जाता है। केन्द्र सरकार तथा व्यक्तिगत राज्य सरकार दोनों द्वारा आँकड़े एकत्रित और प्रकाशित किए जाते हैं।

केन्द्र सरकार में, सांख्यिकी विभाग योजना मंत्रालय में स्थित है। सांख्यिकी विभाग के अंतर्गत केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन और एक कंप्यूटर केन्द्र है। सांख्यिकी विभाग का काम स्वायत्त राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन तथा राष्ट्रीय महत्व की संस्था — भारतीय सांख्यिकी संस्थान — के साथ समन्वय स्थापित करना है।

केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन राष्ट्रीय, केन्द्रीय और राज्य स्तर पर सांख्यिकी क्रियाओं का समन्वय करने के लिए उत्तरदायी है। यद्यपि यह वार्षिक राष्ट्रीय लेखे तैयार करता है और राष्ट्रीय स्तर पर एक अथवा दो सांख्यिकी सर्वेक्षण का संचालन करता है, फिर भी इसका मुख्य काम आँकड़े एकत्रा करना नहीं है बल्कि आँकड़ों के सभी संग्रहकों के मार्ग-दर्शन के लिए मानक संकल्पनाएँ और परिभाषाएँ स्थापित करना है। यह आँकड़ों के संबंध में अंतर्राष्ट्रीय समन्वय करने के लिए भी उत्तरदायी है।

राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन ऐसी सूचना एकत्रित करने के लिए पूरे भारत में बड़े पैमाने पर क्रमबद्ध नमूना सर्वेक्षण करता है, जो प्राय: प्रशासन के परिणाम के रूप में प्राप्त नहीं होती। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण के मुख्य विषय गृहस्थ उपभोग व्यय, रोज़गार और बेरोज़गार, कीमतें, असंगठित उद्योग आदि हैं।

केन्द्र सरकार के अधिकतर महत्वपूर्ण मंत्रालयों के अपने सांख्यिकी विभाग हैं, जो प्राय: वे आँकड़े संकलित करते हैं जो उनकी प्रशासनिक क्रियाओं से उत्पन्न होते हैं। कई बार वे विशेष सूचना एकत्रित करने के लिए नमूना सर्वेक्षण भी करवाते हैं।

प्रत्येक राज्य सरकार का एक सांख्यिकी ब्यूरो होता है, जो प्राय: राज्य वित्त मंत्रालय के अंतर्गत होते हैं। विभिन्न राज्यों में इनके भिन्न-भिन्न नाम होते हैं। कई राज्यों में सांख्यिकीय एकक अथवा विभाग भी होते हैं। राज्य सांख्यिकी ब्यूरो का राज्य के प्रति वही उत्तरदायित्व है, जैसा केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन का केन्द्र सरकार के प्रति है।

भारत में सांख्यिकी प्रणाली ने अपना विशेष रूप आज़ादी के बाद प्रथम प्रधानमंत्री पंडित नेहरू के प्रयासों, जिन्होंने विकास आयोजन के लिए विश्वसनीय आँकड़ों की आवश्यकता को समझा और प्रो. पी. सी. महलनोबिस, जो उनके सांख्यिकी सलाहकार थे, के कारण प्राप्त किया।

2.10 भारतीय अर्थव्यवस्था की दो मुख्य सांख्यिकी श्रृंखलाएँ

यह तथ्य कि भारत जनसंख्या और श्रम-शक्ति के अनुपात के हिसाब से एक कृषि प्रधान देश

है, भारतीय कृषि आँकड़ों के महत्व को निर्णायक बना देता है। भारतीय जनगणना के अतिरिक्त, मुख्य कृषि फसलों के एकड़ और उत्पादन संबंधी आँकड़े पिछली सदी के अंतिम दस वर्षों से ब्रिटिश भारत के अधिकतर भाग के लिए प्राप्त सबसे पुरानी सांख्यिकी श्रृंखला में से हैं। पारम्परिक रूप से भूमि-प्रयोग आँकड़े, जो कृषि आँकड़ों के मुख्य प्रतीक हैं, दो स्रोतों से प्राप्त होते हैं :

i) सर्वेयर जनरल ऑफ इंडिया (एस. जी.)

ii) ग्रामीण भूमि रिकार्ड (Village Land Records, LR) जो राजस्व के उद्देश्य से राज्य सरकारों के राजस्व विभाग द्वारा रखे जाते हैं। (इस सदी के 40 वर्षों) 1940 तक भारत में प्रमुख फसलों की उपज, क्षेत्र और उत्पादन के अनुमान राजस्व अधिकारियों के अंतिम स्तर जैसे "पटवारी" द्वारा प्रस्तुत किए गए ग्रामीण विवरण के आधार पर उत्पन्न किये जाते थे। ये अधिकतर सामान्य उपज के अनुपात के तौर पर प्रत्यक्ष अनुमान पर आधारित थे, जो उन दिनों आनों में (16 आना — 1.00 रुपया) मापे जाते थे। यह मानते हुए कि "सामान्य उपज" — पिछले पाँच अथवा दस वर्षों का औसत — 16 आने है, यदि वास्तविक उपज m थी, जो सामान्य उपज से लगभग 25 प्रतिशत कम थी, तो यह 12 आने होगी। जब इस प्रति एकड़ उपज को, ग्रामीण रिकार्ड के आधार पर, फसल के अंतर्गत क्षेत्र द्वारा गुणा किया जाता है तो हमें कुल उत्पादन प्राप्त होगा। इसे "आनावाड़ी प्रणाली" (annawari system), जो निस्संदेह एक अपरिष्कृत (crude) प्रणाली थी, के नाम से जाना जाता था। आँकड़े राज्य सरकारों द्वारा मौसम और फसल रिपोर्टों में संकलित और प्रकाशित किए जाते थे। स्थायी बंदोबस्त के क्षेत्रों में, जहाँ राजस्व निश्चित था, आँकड़े अधिक दूषित थे क्योंकि ग्रामीण स्तर पर राजस्व के उद्देश्य के लिए प्राथमिक रिपोर्ट करने वाली कोई एजेंसी नहीं थी। अस्थायी बंदोबस्त के क्षेत्रों में स्थिति कुछ बेहतर थी क्योंकि भूमि रिकार्ड को राजस्व के उद्देश्यों से आधुनिक (update) बनाना होता था। ये कृषि उत्पादन आँकड़े हमारी राष्ट्रीय आय के मुख्य तत्वों में से एक थे। भारत के राष्ट्रीय लेखा आँकड़े अर्थव्यवस्था के कार्य का माप करने के लिए अन्य सबसे महत्वपूर्ण सांख्यिकी श्रृंखला है। भारत के राष्ट्रीय अनुमान विद्वानों और अन्वेषकों द्वारा उन्नीसवीं सदी के दूसरे भाग के पहले दशक से ही स्वीकार किए जाते रहे हैं। ये मुख्य रूप से कुछ विशेष वर्षों के लिए स्थिर अनुमान (point estimate) थे। आप राष्ट्रीय आय लेखे के ढाँचे के बारे में ई.ई.सी.-01 और भारतीय राष्ट्रीय आय के बारे में ई.ई.सी.-02 में पहले से ही परिचित हैं। यह निर्विवाद है कि यदि राष्ट्रीय आय अनुमानों को निर्मित करना है तो मूल्य के आँकड़े प्राप्त करने आवश्यक हैं। बहुत-सी वस्तुओं और निर्यात तथा आयात के लिए मूल्य आँकड़े उन्नीसवीं सदी के मध्य से भी प्राप्त हैं। इस भाग में हम अपने मुख्य कृषि आँकड़ों और राष्ट्रीय लेखा आँकड़ों के स्रोतों आदि की कुछ समस्याओं तथा सीमाओं का विवेचन करेंगे।

2.10.1 कृषि उत्पादन के आँकड़े

"प्रमुख फसलों के क्षेत्र और उत्पादन के अनुमान" नामक प्रकाशन, वार्षिक रूप से प्रमुख फसलों के क्षेत्र और उत्पादन का ज़िला-वार अनुमान प्रदान करता है। बहुत से राज्यों के लिए सिंचाई के अंतर्गत फसल के अनुसार क्षेत्र के आँकड़े भी उपलब्ध हैं, लेकिन वे उच्च कोटि के नहीं माने जाते हैं। लेकिन कुछ राज्यों के लिए स्रोत के अनुसार वर्गीकृत सिंचाई के आँकड़े उपलब्ध नहीं हैं। लेकिन आज़ादी के बाद के दशकों में फसल उत्पादन और एकड़ संबंधी आँकड़ों में सुधार हो रहा है, जो फसल को काटने की विधियों और फसलों के क्षेत्र और उपज के दैविक प्रतिदर्श अनुमानों के लिए विकसित अनुमान विधियों का परिणाम है। ये तकनीक प्रो. पी. सी. महलनोबिस द्वारा मार्गदर्शित दल द्वारा विकसित की गई। यह सर्वविदित है कि पुरानी प्रत्यक्ष अनुमान विधि प्राय: संदिग्ध (sticky) थी जिसकी प्रकृति उत्पादन की संवृद्धि और उतार-चढ़ाव, दोनों का अल्पानुमान करने की थी। सांख्यिकीविदों द्वारा विकसित फसलों के क्षेत्र और उपज दोनों के दैविक प्रतिदर्श अनुमान के लिए फसल काटने की तकनीक की उपलब्धि के बावजूद खाद्य तथा कृषि मंत्रालय द्वारा दिए गए सरकारी क्षेत्र अनुमान हमेशा दैविक प्रतिदर्श प्रणाली पर आधारित नहीं होते बल्कि वे भूमि रिकार्ड आँकड़ों की प्राथमिक रिपोर्ट प्रणाली का प्रयोग करते हैं। परिणाम यह है कि राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण के खाद्यान्नों के अपभोग के अनुमान, जो खाद्यान्नों के निर्यात और आयात के लिए संशोधित होने पर भी, खाद्य और कृषि मंत्रालय द्वारा दिए गए फसलों के उत्पादन संबंधी अनुमानों से मेल नहीं

 स्राते। उत्पादन के सरकारी आँकड़ों में अल्पानुमान की प्रवृत्ति होती है, यद्यपि दोनों प्रकार के आँकड़ों की कुल प्रवृत्ति, समय के साथ मोटे तौर पर समान है।

लेकिन, प्रमुख फसलों के क्षेत्र और उत्पादन संबंधी अनुमान, पूर्वानुमानों की श्रृंखला में, तैयार किये जाते हैं। एक वर्ष के भीतर उत्पादन के तीन पूर्वानुमान होते हैं। पहला मुख्य बुआई के पूर्ण होने के करीब एक महीने के बाद किया जाता है। इसका इरादा मुख्य फसलों के अंतर्गत बोए गए क्षेत्र के बारे में विचार देना है, जिसकी सफलता बुआई आदि के समय मौसम की स्थिति पर निर्भर करती है। दूसरा पूर्वानुमान सामान्यतया एक-दो महीने बाद किया जाता है और यह बुआई क्षेत्र के बारे में देर बुआई को भी शामिल करके निश्चित संकेत देता है। कृषि वर्ष का अंतिम अनुमान बुआई क्षेत्र और काटी गई फसल अथवा उसकी भावी कटाई का अंतिम आँकड़ा देता है, जो उत्पादन का अधिक निश्चित आँकड़ा होता है। ये आँकड़े अंत में अगले वर्ष के अंतिम पूर्वानुमान के समय तक संशोधित किए जाते हैं। इन संशोधित अंतिम अनुमानों का फिर कृषि उत्पादन सूचकांक बनाने में प्रयोग किया जाता है। लेकिन डेनियल थार्नर (Danial Thorner) ने पाया कि कृषि उत्पादन सूचकांक और कृषि उत्पादन के कुल आँकड़े खाद्यान्नों के लिए भी प्राय: भिन्न-भिन्न दिशाओं में चल रहे थे। लेकिन फिर भी भूल की सीमा कम करने और राज्य सूचकांकों से संपूर्ण भारतीय सूचकांक बनाने के सतत् प्रयास किए जाते रहे। लेकिन राज्य सरकार के कृषि उत्पादन संबंधी आँकड़े और सूचकांक, विशेषकर खाद्यान्नों के संबंध में, खाद्यान्न प्राप्ति और कीमतों के बारे में सार्वजनिक नीति के दबाव से प्रभावित होते हैं, क्योंकि खाद्यान्नों की कमी और बाहुल्य वाले राज्यों में खाद्यान्न प्राप्ति और वितरण प्रणाली पर अलग-अलग प्रकार के दबाव होते हैं।

2.10.2 राष्ट्रीय लेखा आँकड़े

भारत के राष्ट्रीय लेखा आँकड़े अंतिम अनुमानों पर पहुँचने के लिए विभिन्न तरीकों का प्रयोग करते हैं। कुछ उत्पादन के लिए मूल्य वृद्धि अनुमानों, जैसे मुख्य फसलों और बड़े संगठित उद्योगों का, प्रयोग किया जाता है। केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन (सी. एस. ओ.), जो भारत के राष्ट्रीय लेखा आँकड़ों के प्रकाशन के लिए जिम्मेदार है, भी आय के प्रतिदर्श सर्वेक्षण के आँकड़े प्रयोग करता है जिन्हें आय के अनुमान प्राप्त करने के लिए कुछ क्षेत्रों के लिए उनके अनुरूप श्रम-शक्ति द्वारा गुणा कर दिया जाता है। फिर इन्हें सरकारी व्यय, वस्तुओं के निर्यात और आयात के आँकड़ों और संगठित क्षेत्र में अन्य वित्तीय प्रवाहों से आय के अनुमानों द्वारा पूरा किया जाता है।

केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन का **राष्ट्रीय लेखा आँकड़े: स्रोत और तरीके, 1989** नामक प्रकाशन राष्ट्रीय लेखा आँकड़ों के अनुमान के स्रोत और तरीके तथा उनके अनुमान में आने वाली कुछ समस्याओं का विस्तृत ब्यौरा देता है। आज़ादी से पूर्व भारत की राष्ट्रीय आय के अनुमान प्राय: सामूहिक (aggregative) आँकड़ों पर आधारित थे, जिसमें पर्याप्त आँकड़ों और फैलाव के अभाव में बहुत-सी मान्यताएँ निहित हैं और प्राय: अनुमान होते थे। लेकिन फिर भी ये वास्तविक स्थिति का कुछ संकेत प्रदान करते हैं। लेकिन, राष्ट्रीय लेखा आँकड़े तैयार करने की व्यापक रीति प्रदान करने के लिए, भारत सरकार ने 1949 में प्रो. वी. के. आर. वी. राव की अध्यक्षता में एक विशेषज्ञ समिति गठित की, जिसे "राष्ट्रीय आय समिति" के नाम से जाना जाता है। 1954 में इस समिति की अंतिम रिपोर्ट प्रकाशित हुई। इस अंतिम रिपोर्ट द्वारा स्वीकृत प्रक्रिया के आधार पर, केन्द्रीय सांख्यिकी संगठन स्थिर कीमतों पर 1948–49 को आधार वर्ष मानकर राष्ट्रीय आय के अनुमान तैयार करता था। आधारभूत आँकड़ों में क्रमिक सुधार के साथ श्रृंखला को संशोधित किया गया और कुछ समय तक 2960–61 के आधार वर्ष पर संशोधित श्रृंखला प्रचलित रही। 1978 में 1970–71 को आधार वर्ष मानकर एक और संशोधन किया गया और अब हाल की नई श्रृंखला 1980–81 के आधार-वर्ष पर बनी है।

इस नई श्रृंखला में बहुत से रीति संबंधी सुधार हुए हैं। इनमें विशेषकर धान के मूल्यांकन, अपँजीकृत निर्माण इकाइयों की स्थिति में कपड़े की मूल्य वृद्धि, स्थिर कीमतों पर सार्वजनिक प्रशासन और सुरक्षा से घरेलू उत्पाद, स्थिर पूंजी का उपभोग (सी. एफ. सी.), निजी अंतिम उपभोग व्यय की कपड़ा और अन्य चीज़ों का उपभोग, भण्डार में परिवर्तन, सरकार के विभागीय उद्यमों की हानि आदि के अनुमान के संबंध में, सम्मिलित हैं। इनमें से प्रत्येक क्षेत्र ने अनुमान की जटिल समस्याएँ खड़ी की हैं। "अन्य व्यवसाय और यातायात" मद के अन्तर्गत

अधिकतर असंगठित व्यावसायिक और यातायात संस्थान जैसे पान की दुकान, फेरी वाला से लेकर रिक्शा अथवा हाथ की गाड़ी (रेहड़ी) चलाने वाले या बोट चलाने वाले शामिल किये जाते हैं। ये अब भी दु:साध्य सांख्यिकी समस्याएँ प्रस्तुत करते हैं। लेकिन पशुधन गणना, संस्थानों की आर्थिक गणना, जोत की लागत अध्ययन आदि ने भारतीय अर्थव्यवस्था के बड़े असंगठित क्षेत्रों — कृषि, पशु खेती, व्यापार, यातायात और दस्तकारी में पैदा होने वाली आय के हमारे अनुमानों को सुधारने के लिए इन वर्षों में काफी सूचना एकत्र की है।

फिर भी, हमारे राष्ट्रीय आय अनुमान की क्रिया में अभी भी अनेक समस्याएँ आती रहती हैं; एक मुख्य समस्या स्व-रोज़गार लोगों, जिनमें परिवार के सदस्य, कृषि पशु खेती, व्यापार, यातायात और घरेलू दस्तकारी शामिल हैं, के श्रम के योगदान का मूल्य आरोपित करने की कठिनाई के कारण पैदा होती हैं। यह स्व-रोज़गार क्षेत्र अभी भी हमारी राष्ट्रीय आय का लगभग आधा भाग देता है। क्रियाओं का यह विशाल असंगठित क्षेत्र, पूंजी निर्माण के सही अनुमान तक पहुँचने में कठिनाई पैदा करता है जिसका अधिकतर भाग निरीक्षण योग्य बाज़ार लेन-देन से बाहर होता है, जिसके लिए न तो कीमतें और न ही मात्राएँ आसानी से प्राप्त की जा सकती हैं। इसी प्रकार, आय के वितरण का प्रश्न इस बात से ग्रस्त है कि सबसे उच्च आय वर्ग का एक महत्वपूर्ण भाग कराधान के उद्देश्य से आय का सही विवरण देने से बचा हुआ है। इसी प्रकार उत्पाद शुल्क से बचना, विदेशी व्यापार के मूल्यांकन में प्रविष्ट होने वाले लेन-देन का मूल्य कम और अधिक दर्ज करने के कारण हमारे विदेशी व्यापार क्षेत्र में भी आय प्रवाहों के अनुमान में कठिनाइयाँ पैदा हो जाती हैं। इससे काफी अंतर रह जाता है, जिसे भुगतान संतुलन लेखे के लिए एक शेष राशि के तौर पर "भूल-चूक लेनी देनी" (Errors and Omissions) से पूरा किया जाता है। आय के वितरण, विशेषकर उच्च आय वर्ग पर, की स्पष्ट प्रणाली के न होने से बचत व्यवहार और आय असमानता की प्रवृत्तियों का अध्ययन कठिन हो जाता है। कृषि और गैर-कृषि क्षेत्र के बीच आय का अंत:क्षेत्रीय वितरण, किसानों के विभिन्न वर्गों द्वारा दी गई और प्राप्त की गई उचित कीमतों के पाने की कठिनाई के कारण, एक विवाद का विषय बन जाता है। इस प्रकार, यद्यपि राष्ट्रीय आय आँकड़ों के समष्टि आर्थिक जोड़ (macro–economic aggregates) रीति में सतत सुधार हुए हैं, फिर भी अर्थव्यवस्था के स्वरूप और उसके विशाल असंगठित क्षेत्र के कारण विश्लेषणात्मक दृष्टि से संतोषजनक राष्ट्रीय लेखा आँकड़ों की तैयारी में अभी भी रुकावट बनी हुई है। यद्यपि स्थिति इतनी खराब नहीं है, जैसा कि यह तब होती थी जब प्रो. साइमन कुज़नेट्स ने कहा था कि भारत की राष्ट्रीय आय का कम से कम एक-तिहाई भाग बिल्कुल काल्पनिक है। कई बार यह तर्क दिया जाता है कि भारतीय अर्थशास्त्रियों ने खराब मूल आँकड़ों के आधार पर कृत्रिम आर्थिक माडल बनाए हैं।

बोध प्रश्न 2

1 कृषि उत्पादन पर गौण आँकड़ों के क्या स्रोत हैं ?

. . . .

. . . .

2 कृषि आँकड़ों की क्या सीमाएँ हैं ?

. . . .

. . . .

3 राष्ट्रीय आय का अनुमान करने में कौन-सी समस्याएँ आती हैं ?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2.11 भारतीय सरकारी आँकड़े

भारत में एक अर्थशास्त्री के लिए सरकारी प्रकाशनों से प्राप्त, गौण आँकड़ों के स्रोतों के साथ परिचित होना महत्वपूर्ण है। हम नीचे राष्ट्रीय स्तर पर आँकड़ों के महत्वपूर्ण स्रोतों की एक सूची दे रहे हैं। आँकड़ों के राज्य कार्यालय भी नियमित रूप से सांख्यिकी सूचना प्रकाशित करते हैं, यद्यपि कम विस्तृत पैमाने पर।

सामान्य आँकड़े

सरकारी आँकड़ों के मार्गदर्शक
सांख्यिकी सारांश — भारत (वार्षिक)
सांख्यिकी पॉकेट बुक — भारत (वार्षिक)
सांख्यिकी के मासिक तरीके
राष्ट्रीय लेखा आँकड़े (वार्षिक)
भारतीय अर्थव्यवस्था से संबंधित मूल आँकड़े
राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन की रिपोर्ट
सर्वेक्षण — राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन की पत्रिका

पर्यावरण

पर्यावरण, वन और जीव-जन्तु विभाग की वार्षिक रिपोर्ट, जल प्रदूषण की रोक और नियंत्रण के लिए केन्द्रीय बोर्ड की रिपोर्ट।

जलवायु और अंतरिक्ष विज्ञान

भारतीय दैनिक मौसम रिपोर्ट
साप्ताहिक मौसम रिपोर्ट
भारत में दैनिक वर्षा (वार्षिक)
भूकम्प संबंधी गजट (मासिक)
नाशकारी मौसम रिपोर्ट (वार्षिक)

जनसंख्या अध्ययन

1981 जनगणना का 13 भागों में सारांश

1. प्रशासनिक रिपोर्ट
2. सामान्य — जनसंख्या
3. सामान्य — आर्थिक
4. सामाजिक और सांस्कृतिक
5. प्रव्रजन (Migration)
6. जनन (Fertility)
7. मकान और पंगु व्यक्ति
8. गृहस्थ तालिकायें
9. अनुसूचित जातियाँ और जनजातियाँ
10. शहर डायरेक्ट्री
11. नृजातिक टिप्पणियाँ और अनुसूचित जाति और जनजाति पर विशेष अध्ययन
12. जनगणना एटलस
13. ज़िला हस्त पुस्तिका (प्रत्येक ज़िले के लिए)

इसके अतिरिक्त विशेष विषयों पर अनय कई जनगणना कागज़ात हैं।

जन्म-मरण संबंधी आँकड़े

भारत में जन्म-मरण संबंधी आँकड़े (: अन्य :)
जन्म और मृत्यु का वैधानिक पंजीकरण — संक्षिप्त सांख्यिकी रिपोर्ट (वार्षिक)
प्रतिदर्श पंजीकरण गजट (अर्ध वार्षिक)
मृत्यु के कारणों का सर्वेक्षण — ग्रामीण (वार्षिक)
मृत्यु के कारण के आँकड़े (वार्षिक)

घर
आवास आँकड़ों की हस्त पुस्तिका (वार्षिक)
औद्योगिक आवास — मालिक का योगदान (वार्षिक)

श्रम सांख्यिकी
भारतीय श्रम सांख्यिकी (वार्षिक)
भारतीय-श्रम इयर-बुक
भारतीय श्रम पत्रिका (मासिक)
त्रैमासिक रोज़गार समालोचना
कारखानों के आँकड़े (वार्षिक)
भारत में कृषि मज़दूरी (वार्षिक)
भारत में व्यावसायिक-शैक्षिक स्वरूप (सार्वजनिक और निजी क्षेत्रक के लिए अलग पुस्तक, द्वि-वार्षिक)
भारत में औद्योगिक संस्थान (वार्षिक)
भारत में मज़दूर संघ (द्वि-वार्षिक)

शिक्षा, विज्ञान और प्रौद्योगिकी
भारत में शिक्षा — तीन खण्डों में (वार्षिक)
चुने हुए शिक्षा संबंधी आँकड़े (वार्षिक)
भारत में स्कूली शिक्षा पर चुनी हुई सूचना (वार्षिक)
अनुसंधान और विकास आँकड़े (द्वि-वार्षिक)
उद्योगों में अनुसंधान और विकास (द्वि-वार्षिक)

स्वास्थ्य और परिवार कल्याण
भारत की स्वास्थ्य सूचना (वार्षिक)
मासिक स्वास्थ्य सांख्यिकी बुलेटिन
भारत में परिवार कल्याण कार्यक्रम — इयर बुक
केन्द्रीय समाज कल्याण बोर्ड की वार्षिक रिपोर्ट

अपराध और दुर्घटना
भारत में अपराध — (वार्षिक)
भारत में दुर्घटना से मृत्यु और आत्महत्या (वार्षिक)

कृषि और मछली-पालन
भारतीय कृषि संबंधी आँकड़े (वार्षिक)
भारत में मुख्य फसली क्षेत्र और उत्पादन संबंधी अनुमान (वार्षिक)
खाद्यान्न आँकड़ों का बुलेटिन (वार्षिक)
चाय सांख्यिकी (वार्षिक)
कॉफी सांख्यिकी (वार्षिक)
भारतीय रबड़ सांख्यिकी (वार्षिक)
भारतीय पशुधन गणना की रिपोर्ट (पंचवर्षीय)
भारतीय वन सांख्यिकी (वार्षिक)
समुद्री मछली-पालन संबंधी सूचना सेवा (मासिक)
मछली-पालन सांख्यिकी की हस्त पुस्तिका

विकास
निम्नलिखित की वार्षिक समालोचनायें:
एकीकृत ग्राम विकास कार्यक्रम (IRDP)
मरुस्थल विकास कार्यक्रम
राष्ट्रीय ग्रामीण रोज़गार कार्यक्रम (NREP)
सूखा प्रवण क्षेत्र कार्यक्रम (DPAP)
ग्राम विकास आँकड़े

खनन और खनिज

खनिज उत्पादन के मासिक आँकड़े
भारत में खनिज आँकड़े (अर्ध-वार्षिक)
खनिज और धातु में विदेशी व्यापार (वार्षिक)
भारत में खानों के आँकड़े भाग-1 — कोयला, भाग-2 गैर-कोयला (वार्षिक)
कोयला सांख्यिकी (मासिक और वार्षिक)

निर्माण

उद्योगों का वार्षिक सर्वेक्षण:
कारखानों के लिए सर्वेक्षण रिपोर्ट
जनगणना क्षेत्रक के लिए रिपोर्ट — 10 भागों में
भारत में चुने हुए उद्योगों का मासिक उत्पादन
भारतीय पैट्रोल और पैट्रो-रसायन सांख्यिकी (वार्षिक/अर्ध-वार्षिक)
भारतीय रसायन सांख्यिकी (वार्षिक)
भारतीय उर्वरक सांख्यिकी (वार्षिक)
भारतीय दवा सांख्यिकी (वार्षिक)

व्यापार

भारत में विदेशी व्यापार के मासिक आँकड़े
भाग 1 : निर्यात और पुनर्निर्यात
भाग 2 : आयात
भारत में विदेशी व्यापार के चुने हुए आँकड़े (वार्षिक)
रेल और नदी द्वारा वस्तुओं का अंतर्राज्यीय चलन/प्रवाह (वार्षिक)
अतर्देशीय समुद्र तट से भेजे व्यापार माल के आँकड़े (वार्षिक)

यातायात

मासिक रेलवे सांख्यिकी
भारतीय रेलवे वार्षिक पुस्तक
भारत के आधारभूत सड़क आँकड़े (वार्षिक)
भारत के मोटर यातायात आँकड़े (वार्षिक)
अंतर्देशीय जल परिवहन के आँकड़े (वार्षिक)
भारत के विदेशी और समुद्र तट जहाज़ परिचलन के आँकड़े (वार्षिक)
आधारभूत आंशिक आँकड़े
भारतीय वायु परिवहन आँकड़े (वार्षिक)
भारत में नागरिक उड्यन के विकास की रिपोर्ट (वार्षिक)

पर्यटन

भारत में पर्यटन की विशेषताएँ (वार्षिक)
भारतीय पर्यटक सांख्यिकी (वार्षिक)

संचार

डाक विभाग का सांख्यिकी संग्रह (वार्षिक)
दूर-संचार विभाग का सांख्यिकी संग्रह (वार्षिक)

बैंकिंग और वित्त

भारतीय रिज़र्व बैंक का गजट (मासिक)
करेंसी और वित्त की रिपोर्ट — दो भागों में (वार्षिक)
भारतीय बैंकों से संबंधित सांख्यिकी तालिकाएँ (वार्षिक)
केन्द्रीय सरकार का बजट (वार्षिक)
आर्थिक सर्वेक्षण (वार्षिक)
भारतीय आर्थिक सांख्यिकी — सार्वजनिक वित्त
अखिल भारतीय आयकर सांख्यिकी (वार्षिक)

कीमतें
भारत में संशोधित थोक कीमत सूचकांक (वार्षिक)
कृषि कीमतों पर बुलेटिन (मासिक)
निर्माण सामग्री के मूल्यों और निर्माण मज़दूर की मज़दूरी दर पर बुलेटिन (अर्ध-वार्षिक)
वस्तुओं पर पुस्तिका (ब्रोशर), शहरी गैर-शारीरिक श्रमिकों का समूह-वार उपभोक्ता कीमत सूचकांक.
भारतीय श्रम पत्रिका — औद्योगिक और कृषि श्रमिकों के लिए अलग-अलग उपभोक्ता कीमत सूचकांक

संयुक्त पूंजी कम्पनियाँ
भारत में संयुक्त पूँजी कम्पनियों की डायरेक्टरी (पंचवार्षिक)
भारत में संयुक्त पूंजी कम्पनियों का पंजीकरण और निस्तारण (Liquidation) (वार्षिक)
कम्पनी समाचार और टिप्पणी (मासिक)

अन्य महत्वपूर्ण आँकड़े
पंचायती राज — एक नज़र (वार्षिक)
खंडों की डायरेक्टरी (यदा-कदा)
भारतीय निर्वाचन आयोग — वार्षिक रिपोर्ट
लोकसभा के सामान्य निर्वाचन की रिपोर्ट (सांख्यिकी)

अन्य देशों के आँकड़ों के लिए हमें संयुक्त राष्ट्र संघ और इसकी एजेंसियों अथवा संबंधित सरकारों के प्रकाशनों को देखना होता है।

बोध प्रश्न 3
निम्न विषयों का अध्ययन करने के लिए आप कौन-से सरकारी आँकड़ों से सूचना प्राप्त करेंगे ?

i) भारत में जनसंख्या की संवृद्धि
ii) भारत की जनसंख्या के जीवन-स्तर में परिवर्तन
iii) भारत में शिक्षा की उन्नति
iv) वर्षों के दौरान रुपए के मूल्य में गिरावट
v) भारत नें विदेशी व्यापार की स्थिति

....
....
....
....
....
....

2.12 सारांश

इस इकाई में हमने सांख्यिकी के आधारभूत सिद्धांतों का परिचय दिया। आपने विभिन्न सांख्यिकी परिभाषाएँ और प्रतिदर्श की आधारमूल संकल्पनाएँ सीखीं तथा यह देखा कि प्रतिदर्श में किस प्रकार भूल पैदा होती हैं।

प्राथमिक और गौण आँकड़ों के संग्रह के तरीकों से आपका परिचय कराया गया तथा यह बताया गया कि प्रश्नावली और सूचियों का प्रयोग कैसे किया जाता है। भारत की सांख्यिकी प्रणाली का संक्षिप्त वर्णन मी किया गया है।

2.13 शब्दावली

सतत चर: एक ऐसा चर जो कोई भी मूल्य ले सकता है।

असतत (Discrete): जिसमें भिन्न अथवा अलग भाग या अनुमान शामिल है।

अनुमान: एक नमूने से जनसंख्या की विशेषता की एक सन्निकट गणना और किसी चीज (उदाहरण के लिए आकार, लागत) का सन्निकट विचार बनाने अथवा सन्निकट गणना के लिए होता है।

प्राचल: नमूने की बजाय जनसंख्या के लिए उपयुक्त एक विदित अथवा अविदित मूल्य जिसका प्रयोग एक सांख्यिकी मॉडल को परिभाषित करने के लिए किया जाता है।

जनसंख्या: अंकशास्त्रियों द्वारा जनसंख्या शब्द का प्रयोग वस्तुओं, लोगों अथवा संगठनों आदि के विशिष्ट समूह के लिए किया जाता है।

प्रतिदर्श अथवा नमूना: एक छोटे भाग के परीक्षण अथवा जांच द्वारा एक 'विश्व' की विशेषताओं को निर्धारित करना।

आँकड़ा: एक गणित मूल्य, जो एक नमूने की विशेषता का संक्षेप देता है।

विश्व (Universe): वस्तुओं का समुदाय, जिसमें से एक सांख्यिकी नमूना निकाला जाता है या जिसका वर्णन एक नमूना करता है।

2.14 कुछ उपयोगी पुस्तकें

मेहता, बी. सी. 1986. **प्रारम्भिक सांख्यिकी**, राजस्थान हिन्दी ग्रन्थ अकादमी, जयपुर द्वितीय संस्करण। अध्याय 2, 3, 14, 15

Goon A. M., Gupta, M.K. & Dasgupta, B. (1987), *Basic Statistics,* Vhe World Press Pvt. Ltd., Calcutta.

M. Raza et. al. (ed) (1978), *Sources of Economic & Social Statistics of India,* Eureka Publications, New Delhi.

Central Statistical Organisation (1989), *National Accounts Statistics, Sources and Methods,* Govt. of India, New Delhi.

2.15 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1 और 2
भाग 2.2 से भाग 2.9 तक देखिए।

बोध प्रश्न 3
भाग 2.6 से भाग 2.10 तक देखिए।

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGEC-03
प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें

खंड

2

गणितीय उपकरण (Mathematical Tools)

खंड 2 गणितीय उपकरण (Mathematical Tools)

सांख्यिकीय विधियों के अध्ययन हेतु प्रारंभिक गणितीय प्रविधियों की आवश्यकता होती है। प्रस्तुत खण्ड में इन्हीं प्रविधियों से आपका परिचय कराया जाएगा। गणितीय एवं सांख्यिकीय उपकरणों के ठोस आधार के बिना वस्तुतः अर्थशास्त्र का कोई भी अध्ययन अपूर्ण होगा। इस खण्ड में दो इकाईयाँ हैं।

इकाई तीन के अन्तर्गत विद्यालय-स्तर की साधारण बीजगणितीय प्रविधियों का संक्षिप्त विवरण दिया गया है। इकाई चार में फलन की ज्यामितीय विशेषताओं के परिचय के लिए आवश्यक साधारण विश्लेषणात्मक विधियों का विवेचन किया गया है। इस इकाई के अन्तर्गत चरों के फलनिक सम्बन्धों की प्रकृति पर भी प्रकाश डाला गया है।

इस खण्ड में कुछ प्रारंभिक गणितीय संकल्पनाओं को भी समाविष्ट किया गया है। यदि इन संकल्पनाओं के विषय में आपको पूर्व जानकारी नहीं है तो इन्हें ध्यानपूर्वक पढ़ने की आवश्यकता है। इस खण्ड के अन्तर्गत इन संकल्पनाओं को स्पष्ट करने के लिए पर्याप्त संख्या में उदाहरण और अभ्यास भी दिए गए हैं जो आपकी साधारण गणितीय जानकारी को ताजा करने के लिए नितान्त उपयोगी सिद्ध होंगे।

इकाई 3 प्रारंभिक बीजगणित (Elementary Algebra)

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

इस इकाई के द्वारा आप निम्नलिखित तथ्यों को समझ सकेंगे :

- कुछ प्रारंभिक बीजीय अवधारणाएँ;
- संख्याओं के अनुक्रम के उत्तरोत्तर पदों में सम्बन्ध;
- लघुगुणक का प्रयोग;
- वस्तुओं के विभिन्न संचय तथा क्रमचय-गणन की प्रविधियाँ।

3.1 प्रस्तावना

इस इकाई में कुछ ऐसे बीजीय रूपों का विकास किया जाएगा जो कि अर्थशास्त्र की ऐसी समस्याओं को समझने में सहायक होगें जहाँ सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग होता है। सांख्यिकी का विवेचन परवर्ती खण्डों में किया गया है। सांख्यिकी की समझ के लिए आवश्यक मूल गणित का अध्ययन आप अब करेंगे। इस अध्ययन के द्वारा आप अपनी उच्च विद्यालयीय बीजगणित की जानकारी को ताजा भी कर सकेंगे।

3.2 प्रारंभिक बीजगणित

हमारी मान्यता है कि इस विषय से सम्बन्धित कुछ प्रारंभिक संकल्पनाओं से आप परिचित हैं जैसे, आपको ऋणात्मक राशियों, बीजीय व्यंजकों प्रांभिक घातांकीय सिद्धान्त, विभिन्न कोष्ठकीय संक्रियाओं, गुणनखण्ड निकालना आदि के बारे में जानकारी है। फिर भी इन संकल्पनाओं के पुनरावलोकन-अभ्यासों के द्वारा हम इस विषय का प्रारम्भ करेंगे। अगर आपको इन अवधारणाओं की पूर्व जानकारी है तो भी इन अभ्यासों से आपको लाभ होगा। अगर इन सिद्धांतों को आप पुनः स्मरण करना चाहते हैं तो आप प्रारंभिक अवस्था में पढ़ी गई अथवा उच्च विद्यालयीय स्तर की किसी बीजगणित की पाठ्य-पुस्तक की सहायता लें।

बोध प्रश्न 1

निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए :

1) $3x^2-4x^2-6x^2+11x^2$
2) $2ax-5ax^2-3ax+6ax^2$
3) $4ax^2-11a^2x^2+5ax^2-6ax^2$
4) $5x^2-6y^2+3x^2-4y^2-2x^2-7y^2$
5) $\left(\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{y^2}{4}\right)+\left(\frac{x^2}{3}\right)-\left(\frac{y^2}{2}\right)$
6) $\left(\frac{2x^2}{5}\right)-\left(\frac{3x^2}{5}\right)+\left(\frac{4x^2}{5}\right)-\left(\frac{3x^2}{10}\right)$
7). $\frac{7x}{4}+\frac{3y}{7}-\frac{2x}{3}-\frac{y}{14}+\frac{5x}{6}-\frac{15y}{28}$
8) $\left[\left(\frac{3}{8}\right)(x^2y^2)\right]+\left[(x^2y^2)/6\right]-\left[(5x^2y^2)/12\right]-\left[(7x^2y^2)/8\right]$
9) $1.4x^2-3.5x^2+5.8x^2-7.5x^2$
10) $-2.4x^2y^2+3.4a^2b^2-13.8x^2y^2+7.6a^2b^2$
11) $1.5xy-3.7xy+7.4x^2y^2-6.8x^2y^2$
12) $3ax^2-5ax+7a^2x-2.5ax^2+1.5ax-3.5a^2x$

बोध प्रश्न 2

क) निम्नलिखित व्यंजनों का योग कीजिए :

1) $a-2b+c$, $3a+5b-2c$, $-2a-b+3c$
2) $2xy-4yz+5zx$, $3xy+2yz-3zx$, $3yz-3xy-4zx$
3) $2ab+3bc-2abc$, $12bc-6ab+5abc$, $8ca-2bc-3ab$
4) $2x^2-3xy+3y^2$, $2y^2+4xy-3x^2$, x^2-xy-y^2, y^2+xy+y^2
5) $5x^2-3x+1$, $3x^2+6x+3$, $4x-2x^2+5$, $-7x-3x^2-4$
6) $x^3-3y^2+2x^2y+2xy^2$, $2y^3+3x^3+7x^2y-xy^2$
7) $x^3-2x^2y+xy^2-xy+y^2-4y^3$, $4y^3-x^3+2x^2y+xy^2$
8) $7x^4-3x^3+8x^2-x+5$, $-12x^4-3x^2+8$, $6x^3+7x+8$
9) $\left(\frac{3}{5}\right)x^2-\left(\frac{2}{3}\right)xy+\left(\frac{3}{4}\right)y^2$, $\left(\frac{7}{10}\right)x^2+\left(\frac{5}{6}\right)xy-\left(\frac{5}{8}\right)y^2$
10) $\left(\frac{5}{9}\right)x^3-\left(\frac{3}{8}\right)x^2y-\left(\frac{2}{7}\right)xy^2+y^3$, $x^3+\left(\frac{3}{4}\right)x^2y+\left(\frac{13}{28}\right)xy^2-\left(\frac{y^2}{3}\right)$
11) $\left(\frac{1}{2}\right)a^2+2ab+b^2$, $3a^2-\left(\frac{2}{5}\right)ab-\left(\frac{b^2}{3}\right)$, $\left(\frac{3}{4}\right)a^2-\left(\frac{8}{5}\right)ab+\left(\frac{7}{9}\right)b^2$
12) $\left(\frac{2}{7}\right)a^3+3a^2b-3ab^2+b^3$, $3a^3-\left(\frac{4}{5}\right)a^2b-\left(\frac{7}{8}\right)ab^2-\left(\frac{2}{3}\right)b^3$
13) $4a^2x^2-5ax^2+3a^2-2x^2$, $3x^2-2a^2-4ax^2-4a^2x^2$
14) $-\left(\frac{11}{7}\right)x^2+\left(\frac{7}{8}\right)a-\left(\frac{8}{9}\right)b+\left(\frac{9}{11}\right)y^2$, $\left(\frac{3}{14}\right)x^2-\left(\frac{11}{3}\right)b+2y^2-\left(\frac{11}{3}\right)a$
15) $\left(\frac{2}{5}\right)ab-\left(\frac{3}{4}\right)bc+\left(\frac{5}{8}\right)ca$, $a^2-\left(\frac{1}{4}\right)bc$, $b^2+\left(\frac{3}{5}\right)ab+bc$, $c^2-\left(\frac{5}{8}\right)ca$

ख) दूसरे व्यंजक में से पहले व्यंजक को घटाइये :

1) $2x^3-5x^2+3x-2$, $6x^3-2x^2+5x-4$
2) $3x^2+5y^2-4xy$, $2x^2+7y^2-3xy$
3) $\left(\frac{2}{3}\right)x^2-\left(\frac{5}{6}\right)y^2+\left(\frac{1}{5}\right)xy$, $\left(\frac{5}{6}\right)x^2-\left(\frac{2}{3}\right)y^2$

4) $\left(\frac{3}{5}\right)x^3 - \left(\frac{1}{4}\right)x^2y + \left(\frac{5}{6}\right)xy^2,\ y^3 + \left(\frac{3}{4}\right)x^2y + \left(\frac{7}{3}\right)xy^2 - \left(\frac{4}{10}\right)x^2$

5) $3a^4-2a^3b-5a^2b^2,\ 4b^4+3ab^3$

ग) पहले व्यंजक में से कितना घटाया जाए कि दूसरा व्यंजक प्राप्त हो :

1) $10x^2-7xy+11y^2,\ 3x^2+4y^2$

2) $a^3-b^3+7ab^2+8a^2b,\ a^2+b^2+2a^2b+2ab^2$

3) $\left(\frac{3}{4}\right)a^3 - \left(\frac{1}{3}\right)ab^3 + b^2 + \left(\frac{2}{3}\right)ab,\ ab-ab^3$

बोध प्रश्न 3

क) कोष्ठक हटाकर निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए :

1) $x-(2x-y)+3y-(3x-4y)$

2) $2x-[3x+(4y-2x)-7y]$

3) $(3x+4y) - [x(y-z)] + [2y-(x-z)]$

4) $-3x+[5x+y-\{x+y+z-(x-y-2z)+3z\}+y]$

5) $5(2x+3y)-x(2y+3)+y(2x-5)+(7x-4xy)$

6) $2(3x-5y)-4[6x+7\{(x-2y)-3(3x-4y)\}]$

7) $a+\left(\frac{5}{7}\right)(b-a) - \left(\frac{3}{4}\right)\left[4a-\left(\frac{1}{3}\right)b\right] + \left(\frac{5}{21}\right)\left[a - \left(\frac{2}{3}\right)b\right]$

8) $-7x[-4y-\{3x-(5y-x)\}]$

9) $(a+b)(a+2b)$

10) $(a-2b+c)(a+2b-c)$

11) $(x^2+2xy+y^2)(x-y)$

12) $(ab+bc+cd)(bc-cd-da-ab)$

13) $(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)(a+b+c)$

ख) सरल कीजिए :

1) $\dfrac{15x^4}{10x^2}$

2) $\dfrac{108x^2y^4}{36xy}$

3) $\dfrac{119x^4y^3z^2}{85x^6yz^5}$

4) $\dfrac{14x^4}{21x^3y-7x^2y^2}$

5) $\dfrac{3x^5-6x^3}{12x^4-8x^2}$

6) $\dfrac{xy^2+x^2y}{3x^2+6x}$

7) $\dfrac{5x^2y}{6a^3b^2} \div \dfrac{3ab}{10xy}$

8) $\dfrac{8a^2b^2c^2}{3a^3b^4c^5} \div \dfrac{6ab^3c}{4a^2b^4c^3}$

9) $\dfrac{6x^2y^3}{5a^2b} \div \dfrac{2x^2y^2}{3a^2b^2}$

10) $\dfrac{12x^2}{7yz} \times \dfrac{4y^2z}{5z^2x} \div \dfrac{3xy}{35z^2}$

बोध प्रश्न 4

निम्नलिखित व्यंजकों के गुणनखण्ड कीजिए :

1) $3x+4y+3ux+4uy$

2) $ax-ay-bx+by$

3) $4(x+y)^2-2x-2y$

4) $xy-ab-by+ax$

5) $3x^2-3x+ax+x-a-1$

6) $9x^2-4y^2$

7) $36x^4-4x^2$

8) $4x^2+4x+1$

9) $18x^2+24x+8$

10) $81x^4-72x^2y^2+16y^4$

11) $9x^2+18x+9-16y^2$

12) $\dfrac{9x^2}{49} - \dfrac{4y^2}{25}$

13) $x^2+13x+40$

14) $x^2+11x-102$

15) $5x^3+30x^2+40x$

16) $3y^2+54y+195$

17) $5x^2+9x-2$

18) $x^2-3x-54$

19) $x^2+32xy-105y^2$

20) $x^2+12xyz+28y^2z^2$

21) $20y^2-9xy-20x^2$

22) $9-121x^4$

23) $a^4b^4c^8-16x^4$

24) $(a-4x)^2-25y^2$

25) $(a+2b+c)^2-(c-a-b)^2$

26) $x^4+3x^2y^2-4y^4$

27) $4x^4-5x^2y^2+y^4$

28) x^3+27y^3

29) $x^3y^3z^3-1$

30) $729a^4b-ab^4$

31) $(x+y)^3+(x-y)^3$

32) $x^9a^6-125x^3y^3$

33) $a^2x^2-4a^2xy+4a^2y^2-4b^2y^2+4b^2xy-b^2x^2$

बोध प्रश्न 5

घातांक : निम्नलिखित का प्रसार/सरलीकरण कीजिए :

1) $(xy)^4$

2) $(x^2y^3)^4$

3) $(-2x^3y^2)^3$

4) $(x^3y^4)^3\,(x^2y^3)^4$

5) $(xy^2z^3)^a\,(yz^2x^3)^b\,(zx^2y^3)^c$

6) $\dfrac{(x^5y^4)^2}{(x^6y^3)^2}$

7) $\dfrac{[5(x^2y^3)(-3xy^2)^3]}{(x^4y^2)^2(-xy)}$

8) $\dfrac{(x^ay^b)}{(x^cy^d)}$

9) $\dfrac{[x^{a-5}.\,y^{b-2}.\,z^{c-3})}{(x^{a+5}.\,y^b.\,z^{c-3})}$

10) $\dfrac{[x^{1/2}y^{3/4}(3z)^{5/6}]}{[(2x^{2/3}y^{1/3}z^{2/3})]}$

11) $\left[(\sqrt{x})^{-2/3}\right]^6$

12) $(x+y)^{-1}(x^{-1}+y^{-1})$

13) $(x^{-1}+y^{-1})^{-1}$

14) $\dfrac{[(abc)^{-1}]}{[a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}]}$

15) $\left[\dfrac{(xy^{-2})}{(x^{-3}y^3)}\right]^{-3/2}$

16) $\dfrac{[(x-3y)^2]}{[3x^2-9xy]}$

17) $\dfrac{[2x^2+2xy-4y^2]}{[4x^2-4y^2]}$

18) $\dfrac{(5xy-10y^2)}{(x^2-3xy+2y^2)}$

19) $\dfrac{[(x-y)^2+(y-x)]}{(x-y-1)}$

20) $\dfrac{[(x^4-1)]}{(5x-40)}\times\dfrac{[(5x^2-50x+80)]}{(x^2-2x+x-2)}$

बोध प्रश्न 6

लघुत्तम समापवर्त्य निकालकर भिन्नों को सरल कीजिए :

1) $\left(\dfrac{1}{2x}\right)+\left(\dfrac{3}{3x}\right)$

2) $\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{3}{x}$

3) $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x^2-1)}$

4) $\dfrac{x}{2xy}+\dfrac{y}{4xy}+\dfrac{z}{8xy}$

5) $\dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{(x+y)}$

6) $\dfrac{1}{2x-3}+\dfrac{1}{2x+3}+\dfrac{3}{4x^2-9}$

7) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{3}{3x+4}-\dfrac{1}{(3x^2+x-4)}$

8) $\dfrac{1}{3x-2}+\dfrac{1}{2x-3}$

9) $\left[\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x}\right]\left[\frac{x}{y^2}-\frac{y}{x^2}\right]$ 10) $\left[\frac{x^2}{y^2}-1\right]\div\left[\frac{x^2}{y^2}-\frac{2x}{y}+1\right]$

11) $\left[\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}\right]\div\left[\frac{a}{a+b}-\frac{b}{a-b}\right]$ 12) $\left[\frac{x+y}{x^2-y^2}+\frac{1}{x+y}\right]\times(x^2-y^2)$

3.2.1 एक-चर रैखिक समीकरण

समीकरण के दो पक्ष होते हैं जिनको प्रायः वाम पक्ष तथा दक्षिण पक्ष कहते हैं जैसे,

1) $3x+4=10$

$x^2+4=20$

$x^2-8x=0$

$4x^2+20x+25=0$

$x^4+3x^3+4x^2-5x+7=0$ इत्यादि

यहाँ x एक अज्ञात चर है।

अज्ञात चर का वह मान जिससे वाम पक्ष दक्षिण पक्ष के बराबर हो जाए, समीकरण का **हल** या **मूल** कहलाता है। उदाहरण के लिए समीकरण $3x+4=10$ में जब x का मान 2 हो तो वाम पक्ष $3\times2+4=10$ हो जाता है जो कि दक्षिण पक्ष के बराबर है। इस प्रकार $x=2$ इस समीकरण का मूल या हल है।

इसी प्रकार समीकरण $4x^2+20x+25=0$ में अगर $x=-\frac{5}{2}$ हो तो वाम पक्ष $= 4\times\frac{25}{4}+20(-\frac{5}{2})+25=$ $25-50+25=0$, जो कि दक्षिण पक्ष के बराबर है। इसलिए $x=-\frac{5}{2}$ इस समीकरण का हल है।

वह कथन जोकि x चर के प्रत्येक मान के लिए सत्य हो, **समानिका** कहलाता है। जैसे $x+3=\left(\frac{2x+5}{2}\right)+\frac{1}{2}$

इसके विपरीत समीकरण चर के एक या कुछ मानों के लिए ही सत्य होती है। (यह भी हो सकता है कि चर के किसी मान के लिए समीकरण सत्य न हो जैसे समीकरण $x^2+2=0$ को किसी वास्तविक संख्या द्वारा सत्य प्रमाणित नहीं किया जा सकता)। प्रायः हमें वह मान ज्ञात करने होते हैं जिनसे समीकरण सत्य प्रमाणित हो जाए। इस प्रक्रिया को समीकरण हल करना कहते हैं।

समीकरण के कठिन रूप भी हो सकते हैं लेकिन यहाँ हम सरल प्रकार के समीकरणों पर विचार करेंगे। ऐसी सरलतम समीकरण एक-चर रैखिक समीकरण है। इस समीकरण में चर की अधिकतम घात इकाई के बराबर होती है। इसका सामान्य रूप $ax+b=c$ होता है। यहाँ a,b,c ज्ञात अंक है। इस समीकरण को हल करने का अर्थ x का ऐसा मान ज्ञात करना है जो कि समीकरण में रखे जाने पर उसको सन्तुष्ट करे।

हम यह देख सकते हैं कि $ax+b=c$ समीकरण के लिए सिर्फ $x=\frac{c-b}{a}$ एक ऐसा मान है जो इसको सन्तुष्ट करता है। रैखिक समीकरणों अनेक प्रकार से उत्पन्न हो सकते है जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट है:

उदाहरण 1.1 : ऐसी तीन क्रमागत सम-संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका योग 60 हो।

हल : मान लिया पहली संख्या 2x है तो अगली दो संख्याएँ क्रमशः $2x+2$ तथा $2x+4$ होंगी।

इस प्रकार $2x+(2x+2)+(2x+4)=60$

या $6x+6=60$

या $x=\frac{60-6}{6}=9$

$\therefore$ तीन संख्याएं क्रमशः 18, 20 तथा 22 हैं।

उदाहरण 1.2 : 26 मीटर कपड़े को दो भागों में इस प्रकार विभाजित किया गया कि छोटे भाग का $\frac{2}{5}$ बड़े भाग के $\frac{1}{4}$ के बराबर है। प्रत्येक भाग की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया छोटे भाग की लम्बाई x मीटर है तो बड़े भाग की लम्बाई $(26-x)$ मीटर होगी।

इस प्रकार $\frac{2}{5}x=\frac{1}{4}(26-x)$

या $\frac{2}{5}x+\frac{1}{4}x=\frac{26}{4}$

अब आप स्वयं x का मान ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण 1.3 : दो स्टेशनों के बीच दूरी 1625 कि. मी. है। इनसे दो रेलगाड़ियाँ एक दूसरे की ओर आ रही हैं। पहली गाड़ी की गति 50 कि. मी. प्रति घंटा तथा दूसरी गाड़ी की गति 75 कि. मी. प्रति घंटा है। वे दोनों कितने घंटों के बाद मिलेंगी।

हल : मान लिया दोनों रेलगाड़ियाँ x घंटे बाद मिलती हैं। इस अवधि में

पहली गाड़ी द्वारा तय दूरी = $50x$ कि.मी.

दूसरी गाड़ी द्वारा तय दूरी = $75x$ कि. मी.

क्योंकि कुल दूरी 1625 कि. मी. है तो गाड़ियाँ मिलने पर $75x=1625-50x$ होगा

या $125x=1625$

अब आप x का मान ज्ञात कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 7

1) निशानेबाजी-प्रतियोगिता में अगर निशानेबाज लक्ष्य पर मारता है तो उसे 50 पै. प्राप्त होते हैं। लक्ष्य पर न लगने पर उसे 30 पै. देने पड़ते हैं। उसने 50 बार प्रयास किया और अन्त में 3 रु. की हानि हुई। उसके कितने निशाने लक्ष्य पर लगे ?

2) नाइलोन की लागत कपास की लागत का तिगुना है तथा कपास की लागत पटसन की लागत का दुगुना है। एक व्यक्ति ने 30 मी॰ पटसन, 15 मी॰ कपास व 10 मी॰ नाइलोन धागे की खरीद पर 120 रु. व्यय किए। प्रत्येक वस्तु की प्रति मीटर लागत ज्ञात कीजिए।

3) A व्यक्ति B से 30 वर्ष बड़ा है। अगर A की आयु 25 से इतनी अधिक है जितनी B की आयु 95 से कम, तो दोनों की आयु ज्ञात कीजिए।

4) पीटर की आयु उसके बेटे स्मिथ की आयु का पाँच गुना है। 30 वर्ष बाद पीटर की आयु उसकी अपनी वर्तमान आयु का दुगुना हो जाएगी। पीटर व स्मिथ की वर्तमान आयु ज्ञात कीजिए।

5) 7 रु. 50 पै. की राशि का भुगतान 25, 20 तथा 10 पैसे के सिक्कों में किया गया। अगर 20 पै. के सिक्कों की संख्या 10 पै. के सिक्कों की सँख्या का दुगना थी तथा 25 पै. के सिक्कों की सँख्या 10 पै. के सिक्कों की सँख्या का तिगुना थी तो प्रत्येक प्रकार के कितने सिक्कों का भुगतान किया गया ?

6) एक कमरे की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 3 फुट अधिक है अगर कमरे की चौड़ाई में 5 फुट वृद्धि की जाए तथा लम्बाई में 4 फुट कमी की जाए तो कमरे के क्षेत्रफल में कोई परिवर्तन नहीं होता। कमरे का आरंभिक नाप क्या है ?

7) अगर किसी संख्या का दो तिहाई भाग उसके एक चौथाई भाग से 15 अधिक है तो संख्या ज्ञात कीजिए।

8) दो क्रमागत संख्याएँ ऐसी हैं कि छोटी का एक तिहाई भाग बड़ी के एक चौथाई भाग से 2 अधिक है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

9) A, B तथा C के पास कुल 1500 रु. हैं। A के पास, B के पास जितने रुपए हैं उनके दो तिहाई से 25 रु. अधिक हैं और B के पास C के पास होने वाली राशि के $^2/_5$ गुना से 15 रुपए कम हैं। तीनों के पास कितनी-कितनी राशि है?

3.2.2 द्वि-चर रैखिक समीकरण

जब किसी समीकरण में दो चर, जैसे x तथा y, विद्यमान हों तथा उनकी अधिकतम घात इकाई के बराबर हो तो वह द्वि-चर रैखिक समीकरण कहलाता है। सामान्य रूप में यह समीकरण इस प्रकार से लिखा जाता है :

$$ax+by=c$$

उदाहरण के लिए 3 पैनों तथा 5 पैंसिलों की कुल लागत 9.50 रु. है। मान लिया एक पैन की लागत x तथा एक पैंसिल की लागत y है तो द्वि-चर रैखिक समीकरण द्वारा इस कथन को निम्नलिखित रूप में व्यक्त किया जा सकता है :

$$3x+5y=9.50$$

सिर्फ इतना दिया होने पर x तथा y का उपयुक्त मान निकालना सम्भव नहीं है। क्योंकि इस समीकरण में

$x=1.0$ तथा $y=1.3$

या $x=2.0$ तथा $y=0.7$

या $x=1.5$ तथा $y=1.0$

x तथा y के सम्भावित मान हो सकते हैं। यहाँ x तथा y का उपयुक्त मान निकालने के लिए हमें अतिरिक्त सूचना की आवश्यकता है। जैसे अगर ऊपर दी गई सूचना के अतिरिक्त हमें यह भी ज्ञात है कि 2 पैनों तथा 3 पैन्सिलों की कुल लागत 6 रु. हैं तो इस सूचना से हमें एक और समीकरण प्राप्त होगा जोकि इस प्रकार है :

$$2x+3y=6$$

जैसा कि हम बाद में जानेंगे इन दो समीकरणों द्वारा हम x तथा y का मान क्रमशः 1.5 तथा 1.0 ज्ञात कर सकते हैं जोकि क्रमशः पैन तथा पैन्सिल की कीमतें हैं।

दो चरों x तथा y के मान निकालने के लिए दो समीकरणों की आवश्यकता पड़ी, यह मात्र केवल संयोग नहीं है। फिर भी, किन्हीं दो समीकरणों से यह सम्भव नहीं होता। इसके लिए यह आवश्यक है कि दोनों समीकरणों में विरोध नहीं होना चाहिए।

उदाहरण के लिए अगर हमारे पास निम्न दो समीकरण हैं,

$$2x+3y=10 \text{ तथा}$$
$$4x+6y=15$$

इनकी जाँच करने पर यह ज्ञात होता है कि दूसरा समीकरण का वाम पक्ष पहला समीकरण वाम पक्ष के दुगुने के बराबर है अर्थात् $4x+6y=2(2x+3y)$ लेकिन दूसरा समीकरण का दक्षिण पक्ष पहली समीकरण के दक्षिण पक्ष के दुगुने के बराबर नहीं है। इसलिए इन समीकरणों को असंगत कहा जाता है। इस प्रकार के समीकरणों का हल निकालना सम्भव नहीं होता। अतः किसी समीकरण निकाय का हल निकालने से पहले हमें उनमें संगति की जाँच अवश्य ही कर लेनी चाहिए।

अब, मान लिया हमारे पास निम्नलिखित दो समीकरण हैं:

$$2x+3y=6 \quad \text{तथा}$$
$$4x+6y=12$$

निस्सन्देह, यह समीकरण निकाय संगत है लेकिन दूसरा समीकरण जो कि पहला समीकरण के दोनों पक्षों को 2 से गुणा करने से प्राप्त होती है, हमें कोई अतिरिक्त सूचना प्रदान नहीं करती। यहाँ, वास्तव में, एक समीकरण दूसरे का गुणज है। इस प्रकार के समीकरण निकाय को आश्रित समीकरण निकाय कहा जाता है। आश्रित समीकरण निकाय का भी हल निकालना सम्भव नहीं होता क्योंकि वास्तव में दूसरा समीकरण पहले से स्वतंत्र नहीं है तथा प्रभावी रूप में हमारे पास केवल एक ही समीकरण है।

अतः हल निकालने के लिए हमें एक और ऐसे समीकरण की आवश्यकता होती है जो पहले समीकरण का गुणज न हो। इस प्रकार के समीकरण निकाय को स्वतंत्र समीकरण निकाय कहते हैं। उदाहरण के लिए हमारा मूल समीकरण $3x+5y=9.5$ किसी प्रकार से समीकरण $2x+3y=6$ द्वारा प्राप्त नहीं की जा सकता।

इस प्रकार दो चरों का मान निकालने के लिए हमें दो चरों वाले, दो संगत तथा स्वतंत्र रैखिक समीकरणों की आवश्यकता होती है।

मान लिया निम्नलिखित दो समीकरण इसी प्रकार के हैं:

$$a_1x+b_1y+c_1=0 \text{ तथा} \qquad (1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2=0 \qquad (2)$$

इनका हल निम्नलिखित विधि द्वारा निकाला जा सकता है:
हम समीकरण (1) तथा (2) को पुनः इस प्रकार लिखते हैं:

$$a_1x+b_1y=-c_1 \text{ तथा} \qquad (1)$$
$$a_2x+b_2y=-c_2 \qquad (2)$$

पहले समीकरण के दोनों पक्षों को a_2 से गुणा तथा दूसरे समीकरण के दोनों पक्षों को a_1 से गुणा करने पर

$$a_1a_2x+b_1a_2y=-a_2c_1 \qquad (3)$$
$$a_1a_2x+a_1b_2y=-a_1c_2 \qquad (4) \text{ समीकरण प्राप्त होते हैं।}$$

(3) में से (4) को घटाने पर

$$(b_1a_2-a_1b_2)y=-a_2c_1+a_1c_2$$
$$\text{या } (a_2b_1-a_1b_2)y=a_1c_2-a_2c_1$$

$$\text{या } y=\frac{a_1c_2-a_2c_1}{(a_2b_1-a_1b_2)} \text{ प्राप्त होता है।}$$

y का यह मान समीकरण (1) या (2) में रखने पर x का मान ज्ञात किया जा सकता है।
समीकरण (1) में मान रखने पर

$$a_1x+b_1\frac{(a_1c_2-a_2c_1)}{(a_2b_1-a_1b_2)}=-c_1$$

$$\text{या } \frac{a_1(a_2b_1-a_1b_2)x+b_1(a_1c_2-a_2c_1)}{(a_2b_1-a_1b_2)} = -c_1$$

या $a_1(a_2b_1-a_1b_2)x+b_1(a_1c_2-a_2c_1) = -c_1(a_2b_1-a_1b_2)$

या $a_1(a_2b_1-a_1b_2)x = -c_1(a_2b_1-a_1b_2) - b_1(a_1c_2-a_2c_1)$

$= -a_2b_1c_1+a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 + a_2b_1c_1$

$a_1(a_2b_1-a_1b_2)x = a_1(b_2c_1-b_1c_2)$

या $x = \frac{b_2c_1-b_1c_2}{(a_2b_1-a_1b_2)}$ है।

टिप्पणी : अगर हम y का मान समीकरण (2) में रखकर x का मान निकालें तो यह भी वही मान आएगा जो हमने ऊपर ज्ञात किया है। आप इसको स्वयं करके अपने आप को सन्तुष्ट कर लें।

दूसरी विधि

समीकरण (1) व (2) को पुनः लिखने पर

$a_1x+b_1y=-c_1$ (1)

$a_2x+b_2y=-c_2$ (2)

समीकरण (1) द्वारा हम यह लिख सकते हैं

$a_1x=-c_1-b_1y$

या $x = \frac{-c_1-b_1y}{a_1}$ .... (3)

x के इस मान को समीकरण (2) में रखने पर

$$\left[\frac{(a_2)(-c_1-b_1y)}{a_1}\right] + b_2y = -c_2$$

या $\frac{-a_2c_1-a_2b_1y}{a_1} + b_2y = -c_2$

दोनों पक्षों को a_1 से गुणा करने पर

$-a_2c_1-a_2b_1y+a_1b_2y = -a_1c_2$

या $(a_1b_2-a_2b_1)y = a_2c_1-a_1c_2$ (4)

$\therefore\ y = \frac{a_2c_1-a_1c_2}{a_1b_2-a_2b_1}$ है जोकि पहली विधि द्वारा प्राप्त y के मान के बराबर है।

y के इस मान को (3) में रखने पर x का मान निम्न प्रकार से प्राप्त किया जा सकता है :

$a_1x = -c_1-b_1\frac{(a_2c_1-a_1c_2)}{(a_1b_2-a_2b_1)}$

या $a_1(a_1b_2-a_2b_1)x = -a_1b_2c_1 + a_2b_1c_1 - a_2b_1c_1 + a_1b_1c_2$

$a_1(a_1b_2-a_2b_1)x = a_1(b_1c_2 - b_2c_1)$

या $x = \frac{b_1c_2-b_2c_1}{a_1b_2-a_2b_1}$

जो कि x के पहली विधि द्वारा प्राप्त मान के बराबर है। समीकरण निकाय को हल करने की तीसरी विधि भी होती है जिसमें आलेख का प्रयोग किया जाता है। इस विधि द्वारा हल का वर्णन हम निर्देशांक ज्यामिति सीखने के बाद करेंगे।

हमें हमेशा यह जाँच कर लेनी चाहिए कि समीकरण निकाय का जो हल हमने ज्ञात किया है वह वास्तव में प्रत्येक समीकरण को सन्तुष्ट करता है अथवा नहीं। सिर्फ इस प्रकार ही हम उत्तर के ठीक होने के बारे में आश्वस्त हो सकते हैं।

- पहली विधि को **विलोपन विधि** कहते हैं। इस विधि में हमने चर x का विलोपन किया तथा चर y के रूप में रैखिक समीकरण प्राप्त करके इसको y के लिए हल किया। y के इस मान का प्रतिस्थापन किसी भी समीकरण में करके x का मान ज्ञात किया। हम समीकरण हल के लिए पहले चर y का भी विलोपन कर सकते है। इस प्रकार चर x के रूप में रैखिक समीकरण प्राप्त होगी। इसको x के लिए हल करके तथा इस मान को किसी भी समीकरण में प्रतिस्थापित करने पर y का मान निकाला जा सकता है। इसको आप स्वयं करके अपने आप को सन्तुष्ट करें कि इस विधि से भी समीकरण निकाय का वही उत्तर प्राप्त होता है।

- दूसरी विधि को **प्रतिस्थापन विधि** कहते हैं। इस विधि में किसी एक समीकरण से x का मान y के पदों में प्राप्त कर दूसरी समीकरण में प्रतिस्थापित किया जाता है। इस प्रकार y के रूप में रैखिक समीकरण प्राप्त कर उसको y के लिए हल कर लिया जाता है। इस मान का प्रतिस्थापन करके चर x का मान निकाला जाता है। यहाँ पर भी हम पहले y का प्रतिस्थापन x के पदों में करके x के रूप में रैखिक समीकरण प्राप्त कर सकते हैं। इससे x का मान निकाल कर व इसका प्रतिस्थापन करके y का मान निकाला जा सकता है। दोनों विधियों से समान उत्तर प्राप्त होगा जिसकी जाँच आप स्वयं करके अपने को सन्तुष्ट कर लें।

उदाहरण 2.1 : दो संख्याओं का योग 60 है तथा पहली संख्या का दूना दूसरी संख्या के दस-गुने के बराबर है। दोनों संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया दो संख्याएँ x तथा y हैं।

हमें दिया हुआ है कि

$$x+y=60 \quad (1)$$
$$2x=10y \quad (2)$$

इस प्रकार हमारे पास निम्नलिखित दो रैखिय समीकरण हैं

$$x+y=60 \quad (1)$$
$$2x-10y=0 \quad (2)$$

पहली समीकरण को 2 से गुणा करने पर

$$2x+2y=120 \quad (3)$$
$$2x-10y=0 \quad (4)$$

(4) को (3) में से घटाने पर

$$2y-(-10y) = 120 - 0$$
$$12y = 120$$
$$y = 10$$

इस भाग का समीकरण (1) में प्रतिस्थापन करने पर

$$x+10=60$$
या $x=60-10=50$

इस प्रकार दो संख्याएँ 50 व 10 हैं।

इस उत्तर की जाँच के लिए हम ये मान समीकरण (1) व (2) में प्रतिस्थापित करते हैं।

(1) में प्रतिस्थापित करने पर $50+10=60$ तथा

(2) में प्रतिस्थापित करने पर $2\times50-10\times10=0$

क्योंकि दोनों समीकरण सन्तुष्ट हो जाती हैं इसलिए हमारा उत्तर ठीक है।

उदाहरण 2.2 : एक पुरुष ने 5 दिन कार्य करके तथा उसकी पत्नी ने 4 दिन कार्य करके कुल 115 रु. अर्जित किए। जब पुरुष ने 8 दिन कार्य किया तथा महिला ने 6 दिन कार्य किया तो उनकी कुल आय 180 रु. थी। पुरुष तथा महिला की प्रतिदिन आय दर क्या है?

हल : मान लिया पुरुष की दर x तथा महिला की दर y है

तब $5x+4y=115 \quad (1)$

तथा $8x+6y=180 \quad (2)$

ये x तथा y में दो रैखिक समीकरण हैं जिनको हमें हल करना है। यहाँ हम प्रतिस्थापन विधि का प्रयोग करेंगे।

पहले समीकरण द्वारा $5x=115-4y$

या $x=\dfrac{115-4y}{5}$

x के इस मान को समीकरण (2) में प्रतिस्थापित करने पर

$$\frac{8(115-4y)}{5} + 6y = 180$$

या $8(115-4y)+30y=180\times5$

या $920-32y+30y=900$

$$-2y=900-920$$
$$-2y=-20$$
$$y=10$$

इस मान को समीकरण (1) में प्रतिस्थापित करके x का मान निकाला जा सकता है।

$$5x+4\times10=115$$
$$5x=115-40$$
$$5x=75$$
$$x=15$$

यहाँ पर भी हम x तथा y के हल को (1) तथा (2) में प्रतिस्थापित करके यह देख सकते हैं कि दोनों समीकरण सन्तुष्ट हो जाते हैं और इसलिए यह हल ठीक है। अतः पुरुष व महिला की प्रतिदिन की मजदूरी क्रमशः 15 रु. तथा 10 रु. है।

बोध प्रश्न 8

निम्नलिखित को हल कीजिए (युगपत् समीकरण 1 – 6):

1) $8x+3y=25$
   $3x+7y=27$

2) $14x-3y=39$
   $6x+17y=35$

3) $5x=6y+1$
   $3x-2y=7$

4) $7x=6y+24$
   $5y=2x+3$

5) $\frac{x+4}{5}=\frac{y-3}{4}=\frac{x+y+1}{9}$

6) $\frac{1}{4x}+\frac{1}{3y}=10$
   $\frac{1}{2x}-\frac{1}{3y}=0$

7) दो अंकों का योग 77 है तथा उनका अन्तर 27 है। दोनों अंक ज्ञात कीजिए।

8) दो किलो चीनी और तीन किलो चाय की लागत 136 रु. है। पाँच किलो. चीनी और दो किलो. चाय की लागत 120 रु. है। चीनी तथा चाय की कीमतें ज्ञात कीजिए।

9) दो अंकों की संख्या के अंकों का योग 12 है। अगर अंकों के स्थान बदल कर प्राप्त संख्या को पहली संख्या में से घटाया जाय तो अन्तर 18 आता है। मूल संख्या ज्ञात कीजिए।

10) दो अंकों की संख्या के अंकों का योग उस संख्या का $\frac{1}{7}$ है। अगर संख्या में से 36 घटाया जाए तो अंकों के स्थान बदल जाते हैं। संख्या ज्ञात कीजिए।

11) एक व्यक्ति के पास कुछ रुपए के सिक्के तथा कुछ दस पैसे के सिक्के हैं। अगर सभी दस पैसे वाले सिक्के रुपए वाले सिक्के बन जाएँ तथा सभी रुपए वाले सिक्के दस पैसे वाले सिक्के बन जाएं तो उसे 1.80 रु. का लाभ होता है। अगर सभी सिक्के 50 पैसे वाले सिक्के बन जाएं तो उसे 30 पैसे का लाभ होता है। उसके पास कितनी मुद्रा है।

12) 4 पुरुषों तथा 6 महिलाओं की प्रतिदिन की कुल आय 50 रु है। 4 पुरुषों की मजदूरी 4 महिलाओं की मजदूरी से 20 रु. अधिक है। प्रत्येक पुरुष तथा महिला की क्या मजदूरी है।

13) एक दूकानदार बढ़िया किस्म के अनाज तथा घटिया किस्म के अनाज को मिश्रित करके 8 रु. प्रति किलो. की दर से बेचना चाहता है। अगर बढ़िया किस्म के अनाज की कीमत 9 रु. प्रति किलो. हो तथा घटिया किस्म के अनाज की कीमत 5 रु. प्रति किलो. हो और मिश्रित अनाज का कुल भार 100 किलो. हो, तो उसने प्रत्येक किस्म का कितनी मात्रा में मिश्रण किया?

14) A तथा B के बीच की दूरी 64 कि.मी. है। वे दोनों एक ही समय पर विपरीत दिशाओं में यात्रा करके 4 घंटे बाद आपस में मिलते हैं। अगर वे दोनों एक ही दिशा में यात्रा करें तो A व्यक्ति B से 8 घंटे में मिलता है। A तथा B किस गति से यात्रा कर रहे है।

15) एक परिवार, जिसमें 4 वयस्क तथा 6 बच्चे हैं। खाद्य सामग्री पर 108 रु. प्रति सप्ताह खर्च करता है। अगर वयस्क अपनी सामान्य मात्रा का 2/3 का उपभोग करे तथा बच्चा अपनी सामान्य मात्रा का 3/4 उपभोग करे तो परिवार को प्रति सप्ताह 32 रु. की बचत हो सकती है। एक वयस्क तथा एक बच्चे की क्रमशः प्रति सप्ताह खाद्य लागत ज्ञात कीजिए।

3.3 द्विघात समीकरण

हमने पहले भाग में एक रैखिक समीकरण के हल पर विचार किया। मान लिया हमारे पास एक चर x का समीकरण ऐसा है जिसका रूप $ax^2+bx+c=0$ है। यहाँ पर x की उच्चतम घात 2 है। इस प्रकार के समीकरण को द्विघात समीकरण कहते हैं। उदाहरण के लिये

(i) $4x^2=0$

(ii) $2x^2+9x-5=0$
(iii) $x^2-6x-9=0$
(iv) $-4x^2+20x=25$ आदि द्विघात समीकरण हैं। एक द्विघात समीकरण को $ax^2+bx+c=0$ के रूप में लिखा जा सकता है। यहाँ a, b तथा c ज्ञात संख्याएँ हैं।

द्विघात समीकरणों का हल निकालना

उदाहरण 3.1 निम्नलिखित समीकरण पर ध्यान दीजिए।

$x^2=9$

या $x^2-9=0$ इस समीकरण के वाम पक्ष के गुणनखण्ड इस प्रकार किए जा सकते हैं।

$(x-3)(x+3)=0$

अतः अगर $x=3$ या $x=-3$ हों तो समीकरण सन्तुष्ट हो जाती है। x के ये दोनों मान समीकरण के मान या मूल कहलाते हैं।

उदाहरण 3.2 : $2x^2+9x-5=0$

इसके गुणनखण्ड इस प्रकार किए जा सकते हैं :

$(2x-1)(x+5)=0$

अतः समीकरण के मूल $x=-5$ तथा $x=\frac{1}{2}$ है।

इस प्रकार द्विघात समीकरण के वाम पक्ष के रैखिक गुणनखण्ड निकाल कर x का वह मान प्राप्त करना जिससे प्रत्येक गुणनखण्ड शून्य के बराबर हो जाए, इसके हल करने की एक विधि है। x के ये मान द्विघात समीकरण के मूल कहलाते हैं।

जैसा कि उपरोक्त विवेचन से स्पष्ट है, एक द्विघात समीकरण के दो मूल होते हैं।

इस विधि द्वारा समीकरण को हल करने के लिए दिए हुए द्विघात व्यंजक के गुणनखण्ड करने की निपुणता आवश्यक है। हम एक और विधि का विवेचन करेंगे जिसमें इसकी आवश्यकता नहीं होती।

मान लिया $ax^2+bx+c=0$ एक दिया हुआ द्विघात समीकरण है। हम इसको पुनः इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$x^2+\left(\frac{b}{a}\right)x+\left(\frac{c}{a}\right)=0 \text{ (यहाँ } a\neq 0)$$

$$\text{या } x^2+\left(\frac{b}{a}\right)x+\left(\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}\right)+\left(\frac{c}{a}\right)=0 \qquad (2)$$

यहाँ पर हमने $\frac{b^2}{4a^2}$ को जोड़ा तथा घटाया है जैसा कि कोष्ठक में है।

अब ध्यान दें कि $x^2+\left(\frac{b}{a}\right)x+\frac{b^2}{4a^2}=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$

हम समीकरण (2) को इस प्रकार लिखते हैं

$$x^2+\left(\frac{b}{a}\right)x+\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)-\left(\frac{b^2}{4a^2}\right)+\left(\frac{c}{a}\right)=0$$

$$\text{या } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0$$

$$\text{या } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

$$=\frac{b^2-4ac}{4a^2} \qquad (3)$$

मान लिया $\frac{b^2-4ac}{4a^2}=k^2$ तो समीकरण (3) को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=k^2$$

$$\text{या } \left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-k^2=0$$

$$\text{या } \left(x+\frac{b}{2a}+k\right)\left(x+\frac{b}{2a}-k\right)=0$$

$\therefore$ समीकरण के मूल निम्नलिखित समीकरणों के हल के बराबर होंगे।

i) $x+\frac{b}{2a}+k=0$

या $x=-\frac{b}{2a}-k$

या $x=-\frac{b}{2a}-\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$=-\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ तथा

ii) $x+\frac{b}{2a}-k=0$

$x=-\frac{b}{2a}+k$

$=-\frac{b}{2a}+\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$

$=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

(i) तथा (ii) के हल को एक साथ निम्नलिखित रूप में लिखा जा सकता है :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

टिप्पणी : जब $b^2-4ac\geq 0$ हो तभी द्विघात समीकरण के मूलों का परिकलन सम्भव होता है अन्यथा हम k^2 को $\frac{b^2-4ac}{4a^2}$ के बराबर नहीं लिख सकते। क्योंकि इस परिस्थिति में b^2-4ac का वर्गमूल नहीं निकाला जा सकता।

उदाहरण 3.3 : दो क्रमागत सम-पूर्णांक संख्याओं के वर्ग का योग 100 है। संख्याएं ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया दो समपूर्णांक संख्याएं 2x तथा 2x+2 हैं इसलिए $(2x)^2+(2x+2)^2=100$

या $4x^2+4x^2+8x+4=100$

या $8x^2+8x-96=0$

अतः दो मूल इस प्रकार हैं :

i) $x=\frac{-8+\sqrt{(8)^2-4\times 8\times(-96)}}{2\times 8}$

$=\frac{-8+\sqrt{64+3072}}{16}=\frac{-8+56}{16}=3$ यह समीकरण का एक मूल है।

समीकरण का दूसरा मूल

ii) $x=\frac{-8-56}{16}=-4$

इस प्रकार अगर हम $x=3$ लें तो दो क्रमागत समपूर्णांक 6 और 8 होंगे और अगर हम $x=-4$ लें तो हमारा उत्तर -8 और -6 होगा।

बोध प्रश्न 9

क) निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को गुणनखण्ड द्वारा हल कीजिए :

1) $8(x^2-8)=4(x^2+9)$

2) $5x^2+7x+15=4x^2+5x+14$

3) $(2x-11)(2x+11)+21=0$

4) $x^2+15x = 34$

5) $13x-x^2 = \frac{105}{4}$

6) $3x^2-16x=12$

7) $16x^2+6ax=a^2$

8) $\frac{6x^2+5}{x} = 13$

ख). सामान्य विधि द्वारा निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को हल कीजिए :

1) $x^2-2x-15 =0$

2) $4x^2+16x+15=0$

3) $2x^2+7x-30=0$,

4) $x^2-x-20=0$

ग) द्विघात समीकरणों सम्बन्धी प्रश्न :

1) ऐसी दो क्रमागत धन विषम संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल 143 हो।

2) ऐसी दो क्रमागत सम संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल 143 हो

3) दो क्रमागत संख्याओं के व्युत्क्रमों का योग $\frac{23}{132}$ है, संख्याएं ज्ञात कीजिए।

4) एक रेलगाड़ी अपनी वर्तमान गति से 10 कि.मी. प्रति घंटा और तेज चलती तो 200 कि. मी. दूरी एक घंटा कम समय में तय कर लेती। गाड़ी की गति ज्ञात कीजिए।

5) एक पुरुष तथा उसकी पत्नी एक कार्य को 6 दिन में पूरा करते हैं। अगर महिला अकेली कार्य करती तो उसे कार्य को पूरा करने में पुरुष की तुलना में 5 दिन अधिक लगते। कार्य को पूरा करने में पुरुष कितना समय लेता है ?

6) एक मजदूर कुछ निश्चित दिनों में 225 रु. अर्जित करता है। अगर उसकी प्रतिदिन मजदूरी 10 रु. अधिक हो जाए तो उसे उतनी ही राशि अर्जित करने में 6 दिन कम लगेंगे। उसने कम मजदूरी दर पर कितने दिन कार्य किया ?

7) एक नाव 24 कि. मी. अनुप्रवाह जाने की तुलना में ऊर्ध्वप्रवाह जाने में एक घंटा अधिक लेती है। नदी में धारा की गति 2 कि. मी. प्रति घंटा है। खड़े पानी में नाव की गति ज्ञात कीजिए।

8) एक बाह्य आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई क्रमशः 25 मी. तथा 20 मी. है। भीतरी आयत का क्षेत्रफल 266 वर्ग मी. दिया हुआ है। बाह्य तथा भीतरी आयतों के बीच रास्ते की चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

9) एक आयताकार बाग की लम्बाई उसकी चौड़ाई से 2 मी. अधिक है। इस बाग के चारों ओर 2 मी. चौड़ा रास्ता है तथा उसके बाहर एक मी. चौड़ी पुष्प क्यारी है। इस प्रकार कुल क्षेत्रफल 120 वर्ग मी. है। बाग की लम्बाई तथा चौड़ाई ज्ञात कीजिए।

10) दो नलों को एक साथ चलाकर एक टंकी को 24 मिनट में भरा जा सकता है। बड़े नल द्वारा भरने में छोटे नल की तुलना में 20 मिनट कम समय लगता है। प्रत्येक नल से टंकी भरने में कितना समय लगेगा ?

3.4 लघुगुणक

यह सर्वविदित है कि बड़ी संख्याओं का गुणन तथा भाग करने का कार्य बड़ा ही नीरस होता है। घातांक सिद्धान्त के नियमों के प्रयोग से इस प्रकार के परिकलनों को सरल योग तथा व्यवकलन क्रियाओं में परिवर्तित किया जा सकता है। इस प्रकार की विधि की जानकारी आपको इस भाग में दी जाएगी।

जब हम किसी धनात्मक अंक को कोई घात (जोकि धनात्मक, ऋणात्मक या भिन्न हो) देते हैं तो इसका अर्थ होता है, यह हम जानते हैं। विभिन्न घातों की संक्रियाओं से भी हम परिचित हैं। यहाँ इस प्रकार के प्रश्नों के अभ्यास द्वारा इनका पुनः स्मरण करना आपके लिए उचित रहेगा।

निम्नलिखित तालिका पर ध्यान दीजिए :

$10^0 = 1$

$10^{.1} = 10^{1/10}$ 1.2589

$10^{.2} = 10^{2/10}$ 1.5849

$10^{.3} = 10^{3/10}$ 1.9953

$10^{.15} = 10^{15/100}$ 1.4125

$10^{.25} = 10^{25/100}$ 1.7783

$10^{.35} = 10^{35/100}$ 2.2387

$10^{.45} = 10^{45/100}$ 2.8184

$10^{.4} = 10^{4/10}$ 2.5119	$10^{.55} = 10^{55/100}$ 3.5481
$10^{.5} = 10^{5/10}$ 3.1623	$10^{.65} = 10^{65/100}$ 4.4668
$10^{.6} = 10^{6/10}$ 3.9811	$10^{.75} = 10^{75/100}$ 5.6234
$10^{.7} = 10^{7/10}$ 5.0119	$10^{.85} = 10^{85/100}$ 7.0795
$10^{.8} = 10^{8/10}$ 6.3096	$10^{.95} = 10^{95/100}$ 8.9125
$10^{.9} = 10^{9/10}$ 7.9432	

आपने क्या देखा? जैसे घात x में शून्य से आगे वृद्धि होती है तो संख्या 10^x के मान में 1 से आगे वृद्धि होती है। उदाहरण के लिए अगर x का मान 0.3 तथा 0.35 के बीच है, मान लिया $x=0.33$ तो संख्या $10^{0.33}$ का मान $10^{0.3}$ तथा $10^{0.35}$ के बीच होगा। वास्तव में यह सत्य है क्योंकि

$10^{0.3} = 1.9953$, $10^{0.33} = 2.1380$ तथा $10^{0.35} = 2.2387$

इसी प्रकार से यह भी देखा जा सकता है कि अगर x का मान ऋणात्मक हो और कम होता जाए तो 10^x का मान कम होता जाता है। इस प्रकार 10^x का न्यूनतम मान शून्य होगा। इस तथ्य को निम्नलिखित तालिका द्वारा समझा जा सकता है।

$10^{-0.1} = 0.7943$	$10^{-0.15} = 0.7074$	$10^{-0.2} = 0.6309$
$10^{-0.25} = 0.5623$	$10^{-0.3} = 0.5012$	$10^{-0.35} = 0.4467$
$10^{-0.4} = 0.3981$	$10^{-0.45} = 0.3548$	$10^{-0.5} = 0.3162$
$10^{-0.55} = 0.2818$	$10^{-0.6} = 0.2512$	$10^{-0.65} = 0.2239$
$10^{-0.7} = 0.1995$	$10^{-0.75} = 0.1778$	$10^{-0.8} = 0.1585$
$10^{-0.85} = 0.1413$	$10^{-0.9} = 0.1259$	$10^{-0.95} = 0.1122$
	$10^{-1} = 0.1000$	

उपरोक्त दो प्रेक्षणों के आधार पर हम एक मूल परिणाम की व्याख्या करेंगे।

परिणाम : किसी धनात्मक संख्या y को 10 की अद्वितीय घात x के रूप, जैसे 10^x, में व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ x का मान धनात्मक, ऋणात्मक या शून्य हो सकता है।

टिप्पणी : आप में से जिनकी गणित के बारे में पूर्वजानकारी अधिक है, इस बात पर ध्यान देंगे कि अगर y तथा z धनात्मक संख्याएं है तो x के उपयुक्त अद्वितीय चयन द्वारा हम हमेशा $y=z^x$ लिख सकते हैं। जैसा कि हम बाद में देखेंगे कि यह मूल परिणाम परिकलन कार्य में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है। अब हम निम्नलिखित परिभाषा की व्याख्या कर सकते हैं।

x के उपयुक्त मान के लिए अगर हम $y = 10^x$ लिख सकते है, जहाँ y एक धनात्मक संख्या है, तो x को गुणक आधार 10 पर y का लघुगणक कहते हैं। इसको इस प्रकार लिखा जाता है।

$$\text{लघु}_{10} y = x$$

स्पष्टतः किसी संख्या के लघुगणक घात का मान होता है। इसलिए लघुगणक y आधार 10 से अर्थ संख्या 10 की उस घात से है जिससे यह y के बराबर हो जाए, अर्थात x का वह मान जिससे $10^x = y$

इसी प्रकार अगर $y=z^a$ जहाँ z एक धनात्मक संख्या है तो a को लघुगणक y आधार z कहा जाता है। इसको हम इस प्रकार लिखते हैं

$$a = \text{लघु}_z y$$

बहुत सी व्यावहारिक परिस्थितियों में लघुगणक का आधार प्रायः 10 लिया जाता है। इस प्रकार के लघुगणक को सामान्य लघुगणक कहते हैं। हम अपने प्रश्नों में केवल आधार 10 का ही प्रयोग करेंगे। इसलिए लेखन सुविधा हेतु इसको प्रत्येक पद के साथ तब तक लिखना आवश्यक नहीं है जब तक अस्पष्टता की कोई गुंजाइश न हो।

जैसा कि हमने ऊपर देखा

$10^{0.4} = 2.5119$ और क्योंकि $10^{1.4} = 10\times10^{0.4}$

इसलिए $10^{1.4} = 2.5119\times10=25.119$
इसी प्रकार $10^{2.4} = 251.19$
तथा, $10^{3.4} = 2511.9$ आदि
और इसी प्रकार $10^{-0.3} = 0.5012$
$10^{-1.3} = 0.05012$
$10^{-2.2} = 0.005012$

प्रत्येक लघुगुणक के दो भाग होते हैं, एक **पूर्ण** तथा दूसरा **भिन्न** जोकि दशमलव के रूप में होता है। पूर्ण भाग को **पूर्णांश** तथा भिन्न भाग को **अपूर्णांश** कहते हैं।

उपरोक्त उदाहरण से हम देखते हैं कि 2.5119, 25.119, 251.19 आदि संख्याओं के लघुगुणक का अपूर्णांश समान रहता है जोकि यहाँ 0.4 है। इस प्रकार किसी एक क्रम में लिखे गए अंकों का अपूर्णांश समान होता है तथा यह दशमलव के स्थान पर निर्भर नहीं होता।

अब हम किसी संख्या के लघुगुणक के पूर्णांश तथा अपूर्णांश ज्ञात करने की विधि की व्याख्या कर सकते हैं।

a) **पूर्णांश ज्ञात करने की विधि**

i) किसी संख्या, जो इकाई या इससे अधिक है, के लघुगुणक का पूर्णांश उस संख्या में दशमलव बिन्दु से बाईं ओर विद्यमान अंकों की गिनती से एक कम होता है।

अगर संख्या पूर्ण संख्या है तो हम यह मान लेते हैं कि उसमें विद्यमान सभी अंक दशमलव के बाईं ओर हैं। इस प्रकार 1967 को हम 1967.0 मानते है और इसके लघुगुणक का पूर्णांश 3 है।

ii) यदि कोई संख्या इकाई से कम है तो उसके लघुगुणक का पूर्णांश ऋणात्मक होता है। यह दशमलव बिन्दु के दाईं ओर विद्यमान शून्यों की गिनती से एक अधिक होता है।

इसकी व्याख्या निम्नलिखित तालिका में की गई है :

संख्या	लघुगुणक का पूर्णांश	टिप्पणी
2.5119	0	दशमलव बिन्दु के बाईं ओर के अंकों की गिनती से एक कम
25.119	1	
251.19	2	
25119.0	4	
2511900.0	6	
0.25119	−1	दशमलव बिन्दु के दाईं ओर शून्यों की गिनती से एक अधिक
0.025119	−2	
0.00025119	−4	

b) **अपूर्णांश ज्ञात करने की विधि**

i) दिए हुए महत्त्वपूर्ण अंकों के लिए, जिनका क्रम समान हो, तो इनका पूर्णांश भी वही रहता है। यह दशमलव बिन्दु के स्थान पर निर्भर नहीं होता।

ii) अपूर्णांश हमेशा धनात्मक संख्या होता है। क्योंकि समान क्रम वाले अंकों की संख्याओं का अपूर्णांश वही होता है इसलिए इसे तालिकाबद्ध किया जा सकता है। ये तालिकाएँ प्रायः सभी मानक पुस्तकों में 'सामान्य लघुगुणक तालिका' के शीर्षक के अन्तर्गत दी होती हैं।

किसी दी हुई संख्या का लघुगुणक कैसे प्राप्त होता है, निम्नलिखित तालिका में समझाया गया है।

संख्या	पूर्णांश	अपूर्णांश	लघुगुणक
5012	3	.7	3+.7=3.7
501.2	2	.7	2+.7=2.7
50.12	1	.7	1+.7=1.7
5.012	0	.7	0+.7=0.7
.5012	−1	.7	$-1+.7=\bar{1}.7$
.005012	−3	.7	$-3+.7=\bar{3}.7$

महत्त्वपूर्ण संकेत : जब किसी लघुगुणक का पूर्णांश ऋणात्मक हो तो उसका संकेत (-) रेखिका (Bar) से किया जाता है। यह रेखिका पूर्णांक के ऊपर लगाई जाती है। अपूर्णांश को वैसे ही लिखा जाता है।

उदाहरण के लिए 0.005012 के लघुगुणक का पूर्णांश −3 तथा अपूर्णांश .7 है। इसको इस प्रकार लिखा जाता है $\bar{3}.7$ (निश्चित रूप से इसे हम कभी भी −3+.7=−2.3 नहीं लिखेंगे) इस प्रकार निरूपण से हमें लघुगुणक से वापिस संख्याएँ प्राप्त करने में सुविधा रहती है। और अध्ययन से पहले लघुगुणक ज्ञात करने की विधि का अभ्यास करना सहायक सिद्ध होगा।

प्रायः सामान्य लघुगुणक तालिकाएँ चार अंकों की संख्याओं के लिए बनी होती है। अगर हमारी संख्या में चार से अधिक अंक हैं तो लघुगुणक निकालने के लिए हम इसके सन्निकट पहले चार महत्त्वपूर्ण अंकों को लेते हैं। जैसे:

475637 की सन्निकट संख्या 475600 लेते हैं।
47563.7 „ „ „ 47560.0 लेते हैं

4.75637	,,	,,	,, 4.756	,,	,,
3.25453	,,	,,	,, 3.255	,,	,,
0.045756	,,	,,	,, 0.04576	,,	,,

लघुगुणक के नियम

a) गुणनफल का लघुगणक

लघु $(m \times n)$=लघुm+लघुn

लघु$(a \times b \times c \times d)$=लघु$a$+लघु$b$+लघु$c$+लघु$d$

उदाहरण : 4.1 लघु240=लघु(15×16)=लघु15+लघु16

b) भागफल का लघुगुणक

$$\text{लघु}\left(\frac{m}{n}\right) = \text{लघु}m - \text{लघु}n \qquad (\text{यहाँ } n \neq 0)$$

उदाहरण : 4.2

$$\text{लघु}\left(\frac{74.7}{91.8}\right) = \text{लघु}74.7 - \text{लघु}91.8$$

$$\text{लघु}\left(\frac{85.4}{48 \times 87}\right) = \text{लघु}85.4 - \text{लघु}(48 \times 87)$$
$$= \text{लघु}85.4 - [\text{लघु}48 + \text{लघु}87]$$
$$= \text{लघु}85.4 - \text{लघु}48 - \text{लघु}87$$

$$\text{लघु}\left(\frac{1}{n}\right) = \text{लघु}1 - \text{लघु}n$$
$$= 0 - \text{लघु}n = -\text{लघु}n$$

क्योंकि लघु 1=0 (क्यों ? इसकी आप स्वयं जाँच कीजिए)

c) घात का लघुगुणक

लघु (m^n)=nलघुm

उदाहरण : 4.3

लघु (3^5)=5 लघु 3

लघु $(74^{8.4})$=8.4 लघु 74

लघु $(14^{-1.5})$=−1.5 लघु 14

लघु $(4567)^{3/7} = \frac{3}{7}$ लघु 4567

बोध प्रश्न 10

निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य, बताइए :

1) लघु(256)−लघु(1024)=−लघु4
2) लघु(1200)=2लघु5+4लघु2+लघु3
3) लघु(306)=लघु17+लघु18
4) लघु(280)=लघु7+लघु8+लघु5
5) लघु5 = लघु(615)−लघु(123)
6) लघु8+लघु $\left(\frac{1}{8}\right) = 0$
7) लघु$(^9/_3)$ + लघु$(^{22}/_{27})$ + लघु$(^{351}/_{198})$ = 0
8) लघु $[7^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{3}{4}} \times 21^{\frac{-7}{8}}] = \frac{1}{2}$लघु7 + $\frac{3}{4}$लघु5 − $\frac{7}{8}$लघु21

निम्नलिखित को सरल कीजिए :

9) लघु 128/लघु 9
10) लघु 256/लघु 8

11) लघु $10^{1/14}$/ लघु $10^{3/8}$

12) लघु(.64)/ लघु(.80)

निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए जबकि लघु 2=0.3010, लघु 3=0.4771, लघु 5 = 0.6990 दिया हुआ है।

13) लघु (60) 14) लघु (.6) 15) लघु (4.5)

16) लघु (25/81) 17) लघु $(18^4 \times 15^{-4})$ 18) लघु (0.015)

19) लघु(0.0027) 20) लघु(1.875) 21) लघु(0.003/0.025)

लघुगुणक से मूल संक्रियाए :

यहाँ भी हम प्रचलित योग, व्यवकलन, गुणा व भाग के नियमों का अनुसरण करते है। लेकिन यहाँ यह महत्वपूर्ण है कि अन्तिम उत्तर में दशमलव वाला अंश हमेशा धनात्मक रखा जाता है।

उदाहरण : 4.4

1) $1.2543+3.4563 = 4.7106$

2) $$\begin{aligned} 1.2543+\bar{3}.4563 &= 1.2543+(-3+0.4563) \\ &= 1.2543+0.4563-3 \\ &= 1.7106-3=-1.2894 \\ &= -1-0.2894 \\ &= -1-1+(1-0.2894) \text{ (इस समायोजन पर ध्यान दें)} \\ &= -2+0.7106 \\ &= \bar{2}.7106 \end{aligned}$$

3) $3.4563+\bar{1}.2543 = 3.4563+(-1+0.2543)=2.7106$

4) $$\begin{aligned} \bar{3}.4563+\bar{1}.2543 &= -3+0.4563-1+0.2543 = -4+0.7106 \\ &= \bar{4}.7106 \end{aligned}$$

5) $$\begin{aligned} \bar{3}.4563-1.2543 &= -3+0.4563-1.2543 \\ &= -3-0.798 \\ &= -3-1+(1-0.798) \text{ (इस पर ध्यान दें)} \\ &= -4+0.2020=\bar{4}.2020 \end{aligned}$$

6) $$\begin{aligned} \bar{3}.4563-\bar{1}.2543 &= -3+0.4563-(-1+0.2543) \\ &= -3+0.4563+1-0.2543 \\ &= -2+0.2020=\bar{2}.2020 \end{aligned}$$

7) $$\begin{aligned} \bar{1}.2543-\bar{3}.4563 &= -1+0.2543-(-3+0.4563) \\ &= 2+0.2543-0.4563 \\ &= 2-0.2020 \\ &= 1+(1-0.2020) \text{ (इस पर ध्यान दें)} \\ &= 1+0.7980=1.7980 \end{aligned}$$

8) $$\begin{aligned} \bar{3}.4563\times 1.2543 &= (-3+0.4563)\times 1.2543 \\ &= -3.7629+0.5723 \\ &= -3-0.7629+0.5723 \\ &= -3-0.1906 \\ &= -4+(1-0.1906) \\ &= \bar{4}.8094 \end{aligned}$$

9) $$\begin{aligned} \bar{3}.4563\times 4 &= (-3+0.4563)\times 4 \\ &= -12+1.8252 \\ &= -11+0.8252 = \overline{11}.8252. \end{aligned}$$

10) $$\begin{aligned} \bar{1}.2543\div 5 &= (-1+0.2543)\div 5 \\ &= -\frac{1}{5}+\frac{0.2543}{5} = -0.2000+0.0508 \\ &= -0.1492 = -1+(1-0.1492) \\ &= \bar{1}.8508 \end{aligned}$$

11) $\bar{3}.4563 \div 5 = (-3+0.4563)\times\frac{1}{5}$

$= (-3-2+2.4563)\times\frac{1}{5}$

$= -1+0.4912$

$= \bar{1}.4912$

(यहाँ उपयुक्त संख्या का योग या व्यवकलन करके ऋणात्मक पूर्णांक को 5 से पूरा भाग होने योग्य बनाया गया है)

13) $3.4563\times5 = 17.2815$

14) $1.2543\div5 = 0.2509$

बोध प्रश्न : 11

सरल कीजिए

1) $2.1543+1.1864$
2) $1.7618+\bar{1}.1438$
3) $3.7834+\bar{2}.3526$
4) $\bar{3}.15+\bar{2}.36$
5) $3.56-\bar{2}.35$
6) $3.64-\bar{2}.72$
7) $\bar{4}.38-\bar{2}.14$
8) $\bar{4}.18-\bar{3}.38$
9) $\bar{3}.8\div4$
10) $3.64\times(-3)$
11) $(\bar{4}.18)\div(-5)$
12) $\bar{2}.31+3.84-\bar{3}.15-1.72$

प्रतिलघुगुणक

अगर x=लघु तब y को x का प्रतिलघुगुणक या संक्षेप में प्रतिलघु कहते हैं। यह निम्नलिखित प्रकार से लिखा जाता है। y=प्रतिलघु x, इसका प्रयोग यह जाँच करने के लिए किया जा सकता है कि हमने लघुगुणक ठीक प्राप्त किया था या नहीं।

प्रतिलघु ज्ञात करने के लिए हम प्रतिलघु तालिका का प्रयोग करते हैं। प्रतिलघु ज्ञात करने की विधि भी लघु ज्ञात करने की विधि के समान है। प्रतिलघु तालिका 3 प्रकार के स्तम्भों (Columns) में विभाजित होती है।

किसी संख्या के दशमलव से बाद के चार अंकों (जिसमें अगर शून्य हो तो वह भी सम्मिलित की जाती है) को लिया जाता है। मान लिया x=2.0984 है इसमें अपूर्णांश .0984 है। तालिका में हम पहले स्तम्भ में .09 को देखते हैं। फिर .09 वाली क्षैतिज पंक्ति में उस स्तम्भ को देखते हैं जिसके ऊपर 8 लिखा है। इस पंक्ति तथा स्तम्भ में संख्या 1253 है। इसके बाद उसी पंक्ति में अंक 4 स्तम्भ के नीचे (यह तीसरे प्रकार का स्तम्भ होता है जिसको माध्य अंतर स्तम्भ कहते हैं) की संख्या को देखते हैं जो कि 1 है। इन दोनों संख्याओं का योग करते हैं जो कि 1253+1=1254 है। क्योंकि संख्या का पूर्णांक 2 है इसलिए संख्या के दशमलव से बाईं ओर 3 अंक होने चाहिए। इस प्रकार

प्रतिलघु $2.0984 = 125.4$
प्रतिलघु $1.0984 = 12.54$
प्रतिलघु $0.0984 = 1.254$
प्रतिलघु $\bar{1}.0984 = 0.1254$
प्रतिलघु $\bar{3}.0984 = 0.001254$
प्रतिलघु $\bar{5}.0984 = 0.00001254$ इत्यादि

लघुगुणक द्वारा परिकलन करना : लघुगुणक के प्रयोग द्वारा जटिल प्रकार के परिकलन सुविधाजनक तरीके से किए जा सकते हैं, जैसा कि निम्नलिखित उदाहरणों से स्पष्ट होगा।

1) 45.18×37.34

मान लिया $x=45.18\times37.34$

लघु x = लघु (45.18×37.34)

= लघु(45.18)+लघु(37.34)

$= 1.6540+1.5722$

$= 3.2262$

प्रतिलघु 3.2262 = 1684.0

अतः $x=1684$ (4 महत्त्वपूर्ण अंकों के सन्निकट)

2) $x=315.4\div843.5$

लघुx = लघु 315.4 − लघु 843.5

$=2.4989-2.9261=-0.4272$

$=-1+1-0.4272$

$=\bar{1}.5728$ (इस पर ध्यान दें)

अब प्रतिलघु ($\bar{1}.5728$)=0.3741

अतः $x=0.3741$

3) $x = (18.45)^4$

लघुx = 4×लघु18.45

$=1.2660$

$=5.0640$

प्रतिलघु 5.0640=115900 या

$x=115900$ (जोकि 4 महत्त्वपूर्ण अंकों के सन्निकट है)

4) $x=(.43)^{2.1}$

लघुx = 2.1×लघु(.43)

$=2.1\times\bar{1}.6335$

$=2.1\times(-1+0.6335)$

$=-2.1+1.3304$

$=-0.7697$

$=-1+(1-0.7697)$

$=\bar{1}.2304$

प्रतिलघु $\bar{1}.2304=0.2168$ या

$x=0.2168$

महत्त्वपूर्ण संकेत : अधिकतर पुस्तकों में लघुगुणक तथा प्रतिलघुगुणक की तालिकाएं सिर्फ 4 अंकों की संख्याओं के लिए ही दी होती हैं। जब हमारे पास 4 से अधिक अंकों की संख्या हो तो लघुगुणक प्राप्त करने के लिए 4 महत्त्वपूर्ण अंकों को लिया जाता है (इसी विधि की हम पहले व्याख्या कर चुके हैं)।

अगर अपूर्णांक में 4 से अधिक अंक हैं तो इसमें भी पहले चार महत्त्वपूर्ण अंकों से प्रतिलघुगुणक प्राप्त किया जाता है।

इस प्रकार सन्निकट संख्याएं लेने से हमारा उत्तर भी बिल्कुल सही होना आवश्यक नहीं है तथा यह भी सन्निकट होगा। लघुगुणक विधि प्रयोग करते समय इस बात का ध्यान रखना नितान्त आवश्यक है।

बोध प्रश्न 12

निम्नलिखित के सामान्य लघुगुणक ज्ञात कीजिए :

a) 84630 b) 756.3 c) 65.84 d) 845000 e) 6.845 f) 0.7853 g) 0.003568
h) 0.0004573 i) 754×10^{-5}

निम्नलिखित के प्रतिलघु ज्ञात कीजिए

1) 0.1584 2) 1.3608 3) 3.5698 4) 2.8413
5) −3.2583 6) −0.4581 7) 3.0000 8) 2.0000

चार अंकों की लघु तालिका के प्रयोग से निम्नलिखित मान ज्ञात कीजिए:

1) 84.5×321.5
2) 0.3754×1.8673
3) $45.84\div93.83$
4) $3845\div28.56$
5) $0.5684\div0.8235$
6) $(243.1)^{2/3}\times(34.5)^{1/2}$
7) $(14.56)^3\times(18.35)^{1/2}/(56.37)^{1/2}$

3.5 श्रेढ़ियां (Progressions)

यह सर्वविदित है कि जब हम किसी घटना का प्रेक्षण करते है तो क्रमशः प्राप्त आँकड़ें किसी प्रतिरूप के अनुसार होते हैं। उदाहरण के लिए प्रेक्षित आँकड़े इस प्रकार के हो सकते हैं।

$$5, 10, 15, 20, 25, 30, \ldots\ldots \quad (1)$$

या $$2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, \ldots\ldots \quad (2)$$

या $$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}, \frac{1}{17}, \frac{1}{15}, \ldots\ldots \quad (3)$$

उपरोक्त (1) या (2) या (3) जैसी संख्याओं के समूह को अनुक्रम कहते हैं। अगर समूह का आकार अनन्त है तो यह अनन्त अनुक्रम कहलाती है। यहाँ यह ध्यान दें कि उपरोक्त प्रत्येक अनुक्रम में प्रत्येक उत्तरोत्तर संख्या का उससे पहली संख्या से कुछ निश्चित सम्बन्ध है अर्थात् उत्तरोत्तर संख्याओं में सम्बन्ध है। इस प्रकार अगर हमें अनुक्रम की पहली संख्या तथा उत्तरोत्तर संख्याओं में सम्बन्ध दिया हुआ हो तो हम इसकी सभी संख्याओं को ज्ञात कर सकते हैं। यहाँ हम इसी प्रकार के सम्बन्ध तथा उनके परिणाम के बारे में विस्तार से अध्ययन करेंगे।

3.5.1 अंकगणितीय या समान्तर श्रेढ़ी

ऊपर दी हुई अनुक्रम (1) पर ध्यान दें जोकि 5, 10, 15, 20, 25 ...... है। इसकी पहली संख्या में 5 जोड़ने पर दूसरी संख्या प्राप्त हो जाती है, इसी प्रकार दूसरी में 5 जोड़ने पर तीसरी संख्या प्राप्त होती है इत्यादि। यहाँ किन्हीं दो उत्तरोत्तर संख्याओं का अन्तर समान रहता है। किसी पद तथा उससे पहले के पद का अन्तर सार्व/अन्तर कहलाता है। इस प्रकार के अनुक्रम में अगर प्रथम पद तथा सार्व/अन्तर दिया हो तो पूर्ण अनुक्रम को ज्ञात किया जा सकता है। इस तरह के अनुक्रम को अंकगणितीय या समान्तर श्रेढ़ी कहा जाता है। इसकी परिभाषा निम्न है।

परिभाषा

संख्याओं के एक अनुक्रम को जिसमें उत्तरोत्तर संख्याओं में वृद्धि या कमी एक सार्व अन्तर के बराबर होती है, समान्तर श्रेढ़ी कहा जाता है। निम्नलिखित अनुक्रम समान्तर श्रेढ़ी के उदाहरण हैं।

1) $1, 3, 5, 7, 9$ (सार्व अन्तर $= 2$)
2) $0, -5, -10, -15, -20$ (सार्व अन्तर $= -5$)
3) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2},$ (सार्व अन्तर $= \frac{1}{2}$)
4) $5, \frac{7}{2}, 2, \frac{1}{2}, -1, -\frac{5}{2},$ (सार्व अन्तर $= -\frac{3}{2}$)
5) $a, a+d, a+2d,$ (सार्व अन्तर $= d$)

उपरोक्त में अनुक्रम (5) मे पहला पद a है तथा सार्व अन्तर d है। इस अनुक्रम की उत्तरोत्तर संख्याएं इस प्रकार हैं

$a, a+d, a+2d, \ldots \ldots \ldots$

यहाँ दूसरे पद में d का गुणांक एक है तथा तीसरे पद में d का गुणांक 2 है इत्यादि। इस प्रकार किसी पद d का गुणांक पद संख्या से एक कम होता है।

इस नियम द्वारा हम अनुक्रम का कोई भी पद ज्ञात कर सकते है.

जैसे 10वाँ $= a+(10-1)d = a+9d$

25वाँ पद $= a+(25-1)d = a+24d$

nवाँ पद $= a+(n-1)d$ यहाँ पर n कोई धनात्मक पूर्णांक है।

समान्तर श्रेढ़ी के पदों का योग

विस्तार से विवेचन के पहले हम कुछ संकेत पद्धति की जानकारी देंगे जोकि अन्य स्थानों पर भी उपयोगी सिद्ध होगी। अगर हमें संख्याओं का अनुक्रम दिया हुआ है तो सुविधाजनक ढंग से पदों का निरूपण $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ या $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ आदि के रूप में लिखकर किया जाता है। इस निरूपण में अक्षर के साथ जुड़ा अनुलग्न अनुक्रम में उस पद के स्थान को व्यक्त करता है। जब हम 5, 10, 15......को $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots$ के रूप में लिखते हैं तो इसका अर्थ है पहला पद 5, a_1 के बराबर है, 10, a_2 के तथा 15, a_3 के बराबर है आदि। सामान्य तौर पर 'n' वें पद को a_n से निरुपित किया जाता है। यहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है।

टिप्पणी : जब हमारे पास किसी नियम द्वारा उत्पन्न कोई अनुक्रम हो तो उसको निरुपित करने के लिए उपरोक्त संकेत पद्धति का प्रयोग किया जा सकता है।

मान लिया किसी नियम द्वारा उत्पन्न की गई एक अनुक्रम $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$ है और हम इसके कुछ पदों का योग करना चाहते हैं। उदाहरण के तौर पर हमें इसके पहले 5 पदों का योग करना है। इस योग को हम इस प्रकार से लिखेंगे: $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$। अगर हमें इसके पहले 1000 पदों का योग करना है तो इसके सभी पदों को उपरोक्त तरीके से लिखना न ही व्यावहारिक है और न ही सुविधाजनक है। स्पष्टतः अगर पदों की संख्या और अधिक हो जाए तो हमारा कार्य और भी कठिन हो जाएगा। इस योग को लिखने का एक तरीका इस प्रकार है:

$a_1+a_2+a_3+\ldots\ldots\ldots$

$\ldots\ldots+a_{1000}$, जोकि इस बात का सूचक है कि हम पहले 1000 पदों का योग कर रहे हैं।

इस योग को लिखने की एक और सुविधाजनक तथा बढ़िया विधि इस प्रकार है $\sum\limits_{i=1}^{1000} a_i$ जिसको इस प्रकार पढ़ा जाता है।

सिगमा a_i जहाँ i का मान 1 से 1000 तक है। यहाँ 'Σ (सिगमा)' एक ग्रीक अक्षर है जो योग के संकेतन के लिए प्रयोग किया जाता है।

इस संकेत पद्धति के अनुसार हम अनुक्रम के पहले n पदों का योग इस प्रकार लिख सकते हैं।

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ (यहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है)

इसके अतिरिक्त अगर हमें 100 वें पद से 199 वें पदों तक का योग लिखना है तो वह इस प्रकार लिखेंगे $\sum\limits_{i=100}^{199} a_i$.

अतः इस संकेत-पद्धति के प्रयोग में बड़ा लचीलापन है। अपने आप को इससे भली प्रकार परिचित कीजिए।

अब हम समान्तर श्रेढ़ी के पहले n पदों का योग करेंगे। अगर पहला पद |a| तथा सार्व अन्तर |d| है तो हमें; $a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots\ldots\ldots+[a+(n-1)d]$ का मान निकालना है। संकेत-प्रणाली के प्रयोग द्वारा हमें $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ज्ञात करना है जहाँ पर

$a_1=a$

$a_2=a+d$

$a_3=a+2d$

तथा $a_n=a+(n-1)d$ है।

मान लिया श्रेढ़ी के n पदों का योग S_n के बराबर है

$$\therefore S_n=a+(a+d)+(a+2d)+\ldots\ldots\ldots\ldots+\{a+(n-1)d\} \qquad (1)$$

इन पदों को विपरीत क्रम में लिखने से योग प्रभावित नहीं होगा अतः

$$S_n=\{a+(n-1)d\}+\{a+(n-2)d\}+\ldots\ldots\ldots+[a+2d]+(a+d)+a \qquad (2)$$

(1) व (2) का योग करने पर

$$2S_n=[a+\{a+(n-1)d\}]+[a+d+\{a+(n-2)d\}]+\ldots\ldots\ldots+[\{a+(n-1)d\}+a]$$

या $2S_n=[2a+(n-1)d]+[2a+(n-1)d]+\ldots\ldots\ldots\ldots+[2a+(n-1)d]$

यहाँ यह ध्यान दें की दक्षिण पक्ष में प्रत्येक पद $[2a+(n-1)d]$ है तथा इस प्रकार के n पद हैं।

$$\therefore 2S_n=n[2a+(n-1)d]$$

$$\text{या } S_n=\frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \qquad (3)$$

इस योग को एक और रूप में लिखा जा सकता है

$$S_n=\frac{n}{2}[a+a+(n-1)d]$$

$$\frac{n}{2}[a_1+a_n] \qquad (4)$$

यहाँ पहला पद a_1 तथा nवाँ पद $a+(n-1)d$ है।

(3) या (4) सूत्र के प्रयोग से हम किसी भी समान्तर श्रेढ़ी के पदों का योग कर सकते हैं।

उदाहरण

1) 1, 4, 7, 10 .... का 10वाँ पद ज्ञात कीजिए।
 यहाँ पर $a_1=1$ तथा $d=4-1=3$ है,
 $\therefore a_{10}=1+(10-1)3=1+27=28$
 अतः दसवाँ पद 28 है।

2) अनुक्रम 36, 32, 28 .... का 15वाँ ज्ञात कीजिए

$a_1=36 \quad d=32-36=-4$

$\therefore a_{15}=36+(15-1)(-4)=36-56=-20$

3) अनुक्रम $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$..........की 50 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

$a_1=\frac{1}{2} \quad d=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

सूत्र (3) के प्रयोग से

$$S_{50} = \frac{50}{2}\left[2\times\frac{1}{2}+(50-1)\frac{1}{2}\right]$$

$$= 25\left[1+\frac{49}{2}\right] = 25\times\frac{51}{2}$$

$$= \frac{1275}{2} = 637.5$$

4) अनुक्रम 40, 36, 32,........के 20 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

$a_1=40 \quad d=36-40=-4$

$$\therefore S_{20} = \frac{20}{2}\left[40\times2+(20-1)(-4)\right]$$

$$= 10[80-76]$$

$$=40$$

5) समान्तर श्रेढ़ी का पहला पद 3 है तथा अन्तिम पद 53 है। अगर श्रेढ़ी का योग 308 है तो पदों की संख्या तथा सार्व अन्तर ज्ञात करो।

यहाँ $a_1=3$, $a_n=53$ तथा $s_n=308$ दिया हुआ है सूत्र (4) द्वारा

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

$$=\frac{n}{2}(3+53)=308$$

$$\text{या } n = \frac{308\times2}{56}= 11$$

अतः पदों की संख्या 11 है।

सार्व अन्तर के लिए हम सूत्र $a_n=a_1+(n-1)d$ का प्रयोग करते हैं।

$53=3+(11-1)d$

$50=10d$

या $10d=50$

या $d=5$ अतः सार्व अंतर 5 है।

बोध प्रश्न 13

1) 2, 6, 10, ... का 15 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

2) 5, 5.5, 6, ... का 24 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

3) 80, 75, 70, 65, ... का 50 वाँ पद ज्ञात कीजिए।

4) निम्नलिखित का अन्तिम पद तथा पदों का योग ज्ञात करो :

i) 15, 30, 45,..................... 15 पद

ii) 8, 6, 4,........................ 40 पद

iii) a, 0, $-a$, $-2a$,............... p पद

iv) 3, 3.2, 3.4,.................... 25 पद

v) 1, 0.5, 0, -0.5,.............. 50 पद

vi) 3a, 6a, 9a,..................... m पद

5) पदों की संख्या तथा सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए जबकि

i) $a_1=3,\ a_n=63,\ S_n=528$

ii) $a_1=400,\ a_n=25,\ S_n=3187.5$

iii) $a_1=72,\ a_n=40,\ S_n=952.$

6) 0 से 100 तक ऐसी संख्याओं का योग कीजिए जो 5 से भाज्य हों।

7) समान्तर श्रेढ़ी के पदों की न्यूनतम संख्या ज्ञात कीजिए जिसका पहला पद 125, सार्व अन्तर 50 तथा पदों का योग 1000 से अधिक हो।

8) समान्तर श्रेढ़ी के 10 पदों का योग 175 तथा दसवें व पहले पद का अन्तर 27 है। पहला पद व सार्व अन्तर ज्ञात कीजिए।

9) एक लड़के को उसके प्रत्येक जन्म दिवस पर उसकी आयु के दस गुना के बराबर रुपए उपहार के रूप में दिए जाते रहे। जब उसकी आयु 15 वर्ष हो तो उसे कुल कितनी राशि प्राप्त हो चुकी होगी?

3.5.2 गुणोत्तर श्रेढ़ी

निम्नलिखित अनुक्रम पर विचार कीजिए,

4, 8, 16, 32, 64, 128, ...

यहाँ पर दूसरा पद पहले पद का दुगुना है तथा तीसरा पद दूसरे पद का दुगुना है इत्यादि। दूसरे शब्दों में, इस अनुक्रम में किन्हीं दो उत्तरोत्तर पदों का अनुपात समान है। किसी पद को उससे पहले पद से भाग देकर जो अनुपात प्राप्त किया जाता है उसे सार्व अनुपात कहते हैं। अतः अगर पहला पद तथा सार्व अनुपात दिया हो तो अनुक्रम के विभिन्न पदों की उत्पत्ति की जा सकती है। इस प्रकार के अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेढ़ी कहते हैं।

परिभाषा : पदों के उस अनुक्रम को गुणोत्तर श्रेढ़ी कहते हैं जिसमें किसी भी पद का उससे पहले वाले पद से अनुपात समान रहे। **इस समान अनुपात को सार्व अनुपात कहते हैं।**

गुणोत्तर श्रेढ़ी में पदों के कुछ उदाहरण :

1) 1, 5, 25, 125, ... (सार्व अनुपात = 5)

2) 8, 4, 2, 1, 1/2, ... (सार्व अनुपात = 2)

3) $a,\ ar,\ ar^2,\ ar^3$, ... (सार्व अनुपात = r)

तीसरे उदाहरण द्वारा यह ज्ञात होता है कि पहला पद ar^0 है (यहाँ यह याद रहे कि $r^0=1$ होता है), दूसरा पद = ar^{2-1} आदि, इस प्रकार n वाँ पद ar^{n-1} होगा (यहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है, तथा r सार्व अनुपात है)।

गुणोत्तर श्रेढ़ी के n पदों का योग : अगर अनुक्रम $a_1, a_2 \ldots\ldots a_n$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में है जहाँ $a_n=ar^{n-1}$ है तब इसके n पदों का योग

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

$$=a_1+a_2+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+a_n$$

$$=a+ar+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+ar^{n-1} \qquad (1)$$

इसके दोनों पक्षों को r से गुणा करने पर

$$rS_n = ar+ar^2+\ldots\ldots\ldots+ar^{n-1}+ar^n \qquad (2)$$

(1) में से (2) घटाने पर

$$S_n-rS_n=a-ar^n$$

$$\therefore S_n(1-r)=a(1-r^n)$$

$$\therefore S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1} \qquad (3)$$

टिप्पणी 1 : अगर r=1 तब हमारा अनुक्रम a, a, a, ... होगा तथा इसके पदों का योग $S_n=na$ है। इस परिस्थिति में उपरोक्त सूत्र लागू नहीं होता (क्या आप बता सकते हैं कि ऐसा क्यों है?)

टिप्पणी 2 : कई बार हम S_n को निम्नलिखित प्रकार से भी लिखते हैं :

$$S_n = \frac{(a - r.ar^{n-1})}{1-r} = \frac{(a_1 - ra_n)}{1-r}$$

जब a_n दिया हुआ हो तथा n अज्ञात हो तो पदों के योग के लिए इस सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण : एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का n वाँ पद $3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ है। इसका पहला, छठा पद तथा सार्व अनुपात एवं पहले 10 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : $a_n = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$\therefore a_1=3$ (जोकि a_n में n का इकाई मान प्रतिस्थापित करने से प्राप्त होता है)

$a_2=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ (n=2 प्रतिस्थापन करने पर)

$$a_6 = 3\times\left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = \frac{3}{32}$$

$$\text{सार्व अनुपात} = \frac{a_2}{a_1} = \frac{3}{2}\times\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

$$S_{10} = \frac{3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 2\times 3\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right]$$

$$= 5.99414$$

उदाहरण: एक गुणोत्तर श्रेढ़ी का छठा पद 972 है तथा आठवाँ पद 8748 है। श्रेढी तथा इसके पहले 12 पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया श्रेढ़ी $a, ar, ar^2, \ldots\ldots$ है

तब $a_6=ar^{6-1}=ar^5=972$ (1)

$a_8=ar^{8-1}=ar^7=8748$ (2)

(2) को (1) से भाग देने पर

$$\frac{ar^7}{ar^5}=\frac{8745}{972}$$

या $r^2=9$ या $r=\pm3$

क्योंकि छठा पद $a_6=a.3^5=972$ (यहाँ हम r=3 लेते हैं)

$$\therefore a = \frac{972}{3^5} = \frac{972}{243} = 4$$

इस प्रकार श्रेढ़ी की उत्पत्ति

$a_n = 4.3^{n-1}$ द्वारा n का मान क्रमशः 1, 2, 3, 4, ... रखकर की जा सकती है।

$$\text{अब } S_{12} = \frac{4(3^{12}-1)}{3-1} = 2(3^{12}-1)$$

$$= 2\times(531441-1)$$

$$= 1062880$$

इसी प्रकार r=−3 लेकर श्रेढ़ी की उत्पत्ति तथा योग किया जा सकता है। इसे आप स्वयं करें।

गुणोत्तर माध्य : जब तीन संख्याएं a, b, c गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद हैं तो बीच की संख्या b को a तथा c का गुणोत्तर माध्य कहा जाता है। इसी प्रकार 6, 12, 24 का गुणोत्तर माध्य 12 है।

सामान्य रूप में अगर a, b, c, गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन क्रमागत पद हैं

तो $\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = r$

या $b^2 = ac$

या $b = \sqrt{ac}$

अगर गुणोत्तर श्रेढ़ी में 3 से अधिक क्रमागत पद हैं तो प्रथम व अन्तिम को चरम पद तथा शेष पदों को गुणोत्तर माध्य कहा जाता है। इन माध्यों को सार्व अनुपात ज्ञात करके प्राप्त किया जा सकता है।

दो पदों a तथा b के बीच दी हुई संख्या में n गुणोत्तर माध्य भरने के लिए हम $a_1 = a$ तथा $a_{n+2} = b$ मान लेते हैं। इनके बीच n पदों को माध्य कहते हैं जोकि क्रमशः इस प्रकार हैं: $a_2, a_3 \ldots\ldots a_{n+1}$ कुल मिला कर श्रेढ़ी में n+2 पद होंगे जो कि इस प्रकार है।

$$a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_{n+1}, a_{n+2}$$

इन पदों को प्रथम पद एवं सार्व अनुपात के रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है:

अगर प्रथम पद = a तथा सार्व अनुपात = r

$$\therefore a, ar, ar^2, \ldots\ldots ar^n, ar^{n+1}$$

यहाँ अन्तिम पद ar^{n+1} जो कि b के बराबर है।

$$\text{अतः } \frac{b}{a} = \frac{a \cdot r^{n+1}}{a} = r^{n+1}$$

$$\text{या} \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

r का मान ज्ञात होने पर सभी माध्यों को प्राप्त किया जा सकता है जो कि क्रमशः $ar, ar^2, \ldots\ldots ar^n$ होंगे।

उदाहरण : $\frac{1}{16}$ तथा 256 के बीच 5 गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

हल : यहाँ हमें गुणोत्तर श्रेढ़ी के 7 पदों को ज्ञात करना है जिसका पहला पद $\frac{1}{16}$ तथा सातवाँ पद 256 है।

$$a_7 = ar^{7-1} = ar^6$$

$$256 = \frac{1}{16} \cdot r^6$$

$$\text{या} \quad r^6 = 256 \times 16$$

$$\text{या} \quad r = (256 \times 16)^{1/6} = (4096)^{1/6}$$

लघुगणक के प्रयोग से r का मान निकाला जा सकता है जोकि 4 है। इस प्रकार गुणोत्तर श्रेढ़ी के पद $\frac{1}{16}, \frac{1}{4}$, 1, 4, 16, 64, 256 होंगे।

बोध प्रश्न 14

1) 1, 4, 16, 64, …………… का सातवाँ एवं दसवाँ पद ज्ञात कीजिए।

2) 1024, 512, 256, …………… का पांचवाँ तथा बारहवाँ पद ज्ञात कीजिए।

3) .5, .25, .125, …………… का छठा तथा ग्यारहवाँ पद ज्ञात कीजिए।

4) 3, −9, 27, −81, …………… का आठवाँ तथा दसवाँ पद ज्ञात कीजिए।

5) निम्नलिखित का योग कीजिए :

a) $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ 10 पद।

b) $\frac{81}{2}, \frac{27}{2}, \frac{9}{2}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ 8 पद।

c) $\frac{1}{\sqrt{5}}, 1, \sqrt{5}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ 7 पद।

6) $\frac{27}{16}$ तथा $\frac{2}{9}$ के बीच 4 गुणोत्तर माध्य प्राप्त कीजिए।

7) 3 तथा $\frac{48}{625}$ के बीच 3 गणोत्तर माध्य प्राप्त कीजिए।

8) 8 तथा $\frac{1}{8}$ के बीच 5 गुणोत्तर माध्य प्राप्त कीजिए।

9) गुणोत्तर श्रेढ़ी में ऐसी तीन संख्याएं ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल 125 तथा योग $\frac{65}{3}$ हो।

10) गुणोत्तर श्रेढ़ी में ऐसी तीन संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनका गुणनफल 216 तथा योग 21 हो।

3.5.3 हरात्मक श्रेढ़ी

निम्नलिखित अनुक्रम पर ध्यान दें :

$\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$..........................

इन पदों के व्युत्क्रम समान्तर श्रेढ़ी के पद हैं जिनकी पहली संख्या 3 सार्व अन्तर 3 है। उपरोक्त अनुक्रम का हरात्मक श्रेढ़ी कहा जाता है।

परिभाषा : अगर $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \frac{1}{a_3}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{1}{a_n}$ समान्तर श्रेढ़ी के पद है तो $a_1, a_2, a_3 \ldots\ldots\ldots\ldots a_n$ को हरात्मक श्रेढ़ी कहा जाता है।

एक और प्रत्यक्ष परिभाषा इस प्रकार है।

परिभाषा : तीन संख्याओं a, b, c को हरात्मक श्रेढ़ी में कहा जाता है अगर

$$\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c} = \left[\frac{b-a}{c-b}\right]$$

या $a(b-c) = c(a-b)$

दोनों पक्षों को abc से भाग करने पर

$$\frac{a(b-c)}{abc} = \frac{c(a-b)}{abc}$$

$$\frac{b-c}{bc} = \frac{(a-b)}{ab}$$

या $\frac{1}{c} - \frac{1}{b} = \frac{1}{b} - \frac{1}{a}$

जोकि वास्तव में हमें $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, को समान्तर श्रेढ़ी में होने से प्राप्त होगा।

हरात्मक श्रेढ़ी में अनुक्रम कुछ विशेष परिस्थितियों में उत्पन्न होते हैं। इनसे सम्बन्धित प्रश्नों के हल प्रायः इनका व्युत्क्रम निकाल कर प्राप्त समान्तर श्रेढ़ी की विशेषताओं को प्रयोग करके किया जाता है। यहाँ यह ध्यान देना आवश्यक है कि हरात्मक श्रेढ़ी के पदों के योग के लिए कोई सूत्र नहीं होता।

जैसा कि हम जानते हैं अगर a तथा b दो संख्याएं है तो $A = \frac{a+b}{2}$ इनका समान्तर माध्य कहलाती है क्योंकि

$A - a = b - A = \frac{b-a}{2}$ इसलिए a, A, b समान्तर श्रेढ़ी में होते हैं।

इसी प्रकार अगर $\frac{1}{a}, \frac{1}{H}, \frac{1}{b}$ समान्तर श्रेढ़ी में है तो a, H, b को हरात्मक श्रेढ़ी में कहा जाएगा तथा H को a तथा b का हरात्मक माध्य कहेंगे।

क्योंकि $\frac{1}{H} - \frac{1}{a} = \frac{1}{b} - \frac{1}{H}$

या $\frac{1}{H}+\frac{1}{H}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$

$$\frac{2}{H}=\frac{a+b}{ab}$$

$$\frac{H}{2}=\frac{ab}{a+b}$$

$$H=\frac{2ab}{a+b} \qquad (2)$$

हमने यह भी देखा कि अगर a, G, b गुणोत्तर श्रेढ़ी में है तो $\frac{G}{a}=\frac{b}{G}$ या $G^2 = ab$

या $G = \sqrt{ab}$ यहाँ G, a तथा b का गुणोत्तर माध्य है।

श्रेढ़ियों पर विवेचन को समाप्त करने से पहले हम निम्नलिखित परिणाम का जिक्र और करेंगे।

अगर A, G, H दो संख्याओं, a तथा b के क्रमशः समान्तर, गुणोत्तर व हरात्मक माध्य हैं तब

$$AH=G^2 \qquad (3)$$

इस परिणाम को आप स्वयं A, H, G का मान रखकर जाँच कर सकते हैं।

बोध प्रश्न 15

1) दिखाइए कि $2, 1, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{5}$.............. हरात्मक श्रेढ़ी में है।

2) निम्नलिखित संख्याओं के युग्म का समान्तर माध्य (A), गुणोत्तर माध्य (G) तथा हरात्मक माध्य (H) ज्ञात कीजिए तथा सम्बन्ध $G^2=AH$ की सत्यता की जाँच कीजिए।

   a) 4.5, 8.5

   b) 17, 71

3.6 क्रमचय तथा संचय

3.6.1 क्रमचय तथा विन्यास

मान लिया हमारे पास 4 व्यक्ति a, b, c, d हैं तथा 3 कुर्सियाँ 1, 2, 3 है। हमें 3 व्यक्तियों का चयन करके उन्हें कुर्सियों पर बैठाना है यह कार्य कितने तरीकों से किया जा सकता है ?

इस कार्य को दो भिन्न अवस्थाओं में विभाजित किया जा सकता है।

1) पहली अवस्था में हम कुल व्यक्तियों में से आवश्यक व्यक्तियों की संख्या का चयन करते हैं। उपरोक्त उदाहरण में हमें 4 व्यक्तियों में से 3 का चयन करना है यह निम्नलिखित तरीकों से किया जा सकता है जिसको व्यक्तियों का **संचय** कहते हैं।

   i) abc   ii) abd   iii) acd   iv) bcd

2) दूसरी अवस्था में, उपरोक्त चयन किए गए व्यक्तियों को विभिन्न स्थानों पर व्यवस्थित किया जाता है।

पहली अवस्था के प्रत्येक चयन में व्यक्तियों को विभिन्न तरीकों से 3 कुर्सियों पर बिठाया जा सकता है जोकि निम्नलिखित तालिका में दिए हैं।

1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
a	b	c	a	b	d	a	c	d	b	c	d
a	c	b	a	d	b	a	d	c	b	d	c
b	c	a	b	a	d	c	a	d	c	b	d
b	a	c	b	d	a	c	d	a	c	d	b
c	a	b	d	a	b	d	a	c	d	b	c
c	b	a	d	b	a	d	c	a	d	c	b

इस प्रकार बैठाने के ढंग को **क्रमचय** कहा जाता है। उपरोक्त से यह प्रतीत होता है कि सचय ज्ञात करते समय हम प्रत्येक चयन में व्यक्तियों की संख्या को महत्त्व देते हैं जबकि क्रमचय में हम बैठाने की विभिन्न व्यवस्थाओं को ध्यान में रखते हैं। जैसा कि उपरोक्त तालिका में दिखाया गया है; प्रत्येक 3 व्यक्तियों के चयन को 6 विभिन्न तरीकों में बिठाया जा सकता है।

किसी दिए हुए वस्तुओं अथवा व्यक्तियों के समूह से किसी दी हुई संख्या में चयन या इनको क्रमबद्ध करने के तरीके आदि प्रश्न प्रायः प्रतिदिन हमारे सामने आते हैं। इस अध्याय में हम यह जानेंगे कि इन प्रश्नों का हल किस प्रकार किया जा सकता है?

इन प्रश्नों के विस्तृत वर्णन से पहले हमें इन के हल में निहित मूल सिद्धांतों को समझना आवश्यक है।

मान लिया एक कार्य 'A' को p सम्भव तरीकों में से किसी एक द्वारा किया जा सकता है तथा एक और कार्य 'B को m सम्भव तरीकों में से किसी एक द्वारा किया जा सकता है, तो दोनों कार्यों को एक साथ $p \times m$ तरीकों से किया जा सकता है।

इसको हम निम्नलिखित प्रकार से समझ सकते हैं:

क्योंकि A कार्य करने के प्रत्येक तरीके के लिए B कार्य m तरीके से किया जा सकता है और क्योंकि A कार्य p तरीकों से किया जा सकता है इस प्रकार दोनों कार्य करने के कुल तरीके $p \times m$ होंगे।

उदाहरण : दिल्ली से कलकत्ता के लिए 5 रेलगाड़ियाँ हैं तथा कलकत्ता से दार्जिलिंग के लिए 3 रेलगाड़ियाँ हैं। अगर एक व्यक्ति कलकत्ता होकर दिल्ली से दार्जिलिंग जाना चाहता है तो उसकी यात्रा कितने तरीकों में हो सकती है?

हल : क्योंकि दिल्ली से कलकत्ता के लिए 5 गाड़ियाँ हैं इसलिए यात्रा का पहला चरण 5 तरीके से सम्पन्न हो सकता है। इस प्रत्येक तरीके के अनुरूप दूसरे चरण की यात्रा 3 तरीके से सम्पन्न हो सकती है। इस प्रकार उसकी यात्रा $5 \times 3 = 15$ तरीके से की जा सकती है।

अगर कार्य दो से अधिक हो जाए तथा प्रत्येक को करने के तरीके दिए हों तो इस सिद्धान्त का विस्तार आसानी से किया जा सकता है। इसकी व्याख्या निम्नलिखित उदाहरण द्वारा की जा सकती है।

उदाहरण : 9 अंकों 1,2,3..............9 से 4 अंकों की विभिन्न कितनी ऐसी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जिनमें कोई अंक दोहराया न जाए?

हल : यहाँ इकाई से स्थान पर 9 अंकों में से कोई अंक आ सकता है इसलिए यह स्थान 9 तरीकों से भरा जा सकता है। यह स्थान भरने के बाद हमारे पास 8 अंक शेष बचे तथा इनमें से दहाई का स्थान 8 तरीके से भरा जा सकता है। इसी प्रकार सैंकड़े का स्थान 7 तरीके से तथा हजार का स्थान 6 तरीके से भरा जा सकता है। अतः 4 अंकों की विभिन्न सख्याएँ $9 \times 8 \times 7 \times 6 = 3024$ तरीके से बनाई जा सकती हैं।

बोध प्रश्न 16

1) 2, 4, 6, 8 अंकों से तीन अंकों की विभिन्न कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जिनमें कोई अंक दोहराया न जाए?
2) शब्द TABLE के सभी अक्षरों के प्रयोग से कितने विभिन्न शब्द बनाए जा सकते हैं?
3) शब्द BENCH के सभी अक्षरों के प्रयोग से कितने शब्द बनाए जा सकते हैं जिनका अन्तिम अक्षर H हो।

क्रमचय : उपरोक्त विवेचन के आधार पर हम क्रमचय की निम्नलिखित परिभाषा कर सकते हैं।

दी हुई संख्या में विशेषणीय (distinguishable) वस्तुओं में से एक बार में कुछ या सभी वस्तुओं के चयन द्वारा निर्मित विन्यास को क्रमचय कहते हैं।

इस समझ के बाद अब हम यह ज्ञात करेंगे कि n वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुओं के चयन द्वारा कितने क्रमचय बनाए जा सकते हैं। इन क्रमचयों की कुल संख्या को विशेष संकेत ^nP_r द्वारा निरुपित किया जाता है। कुछ पुस्तकों में यह संकेत P^n_r या nPr भी दिया जाता है लेकिन प्रायः ^nP_r का ही अधिकतर प्रयोग किया जाता है।

जैसा कि हमने पहले देखा, उपरोक्त प्रश्न उसी प्रकार का है जैसे n विभिन्न व्यक्तियों को r स्थानों पर बैठाना हो।

स्पष्ट रूप से पहला स्थान n तरीके से भरा जा सकता है क्योंकि n में से किसी भी एक व्यक्ति का चयन हो सकता है। इसके बाद दूसरा स्थान $(n-1)$ तरीके से भरा जा सकता है। क्योंकि पहला स्थान भरने के प्रत्येक तरीके को दूसरा स्थान भरने के प्रत्येक तरीके से सम्बन्धित किया जा सकता है इसलिए पहले दो स्थान भरने के कुल तरीके $n(n-1)$ होंगे। ठीक इसी प्रकार तीसरा स्थान $(n-2)$ तरीकों से भरा जा सकता है। हम $(n-2)$ को $n-(3-1)$ के रूप में लिखेंगे, जिससे कुल संभव तरीकों तथा भरे गए स्थानों में सम्बन्ध रखा जा सके।

उपरोक्त तर्क के आधार पर पहले तीन स्थान $n(n-1)(n-2)$ तरीकों से भरे जा सकते हैं। इन तरीकों को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं।

$$n[n-(2-1)]\,[n-(3-1)]$$

संकेत : जब भी एक और स्थान भरा जाता है तो एक और गुणनखण्ड की वृद्धि हो जाती है।

अतः r स्थानों को भरने के तरीकों की संख्या $^nP_r = n(n-1)(n-2)............[n-(r-1)]$ होगी, जिसमें r गुणनखण्ड होंगे तथा r वाँ गुणनखण्ड $[n-(r-1)]$ या $(n-r+1)$ होगा।

इस सूत्र को हम सामान्यतः प्रयोग होने वाले रूप में लिखेंगे लेकिन उससे पूर्व क्रमगुणित (factorial) संकेतन की जानकारी आवश्यक है।

किसी भी धनात्मक पूर्णांक n के लिए $\underline{|n}$ या n! को **'फैक्टोरियल n'** पढ़ा जाता है जोकि निम्न गुणनफल के लिए प्रयोग होता है।

$$n! = n(n-1)(n-2)...............\times 3\times 2\times 1$$
$$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$$
$$7! = 7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 5040$$
$$2! = 2\times 1 = 2$$
$$1! = 1$$

सावधानी : n! का संकेत सिर्फ तभी तक सार्थक है जब n एक धनात्मक पूर्णांक हो, क्योंकि यह उन सभी पूर्णांकों का गुणनफल है जोकि n से छोटे या उसके बराबर हैं।

गणित में सुविधा के लिए हम 0! को इकाई के बराबर मानते हैं। हमारी यह मान्यता सिर्फ रूढ़िगत (conventional) है तथा ऊपर दी गई भाषा का परिणाम नहीं है।

इस संकेत-पद्धति द्वारा हम ^nP_r के मान को एक सुविधाजनक रूप में लिख सकते है।

$$^nP_r = n(n-1)(n-2)......................(n-r+1)$$

दक्षिण पक्ष में अंश तथा हर दोनों को $(n-r)(n-r-1).........3\times 2\times 1$ से गुणा करने पर

$$^nP_r = \frac{n(n-1)(n-2).........(n-r+1)(n-r)(n-r-1).........\times 3\times 2\times 1}{(n-r)(n-r-1).........3\times 2\times 1}$$
$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

इस प्रकार n विभिन्न वस्तुओं के, जिसमें से एक समय में r का चयन किया जाता है, क्रमचयों की संख्या

$^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!} = n(n-1)(n-2).........(n-r+1)$ होगी।

उदाहरण 1 : एक शेल्फ (Shelf) में 6 पुस्तकें रखी जा सकती हैं। अगर पुस्तकों की संख्या 12 है तो शेल्फ में विभिन्न कितने तरीकों से पुस्तकें रखी जा सकती है ?

हल : इस प्रश्न में 12 पुस्तकों के एक बार में 6 का चयन करके क्रमचयों की संख्या ज्ञात करनी है। यह संख्या निम्नलिखित है :

$$^{12}P_6 = \frac{12!}{6!} = \frac{12\times 11\times 10\times 9\times 8\times 7\times 6!}{6!} = 665280$$

उदाहरण 2 : TACKLE शब्द के सभी अक्षरों के प्रयोग से कितने शब्द बनाए जा सकते है?

हल : इस प्रश्न में हमें $^6P_6$ निकालना है :

$$^6P_6 = \frac{6!}{(6-6)!} = \frac{6!}{0!} = 720$$

बोध प्रश्न 17

1) $^{16}P_{12}, {}^8P_3, {}^8P_5, {}^{12}P_8$ का मान ज्ञात कीजिए।

2) n का मान ज्ञात कीजिए अगर

(a) $^nP_2 = 132$ (b) $^nP_4 \div {}^{(n-1)}P_3 = 14$

(c) $^nP_5 \div {}^{n-2}P_3 = 42$ (d) $^{2n}P_n \div {}^{2n-1}P_{n-1} = 18$

3) निम्नलिखित शब्दों के अक्षरों को कितने तरीके से व्यवस्थित किया जा सकता है ?

(a) MANTLE (b) PHONE (c) NUMBER (d) JASMINE

4) निम्नलिखित शब्दों के अक्षरों से 4 अक्षरों के कितने शब्द बनाए जा सकते हैं?
   a) NEIGHBOUR
   b) READING
   c) ARRANGE
   d) STATION (दोहराए हुए अक्षरों को एक अक्षर मानें)

5) 1, 3, 5, 7, 9 अंकों के प्रयोग से 4 अंकों की ऐसी कितनी विभिन्न संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जिनमें किसी अंक का प्रयोग सिर्फ एक बार हुआ हो? इनमें कितनी संख्याएँ 5 से भाज्य हैं ?

6) 2, 4, 6, 8 अंकों के प्रयोग से 5000 से छोटी ऐसी कितनी संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जिनमें कोई अंक दोहराया न गया हो ?

7) 2, 4, 6, 8 अंकों के प्रयोग से 5000 से बड़ी ऐसी कितनी संख्याएं बनाई जा सकती है जिनमें कोई अंक दोहराया न गया हो ?

8) 10 व्यक्तियों के समूह से 5 व्यक्तियों के चयन द्वारा एक समिति का गठन करना है।
   i) इनके चयन तथा स्थान पर बैठाने का कार्य कितने तरीकों से किया जा सकता है ?
   ii) अगर एक विशेष व्यक्ति अध्यक्ष तथा अध्यक्ष के स्थान पर बैठे तो यह कार्य कितने तरीकों से किया जा सकता है ?
   iii) अगर अध्यक्ष तथा सचिव 5 व्यक्तियों के विशेष समूह से लेने हों तो यह कार्य कितने तरीकों से किया जा सकता है।
   iv) अगर 2 व्यक्तियों का चुनाव 5 व्यक्तियों के विशेष समूह से किया जाये तो यह कार्य कितने तरीकों से किया जा सकता है ?
   v) अगर एक विशेष व्यक्ति समिति में कभी भी न हो तो यह कार्य कितने तरीकों से किया जा सकता है ?

9) 0, 2, 4, 6, 8 अंकों के प्रयोग से कितनी ऐसी धनात्मक संख्याएँ बनाई जा सकती हैं जिनमें कोई अंक दोहराया गया न हो ?

   (संकेत: कोई भी संख्या 0 से शुरू नहीं होती)

3.6.2 संचय

क्रमचय संख्या के गणन में हमने विभिन्न वस्तुओं को एक दूसरे से भिन्न माना और चयन की गई वस्तुओं के आन्तरिक क्रम की भी गणना की। अगर हम यह ज्ञात करना चाहें कि n वस्तुओं में से r वस्तुओं का ऐसा चयन जिसमें उनका क्रम महत्त्वपूर्ण न हो, कितने तरीके से किया जा सकता है तो यह स्वाभाविक है कि चुनी हुई वस्तुओं के सारे क्रमचयों को एक संचय माना जाएगा।

n वस्तुओं में से एक बार में r वस्तुओं का चयन करने पर संचयों की संख्या का संकेतन ^nC_r या C^n_r या nCr द्वारा किया जाता है जिसमें ^nC_r संकेतन पद्धति सबसे अधिक प्रचलित है।

^nC_r का मान बड़ी आसानी से निम्नलिखित से निकाला जा सकता है।

हम जानते हैं कि n वस्तुओं में से r वस्तुओं के सम्भावित क्रमचयों की संख्या $^nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$ है।

जैसा कि ऊपर बताया गया है, r वस्तुओं के सभी सम्भावित क्रमचयों को हम एक संचय मानते है तथा r वस्तुओं के आपस में क्रमचयों की संख्या r! है। इस प्रकार प्रत्येक r! क्रमचय एक संचय का परिणाम है। इस प्रकार कुल क्रमचयों की संख्या को r! से भाग देने पर हमें संचयों की संख्या प्राप्त हो जाएगी।

अत : $^nC_r = {^nP_r} \div r!$

$$= \frac{n!}{(n-r)!} \times \frac{1}{r!}$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} \qquad (1)$$

इससे हम एक और महत्त्वपूर्ण सम्बन्ध प्राप्त कर सकते हैं। जब हम n वस्तुओं में से r वस्तुओं का चयन करते हैं तो (n−r) वस्तुओं का चयन स्वतः ही हो जाता है। इसलिए

$$^nC_r = {^nC_{n-r}} \qquad (2)$$

इस तथ्य की सूत्र द्वारा भी जाँच की जा सकती है :

क्योंकि $^nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$

तथा $^nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

$\therefore\ ^nC_r = {^nC_{n-r}}$.

निम्नलिखित गणितीय सम्बन्ध, प्रश्न हल करने में बड़ा सहायक होता है :

$$^nC_r + {^nC_{r-1}} = {^{n+1}C_r} \qquad (3)$$

इस को **पास्कल (Pascal's) का नियम** कहते है। इसकी जाँच नीचे की गई है। लेकिन आप इसको स्वयं करके देखें।

$$^nC_r + {^nC_{r-1}} = \frac{n!}{r!(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}$$

$$= n!\left[\frac{1}{r!(n-r)!} + \frac{1}{(r-1)!(n-r+1)!}\right]$$

$$= n!\left[\frac{n-r+1+r}{r!(n-r+1)!}\right]$$

$$= \frac{n!(n+1)}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n-r+1)!} = \frac{(n+1)!}{r!(n+1-r)!}$$

$$= {^{n+1}C_r}$$

(2) अगर $^nC_r = {^nC_s}$

तब $^nC_s = {^nC_r} = {^nC_{n-r}}$

इस प्रकार या तो $s=r$ या $s=n-r$

या $r+s=n$

उदाहरण 6.5 : 15 विद्यार्थियों की कक्षा से 3 विद्यार्थियों की टीम का चयन कितने तरीकों से किया जा सकता है ?

हल : यहाँ 15 विद्यार्थियों से 3 विद्यार्थियों के संचयों की संख्या ज्ञात करनी है।

$$^{15}C_3 = \frac{15!}{3!\ 12!} = \frac{15\times14\times13\times12!}{3!\times12!}$$

$$= \frac{15\times14\times13}{3\times2\times1} = 455$$

उदाहरण 6.6 : 15 जवानों तथा 5 अफसरों के समूह से 4 जवानों तथा 2 अफसरों का चयन कितने तरीकों से किया जा सकता है ?

हल : i) 15 जवानों में से 4 का चयन $^{15}C_4$ तरीके से किया जा सकता है।

ii) 5 अफसरों में से 2 का चयन $^5C_2$ तरीके से किया जा सकता है।

iii) 4 जवानों के प्रत्येक चयन के लिए अफसरों के चयनों की संख्या $^5C_2$ है।

इस प्रकार 4 जवानों तथा 2 अफसरों के कुल संचयों की संख्या

$$^{15}C_4\times{^5C_2} = \frac{15!}{4!(15-4)!}\times\frac{5!}{2!\ 3!}$$

$$= \frac{15!}{4!\ 11!}\times\frac{5!}{2!\ 3!}$$

$$= \frac{15\times14\times13\times12}{4\times3\times2\times1}\times\frac{5\times4}{2\times1} = 13650$$

बोध प्रश्न 18

1) 10 व्यक्तियों के समूह से 6 व्यक्तियों की समिति का चयन कितने तरीकों से किया जा सकता है ?

2) 15 क्रिकेट खिलाड़ियों में से 12 का चयन कितने तरीकों से किया जा सकता है जबकि उनमें केवल एक विकेट कीपर (Wicket Keeper) हो ?

3) 14 खिलाड़ियों में से जिनमें 5 गेंदबाज (Bowler) हैं, 11 खिलाड़ियों की टीम जिसमें तीन गेंदबाज सम्मिलित हों, का चुनाव कितने तरीकों से किया जा सकता है ?

4) 8 भुजाओं के बहुभुज में कितने विकर्ण होते हैं ?

5) 18 विद्यार्थियों की कक्षा में से जिसमें 6 लड़कियाँ है, 5 विद्यार्थियों की टीम का चयन जिसमें कम से कम 3 लड़कियाँ हों, कितने तरीकों से किया जा सकता है ?

6) 15 लड़कों, 12 लड़कियों तथा 4 अध्यापकों के समूह से 5 लड़कों, 5 लड़कियों तथा 2 अध्यापकों का चयन कितने तरीकों से हो सकता है ?

7) दो भिन्न रंगों के पासे (Dice) एक साथ फैंके जाते हैं। ये कितने तरीकों से गिर सकते हैं ? इन पर प्रदर्शित संख्याओं का योग कितने तरीकों से सम (even) होगा।

8) निम्नलिखित समीकरणों को n के लिए हल कीजिए।

   i) ${}^nC_7 = {}^nC_5$ ii) ${}^nC_2 =$

3.7 द्विपद (Binomial) प्रमेय

व्यंजकों को प्रत्यक्ष गुणा करने तथा पदों को एकत्रित करने पर $(x+a)(x+b) = x^2+(a+b)x+ab$ होता है, (1)

इस प्रकार $(x+a)(x+b)(x+c) = x^3+(a+b+c)x^2+(ab+bc+ca)x+abc$ है, (2)

तथा $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = x^4+(a+b+c+d)x^3+(ab+bc+cd+da+ac+bd)x^2+$
$(abc+abd+acd+bcd)x + abcd.$ है, (3)

इन व्यंजकों को ध्यान से देखने पर $x, x^2, \ldots\ldots$ आदि के गुणांक में एक विशेष प्रकार का प्रतिरूप सामने आता है। उदाहरण के लिए समीकरण 3 पर ध्यान दें। यहाँ वाम पक्ष का गुणनफल, कुछ गुणनफलों के योग के बराबर है। प्रत्येक गुणनफल, वामपक्ष के प्रत्येक चार गुणनखंडों में से एक-एक अक्षर लेकर प्राप्त किया गया है। इन गुणनफलों का निर्माण इस प्रकार होता है।

1) प्रत्येक गुणनखण्ड से x लेकर उनसे गुणा करने से x^4 प्राप्त होता है,

2) किन्हीं तीन गुणनखण्डों से x तथा चौथे में से एक अक्षर a या b या c या d लेकर गुणा करने से x^3 के विभिन्न पद प्राप्त होते हैं।

3) किन्हीं 2 गुणनखण्डों में x तथा शेष दो गुणनखण्डों में से a, b, c, d अक्षरों से कोई दो अक्षर प्राप्त करके तथा इनसे गुणा करके x^2 के विभिन्न पद प्राप्त होते हैं।

4) किसी एक गुणनखण्ड से x तथा शेष तीन पदों से अक्षर प्राप्त कर उनसे गुणा करने से x के विभिन्न पद प्राप्त होते हैं।

5) अन्त में सभी गुणनखण्डों के अक्षरों a, b, c, d के गुणनफल से प्राप्त x से स्वतंत्र पद प्राप्त होता है।

अगर $a=b=c=d$ तब उपरोक्त समीकरण (3) को इस प्रकार लिखते हैं :

$$(x+a)(x+a)(x+a)(x+a)=(x+a)^4$$
$$=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4 \qquad (4)$$

यहाँ पर ध्यान दें कि x^4 प्रत्येक चार गुणनखण्डों से x लेकर बनता है तथा यह कार्य करने का केवल एक तरीका है।

x^3 के पद किन्हीं 3 गुणनखण्डों से x लेकर तथा शेष गुणनखण्ड से a, b, c, d में से एक अक्षर लेकर बनते हैं। इस प्रकार चार अक्षरों में से एक का चयन करने के तरीके x^3 के पदों की संख्या होगी। संचय सूत्र के अनुसार इन

पदों की संख्या ${}^4C_1 = \dfrac{4!}{1!\,3!} = 4$ होगी।

ठीक इसी प्रकार x^2 के पदों की संख्या जानने के लिए हमें 4 अक्षरों में से 2 का चयन करना है जो कि ${}^4C_2=6$ तरीके से किया जा सकता है।

इसी प्रकार x के पदों की संख्या ${}^4C_3=4$ होगी। तथा अन्त में 4 अक्षरों में से 4 का चयन करना है तो पदों की संख्या ${}^4C_4=1$ होगी। ये संख्याएँ वही हैं जो हमने उपरोक्त समीकरण (3) में प्राप्त की हैं। इसके अतिरिक्त समीकरण (3) में $a=b=c=d$ रखने पर समीकरण (4) प्राप्त होता है। इसको अब हम इस प्रकार लिख सकते हैं।

$$(x+a)^4 = x^4 + {}^4C_1ax^3 + {}^4C_2a^2x^2 + {}^4C_3a^3x + a^4$$
$$= x^4 + {}^4C_1a^1x^{4-1} + {}^4C_2a^2x^{4-2} + {}^4C_3a^3x^{4-3} + a^4 \qquad \ldots\ldots (5)$$

इस सूत्र को द्विपद-प्रमेय कहते हैं। इसकी सहायता से हम $(x+a)^n$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है, का सूत्र लिखा जा सकता है :

$$(x+a)^n = x^n + {}^nC_1ax^{n-1} + {}^nC_2a^2x^{n-2} + \ldots + {}^nC_ra^rx^{n-r} + \ldots + {}^nC_{n-1}a^{n-1}x + a^n \quad (6)$$

यह सूत्र अनेक परिकलनों के लिए उपयोगी है क्योंकि इसमें किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए x तथा a का कोई भी मान रखा जा सकता है। उपयुक्त प्रतिस्थापन के कुछ आवश्यक परिणाम इस प्रकार है :

(1) मान लिया हमें $(x-y)^7$ का मान ज्ञात करना है तो हम सूत्र (6) में $a=-y$ तथा $n=6$ रख देते हैं। इस प्रकार

$$(x-y)^7 = x^7 + {}^7C_1(-y)x^6 + {}^7C_2(-y)^2x^5 + {}^7C_3(-y)^3x^4 + {}^7C_4(-y)^4x^3 + {}^7C_5(-y)^5x^2 + {}^7C_6(-y)^6x + (-y)^7$$
$$= x^7 - {}^7C_1yx^6 + {}^7C_2y^2x^5 - {}^7C_3y^3x^4 + {}^7C_4y^4x^3 - {}^7C_5y^5x^2 + {}^7C_6y^6x - y^7$$
$$= x^7 - 7yx^6 + 21y^2x^5 - 35y^3x^4 + 35y^4x^3 - 21y^5x^2 + 7y^6x - y^7$$

यहाँ यह ध्यान दें कि सूत्र ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ के प्रयोग द्वारा गणन कार्य सरल हो जाता है। उदाहरण के लिए ${}^7C_1 = {}^7C_6 = 7$, ${}^7C_2 = {}^7C_5 = 21$, ${}^7C_3 = {}^7C_4 = 35$. आदि।

उपरोक्त से यह भी स्पष्ट है कि ${}^7C_0 = {}^7C_7 = 1$

उपरोक्त $(x+a)^n$ व्यंजक में x^n का गुणांक ${}^nC_0 = 1$ तथा a^n का गुणांक ${}^nC_n = 1$ होता है।

दूसरे पद का गुणांक, जिसमें x^{n-1} आता है, ${}^nC_1$ होता है, तीसरे पद का गुणांक, जिसमें x^{n-2} आता है ${}^nC_2$ होता है, इत्यादि।

इसी प्रकार $(r+1)$ वें पद में x^{n-r} होगा तथा इसका गुणांक ${}^nC_r$ होगा। यहाँ यह ध्यान दे कि प्रत्येक पद में a की घात c के अनुलग्न के बराबर होती है तथा a और x की घातों का योग सदा n के बराबर होता है।

द्विपद प्रमेय द्वारा 2^n का मान निकालना :

$(x+a)^n$ में $x=a=1$ रखने पर

$$2^n = (1+1)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_{n-1} + {}^nC_n$$

या $${}^nC_1 + {}^nC_2 + \ldots + {}^nC_{n-1} + {}^nC_n = 2^n - {}^nC_0 = 2^n - 1 \quad (7)$$

अगर हम $x = 1$ तथा $a=-1$ रखें तो

$$(1-1)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 \ldots (-1)^{n-1}\,{}^nC_{n-1} + (-1)^n\,{}^nC_n = 0$$

अर्थात् c के सम अनुलग्नों वाले पदों का चिन्ह धनात्मक होगा तथा विषम अनुलग्नों वाले पदों का चिह्न ऋणात्मक होगा। ऋणात्मक गुणांक वाले पदों को दूसरे पक्ष में ले जाने पर

$${}^nC_0 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \ldots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \ldots \quad (8)$$

अगर $(x+a)^n$ में $a=1$ रखा जाए

$$(x+1)^n = x^n + {}^nC_1x^{n-1} + {}^nC_2x^{n-2} + \ldots + {}^nC_nx^0$$

क्योंकि ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$ हैं। इसको हम निम्न रूप में भी लिख सकते हैं।

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \ldots + {}^nC_nx^n$$

उदाहरण 1 : $(x+3a)^4$ को विस्तृत रूप में लिखिए।

हल : $$(x+3a)^4 = x^4 + {}^4C_1(3a)x^3 + {}^4C_2(3a)^2x^2 + {}^4C_3(3a)^3x + {}^4C_4(3a)^4$$
$$= x^4 + 4\times3ax^3 + 6\times9a^2x^2 + 4\times27a^3x + 81a^4$$
$$= x^4 + 12ax^3 + 54a^2x^2 + 108a^3x + 81a^4$$

उदाहरण 2 : $(3x+4y)^5$ को विस्तृत कीजिए।

हल : $$(3x+4y)^5 = (3x)^5+{}^5C_1(4y)(3x)^4+{}^5C_2(4y)^2(3x)^3+{}^5C_3(4y)^3(3x)^2+{}^5C_4(4y)^4(3x)+{}^5C_5(4y)^5$$
$$= 243x^5+5\times4\times81yx^4+10\times16\times27y^2x^3+10\times64\times9y^3x^2+5\times256\times3y^4x+1024y^4$$
$$= 243x^5+1620x^4y+4320x^3y^2+5760x^2y^3+3840xy^4+1024y^5$$

बोध प्रश्न 19

1) निम्नलिखित व्यंजकों का विस्तार कीजिए :

(i) $(3x-5y)^4$ (ii) $(x+5a)^5$ (iii) $\left[\frac{(3a-b)}{2}\right]^2$ (iv) $[\sqrt{(a^2+1)}+a]^5$

2) निम्नलिखित ज्ञात कीजिए :

i) $(1+x)^{10}$ का 5वाँ पद।

ii) $(1-y)^{12}$ का 7वाँ पद।

iii) $(2x+a)^6$ में x^4 का गुणांक।

iv) $(2x+a)^6$ में x^7 का गुणांक।

v) $\left(\frac{x+1}{x}\right)^7$ में x^5 का गुणांक।

vi) $\left(\frac{x-1}{x}\right)^8$ में x^{-3} का गुणांक।

vii) $\left(\frac{2x+3}{x}\right)^8$ में x से स्वतंत्र पद का गुणांक।

viii) $(x+a)^n + (x-a)^n$ का मान।

3.8 सारांश

इस ईकाई में हमने आपकी हाई स्कूल की प्रारंभिक बीजगणित की याद को ताज़ा किया है। आपने अपने आपको एक-चर रैखिक और द्वि-चर रैखिक समीकरणों से परिचित करवाया है। इसके अतिरिक्त आपने लघुगुणक श्रेढ़ियाँ, क्रमचय तथा संचय व द्विपद प्रमेय का भी अभ्यास किया है।

3.9 शब्दावली

द्विपद प्रमेय : किसी धनात्मक पूर्णांक n के लिए यह $(x+a)^n$ का सूत्र है जो कि इस प्रकार है

$(x+a)^n = x^n + {}^nC_1ax^{n-1} + {}^nC_2a^2x^{n-2} + \ldots + {}^nC_ra^rx^{n-r} + \ldots + {}^nC_{n-1}a^{n-1}x + a^n$

संचय : वस्तुओं के समुच्चय से प्राप्त एक उपसमुच्चय जिसमें वस्तुओं का क्रम महत्वपूर्ण नहीं होता, अगर वस्तुओं के क्रम को भी ध्यान में रखा जाए तो उसे **क्रमचय** कहते हैं।

सामान्य लघुगुणक : वह लघुगुणक जिसमें आधार 10 का प्रयोग होता है।

पूर्णांश : लघुगुणक का पूर्णांक अंश।

अपूर्णांश : लघुगुणक का दशमलव अंश।

द्विघात समीकरण : एक चर की वह समीकरण जिसमें x की उच्चतम घात 2 हो। इसका मानक रूप $ax^2+bx+c=0$ होता है।

युगपत् (Simultaneous) समीकरण : एक से अधिक चर वाली समीकरणों के हल के लिए हमें चरों की संख्या के बराबर स्वतंत्र तथा अविरोधी, संख्या में समीकरणों की आवश्यकता होती है। इस प्रकार के समीकरण समुच्चय को युगपत् समीकरण कहते हैं।

हल : (1) किन्हीं आँकड़ों, पूर्वविदित तथ्यों एवं विधियों तथा नवीन प्रेक्षित सम्बन्धों के आधार पर अपेक्षित परिणाम प्राप्त करने की प्रक्रिया। (2) परिणाम को भी हल कहा जाता है जैसे समीकरण का मूल समीकरण का हल कहलाता है। इस प्रकार हल का अर्थ मूल ज्ञात करने की प्रक्रिया या स्वयं मूल ज्ञात करना होता है।

3.10 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1) National Council of Educational Research and Training, 1978. *A Text Book of Mathematics for Classes XI and XII, Book I and IV* New Delhi.

2) Baylay, John and Martin Holstage, 1988, *Understanding Algebra.* Random House, U.S.A.

3.11 बोध प्रश्नों के संकेत अथवा उत्तर

बोध प्रश्न 1

(1) $4x^2$ (2) $ax(x-1)$ (3) $ax^2(-7a-1)$ (4) $6x^2-17y^2$ (5) $\left(\frac{5}{6}\right)x^2-\left(\frac{3}{4}\right)y^2$

(6) $\left(\frac{3}{10}\right)x^2$ (7) $\left(\frac{23x}{12}\right)-\left(\frac{5y}{28}\right)$ (8) $-\left(\frac{3}{4}\right)x^2y^2$ (9) $-3.8x^2$ (10) $11a^2b^2-16.2x^2y^2$

(11) $-2.2xy+0.6x^2y^2$ (12) $ax(0.5x-3.5+3.5a)$

बोध प्रश्न 2

क) (1) $2(a+b+c)$ (2) $2xy+yz-2zx$ (3) $-7ab+13bc+3abc+8ca$

(4) $xy+6y^2$ (5) $3x^2+5$ (6) $4x^3+9x^2y+xy^2-3y^2+2y^3$

(7) $y^2-xy+2xy^2$ (8) $-5x^4+3x^3+5x^2+6x+21$

(9) $\left(\frac{13}{10}\right)x^2+\left(\frac{1}{6}\right)xy+\left(\frac{1}{8}\right)y^2$

(10) $\left(\frac{14}{9}\right)x^3+\left(\frac{3}{8}\right)x^2y+\left(\frac{5}{28}\right)xy^2+\left(\frac{2}{3}\right)y^3$

(11) $\left(\frac{17}{4}\right)a^2+\left(\frac{13}{9}\right)b^2$

(12) $\left(\frac{23}{7}\right)a^3+\left(\frac{11}{5}\right)a^2b-\left(\frac{31}{8}\right)ab^2+\left(\frac{1}{3}\right)b^3$

(13) $-9ax^2+a^2+x^2$

(14) $-\left(\frac{19}{14}\right)x^2+\left(\frac{-67}{24}\right)a-\left(\frac{41}{9}\right)b+\left(\frac{31}{11}\right)y^2$

(15) $ab+a^2+b^2+c^2$

ख) (1) $4x^3+3x^2+2x-2$ (2) $2y^2-x^2+xy$ (3) $\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{6}y^2-\frac{1}{5}xy$

(4) $y^3-\left(\frac{3}{5}\right)x^3-\left(\frac{4}{10}\right)x^2+x^2y+\left(\frac{9}{6}\right)xy^2$ (5) $4b^4-3a^4+3ab^3+2a^3b+5a^2b^2$

ग) (1) $7x^2+7y^2-7xy$ (2) $a^3-b^3-a^2-b^2+5ab^2+6a^2b$

(3) $\left(\frac{3}{4}\right)a^3+\left(\frac{2}{3}\right)ab^3+b^2-\left(\frac{1}{3}\right)ab$

बोध प्रश्न 3

क) (1) $8x-4y$ (2) $x+3y$ (3) $2x+6y-xy+xz+z$ (4) $2x-6z$ (5) $14x+10y-4xy$

(6) $206x-290y$ (7) $\left(\frac{203}{252}\right)b-\left(\frac{52}{21}\right)a$

(8) $28x^2-7xy$ (9) $a^2+3ab+2b^2$ (10) $a^2-4b^2+4bc-c^2$

(11) $x^3+x^2y-xy^2-y^3$ (12) $b^2c^2-a^2b^2-c^2d^2-acd^2-a^2bd-3abcd.$

(13) $a^3+b^3+c^3-3abc$

ख) (1) $\left(\frac{3}{2}\right)x^2$ (2) $3xy^3$ (3) $\frac{7y^2}{(5x^2z^3)}$ (4) $\frac{2x^2}{(3xy-y^2)}$ (5) $\frac{(3x^3-6x)}{(12x^2-8)}$

(6) $\frac{y(y+x)}{3(x+2)}$ (7) $\frac{(25x^3y^2)}{9a^4b^3}$ (8) $\frac{16}{9bc}$ (9) $\frac{9yb}{5}$ (10) 16

बोध प्रश्न 4

(1) $(3x+4y)(1+4)$ (2) $(a-b)(x-y)$ (3) $2(x+y)(2x+2y-1)$ (4) $(y+a)(x-b)$

(5) $(x-1)(3x+a+1)$ (6) $(3x+2y)(3x-2y)$ (7) $(6x^2-2x)(6x^2+2x)$

(8) $(2x+1)(2x+1)$ (9) $(3x+2)(6x+4)$ (10) $[(3x-2y)(3x+2y)]^2$

(11) $(3x+3+4y)(3x+3-4y)$ (12) $[(3x/7)-(2y/5)][(3x/7)+(2y/5)]$

(13) $(x+8)(x+5)$ (14) $(x+17)(x-6)$ (15) $5x(x+4)(x+2)$ (16) $3(y+13)(y+5)$

(17) $(x+2)(5x-1)$ (18) $(x-9)(x+6)$ (19) $(x+35y)(x-3y)$

(20) $(x+14yz)(x-2yz)$ (21) $(4y-5x)(5y+4x)$ (22) $(3+11x^2)(3-11x^2)$

(23) $(a^2b^2c^4+4x^2)(abc^2+2x)(abc^2-2x)$ (24) $(a-4x+5y)(a-4x-5y)$

(25) $(b+2c)(2a+3b)$ (26) $(x+y)(x-y)(x^2+4y^2)$ (27) $(2x+y)(2x-y)(x+y)(x-y)$

(28) $(x+3y)(x^2+9y^2-3xy)$ (29) $(xyz-1)(x^2y^2z^2+xyz+1)$

(30) $ab(9a-b)(81a^2+b^2+9ab)$ (31) $2x(x^2+3y^2)$

(32) $x^3(x^2a^2-5y)(x^4a^4+25y^2+5x^2ya^2)$ (33) $(a+b)(a-b)(x-2y)^2$

बोध प्रश्न 5

(1) x^4y^4 (2) x^8y^{12} (3) $-8x^9y^6$ (4) $x^{17}y^{24}$ (5) $x^{a+3b+2c}\ y^{2a+b+3c}\ z^{3a+2b+c}$

(6) $\frac{y^2}{(x^2)}$ (7) $135\left(\frac{y^4}{x^4}\right)$ (8) $x^{a-c}\ y^{b-d}$ (9) $\frac{1}{x^{10}y^2}$ (10) $\frac{3^{5/6}\ y^{5/12}\ Z^{1/6}}{2.x^{1/6}}$ (11) x^{-2}

(12) $\frac{1}{xy}$ (13) $\frac{xy}{x+y}$ (14) $\frac{1}{ac+bc+ab}$ (15) $x^{-6}y^{15/2}$ $\frac{1}{3}-\frac{y}{x}$

(17) $\frac{x+2y}{2(x+y)}$ (18) $\frac{5y}{(x-y)}$ (19) $x-y$ (20) $(x^2+1)(x-1)$

बोध प्रश्न 6

(1) $\frac{7}{6x}$ (2) $\frac{2-3x}{x^2}$ (3) $\frac{2x^2-1}{x^2(x^2-1)}$ (4) $\frac{4x+2y+z}{8xy}$ (5) $\frac{2(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$

(6) $\frac{4x+3}{4x^2-9}$ (7) $\frac{9x+4}{(3x+4)(x-1)}$ (8) $\frac{5(x-1)}{(3x-2)(2x-1)}$ (9) $\frac{(x^3-y^4)(x^3-y^3)}{x^3y^4}$

(10) $\frac{x+y}{x-y}$ (11) $\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2-2ab-b^2}$ (12) $2x$.

बोध प्रश्न 7

(1) 15 (2) पटसन, 1 रुपया प्रति मीटर, कपास 1.60 रुपए प्रति मीटर, नाईलोन—6 रुपए प्रति मीटर।

(3) A=45 वर्ष, B=75 वर्ष (4) पीटर=30 वर्ष, स्मिथ=6 वर्ष (5) 25 पैसे के सिक्के=18, 20 पैसे के सिक्के=12, 10 पैसे के सिक्के=6 (6) लम्बाई=8 फुट, चौड़ाई=5 फुट (7) 36 (8) 27, 28

(9) A=255.00 रुपए; B=345.00 रुपए C=900.00 रुपए।

बोध प्रश्न 8

(1) $y=3, x=2$ (2) $x=3, y=1$ (3) $x=5, y=4$ (4) $x=6, y=3$ (5) $x=6, y=11$

(6) $x=\frac{3}{40}, y=\frac{1}{20}$ (7) 52, 25 (8) चीनी=8 रु. प्रति किलो., चाय=40 रु. प्रति किलो.

(9) 75 (10) 84 (11) 5.70 रु. (12) 8 रु., 3 रु. (13) 75, 25 (9) 12, 4 (15) 15 रु, 8 रु.

बोध प्रश्न 9

क) (1) ± 5 (2) -1 (3) ± 5 (4) $2, -17$ (5) $\frac{5}{2}, \frac{21}{2}$ (6) $6, -\frac{2}{3}$

(7) $-\frac{a}{2}, \frac{a}{8}$, (8) $\frac{1}{2}, \frac{5}{3}$

ख) (1) $(5,-3)$ (2) $\left(-\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ (3) $\left(\frac{5}{2}, -6\right)$ (4) $(5, -4)$

ग) (1) (11,13) (2) (14, 16) या (−14, −16) (3) (11,12) (4) 40 कि. मी. प्रतिघंटा
(5) 10 दिन (6) 15 दिन (7) 10 कि.मी. प्रतिघंटा (8) 3 फुट (9) 4 मी. × 6 मी.
(10) 40 मिनट, 60 मिनट

बोध प्रश्न 10 से 12

आप इसे स्वयं करें। लघुगुणक की जाँच के लिए उसका प्रतिलघुगुणक ज्ञात करें। ऐसा करने से आपको सन्निकट मूल संख्या प्राप्त होनी चाहिए।

बोध प्रश्न 13

(1) 58 (2) 16.5 (3) −165 (4) (i) 225, 1800 (ii) −70, −1240

(iii) $a(2-p), \frac{3ap-ap^2}{2}$ (iv) 7.8, 135 (v) −23.5, −562.5 (vi) $3am, \frac{3am}{2}(m+1)$

(5) (i) 16,4 (ii) $15, -\frac{375}{14}$ (iii) 17, −2 (6) 1050 (7) 5 (8) 4,3

(9) 1200/- रुपए।

बोध प्रश्न 14

(1) 4096, 262144 (2) $64, \frac{1}{2}$ (3) 0.015625, 0.0004882 (4) $3(-3)^7, 3(-3)^9$

(5) (a) 1.49997 (b) 60.74 (c) 225.3181 (6) $\frac{9}{8}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ (7) $\frac{6}{5}, \frac{12}{25}, \frac{24}{125}$

(8) $4, 2, 1, \frac{1}{2} \frac{1}{4}$ (9) $\frac{5}{3}$, 5, 15 (10) 3, 6, 12

बोध प्रश्न 15

(1) व्युत्क्रम श्रेणी में $d = \frac{1}{2}$

(2) (a) 6.5, 6.185, 5.885
(b) 44, 33.74, 27.432

बोध प्रश्न 16

(1) $4\times3\times2=24$ (2) $^5P_5$ (3) $4\times3\times2\times1=24$

बोध प्रश्न 17

(1) $\frac{16!}{4!}, \frac{8!}{5!}, \frac{8!}{3!}, \frac{12!}{4!}$

(2) (a) n=12 (b) n=14 (c) n=7 (d) n=9

(3) (a) $^6P_6$ (b) $^5P_5$ (c) $^6P_6$ (d) $^7P_7$

(4) (a) $^9P_4$ (b) $^7P_4$ (c) $^5P_4$ (d) $^6P_4$

(5) $^5P_4, {}^4P_3$ (6) 12 (7) 12

(8) i) $^{10}P_5$ (ii) $^9P_4$ (iii) $^5P_2\times{}^8P_3$ (iv) $^5P_2\times{}^5P_3$ (v) $^9P_5$

(9) 96+96+48+16+4=260

बोध प्रश्न 18

(1) $^{10}C_6$ (2) $^{14}C_{11}$ (3) $^5C_3\times{}^9C_8$ (4) $^8C_2-8=20$

(5) $^6C_3\times{}^{12}C_2 + {}^6C_4\times{}^{12}C_1 + {}^6C_5\times{}^{12}C_0$ (6) $^{15}C_5\times{}^{12}C_5\times{}^4C_2$ (7) 36, 18

(8) (i) 12, (ii) 10

बोध प्रश्न 19

(1) (i) $81x^4-540x^3y+1350x^2y^2-1500xy^3+625y^4$

(ii) $x^5+25ax^4+250a^2x^3+1250a^3x^2+3125a^4x+3125a^5$

(iii) $\frac{1}{4}[9a^2-6ab+b^2]$

(iv) $(a^2+1)^{5/2}+5a(a^2+1)^{1/2}+10a^2(a^2+1)^{3/2}+10a^3(a^2+1)+5a^4(a^2+1)^{1/2}+a^5$

(2) (i) $210x^4$ या $210x^6$ (ii) $924y^6$ (iii) $240a^2$ (iv) 0 (v) 0 (vi) 0 (vii) 256

(viii) $2(x^n+{}^nC_2a^2x^{n-2}+{}^nC_4a^4x^{n-4}...........)$

3.12 पारिभाषिक शब्दावली (Technical Terminology)

अंकगणितीय/समान्तर श्रेढ़ी	arithmatic progression (A.P.)
अनन्त	infinite
अनुक्रम	sequence
अनुप्रवाह	down stream
अपूर्णांश	mantissa
अनुलग्न	suffix
अविरोधी समीकरण	consistent equations
आधार	base
आलेख	graph
आश्रित समीकरण निकाय	system of dependent equations
उपसमुच्चय	subset
ऊर्ध्वाधर प्रवाह	upstream
इकाई	unit
क्रम-गुणित	factorial
क्रमागत संख्याएँ	consecutive numbers
कोष्ठक	bracket
क्षैतिज	horizontal
गणितीय उपकरण	mathematical tools
गुणनखण्ड	factor
गुणज	multiple
गुणोत्तर माध्य	geometric mean (G.M)
गुणोत्तर श्रेढ़ी	geometric progression (G.P)
गुणांक	coefficient
घात	power
घातांक	index
चर	variable
दक्षिण पक्ष	righthand side
दशमलव	decimal
द्विघात समीकरण	quadratic equation
द्विपद प्रमेय	binomial theorm
धनात्मक पूर्णांक	positive integer
निर्देशांक ज्यामिति	coordinate geometry
विलोपन	elimination
व्युत्क्रम	reciprocal
पद	term
परिकलन	calculation
पूर्णांश	characteristic
प्रतिलघुगुणक	antilogarithms
प्रतिस्थापन	substitution
फलन	function

बीजगणित	algebra
माध्य अन्तर स्तम्भ	mean difference column
मान	value
युगपत समीकरण	simultaneous equations
रैखिक	linear
रेखिका	bar
लघुत्तम समापवर्त्य	lowest common multiple (L.C.M)
लघुगुणक	logarithm
व्यंजक	expression
व्यवकलन	subtraction
वाम पक्ष	left hand side
विकर्ण	diagonal
विन्यास	arrangements
विरोधी समीकरण निकाय	system of inconsistent equations
विषम पूर्णांक	odd integer
सार्व अन्तर	common difference
सार्व अनुपात	common ratio
संक्रिया	operation
संकेत पद्धति	notation system
संकेतन	notation
साँख्यिकीय	statistical
संचय	combination
समान्तर माध्य	arithmatic mean (A.M)
सन्निकट संख्या	approximate number
सम पूर्णांक	even integer
समानिका	identity
सूत्र	formula
स्तम्भ	column
हरात्मक माध्य	harmonic mean (H.M.)
हरात्मक श्रेढ़ी	harmonic progression (H.P.)

इकाई 4 निर्देशांक ज्यामिति तथा फलनिक सम्बन्ध

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य

इस इकाई के द्वारा आप निम्नलिखित तथ्यों को समझ सकेंगे :

- चर राशियों में फलनिक सम्बन्ध कैसे होता है,
- वक्रों की ज्यामितीय विशेषताओं का विश्लेषण,
- फलनों की विश्लेषिक विशेषताओं की आरेखी व्याख्या।

4.1 परिचय

जिन प्रश्नों में गणितीय उपकरणों का प्रयोग होता है, उनमें सभी प्रासंगिक चरों में महत्त्वपूर्ण सम्बन्धों को परिभाषित करना अथवा पहचानना आवश्यक है। ये सम्बन्ध प्रायः बीजीय समीकरण के रूप में लिखे जाते है। इन्हें फलन कहते हैं। निर्देशांक ज्यामिति इन फलनों की विश्लेषिक विशेषताओं को समझने में सहायक होती है। इसके द्वारा हमें फलन के आलेख की प्रकृति के बारे में भी जानकारी मिलती है।

4.2 फलन तथा आलेख

फलन की परिभाषा : चर x में कोई व्यंजक जिसका मान x के मान पर निर्भर होता है, x का फलन कहलाता है। उदाहरण के लिए $2x+3$, $3x^2+5x+6$, x^5+7x^4+3, x चर के क्रमशः प्रथम, द्वितीय तथा पंचम घात (degree) के बहुपद फलन हैं। फलन अनेक प्रकार के हा सकते हैं, जैसे $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{3x^2+5x+7}$, $\sqrt{x}$, $kx^{m/n}$, $\frac{1}{x^2}+\frac{1}{3x^2}$ आदि **फलन के** कुछ अन्य उदाहरण हैं।

सामान्यतः x के फलन को संकेताक्षर f(x) से निर्दिष्ट (denote) किया जाता है। यदि एक से अधिक फलन हों तो g(x), h(x) आदि संकेताक्षरों का प्रयोग भी कर सकते हैं।

4.2.1 आलेखी निरूपण

जब हम $y=f(x)$ लिखते हैं तो x के एक दिए हुए मान को f(x) में प्रतिस्थापित करके y का संगत मान ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रकार x के विभिन्न मानों द्वारा y के संगत मानों को प्राप्त किया जा सकता है जोकि फलन के मान कहलाते हैं। यहाँ x को स्वतंत्र चर तथा y को परतन्त्र चर कहा जाता है।

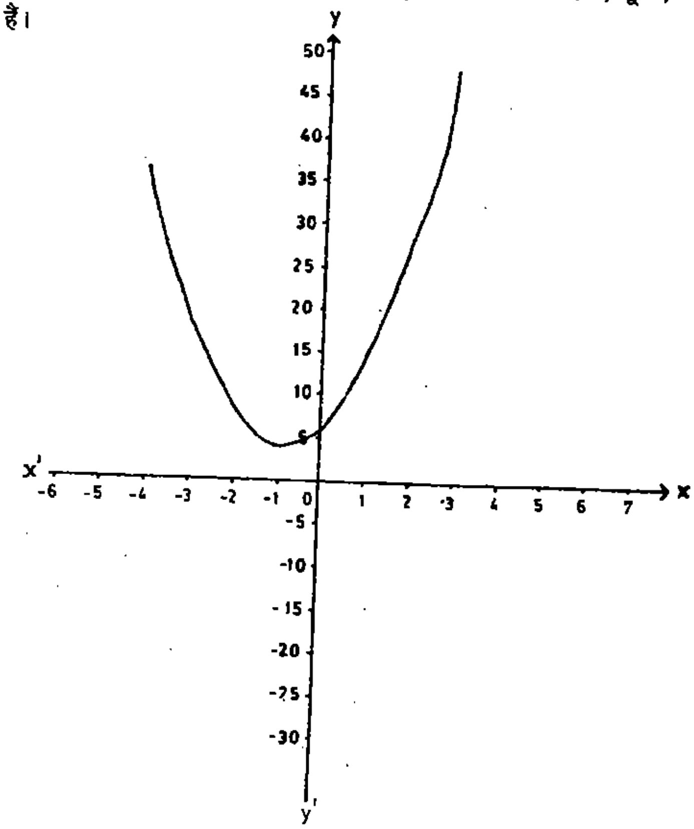
उदाहरण : फलन $f(x) = 3x^2+5x+6$ पर ध्यान दीजिए।

मान लिया फलन के मान y से निरूपित किए जाते हैं। तब x के विभिन्न मानों के लिए y के संगत मानों की तालिका बना सकते हैं।

x	y
−4	34
−3.5	25.25
−3	18
−2	8
−1	4
0	6
1	14
2	28
3	48

इस प्रकार हम फलन के जितने मान चाहें प्राप्त कर सकते हैं। प्रायः हमारी रुचि x के विभिन्न मानों के लिए y के मानों को प्राप्त करने में नहीं होती, बल्कि हम यह जानने का प्रयास करते हैं कि x में दिए हुए परिवर्तन से फलन में किस प्रकार परिवर्तन होते है। कई बार फलन दिया हुआ नहीं होता लेकिन x के कुछ मानों के लिए y के मान पता होता हैं। इस परिस्थिति में हमें x के किसी मध्यवर्ती मान के लिए y का मान जानना आवश्यक होता है। आलेखी विधियों द्वारा इस प्रकार के प्रश्नों का समाधान बड़ी सुविधा से किया जा सकता है।

एक आलेख पृष्ठ पर दो सरल रेखाएँ क्रमशः X'OX तथा YOY' जो एक दूसरे पर लम्ब हैं, आरेखित की जाते हैं। ये रेखाए एक दूसरे को बिन्दु O पर काटती हैं, जोकि आलेख पृष्ठ के छोटे वर्ग का एक कोना होता है। इन रेखाओं को संदर्भ रेखाएँ कहते है। इन्हें क्रमशः X-अक्ष तथा Y-अक्ष कहा जाता है। इस प्रकार पृष्ठ का समतल चार भागों XOY, YOX', X'OY' तथा Y'OX में विभाजित हो जाता है, जिसको क्रमशः पहला, दूसरा, तीसरा तथा चौथा चतुर्थांश कहते हैं।



आकृति 4.1

बिन्दु O को संदर्भ का मूल बिन्दु या सिर्फ मूल बिन्दु कहते हैं। क्षैतिज रेखा X'OX को **भुज** कहते हैं। इस पर मूल बिन्दु O से X के मान को मापा जाता है। मूल बिन्दु के दाईं ओर धनात्मक तथा बाईं ओर ऋणात्मक मानों को मापा जाता है। ऊर्ध्वाधर रेखा YOY' को **कोटि** कहते हैं। संगत भुज से Y-अक्ष के समानान्तर रेखा पर y के मान को व्यक्त किया जाता है। y के धनात्मक मान को X'OX के ऊपर तथा ऋणात्मक मान को इसके नीचे लिया जाता है। भुज तथा कोटि एकत्र रूप में निर्देशांक कहलाते हैं कि जोकि समतल में एक अद्वितीय बिन्दु को व्यक्त करते हैं। जिस बिन्दु के भुज तथा कोटि क्रमशः x तथा y हों उसे सरल रूप में बिन्दु (x,y) कहा जाता है। (परम्परागत तौर पर बिन्दु के भुज को पहले तथा कोटि को बाद में लिखा जाता हैं।)

इसके बारे में हम और विस्तार से बाद में सीखेंगे। अभी सिर्फ यह जानना आवश्यक है कि (x,y) के युग्म को उपयुक्त संदर्भ अक्षों के द्वारा समतल पर एक बिन्दु द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। इस विधि द्वारा हम स्वतंत्र चर के विभिन्न मानों के लिए फलन के मानों को सुविधाजनक ढंग से व्यक्त कर सकते हैं। मान लिया x का फलन f(x) है और इसके मानों को y से निर्दिष्ट किया जाता है। x के विभिन्न मानों के लिए हम y के विभिन्न मान प्राप्त कर सकते हैं। इन मानों को क्रमशः भुज एवं कोटि कहा जाता है। आलेख पृष्ठ पर उपयुक्त मूल बिन्दु तथा संदर्भ अक्ष लेकर विभिन्न बिन्दुओं को आलेखित किया जाता है। इन बिन्दुओं को आपस में मिलाने पर हमें रेखा या वक्र प्राप्त होती है जिसको फलन या समीकरण $y=f(x)$ का आलेख कहते हैं। इस आलेख द्वारा हम यह जान सकते हैं कि स्वतंत्र चर x के मानों में परिवर्तन से y के मानों में किस प्रकार परिवर्तन होता है।

बोध प्रश्न 1

$y=2x+3$ को एक ग्राफ पेपर पर आलेखित कीजिए :

x	−3	−2	−1.5	−1	0	1	2
y	−3	−1	0	1	3	5	7

$y=x$ **को एक ग्राफ पेपर पर आलेखित कीजिए :**

x	−4	−3	−2.5	3.5	4
y	−4	−3	−2.5	3.5	4

$x+y=0$, या $y=-x$ को एक ग्राफ पेपर पर आलेखित कीजिए :

x	−4	−3	−2	0	1	2	4
y	4	3	2	0	−1	−2	−4

$y=2x^2+3$ को एक ग्राफ पेपर पर आलेखित कीजिए :

x	−4	−2	−1	0	1
y	35	11	5	3	5

$4x+5y+7=0$ को एक ग्राफ पेपर पर आलेखित कीजिए :

इस फलन को इस प्रकार से लिखा जा सकता है

$$y=-\frac{4}{5}x-\frac{7}{5}$$

अब x के विभिन्न मानों के लिए y **को आलेखित कीजिए।**

सेन्टीमीटर आलेख पृष्ठ पर उपयुक्त निर्देशांक अक्षों को लेकर निम्नलिखित फलनों को आलेखित कीजिए।

(1) $y=x+5$ (2) $y=-x+6$ (3) $3x+2y+4=0$

4.2.2 समीकरण हल में अनुप्रयोग

(1) युगपत् समीकरण हल में अनुप्रयोग :

निम्नलिखित उदाहरणों पर ध्यान दीजिए।

उदाहरण 1 : मान लिया 2 अज्ञात चरों x तथा y में दो रैखिक समीकरण हैं,

जैसे : $2x+3y+4=0$

तथा $5x-7y-12=0$

इनको हम इस प्रकार से भी लिख सकते हैं।

$$y=-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}x \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

तथा $y = -\frac{12}{7} + \frac{5}{7}x$ .... (2)

हमें इनको हल करना है। इस प्रकार के समीकरणों को हल करने की कुछ विधियों का हम पहले भी जिक्र कर चुके हैं। अब हम इनको आलेखी विधि द्वारा हल करेंगे। इस विधि में दोनों फलनों के आलेखों का आरेखण किया जाता है। इसके बाद उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात किए जाते है जिस पर इनके आलेख एक दूसरे को काटते हैं। क्योंकि यह बिन्दु दोनों आलेखों पर स्थित होता है इसलिए इसके निर्देशांक दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करते हैं और इस प्रकार यह युगपत समीकरण निकाय का हल होता है।

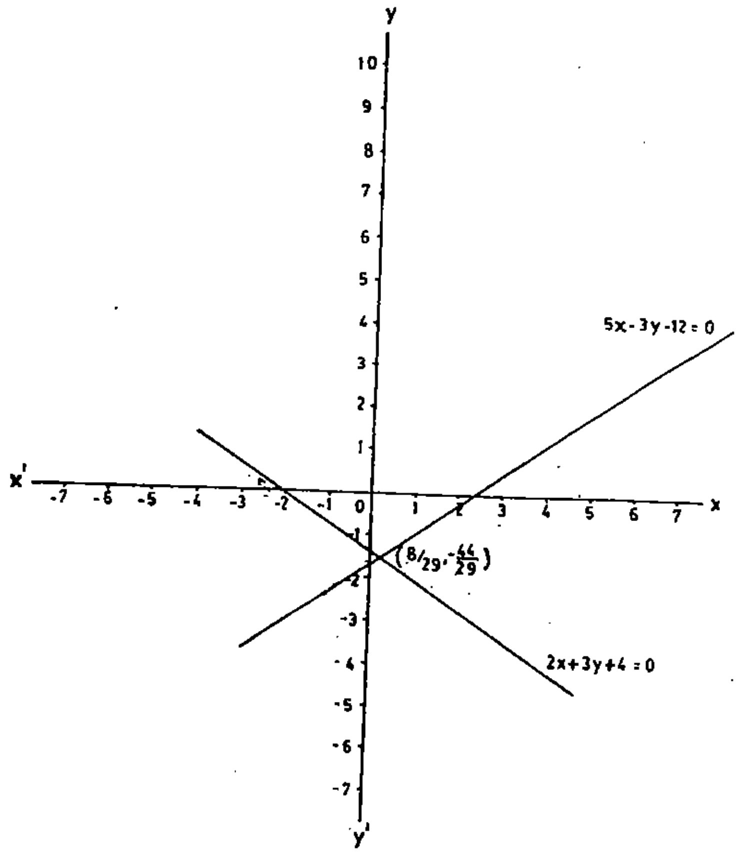
समीकरण (1) के लिए x तथा y के मानों की तालिका,

x	0	3	6
y	−1.33	−3.33	−5.33

तथा समीकरण (2) के लिए x तथा y के मानों की तालिका,

x	0	7
y	−1.71	3.3

यहाँ पर यह उल्लेखनीय है कि दोनों फलनों के आलेख सरल रेखाएँ हैं। ये एक दूसरे को बिन्दु $\left(\frac{8}{29}, -\frac{44}{29}\right)$ पर काटती हैं।

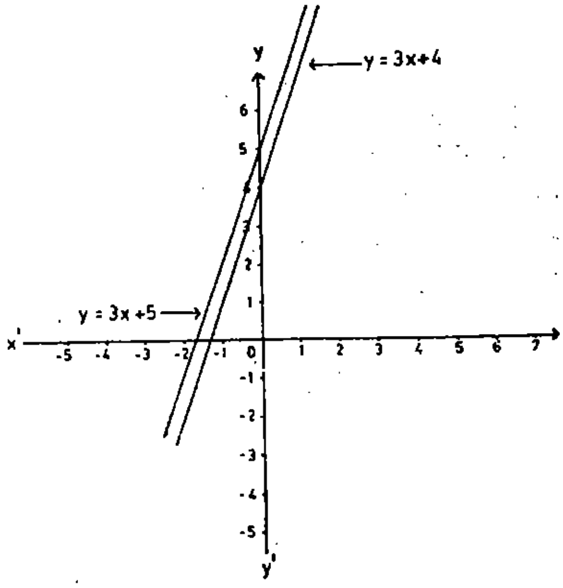


आकृति 4.2

कभी-कभी ये दोनों रेखाएँ एक दूसरे के समानान्तर भी हो सकती है। इस परिस्थिति में समीकरणों का कोई हल नहीं होता। इस प्रकार के समीकरण परस्पर विरोधी समीकरण होते हैं जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट है।

उदाहरण 2 : निम्नलिखित फलनों के आलेखों का आरेखण कीजिए। क्या वे एक दूसरे को काटते हैं ? जाँच कीजिए।

$y=3x+4$
$y=3x+5$



आकृति 4.3

इन फलनों के आरेखण के द्वारा हमें ज्ञात होता है कि इनके आलेख दो समानान्तर रेखाएँ हैं। इस प्रकार इनका कोई सर्वनिष्ठ बिन्दु नहीं है। अगर ऊपरोक्त समीकरणों पर ध्यान दें तो यह स्पष्ट हो जाता है कि ये परस्पर विरोधी समीकरण हैं अतः इनका कोई हल नहीं है।

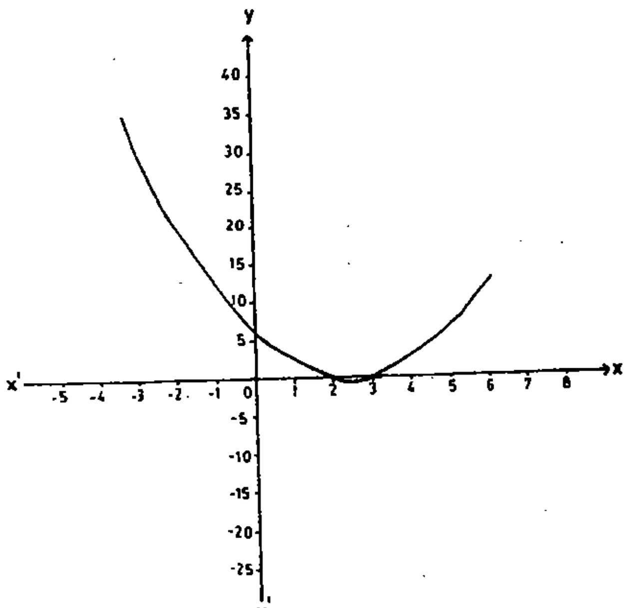
(2) आलेखी निरूपण के प्रयोग द्वारा द्विघात समीकरण के मूल भी ज्ञात किए जा सकते हैं :

उदाहरण 3 : समीकरण $x^2-5x+6=0$ पर विचार कीजिए। वाम पक्ष के गुणनखंड करके इसको इस प्रकार से लिखा जा सकता है :

$(x-2)(x-3)=0$, जिससे यह ज्ञात होता है कि $x=2$ तथा $x=3$ इस समीकरण के मूल हैं।

अब हम $y=x^2-5x+6$ के आलेख का आरेखण करते हैं।

x	−3	−2	−1	0	1.5	2	2.5	3	4	5
y	30	20	12	6	0.75	0	−0.25	0	2	6



आकृति 4.4

ऊपरोक्त पर ध्यान देने से हमें पता चलता है कि $x=2$ तथा $x=3$ के लिए y का मान शून्य है। अर्थात् फलन का आलेख X–अक्ष को दो बिन्दुओं, $x=2$ तथा $x=3$ पर काटता है। इस प्रकार द्विघात समीकरण को हल करने के लिए हमें यह ज्ञात करना होता है कि इसका आलेख X–अक्ष को किन-किन बिन्दुओं पर काटता है। ये बिन्दु इस समीकरण के मूल होते हैं।

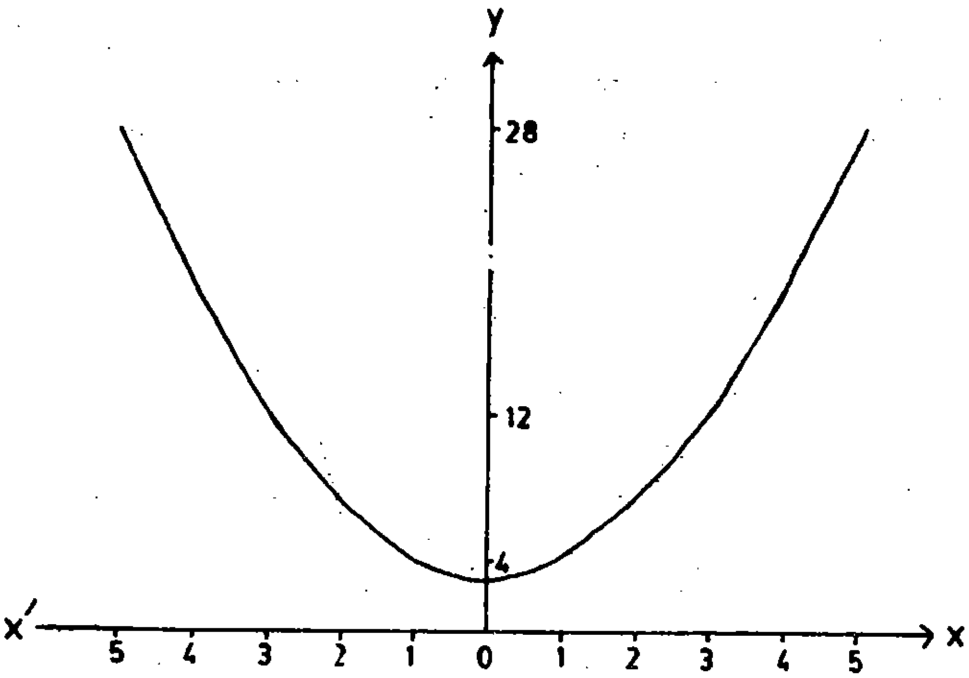
यहाँ यह जानना आवश्यक है कि अगर समीकरण का आलेख X–अक्ष को किसी बिन्दु पर नहीं काटता तो समीकरण का कोई मूल नहीं होता। इसके अतिरिक्त अगर आलेख X–अक्ष को केवल एक बिन्दु पर काटता है तो समीकरण का एक ही मूल (या दोनों मूल बराबर) है। और अगर यह X–अक्ष को दो बिन्दुओं पर काटता है इसके दो मूल होते हैं।

किसी भी परिस्थिति में द्विघात समीकरण आलेख, X–अक्ष को दो से अधिक बिन्दुओं पर नहीं काट सकता क्योंकि इसके अधिकतम दो मूल होते हैं। (क्या आप बता सकते है, क्यों ?)

उदाहरण 4 : $x^2+3=0$ को आलेखित करके ज्ञात कीजिए कि क्या इसका कोई मूल है ?

x	−5	−3	−2	−1	0	1	2	4	5
y	28	12	7	4	3	4	7	19	28

समीकरण $x^2+3=0$ का कोई मूल नहीं है।

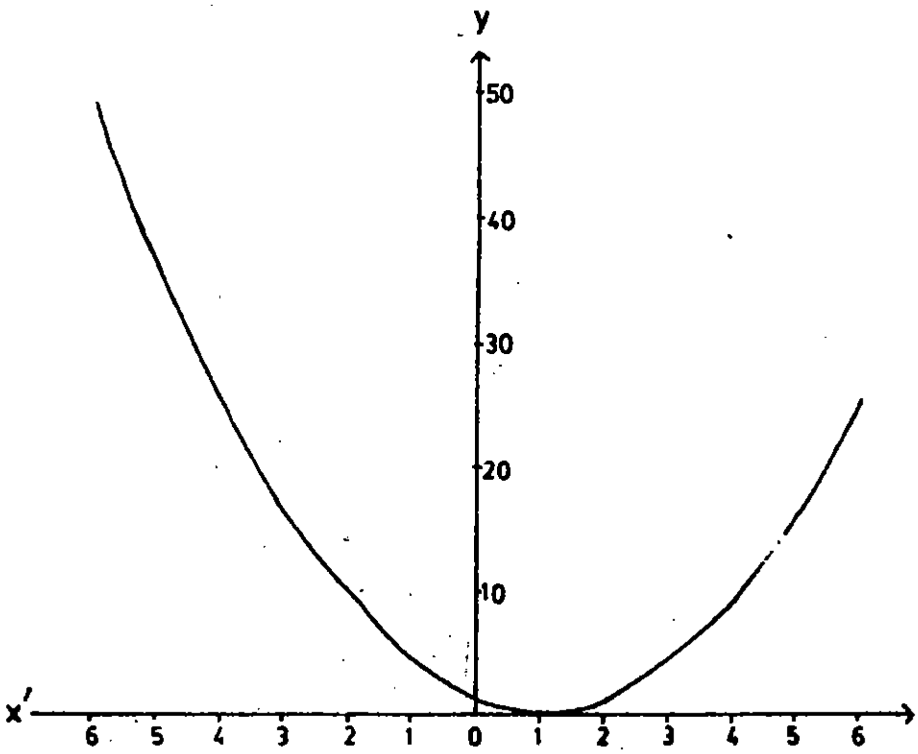


आकृति 4.5

उदाहरण 5 : $x^2-2x+1=0$ को आलेखित करके इसके मूल ज्ञात कीजिए।

x	−6	-5	−3	−1	0	1	2	4	5	5
y	49	36	16	4	1	0	1	9	16	25

यह आलेख, X–अक्ष को केवल एक बिन्दु $X=1$ पर काटता है। अतः इस द्विघात समीकरण का केवल एक मूल है।

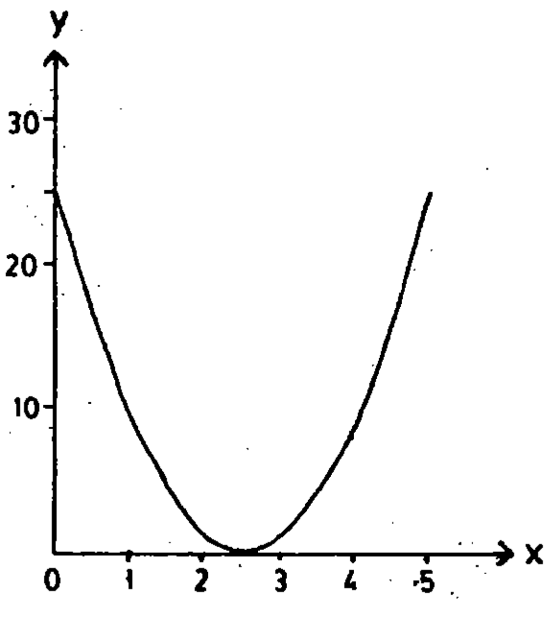


आकृति 4.6

उदाहरण 6 : निम्नलिखित समीकरण को हल कीजिए तथा आलेख द्वारा उत्तर की जाँच कीजिए।

$4x^2-20x+25=0$

इकाई 3 (उपभाग 3.2.1) में दी गई बीजीय प्रविधि के प्रयोग से हमें यह पता चलता है कि केवल $X=\frac{10}{4}$ ही समीकरण का एक मात्र मूल है। इसके आलेख द्वारा यह ज्ञात होता है कि यह X-अक्ष को केवल एक बिन्दु $x=\frac{10}{4}$ पर स्पर्श करता है जोकि इसका मूल है।



आकृति 4.7

समीकरण हल करने के अतिरिक्त आलेखों के अन्य अनुप्रयोग भी होते हैं, जो इस प्रकार हैं।

क) कभी-कभी फलन के स्थान पर सिर्फ इसका आलेख उपलब्ध होता है। इस परिस्थिति में हम x के किसी मान के लिए फलन का मान ज्ञात कर सकते हैं।

ख) एक और दिलचस्प अनुप्रयोग इस प्रकार है। मान लिया हमारे पास x के कुछ मानों (जोकि आपस में अधिक दूरी पर नहीं हैं।). के लिए फलन के कुछ मान दिए हुए हैं। उदाहरण के लिए हमारे पास निम्नलिखित तालिका है।

उदाहरण 7 :

x	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4
y	8.25	5	2.5	0	−1.75	−3	−3.75	−4

यहाँ हम फलन का रूप जाने बिना ही यह जानना चाहते हैं कि जब x का मान −4 तथा 3 के मध्य में हो, जैसे $x=2.25$ या $x=-1.75$ हो तो फलन का क्या मान होगा?

हम उपरोक्त बिन्दुओं को आलेखित करते हैं। जब x के मान बहुत दूरी पर न हों तो विभिन्न बिन्दुओं को रेखा-खंडों द्वारा जोड़ा जाता है। इस प्रकार बिन्दुओं को जोड़ना सर्वथा उपयुक्त होना आवश्यक नहीं है। लेकिन, जब फलन दिया हुआ न हो तथा x के विभिन्न मान अधिक दूरी पर स्थित न हों तो इस आलेख द्वारा हम वास्तविक आलेख का उत्तम सन्निकटन प्राप्त कर सकते हैं।

इस आलेख द्वारा हम −4 से 3 परिसर में x के किसी मान के लिए फलन का सन्निकट मान ज्ञात कर सकते है। उदाहरण के लिए जब $x=2.25$ तो $y=5.80$ है।

इसी मान को हम बीजीय विधि द्वारा इस प्रकार से प्राप्त कर सकते हैं।

जब x का मान $x_1=2$ है तो y का मान $y_1=5$ है,

जब x का मान $x_2=3$ है तो y का मान $y_2=8.25$ है।

इस प्रकार x में $x_2-x_1=3-2=1$ वृद्धि के लिए y में वृद्धि $y_2-y_1=8.25-5=3.25$ है।

हम $x=2.25$ के लिए फलन का मान ज्ञात करना चाहते हैं।

इस मान को हम इस प्रकार लिख सकते है:

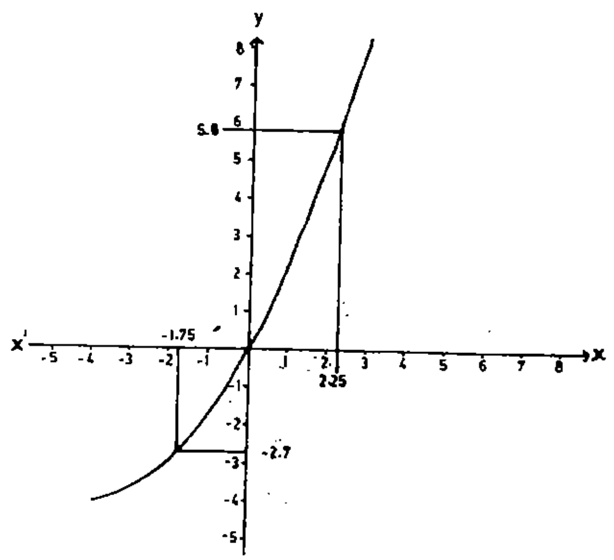
$x=2.25=x_1+0.25, \quad \therefore \quad x-x_1=0.25$

इस प्रकार हम प्रारंभिक अनुपात नियम द्वारा y का मान ज्ञात कर सकते हैं:

$$y = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_2}(x-x_1)+y_1$$

$$= \frac{3.25}{1}\times 0.25+5$$

$= 0.81+5=5.81$ जो कि आलेख द्वारा प्राप्त मान के सन्निकट है।



आकृति 4.8

अब हम निम्नलिखित नियम का सूत्रण कर सकते हैं :

मान लिया स्वतंत्र चर x के दो मानों x_1 तथा x_2 के लिए (जहाँ $x_2>x_1$ तथा यह x_1 से अधिक दूर नहीं है।) फलन के दो मान क्रमशः y_1 तथा y_2 दिए हुए हैं। हम x के किसी मान x^* (जोकि x_1 तथा x_2 के बीच है) के लिए फलन का मान y^* निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात कर सकते है।

$$y^* = y_1 + \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x^*-x_1)$$

y^* का मान y के वास्तविक मान का उत्तम सन्निकटन है। फलन का मान ज्ञात करने की इस बहुप्रचलित विधि को रैखिक अंतर्वेशन विधि कहते हैं। इस विधि की यह श्रेष्ठता है कि फलन के किसी विशेष मान को ज्ञात करने के लिए फलन का दिया होना आवश्यक नहीं है।

बोध प्रश्न 2

प्रत्येक अभ्यास में x के विभिन्न माना के लिए फलन के मान दिए हुए हैं। x के दिए हुए मानों के लिए फलन के मान ज्ञात कीजिए।

(1)

x	−5	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	
y	56	34	18	8	4	6	14	28	48	74	1(

$x=-3.5$, $x=2.75$ तथा $x=4.25$ के लिए फलन का मान ज्ञात कीजिए।

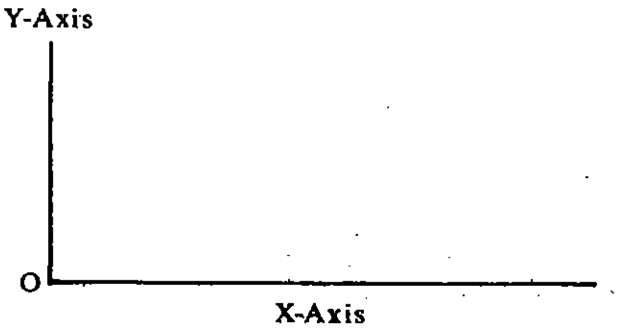
(2)

x	10	11	12	13	14	15
y	7.2	9.5	9.6	9.8	10	10.4

$x=12.5$, $x=10.25$ तथा $x=13.75$ के लिए फलन का मान ज्ञात कीजिए।

4.3 निर्देशांक अक्ष तथा बिन्दु

यह याद कीजिए कि जब हम किसी रेखा या वक्र का समतल पर निरूपण करना चाहते हैं तो इस पर किसी बिन्दु के स्थान का निर्धारण संदर्भ अक्षों के चयन द्वारा किया जाता है जोकि एक दूसरे पर लम्ब होते हैं। इन अक्षों को क्रमशः भुज तथा कोटि या X–अक्ष तथा Y–अक्ष कहा जाता है। इन दोनों के प्रतिच्छेद बिन्दु को मूल बिन्दु कहते है। इस मूल बिन्दु पर दोनों अक्षों का शून्य सम्पाती होता है, जैसा आकृति में दिखाया गया है।



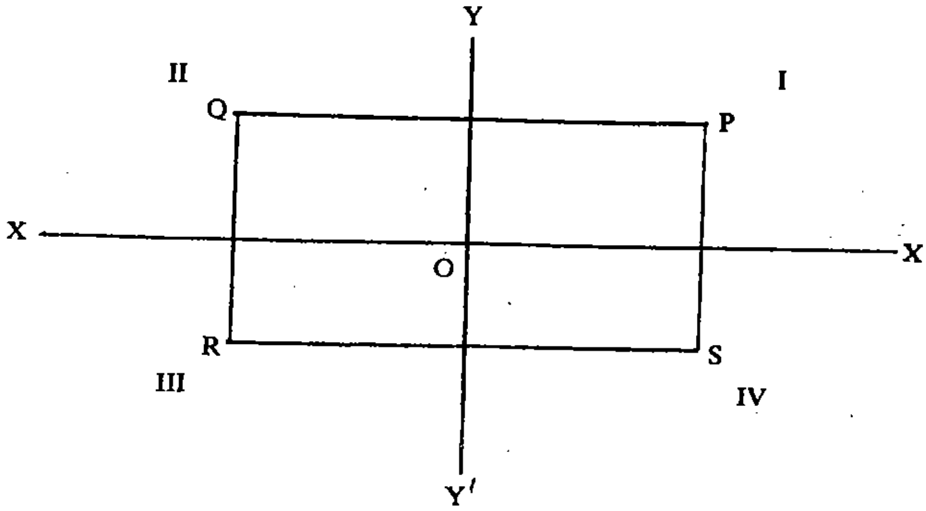
आकृति 4.9

ये दोनों अक्ष एकत्र रूप में समकोणिक अक्ष कहलाते हैं क्योंकि ये एक दूसरे पर समकोण बनाते है। किसी बिन्दु P के स्थान का निर्धारण इन अक्षों के संदर्भ द्वारा संख्याओं के युग्म से किया जाता है। संख्याओं के इस युग्म को निर्देशांक कहते है। ये संख्याएँ अक्षों से बिन्दु की दूरी को व्यक्त करती हैं। बिन्दु P के स्थान का संकेतन P(x,y) से किया जाता है। संख्या x को X–निर्देशांक कहते हैं जोकि X–अक्ष पर मापी जाती है तथा संख्या y को Y–निर्देशांक कहते हैं जोकि Y–अक्ष पर मापी जाती है।

स्पष्टतः मूल बिन्दु के निर्देशांक (0,0) होते हैं X-अक्ष पर किसी बिन्दु का Y-निर्देशांक शून्य होता है जोकि (x,0) लिखा जाता है। इसी प्रकार Y-अक्ष पर किसी बिन्दु का X-निर्देशांक शून्य होता है और यह (0,y) लिखा जाता है।

4.3.1 चतुर्थांश

निर्देशांक अक्ष समतल को चार भागों में विभाजित करते हैं जिनमें प्रत्येक को चतुर्थांश कहते हैं। इन चतुर्थांशो का संकेतन I, II, III तथा IV संख्याओं से किया जाता है, जैसा कि निम्नलिखित आकृति में दिखाया गया है।



आकृति 4.10

4.3.2 चिह्न की परम्परा

जैसा हम जानते है कि बिन्दु P किसी चतुर्थांश में स्थित हो सकता है। इसके निर्देशांको के लिए निम्नलिखित परम्परा का पालन किया जाता है।

(1) X-अक्ष के साथ दूरियों का माप अगर मूल बिन्दु के दाईं ओर है तो उसे धनात्मक चिह्न द्वारा तथा मूल बिन्दु के बाईं ओर है तो ऋणात्मक चिह्न द्वारा व्यक्त किया जाता है।

(2) Y-अक्ष के साथ दूरियाँ, जोकि मूल बिन्दु के ऊपर है, उनको धनात्मक चिह्न द्वारा तथा जो मूल बिन्दु के नीचे हैं उनको ऋणात्मक चिह्न द्वारा व्यक्त किया जाता है।

इन परम्पराओं को निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा समझा जा सकता है। अगर एक बिन्दु P पहले चतुर्थांश में है तो इसका X-निर्देशांक X-अक्ष पर मूल बिन्दु के दाहिनी ओर मापा जाता है तथा Y-निर्देशांक Y-अक्ष पर मूल बिन्दु से ऊपर मापा जाता है। इस प्रकार P के दोनों निर्देशांक धनात्मक होंगे। अतः हमारा यह निष्कर्ष निकला कि पहले चतुर्थांश में किसी बिन्दु के दोनों निर्देशांक धनात्मक होते हैं।

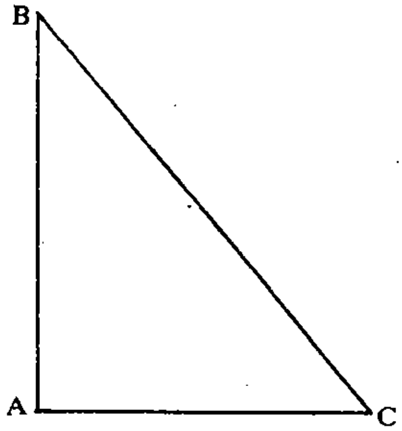
इसी प्रकार अगर बिन्दु Q दूसरे चतुर्थांश में है तो X-निर्देशांक मूल बिन्दु के दाहिनी ओर X-अक्ष पर मापा जाता है, इस लिए इसका चिह्न ऋणात्मक होगा। Y-निर्देशांक Y-अक्ष पर मूल बिन्दु के ऊपर मापा जाता है जिसका चिह्न धनात्मक होगा। अतः दूसरे चतुर्थांश में किसी बिन्दु का X-निर्देशांक ऋणात्मक तथा Y-निर्देशांक धनात्मक होता है।

इसी प्रकार के तर्क द्वारा तीसरे चतुर्थांश में किसी बिन्दु के दोनों निर्देशांक ऋणात्मक होंगे तथा चौथे चतुर्थांश में किसी बिन्दु का X-निर्देशांक धनात्मक व Y-निर्देशांक ऋणात्मक होगा।

एक सेन्टीमीटर पृष्ठ पर X-अक्ष तथा Y-अक्ष लेकर निम्नलिखित बिन्दुओं को आलेखित कीजिए।

(1) (3.5, 0)	(2) (−2.8, 0)	(3) (0.1, 7)	(4) (0, −2.3)
(5) (3.4, 3.5)	(6) (−4.5, 3.8)	(7) (−5.0, −3.0)	(8) (6.2, −7.5

बिन्दु को निर्देशांक से निरूपित करने के ज्ञान के प्रयोग से पहले हम गणित में महत्त्वपूर्ण एक प्रमेय की व्याख्या करेंगे। इसको पाइथागोरस प्रमेय कहते हैं। मान लिया ABC एक समकोण त्रिभुज है जो बिन्दु A पर समकोण है (अर्थात् $\angle BAC = 90°$)।



आकृति 4.11

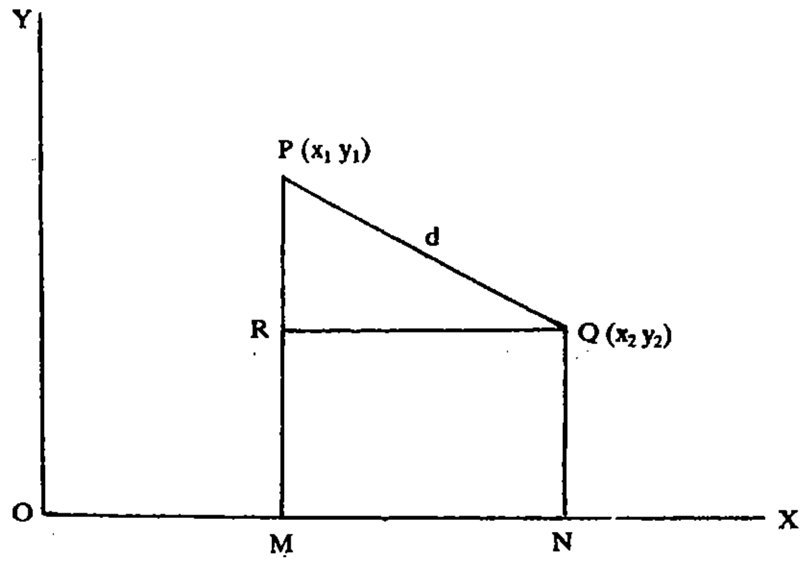
इसकी भुजाओं की लम्बाई को AB, BC तथा AC द्वारा सूचित करने पर हमें यह सम्बन्ध प्राप्त होता है :

$BC^2 = AB^2 + AC^2$

अर्थात् (कर्ण)^2=बाकी दोनों भुजाओं के वर्ग का योग।

4.3.3 दो बिन्दुओं के मध्य दूरी

पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग समतल में (जहाँ निर्देशांक निकाय का प्रयोग होता है।) दो बिन्दुओं के मध्य दूरी ज्ञात करने के लिए अब किया जाएगा।



आकृति 4.12

मान लिया बिन्दु P के निर्देशांक (x_1, y_1) हैं तथा बिन्दु Q के निर्देशांक (x_2, y_2) हैं। हमें दूरी $d = PQ$ ज्ञात करनी है। जैसा कि आकृति में दिखाया गया है, P तथा Q से क्रमशः PM तथा PN लम्ब X–अक्ष पर डालिए। Q से PM पर लम्ब QR डालिए।

आकृति के अनुसार $QR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$ है, जोकि दोनों बिन्दुओं के X–निर्देशांको का अन्तर है।

इसके अतिरिक्त $PR = PM - RM = PM - QN$ (क्योंकि $RM = QN$)

$= y_1 - y_2$ जोकि दोनों बिन्दुओं के Y–निर्देशांको का अन्तर है।

त्रिभुज PRQ एक समकोण त्रिभुज है जोकि बिन्दु R पर समकोण है। अतः पाइथागोरस प्रमेय द्वारा

$$PQ^2 = PR^2+RQ^2$$
$$= (y_1-y_2)^2+(x_2-x_1)^2$$
$$= (y_2-y_1)^2+(x_2-x_1)^2 \quad [\because \; (y_1-y_2)^2=(y_2-y_1)^2]$$

या $d = PQ = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

$= \sqrt{(\text{दोनों बिन्दुओं के भुजों का अन्तर})^2 + (\text{दोनों बिन्दुओं की कोटि का अन्तर})^2}$

संकेत : केवल आरेखण सुविधा के लिए हमने दोनों बिन्दुओं को पहले चतुर्थांश में लिया है। लेकिन इस सूत्र द्वारा दो बिन्दुओं के किसी भी चतुर्थांश में होने पर दूरी ज्ञात की जा सकती है।

उदाहरण : निम्नलिखित बिन्दुओं के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए :

(1) P(2, 5) तथा Q(5, 9)

$$d^2 = (5-2)^2+(9-5)^2=3^2+4^2$$
$$= 25$$
$$d = 5$$

(2) P(3, −4) तथा Q(8, 5)

$$d^2 = (8-3)^2+[5-(-4)]^2=5^2+9^2$$
$$= 106$$
$$d = \sqrt{106} = 10.2956$$

(3) P(−3.5, 7.3) तथा Q(−4.7, −6.3)

$$d^2 = [-4.7-(-3.5)]^2 + [-6.3-7.3]^2$$
$$= (-4.7+3.5)^2+(-13.6)^2$$
$$= (-1.2)^2 + (-13.6)^2 = 1.44+184.96$$
$$d = \sqrt{186.4} = 13.6528$$

(4) P(−4.3, −5.8) तथा Q(−6.3, 2.5)

$$d^2 = [-6.3-(-4.3)]^2 + [2.5-(-5.8)]^2$$
$$= (-2)^2+(8.3)^2=4+68.89$$
$$d = \sqrt{72.89} = 8.5376$$

संकेत 1 : चाहे हम (x_1-x_2) या (x_2-x_1) लें तथा (y_1-y_2) ले या (y_2-y_1), हमारा उत्तर वही आएगा क्योंकि सूत्र में इनके वर्ग का प्रयोग होता है।

संकेत 2 : इस सूत्र के प्रयोग से किसी बिन्दु P(x,y) की मूल बिन्दु से दूरी ज्ञात की जा सकती है। जैसा कि हम जानते है, मूल बिन्दु के निर्देशांक (0,0) होते हैं। अतः

$$OP^2 = (x-0)^2 + (y-0)^2 = x^2+y^2$$
$$OP = \sqrt{(x^2+y^2)}$$

(5) एक बिन्दु P की मूल बिन्दु से दूरी 10 इकाई है तथा P बिन्दु का X–निर्देशांक 6 है। अगर बिन्दु चौथे चतुर्थांश में है तो इसका Y–निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : संकेत 2 द्वारा :

$$OP^2 = 6^2+y^2$$
$$10^2 = 6^2+y^2$$

या $y^2 = 100-36 = 64$

$$y = \pm 8$$

क्योंकि बिन्दु चौथे चतुर्थांश में है इसलिए इसका Y–निर्देशांक ऋणात्मक होगा। अतः $y = -8$ है।

(6) एक वृत का केन्द्र मूल बिन्दु पर स्थित है तथा यह वृत्त बिन्दु $(-9, 12)$ से गुजरता है। वृत की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि वृत पर किसी बिन्दु की केन्द्र से दूरी को त्रिज्या कहते हैं। इस प्रकार इस प्रश्न में हमें मूल बिन्दु $(0,0)$ से बिन्दु $(-9, 12)$ की दूरी ज्ञात करनी है जोकि इस प्रकार है :

$d^2 = q^2+12^2 = 81+144$

या $d = \sqrt{225} = 15$

बोध प्रश्न 3

(1) निम्नलिखित बिन्दुओं के प्रत्येक युग्मों के मध्य दूरी ज्ञात कीजिए।

क) $(4, 5), (3, 8)$ ख) $(-5, 0), (0, 7)$ ग) $(3, -5), (-4, -6)$

घ) $(0, 8), (4, 6)$ ङ) $(-2.5, -3.5), (-1.4, -2.3)$ च) $(a, 2a), (2a, a)$

(2) एक बिन्दु P की मूल बिन्दु से दूरी 15 इकाई है तथा इसका Y–निर्देशांक 9 है। अगर बिन्दु दूसरे चतुर्थांश में हो तो इसका X–निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

(3) एक बिन्दु P तीसरे चतुर्थांश में है तथा मूल बिन्दु से इसकी दूरी $8.48 = \sqrt{72}$ इकाई है। अगर इसके x तथा y निर्देशांक समान हों तो इनको ज्ञात कीजिए।

(4) एक त्रिभुज के शीर्ष बिन्दु $A(4, 5)$, $B(-3, 4)$ तथा $C(4, -6)$ हैं। त्रिभुज की भुजाओं की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

(5) एक वृत्त का केन्द्र $(-3, -5)$ पर है तथा यह वृत्त बिन्दु $(1, -2)$ से गुजरता है। इसकी त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(6) एक वृत्त का केन्द्र मूल बिन्दु पर स्थित है तथा इसकी त्रिज्या 12 इकाई है। क्या निम्नलिखित बिन्दु (i) वृत्त पर या (ii) इसके अन्दर या (iii) इसके बाहर विद्यमान है ? जाँच कीजिए।

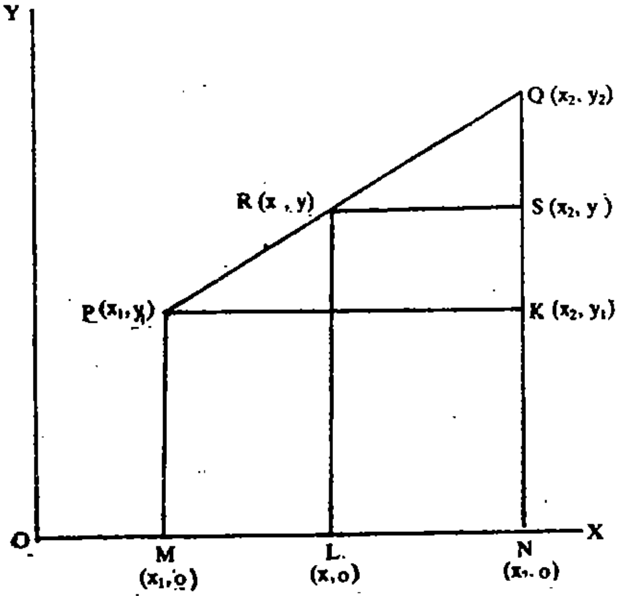
क) $(5, 7)$ ख) $(3, -5)$ ग) $(0, 12)$ घ) $(-12, 0)$ ङ) $(-12, -12)$

अपने उत्तर की जाँच के लिए वृत्त एवं बिन्दुओं को आलेखित कीजिए।

4.3.4 रेखाखंड का विभाजन

दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्यबिन्दु के निर्देशांक ज्ञात करना :

दोनों बिन्दुओं P तथा Q को निरूपित कीजिए तथा मिलाइए। मान लिया बिन्दु R रेखाखंड PQ का मध्य बिन्दु है। OX पर PM, QN तथा RL लम्ब डालिए जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। मान लिया बिन्दु R के निर्देशांक (x, y) है। क्योंकि R रेखाखंड PQ का मध्यबिन्दु है इसलिए L रेखाखंड MN का मध्य बिन्दु होगा। इसलिए ML = LN



आकृति 4.13

लेकिन $ML = x - x_1$ तथा $LN = x_2 - x$

$x - x_1 = x_2 - x$

या $2x = x_1 + x_2$

या $x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$

इसी प्रकार बिन्दु S रेखाखंड QK का मध्य बिन्द है, अर्थात् $QS=SK$। लेकिन $QS=y_2-y$ तथा $SK=y-y_1$
इसलिए $y-y_1 = y_2-y$

या $2y = y_1+y_2$

या $y = \frac{y_1+y_2}{2}$

अतः बिन्दु R के निर्देशांक $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$ हैं।

टिप्पणी : त्रिभुज की कुछ और ज्यामितीय विशेषताओं के प्रयोग द्वारा हम किसी बिन्दु के (जो कि रेखाखंड PQ को किसी दिए हुए अनुपात $\frac{m}{n}$ में विभाजित करता है) निर्देशांक ज्ञात कर सकते हैं। अतः रेखाखंड PQ पर बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात किए जा सकते है जो इसको इस प्रकार विभाजित करता है कि $PR:RQ=m:n$ । हम बिना प्रमाण इस परिभाषा की व्याख्या करेंगे।

बिन्दु R के निर्देशांक इस प्रकार है :

$$x = \frac{mx_2+nx_1}{m+n}$$

तथा $y = \frac{my_2+ny_1}{m+n}$

इस परिणाम को निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया जाएगा।

उदाहरण : बिन्दु $P(7, 8)$ तथा $Q(-3, -4)$ को मिलाने वाले रेखाखंड पर बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जोकि इसको 3:2 के अनुपात (अर्थात् $RR:RQ=3.2$ या $\frac{PR}{RQ} = \frac{3}{2}$) में विभाजित करता है।

हल : इस प्रश्न में $x_1=7, x_2=-3$

$y_1=8, y_2=-4$

$m=3, n=2$ हैं,

$$\therefore x = \frac{3\times(-3)+2\times7}{3+2} = \frac{-9+14}{5} = 1$$

तथा $y = \frac{3\times(-4)+2\times8}{3+2} = \frac{-12+16}{5} = \frac{4}{5}$

यहाँ पर गुणा करने में पदों का क्रम महत्वपूर्ण होता है। इसमें किसी भी परिवर्तन से गलत उत्तर प्राप्त होगा। उदाहरण के लिए अगर हम

$$x' = \frac{2\times(-3)+3\times7}{2+3} = \frac{-6+21}{5} = 3$$

तथा $y' = \frac{2\times(-4)+3\times8}{2+3} = \frac{-8+24}{5} = \frac{16}{5}$ परिकलन करें तो यह बिन्दु रेखाखंड को 2:3 के अनुपात में (3:2 के अनुपात में नहीं) विभाजित करेगा।

बोध प्रश्न 4

(1) निम्नलिखित बिन्दुओं के युग्मों को जोड़ने वाले रेखाखंड के मध्यबिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

क) (5, 8), (3, 4) ख) (−3, 5), (4, −6)

ग) (3, −7), (−5, −3) ङ) (0, 0), (8, 8)

घ) (0, −5), (5, 0) च) (6, 0), (−6, 0)

(2) उस वृत्त का केन्द्र बिन्दु ज्ञात कीजिए जिसके व्यास के छोर (3, 8) तथा (−5, −2) पर स्थित हैं।

(3) उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जो निम्न बिन्दुओं जोड़ने वाले रेखाखंडों को एक दिए हुए अनुपात में विभाजित करता है।

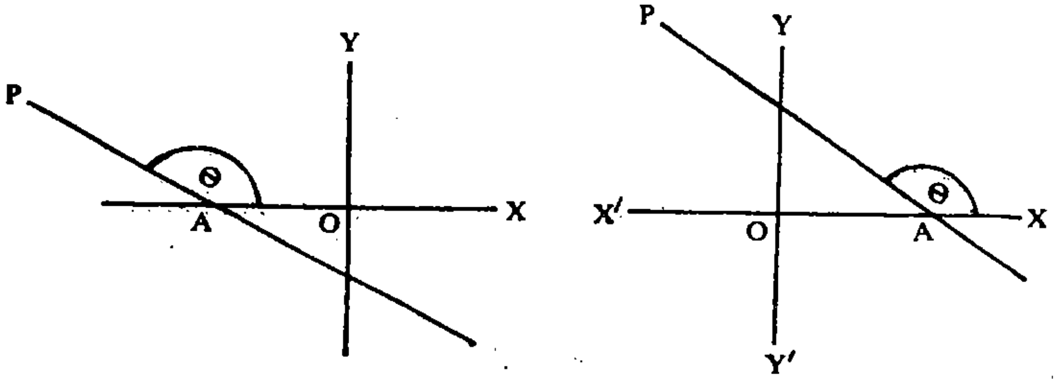
क) (12, 14) तथा (5, 7) को 3:4 के अनुपात में।

ख) (2, 3) तथा (12, 10) को 1:2 के अनुपात में।

4.4 त्रिकोणमिति तथा सरल रेखा का ढाल

सरल रेखा के ढाल के संख्यात्मक अनुमान में त्रिकोणमिति की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। अब हम कुछ त्रिकोणमितीय सम्बन्धों का अध्ययन करेंगे।

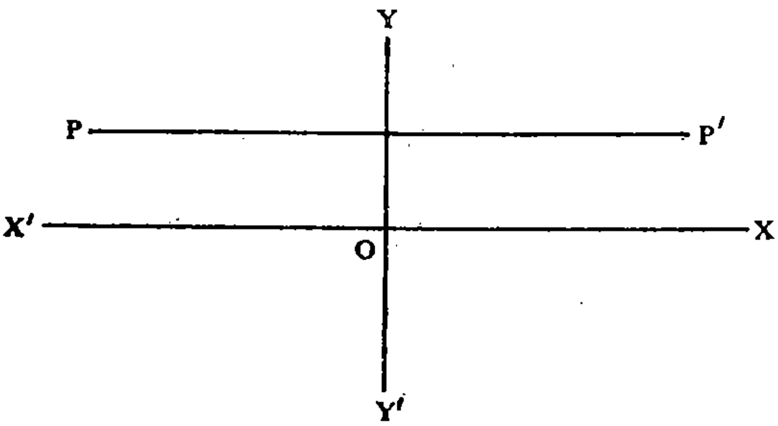
अतः अगर रेखा का X–अक्ष के ऊपर का अंश AP, X–अक्ष पर θ कोण बनाता है, अर्थात् $\angle XAP = \theta$, तब इस कोण का टैन्जैंट रेखा का ढाल कहलाता है। यहाँ यह ध्यान रहे कि θ का माप हमेशा वामावर्त दिशा में 0° से 180° तक किया जाता है। इस प्रकार उपरोक्त आकृति में रेखा का ढाल धनात्मक है।



आकृति 4.17

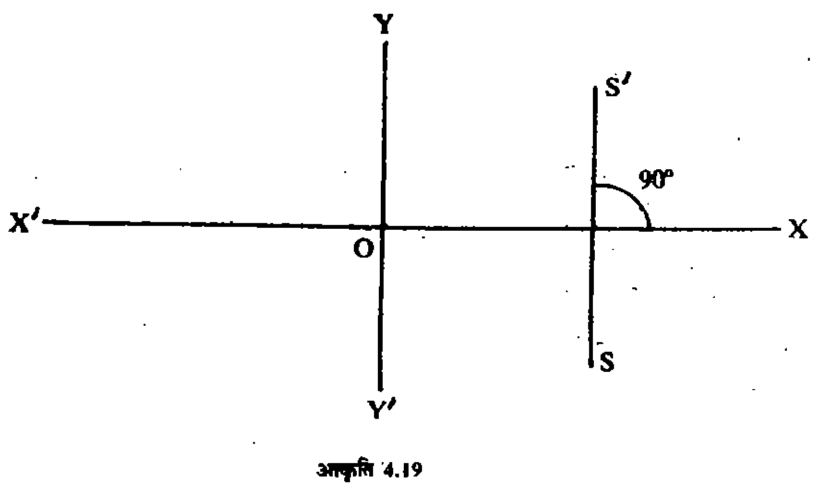
इन दोनों आकृतियों में रेखाएँ X–अक्ष के साथ अधिक कोण बनाती हैं इसलिए इनके ढाल ऋणात्मक होंगे।

निम्न आकृति में दी हुई रेखा X–अक्ष के समानान्तर है अतः इसका ढाल शून्य है। (यहाँ यह ध्यान दें कि यह रेखा y– अक्ष पर लम्ब है।)



आकृति 4.18

निम्न आकृति में रेखा SS′ जोकि X–अक्ष पर लम्ब है इसका ढाल अपरिभाषित होता है। (यहाँ यह ध्यान दें कि यह रेखा y–अक्ष के समानान्तर है।)



आकृति 4.19

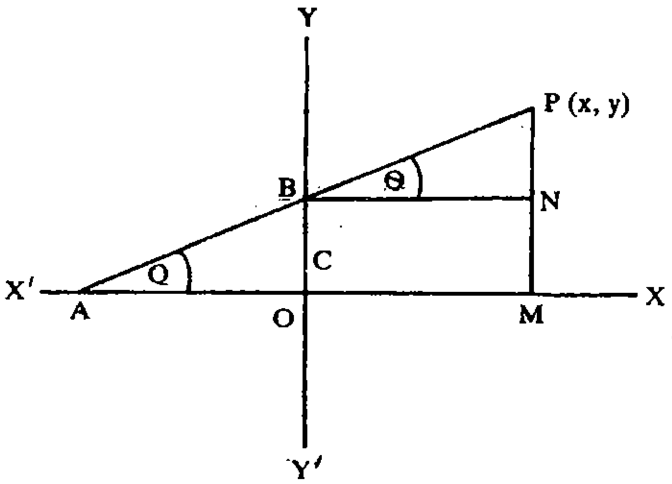
4.5 सरल रेखा

सभी वक्रों में सरलतम वक्र को सरल रेखा कहते हैं। यह दो निश्चित बिन्दुओं को जोड़ने पर प्राप्त होती है। इसका दोनों दिशाओं में अनन्त विस्तार किया जा सकता है।

4.5.1 सरल रेखा का समीकरण

दी हुई सरल रेखा पर किसी बिन्दु के x तथा y निर्देशांक किसी फलन (या समीकरण) द्वारा सम्बन्धित होते हैं। हमें इस सम्बन्ध को ज्ञात करना है। अगर रेखा का ढाल अर्थात $\tan\theta$ का मान ज्ञात हो, मान लिया $\tan\theta = m$, तथा दूरी OB ज्ञात हो, (OB को रेखा का Y–अक्ष पर अन्तःखंड कहते है), मान लिया $OB = C$, तो हम इसका समीकरण निम्न प्रकार ज्ञात कर सकतेहैं।

क्योंकि बिन्दु B, Y–अक्ष पर स्थित है इसलिए इसके निर्देशांक (O, C) होंगे। हम सरल रेखा पर कोई बिन्दु P(x, y) लेते हैं।



आकृति 4.20

बिन्दु P से X–अक्ष पर PM लम्ब डालते हैं तथा बिन्दु B से PM पर BN लम्ब डालते हैं।

इस प्रकार $OM = BN = x$, $PM = y$ तथा $NM = c$
$\angle NBP = Q$ (क्योंकि BN तथा OX समानान्तर रेखाएँ हैं।)
अतः समकोण त्रिभुज PBN द्वारा

$$\tan\theta = \frac{PN}{BN} = \frac{y-c}{x}$$

या $\frac{y-c}{x} = \tan\theta = m$

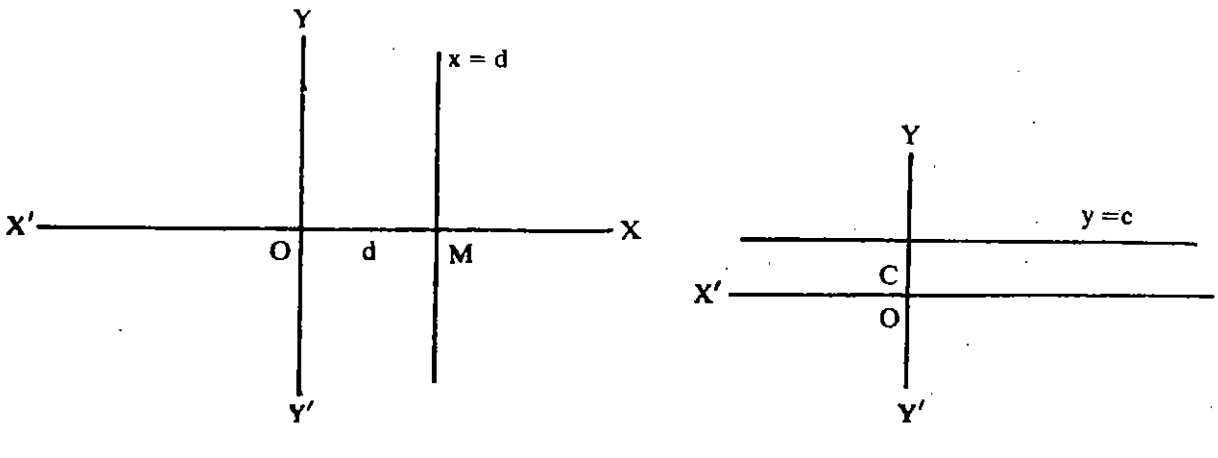
या $y - c = mx$

या $y = mx + c$ (1)

इस प्रकार रेखा पर स्थित किसी भी बिन्दु P के निर्देशांक (x, y) इस समीकरण को सन्तुष्ट करेंगे। इस समीकरण को, **ढाल-अन्तःखंड रूप** समीकरण कहते हैं।

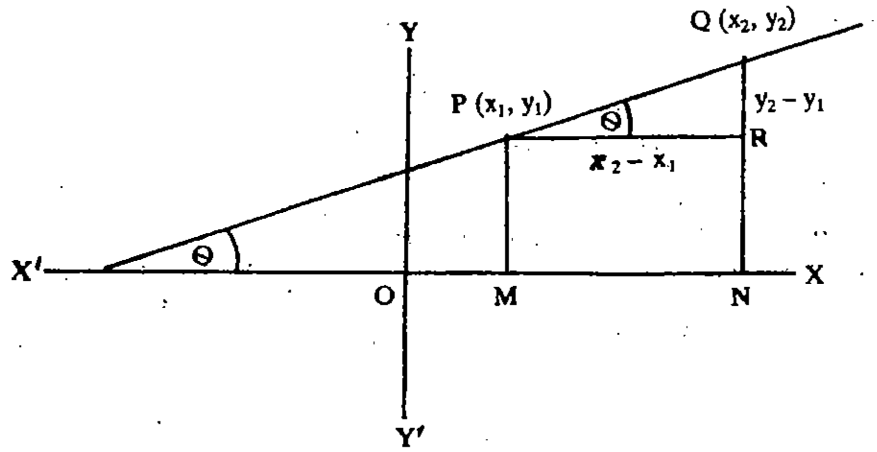
एक सरल रेखा का समीकरण लिखने के लिए हमें उसका ढाल अर्थात् उस कोण का टैन्जैंट (जोकि रेखा X–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाती है तथा जिसको वामावर्त दिशा में नापा जाता है) और रेखा का Y–अक्ष पर अन्तःखंड, अर्थात Y–अक्ष पर रेखा द्वारा प्रतिच्छेदित बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात होने चाहिए।

अगर रेखा Y–अक्ष को नहीं काटती है तो वह इसके समानान्तर होगी, जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। इस परिस्थिति में रेखा पर प्रत्येक बिन्दु का X–निर्देशांक समान रहता है जो कि OM के बराबर है। मान लिया $OM = d$ तो इस रेखा का समीकरण $x = d$ होगा।



आकृति 4.21

इसी प्रकार अगर रेखा X–अक्ष के समानान्तर है जैसा आकृति में दिखाया गया है तो रेखा पर प्रत्येक बिन्दु का Y–निर्देशांक समान रहेगा। अतः इस रेखा का समीकरण $y = c$ होगा।



आकृति 4.22

दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ से गुजरने वाली सरल रेखा का समीकरण :

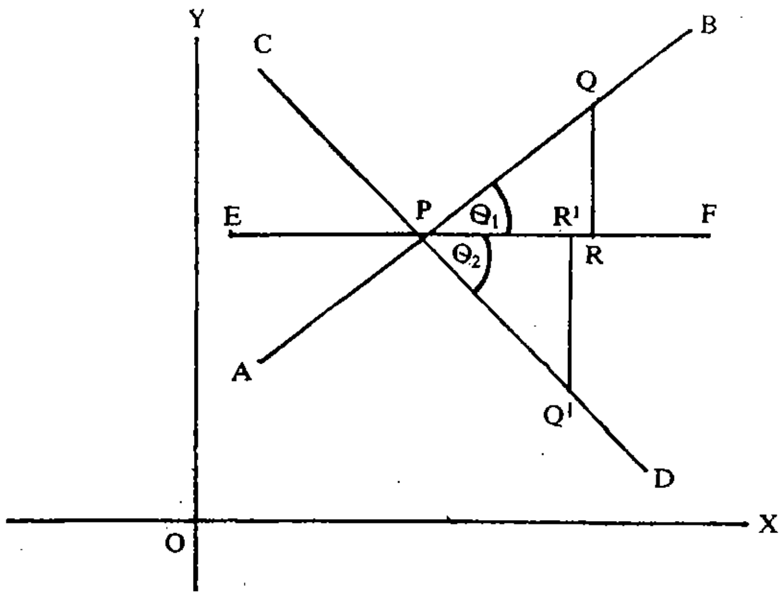
मान लिया दो बिन्दुओं P तथा Q से गुजरने वाली रेखा X अक्ष के साथ Q कोण बनाती है। P तथा Q से X–अक्ष पर क्रमशः PM तथा QN लम्ब डालिए और QN पर PR लम्ब डालिए जोकि QN को बिन्दु R पर मिलता है। जैसा हमने पहले देखा $\angle OPR = \theta$,

तथा $PR = MN = ON - OM = x_2 - x_1$

$QR = QN - RN = QN - PM = y_2 - y_1$

PQR एक समकोण त्रिभुज है जोकि बिन्दु R पर समकोण है।

$$\therefore \quad \tan\theta = \frac{QR}{PR} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_2} \qquad (1)$$



आकृति 4.23

इस प्रकार हमें दो बिन्दुओं से गुजरने वाली सरल रेखा का ढाल ज्ञात होता है। (यहाँ पर यह ध्यान देना महत्त्वपूर्ण है कि दो बिन्दुओं से एक साथ गुजरने वाली केवल एक ही सरल रेखा होती है)।

संकेत : अगर $x_1 = x_2$ तो रेखा पर प्रत्येक बिन्दु का X–निर्देशांक समान रहेगा अतः यह रेखा Y–अक्ष के समानान्तर होगी। इसी प्रकार अगर $y_1 = y_2$ तो रेखा X–अक्ष के समानान्तर होगी।

मान लिया सरल रेखा $y=mx+c$ दो बिन्दुओं $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ से गुजरती है। m का मान हमने उपरोक्त समीकरण (1) में ज्ञात किया है तथा C का मान अब हम ज्ञात करेंगे।

क्योंकि $P(x_1, y_1)$ रेखा $y=mx+c$ पर है तो यह बिन्दु इस समीकरण को सन्तुष्ट करेगा, अर्थात्

$$y_1 = mx_1+c$$

या $c = y_1-mx_1$

c का यह मान समीकरण $y = mx+c$ में रखने पर

$$y = mx+y_1-mx_1$$

या $y-y_1 = m(x-x_1) \qquad (2)$

इसमें m का मान रखने पर

$$y-y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1) \qquad (3)$$

यहाँ पर यह ध्यान रहे कि हम बिन्दु $Q(x_2, y_2)$ के निर्देशांको के प्रयोग से भी c का मान ज्ञात कर सकते हैं, इस प्रकार

$c = y_2-mx_2;$

या $y-y_2 = m(x-x_2)$

या $y-y_2 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_2) \qquad (3')$

यहाँ हम यह जाँच कर सकते है कि दोनों विधियों से प्राप्त c का मान बराबर है

जैसे $c = y_1-mx_1 = y_1 - \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)} \cdot x_1$

$$= \frac{y_1x_2-y_1x_1-y_2x_1+y_1x_1}{(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1} \qquad (4)$$

तथा $c = y_2 - mx_2 = y_2 - \frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)} \times x_2$

$$= \frac{y_2x_2 - y_2x_1 - y_2x_2 + y_1x_2}{(x_2-x_1)}$$

$$= \frac{y_1x_2 - y_2x_1}{x_2-x_1} \qquad (4')$$

अतः (3) तथा (3') एक ही रेखा के दो प्रकार से लिखे जाने वाले समान समीकरण हैं।

संक्षेप में : दो बिन्दु $P(x_1, y_1)$ तथा $Q(x_2, y_2)$ दिए होने पर हम (1) द्वारा रेखा का ढाल ज्ञात कर सकते हैं तथा (4) या (4') के प्रयोग से रेखा का Y–अक्ष पर अन्तःखंड ज्ञात कर सकते हैं। इसके अतिरिक्त (3) या (3') के प्रयोग से हम रेखा का समीकरण ज्ञात कर सकते है।

उदाहरण : बिन्दुओं (3, 4) तथा (7, 12) से गुजरने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : ऊपरोक्त सूत्रों के प्रत्यक्ष प्रयोग द्वारा तथा $(x_1, y_1) = (3, 4)$ एवं $(x_2, y_2) = (7, 12)$ लेने पर

रेखा का ढाल $m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{12-4}{7-3} = \frac{8}{4} = 2$

अन्तःखंड $c = y_1 - mx_1 = 4-2\times3 = -2$

या $c = y_2 - mx_2 = 12-2\times7 = -2$

ये मान $y = mx+c$ में रखने पर

रेखा का समीकरण $y = 2x-2$ होगा।

सूत्र (3) या (3') के प्रयोग से भी यही समीकरण प्राप्त होगा। जैसे सूत्र (3) में (x_1, y_1) तथा (x_2, y_2) का मान रखने पर

$$y-4 = \frac{12-4}{7-3}(x-3)$$

या $y-4 = 2(x-3)$

$y = 2x-6+4$

$= 2x-2$

इसी प्रकार (3') के प्रयोग द्वारा

$y-12 = 2(x-7)$

$y = 2x-14+12$

$= 2x-2$

इस प्रकार हम देखते है कि हम किसी भी सूत्र का प्रयोग करें, रेखा का समीकरण वही रहता है।

लम्ब रेखाएँ : मान लिया दो रेखाएँ AB तथा CD एक दूसरे पर लम्ब हैं तथा एक दूसरे को बिन्दु P पर काटती है।

मान लिया रेखा AB का समीकरण : $y = m_1x+c_1$ तथा रेखा CD का समीकरण : $y = m_2x+c_2$ है। मान लिया AB पर बिन्दु Q तथा CD पर बिन्दु Q' इस प्रकार है कि $PQ = PQ'$ P से गुजरतीं हुई रेखा EF X–अक्ष के समान्तर खीचिंए। अब बिन्दु Q तथा Q' से क्रमशः QR तथा Q'R' EF पर लम्ब डालिए।

मान लिया $m_1 = \tan\theta$ यहाँ θ_1 रेखा AB तथा X–अक्ष की धनात्मक दिशा के बीच कोण है
अर्थात् $\angle RPQ = \theta_1$ (क्योंकि EF X–अक्ष के समान्तर है)

$$\therefore \tan\theta_1 = \frac{QR}{PR} = m_1$$

इसी प्रकार मान लिया $m_2 = \tan\theta_2$ जहाँ पर θ_2 रेखा CD तथा X–अक्ष के बीच कोण है
अर्थात् $\angle R'PQ' = \theta_2$

$\therefore \tan\theta_2 = -\frac{Q'R'}{PR'} = m_2$ (क्योंकि PR' ऋणात्मक दिशा में मापा जाता है।)

आकृति द्वारा यह ध्यान दीजिए कि

$\angle RPQ + \angle QPQ' + \angle Q'PR' = 180°$

लेकिन $\angle QPQ' = 90° = \angle PR'Q' = 90°$

या $m_1 = \tan\theta_1 = \frac{PR'}{Q'R'} = -\frac{1}{\tan\theta_2} = -\frac{1}{m_2}$

अतः $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

या $m_1 m_2 = -1$

अतः अगर रेखाएँ एक दूसरे पर लम्ब हों तो उनके ढाल का गुणनफल -1 होता है।

उदाहरण : दो बिन्दुओं (1, 10) तथा (5, 2) से गुजरने वाली रेखा पर लम्ब का ढाल ज्ञात कीजिए।

हल : दिए हुए दो बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखा का ढाल

$$m_1 = \frac{2-10}{5-1} = \frac{-8}{4} = -2$$

अतः इस पर लम्ब का ढाल $m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{(-2)} = \frac{1}{2}$ होगा।

4.5.2 दो सरल रेखाओं का प्रतिच्छेदन

मान लिया दो रेखाएँ AB तथा CD बिन्दु $P(x_0, y_0)$ पर प्रतिच्छेदी हैं। हमें P के निर्देशांकों का मान निकालना है। मान लिया रेखा AB का समीकरण $y = m_1x+c_1$ है तथा रेखा CD का समीकरण $y = m_2x+c_2$ है। क्योंकि बिन्दु $P(x_0, y_0)$ दोनों रेखाओं पर स्थित है इसलिए इसके निर्देशांक दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करेंगे।

अतः $y_0-m_1x_0 = c_1$ (1)

तथा $y_0-m_2x_0 = c_2$ (2)

(1) में से (2) को घटाने पर

$$-m_1x_0+m_2x_0 = c_1-c_2$$
$$x_0(m_2-m_1) = c_1-c_2$$

$$\therefore\ x_0 = \frac{c_1-c_2}{m_2-m_1} = -\frac{(c_2-c_1)}{m_2-m_1}$$

x_0 का यह मान (1) में रखने पर

$$y_0 = \frac{m_1[-(c_2-c_1)]}{m_2-m_1} + c_1$$

$$y_0 = -\frac{m_1c_2+m_1c_1+m_2c_1-m_1c_1}{m_2-m_1}$$

$$y_0 = \frac{m_2c_1-m_1c_2}{m_2-m_1}$$

उदाहरण : दो रेखाओं का जोकि क्रमशः बिन्दुओं A(3, 2) तथा B(4, 5) को मिलाने वाली और बिन्दुओं C(1, 2) तथा D(2, 6) को मिलाने वाली हैं, प्रतिच्छेदन बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल : बिन्दुओं A(3, 2) तथा B(4, 5) को मिलाने वाली सरल रेखा का समीकरण

$$y-2 = \frac{5-2}{4-3}(x-3)$$

$$y-2 = 3(x-3)$$
$$y-2 = 3x-9$$
$$y = 3x-7 \quad (1)$$

इसी प्रकार दूसरी रेखा का समीकरण जोकि C(1, 2) तथा D(2, 6) को मिलाती है।

$$y-2 = \frac{6-2}{2-1}(x-1)$$

$$y-2 = 4(x-1)$$
$$y-2 = 4x-4$$
$$y = 4x-2 \quad (2)$$

अतः प्रतिच्छेदन बिन्दु के निर्देशांक

$$x_0 = \frac{-[-2-(-7)]}{4-3} = -5$$

तथा $y_0 = \dfrac{4\times(-7)-3\times(-2)}{4-3} = -28 + 6$

$= -22$

इस प्रकार प्रतिच्छेदन बिन्दु के निर्देशांक $(-5, -22)$ हैं।

अब हम यह जाँच करेंगे कि यह बिन्दु दोनों रेखाओं पर है।
समीकरण (1) में यह मान रखने पर
$-22 = 3\times(-5)-7 = -22$ अर्थात् यह समीकरण सन्तुष्ट हो जाता है।
इसी प्रकार समीकरण (2) में मान रखने पर
$-22 = 4\times(-5)-2 = -22$ यह भी सन्तुष्ट होता है।

इसलिए $(-5, -22)$ दोनों रेखाओं का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

बोध प्रश्न 5

(1) त्रिकोणमितीय अनुपातों की तालिका के प्रयोग द्वारा रेखा का ढाल ज्ञात कीजिए जिसका X–अक्ष के साथ कोण
क) 30° ख) 45° ग) 60° घ) 75° ङ) 105° च) 135° छ) 120° ज) 20°
ट) 150° ठ) 100° है।

(2) निम्नलिखित बिन्दुओं से गुजरने वाली रेखाओं का ढाल तथा Y–अक्ष पर अन्तःखंड ज्ञात कीजिए।

क) (8, 5) तथा (12, 1)
ख) (3, 4) तथा (2, 5)
ग) (0, 8) तथा (5, 0)
घ) (0, 0) तथा (6, 4)
ङ) (−3, 5) तथा (−4, 3)

(3) प्रश्न (2) में प्रत्येक रेखाओं पर लम्ब का ढाल ज्ञात कीजिए।

(4) रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए

क) जब यह बिन्दु (3, 4) से गुजरती हो तथा (12, 2) व (5, 8) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब हो।
ख) जब यह मूल बिन्दु से गुजरती हो तथा (−2, −2) व (3, 3) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब हो।
ग) जब यह (−3, 5) से गुजरती हो तथा (5, 4) व (8, 3) बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा पर लम्ब हो।

(5) एक आयत ABCD में भुजा AB का ढाल 2/3 है। BC, CD तथा DA भुजाओं का ढाल ज्ञात कीजिए।

(6) अगर (5, 9) तथा (12, 7) को मिलाने वाली रेखा (1, a) तथा (3, 4) पर लम्ब हो तो 'a' का मान ज्ञात कीजिए।

4.5.3 सरल रेखा के समीकरण का सामान्य रूप

सरल रेखा के ढाल-अन्तःखंड-रूप के अध्ययन के बाद हम इसका सामान्य रूप प्राप्त करने का प्रयास करेंगे।
निम्नलिखित समीकरण पर ध्यान दीजिए :

$3x+4y+5 = 0$

इसको इस प्रकार से लिखा जा सकता है

$4y = -3x-5$

या $y = -\dfrac{3}{4}x - \dfrac{5}{4}$

$= mx+c$

यहाँ $m = -\dfrac{3}{4}$ तथा $c = -\dfrac{5}{4}$ है।

अतः उपरोक्त समीकरण सरल रेखा के समीकरण को निरूपित करती है। सामान्यतः अगर कोई रैखिय समीकरण $ax+by+d=0$ है (जहाँ a, b, c कोई संख्याएँ है), तो इसको इस प्रकार से लिखा जा सकता है।

$$y = -\frac{a}{b}x-\frac{d}{b}$$

या $y = mx+c$, जहाँ $m = -\dfrac{a}{b}$ तथा $c = -\dfrac{d}{b}$ है।

अतः $ax+by+d=0$ रैखिक समीकरण का सामान्य रूप है तथा इससे ढाल अन्तःखंड रूप में भी समीकरण प्राप्त किया जा सकता है।

मान लिया हमारे पास सामान्य रूप में दो रेखाएं हैं :

$a_1x+b_1y+d_1=0$ (1)

$a_2x+b_2y+d_2=0$ (2)

इनको ढाल अन्तःखंड रूप में लिखकर हम ज्ञात कर सकते हैं कि अगर $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ तो दोनों रेखाएँ समानान्तर होंगी (क्योंकि इनके ढाल बराबर होंगे)।

अगर यह समानान्तर नहीं है तो (1) तथा (2) को हल करके इनके प्रतिच्छेदक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात किये जा सकते हैं जो कि इस प्रकार हैं :

$$\left(\frac{b_1d_2-b_2d_1}{a_1b_2-a_2b_1}, \frac{a_2d_1-a_1d_2}{a_1b_2-a_2b_1}\right)$$

उदाहरण : रेखाओं का प्रतिच्छेदक बिन्दु ज्ञात कीजिए अगर उनके समीकरण निम्नलिखित हों।

$2x+5y-7=0$ (1)

$3y-4x+8=0$ (2)

हल : पहले जाँच कीजिए कि ये रेखाएँ समानान्तर तो नहीं है।

$$\text{चूँकि} \quad \left[\frac{a_1}{b_1} = \frac{2}{5}\right] \neq \left[\frac{a_2}{b_2} = -\frac{4}{3}\right]$$

इसलिए ये समानान्तर नहीं है।

अब उपरोक्त सूत्र द्वारा :

$$x_0 = \frac{5\times8-3\times(-7)}{2\times3-(-4)\times5} = \frac{61}{26}$$

$$\text{तथा} \quad y_0 = \frac{(-4)\times(-7)-2\times8}{2\times3-(-4)\times5} = \frac{12}{26}$$

दूसरी विधि : समीकरण (1) तथा (2) को ढाल अन्तःखंड रूप में लिखने पर

$5y = -2x+7$ तथा $3y = 4x-8$

या $y = -\frac{2}{5}x+\frac{7}{5}$ या $y = \frac{4}{3}x-\frac{8}{3}$

पहले खंड में प्राप्त सूत्र के प्रयोग से

$$x_0 = \frac{-\left(-\frac{8}{3}-\frac{5}{7}\right)}{\frac{4}{3}-\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{-\left[\frac{-40-21}{15}\right]}{\frac{20+6}{15}} = \frac{61}{15}\times\frac{15}{26} = \frac{61}{26}$$

$$y_0 = \frac{\frac{4}{3}\times\frac{7}{5}-\left(-\frac{2}{5}\right)\left(-\frac{8}{3}\right)}{\frac{26}{15}} = \frac{\frac{28}{15}-\frac{16}{15}}{\frac{26}{15}} = \frac{12}{15}\times\frac{15}{26} = \frac{12}{26}$$

यह भी जाँच करें कि यह बिन्दु दोनों समीकरणों को सन्तुष्ट करता है।

(i) $2\times\frac{61}{26}+5\times\frac{12}{26}-7 = \frac{126+60-182}{26} = 0$

(ii) $3\times\frac{12}{26}-\frac{4\times61}{26}+8 = \frac{36-244+208}{26} = 0$

बोध प्रश्न 6

(1) निम्न रेखाओं के युग्म के प्रतिच्छेदक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए

क) $4x+5y+3=0$, $3x+4y-8=0$

ख) $7x+8y+12=0$, $4x+7y-6=0$

(2) क्या निम्न रेखाओं के युग्म समानान्तर हैं? जाँच कीजिए। अगर ये समानान्तर नहीं है तो प्रतिच्छेदक बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

क) $8x+9y-18=0$, $20x+22.5y+16=0$

ख) $2x+y+14=0$, $2y-x+5=0$

ग) $x=0$, $y=0$

घ) $x=y$, $x-y=0$

4.6 सारांश

इस इकाई में आपने देखा कि दो चरों के बीच सम्बन्ध को आलेख पर किस प्रकार चित्रित किया जा सकता है। आरेखी विधि के प्रयोग द्वारा एक चर का मान पता होने पर दूसरे चर के मान का अनुमान लगाया जा सकता है। इस विधि को अंतर्वेशन विधि कहते हैं। आलेखी विधि द्वारा हम दो रैखीय युगपत् समीकरण निकाय को भी हल कर सकते हैं।

हमने यह भी देखा कि निर्देशांक ज्यामिति द्वारा विश्लेषिक फलन की विशेषताओं का विशलेषण किस प्रकार किया जा सकता है। हमने x, y समतल में दो बिन्दुओं के मध्य दूरी, उस बिन्दु के निर्देशांक (जोकि दिये हुए रेखाखंड को एक दिए हुए अनुपात में विभाजित करता है), रेखा का ढाल तथा अन्तःखंड ज्ञात करना आदि विधियों का विवेचन किया।

हमने त्रिकोणमितिय अनुपातों द्वारा दो रेखाओं में सम्बन्ध (अर्थात् वे समानान्तर है या नहीं) का अध्ययन किया। विभिन्न आर्थिक सम्बन्धों को समझने के लिए निर्देशांक ज्यामिति हमें बहुत उपयोगी गणितीय उपकरण प्रदान करती है। उदाहरण के लिए अगर हमें कीमत तथा मात्रा के दो युग्म पता हों तो हम रैखिक माँग नियम का अनुमान लगा सकते हैं। रैखिक माँग वक्र के ढाल/प्रवणता के प्रयोग द्वारा हम माँग की लोच ज्ञात कर सकते हैं।

4.7 शब्दावली

रैखिक अंतर्वेशन : X चर के निकटवर्ती मान दिए होने पर इनके द्वारा अज्ञात चर Y के मान का अनुमान लगाने की क्रिया को अंतर्वेशन कहते हैं। अगर X तथा Y में सम्बन्ध सरल रेखा द्वारा व्यक्त होता है तो इसको रैखिक अंतर्वेशन कहते हैं।

चतुर्थांश : निर्देशांक-अक्ष X–Y समतल को चार भागों में विभाजित करते हैं जिनमें प्रत्येक को चतुर्थांश कहा जाता है। इनकी पहचान के लिए इनको क्रमशः पहला, दूसरा, तीसरा तथा चौथा चतुर्थांश कहते हैं।

प्रवणता : OX तथा OY अक्ष दिए होने पर एक सरल रेखा की महत्त्वपूर्ण विशेषता उसकी वह दिशा है जिसका निर्धारण उस कोण से होता है, जो वह X–अक्ष की धनात्मक दिशा के साथ बनाती है। रेखा के ढाल के संख्यात्मक माप को प्रवणता कहते हैं।

अन्तःखंड : जिन रेखाओं का ढाल शून्य नहीं होता अपितु परिमित होता है वे दोनों अक्षों X तथा Y को प्रतिच्छेदित करती हैं। मूल बिन्दु से इस प्रतिच्छेदक बिन्दु तक अक्ष की लम्बाई को क्रमशः उनके अन्तःखंड कहते हैं।

त्रिकोणमितीय अनुपात : मान लिया ABC समकोण त्रिभुज है जिसमें B पर समकोण है। मान लिया $\angle BAC=\theta$ है। इस प्रकार की त्रिभुज को तीन भुजाओं AB, BC तथा AC द्वारा परिभाषित अनुपात गणितीय प्रश्नों के हल में बहुत सहायक होते हैं। इन अनुपातों को त्रिकोणमितीय अनुपात कहा जाता है।

4.8 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Taro Yamane : *Mathematics for Economics*, Chapter 2

R.G.D. Allen, 1938 : *Mathematical analysis for Economists*, Chapter 2, 3, Macmillan.

G.C. Archibald and Richard G. Lipsey : *A Mathematical Treatment of Economics*, Chapters 2, 3, A.I.T.B.S. 1984.

4.9 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

आलेख आरेखित कीजिए, जैसाकि इकाई 4.2 आकृति 4.1 में सुझाया गया है।

बोध प्रश्न 2

आलेख आरेखित कीजिए, जैसा भाग 4.2.1 में सुझाया गया है।

बोध प्रश्न 3

(1) क) $\sqrt{10}$ ख) $\sqrt{74}$ ग) $\sqrt{50}$ घ) $2\sqrt{5}$ ङ) $\sqrt{2.65}$ च) $\sqrt{2}\,a$

(2) 12 (3) $(-6, -6)$ (4) $AB = \sqrt{50}$ $BC = \sqrt{149}$ $AC = 11$

(5) 5, (6) क) अन्दर ख) अन्दर ग) वृतपर घ) वृतपर ङ) बाहर।

बोध प्रश्न 4

(1) क) $(4, 6)$ ख) $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ ग) $(-1, -5)$ घ) 4, 4 ङ) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ च) $(0, 0)$

(2) $(-1, 3)$ (3) क) $(9, 11)$ ख) $\left(\frac{16}{3}, -\frac{16}{3}\right)$

बोध प्रश्न 5

(1) क) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ख) 1, ग) $\sqrt{3}$ घ) 3.7321, ङ) -3.7321 च) -1 छ) $-\sqrt{3}$

ज) .3640 ट) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ ठ) -5.6713

(2) क) $-1, 13$ ख) $-1, 7$ ग) $-\frac{8}{5}, 8$ घ) $\frac{2}{3}, 0$ ङ) 2, 11

(3) क) 1 ख) 1 ग) $\frac{5}{8}$, घ) $-\frac{3}{2}$, ङ) $-\frac{1}{2}$

(4) क) $7x-6y+3=0$, ख) $x+y=0$, ग) $y-3x-14 = 0$

(5) $-\frac{3}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$ (6) $a = -3$

बोध प्रश्न 6

(1) क) $x = -52, y = 41$ ख) $x = -\frac{132}{17}, y = \frac{90}{17}$

(2) क) समानान्तर है ख) $x - \frac{23}{5}, y = -\frac{24}{5}$ ग) $(0, 0)$ घ) रैखिक सम्पाती।

4.10 पारिभाषिक शब्दावली

अंतखण्ड	intercept
अधिक कोण	obtuse angle
अनुप्रयोग	applications
अक्ष	axis
आकृति	figure
आरेख	diagram
आरेखण	drawing
आलेखित करना	to plot
ऊर्ध्वाधर	vertical
कोटि	ordinate
चतुर्थांश	quadrant
त्रिकोणमिति	trignometry
ढाल	slope
निर्देशांक	co-ordinate
न्यून कोण	acute angle

परतंत्र चर	dependent variable
परम्परा	convention
परिमित	finite
परिसर	range
पाइथागोरस प्रमेय	Pythegoras theoram
प्रवणता	gradient
प्रतिच्छेद	intersect
बहुपद	polynomial
भुज	abscissa
मूलबिन्दु	origin
रेखाखण्ड	line segment
रैखिक अंतर्वेशन	linear interpolation
वामावर्त	anticlockwise
विश्लेषिक	analytical
विशेषताएँ	properties
संकेताक्षर	symbol
संदर्भ रेखा	reference line
समकोणिक अक्ष	rectangular axis
समतल	plane
सम्पाती	coincide
सर्वनिष्ठ	common
सामान्य रूप	general form
सूत्रण	formulate
स्वतंत्र चर	independent variable

UGEC-03

प्रारंभिक सांख्यिकीय विधि तथा सर्वेक्षण प्रविधियाँ

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

खंड

3

सांख्यिकीय आंकड़ों की प्रस्तुति

खंड 3 का परिचय

परिचय

इस खंड में दो इकाइयाँ हैं, जिनमें सांख्यिकीय आंकड़ों की प्रस्तुति का विवेचन किया गया है।

इकाई 5 में संवीक्षण की प्रविधियों तथा इससे संबंधित अन्य जानकारी दी गई है; सांख्यिकीय सारणियों की संरचना एवं सारणीयन के बारे में बताया गया है।

इकाई 6 में आलेखों तथा चित्रों के माध्यम से आंकड़ो के समुच्चय में निहित महत्त्वपूर्ण सूचना को प्रभावी ढंग से व्याख्या करने की विधि पर प्रकाश डाला गया है।

इकाई 5 सांख्यिकीय आंकड़ों का संवीक्षण, सम्पादन, प्रतिवेदन तथा सारणीयन

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप निम्नलिखित तथ्यों के बारे में जानकारी प्राप्त कर सकेंगे :
- सांख्यिकी विषय को समझने के लिए आवश्यक आधारभूत शब्दावली का प्रयोग
- आंकड़ों को भली-भांति समझने के लिए उनका संगठन तथा संक्षेपण।

5.1 प्रस्तावना

इस इकाई में सांख्यिकीय आंकड़ों की प्रकृति, बहु-लक्षण आंकड़ों तथा उनके संगठन में विभिन्न चरणों से आपका परिचय कराया जाएगा। इसके साथ ही, आंकड़ों के संवीक्षण, संगति जाँच, सारणीय निरूपण तथा बारंबारता बंटन के वर्ग निर्धारण का विवेचन भी किया जाएगा।

5.2 सांख्यिकीय आंकड़ों की प्रकृति

खण्ड 1 में आप गुण एवं चर, समष्टि तथा प्रतिदर्श इत्यादि आधारभूत पारिभाषिक शब्दों की कुछ जानकारी प्राप्त कर चुके हैं। फिर भी, सांख्यिकीय आंकड़ों के परिचय के लिए इन शब्दों पर ध्यान केन्द्रित करना आवश्यक है।

5.2.1 गुण एवं चर : समष्टि (जनसंख्या) एवं प्रतिदर्श

प्रारंभिक तौर पर व्यष्टिपरक प्रेक्षणों के परिणामस्वरूप सांख्यिकीय आंकड़े उत्पन्न होते हैं। किसी

भी प्रेक्षण के आधार पर हम व्यष्टि को परस्पर अपवर्जी तथा निशेष संवर्गों में से किसी एक संवर्ग में रख सकते हैं अथवा व्यष्टि के कुछ विशिष्ट अभिलक्षणों का परिगणन कर सकते हैं अथवा किसी सरल या परिष्कृत परिमापक यंत्र द्वारा व्यष्टि की किसी परिमापनीय विशिष्टता का वास्तविक परिमापन कर सकते हैं। सांख्यिकी में व्यष्टि शब्द का प्रयोग निम्नलिखित संदर्भों में होता है :

क) किसी व्यक्ति के लिए,
ख) किसी सजीव प्राणी के लिए,
ग) किसी निर्जीव वस्तु के लिए,
घ) किसी घटना के लिए। इनके अतिरिक्त
ङ) किसी अन्य इकाई के लिए।

एक आर्थिक जाँच करने के लिए उदाहरणस्वरूप हम किसी निश्चित दिन के लिए चीनी की कीमत के आंकड़े प्राप्त कर सकते हैं। यहाँ पर सांख्यिकीय व्यष्टि से अभिप्राय चीनी की उस किस्म से है (जो उस दिन बाज़ार में बेची गई) तथा इस व्यष्टि की प्रेक्षित विशिष्टता से है, जो इसकी कीमत है। विद्यार्थियों की दृष्टि-दोष की चिकित्सा जाँच से हम सिर्फ यह ही प्रेक्षण कर सकते हैं कि अमुक विद्यार्थी चश्मा लगाता है या नहीं। यहाँ प्रेक्षण वर्गीकरण की एक प्रक्रिया मात्र है, जिसके आधार पर विद्यार्थी को दो वर्गों में से किसी एक वर्ग में रखा जा सकता है : (1) वे विद्यार्थी, जो चश्मा लगाते हैं; तथा (2) वे विद्यार्थी जो चश्मा नहीं लगाते।

एक सामाजिक-आर्थिक जाँच में किसी एक गृह के सदस्यों की संख्या का प्रेक्षण उन्हें गिनकर किया जाता है। किसी कम्पनी द्वारा निर्मित साबुन की गुणवत्ता की जाँच करने के लिए हम रासायनिक विश्लेषण द्वारा साबुन की टिक्की में वसा-अंश की मात्रा ज्ञात करते हैं।

जब प्रेक्षण क्रिया का उद्देश्य किसी व्यष्टि का अनेक संवर्गों में से किसी एक में वर्गीकृत करना हो तो प्रेक्षण परिणाम को गुण (attribute) कहा जाता है। किसी व्यक्ति के बालों का रंग एक गुण होता है जोकि काला, भूरा, लाल या सफेद हो सकता है। जब प्रेक्षण परिणाम एक संख्या हो तो इसे चर (variable) कहा जाता है। किसी गृह में सदस्यों की संख्या, साबुन की टिक्की में वसा-अंश आदि सांख्यिकीय चरों के उदाहरण हैं। कभी-कभी असंतत (discrete) चर तथा संतत (continuous) चर में भी विभेद किया जाता है। गृह में सदस्यों की संख्या एक, दो, तीन, इत्यादि हो सकती है जोकि असंतत चर का उदाहरण है। इस चर का मान कुछ निश्चित मानों के समुच्चय में से एक मान होता है।

इसके विपरीत, साबुन में वसा संतत चर का उदाहरण है और किसी उपयुक्त परिसर के अंतर्गत इसका कोई भी मान हो सकता है। व्यवहार में, सभी परिमाप/परिमापक यंत्र के सूक्ष्म अंशाकन तक किए जा सकते हैं। इसलिए ये भी वास्तव में, असंतत चर होते हैं।

यहाँ पर यह जानना महत्वपूर्ण है कि सांख्यिकी का व्यष्टि-विशेष से कोई संबंध नहीं होता। किसी निश्चित दिन में चीनी की कीमत या किसी विशेष गृह में सदस्यों की संख्या या किसी विशेष साबुन की टिक्की में वसा-अंश आदि सांख्यिकी में महत्वपूर्ण नहीं होते। सांख्यिकी की दिलचस्पी मूलतः व्यष्टि में न होकर इनके एक सुनिश्चित समूह में होती है, जिसको समष्टि या जनसंख्या कहते हैं।

सांख्यिकीय समष्टि की प्रत्येक व्यष्टि का प्रेषण प्रायः संभव नहीं होता। इस प्रकार के प्रेक्षण में समय अधिक लगता है तथा लागत भी अधिक आती है और प्रायः यह आवश्यक भी नहीं होता।

हम सांख्यिकीय समष्टि के बारे में सूचना प्राप्त करने के लिए इससे एक उपसमुच्चय का ध्यानपूर्वक चयन करते हैं। इस उपसमुच्चय को प्रतिदर्श (sample) कहते हैं। जब प्रतिदर्श का चयन किसी संयोग क्रिया विधि (जैसे सिक्के को उछालना या दिए हुए ढेर से आंख बंद करके इकाई का चयन करना) के द्वारा किया गया हो तो वह यादृच्छिक प्रतिदर्श (random sample) कहलाता है। सांख्यिकीय सिद्धांतों तथा व्यवहार द्वारा यह सिद्ध हो चुका है कि उपयुक्त विधि द्वारा चयन किए हुए प्रतिदर्शों से समष्टि के बारे में बहुत ही उपयोगी तथा विश्वसनीय सूचना प्राप्त की जा सकती है।

अब हम सांख्यिकीय आंकड़ों के कुछ और उदाहरणों पर विचार करेंगे। एक व्यस्क पुरुष की शैक्षिक स्थिति निम्नलिखित निःशेष एवं परस्पर अपवर्जी संवर्गों में से किसी एक में हो सकती है : अनपढ़, प्राथमिक शिक्षा, माध्यमिक शिक्षा, उच्चतर माध्यमिक शिक्षा, स्नातक, स्नातकोत्तर या इससे अधिक। इन सभी गुण सूचक संवर्गों के लिए क्रम सूचक मापनी में एक उपयुक्त संख्यात्मक

संकेत का प्रयोग किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, हम महिला के लिए 1 तथा पुरुष के लिए 0 लिख सकते हैं। इसी प्रकार, शैक्षिक स्तरों के निरूपण के लिए हम अनपढ़ के लिए 0, प्राथमिक शिक्षा के लिए 1, माध्यमिक शिक्षा के लिए 2, उच्चतर माध्यमिक शिक्षा के लिए 3, स्नातक के लिए 4; तथा स्नातकोत्तर या इससे अधिक शिक्षा के लिए 5 का प्रयोग कर सकते हैं। हमारे प्रश्न के आंकड़े :

) चर लक्षण जैसे गृह का आकार, उच्च उत्पाद किस्म का धान उगाने वाले गांव में धान के खेतों की संख्या; या

i) चर लक्षण जैसे गृह की आय या उपभोग, खरीफ फसल में धान की प्रति हैक्टेयर उपज आदि से संबंधित हो सकते हैं।

पहली स्थिति में चर कुछ पृथक या विस्तृत मान ले सकता है। दूसरी परिस्थिति में चर एक निश्चित परिवर्तन परिसर में से कोई मान ले सकता है। यहाँ भी वास्तविक परिमाप असंतता को व्यक्त करेगा, जोकि मापन की इकाई के प्रयोग, परिशुद्धता का स्तर, ऐच्छिक अथवा उपलब्ध सुस्पष्टता पर निर्भर होगा।

हमारे इस अध्ययन में सभी लक्षणों को संख्यात्मक चर माना जा सकता है। गुणों का विवेचन में भी विभिन्न गुणात्मक लक्षणों के लिए संख्यात्मक संकेतों का पुनः स्मरण किया जा सकता है। इस प्रकार, विचाराधीन गुण को असंतत चर माना जा सकता है। यह विवेचन आंकड़ों को बारंबारता बंटन के रूप में सघनित (condense) करने में (इसका विवेचन भाग 5.5 में किया जाएगा) और सारणीय तथा आलेखी निरूपण में कोई समस्या उत्पन्न नहीं करता। लेकिन सांख्यिकी के गहन विश्लेषण में प्रयोग की जाने वाली विधियों तथा परिणामों की व्याख्या के लिए इन लक्षणों (गुण लक्षण तथा चर लक्षण) में अंतर करना आवश्यक होता है। इस प्रकार का विभेद उपयुक्त विधियों के प्रयोग के लिए तथा अध्ययन की जाने वाली समस्या को ठीक प्रकार से समझने के लिए भी बहुत महत्वपूर्ण होता है। अतः आंकड़ों की उपयुक्त व्याख्या तथा समझ के लिए संख्यात्मक संकेत एवं इनके गुणात्मक अभिलक्षणों में संगति सुस्पष्ट रखना आवश्यक होता है।

5.2.2 बहु-लक्षण आंकड़े

जब आंकड़ों का संकलन प्रत्यक्ष अन्वेषण या डाक द्वारा प्रश्नावली भेजकर किया जाता है तो प्रत्येक व्यष्टि इकाई (एक गृह, व्यक्ति या गांव आदि) के बारे में सूचना का अभिलेखन सिर्फ उसके एक लक्षण (जिसका अध्ययन किया जाना है) के विषय में ही नहीं किया जाता, बल्कि प्रायः उसके और लक्षणों (जोकि गुण या चर कोई भी हो सकते हैं) के बारे में भी सूचना प्राप्त की जाती है। जब अध्ययन का प्राथमिक उद्देश्य निश्चित गृह समूह में बच्चों की शिक्षा पर किए जाने वाले व्यय के स्वरूप की जाँच करना हो तो इन गृहों से इस बारे में पूछताछ करते समय हम व्यष्टि से संबंधित कुछ और लक्षणों, जो चर या गुण हो सकते हैं, के बारे में भी जानकारी प्राप्त कर लेते हैं। जैसे गृह की सामाजिक स्थिति, इसकी आय, मुखिया का शैक्षिक स्तर, गृह का आकार, सदस्यों के बारे में कुछ जनसांख्यिकीय जानकारी आदि। इतना ही नहीं, कभी-कभी ऐसे लक्षणों के बारे में भी सूचना प्राप्त की जाती है जोकि व्यष्टि से प्रत्यक्ष रूप में संबंधित नहीं होते। यहाँ हमारा उद्देश्य यह ज्ञात करना हो सकता है कि क्या इनमें किसी प्रकार का संबंध या साहचर्य है। इस प्रकार, हमें अतिरिक्त सूचना बिना अथवा थोड़ी-सी अतिरिक्त लागत से प्राप्त हो जाती हैं। जब किसी द्वितीय स्रोत जैसे प्रकाशित प्रलेख या शोध प्रकाशन से आंकड़े प्राप्त किए जाते हैं तो ये पहले ही अर्द्ध तैयार रूप में होते हैं (ये आंकड़े भी प्राथमिक स्रोत से संकलित किए होते हैं)। पहले की तरह, द्वितीय स्रोत से प्राप्त आंकड़ों में अध्ययन के अंतर्गत लक्षण के अतिरिक्त और लक्षणों, चाहे वे इससे संबंधित हैं या नहीं, के बारे में भी सूचना प्राप्त हो सकती है।

मान लीजिए, हमने किसी उद्देश्य के लिए उपयुक्त चयन की हुई प्रेक्षण इकाई के बहुत से लक्षणों के बारे में सूचना संकलित की है। मान लीजिए, यह इकाई एक गृह है तथा अध्ययन किए जाने वाले लक्षण इस प्रकार हैं :

x_1 = गृह का आकार
x_2 = गृह के मुखिया का शैक्षिक स्तर
x_3 = गृह की मासिक आय
x_4 = गृह का कुल मासिक व्यय
x_5 = गृह का बच्चों की शिक्षा पर मासिक व्यय
x_6 = परिवार में स्कूल जाने वाले बच्चों की संख्या

x_7= धम
x_8= परिवार के मुखिया का लिंग इत्यादि

आंकड़ों के परवर्ती संगठन तथा विवरण में हम दिए हुए समूह से सिर्फ एक लक्षण (जैसे x_1 या x_3) के व्यवहार प्रतिरूप का अध्ययन कर सकते हैं। हम दो लक्षणों जैसे x_1 और x_4 या x_5 एवं x_3 में परस्पर संबंध का अध्ययन भी कर सकते हैं। इसके अतिरिक्त, हमारी रुचि सभी लक्षणों के एक साथ अध्ययन में भी हो सकती है, जिसमें यह जानने का प्रयास किया जाता है कि इन सभी लक्षणों में से एक लक्षण (मान लीजिए यह x_5 है) किस प्रकार अन्य लक्षणों (जैसे x_2, x_3 तथा x_6) पर आश्रित या उनसे संबंधित है।

5.3 आंकड़ों का संगठन

सांख्यिकीय सूचना के समूह का अर्थ जानने के लिए हमें सुसंगत आंकड़ों को इस प्रकार से संगठित करने की आवश्यकता होती है, जिससे इनको समझना सरल हो जाएगा।

5.3.1 आंकड़ों के संगठन में विभिन्न चरण

आंकड़ों के संगठन तथा इनके आलेखी निरूपण में मुख्य चरण निम्नलिखित होते हैं :

i) आंकड़ों का संवीक्षण
ii) आंकड़ों का सारणीबद्ध निरूपण तथा न्यूनीकरण
iii) संगति जाँच तथा सारणीबद्ध निरूपण के बाद संवीक्षण
iv) आलेखी निरूपण
v) प्रतिवेदन लेखन

निम्नलिखित भागों में इन चरणों का विस्तृत वर्णन किया गया है। आंकड़ों के उपयुक्त संगठन के लिए इन विभिन्न चरणों की आवश्यकता होती है, लेकिन इनका उपरोक्त लिखे हुए क्रम में अनुसरण करना आवश्यक नहीं है। अतः इनकी व्याख्या में इस क्रम पर ध्यान नहीं रखा गया है।

5.3.2 आंकड़ों का संवीक्षण तथा संगति जाँच

आंकड़ों के संकलन के बाद पूछताछ अधिकारी का सर्वप्रथम कर्तव्य आंकड़ों का, जहाँ तक हो सके, पूर्ण रूप से संवीक्षण करना तथा इनकी संगति जाँच करना होता है। मूल आंकड़ों के गंभीर संवीक्षण द्वारा आंकड़े लिखने में हुई कुछ त्रुटियों का बड़ी जल्दी पता लगाया जा सकता है, जैसे आंकड़ों को लिखते समय कुछ आंकड़ों का छूट जाना या दशमलव बिन्दु का सही स्थान पर न होना आदि। इसके अतिरिक्त, कई बार मापन इकाई के बारे में अस्पष्टता के कारण कुछ प्रविशिष्टयों में त्रुटियां, जैसे प्रति हैक्टेयर या प्रति एकड़ उपज आदि। इस प्रकार की त्रुटियों का पता करके इनको ठीक करना कोई कठिन कार्य नहीं होता।

इसके अतिरिक्त, प्रश्नावली में आंकड़ों की जाँच के अप्रत्यक्ष तरीके भी हो सकते हैं। जैसे कि हम जानते हैं, प्रश्नावली में बहुत से लक्षणों के बारे में जानकारी प्राप्त की जाती है जिनमें कई बार गणितीय संबंध हो सकता है, जैसे :

गृह की बचत (Z) = गृह की आय (Y) – गृह का उपभोग (X)

यहाँ X, Y तथा Z तीन चर हैं, जिसका प्रत्येक गृह के लिए मान प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार X, Y तथा Z के मानों के प्रयोग से आंकड़ों में संगति जाँच की जा सकती है।

इसके अतिरिक्त, मान लीजिए "A" एक गांव में भूमि के उस कुल क्षेत्रफल को व्यक्त करता है जिसमें एक वर्ष में कम से कम एक बार धान उगाया जाता है, "B" खरीफ मौसम में धान की फसल के अंतर्गत भूमि का कुल क्षेत्रफल है, "C" खरीफ मौसम से पूर्व धान की फसल के अंतर्गत भूमि का कुल क्षेत्रफल, "D" रबी मौसम में धान की फसल के अंतर्गत भूमि का कुल क्षेत्रफल है। तो स्पष्टतः संगति जाँच इस प्रकार होगी :

$$B \leq A$$
$$C \leq A$$
$$D \leq A$$
तथा $B+C+D \geq A$

अगर किसी गाँव से प्राप्त आंकड़े इन संबंधों को संतुष्ट नहीं करते तो त्रुटियों का पता करके इनको ठीक किया जाना चाहिए। इसके लिए अगर आवश्यक हो तो गाँव में पुनः जाकर आंकड़े प्राप्त किए जा सकते हैं। किसी भी प्रश्नावली में एक से अधिक मदों के लिए सूचना उपलब्ध होती है, जोकि सांख्यिकीय विश्लेषणों के लिए अनावश्यक हो सकती है, लेकिन संगति जाँच के लिए बहुत आवश्यक हो सकती है। संवीक्षण द्वारा आंकड़ों में सभी प्रकार की त्रुटियों तथा असंगति का पता लगाकर इनको सुधारने का प्रयास किया जाना चाहिए।

आंकड़ों में कुछ और प्रकार की त्रुटियाँ हो सकती हैं, जैसे दिनांक या मास या वर्ष के बारे में जानकारी का गलत लिखना आदि। 31 अप्रैल या गैर-अधिवर्ष में 29 फरवरी आदि त्रुटियों का आसानी से पता किया जा सकता है तथा इनको ठीक भी किया जा सकता है।

संकलित आंकड़ों में कुछ मान सामान्य मानों से बहुत उच्च या बहुत निम्न हो सकते हैं, जिनको सांख्यिकीय शब्दावली में अविवेचित प्रेक्षण (wild observation) कहते हैं। इस प्रकार के मानों की पूर्ण रूप से असंगति या त्रुटि जाँच करना आवश्यक होता है। आंकड़ों में अविवेचित प्रेक्षणों का पता उनको सारणीबद्ध करने के बाद या कई बार उनके विश्लेषण के बाद ही लग सकता है। इनकी उपस्थिति के बारे में भी पूर्ण जाँच की जानी चाहिए। इन प्रेक्षणों का पता लगने पर यह स्पष्ट होना आवश्यक नहीं है कि क्या किया जाना चाहिए। इस तथ्य की भी जाँच की जानी चाहिए कि क्या आंकड़ों के संकलन या लेखन करते समय की गई त्रुटि के कारण है या नहीं।

बोध प्रश्न 1

1) गुण, चर, समष्टि तथा प्रतिदर्श की परिभाषा दीजिए।

....

....

....

....

2) बहु-लक्षण आंकड़ों का संकलन किस प्रकार किया जाता है?

....

....

....

....

....

3) आंकड़ों के संगठन में विभिन्न चरणों की व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

....

4) आंकड़ों के संवीक्षण तथा संगति जाँच के लिए विभिन्न प्रविधियाँ कौन-कौन सी हैं?

....

....

....

....

....

5.4 आंकड़ों का सारणीय निरूपण

आंकड़ों के संकलन के बाद इसका त्रुटियों के लिए संवीक्षण किया जाता है। इसके बाद हमें इन आंकड़ों को परिष्कृत तथा उपयुक्त रूप में इस प्रकार से प्रस्तुत करना होता है कि इसकी मुख्य

विशेषताओं को संकेन्द्रित किया जा सके। आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण की अनेक विधियाँ हो सकती हैं, जोकि अन्वेषण अधिकारी के उद्देश्य तथा अध्ययन किए जाने वाले लक्षण अथवा लक्षणों की प्रकृति पर निर्भर होती है।

5.4.1 गुण आंकड़ों का संक्षेपण

आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण से संबंधित सामान्य तत्वों को आंकड़ों का संक्षेपण या कम करना कहते हैं। बारंबारता बंटन (एकधा, द्विधा या बहुधा तरह के) के विवेचन के साथ इनका और विवेचन किया जाएगा। सभी प्रकार के चरों तथा गुणों के सारणीयन की सामान्य प्रणाली लगभग सदृश्य होती है। लेकिन समस्या के अमूर्त (Abstract) विवेचन के स्थान पर हम निश्चित उदाहरण द्वारा विवेचन आरंभ करेंगे। सरलता के लिए हम शुरुआत गुण आंकड़ों के विवेचन से करते हैं।

भाग 5.2 में दिए गए गृह आंकड़ों की प्रकृति से संबंधित हम सिर्फ X_2 द्वारा निरूपित गुण पर ही ध्यान देंगे।

X_2 : गृह के मुखिया का शैक्षिक स्तर

शैक्षिक स्तर के विभिन्न संवर्ग इस प्रकार हैं :

स्तर	प्रयोग किया जा सकने वाला संख्यात्मक संकेत
i) अनपढ़	0
ii) प्राथमिक शिक्षा	1
iii) माध्यमिक शिक्षा	2
iv) उच्चतर माध्यमिक शिक्षा	3
v) स्नातक	4
vi) स्नातकोत्तर तथा इससे अधिक	5

संवर्गों की व्याख्या के लिए संख्यात्मक संकेतों के प्रयोग का विवेचन उपभाग 5.2.2 में किया गया है।

5.4.2 एकधा सारणी

मान लीजिए, बहुत से गृहों के बारे में वास्तविक आंकड़े संकलित हैं तथा हमें इनको गृहों के मुखिया के शैक्षिक स्तर के अनुसार वर्गीकृत करना है। इस प्रकार के वर्गीकरण को एकधा वर्गीकरण कहते हैं। संक्षेप में, हमें प्रेक्षित सूची में से गृहों की वह संख्या n_i (मान लीजिए) ज्ञात करनी है, जिनका शैक्षिक स्तर i हो, यहाँ पर i का मान 0, 1, 2, 3, 4, 5 हो सकता है। इसके लिए हम प्रत्येक गृह के लिए x_2 का मान देखते हैं तथा यह गिनते हैं कि कितने गृहों के लिए x_2 का मान i के बराबर है। इन गृहों की संख्या को n_i कहेंगे। n_i को शैक्षिक स्तर i की बारंबारता भी कहते है। अंत में आंकड़ों को सारणी रूप में इस प्रकार प्रस्तुत किया जाता है :

सारणी 5.1 : गृहों मे मुखिया के शैक्षिक स्तर का बारंबारता बंटन

शैक्षिक स्तर	बारंबारता
अनपढ़ (0)	n_0
प्राथमिक शिक्षा (1)	n_1
माध्यमिक शिक्षा (2)	n_2
उच्चतर माध्यमिक शिक्षा (3)	n_3
स्नातक (4)	n_4
स्नातकोत्तर तथा इससे अधिक (5)	n_5
योग	N

यहाँ $N = n_0+n_1+n_2+n_3+n_4+n_5$ = प्रेक्षित सूची में कुल गृहों की संख्या, इसको कुल बारंबारता कहते हैं।

यह जानना आवश्यक है कि प्रत्येक सारणी का एक शीर्षक होता है, जिसमें सारणी में विद्यमान विषय-वस्तु की संक्षिप्त व्याख्या दी होती है। यह शीर्षक प्रायः सारणी के ऊपर लिखा होता है, जैसा कि उपरोक्त सारणी 5.1 में दिखाया गया है। इस प्रकार, शीर्षक लिखने से प्रस्तुत सारणी की पहचान करने में सुविधा रहती है तथा इसके विषय-वस्तु के बारे में भी कोई अस्पष्टता नहीं रहती।

सारणी के बाएं छोर वाले हिस्से को स्थूण (stub) कहते हैं। इस हिस्से में सारणी की पंक्तियों की व्याख्या दी हुई होती है जैसे सारणी 5.1 में विभिन्न शैक्षिक स्तर लिखे गए हैं।

सारणी के प्रत्येक स्तम्भ पर भी शीर्षक होता है, जोकि स्तंभ की विषय-वस्तु का विवरण प्रदान करता है। आप सारणी 5.1 में स्तम्भों के शीर्षक देखिए।

सारणी के मुख्य भाग में प्रासंगिक संख्यात्मक राशियाँ दी होती हैं (सारणी 5.1 में बारंबारता)।

यहाँ यह ध्यान रखना आवश्यक है कि ऊपर दी गई सारणी में दिए अवयव मुख्यतः सामान्य समझ के लिए हैं। वास्तविक सारणी तैयार करने में यह संभव है कि इनमें से कुछ अवयव गायब हो जाएं तथा स्पष्टतः, अच्छी समझ और संचार में लाभ के लिए सारणी में कुछ अन्य विशेषताओं को भी सम्मिलित किया जा सकता है।

बहुधा सारणी से संलग्न एक टिप्पणी (footnote) दी होती है, जो सारणी की विषय-वस्तुओं को स्पष्ट रूप से समझने में सहायक होती है। प्रायः इस टिप्पणी में प्राथमिक या द्वितीयक आंकड़ों के स्रोत की जानकारी दी होती है, जिनके आधार पर सारणी बनाई गई है। इसके साथ ही, इसमें सारणी को उपयुक्त ढंग से समझने के लिए इसमें दी हुई उपसामग्री तथा स्तम्भ शीर्षकों का विस्तार से विवरण दिया होता है। उदाहरण के लिए, सारणी 5.1 में कुछ शैक्षिक स्तरों का विवरण बहुत लम्बा हो सकता है और उसको सारणी में लिखना संभव नहीं है। अतः हम यह निर्णय ले सकते हैं कि सारणी में इन शैक्षिक स्तरों के स्थान पर सिर्फ उनके संकेत का प्रयोग किया जाएगा। वास्तविक शैक्षिक स्तर तथा उनके लिए प्रयोग किए गए संख्यात्मक संकेत के बारे में विस्तृत विवरण इस टिप्पणी में दिया जाना चाहिए।

यहाँ यह ध्यान रहे कि सारणी 5.1 का प्रयोग सरल प्रकार के सारणी निर्माण में भूल तथा अत्यन्त महत्वपूर्ण विशेषताओं को समझाने के लिए, एक निदर्शी (illustrative) उदाहरण के रूप में किया गया है। सारणी 5.1 एक विशेष प्रकार की सारणी है, जिसमें बारंबारता आंकड़े हैं तथा यहाँ एक प्रकार की गिनती की जाती है। प्रेक्षित तथा लिखित सूची से हम गृहों के मुखिया के एक विशेष शैक्षिक स्तर "i" वाले गृहों की गिनती "n_i" करते हैं। कुछ परिस्थितियों में हमारी रुचि सिर्फ इस गिनती में नहीं होती, बल्कि हम इन n_i गृहों में से उन गृहों का प्रतिशत भी ज्ञात करना चाहते हैं, जिनके परिवार का आकार चार या इससे अधिक है। यहाँ हमारा उद्देश्य यह जानना हो सकता है कि मुखिया के शैक्षिक स्तर में परिवर्तन से इस प्रतिशत में किस प्रकार परिवर्तन होता है। इस परिस्थिति में सारणी का शीर्षक भी बदलना होगा, जो अब इस प्रकार लिखा जा सकता है : गृहों के मुखिया के विभिन्न शैक्षिक स्तरों के लिए चार या इससे अधिक आकार वाले गृहों का प्रतिशत।

इस सारणी में बारंबारता (जैसा कि सारणी 5.1 में है) के स्थान पर अब ये प्रतिशत लिखे जाएंगे।

5.4.3 द्विधा सारणी

हमने सारणी 5.1 में प्रेक्षणों (जिनकी इकाई गृह है) का वर्गीकरण सिर्फ एक प्रकार से किया, अर्थात् मुखिया के शैक्षिक स्तर के अनुसार। वर्गीकरण एक साथ दो या अधिक दिशाओं में भी किया जा सकता है। सरलता के लिए हम यहाँ भी गुण आंकड़ों तक ही सीमित रहेंगे। उपभाग 5.2.2 में दी गई सूची के अनुसार हम x_2 के साथ x_8 (K मुखिया का लिंग) ले सकते हैं। इस प्रकार, सारणी 5.1 के प्रस्तुतीकरण में परिवर्तन करके सारणी 5.2 को निम्नलिखित तरीके से लिख सकते हैं :

सारणी 5.2 : मुखिया के शैक्षिक स्तर तथा लिंग के अनुसार गृहों का वर्गीकरण

शैक्षिक स्तर	लिंग		
	पुरुष	महिला	योग n_i
अनपढ़	n_{01}	n_{02}	n_0
प्राथमिक शिक्षा	n_{11}	n_{12}	n_1
माध्यमिक शिक्षा	n_{21}	n_{22}	n_2
उच्चतर माध्यमिक शिक्षा	n_{31}	n_{32}	n_3
स्नातक	n_{41}	n_{42}	n_4
स्नातकोत्तर तथा इससे अधिक शिक्षा	n_{51}	n_{52}	n_5
योग	N_1	N_2	N

टिप्पणी : 1) स्रोत ....
2) सारणी में संख्याएं गृहों की बारंबारता को व्यक्त करती हैं।

3) सारणी 5.2 में $n_i = n_{i1} + n_{i2} + i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$

$$N_1 = n_{01} + n_{11} + n_{21} + n_{31} + n_{41} + n_{51}$$
$$N_2 = n_{02} + n_{12} + n_{22} + n_{32} + n_{42} + n_{52}$$

जैसे हमने 5.1 में परिष्करण किया था, उसी प्रकार इस सारणी में भी हम इसके 12 खानों या कोषों (cells)में प्रत्येक के लिए चार या उससे अधिक आकार वाले गृहों का प्रतिशत निकाल कर उसे बारंबारता के स्थान पर लिखकर नई सारणी बना सकते हैं।

5.4.4 बहुधा सारणी

निर्मित सारणी में बारंबारता हो भी सकती है और नहीं भी। वर्गीकरण की दिशाओं में उत्तरोत्तर वृद्धि करके सारणी के आकार में वृद्धि की जा सकती है। अब हम आंकड़ों के बहुधा वर्गीकरण की सारणी पर ध्यान केन्द्रित करेंगे। ये आंकड़े एक द्वितीयक स्रोत से लिए गए हैं यानी एक मानक प्रकाशन से।

सारणी 5.3 : भारतीय श्रम शक्ति के विभिन्न संवर्गों में प्रति हज़ार पुरुषों पर महिलाओं की संख्या

वर्ष	श्रमिक				गैर-श्रमिक	कुल जनसंख्या
	कुल	प्राथमिक	द्वितीयक	तृतीयक		
1901	504	534	543	358	1077	972
1911	525	550	548	390	1676	964
1921	516	545	501	379	1629	955
1931	453	466	423	410	1656	950
1951	408	470	291	257	1580	946
1961	460	552	348	210	1581	941
1971	210	240	194	104	1726	930

स्रोत : भारतीय जनगणना

सारणी 5.3 में दी हुई संख्याएं समस्त भारत के जनगणना वर्षों 1901 से 1971 के लिए हैं, जिनमे 1941 के वर्ष के लिए अंतराल है। इस वर्ष में युद्धकालीन अर्थव्यवस्था के कारण कुछ जनगणना आंकड़ों का सारणीयन नहीं किया गया।

स्पष्टत: मूल सारणी को जनगणना प्रकाशनों में उपलब्ध आंकड़ों से तैयार किया गया है। इन सभी बातों का जिक्र करने का मुख्य उद्देश्य द्वितीय स्रोत की प्रकृति के बारे में जानकारी देना होत है। हमें अधिक जाँच या पूछताछ करते समय प्राय: स्रोत की सहायता की आवश्यकता होती है।

5.4.5 प्रतिवेदन लेखन

उपभाग 5.3.1 (जिसमें आंकड़ों के संगठन से संबंधित विभिन्न चरणों का जिक्र है) में चर्चित मद (√) जो सारणीयन तथा विश्लेषण के बाद आता है, आंकड़ों के संगठन का अंतिम चरण होता है। इसको प्रतिवेदन लेखन कहते हैं। इस लेखन में निर्मित सारणी की मुख्य विशेषताओं की व्याख्या दी जाती है। गहन सांख्यिकीय विश्लेषण के बिना ही हम सारणी 5.3 से आंकड़ों की कुछ प्रवृत्ति तथा संरचना के बारे में जान सकते हैं। आंकडों के सारणीयन के बाद पता चलने वाली किसी भ रुचिकर विशेषता को शब्दों में लिखा जाना चाहिए, इसको सारणी के साथ प्रतिवेदन कहते हैं। सारणी 5.3 की संख्याओं को देखने से पता चलता है कि सभी संवर्गों (सिर्फ गैर-श्रमिक संवर्ग के छोड़कर) में समय के साथ महिलाओं के तुलनात्मक अंश में कमी आई है। इस बात का जिक्र सारणी के साथ दिए जाने वाले प्रतिवेदन में किया जाना चाहिए।

5.4.6 तिर्यक तथा समावेशी वर्गीकरण

द्विधा तथा बहुधा वर्गीकरण, उदाहरणों में दिए गए वर्गीकरण की तरह हो सकता है, जिसका वर्णन सारणी 5.1 तथा सारणी 5.2 में किया गया है। लेकिन इस वर्गीकरण के और भी रूप हो सकते हैं। हम सारणी 5.2 पर फिर से ध्यान केन्द्रित करते हैं। इस सारणी में दिया हुआ वर्गीकर इस प्रकार का है कि एक प्रकार के वर्गीकरण का संवर्ग स्तर दूसरे प्रकार के वर्गीकरण के संवर्ग स्तरों से पूर्ण रूप से स्वतंत्र हैं तथा पहले वर्गीकरण के प्रत्येक स्तर के साथ, दूसरे वर्गीकरण का कोई भी स्तर हो सकता है। इस प्रकार के वर्गीकरण को तिर्यक वर्गीकरण कहते हैं। सारणी 5.2

' वर्गीकरण जो लिंग तथा शैक्षिक स्तर पर आधारित है, त्रियक वर्गीकरण का उदाहरण है। हम से अधिक प्रकार के वर्गीकरण के लिए इसी विचार का विस्तार कर सकते हैं। उपभाग 5.2.2 चर्चित गृह के लिए हम तीन चरों :

x_1 = गृह का आकार
x_2 = मुखिया का शैक्षिक स्तर
x_3 = मुखिया का लिंग, को लेते हैं।

ड़ाँ पर परिभाषित प्रत्येक वर्गीकरण स्तर दूसरे वर्गीकरण स्तर से बिल्कुल स्वतंत्र है तथा किसी र्गीकरण का प्रत्येक स्तर अन्य वर्गीकरण के किसी भी स्तर के साथ हो सकता है। एक ल्पनिक त्रिधा सारणी (सारणी की विषय-वस्तु निर्धारित नहीं है, इसलिए यह बिना शीर्षक है) म्नलिखित प्रकार की होगी :

रणी 5.4 : ....

क्षिक स्तर	गृह का आकार					योग
	1	2	3	4	5	
	M F T	M F T	M F T	M F T	M F T	
नपढ़						
थमिक शिक्षा						
ध्यमिक शिक्षा						
च्चतर माध्यमिक शिक्षा						
ातक						
ातकोत्तर तथा अधिक						
ग						

प्पणी : M पुरुष को व्यक्त करता है।
F महिला को व्यक्त करता है।
T योग को व्यक्त करता है।

र्गीकरण का एक और रूप हो सकता है, जिसे समावेशी वर्गीकरण कहते हैं। इस प्रकार के र्गीकरण को हमने सारणी 5.3 में, बिना जिक्र किए, प्रयोग किया है।

ब हम भारत के उद्योगों (यहाँ कृति, वन कार्य, मछली पालन आदि उद्योगों के वर्गीकरण में म्मेलित हैं) के अनुसार श्रमिकों के बंटन पर ध्यान देते हैं। इस परिस्थिति में मुख्य वर्गीकरण स प्रकार का हो सकता है :

- कृषि
- वन कार्य
- मछली पालन
- खनन
- निर्माण (manufacturing)
- विनिर्माण (construction)
- परिवहन
- व्यापार
- सार्वजनिक प्रशासन तथा प्रतिरक्षा आदि

म बड़े कृषि संवर्ग को (i) कृषक (ii) कृषि श्रमिक; तथा (iii) अन्य कृषि कार्यों में लगे श्रमिक जैसे टे-छोटे संवर्गों में विभाजित कर सकते हैं। इसी प्रकार, परिवहन संवर्ग के भी (i) नागरिक ड्डयन (ii) रेलवे; तथा (iii) अन्य जैसे छोटे संवर्ग किए जा सकते हैं। उपरोक्त अन्य संवर्गों लिए मान लेते हैं कि इनको छोटे-छोटे संवर्गों में विभाजित नहीं किया जा सकता। यहाँ पर सरी वर्गीकरण व्यवस्था का समावेश पहली वर्गीकरण व्यवस्था में हुआ है और यह पहली र्गीकरण व्यवस्था के प्रत्येक स्तर के लिए भिन्न है।

रणी रूप में पहली वर्गीकरण व्यवस्था द्वारा बड़े संवर्गों तथा दूसरी वर्गीकरण व्यवस्था जो हली में समावेशी है, द्वारा छोटे वर्गों (अगर कोई है) को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

- कृषि :
  - i) कृषक
  - ii) कृषि श्रमिक

iii) अन्य कृषि कार्य में लगे श्रमिक
iv) योग

2) निर्माण :
   i) पंजीकृत
   ii) अपंजीकृत
   iii) योग

3) वन कार्य

4) मछली पालन, इत्यादि।

सारणी 5.3 में श्रम शक्ति के मुख्य संवर्ग (i) श्रमिक; तथा (ii) गैर-श्रमिक हैं। श्रमिक संवर्ग को तीन छोटे संवर्गों में विभाजित किया गया है : (i) प्राथमिक (ii) द्वितीयक (iii) तृतीयक। सामान्यत: वर्गीकरण अंशत: तिर्यक तथा अंशत: समावेशी हो सकते हैं। इस व्याख्या के बाद इनकी सारणी बनाना कोई कठिन कार्य नहीं होना चाहिए।

उपरोक्त विवेचन से यह स्पष्ट हो जाता है कि एक उपयुक्त सारणी के प्रस्तुतीकरण के लिए लक्षण का गुण या चर होना अथवा चर का असंतत या संतत होना कोई महत्व नहीं रखता। इन सभी परिस्थितियों में आवश्यक विधि एक जैसी है। वर्गीकृत किए जाने वाले विचाराधीन लक्षणों में हम कुछ परस्पर अपवर्जी तथा नि:शेष स्तर ज्ञात कर लेते हैं। एक विशेष प्रकार के वर्गीकरण के अनुरूप एक स्तर निम्नलिखित में से किसी को भी निरूपित कर सकता है :

i) एक वर्ग या उनको मिलाकर बने समूह को,
ii) एक मान या अर्थपूर्ण मानों के समुच्चय को (जोकि प्राय: लगातार होते हैं),
iii) संतत चर के एक परिसर को।

इस आवश्यक सच्चाई को मानते हुए भी यह आभास होना आवश्यक है कि चरों के परस्पर अपवर्जी तथा नि:शेष स्तरों को ज्ञात करने में कठिनाइयों के कारण इनको, विशेष रूप से संतत चरों को, एक विशेष प्रकार के व्यवहार की आवश्यकता होती है। चरों के संदर्भ में हम प्राय: इन स्तरों को वर्ग (classes) कहते हैं तथा एक वर्ग एक चर के मानों के समुच्चय को निरूपित करता है। जब चर असंतत होता है तो इसके मान समुच्चय में सिर्फ एक मान या कुछ लगातार (consecutive) पृथक मान होते हैं। जब चर संतत होता है तो वर्ग का निरूपण करने वाला समूह प्राय: एक परिसर होता है। विभिन्न परिसर इस प्रकार के बनाए जाते हैं, कि ये परस्पर व्यापी न हों अर्थात् प्राय: परिसर का बायां सिरा बंद (या परस्पर अपवर्जी) तथा दायां सिरा खुला होता है।

5.5 बारंबारता बंटन

बारंबारता बंटन एक सांख्यिकीय तालिका होती है, जिसमें चर के मानों को उनके आकार (जोकि व्यष्टिगत या समूह में हो सकता है) के अनुसार व्यवस्थित किया होता है तथा साथ ही उनकी बारंबारता लिखी होती है। जब चर संतत हो तो मानों का आकार वर्ग अंतरालों (Class-interval) के रूप में होगा।

5.5.1 बारंबारता सारणी के वर्गों का निर्धारण

प्रेक्षित संतत चर के उपयुक्त वर्गों को बनाने की क्रिया का हम विस्तार से विवेचन करेंगे, क्योंकि व्यावहारिक दृष्टि से यह एक महत्वपूर्ण समस्या है।

एक विचाराधीन चर के प्रेक्षित आंकड़े किसी निश्चित मापन इकाई द्वारा दर्ज किए जाते हैं। इस मापन इकाई की परिशुद्धता निश्चित होती है, जो अंशत: दर्ज हुए आंकड़ों द्वारा प्रकटित (revealed) होती है (जैसे संख्याएं लाखों में या हज़ारों में दी हुई हों, जोकि इकाई के स्थान तक या दशमलव बिन्दु के बाद तीसरे स्थान तक ठीक हों)। यहाँ हमारी यह मान्यता है कि व्यष्टि प्रेक्षण द्वारा दिए हुए आकार में दर्ज की हुई संख्याएं चर के सही मान को निरूपित करती हैं। हमारा पहला कार्य चर में परिवर्तन के पूरे परिसर को ज्ञात करना है। इसके लिए हम प्रेक्षित आंकड़ों में न्यूनतम और अधिकतम मान का पता करते हैं। इसके बाद इस परिसर (न्यूनतम से अधिकतम) को उपयुक्त संख्या में ऐसे वर्गों में विभाजित किया जाता है, जो परस्पर व्यापी न हों (nonverlapping)। तत्पश्चात प्रत्येक वर्ग में आने वाली व्यष्टियों की संख्या की गणना की जाती है। सकी विस्तार से व्याख्या हम एक उदाहरण द्वारा करेंगे।

क समरूप ग्रामीण समुदाय के एक सामाजिक समूह के प्रत्येक 100 गृहों से हमने निम्नलिखित रों के मान प्राप्त किए हैं:

दाहरण 5.1

X = गृह की औसत मासिक आय (रुपयों में)

Y = गृह का खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय (रुपयों में)

Z = गृह का आकार (= गृह के सदस्यों की संख्या)

00 गृहों के लिए X, Y तथा Z के मान निम्नलिखित सारणी में दिए गए हैं।

गृह की क्रम संख्या	X	Y	Z	गृह की क्रम संख्या	X	Y	Z
1	588	393	3	11	570	364	3
2	534	319	4	12	673	371	4
3	557	329	2	13	480	301	2
4	543	362	2	14	581	361	3
5	650	406	6	15	574	365	4
6	605	336	4	16	514	340	4
7	619	320	4	17	478	297	2
8	597	321	3	18	581	361	3
9	502	338	2	19	585	346	4
10	472	288	1	20	610	310	2
21	543	323	3	31	552	376	5
22	580	348	4	32	577	341	4
23	592	357	5	33	583	393	7
24	522	300	2	34	565	364	6
25	592	380	2	35	555	302	2
26	594	365	5	36	619	387	3
27	544	352	6	37	552	386	5
28	457	313	2	38	641	379	4
29	602	345	3	39	511	360	4
30	586	396	4	40	540	336	3
41	577	338	4	51	536	352	6
42	573	384	5	52	527	353	3
43	445	300	2	53	517	355	4
44	446	263	1	54	655	400	8
45	587	316	3	55	588	350	6
46	606	339	4	56	623	387	4
47	574	335	4	57	614	328	4
48	574	367	3	58	622	335	3
49	573	398	5	59	690	372	3
50	646	406	8	60	593	362	4
61	608	360	4	71	620	381	4
62	536	348	5	72	577	368	5
63	579	341	4	73	551	301	5
64	628	361	3	74	620	364	4
65	620	343	3	75	620	384	4
66	637	390	5	76	447	332	3
67	608	376	6	77	515	324	3
68	602	361	3	78	555	331	2
69	586	371	4	79	491	320	3
70	451	288	2	80	532	292	2

गृह की क्रम संख्या	X	Y	Z	गृह की क्रम संख्या	X	Y	Z
81	562	354	4	91	513	306	3
82	597	337	4	92	570	336	4
83	556	343	3	93	607	382	4
84	522	359	5	94	567	345	3
85	640	381	6	95	553	297	1
86	539	402	7	96	568	334	3
87	519	352	3	97	569	303	2
88	542	390	4	98	591	360	4
89	546	307	5	99	606	356	4
90	617	333	4	100	543	323	2

दोनों चरों X तथा Y के लिए इकाई रुपयों में है तथा इनके मान इकाई के स्थान तक ठीक हैं। व्याख्या की दृष्टि से हम चर X पर ही ध्यान देंगे।

पहले हम आंकड़ों का न्यूनतम तथा अधिकतम मान ज्ञात करते हैं। यह क्रमशः 445 तथा 690 है। कुल प्रेक्षणों की संख्या 100 है। हमें वर्गों की संख्या "K" का निर्धारण करना है। K के निर्धारण का कोई निश्चित नियम नहीं होता। K का मान कुल प्रेक्षणों की संख्या (यहाँ कुल प्रेक्षण 100 हैं) पर प्रेक्षणों के कुल परिसर पर, तथा प्रेक्षित आंकड़ों द्वारा चित्रित चर के व्यवहार पर निर्भर होता है। यहाँ हमारी यह मान्यता है कि सामाजिक समूह विशेष को निरूपित करने वाले गृहों की समष्टि का आकार बहुत बड़ा है। यह मान्यता वास्तविक या काल्पनिक हो सकती है। प्रेक्षित 100 गृह इस समष्टि का अंश या प्रतिदर्श हैं। जब हम चर के व्यवहार की बात करते हैं तो इससे हमारा अर्थ चर का समष्टि में व्यवहार से होता है। इस व्यवहार का 100 गृहों से दर्ज प्रेक्षित व्यवहार के पूर्ण समरूप होना आवश्यक नहीं होता। समष्टि में चर के व्यवहार की पूर्ण जानकारी कभी भी नहीं होती, लेकिन कुछ हद तक इसका संतोषजनक अनुमान करना संभव होता है। इस प्रकार के अनुमान प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक है कि प्रेक्षित आंकड़ों का निरूपण करने वाले प्रतिदर्श का चयन कुछ सांख्यिकीय सिद्धांतों के आधार पर किया जाना चाहिए।

वर्गों की संख्या ज्ञात करने के लिए कुछ सामान्य निर्देश :

i) वर्गों की संख्या बहुत अधिक नहीं होनी चाहिए। जब चर के व्यवहार में कुछ अच्छी विशेषताएं पाई जाएं तो प्रायः वर्गों की संख्या 15 या 25 से अधिक नहीं होनी चाहिए। जब प्रेक्षणों की कुल संख्या बहुत बड़ी न हो तो वर्गों की असमानुपाती बड़ी संख्या से आंकड़ों का वर्णन बिल्कुल गलत हो सकता है, क्योंकि कुछ वर्गों में, प्रेक्षणों की संख्या शून्य या बहुत कम होगी।

ii) वर्गों की संख्या बहुत कम नहीं होनी चाहिए, जैसे 2 या 3 आदि। अगर वर्गों की संख्या कम रखी गई हैं तो प्राप्त किए गए बारंबारता बंटन द्वारा चर व्यवहार के स्वरूप को ठीक प्रकार से प्रदर्शित नहीं किया जा सकेगा।

iii) जब कुल प्रेक्षणों की संख्या (= कुल बारंबारता) अधिक हो तो हम वर्गों की संख्या थोड़ी-सी अधिक ले सकते हैं।

iv) विभिन्न वर्गों का अंतराल समान या असमान हो सकता है।

इन 100 प्रेक्षणों के लिए वर्गों की संख्या 8 लेना उचित प्रतीत होता है। इनका वर्गीकरण तथा बारंबारता बंटन तैयार करने के बाद हमें यह जाँच करनी होती है कि क्या अध्ययन किए जाने वाले चर के व्यवहार की पकड़ ठीक से हो पाई है अथवा नहीं। अगर हम संतुष्ट नहीं हैं तो हम वर्गों की संख्या में परिवर्तन करके (कमी या वृद्धि, जिसका पता पहले तैयार किए बंटन द्वारा होता है) इस क्रिया को दोहराते हैं। प्रत्येक वर्ग की दो परिसीमाएं (Boundary) होती हैं, जिनको क्रमशः निम्न वर्ग परिसीमा तथा उच्च वर्ग परिसीमा कहा जाता है। पहले वर्ग की निम्न परिसीमा का प्रेक्षित आंकड़ों के न्यूनतम मान "m" के बराबर होना आवश्यक नहीं है (उदाहरण 5.1 में m=445)। इसी प्रकार, अंतिम वर्ग की उच्च परिसीमा प्रेक्षित आंकड़ों के अधिकतम मान "M" के बराबर होना आवश्यक नहीं होता (उदाहरण 5.1 में M = 690 है)। **यहाँ सिर्फ यह आवश्यक है कि पहले वर्ग की निम्न परिसीमा $\leq$ m होनी चाहिए तथा अंतिम वर्ग की उच्च सीमा $\geq$ M होनी चाहिए।** लेकिन यह ध्यान रहे कि असमता की परिस्थिति में यह अंतर जहाँ तक संभव हो, छोटा

होना चाहिए। यह भी ध्यान रखना महत्वपूर्ण है कि वर्गों का निर्माण बिना सोचे-समझे नहीं करना चाहिए और वर्ग परिसीमाएँ (चाहे वर्ग अंतराल समान हों या नहीं) वास्तविक प्रतीत होनी चाहिए (जैसे जब प्रेक्षित आँकड़े सिर्फ इकाई स्थान तक ठीक दर्ज हों तो परिसीमाओं को निरूपित करने वाली संख्याओं में दशमलव के बाद संख्याएँ न हों)। उदाहरण 5.1 में X के परिवर्तन का प्रेक्षित परिसर 445-690 है। अगर हम 8 वर्गों का निर्माण करना चाहते हैं जिनके अंतराल समान

हों तो प्रत्येक वर्ग का अंतराल $\frac{690-445}{8} = \frac{245}{8} = 30.625 \simeq 31$ होगा।

हम सुविधापूर्वक न्यूनतम प्रेक्षित मान अर्थात् 445 से शुरू कर सकते हैं। वर्गों को परस्पर व्यापी होने से रोकने के लिए उनकी परिसीमा प्राप्त करने से पहले वर्ग सीमा (Class limits) की अवधारणा से परिचय आवश्यक है। वर्ग सीमाओं के रूप में विभिन्न वर्गों को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

445-475
476-506
507-537
538-568
569-599
600-630
631-661
662-692

यहाँ यह ध्यान देने योग्य है कि किसी वर्ग में जिसकी सीमाएँ L तथा U है, वे सभी गृह सम्मिलित होंगे, जिनके मान $X \geq L$ तथा $X \leq U$ हैं। इसके साथ, यह भी ध्यान रखना चाहिए कि वर्ग सीमाएँ इकाई स्थान तक ठीक लिखी गई हैं, जो हमारी परिशुद्धता का स्तर है तथा दर्ज किए हुए प्रेक्षणों के आकार से मेल खाता है। यहाँ पर एक और बात ध्यान देने योग्य है कि दो लगातार वर्गों के बीच अंतराल है। जैसे पहले वर्ग की उच्च सीमा 475 है तथा दूसरे वर्ग की निम्न सीमा 476 है। प्रेक्षणों के स्पष्ट रूप से वर्गीकरण के लिए ऐसा किया गया है कि जिससे इनके गैर-परस्परव्यापी रूप को बनाए रखा जा सके। उपरोक्त वर्गीकरण द्वारा अंतिम वर्ग की उच्च सीमा "692", अधिकतम प्रेक्षित माप "690" से अधिक हो गई है, जिससे कोई विशेष फर्क नहीं पड़ता है।

हमारे उदाहरण में चर X एक संतत चर है, इसलिए हम विभिन्न वर्गों के बीच अंतराल जो उनकी सीमाओं के निर्धारण के कारण उत्पन्न हुआ है, को रखना पसंद नहीं करते। इसको दूर करने के लिए हम प्रत्येक वर्ग की उच्च सीमा में 0.5 जोड़ देते हैं तथा न्यून सीमा से 0.5 घटा देते हैं। यह करने पर हमें भिन्न वर्ग परिसीमाएँ प्राप्त होंगी। यह करना बिल्कुल ठीक है, क्योंकि एक प्रेक्षण 475 को 474.5 तथा 475.5 के बीच होना चाहिए। इसी प्रकार प्रेक्षण 476 को 475.5 तथा 476.5 के बीच होना चाहिए। इस प्रकार वर्ग परिसीमाओं द्वारा निरूपित वर्गों का अंतराल खुला (open interval) होता है और हमारे दर्ज किए हुए प्रेक्षण इन परिसीमाओं के बीच पाए जाते हैं। ऊपर दी हुई वर्ग सीमाओं के लिए वर्ग परिसीमाएं इस प्रकार होंगी :

वर्ग सीमाएँ	वर्ग सीमाएँ
445—475	444.5—475.5
476—506	475.5—506.5
507—537	506.5—537.5
538—568	537.5—568.5
569—599	568.5—599.5
600—630	599.5—630.5
631—661	630.5—661.5
662—692	661.5—692.5

यहाँ यह ध्यान दीजिए कि प्रत्येक वर्ग का अंतराल जो इसकी उच्च परिसीमा तथा निम्न परिसीमा का अंतर होता है, 31 है। इस बात का ध्यान शुरू में वर्गों की उपयुक्त सीमाएं बनाते समय रखा गया था।

समान अंतराल वाले आठ गैर-परस्परव्यापी वर्गों का निर्माण, निम्नलिखित तरीके से सारणी बनाकर भी किया जा सकता है। इससे विभिन्न वर्गों के बीच अंतर को समाप्त कर चर की संतत प्रकृति को बनाए रखा जा सकता है।

वर्ग परिसीमाएं
444—475
475—506
506—537
537—568
568—599
599—630
630—661
661—692

यहाँ सिर्फ एक प्रतिबंध की आवश्यकता है : वर्ग L—U में X के सिर्फ वह मान होने चाहिए जोकि $L < X \leq U$ शर्त को संतुष्ट करते हैं। अर्थात् इस परिस्थिति में वर्ग बाईं ओर से खुला तथा दाईं ओर से बंद होता है।

एक दी हुई परिस्थिति में वर्ग निर्माण के लिए उपरोक्त दो में से किसी एक प्रणाली का प्रयोग किया जा सकता है।

5.5.2 बारंबारता बंटन तैयार करना

परस्पर अपवर्जी तथा नि:शेष वर्ग अंतराल बनाने के बाद हम प्रत्येक प्रेक्षण की जाँच करके यह पता करते हैं कि वह किस वर्ग में आता है तथा उस वर्ग के सामने मिलान चिह्न (tally mark) लगा देते हैं। प्रत्येक वर्ग के लिए कुल मिलान चिह्नों की गिनती की जाती है, जोकि उस वर्ग की बारंबारता होती है। इस प्रकार, एक चर के लिए प्रेक्षित आंकड़ों के समुच्चय से एक बारंबारता सारणी बनाई जाती है।

सारणी 5.5 : गृहों की आय का बारंबारता बंटन (रुपयों में)

वर्ग	मिलान चिह्न	बारंबारता
444.5—475.5	$\cancel{||||}$ |	6
475.5—506.5	||||	4
506.5—537.5	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ |||	13
537.5—568.5	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$	20
568.5—599.5	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ ||||	29
599.5—630.5	$\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$ $\cancel{||||}$	20
630.5—661.5	$\cancel{||||}$ |	6
661.5—692.5	||	2
योग		100

स्रोत : उदाहरण 5.1 के गृह आंकड़

यह ध्यान दीजिए कि मिलान चिह्न लगाते समय गिनती की सुविधा के लिए प्रत्येक पाँचवा चिह्न विकर्ण के रूप में लगाया जाता हैं।

सारणी 5.5 में प्रस्तुत बारंबारता बंटन को सांख्यिकीय शब्दावली में एक विचर बारंबारता बंटन (Univariate frequency distribution) कहते हैं। यहाँ पर विचाराधीन चरों की संख्या एक है तथा वर्गीकरण भी एकधा है। अगर हम दो चरों द्वारा द्विधा वर्गीकरण करें तो हमें द्विचर बारंबारता बंटन प्राप्त होगा। उदाहरण 5.1 में दिए हुए आंकड़ों के लिए हम X तथा Y के प्रयोग द्वारा द्विचर बारंबारता बंटन बना सकते हैं। यहां Y के वर्ग अंतराल बनाने के लिए हमें वही अभ्यास (जो X के लिए किया था) दोबारा करना पड़ेगा।

Y का न्यूनतम मान = 263

Y का अधिकतम मान = 406

Y के परिवर्तन परिसर के लिए मान लिया हम 6 वर्ग बनाने का निर्णय लेते हैं।

अब $\frac{406-263}{6} = \frac{143}{6} = 23.83 \simeq 24$ (यह वर्ग का अंतराल होगा)

अगर सभी वर्गों के अंतराल समान रखने हैं तो विभिन्न वर्गों की परिसीमाएं इस प्रकार होंगी :

262.5—286.5
286.5—310.5
310.5—334.5
334.5—358.5
358.5—382.5
382.5—406.5

X तथा Y का द्विचर बारंबारता बंटन सारणी 5.6 में दिया गया है।

सारणी 5.6 : चरों का द्विचर बारंबारता बंटन

उदाहरण 5.1 में दिए गए आंकड़ों के लिए गृह की मासिक आय (X) तथा गृह का खाद्य सामग्री पर मासिक व्यय (Y)

Y के वर्ग / X के वर्ग	262.5—286.5	286.5—310.5	310.5—334.5	334.5—358.5	358.5—382.5	382.5—406.5	योग
444.5-475.5	1	3	2	0	0	0	6
475.5-506.5	0	2	1	1	0	0	4
506.5-537.5	0	3	3	6	1	0	13
537.5-568.5	0	4	5	5	3	3	20
568.5-599.5	0	1	2	10	11	5	29
599.5-630.5	0	1	3	6	7	3	20
630.5-661.5	0	0	0	0	2	4	6
661.5-692.5	0	0	0	0	2	0	2
योग	1	14	16	28	26	15	100

इसको बनाने की मिलान चिह्न विधि इस प्रकार है :
पहले गृह के लिए X = 588 तथा Y = 393

X (= 588) का मान 568.5-599.5 वर्ग में है तथा Y (= 393) का मान 382.5-406.5 वर्ग में है। उस खाने या कोष (cell) में जिसका X वर्ग 568.5-599.5 है तथा Y वर्ग 382.5-406.5 है एक मिलान चिह्न लगा देते हैं। इसी विधि को 100 गृहों के लिए दोहराया जाता है। प्रत्येक खाने में मिलान चिह्नों की संख्या गिन ली जाती है, जोकि उसकी बारंबारता होती है। पंक्ति तथा स्तम्भों के जोड़ भी प्राप्त किए जा सकते हैं, जिनसे क्रमशः X तथा Y का उपांत बारंबारता बंटन (marginal frequency distribution) प्राप्त किया जा सकता है।

बिल्कुल ऐसी प्रविधि के प्रयोग द्वारा बहुचर बारंबारता सारणी भी तैयार की जा सकती है। जैसा कि विस्तार से समझाया गया है, जब कुछ वर्गीकरण चरों के अनुसार हों तथा अन्य गुणों के अनुसार हों तो परिस्थिति में कोई अंतर नहीं होता।

बोध प्रश्न 2

1) निम्नलिखित से बारंबारता बंटन तैयार कीजिए :

7, 4, 3, 5, 6; 3, 3, 2, 4, 3; 4, 3, 3, 4, 4,
3, 2, 2, 4, 3; 5, 4, 3, 4, 3; 4, 3, 1, 2, 3,

....
....
....
....
....
....
....

2) 20 कर्मचारियों का मासिक वेतन (रुपयों में) निम्नलिखित है :

130, 62, 145, 118, 125, 76, 151, 142, 110, 98
95, 116, 100, 103, 71, 85, 80, 122, 132, 95

वर्ग अंतराल रु. 61-80, 81-100, 101-120, 121-140 तथा 141-160 लेकर बारंबारता बंटन बनाइए।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) किसी परीक्षा में 70 परीक्षार्थियों द्वारा प्राप्त अंक निम्नलिखित हैं :

21	31	35	52	64	74	89	53	42	7
22	35	43	67	76	35	46	26	32	40
72	43	38	41	63	71	28	32	45	54
15	18	52	73	86	50	39	55	47	12
44	58	67	85	39	40	50	65	72	69
57	63	5	56	79	37	24	54	82	49
51	54	68	29	34	44	58	62	59	65

वर्ग अंतराल 10 को समान रखकर तथा पहले वर्ग की निम्न सीमा 0 लेकर अंकों का बारंबारता बंटन बनाइए।

....

....

....

....

....

....

....

4) किसी शहर के 50 व्यक्तियों की मृत्यु के समय आयु (वर्षों में) निम्नलिखित है :

36	48	50	45	49	31	50	48	43	42
37	32	40	39	41	47	45	39	43	47
38	39	37	40	32	52	56	31	54	36
51	46	41	55	58	31	42	53	32	44
53	36	60	59	41	53	58	36	38	60

10 वर्ग अंतराल लेकर बारंबारता बंटन तैयार कीजिए तथा प्रत्येक वर्ग के लिए प्रतिशत बारंबारता बंटन ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5) 60 विद्यार्थियों की ऊंचाई का बंटन निम्नलिखित सारणी में दिया गया है :

ऊंचाई (सें. मी. में)	145.0-149.9	150.0-154.9	155.0-159.9
विद्यार्थियों की संख्या	2	5	9
ऊंचाई (सें. मी. में)	160.0-164.9	165.0-169.9	170.0-174.9
विद्यार्थियों की संख्या	15	16	7
ऊंचाई (सें. मी. में)	175.0-179.9	180.0-184.9	
विद्यार्थियों की संख्या	5	5	

इस बंटन के संदर्भ में वर्ग सीमा तथा वर्ग परिसीमाओं की व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5.6 सारांश

इस इकाई में आपका परिचय आंकड़ों के सारणीय प्रस्तुतीकरण की प्रविधियों से कराया गया है। उन अन्वेषकों के लिए जो आंकड़ों की वास्तविक प्रकृति को समझना चाहते हैं तथा इनमें विद्यमान महत्वपूर्ण जानकारी को प्रभावशाली ढंग से संचारित करना चाहते हैं, इन प्रविधियों के प्रयोग की योग्यता होना आवश्यक है।

5.7 शब्दावली

समष्टि : किसी विचाराधीन चर के मानों का बड़े से बड़ा संकलन इन मानों की समष्टि होता है। किन्हीं तत्वों के संकलन को भी समष्टि कहा जा सकता है।

तत्व : जब सांख्यिकी-विद् व्यक्तियों, स्थानों अथवा वस्तुओं का प्रेक्षण करते हैं तो इनकी इकाई की परवाह किए बिना वे इनको तत्व कहते हैं।

चर : ऐसा लक्षण जो भिन्न-भिन्न तत्वों के लिए भिन्न मान लेता है, चर कहलाता है।

5.8 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Goon, A.M., M.K. Gupta and B. Das Gupta, 1985. *Basic Statistics* : The World Press Private Limited: Calcutta.

Agarwal, B.L., 1988. *Basic Statistics* : Wiley Eastern Limited: Calcutta.

Kenney, J.S. and E.S. Keeping, 1974 ; *Mathematics of Statistics*, (Part I) : Affiliated East-West Press Private Limited: New Delhi.

मेहता, बी. सी., 1986, *प्रारंभिक सांख्यिकी*, राजस्थान हिन्दी ग्रंथ अकादमी, जयपुर, अध्याय 3 तथा 4.

5.9 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) आप स्वयं कीजिए।

बोध प्रश्न 2

1)

मान	1	2	3	4	5	6	7	योग
बारंबारता	1	4	12	9	2	1	1	30

2)

वेतन	61-80	81-100	101-120	121-140	141-160	योग
बारंबारता	4	5	4	4	3	20

3)

अंक	0-9	10-19	20-29	30-39	40-49	50-59
बारंबारता	2	3	6	11	12	15
अंक	60-69	70-79	80-89	योग		
बारंबारता	10	7	4	70		

4)

आयु (वर्षों में)	31-33	34-36	37-39	40-42	43-45	46-48	49-51
बारंबारता	6	4	7	7	5	5	4
प्रतिशत बारंबारता	12	8	14	14	10	10	8
आयु (वर्षों में)	52-54	55-57	58-60	योग			
बारंबारता	5	2	5	50			
प्रतिशत बारंबारता	10	4	10	100			

5) आप स्वयं कीजिए।

5.10 पारिभाषिक शब्दावली

अन्वेषण	enquiry
असंतत चर	discrete variable
उपांत बारंबारता बंटन	marginal frequency distribution
एकविचर बारंबारता बंटन	univariate frequency distribution
एकधा सारणी	one way table
खाने या कोष	cells
गुण	attributes
तिर्यक वर्गीकरण	cross classification
तृतीयक	tertiary
द्विचर बारंबारता बंटन	bivariate frequency distribution
द्विधा सारणी	two way variable
द्वितीयक	secondary
निःशेष	exhaustive
प्राथमिक	primary
परस्पर अपवर्जी	mutually exclusive
परस्परव्यापी	overlapping
परिसर	range or interval
प्रेक्षण	observation

बहुचर बारंबारता बंटन	multivariate frequency distribution
बहुधा सारणी	multiway table
यादृच्छिक प्रतिदर्श	random sample
वर्ग अंतराल	class-interval
वर्ग परिसीमा	class boundary
वर्ग सीमा	class-limits
व्यष्टि	individual
संतत चर	continuous variable
समष्टि (जनसंख्या)	population
समावेशी	nested
सांख्यिकी-विद्	statistician
साहचर्य	association
स्थूण	stub
त्रिधा सारणी	three way table

इकाई 6 आंकड़ों का आलेखी निरूपण

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य

इस इकाई में आपको आंकड़ों के आलेखों तथा दृश्य रूप में निरूपित करने वाले निम्नलिखित आरेखों के बारे में जानकारी दी जाएगी :

- रेखा-आरेख, दंड आरेख तथा वृत्तारेख
- आयत चित्र तथा तोरण;
- प्रकीर्ण आरेख।

6.1 प्रस्तावना

इस इकाई में आपको सांख्यिकीय आंकड़ों के आरेखी निरूपण की जानकारी दी जाएगी। संचित्र तथा आरेख सांख्यिकीय आंकड़ों के सजीव प्रस्तुतीकरण की प्रभावशाली विधियाँ हैं। आरेखी निरूपण का मुख्य उद्देश्य सिर्फ इनके विवरण को लिखित करना न होकर विभिन्न वर्गों की तुलनात्मक स्थिति पर बल देना भी होता है।

6.2 आलेखी निरूपण

संख्यात्मक आंकड़ों के समुच्चय के प्रस्तुतीकरण की लोकप्रिय विधि इनका आरेखी या आलेखी निरूपण होता है। सरलता, दृश्य आकर्षण के अतिरिक्त आंकड़ों की समझ और व्याख्या में सहायक होने के कारण आलेखी निरूपण का अनुसरण किया जाता है। उपयुक्त आलेखी निरूपण द्वारा आंकड़ों की कुछ मुख्य विशेषताओं, जैसे उनकी प्रवृत्ति, संरचना तथा अन्य लक्षणों को समझना बड़ा सरल होता है। सारणीय निरूपण में आलेखी निरूपण के समकक्ष अथवा उसके अधिक जानकारी दी होने पर भी वह परीक्षण करने पर पाठक या प्रेक्षक को तुरंत आलेखी निरूपण जितनी सूचना प्रदान नहीं करता। यही कारण है कि एक साधारण व्यक्ति से लेकर विशेषज्ञ तक प्रायः सभी आंकड़ों के उपयक्त आलेखी निरूपण के प्रति स्वाभाविक रूप से आकृष्ट होते हैं। इसलिए आंकड़ों का आलेखी निरूपण सांख्यिकीय प्रविधि का एक महत्वपूर्ण अंग बन गया है।

निम्नलिखित में हम संख्यात्मक आंकड़ों के वर्णन में प्रयोग होने वाले कुछ आरेखों पर ध्यान केन्द्रित करेंगे तथा उदाहरणों द्वारा इनकी व्याख्या करेंगे।

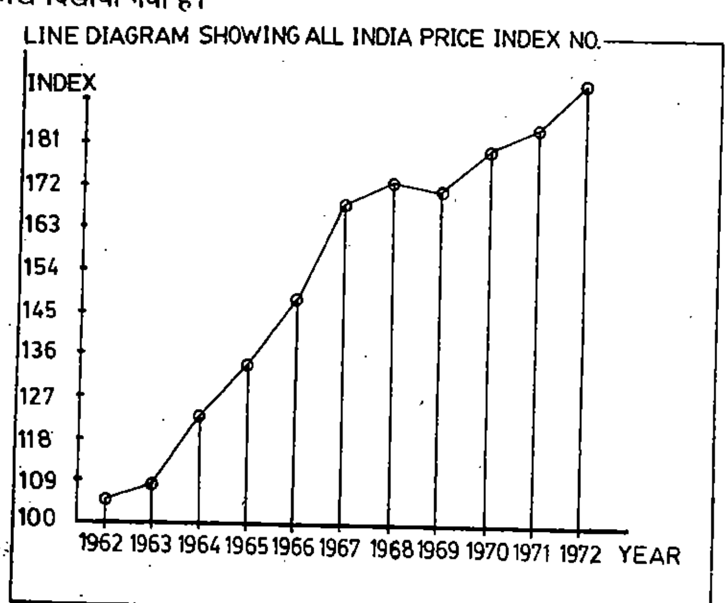
6.2.1 रेखा-आरेख

प्रस्तुत संख्यात्मक आंकड़ों में एक चर के बारे में सूचना दी हुई हो सकती है। कुछ दिए हुए लगातार वर्षों में भारतीय जनसंख्या की प्रति व्यक्ति आय, जनगणना अभिलेखों में अंकित पश्चिम बंगाल में कुछ निरंतर दशकों के लिए साक्षरता का प्रतिशत या किसी निश्चित वर्ष के प्रत्येक महीने में दिल्ली में हुई सड़क दुर्घटनाओं की संख्या आदि एक चर के उदाहरण हैं। प्रत्येक परिस्थिति में अंकित प्रेक्षण समय मापक्रम में एक बिन्दु से संबंधित है। समय मापक्रम की इकाई विभिन्न परिस्थितियों में भिन्न हो सकती है, जैसे उपरोक्त उदाहरणों में यह क्रमशः एक वर्ष, एक दशक या एक महीना है, इसके अतिरिक्त यह अन्य विचाराधीन समस्या के लिए उपयुक्त कुछ और भी हो सकती है। रेखा आरेख के समय का निरूपण भुज द्वारा किया जाता है। विचाराधीन चर का निरूपण कोटि द्वारा किया जाता है। इसके माप के पैमाने की इकाई का चयन भी विवेकपूर्ण ढंग से ऐसा किया जाना चाहिए ताकि आलेख का आरेखण संभव हो तथा देखने में अच्छा लगे। प्रत्येक प्रेक्षण का एक समय बिन्दु से संबंध होता है तथा आलेख में एक बिन्दु के रूप में अंकित किया जाता है, जिसका भुज समय को और कोटि प्रेक्षण के मान को व्यक्त करता है। आलेख में लगातार बिन्दुओं के युग्मों को सरल रेखाओं से मिलाने पर हमें रेखा आरेख प्राप्त होता है।

सारणी 6.1 : सर्व भारत का उपभोक्ता कीमत सूचकांक
(आधार वर्ष 1961)

वर्ष	सूचकांक
1962	103
1963	106
1964	121
1965	132
1966	146
1967	166
1968	171
1969	169
1970	178
1971	183
1972	192

यहाँ पर समय की इकाई एक वर्ष है। आलेख का X-अक्ष 1962 या इससे पहले से शुरू होना चाहिए तथा 1972 या इसके बाद समाप्त होना चाहिए। Y-अक्ष पर उपभोक्ता कीमत सूचकांक को निरूपित किया जाता है। चूंकि सभी मान 100 से अधिक हैं, इसलिए Y का मूल बिन्दु 100 पर विस्थापित किया जा सकता है, अर्थात् Y-अक्ष 100 से शुरू किया जा सकता है। सचित्र 6.1 में यह आलेख दिखाया गया है।



त्र 6.1 : सर्व भारत के 1962 से 1972 तक उपभोक्ता कीमत सूचकांक (सारणी 6.1 में दिए हुए आंकड़े)

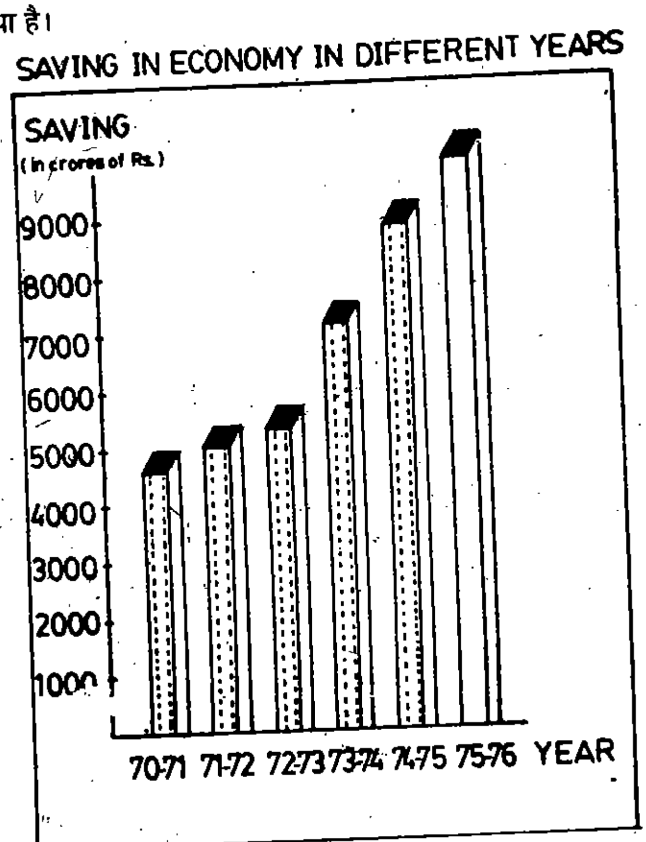
6.2.2 दंड-आरेख

सारणी 6.2 में दिए हुए आंकड़ों पर ध्यान दीजिए :

सारणी 6.2 : अर्थव्यवस्था में क्षेत्रों के अनुसार बचत, 1970-71 से 1975-76 तक
(करोड़ रुपयों में)

वर्ष	क्षेत्र			योग
	सार्वजनिक	निजी निगम	गृह	
1970-71	804	210	3603	4617
1971-72	739	272	4007	5018
1972-73	719	251	4378	5348
1973-74	1080	480	5604	7164
1974-75	2190	775	5897	8862
1975-76	2506	374	7122	10002

सारणी 6.2 के अंतिम स्तम्भ पर ध्यान दीजिए, जिसमें विभिन्न वर्षों में कुल बचत दी हुई है। मान लीजिए, हमें अर्थव्यवस्था के विभिन्न वर्षों (1970-71 से 1975-76) में कुल बचत की तुलनात्मक परिस्थिति को व्यक्त करने के लिए एक चित्र बनाना है। इसके लिए हम उपभाग 6.2.1 की तरह एक रेखा आरेख का आरेखन कर सकते हैं। यहाँ पर एक वर्ष की विस्तृति को वर्ष के मध्य बिन्दु से प्रतिस्थापित करके इनके सम्मुख इस वर्ष की कुल बचत का अंकन किया जाएगा। इसके अतिरिक्त हम एक और तरह का आरेख बना सकते हैं, जिसको दंड आरेख कहते हैं। इस आरेख में प्रत्येक 6 वर्षों के अनुरूप 6 दंड बनाए जाते हैं। वर्षों को मान लीजिए, विषय (cases) लेकर प्रत्येक वर्ष के लिए खड़े हुए दंड बनाए जाते हैं। प्रत्येक वर्ष के लिए दंड की चौड़ाई समान होती है तथा ऊंचाई उस वर्ष में कुल बचत के समानुपाती होती है। तैयार दंड आरेख चित्र 6.2 में दिखाया गया है।



चित्र 6.2 : 1970-71 से 1975-76 तक भारत की कुल बचत (करोड़ रुपयों में) का दंड आरेख

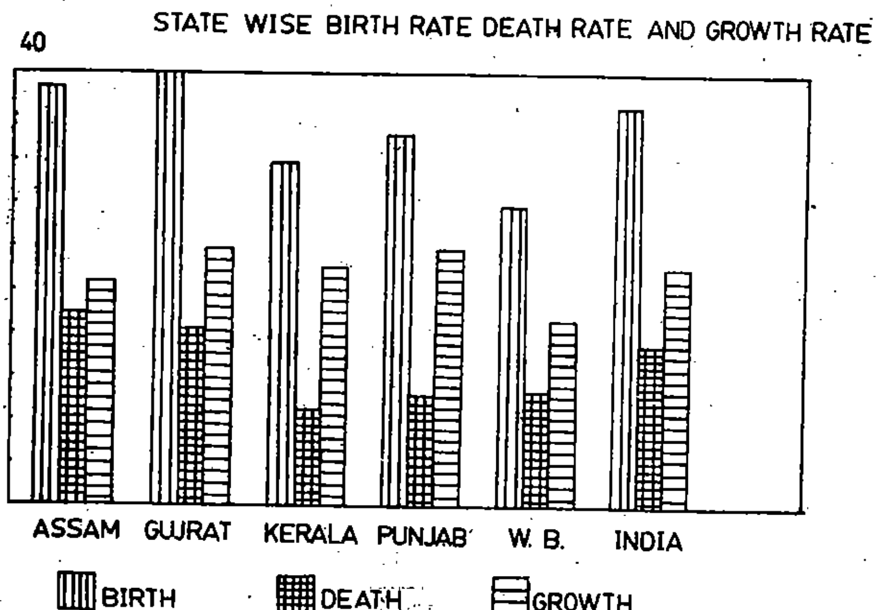
6.2.3 बहुदंड-आरेख

निम्नलिखित सारणी 6.3 में दिए गए आंकड़ों पर ध्यान दीजिए :

सारणी 6.3 : वर्ष 1971 में राज्यों में जन्म दर, मृत्यु दर तथा वृद्धि दर (समझाने के लिए भारत के कुछ राज्यों की ही संख्याएं दी गई हैं)

राज्य	जन्म दर	मृत्यु दर	वृद्धि दर
असम तथा मेघालय	38.5	17.8	20.7
गुजरात	40.0	16.4	23.6
केरल	31.7	9.0	22.1
पंजाब	34.2	10.4	23.8
पश्चिम बंगाल	27.8	10.6	17.2
भारत	36.9	14.9	22.0

मान लीजिए हम सारणी 6.3 में सम्मिलित विभिन्न राज्यों की जन्म दर तथा मृत्यु दर की तुलना (वृद्धि दर, चूंकि जन्म दर तथा मृत्यु दर का अंतर है, इसलिए इस तुलना द्वारा इसकी तुलना स्वतः ही हो जाती है।), आपस में तथा भारत की समग्र स्थिति से करने के लिए, एक दंड आरेख बनाना चाहते हैं। यहाँ प्रत्येक राज्य, जो तुलना का आधार है, एक विषय कहा जा सकता है। प्रत्येक विषय के लिए हमें दो दंड पास-पास बनाने हैं, जिनकी चौड़ाई समान हो। पहला दंड जन्म दर को तथा दूसरा मृत्यु दर को निरूपित करेगा। दोनों दंड ठीक उसी प्रकार से आरेखित किए जाएंगे जैसा 6.2.2 में समझाया गया है। इस प्रकार के दंड आरेख को, जिसमें प्रत्येक विषय के सम्मुख बहुत से (लेकिन बराबर संख्या में) दंड हों, बहु-दंड आरेख कहलाता है। चित्र 6.3 में राज्यों में जन्म दर तथा मृत्यु दर के लिए बहु दंड आरेख दिया गया है।

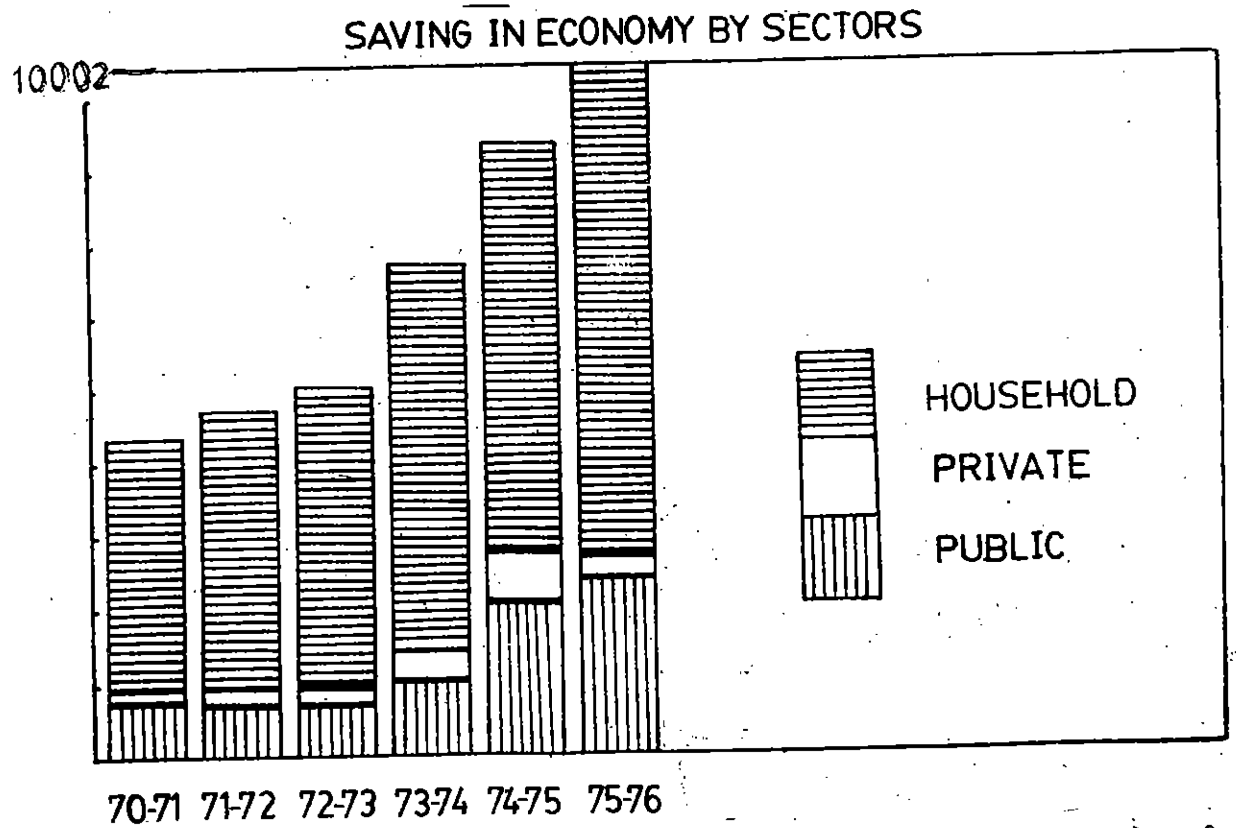


चित्र 6.3 : सारणी 6.3 में दी हुई भारत के राज्यों की जन्म दर तथा मृत्यु दर का बहु दंड आरेख

6.2.4 घटक दंड आरेख

सारणी 6.2 में दिए हुए आंकड़ों पर पुनः ध्यान दीजिए। इन आंकड़ों के प्रयोग से हमने एक दंड आरेख तैयार किया था, जो भारत के विभिन्न वर्षों में कुल बचत स्तरों में अंतर प्रदर्शित करता है। इसके बाद हमारी रूचि ऐसे आरेखी निरूपण में भी हो सकती है, जिसके द्वारा एक वर्ष में कुल बचत में, विभिन्न क्षेत्रों के योगदान को भी प्रदर्शित किया जा सके। इन विभिन्न क्षेत्रों को घटक कहते हैं। जैसा कि हमने पहले व्याख्या की है, प्रत्येक वर्ष के लिए दंड की कुल ऊंचाई उस वर्ष में कुल बचत की समानुपाती होगी। अब प्रत्येक विषय के दंड को ऊंचाई के अनुसार 3 भागों में विभाजित किया जाता है। ये तीन भाग अर्थव्यवस्था के तीनों क्षेत्रों को निरूपित करते हैं (सामान्य रूप में हम इन क्षेत्रों को मद कहते हैं)।एक विशेष खंड की ऊंचाई (तथा क्षेत्रफल भी) उपयुक्त मद से अंश के समानुपाती ली जाती है (अर्थात् एक वर्ष में उस क्षेत्र की बचत का कुल बचत से अनुपात)। यहाँ यह ध्यान रहे कि सभी दंडों में इन मदों का क्रम समान रहना चाहिए। विभिन्न

खंडों के लिए हमें भिन्न रंगों का प्रयोग करना चाहिए। सारणी 6.2 में दिए गए आंकड़ों से बनाया गया घटक दंड आरेख चित्र 6.4 में दिखाया गया है।



चित्र 6.4 : अर्थव्यवस्था में क्षेत्र के अनुसार बचत (करोड़ रुपयों में) का घटक दंड आरेख (आंकड़े सारणी 6.2 में दिए हुए हैं)

6.2.5 वृत्तारेख

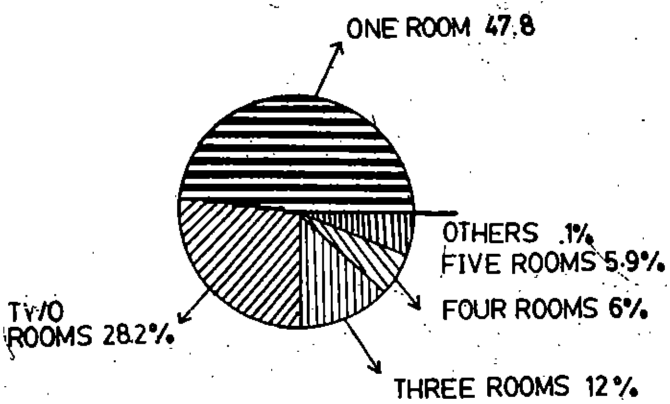
सारणी 6.4 में दिए गए आंकड़ों पर ध्यान दीजिए।

सारणी 6.4 : अधिकृत (occupied) कमरों की संख्या के अनुसार भारत में गृहों का वितरण (1971)

एक कमरा	47.8
दो कमरे	28.2
तीन कमरे	12.0
चार कमरे	6.0
पाँच या इससे अधिक कमरे	5.9
अन्य अनिर्दिष्ट	0.1
	100.00

सारणी 6.4 में आंकड़े प्रतिशत में दिए हुए हैं। अगर आंकड़े किसी और रूप में भी होते तो उपयुक्त वृत्तारेख बनाने के लिए हमें पहले उनके प्रतिशत ही ज्ञात करने पड़ते। दिए हुए या परिकलित मान विभिन्न संवर्गों (गृहों द्वारा अधिकृत कमरों की संख्या) के कुल गृहों की संख्या से तुलनात्मक अंश को निरूपित करते हैं। वृत्तारेख में पहले एक वृत्त आरेखित किया जाता है,जिसका कुल क्षेत्रफल 100 प्रतिशत गृहों को निरूपित करता है। इस वृत्त को संवर्गों की संख्या के बराबर खंडों में केन्द्र से परिधि तक रेखाएं खींचकर विभाजित किया जाता है। उपरोक्त उदाहरण में 6 संवर्ग हैं। किसी संवर्ग को दिए जाने वाले खंड का क्षेत्रफल उस संवर्ग में विद्यमान गृहों के प्रतिशत के अनुपात में होगा। चूंकि एक वृत्त 360° को निरूपित करता है, इसलिए कुल 100 प्रतिशत को वृत्त में निरूपित करने के लिए 360 के बराबर ले लेते हैं। अगर किसी संवर्ग का प्रतिशत C है तो इस संवर्ग को निरूपित करने वाले खंड की दो रेखाओं के बीच $\frac{360}{100} \times C$ डिग्री का कोण होना चाहिए।

सारणी 6.4 में दिए गए आंकड़ों का वृत्तारेख चित्र 6.5 में दिखाया गया है।



चित्र 6.5: अधिकृत कमरों की संख्या के अनुसार भारत में गृहों के वितरण (1971) का वृत्तारेख।

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित सूचना का उपयुक्त आलेखी निरूपण कीजिए :

वर्ष	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990
औसत मासिक उत्पादन (हज़ार टनों में)	609	522	205	608	551	632	516

2) विश्व के विभिन्न देशों में एक निर्दिष्ट समय में चावल की सन्निकट (approximate) औसत उपज (प्रति एकड़ किलो में), निम्नलिखित सारणी में दी हुई है :

देश	भारत	श्रीलंका	यू.एस.ए.	इटली	मिस्र	जापान
प्रति एकड़ उपज (किलो)	728	943	1469	2903	2153	2276

इस संदर्भ में तुलनात्मक पिछड़ेपन को एक उपयुक्त आरेख द्वारा व्यक्त कीजिए।

3) निम्नलिखित आंकड़ों को एक उपयुक्त आरेख द्वारा निरूपित कीजिए जिससे प्राप्ति तथा लागत के अंतर को दिखाया जा सके।

एक फर्म की प्राप्ति तथा लागत (हज़ार करोड़ रुपयों में)

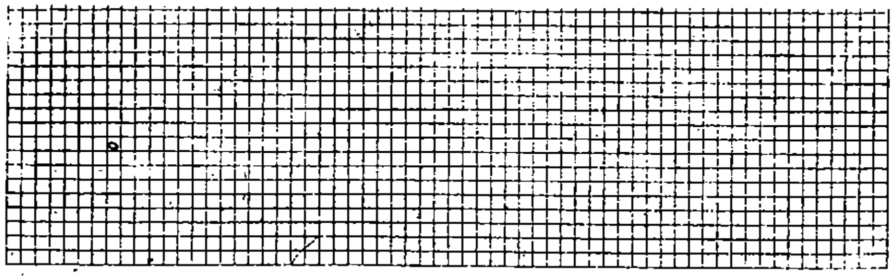
वर्ष	कुल प्राप्ति	कुल लागत
1985	22.0	19.5
1986	27.3	21.7
1987	28.2	30.0
1988	30.3	25.6
1989	32.7	26.1
1990	33.3	34.2

4) निम्नलिखित सारणी में दी हुई सूचना को उपयुक्त आरेख द्वारा निरूपित कीजिए।

भारत के निर्यातों (प्रतिशत में) का प्रतिरूप

	1986-87	1987-88	1988-89
पूँजीगत वस्तुएँ	0.29	0.31	0.30
मध्यवर्ती वस्तुएँ	45.82	46.87	44.19
उपभोग वस्तुएँ	50.50	47.32	48.19
अवर्गीकृत	3.39	5.50	7.32
योग	100.00	100.00	100.00

5) संयुक्त राज्य अमेरिका में दिए गए जीवन बीमा पॉलिसी लाभांश का 21 प्रतिशत नकद भुगतान किया गया, 31 प्रतिशत का प्रयोग बीमा किश्त भुगतान के लिए किया गया, 18 प्रतिशत का प्रयोग अतिरिक्त जीवन बीमा खरीदने के लिए किया गया तथा 30 प्रतिशत जीवन बीमा कम्पनियों के पास ब्याज अर्जित करने के लिए छोड़ दिया गया। पॉलिसी लाभांशों के विभिन्न प्रयोगों को प्रदर्शित करने के लिए एक उपयुक्त आरेख बनाइए।



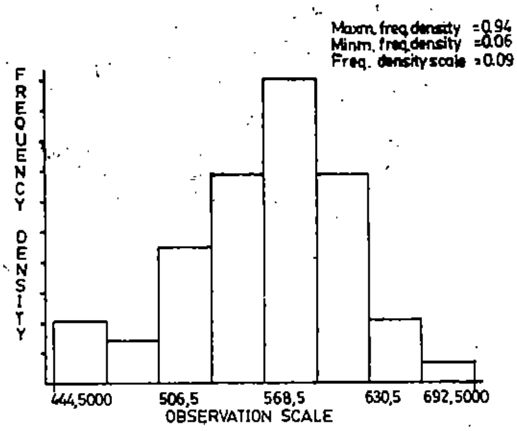
6.3 बारंबारता तथा प्रकीर्ण आरेख

आयत-चित्र, तोरण तथा प्रकीर्ण आरेखों द्वारा बारंबारता बंटन का आलेखी चित्रण किया जा सकता है।

6.3.1 आयत-चित्र (बारंबारता आंकड़ों के लिए)

मान लीजिए, अध्ययन के अंतर्गत चर संतत है। वर्ग तथा बारंबारता के निर्धारण के बाद (जैसा कि उदाहरण 5.1 में दिए हुए गृहों की आय के आंकड़ों का बारंबारता बंटन सारणी 5.5 में निरूपित है)। इसका आलेखी निरूपण किया जा सकता है। प्रायः बारंबारता बंटन को निरूपित करने वाले चित्र को आयत-चित्र कहते हैं। आयत-चित्र में X-अक्ष पर अध्ययन के अंतर्गत चर को उपयुक्त पैमाने के प्रयोग से निरूपित किया जाता है। इस प्रकार, एक वर्ग (class) को जिसकी परिसीमाएँ निर्धारित हैं, X-अक्ष के अनुरूप खंड द्वारा निरूपित किया जाता है। प्रत्येक वर्ग के लिए एक खड़ी हुई आयत बनाई जाती है, जिसकी चौड़ाई वर्ग अंतराल (Class-interval) के बराबर तथा ऊंचाई बारंबारता की सघनता के बराबर होती है (अर्थात् वर्ग की बारंबारता/वर्ग अंतराल), जिससे आयत का कुल क्षेत्रफल कुल बारंबारता के बराबर रहे। सारणी 5.5 में दिए हुए बारंबारता बंटन को आयत-चित्र द्वारा चित्र 6.6 में दिखाया गया है।

इस प्रकार, विभिन्न बारंबारता वितरणों के लिए आरेखित आयत-चित्र कुल बारंबारता में अंतर होने पर, चाहे उनके आधारभूत व्यवहार का प्रतिरूप समान हो, भिन्न दिखाई देंगे। इसलिए बारंबारता के स्थान पर आपेक्षित बारंबारता (किसी वर्ग की आपेक्षिक बारंबारता = वर्ग की बारंबारता/कुल बारंबारता) के प्रयोग द्वारा एक प्रकार के मानकीकरण की आवश्यकता होती है, जिससे आयत चित्र के सभी आयतों का कुल क्षेत्रफल इकाई के बराबर रहेगा।



चित्र 6.6: सारणी 5.5 में दिए हुए गृहों की मासिक आय (रुपयों में) के बारंबारता बंटन का आयत-चित्र

6.3.2 तोरण (एक विचर बारंबारता आंकड़े)

सारणी 5.6 में दिए हुए बारंबारता बंटन से संचयी बारंबारता का परिकलन करके इसको निम्नलिखित सारणी 6.5 में प्रस्तुत किया गया है :

सारणी 6.5 : सारणी 5.6 में दिए गृहों के बंटन की बारंबारता तथा संचयी बारंबारता

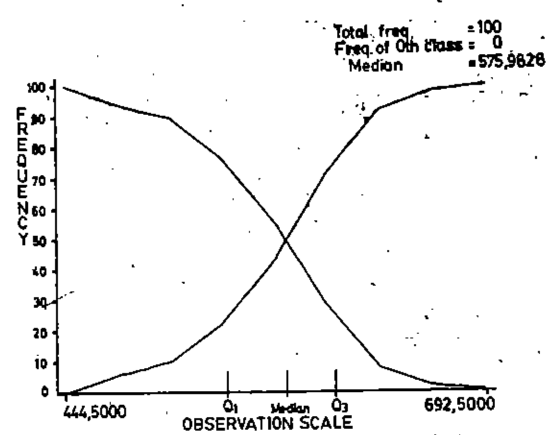
वर्ग	बारंबारता	संचयी बारंबारता (से कम प्रकार की)	संचयी बारंबारता (से अधिक प्रकार की)
444.5-475.5	6	6	100
475.5-506.5	4	10	94
506.5-537.5	13	23	90
537.5-568.5	20	43	77
568.5-599.5	29	72	57
599.5-630.5	20	92	28
630.5-661.5	6	98	8
661.5-692.5	2	100	2
योग	100		

इस सारणी के अंतिम दो स्तम्भों में दी हुई संचयी बारंबारताओं के अर्थ निम्नलिखित हैं :

"से कम प्रकार की" संचयी बारंबारताओं को उच्च वर्ग परिसीमाओं में साथ पढ़ा जाता है तथा "से अधिक प्रकार की" बारंबारताओं को निम्न वर्ग परिसीमाओं के साथ पढ़ा जाता है। उदाहरण के लिए उपरोक्त सारणी के अनुसार 6 गृहों की मासिक आय 475.5 के बराबर या इससे कम है, 23 गृहों की मासिक आय 537.5 के बराबर या इससे कम है तथा किसी गृह की मासिक आय 444.5 के बराबर या इससे कम नहीं है। इसी प्रकार, 94 गृहों की मासिक आय 475.5 से अधिक है तथा किसी भी गृह की मासिक आय 692.5 से अधिक नहीं है।

अध्ययन के अंतर्गत चर को X-अक्ष पर लेकर (उपयुक्त माप के पैमाने के चयन द्वारा) तथा Y-अक्ष पर संचयी बारंबारता को लेकर हम एक चित्र का आरेखण कर सकते हैं। यहाँ "से कम प्रकार की" ("से अधिक प्रकार की") की संचयी बारंबारता को उनके वर्ग की उच्च परिसीमाओं (निम्न परिसीमाओं) द्वारा दिए गए चर के मान के सम्मुख अंकित किया जाता है। इन लगातार बिन्दुओं को सरल रेखाओं से मिलाने पर हमें तोरण या संचयी बारंबारता वक्र प्राप्त होगा। अगर अंकित संचयी बारंबारता "से कम प्रकार की है" तो इसे हम "से कम प्रकार का" तोरण कहेंगे। अगर संचयी बारंबारता "से अधिक प्रकार की है" तो इसे "से अधिक प्रकार का तोरण" कहेंगे। छोटी-छोटी रेखाओं के टुकड़ों को ऐसे निष्कोण वक्र से भी प्रतिस्थापित किया जा सकता है, जिससे इसकी सभी महत्वपूर्ण निरूपक विशेषताओं को बनाए रखा जा सके तथा अंकित बिन्दु जहाँ तक हो सके, इसके सन्निकट हो। इस प्रकार, यह वक्र चर के परिसर के लिए एक संतत फलन की तरह दिखाई देगा। पहला वक्र ("से कम प्रकार का") एकदिष्टतः अह्रासमान (non-decreasing) होता है तथा दूसरा वक्र ("से अधिक प्रकार का") एकदिष्टतः अवर्धमान (non increasing) होता है। इन दोनों वक्रों के प्रतिच्छेद बिन्दु का भुज माध्यिका (median) कहलाती है, अर्थात् चर का वह मान जिससे नीचे 50 प्रतिशत प्रेक्षण हैं। इन वक्रों के प्रयोग द्वारा बारंबारता बंटन के विभिन्न शततमक (percentile) बिन्दुओं को भी ज्ञात किया जा सकता है। मान लीजिए, हमें 100वां शततमक ज्ञात करना है, जिसके नीचे 100 प्रतिशत प्रेक्षण हों। अगर कुल बारंबारता N है तो पहले तोरण ("से कम प्रकार का") द्वारा उपयुक्त शततमक बिन्दु तोरण पर उस बिन्दु का भुज होगा, जिसकी कोटि Np है।

सारणी 6.5 में दिए हुए बारंबारता बंटन के लिए दो तोरण चित्र 6.7 में दिए गए हैं। 25वें शततमक बिन्दु को पहला चतुर्थक (quartile) Q_1 तथा 75वें शततमक बिन्दु को तीसरा चतुर्थक Q_3 भी कहते हैं अर्थात् $Q_1(Q_3)$ चर का वह मान है, जिससे नीचे एक-चौथाई (तीन चौथाई) प्रेक्षण होते हैं।



चित्र 6.7 : सारणी 6.5 में दिए गए गृहों के मासिक आय के संचयी बारंबारता बंटन के लिए तोरण ("से कम" तथा "से अधिक" प्रकार के)

6.3.3 प्रकीर्ण आरेख (द्विचर बारंबारता आंकड़े)

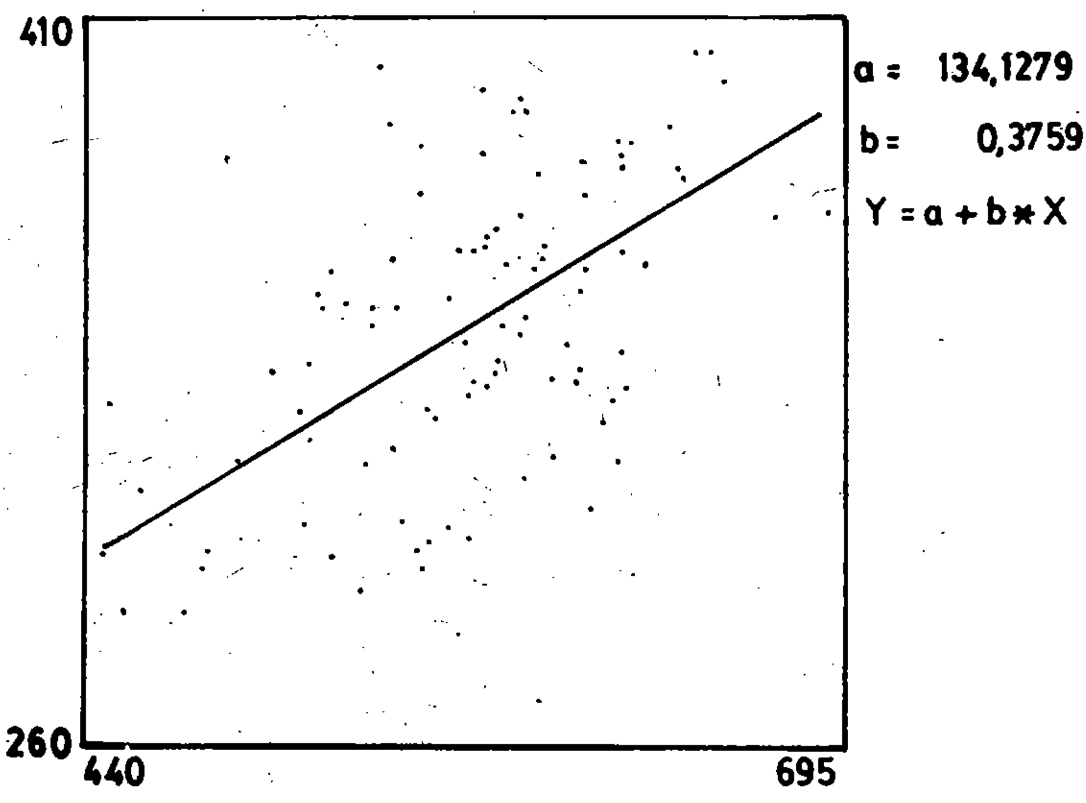
दो चरों X (गृह की मासिक आय) तथा Y (खाद्य सामग्री पर गृह का मासिक व्यय) के बीच संबंध की प्रकृति का सामान्य ज्ञान प्राप्त करने के लिए प्रकीर्ण आरेख का आरेखण आवश्यक होता है। X-अक्ष का प्रयोग एक चर के निरूपण के लिए (मान लीजिए X के लिए) तथा Y-अक्ष का प्रयोग दूसरे चर के निरूपण के लिए (मान लीजिए Y के लिए) प्रयोग किया जाता है। जब किसी व्यष्टि के लिए $X = X_i$ तथा $Y = Y_i$ हो तो इस व्यष्टि के अनुरूप X, Y समतल पर एक बिन्दु (X_i, Y_i) अंकित किया जाता है। द्विचर आंकड़ों के संतोषजनक आलेखी निरूपण के लिए हमें मूल बिन्दु का स्थानांतर करना पड़ सकता है। दोनों अक्षों के लिए उपयुक्त माप के पैमाने प्रयोग किए जाते हैं। X तथा Y के प्रभावी परिसर का चुनाव जिसमें प्रकीर्ण बिन्दुओं को अंकित किया जाता है, सुविधापूर्वक (X-न्यूनतम, X-अधिकतम) तथा (Y-न्यूनतम, Y-अधिकतम) किया जाता है। यहाँ पर : पर :

X-न्यूनतम = X के मानों के समुच्चय में न्यूनतम मान,

X-अधिकतम = X के मानों के समुच्चय में अधिकतम मान; तथा

इसी प्रकार Y के लिए न्यूनतम तथा अधिकतम मान परिभाषित किए जा सकते हैं।

प्रकीर्ण आरेख द्वारा हमें X तथा Y के संबंध की सामान्य जानकारी प्राप्त हो सकती है। उदाहरण के लिए, अंकित किए हुए बिन्दु एक सामान्य उपरिमुखी प्रवृत्ति (upward trend) अथवा अधोमुखी प्रवृत्ति (downward trend) को प्रकट कर सकते हैं। उपरिमुखी प्रवृत्ति (अधोमुखी प्रवृत्ति) से हमारा अर्थ उस प्रवृत्ति से है जिसमें X में वृद्धि होने पर Y में औसतन वृद्धि (कमी) होती है। इस प्रवृत्ति की सामान्य प्रकृति रेखीय या वक्र रेखीय हो सकती है। इसके अनुसार ही समंजन (fitting) किए जाने वाले फलन की प्रकृति के बारे में निर्णय किया जाता है। हम अपनी रूचि तथा चरों की प्रकृति के अनुसार Y को X का फलन या X को Y का फलन ले सकते हैं। X,Y समतल में अंकित बिन्दु कुछ वियुक्त गुच्छों (isolated clusters) को भी दर्शा सकते हैं, जो प्रेक्षित आंकड़ों में अवांछनीय विषमांगता (Heterogenity) को सूचित करते हैं। इनके स्रोत की गंभीरता से जाँच की जानी चाहिए। उदाहरण 5.1 में दिए हुए द्विचर आंकड़ों का प्रकीर्ण आरेख चित्र 6.8 में दिखाया गया है।



चित्र 6.8 : गृहों का प्रकीर्ण आरेख (उदाहरण 5.1 से लिए हुए चरों = X तथा Y के लिए) (रुपयों में)

प्रकीर्ण आरेख पर एक रेखा भी आरेखित है, जो न्यूनतम वर्ग विधि (method of least square) द्वारा प्राप्त श्रेष्ठतम आसंजन रेखा (line of best fit) हैं; यहाँ Y को आश्रित तथा X को अनाश्रित चर लिया गया है।

बोध प्रश्न 2

1) 100 कॉलेज विद्यार्थियों की ऊंचाई के बारंबारता बंटन का एक उपयुक्त आरेख बनाइए :

ऊंचाई (सें. मी. में)	141-150	151-160	161-170	171-180	181-190	योग
बारंबारता	5	16	56	19	4	100

2) निम्नलिखित आंकड़ों से एक तोरण आरेखित कीजिए तथा आलेख विधि द्वारा 360 तथा 440 के बीच प्रदेशों की संख्या भी ज्ञात कीजिए :

मान	प्रेक्षणों की संख्या
200 से अधिक	400
250 से अधिक	370
300 से अधिक	315
350 से अधिक	220
400 से अधिक	115
500 से अधिक	45
600 से अधिक	15
700 से अधिक	0

3) निम्नलिखित आंकड़ों का प्रकीर्ण आरेख बनाइए। इन बिन्दुओं के समूह से एक मुक्त हस्त (free hand) सरल रेखा आरेखित कीजिए।

औसत मान (लाखों में)

	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983
कच्चे कपास का आयात	47	64	100	97	126	203	171
निर्मित कपास का निर्यात	70	85	100	103	111	139	133

6.4 सारांश

इस इकाई में आपने सांख्यिकी आलेख तथा संचित्रों के निरूपण की आलेखी प्रविधियों को सीखा। आप आयत-चित्र, वृत्तारेख, दंड आरेख, तोरण इत्यादि से आंकड़ों के बड़े समुच्चय में दी हुई सूचना को दूसरे व्यक्तियों को प्रभावशाली ढंग से समझा सकते हैं।

6.5 शब्दावली

दंड आरेख : आयतों के प्रयोग द्वारा आंकड़ों के प्रदर्शन को दंड आरेख कहते हैं। इन सभी आयतों की चौड़ाई बराबर तथा ऊंचाई, उनके द्वारा निरूपित बारंबारता के समानुपाती होती है।

आयात-चित्र : यह एक सांख्यिकीय आलेख है, जिसमें आयताकार स्तंभ की ऊंचाई एक प्रतिदर्श अथवा प्रयोग में घटित होने वाले वर्गों की संख्या को निरूपित करती है।

तोरण : इसका संबंध संचयी बारंबारता के संतत रूप से है, जिसमें बहुत बड़ी संख्या में प्रेक्षण होते हैं।

वृत्तारेख : यह वृत्त आरेख या संचित्र का चित्रोपम नाम है।

प्रकीर्ण आरेख : इस आरेख द्वारा दो चरों के प्रेक्षित मानों को बिन्दुओं के गुच्छों द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। यहाँ चरों के प्रेक्षित मान बिन्दुओं के अनुरूप अक्षों पर उनके निर्देशांक होते हैं।

6.6 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Goon, A.M., M.K. Gupta and B. Das Gupta; 1985. *Basic Statistics.* The World Press Private Limited : Calcutta.

Agarwal, B.L., 1988. *Basic Statistics.* Wiley Eastern Limited : Calcutta.

Kenny, J.S. and E.S. Keeping; 1974. *Mathematics of Statistics,* (Part I). Affiliated East-West Press Private Limited : New Delhi.

मेहता, बी.सी., 1986, *प्रारंभिक सांख्यिकी,* राजस्थान हिंदी ग्रंथ अकादमी, जयपुर, अध्याय-5.

6.7 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

) रेखा-आरेख
) दंड आरेख
) बहुदंड आरेख
) घटक दंड आरेख
) वृत्तारेख

बोध प्रश्न 2

) आयत चित्र
) 112
) आप स्वयं कीजिए।

6.8 पारिभाषिक शब्दावली

अधोमुखी प्रवृत्ति	downward trend
आयत चित्र	histogram

उपरिमुखी प्रवृत्ति	upward trend
एक दिष्टतः	monotonically
घटक दंड आरेख	component bar diagram
चतुर्थक	quartile
तोरण	ogive
दंड आरेख	bar diagram
निष्कोण वक्र	smooth curve
न्यूनतम वर्ग विधि	method of least square
प्रकीर्ण आरेख	scatter diagram
बहुदंड आरेख	multiple bar diagram
माध्यिका	median
रेखा-आरेख	line diagram
वृत्तारेख	pie diagram
शततमक	percentile
श्रेष्ठतम आसंजन रेखा	line of best fit

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGEC-03
अर्थशास्त्र में तृतीय ऐच्छिक पाठ्यक्रम

खंड

4

एकविचर आंकड़ों का संक्षेपण

ंड 4 प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियां तथा प्रविधि

चय

खंड में आपको एकविचर बारंबारता बंटन के संक्षेपण की जानकारी दी जाएगी। यह खंड दो इकाइयों में विभाजित है। ी इकाई में आपको सांख्यिकीय चर की अवधारणा, बारंबारता बंटन, संचयी बारंबारता बंटन फलन तथा केन्द्रीय प्रवृत्ति वा अवस्थिति के माप, के बारे में जानकारी दी जाएगी। दूसरी इकाई में आप बंटन की अन्य विशेषताओं, केंद्रीय ति के विपरीत चर के मानों की केन्द्र से दूर जाने की प्रवृत्ति अर्थात् प्रकीर्णन का अध्ययन करेंगे।

इकाई 7 सांख्यिकीय चर तथा अवस्थिति के माप

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आपको निम्नलिखित जानकारी प्राप्त हो सकेगी :

- आंकड़ों के बंटन के प्रतिरूप को अच्छी तरह समझने के लिए उनका संगठन तथा संक्षेपण;
- आंकड़ों के समुच्चय की केन्द्रीय प्रवृत्ति के संख्यात्मक माप जैसे माध्य, माध्यिका तथा बहुलक का परिकलन;
- कौन-सा माप कहां प्रयोग किया जा सकता है।

7.1 प्रस्तावना

स इकाई में हम आंकड़ों के व्यूह के बंटन के प्रतिरूप की पहचान के लिए कुछ विधियों का अध्ययन करेंगे। इस उद्देश्य ; लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति (अवस्थिति) के माप कुछ प्रतिदर्शजों (Statistics) में से एक होते हैं। इसकी मुख्य अवधारणाएँ ाध्य (जिसमें समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य होते हैं) माध्यिका तथा बहुलक हैं। हम यह जानने का यास भी करेंगे कि इनमें से किस माप का कब प्रयोग किया जा सकता है।

.2 सांख्यिकीय चर

ांख्यिकी का संबंध किसी अध्ययन हेतु संख्याओं के रूप में सूचना अथवा ज्ञान से होता है। इन संख्याओं को सामूहिक प में आंकड़ें कहते हैं। ये आंकड़े चरों के एक समुच्चय के विशिष्ट मान होते हैं। यहां पर चर से अर्थ समष्टि इकाई के ाण किए जाने वाले लक्षण से होता है। उदाहरण के लिए, जब हमारा उद्देश्य गृहों (Households) के व्यय के

प्रतिरूप का अध्ययन करना हो तो समष्टि की इकाई गृह होगी तथा गृहों का व्यय संबंधित चर होगा। गृहों के व्यय को चर इसलिए कहा जाता है क्योंकि इसका प्रेक्षण किया जा सकता है तथा विभिन्न गृहों के लिए इसका मान भिन्न होता है। इस प्रकार, चर का अर्थ प्रत्येक समष्टि इकाई के प्रेक्षण किए जाने वाले लक्षण से होता है तथा ये मान विभिन्न समष्टि इकाइयों के लिए भिन्न होते हैं।

व्यवहार में, समष्टि इकाइयों से संबंधित प्रेक्षण किए जाने वाले लक्षण, प्रतिवेदन की या मापन की त्रुटि से प्रभावित होते हैं। उदाहरण के लिए, गृह का मासिक व्यय, चाहे हम प्रत्येक मद जैसे खाद्य सामग्री, आवास, वस्त्र, शिक्षा आदि पर व्यय को लिखकर ज्ञात करें, फिर भी यह त्रुटि से प्रभावित रहता है। इस त्रुटि की मात्रा को अच्छे प्रकार की मापन प्रतिविधियों अथवा गहराई तक जांच-पड़ताल द्वारा कम किया जा सकता है लेकिन इसको पूर्ण रूप से दूर नहीं किया जा सकता। अतः प्रेक्षण में या मापन में त्रुटि को ध्यान में रखते हुए हमें एक सांख्यिकीय चर को परिभाषित करने की आवश्यकता होती है। प्रायः सांख्यिकीय चर की परिभाषा इस प्रकार की जाती है:

सांख्यिकी चर = चर + त्रुटि

इस प्रकार, समष्टि इकाई से संबंधित प्रेक्षण सांख्यिकीय चर का एक विशेष मान होता है, जबकि इस इकाई से संबंधित चर का मान तथा त्रुटि का मान हमें पृथक रूप में ज्ञात नहीं होता। सांख्यिकीय विश्लेषण द्वारा व्यावहारिक उपयोग के लिए हम संक्षिप्त रूप में चर के मान तथा त्रुटि के मान को अलग-अलग प्राप्त कर सकते हैं। जब एक सांख्यिकीय प्रतिवेदन द्वारा औसत मासिक व्यय 325 ± 13 रुपए प्रस्तुत किया जाता है तो इसका अर्थ यह होता है कि औसत मासिक व्यय 325 रुपए है, जिसमें 13 रुपए की त्रुटि दोनों तरफ हो सकती है। यहां पर दो संक्षिप्त संख्याएं 325 रुपए तथा 13 रुपए मासिक व्यय संख्याओं के एक समुच्चय (समष्टि के विभिन्न गृहों के प्रेक्षण से प्राप्त) के सांख्यिकीय विश्लेषण द्वारा प्राप्त की गई है।

समष्टि के प्रत्येक गृह से मासिक व्यय के आंकड़े प्राप्त करना न तो व्यावहारिक है और न ही आवश्यक। अगर हम एक ही समष्टि से दो भिन्न प्रतिदर्श लेकर मासिक व्यय के आंकड़ों के दो समुच्चय प्राप्त करें तो इन दोनों प्रतिदर्शों के आकार समान होने पर भी इन समुच्चयों के समरूप होने की कोई संभावना नहीं होती। इस प्रकार, इन दो समुच्चयों से हमें औसत मासिक व्यय के तथा इनसे संबंधित त्रुटि के दो-दो मान प्राप्त होंगे। सांख्यिकीय विश्लेषण का कार्य सिर्फ सांख्यिकीय चर का विश्लेषण करना ही नहीं होता, बल्कि प्रतिचयन द्वारा हुई परिवर्तिता को प्रतिरूपित करना भी होता है। आंकड़ों का समुच्चय सांख्यिकीय चरों पर प्रेक्षण द्वारा प्राप्त किया जाता है, जो समष्टि इकाई के प्रतिदर्श पर ही किए जाते हैं।

इस खंड में हम आकड़ों के विशलेषण को एक चर तक ही सीमित रखेंगे अर्थात् हम केवल एक विचर आंकड़ों के विश्लेषण का ही अध्ययन करेंगे।

7.3 बारंबारता बंटन

प्रायः प्रारंभिक आंकड़े बहुत अधिक संख्या में होते हैं, जिनको अपरिष्कृत आंकड़े भी कहते हैं। एक सांख्यिकीय चर के इन आंकड़ों का एक विचर बारंबारता बंटन के रूप में संक्षेपण किया जा सकता है, इसका अध्ययन हम पहले खंड में कर चुके हैं। 100 गृहों (Households) के कुछ लक्षणों के आंकड़ों (जोकि खंड 3 में सारणी 5.1 में दिए हुए हैं) के संक्षेपण द्वारा प्राप्त दो बारंबारता बंटन निम्नलिखित सारणी 7.1 और 7.2 में दिए गए हैं।

सारणी 7.1 : 100 गृहों का, आकार के अनुसार, बारंबारता बंटन

गृहों का आकार	बारंबारता
1	3
2	16
3	25
4	33
5	12
6	7
7	2
8	2
योग	100

सारणी 7.2 : 100 गृहों का, खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के अनुसार बारंबारता बंटन

व्यय वर्ग (रुपयों में)	बारंबारता
262.5 - 286.5	1
286.5 - 310.5	14
310.5 - 334.5	16
334.5 - 358.5	28
358.5 - 382.5	26
382.5 - 406.5	15
योग	100

सारणी 7.1 में बारंबारता बंटन गृह के आकार का बंटन है, जोकि एक असतत चर का बंटन है। उदाहरण के लिए, इस बंटन के अनुसार 100 गृहों में 33 गृहों का आकार 4 सदस्यों का है। चूंकि ठीक यही सूचना अपरिष्कृत आंकड़ों में भी दी हुई है, इसलिए इन अपरिष्कृत आंकड़ों के बारंबारता बंटन में संक्षेपण द्वारा किसी प्रकार की सूचना की क्षति नहीं होती। यहां यह बात ध्यान देने योग्य है कि गृह के आकार का 1 से 8 तक कोई भी मान हो सकता है तथा इनके वर्गीकरण की आवश्यकता नहीं है। लेकिन अगर अपरिष्कृत आंकड़ों के समुच्चय में चर के मान बहुत अधिक हों, जोकि प्रायः संतत चर का विषय होता है, तो हम आंकड़ों का संक्षेपण वर्गों के बारंबारता बंटन द्वारा करते हैं। इन वर्गों के चयन में आंकड़ों के विश्लेषण के उद्देश्य, आंकड़ों की प्रकृति तथा प्रेक्षणों को मापने की इकाई आदि बातों को ध्यान में रखा जाता है। प्रेक्षणों के वर्गीकरण के बाद व्यष्टि प्रेक्षण अपनी पहचान खो देते हैं। संतत चर, खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय, सारणी 7.2 में दिया हुआ है। इसके अनुसार, उदाहरण के लिए, 100 गृहों में से 16 गृहों का खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय 310.5 रुपए तथा 334.5 रुपए के बीच है। यहां बारंबारता बंटन से पुनः अपरिष्कृत आंकड़े प्राप्त करना संभव नहीं होता।

7.3.1 संचयी बारंबारता बंटन

अपरिष्कृत आंकड़ों का प्रथम संक्षेपण इनको बारंबारता रूप में परिवर्तित करके किया जाता है, जो अध्ययन से संबंधित विभिन्न प्रश्नों के उत्तर का आधार होता है। हमें कुछ और तरह के प्रश्नों जैसे बड़े आकार के गृह या समष्टि में गरीब गृहों की व्यापकता आदि के उत्तर देने की आवश्यकता हो सकती है। इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर देने के लिए हमें परिभाषित गृहों के आकार का बड़ा होना या गृहों के गरीब होने के एक अंतकीय बिन्दु (cut off point) तक बारंबारताओं को जोड़ना होता है। चूंकि अंतकीय बिन्दु का निर्धारित होना आवश्यक नहीं है, इसलिए उपरोक्त प्रश्नों के उत्तर संचयी बारंबारता बंटन द्वारा आसानी से दिए जा सकते हैं। ये संचयी बारंबारता बंटन "से कम" तथा "से अधिक", दोनों प्रकार के हो सकते हैं। "से कम" प्रकार के संचयी बारंबारता बंटन से हमें चर के दिए हुए परिसर में किसी मान तक, जोकि इसमें सम्मिलित नहीं होता, संचयी बारंबारता प्राप्त होती है; "से अधिक" प्रकार के संचयी बारंबारता बंटन से हमें चर के मान से, जोकि इसमें सम्मिलित होता है, संचयी बारंबारता प्राप्त होती है। यह सभी हमें खंड 3 से ज्ञात है।

जब संचयी बारंबारता बंटन तुलनात्मक बारंबारता (किसी वर्ग की बारंबारता को कुल बारंबारता से भाग करने पर) या प्रतिशत बारंबारता (तुलनात्मक बारंबारता 1 × 100) के प्रयोग द्वारा बनाया गया हो तो इसको प्रयोग करना बड़ा ही सुविधाजनक होता है क्योंकि इस प्रस्थिति में बिना प्रतिदर्श के आकार को बताए हम चर के बंटन के बारे में विवरण दे सकते हैं। इस इकाई में हम संचयी बारंबारता के प्रयोग पर विचार करेंगे। इसके निर्माण की विधि के लिए आप खंड 3 में सारणी 5.1 पर आधारित विवेचन का पुनः अध्ययन कीजिए।

संकेतन पद्धति : अपरिष्कृत आंकड़ों के बारंबारता बंटन रूप में प्रथम संक्षेपण का प्रतिदर्श में चर के मानों की प्रवृत्ति के अध्ययन के लिए प्रयोग किया जा सकता है। प्रायः बारंबारता बंटन का कुछ सरल तथा आसानी से समझी जा सकने वाली संख्याओं द्वारा विवरण दिया जा सकता है। ये संख्याएं बारंबारता बंटन का और संक्षेपण कर देती हैं।

बारंबारता बंटन से इन संक्षेपण संख्याओं के अभिकलन के लिए एक संकेतन पद्धति का प्रयोग किया जाएगा जोकि निम्नलिखित में परिभाषित है।

प्रेक्षणों की संख्या या प्रतिदर्श के आकार को n से निरुपित किया जाएगा। असंतत आंकड़े $x_1\, x_2\, \ldots, x_k$ चर x के k पृथक मानों को वृद्धिमान क्रम में व्यय करेंगे। चर के मान x_i की बारंबारता को f_i से निरुपित किया जाएगा। इस प्रकार सारणी 7.1 में दिए हुए बारंबारता बंटन के लिए

$$k = 8$$
$$x_1 = 1, x_2 = 2, \ldots\ldots\ldots, x_8 = 8$$
$$f_i = 1, f_2 = 16, \ldots\ldots\ldots, f_8 = 2 \text{ तथा}$$
$$n = f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots + f_8 = 100 \text{ है।}$$

संतत विषय के लिए k, वर्गों की संख्या को निरुपित करेगा, i वां वर्ग C_{i-1} से C_i तक होगा जिसका बारं[redacted] f_i होगा। i वें वर्ग के मध्य बिन्दु का निरूपण $x_i = (C_{i-1} + C_i)/2$ से किया जाएगा। सारणी 7.2 में दिए गए बारंबारता बंटन के लिए,

$$k = 6$$

$$C_o = 262.5,\ C_1 = 286.5 \ldots\ldots\ldots C_6 = 406.5$$

$$x_1 = (C_o + C_1)/2 = 274.5,\ x_2 = 298.5, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots x_6 = 394.5$$

$$f_1 = 1,\ f_2 = 14, \ldots\ldots\ldots\ldots, f_6 = 15$$

$$n = f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_6 = \sum_{i=1}^{6} f_i = 100 \text{ है।}$$

इन संकेतनों के प्रयोग द्वारा हम असंतत तथा संतत आंकड़ों के काल्पनिक बारंबारता बंटन के विन्यास को निम्न रूप में लिख सकते हैं :

(क) असंतत आंकड़े

सारणी 7.3 : बारंबारता बंटन का विन्यास

चर का मान	बारंबारता
x_1	f_1
x_2	f_2
⋮	⋮
x_i	f_i
⋮	⋮
x_k	f_k
योग	n

(ख) संतत आंकड़े

वर्ग	मध्य बिन्दु	बारंबारता
$C_o - C_1$	x_1	f_1
$C_1 - C_2$	x_2	f_2
⋮	⋮	⋮
$C_{i-1} - C_i$	x_i	f_i
⋮	⋮	⋮
$C_{k-1} - C_k$	x_k	f_k
कुल		n

अगर कोई व्यक्ति बारंबारता बंटन के स्थान पर प्रत्यक्ष रूप में अपरिष्कृत आंकड़ों का प्रयोग करता है तो आवश्यक रूप में उसके पास सारणी 7.3 का असंतत भाग है, जहां पर प्रत्येक $f_i = 1, k = n$ तथा x_i के मान हैं, जोकि पृथक (distinct) होने आवश्यक नहीं हैं।

बोध प्रश्न 1

1) 20 विद्यार्थियों की एक कक्षा में प्रश्न पूछताछ परीक्षा में प्राप्तांक इस प्रकार हैं :

3	4	2	5	3	4	1	4	3	4
5	4	3	1	4	4	3	5	3	4

अगर प्राप्तांकों का बारंबारता बंटन में संक्षेपण करना है तो कौन-सा संक्षेपण (वर्गीकृत या अवर्गीकृत) अधिक उपयुक्त रहेगा? उपरोक्त प्राप्तांकों के उपयुक्त बंटन का निर्माण कीजिए।

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2) एक लघु औद्योगिक संयंत्र के श्रमिकों को काम पर आने तथा वापस यात्रा में लगने वाले समय का बारंबारता बंटन निम्नलिखित सारणी में प्रस्तुत है :

यात्रा में समय (घंटों में)	श्रमिकों की संख्या
0.5 से अधिक तथा 1 से कम	150
1 से अधिक तथा 1.5 से कम	74
1.5 से अधिक तथा 2 से कम	12
2 से अधिक तथा 2.5 से कम	6
2.5 से अधिक तथा 3 से कम	5
3 से अधिक तथा 3.5 से कम	3
योग	250

उपरोक्त बंटन के आधार पर दोनों "से अधिक" तथा "से कम" प्रकार के संचयी बारंबारता बंटन ज्ञात कीजिए।

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

3) निम्नलिखित आंकड़ों द्वारा

(क) "से कम" तथा "से अधिक" संचयी बारंबारता परिकलित कीजिए।

(ख) संचयी बारंबारता बंटन परिकलित कीजिए।

आयु (वर्षों में)	बारंबारता
15-19	37
20-24	81
25-29	43
30-34	24
35-44	9
45-59	6
योग	200

7.4 अवस्थिति के माप

सामान्यतः प्रयोग किए जाने वाले चरों के प्रेक्षणों के बारंबारता बंटन में एक केन्द्रीय मान के आसपास समूह बनाने की प्रवृत्ति पाई जाती है। सारणी 7.1 में गृह के आकार की दोनों तरफ से 4 पर अभिसरित (Converge) होने की प्रवृत्ति पाई जाती है अर्थात् इसी प्रकार की प्रवृत्ति सारणी 7.2 में भी विदित होती है जिसमें गृहों के 334.5 रुपए से 358.5 रुपए के वर्ग में एक बिन्दु के आसपास समूह बनाने की प्रवृत्ति है। बारंबारता बंटन में मानों की इस प्रकार एक बिन्दु के आसपास समूह बनाने की प्रक्रिया को केन्द्रीय प्रवृत्ति कहते हैं। हमारी रुचि इस प्रकार के केन्द्रीय मान को ज्ञात करना है। इस केन्द्रीय मान का निर्धारण इस प्रकार के मानों से किया जा सकता है, जिनको हम बारंबारता बंटन की केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप भी कहते हैं।

7.4.1 समांतर माध्य

सबसे प्रचलित अवस्थिति के माप को औसत या समांतर माध्य या सिर्फ माध्य (जब अस्पष्टता की संभावना न हो) कहते हैं। समांतर माध्य को ज्ञात करने के लिए हम प्रतिदर्श के सभी मानों को जोड़कर इसे प्रेक्षणों की संख्या से भाग देते हैं। चर के समांतर माध्य का संकेतन चर के संकेत के ऊपर रेखिका (Bar) लगाकर किया जाता है। इस प्रकार $\bar{x}$ का प्रयोग, प्रतिदर्श में x के मानों के माध्य के लिए किया जाता है। अगर प्रतिदर्श में x के एक विशेष मान x_1 की बारंबारता f_1 है तो इसका x के मानों के कुल जोड़ में योगदान x_1f_1 के बराबर होता है। इस प्रकार x के बारंबारता बंटन के लिए समांतर माध्य

$$\bar{x} \; \frac{1}{n}(x_1 f_1 + x_2 f_2 + \ldots\ldots + x_i f_i + \ldots\ldots x_k f_k)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{k} x_i f_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i \left(\frac{f_i}{n}\right) \text{ होगा}$$

असंतत बारंबारता बंटन के लिए $\bar{x}$ के परिकलन की विधि को सारणी 7.4 के (1) से (4) तक स्तंभों में प्रस्तुत किया गया है (स्तंभ (5) के प्रयोग का विवेचन बाद में किया जाएगा)। जैसा कि हम जानते हैं संतत चर के लिए प्रेक्षणों का वर्ग अंतराल में वर्गीकरण किया जाता है तथा एक वर्ग में आने वाले व्यष्टि प्रेक्षणों की पृथक रूप में पहचान नहीं की जा सकती, इसलिए इस वर्ग के प्रेक्षणों का कुल जोड़ में योगदान का परिकलन नहीं किया जा सकता। इस कठिनाई के समाधान के लिए हम यह मान लेते है कि एक वर्ग में प्रत्येक प्रेक्षण का मान इस वर्ग के मध्य बिन्दु के बराबर है। इस प्रकार संतत बारंबारता बंटन को असंतत बारंबारता बंटन में परिवर्तित किया जा सकता है। सारणी 7.4

सारणी 7.4 : माध्य तथा प्रसरण का परिकलन

वर्ग	वर्ग का मध्य बिन्दु	बारंबारता	f/n	$x(f/n)$	$x^2(f/n)$
(0)	(1)	(2)	(3)	(4) = (1) × (3)	5 = (4) × (1)
$c_o - c_1$	x_1	f_1	f_1/n	$x_1(f_1/n)$	$x_1^2(f_1/n)$
$c_1 - c_2$	x_2	f_2	f_2/n	$x_2(f_2/n)$	$x_2^2(f_2/n)$
:	:	:	:	:	:
$c_{i-1} - c_1$	x_i	f_i	f_i/n	$x_i(f_i/n)$	$x_i^2(f_i/n)$
:	:	:	:	:	:
$c_{k-1} - c_k$	x_k	f_k	f_k/n	$x_k(f_k/n)$	$x_1^2(f_k/n)$
योग		n	1	$\bar{x}$	$\sum_{i=1}^{k} x_i^2(f_i/n)$

(या सारणी 7.3 के (ख) भाग को देखिए) में स्तंभ (0) के वर्गों को स्तंभ (1) में उनके मध्य बिन्दु द्वारा प्रतिस्थापित किया गया है अर्थात् यहां हमारी यह मान्यता है कि जो प्रेक्षण $C_{i-1}-C_i$ वर्ग में हैं उन सभी के मान x_i के बराबर हैं। यहां पर $x_i = \frac{C_{i-1}-C_i}{2}$, वर्ग का मध्य बिन्दु होता है तथा i का मान 1 से k तक होता है। अब $\bar{x}$ के परिकलन के लिए सारणी 7.4 के स्तंभ (1) से (4) का प्रयोग इसी प्रकार से किया जा सकता है जैसे असंतत चर के लिए किया गया था। इस प्रकार, संतत बारंबारता बंटन के असंतत बारंबारता बंटन में परिवर्तन द्वारा परिकलित $\bar{x}$ का मान वही नहीं होगा जो हमें अपरिष्कृत आंकड़ों के परिकलन से प्राप्त हो सकता था। इसलिए, परिकलित $\bar{x}$ के मान को समूहन संशोधन (correction for grouping) की आवश्यकता होती है।

उदाहरण: सारणी 7.1 में दिए हुए बारंबारता बंटन के माध्य का परिकलन।

x	f	f/n	$x\,(f/n)$
(1)	(2)	(3)	(4)
1	3	0.03	0.03
2	16	0.16	0.32
3	25	0.25	0.75
4	33	0.33	1.32
5	12	0.12	0.60
6	7	0.07	0.42
7	2	0.02	14
8	2	0.02	0.16
योग	100	1.00	3.74

अतः 100 गृहों पर आधारित औसत गृह आकार = 3.74 है।

उदाहरण: सारणी 7.2 में दिए हुए वर्ग बारंबारता बंटन के माध्य का परिकलन

वर्ग अंतराल (रुपयों में)	माध्य बिन्दु x	f	f/n	$x\,(f/n)$
(0)	(1)	(2)	(3)	(4)
262.5–286.5	274.5	1	0.01	2.745
286.5–310.5	298.5	14	0.14	41.790
310.5–334.5	322.5	16	0.16	51.600
334.5–358.5	346.5	28	0.28	97.020
358.5–382.5	370.5	26	0.26	96.330
382.5–406.5	394.5	15	0.15	59.175
योग		100	1.00	348.660

तः गृहों का खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय 348.66 रुपए है।

उदाहरणों द्वारा यह पता चलता है कि स्तंभ (4) को प्राप्त करने के लिए हमें स्तंभ (1) तथा (3) का गुणन करना ता है तथा बहुधा ये परिकलन प्रत्येक गुणन के लिए बड़े कठिन होते हैं। इन परिकलनों को निम्नलिखित रूपांतरण द्वारा ल किया जा सकता है:

$i = 1, 2 \ldots\ldots\ldots\ldots k$ के लिए हम

$$u_i = \frac{x_i - A}{h}$$ लिखते हैं

या $x_i = A + h u_i$

अतः $\bar{x} = A + h\bar{u}$

ां पर A को कल्पित माध्य तथा $h\,\bar{u}$ को इसका संशोधन पद कहते हैं। A तथा h का ऐसा चयन किया जाता है जिससे का परिकलन सरल हो जाए। प्रायः A को x के उस मान के बराबर लिया जाता है जिसकी बारंबारता अधिकतम हो। स्तंभ (1) में x के उत्तरोत्तर मान, समान दूरी पर हों तो h का मान x के दो उत्तरोत्तर मानों के अंतर के बराबर लिया जा ता है। अगर वर्गों के अंतराल समान हैं तो दो उत्तरोत्तर मध्य बिन्दुओं का अंतर प्रत्येक वर्ग के अंतराल के बराबर होता अगर उत्तरोत्तर x के मान बराबर दूरी पर नहीं हैं तो h का मान इकाई के बराबर लिया जा सकता है।

व्याख्या के उद्देश्य से सारणी 7.2 में दिए गए गृहों के खाद्य सामग्री के औसत मासिक व्यय के आंकड़ों का माध्य पुनः परिकलित करेंगे। यह व्याख्या निम्नलिखित सारणी 7.5 में की गई है जिसमें

A = अधिकतम बारंबारता वाले वर्ग का माध्य बिन्दु
= 346.5
तथा h = सभी वर्गों में विद्यमान समान अंतराल = 24
लिया गया है।

अतः
$$u_i = \frac{x_i - 346.5}{24} \quad \text{जहां पर } i = 1, 2 \ldots\ldots 6$$

सारणी 7.5: सारणी 7.2 के बारंबारता बंटन के माध्य तथा प्रसरण का परिकलन

वर्ग अंतराल (रुपयों में)	माध्य बिन्दु x	$u=\frac{x-346.5}{24}$	f	f/n	$u(f/n)$	$u^2(f/n)$
(0)	(1)	(1क)	(2)	(3)	(4)	(5)
262.5–286.5	274.5	–3	1	.01	–0.03	0.09
286.5–310.5	298.5	–2	14	0.14	–0.28	0.56
310.5–334.5	322.5	–1	16	0.16	–0.16	0.16
334.5–358.5	346.5	0	28	0.28	0.00	0.00
358.5–382.5	370.5	1	26	0.26	0.26	0.26
382.5–406.5	394.5	2	15	0.15	0.30	0.60
योग			100	1.00	0.09	1.67

(स्तंभ (5) के प्रयोग का विवेचन बाद में किया जाएगा)

यहां पर $\bar{u} = 0.09$

इसलिए $\bar{x} = A + h\bar{u}$

$= 346.5 + 24 \times .09$

$= 346.5 + 2.16 = 348.66$ जोकि पहले परिकलित किए गए मान के बराबर है।

7.4.2 माध्यिका

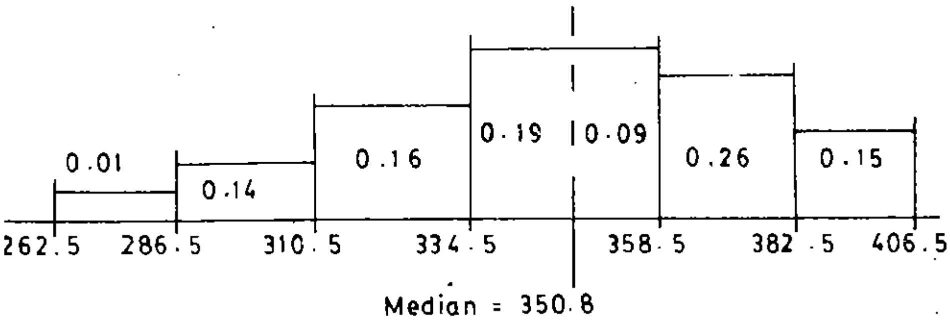
माध्यिका से अर्थ उस केन्द्र बिन्दु से होता है जो किसी बंटन को दो बराबर भागों में बांटता है अर्थात् यह प्रेक्षणों के समुच्चय में मध्यवर्ती मान होता है। हम पहले असतत चर के उदाहरण द्वारा इसकी व्याख्या करेंगे। मान लीजिए हमारे पास 5 पृथक प्रेक्षण 2, 4, 9, 12, 19 हैं जो वृद्धिमान क्रम में व्यवस्थित हैं। यहां पर मध्यवर्ती मान 9 है तथा बराबर संख्या में प्रेक्षण इससे कम या इससे अधिक हैं। अतः 2, 4, 9, 12, 19 की माध्यिका 9 है। हम एक ओर 6 पृथक आंकड़ों के समुच्चय को लेते हैं: 3, 8, 15, 25, 35, 43; यहां पर किसी मान, जोकि 15 तथा 25 के बीच हो, के लिए समान संख्या में प्रेक्षण इससे कम या अधिक है इसलिए 15 तथा 25 के बीच का कोई मान माध्यिका के लिए प्रयोग किया जा सकता है। यहां अद्वितीय (Unique) माध्यिका को परिभाषित करने के लिए 15 तथा 25 का मध्यमान लेने की परंपरा है अतः 3, 8, 15, 35, 43 की माध्यिका 20 है।

प्रायः व्यावहारिक परिस्थितियों में आंकड़ों के समुच्चय में अपृथक प्रेक्षण होते हैं, जिसके कारण माध्यिका ज्ञात करने में कठिनाई हो सकती है। इन परिस्थितियों में ऐसा मध्यवर्ती मान या केन्द्र-बिन्दु ज्ञात करना, जो बंटन को दो बराबर भागों में बांट दे, हमेशा संभव नहीं होता, जैसा कि इन 5 प्रेक्षणों के समुच्चय से स्पष्ट है: 2, 9, 9, 12, 19 । अतः माध्यिका की विधिवत् परिभाषा में इन कठिनाइयों का ध्यान रखा जाना चाहिए।

बंटन की माध्यिका वह बिन्दु या केन्द्रीय मान होता है जिस तक (यह मान तथा इससे न्यून मान) प्रेक्षणों की संख्या कम से कम 50 प्रतिशत हो तथा जिससे अधिक (यह मान तथा इससे अधिक मान) प्रेक्षणों की संख्या भी कम से कम 50 प्रतिशत हो। इस परिभाषा तथा वर्ग के मध्य बिन्दु की परंपरा, जिसमें प्रत्येक मान माध्यिका होता है, के अधार पर बंटन की माध्यिका को हमेशा अद्वितीय रूप में परिभाषित किया जा सकता है। अतः 2, 9, 9, 12, 19 प्रेक्षणों की माध्यिका 9 है क्योंकि 5 में से 3 प्रेक्षणों (60 प्रतिशत) में अधिकतम मान 9 है तथा 5 में से 4 प्रेक्षणों (80 प्रतिशत) का कम से कम मान 9 है।

सारणी 7.1 में गृहों के बंटन के लिए माध्यिका 4 है क्योंकि 77 प्रतिशत गृहों का आकार 4 या इससे कम है तथा 56 प्रतिशत गृहों का आकार 4 या इससे अधिक है।

ांतत चर के वर्ग बारंबारता बंटन की माध्यिका को सहचारी आयतचित्र द्वारा आसानी से समझा जा सकता है। इस ारिस्थिति में माध्यिका किसी एक वर्ग में वह बिन्दु होता है जिसके बांई ओर तथा दाईं ओर के क्षेत्रफल प्रत्येक 0.5 होते हैं। र्वप्रथम, हम उस वर्ग का पता करते हैं जिसकी दाहिनी परिसीमा तक कुल क्षेत्रफल कम से कम 0.5 है। इसके बाद ाध्यिका के परिकलन के लिए हम इस वर्ग की न्यून परिसीमा में वर्ग की वह लंबाई जोड़ देते हैं, जोकि 0.5 क्षेत्रफल प्राप्त रने के लिए तुलनात्मक बारंबारता के अनुपात में होती है। इस विधि की व्याख्या सारणी 7.2 में दिए गए गृहों के औसत ासिक व्यय के आंकड़ों की माध्यिका के परिकलन द्वारा की गई है ।



चित्र 7.1

र्ग परिसीमा 334.5 तक क्षेत्रफल 0.31 है तथा 358.5 तक क्षेत्रफल 0.59 है। अतः माध्यिका वर्ग 334.5 - 358.5 में ोगी। अब हम इस वर्ग में ऐसा बिन्दु ज्ञात करना चाहते हैं जिससे 334.5 से उस बिन्दु तक क्षेत्रफल (0.5 - 0.31) = 0.19 हो। यहां पर यह ध्यान रहे कि 0.31 क्षेत्रफल 334.5 तक है। चूंकि वर्ग 334.5 - 358.5 र आयत का क्षेत्रफल 0.28 तथा इसका वर्ग अंतराल 24 है, हमें 0.19 क्षेत्रफल के लिए 24 का 19/28 वां हिस्सा ाहिए, जोकि 19/28 × 24 = 16.3 है। इस प्रकार, वर्ग 334.5 - (334.5 + 16.3) में तुनात्मक बारंबारता).19 होगी, जिसका अर्थ यह होगा कि बंटन की माध्यिका 334.5 + 16.3 = 350.8 है। यहां यह ध्यान दें कि वर्ग 350.8 - 358.5 का क्षेत्रफल (0.28 - 0.19) = 0.09 है तथा 350.8 के दाईं ओर कुल क्षेत्रफल).9 + 0.26 + 0.15 = 0.50 है, जैसा कि होना चाहिए।

7.4.3 बहुलक

जैसा कि पहले बताया जा चुका है; प्रायः प्रेक्षणों में एक केन्द्रीय मान के आसपास समूह बनाने की प्रवृत्ति होती है। इस वृत्ति के एक सरल माप को बहुलक कहते हैं।

एक असंतत चर के लिए बहुलक या बहुलकता मान से अर्थ चर के उस मान से होता है, जिसकी बारंबारता अधिकतम ोती है। बहुलक से अर्थ बहुमत नहीं होता अर्थात् इसका अर्थ यह नहीं होता कि अधिकतर (50 प्रतिशत से अधिक) क्षणों के मान बहुलकता मान के बराबर है।

ारणी 7.1 द्वारा हमें ज्ञात होता है कि गृह के आकार का बहुलक या बहुलकता मान 4 है, क्योंकि इसकी बारंबारता धिकतम है।

मारे पास आंकड़ों के ऐसे समुच्चय हो सकते हैं, जिनके लिए अद्वितीय बहुलक की परिभाषा नहीं की जा सकती अर्थात् ंटन के कई बहुलक हैं। अपरिष्कृत आंकड़े जिनमे 7 काल्पनिक प्रेक्षणों के मान 4, 3, 4, 1, 2, 5, 3 हैं, के दो बहुलक तथा 4 हैं। दो बहुलक वाले बंटन को द्विबहुलक बंटन कहा जाता है। प्रायः बंटनों का एक ही बहुलक होता है या ये कबहुलकी होते हैं।

ाब संतत चर के प्रेक्षण, जैसे खाद्य सामग्री पर गृहों का व्यय, अपरिष्कृत रूप में हों तो किन्हीं दो प्रेक्षणों के मान बराबर ोने की कोई संभावना नहीं होती तथा इस परिस्थिति में बहुलक माप का कोई अर्थ नहीं होता। लेकिन जब इन अपरिष्कृत आंकड़ों को वर्गों में परिवर्तित किया जाता है तो आंकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति सामने आ जाती है। वर्गीकृत आंकड़ों के लिए अधिकतम बारंबारता वाले वर्ग को बहुलकता वर्ग कहा जाता है। चूंकि बड़े अंतराल वाले वर्ग में प्रेक्षणों की संख्या छोटे अंतराल वाले वर्ग प्रेक्षणों की संख्या से अधिक होने की संभावना अधिक होती है, इसलिए बहुलक वर्ग की अर्थपूर्ण रिभाषा के लिए विभिन्न वर्गों के अंतराल समान होने चाहिए। वर्गीकृत आंकड़ों के विविक्तीकृत (discretised) रूप का बहुलक, बहुलकता वर्ग का मध्यबिन्दु होता है।

ारणी 7.2 में दिए हुए बंटन के लिए बहुलकता वर्ग 334.5 - 358.5 है और इस बंटन का बहुलक इसका मध्य बिन्दु अर्थात् 346.5 होगा। जब बारंबारता बंटन शिखर प्रबल हो तो बहुलक इसकी केन्द्रीय प्रवृत्ति का उपयोगी माप होता है और यदि बारंबारता बंटन लगभग सपाट हो तो बहुलक के माप की कोई उपयोगिता नहीं होती।

7.5 अवस्थिति के अन्य माप

समांतर माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के अतिरिक्त अवस्थिति के और भी माप होते हैं जो अपेक्षाकृत इतने महत्वपूर्ण नहीं होते लेकिन कुछ विशेष परिस्थितियों में बड़े ही उपयुक्त होते हैं। इनको **गुणोत्तर माध्य** तथा **हरात्मक माध्य** कहते हैं। इसके अतिरिक्त, अगर हम विभिन्न मदों को भिन्न-भिन्न महत्व देना चाहते हैं तो हमें साधारण माध्य के स्थान पर भारित माध्य — समांतर, गुणोत्तर या हरात्मक — का प्रयोग करना चाहिए।

7.5.1 गुणोत्तर तथा हरात्मक माध्य

प्रायः हमारा संपर्क समय से संबंधित आंकड़ों से होता रहता है अर्थात् काल श्रेणी आंकड़ों से, जोकि सारणी 7.1 और 7.2 में दिए गए एक समय बिन्दु पर आंकड़ों से भिन्न होते हैं। इन कालाश्रित आंकड़ों में हमारी रुचि प्रायः समय के साथ इनके परिवर्तन के रूप को ज्ञात करने में होती है। निम्नलिखित आंकड़ों के दो समुच्चयों पर ध्यान दीजिए।

समुच्चय I :	1000,	1100,	1200,	1300,	1400,	1500,	1600
समुच्चय II :	1100,	1210,	1331,	1464,	1611,	1772,	1949

पहला समुच्चय एक कर्मचारी के मूल वेतन (रुपयों में) की तरह लगता है, जोकि 7 वर्षों के लिए दिया हुआ है तथा जिसमें प्रति वर्ष 100 रुपए की वार्षिक वृद्धि सम्मिलित है।

दूसरा समुच्चय कर्मचारी के सकल (Gross) वेतन की तरह लगता है। दोनों समुच्चयों में वार्षिक वृद्धि इस प्रकार है:

समुच्चय I :	100,	100,	100,	100,	100,	100
समुच्चय II :	110,	121,	133,	147,	161,	177

समुच्चय I का समांतर माध्य 100 है तथा समुच्चय II का समांतर माध्य 141.5 है। इस औसत वृद्धि के आधार पर अगर हम दोनों समुच्चयों की संख्याएं, शुरू के मान लेकर, परिकलित करें तो हमें निम्नलिखित प्राप्त होगा:

समुच्चय I :	1000,	1100,	1200,	1300,	1400,	1500,	1600,
समुच्चय II :	1100,	1241.5,	1383,	1524.5,	1666	1807.5,	1949

यहां पर समांतर माध्य का प्रयोग समुच्चय I के लिए उपयुक्त है, लेकिन समुच्चय II के लिए उपयुक्त नहीं, क्योंकि दोनों समुच्चयों में संख्याओं की श्रेणिया भिन्न हैं। समुच्चय I की संख्याओं में वृद्धि एक निश्चित मात्रा में हुई है। समुच्चय I की संख्याएं समांतर श्रेणी में हैं इसलिए औसत वृद्धि की व्याख्या के लिए समांतर माध्य उपयुक्त है। इसी प्रकार, समुच्चय II की संख्याएं गुणोत्तर श्रेणी में है तथा औसत वृद्धि दर की व्याख्या के लिए गुणोत्तर माध्य उपयुक्त होगा।

n संख्याओं $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots x_n$ के लिए गुणोत्तर माध्य (G.M. or Geometric Mean) इन संख्याओं के गुणनफल का nवां मूल होगा।

$$\text{गुणोत्तर माध्य (G.M.)} = (x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n)^{1/n} = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i\right]^{1/n}$$

स्पष्टतः अगर सभी संख्याएं धनात्मक न हो तो गुणोत्तर माध्य परिभाषित नहीं होता।

G.M. का लघु (log) लेने पर

$$\text{लघु (G.M.)} = \frac{1}{n}\left[\text{लघु } x_1 + \text{लघु } x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \text{लघु } x_n\right]$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \text{लघु } x_i$$

इससे यह पता चलता है कि लघु सारणी के प्रयोग द्वारा गुणोत्तर माध्य का परिकलन किया जा सकता है। यहां पर यह ध्यान दें कि लघु x के मानों के समांतर माध्य का प्रतिलघु (Anti-log), गुणोत्तर माध्य होता है। आंकड़ों के समुच्चय 11 में सकल वेतन में वृद्धि 11 प्रतिशत प्रति वर्ष है। इस प्रकार 7 वर्षों के लिए 6 वृद्धियों में प्रत्येक $x_i = 11$ है। लेकिन व्यवहार में वृद्धि या कमी किसी निश्चित दर पर नहीं होती तथा हमारी रुचि औसत वृद्धि दर ज्ञात करने में हो सकती है। सामान्यतः औसत वृद्धि दर ज्ञात करने के लिए गुणोत्तर माध्य का प्रयोग समांतर माध्य के प्रयोग से अधिक उपयुक्त होता है। इसलिए विभिन्न प्रकार के कीमत सूचकांक उपभोक्ता कीमत सूचकांक आदि में गुणोत्तर माध्य का प्रयोग किया जाता है। अंत में, हम अवस्थिति के एक और माप की व्याख्या करेंगे। इसको **हरात्मक माध्य** (Harmonic Mean or H.M.) कहते हैं। कई परिस्थितियों में यह माध्य स्वतः ही प्राप्त हो जाता है, जैसा कि दिए हुए उदाहरण से स्पष्ट होगा। एक व्यापारी प्रत्येक माह के शुरू में 5,000 रुपए मूल्य के सामान का संग्रह करता है। 5 उत्तरोत्तर महीनों में वस्तु की प्रति इकाई दर (रुपयों में) इस प्रकार है : 10.75, 11.80, 14.00, 11.45 तथा 12.00। व्यापारी पिछले 5 महीनों में संचित सामान की प्रति इकाई कीमत जानना चाहता है। यह परिकलन निम्नलिखित सारणी 7.6 में प्रस्तुत है:

सारणी 7.6 : हरात्मक माध्य का परिकलन

मास	व्यय की गई राशि (रुपयों में)	प्रति इकाई दर (रुपयों में)	क्रय की गई वस्तु की मात्रा
1	5000	10.75	465.12
2	5000	11.80	423.73
3	5000	14.00	357.14
4	5000	11.45	436.68
5	5000	12.00	416.67
योग	25000	—	2099.34

कुल संग्रह की प्रति इकाई कीमत

$$= \frac{\text{कुल व्यय की गई राशि}}{\text{कुल क्रय की गई मात्रा}} = \frac{25000}{2099.34} = 11.91$$

यहां यह ध्यान दें कि अनुपात

$$= \frac{\text{कुल व्यय की गई राशि}}{\text{कुल क्रय की गई मात्रा}}$$

$$= \frac{5 \times 5000}{\frac{5000}{10.75} + \frac{5000}{11.80} + \frac{5000}{14.00} + \frac{5000}{11.45} + \frac{5000}{12.00}}$$

$$= \frac{5}{\frac{1}{10.75} + \frac{1}{11.80} + \frac{1}{14.00} + \frac{1}{11.45} + \frac{1}{12.00}}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{5}\left[\frac{1}{10.75} + \frac{1}{11.80} + \frac{1}{14.00} + \frac{1}{11.45} + \frac{1}{12.00}\right]}$$

अंतिम व्यंजक व्युत्क्रमों के समांतर माध्यम का व्युत्क्रम है तथा इसको हरात्मक माध्य (H.M.) कहते हैं। x मानों के एक समुच्चय $x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n$ के लिए हरात्मक माध्य की परिभाषा निम्नलिखित है:

$$\text{H.M.} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{x_n}\right]}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right]}$$

अगर एक प्रेक्षण भी शून्य हो तो हरात्मक माध्य परिभाषित नहीं होता।

7.5.2 भारित माध्य

बहुत से व्यावहारिक अनुप्रयोगों में भारित माध्य (समांतर, गुणोत्तर तथा हरात्मक) अभारित या साधारण माध्य की तुलना में एक परिघटना को अच्छी तरह से दर्शाते हैं। उदाहरण के लिए, उपभोक्ता कीमत सूचकांक के परिकलन में सभी वस्तुओं का महत्व समान नहीं होता। ईंधन की कीमत में वृद्धि, कृषि वस्तुओं की कीमतों में वृद्धि की तुलना में उपभोक्ता कीमत सूचकांक को अधिक प्रभावित कर सकती है। शेयर बाज़ार में कुछ कम्पनियों के शेयर ही बाज़ार की प्रवृत्ति के निर्धारक हो सकते हैं। इस प्रकार की परिस्थितियों में भारित माध्य अधिक उपयुक्त होते हैं।

प्रत्येक x_i के साथ एक भार w_i को संलग्न किया जाता है तथा इनका माध्य ठीक उसी प्रकार परिकलित किया जाता है, जैसे कि w_i संकेत रूप में x_i की बारंबारता हों। भारित माध्य के विभिन्न सूत्र निम्नलिखित हैं:

भारित समांतर माध्य $= \frac{1}{\sum w_i} \sum_{i=1}^{n} x_i w_i = \frac{1}{w}\sum_{i=1}^{n} x_i w_i$

$$\text{भारित गुणोत्तर माध्य} = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}\right)^{\frac{1}{\sum w_i}} = \left[\prod_{i=1}^{n} x_i^{w_i}\right]^{1/w} \quad \text{तथा}$$

$$\text{भारित हरात्मक माध्य} = \frac{1}{\frac{1}{\sum w_i}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}\right]} = \frac{1}{\frac{1}{w}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{w_i}{x_i}\right]}$$

यहां पर $w = \sum_{i=1}^{n} w_i$ है।

अगर प्रत्येक $w_i = 1$ हो तो भारित माध्य साधारण माध्य बन जाता है।

7.5.3 संयुक्त माध्य

अगर हमारे पास विभिन्न समूहों या प्रतिदर्शों के परिकलित माध्य हों तो कई बार हमारी रुचि समग्र माध्य ज्ञात करने में हो सकती है। इस प्रकार के समग्र माध्य को संयुक्त माध्य कहते हैं।

मान लिया $m_1, m_2, \ldots\ldots\ldots m_r$; समांतर, गुणोत्तर या हरात्मक माध्य हैं (परिस्थिति के अनुसार), जोकि क्रमशः $n_1, n_2 \ldots\ldots\ldots n_r$ प्रेक्षणों से परिकलित किए गए हैं, तबः

$$\text{संयुक्त समांतर माध्य} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{r} m_i r_i$$

$$\text{संयुक्त गुणोत्तर माध्य} = \left[\prod_{i=1}^{r} m_i n_i\right]^{1/n} \quad \text{तथा}$$

$$\text{संयुक्त हरात्मक माध्य} = \frac{1}{\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{r} \frac{n_i}{m_i}\right]}$$

यहां पर $n = n_1 + n_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + n_r$ है।

संयुक्त और भारित माध्यों के व्यंजकों की समरूपता पर ध्यान दीजिए।

7.5.4 अवस्थिति के माप का चयन

हम यह पहले ही बता चुके हैं कि किन परिस्थितियों में एक माध्य बाकी दो माध्यों की तुलना में अधिक उपयुक्त होता है। लेकिन अगर हमारे आंकडों के विभिन्न वर्गों के छोर बाईं ओर या दाईं ओर खुले हैं, अर्थात् "c_i तक" या "C_{i-1} या इससे अधिक" प्रकार के वर्ग हैं (सारणी 7.4 देखिए), तो इन वर्गों के मध्य बिन्दु ज्ञात करना संभव नहीं होता। अतः इस परिस्थिति में कोई माध्य परिकलित नहीं किया जा सकता। फिर भी, इन परिस्थितियों में माध्यिका या बहुलक के परिकलन में कोई कठिनाई नहीं होती। लेकिन यहां माध्य की तरह, संयुक्त माध्यिका या संयुक्त बहुलक परिकलित नहीं किया जा सकता। इनके परिकलन के लिए हमारे पास समग्र आंकड़ों का समुच्चय होना आवश्यक है। इन कठिनाइयों का संबंध माप की उपयुक्तता से न होकर केवल परिकलन की कठिनाइयों से है।

आंकड़ों का आलेखी निरूपण अधिक आकर्षक होता है। इसलिए इस परिस्थिति में माध्यिका या बहुलक अधिक उपयोगी रहते हैं, क्योंकि आलेखों द्वारा बिना परिकलन किए, इनके अशोधित (Crude) मान ज्ञात किए जा सकते हैं। इसके अतिरिक्त, आलेखों में तुलना तथा संचारण के लिए भी माध्यिका तथा बहुलक सरल अवधारणाएं हैं। लेकिन, इस प्रकार के आलेखों की तुलना बड़ी सावधानी से की जानी चाहिए, क्योंकि पुनरावृत्त प्रतिचयन (repeated sampling) में यह देखा गया है कि समांतर माध्य की तुलना में माध्यिका कम स्थायी होती है।

उन आंकड़ों के लिए, जिनका बंटन, प्रसामान्य बंटन (normal distribution) जैसा होता है, जिसमें एक शिखर होता है तथा इस शिखर से यह दोनों ओर सममिततः (symmetrically) कम होता जाता है हम माध्य, माध्यिका या बहुलक का प्रयोग कर सकते हैं। इस प्रकार के बंटन में ये तीनों माप बराबर होते हैं।

यहां यह समझना आवश्यक है कि अवस्थिति के उपयुक्त माप का चयन ही आंकड़ों के विश्लेषण का उद्देश्य नहीं है तथा इस दिशा में अभी बहुत कुछ करना बाकी है। उदाहरण के लिए, यह कहना कि खाद्य सामग्री पर गृहों का औसत मासिक व्यय 348.66 रुपए है (सारणी 7.5 देखिए) पर्याप्त नहीं है क्योंकि इससे यह पता नहीं चलता कि क्या बहुत बड़ी संख्या में गृहों का औसत मासिक व्यय बहुत कम है या कुछ गृहों का मासिक व्यय बहुत अधिक है। इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर हमें बाद में किए जाने वाले विश्लेषणों से प्राप्त होंगे।

7.6 शततमक

शततमक की अवधारणा को समझाने के लिए हम सारणी 7.2 में दिए हुए गृहों के खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय

के आंकड़ों का प्रयोग करते। ... प्रश्नों का उत्तर दिए जा सकता है। उदाहरण के लिए
कितने प्रतिशत गृहों का खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय 350.80 रुपए तक है? या निम्न 50 प्रतिशत गृहों का खाद्य सामग्री पर अधिकतम औसत मासिक व्यय क्या है? सारणी 7.2 में माध्यिका के परिकलन पर ध्यान देने से यह ज्ञात होता है कि पहले प्रश्न का उत्तर दूसरे प्रश्न में दी हुई संख्या है, अर्थात् निम्न 50 प्रतिशत गृहों का अधिकतम औसत मासिक व्यय 350.80 रुपए है। रुचि के अनुकूल हमारी एक अंतकीय बिन्दु के नीचे प्रतिशत ज्ञात करने की इच्छा हो सकती है, गरीबी रेखा निर्धारण में हमारी रुचि इस रेखा के नीचे वाले प्रतिशत में हो सकती है। दूसरे प्रकार के प्रश्नों में हमारी रुचि जनसंख्या के निम्न 10 प्रतिशत या 5 प्रतिशत की स्थिति ज्ञात करना हो सकता है। इस प्रकार के प्रश्नों के उत्तर शततमक के प्रयोग द्वारा दिए जा सकते हैं।

7.6.1 शततमक : परिभाषा

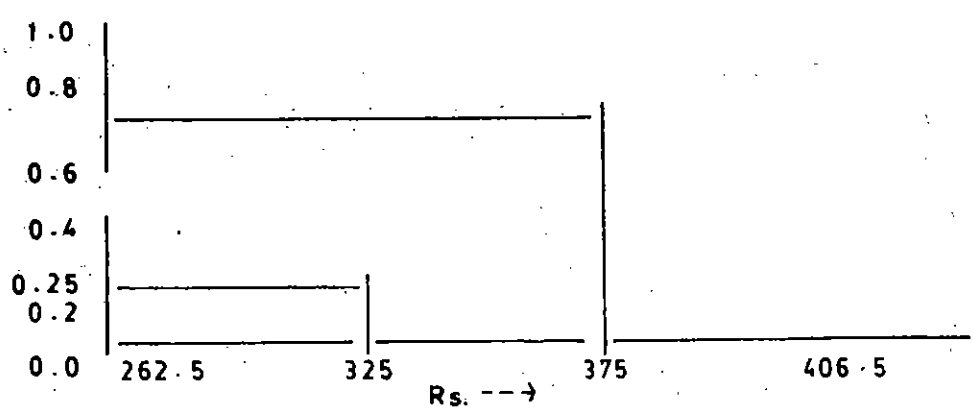
किसी दिए हुए प्रतिशत V के लिए V वां शततमक P_v, अध्ययन के अंतर्गत चर का ऐसा मान होता है कि V प्रतिशत प्रेक्षण P_v से कम या इसके बराबर रहे। अतः एक शततमक, अध्ययन के अंतर्गत चर का एक मान होता है।

परिभाषा के अनुसार, माध्यिका P_{50} के बराबर होती है। किसी V के लिए P_v का परिकलन ठीक उसी प्रकार किया जाता है जैसा कि हमने माध्यिका के लिए किया था। असंतत आंकड़ों के परिकलन में कठिनाई के लिए V वें शततमक की परिभाषा इस प्रकार दी जाती है : V वां शततमक P_v चर का वह मान होता है कि कम से कम V प्रतिशत प्रेक्षणों के मान P_v या इससे कम है तथा कम से कम (100− V) प्रतिशत प्रेक्षणों के मान P_v या इससे अधिक हैं। उदाहरण के लिए, सारणी 7.1 गृह आकार का बंटन, में V के 78 से 89 तक मानों के लिए $P_v = 5$ है।

वर्गीकृत आंकड़ों के लिए, शततमकों को, संचयी बारंबारता बंटन द्वारा अच्छी तरह से समझा जा सकता है। स्मरण कीजिए कि $F(x)$, x से कम या इसके बराबर प्रेक्षणों का प्रतिशत होता है। इस प्रकार, कोई दिया हुआ मान x_0, $100\,F(x_0)$ वां शततमक होगा। सारणी 7.2 में वर्ग सीमाओं के लिए $F(286.5) = 0.1$, $F(310.5) = 0.15$, $F(334.5) = 0.31$, $F(358.5) = 0.59$; तथा $F(382.5) = 0.85$ है। अतः $286.5 = P_{10}$, $310.5 = P_{15}$, $334.5 = P_{31}$, $358.5 = P_{59}$ तथा $382.5 = P_{85}$ होगा। यह ध्यान दीजिए कि 262.5 (पहले वर्ग की निम्न परिसीमा) से कम कोई संख्या इसका शून्य वां शततमक होगी तथा 406.5 (अंतिम वर्ग की अधिकतम परिसीमा) से अधिक संख्या इसका 100वां शततमक होगी।

7.6.2 शततमक : परिकलन

हमने उपरोक्त भाग में वर्ग के छोर बिन्दुओं पर शततमक ज्ञात किया। इन छोर बिन्दुओं के अतिरिक्त बिन्दुओं के शततमक सारणी 7.2 में दिए हुए बंटन से प्रत्यक्ष रूप में परिकलित किए जा सकते हैं या संचयी बारंबारता बंटन पर सरल रेखाएं खींच कर इनका अनुमाप प्राप्त किया जा सकता है। इसकी व्याख्या हमने निम्नलिखित प्रश्नों के हल में की है। निम्नलिखित आकृति 7.2, सारणी 7.2 के बंटन की संचयी बारंबारता आकृति है।



चित्र 7.2

प्रश्न 1 : 25वां शततमक ज्ञात कीजिए।

उत्तर : संचयी बारंबारता बंटन आकृति द्वारा परिकलन :

Y-अक्ष पर 0.25 पर बिन्दु चिन्ह लगाइए। इस बिन्दु से संचयी बारंबारता वक्र तक एक क्षैतिज रेखा खींचिए तथा प्रतिच्छेद बिन्दु से X-अक्ष पर एक लम्ब खींचिए। वह बिन्दु, जिस पर यह लम्ब X-अक्ष को छूता है, 25वां शततमक होगा। आलेख पर आंखों के अनुमान से $P_{25} = 325$ रुपए है।

सारणी 7.2 में बंटन द्वारा परिकलन :

P_{25}, वर्ग 310.5 - 334.5 में है। 310.5 रुपए तक के औसत मासिक व्यय वाले गृहों का प्रतिशत 15 है। 25 प्रतिशत पाने के लिए हमें 10 प्रतिशत अतिरिक्त, वर्ग 310.5 - 334.5 में से प्राप्त करने हैं। इसमें वर्ग अंतराल 24 के लिए 16 प्रतिशत प्रेक्षण हैं। 310.5 से 10 प्रतिशत के लिए, वर्ग की आवश्यक लंबाई 24/16 × 10 = 15 होगी। अतः $P_{25} = 310.5 + 15 = 325.5$ रुपए होगा।

प्रश्न 2 : 375 रुपए कौन-सा शततमक है?

उत्तर : संचयी बारंबारता आकृति द्वारा परिकलन :

X-अक्ष पर 375 पर बिन्दु चिन्ह लगाइए। इस बिन्दु से एक लंब खींचिए, जो संचयी बारंबारता वक्र को एक बिन्दु पर काटेगा। संचयी बारंबारता के इस बिन्दु से एक क्षैतिज रेखा Y-अक्ष को काटती हुई खींचिए। आलेख द्वारा अनुमान लगाने पर हमें पता चलता है कि $375 = P_{77}$

सारणी 7.2 में बंटन द्वारा परिकलन :

375 रुपए वर्ग 358.5 - 382.5 में आता है, जिसमें 26 प्रतिशत गृह हैं। इस प्रकार वर्ग 358.5 - 375 में गृहों का प्रतिशत

$$= \frac{(375 - 358.5)}{24} \times 26$$

$$= \frac{16.5}{24} \times 26 = 17.875$$

चूंकि 358.5 रुपए तक गृहों का प्रतिशत 59 है, इसलिए

375 रुपए $= P_{59} + 17.875 = P_{76.875}$

यहां प्रश्नों के उत्तर देने में हमने आवश्यक रूप में :

(i) ऐसा x_0 ज्ञात किया जिससे $F(x_0) = 0.25$ हो, तथा

(ii) ऐसा V ज्ञात किया जिससे $100\,F(375) = V$ हो।

7.6.3 चतुर्थक तथा दशमक

प्रयोग के अनुसार, कुछ विशेष शततमकों के विभिन्न नाम हो सकते हैं। प्रत्येक 25वां शततमक एक चतुर्थक कहलाता है तथा प्रत्येक दसवां शततमक एक दशमक कहलाता है। उदाहरण के लिए :

25वां शततमक = $P_{25} = Q_1$ = प्रथम चतुर्थक

50वां शततमक = $P_{50} = Q_2$ = द्वितीय चतुर्थक

75वां शततमक = $P_{75} = Q_3$ = तृतीय चतुर्थक

10वा शततमक = $P_{10} = d_1$ = प्रथम दशमक

20वां शततमक = $P_{20} = d_2$ = द्वितीय दशमक इत्यादि तथा

$P_{50} = Q_2 = d_5$ = माध्यिका होती है।

जब प्रतिशत के स्थान पर अनुपात प्रयोग किए जाएं तो शततमक को भिन्नक (fractile) कहते हैं। उदाहरण के लिए P_{30}, 0.3 भिन्नक होता है।

जिस प्रकार एक अवस्थिति के माप द्वारा बंटन के बारे में पूर्ण जानकारी प्राप्त नहीं हो सकती, उसी प्रकार बंटन के प्रकीर्णन की व्याख्या के लिए बहुत सारे शततमकों की आवश्यकता हो सकती है। इसीलिए प्रकीर्णन के सरल माप की आवश्यकता महसूस की गई। यही अगली इकाई में व्याख्या का विषय भी है।

बोध प्रश्न 2

1) एक औद्योगिक नगर के एक क्षेत्र में 250 परिवारों के आकार का बारंबारता बंटन निम्नलिखित है :

परिवार आकार	बारंबारता
1	4
2	22
3	25
4	45
5	52
6	41
7	36
8	15
9	7
10	3
योग	250

माध्य, माध्यिका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित बारंबारता बंटन का माध्य, माध्यिका तथा बहुलक ज्ञात कीजिए।
6 वर्ष के 309 बच्चों के आई. क्यू. (I.Q.) का बारंबारता बंटन

आई. क्यू.	बारंबारता
160-169	2
150-159	3
140-149	7
130-139	19
120-129	37
110-119	79
100-109	69
90-99	65
80-89	17
70-79	5
60-69	3
50-59	2
40-49	1
योग	309

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) निम्नलिखित में 5 वस्तुओं की कीमतें (जोकि अनुपातों में व्यक्त हैं) तथा संगत भार दिए हुए हैं। भारित समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य का परिकलन कीजिए।

वस्तु	कीमत अनुपात	भार
1	2.20	30
2	1.85	25

3	1.80	22
4	2.05	13
5	1.75	10

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

4) पांच राष्ट्रीयकृत बैंकों का करोड़ रुपयों में उपार्जन निम्नलिखित है :

217.40, 330.5, 682.55, 1263.59, 2249.63

इन उपार्जनों का गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

....
....
....
....
....

5) पुरुषों की शादी के समय आयु का बंटन निम्नलिखित था :

आयु (वर्षों में)	पुरुषों की संख्या
18-20	5
20-22	18
22-24	28
24-26	37
26-28	24
28-30	22

शादी के समय पर (i) औसत आयु, (ii) बहुलकता आयु, (iii) माध्यिका आयु, (iv) तृतीय चतुर्थक, (v) छठा दशमक; तथा (vi) 19वां शततमक ज्ञात कीजिए।

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

6) एक कारखाने में एक मिस्त्री 15 दिन में एक मशीन का निर्माण करता है, दूसरा मिस्त्री इसको 18 दिन में, तीसरा मिस्त्री 30 दिन में तथा चौथा मिस्त्री इसको 90 दिन में निर्मित करता है। एक मशीन के निर्माण में औसत दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए। आप कौन सा माध्य प्रयोग करेंगे तथा क्यों?

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

7.7 सारांश

इस इकाई में आपको एक क्रमित व्यूह बनाने की जानकारी दी गई है, जो आंकड़ों के प्रभावी संक्षेपण में एक प्रथम चरण है। बारंबारता बंटन तथा संचयी बारंबारता बंटन के निर्माण द्वारा आंकड़ों का संगठन और संक्षेपण संभव हो जाता है। आपने अवस्थिति के माप (या केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप), माध्य, माध्यिका तथा बहुलक के परिकलन का भी अध्ययन किया।

7.8 शब्दावली

समांतर माध्य : एक समुच्चय के प्रेक्षित मानों के योग को प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित करने पर समांतर माध्य या औसत प्राप्त होता है।

बारंबारता बंटन : आंकड़ों की बारंबारता बंटन व्यवस्था आंकड़ों की संहति में प्रतिरूप की व्याख्या करती है।

गुणोत्तर माध्य : यह चर के x मानों के गुणनफल का n वां मूल होता है।

हरात्मक माध्य : यह एक समुच्चय के प्रेक्षणों के व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है।

माध्यिका : एक समुच्चय के प्रेक्षणों को परिमाण कोटि (order of magnitude) के अनुसार व्यवस्थित करने पर इनके मध्यवर्ती मान को माध्यिका कहते हैं।

बहुलक : प्रेक्षणों के समुच्चय में यह वह मान होता है, जिसकी बारंबारता अधिकतम होती है।

7.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Agarwal, B.L., 1988: *Basic Statistics:* Wiley Eastern Limited: New Delhi. Chapter 3

Goon, A.M., M.K. Gupta, B. Dasgupta, 1985: *Basic Statistics:* The World Press Private Limited: Calcutta. Chapter 4

Kenney, J.F., E.S. Keeping, (Part 1) 1974: *Mathematics of Statistics:* Affiliated East West Press Pvt. Ltd.: New Delhi. Chapter 3

मेहता, बी.सी., 1986, *प्रारम्भिक सांख्यिकी*, राजस्थान हिंदी ग्रंथ अकादमी, जयपुर, द्वितीय संस्करण, अध्याय 6 (I), 6 (II)

7.10 बोध प्रश्नों के उत्तर अथवा संकेत

बोध प्रश्न 1

1) 2, 1, 6, 8, 3
2) (i) 150, 224, 236, 242, 247, 250
   (ii) 250, 100, 26, 14, 8, 3
3) (क) 0, 37, 118, 161, 185, 194, 200
   200, 163, 82, 39, 15, 6, 0
   (ख) 0, 37, 118, 161, 185, 194, 200

बोध प्रश्न 2

1) 5.2, 5, 5
2) 108.48, 108.41, 111.42
3) 1.96 रुपए
4) 674.50 करोड़ रुपए
5) (i) 25.83 वर्ष
   (ii) 24.82 वर्ष
   (iii) 24.86 वर्ष
   (iv) 27.38 वर्ष
   (v) 25.59 वर्ष
   (vi) 28.78 वर्ष
6) हरात्मक माध्य

7.11 पारिभाषिक शब्दावली

अवस्थिति के माप	measures of location
केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप	measures of central tendency
चतुर्थक	quartile
दशमक	decile
प्रकीर्णन के माप	measures of dispersion
प्रतिदर्शज	statistic
बहुलक	mode
भारित माध्य	weighted mean
शततमक	percentile
संयुक्त माध्य	pooled mean
प्रसामान्य बंटन	normal distribution
भिन्नक	fractile

इकाई 8 प्रकीर्णन के माप

इकाई की रूपरेखा

8.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आपको निम्नलिखित के संबंध में जानकारी मिल सकेगी :

- आंकड़ों के समुच्चय के प्रकीर्णन का संख्यात्मक परिकलन करना;
- चेबाइचेव्य (Chebychev) की असमता (inequality) को समझना तथा विवरण-गुणांक का परिकलन करना;
- आंकड़ों के विशेष प्रकार के बंटनों के सांद्रता माप को ज्ञात करना।

8.1 प्रस्तावना

इस इकाई में आप चर/चरों के आंकड़ों के समूह के, विचरण परिसर में, बंटन के बारे में निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए अवधारणाओं तथा प्रविधियों के प्रयोग के बारे में सीखेंगे।

8.2 प्रकीर्णन की अवधारणा

प्रकीर्णन शब्द का प्रयोग आंकड़ों में विषमांगता (Heterogeneity) की मात्रा को सूचित करने के लिए किया जाता है। विभिन्न प्रेक्षण आपस में किस सीमा तक भिन्न हैं, इसको बताने वाला यह मुख्य लक्षण होता है। अगर प्रेक्षणों के समुच्चय में सभी प्रेक्षण बराबर हैं तो इनका प्रकीर्णन शून्य होगा। प्रेक्षणों में भिन्नता जितनी अधिक होगी, प्रकीर्णन उतना ही अधिक होगा। प्रकीर्णन के माप का उद्देश्य व्यष्टि प्रेक्षणों में औसतन भिन्नता की सीमा को संख्यात्मक रूप में प्रकट करना होता है।

8.2.1 परिसर

प्रकीर्णन के सभी मापों में परिसर माप सरलतम होता है। प्रेक्षणों के अधिकतम तथा न्यूनतम मानों के अंतर को परिसर कहते हैं। सारणी 7.1 के आंकड़ों के लिए गृह आकार का परिसर $8 - 1 = 7$ है। यहां यह ध्यान दें कि वर्गीकृत आंकड़ो के लिए प्रेक्षणों के अधिकतम या न्यूनतम मानों की पहचान करना संभव नहीं होता है। इसलिए यहां वर्गों की दो चरम परिसीमाओं के अंतर को परिसर कहा जाता है।

यह बात अंतःदर्शी है कि अगर हम छोटे आकार का प्रतिदर्श लें तो केन्द्रीय प्रवृत्ति के कारण, प्रेक्षणों के अपने बहुलक के आसपास होने की बड़ी संभावना रहती है। अगर प्रतिदर्श के आकार में वृद्धि होती है तो इसमें कम संभावनीय या चरम

मान सम्मिलित हो जाते हैं जिसका अर्थ यह होगा कि प्रतिदर्श के आकार में वृद्धि के साथ परिसर के आकार में भी वृद्धि हो जाएगी।

इसके साथ ही हम यह भी जानते हैं कि पुनरावृत्त प्रतिवयनों में प्रतिदर्शों का आकार समान रहने पर भी परिसर में अत्यधिक परिवर्तन होता है। इस कारण इसको तुलनात्मक माप के रूप में प्रयोग अधिक उपयुक्त नहीं होता। इन सभी बातों के बावजूद परिसर एक ऐसा माप है, जिसको आसानी से समझा और परिकलित किया जा सकता है।

8.2.2 अंतःचतुर्थक परिसर

चूंकि परिसर केवल दो चरम मानों पर ही निर्भर होता है, इसलिए प्रकीर्णन के माप के रूप में यह बंटन की ठीक प्रकार से व्याख्या नहीं करता। आंकड़ों के समुच्चय में एक मान, जो बहुत बड़ा या छोटा है तथा प्रेक्षणों के सामान्य प्रतिरूप से भिन्न है, परिसर को बड़ा कर देता है। इस प्रकार के प्रेक्षणों से बचने के लिए, विशेषकर जब आंकड़ों में केन्द्रीय प्रवृत्ति प्रबल हो, अंतःचतुर्थक परिसर प्रकीर्णन का बड़ा उपयोगी माप होता है। इसकी परिभाषा इस प्रकार की जाती है :

$$\text{अंतःचतुर्थक परिसर} = Q_3 - Q_1, = P_{75} - P_{25}$$

अंतःचतुर्थक परिसर मध्यवर्ती 50 प्रतिशत प्रेक्षणों का परिसर होता है। अगर प्रेक्षण माध्यिका के आसपास सघन है, अर्थात माध्यिका के निकट प्रबल बहुलक है तो परिसर के आधे की तुलना में अंतःचतुर्थक परिसर छोटा होगा। अगर आंकड़े सपाट हैं, जिनमें कोई केन्द्रीय प्रवृत्ति विद्यमान नहीं है, तो यह माप बड़ा होगा तथा परिसर के आधे के निकट होगा।

सारणी 7.1 के आंकड़ों के लिए $P_{75}=4$, $P_{25}=3$ है। इसलिए अंतःचतुर्थक परिसर $= 4-3 = 1$ है। यहां, चूंकि परिसर 7 है, इसलिए गृहों के आकार में प्रबल केन्द्रीय प्रवृत्ति विद्यमान है।

सारणी 7.2 के आंकड़ों के लिए खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के बंटन के लिए $P_{25} = 325.50$ रुपए; $P_{75} = 377.88$ रुपए है। अतः अंतःचतुर्थक परिसर $= 377.88 - 325.50 = 52.38$ है। इसकी तुलना में परिसर $= 146.00$ है, जोकि अंतःचतुर्थक परिसर का 2.79 गुणा है। यह इस बात का सूचक है कि खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के आंकड़ों में केन्द्रीय प्रवृत्ति इतनी प्रबल नहीं है।

8.2.3 माध्य विचलन

जबकि परिसर दो चरम प्रेक्षणों पर निर्भर होता है, अंतःचतुर्थक परिसर मध्यवर्ती 50 प्रतिशत के दो चरम प्रेक्षणों पर निर्भर होता है। अतः हम प्रत्येक माप में प्रेक्षणों के समूह के बारे में कुछ न कहकर केवल प्रेक्षणों के न्यूनतम (या P_{25}) तथा अधिकतम (या P_{75}) के बीच प्रतिशत की बात करते हैं। आंकड़ों के प्रकीर्णन को निर्धारित करने की अनेक संभावनाओं में से एक प्रेक्षणों के किसी केन्द्रीय मान से विचलन (Deviation) का प्रयोग हो सकता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में अधिकतर माध्य का प्रयोग किया जाता है, अतः हम प्रेक्षणों के विचलन इसी से परिकलित करते हैं। प्रकीर्णन के माप को ज्ञात करने के लिए इन विचलनों को उपयुक्त प्रकार से संयुक्त किया जाता है।

माध्य विचलन, प्रत्येक प्रेक्षण पर आधारित विचलनों के समांतर माध्य के रूप में, प्रत्येक प्रेक्षण को समान भार (महत्व) देता है।

$x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ प्रेक्षणों के लिए अगर हम सामान्य अंतर को विचलन लें तो i वें प्रेक्षण के लिए विचलन $= x_i - \bar{x}$ होगा, जहां पर $\bar{x}$ प्रेक्षणों का माध्य है। इन विचलनों का माध्य

$$= \frac{(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \ldots\ldots + (x_n - \bar{x})}{n}$$

$$= \frac{1}{n}\sum (x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n}\left[\sum x_i - n\bar{x}\right]$$

$$= \frac{\sum x_i}{n} - \bar{x} = \bar{x} - \bar{x} = 0 \text{ है।}$$

चूंकि विचलनों को सामान्य अंतर से रूप में लेने से कोई माप प्राप्त नहीं होता इसलिए माध्य विचलन के लिए निरपेक्ष (absolute) अंतरों का प्रयोग किया जाता है।

$$\text{माध्य विचलन(M.D)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i - \bar{x}$$

यहां पर दो रेखिकाएं यह व्यक्त करती हैं कि इनके बीच दो संख्याओं के अंतर का चिह्न धनात्मक लिया जाना है। उदाहरण के 2 – 4 = 2 लिया जाएगा, आदि।

असंतत तथा संतत बारंबारता आंकड़ों के लिए सूत्र को इस प्रकार लिखा जाएगा :

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}| f_i$$

यहां पर $\sum_{i=1}^{k} f_i = n$, x_i पृथक् (distinct) प्रेक्षण है तथा असंतत प्रकार के बंटन के लिए x_i की बारंबारता f_i है।

अगर बंटन संतत प्रकार का है तो x_i का मान i वें वर्ग का मध्य बिन्दु होगा तथा f_i इस वर्ग की बारंबारता होगी। इस प्रकार के माध्य विचलन के माप की आवश्यकता निम्नलिखित उदाहरण से स्पष्ट है। आंकड़ों के दो समुच्चयों के लिए परिकलित संक्षेपण मान निम्नलिखित हैं :

	आंकड़ों का समुच्चय III	आंकड़ों का समुच्चय IV
प्रेक्षणों की संख्या	7	7
P_{25}	7	7
माध्यिका	12	12
P_{75}	17	17
परिसर	20	20
अंतःचतुर्थक परिसर	10	10
माध्य	12	12

यहां पर केवल इन मापों के आधार पर आंकड़ों के समुच्चय पर ध्यान दिए बिना, ऐसा प्रतीत होता है कि दो व्यक्तियों ने अलग-अलग एक ही आंकड़ों के समुच्चय पर ये परिकलन किये हैं। लेकिन वास्तव में आंकड़ों के ये दो समुच्चय निम्नलिखित हैं :

आंकड़ों का समुच्चय III : 3, 7, 8, 12, 14, 17, 23
आंकड़ों का समुच्चय IV : 2, 7, 11, 12, 13, 17, 22

इसी प्रकार, हम और अधिक आंकड़ों के ऐसे समुच्चय बना सकते हैं जो आपस में बहुत भिन्न हों तथा उनके उपरोक्त मापों के मान समान हों। यह तुलना इस बात की सूचक है जब हमें और अतिरिक्त मापों की आवश्यकता है तथा माध्य विचलन एक ऐसा ही माप है इसका यह अर्थ कदापि नहीं लेना चाहिए कि उपरोक्त मापों के साथ माध्य विचलन को सम्मिलित करने से आंकड़ों के समुच्चय की पूर्ण व्याख्या हो जाती है ।

आंकड़ों के समुच्चय III के लिए

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{1}{7}\Big[|3-12| + |7-12| + |8-12| + |12-12| + |14-12| + |17-12| + |23-12|\Big]$$

$$= \frac{1}{7}\left[9+5+4+0+2+5+11\right]$$

$$= 5.14$$

तथा आंकड़ों के समुच्चय IV के लिए

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{1}{7}\Big[|2-12| + |7-12| + |11-12| + |12-12| + |13-12| + |17-12| + |22-12|\Big]$$

$$= \frac{1}{7}\left[10+5+1+0+1+5+10\right]$$

$$= 4.57 \text{ है।}$$

अतः आंकड़ों के समुच्चय III में प्रेक्षणों का प्रकीर्णन आंकड़ों के समुच्चय IV से अधिक है।

अब हम गृह आकार तथा गृहों के खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के आंकड़ों के माध्य विचलन परिकलित करेंगे।

सारणी 7.1 में गृह आकार के आंकड़ों के लिए माध्य = $\bar{x}$ = 3.74 है।

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}| f_i$$

$$= \frac{1}{100}\Big[3|1-3.74| + 16|2-3.74| + \ldots\ldots\ldots + 2|8-3.74|\Big]$$

$$= \frac{109.12}{100} = 1.0912$$

सारणी 7.2 में खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के बंटन के लिए माध्य = $\bar{x}$ = 348.66 रुपए है।

$$\text{माध्य विचलन (रुपयों में)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}|\, f_i$$

$$= \frac{1}{100}\left[2|274.50 - 348.66| + \ldots\ldots\ldots\ldots + 15\,|394.50 - 348.66\,|\right]$$

$$= \frac{2510.88}{100} = 25.11$$

8.2.4 प्रसरण तथा मानक विचलन

प्रसरण तथा मानक विचलन आम प्रयोग किए जाने वाले प्रकीर्णन के माप हैं। प्रसरण, व्यष्टि विचलनों को उपयुक्त प्रकार से संयुक्त करने वाला ऐसा माप है जो माध्य विचलन की तरह प्रत्येक प्रेक्षण को समान भार (महत्व) देता है। प्रसरण में, व्यष्टि विचलन का माप, प्रेक्षण तथा माध्य के अंतर का वर्ग होता है। चूंकि, निरपेक्ष अंतरों की अपेक्षा अंतरों के वर्ग का प्रयोग (विशेषतः विधिवत् गणित में) अधिक सरल होता है, इसलिए प्रसरण का प्रयोग बड़ा ही लोकप्रिय है प्रसरण को s^2 से सूचित किया जाता है और यह प्रेक्षणों के माध्य से अंतरों के वर्ग का माध्य होता है।

अपरिष्कृत आंकड़ों से प्रसरण इस प्रकार परिकलित किया जाता है :

$$\text{प्रसरण} = s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2$$

असंतत या संतत बारंबारता आंकड़ों के लिए सूत्र इस प्रकार है :

$$= s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

यहां पर $\sum_{i=1}^{n} f_i = n$, x_i पृथक प्रेक्षण है तथा असंतत बारंबारता बंटन में x_i की बारंबारता x_i है। संतत बारंबारता बंटन में x_i, iवें वर्ग का मध्य-बिन्दु है तथा इस वर्ग की बारंबारता f_i है।

अगर माप का पैमाना समान हो तो वे प्रेक्षण जिनका प्रसरण 2 (उदाहरण के लिए) है, अन्य प्रेक्षणों की तुलना में, जिनका प्रसरण 2 से अधिक है, कम प्रकीर्णन (dispersed) हैं। किसी बंटन की उसके अवस्थिति के माप तथा उसके प्रकीर्णन के माप द्वारा व्याख्या करते हुए यह आवश्यक है कि दोनों माप एक ही इकाई में व्यक्त हों। माध्य तथा माध्य विचलन की एक ही इकाई होती है। लेकिन, चूंकि प्रसरण के परिकलन में प्रत्येक अंतर का वर्ग किया जाता है, इसलिए प्रसरण की इकाई प्रेक्षण की इकाई का वर्ग होती है। प्रसरण पर आधारित तथा इतना ही या इसका इससे भी अधिक लोकप्रिय प्रकीर्णन का एक अन्य माप होता है, जिसकी माप की इकाई प्रेक्षण की इकाई के समान होती है। इस माप को मानक विचलन कहते हैं। मानक विचलन, प्रसरण का धनात्मक वर्गमूल होता है। इसको s से सूचित किया जाता है।

सारणी 7.1 में गृहों के आकार के आंकड़ों के लिए s^2 का परिकलन (इसकी तुलना माध्य विचलन के परिकलन से कीजिए)।

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

$$= \frac{1}{100}\left[3\,(1-3.74)^2 + 16\,(2-3.74)^2 + \ldots\ldots + 2\,(8-3.74)^2\right]$$

$$= \frac{199.24}{100} = 1.9924, \text{ तथा}$$

$s = 1.4115$ है।

सारणी 7.2 में दिए हुए गृहों के खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के आकंड़ों के लिए s^2 (प्रसरण) वर्ग रुपयों में,

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2 f_i$$

$$= \frac{1}{100}\left[2\,(274.50 - 348.66)^2 + \ldots\ldots + 15\,(394.50 - 348.66)^2\right]$$

$$= \frac{95725.437}{100} = 957.25\ ;\ \text{तथा}$$

s= 30.94 रुपए है।

परिकलन की सुविधा के लिए प्रसरण के सूत्र को परिस्थितियों के अनुसार इस प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2 \text{ या}$$

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 f_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 f_i - \bar{x}^2$$

अतः प्रसरण = (मानों के वर्ग का माध्य) – (माध्य का वर्ग)।

उपरोक्त सूत्रों के प्रयोग द्वारा परिकलन के चरण सारणी 7.4 में दिए गए हैं।

सारणी 7.1 में गृहों के आकार के बंटन का प्रसरण इस प्रकार परिकलित किया जाता है :

$$\bar{x} = 3.74$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 = \frac{1598}{100} = 15.98$$

$s^2 = 15.98 - (3.74)^2 = 15.98 - 13.7876 = 1.9924$ है, जैसा कि पहले परिकलित किया हुआ है।

सारणी 7.2 में खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के बंटन के लिए :

$$\bar{x} = 348.66 \text{ रुपए},$$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} f_i x_i^2 = 121659.515 \text{ वर्ग रुपए},$$

$s^2 = 121659.515 - (348.66)^2$ वर्ग रुपए
$= 957.25$ वर्ग रुपए, जैसा कि पहले परिकलित किया जा चुका है।

प्रसरण के परिकलन को और सरल करने के लिए x का $u = \frac{x-A}{h}$ में परिवर्तन किया जाता है, जैसा कि सारणी 7.5 में माध्य के परिकलन के लिए किया गया था।

$$\text{चूंकि}\quad u_i - \bar{u} = \frac{x_i - A}{h} - \frac{\bar{x} - A}{h} = \frac{x_i - \bar{x}}{h} \text{ है},$$

$$\therefore s_u^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(u_i - \bar{u})^2 f_i = \frac{1}{h^2}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^2 f_i$$

$$= \frac{s_x^2}{h^2} \text{ है।}$$

यहां पर s_u^2, u_i के आधार पर परिकलित प्रसरण है तथा s_x^2, x_i (आंकड़ों) का प्रसरण है, जिसका हमें परिकलन करना है।

$$\text{अतः } s_x^2 = h^2 \cdot s_u^2$$

s_u^2 का परिकलन सरल है, इसलिए इसको परिकलित करके तथा इसको h^2 से गुणा करने पर s_x^2 को ज्ञात किया जा सकता है। इसकी व्याख्या के लिए हम सारणी 7.2 में दिए बंटन का प्रयोग करेंगे।
s_u^2 संबंधित विभिन्न परिकलन सारणी 7.5 में प्रस्तुत हैं।
$\bar{u}$ = 0.09 स्तम्भ (4) का योग

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} u_i^2 f_i = 1.67 \text{ स्तम्भ (5) का योग}$$

$\therefore s_u^2 = 1.67 - (0.09)2 = 1.6619$
तथा $s_x^2 = (24)^2 (1.6619) = 957.25$ है।

हालांकि x से u में परिवर्तन परिकलन की सुविधा के लिए किए गए हैं, लेकिन यहां एक महत्वपूर्ण बात सामने आती है। यह ध्यान दें कि $s_u^2 = 1.6619$ है तथा $s_x^2 = 957.25$ है; यहां पर u को x से एक साधारण रेखीय परिवर्तन (Simple linear transformation) द्वारा, अर्थात x के मूल एवं पैमाने में परिवर्तन द्वारा प्राप्त किया गया है। इस प्रकार के स्वाभाविक उदाहरण, वज़न के लिए पौंड तथा किलोग्राम, द्रव्यों के आयतन के लिए गैलन तथा लीटर आदि हैं। चूंकि एक किलोग्राम $\doteq$ 2.2046 पौंड, इसलिए 5 किलोग्राम मानक विचलन (जोकि किलोग्राम में मापा गया है) 11.023 पौंड मानक विचलन (जोकि पौंड में मापा गया है) के बराबर होगा। इसी प्रकार, चूंकि 1 लीटर = 0.22 गैलन है, इसलिए 5 लीटर मानक विचलन (जोकि लीटर नें मापा गया है) 1.1 गैलन मानक विचलन (जोकि गैलन में मापा गया है) के बराबर होगा। अतः जब प्रसरण तथा मानक विचलन द्वारा प्रेक्षणों के प्रसार को मापा है, मापों की इकाई के कारण इनसे कुछ अधिक प्राप्त नहीं किया जा सकता।

प्रेक्षणों के प्रसार के संदर्भ में केवल एक बहुत ही उपयोगी परिणाम, जोकि इकाई के माप पर निर्भर नहीं है तथा माध्य और मानक विचलन पर आधारित है, चेबाइचेव्य (Chebychev) द्वारा दिया गया है।

बोध प्रश्न 1

1) प्रकीर्णन किसे कहते हैं? यह सामान्यतः किन विधियों द्वारा मापा जाता है?

....

....

....

....

....

....

2) दस विद्यार्थियों की एक कक्षा में एक कमज़ोर विद्यार्थी के अंक अन्य विद्यार्थियों के औसत अंकों से 25 कम हैं। यह दिखाइए कि इन सभी विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का मानक विचलन वास्तव में 12 है तो कमज़ोर विद्यार्थी को छोड़कर बाकी विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

3) निम्नलिखित आंकड़े एक दुकानदार द्वारा उत्तरोत्तर 15 दिनों में अर्जित लाभ दर्शाते हैं:

116	87	91
81	98	102
97	100	105
101	115	98
102	98	93

आंकड़ों का परिसर, माध्य से माध्य विचलन तथा मानक विचलन ज्ञात की ए।

....

....

....

....

....

....

4) निम्नलिखित आंकड़ों से समांतर माध्य, मानक विचलन तथा माध्य विचलन का परिकलन कीजिए :

अंक	4-5	6-7	8-9	10-11	12-13	14-15	योग
बारंबारता	4	10	20	15	8	3	60

5) एक विद्यार्थी द्वारा 100 प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 40 तथा 5.1 परिकलित किया गया । बाद में यह पता चला कि उसने गलती से एक प्रेक्षण को 40 के स्थान पर 50 लिया था । सही मानक विचलन ज्ञात कीजिए ।

8.3 प्रकीर्णन तथा मानक विचलन में संबंध

आप यह अध्ययन कर चुके हैं कि अगर आंकड़ों के समुच्चय में सभी मान अपने माध्य के आसपास हैं तो इनमें प्रकीर्णन या प्रसरण की मात्रा कम होती है । इसके विपरीत, उन आंकड़ों के समुच्चयों में, जिनमें कुछ मान अपने माध्य से अधिक दूरी पर स्थित हों, प्रकीर्णन की मात्रा अधिक होती है । चेबाइचेव्य (Chebychev) के प्रमेय द्वारा एक उपयोगी नियम, जो प्रकीर्णन तथा मानक विचलन में संबंध की व्याख्या करता है, दिया गया है ।

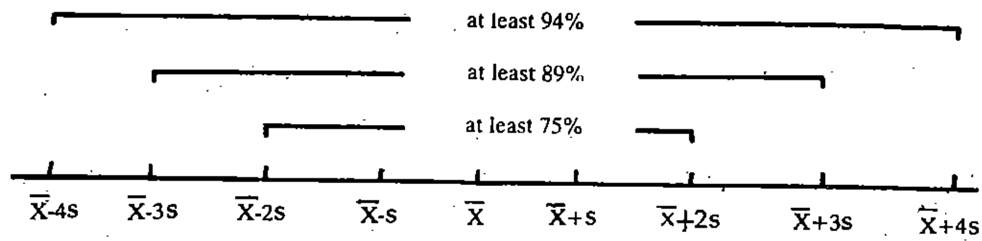
8.3.1 चेबाइचेव्य प्रमेय

किसी आंकड़े के समुच्चय के लिए तथा किसी धनात्मक k के लिए, माध्य से दोनों ओर मानक विचलन के बीच आने वाले प्रक्षेणों का अनुपात अवश्य ही कम से सम $1-\frac{1}{k^2}$ होता है ।

अगर प्रेक्षणों के समुच्चय का माध्य $\bar{x}$ है तथा मानक विचलन s है तो इस प्रमेय द्वारा $\bar{x}-k^2$ तथा $\bar{x}+ks$ के बीच में आने वाले प्रेक्षणों का अनुपात अवश्य ही कम से कम $1-\frac{1}{k^2}$ होगा ।

यह प्रमेय k के उन धनात्मक मानों के लिए जो एक से कम हैं, उपयोगी नहीं है क्योंकि $1-\frac{1}{k^2}$ (जो प्रेक्षणों के अनुपात को व्यक्त करता है, ऋणात्मक नहीं हो सकता) का न्यूनतम मान शून्य हो सकता है (अगर मान लिया $k=\frac{1}{3}$ है तो $1-\frac{1}{(⅓)^2}=-8$) K के एक ऊँचे मान के लिए हम प्रेक्षणों का न्यूनतम अनुपात सुविधापूर्वक परिकलित कर सकते हैं ।

उदाहरण के लिए माध्य से 1.5 मानक विचलन के बीच अवश्य ही न्यूनतम $1-\frac{1}{(1.5)^2} = 0.56$ या 56 प्रतिशत प्रेक्षण होंगे। निम्नलिखित आकृति में चेबाइचेव्य प्रमेय के आधार पर आंकड़ों के प्रसार को दिखाया गया है। सारणी 7.1 में दिए हुए गृह आकार के आंकड़ों के लिए $\bar{x} = 3.74$ तथा $s = 1.4115$ हैं। इन आंकड़ों के लिए हम कह सकते हैं कि कम से कम 75 प्रतिशत (k=2 के लिए) गृहों के आकार 0.917 से 6.563 या 1 से 6 के बीच अवश्य होंगे।



चित्र 8.1

सारणी 7.2 में दिए हुए गृहों के खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के बंटन के लिए, $\bar{x} = 348.66$ तथा $s = 30.94$ है। यहां कम से कम 56 प्रतिशत गृहों (k=1.5) का औसत मासिक व्यय 310.50 रुपए से 382.50 रुपए के बीच अवश्य होगा।

8.3.2 बंटन का आकार

बहुत-सी परिस्थितियों में प्रणालीमूलक अध्ययनों के लिए माध्य तथा प्रकीर्णन के मापों द्वारा बंटन की पर्याप्त व्याख्या हो जाती है। फिर भी, व्यावहारिक परिस्थितियों में, विशेषकर आय, व्यय, आर्थिक परिसम्पत्ति जैसे आर्थिक चरों के लिए जो धनात्मक होते हैं, बंटन की व्याख्या के लिए अन्य माप भी प्रयोग किए जाते हैं। इस प्रकार के दो माप विचरण गुणांक तथा सांद्रता अनुपात होते हैं। आर्थिक चरों के बंटन में असमानताओं के आवश्यक माप के रूप में इन मापों का अध्ययन हम अब करेंगे।

8.3.3 विचरण गुणांक

असमानताओं को दूर करने के लिए एक गरीबी उन्मूलन कार्यक्रम के अंतर्गत हम दो गांवों में गृहों की आर्थिक स्थिति की तुलना करना चाहते हैं। इन दो गांवों के गृहों द्वारा मासिक कैलोरी ([illegible]) अंतर्ग्रहण की संक्षेपण संख्या निम्नलिखित हैं:

	गांव क	गांव ख
गृहों की संख्या	817	561
माध्य कैलोरी अंतर्ग्रहण	2417	2235
कैलोरी अंतर्ग्रहण का मानक विचलन	418	232

हमारा प्रश्न यह ज्ञात करना है कि कौन-से गांव में कैलोरी अंतर्ग्रहण की दृष्टि से अधिक असमानता है। गांव 'ख' की तुलना में माध्य कैलोरी अंतर्ग्रहण गांव 'क' में अधिक है, लेकिन इसका मानक विचलन तथा गृहों की संख्या भी अधिक है। वास्तव में गांव 'क' में, गांव 'ख' की तुलना में अधिक संख्या में गरीब गृह हो सकते हैं और इस प्रकार गांव 'क' में गृहों में अधिक असमानताएं हो सकती हैं। इन असमानताओं की मात्रा के माप के एक सूचकांक को विचरण गुणांक कहते हैं। इसकी परिभाषा इस प्रकार है:

$$\text{विचरण गुणांक (Coefficient of variation or C.V.)} = \frac{s}{\bar{x}}$$

चूंकि s तथा $\bar{x}$ की इकाई समान है, इसलिए विचरण गुणांक इकाई से मुक्त होता है तथा मापन की इकाई के चयन से प्रभावित नहीं होता। गांव 'क' के लिए विचरण गुणांक = 0.1729 तथा गांव 'ख' के लिए विचरण गुणांक 0.1038 है।

चूंकि $\frac{0.1729 - 0.1038}{0.1038} \times 100 = 66.57$ है, इसलिए गांव 'ख' की तुलना में गांव 'क' में 66.57 प्रतिशत अधिक असमानताएं हैं।

8.3.4 सान्द्रता अनुपात

उपरोक्त प्रश्न में हमने प्रत्येक गांव में असमानता की मात्रा का अध्ययन किए बिना, दो गांवों में विद्यमान असमानताओं की तुलना की है। अगर किसी बंटन का दायां छोर लम्बा हो तो यह इस बात को व्यक्त करता है कि बंटन में कुछ व्यक्तियों के पास अधिक हिस्सा है। इसको समझने के लिए हम एक काल्पनिक अर्थव्यवस्था में आय के वितरण का अध्ययन करते हैं। मान लीजिए कि अर्थव्यवस्था में व्यक्ति 3 वर्गों में विभाजित हैं–ऊपरी वर्ग, मध्य वर्ग तथा निम्न वर्ग; तथा इन वर्गों में जनसंख्या का क्रमशः 10 प्रतिशत, 30 प्रतिशत तथा 60 प्रतिशत अंश है। मान लिया जाए कि निम्न वर्ग को राष्ट्रीय आय का 20 प्रतिशत, मध्य वर्ग को 30 प्रतिशत तथा ऊपरी वर्ग को बाकी 50 प्रतिशत प्राप्त होता है। इन आंकड़ों को प्रतिशत संचयी बारंबारता बंटन रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। अतः निम्नतम 60 प्रतिशत जनसंख्या के पास कुल आय का 20 प्रतिशत है, निम्नतम 90 प्रतिशत के पास कुल आय का (20 प्रतिशत + 30 प्रतिशत = 50 प्रतिशत) 50 प्रतिशत है तथा स्पष्टतः 100 प्रतिशत जनसंख्या के पास आय का 100 प्रतिशत है। अगर हम एक आलेख पृष्ठ के क्षैतिज अक्ष पर प्रतिशत संचयी बारंबारता को लेकर तथा उर्ध्वाधर अक्ष पर प्रतिशत संचयी आय को लेकर बिन्दुओं (0, 0), (60, 20), (90, 50) तथा (100, 100) को अंकित करें तो इन बिन्दुओं को मिलाने वाली वक्र को सांद्रता वक्र या लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve) कहते हैं। बिन्दु (0, 0) तथा (100, 100) को मिलाने वाली सरल रेखा को समान बंटन की रेखा कहते हैं। यह रेखा इस बात को व्यक्त करती है कि अंश का अनुपात, इसको प्राप्त करने वाले व्यक्तियों के अनुपात के बराबर है। समान बंटन की रेखा तथा सांद्रता वक्र के बीच क्षेत्रफल को सांद्रता का क्षेत्रफल (Area of concentration) कहते हैं। इस क्षेत्रफल का दुगना, जो जिनी (Gini) की सांद्रता गुणांक (या अनुपात) कहलाता है, असमानता का सूचक होता है। लॉरेंज वक्र द्वारा यह व्यक्त किया जाता है कि व्यक्तियों के पास वास्तव में आय का कितना अंश है तथा कितना अंश उनके पास होना चाहिए। सारणी 7.2 में दिए हुए खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के आंकड़ों के लिए लॉरेंज वक्र के परिकलन के विभिन्न चरणों की व्याख्या सारणी 8.1 में की गई है।

सारणी 8.1 में (जैसा कि माध्य तथा मानक विचलन के लिए हमने मान्यता की थी), यह मान्यता है कि किसी दिए हुए वर्ग में प्रत्येक गृह का औसत मासिक व्यय समान है, जोकि वर्ग के मध्य-बिन्दु के बराबर है।

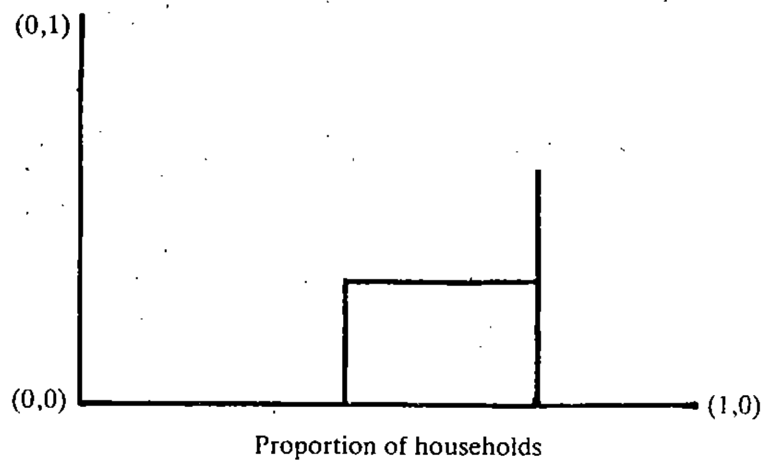
सारणी 8.1: गृहों के खाद्य सामग्री पर औसत मासिक व्यय के लिए लॉरेंज वक्र का परिकलन

वर्ग अंतराल (रुपयों में)	मध्य बिन्दु (रुपयों में)	बारंबारता	व्यय (रुपयों में)	कुल व्यय का अंश	तुलनात्मक संचयी बारंबारता	संचयी अंश
(1)	(2)	(3)	(2) × (3) = (4)	(5)	(6)	(7)
262.5 – 286.5	274.5	1	274.50	0.0079	0.01	0.0079
286.5 – 310.5	298.5	14	4179.00	0.1198	0.15	0.1277
310.5 – 334.5	322.5	16	5160.00	0.1480	0.31	0.2757
334.5 – 358.5	346.5	28	9702.00	0.2783	0.59	0.5540
358.5 – 382.5	370.5	26	9633.00	0.2763	0.85	0.8303
382.5 – 406.5	394.5	15	5917.50	0.1697	1.00	1.0000
योग		100	34886.00	1.0000		

उदाहरण के लिए, 16 गृहों में प्रत्येक का खाद्य सामग्री पर मासिक व्यय 322.50 रुपए है; इन गृहों की खाद्य सामग्री पर कुल लागत 322.50 × 16 = 5160.00 रुपए है। ये संख्याएं स्तम्भ (4) में लिखी हुई हैं। स्तम्भ (4) का जोड़ 100 गृहों की खाद्य सामग्री पर कुल मासिक लागत है। वर्ग 310.50 – 334.50 रुपए, में 16 गृहों के लिए कुल व्यय का अंश 5160/34886 = 0.1480 है। ये अंश की संख्याएं स्तम्भ (5) में लिखी हुई हैं। स्तम्भ (6) में तुलनात्मक संचयी बारंबारता दी हुई है तथा स्तम्भ (7), स्तम्भ (5) द्वारा उसी प्रकार संचयन करके प्राप्त किया जाता है, जिस प्रकार स्तम्भ (3) द्वारा स्तंभ (6) को प्राप्त किया गया है।

सारणी 8.1 द्वारा यह व्यक्त होता है कि निम्नतम 15 प्रतिशत गृहों का कुल व्यय में अंश 12.77 प्रतिशत है, जबकि न्यायसंगत अंश होने की परिस्थिति में यह 15 प्रतिशत होना चाहिए था; निम्नतम 31 प्रतिशत गृहों का अंश 27.57 प्रतिशत है, जबकि न्यायसंगत अंश होने की परिस्थिति में यह 31 प्रतिशत होना चाहिए था, इत्यादि···।

स्तम्भ (7) में दिए मानों को y-अक्ष पर तथा स्तम्भ (6) में दिए मानों को x-अक्ष पर लेकर विभिन्न बिन्दुओं को अंकित किया जाता है। मूल बिन्दु से लेकर इन उत्तरोत्तर बिन्दुओं को वक्र द्वारा मिलाने पर लॉरेंज वक्र प्राप्त होता है। चूंकि स्तम्भ (6) तथा (7) के मान 0 तथा 1 के बीच हैं, इसलिए इनको अंकित करने के पैमाने का सरलता से चयन किया जा सकता है। आकृति 8.2 में लॉरेंज वक्र, न्यायसंगत रेखा तथा सांद्रता अनुपात जोकि छायित (shaded) क्षेत्रफल का दुगना है, दिए हुए हैं।



चित्र 8.2

हमें यह जानना चाहिए कि लॅारेंज वक्र ह्रासमान होती है तथा न्यायसंगत रेखा के हमेशा नीचे होती है। अगर उत्तरोत्तर त्रिन्दुओं को एक निष्कोण वक्र से जोड़ना है तो फलन को आलेख पृष्ठ पर आरेखित करना बेहतर रहेगा क्योंकि आलेख पृष्ठ पर क्षेत्रफल वर्गों की गिनती करके ज्ञात किया जा सकता है। और अगर उत्तरोत्तर बिन्दु सरल रेखाओं से जोड़े गए हैं तो अंतराल का सही क्षेत्रफल उसमें विभिन्न आयत तथा त्रिभुज बनाकर ज्ञात किया जा सकता है। यह आकृति 8.2 में दिखाया गया है।

बोध प्रश्न 2

स्विटज़रलैंड में 1968 से 1980 तक अशोधित जन्म दर प्रति 1000 व्यक्ति की संख्याएं निम्नलिखित हैं:
अशोधित जन्म दर : 17.1, 16.5, 15.8, 15.2, 14.3, 13.6, 12.9, 12.3, 11.7, 11.5, 11.3, 11.3, 11.6
प्रसरण, मानक विचलन तथा विचरण गुणांक परिकलित कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित सारणी में महिला शिक्षकों की आयु (जैसा कि अभिलेखों में प्रकाशित है), का बंटन दिया हुआ है:

आयु वर्ग (वर्षों में).	महिला शिक्षकों की संख्या
15-19	3
20-24	13
25-29	21
30-34	15
35-39	5
40-44	4
45-49	2

(i) विचरण गुणांक; तथा (ii) 26 से 33 वर्ष की आयु के बीच शिक्षकों की संख्या परिकलित कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

8.4 सारांश

इस इकाई में आपने प्रकीर्णन के मापों के बारे में अध्ययन किया। इनमें प्रसरण, मानक विचलन तथा सांद्रता अनुपात बहुत ही महत्वपूर्ण हैं। आपने दोनों प्रकार के आंकड़ों (वर्गीकृत तथा अवर्गीकृत) के लिए इन मापों का परिकलन करना भी सीखा।

8.5 शब्दावली

माध्य विचलन : यह प्रेक्षणों के माध्य या अन्य निर्धारि ? मान से निरपेक्ष विचलनों (अर्थात् अंतरों) का समांतर माध्य होता है।

परिसर : यह प्रेक्षणों के अधिकतम और न्यूनतम भाप का अंतर होता है।

मानक विचलन : यह माध्य से विचलनों के वर्गों के समांतर माध्य का वर्गमूल होता है।

8.6 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Agarwal, B.L., 1988: *Basic Statistics*: Wiley Eastern Ltd.: New Delhi. Chapter 4

Goon, A.M., M.K. Gupta, B. Dasgupta, 1985: *Basic Statistics:* The World Press Pvt. Ltd.: Calcutta. Chapter 5

Kenney, J.F., E.S. Keeping, (Part 1) 1974: *Mathematics of Statistics:* Affiliated East-West Press Pvt. Ltd.: New Delhi. Chapter 6

मेहता, बी.सी., 1986, *प्रारंभिक सांख्यिकी,* राजस्थान हिंदी ग्रंथ अकादमी, जयपुर द्वितीय संस्करण, अध्याय 7

8.7 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) आप स्वयं कीजिए
2) 9.9
3) 35, 6.4, 8.9
4) 9.23, 2.48, 2.03
5) 5.0

बोध प्रश्न 2

1) 4.085, 2.021, 15.04 प्रतिशत
2) 23.47 प्रतिशत, 25 (पूर्णांकित संख्या)

8.8 पारिभाषिक शब्दावली

अंतःचतुर्थक परिसर	interquartile range
प्रसरण	variance
माध्य विचलन	mean deviation
मानक विचलन	standard deviation
विचरण गुणांक	coefficient of variation
सांद्रता अनुपात	concentration ratio
परिसर	range

NOTES

NOTES

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGEC-03
प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियाँ और सर्वेक्षण तकनीकें

खंड

5

द्विचर आंकड़ों का संक्षेपण

खंड 5 द्विचर आंकड़ों का संक्षेपण

अभी तक हमने एक चर से संबंधित आंकड़ों का अध्ययन किया है। हमने इस प्रकार के आंकड़ों का सारणी द्वारा, संचित्रों द्वारा तथा कुछ प्रतिदर्शजों के रूप में बारंबारता द्वारा निरूपण तथा इन प्रतिदर्शजों की व्याख्या का अध्ययन किया है। वास्तव में, सांख्यिकी के बहुत से व्यावहारिक अनुप्रयोगों में प्रेक्षित इकाइयों से एक से अधिक चर एक साथ प्रेक्षित किए जाते हैं। इन चरों में सम्बन्ध की छानबीन तथा इसके उपयोग के लिए इनका संयुक्त रूप में अध्ययन आवश्यक होता है। इस खंड में हम दो चरों के अध्ययन के लिए उपयुक्त विधियों की व्याख्या करेंगे। लेकिन, इन्हीं विधियों को दो से अधिक चरों के अध्ययन के लिए भी विस्तृत किया जा सकता है।

यह खंड दो इकाइयों, इकाई 9 तथा इकाई 10 में विभाजित है। इकाई 9 में हम द्विचर आंकड़ों के सारणी तथा बारंबारता रूप में निरूपण की व्याख्या करेंगे तथा दो चरों के बीच साहचर्य या सम्बन्ध के परिकलन का अध्ययन करेंगे। इकाई 10 में हम यह अध्ययन करेंगे कि दो चरों में साहचर्य या सम्बन्ध के प्रयोग द्वारा एक चर का मान ज्ञात होने पर दूसरे चर का किस प्रकार पूर्वानुमान किया जाता है।

इकाई 9 सहसम्बन्ध

इकाई की रूपरेखा

).0 उद्देश्य

स इकाई के अध्ययन के पश्चात् आपको निम्न जानकारी प्राप्त होगी :

- दो चरों में साहचर्य की शक्ति के परिमाप का परिकलन
- यह ज्ञात करना कि क्या दो चर सहसम्बन्धित हैं।

).1 प्रस्तावना

हसम्बन्ध विश्लेषण में चरों के बीच सम्बन्ध की गहनता को मापा जाता है। जब हम दो चर ांकड़ों के समुच्चय द्वारा सहसम्बन्ध के परिमाप का परिकलन करते हैं तो हमारी रुचि चरों के ोच सहसम्बन्ध की मात्रा तथा दिशा पर केन्द्रित होती है।

).2 विभिन्न प्रकार के चर

क चर का प्रयोग, चाहे आंकड़ों के सारणी निरूपण में हो, या इनके संक्षेपण, परिमाप के रेकलन में हो, या इनके किसी और विश्लेषण में हो, ये सब चर की प्रकृति पर निर्भर करता है। ांख्यिकीय कार्यों के लिए हम तीन प्रकार के चरों में विभेद करेंगे—नामिक, क्रमसूचक तथा ख्यात्मक चर। नामिक चर उस चर को कहते हैं, जिसके सिर्फ गुणात्मक मान होते हैं तथा नमें आपस में कोई क्रमण सम्बन्ध नहीं होता। उदाहरण के लिए, लिंग एक नामिक चर है ासके केवल गुणात्मक मान "पुरुष" और "महिला" होते हैं। यहाँ पुरुष तथा महिला स्थिति में ोई क्रमण नहीं होता। एक क्रमसूचक चर उस चर को कहते हैं, जिसके मान गुणात्मक होते हैं था इनमें आपस में क्रमण संबंध होता है। उदाहरण के लिए, शिक्षा एक क्रमसूचक चर है, ासके गुणात्मक मानों जैसे अशिक्षित, उच्चतर माध्यमिक शिक्षा से कम शिक्षित, उच्चतर ाध्यमिक, स्नातक, स्नातकोत्तर, में आपस में क्रम सम्बन्ध होता है। जैसे-जैसे हम पहले मान अंतिम मान तक जाते हैं, शिक्षा स्तर में वृद्धि होती है। एक संख्यात्मक चर वह चर होता है, ासके मान परिमाणात्मक होते हैं। यहाँ भी भिन्न प्रकार के चर होते हैं, एक असंतत चर के सिर्फ छ पृथक बिन्दुओं पर मान होते हैं। उदाहरण के लिए, एक परिवार में बच्चों की संख्या असंतत

चर हो... हैं, जिसके मान 0, 1, 2 .... होते हैं। असंतत चर के हो सकने वाले पृथक मानों की संख्या परिमित (finite) होना आवश्यक नहीं है। दूसरी तरफ, एक संतत चर के सारे मान अंतरालों में से होते हैं। उदाहरण के लिए, ऊंचाई एक संतत चर है, जोकि संकल्पनात्मक रूप में (मान लिया) 0 से 200 सेंटीमीटर अंतराल में कोई भी मान ले सकती है। इन संकल्पनाओं के बारे में हम पहले ही अध्ययन कर चुके हैं।

9.3 द्विचर बारंबारता बंटनों की सारणियाँ

द्विचर शब्द का प्रयोग उन परिस्थितियों की व्याख्या के लिए किया जाता है, जिसमें प्रत्येक व्यष्टि के दो अभिलक्षणों का माप किया जाता है। ये अभिलक्षण दो चरों द्वारा निरूपित किए जाते हैं। इन दो चरों के एक साथ मापे गए आंकड़ों को द्विचर आंकड़े कहा जाता है। प्रत्येक व्यष्टि के प्रेक्षण, युग्म के रूप में होते हैं, जिनमें प्रत्येक मान एक चर को निरूपित करता है। जैसे (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n). इन द्विचर आंकड़ों के युग्म जब अधिक संख्या में उपलब्ध हों तो इनका द्विधा सारणी के रूप में संक्षेपण आवश्यक हो जाता है। इस सारणी को द्विचर बारंबारता बंटन कहते हैं।

9.3.1 नामिक तथा क्रमसूचक चर

एक चर वाले आंकड़ों के निरूपण की विधि का अध्ययन आप पहले कर चुके हैं। मान लीजिए, हम एक महाविद्यालय के विद्यार्थियों में प्रत्येक का लिंग तथा उसकी मातृभाषा का पता करना चाहते हैं। यहाँ पर विचाराधीन दोनों चर नामिक चर हैं—लिंग चर के दो मान पुरुष (M) तथा महिला (F) तथा मातृभाषा के मान बंगाल (B), हिन्दी (H), तमिल (T) तथा अन्य (O) हो सकते हैं। इस प्रकार के आंकड़ों का समुच्चय इस प्रकार होगा:

(M, T), (M, B), (F, B), (M, O), (F, B), (F, H), (M, H) ....

इस समुच्चय को किसी सूचना की हानि के बिना ही सारणी के रूप में संक्षेपित किया जा सकता है, जैसा कि सारणी 9.1 में दिखाया गया है।

सारणी 9.1 में दो चरों, मातृभाषा एवं लिंग का संयुक्त बारंबारता बंटन प्रस्तुत है। इस प्रकार की सारणी में (जहाँ पर चर नामिक, क्रमसूचक या संख्यात्मक हो सकते हैं), दो चरों के स्तर या मानों के संचय को इस सारणी का "कोश" (cell) कहते हैं तथा इसकी बारंबारता को कोश बारंबारता कहा जाता है। उदाहरण के लिए, युग्म (पुरुष, तमिल), सारणी का एक कोश है, जिसकी कोश बारंबारता 367 है।

सारणी 9.1

मातृभाषा तथा लिंग का द्विचर बारंबारता बंटन

मातृभाषा	लिंग		योग
	पुरुष	महिला	
बंगाली	234	221	455
हिन्दी	456	523	979
तमिल	367	387	754
अन्य	350	401	751
योग	1407	1532	2939

यह संयुक्त बंटन प्रत्येक चर के पृथक बंटन की तुलना में बहुत अधिक सूचना प्रदान करता है। प्रत्येक चर के पृथक बंटन को **उपांत बंटन** (marginal distribution) कहते हैं, जोकि इस सारणी में भी दिया हुआ है। सारणी का अंतिम स्तम्भ जिसमें पुरुष तथा महिला बारंबारता का योग है, मातृभाषा का उपांत बंटन है। इसी प्रकार सारणी की अंतिम पंक्ति में लिंग का उपांत बंटन दिया हुआ है। संयुक्त बंटन द्वारा हमें चरों के बीच संबंध के अध्ययन में सहायता मिलती है। इस उदाहरण में हमारी रुचि यह हो सकती है कि क्या विभिन्न मातृभाषा समूहों में लिंग अनुपात भिन्न है। इसके लिए प्रत्येक भाषा के लिए पुरुष तथा महिला का अनुपात परिकलित किया जाता है। इस प्रकार के बंटनों को सप्रतिबंध बंटन (conditional distribution) कहते हैं। ये इस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं : मातृभाषा बंगाली के लिए : पुरुष 0.5143 तथा महिला 0.4857। इसी

प्रकार दसरी सप्रतिबंध बंटन : हिन्दी के लिए 0.4658, 0.5342 तमिल के लिए : 0.4867, 0.5133 तथा अन्य 0.4660, 0.5340 इन बंटनों की तुलना से या इनकी लिंग के उपांत बंटन (जोकि सारणी की अंतिम पंक्ति से प्राप्त किया जा सकता है : 0.4787, 0.5213) से तुलना द्वारा विभिन्न मातृभाषाओं के वर्गों में लिंग बंटनों में अंतर को समझा जा सकता है। इसी प्रकार के परिकलन इन चरों की भूमिका को उल्टा करके किए जा सकते हैं। पुरुषों तथा महिलाओं के लिए मातृभाषा का सप्रतिबंध बंटन परिकलित किया जा सकता है, जोकि इस प्रकार है : पुरुष: 0.1663, 0.3241, 0.2608, 0.2488 तथा महिला : 0.1443, 0.3414, 0.2526, 0.2617. इनकी तुलना मातृभाषा के उपांत बंटन से की जा सकती है, जोकि इस प्रकार है : 0.1548, 0.3331, 0.2565, 0.2555. अगर इनमें से एक चर क्रम सूचक हो तो भी ये संकल्पनाएँ तथा धारणाएँ ऐसी ही रहती हैं।

इनमें से कौन-से सप्रतिबंध बंटन उपयोगी होंगे, यह अध्ययन किए जाने वाले प्रश्न पर निर्भर होता है, अगर प्रश्न में कारण-प्रभाव सम्बन्ध का अध्ययन किया जाना है तो हमारी रुचि स्वतंत्र चर (कारण) के प्रत्येक मान के लिए आश्रित चर (प्रभाव) के सप्रतिबंध बंटनों में होगी। उदाहरण के लिए, अगर शिक्षा स्तर तथा व्यवसाय में सम्बन्ध जानने के लिए अध्ययन किया जाना है तो हम शिक्षा स्तर को कारण तथा व्यवसाय को प्रभाव ले सकते हैं और इस प्रकार प्रत्येक शिक्षा स्तरों के लिए सप्रतिबंध बंटनों का अध्ययन कर सकते हैं तथा इन सप्रतिबंध बंटनों की तुलना भी कर सकते हैं।

अत: जब चर केवल नामिक तथा क्रमसूचक हों तो संयुक्त बारंबारता बंटन का सारणी के रूप में निर्माण तथा प्रस्तुतीकरण बहुत ही सरल होता हैं, इन सारणियों से सम्बद्ध उपांत तथा सप्रतिबंध बंटनों से बहुत उपयोगी सूचना प्राप्त की जाती है। लेकिन अगर एक चर के बहुत से स्तर हैं तो सारणी के रूप में इनका सुव्यवस्थित प्रस्तुतीकरण कठिन होता है। इसके अतिरिक्त, अगर चर के एक स्तर के अनुरूप बारंबारता कम है तो इनसे सम्बद्ध उपांत तथा सप्रतिबंध तुलनात्मक बारंबारताएँ विश्वसनीय नहीं होंगी। अत: इनका परिकलन, प्रस्तुतीकरण तथा विश्लेषण लाभकारी नहीं होगा। इन परिस्थितियों में चर के कुछ स्तरों का संयोजन (pool) करके इनका एक साथ प्रस्तुतीकरण, परिकलन तथा विश्लेषण किया जाता है। ऊपर दिए हुए उदाहरण में मातृभाषा चर का स्तर "अन्य" इस प्रकार का उदाहरण है, जहाँ पर वे सभी मातृ-भाषाएँ जिनकी बारंबारता कम है, एक समूह "अन्य" में संयोजित की गई हैं।

9.3.2 संख्यात्मक चर

जब चरों में से एक संख्यात्मक हो और भिन्न मान लेता हो तो द्विचर-बारंबारता सारणी का प्रस्तुतीकरण तथा उपांत एवं सप्रतिबंध बंटनों का परिकलन बिल्कुल उसी प्रकार से होता है, जैसा ऊपर की परिस्थितियों में दिया गया है। उदाहरण के लिए, हम सारणी 9.2 में प्रस्तुत आंकड़ों पर विचार करते हैं, जहाँ व्यवसाय (पिता का) एक (नामिक) चर है तथा बच्चों की संख्या दूसरा (संख्यात्मक) चर है। इन आंकड़ों के समुच्चय में 5 बच्चों से अधिक बच्चे किसी व्यक्ति के पास नहीं हैं। इस प्रकार की परिस्थितियों में जब 5 से अधिक स्तरों की बारंबारता कम हो तो कभी-कभी 5 की तरह के स्तर को भी सम्मिलित किया जा सकता है। इस उदाहरण में हमारी रुचि स्वतंत्र चर (व्यवसाय) का आश्रित चर (बच्चों की संख्या) पर प्रभाव का अध्ययन करना हो

सारणी 9.2

व्यवसाय तथा बच्चों की संख्या का द्विचर बारंबारता बंटन

	व्यवसाय					
बच्चों की संख्या	बेरोज़गार	अकुशल श्रमिक	कुशल श्रमिक	स्वयं रोज़गार	पेशेवर	योग
0	10	15	10	12	5	52
1	35	25	17	18	25	120
2	22	33	45	40	43	183
3	11	40	48	58	30	187
4	8	22	12	11	[illegible]	[illegible]
5	3	11	18	8	1	41
योग	89	146	150	147	112	644

सकता है। पहले की तरह यहाँ पर भी हम विभिन्न व्यवसाय स्तरों के लिए बच्चों की संख्या के सप्रतिबंध तथा उपांत बंटन परिकलित कर सकते हैं। लेकिन यहाँ पर ऊपर दिए हुए उदाहरणों के विपरीत, बच्चों की संख्या एक संख्यात्मक चर है, अतः इसके परिमाणों का प्रयोग सप्रतिबंध तथा उपांत बंटनों के अन्य संक्षेपण मापों के परिकलन के लिए भी किया जा सकता है। इस प्रकार, सप्रतिबंध बंटनों की तुलना के अतिरिक्त हम इनके समांतर माध्य या बहुलक की तुलना भी कर सकते हैं। ध्यान रखिए कि हमने वर्गीकृत बारंबारता बंटन के समांतर माध्य के परिकलन का अध्ययन किया हुआ है। मान लीजिए x_t वें कोश की बारंबारता f_{xt} है। जहाँ पर $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $t = 1, 2, 3, 4, 5$, अर्थात् x बच्चों की संख्या को निरूपित करता है तथा t व्यवसाय वर्ग को निरूपित करता है। मान लीजिए f_t वें व्यवसाय वर्ग की उपांत बारंबारता है अर्थात् $f_t = \sum_{x=0}^{5} f_{xt}$ ये उपांत बारंबारताएं सारणी की अंतिम पंक्ति में दी हुई संख्याएँ हैं। इस प्रकार t वें व्यवसाय वर्ग के सप्रतिबंध बंटन का सप्रतिबंध समांतर माध्य का सूत्र

$$\bar{x}_t = \frac{1}{f_t} \sum_{x=0}^{5} f_x t^{xx} \text{ होगा।}$$

बारंबारता बंटन का बहुलक, जैसा कि हम जानते हैं, वह मान होता है जिसकी बारंबारता अधिकतम होती है (इन सूत्रों के प्रयोग द्वारा सप्रतिबंध बारंबारता बंटनों के निम्नलिखित प्रतिदर्शजों की जांच आप स्वयं कीजिए) सप्रतिबंध बंटनों के समांतर माध्य (बहुलक) इस प्रकार है : बेरोज़गार : 1.79 (1); अशिक्षित श्रमिक 2.42 (3), शिक्षित श्रमिक : 2.59 (3),स्वयं रोजगार : 2.42 (3), पेशेवर : 2.12 (2). उपांत बंटन का, अर्थात् सभी व्यवसायों को मिलाकर, समांतर माध्य (बहुलक) 2.32 (3) है। यहाँ पर यह ध्यान दीजिए कि बच्चों की संख्या एक चर है जिसके मान केवल पूर्ण संख्याएँ होती हैं तथा इसके माध्यों को दशमलव संख्याओं में प्रस्तुत करने का कोई अर्थ नहीं होता। यहाँ पर इन माध्यों का पूर्ण संख्याओं में निकटन (round off) करने पर सभी 2 के बराबर हो जाती हैं, जिससे विभिन्न व्यवसाय वर्गों में अंतर का पता करना संभव नहीं होता।

जब चरों में से एक संतत हो और प्रेक्षणों की संख्या बहुत अधिक न हो तो प्रायः आंकड़ों को उसी रूप में, जिस रूप में संकलित किए गए हैं, प्रस्तुत किया जाता है। इसके बाद, सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए आवश्यक परिकलन किए जाते हैं। उदाहरण के लिए, अगर हम एक बैंक के पुरुष तथा महिला अर्थशास्त्रियों के वेतन की जांच करना चाहते हैं तथा इस संबंध में अगर सिर्फ 15 प्रेक्षण हैं तो इसको सरल रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है (देखिए सारणी 9.3)। लेकिन, अगर प्रेक्षणों की संख्या अधिक है तो आंकड़ों का इस प्रकार प्रस्तुतीकरण असुविधाजनक होता है। इसके अतिरिक्त, इस रूप में आंकड़ों को शीघ्र समझना भी संभव नहीं होता। इन कठिनाइयों से बचने का एक तरीका इनके प्रस्तुतीकरण के लिए वर्गीकृत बारंबारता बंटन का प्रयोग है। मान लीजिए, हमारे पास सार्वजनिक तथा निजी क्षेत्रों में कार्यरत 709 अधिकारियों के वार्षिक वेतन के आंकड़े हैं तथा हम इनका अध्ययन करना चाहते हैं। इसके लिए एक द्विचर बारंबारता सारणी निर्मित की जा सकती है (देखिए सारणी 9.4)।

सारणी 9.3

एक बैंक के 15 अर्थशास्त्रियों की लिंग के अनुसार वार्षिक आय (रुपयों में) के आंकड़े

लिंग	
पुरुष	महिला
45120	80505
72580	75012
80912	60045
120100	40010
30042	35010
80045	—
81250	—
105505	—
111005	—
60123	—

सारणी 9.4

सार्वजनिक तथा निजी क्षेत्रों के अधिकारियों के वार्षिक वेतन (रुपयों में) का बारंबारता बंटन

वार्षिक वेतन ('000 रुपयों में)	मध्यमान ('000 रुपए)	क्षेत्र में संख्या		कुल का प्रतिशत	
		निजी	सार्वजनिक	निजी	सार्वजनिक
45-50	47.5	84	0	13.6	0.0
50-55	52.5	31	11	5.0	12.2
55-60	57.5	135	12	21.8	13.3
60-65	62.5	115	12	18.6	13.3
65-70	67.5	73	15	11.8	16.7
70-75	72.5	77	8	12.4	8.9
75-80	77.5	31	5	5.0	5.6
80-85	82.5	13	5	2.1	5.6
85-90	87.5	18	7	2.9	7.8
90-95	92.5	32	3	5.2	3.3
95-100	97.5	4	8	0.6	8.9
100-105	102.5	2	3	0.3	3.3
105-110	107.5	1	1	0.2	1.1
110-115	112.5	3	0	0.5	0.0
योग		619	90	100.0	100.0

सारणी 9.4 के अंतिम दो स्तम्भों में बारंबारता बंटन (प्रतिशत रूप में) दिया हुआ है, जिससे दो क्षेत्रों की तुलना करने में सहायता मिलती जैसा कि हमने पहले उदाहरण में किया था, यहाँ भी दो क्षेत्रों के वतनों के समांतर माध्य की तुलना करना उपयोगी हो सकता है। मान लीजिए, jt वें कोश की बारंबारता f_{jt} है, जहाँ पर $j = 1, 2, ..., k$; $t = 1, 2, ..., l$; तथा मान लीजिए x के j वे वर्ग का मध्य बिन्दु x_j है। सारणी 9.4 में $k = 14; l = 2$, x (आय) के मध्यमान सारणी के दूसरे स्तम्भ में दिए हुए है। मान लिया $f_t = \sum_{j=1}^{k} f_{jt}$ है। ये f_t सारणी की अंतिम पंक्ति में दी गई है तथा इनको उपांत बारंबारताएं कहते हैं। t वें क्षेत्र में x के सप्रतिबंध समांतर माध्य का सूत्र इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\bar{x}_t = \frac{1}{f_t}\sum_{j=1}^{k} f_{jt}x_j.$$

इस सूत्र द्वारा परिकलित समांतर माध्य : निजी क्षेत्र : 64.83 ('000 रुपए) तथा सार्वजनिक क्षेत्र : 72.15 ('000 रुपए) हैं। सांख्यिकीय विश्लेषण के कुछ उद्देश्यों के लिए प्रत्येक वर्ग का प्रसरण परिकलित करना भी उपयोगी होता है। वर्गीकृत बारंबारता बंटन द्वारा प्रसरण का सूत्र इस प्रकार होता है।

$$s^2_{xt} = \frac{1}{f_t}\ [\sum_{j=1}^{k} f_{jt}\, x_j^2 - f_t\, \bar{x}_t^2\ ].$$

(कुछ सैद्धांतिक विचारों के आधार पर प्रायः हर f_t के स्थान पर f_{t-1} का प्रयोग किया जाता है। यहाँ पर इस प्रकार परिकलित दोनों s^2_{xt} के मानों में बहुत ही कम अंतर होगा) इस सूत्र के प्रयोग द्वारा परिकलित प्रसरण के मान इस प्रकार हैं :

निजी क्षेत्र : 169.75 ('000 रुपए)^2; सार्वजनिक क्षेत्र : 233.25 ('000 रुपए)^2

अब हम ऐसी परिस्थिति पर विचार करेंगे, जिसमें दोनों चर संतत हैं। अगर आंकड़ों की संख्या बहुत है तो हम दोनों चरों के लिए वर्ग अंतराल का प्रयोग करके द्विचर बारंबारता बंटन को निरूपित कर सकते हैं। हम सारणी 9.5 में दिए हुए इस प्रकार के उदाहरण पर ध्यान देते हैं, जहां पर आंकड़े 99 परिवारों के एक प्रतिदर्श से प्राप्त किए गए हैं। यहाँ पर चर y एक वर्ष में मनोरंजन पर परिवार के व्यय (रुपयों में) को सूचित करता है तथा चर x परिवार की वार्षिक आय (रुपयों में) को सूचित करता है।

इस प्रकार की परिस्थिति में हम स्वतंत्र चर x (आय) के प्रत्येक वर्ग के लिए आश्रित दर y (मनोंरजन पर व्यय) के सप्रतिबंध बंटनों की जांच कर सकते हैं। लेकिन इस सारणी में चूंकि

कुल प्रतिदर्श का आकार छोटा है, इसलिए बहुत से खानों की बारंबारताएं शून्य हैं। इस प्रकार के बंटन अधिक उपयोगी नहीं होते। फिर भी यहाँ पर प्रत्येक आय वर्ग के लिए मनोरंजन व्यय के सप्रतिबंध बंटनों का समांतर माध्य तथा अन्य संक्षेपण परिमाप परिकलित किए जाते हैं। इसके साथ ही, मनोरंजन पर व्यय के उपांत बंटन के परिमाप भी परिकलित किए जा सकते हैं। सप्रतिबंध बंटनों के परिकलित समांतर माध्य सारणी 9.6 में दिए गए हैं।

सारणी 9.5

वार्षिक/पारिवारिक आय तथा मनोरंजन पर वार्षिक पारिवारिक व्यय का द्विचर बारंबारता बंटन

मनोरंजन पर व्यय ('00) रुपए (y)	मध्यमान		वार्षिक आय ('00 रुपए) (x)									
			25-80	80-135	135-190	190-245	245-300	300-355	355-410	410-465	465-520	520-575
		मध्यमान	52.5	107.4	162.5	217.5	272.5	327.5	382.5	437.5	492.5	547.5
	कोड →		− 6	− 5	− 4	− 3	− 2	− 1	0	1	2	3
45-50	47.5	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1
40-45	42.5	4	-	-	-	-	-	-	1	-	1	-
35-40	37.5	3	-	-	-	-	1	-	-	1	2	1
30-35	32.5.	2	-	-	-	-	-	-	-	4	3	2
25-30	27.5	1	-	-	-	-	3	4	4	5	6	1
20-25	22.5	0	-	-	-	-	-	5	7	12	1	1
15-20	17.5	-1	-	-	-	1	4	8	1	1	-	-
10-15	12.5	-2	-	1	3	1	1	-	-	-	-	-
5-10	7.5	-3	-	4	4	-	-	-	-	-	-	-
0-5	2.5	-4	4	-	-	-	-	-	-	-	-	-

इस प्रकार के प्रतिदर्शज बहुत ही उपयोगी होते हैं। इनके प्रयोगों का विवेचन अगले भाग में किया गया है। सप्रतिबंध तथा उपांत बंटनों के इन प्रतिदर्शजों के अतिरिक्त, जोकि आवश्यक रूप में एक विचर आंकड़ों से परिकलित किए जाते हैं, कुछ ऐसे प्रतिदर्शज होते हैं, जोकि संयुक्त बंटन के प्रयोग अर्थात् कोशों की बारंबारता के प्रयोग द्वारा परिकलित किए जाते हैं। इनमें सबसे महत्वपूर्ण सहप्रसरण (covariance) होता है, जिसकी व्यवस्था अगले भाग में की जाएगी।

सारणी 9.6

वार्षिक पारिवारिक आय के प्रत्येक वर्ग के लिए मनोरंजन पर वार्षिक पारिवारिक व्यय के माध्य

आय ('000 रुपए में)	मनोरंजन पर औसत वार्षिक व्यय ('00 रुपए)
25-80	2.50
80-135	8.50
135-190	9.65
190-245	15.00
245-300	22.50
300-355	21.32
355-410	25.19
410-465	25.76
465-520	30.96
520-575	33.33

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित प्रत्येक स्थिति में यह निर्णय कीजिए कि क्या चर नामिक, क्रमसूचक या संख्यात्मक प्रकृति का है :

   क) भारत में आने वाले पर्यटक के देश की नागरिकता

   ख) एक विद्यार्थी द्वारा परीक्षा में प्राप्त कोटि (grade) जोकि इस प्रकार वर्गीकृत है : A^+, A, B, C, तथा D

ग) एक व्यक्ति की आय

घ) शेयर बाज़ार में किसी सार्वजनिक कम्पनी के शेयर की कीमत

च) एक विदेशी पर्यटक का भारत के बारे में विचार, जिसको इस प्रकार वर्गीकृत किया गया है: काल्पनिक, अच्छा, औसत, बुरा, भयंकर

2) मान लीजिए, आपके पास भारत में विदेशी पर्यटकों के देश की नागरिकता तथा उनके द्वारा व्यय की गई मुद्रा की मात्रा के आंकड़े हैं, जोकि 2000 पर्यटकों के सर्वेक्षण के आधार पर उनके वापिस जाते समय प्राप्त किए गए हैं। यह बताइए कि इन आंकड़ों को आप सारणीबद्ध रूप में किस प्रकार प्रस्तुत करेंगे। यह भी बताइए कि इन आंकड़ों से आप कौन-कौन से संक्षेपण परिमाप परिकलित करेंगे।

3) सारणी 9.7 में एक शहर की तीन बस्तियों से लिए गए प्रतिदर्शी द्वारा व्यय खाद्य पदार्थ पर मासिक परिवार व्यय का द्विचर बारंबारता बंटन दिया हुआ है। प्रत्येक बस्ती के लिए व्यय का सप्रतिबंध बंटन ज्ञात कीजिए तथा इनके सप्रतिबंध माध्य एवं प्रसरण परिकलित कीजिए।

सारणी 9.7

तीन बस्तियों में खाद्य पदार्थों पर मासिक पारिवारिक व्यय का बारंबारता बंटन

खाद्य पर व्यय (रुपयों में)	बस्ती		
	A	B	C
< 250	122	2	0
251-500	100	5	1
501-750	75	11	3
751-1000	59	25	18
1001-1250	34	39	27
1251-1500	23	56	56
1501-2000	12	67	89
> 2000	0	45	114

9.4 सहसम्बन्ध गुणांक

बहुत से चरों के सांख्यिकीय अध्ययनों में प्राय: दो प्रकार की समस्याएँ होती हैं। कुछ समस्याओं के अध्ययन में हमारी रुचि यह जानने में होती है कि चरों में किस प्रकार का परस्पर संबंध है। इस प्रकार की समस्याओं का समाधान सहसम्बन्ध प्रविधियों के प्रयोग द्वारा किया जाता है। उदाहरण के लिए, एक अर्थशास्त्री की रुचि विभिन्न कम्पनियों के शेयरों की कीमतों में सम्बन्ध का अध्ययन करना हो सकती है, इसके लिए वह सहसम्बन्ध प्रविधियों का प्रयोग कर सकता है। दूसरे प्रकार की समस्याओं में मूल रुचि चर y में होती है तथा हमें यह जानना होता है कि अन्य चर, y के बारे में क्या सूचना प्रदान करते हैं, इस प्रकार की समस्याओं का समाधान समाश्रयण (regression) प्रविधियों के प्रयोग द्वारा किया जाता है। उदाहरण के लिए, एक अर्थशास्त्री की रुचि इस बात में हो सकती है कि किसी कार्यरत व्यक्ति की आय किन कारकों से निर्धारित होती है, विशेष रूप से उसकी रुचि यह जानना हो सकती है कि शिक्षा, अनुभव, बाजार माँग आदि की व्यक्ति वेतन निर्धारण में क्या भूमिका है। इसके लिए वह समाश्रयण प्रविधियों के प्रयोग द्वारा शिक्षा, अनुभव आदि पर आधारित वेतन का प्रागुक्ति (prediction) सूत्र ज्ञात कर सकता है।

9.4.1 दो चरों में सम्बन्ध : एक व्याख्या

पहले हम यह बताएंगे कि दो चरों में सम्बन्ध का अध्ययन किस प्रकार किया जाता है। एक शिक्षक की रुचि कक्षा के 20 विद्यार्थियों की सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में योग्यता के संबंध का अध्ययन करना हो सकती है। इसके लिए वह पिछली अर्ध-सत्रीय परीक्षा में इन विद्यार्थियों द्वारा इन विषयों में प्राप्त अंकों के आँकड़े संकलित करता है। इस प्रकार के कुछ आँकड़े सारणी 9.8 में प्रस्तुत किए गए हैं।

सारणी 9.8

20 विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंक

क्र. सं.	प्राप्त अंक सांख्यिकी	अर्थशास्त्र	क्र. सं.	प्राप्त अंक सांख्यिकी	अर्थशास्त्र
1	82	64	11	76	58
2	70	40	12	76	66
3	34	35	13	92	72
4	80	48	14	72	46
5	66	54	15	64	44
6	84	56	16	86	76
7	74	62	17	84	52
8	84	66	18	60	40
9	60	52	19	82	60
10	86	82	20	90	60

इस प्रकार के आँकड़ों का आलेखी निरूपण एक उपयोगी विधि है, जोकि दो चरों के बीच सम्बन्ध की प्रकृति तथा रूप के अध्ययन में सहायक होती है। आलेखी निरूपण द्वारा यह पता किया जा सकता है कि क्या चरों में अध्ययन करने लायक कोई सम्बन्ध है या नहीं, अगर है तो क्या वह रैखिक है या अरैखिक। इसके लिए मान लीजिए हम सांख्यिकी में प्राप्त अंकों को x से सूचित करते हैं तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों को y से सूचित करते हैं तथा सारणी 9.8 आँकड़ों को x, y समतल पर अंकित करते हैं। इस कार्य के लिए हम किसको x तथा किसको y लें, कोई अर्थ नहीं रखता।

इस प्रकार के अंकन को प्रकीर्ण आरेख कहते हैं। सारणी 9.8 के आँकड़ों का प्रकीर्ण आरेख आकृति 9.1 में दिया हुआ है।

सारणी 9.8 तथा आकृति 9.1 की जाँच द्वारा यह पता चलता है कि x तथा y में धनात्मक सम्बन्ध है, अर्थात्, x के बड़े मान y के बड़े मानों के साथ तथा x के छोटे मान y के छोटे मानों के साथ, सहचारी हैं। इसके अतिरिक्त, बिन्दु सरल रेखा के दोनों ओर प्रकीर्ण दिखाई देते हैं। अतः x तथा y के बीच रैखिक संबंध प्रतीत होता है, लेकिन यह सम्बन्ध पूर्ण (perfect) नहीं है, क्योंकि इस प्रकार के सम्बन्ध से विचलन विद्यमान है। वास्तव में, इस रैखिक सम्बन्ध की शक्ति का परिमाप प्राप्त करना बड़ा ही उपयोगी होगा।

9.4.2 सहसम्बन्ध गुणांक की परिभाषा तथा सूत्र

रैखिक सम्बन्ध की शक्ति का ऐसा परिमाप प्राप्त करना, जोकि चर के माप के लिए प्रयोग किए गए पैमाने से स्वतंत्र हो, वांछनीय होता है। उदाहरण के लिए, अगर हम ऊँचाई तथा वज़न में सम्बन्ध को मापना चाहते हैं, तो चाहे हम ऊँचाई को ईंचों में मापें या सेंटीमीटरों में तथा वज़न को पाउण्ड में मापें या किलोग्राम में, हमें वही परिमाप प्राप्त होना चाहिए। इसी प्रकार, अगर तापमान एक चर है तो, चाहे वह सेल्शियस में है या फारेनहाइट में लिखित किया जाए, इससे विश्लेषण में कोई अंतर नहीं आना चाहिए। यह स्थिति प्रत्येक चर के मानकीकरण द्वारा प्राप्त की जा सकती, अर्थात्, $\frac{x-\bar{x}}{s_x}$ तथा $\frac{y-\bar{y}}{s_y}$ लेकर।

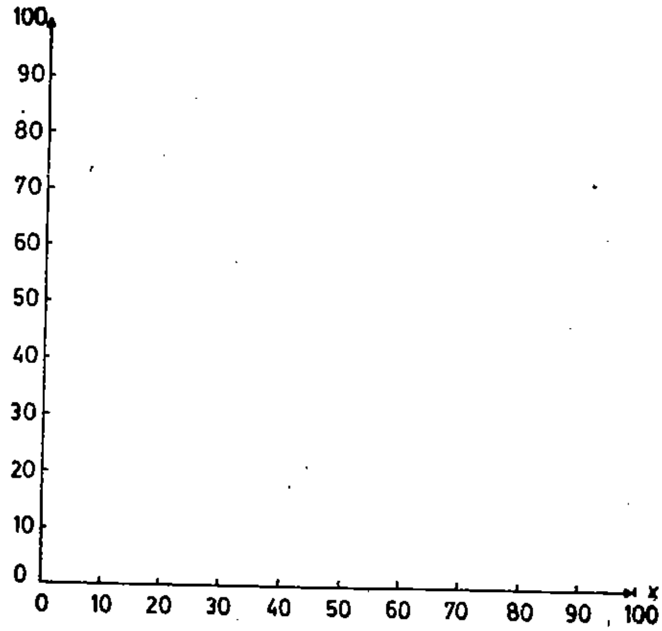
यहाँ पर $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ क्रमशः x तथा y के माध्य हैं तथा s_x एवं s_y प्रतिदर्श के मानक विचलन हैं।

मान लीजिए, हम इन मानकीकृत चरों को क्रमशः u तथा v से सूचित करते हैं। हम यह भी मानते हैं कि (x_i, y_i), i वें विद्यार्थी द्वारा क्रमशः सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों को सूचित करता है, i का मान 1 से n तक होता है, हमारे उदाहरण में n का मान 20 है। इसी प्रकार, मान लीजिए (u_i, v_i) i वें विद्यार्थी द्वारा प्राप्त मानकीकृत अंकों को सूचित करता है। यहाँ माध्य तथा मानक विचलन के सूत्रों का पुनः स्मरण करने पर

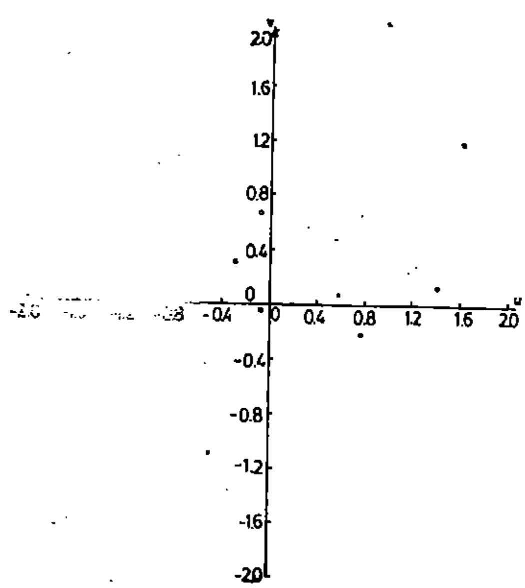
$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,\ s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2;$$

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2$;

आकृति 9.2 मानकीकृत चरों u तथा v में प्रकीर्ण आरेख है। मान लीजिए इस उदाहरण में हम दो प्रकार के अंकों में धनात्मक साहचर्य का प्रेक्षण करते हैं, मोटे तौर पर अगर एक विषय में प्राप्त अंक बड़ा है तो दूसरे विषय में भी प्राप्त अंक बड़ा होगा तथा अगर एक विषय में प्राप्त अंक कम हैं तो दूसरे विषय में प्राप्त अंक भी कम होंगे। इस दृष्टि से अधिकतर बिन्दु या तो पहले चतुर्थांश में हैं या फिर तीसरे चतुर्थांश में। पहला चतुर्थांश उन परिस्थितियों को व्यक्त करता है, जहाँ दोनों विषयों में प्राप्त अंक अपने माध्यों से अधिक हैं तथा तीसरा चतुर्थांश उन परिस्थितियों को व्यक्त करता है, जहाँ दोनों विषयों में प्राप्त अंक अपने माध्यों से कम हैं। दूसरे तथा चौथे चतुर्थांश में केवल कुछ बिन्दु हैं, जोकि उन परिस्थितियों को व्यक्त करते हैं, जहाँ एक विषय में माध्य से अधिक तथा दूसरे विषय में माध्य से कम अंक प्राप्त हैं। अतः u तथा v का गुणनफल, सम्बन्ध की शक्ति का उपयुक्त सूचक है। यह गुणनफल पहले तथा तीसरे चतुर्थांश में धनात्मक तथा दूसरे एवं चौथे चतुर्थांश में ऋणात्मक है। अतः u एवं v के सभी बिन्दुओं के लिए औसत गुणनफल को x तथा y के बीच रैखिक सम्बन्ध की शक्ति का उपयुक्त माप लिया जा सकता है। इस परिमाप को x तथा y में सहसम्बन्ध गुणांक कहते हैं, जिसको प्रायः r_{xy} या केवल r से सूचित किया जाता है। अन्य प्रकार के सहसम्बन्ध गुणांक से भेद करने के लिए इसको पियर्सन का गुणन-आघूर्ण सहसम्बन्ध गुणांक (Pearson's Product-Moment Correlation Coefficient) भी कहते हैं।



आकृति 9.1 : सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों का प्रकीर्ण आरेख



आकृति 9.2 : सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त मानकीकृत अंकों का प्रकीर्ण आरेख

अत: r का सूत्र इस प्रकार है :

$$r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i v_i;$$

या $r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i - \bar{x}}{s_x}\right)\left(\frac{y_i - \bar{y}}{s_y}\right).$

उपरोक्त व्यंजक में, पद $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$

जोकि $\frac{1}{n}[\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\,\bar{y}]$ के भी बराबर है (इसकी जाँच आप स्वयं कीजिए), x तथा y के बीच सहप्रसरण (covariance) कहलाता है तथा इसको s_{xy} से सूचित किया जाता है। अत:, सहसम्बन्ध गुणांक का सूत्र यह बनता है :

$$\boxed{r = \frac{s_{xy}}{s_x \times s_y}.} \qquad \text{..... 9.1}$$

इसमें $\bar{x}, \bar{y}, s_x, s_y$, तथा s_{xy} के सूत्रों को लिखने पर यह बन जाता है।

$$\boxed{r = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i}{\sqrt{[n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2][n\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2]}}} \qquad \text{..... (9.2)}$$

सारणी 9.8 में दिए हुए आँकड़ों के लिए परिकलन इस प्रकार है :

$\sum_{i=1}^{20} x_i = 1502; \bar{x} = 75.1;$

$\sum_{i=1}^{20} y_i = 1133; \bar{y} = 56.65;$

$\sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 116292; s_x^2 = \frac{1}{20}[116292 - \frac{(1502)^2}{20}] = 174.59; s_x = 13.21;$

$\sum_{i=1}^{20} y_i^2 = 67141; s_y^2 = \frac{1}{20}[67141 - \frac{(1133^2)}{20}] = 147.83\ s_y = 12.16;$

$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 87778; s_{xy} = \frac{1}{20}[87778 - \frac{1502 \times 1133}{20}] = 134.5.$

सूत्र 9.1 के प्रयोग द्वारा

$$r = \frac{134.5}{13.21 \times 12.16} = 0.84$$

इसके तुल्य सूत्र (9.2) के प्रयोग द्वारा

$$r = \frac{20 \times 87778 - 1502 \times 1133}{\sqrt{[10 \times 116292 - 1502^2][20 \times 67141 - 1133^2]}} = 0.84$$

जैसा कि हमें पहले से ही ज्ञात है कि कुछ सैद्धांतिक कारणों से s_x के परिकलन में n के स्थान पर (n–1) का प्रयोग उत्तम होता है। यह बात s_{xy} पर भी लागू होती है। लेकिन, चूँकि सहसम्बन्ध गुणांक के परिकलन में (n–1) या n अंश तथा हर दोनों में आता है, इसलिए जब तक s_x, s_y तथा s_{xy} में एक ही प्रकार के हर का प्रयोग होता है, तो इसका सहसम्बन्ध गुणांक पर कोई प्रभाव नहीं होता

9.4.3 द्विचर बारंबारता बंटन से सहसम्बन्ध

इस परिस्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक का परिकलन अवर्गीकृत परिस्थिति से भिन्न नहीं है। लेकिन सूत्र का विवरण तथा लिखने की विधि भिन्न होती है। यह विधि उसी प्रकार की होती है, जैसे एक

चर की परिस्थिति में वर्गीकृति बारंबारता बंटन से समांतर माध्य तथा प्रसरण का परिकलन होता है। सारणी 9.5, वर्गीकृत द्विचर बारंबारता सारणी का उदाहरण है, जिसमें 99 परिवारों की वार्षिक आय तथा उनका मनोरंजन पर वार्षिक व्यय प्रस्तुत है। एक वर्गीकृत बारंबारता बंटन में x तथा y के वास्तविक मान छूट जाते हैं तथा ये सारणी में केवल एक वर्ग अंतराल में आने वाली संख्याओं के रूप में दिए जाते हैं। मान लीजिए, द्विचर बारंबारता सारणी में x के लिए k वर्ग हैं तथा y के लिए l वर्ग हैं। मान लीजिए हम x- वर्ग के मध्य बिन्दुओं को x_j से सूचित करते हैं, जहाँ पर $j = 1,2, \ldots\ldots k$ हैं। इसी प्रकार y- वर्ग के मध्य बिन्दुओं को y_t से सूचित करते हैं, जहाँ पर $t = 1,2, \ldots\ldots l$ है। इस प्रकार, मूल प्रेक्षणों के स्थान पर हमारे पास उनके सन्निकट मान हैं तथा हमें केवल x तथा y के वर्गों का, जिसमें वे आते हैं, पता है। सामान्यतः परिकलन में तथा वर्गों के अंतराल के मध्य बिन्दुओं का प्रयोग किया जाता है। सारणी द्वारा प्रत्येक खाने की बारंबारता, अर्थात् x तथा y वर्गों के संचय में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या पता चलती है। अतः अगर f_{jt}, x के jवें वर्ग अन्तराल तथा y के t वें वर्ग अन्तराल की कोश बारंबारता है तो हम यह कहते हैं कि f_{jt} प्रेक्षणों का मान (x_j, y_t) है। इसके बाद सूत्र (9.1) या (9.2) का प्रयोग संभव हो जाता है। लेकिन, इन सूत्रों के प्रयोग में यह ध्यान रखना आवश्यक है कि यहाँ (x_j, y_t) के परिकलनों को f_{jt} बार दोहराया जाता है। इस बात को ध्यान में रखते हुए सूत्रों (9.1) या (9.2) को निम्नलिखित रूप में लिखना संभव है :

मान लीजिए $f_{j0} = \sum_{t=1}^{l} f_{jt}, j = 1, 2, \ldots, k;$

तथा $f_{0t} = \sum_{j=1}^{k} f_{jt}, t = 1, 2, \ldots, l;$

ये x तथा y के अलग-अलग बारंबारता बंटन हैं, जिनको उपांत बारंबारता बंटन कहते हैं। द्विचर सारणी में इनको क्रमशः पंक्तियों तथा स्तम्भों के योग द्वारा प्राप्त किया जाता है।

स्पष्टतया, $n = \sum_{j=1}^{k} f_{j0} = \sum_{t=1}^{l} f_{0t} = \sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{l} f_{jt}$

इसलिए

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} f_{j0}x_j; \quad sx^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k} f_{j0}(x_j - \bar{x})^2;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{l} f_{0t}y_t; \quad sy^2 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{l} f_{0t}(y_t - \bar{y})^2;$$

$$s_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{l} f_{jt}(x_i - \bar{x})(y_t - \bar{y})$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{l} f_{jt}x_jy_t - n\,\bar{x}\,\bar{y}\right].$$

जब वर्गीकृत बारंबारता सारणी हो तो माध्य, प्रसरण तथा सहप्रसरण के लिए ये उपयुक्त सूत्र हैं। इसके उपरांत सूत्र (9.1) लागू होता है। सूत्र 9.2 के समकक्ष वर्गीकृत बारंबारता सारणी में विस्तृत रूप में सूत्र इस प्रकार है :

$$\boxed{r = \frac{n\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{k} f_{jt}x_jy_t - \sum_{i=1}^{k} f_{j0}x_j \sum_{i=1}^{l} f_{0t}y_t}{\sqrt{[n\sum_{j=1}^{k} f_{j0}x_i^2 - (\sum_{j=1}^{k} f_{j0}x_i)^2][n\sum_{t=1}^{l} f_{0t}y_t^2 - (\sum_{t=1}^{l} f_{0t}y_t)^2}}} \quad \ldots\ldots (9.3)$$

सारणी 9.5 के आँकड़ों के लिए इस सूत्र के प्रयोग को सरल करने के लिए प्रत्येक चर के मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन किया जा सकता है। यह हम पहले ही जानते हैं कि सहसम्बन्ध गुणांक इस प्रकार के परिवर्तन से प्रभावित नहीं होता, वास्तव में इस शर्त को ध्यान में रखते हुए ही सहसम्बन्ध गुणांक की परिभाषा को सूत्रित (formulate) किया गया था। मान लीजिए, हम x तथा y के स्थान प

$x' = \frac{x - 382.5}{55}$; $y' = \frac{y - 22.5}{5}$, का प्रयोग करते हैं तो

मध्य बिन्दुओं के मान, x के लिए -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3; तथा y के लिए 5, 4, 3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, सरल संख्याएँ बन जाती हैं। इन परिवर्तित चरों तथा सूत्र 9.3 के प्रयोग द्वारा

$$r=\frac{99\times 349-(-51)\times 2}{\sqrt{[99\times 581-(-51)^2]\,[99\times 336-(2)^2]}}$$

$$=\frac{34653}{\sqrt{54918\times 33260}}$$

$$=+0.8108.$$

कोड किए हुए मानों x′, y′ के लिए माध्य, मानक विचलन तथा सहप्रसरण इस प्रकार हैं :

$\bar{x}' = -0.5151$; $\bar{y}' = 0.0202$;
$s_{x}' = -2.367$; $s_{y}' = 1.8421$;
$s_{x'y'} = 3.5354$.

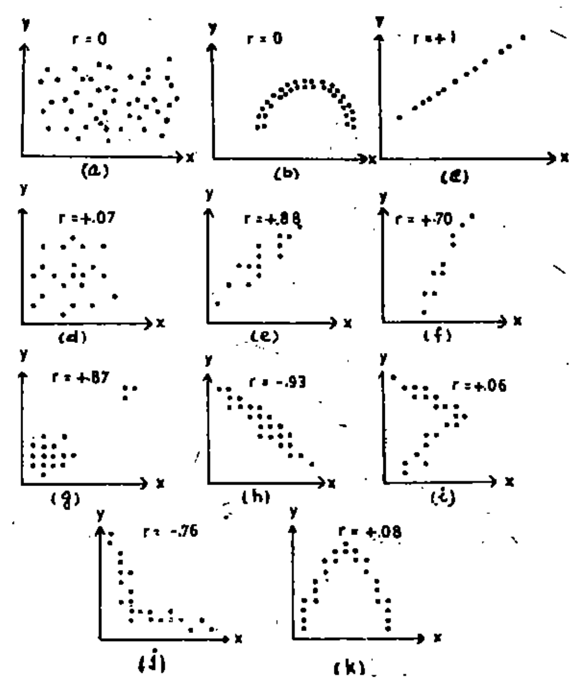
x′ एवं x तथा y′ एवं y के बीच सम्बन्ध के प्रयोग द्वारा हम x तथा y के माध्य, मानक विचलन तथा सहप्रसरण ज्ञात कर सकते हैं, जोकि इस प्रकार हैं :

$\bar{x} = 354.17$; $\bar{y} = 22.601$;
$s_x = 130.191$; $s_y = 9.2105$;
तथा, $s_{xy} = 972.2449$

इनके तथा सूत्र (9.1) के प्रयोग द्वारा भी r का मान 0.8108 ही परिकलित होता है।

9.4.4 सहसम्बन्ध गुणांक की व्याख्या

यह एक गणितीय सच्चाई है कि ऊपर परिभाषित r का मान हमेशा –1 तथा +1 के बीच रहता है। जब x तथा y में पूर्ण रैखिक सम्बन्ध हो तो r का चरममान –1 या +1 प्राप्त होता है, जब x तथा y में विपरीत संबंध हो तो मान –1 होता है तथा जब सम्बन्ध प्रत्यक्ष हों तो मान +1 होता है। जब x तथा y में कोई संबंध न हो तो मान 0 होता है। आकृति 9.3 में r के विभिन्न मानों के लिए प्रकीर्ण आरेख के उदाहरण दिए गए हैं। आकृति 9.3 (क) में दिया हुआ प्रकीर्ण आरेख उस परिस्थिति को व्यक्त करता है, जब x तथा y के बीच कोई सम्बन्ध नहीं है, अर्थात् r = 0 है। आकृति 9.3 (ख) भी r = 0 की परिस्थिति में प्रकीर्ण आरेख का उदाहरण है, यहाँ पर x तथा y में सम्बन्ध तो दिखाई देता है, लेकिन यह रैखिक नहीं है। यहाँ पहले x में वृद्धि के साथ y में भी वृद्धि होती है, लेकिन बाद में, x में वृद्धि के साथ y में कमी होती है, जोकि एक द्विघात संबंध है। परिणामत: इस परिस्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक शून्य है। अत: सहसम्बन्ध गुणांक केवल रैखिक सम्बन्ध का परिमाप होता है। अगर हम व्यक्तियों की आयु तथा वज़न को अंकित करें तो इस प्रकार का प्रकीर्ण आरेख प्राप्त होगा :



आकृति 9.3 : सहसम्बन्ध गुणांक के विभिन्न मानों के लिए प्रकीर्ण आरेख

ाकृति 9.3 (ग) ऐसे प्रकीर्ण आरेख का उदाहरण है, जहाँ x तथा y के बीच पूर्ण धनात्मक रैखिक सम्बन्ध है। अगर हम व्यक्तियों की ईंचों में ऊँचाई को उनकी सेंटीमीटरों में ऊँचाई के सम्मुख अंकित करें तो इस प्रकार का प्रकीर्ण आरेख प्राप्त होगा; क्योंकि इस परिस्थिति में $y = 2.54x$ जहाँ पर x ईंचों में ऊँचाई को तथा y सेंटीमीटरों में ऊँचाई को सूचित करता है, एक पूर्ण रैखिक संबंध है। आकृति 9.3 (ख) से 9.3 (ज) तक प्रकीर्ण आरेख r के अन्य मानों के लिए हैं। इन प्रकीर्ण आरेखों द्वारा हमें सम्बन्ध की प्रकृति तथा सहचारी r के मान के बारे में जानकारी प्राप्त होती है।

उपरोक्त विवरण द्वारा यह प्रतीत होता है कि $r = 0.84$, विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में प्राप्त किए गए अंकों के बीच, एक संतोषजनक किस्म के रैखिक सम्बन्ध का सूचक है। इस प्रकार चरों के बीच सम्बन्ध या साहचर्य का परिमाणन प्राकृतिक तथा समाजशास्त्रियों को उन तथ्यों को समझने में सहायक होता है, जिनकी यह जाँच कर रहे हैं। इस प्रकार के उदाहरण में एक शिक्षा मनोवैज्ञानी विभिन्न विषयों में प्राप्त अंकों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक को परिकलित कर सकता है तथा इन गुणांकों का और सांख्यिकीय विश्लेषण करके तथा मनोवैज्ञानिक प्रविधियों के प्रयोग द्वारा एक सिद्धांत बना सकता है, जोकि विद्यार्थियों को विभिन्न विषयों में अच्छा बनाने के लिए मानसिक एवं अन्य योग्यताओं की जानकारी दे सकता हो।

ो चरों में रैखिक सम्बन्ध की विद्यमानता का अर्थ यह नहीं लेना चाहिए कि उन दोनों में कारण-प्रभाव का सम्बन्ध है। उदाहरण के लिए, अगर आप पैट्रोल तथा चॉकलेट पर पारिवारिक व्यय के बीच सहसम्बन्ध परिकलित करें तो आपको इनमें सहसम्बन्ध का मान बड़ा अधिक प्राप्त हो सकता है, जोकि इन चरों में बड़ी ऊँची कोटि के रैखिक सम्बन्ध का सूचक है, लेकिन यह आवश्यक नहीं है कि अधिक कार प्रयोग करने के कारण लोग अधिक चॉकलेट खरीदते हैं। दोनों वस्तुएँ विलासिता की वस्तुएँ हैं तथा धनी परिवार इनको खरीद सकते हैं, जबकि निर्धन परिवार नहीं खरीद सकते। इस प्रकार, यहाँ सहसम्बन्ध के ऊँचे होने का कारण प्रत्येक चर तथा आय के बीच ऊँचा सहसम्बन्ध होना है। एक और उदाहरण पर विचार कीजिए। मान लीजिए पिछले बीस वर्षों से आप एक भारतीय की औसत ऊँचाई तथा उसके द्वारा टेलीविज़न देखने का प्रति सप्ताह औसत समय के आँकड़े प्राप्त कर रहे हैं। यह संभव है कि आप इनमें गहरा धनात्मक सहसम्बन्ध पाएँ। लेकिन इसका अर्थ यह नहीं है कि अधिक समय तक टेलीविज़न देखने से व्यक्ति की ऊँचाई में वृद्धि होती है या अधिक ऊँचाई वाले व्यक्ति अधिक समय तक टेलीविज़न देखते हैं। वास्तव में, इन दोनों चरों में समय के साथ वृद्धि होने की प्रवृत्ति होती है, जोकि उनमें ऊँचे सहसम्बन्ध द्वारा प्रतिबिम्बित होती है। इस प्रकार के दो चरों के बीच सहसम्बन्ध, जोकि उनके ऊपर किसी तीसरे चर के प्रभाव के कारण प्राप्त होता है (न कि उनमें प्रत्यक्ष रैखिक कारण-प्रभाव सम्बन्ध के कारण), को **मिथ्या सहसम्बन्ध** (spurious correlation) कहते हैं।

सहसम्बन्ध परिकलन के बारे में एक और बात का ज्ञान होना चाहिए। प्रतिदर्श द्वारा परिकलित अन्य मात्राओं की तरह, सहसम्बन्ध भी प्रत्येक प्रतिदर्श के लिए भिन्न होता है तथा परिकलित सहसम्बन्ध गुणांक के प्रयोग के लिए इन उच्चावचनों का हिसाब रखना भी आवश्यक होता है। हम यहाँ इन प्रविधियों की व्याख्या नहीं करेंगे।

चरों के बीच रैखिक सम्बन्ध की विद्यमानता, यानी उनमें ऊँचा सहसम्बन्ध वास्तविक है या मिथ्या, इस प्रकार की जानकारी एक चर द्वारा दूसरे चर की प्रागुक्ति में सहायक होती है। इन प्रागुक्ति प्रविधियों का अध्ययन हम इकाई 10 में करेंगे।

बोध प्रश्न 2

निम्नलिखित संख्याओं द्वारा r का मान परिकलित कीजिए :

$n = 10$, $\Sigma x = 125$, $\Sigma x^2 = 1585$, $\Sigma y = 80$; $\Sigma y^2 = 650$, $\Sigma xy = 1007$.

....

....

....

....

....

....

....

....

2) पति तथा पत्नी की आय के लिए सहसम्बन्ध गुणांक का परिकलन कीजिए :

पति की आय	23	27	28	29	30	31	33	35	36	39
पत्नी की आय	18	22	23	24	25	26	28	29	30	32

3) समान प्रकार से संसाधित मिश्रित इस्पात के नमूने, जिनमें निकल (nickle) के प्रतिशत की जाँच उनकी मज़बूती के साथ की गई है, के परिणाम निम्नलिखित हैं :

मज़बूती (मनमानी इकाईयों में)	47	50	52	52	54	56	58	59	60	60	62	64	65	66
निकल का प्रतिशत	2.7	2.7	2.8	2.8	2.9	3.2	3.2	3.3	3.4	3.5	3.6	3.7	3.7	3.8

मज़बूती तथा निकल की मात्रा में सहसम्बन्ध परिकलित कीजिए तथा परिणाम पर टिप्पणी कीजिए।

4) x तथा y में सहसम्बन्ध ज्ञात कीजिए :

x :	5	7	9	11	13	15
y :	1.7	2.4	2.8	3.4	3.7	4.4

5) निम्नलिखित सारणी में बहुत से वर्षों के लिए बचत बैंक जमा (बिलियन डालरों में) तथा हड़ताल एवं तालाबंदी (हज़ारों में) के आँकड़े दिए हुए हैं। सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित करके परिणाम पर टिप्पणी कीजिए।

बचत जमा :	5.1	5.4	5.5	5.9	6.4	6.0	7.2
हड़ताल एवम् तालाबंदी	3.8	4.4	3.3	3.6	3.3	2.3	1.0

9.5 कोटि सहसम्बन्ध गुणांक (Rank Correlation Coefficient)

अगर विचाराधीन दोनों चर मापनीय हैं तथा इनमें सम्बन्ध रैखिक हैं तो उपरोक्त सहसम्बन्ध गुणांक या पियर्सन का गुणन आघूर्ण सहसम्बन्ध गुणांक उपयुक्त होता है। लेकिन ऐसी व्यावहारिक परिस्थितियाँ भी हो सकती हैं, जहाँ चर मापनीय नहीं होते तथा अगर मापनीय हों भी तो इनमें सम्बन्ध रैखिक नहीं है। हम उस परिस्थिति का अध्ययन करेंगे जहाँ चर कोटि के रूप में दिए हुए हैं (कभी-कभी मूल चरों के मापनीय होने पर भी उनको कोटि में परिवर्तन किया जाता है तथा निम्नलिखित साहचर्य माप परिकलित किया जाता है)। उदाहरण के लिए, उस परिस्थिति पर विचार कीजिए, जिसमें दो परीक्षकों द्वारा 10 परीक्षार्थियों की, मौखिक परीक्षा के आधार पर जाँच करनी है। इस परिस्थिति में परीक्षार्थियों के अंक निर्धारित करना कठिन हो सकता है, लेकिन परीक्षकों के लिए उनको उनकी योग्यता के क्रम को कोटि करना सरल हो सकता है। इन परिणामों के प्रयोग से पहले यह ज्ञात करना उपयुक्त होगा कि क्या परीक्षकों द्वारा की गई कोटि (ranking) में उचित सामंजस्य है। इसके लिए दो परीक्षकों के बीच साहचर्य का माप परिकलित किया जा सकता है। इस परिस्थिति में सहसम्बन्ध गुणांक का प्रयोग उपयुक्त नहीं है। यहाँ पर निम्नलिखित माप, जिसको स्पीयरमैन का कोटि सहसम्बन्ध गुणांक कहते हैं, प्रयोग किया जा सकता है।

सारणी 9.9 में दिए हुए आँकड़ों पर विचार कीजिए। यहाँ पर कुछ कोटियों में साम्य है, इन साम्यावस्थाओं को एक ही कोटि इस प्रकार दी जाती है कि इनका योग उतना ही रहे, जितना साम्य न होने पर होता। उदाहरण के लिए, अगर दो अवस्थाओं की समान कोटि 6 है तो प्रत्येक को 6.5 कोटि दी जाती है तथा किसी अवस्था को 6 या 7 कोटि नहीं दी जाती। इसी प्रकार अगर 5 कोटि की तीन अवस्थाएँ हैं तो प्रत्येक को 6 की कोटि दी जाती हैं तथा किसी अवस्था को 5 या 7 की कोटि नहीं दी जाती। स्पीयरमैन का कोटि-सहसम्बन्ध गुणांक, जिसको स्पीयरमैन का रहो (Rho) कहा जाता है, इसको r_s से सूचित किया जाता है तथा यह दोनों प्रकार की कोटि के अंतर D पर आधारित होता है। दोनों प्रकार की कोटि में अंतर जितना अधिक होगा, D का मान उतना ही अधिक होगा। परिणामस्वरूप उतना ही कम सहसम्बन्ध होगा। अतः D के आकार द्वारा साहचर्य का माप किया जा सकता है। चूंकि विभिन्न व्यष्टियों के लिए D का योग हमेशा शून्य होता है, इसलिए D के आधार पर एक अकेला सूचकांक ज्ञात करने के लिए D की धनात्मकता या ऋणात्मकता को दूर करना होगा तथा सिर्फ D के आकार को ही लेना होगा। स्पीयरमैन के रहो में यह कार्य D का वर्ग लेकर किया जाता है। फिर भी

यहाँ पर $\sum_{i=1}^{n} D_i^2$, का मान अधिक होगा या कम होगा, यह n पर, अर्थात् व्यष्टियों की

संख्या पर निर्भर करता है। अतः इस मान की व्याख्या के लिए हम इसको अधिकतम संभव मान, जोकि सिर्फ n पर निर्भर है, द्वारा भाग करके एक अनुपात बना सकते हैं। यह

अधिकतम मान $\frac{n(n^2-1)}{6}$ है। इस प्रकार $\frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2-1)}$, का मान पूर्ण साहचर्य के लिए शून्य है तथा साहचर्य न होने पर एक के बराबर है। लेकिन हम इसको अन्य प्रकार से रखना पसंद करेंगे। इसके लिए हम इसको एक में से घटा देते हैं तथा

$$\boxed{r_s = 1 - \frac{6\sum_{i=1}^{n} D_i^2}{n(n^2-1)}} \qquad \text{.... (9.4)}$$

स्पीयरमैन का रहो परिभाषित होता है।

सारणी 9.9 दो परीक्षकों द्वारा 10 परीक्षार्थियों की कोटि

क्र. सं.	परीक्षक द्वारा कोटि		अंतर	
	परीक्षक (1)	परीक्षक (2)	D	D^2
1	6	6.5	−0.5	0.25
2	2	3	−1	1
3	8.5	6.5	+2	4
4	1	1	0	0
5	10	2	+8	64
6	3	4	−1	1
7	8.5	9.5	−1	1
8	4	5	−1	1
9	5	8	−3	9
10	7	9.5	−2.5	6.25
			$\Sigma D = 0$	$\Sigma D^2 = 87.5$

सारणी 9.9 के आँकड़ों द्वारा

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 87.5}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{525}{990} = 1 - 0.53 = 0.47.$$

अगर कोटि करने में पूर्ण मेल है तो r_s का मान + होगा और इसके विपरीत पूर्णतया मेल न होने की परिस्थिति में r_s का मान −1 होगा तथा r_s का शून्य मान सम्बन्ध की अनुपस्थिति को व्यक्त करेगा।

जब चर नामिक, क्रमसूचक तथा दूसरे प्रकार के हों तो साहचर्य के अन्य उपयुक्त माप प्रयोग किए जा सकते हैं। इनका यहाँ पर विवेचन नहीं किया जाएगा।

बोध प्रश्न 3

1) एक प्रतियोगिता में दो निर्णायकों ने 8 प्रतियोगियों A, B, C, D, E, F, G तथा H को अपने वरीयता क्रम के अनुसार निम्नलिखित तालिका में दी हुई कोटियाँ दी हैं। कोटि सहसम्बन्ध सूचकांक ज्ञात कीजिए।

	A	B	C	D	E	F	G	H
पहला निर्णायक :	5	2	8	1	4	6	3	7
दूसरा निर्णायक :	4	5	7	3	2	8	1	6

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) दो परीक्षाओं में विद्यार्थियों के एक समूह के निम्नलिखित कोटियों के लिए सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए। इस परिणाम से आप क्या निष्कर्ष निकालते हैं?

रोल नम्बर	:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B.Com परीक्षा में कोटि	:	1	5	8	6	7	4	2	3	9	10
M.Com परीक्षा में कोटि	:	2	1	5	7	6	3	4	8	10	9

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) तीन निर्णायकों A, B, C ने एक संगीत प्रतियोगिता में दस प्रतियोगियों को निम्नलिखित क्रम में कोटि किया :

A द्वारा कोटि	:	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
B द्वारा कोटि	:	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
C द्वारा कोटि	:	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7

निर्णायकों का कौन-सा युग्म संगीत की सामान्य रुचि के निकटतम सादृश्य है, कोटि सहसम्बन्ध विधि के प्रयोग द्वारा विवेचन कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4) दस विद्यार्थियों द्वारा गणित तथा सांख्यिकी में निम्नलिखित अंक प्राप्त किए गए। कोटि सहसम्बन्ध गुणांक परिकलित कीजिए।

विद्यार्थी (रोल नं.)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
गणित में अंक	78	36	98	25	75	82	90	62	65	29
सांख्यिकी में अंक	84	51	91	60	68	62	86	58	53	47

....

....

....

....

....

....

....

....

....

9.6 सारांश

इस इकाई में आपने द्विचर बंटनों के बारे में सीखा, दो चरों के बीच साहचर्य का या सहसम्बन्ध का परिमाप (सहसम्बन्ध गुणांक तथा कोटि सहसम्बन्ध) तैयार किया, जिसका अर्थ कारण-प्रभाव सम्बन्ध होना आवश्यक नहीं है।

9.7 शब्दावली

द्विचर आँकड़े : ऐसे आँकड़े, जिनमें प्रत्येक व्यष्टि के दो माप होते हैं। उदाहरण के लिए, प्रत्येक शिक्षित व्यक्ति की आय तथा शिक्षा प्राप्त करने के वर्षों की संख्या।

सहसम्बन्ध विश्लेषण : इससे अर्थ दो यादृच्छिक चरों के बीच साहचर्य का परिमाप है। जब दो यादृच्छिक चर इस प्रकार के हैं कि एक में परिवर्तन से दूसरे में संबंधित तरीके से परिवर्तन होता है तो इनको सहसम्बन्धित कहा जाता है। जो चर स्वतंत्र होते हैं, वे सहसम्बन्धित नहीं होते। सहसम्बन्ध गुणांक -1 तथा $+1$ के बीच एक संख्या होती है। यह प्रेक्षणों के बहुत से युग्मों, जिनको बिन्दु (x,y) से सूचित किया जाता है, से परिकलित किया जाता है। जब गुणांक का मान $+1$ है तो इसका अर्थ पूर्ण धनात्मक सहसम्बन्ध, गुणांक का मान -1 है तो इसका अर्थ पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बन्ध तथा गुणांक का मान 0 है तो इसका अर्थ कोई सहसम्बन्ध नहीं होता है।

सहप्रसरण : यह दो चरों का उनके माध्य से प्रथम गुणन आघूर्ण (First Product Moment) होता है। सहप्रसरण के परिकलि का सूत्र इस प्रकार है :

$$\frac{1}{n}\Sigma(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y}) \text{ or } \frac{1}{n}\left(\Sigma x_iy_i-\frac{(\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{N}\right)$$

जहाँ $x_i\, y_i$ प्रत्येक चर के मान हैं तथा 'N' प्रेक्षणों की संख्या है।

उपांत बंटन : इसका अर्थ द्विधा या बहुधा सारणी के पंक्ति योग अथवा स्तम्भ योग के बंटन से होता है।

कोटि सहसम्बन्ध गुणांक : बहुत-सी परिस्थितियों में चरों का माप प्राप्त करना, सुविधाजनक अथवा कम खर्चीला नहीं होता। कई बार तो यह संभव ही नहीं होता। ऐसी स्थिति में उनको क्रम के अनुसार कोटि किया जाता है। इन परिस्थितियों में कोटि सहसम्बन्ध गुणांक का प्रयोग किया जा सकता है। जब चरों में अरैखिक सम्बन्ध हो तो भी कोटि सहसम्बन्ध गुणांक उपयुक्त होता है।

प्रकीर्ण आरेख : ऐसा आरेख, जो दो चरों x तथा y के बीच संयुक्त परिवर्तन को दर्शाता है। प्रत्येक व्यष्टि को एक बिन्दु द्वारा निरूपित किया जाता है, जिसके साधारण आयताकार अक्षों पर निर्देशांक, चरों के मान होते हैं। इस प्रकार n प्रेक्षणों का समुच्चय, आरेख पर n बिन्दु प्रदान करता है। इन बिन्दुओं का प्रकीर्ण या झुंड x तथा y के बीच सम्बन्ध को दर्शाता है।

9.8 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Nagar, A.L. and R.K. Das, 1989. *Basic Statistics,* Oxford University Press : Delhi.

Goon, A.M., M.K. Gupta and B. Dasgupta. 1987. *Basic Statistics,* The World Press Pvt. Ltd. : Calcutta.

मेहता बी.सी., 1986, *प्रारंभिक सांख्यिकी*, राजस्थान हिंदी ग्रंथ अकादमी, जयपुर, अध्याय 9.

9.9 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) (i) नामिक (बाकी आप स्वयं कीजिए)

2) भाग 9.3 पढ़िए।

3) भाग 9.3 पढ़िए।

बोध प्रश्न 2

1) +0.47

2) +0.996

3) +0.98

4) +0.995

5) +0.82

बोध प्रश्न 3

1) 2/3

2) +0.64

3) +0.21, +0.64, −0.30

4) +0.82

9.10 पारिभाषिक शब्दावली

उपांत बंटन : Marginal distribution

क्रमसूचक चर : Ordinal variable

क्रमण सम्बन्ध : Ordering relation

कोटि सहसम्बन्ध गुणांक : Rank correlation coefficient

कोश : Cell

नामिक चर : Nominal variable

प्रागुक्ति : Prediction

सप्रतिबंध बंटन : Conditional distribution

समाश्रयण प्रविधि : Regression technique

सहप्रसरण : Covariance

सहसम्बन्ध गुणांक : Correlation coefficient

इकाई 10 समाश्रयण

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आपको यह जानकारी हो सकेगी कि किस प्रकार :

- सरल रैखिक समाश्रयण निदर्श को प्रयोग करना है
- विश्लेषण की दो विधियों – रैखिक समाश्रयण तथा सहसम्बन्ध,– की मान्यताओं की व्याख्या करनी है।
- एक समीकरण प्राप्त करना, जोकि प्रागुक्ति (prediction). तथा पूर्वानुमान के उद्देश्यों के लिए प्रयोग की जा सके।

10.1 प्रस्तावना

चरों के बीच सम्बन्ध के प्रायिक (probable) रूप के निर्धारण के लिए समाश्रयण विश्लेषण उपयोगी होता है। इस विश्लेषण विधि के प्रयोग का मूलभूत उद्देश्य प्रायः एक चर के लिए दिए हुए मान के अनुरूप अन्य चर के मान की प्रागुक्ति या पूर्वानुमान करना होता है।

10.2 रैखिक समाश्रयण : एक उदाहरण

इससे पहले की इकाई में हमने यह अध्ययन किया था कि किस प्रकार सहसम्बन्ध गुणांक के द्वारा दो चरों में रैखिक सम्बन्ध है या नहीं, की जांच की जा सकती है। मान लीजिए, दो चरों के बीच सहसम्बन्ध गुणांक का मान बहुत ऊँचा पाया जाता है तथा इन दोनों में रैखिक सम्बन्ध है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए कृषि के संदर्भ में, चावल की उपज (प्रति हैक्टेयर टनों में) तथा वर्षा की मात्रा (x) (जोकि उस मौसम में सेंटीमीटरों में मापी गई है) के बीच ऊँचा सहसम्बन्ध पाया गया है। तब शायद इस सम्बन्ध का लाभप्रद तरीके से संभव प्रयोग करके दिए हुए वर्षा के स्तर पर चावल की उपज की प्रागुक्ति की जा सकती है। सारणी 10.1 में कुछ इस प्रकार के आंकड़े दिए हुए हैं तथा आकृति 10.1 में इनका सदृश प्रकीर्ण आरेख दिया है।

प्रकीर्ण आरेख द्वारा यह प्रतीत होता है कि उपज तथा वर्षा की मात्रा में रैखिक सम्बन्ध है तथा इनमें सहसम्बन्ध भी ऊँचा है। इसके अतिरिक्त, कुल मिलाकर वर्षा की मात्रा के साथ उपज में वृद्धि हो रही है, यह ध्यान दीजिए कि आंकड़ों में 98 सेंटीमीटर पर 92 से.मी. की तुलना में कम उपज है। सामान्य बोध से यह विदित है कि एक सीमा से अधिक वर्षा धान की फसल के लिए हानिकारक होगी तथा वर्षा की मात्रा के साथ उपज की मात्रा में कमी लाएगी। इससे हमारे सामने प्रागुक्ति का एक महत्वपूर्ण सिद्धांत सामने आता है, जो यह है कि हमें अपनी प्रागुक्ति केवल उस परिसर तक ही सीमित रखनी चाहिए जिससे प्रेक्षण प्राप्त किए गए हैं। दूसरे शब्दों में हमें किसी

भी परिस्थिति में आंकड़ों के बहुत दूर बहिर्वेशन (extrapolation) नहीं करना चाहिए। अतः वर्षा की मात्रा के पूरे परिसर में, मान लीजिए 200 से.मी. तक सम्बन्ध रैखिक नहीं होगा, लेकिन 50 से 100 से.मी. के परिसर में, जिसमें आंकड़े संकलित किए गए हैं, रैखिक सम्बन्ध के आधार पर शायद 100 के पास की संख्याओं को छोड़कर, चलना विवेकपूर्ण प्रतीत होता है।

मान लीजिए हम 76 से.मी. वर्षा के लिए उपज की प्रागुक्ति करना चाहते हैं, तो इसके लिए क्या विधि होनी चाहिए? चूंकि हमारा विश्वास है कि 50 से 100 से.मी. परिसर में x तथा y के बीच सम्बन्ध रैखिक है, इसलिए हम प्रागुक्ति के लिए आंकड़ों में सरल समंजन करते हैं। आकृति 10.1 में आंकड़ों में एक सरल रेखा का समंजन किया गया है। x = 76 से y-अक्ष के समांतर एक रेखा खींची गई है, जो इस सरल रेखा से मिलती है। इस बिन्दु पर y का मान 6.68 है तथा यह सरल रेखा द्वारा y का प्रागुक्ति मान है।

सारणी 10.1

वर्षा की मात्रा तथा चावल की उपज (प्रति हैक्टेयर)

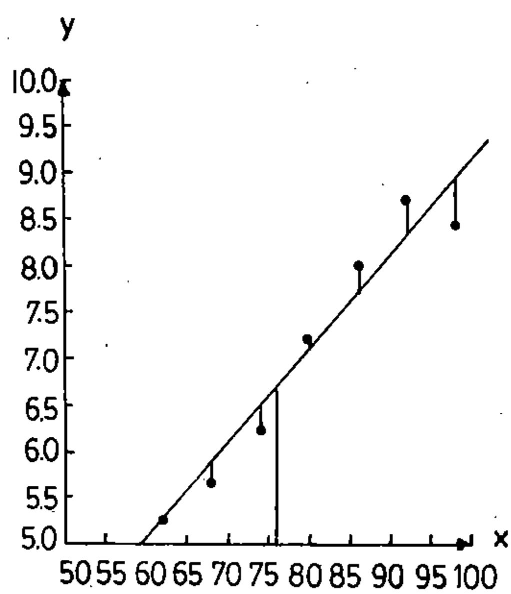
वर्षा की मात्रा (x)	:	62	68	74	80	86	92	98
उपज (y)	:	5.27	5.68	6.25	7.21	8.02	8.71	8.42

इस सरल रेखा द्वारा 87 से.मी. पर प्रागुक्ति करने के लिए हम x = 87 से एक रेखा y-अक्ष के समांतर इस सरल रेखा तक खींचते हैं। इस बिन्दु पर y का मान 7.813 है। अतः हमारी प्रागुक्ति यह है कि जब वर्षा 87 से.मी. होगी तो उपज 7.813 टन प्रति हैक्टेयर होगी। लेकिन यह मान x = 86 तथा x = 92 की उपज के बीच नहीं है, जोकि क्रमशः 8.02 तथा 8.71 है। अर्थात् हमारा विश्वास, दो पृथक प्रेक्षणों x = 86 तथा x = 82 की तुलना में सरल रेखा पर अधिक हैं। सरल रेखा, जिसके निर्धारण में बहुत अधिक सूचना का प्रयोग किया गया है, की तुलना में विभिन्न प्रेक्षित बिंदुओं पर संयोग उच्चावचनों का अधिक प्रभाव हो सकता है? अगर हम सरल रेखा का प्रयोग करते हैं तो प्रागुक्ति उपज का मान 8.328 टन प्रति हैक्टेयर है, जबकि प्रेक्षित उपज 8.71 टन है। इनमें से हम किसको ठीक समझते हैं? उपरोक्त तर्क के अनुसार, हम यहाँ भी यह विश्वास करते हैं कि सरल रेखा द्वारा प्राप्त मान अच्छा मान है।

10.3 न्यूनतम वर्ग विधि

अब प्रश्न यह है कि यह सरल रेखा किस प्रकार प्राप्त की (आंकी) जाती है? जैसा कि आप जानते हैं, सरल रेखा को इस समीकरण द्वारा निरूपित किया जाता है $y = a + bx$,

जहाँ पर b सरल रेखा का ढाल तथा a इसका y-अक्ष पर अंतःखंड है। अतः सरल रेखा ज्ञात करने के प्रश्न को दो परिमाणों a तथा b को ज्ञात करने का प्रश्न भी कहा जा सकता है। सांख्यिकीय शब्दावली में a तथा b को प्राचल (parameters) कहा जाता है। हमारे पास उपलब्ध आंकड़ों के प्रयोग से इन प्राचलों का अनुमान लगाया जाता है।



आकृति 10.1 : चावल की उपज तथा वर्षा की मात्रा का प्रकीर्ण आरेख

चूंकि इन प्राचलों के अनुमान का उद्देश्य इनका y की प्रागुक्ति में प्रयोग करना है, इसलिए हमें इनके ऐसे अनुमान प्राप्त करने चाहिए कि जब हम इनका प्रयोग करें तो विभ्रम (error) की मात्रा कम से कम हो। लेकिन सरल रेखा द्वारा प्रागुक्ति से कितनी विभ्रम की मात्रा होगी, इसका एकमात्र स्रोत हमारे पास उपरोक्त दिया हुआ आंकड़ों का वही समुच्चय है। अतः हम विभ्रम की मात्रा को न्यूनतम करके a तथा b के अनुमान प्राप्त करेंगे, अर्थात् जिन बिन्दुओं पर प्रेक्षण किए गए हैं, उन पर प्रेक्षित एवं प्रागुक्ति मानों का अंतर लेंगे। हमारे उदाहरण में इस प्रकार के सात बिन्दु हैं। आकृति 10.1 में y के प्रेक्षित एवं प्रागुक्ति मानों के ये अंतर, प्रेक्षित बिन्दु से समाश्रयण रेखा तक, y- अक्ष के समांतर खींची गई रेखाओं द्वारा दिखाए गए हैं। इन खंडों की लंबाई प्रेक्षित बिन्दुओं पर विभ्रम को व्यक्त करती है। विभ्रम को न्यूनतम करने के लिए हमें एक ही निकष (criterion) लेना पड़ता है। अतः हम विभिन्न बिन्दुओं से विभ्रम के संचय का प्रयोग करेंगे।

जैसा कि हमने पहले माना था, x प्रेक्षणों को (x_i, y_i) से सूचित किया जाएगा, जहाँ पर $i = 1, 2 \ldots n$ है। हमारे उदाहरण में $n = 7$ है। मान लीजिए, हम x_i पर प्रागुक्ति मान को $\hat{y}_i$ से सूचित करते हैं। अतः

$$\hat{y}_i = a + bx_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

तब i वें प्रेक्षित बिन्दु पर विभ्रम

$e_i = \hat{y}_i - y_i$ होगा, $i = 1, 2, \ldots, n.$

सबसे अच्छा तो यह होगा कि हम a तथा b के ऐसे मान प्राप्त करें, जिससे प्रत्येक $e_i, i = 1, 2, \ldots n$, शून्य के बराबर ही जाए। लेकिन, यह तब तक असंभव है, जब तक सभी बिन्दु सरल रेखा पर न हों, जिसकी संभावना बहुत कम है। अतः हमें $e_i, i = 1, 2, \ldots n$, के संचय को न्यूनतम करने से ही संतुष्ट होना पड़ेगा। यह सोचना आकर्षक लगता है कि $e_i, i = 1, 2, \ldots n$, के कुल योग अर्थात् $\sum_{i=1}^{n} e_i$ का न्यूनतमीकरण कर लें। लेकिन ऐसा उचित नहीं होगा, क्योंकि रेखा से ऊपर बिन्दुओं के लिए e_i का मान धनात्मक तथा रेखा से नीचे बिन्दुओं के लिए e_i का मान ऋणात्मक है। अतः अगर विभ्रम बड़े धनात्मक तथा बड़े ऋणात्मक भी हों तो यह संभव है कि $\sum_{i=1}^{n} e_i$ बहुत छोटा होगा।

इसके अतिरिक्त, अगर $a = \bar{y}$, y_i का समांतर माध्य लें तथा $b = 0$ लें तो $\sum_{i=1}^{n} e_i$ को शून्य के बराबर किया जा सकता है। तब प्रागुक्ति सूत्र में x की कोई आवश्यकता नहीं होती तथा x के सभी मानों के लिए प्रागुक्ति समान रहती है। हमारे उदाहरण में इसका अर्थ यह होगा कि उपज की मात्रा वर्षा पर निर्भर नहीं है, जो वास्तव में गलत है। तब $\sum_{i=1}^{n} e_i$ निकष में कहाँ गड़बड़ है? इसमें मुख्य गड़बड़ यह है कि यह e_i के चिह्न का हिसाब रखता है, जबकि यहाँ विभ्रम का आकार महत्वपूर्ण है। विभ्रम चाहे धनात्मक हो या ऋणात्मक, वास्तव में कोई महत्व नहीं रखता। अतः

$$\sum_{i=1}^{n} |e_i|, \qquad \ldots (10.1)$$

न्यूनतम करना अधिक उपयुक्त निकष होगा। लेकिन, सिद्धांतिक तथा परिकलन की कठिनाइयों के कारण इस निकष की तुलना में न्यूनतम वर्ग निकष को वरीयता दी जाती है। जबकि निकष (10.1) में निरपेक्ष मान लेकर चिह्न को हटाया जाता है, न्यूनतम वर्ग निकष में यह कार्य मान का वर्ग लेकर किया जाता है। निकष 10.1 की तुलना में यह विधि गणितानुसार तथा अभिकलनीयता (computationally) अधिक लोकप्रिय पाई गई है।

न्यूनतम वर्ग निकष इस प्रकार है :

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 \qquad \ldots (10.2)$$

अगला प्रश्न यह है : (10.2) को न्यूनतम करके a तथा b का मान किस प्रकार प्राप्त किया जा सकता है?

कैलकुलस (calculus) का अनुप्रयोग यह दर्शाता है कि निम्नलिखित दो समीकरणों के हल द्वारा a तथा b का ऐसा मान प्राप्त किया जा सकता है।

$an + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i;$

$a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$

इन समीकरणों को न्यूनतम वर्ग के प्रसामान्य समीकरण (normal equations) कहते हैं। ये दो अज्ञातों में दो युगपत रैखिक समीकरण हैं। इनको a तथा b के लिए हल किया जा सकता है। ये हल इस प्रकार है :

$$b = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2} \qquad \text{... (10.3)}$$

तथा $a = \bar{y} - b\bar{x}.$ ... (10.4)

इससे पहले की इकाई में विकसित संकेतन के प्रयोग द्वारा b का मान इस प्रकार भी लिखा जा सकता है :

$$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \qquad \text{... (10.5)}$$

अतः एक बिन्दु x पर y के मान की प्रागुक्ति में प्रयोग किया जाने वाला सूत्र

$\hat{y} = a + bx$ है।

सारणी 10.1 में दिए गए आँकड़ों के लिए परिकलन इस प्रकार है :

$\sum_{i=1}^{7} x_i = 560; \sum_{i=1}^{7} y_i = 49.56;$

$s_x^2 = 144; s_{xy} = 14.81; s_y^2 = 1.61;$

$r = \frac{s_{xy}}{\sqrt{s_x^2 s_y^2}} = \frac{14.81}{\sqrt{144 \times 1.61}} = 0.9724;$

$b = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{14.81}{144} = 0.103;$

$a = \bar{y} - b\bar{x} = 7.08 - 0.103 \times 80 = -1.149$

जब $x = 92$, तो y का प्रागुक्ति मान $\hat{y} = -1.149 + 0.103x = 8.328$. है। अगर वर्षा बिल्कुल नहीं होती अर्थात् $x = 0$ है तो उपज की प्रागुक्ति क्या है? इस समीकरण के प्रयोग द्वारा हम $\hat{y} = -1.149 + 0.103 \times 0 = -1.149$ पाते हैं। लेकिन यह निरर्थक है, क्योंकि उपज ऋणात्मक नहीं हो सकती। तब क्या समीकरण में कोई गड़बड़ है? नहीं, जैसा कि हमने पहले जिक्र किया था, यह समीकरण केवल उसी परिसर के लिए मान्य है, जिसमें प्रेक्षण किए गए हैं, अर्थात् $62 \le x \le 98$. इसकी कोई गारंटी नहीं है कि समंजित सरल रेखा इन परिसीमाओं के बाहर, विशेष रूप से जब मान "10" जितना दूर हो, बहिर्वेशन करेगी। अतः सरल रेखा द्वारा इस प्रकार के बिन्दुओं पर प्रागुक्ति, चाहे वह ऋणात्मक उपज की तरह निरर्थक न भी हो, अमान्य अवश्य होती है।

उपरोक्त विवेचन तथा सूत्र अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए हैं। अगर आंकड़े वर्गीकृत बारंबारता बंटन के रूप में उपलब्ध हों तो किस प्रकार के परिवर्तन करने पड़ते हैं? जैसा कि सहसम्बन्ध के विवेचन में टिप्पणी की गई थी, सिद्धांत बिल्कुल वही है। लेकिन कुछ परिकलन संबंधी विवरणों में थोड़ा अंतर होता है। पहले की तरह हम वर्ग अंतराल के माध्यमानों का प्रयोग करेंगे। अतः प्रकीर्ण आरेख में एक ही मध्यमान x के लिए बहुत से बिन्दु होंगे तथा इसी प्रकार एक ही मध्यमान y के लिए भी बहुत से बिन्दु होंगे। अगर सूत्र (10.5) का प्रयोग किया जाता है तब s_{xy} तथा s_x^2 के परिमाण, वर्गीकृत बारंबारता बंटन के लिए उपयुक्त सूत्रों के प्रयोग द्वारा जोकि उपभाग 9.4.2 में दिए गए हैं, परिकलन किए जाएंगे। अगर (10.3) तथा (10.4) सूत्रों का प्रयोग किया जाता है, तो इनमें निम्नलिखित परिवर्तन आवश्यक हैं:

$$b = \frac{n\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{l} f_{jt}x_j y_t - \left(\sum_{j=1}^{k} f_{j0}x_j\right)\left(\sum_{t=1}^{l} f_{0t}y_t\right)}{n\sum_{j=1}^{k} f_{j0}x_j^2 - \left(\sum_{j=1}^{k} f_{j0}x_j\right)^2} \quad \text{... (10.6}$$

तथा $a = \bar{y} - b\bar{x}$ ... (10.7

सारणी 9.5 के आंकड़ों पर इन सूत्रों के प्रयोग द्वारा हमें यह समाश्रयण रेखा प्राप्त होगी :

$y = 123.14 + 0.5736\ x$

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित आंकड़ों से X तथा Y में रैखिक सहसम्बन्ध का गुणांक ज्ञात कीजिए। Y की X पर समाश्रयण रेखा भी ज्ञात कीजिए तथा जब X = 12 हो तो Y का अनुमान भी परिकलित कीजिए।

X :	1	3	4	6	8	9	11	14
Y :	1	2	4	4	5	7	8	9

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित आंकड़ों से समाश्रयण की रेखाएं प्राप्त कीजिए :

X	= 1	2	3	4	5	6	7	8	9
Y	= 9	8	10	12	11	13	14	16	15

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) निम्नलिखित आंकड़ों से दो समाश्रयण रेखाएं ज्ञात कीजिए

पति की आयु (X)	25	22	28	26	35	20	22	40	20	18
पत्नी की आयु (Y)	18	15	20	17	22	14	16	21	15	14

तत्पश्चात (i) पति की आयु का अनुमान ज्ञात कीजिए जबकि पत्नी की आयु 19 हो, (ii) पत्नी की आयु का अनुमान ज्ञात कीजिए, जबकि पति की आयु 30 वर्ष हो।

4) निम्नलिखित आंकड़ों से दो समाश्रयण समीकरण प्राप्त कीजिए।

बिक्री	91	97	108	121	67	124	51	73	111	57
खरीद	71	75	69	97	70	91	39	61	80	47

5) निम्नलिखित सारणी में दिए गए आंकड़ों से चावल की उपज (Y) की पानी (X) पर समाश्रयण रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए :

पानी (X) (इंचों में) :	12	18	24	30	36	42	48
उपज (Y) (टनों में) :	5.27	5.68	6.25	7.21	8.02	8.71	8.42

40 इंच पानी के लिए सबसे सम्भाविक चावल की उपज का अनुमान कीजिए

10.4 सहसम्बन्ध तथा समाश्रयण में सम्बन्ध

अभी तक किए गए विवेचनों से दो बातें स्पष्ट रूप से सामने आती हैं :

1) अगर प्रकीर्ण आरेख में बिन्दु सरल रेखा के आसपास स्थित हैं, तब x तथा y के बीच एक तीव्र रैखिक सम्वन्ध होता है तथा सहसम्बन्ध गुणांक का मान भी ऊंचा होता है।

2) अगर प्रकीर्ण आरेख में बिन्दु सरल रेखा के आसपास स्थित है, तब प्रेक्षित मानों तथा न्यूनतम वर्ग द्वारा प्रागुक्ति मान बहुत निकट होते हैं तथा प्रागुक्ति विभ्रम छोटा होता है

इस प्रकार, यह प्रतीत होता है कि न्यूनतम वर्ग द्वारा प्रागुक्ति विभ्रम, सहसम्बन्ध गुणांक से सम्बन्धित है। हम यहां इस सम्बन्ध की व्याख्या करेंगे। न्यूनतम वर्ग रैखिक समाश्रयण के प्रयोग के कारण विभिन्न बिन्दुओं पर विभ्रमों के वर्गों का योग इस प्रकार है:

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{y}_i)^2$$

दूसरी तरफ, अगर हमने y की प्रागुक्ति के लिए x का प्रयोग नहीं किया होता तो प्रागुक्ति, एक स्थिरांक (मान लीजिए a) होती। न्यूनतम वर्ग निकष के अनुसार, a का सर्वोत्तम मान वह होगा जिससे $\sum_{i=1}^{n} (y_i - a)^2$ न्यूनतम हो, इस a का मान $\bar{y}$ है। अतः x के प्रयोग के बिना विभिन्न बिन्दुओं पर प्रागुक्ति विभ्रमों के वर्गों का योग

$$\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2 \text{ है।}$$

इन दोनों का अनुपात एक सूचकांक के रूप में प्रयोग किया जा सकता है, जोकि यह व्यक्त करेगा कि x के प्रयोग से कितना लाभ हुआ है। चूंकि इस अनुपात के दोनों अंश तथा हर, ऋणेतर (non-negative) हैं, इसलिए यह अनुपात शून्य के बराबर या इससे अधिक होगा।

समाश्रयण समस्या में y ऐसा चर है, जिसके मान की प्रागुक्ति की जानी है तथा x ऐसा चर है जिसके बारे में दी हुई सूचना का प्रयोग किया जाना है। वर्षा की मात्रा तथा चावल की उपज वाले प्रश्न में वर्षा की मात्रा के आधार पर उपज की प्रागुक्ति करना सार्थक है, जबकि उपज के आधार पर वर्षा की मात्रा की प्रागुक्ति करने का कोई अर्थ नहीं है, हर हालत में उपज आंकड़ों से पहले वर्षा की मात्रा पर सूचना उपलब्ध होगी। लेकिन, प्रागुक्ति के प्रश्न में भी, अर्थशास्त्र तथा सांख्यिकी में प्राप्त अंकों की परिस्थिति में कोई भी चर x तथा अन्य y हो सकता है। अतः अब इन दो प्रश्नों पर विचार कीजिए—(i) सांख्यिकी में प्राप्त अंकों (x) द्वारा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों (y) की प्रागुक्ति (ii) अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों (y) द्वारा सांख्यिकी में प्राप्त अंकों (x) का प्रागुक्ति। मान लीजिए $\hat{y} = a + bx$, x द्वारा y की प्रागुक्ति का समीकरण है। तब यह कहना आकर्षक लग सकता है कि y द्वारा x की प्रागुक्ति का समीकरण $\hat{x} = \frac{y}{b} - \frac{a}{b}$ है, जोकि समीकरण $y = a + bx$ के परिचालन (manipulation) द्वारा प्राप्त किया गया है। लेकिन ऐसा करना सही नहीं होगा, क्योंकि x तथा y में संबंध '$y = a + bx$' कोई गणितीय सम्बन्ध नहीं है, बिन्दु (x, y) सही रूप में सरल रेखा पर नहीं है, यह सम्बन्ध केवल सन्निकट का है। वास्तव में, अगर हम उन्हीं आंकड़ों से y द्वारा x की प्रागुक्ति का न्यूनतम वर्ग रैखिक समाश्रयण परिकलित करें तो यह $\hat{x} = \frac{y}{b} - \frac{a}{b}$ से भिन्न होगा, क्योंकि समीकरण $\hat{y} = a + bx$ को $\sum_{i=1}^{n} [y - (a + bx_i)]^2$ न्यूनतम करके प्राप्त किया गया है तथा समीकरण $\hat{x} = c + dy$ को $\sum_{i=1}^{n} [x_i - (c + dy_i)]^2$ न्यूनतम करके प्राप्त किया जाएगा। फिर भी दोनों, समाश्रयण गुणांकों b तथा d में एक सम्बन्ध होता है। जैसा हमने पहले $b = \frac{s_{xy}}{s_x^2}$; इसी प्रकार के सूत्र द्वारा x तथा y की भूमिकाओं को परिवर्तित करने पर, $d = \frac{s_{yx}}{s_x^2}$ प्राप्त होता है लेकिन s_{xy} की परिभाषा के अनुसार हम यह ध्यान दें कि $s_{xy} = s_{yx}$ होता है। अतः $b_{xd} = \frac{s_{x\,y}^{2}}{s_x^2\, s_y^2}$

जोकि r^2 के बराबर है। r^2 को निर्धारण गुणांक (coefficient of determination) कहते हैं। अतः दो समाश्रयण गुणांकों, y का x पर तथा x का y पर, का गुणनफल सहसंबंध के वर्ग के बराबर होता है। यह सहसंबंध तथा समाश्रयण के बीच एक और सम्बन्ध है। यहां पर यह ध्यान दें कि प्रत्येक समाश्रयण का निर्धारण गुणांक वही है अर्थात् r^2 के बराबर है, जिसका अर्थ है कि चाहे दो समाश्रयण रेखाएं भिन्न हैं, उनकी प्रागुक्ति की शक्ति समान है।

10.5 "समाश्रयण" शब्द

अब तक आप सोच रहे होंगे कि "समाश्रयण" (Regression) शब्द का प्रयोग क्यों किया गया है, क्योंकि इसका अर्थ तो घटाना या कम करना होता है। यह नाम एक घटना के साथ जुड़ा हुआ है, जो कि उस समय प्रेक्षित की गई जब इन धारणाओं को विकसित किया जा रहा था। पिता की ऊंचाई (x) तथा बेटे की ऊंचाई (y) के सम्बन्ध में एक अध्ययन में यह प्रेक्षित किया गया कि सबसे ऊंचे पिताओं के बेटों की औसत ऊंचाई में इन पिताओं की औसत ऊंचाई से कम ऊंचाई होने की प्रवृत्ति है तथा सबसे कम ऊंचाई वाले पिताओं के बेटों की औसत ऊंचाई में इन पिताओं की औसत ऊंचाई से अधिक ऊंचाई होने की प्रवृत्ति है। इस प्रक्रिया को माध्य की तरफ समाश्रयण होना कहा गया है। चाहे यह उस समय कुछ अजीब-सा महसूस हुआ [illegible] में यह पाया [illegible] वर्गों के उप-वर्गों में प्राकृतिक प्रसरण हैं, तथा [illegible] प्रक्रियाएं बहुत-[illegible] आंकड़ों में घटित हुई। इसकी व्याख्या यह है कि कुछ जनानक कारकों के अतिरिक्त, अनियमित प्राकृतिक परिवर्तनों के कारण बहुत से लम्बे व्यक्ति औसत ऊंचाई के परिवारों से होते हैं तथा इनके बेटे कुल मिलाकर इनसे कम ऊंचाई के होते हैं। ठीक इसी प्रकार की प्रक्रिया पैमाने के निचले सिरे पर भी लागू होती है। परीक्षा के संदर्भ में, अगर

विद्यार्थियों के समूह द्वारा दो परिक्षाओं में प्राप्त अंकों की तुलना करें तो हम यह पाएंगे कि एक परीक्षा में सबसे अधिक अंक लेने वाले विद्यार्थी के दूसरी परीक्षा में औसत अंक प्राप्त हैं, जोकि सारी कक्षा के औसत की तरफ है, अतः यह माध्य की ओर समाश्रयण करते हैं। लेकिन इसका यह अर्थ नहीं लेना चाहिए कि बहुत अच्छे विद्यार्थी हैं ही नहीं। ऊपर चर्चित प्रक्रिया को प्रायः समाश्रयण भ्रामकता कहा जाता है।

10.6 सहसम्बन्ध अनुपात

सारणी 10.2 में कुछ पब्लिक लिमिटेड कम्पनियों की शुद्ध बिक्री तथा लाभांश के आंकड़ों पर विचार कीजिए। अगर आप प्रत्येक बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात के स्तर के लिए माध्य लाभांश दर परिकलित करें तो सारणी 10.3 में प्रस्तुत आंकड़े प्राप्त होंगे। इन आंकड़ों में कोई रैखिक सम्बन्ध नहीं है। यहां सहसम्बन्ध गुणांक – 0.052 है तथा यह सम्बन्ध का अच्छा परिमाप नहीं है, क्योंकि सम्बन्ध रैखिक नहीं है। इसके अतिरिक्त, अधिक जटिल वक्र के लिए प्रागुक्ति सूत्र ज्ञात करना जरा कठिन कार्य है। इन परिस्थितियों में हम प्रागुक्ति करने के लिए एक विशेष बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात स्तर पर माध्य लाभांश का प्रयोग कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, अगर आप 1.25 बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात के लिए लाभांश दर की प्रागुक्ति करना चाहते हैं तो हमारी प्रागुक्ति 16.7 प्रतिशत लाभांश हो सकती है। यह प्रागुक्ति बिना बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात के प्रयोग से की जाने वाली प्रागुक्ति, जो कुल समग्र माध्य लाभांश दर (जो उदाहरण में 17.11 प्रतिशत है) के बराबर है, से बेहतर होगी। इन दोनों प्रकार के प्रागुक्ति सूत्रों से औसत विभ्रमों के अनुपात के सिद्धांत के आधार पर साहचर्य का माप परिकलित किया जा सकता है। यह पुनः स्मरण कीजिए कि यह सहसम्बन्ध गुणांक की एक व्याख्या है, जब प्रागुक्ति के लिए रैखिक समीकरण का प्रयोग किया गया हो। मान लीजिए, हम jt वें खाने की बारंबारता को f_{jt} से सूचित करते हैं तथा बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात के j वें वर्ग $x_{j1} - x_{j2}$ की उपांत बारंबारता को f_{j0} से सूचित करते हैं। मान लीजिए, इस वर्ग का माध्य $\bar{y}$ है। मान लीजिए y का समग्र माध्य $\bar{y}$ है। मान लीजिए y के t वें वर्ग का मध्यमान y_t है। तब समग्र माध्य के प्रयोग से विभ्रमों के वर्गों का योग $= \sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{l} f_{jt}(y_t - \bar{y})^2$; तथा सप्रतिबंध माध्यों के प्रयोग द्वारा विभ्रमों के वर्गों का योग $= \sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{l} f_{jt}(y_t - \bar{y}_j)^2$ होगा। पहला व्यंजक y का समग्र प्रसरण है तथा दूसरा व्यंजक x के वर्गों में y का प्रसरण है। अतः अरैखिक साहचर्य का उपयुक्त परिमाप :

$$\eta^2_{yx} = 1 - \frac{\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{l} f_{jt}(y_t - \bar{y}_j)^2}{\sum_{j=1}^{k}\sum_{t=1}^{l} f_{jt}(y_t - \bar{y})^2} \qquad \text{...(10.8)}$$

परिकलन कार्यों के लिए उपयुक्त सूत्र निम्न है:

$$\eta^2_{yx} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^{l} f_{0t} y_t^2 - \sum_{j=1}^{k} f_{j0} \bar{y}_j^2}{\sum_{t=1}^{l} f_{0t} y_t^2 - n\bar{y}^2} \qquad \text{... (10.9)}$$

इस परिमाप को सहसम्बन्ध अनुपात कहते हैं। सहसम्बन्ध गुणांक की तरह सहसम्बन्ध अनुपात x तथा y में सममित (symmetric) नहीं है अर्थात् x से y की प्रागुक्ति तथा y से x की प्रागुक्ति के लिए दो अलग सहसम्बन्ध अनुपात होते हैं, जिनको क्रमशः η_{yx} तथा η_{xy} से सूचित किया जाता है।

हमारे बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात या लाभांश के आंकड़ों के लिए

$$\eta^2_{yx} = 1 - \frac{173243.75 - 149324.59}{173243.75 - 146376.05}$$

$$= 1 - \frac{23919.10}{26867.5}$$
$$= 1 - 0.89$$
$$= 0.11.$$

अतः $\eta_{yx} = 0.33$ है। इससे यह प्रतीत होता है कि बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात लाभांश का उपयोगी प्राग्वक्ता नहीं है। r^2 का मान 0.0027 है, जोकि η^2 से बहुत कम है। यह एक गणितीय सच्चाई है कि $\eta^2 > r^2$ यह बात अंतर्ज्ञान से भी सुस्पष्ट है, क्योंकि सहसम्बन्ध अनुपात, सरल रेखा की तुलना में अधिक व्यापक प्रागुक्ति सूत्र पर आधारित है। अतः सहसम्बन्ध अनुपात के परिकलन में प्रयोग किए गए प्रागुक्ति विभ्रम कुल मिलाकर सहसम्बन्ध गुणांक के परिकलन में प्रयोग किए गए विभ्रमों से कम होते हैं। अगर वर्गों के माध्य सरल रेखा पर होंगे तो η^2 तथा r^2 के परिमाण बराबर होंगे। वास्तव में, $\eta^2 - r^2$ का प्रायः प्रयोग, रैखिक प्राग्वक्ता की व्यापक प्राग्वक्ता से तुलना में उपयुक्तता के माप के रूप में किया जाता है। हमारे उदाहरण में बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात कोई उपयोगी प्राग्वक्ता चर नहीं है तथा इस परिस्थिति में कोई सूत्र सहायक नहीं है।

सारणी 10.2

शुद्ध बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात तथा लाभांश का द्विचर बारंबारता बंटन

शुद्ध बिक्री/	घोषित प्रतिशत लाभांश (1987-88)								योग
परिसम्पत्ति अनुपात	शून्य	< 5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	≥ 30	
< 0.5	16	0	1	2	5	5	1	0	30
0.5-1.0	44	1	9	24	42	38	8	17	183
1.0-1.5	30	0	8	30	42	32	15	20	177
1.5-2.0	11	0	1	7	22	11	15	11	78
2.0-2.5	3	0	4	0	5	3	4	1	20
2.5-3.0	1	0	0	0	3	2	0	1	7
3.0-3.5	0	0	0	0	0	0	0	1	1
≥ 3.5	0	0	0	2	0	2	0	0	4
योग	105	1	23	65	119	93	43	51	500

सारणी 10.3

बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात के विभिन्न स्तरों के लिए माध्य लाभांश दर

शुद्ध बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात परिसर	शुद्ध बिक्री/परिसम्पत्ति अनुपात मध्यमान	लाभांश की माध्य दर (प्रतिशत)
< 0.5	0.25	8.53
0.5-1.0	0.75	17.95
1.0-1.5	1.25	16.70
1.5-2.0	1.75	19.20
2.0-2.5	2.25	16.38
2.5-3.0	2.75	18.57
3.0-3.5	3.25	32.50
≥ 3.5	3.75	17.50

बोध प्रश्न 2

1) सरल रेखा $y = 0.2x - 3$ को "$- 5$ से $+ 5$" परिसर में आलेखित कीजिए।

2) सारणी 9.8 में दिए सांख्यिकी तथा अर्थशास्त्र में अंकों के आंकड़ों के प्रयोग द्वारा y का x पर तथा x का y पर समाश्रयण परिकलित कीजिए तथा यह जाँच कीजिए कि दोनों रेखाएं भिन्न हैं। प्रकीर्ण आरेख पर दोनों समाश्रयण रेखाओं को अंकित कीजिए। यह जांच कीजिए कि दोनों समाश्रयण गुणांकों का गुणनफल सहसम्बन्ध गुणांक के वर्ग के बराबर है।

....

3) मान लीजिए वस्त्र पर पारिवारिक व्यय (y रुपए) का वार्षिक पारिवारिक आय (x रुपये) पर न्यूनतम वर्ग रैखिक समाश्रयण $y = 100 + 0.09x$ प्राप्त किया गया। यहां पर x का परिसर $1000 < x < 100000$ है। इस समाश्रयण रेखा की व्याख्या कीजिए। जब वार्षिक पारिवारिक आय 10000 रुपये हो तो परिवार का वस्त्र पर व्यय की प्रागुक्ति कीजिए। जिन परिवारों की वार्षिक आय 100 रुपए तथा 1000000 रुपए है, उनके बारे में आपकी क्या प्रतिक्रिया है।

....

10.7 सारांश

इस इकाई में सांख्यिकीय विश्लेषण के दो महत्वपूर्ण उपकरणों को प्रस्तुत किया गया है, जो सरल रैखिक समाश्रयण तथा सहसम्बन्ध है। इन प्रविधियों के अनुप्रयोग के लिए निम्नलिखित रूपरेखा का सुझाव दिया जाता है :

1) निदर्श (Model) की पहचान करना।
2) मान्यताओं की समीक्षा (review) करना।
3) समाश्रयण समीकरण प्राप्त करना।
4) समीकरण का मूल्यांकन करना।
5) समीकरण का प्रयोग करना।

आपने यह देखा कि किस प्रकार अवशिष्ट आलेखों (residual plots) के विश्लेषण के प्रयोग द्वारा यह निर्धारित किया जा सकता है कि क्या आंकड़ों में समाश्रयण विश्लेषण के लिए आधारभूत मान्यताओं के उल्लंघन की संभावना है या नहीं।

आपने यह भी देखा कि सहसम्बन्ध विश्लेषण, चाहे समाश्रयण विश्लेषण से निकट से सम्बन्धित है; लेकिन भिन्न उद्देश्य, दो चरों के बीच सम्बन्ध की शक्ति के अध्ययन के लिए किया जाता है। वास्तव में, सहसम्बन्ध विश्लेषण केवल तभी तर्कसंगत होता है, जब दोनों चर x तथा y यादृच्छिक चर हों, लेकिन समाश्रयण विश्लेषण में चर x यादृच्छिक या निश्चित हो सकता है। आपने यह भी सीखा कि समाश्रयण विश्लेषण के प्रयोग द्वारा x के दिए हुए मान के लिए y के संभाव्य मान की प्रागुक्ति की जा सकती है तथा x के दिए हुए मान पर y की उपसमष्टि (subpopulation) के माध्य का अनुमान प्राप्त किया जा सकता है।

द्विचर बारंबारता बंटन में जहां सम्बन्ध रैखिक नहीं होता, प्रागुक्ति के लिए सहसम्बन्ध अनुपात विधि उपयुक्त होती है।

10.8 शब्दावली

निर्धारण गुणांक : इसका मान r^2 अर्थात् सहसम्बंन्ध गुणांक के वर्ग, के बराबर होता है, आश्रित चर y में परिवर्तन की व्याख्या स्वतंत्र चर x के द्वारा की जाती है।

सहसम्बन्ध अनुपात : द्विचर बारंबारता बंटन में यह अरैखिक साहचर्य का परिमाप होता है। इसका मान एक में से, वर्गान्तर्गत (with in class) वर्गों का योग तथा कुल वर्गों के योग का अनुपात, घटाकर प्राप्त किया जाता है। यह x तथा y में सममित नहीं होता, इसलिए दो सहसम्बन्ध अनुपातों एक, x से y की प्रागुक्ति के लिए तथा दूसरा, y से x की प्रागुक्ति के लिए, का प्रयोग किया जाता है।

प्रसामान्य समीकरण : यह न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा व्युत्पन्न युगपत समीकरणों, उदाहरण के लिए बहुसमाश्रयण विश्लेषण में समीकरण, का एक समुच्चय होता है। ये निदर्श प्राचलों के अनुमान के लिए प्रयोग किए जाते हैं।

समाश्रयण : यह दो या अधिक चरों के बीच औसत सम्बन्ध का सांख्यिकीय परिमाप है, जो आंकड़ों की मूल इकाइयों में व्यक्त किया जाता है।

10.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Nagar, A.L. and R.K. Das, 1989. *Basic Statistics*, Oxford University Press : Delhi.

Goon. A.M., M.K. Gupta and B. Dasgupta, 1987. *Basic Statistics*, The World Press Pvt. Ltd. : Calcutta.

मेहता, बी.सी., 1986. *प्रारंभिक सांख्यिकी*, राजस्थान. हिन्दी ग्रन्थ अकादमी ; जयपुर. अध्याय 9.

10.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

1) $x = +0.98; y = 0.64 + 0.52; 8.2$
2) $x = 0.95y - 6.4; y = 0.95x + 7.25$
3) $x = 2.23y - 12.76; y = 0.39x + 7.22$
   (i) 30 (ii) 19
4) $y = 0.613x + 14.83; 1.360y - 5.2$
5) $y = 3.99 + 0.103x$; 8.11 tons

बोध प्रश्न 2

1) आप स्वयं आलेख पृष्ठ पर कीजिए।

2) i) $y = a + bx = 5.856 + 0.676x$
   ii) $x = \alpha + \beta y = 29.848 + 0.799\, y$
   iii) $r = 0.73$
   iv) $0.676 \times 0.799 = 0.54$

3) जब पारिवारिक आय 10000 रुपये है तो वस्त्रों पर व्यय = 1000 रुपए है। जब आय 1000 रुपए से कम या 100000 रुपए से अधिक हो समाश्रयण रेखा का लागू होना आवश्यक नहीं है। इन दोनों संख्याओं के बीच एक रुपया आय में वृद्धि होने पर वस्त्र पर व्यय 9 पैसे बढ़ जाता है।

10.11 पारिभाषिक शब्दावली

निकष	: Criterion
निदर्श	: Model
निर्धारण गुणांक	: Coefficient of determination
न्यूनतम वर्ग विधि	: Least square method
प्राग्वक्ता	: Predictor
प्राचल	: Parameter
प्रायिक	: Probable
बहिर्वेशन	: Extra-polation
ऋणेत्तर	: Non-negative
सममित	: Symmetrical
सहसम्बन्ध अनुपात	: Correlation ratio

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGEC-03
प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियां और सर्वेक्षण तकनीकें

खंड

6

सूचकांक तथा काल श्रेणी

ड 6 सूचकांक तथा काल श्रेणी

चय

खंड दो इकाइयों, सूचकांक तथा काल श्रेणी, में विभाजित है। सूचकांकों के द्वारा किसी विशेष समय, ान अथवा परिस्थिति में, मदों के किसी संचय अथवा समूह के आकार में हुए प्रतिशत परिवर्तन को व्यक्त या जाता है। काल श्रेणी विश्लेषण के द्वारा आर्थिक तथा व्यापारिक गतिविधियों एवं सूचकों में परिवर्तन ज्ञान प्राप्त होता है। इसके द्वारा उपलब्धियों के मूल्यांकन में सहायता मिलती है तथा यह पूर्वानुमानों के ए भी उपयुक्त होती है। अर्थव्यवस्था की विभिन्न गतिविधियों में संभावित परिवर्तनों के पूर्वानुमानों के ए भूत उपनतियों (trends) को भविष्य उपनतियों में प्रक्षेपित किया जाता है।

़काई 11 सूचकांक

़काई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

। इकाई का अध्ययन करने के बाद आपः

सूचकांक को परिभाषित करने की विभिन्न विधियां सीख सकेंगे; और

उनकी रचना तथा परिकलन कर सकेंगे।

1.1 प्रस्तावना

मान्य बोध के अनुसार "सूचक" शब्द का अर्थ संकेतक के अतिरिक्त कुछ और नहीं होता। "सूचकांक" द इसका बहुवचन रूप होता है, लेकिन इन सभी का एक ही अर्थ होता है।

; सूचकांक द्वारा दो या दो से अधिक अवधियों के बीच, दो स्थानों के बीच, या एक ही प्रकार के बहुत से ात्रित चरों के संवर्गों के बीच, परिवर्तन के आकार के सामान्य स्तर को व्यक्त किया जाता है। इस भाषा में "चर" शब्द का प्रयोग किसी भी मापनीय राशि के लिए किया गया है, जैसे वस्तुओं की कीमतें, ाएं आदि। उदाहरण के लिए, हमारी इच्छा 1980 तथा 1990 के बीच या बम्बई तथा कलकत्ता के ा किसी वस्तु के कीमत-स्तर की तुलना करना हो सकती है। मान लीजिए 1985 तथा 1990 में

चावल का उत्पादन क्रमशः 50,000 तथा 60,000 टन है। उत्पादन की तुलना के लिए 1985 को आधार वर्ष लिया जाता है, अर्थात् 1985 = 100।

1990 के लिए संगत संख्या $\frac{60,000}{50,000} \times 100 = 120$ होगी। यह सरलतम रूप में एक संख्या का सूचकांक है, जो कि एक तुलनात्मक संख्या है। लेकिन व्यवहार में, सूचकांक रचना में, प्रायः बहुत सी वस्तुएं ली जाती हैं।

कष्टदायक दशमलवों से बचने के लिए सूचकांक को, जोकि संख्याओं का अनुपात होता है, प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। अतः अगर किसी वस्तु की 1970 में लागत 45 पैसे है तथा 1974 में लागत एक रुपया पचास पैसे है तो इनका अनुपात $\frac{150}{45} =$ या 3.33 होगा। अगर इसके स्थान पर हम इस अनुपात को प्रतिशत में व्यक्त करें तो यह $\frac{150}{45} \times 100 = 333$ होगा। 333 को वर्ष 1970 पर आधारित, जोकि 100 है, 1974 का सूचकांक कहा जाता है।

11.2 सूचकांक रचना में चरण

व्यापारिक तथा आर्थिक परिस्थितियों के पूर्वानुमान, सामान्य सूचना प्रदान करने आदि के लिए बहुत-सी सरकारी तथा निजी संस्थाएं सूचकांक के परिकलन में कार्यरत हैं।

बहुत से सामान्य प्रकार के सूचकांकों द्वारा समयावधि में चर के परिवर्तन का माप किया जाता है, लेकिन इसका अर्थ यह नहीं है कि तुलना हमेशा समयावधि में ही की जाती है। सूचकांक की रचना किसी भी चर जैसे बौद्धिक स्तर, अभिरुचि, कार्य-कुशलता, उत्पादन आदि में परिवर्तन का अध्ययन करने के लिए भी की जा सकती है, लेकिन शायद कीमतों की काल श्रेणी के अध्ययन में इसका अधिकतम प्रयोग होता है। इसलिए परवर्ती सूचकांक विवेचन में वस्तुओं की कीमतों का विशेष उल्लेख रहेगा। इनकी रचना के सिद्धांतों की सामान्य प्रकृति होने के कारण इनको अन्य रुचि क्षेत्रों में भी प्रयुक्त किया जा सकता है।

कीमत सूचकांक के बहुत से प्रयोग होते हैं। **थोक मूल्य सूचकांक** मुद्रा के मूल्य में हो रही कमी की सूचना देता है। इसके अतिरिक्त, **उपभोक्ता कीमत सूचकांक** या **निर्वाह सूचकांक** हमें वास्तविक आय में परिवर्तन के बारे में जानकारी देता है। इसका मुख्य अनुप्रयोग मंहगाई भत्ते के परिकलन में, जिससे वास्तविक मजदूरी को कम होने से रोका जा सके, तथा दो भिन्न क्षेत्रों के बीच जीवन-स्तर की तुलना में होता है। इसके द्वारा मुद्रा की क्रय शक्ति में परिवर्तनों का माप भी किया जा सकता है। सामान्य कीमत सूचकांक का व्युत्क्रम आधार काल के संदर्भ में मुद्रा की क्रय शक्ति का सूचक है। उदाहरण के लिए, अगर मूल्य सूचकांक 150 हो गया है तो इसका अर्थ यह है कि मुद्रा की उतनी ही मात्रा अब आधार काल में खरीदी जाने वाली वस्तुओं की मात्रा का $\frac{100}{150} =$ 0.67 या 67 प्रतिशत ही खरीदा जा सकेगा।

11.2.1 आधार काल का चयन

चूंकि सूचकांक द्वारा तुलनात्मक परिवर्तनों को मापा जाता है, इसलिए इनको एक चयन की गई परिस्थिति (उदाहरण के लिए, समय, स्थान आदि) के साथ व्यक्त किया जाता है। इस परिस्थिति का मान 100 लिया जाता है। तथा इसको आधार या सूचकांक श्रेणी का प्रारंभ बिन्दु कहा जाता है। उदाहरण के लिए हम एक दिनांक को निश्चित करके सभी परिवर्तन उसके आधार पर मापते हैं। आधार कोई भी एक दिन हो सकता है, जैसा कि फुटकर कीमत सूचकांक में होता है, या फिर एक वर्ष का औसत या किसी समय अवधि का औसत हो सकता है।

आधार काल का चयन करते समय निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना आवश्यक है:

1) आधार का दिनांक सामान्य होना चाहिए ताकि चयन किए गए आंकड़े किसी अनियमित या असामान्य परिस्थिति जैसे प्राकृतिक संकट अथवा युद्ध आदि, से प्रभावित न हों। अधिक परिशुद्धता के लिए यह आवश्यक है कि विभिन्न तुलनाएं किसी स्थिर काल से ही की जानी चाहिए।

2) आधार काल बहुत पहले नहीं होना चाहिए क्योंकि समयावधि अधिक है तो व्यापार, आयात, उपभोक्ता अधिमान आदि के प्रतिरूप में अत्यधिक परिवर्तन हो सकता है, जिसके कारण की जाने वाली तुलना निरर्थक हो सकती है।
3) दस वर्ष से बीस वर्ष तक का अंतराल एक आधार दिनांक के लिए उपयुक्त हो सकता है तथा इससे अधिक अंतराल का सूचकांक उत्तरोत्तर पुराना हो जाता है। ऐसे सूचकांक की तुलना में, जिनमें समयावधि अधिक होती है, साधारण अल्पकालीन सूचकांक में अधिक परिशुद्धता होती है।
4) आर्थिक आंकड़ों से संबंधित सूचकांक में आधार काल का कोई आर्थिक अभिप्राय होना चाहिए।

11.2.2 उपयुक्त माध्य का चयन

सूचकांक मूलतः आंकड़ों की श्रेणी का औसत (माध्य) ज्ञात करने का परिणाम होता है (जैसे विभिन्न वस्तुओं के मूल्यानुपातों का माध्य)। श्रेणी का माध्य ज्ञात करने की बहुत विधियां हैं: माध्य (अर्थात् समांतर माध्य), बहुलक, माध्यिका, गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य। यहां प्रश्न यह है कि कौन-से माध्य का सूचकांक में प्रयोग किया जाए। बहुलक में सरलता का गुण है लेकिन यह अनिश्चित हो सकता है। माध्यिका की भी यही सीमाएं हैं। इसके अतिरिक्त, इनमें से कोई भी बंटन के प्रत्येक छोर पर विद्यमान मद के आकार से, चाहे वह कितना ही महत्वपूर्ण क्यों न हो, प्रभावित नहीं होता।

हरात्मक माध्य का सूचकांक में व्यावहारिक अनुप्रयोग बहुत ही कम है। परिणामतः बहुलक, माध्यिका तथा हरात्मक माध्य प्रायः सूचकाक के परिकलन में प्रयोग नहीं किए जाते। अतः सूचकांक परिकलन में प्रायः समांतर माध्य का ही प्रयोग किया जाता है। परिकलन में थोड़ी कठिनाई के बावजूद कभी-कभी गुणोत्तर माध्य का भी प्रयोग किया जाता है।

11.2.3 मदों तथा उनकी संख्याओं का चयन

सूचकांक रचना में सम्मिलित की जाने वाली वस्तुओं की किस्म तथा उनकी संख्या, विचाराधीन प्रश्न-विशेष, मितव्यय तथा परिकलन की सुविधा आदि पर आधारित होती है। थोक मूल्य सूचकांक के लिए वस्तुओं की संख्या जितना संभव हो, अधिक होनी चाहिए। इसके विपरीत, अगर सूचकांक का उद्देश्य समयावधि में हुए परिवर्तनों का सूचक न होकर भविष्य के लिए कीमत परिवर्तन का पुर्वानुमान लगाना है, तो मदों की थोड़ी संख्या भी पर्याप्त हो सकती है। फिर भी यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि मदों की थोड़ी संख्या के कारण सूचकांक, सामान्य स्तर का अप्रतिनिधिक न हो जाए। अत्यधिक दीर्घकाल में वस्तुओं के निश्चित समुच्चय का प्रयोग आवश्यक नहीं होता, क्योंकि समय के साथ कुछ वस्तुओं का महत्व कम हो सकता है तथा कुछ नई वस्तुओं के महत्व में वृद्धि हो सकती है। सामान्यतः वस्तुएं कीमत प्रणाली के विभिन्न तत्वों के प्रति संवेदी (Sensitive) एवं उनकी प्रतिनिधिक होनी चाहिए।

11.2.4 आंकड़ों का संकलन

विभिन्न बाज़ारों में कीमतें प्रायः भिन्न होती हैं, इसलिए उनका संकलन प्रतिनिधिक बाज़ार से नियमित अंतराल के बाद करते रहना चाहिए उन दुकानों का, जिनसे उपभोक्ता प्रायः वस्तुएं खरीदते हैं, चयन करना वांछनीय होता है। प्रत्येक संघटक वस्तु के निवेदित भाव की परिशुद्धता से, सूचकांक की विश्वसनीयता अत्यधिक प्रभावित होती है।

11.3 सूचकांक रचना की विधि

सूचकांक परिकलन की मुख्य दो विधियां हैं:
1) मूल्यानुपातों द्वारा; तथा
2) समूहों द्वारा।

इन विधियों के विवरण निम्नलिखित हैं:
1) सापेक्ष विधि
   क) सापेक्षों का सरल माध्य

2) **सामूहिक विधि**

   क) सरल सामूहिक सूत्र

   ख) भारित सामूहिक सूत्र

      i) लास्पियर का सूचकांक

      ii) पाशे का सूचकांक

      iii) एजवर्थ-मार्शल का सूचकांक

      iv) फिशर का आदर्श सूचकांक

11.3.1 मूल्यानुपात

अगर हम बहुत-सी समरूप वस्तुओं की, एक दिए हुए दिनांक पर तथा बाद के एक दिनांक पर कीमतें लिखित करें तो प्रत्येक वस्तु की कीमत में परिवर्तन को मात्र नई कीमत के प्रतिशत के रूप में, जिसकी तुलना पुरानी कीमत से की गई है, व्यक्त किया जा सकता है। इसके द्वारा हमें मूल्यानुपात प्राप्त होता है और अगर हमें विभिन्न वस्तुओं के भार पता हो तो अगले चरण में मूल्यानुपातों को उनके भार से गुणा किया जाएगा। अंत में, अगर हम भारित मूल्यानुपातों को जोड़कर माध्य का परिकलन करें तो हमें सूचकांक प्राप्त होगा।

यह मानना अवास्तविक है कि प्रत्येक वस्तु का उपभोग समान रहा है। इसलिए अधिकतर सूचकांकों में प्रत्येक वस्तु के वास्तविक उपभोग के अनुपात का ध्यान रखा जाता है। इस प्रकार, भारित करने की विधि, श्रेणी में प्रत्येक मद के तुलनात्मक महत्व को दर्शाती है।

मान लीजिए, k वस्तुओं की आधार वर्ष में कीमतें
$P_{o1}, P_{o2}, \ldots\ldots P_{ok}$ हैं तथा वर्तमान वर्ष में कीमतें
$P_{n1}, P_{n2}, \ldots\ldots P_{nk}$ हैं तो

i वीं वस्तु का मूल्यानुपात $\frac{P_{ni}}{P_{oi}}$ होगा, यहां पर $i = 1,2,\ldots k$ तथा अधोलिखित 0 आधार वर्ष का तथा n वर्तमान वर्ष का संकेत करते हैं।

क) **सापेक्षों का सरल माध्य**

अगर मूल्यानुपातों का समांतर माध्य लिया जाए तो हमें निम्नलिखित सूचकांक प्राप्त होगा:

$$\text{सूचकांक} = 100 \times \frac{\sum_{i=1}^{k} \frac{P_{ni}}{P_{oi}}}{K} \qquad \ldots\ldots (1)$$

सरल रूप में इसको हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं:

$$= 100\,\Sigma\,\frac{P_n/P_o}{K} \qquad \ldots\ldots (1')$$

ख) सापेक्षों का भारित माध्य

प्रयोग किए जाने वाले भारों में सबसे उपयुक्त भार वस्तु की भौतिक मात्राएं हैं। इनका संकेत W_i से किया जाता है, जहां i से अर्थ i वीं वस्तु से है। हम आधार वर्ष में वस्तुओं की मात्राओं को भार के रूप में प्रयोग कर सकते हैं या समय के साथ इनमें परिवर्तन भी कर सकते हैं, अर्थात् वर्तमान वर्ष की मात्राओं को भार के रूप में प्रयोग कर सकते हैं। प्रयोग किए जाने वाले भार किसी विवेकपूर्ण विधि द्वारा प्राप्त स्थिर घटकों का समुच्चय भी हो सकते हैं।

आधार वर्ष के भारों के प्रयोग द्वारा मूल्यानुपातों के भारित समांतर माध्य ज्ञात करने पर निम्न सूचकांक प्राप्त होता है:

$$\text{सूचकांक} = \frac{\Sigma \frac{P_n}{P_o} \times W_o}{\Sigma W_o} \times 100 \qquad \ldots\ldots (2)$$

यहां पर सरलता के लिए अनुलग्न i को नहीं लिखा गया है। यहां पर यह ध्यान दें कि आधार वर्ष के भारों के प्रयोग से निरंतरता तो सुरक्षित रहती है, लेकिन समय परिवर्तन के दौरान आधुनिकता का ह्रास होता है।

उदाहरण 11.1

निम्नलिखित सारणी में प्रति रेल-यात्रा का औसत भाड़ा प्रस्तुत है। 1948 के औसत को 100 मानकर तथा आधार वर्ष के भारों का प्रयोग कर विभिन्न परिकलन किए गए हैं:

टिकट की श्रेणी	1984 में यात्राओं की संख्या 10 लाख में	भाड़ा (रुपयों में) 1948	1969	मूल्यानुपात	भारित मूल्यानुपात
	(W_o)	(P_o)	(P_n)	$(\frac{P_n}{P_o}\times 100)$	$(\frac{P_n}{P_o}\times 100)\times W_o$
पूर्ण भाड़ा	23	12	60	500	11,500
भ्रमण	25	6	30	500	12,500
उत्सव	20	4	15	375	7,500
अवधि टिकट	32	5	14	280	8,960
योग	100			1655	40,460

सूत्र (2) के प्रयोग द्वारा

1969 का सूचकांक $= \frac{40,460}{100} = 404.60$ है।

सूचकांक द्वारा प्रदर्शित अधिक वृद्धि का मुख्य कारण 21 वर्षों (1948-1969) में कीमतों के सामान्य स्तर में वृद्धि है।

अगर वर्तमान भार प्रयोग करें तो

$$\text{सूचकांक} = \frac{\Sigma \frac{P_n}{P_o}\times W_n}{\Sigma W_n}\times 100 \quad \text{होगा} \qquad \ldots\ldots (3)$$

यहाँ W_n, वर्तमान वर्ष के भारों को सूचित करता है।

उदाहरण 11.2

निम्नलिखित सारणी में प्रति रेल-यात्रा का औसत भाड़ा प्रस्तुत है। 1969 की औसत को 100 मानकर तथा वर्तमान वर्ष के भारों को प्रयोग कर विभिन्न परिकलन किए गए हैं:

टिकट की श्रेणी	1969 में यात्राओं की संख्या 10 लाख में	भाड़ा (रुपयों में) 1948	1969	मूल्यानुपात	भारित मूल्यानुपात
	(W_n)	(P_o)	(P_n)	$(\frac{P_n}{P_o}\times 100)$	$(\frac{P_n}{P_o}\times 100)\times W_n$
पूर्ण भाड़ा	25	12	60	500	12,500
भ्रमण	26	6	30	500	13,500
उत्सव	9	4	15	375	3,375
अवधि टिकट	27	5	14	280	7,560
योग	87			1655	36,435

सूत्र (3) के प्रयोग द्वारा 1969 का :

सूचकांक $=\frac{36,435}{87}=418.8$ है।

यहां पर आधार वर्ष तथा वर्तमान वर्ष के भारों की तुलना की जा सकती है। आधार वर्ष के भारों के प्रयोग से सूचकांक 404.6 है तथा वर्तमान वर्ष के भारों के प्रयोग से सूचकांक 418.8 है। इनमें अंतर 1948 के बाद हुए यात्रा के प्रतिरूप में परिवर्तन को व्यक्त करता है।

11.3.2 सामूहिक विधि

इस विधि में, वर्तमान वर्ष या दिए हुए वर्ष में सभी वस्तुओं के समूह (कुल योग) को आधार वर्ष के इसी प्रकार के समूह के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। अतः

सरल सामूहिक सूचकांक

सूचकांक $=\frac{\text{वर्तमान वर्ष में कीमतों का योग}}{\text{आधार वर्ष में कीमतों का योग}}\times 100$

$$=\frac{P_{n1}+P_{n2}+\ldots\ldots+P_{nk}}{P_{o1}+P_{o2}+\ldots\ldots+P_{ok}}\times 100$$

$$=\frac{\Sigma P_{ni}}{\Sigma P_{oi}}\times 100=\frac{\Sigma P_n}{\Sigma P_o}\times 100 \qquad \ldots\ldots(4)$$

यहां पर योग ($\sum_{i=1}^{k}$) चुनी हुई k वस्तुओं पर है।

भारित सामूहिक सूचकांक

सामान्य सूचकांक $=\frac{P_{n1}W_1+P_{n2}W_2+\ldots\ldots+P_{nk}W_k}{P_{o1}W_1+P_{o2}W_2+\ldots\ldots+P_{ok}W_k}\times 100$

$$=\frac{\Sigma P_{ni}W_i}{\Sigma P_{oi}W_i}\times 100$$

या सिर्फ $=\frac{\Sigma P_nW}{\Sigma P_oW}\times 100 \qquad \ldots\ldots(5)$

यहाँ पर प्रयोग किए गए भार खरीदी गई या बेची गई वास्तविक मात्राएं होनी चाहिए और इनमें तब तक परिवर्तन नहीं किया जाना चाहिए जब तक सूचकांक में संशोधन की आवश्यकता न हो।

भारित सामूहिक सूचकांक के बहुत से सूत्र हैं, लेकिन यहां पर प्रयोग किए जाने वाले भार की प्रकृति के अनुसार, प्रायः प्रयोग किए जाने वाले सूचकांकों का ही विवेचन किया जाएगा।

क) **लास्पियर का सूचकांक**

अगर हम सामान्य भारित सामूहिक सूत्र (5) में आधार वर्ष की मात्राओं (q_o) को भार के रूप में प्रयोग करें, तो हमें लास्पियर का सूत्र (L) प्राप्त होगा।

$$L=\frac{\Sigma P_nq_o}{\Sigma P_oq_o}\times 100 \qquad \ldots\ldots(6)$$

(यहां पर $W=q_o$)

यहां पर यह ध्यान दिया जा सकता है कि इस सूचकांक में स्थिर आधार भारों का प्रयोग किया गया है तथा यह मूल्यानुपातों के भारित समांतर माध्य (2) के तुल्य (equivalent) है।

अतः (6) को हम इस प्रकार भी लिख सकते हैं:

$$L = \frac{\Sigma \frac{P_n}{P_o} \times P_o q_o}{\Sigma P_o q_o} \times 100$$

ख) **पाशे का सूचकांक**

अगर हम सामान्य भारित सामूहिक सूत्र (5) में वर्तमान वर्ष की मात्राओं q_n को भार के रूप में प्रयोग करें, तो हमें पाशे का सूत्र (P) प्राप्त होगाः

$$P = \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_n} \times 100 \qquad \text{..... (7)}$$

(यहां पर $W = q_n$)

यहां पर q_n (जोकि वास्तव में $q_{n1}, q_{n2} .... q_{nk}$ हैं), वर्तमान वर्ष में खरीदी या बेची गई, वास्तविक मात्राएं हैं।

ग) **फिशर का आदर्श सूचकांक**

यह सूचकांक लास्पियर तथा पाशे सूत्रों द्वारा प्राप्त सूचकांकों का गुणोत्तर माध्य (अर्थात् गुणनफल का वर्गमूल) होता है। इस सूचकांक की कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएं हैं (जिनका विवेचन बाद में किया जाएगा) तथा इसको फिशर का आदर्श सूचकांक कहते हैं।

$$F = \sqrt{L \times P} = \sqrt{\frac{\Sigma P_n q_o}{\Sigma P_o q_o} \times \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_n q_o}} \times 100 \qquad \text{..... (8)}$$

घ) **एजवर्थ-मार्शल का सूचकांक**

इस सूत्र में भार, आधार वर्ष तथा दिए हुए वर्ष की मात्राओं का माध्य होता है, अर्थात् $W = \frac{1}{2}(q_o + q_n)$, इस प्रकार एजवर्थ-मार्शल का सूत्र इस प्रकार हैः

$$I = \frac{\Sigma P_n \left(\frac{q_o + q_n}{2}\right)}{\Sigma P_o \left(\frac{q_o + q_n}{2}\right)} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma P_n (q_o + q_n)}{\Sigma P_o (q_o + q_n)} \times 100 \qquad \text{..... (9)}$$

11.4 मात्रा या आकार सूचकांक

अगर हम कीमत सूचकांक में P के स्थान पर q तथा q के स्थान पर P का प्रयोग करें तो हमें मात्रा या आकार सूचकांक प्राप्त हो सकता है, जोकि वस्तुओं की मात्राओं को मापने तथा उनकी तुलना को व्यक्त करता है।

1) मात्रानुपात (quantity relative) $= \frac{q_n}{q_o} \times 100$

2) मात्रानुपातों का समांतर माध्य $= \frac{\Sigma q_n / q_o}{k} \times 100$

3) मात्रानुपातों के भारित माध्य सूचकांक

क) आधार वर्ष के भार $= \frac{\Sigma \frac{q_n}{q_o} \times P_o}{\Sigma P_o} \times 100$

ख) वर्तमान वर्ष के भार $= \frac{\Sigma \frac{q_n}{q_o} \times P_n}{\Sigma P_n} \times 100$

4) सरल सामूहिक मात्रा-सूचकांक $= \frac{\Sigma q_n}{\Sigma q_o} \times 100$

5) लास्पियर का मात्रा-सूचकांक $= \frac{\Sigma q_n P_o}{\Sigma q_o P_o} \times 100$

6) पाशे का मात्रा-सूचकांक $= \frac{\Sigma q_n P_n}{\Sigma q_o P_n} \times 100$

7) फिशर का आदर्श सूचकांक $= \sqrt{\frac{\Sigma q_n P_o}{\Sigma q_o P_o} \times \frac{\Sigma q_n P_n}{\Sigma q_n P_o}} \times 100$

8) एजवर्थ-मार्शल का सूचकांक $= \frac{\Sigma q_n (P_o+P_n)}{\Sigma q_o ((P_o+P_n)} \times 100$

लास्पियर, पाशे, एजवर्थ-मार्शल तथा फिशर के सूचकांक के परिकलन की व्याख्या

मद	1970 (आधार वर्ष)		1980 (वर्तमान वर्ष)					
	कीमत	मात्रा	कीमत	मात्रा				
	P_o	q_o	P_n	q_n	P_oq_o	P_nq_o	P_oq_n	P_nq_n
A	20	7	25	9	140	175	180	225
B	42	6	40	8	252	240	336	320
C	30	17	25	4	510	425	120	100
D	8	15	14	10	120	210	80	140
E	10	8	13	5	80	104	50	65
	योग				1102	1154	766	850

1) लास्पियर का कीमत सूचकांक $= \frac{\Sigma P_n q_o}{\Sigma P_o q_o} \times 100$

$$= \frac{1154}{1102} \times 100 = 104.72 = 105$$

2) पाशे का कीमत सूचकांक $= \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_n} \times 100$

$$= \frac{850}{766} \times 100 = 110.97 = 111$$

3) एजवर्थ-मार्शल का सूचकांक $= \frac{\Sigma P_n q_o + \Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_o + \Sigma P_o q_n} \times 100$

$$= \frac{1154 + 850}{1102 + 766} \times 100$$

$$= \frac{2004}{1868} \times 100 = 107.28 = 107$$

4) फिशर का आदर्श सूचकांक $= \sqrt{\frac{\Sigma P_n q_o}{\Sigma P_o q_o} \times \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_n}} \times 100$

$$= \sqrt{(1) \times (2)}$$

$$= \sqrt{(104.72 \times 110.97)}$$

$$= 107.80 = 108$$

बोध प्रश्न 1

1) सूचकांक द्वारा क्या मापा जाता है?

....

....

....

....

....

....

2) **सूचकांक रचना में, विशेष रूप से कीमत सूचकांक के संदर्भ में, आने वाली विभिन्न कठिनाइयों का विवेचन कीजिए।**

....

....

....

....

....

....

3) 1983 तथा 1984 के लिए 6 भिन्न वस्तुओं की कीमतें निम्नलिखित हैं। (क) सामूहिक विधि, (ख) मूल्यानुपातों के माध्य की विधि, दोनों समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य प्रयोग करके, सूचकांक परिकलित कीजिए।

वस्तुएं	1983 में कीमत (रुपयों में)	1984 में कीमत (रुपयों में)
A	40	50
B	50	60
C	20	30
D	50	70
E	80	80
F	100	110

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4) निम्नलिखित मदों के समूह द्वारा फिशर का आदर्श सूचकांक परिकलित कीजिए।

मद संख्या	आधार वर्ष		वर्तमान वर्ष	
	कीमत (रुपयों में)	मात्रा (किलो में)	कीमत (रुपयों में)	मात्रा (किलो में)
1	4	1.0	3	4
2	8	1.5	7	5

....

....

....

....

....

....

....

5) निम्नलिखित आंकड़ों से लास्पियर तथा पाशे के सूचकांक परिकलित कीजिए:

	आधार वर्ष		वर्तमान वर्ष	
	मात्रा	प्रति पाउंड कीमत	मात्रा	प्रति पाउंड कीमत
रोटी	6.0	40 पैसे	7.0	30 पैसे
मांस	4.0	45 पैसे	5.0	50 पैसे
चाय	0.5	90 पैसे	1.5	40 पैसे

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

11.5 विभिन्न सामूहिक मापों के गुण

विभिन्न उद्देश्यों के लिए भिन्न सूचकांकों की रचना की जाती है। इसलिए किसी सूचकांक की उपयुक्तता, उद्देश्य की प्रकृति पर निर्भर होती है।

लास्पियर सूचकांक के परिकलन में आधार काल की मात्राओं का भार के रूप में प्रयोग किया जाता है, जिनको प्राप्त करना कठिन नहीं होता, तथा हर (denominator) को एक बार ही परिकलित करने की आवश्यकता होती है लेकिन इस सूचकांक में कीमत परिवर्तन के अनुरूप मात्रा या उत्पादन में परिवर्तन का प्रयोग नहीं होता, इसलिए इसमें कीमत वृद्धि को वास्तविक से अधिक व्यक्त करने की प्रवृत्ति विद्यमान होती है। इसके विपरीत, पाशे के सूचकांक में वर्तमान वर्ष की मात्राएं भार के रूप में प्रयोग होती हैं, जिनमें प्रत्येक वर्ष में परिवर्तन होते रहते हैं। इसके अतिरिक्त, चूँकि इसमें वर्तमान वर्ष के भार प्रयोग किए जाते हैं, इसलिए इसमें कीमत वृद्धि को वास्तविक से कम व्यक्त करने की प्रवृत्ति विद्यमान होती है।

चूँकि स्थिर भारों का प्रयोग सुविधाजनक होता है, इसलिए संभवतः लास्पियर सूचकांक का प्रयोग सबसे अधिक होता है। लेकिन समय गुजरने के साथ भार पुराने हो जाते हैं। उदाहरण के लिए, 1970 में

कलकत्ता में टेलीविज़नों की संख्या शून्य थी। 1990 में, टेलीविज़नों की संख्या रेफ्रीजरेटरों की संख्या से भी अधिक हो गई। पाशे के सूचकांक में वर्तमान भारों का प्रयोग किया जाता है, जोकि बेहतर होते हैं। लेकिन, चूंकि उत्पादित या उपभोग की गई वस्तु के वर्तमान वर्ष के आंकड़े सुविधापूर्वक उपलब्ध नहीं होते, इसलिए लास्पियर सूचकांक अधिक उपयोगी होता है।

11.6 सूचकांक के परीक्षण

एक श्रेष्ठ सूचकांक को, जिसके द्वारा एक अवधि से दूसरी अवधि में किसी तथ्य के बारे में परिवर्तन को मापा जाता है, कुछ परीक्षणों के आधार पर यथेष्ट होना चाहिए। सूचकांक के तीन मुख्य परीक्षण होते हैं: (1) कालोत्क्रमण परीक्षण; (2) उपादान उत्क्रमण परीक्षण; तथा; (3) शृंखलिक परीक्षण।

11.6.1 कालोत्क्रमण परीक्षण

इस परीक्षण के अनुसार, अगर सूचकांक में कीमत (या मात्रा) के समय-अनुलग्नों (जैसे o तथा n) को विपरीत कर दिया जाए तो प्राप्त परिणाम, सूचकांक का व्युत्क्रम होना चाहिए।

सांकेतिक रूप में, $I_{on} \times I_{no} = 1$

जहां पर I_{on} = काल 'n' का सूचकांक जिसका आधार काल 'o' है।

I_{no} = काल 'o' का सूचकांक जिसका आधार काल 'n' है।

अगर 1975 से 1982 की अवधि में कीमत में परिवर्तन 4 रुपये से 16 रुपये होता है तो 1982 की कीमत, 1975 की कीमत का 400 प्रतिशत है. तथा 1975 की कीमत, 1982 की कीमत का 25 प्रतिशत है। इन दोनों मूल्यानुपातों का गुणनफल 4 × .25 = 1 है। कालोत्क्रमण परीक्षण इस अनुरूपता पर आधारित है कि जो सिद्धांत एक वस्तु के लिए ठीक है, वही समूह के सूचकांक के लिए भी होने चाहिए।

सूचकांक रचना की पांच विधियां कालोत्क्रमण परीक्षण को संतुष्ट करती हैं। ये इस प्रकार हैं:
1) मूल्यानुपातों का सरल गुणोत्तर माध्य
2) स्थिर भारों के समूह (aggregates)
3) एजवर्थ-मार्शल सूत्र
4) मूल्यानुपातों का भारित गुणोत्तर माध्य, जिसमें स्थिर भार प्रयोग किए गए हों
5) फिशर का आदर्श सूचकांक

आइए फिशर का आदर्श सूचकांक

$$F = \sqrt{\frac{\Sigma P_n q_o}{\Sigma P_o q_o} \times \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_n}}$$ लें

अगर समय अनुलग्नों को विपरीत कर दिया जाए तो

$$F' = \sqrt{\frac{\Sigma P_o q_n}{\Sigma P_n q_n} \times \frac{\Sigma P_o q_o}{\Sigma P_n q_n}}$$ प्राप्त होता है,

क्योंकि $F \times F' = 1$, इसलिए यह परीक्षण संतुष्ट होता है।

11.6.2 उपादान उत्क्रमण परीक्षण

प्रायः प्रयोग किए जाने वाले संकेतों की सहायता से "मूल्य सूचकांक" का सूत्र इस प्रकार लिखा जाता है:

$$I_v = \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_o}$$

अब, उदाहरण के लिए, लास्पियर के कीमत तथा मात्रा सूचकांक क्रमशः

$$I_p = \frac{\Sigma P_n q_o}{\Sigma P_o q_o} \quad \text{तथा}$$

$$I_q = \frac{\Sigma q_n P_o}{\Sigma q_o P_o} \quad \text{हैं।}$$

उपादान उत्क्रमण परीक्षण के अनुसार

$$I_p \times I_q = I_v$$

लेकिन लास्पियर सूचकांक के लिए

$$I_p \cdot I_q = \frac{(\Sigma P_n q_o)(\Sigma q_n P_o)}{(\Sigma P_o q_o)^2} \neq I_v$$

इसलिए यह सूत्र इस परीक्षण को संतुष्ट नहीं करता। इसके विपरीत, फिशर का आदर्श सूचकांक इस परीक्षण को संतुष्ट करता है, जैसा कि निम्नलिखित में प्रदर्शित किया गया है:

$$I_p = \sqrt{\frac{\Sigma P_n q_o}{\Sigma P_o q_o} \cdot \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_n}}$$

$$I_q = \sqrt{\frac{\Sigma q_n P_o}{\Sigma q_o P_o} \cdot \frac{\Sigma q_n P_n}{\Sigma q_o P_n}}$$

$$I_p \cdot I_q = \sqrt{\frac{\cancel{\Sigma P_n q_o}}{\Sigma p_o q_o} \cdot \frac{\Sigma P_n q_n}{\cancel{\Sigma p_o q_n}} \cdot \frac{\cancel{\Sigma q_n P_o}}{\Sigma q_o P_o} \cdot \frac{\Sigma q_n P_n}{\cancel{\Sigma q_o P_n}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\Sigma P_n q_n)^2}{(\Sigma P_o q_o)^2}} = \frac{\Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_o} = I_v$$

इसे और अच्छी तरह समझने के लिए हम निम्नलिखित उदाहरण पर ध्यान देते हैं।

अगर किसी वस्तु की प्रति इकाई कीमत तथा मात्रा में 1970 से 1990 की अवधि में क्रमशः 16 रुपये से 32 रुपये तथा 100 इकाई से 200 इकाई परिवर्तन हुआ हो तब 1990 में कीमत तथा मात्रा 200 प्रतिशत होगी अर्थात् 1970 की कीमत तथा मात्रा की दुगुनी होगी। 1970 में कुल मूल्य (कीमत × मात्रा) 1600 रुपये होगा तथा 1990 में कुल मूल्य 6400 रुपये होगा, इस प्रकार इनका अनुपात $\frac{6400}{1600} = 4.00$ है। अतः यह जांच की जा सकती है कि $2.00 \times 2.00 = 4.00$। अतः कीमत अनुपात तथा मात्रा अनुपात का गुणनफल कुल मूल्य अनुपात के बराबर है।

इस परीक्षण को केवल फिशर का आदर्श सूचकांक ही संतुष्ट करता है।

उदाहरण 11.3

निम्नलिखित आंकड़ों द्वारा यह प्रदर्शित किया गया है कि फिशर का आदर्श सूचकांक उपादान उत्क्रमण परीक्षण को संतुष्ट करता है

मद	प्रति इकाई कीमत (रु. में)		इकाइयों की संख्या					
	1983 (आधार वर्ष)	1989 (वर्तमान वर्ष)	1983 (आधार वर्ष)	1989 (वर्तमान वर्ष)				
	P_o	P_n	q_o	q_n	P_oq_o	P_oq_n	P_nq_o	P_nq_n
I	6	10	50	56	300	336	500	560
II	2	2	100	120	200	240	200	240
III	4	6	60	60	240	240	360	360
IV	10	12	30	24	300	240	360	288
V	8	12	40	36	320	288	480	432
योग					1360	1344	1900	1880

कीमत अनुपात, $I_P = \sqrt{\frac{\Sigma P_nq_o}{\Sigma P_oq_o} \times \frac{\Sigma P_nq_n}{\Sigma P_oq_n}} = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344}}$

मात्रा अनुपात, $I_q = \sqrt{\frac{\Sigma q_nP_o}{\Sigma q_oP_o} \times \frac{\Sigma q_nP_n}{\Sigma q_oP_n}} = \sqrt{\frac{1344}{1360} \times \frac{1880}{1900}}$

मूल्य अनुपात, $I_v = \frac{\Sigma P_nq_n}{\Sigma P_oq_o} = \frac{1880}{1360}$

$$I_P \cdot I_q = \sqrt{\frac{1900}{1360} \times \frac{1880}{1344} \times \frac{1344}{1360} \times \frac{1880}{1900}} = \sqrt{\frac{1880}{1360} \times \frac{1880}{1360}}$$

$$= \frac{1880}{1360}$$

$= I_v$, जोकि यह दर्शाता है कि परीक्षण संतुष्ट हो जाता है।

11.6.3 शृंखला सूचकांक तथा शृंखलिक परीक्षण

सूचकांक की रचना में दो प्रकार के आधार कालों का प्रयोग किया जाता है, जोकि इस प्रकार हैं: (क) स्थिर आधार विधि, (ख) शृंखला आधार विधि। प्रायः प्रयोग किए जाने वाले सूचकांक में स्थिर आधार का प्रयोग किया जाता है। यह विधि, किसी वर्ष में हुई कीमत या मात्रा में परिवर्तन का ध्यान नहीं रख सकती। इस प्रकार के सूचकांक में, बाद की किसी तिथि में महत्वपूर्ण होने वाली वस्तुओं को सम्मिलित करना या समय के साथ ह्रासमान महत्व वाली वस्तुओं को सूचकांक से निकालना, कठिन होता है। शृंखला सूचकांक द्वारा इन कठिनाइयों को दूर किया जा सकता है।

एक उपयुक्त सूचकांक सूत्र (मान लीजिए लास्पियर) के प्रयोग द्वारा सर्वप्रथम शृंखलित आपेक्षिक जोकि निम्नलिखित में परिभाषित है, परिकलित किया जाता है:

शृंखलिक आपेक्षिक = ऐसा सूचकांक जिसमें पिछला काल आधार के रूप में प्रयोग किया गया हो।

विभिन्न शृंखलिक आपेक्षिक को उत्तरोत्तर गुणा करने पर शृंखला सूचकांक प्राप्त होता है। अतः काल n का शृंखलिक सूचकांक I_{on} जिसका आधार काल 0 है इस प्रकार ज्ञात किया जाता है:

$I_{01} = I_{01}$

$I_{02} = I_{01} \times I_{12}$

$I_{03} = I_{01} \times I_{12} \times I_{23} = I_{02} \times I_{23}$

....

$I_{0n} = I_{01} \times I_{12} \times \ldots\ldots \times I_{(n-2)(n-1)} \times I_{(n-1)n}$

उदाहरण 11.4

निम्नलिखित आंकड़ों द्वारा शृंखला सूचकांक के परिकलन की व्याख्या की गई है:

वर्ष	शृंखलिक आपेक्षिक	शृंखला सूचकांक (आधार वर्ष, 1970 = 100)
1970	100	100
1971	$I_{01} = 80$	$100 \times 80/100 = 80$
1972	$I_{12} = 120$	$80 \times 120/100 = 96$
1973	$I_{23} = 75$	$96 \times 75/100 = 72$

अतः 1971 से 1973 तक के शृंखला सूचकांक, जिनका आधार वर्ष 1970 है, क्रमशः 80, 96 और 72 है।

शृंखलिक परीक्षण: यह परीक्षण कालोत्क्रमण परीक्षण का बहुत से वर्षों पर विस्तार होता है। इसके अनुसार, 1973 वर्ष के लिए उपरोक्त परिकलित शृंखला सूचकांक, जिसका आधार वर्ष 1970 है, प्रत्यक्ष परिकलित सूचकांक, जिसका स्थिर आधार वर्ष 1970 है, के बराबर होना चाहिए।

संकेतन द्वारा,

$I_{01} \times I_{12} \times \ldots\ldots \times I_{(n-1)n} \times I_{no} = 1$ (यहां यह ध्यान दीजिए कि एक $I_{on} = I_{no}$)

एक स्थिर भार के समूह सूचकांक पर ध्यान दीज़िए :

$$\frac{\Sigma P_1 q}{\Sigma P_0 q}$$

हम परीक्षण की व्याख्या इस प्रकार कर सकते हैं:

आधार वर्ष 0 लेकर हम उपरोक्त सूत्र का 1 से 3 वर्ष के लिए अनुरेखण (trace) कर सकते हैं:

$$\frac{\Sigma P_1 q}{\Sigma P_0 q} \times \frac{\Sigma P_2 q}{\Sigma P_1 q} \times \frac{\Sigma P_3 q}{\Sigma P_2 q} \times \frac{\Sigma P_0 q}{\Sigma P_3 q} = 1$$

शृंखलिक सूत्र को संतुष्ट करने वाले सूत्र निम्नलिखित हैं:

1) **सरल सामूहिक सूचकांक**
2) **मूल्यानुपातों का सरल गुणोत्तर माध्य**
3) **भारित सामूहिक सूचकांक (जैसे स्थिर भार का लास्पियर सूचकांक)**
4) **मूल्यानुपातों का भारित गुणोत्तर माध्य जिसमें स्थिर भार प्रयोग किए गए हों।**

इस परीक्षण को फिशर का आदर्श सूचकांक संतुष्ट नहीं करता। यह प्रमाणित हो चुका है कि कोई भी सूचकांक दोनों परीक्षणों, उपादान उत्क्रमण तथा शृंखलिक परीक्षणों को एक साथ संतुष्ट नहीं कर सकता।

बोध प्रश्न 2

1) निम्नलिखित सारणी में 1980-84 वर्षों में A,B तथा C वस्तुओं की औसत थोक बिक्री कीमतें दी हुई हैं। वर्ष 1980 की कीमतों को आधार मानकर शृंखला सूचकांक का परिकलन कीजिए।

वस्तुएं	औसत थोक बिक्री कीमतें (रुपयों में)				
	1980	1981	1982	1983	1984
A	20	16	28	35	21
B	25	30	24	36	45
C	20	25	30	24	30

....

....

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित आंकड़ों से फिशर के आदर्श सूचकांक का परिकलन कीजिए तथा यह दिखाइए कि इसके द्वारा उपादान उत्क्रमण तथा कालोत्क्रमण परीक्षण संतुष्ट होता है।

वस्तुएं	आधार वर्ष		वर्तमान वर्ष	
	प्रति इकाई कीमत	व्यय (रुपयों में)	प्रति इकाई कीमत	व्यय (रुपयों में)
A	2	40	5	75
B	4	16	8	40
C	1	10	2	24
D	5	25	10	60

....

....

....

....

....

....

....

11.7 निर्वाह सूचकांक या उपभोक्ता-कीमत सूचकांक

यह लोगों के एक सजातीय (Homogeneous) समूह, जैसे औद्योगिक श्रमिकों के परिवारों द्वारा जीवन-निर्वाह के लिए उपयोग की गई वस्तुओं तथा सेवाओं की कीमत में परिवर्तन का सूचकांक है।

निर्वाह सूचकांक रचना में सम्मिलित की जाने वाली मुख्य उपभोग वस्तुएं निम्नलिखित होती हैं।

1) खाद्य सामग्री
2) ईंधन तथा प्रकाश
3) वस्त्र

4) मकान का किराया

5) विविध

नित उपभोग के आंकड़े उस जनसंख्या वर्ग में, जिसके लिए सूचकांक की रचना की जानी है, परिवार निर्वाह सर्वेक्षण (Family Living Survey) द्वारा प्राप्त किए जाते हैं। इसके बाद कीमतों के आंकड़े, उन विभिन्न फुटकर बाज़ारों से, जिनसे ये उपभोक्ता वस्तुएं खरीदते हैं, प्राप्त किए जाते हैं। यहां यह ध्यान देना आवश्यक है कि ऊपर लिखे हुए प्रत्येक व्यापक वर्ग में बहुत से छोटे वर्ग होते हैं। जैसे खाद्य सामग्री में अनाज, दालें, तेल, मांस, मछली, अंडा, मसाले, सब्ज़ी, फल, शर्बत आदि सम्मिलित होते हैं। इसके अतिरिक्त विविध वर्ग में चिकित्सा, शिक्षा, परिवहन, मनोरंजन, उपहार तथा इसी प्रकार की बहुत-सी मदें सम्मिलित होती हैं। जब एक ही वस्तु की एक से अधिक निवेदित दरें (Price quotations) एकत्रित की गई हों तो इनका माध्य ले लिया जाता है। सभी वर्गों के लिए अलग-अलग सूचकांक की रचना, कीमत वर्ग का भारित माध्य लेकर, की जाती है। यहां पर प्रयोग किए जाने वाले भार एक औसत परिवार द्वारा उपभोग की गई वस्तुओं पर व्यय के अनुपात में होते हैं। तत्पश्चात समग्र सूचकांक (निर्वाह सूचकांक), इस वर्ग सूचकांक के भारित माध्य का परिकलन करके, प्राप्त किया जाता है। यहां पर भी प्रयोग किए जाने वाले भार विभिन्न वर्गों में किए गए व्यय के अनुपात में होते हैं (जैसे खाद्य सामग्री पर 50 प्रतिशत आदि)।

लास्पियर सूत्र के प्रयोग द्वारा,

$$\text{वर्ग सूचकांक } I = \frac{\Sigma w\left(\frac{P_n}{P_o} \times 100\right)}{\Sigma w}$$

$$\text{जहां पर } w = \frac{P_o q_o}{\Sigma P_o q_o}$$

$$\text{और अंत में, निर्वाह सूचकांक } C_{01} = \frac{\Sigma IW}{\Sigma W}$$

जहां पर W वर्ग सूचकांक का भार है।

निर्वाह सूचकांक के महत्वपूर्ण व्यावहारिक अर्थ हैं और इसका विस्तृत रूप में सार्वजनिक प्रयोग किया जाता है। इसका सबसे महत्वपूर्ण उपयोग मज़दूरी नियमन में होता है। कर्मचारियों का मंहगाई-भत्ता मुख्यतः इसी सूचकांक के आधार पर निर्धारित किया जाता है। जब मजदूरी या आय को इसी सूचकांक से भाग किया जाता है तो आय पर कीमत वृद्धि या कमी के प्रभाव का विलोपन हो जाता है। इसको हम अवस्फीति की क्रिया कहते हैं, जोकि वास्तविक मज़दूरी या आय ज्ञात करने में प्रयोग की जाती है। जैसा कि पहले जिक्र किया जा चुका है, निर्वाह सूचकांक के व्युत्क्रम द्वारा मुद्रा की क्रय शक्ति को मापा जाता है।

उदाहरण 11.5

खाद्य सामग्री के सूचकांक की रचना

वस्तुएं	कीमत वर्तमान काल (P_{1i})	कीमत आधार काल (P_{oi})	P_{1i}/P_{oi}	भार w_i (आनुपातिक व्यय)	$w_i \times \frac{P_{1i}}{P_{oi}}$
चावल	50	40	1.25	30	37.50
गेहूं	45	30	1.50	20	30.00
दालें	60	40	1.50	10	15.00
चीनी	40	20	2.00	5	10.00
तेल	75	60	1.25	15	18.75
आलू	60	50	1.20	15	18.00
मछली	200	150	1.33	5	6.65
योग				100	135.90

$$\text{सूचकांक (खाद्य सामग्री)} = \frac{\Sigma w_i \times \frac{P_{1i}}{P_{oi}}}{\Sigma w_i} \times 100$$

$$= \frac{135.90}{100} \times 100 = 135.9 = 136$$

उदाहरण 11.6

अंतिम निर्वाह सूचकांक की रचना

मद	भार (आनुपातिक व्यय)	सूचकांक	भार × सूचकांक
खाद्य सामग्री	45	130	5,850
वस्त्र	15	140	2,100
आवास	20	170	3,400
ईंधन	5	110	550
विविध	15	125	1,875
योग	100		13,775

निवार्ह सूचकांक C_{01} = 13,775/100 = 137.75

बोध प्रश्न 3

1) निम्नलिखित आंकड़ों से निर्वाह सूचकांक का परिकलन कीजिएः

मद	दिए हुए वर्ष में उपभोग की वार्षिक मात्रा	प्रति इकाई कीमत (रुपयों में)	
		आधार वर्ष	दिया हुआ वर्ष
चावल	2.5 क्विंटल × 12	12	25
दालें	3 किलो × 12	4	6
तेल	2 किलो × 12	1.5	2.2
वस्त्र	6 मीटर × 12	0.75	1.0
आवास	—	20 रुपये मासिक	33 रुपये मासिक
विविध	—	10 रुपये मासिक	15 रुपये मासिक

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) अगर विभिन्न प्रकार के व्यापार के तुलनात्मक मूल्यों का लेखा-जोखा किया जाए तो अक्तूबर, 1979 से अक्तूबर, 1980 की अवधि में व्यापार के आकार में प्रतिशत परिवर्तन की सूचक एक संख्या का परिकलन कीजिए।

व्यापार की	टन ('000 रुपये)		प्राप्तियां ('000 रुपये)
किस्म	अक्तूबर, 1979	अक्तूबर, 1980	अक्तूबर, 1979
सामान	1246	1206	776
खनिज	1125	981	252
ईंधन	4794	4229	562

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

3) निम्नलिखित आंकड़ों से 1980 के लिए पाशे सूचकांक का परिकलन कीजिए, जिसका आधार 1970 हो।

वस्तु	इकाई	प्रति इकाई कीमत (रु. में)		विक्रित मात्रा	
		1970	1980	1970	1980
A	किलो	4	5	95	120
B	किलो	60	70	118	130
C	किलो	35	40	50	70

....

....

....

4) निम्नलिखित आंकड़ों से 1980 के लिए लास्पियर सूचकांक का परिकलन कीजिए, जिसका आधार वर्ष 1978 हो।

मद	कीमत (रुपयों में)		कुल मुल्य ('000 रुपयों में)
	1978	1980	1978
A	12.50	14.00	112.50
B	10.50	12.00	126.00
C	15.00	14.00	105.00
D	9.40	11.20	47.00

5) निम्नलिखित आंकड़ों से मार्शल-एजवर्थ सूचकांक का परिकलन कीजिए:

वस्तुएं	1970		1977	
	कीमत	मात्रा	कीमत	मात्रा
चावल	9.3	100	4.5	90
गेहूं	6.4			10
ज्वार	5.1	5	2.7	3

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

11.8 हल किए हुए उदाहरण

विषय के बारे में और जानकारी देने के लिए हम इस भाग में कुछ हल हुए उदाहरण देंगे।

उदाहरण क

कीमत सूचकांक की रचना

मद	इकाई	प्रति इकाई कीमत (रुपयों में)		
		आधार वर्ष P_o 1970	वर्तमान वर्ष P_n 1980	$(P_n/P_o) \times 100$
चावल	क्विंटल	100.00	220.00	220
गेहूं	किलो	1.50	2.40	160
मछली	किलो	15.00	28.00	187
रोटी	पाउंड	0.60	1.35	225
दूध	लीटर	2.50	4.00	160
योग		119.60	255.75	952

क) **सामूहिक विधि**

वर्ष 1980 का सूचकांक (आधार वर्ष 1970 = 100)

$$= \frac{\text{1980 में प्रति इकाई कीमत}}{\text{1970 में प्रति इकाई कीमत}} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma \frac{P_n}{K}}{\Sigma \frac{P_o}{K}} \times 100 = \frac{\Sigma P_n}{\Sigma P_o} \times 100 = \frac{255.75}{119.60} \times 100 = 214$$

ख) **मूल्यानुपात विधि**

वर्ष 1980 का सूचकांक (आधार वर्ष 1970 = 100)

$$= \frac{\frac{\Sigma P_n}{\Sigma P_o} \times 100}{K} = 952/5 = 190$$

उदाहरण ख

निम्नलिखित सूचना द्वारा सूचकांक ज्ञात कीजिए:

क) भारित सामूहिक सूत्र के प्रयोग द्वारा

ख) मूल्यानुपात के भारित समांतर माध्य द्वारा

वस्तु	इकाई	प्रति इकाई कीमत (रुपयों में)		भार
		आधार वर्ष	वर्तमान वर्ष	
A	क्विंटल	85	115	19
B	किलो	15	20	25
C	दर्जन	45	61	40
D	लीटर	55	100	20
E	पाउंड	17	23	21

सूचकांक का परिकलन

वस्तु	आधार कीमत (P_o)	वर्तमान कीमत (P_n)	भार (w)	P_ow	P_nw	मूल्यानुपात $I = \frac{P_n}{P_o} \times 100$	I_w
A	85	115	19	1615	2185	135.3	2570.7
B	15	20	25	327	500	133.3	3332.5
C	45	61	40	1800	2440	135.6	5424.0
D	55	100	20	1100	2000	181.8	3636.0
E	17	23	21	357	483	135.3	2841.3
योग			125	5247	7608		17804.5

क) भारित सामूहिक सूचकांक $= \frac{\Sigma P_nw}{\Sigma P_ow} \times 100 = \frac{7608}{5247} \times 100$

$= 145.0$

ख) मूल्यानुपातों का भारित समांतर माध्य $= \frac{\Sigma Iw}{\Sigma w}$

$= \frac{17804.5}{125} = 142.4$

उदाहरण ग

निम्नलिखित आंकड़ों में कुछ उपभोग वस्तुओं की कीमतें तथा उनसे संबंधित विभिन्न वस्तुओं के भार दिए हुए हैं। वर्ष 1970 को आधार मानकर (= 100) (क) सरल माध्य के प्रयोग से, तथा (ख) मूल्यानुपातों के भारित माध्य के प्रयोग से, 1971 के सूचकांक परिकलित कीजिए:

वस्तुएं	इकाई	कीमत (रुपयों में)		भार
		1970	1971	
गेहूं	किलो	0.50	0.75	2
दूध	लीटर	0.60	0.75	5
अण्डा	दर्जन	2.00	2.40	4
चीनी	किलो	1.80	2.10	8
जूते	जोड़ा	8.00	10.00	1

हल

मूल्यानुपात सूचकांक का परिकलन

वस्तुएं	P_o	P_n	मूल्यानुपात $I = \frac{P_n}{P_o} \times 100$	भार (w)	Iw
गेहूं	0.50	0.75	150	2	300
दूध	0.60	0.75	125	5	625
अण्डा	2.00	2.40	120	4	480
चीनी	1.80	2.10	117	8	936
जूते	8.00	10.00	125	1	125
योग			637	20	2466

मूल्यानुपातों के सरल माध्य का सूचकांक $= \dfrac{\Sigma \frac{P_n}{P_o} \times 100}{K} = \dfrac{637}{5}$

$= 127.4$

मूल्यानुपातों के भारित माध्य का सूचकांक $= \dfrac{\Sigma Iw}{\Sigma w} = \dfrac{2466}{20}$

$= 123.3$

उदाहरण घ

निम्नलिखित आंकड़ों के आधार पर पांचों वर्गों का संयुक्त थोक मूल्य सूचकांक परिकलित कीजिए:

वर्ग	भार	27.9.69 को समाप्त होने वाला सप्ताह का सूचकांक (आधार : 1952-53 = 100)
खाद्य सामग्री	50	241
शराब तथा तम्बाकू	2	221
ईंधन, ऊर्जा, प्रकाश तथा स्नेहक (Lubricants)	3	204
औद्योगिक कच्चा माल	16	256
निर्मित वस्तुएं	29	179

हल

हम सामान्य सूचकांक $\frac{\Sigma Iw}{\Sigma w}$ परिकलित करेंगे, जहां पर I = वर्ग सूचकांक तथा w = वर्ग का भार

वर्ग	भार (w)	वर्ग सूचकांक (I)	(Iw)
खाद्य सामग्री	50	241	12,050
शराब और तम्बाकू	2	221	442
ईंधन, ऊर्जा, प्रकाश तथा स्नेहक	3	204	612
औद्योगिक कच्चा माल	16	256	4,098
निर्मित वस्तुएं	29	179	5,191
योग	100		22,391

थोक मूल्य सूचकांक $= \dfrac{22391}{100} = 223.91$

उदाहरण च

निम्नलिखित में, 4 वस्तुओं का वार्षिक उत्पादन (10 लाख टन में) दिया हुआ है:

वस्तुएं	उत्पादन			भार
	1950	1954	1955	
A	160	200	216	20
B	24	42	45	30
C	50	72	68	13
D	120	168	156	17

वर्ष 1950 को आधार लेकर, दो वर्षों 1954 तथा 1955 के लिए (क) मूल्यानुपातों का सरल समांतर माध्य तथा (ख) मूल्यानुपातों का भारित समांतर माध्य प्रयोग करके, मात्रा सूचकांक परिकलित कीजिए।

हल

1950 को आधार लेकर 1954 के लिए मात्रानुपातः

$I = \frac{q_n}{q_o} \times 100 = \frac{q_{54}}{q_{50}} \times 100$

वस्तु A = 200/160 × 100 = 125

वस्तु B = 42/24 × 100 = 175

वस्तु C = 72/50 × 100 = 144

वस्तु D = 168/120 × 100 = 140

1950 को आधार लेकर 1955 के लिए मात्रानुपात :

$I = \frac{q_{55}}{q_{50}} \times 100$

वस्तु A = 216/160 × 100 = 135

वस्तु B = 45/24 × 100 = 187.5

वस्तु C = 68/50 × 100 = 136

वस्तु D = 156/120 × 100 = 130

वस्तु	मात्रानुपात (I)		भार	I_w	
	1954	1955	(w)	1954	1955
A	125	135	20	2500	2700
B	175	187.5	30	5250	5625
C	144	136	13	1872	1768
D	140	130	17	2380	2210
कुल	584	588.5	80	12002	12303

क) मात्रानुपातों का सरल समांतर माध्य $= \frac{\Sigma \frac{q_n}{q_o} \times 100}{K}$

(जहां पर K = वस्तुओं की संख्या)

1954 का सूचकांक = 584/4 = 146

1955 का सूचकांक = 588.5/4 = 147

ख) मात्रानुपातों का भारित समांतर माध्य $= \frac{\Sigma Iw}{\Sigma w}$

1954 का सूचकांक =12002/80 =150

1955 का सूचकांक =12303/80 =154

उदाहरण छ

निम्नलिखित कीमत (P) तथा मात्रा (q) के आंकड़ों से फिशर का आदर्श सूचकांक परिकलित कीजिए:

वस्तु	1970 (आधार वर्ष)		1978 (वर्तमान वर्ष)	
	कीमत	मात्रा	कीमत	मात्रा
A	12	10	17	10
B	14	9	16	11
C	11	12	13	10

हल:

फिशर के आदर्श सूचकांक का परिकलन:

वस्तु	P_o	q_o	P_n	q_n	P_oq_o	P_nq_o	P_oq_n	P_nq_n
A	12	10	17	10	120	170	120	170
B	14	9	16	11	126	144	154	176
C	11	12	13	10	132	156	110	130
योग					378	470	384	476

लास्पियर का कीमत सूचकांक $= \frac{\Sigma P_nq_o}{\Sigma P_oq_o} \times 100$

$$= \frac{476}{378} \times 100 = 124$$

पाशे का कीमत सूचकांक $= \frac{\Sigma P_nq_n}{\Sigma P_oq_n} \times 100$

$$= \frac{476}{384} \times 100 = 124$$

फिशर का आदर्श सूचकांक $= \sqrt{L \times P} = \sqrt{124 \times 124} = 124$

11.9 सारांश

इस इकाई में आपका परिचय सूचकांक की रचना तथा व्याख्या में प्रयोग आने वाली अवधारणाओं तथा विधियों से कराया गया है। आपको यह दिखाया गया है कि कीमत तथा मात्रा सूचकांक के परिकलन में लास्पियर, पाशे तथा फिशर के सूत्रों का किस प्रकार प्रयोग किया जाता है। आपको यह भी ज्ञात हुआ है कि उपभोक्ता कीमत या निर्वाह लागत में परिवर्तनों को कैसे मापा जाता है।

11.10 शब्दावली

आधार वर्ष : यह विचाराधीन चर की दृष्टि से अधिमानतः सामान्य वर्ष होता है। आधार वर्ष का सूचकांक हमेशा 100 लिया जाता है। वर्तमान वर्ष के सूचकांक को आधार वर्ष के सूचकांक प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

शृंखला सूचकांक : वर्तमान वर्ष के सूचकांक को इससे पहले वर्ष के सूचकांक के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

सूचकांक : यह सिर्फ एक संख्या है, जो आधार वर्ष के मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त की जाती है। सूचकांक द्वारा एक समयावधि में; एक वस्तुओं के वर्ग के विचाराधीन चर (कीमत, मात्रा बिक्री मूल्य, रूप, निर्यात आदि) में परिवर्तन को मापा जाता है। यह सम्मिलित की गई वस्तुओं की कीमतों (या कोई और गुण) का एक विशेष भारित माध्य होता है।

मूल्यानुपात : एक सूचकांक की रचना में किसी वस्तु का मूल्यानुपात वर्तमान वर्ष की कीमत तथा आधार वर्ष की कीमत का अनुपात होता है।

मात्रा सूचकांक : इस सूचकांक में विचाराधीन चर वस्तुओं की मात्रा होती है।

11.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Nagar, A.L. and R.K. Das; 1989. *Basic Statistics,* Oxford University Press: Delhi

Goon, A.M., M.K. Gupta and B.Dasgupta; 1987. *Basic Statistics,* The World Press Pvt. Ltd.: Calcutta.

मेहता बी.सी.; 1986. *प्रारंभिक सांख्यिकी,* राजस्थान हिन्दी ग्रंथ अकादमी: जयपुर, अध्याय 12.

11.12 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) तथा 2) आप स्वयं कीजिए

3) सरल सामूहिक विधि $P_{01} = 117.14$

मूल्यानुपात माध्य विधि $P_{01} = 122.9$ (समांतर माध्य)

$P_{01} = 121.7$ (गुणोत्तर माध्य)

4) $P_{01} = 84.2$

5) लास्पियर का सूचकांक $P_{01} = 86.02$

पाशे का सूचकांक $P_{01} = 81.25$

बोध प्रश्न 2

1) 108.33, 135.41, 160.23, 165.56

2) आप स्वयं कीजिए।

बोध प्रश्न 3

1) 170.74

2) हम अक्तूबर, 1979 को आधार लेकर अक्तूबर, 1980 के लिए मात्रानुपात ज्ञात करते हैं अपेक्षित सूचकांक को मात्रानुपातों का भारित समांतर माध्य परिकलित करके प्राप्त किया जा सकता है। यहां प्रयोग किए जाने वाले भार 1979 की प्राप्तियां होंगी।

व्यापार की किस्म	q_o	q_n	भार (w)	मात्रानुपात $(q_n/q_o) \times 100$	$(5) \times (4)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
सामान	1246	1206	776	97	75272
खनिज	1125	981	252	87	21924
ईंधन	4794	4229	562	88	49456
योग			1590		146652

मात्रा सूचकांक

$$\frac{\Sigma \frac{q_n}{q_o} \times 100 \times w}{\Sigma w} = \frac{146652}{1590} = 92$$

3) पाशे के कीमत सूचकांक का परिकलन

वस्तुएं	P_o	P_n	q_o	q_n	P_oq_n	P_nq_n
A	4	5	95	120	480	600
B	60	70	118	130	7800	9100
C	35	40	50	70	2450	2800
योग					10730	12500

पाशे का कीमत सूचकांक

$$\frac{\Sigma P_nq_n}{\Sigma P_oq_n} \times 100 = \frac{12500}{10730} = 116$$

4) हमें आधार कीमत (P_o) वर्तमान कीमत (P_n) तथा आधार वर्ष में मूल्य P_oq_o दिया हुआ है। आधार वर्ष की मात्रा ज्ञात करने के लिए इस संबंध में प्रयोग कर सकते हैं:

$$q_o = \frac{P_oq_o}{q_o}$$

P_o, P_n तथा q_o के प्रयोग द्वारा हम लास्पियर सूचकांक इस सूत्र से ज्ञात कर सकते हैं:

$$L = \frac{\Sigma P_nq_o}{\Sigma P_oq_o} \times 100$$

लास्पियर के कीमत सूचकांक का परिकलन

मद	P_o	P_n	कुल मूल्य (1978) P_oq_o	$q_o = \frac{P_oq_o}{P_o}$	P_nq_o
A	12.50	14.00	112.50	9	126.00
B	10.50	12.00	126.00	12	144.00
C	15.00	14.00	105.00	7	98.00
D	9.40	11.20	47.00	5	56.00
योग			390.50		424.00

लास्पियर का कीमत सूचकांक

$$\frac{\Sigma P_n q_o}{\Sigma P_o q_o} \times 100 = \frac{424.00}{390.50} \times 100 = 109$$

5) मार्शल-एजवर्थ सूचकांक

$$= \frac{\Sigma P_n (q_o + q_n)}{\Sigma P_o (q_o + q_o)} \times 100$$

$$= \frac{\Sigma P_n q_o + \Sigma P_n q_n}{\Sigma P_o q_o + \Sigma P_o q_o} \times 100$$

हम 1970 को आधार तथा 1977 को वर्तमान वर्ष लेते हैं:

वस्तुएं	P_o	q_o	P_n	q_n	$P_o q_o$	$P_o q_n$	$P_n q_o$	$P_n q_n$
चावल	9.3	100	4.5	90	930	837	450	405
गेहूं	6.4	11	3.7	10	70.4	64	40.7	37
ज्वार	5.1	5	2.7	3	25.5	15.3	13.5	8.1
योग					1025.9	916.3	504.2	450.1

अपेक्षिक सूचकांक $= \frac{504.2 + 450.1}{1025.9 + 916.3} \times 100 = 49.1$

11.13 पारिभाषिक शब्दावली

आधार काल	base period
उपभोक्ता कीमत सूचकांक	consumer price index
उपादान उत्क्रमण परीक्षण	factor reversal test
काल श्रेणी	time series
कालोत्क्रमण परीक्षण	time reversal test
निर्वाह सूचकांक	cost of living index
मूल्यानुपात	price relative
वर्तमान काल	current period
सामूहिक विधि	aggregative method
सूचकांक	index number
शृंखला सूचकांक	chain index
शृंखलिक आपेक्षिक	link relative
शृंखलिक परीक्षण	circular test
मूल्य सूचकांक	value index

इकाई 12 काल श्रेणी तथा इसके घटक

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आपको निम्नलिखित के बारे में जानकारी प्राप्त हो सकेगी :

- काल श्रेणी आंकड़ों के लिए एक उपनति रेखा की रचना ;
- गतिमान माध्यों का परिकलन ;
- मौसमी विचरण के माप का परिकलन ; तथा
- चक्रीय विचरण के माप का परिकलन ।

12.1 प्रस्तावना

एक काल श्रेणी, चर के प्रेक्षणों का एक समुच्चय होता है, जोकि उत्तरोत्तर समय बिन्दुओं पर मापा जाता है । प्रायः चर के मान समान "समय अंतरालों" पर दर्ज किए जाते हैं – वार्षिक, त्रैमासिक, मासिक आदि । सामान्यतः काल श्रेणी आर्थिक आंकड़ों के संदर्भ में होती है लेकिन इसका अनुप्रयोग और क्षेत्रों में भी जहां मात्रात्मक आंकड़े एकत्रित किए गए हों, ठीक इसी प्रकार से होता है । राष्ट्रीय आय, कृषि आय

तथा कृषि उत्पादन की काल श्रेणी, वार्षिक प्रेक्षणों पर आधारित होती है। विभिन्न वर्षों में एक फसल का उत्पादन, विभिन्न समय बिन्दुओं पर एक देश की जनसंख्या, वर्ष के विभिन्न मौसमों में एक विभागीय भंडार की बिक्री, चाय का त्रैमासिक निर्यात आदि, काल श्रेणी के कुछ और उदाहरण हैं। इस प्रकार के आंकड़ों में "समय" एक चर होता है, जिसको t से सूचित किया जाता है तथा दूसरे चर को जोकि समय पर आश्रित होता है (जैसे उत्पादन, जनसंख्या, बिक्री, निर्यात) Y_t से निरूपित किया जाता है। इस इकाई में विकसित की जाने वाली प्रणाली (methodology) की सहायता से हम इस प्रकार की कुछ काल श्रेणियों का विश्लेषण करेंगे।

12.2 काल श्रेणी आंकड़ों के अध्ययन की समस्याएं तथा उद्देश्य

काल श्रेणी आंकड़ों के द्वारा यह पता चलता है कि सामान्यतः, समय में परिवर्तन के साथ, आश्रित चर (Y_t) के प्रेक्षित मानों में भी परिवर्तन होता है। ये परिवर्तन बहुत-सी शक्तियों, जैसे जनसंख्या में वृद्धि, उत्पादन की तकनीक में परिवर्तन, लोगों की रुचि तथा आदतों में परिवर्तन, जलवायु में परिवर्तन आदि की "पारस्परिक क्रिया" (Interaction) के कारण होते हैं। काल श्रेणी आंकड़ों के अध्ययन का एक मुख्य उद्देश्य विभिन्न घटकों के प्रभावों को पृथक करना तथा इनका माप करना होता है।

इस विश्लेषण द्वारा हमें भूतकाल के व्यवहार तथा भविष्य के लिए पूर्वानुमान प्राप्त करने में सहायता मिलती है। इस प्रकार का पूर्वानुमान एक अर्थशास्त्री या एक व्यापारी (जोकि बिक्री से बहुत पहले अपने उत्पादन की योजना बना सकता है) के लिए बहुत ही महत्वपूर्ण होता है।

12.2.1 काल श्रेणी के घटक

जैसा कि पहले जिक्र किया जा चुका है, काल श्रेणी आंकड़ों में समय के साथ परिवर्तन होता है और इन्हें आलेखी निरूपण द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। किसी अपवादिक परिस्थिति में भी यह होता है कि समय के साथ श्रेणी, प्रेक्षण काल में, कोई परिवर्तन प्रदर्शित न करे। फिर भी, ये सभी परिवर्तन पूर्ण रूप से संयोग या यादृच्छिक नहीं होते तथा कम से कम इनके एक अंश की व्याख्या तो की जा सकती है। इनमें से कुछ परिवर्तन आवर्ती (Periodic) प्रकृति के होते हैं तथा दूसरे कुछ लम्बी वृद्धि या पतन को प्रदर्शित करते हैं। इनमें कुछ अननुमेय (unpredictable) परिवर्तन भी मिले होते हैं, जो यादृच्छिक प्रकृति के होते हैं। यहाँ यह बात भी ध्यान रखनी चाहिए कि सभी श्रेणियों में सभी प्रकार के परिवर्तनों का विद्यमान होना आवश्यक नहीं होता। यहां हम यह मानते हैं कि सामान्य श्रेणी के चार महत्वपूर्ण घटक होते हैं :

1) दीर्घकालिक उपनति (T)
2) मौसमी उच्चावचन (S)
3) चक्रीय उच्चावचन (C)
4) अनियमित या यादृच्छिक विचरण (I)

चिरप्रतिष्ठित उपगमन (classical approach) में हम यह मानते हैं कि प्रेक्षित मान Y_t, ऊपर दिए गए घटकों का गुणनफल हो सकता है, अर्थात् $Y_t = T \times S \times C \times I$ (गुणनात्मक प्रतिरूप) या घटकों का योग हो सकता है
अर्थात्, $Y_t = T+S+C+I$ (योज्य प्रतिरूप)
चाहे योज्य प्रतिरूप में परिकलन सुविधाजनक होते हैं, फिर भी काल श्रेणी के विश्लेषण में गुणात्मक प्रतिरूप का अत्यधिक प्रयोग किया गया है।

क) **दीर्घकालिक उपनति**

दीर्घकालिक उपनति से हमारा आशय श्रेणी के एक समयावधि के प्रेक्षणों में लगातार, नियमित तथा दीर्घकालिक परिवर्तन से होता है। कुछ श्रेणियां समय के साथ ऊर्ध्वमुखी तथा कुछ अधोमुखी उपनति को प्रदर्शित कर सकती है तथा कुछ अन्य लगभग स्थिर रह सकती हैं। श्रेणी की ऊर्ध्वमुखी उपनति, जनसंख्या वृद्धि, उत्पादन की तकनीक में सुधार आदि उपादानों के कारण हो सकती है। उदाहरण के लिए, बहुत से उद्योगों के विकास का प्रतिरूप देश की जनसंख्या वृद्धि का अनुगमन करता है। इसके अतिरिक्त, तकनीकी

विकास के कारण बहुत-सी आर्थिक काल श्रेणियों में ऊर्ध्वमुखी विचरण हो सकते हैं। लेकिन सभी काल श्रेणियां वृद्धि को प्रदर्शित नहीं करती। कुछ श्रेणियाँ अधोमुखी भी हो सकती हैं तथा कुछ अन्य उच्चावचनों (fluctuations) को प्रदर्शित कर सकती हैं। संभवतः किसी देश की अशोधित मृत्यु दर (crude death rate) की काल श्रेणी अधोमुखी उपनति को प्रदर्शित करेगी।

ख) **मौसमी उच्चावचन**

अधिकतर काल श्रेणियों के आलेखों से पता चलता है कि दीर्घकालिक उपनति पर बहुत अधिक संख्या में उच्चावचन अध्यारोपित (superimposed) होते हैं। मौसमी विचरणों से अर्थ, श्रेणी के उन आवर्ती विचरणों से है जिनकी अवधि एक वर्ष से अधिक नहीं होती। इस प्रकार का विचरण एक नियमित समय अंतराल या अवधि के पश्चात् अपने को दोहराता है। उदाहरण के लिए, शीत पेय की बिक्री में गर्मियों में वृद्धि तथा सर्दियों में कमी होती है, वस्त्रों की बिक्री वर्ष के कुछ दिनों में अधिकतम होती है जैसे मान लीजिए मई के महीने में या कुछ त्यौहारों के दिनों में, कार्यालय जाने के घंटों के समय बसों में यात्रियों की संख्या अधिकतम होती है, एक सप्ताह के कुछ दिनों में, पुस्तकालय से उधार ली गई पुस्तकों की संख्या अधिवक्तम होती है इत्यादि। इस प्रकार के उच्चावचन में योगदान देने वाले उपादान विभिन्न मौसमों में जलवायु परिवर्तन, विभिन्न समयों में लोगों के रीति-रिवाज तथा आदतें आदि होते हैं।

ग) **चक्रीय उच्चावचन**

चक्रिय उच्चावचन से अर्थ काल श्रेणी की दौलनी (oscillatory) गति से होता है, यहाँ दोलन की अवधि को चक्र कहते हैं, तथा यह एक वर्ष से अधिक होती है। इन उच्चावचनों में वे उपादान सम्मिलित होते हैं जो बारी-बारी से विस्तार एंव संकुचन को जन्म देते हैं। इस प्रकार के लक्षण बहुत-सी आर्थिक तथा व्यापारिक श्रेणियों में होते हैं। कभी-कभी ये उच्चावचन अपने आकार, आयाम (amplitude) तथा दिशा की दृष्टि से बहुत ही अनियमित होते हैं। लेकिन, ये जिस परिघटना को प्रतिबिंबित करते हैं — मंदी (depression), समुत्थान (recovery), तेजी (boom) तथा निपात (collapse) — ये वस्तुतः सभी व्यापारिक तथा आर्थिक आंकड़ों की काल श्रेणियों में देखने को मिलती हैं।

घ) **अनियमित विचरण**

इस वर्ग में वह सभी उपादान सम्मिलित किए जाते हैं, जिनका कहीं और वर्गीकरण नहीं हुआ है। अतः ऐसे उपादान जैसे काम रोको, चुनाव, युद्ध, आग लगना आदि, एक काल श्रेणी विशेष को प्रभावित कर सकते हैं। इस विचरण वर्ग में वे सभी प्रकार के विचरण सम्मिलित किए जाते हैं जो दीर्घकालिक उपनति, मौसमी तथा चक्रीय उच्चावचनों में सम्मिलित नहीं हुए हैं। दुर्भाग्यवश, इस प्रकार के उपादानों का प्रायः चक्रीय उपादानों से भेद करना कठिन होता है। अतः कुछ विवेचनों में चक्रीय तथा अनियमित घटकों को एक साथ मिला दिया जाता है।

12.2.2 काल श्रेणी की रचना — एक उदाहरण

व्याख्या के लिए हम गुणात्मक प्रतिरूप की एक काल श्रेणी तैयार करेंगे। सारणी 12.1 में एक काल्पनिक काल श्रेणी के उपनति, मौसमी तथा चक्रीय-अनियमित घटक दिखाए गए हैं।

सारणी 12.1: काल्पनिक काल श्रेणी तथा इसके घटक, त्रैमासिक

वर्ष	त्रैमास	श्रेणी	घटक		
			उपनति	मौसमी	चक्रीय-अनियमित
		Y_t	(T)	(100 S)	(100 CI)
1	1	79	80	120	82
	2	58	85	80	85
	3	84	90	92	102
	4	107	95	108	105
2	1	130	100	120	108
	2	93	105	80	132
	3	121	110	92	120
	4	161	115	108	130

3	1	216	120	120	150
	2	132	125	80	132
	3	150	130	93	125
	4	163	135	108	112
4	1	176	140	120	105
	2	112	145	80	97
	3	128	150	93	93
	4	142	155	108	85
5	1	134	160	120	70
	2	86	165	80	65
	3	94	170	92	60
	4	104	175	108	55

संकेत : गुणात्मक प्रतिरूप के अनुसार, $Y_t = T \times S \times C \times I$
अतः पहले वर्ष के पहले त्रैमास के लिए

$$79 = 80 \times \frac{120}{100} \times \frac{82}{100}$$

इस प्रकार चौथे वर्ष के दूसरे त्रैमास के लिए

$$112 = 145 \times \frac{80}{100} \times \frac{97}{100}$$

अतः प्रत्येक त्रैमासिक संख्या (Y_t), दीर्घकालिक उपनति (t), मौसमी सूचकांक (S) तथा चक्रीय-अनियमित घटक (CI) का गुणनफल है। इस प्रकार की कृत्रिम रचना एक वास्तविक काल श्रेणी जैसी लगती है तथा काल श्रेणी आंकड़ों के विश्लेषण के आधार के रूप में इस प्रतिरूप के प्रयोग को प्रेरित करती है।

12.3 उपनति के माप

उपनति माप की दो महत्वपूर्ण विधियां गतिमान माध्य विधि तथा बहुपद समंजन विधि हैं। गतिमान माध्य विधि में माध्य-कलन-विधि (Process of averaging) द्वारा उच्चावचनों का मसृणीकरण (Smoothing) करके दीर्घकालिक उपनति प्राप्त की जाती है। दूसरी विधि में, मूल चर या रूपांतरित चर के लिए उपयुक्त कोटि के बहुपद का चुनाव करके, न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा इसके स्थिरांक ज्ञात किए जाते हैं। बहुपद की कोटि का चुनाव आंकड़ों का आलेख पृष्ठ पर अंकित करके किया जाता है जहां पर विभिन्न मापक्रम, अर्ध-लघुगणकीय या दोहरे लघुगणकीय मापक्रम प्रयोग किए जा सकते हैं। काल श्रेणी के व्यवहार के अध्ययन तथा भविष्य के लिए पूर्वानुमान के लिए उपनति का माप आवश्यक होता है।

12.3.1 गतिमान माध्य विधि

यह उच्चावचनों के मसृणीकरण की सरल विधि है, जिसमें श्रेणी के अतिव्यापी (overlapping) कालों के बहुत से माध्य परिकलित किए जाते हैं। सर्वप्रथम, गतिमान औसत की उपयुक्त अवधि का चुनाव किया जाता है। अगर चयन की गई अवधि 3 वर्ष है तो 3 लगातार मानों जोकि श्रेणी के अतिव्यापी कालों को सम्मिलित करते हों, के माध्यों की श्रेणी परिकलित करके, गतिमान माध्य प्राप्त किए जाते हैं। अगर मूल श्रेणी का Y_1, Y_2, Y_3.................. से संकेतन किया जाए तो पहले 3 मानों का माध्य $(Y_1+Y_2+Y_3)/3$ पहले तीन वर्षों के मध्य बिन्दु के समक्ष लिखा जाता है। यह पहली गतिमान माध्य संख्या होगी। दूसरे गतिमान को प्राप्त करने के लिए दूसरे से चौथे काल के मानों का माध्य परिकलित किया जाता है। यह मान $(Y_2+Y_3+Y_4)/3$ है तथा इसे दूसरे से चौथे वर्ष के मध्य लिखा जाता है। इस प्रकार, इस क्रिया की पुनरावृत्ति की जाती है। यहां यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि इस विधि द्वारा शुरू के तथा अंत के कुछ वर्षों के मान प्राप्त नहीं किए जा सकते।

यहां दो परिस्थितियों में भेद किया जा सकता है : (1) जब गतिमान औसत की अवधि विषम हो, तथा (2) जब अवधि सम हो। अगर समय विषम है (जैसे तीन वर्ष) तो पहले गतिमान माध्य को दूसरे वर्ष के सामने लिखा जाता है, दूसरे गतिमान माध्य को तीसरे वर्ष के सामने लिखा जाता है इत्यादि। अगर अवधि सम है (जैसे चार वर्ष) तो पहला गतिमान माध्य दूसरे तथा तीसरे वर्ष के बीच लिखा जाएगा आदि, तथा किसी वर्ष की उपनति ज्ञात करने के लिए इनका केंद्रीकरण आवश्यक होता है।

व्याख्या के लिए, हम केंन्द्रित 4-वर्ष गतिमान माध्य के परिकलन के विधिवत निरूपण पर ध्यान देते हैं। यहां हम दो विधियां प्रस्तुत करेंगे—प्रत्यक्ष विधि (सारणी 12.2) तथा लघुतर विधि (सारणी 12.3)।

सारणी 12.2 : चार वर्षीय केन्द्रित गतिमान माध्य का परिकलन (प्रत्यक्ष विधि)

वर्ष	Y_t	4-वर्षीय गतिमान योग	4-वर्षीय गतिमान माध्य (स्तम्भ 3) ÷ 4	स्तम्भ 4 की दो मदों का गतिमान योग (केन्द्रित)	केन्द्रित 4-वर्षीय गतिमान माध्य
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1	Y_1	—	—	—	—
2	Y_2	—	—	—	—
3	Y_3	$Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=T_1$	$T_1/4$	$\frac{T_1+T_2}{4}$	$\frac{T_1+T_2}{8}$
4	Y_4	$Y_2+Y_3+Y_4+Y_5=T_2$	$T_2/4$	$\frac{T_2+T_3}{4}$	$\frac{T_2+T_3}{8}$
5	Y_5	$Y_3+Y_4+Y_5+Y_6=T_3$	$T_3/4$	$\frac{T_3+T_4}{4}$	$\frac{T_3+T_4}{8}$
6	Y_6	$Y_4+Y_5+Y_6+Y_7=T_4$	$T_4/4$	—	—
7	Y_7	—	—	—	—

सारणी 12.3 : चार वर्षीय केन्द्रित गतिमान माध्य का परिकलन (लघुतर विधि)

वर्ष	Y_t	4-वर्षीय गतिमान योग	स्तम्भ 3 के दो मदों का गतिमान योग (केन्द्रित)	केन्द्रित 4-वर्षीय गतिमान माध्य स्तम्भ 4 ÷ 8
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	Y_1	—	—	—
2	Y_2	—	—	—
3	Y_3	$Y_1+Y_2+Y_3+Y_4=T_1$	T_1+T_2	$T_1+T_2/8$
4	Y_4	$Y_2+Y_3+Y_4+Y_5=T_2$	T_2+T_3	$T_2+T_3/8$
5	Y_5	$Y_3+Y_4+Y_5+Y_6=T_3$	T_3+T_4	$T_3+T_4/8$
6	Y_6	$Y_4+Y_5+Y_6+Y_7=T_4$	—	—
7	Y_7	—	—	—

ऊपर दिए हुए उदाहरण में अवधि 4 वर्ष है। दोनों विधियों, प्रत्यक्ष तथा लघुतर, में स्तम्भ 3, चार वर्षीय गतिमान को प्रदर्शित करता है। पहला योग (T_1) दूसरे तथा तीसरे वर्ष के मध्य लिखा जाता है। दूसरा योग (T_2) तीसरे तथा चौथे वर्ष के मध्य में लिखा जाता है इत्यादि। इसके बाद 2 मदों का गतिमान माध्य परिकलित करके क्रमशः तीसरे, चौथे...... वर्षों के सामने लिखा जाता है। लघुतर विधि में 4-वर्षीय गतिमान माध्य परिकलित न करके 4-वर्षीय गतिमान योग ($T_1 + T_2 + T_3$ .....) के "दो मद गतिमान योग" परिकलित किए जाते हैं तथा अंत में 4-वर्षीय केन्द्रित गतिमान माध्य परिकलित किए गए हैं (सारणी 12.3 में स्तम्भ 4 और 5)।

यहां पर यह ध्यान दें कि 4-वर्षीय गतिमान माध्य के लिए केंद्रीकरण के कारण श्रेणी के शुरू के $(4/2) = 2$ वर्षों तथा अंत के दो वर्षों के लिए मान प्राप्त नहीं होते।

12.3.2 गतिमान माध्यों की उपयुक्तता

गतिमान माध्य विधि का प्रयोग सरल होता है, लेकिन इस विधि की सफलता काल के उपयुक्त चुनाव पर निर्भर होती है। एक गतिमान माध्य, जिसका काल, चक्र-काल के बिल्कुल बराबर या इसका गुणज है, चक्रीय घटक का पूर्ण रूप से विलोपन कर देता है तथा उपनति का आकल (estimate) प्रदान करता है। यह विधि लोचपूर्ण है लेकिन श्रेणी के शुरू में तथा अंत में कुछ उपनति मान छोड़ देने पड़ते हैं तथा गतिमान माध्य के काल में वृद्धि के साथ इनकी संख्या में भी वृद्धि होती है। इसके अतिरिक्त, चूंकि गतिमान माध्य कोई परिवर्तन के नियम को नहीं अपनाता इसलिए इस विधि का भविष्य उपनति के पूर्वानुमान में प्रयोग नहीं हो सकता।

12.3.3 गतिमान माध्यों के उदाहरण

उदाहरण 12.3.1

निम्नलिखित आंकड़ों से तीन तथा पांच वर्षीय गतिमान माध्यों का परिकलन कीजिए:

वर्ष :	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
उत्पादन : (हज़ार टनों में)	18	19	20	22	20	19	22	24	25	24	25	26

हल

सारणी 12.3.1 (I) तीन वर्षीय गतिमान माध्य, (II) पाँच वर्षीय गतिमान माध्य का परिकलन।

वर्ष	उत्पादन (हज़ार टनों में)	3-वर्षीय गतिमान योग	3-वर्षीय गतिमान माध्य	5-वर्षीय गतिमान योग	5-वर्षीय गतिमान माध्य
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1970	18	—	—	—	—
1971	19	57	19.0	—	—
1972	20	61	20.3	99	19.8
1973	22	62	20.7	100	20.0
1974	20	61	20.3	103	20.6
1975	19	61	20.3	107	21.4
1976	22	65	21.7	110	22.0
1977	24	71	23.7	114	22.8
1978	25	73	24.3	120	24.0
1979	24	74	24.7	124	24.8
1980	25	75	25.0	—	—
1981	26	—	—	—	—

परिकलन के चरण

1) स्तम्भ (3) की संख्याएं स्तम्भ (2) की लगातार तीन संख्याओं के योग द्वारा प्राप्त की गई हैं। अतः पहला गतिमान योग $57 = 18 + 19 + 20$ और यह 1971 के सामने लिखा गया है। दूसरा गतिमान योग $61 = 19 + 20 + 22$, 1972 के सामने लिखा गया है।

2) स्तंभ (4) में दर्शाए गए 3-वर्षीय गतिमान माध्य स्तम्भ (3) में दिए गतिमान योग को 3 से भाग करने पर प्राप्त किए गए हैं, यहां पर गतिमान माध्य की अवधि 3 है। अतः $57 \div 3 = 19$, $61 \div 3 = 20.3$ आदि।

3) स्तंभ (5) में दिए हुए 5-वर्षीय गतिमान योग, स्तम्भ (2) की लगातार 5 संख्याओं के योग करने से प्राप्त की गई हैं। अतः 1972 के सामने का पहला गतिमान 98 = 18 + 19 + 20 + 22 + 20 है।

4) स्तंभ (6) में 5-वर्षीय गतिमान औसत, स्तम्भ (5) के गतिमान माध्यों को 5 से भाग करने से प्राप्त की गई है। इस प्रकार, 1975 का गतिमान माध्य 107 ÷ 5 = 21.4

यहाँ यह ध्यान दें कि 3-वर्षीय केन्द्रित गतिमान माध्य के लिए $\frac{3-1}{2} = 1$ वर्ष तथा 5-वर्षीय केन्द्रित गतिमान माध्य के लिए $\frac{5-1}{2} = 2$ वर्ष, श्रेणी के क्रमशः शुरू तथा अंत में छूट जाते हैं।

उदाहरण 12.3.2

4-वर्षीय गतिमान माध्य के प्रयोग से निम्नलिखित काल श्रेणी के उपनति मान परिकलित कीजिए।

वर्ष	उत्पादन (क्विंटल में)
1979	52
1980	54
1981	55
1982	57
1983	58
1984	61
1985	63
1986	66
1987	67
1988	70

हल

सारणी 12.3.2 (क) : 4-वर्षीय गतिमान य माध्य का परिकलन (प्रत्यक्ष विधि)

वर्ष	उत्पादन	4-वर्षीय गतिमान योग	4-वर्षीय गतिमान माध्य	स्तम्भ (4) की दो मदों का गतिमान योग (केन्द्रित)	केन्द्रित 4-वर्षीय गतिमान माध्य
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1979	52	—	—	—	—
1980	54	218	54.5	—	—
1981	55	224	56.0	110.50	55.25
1982	57	231	57.75	113.75	56.875
1983	58	239	59.75	117.50	58.75
1984	61	248	62.0	121.75	60.875
1985	63	257	64.25	126.25	63.125
1986	66	266	66.5	130.75	65.375
1987	67	—	—	—	—
1988	70			—	—

सारणी 12.3.2 (ख) : 4-वर्षीय गतिमान माध्य का परिकलन (लघुतर विधि)

वर्ष	उत्पादन	4-वर्षीय गतिमान योग	स्तम्भ (3) की दो मदों का गतिमान योग (केन्द्रित)	केन्द्रित 4-वर्षीय गतिमान औसत
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1979	52		—	—
1980	54	—	—	—
1981	55	218	442	55.25
1982	57	224	455	56.875
1983	58	231	470	58.75
1984	61	239	487	60.875
1985	63	248	505	63.125
1986	66	257	523	65.375
1987	67	266	—	—
1988	70	—	—	—

परिकलन के चरण (प्रत्यक्ष विधि)

1) स्तम्भ (2) की चार लगातार संख्याओं का योग स्तम्भ (3) में लिखा गया है। इस प्रकार 52+54+55+57=218, 54+55+57+58=224 आदि हैं।
2) स्तम्भ (4) = स्तम्भ (3) ÷ 4, इस प्रकार 218 ÷ 4 = 54.5, 224 ÷ 4 = 56 आदि।
3) स्तम्भ (4) की लगातार दो संख्याओं का योग स्तम्भ (5) में लिखा गया है। अतः 54.5+56=110.5, 56+57.75=113.75 आदि।
4) स्तम्भ (6) = स्तम्भ (5) ÷ 2, अतः 110.5 ÷ 2 = 55.25 आदि।

परिकलन के चरण (लघुतर विधि)

1) स्तम्भ (3) की दो लगातार संख्याओं का योग स्तम्भ (4) में लिखा गया है। अतः 218+224=442, 224+231=455 आदि।
2) स्तम्भ (5) = स्तम्भ (4) ÷ 8, अतः 442 ÷ 8 = 55.25 आदि।

उदाहरण 12.3.3

निम्नलिखित श्रेणी में 3-वर्षीय भारित गतिमान माध्य प्रयोग करके उपनति मान ज्ञात कीजिए, जिसमें भार 1,2,1 हों।

वर्ष	: 1	2	3	4	5	6
मान	: 2	3	5	6	8	11

हल

सारणी 12.3.3: तीन-वर्षीय भारित गतिमान माध्य का परिकलन

वर्ष	मान	3-वर्षीय भारित गतिमान योग	3-वर्षीय भारित गतिमान माध्य
(1)	(2)	(3)	(4)
1	2	—	—
2	3	13	3.25
3	5	19	4.75
4	6	25	6.25
5	8	33	8.25
6	11	—	—

परिकलन के चरण

1) स्तम्भ (2) की संख्याओं के 3-वर्षीय भारित माध्य स्तम्भ (3) में लिखे गए हैं।
   अतः $1\times2 + 2\times3 + 1\times5 = 13$,
   $1\times3 + 2\times5 + 1\times6 = 19$ आदि
2) स्तम्भ (4) = स्तम्भ (3) ÷ भारों का योग अर्थात् 4,
   अतः $13 \div 4 = 3.25$, $19 \div 4 = 4.75$ आदि

उदाहरण 12.3.4

निम्नलिखित काल श्रेणी आंकड़ों से केन्द्रित 4-वर्षीय गतिमान माध्य परिकलित कीजिए।

त्रैमास	वर्ष			
	1980	1981	1982	1983
1	62	66	72	79
2	58	60	67	74
3	72	74	80	88
4	80	64	69	77

हल

वर्ष	त्रैमास	मान	स्तम्भ (2) का 4-त्रैमासिक गतिमान योग	स्तम्भ (3) का दो त्रैमासिक गतिमान योग	केन्द्रित 4-त्रैमासिक गतिमान माध्य
(1)		(2)	(3)	(4)	(5)
1980	1	62	—	—	—
	2	58		—	—
			252		
	3	72		508	63.5
			256		
	4	60		514	64.25
			258		
1981	1	66		518	64.75
			260		
	2	60		524	65.5
			264		
	3	74		534	66.75
			270		
	4	64		547	68.375
			277		
1982	1	72		560	70
			283		
	2	67		571	71.375
			288		
	3	80		583	72.875
			295		
	4	69		597	74.625
			302		
1983	1	79		612	76.5
			310		
	2	74		628	78.5
			318		
	3	88		—	—
	4	77	—	—	—

बोध प्रश्न 1

1) निम्नलिखित आंकड़ों में 1961 से 1970 तक के औद्योगिक उत्पादन सूचकांक दिए हुए हैं:

वर्ष	1961	1962	1963	1964	1965	1966	1967	1968	1969	1970
औद्योगिक उत्पादन सूचकांक	109.2	119.8	129.7	140.8	153.8	153.2	152.6	163.0	175.3	184.3

3-वर्षीय गतिमान माध्य विधि द्वारा उपनति रेखा का समंजन कीजिए तथा 1972 वर्ष के मूल्य का आकलन कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित 1970-71 की कीमत पर दी हुई भारत की, शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद की संख्याओं को आलेख के रूप में चित्रित कीजिए तथा 5-वर्षीय गतिमान माध्य उपनति द्वारा इसको अध्यारोपित (superimposed) कीजिए।

वर्ष	शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद ("00" करोड़ रुपयों में)	वर्ष	शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद ("00" करोड़ रुपयों में)	वर्ष	शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद ("00" करोड़ रुपयों में)
1961	259	1969	335	1977	444
1962	269	1970	356	1978	482
1963	275	1971	378	1979	513
1964	292	1972	386	1980	487
1965	315	1973	382	1981	521
1966	301	1974	397	1982	550
1967	299	1975	400		
1968	324	1976	440		

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

12.4 बहुपद समंजन विधि

बहुपद समंजन विधि शायद उपनति निर्धारण की सबसे अच्छी तथा वस्तुनिष्ठ (objective) विधि है । यहां उपनति के लिए एक उपयुक्त प्रकार के बहुपद का चयन किया जाता है तथा काल श्रेणी आंकड़ों द्वारा उपनति समीकरण में प्रयोग किए जाने वाले स्थिरांकों का मान परिकलित किया जाता है । आंकड़ों के आलेखी निरूपण, जिसमें प्रायः प्रयोग किए जाने वाले अंकगणितीय मापक्रम के अतिरिक्त अर्द्ध-लघुगणकीय या दोहरी-लघुगणकीय मापक्रम भी प्रयोग किए जा सकते हैं, के द्वारा उपयुक्त बहुपद के चयन में सहायता मिलती है । अगर साधारण आलेख पृष्ठ पर अंकित आंकड़े सन्निकट सरल रेखीय प्रवृत्ति दर्शाते हैं तो $y = a+bx$ (सरल रेखा या एक कोटि का बहुपद) समीकरण का प्रयोग किया जाता है ।

अगर अंकित आंकड़े अर्द्ध-लघुगणकीय आलेख पृष्ठ पर सरल रेखा प्रदर्शित करते हैं तो समीकरण लघु $y = a+bx$ का प्रयोग किया जाएगा । कभी-कभी दो कोटि या तीन कोटि के बहुपद का भी समंजन किया जा सकता है ।

$y = a+bx+cx^2$ (दो कोटि का बहुपद या पैराबोला)

$y = a+bx+cx^2+dx^3$ (तीन कोटि का बहुपद)

इन समीकरणों में प्रयोग किए गए स्थिरांकों (जैसे $a,b,c,.....$ आदि) के मान न्यूनतम वर्ग विधि सिद्धांत (जैसा कि समाश्रयण (regression) में किया जाता है) के प्रयोग से प्राप्त किए जाते हैं । इस सिद्धांत के अनुसार स्थिरांकों का मान ऐसा होना चाहिए जिससे विचलनों के वर्ग का योग $\Sigma (y_o - y_c)^2$ न्यूनतम हो

जहां पर, y_o = प्रेक्षित माप

y_c = प्रत्याशित मान, जोकि $y = a+bx+cx^2$ प्रकार के उपनति समीकरण से प्राप्त किया गया है ।

यहां पर योग, (Σ) सभी प्रेक्षणों के लिए है ।

जब न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सरल रेखा का समंजन किया जाता है तो स्थिरांक a तथा b के मान इन प्रसामान्य समीकरणों (normal equations) के हल द्वारा ज्ञात किए जाते हैं:

$\Sigma y = na+b\Sigma x$ तथा $\Sigma xy = a\Sigma x+b\Sigma x^2$

जहां पर वर्षों की संख्या n है ।

इसी प्रकार, पैराबोला या द्वि-कोटि बहुपद के समंजन में स्थिरांक a, b तथा c के मान निम्न तीन प्रसामान्य समीकरणों द्वारा ज्ञात किए जाते हैं ।

$$\Sigma y = na+b\Sigma x+c\Sigma x^2$$
$$\Sigma xy = a\Sigma x+b\Sigma x^2+c\Sigma x^3$$
$$\Sigma x^2y = a\Sigma x^2+b\Sigma x^3+c\Sigma x^4$$

प्रसामान्य समीकरण लिखने के नियम

प्रथम प्रसामान्य समीकरण प्राप्त करने के लिए समीकरण के दोनों पक्षों को a के गुणांक से गुणा करके इसका सभी प्रेक्षणों के लिए योग कीजिए ।

इस प्रकार, सरल रेखा $y = a+bx$ में a का गुणांक 1 है, अतः पहली प्रसामान्य समीकरण

दूसरी प्रसामान्य समीकरण के लिए समीकरण के दोनों पक्षों को b के गुणांक से गुणा करके इसका सभी प्रेक्षणों के लिए योग कीजिए । सरल रेखा में b का गुणांक x है, अतः दूसरी प्रसामान्य समीकरण $\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$ होगी ।

अब हम एक कोटि बहुपद उपनति समंजन पर विचार करते हैं, जिसमें वर्षों की संख्या विषम (सारणी 12.4) तथा सम (सारणी 12.5) है ।

स्थिति - I : विषम संख्या में वर्ष (n=5)

सारणी 12.4

वर्ष	y	x	x^2	xy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	y_1	−2	4	$-2y_1$
2	y_2	−1	1	$-y_2$
3	y_3	0	0	0
4	y_4	1	1	y_4
5	y_5	2	4	$2y_5$
योग	Σy	0	10	Σxy

प्रसामान्य समीकरण इस प्रकार है :

$\Sigma y = 5a + b\Sigma x = 5a$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 = 10b$

$\therefore a = \Sigma y/5, b = \Sigma xy/10$

यहां पर मूल बिन्दु (x=0) 5 वर्ष के अंतराल का मध्य बिन्दु, अर्थात् तृतीय वर्ष है तथा समय की इकाई एक वर्ष है । वास्तविक जीवन परिस्थितियों में y_t के वास्तविक मान लिखित किए जा सकते हैं । अतः Σy तथा Σxy ज्ञात होते हैं ।

स्थिति - II : सम संख्या में वर्ष (n=6)

सारणी 12.5

वर्ष	y	x	x^2	xy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1	y_1	−5	25	$25y_1$
2	y_2	−3	9	$9y_2$
3	y_3	−1	1	y_3
4	y_4	1	1	y_4
5	y_5	3	9	$9y_5$
6	y_6	5	25	$25y_6$
योग	Σy	0	70	Σxy

स्थिरांक a तथा b का मान निम्न समीकरणों से प्राप्त होगा

$\Sigma y = 6a$

$\Sigma xy = 70b$

12.4.1 न्यूनतम वर्ग विधि की उपयुक्तता

उपनति रेखाओं का प्रयोग, पूर्वानुमान, काल श्रेणी की वृद्धि या ह्रास की व्याख्या तथा अर्थव्यवस्था की दीर्घकालिक प्रवृत्तियों के अध्ययन, में किया जाता है। बहुपद समंजन विधि में व्यक्तिगत अभिनति (bias) का निराकरण होता है तथा सभी वर्षों के लिए उपनति मान ज्ञात किए जा सकते हैं, जोकि गतिमान माध्य में संभव नहीं होता। लेकिन यहाँ पर बहुपद का चयन स्वेच्छ (arbitrary) होता है तथा दृढ़ रूप से यह जानना संभव नहीं होता कि कौन-सा वक्र (रैखिक या पैराबोला) उपनति का अच्छी तरह से निरूपण करेगा। इस प्रकार, उपनति समीकरण का चयन स्वयं अभिनति की ओर ले जाता है। आंकड़ों के प्रकीर्ण आरेख द्वारा उपनति के प्रतिरूप के बारे में कुछ जानकारी प्राप्त की जा सकती है।

12.4.2 न्यूनतम वर्ग विधि के उदाहरण

उदाहरण 12.4.1

निम्न काल श्रेणी आंकड़ों के लिए न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा सरल रेखा उपनति का समंजन कीजिए।

वर्ष	: 1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
उत्पादन	: 81	92	100	105	112	120	126

वर्ष 1982 के उत्पादन का आकलन कीजिए।

हल

यहां पर वर्षों की संख्या विषम (n=7) है। मान लीजिए, सरल रेखा उपनति का समीकरण $y = a+bx$ है, जिसका मूल बिन्दु (x=0) 1978 पर है तथा x की इकाई = एक वर्ष है। न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा प्रसामान्य **समीकरण इस प्रकार है :**

$\Sigma y = na+b\Sigma x$

$\Sigma xy = a\Sigma x+b\Sigma x^2$

सारणी 12.4.1 : सरल रेखा उपनति समंजन

वर्ष	उत्पादन y	x	x^2	xy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1975	81	−3	9	−243
1976	92	−2	4	−184
1977	100	−1	1	−100
1978	105	0	0	0
1979	112	1	1	112
1980	120	2	4	240
1981	126	3	9	378
योग	736	0	28	203

अतः इस सारणी से Σy, Σxy, Σx तथा Σx^2 के मान प्रसामान्य समीकरणों में रखने पर

$7a = 736 \therefore a = 736/7 = 105.14$

$28b = 203 \therefore b = 203/28 = 7.21$ **प्राप्त होते हैं।**

अतः उपनति समीकरण

$y = 105.14 + 7.2x$ है,

जिसका मूल बिन्दु 1978 पर तथा x की इकाई एक वर्ष है। 1982 के लिए x का मान 4 होगा तथा 1982 के उत्पादन का आकलन

$y = 105.1 + 4 \times 7.2 = 133.9$ होगा।

उदाहरण 12.4.2

निम्न काल श्रेणी आंकड़ों के लिए सरल रेखा का समंजन कीजिए।

वर्ष : 1970 1971 1972 1973 1974 1975

लाभ : 3.1 3.3 3.6 3.2 3.7 3.9

(लाख रुपयों में)

1976 के लाभों का आकलन कीजिए।

हल

यहां पर वर्षों की संख्या सम (n=6) है। मान लीजिए उपनति समीकरण $y = a+bx$ है जिसका मूल बिन्दु $(x = 0)$ 1972 तथा 1973 का मध्य बिन्दु है तथा x की इकाई = 6 मास है। प्रसामान्य समीकरण इस प्रकार है :

$\Sigma y = na + b\Sigma x$ तथा

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$

सारणी 12.4.2 : सरल रेखा उपनति का समंजन

वर्ष	लाभ = y (लाख रुपयों में)	x	x^2	xy
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
1970	3.1	−5	25	−15.5
1971	3.3	−3	9	−9.9
1972	3.6	−1	1	−3.6
1973	3.2	1	1	−3.2
1974	3.7	3	9	11.1
1975	3.9	5	25	19.5
योग	20.8	0	70	4.8

अतः प्रसामान्य समीकरणों में Σx, Σx^2, Σxy तथा Σy का मान रखने पर

$6a = 20.8 \therefore a = 3.47$

$70b = 4.8 \therefore b = 0.07$ है।

अतः उपनति समीकरण

$y = 3.47 + 0.07$ है, जिसका मूल बिन्दु 1972 तथा 1973 का मध्य बिन्दु तथा x की इकाई 6 मास है।

1976 वर्ष के लिए $x = 7$

अतः 1976 का आकलन $y = 3.47 + 0.07 \times 7$

$= 3.47 + 0.49$

$= 3.96$ है।

अतः 1976 के लिए आकलित लाभ 3.96 लाख रुपए है।

उदाहरण 12.4.3

निम्नलिखित सारणी में 1982 से 1988 तक भारत में सीमेंट उत्पादन दिया गया है। आंकड़ों के लिए द्वि-कोटि बहुपद का समंजन कीजिए।

वर्ष : 1982 1983 1984 1985 1986 1987 1988

उत्पादन : 23.7 27.1 30.2 33.1 36.4 39.3 45.0

(10 लाख टनों में)

हल

यहां पर वर्षों की संख्या विषम है $(n = 7)$।

मान लीजिए उपनति समीकरण $y = a + bx + cx^2$ है, जिसका मूल बिन्दु $(x = 0)$ 1985 है तथा x की इकाई 1 वर्ष है। प्रसामान्य समीकरण ये हैं:

$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$

$\Sigma x^2y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$

सारणी 12.4.3 : द्वि-कोटि के बहुपद का समंजन

वर्ष	y	x	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1982	23.7	−3	9	−27	81	−71.1	213.3
1983	27.1	−2	4	− 8	16	−54.2	108.4
1984	30.2	−1	1	− 1	1	−30.2	30.2
1985	33.1	0	0	0	0	0	0
1986	36.4	1	1	1	1	36.4	36.4
1987	39.3	2	4	8	16	78.6	157.2
1988	45.0	3	9	27	81	135.0	405.0
योग	234.8	0	28	0	196	94.5	950.5

इस सारणी से प्रसामान्य समीकरणों में मान रखने पर

$7a + 28c = 234.8$

$28b = 94.5$

$28a + 196c = 950.5$

इन तीनों समीकरणों के हल द्वारा

$a = 33$

$b = 3.37$

$c = 0.134$ है।

अतः द्वि-कोटि बहुपद $y = 33 + 3.37x + 0.134x^2$ है, जिसका मूल बिन्दु $(x = 0)$ वर्ष 1985 है तथा x की इकाई एक वर्ष है।

उदाहरण 12.4.4

निम्न आंकड़ों के लिए द्वि-कोटि बहुपद का समंजन कीजिए। वर्ष 1982 के लिए आकलन प्राप्त कीजिए।

वर्ष	1976	1977	1978	1979	1980	1981
भारत का वार्षिक विदेशी व्यापार (आयात 10^8 रुपयों में)	507	602	681	914	1255	1361

हल

यहां पर वर्षों की संख्या सम है $(n = 6)$

मान लीजिए $y = a + bx + cx^2$ उपनति समीकरण है, जिसका मूल बिन्दु $(x = 0)$ वर्ष 1978 तथा 1979 के माध्य में है तथा x की इकाई = 6 मास है। प्रसामान्य समीकरण ये हैं:

$\Sigma y = na + b\Sigma x + c\Sigma x^2$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$

$\Sigma x^2y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$

सारणी 12.4.4 : द्वि-कोटि के बहुपद का समंजन

वर्ष	y	x	x^2	x^3	x^4	xy	x^2y
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1976	507	−5	25	−125	625	−2535	12675
1977	602	−3	9	− 27	81	−1806	5418
1978	681	−1	1	−1	1	− 681	681
1979	914	1	1	1	1	914	914
1980	1255	3	9	27	81	3765	11295
1981	1361	5	25	125	625	6805	34025
योग	5320	0	70	0	1414	6462	65008

इस सारणी से मान प्रसामान्य समीकरणों में रखने पर

$$6a + 70c = 5320$$
$$70b = 6462$$
$$70a + 1414c = 65008$$

इन तीनों समीकरणों के हल द्वारा

$a = 829.2$

$b = 92.31$

$c = 4.924$ है तथा द्वि-कोटि बहुपद

$y = 829.2 + 92.31x + 4.924x^2$ है, जिसका मूल बिन्दु ($x = 0$)

1978 तथा 1979 का मध्य है तथा x की इकाई = 6 मास।

वर्ष 1982 के लिए $x = 7$

$\therefore$ 1982 के लिए आकलन $y = 829.2 + 92.31 \times 7 + 4.924 \times (7)^2$

$$= 829.2 + 646.17 + 241.28$$
$$= 1716.65 \text{ है।}$$

12.5 वार्षिक आंकड़ों से मासिक या त्रैमासिक उपनति मान ज्ञात करना

काल श्रेणी में वार्षिक आंकड़े विभिन्न रूपों में उपलब्ध हो सकते हैं जैसे (1) प्रत्येक वर्ष के लिए मासिक या त्रैमासिक औसत; तथा (2) वार्षिक योग। जब वर्षों की संख्या विषम या सम हो तो इन परिस्थितियों की अभिप्रक्रिया (treatment) के लिए अलग-अलग विधियां उपलब्ध हैं।

अगर उपनति समीकरण का समंजन मासिक या त्रैमासिक आंकड़ों के लिए किया गया है तो मासिक या त्रैमासिक मान प्राप्त करने में कोई कठिनाई नहीं होती। लेकिन, न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा मासिक या त्रैमासिक आंकड़ों के लिए उपनति रेखा का समंजन उपयुक्त नहीं है। प्रायः उपनति रेखा का समंजन वार्षिक आंकड़ों के लिए किया जाता है तथा बाद में विभिन्न महीनों या त्रैमासों के लिए उपनति मान प्राप्त किए जाते हैं। मासिक उपनति समीकरण प्राप्त करने की विधि का विवेचन निम्नलिखित में किया गया है।

परिस्थिति I: जब विषम संख्या में वर्षों का मासिक औसत दिया हुआ हो

चूंकि आंकड़े विषम संख्या में वर्षों के लिए दिए हुए हैं, हम मध्यवर्ती वर्ष को मूल बिन्दु लेते हैं तथा x की इकाई = 1 वर्ष लेते हैं। मान लीजिए उपनति समीकरण $y = a + bx$ है, जहां पर b, x में इकाई वृद्धि (अर्थात् 12 मास) के कारण, औसत मासिक वृद्धि को व्यक्त करता है।

इस प्रकार, मासिक उपनति में वृद्धि $b/12$ होगी तथा उपनति समीकरण $Y = a + \frac{b}{12} x$ (x की इकाई = 1 मास) होगी जिसका मूल बिन्दु ($x = 0$) मध्यवर्ती वर्ष का मध्य बिन्दु (30 जून) होगा। अगर हम मूल बिन्दु जुलाई लेना चाहें (अर्थात् जुलाई का मध्य) तो उपनति समीकरण $y = a + b/12 \left(x + \frac{1}{2}\right)$ होगी।

परिस्थिति II: जब सम संख्या में वर्षों का मासिक औसत दिया हुआ हो

यहां पर उपनति समीकरण $y = a + bx$ है जहां मूल बिन्दु दो मध्यवर्ती वर्षों के मध्य में (अर्थात् दोनों में से पहले वर्ष का 31 दिसम्बर) है तथा प्रति इकाई x (अर्थात् 6 मास) में वृद्धि से औसत मासिक वृद्धि b है। अतः मासिक उपनति समीकरण $y = a + \frac{b}{6}x$ (x की इकाई = 1 मास) है। अगर हम मूल बिन्दु को अगले वर्ष की 15 जनवरी पर परिवर्तित करें तो मासिक उपनति समीकरण $y = a + b/6 \left(x + \frac{1}{2}\right)$ होगी।

परिस्थिति III: जब वार्षिक योग दिए हुए हों

मान लीजिए वार्षिक उपनति समीकरण $y = a + bx$ है। अगर प्रत्येक वार्षिक योग को 12 से भाग देकर मासिक औसत परिकलित किए जाएं तथा एक सरल रेखा उपनति का समंजन किया जाए तो समीकरण यह होगा $y = a/12 + (b/12)\,x = a + bx$ जहां पर $a = a/12$ तथा $b = b/12$ है। अब ऊपर दी गई विधि (परिस्थिति I तथा II) के अनुसार मासिक उपनति समीकरण प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 12.5.1

कुछ उत्पादन आंकड़ों के लिए उपनति समीकरण

$y = 150 + 24x$ है (y = हजार टनों में वार्षिक उत्पादन तथा x = समय जिसका मूल बिन्दु 1978 पर है, x की इकाई = 1 वर्ष) मई, 1983 के लिए उपनति मान का आकलन कीजिए।

हल

मासिक औसत के लिए उपनति समीकरण

$y = \frac{150}{12} + \frac{24}{12}x = 12.5 + 2x$ है।

जहां पर y = मासिक उत्पादन तथा x = समय जिसका मूल बिन्दु 1978 (अर्थात् 30 जून, 1978), x की इकाई = 1 वर्ष

जब मूल बिन्दु को जुलाई, 1978 (अर्थात् 15 जुलाई, 1978) पर परिवर्तित किया जाता है तथा x की इकाई 1 मास हो तो उपनति समीकरण

$y = 12.5 + 2/12 \left(x + \frac{1}{2}\right) = 12.5 + \frac{1}{6}\left(x + \frac{1}{2}\right)$ है।

अब जुलाई, 1978 तथा मई, 1983 में अंतराल 58 मास का है, इसलिए $x = 58$ रखने पर

$y = 12.5 + \frac{1}{6}\left(58 + \frac{1}{2}\right) = 22.25$

अर्थात् मई, 1983 का आकलित उपनति मान 22.25 ('000 टन) है।

उदाहरण 12.5.2

एक उपनति समीकरण जिसका समंजन 7 वर्षों में औसत त्रैमासिक बिक्री के लिए किया गया है, इस प्रकार है $y = 250 + 20x$ (x की इकाई = 1 वर्ष, मूल बिन्दु = 30 जून, 1970)। वर्ष 1973 के पहले त्रैमास (जनवरी-मार्च) के लिए उपनति मान आकलित कीजिए।

हल

यहां पर त्रैमासिक औसत से अर्थ प्रत्येक वर्ष के लिए प्रति त्रैमास औसत से है।

त्रैमासिक उपनति का समीकरण $y = 250 + \frac{20}{4}x$ होगा

(मूल बिन्दु, 30 जून, 1970 इकाई = 1 त्रैमास)

30 जून, 1970 तथा 1973 के पहले त्रैमास तक (अर्थात् 1 जनवरी, 1973 से 31 मार्च, 1973 का मध्य बिन्दु अर्थात् 15 फरवरी, 1973) अंतराल 2 वर्ष $7\frac{1}{2}$ मास या $(31\frac{1}{2})/3 = 10.5$ त्रैमासों का है।

उपनति समीकरण में $x = 10.5$ रखने पर

$y = 250 + 5 \times 10.5 = 302.5$

यह 1973 के पहले त्रैमास का आकलित मान है।

बोध प्रश्न 2

1) **निम्नलिखित आंकड़ों में एक सरल रेखा का समंजन कीजिए तथा दिखाइए कि इससे मासिक उपनति मान किस प्रकार प्राप्त किए जा सकते हैं। इस प्रकार के दो मासिक मान प्राप्त कीजिए।**

वर्ष	1970	1971	1972	1973	1974
औसत मासिक उत्पादन (हज़ार टनों में)	38	40	41	45	47

....

....

....

....

....

....

2) किन्हीं उत्पादन आंकड़ों के लिए उपनति समीकरण $y = 240 + 48x$ है (y = टनों में वार्षिक उत्पादन, x = समय जिसका मूल बिन्दु 1985 है, x की इकाई = 1 वर्ष)। अक्तूबर, 1991 के लिए उपनति मान आकलित कीजिए।

....

....

....

....

....

....

3) **त्रैमासिक औसत बिक्री आंकड़ों में आमंत्रित उपनति समीकरण $y = 60 + 8x$ है। (x की इकाई = 1 वर्ष, मूल बिन्दु = 30 जून, 1988)।** वर्ष 1990 के पहले त्रैमास (जनवरी-मार्च) के लिए **उपनति मान आकलित कीजिए।**

....

....

....

....

....

....

12.6 मौसम्मी विचरणों का माप

काल श्रेणी में मौसमी विचरणों को मापने की बहुत-सी विधियां हैं, जो इस बात पर निर्भर करती हैं कि अन्य घटकों जैसे चक्रीय, उपनति तथा अनियमित विचरणों का व्यवहार किस तरह का है। सरलता के लिए हम केवल मासिक या त्रैमासिक आंकड़ों पर ही ध्यान देंगे, लेकिन साप्ताहिक तथा प्रतिदिन आंकड़ों के लिए भी विधि इसी प्रकार की होगी। इस विवेचन में हम गुणात्मक प्रतिरूप पर ध्यान देंगे तथा अपने को निम्नलिखित दो विधियों तक ही सीमित रखेंगे :

i) उपनति से अनुपात विधि

ii) शृंखलित आपेक्षिक विधि

इन विधियों की व्याख्या से पहले आंकड़ों तथा मौसमी प्रतिरूप की प्रकृति के बारे में कुछ टिप्पणियां उपयुक्त रहेंगी। अगर आंकड़े मासिक आधार पर हैं तो इसमें तिथि पत्र (calender) विचरण का समायोजन किया जाना चाहिए। अगर समय के साथ मौसमी प्रतिरूपों में परिवर्तन होता है तो इसके लिए विशेष विधियों का प्रयोग किया जाना चाहिए। त्रैमासिक आंकड़ों के लिए इन विधियों के प्रयोग से हमें प्रत्येक वर्ष के लिए 4 संख्याएं प्राप्त होंगी। इनको मौसमी सूचकांक कहते हैं तथा ये प्रायः प्रतिशत में व्यक्त किए जाते हैं। ये संख्याएं इस बात की सूचना देंगी कि क्या एक विशेष त्रैमास सामान्य त्रैमास से ऊपर या नीचे है। अगर किसी विशेष त्रैमास का मान 80 है तो यह इस बात का सूचक है कि इस त्रैमास में व्यापार या निर्यात या बिक्री कम है तथा यह सामान्य त्रैमास से 20 प्रतिशत कम है।

12.6.1 उपनति से अनुपात विधि

अगर आंकड़ों में पर्याप्त मात्रा में उपनति विद्यमान है तो विभिन्न त्रैमासिक या मासिक उपनति ज्ञात करने के लिए पहले एक उपयुक्त उपनति समीकरण ज्ञात किया जाता है। इसके बाद काल श्रेणी के मूल मानों उपनति मानों के प्रतिशत के रूप में व्यक्त करके उपनति का निराकरण किया जाता है।

अतः $(Y_t/T)100 = \frac{T \times S \times C \times I}{T} \times 100 = (S \times C \times I) \times 100$

उपनति निराकरण के बाद माध्य की क्रिया द्वारा मौसमी सूचकांक प्राप्त किए जाते हैं। यहां हमारी मान्यता है कि माध्य की क्रिया चक्रीय तथा अनियमित विचरणों का निराकरण करती है। अतः जब चक्रीय विचरण विद्यमान न हो या बहुत कम हो तो इस विधि का प्रयोग उपयुक्त रहता है।

त्रैमासिक आंकड़ों के प्रयोग द्वारा इस विधि की व्याख्या सारणी 12.6 में की गई है तथा इसी प्रकार की विधि मासिक आंकड़ों के लिए भी प्रयोग की जा सकती है।

नोट : $S_i = A_i + CF$; $CF = \frac{400}{\Sigma A_i}$

जहां पर CF, संशुद्धि संख्या है।

व्याख्या : प्रतिशतों $\left(\frac{Y}{T} \times 100\right)$ को त्रैमासों के अनुसार व्यवस्थित करके औसत उपनति A_1, A_2, A_3, A_4 प्राप्त किए जाते हैं। इस प्रकार

$$A_1 = \frac{1}{4}\left[\frac{Y_1}{T_1} \times 100 + \frac{Y_5}{T_5} \times 100 + \frac{Y_9}{T_9} \times 100 + \frac{Y_{13}}{T_{13}} \times 100\right]$$

आदि। समायोजित मौसमी सूचकांक के लिए प्रत्येक को $\left(\frac{400}{A_1 + A_2 + A_3 + A_4}\right)$ (संशुद्धि संख्या) से गुणा किया जाता है।

$S_1 = A_1 \times CF, S_2 = A_2 \times CF, S_3 = A_3 \times CF, S_4 = A_4 \times CF$

इन चार मौसमी सूचकांकों का योग 400 होगा अर्थात् $S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 400$.

12.6.2 उपनति से अनुपात के उदाहरण

उदाहरण 12.6.1 (क)

निम्न सारणी में एक बड़े विभागीय भंडार की पाँच विभिन्न वर्षों की बिक्री ('000 रुपए में) दर्शाई गई है। आंकड़ों के लिए रैखिक उपनति मानकर उपनति से अनुपात विधि द्वारा मौसमी सूचकांक प्राप्त कीजिए।

सारणी 12.6 : उपनति से अनुपात विधि की व्याख्या

त्रैमास	मूल मान Y				उपनति मान T				उपनति मान से अनुपात $\frac{Y}{T} \times 100$			
	I	II	III	IV	I	II	III	IV	I	II	III	IV
वर्ष	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)				
1	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	T_1	T_2	T_3	T_4	$\frac{Y_1}{T_1} \times 100$	$\frac{Y_2}{T_2} \times 100$	$\frac{Y_3}{T_3} \times 100$	$\frac{Y_4}{T_4} \times 100$
2	Y_5	Y_6	Y_7	Y_8	T_5	T_6	T_7	T_8	$\frac{Y_5}{T_5} \times 100$	$\frac{Y_6}{T_6} \times 100$	$\frac{Y_7}{T_7} \times 100$	$\frac{Y_8}{T_8} \times 100$
3	Y_9	Y_{10}	Y_{11}	Y_{12}	T_9	T_{10}	T_{11}	T_{12}	$\frac{Y_9}{T_9} \times 100$	$\frac{Y_{10}}{T_{10}} \times 100$	$\frac{Y_{11}}{T_{11}} \times 100$	$\frac{Y_{12}}{T_{12}} \times 100$
4	Y_{13}	Y_{14}	Y_{15}	Y_{16}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	$\frac{Y_{13}}{T_{13}} \times 100$	$\frac{Y_{14}}{T_{14}} \times 100$	$\frac{Y_{15}}{T_{15}} \times 100$	$\frac{Y_{16}}{T_{16}} \times 100$
माध्य									A_1	A_2	A_3	A_4
समायोजित मौसमी सूचकांक									S_1	S_2	S_3	S_4

वर्ष	त्रैमास I	II	III	IV
1980	502	1632	605	362
1981	526	1700	680	390
1982	556	1820	780	422
1983	590	1955	888	464
1984	632	2110	1002	515

हल

पहले हम त्रैमास औसत मानों से सरल रेखा उपनति का समंजन करते हैं। मान लीजिए समंजन की जाने वाली उपनति समीकरण $y = a + bx$ है। दिए हुए आंकड़ों से निम्नलिखित सारणी की रचना प्रत्येक वर्ष के चार त्रैमासों का औसत लेकर की गई है।

वार्षिक उपनति का समंजन

वर्ष	त्रैमासिक औसत बिक्री ('000 रुपयों में) (y)	x	x^2	xy
1980	775	−2	4	−1550
1981	824	−1	1	−824
1982	894	0	0	0
1983	974	1	1	974
1984	1065	2	4	2130
योग	4532	0	10	730

प्रसामान्य समीकरण इस प्रकार है :

$\Sigma y = na + b\Sigma x$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$

सारणी से मान रखने पर

$5a = 4532 \therefore a = 906.4$

$10b = 730 \therefore b = 73$

त्रैमासिक औसत के लिए आसंजित उपनति समीकरण $y = 906.4 + 73x$ है।

(मूल बिन्दु 1982, x की इकाई = 1 वर्ष)

अब त्रैमासिक उपनति समीकरण

$y = 906.4 + (73/4)x = 906.4 + 18.25x$ होगा।

(मूल बिन्दु 30 जून 1982, x की इकाई = 1 त्रैमास)

मूल बिन्दु का 1982 के तीसरे त्रैमास में (तीसरे त्रैमास का मध्य बिन्दु) परिवर्तन करने पर त्रैमासिक उपनति समीकरण

$y = 906.4 + 18.25\left(x + \frac{1}{2}\right)$ होगा

$= 906.4 + 18.25x + 9.125$

$= 915.525 + 18.25x$

x के उपयुक्त मान रखने पर हमें उपनति मान प्राप्त होंगे। इसके बाद मूल मानों (y) को उपनति मानों के प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है जिससे "उपनति अनुपात" प्राप्त होते हैं। उपनति मान तथा उपनति अनुपात निम्नलिखित सारणी में दर्शाए गए हैं

सारणी 12.6.1 (ख) : उपनति मान तथा उपनति अनुपातों का परिकलन

वर्ष	त्रैमास	x	$T = 915.525 + 18.25x$ (उपनति मान)	y	उपनति अनुपात $\left(\frac{Y}{T}\right) \times 100$
1980	I	−10	733.0	502	68
	II	− 9	751.3	1632	217
	III	− 8	769.5	605	79
	IV	− 7	787.8	362	46
1981	I	− 6	806.0	526	65
	II	− 5	824.3	1700	206
	III	− 4	842.5	680	81
	IV	− 3	860.8	390	45
1982	I	− 2	879.0	556	63
	II	− 1	897.3	1820	203
	III	0	915.5	780	85
	IV	1	933.8	422	45
1983	I	2	952.0	590	62
	II	3	970.3	1955	201
	III	4	988.5	888	90
	IV	5	1006.8	464	46
1984	I	6	1025.0	632	62
	II	7	1043.3	2110	202
	III	8	1061.5	1002	94
	IV	9	1079.8	515	48

इन उपनति अनुपातों को त्रैमासों के अनुसार व्यवस्थित करके मौसमी सूचकांक परिकलित किए जाते हैं।

सारणी 12.6.1 (ग) : मौसमी सूचकांक का परिकलन

वर्ष	त्रैमास I	II	III	IV	योग
1980	68	217	79	46	
1981	65	206	81	45	
1982	63	203	85	45	
1983	62	201	90	46	
1984	62	202	94	48	
योग	320	1029	429	230	——
औसत	64	206	86	46	402
मौसमी सूचकांक	64	205	85	46	400

नोट : संशुद्धि संख्या = 400/402 = 0.995 है।

प्रत्येक औसत मान को इस संशुद्धि संख्या से गुणा किया जाता है। इस प्रकार
64 × 0.995 = 64, 206 × 0.995 = 205 आदि।

12.6.3 शृंखलिक आपेक्षिक विधि

यह विधि, उपनति से अनुपात विधि से भी अधिक जटिल है। इस विधि में प्रत्येक मासिक (या त्रैमासिक) मान को पिछले मास (या त्रैमास) मान के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। इन प्रतिशतों को

शृंखलिक आपेक्षिक कहते हैं। अगर आंकड़े मासिक हैं तो पहले वर्ष के पहले मास का शृंखलिक आपेक्षिक प्राप्त नहीं किया जा सकता।

अगर मूल मासिक आंकड़े y_1, y_2 ..... आदि से निरूपित किए जाएं तो पहले दो प्रेक्षणों का शृंखलिक आपेक्षिक $= \frac{y_2}{y_1} \times 100$

$$= \frac{\text{फरवरी की संख्या}}{\text{जनवरी की संख्या}} \times 100$$

$$= \frac{S_{\text{फरवरी}}}{S_{\text{जनवरी}}} \times 100 \text{ होगा।}$$

शृंखलिक आपेक्षिकों को मास के अनुसार व्यवस्थित किया जाता है तथा प्रत्येक के लिए औसत शृंखलिक आपेक्षिक, जो कि A से दर्शाया गया है समांतर माध्य या माध्यिका प्रयोग करके ज्ञात किए जाते हैं।

इस प्रकार, किसी एक मास का शृंखलिक आपेक्षिक जो कि S (जिसका पादांक महीना है) से दर्शाया गया है, ज्ञात होने पर, मान लीजिए जनवरी का मौसमी सूचकांक 100 है, अन्य औसत, शृंखलिक आपेक्षिकों से प्राप्त किए जा सकते हैं। इसके लिए हम निम्नलिखित शृंखला संबंधों का प्रयोग करते हैं।

$$S_{\text{फरवरी}} = S_{\text{जनवरी}} \times \frac{A_{\text{फरवरी}}}{100}$$

$$S_{\text{मार्च}} = S_{\text{फरवरी}} \times \frac{A_{\text{मार्च}}}{100}$$

$S_{\text{जनवरी}}$ को $S_{\text{दिसम्बर}} \times \frac{A_{\text{जनवरी}}}{100}$ से भी प्राप्त किया जा सकता है तथा यह 100 के बराबर होना आवश्यक नहीं है। इसका मुख्य कारण यह है कि अन्य घटक, मुख्यतः उपनति, शृंखलिक आपेक्षिकों का औसत लेने पर पूर्ण रूप से विलुप्त नहीं होते। रैखिक उपनति $y = a+bx$ मानने पर, जहां x की इकाई 1 मास है, तथा b का अनुमान इस समीकरण द्वारा लगाया जाता है।

$$b = \frac{1}{12}\left[S_{\text{फरवरी}} \times \frac{A_{\text{जनवरी}}}{100} - 100\right]$$

फरवरी, मार्च,..... दिसम्बर के सूचकांकों से क्रमशः b, 2b, ... 11b को घटाने पर उपनति के लिए संशोधन किया जाता है। अंत में, संशोधित शृंखला आपेक्षिकों का समायोजन किया जाता है, जिससे इनक योग 1200 हो जाए।

यह विधि जिसका कभी बहुत प्रयोग हुआ था, बड़ी जटिल है तथा अरैखिक उपनति का ध्यान नहीं रखती। यह बदलते हुए मौसमी प्रतिरूप के लिए भी उपयुक्त नहीं है।

12.6.4 शृंखलिक आपेक्षिक के उदाहरण

उदाहरण 12.6.2

उत्पादन के निम्नलिखित काल श्रेणी आंकड़ों के लिए शृंखलिक आपेक्षिक विधि द्वारा मौसमी सूचकांक परिकलित कीजिए।

मास/वर्ष	1963	1964	1965	1966
जनवरी	226.7	194.7	185.2	221.1
फरवरी	208.1	176.2	175.1	223.2
मार्च	237.1	201.7	202.8	267.7
अप्रैल	243.3	201.1	203.2	259.0
मई	248.3	197.4	205.8	261.5
जून	228.4	191.1	190.5	259.3
जुलाई	212.3	174.9	177.9	243.1
अगस्त	217.1	182.4	202.9	257.3
सितम्बर	222.7	189.6	213.3	265.6
अक्तूबर	235.5	218.1	236.9	292.2
नवम्बर	222.3	211.6	236.1	291.5
दिसम्बर	218.4	206.0	225.4	294.8

हल

प्रत्येक मासिक संख्या को उससे पहले मास की संख्या के प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है, जिससे निम्नलिखित शृंखलिक आपेक्षिक प्राप्त होता है।

शृंखलित आपेक्षिक विधि द्वारा मौसमी सूचकांक

मास/वर्ष	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्तूबर	नवंबर	दिसंबर
1963	—	91.8	113.9	102.6	102.0	92.0	92.9	102.3	102.6	105.7	94.4	98.2
1964	89.1	90.5	114.5	99.7	98.2	96.8	91.5	104.3	103.9	115.0	97.0	97.4
1965	89.9	94.5	115.8	100.2	101.3	92.6	93.4	114.0	105.1	111.1	99.7	95.5
1966	98.0	100.9	119.9	96.8	101.0	99.2	93.8	105.8	103.2	110.0	99.8	101.1
माध्य	92.3	94.4	116.0	99.8	100.6	95.2	92.9	106.6	103.7	110.5	97.8	98.1
शृंखला आपेक्षिक A	100	94.4	109.6	109.4	110.0	104.7	97.3	103.7	107.5	118.8	116.0	113:8
उपनति संशोधन	100	94.0	108.7	108.1	108.3	102.6	94.7	100.7	104.1	114.9	111.8	109.2
समायोजित मौसमी सूचकांक	95.40	89.70	103.80	103.20	103.4	97.9	90.4	96.1	99.4	109.8	106.7	104.2

उपनति संशोधन $b = \frac{113.78 \times .9233 - 100}{12} = 0.4211$

संशुद्धि संख्या $= \frac{1200}{1257.26} = 0.95446$

नोट

1) फरवरी 1963 का शृंखलिक आपेक्षिक $= \frac{208.1}{226.7} \times 100 = 91.8$ है

तथा मार्च 1963 $= \frac{237.1}{208.1} \times 100 = 113.9$ है।

2) प्रत्येक मास के शृंखलिक आपेक्षिक का माध्य (समांतर माध्य) औसत रूप में उस मास की पिछले मास से संबंधित प्रतिशत मान को दर्शाता है। इस प्रकार मार्च के लिए औसत मान

$= 1/4\ (113.9 + 114.5 + 115.8 + 119.9)$

$= 1/4\ (464.1) = 116.02$ है

3) शृंखला आपेक्षिकों का परिकलन इस प्रकार किया जाता है :

जनवरी के लिए $= 100$ (कल्पित मान)

फरवरी के लिए $= 100 \times 0.9442 = 94.42$

मार्च के लिए $= 94.42 \times 1.1602 = 109.55$

दिसम्बर के लिए $= 116.04 \times .9805 = 113.78$
आगामी जनवरी के लिए $= 113.78 \times .923 = 105.053$

जहां पर 0.9223 = जनवरी का औसत शृंखलिक आपेक्षिक ÷ 100 है, अतः जनवरी का यह शृंखला आपेक्षिक मान पहले कल्पित शृंखला आपेक्षिक मान से भिन्न है। इनमें अंतर $= 105.053 - 100 = 5.053$ का है।

इस अंतर का कारण उपनति की विद्यमानता है।

4) उपनति संशोधन $b = 5.053/12 = -0.4211$ होगा।
अब उपनति संशोधित मान इस प्रकार प्राप्त किए जाते हैं :
जनवरी के लिए 100; फरवरी के लिए $94.42 - b = 94.42 - 0.42 = 94.00$
मार्च: $109.55 - 2b = 109.55 + 0.84 = 108.71$ इत्यादि।

5) उपनति संशोधित मानों का योग $= 100 + 94.0 + 108.71 + ... + 109.15$
$= 1257.26$
संशुद्धि संख्या $= \frac{1200}{1257.26} = .95446$ है।
(जिससे समायोजित मौसमी सूचकांकों का योग 1200 हो जाए)

6) समायोजित मौसमी सूचकांक इस प्रकार होंगे :
जनवरी : $100 \times .95446 = 95.4$
फरवरी : $94.0 \times .95446 = 89.7$

दिसम्बर : $109.15 \times .95446 = 104.2$

बोध प्रश्न 3

1) निम्नलिखित आंकड़ों में 1972 से 1975 वर्षों तक स्टील के तैयार डिब्बों की संख्या दी हुई है :

स्टील के तैयार डिब्बों का उत्पादन ('000 डिब्बे)

वर्ष	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितंबर	अक्तूबर	नवंबर	दिसंबर
1972	420	414	502	365	368	332	390	396	429	417	422	496
1973	491	466	516	337	342	360	409	402	372	391	394	446
1974	463	465	478	310	325	406	415	437	438	445	430	416
1975	502	487	536	404	418	429	489	492	475	456	476	476

शृंखलिक आपेक्षिक विधि द्वारा मौसमी सूचकांक परिकलित कीजिए।

....

....

....

....

....

....

2) निम्नलिखित सारणी में भारत में 1972 से 1975 तक विभिन्न त्रैमासों में स्टील उत्पादन ('000 टन में) दिया हुआ है :

वर्ष	पहला त्रैमास	दूसरा त्रैमास	तीसरा त्रैमास	चौथा त्रैमास
1972	1,336	1,065	1,215	1,335
1973	1,463	1,039	1,183	1,161
1974	1,306	1,041	1,290	1,321
1975	1,525	1,251	1,456	1,408

रैखिक उपनति मानकर, उपनति अनुपात विधि द्वारा मौसमी सूचकांक प्राप्त कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

3) किसी दुकान के एक विशेष प्रकार के वस्त्र की बिक्री के मौसमी सूचकांक निम्नलिखित हैं:

त्रैमास	मौसमी सूचकांक
जनवरी-मार्च	97
अप्रैल-जून	85
जुलाई-सितम्बर	83
अक्तूबर-दिसम्बर	135

अगर पहले त्रैमास में कुल बिक्री का मूल्य 15,000 रुपए है तो उसको कितने मूल्य के इस प्रकार के वस्त्र भंडार में रखने चाहिए जिससे वर्ष की अन्य त्रैमासों की मांग पूरी की जा सके।

....

....

....

....

....

12.7 सारांश

काल श्रेणी एक चर के प्रेक्षणों का समुच्चय होता है जोकि एक समयावधि, प्रायः समान समय अंतराल, में लिखित किए जाते हैं। संबंधित चर में परिवर्तनों को कुछ सीमा तक काल श्रेणी के घटकों के आधार पर समझाया जा सकता है। ये घटक उपनति, मौसमी विचरण, चक्रीय उच्चावचन तथा यादृच्छिक विचरण होते हैं। चर का प्रेक्षित मान या तो उपरोक्त घटकों की गुणा के रूप में (गुणात्मक प्रतिरूप) या घटकों के योग के रूप में (योज्य प्रतिरूप) निरूपित किया जाता है।

गतिमान माध्य विधि, या न्यूनतम वर्ग विधि द्वारा समीकरण के समंजन के द्वारा उपनति का मापन किया जाता है। उपनति का अनुमान लगाने के बाद हम भविष्य के मानों का आकलन कर सकते हैं तथा वार्षिक आंकड़ों से मासिक या त्रैमासिक मान ज्ञात कर सकते हैं।

मौसमी विचरणों का आकलन दो विधियों दारा किया जा सकता है: उपनति से अनुपात विधि तथा शृंखलिक आपेक्षिक विधि। उपनति से अनुपात विधि में पहले उपनति रेखा आकलित की जाती है तथा बाद में

उपनति का निराकरण किया जाता है । अवशिष्टों (Residuals) का माध्य लेकर चक्रीय तथा अनियमित विचरणों का निराकरण किया जाता है । शृंखलिक आपेक्षिक विधि में प्रत्येक प्रेक्षण को उससे पहले प्रेक्षण के प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है, जिसको शृंखलिक आपेक्षिक कहते हैं । औसत मासिक शृंखलिक आपेक्षिकों का उपनति विचरणों के लिए संशोधन किया जाता है तथा संशोधन संख्या द्वारा समायोजन किया जाता है, जिससे हमें मौसमी विचरण का अनुमान प्राप्त होता है ।

12.8 शब्दावली

चक्रीय विचरण : काल श्रेणी का दोलनी संचलन जहां पर दोलन का काल, जिसको चक्र कहते हैं, एक वर्ष से अधिक होता है ।

अनियमित विचरण : काल श्रेणी का यादृच्छिक संचलन जिसके अन्य घटकों द्वारा व्याख्या नहीं होती । इस दृष्टि से यह अन्य घटकों का अवशिष्ट होता है ।

न्यूनतम वर्ग विधि : जब काल श्रेणी में एक बहुपद का समंजन किया जाता है तो न्यूनतम वर्ग विधि के लिए यह आवश्यक है कि फलन के प्राचलों (parameters) का चयन इस प्रकार किया जाए जिससे वास्तविक प्रेक्षण तथा प्रत्याशित मानों के विचलनों के वर्ग का योग न्यूनतम हो ।

गतिमान माध्य विधि : गतिमान माध्य का एक उपयुक्त काल लेकर (मान लीजिए 3 वर्ष), इस परिस्थिति में तीन लगातार वर्षों के औसत मानों की शृंखला परिकलित की जाती है । प्राप्त माध्य, माध्य वर्ष के सामने लिखे जाते हैं ।

मौसमी विचरण : ऐसा आवर्ती संचलन जिसका काल एक वर्ष से अधिक नहीं होता ।

दीर्घकालिक उपनति : काल श्रेणी का एक अवधि में मसृण (smooth) नियमित तथा दीर्घकालीन संचलन । उपनति उपरिमुखी या बढ़ती हुई अधोमुखी या घटती हुई हो सकती है या अवधि में लगभग स्थिर रह सकती है ।

12.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Nagar, A.L. and R.K. Das, 1989: *Basic Statistics*, Oxford University Press, Delhi

Goon, A.M., M.K. Gupta and B. Dasgupta, 1987: *Basic Statistics*, The World Press Pvt. Ltd., Calcutta.

मेहता, बी.सी. 1986, *प्रारंभिक सांख्यिकी*, राजस्थान हिन्दी ग्रंथ अकादमी, जयपुर, अध्याय 11

12.10 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) $Y_{1972} = 198$
2) आलेख पृष्ठ पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद की संख्याओं को अंकित कीजिए । 5 वर्षीय गतिमान माध्य ज्ञात करके इनको भी इस आलेख पर अंकित कीजिए ।

बोध प्रश्न 2

1) हल :

रैखिक उपनति का समंजन

वर्ष	उत्पादन (y)	x	x^2	xy
1970	38	−2	4	−76
1971	40	−1	1	−40
1972	41	0	0	0
1973	45	1	1	45
1974	47	2	4	94
योग	211	0	10	23

प्रसामान्य समीकरण इस प्रकार हैं :

$\Sigma y = na + b\Sigma x$

$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2$

सारणी से प्रसामान्य समीकरणों में मान रखने पर

$5a = 211 \therefore a = 42.2$

$10b = 23 \therefore b = 2.3$

उपनति समीकरण $y = a + \frac{b}{12}x$

$= 42.2 + 0.19x$

(मूल बिन्दु 30 जून 1972, x की इकाई = 1 मास)

मूल बिन्दु का जुलाई, 1972 में स्थानांतरण करने पर मासिक उपनति समीकरण

$y = 42.2 + 0.19\left(x + \frac{1}{2}\right)$ प्राप्त होता है।

इस उपनति समीकरण से हम मार्च, 1971 तथा सितम्बर, 1973 के उत्पादन का आकलन करते हैं।

मार्च, 1971 के लिए x का मान = −16

$\therefore y = 42.2 + 0.19\left(-16 + \frac{1}{2}\right)$

$= 42.2 - 15.5 \times 0.19 = 42.2 - 2.94 = 39.26$ होगा।

सितम्बर 1973 के लिए $x = 14$

$\therefore y = 42.2 + 0.19\,(14.5) = 42.2 + 2.76 = 44.96$

2) 45.2 टन

3) 22

बोध प्रश्न 3

1) जनवरी, फरवरी, मार्च .... के लिए 114.10, 103.93, 122.86 ...... आदि में

2) चार त्रैमासों के लिए 112.27, 86.62, 100.21 तथा 100.90

3) 13,144, 12,8325, 20876 रुपए

12.11 पारिभाषिक शब्दावली

अनियमित विचरण — irregular variations

उपनति से अनुपात विधि — ratio to trend method

गतिमान माध्य विधि	**moving average method**
गुणात्मक प्रतिरूप	**multiplicative model**
चक्रीय उच्चावचन	cyclical fluctuations
दीर्घकालिक उपनति	secular trend
न्यूनतम वर्ग विधि	method of least squares
बहुपद समंजन विधि	method of fitting polynomial
मौसमी विचरण	seasonal variations
योज्य प्रतिरूप	additive model
शृंखलिक आपेक्षित विधि	method of link relatives.

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGEC-03

प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियां और सर्वेक्षण तकनीकें

खंड

7

प्रायिकता तथा प्रायिकता बंटन

खंड 7 प्रायिकता तथा प्रायिकता बंटन

इस खंड में आपका परिचय प्रायिकता की मूल अवधारणाओं, प्रमेय तथा अधिक महत्वपूर्ण प्रायिकता बंटनों से कराया जाएगा। इस खंड में दो इकाइयां हैं। इकाई 13 में मूल अवधारणाएं प्रायिकता के प्रमेय जिनमें गणितीय प्रत्याशा सम्मिलित है, दी गई हैं। इकाई 14 में द्विपद, पाइसों तथा प्रसामान्य प्रायिकता बंटन दिए गए हैं जो आपको प्रतिचयन तथा सांख्यिकीय अनुमिति को समझने के लिए तैयार करेंगे।

इकाई 13 प्रायिकता

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आपको :

- प्रायिकता की धारणा की जानकारी प्राप्त होगी
- कुछ मूल प्रमेयों की जानकारी प्राप्त होगी, जिसके द्वारा आप प्रायिकता के अभ्यासों को हल कर सकेंगे ,
- अनिश्चितता की परिस्थितियों में प्रायिकता के सिद्धांतों के अनुप्रयोग द्वारा प्रत्याशित मान ज्ञात करना सीख सकेंगे ।

13.1 प्रस्तावना

प्रतिदिन प्रायः इस प्रकार के कथन सुनने में आते हैं
.........आज शाम को वर्षा होने की संभावना है
........आगामी चुनाव में दल x को बहुमत प्राप्त होने की संभावना है
........क्योंकि खाड़ी युद्ध समाप्त हो गया है इसलिए तेल की कीमतें कम होने की संभावना है.........आदि ।

इस प्रकार के कथनों में अनिश्चितता का कुछ अंश होता है, अर्थात् चाहे किसी घटना के घटित होने की संभावना है लेकिन इसके बारे में पूर्णतया निश्चित रूप से नहीं कहा जा सकता । किसी कथन के विश्वास्यता

स्तर का प्रायः इस कथन के साथ संलग्न भार के रूप में व्यक्त किया जाता है। इस भार को किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता कहा जाता है। प्रायिकता सिद्धांत द्वारा इस अनिश्चितता का संख्यात्मक माप प्राप्त होता है। प्रायिकता की धारणा को किसी तरह से भी व्यक्तिपरक होना आवश्यक नहीं है।

प्रायिकता सिद्धांत की उत्पत्ति जुआ खेलने से संबंधित संयोगक्रीड़ा से संबंधित है, जैसे रूलेट चक्र, पासा या सिक्का उछालना, ताश की गड्डी से एक पत्ता निकालना आदि। इटली के गणितज्ञ जेरोम कार्डन (1501–1516) ने सर्वप्रथम इस विषय पर लिखा था। उनकी पुस्तक 'Boo . on Games of Chance' (संयोग-क्रीड़ा पर पुस्तक) में, जो कि उनकी मृत्यु के पश्चात 1663 में प्रकाशित हुई, संयोगक्रीड़ा और जुआ खेलने की जोखिमों को न्यूनतमीकरण करने तथा अपने आपको ठगे जाने से बचने के बहुत से नियम दिए हुए हैं। लेकिन, प्रायिकता सिद्धांत की व्यवस्थित तथा वैज्ञानिक आधारशिला फ्रांसीसी गणितज्ञों ब्लाइज पास्कल तथा पाइरे डी. फरमेट द्वारा सतरहवीं शताब्दी के मध्य में रखी गई। महान स्विस (Swiss) गणित जेम्स बर्नोली (1654–1705) ने बीस वर्ष तक इस विषय पर विस्तृत अध्ययन किया। उनकी 'Treatise on Probability' (प्रायिकता पर पुस्तक) 1713 में मरणोपरांत प्रकाशित हुई। अठारवीं सदी में अब्राहम डी. मोयवर, टॉमस बेज, लाप्लास ने इस सिद्धांत को और विकसित किया। फिशर तथा नायमन ने प्रायिकता सिद्धांत का आनुभाविक उपगमन को प्रस्तुत किया। रूसी गणितज्ञों का सिद्धांत के अभिगृहीती उपगमन के विकास में बड़ा योगदान रहा है। इनमें कुछ मुख्य अंशदाताओं के नाम–चैबाइशेव, ए. मार्कोव, खिन्चाइन, लियोपोनोव, कोलमोग्रोव आदि हैं।

इस विषय का अब अत्यधिक विकास हो चुका है तथा ऐसा एक भी क्षेत्र नहीं है, नाभिकीय व भौतिकी से युद्ध शास्त्र, मौसम-विज्ञान सामाजिक तथा चिकित्सा शास्त्र, जहां प्रायिकता सिद्धांत का प्रयोग न किया जाता हो। व्यावसायिक तथा आर्थिक समस्याओं के मात्रात्मक विश्लेषण में इसका विस्तृत प्रयोग किया जाता है। यह सांख्यिकीय अनुमिति तथा प्रतिचयन सिद्धांत का आवश्यक उपकरण है तथा निर्णय-सिद्धांत का आधार है, जैसे परिकलित जोखिम सहित अनिश्चितता की परिस्थिति में निर्णय करना।

13.2 परिभाषाएं

अब हम प्रायिकता की धारणा सहित कुछ मूल अवधारणाओं की परिभाषा करेंगे।

13.2.1 प्रायिकता

इस वास्तविकता के बावजूद कि प्रायिकता एक ऐसी धारणा है, जिसका विज्ञान की बहुत-सी शाखाओं में तथा प्रतिदिन जीवन में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है, इस शब्द की परिभाषा करना कठिन है। हम कुछ मुख्य विचारधाराओं का जिक्र करेंगे तथा उनमें निहित कठिनाइयों की प्रकृति की व्याख्या करेंगे।

चिरप्रतिष्ठित विचारधारा

इस विचारधारा के अनुसार एक घटना की प्रायिकता f/n अनुपात द्वारा व्यक्त की जाती है। यहां पर 'n' से अर्थ समस्त संभव परस्पर अपवर्जी तथा समप्रायिक परिणामों की संख्या से है तथा 'f' से अर्थ परिणामों की उस संख्या से है जोकि घटना के पक्ष में है। इस विचारधारा से संबंधित दो कठिनाइयां हैं। पहली कठिनाई इस मान्यता के कारण है कि सभी संभावित परिणाम समप्रायिक हैं। दूसरे, प्रकार की कठिनाई इस प्रकार व्यक्त होती है कि कुछ ऐसी घटनाएं होती हैं जिनकी पूर्व प्रायिकता प्राप्त करना असंभव है।

आनुभाविक या अनुपाती बारंबारता दृष्टिकोण

चिरप्रतिष्ठित विचारधारा की कठिनाइयों को प्रायिकता की बारंबारता धारणा द्वारा दूर करने का प्रयास किया गया। इस उपगमन के अनुसार प्रायिकता अनुपाती बारंबारता की उस सीमा के बराबर होती है जब प्रेक्षणों की संख्या अनन्तता के समीप हो। सांकेतिक रूप में,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{f_A}{n}$$

जहां पर f_A घटना A की बारंबारता है तथा n प्रेक्षणों या प्रयोगों की संख्या है।

जब प्रयोगों या प्रेक्षणों की संख्या अधिक हो तो घटना A की आनुपातिक बारंबारता को इस घटना की प्रायिकता का सन्निकटन लिया जा सकता है।

अभिगृहीती उपगमन (Axiomatic Approach)

प्रायिकता सिद्धांत के इस दृष्टिकोण का सर्वप्रथम सुझाव 1933 में एन.एस. कोलमोग्रोव द्वारा दिया गया। इस उपगमन की प्रकृति पूर्णतया गणितीय है तथा समुच्चय सिद्धांत पर आधारित है। प्रारंभ में कुछ आधारभूत संकल्पनाओं की परिभाषा विशेषताओं के संबंध में दी गई हैं जिनके लिए अभिगृहीत (Axiom) जोकि स्वयंसिद्ध सत्य कथन मान लिए जाते हैं, की व्याख्या की जा सकती है इन अभिगृहीतों द्वारा पूर्ण प्रायिकता सिद्धांतों को तर्कसंगत निगमन द्वारा व्युत्पन्न किया जाता है। अभिगृहीती उपगमन प्रायिकता की दोनों परिभाषाओं – चिरप्रतिष्ठित एवं आनुभविक – के संगत है। हम इसको यहीं पर छोड़ेंगे, लेकिन इसका प्रस्तुतिकरण इस पाठ्यक्रम के परिशिष्ट खंड में किया जाएगा।

प्रायिकता की तीनों विचारधाराओं में किसी घटना के घटित होने की प्रायिकता p एक "भिन्न" होती है जिसका मान 0 तथा 1 के मध्य में होता है, अर्थात् $0 \leq p \leq 1$; शून्य का अर्थ घटना का घटित न होना होता है तथा 1 का अर्थ घटना के घटित होने में पूर्ण निश्चितता होता है।

13.2.2 प्रतिदर्श समष्टि

उपरोक्त विवेचन द्वारा यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि प्रायिकताएँ सर्वथा दिए हुए प्रतिदर्श समष्टि से संबंधित होती हैं, जिसका गठन किसी प्रयोग के सभी संभावित परिणामों या घटना या अभिप्रयोगों के द्वारा होता है। प्रतिदर्श समष्टि हमें आदर्श प्रयोग का प्रतिरूप प्रदान करता है क्योंकि परिभाषा के अनुसार प्रयोग के प्रत्येक कल्पनीय परिणाम की एक अद्वितीय बिन्दु द्वारा पूर्ण व्याख्या हो जाती है। प्रतिदर्श समष्टि उन बिन्दुओं द्वारा संघटित होता है जो कि प्रयोग के सभी संभावित परिणामों को निरूपित करते हैं। इस समष्टि को S द्वारा सूचित किया जाता है। सांकेतिक रूप में अगर $e_1, e_2, \ldots, e_n$ एक यादृच्छिक प्रयोग के परस्पर अपवर्जी तथा निश्शेष संभावित परिणाम हैं, तब इन परिणामों से संघटित प्रतिदर्श समष्टि को $S = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ से व्यक्त किया जाता है।

प्रतिदर्श समष्टि के एक भाग को, जिसमें वे बिन्दु शामिल हैं जो एक घटना विशेष को निरूपित करते हैं, उप-प्रतिदर्श समष्टि कहते हैं।

उदाहरण 1

अगर एक सिक्के को यादृच्छिक तरीके से उछाला जाए तो इसके दो संभावित परिणाम होते हैं, शीर्ष (Head) या पुच्छ (Tail) जिनको क्रमशः (H) तथा (T) से सूचित किया जाएगा। इस प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि $S = \{H, T\}$ है तथा प्रतिदर्श समष्टि में अवयवों की संख्या $n(S) = 2$ है। अगर दो सिक्कों को एक साथ उछाला जाए तो $\{S = HH, HT, TH, TT\}$ तथा $n(S) = 4$ होगा। यहां सिक्कों के उछाल के क्रम को मद्दे नजर रखा जाता है।

उदाहरण 2

अगर दो घनाकार पासों को उछाला जाए तो प्रतिदर्श समष्टि में 36 बिन्दु होंगे, जो कि इस प्रकार हैं :

$$S = \begin{bmatrix} (1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & (1,6) \\ (2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & (2,6) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (6,1) & (6,2) & (6,3) & (6,4) & (6,5) & (6,6) \end{bmatrix}$$

तथा $n(S) = 36 = 6 \times 6 = 6^2$, क्योंकि एक पासे की प्रत्येक 6 संख्याएं दूसरे पासे की 6 संख्याओं में से किसी एक के साथ हो सकती है।

उदाहरण 3

अगर तीन सिक्कों को एक साथ उछाला जाता है तो प्रतिदर्श समष्टि $S = \{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}$ और $n(S) = 8 = 2^3$ होगी क्योंकि प्रत्येक सिक्के के दोनों पक्ष बाकी दो सिक्कों के प्रत्येक पक्ष के साथ हो सकते हैं।

13.2.3 घटनाएं

एक यादृच्छिक प्रयोग के प्रतिदर्श समष्टि में सभी संभावित परिणामों में से कुछ परिणाम ऐसे होते हैं जो कि कुछ निश्चित वर्णन द्वारा व्यक्त होते हैं, इनको हम घटना कहते हैं। उदाहरण के लिए, जैसा कि पहले

विवेचन किया जा चुका है, तीन सिक्कों के उछालने पर प्रतिदर्श समष्टि

$S = \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT\}$ होगा।

$= \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7, w_8\}$

जहां पर $W_1 = HHH$, $W_2 = HHT$,...........तथा $W_8 = TTT$ है।

मान लिया E_1 = सभी शीर्ष प्राप्त करने की घटना

तब $E_1 = \{HHH\} = \{W_1\}$

इसी प्रकार

E_2 = ठीक दो शीर्ष प्राप्त करने की घटना

$= \{(HHT), (HTH), (THH)\}$

$= \{W_2, W_3, W_5\}$

E_3 = कम से कम दो शीर्ष प्राप्त करने की घटना

$= \{(HHH), (HHT), (HTH), (THH)\}$

$= \{W_1, W_2, W_3, W_5\}$

E_4 = ठीक एक शीर्ष प्राप्त करने की घटना

$= \{HTT, THT, TTH\}$

$= \{W_4, W_6, W_7\}$

E_5 = कम से कम एक शीर्ष प्राप्त करने की घटना

$= \{HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH\}$

$= \{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6, W_7\}$

इस प्रकार की सभी संभावित घटनाएं एकत्रित रूप में प्रतिदर्श समष्टि का निर्माण करती हैं।

समप्रायिक घटनाएं

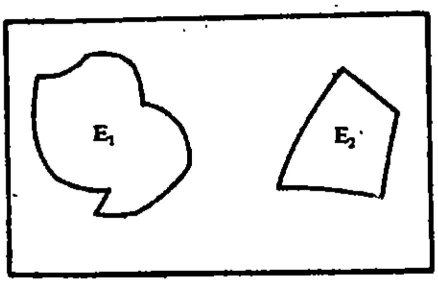
जब एक प्रयोग के परिणामों में से किसी एक परिणाम के अन्य परिणामों के अधिमान में घटित होने की प्रत्याशा न हो तो प्रयोग के परिणामों को समप्रायिक कहा जाता है। अतः सिक्के (पासे) के उछालने में, सभी परिणाम, जैसे $\{HT\}$, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ आदि सिक्के (पासे) के अनगिनत होने पर समप्रायिक होंगे।

परस्पर अपवर्जी घटनाएं

अगर E_1 E_2, E_3.... घटनाओं में से एक समय में केवल एक घटना घटित होती है तो इनको परस्पर अपवर्जी घटनाएं कहा जाता है। दूसरे शब्दों में किसी एक घटना के घटित होने का अर्थ है शेष घटनाओं में से कोई घटित नहीं हो सकती। बाद में हम देखेंगे कि परस्पर अपवर्जी घटनाओं में से किसी एक के घटित होने की प्रायिकता उनकी पृथक प्रायिकताओं के योग के बराबर होती है।

उदाहरण

एक सिक्के के उछाल में घटनाएं "शीर्ष" तथा "पुच्छ" परस्पर अपवर्जी हैं क्योंकि अगर शीर्ष (पुच्छ) ऊपर आता है तो पुच्छ (शीर्ष) नहीं आ सकता। इसी प्रकार पासे के उछाल में 6 फलक, जिनपर 1, 2, 3, 4, 5, 6 अंकित हैं, परस्पर अपवर्जी होते हैं। इनको असंयुक्त घटनाएं भी कहा जाता है क्योंकि इनके उपप्रतिदर्श समष्टि भी असंयुक्त होते हैं अर्थात् इनमें कोई अवयव सर्वनिष्ठ नहीं होते।

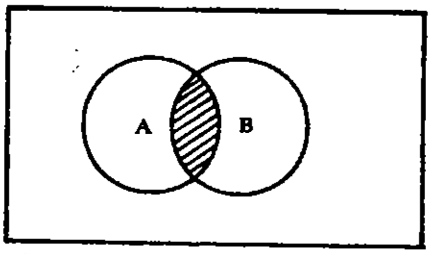


आकृति 13.1

उपरोक्त आकृति में आयत एक दिए हुए प्रतिदर्श समष्टि को निरूपित कर सकता है तथा उप प्रतिदर्श समष्टि E_1 तथा E_2 में वह अवयव (बिन्दु) है जो कि क्रमशः E_1 तथा E_2 के घटित होने के अनुकूल है। यहां पर यह ध्यान दीजिए कि दोनों उपप्रतिदर्श समीष्ट E_1 तथा E_2 पूर्ण रूप से पृथक्कृत हैं, इनमें कोई अवयव (क्षेत्रफल) समान नहीं है। वृत्ताकार उपप्रतिदर्श, जो कि घटनाओं के निरूपण के लिए बिन्दुओं (क्षेत्रफल) से सूचित किया जाता है, वेन (Venn) आरेख कहलाता है।

परस्पर सम्मिलित घटनाएं

अगर दो या दो से अधिक घटनाएं एक साथ घटित होती हैं तो उन्हें परस्पर सम्मिलित या संयुक्त घटनाएं कहा जाता है। उदाहरण के लिए अगर हम घटना A को पूर्णतया फेंटे हुए ताश की गड्डी में से एक इक्का निकलना तथा घटना B को उसी गड्डी में से पान का पत्ता निकालने से परिभाषित करें तो ये दोनों घटनाएं परस्पर अपवर्जी नहीं हैं। इनमें एक अवयव (पान का इक्का) दोनों घटनाओं के अनुकूल है। इस प्रकार की घटनाओं को उपप्रतिदर्श समष्टियों में कुछ क्षेत्रफल दोनों में समान होता है, जैसा कि आकृति 13.2 में दिखाया गया है।



आकृति 13.2

स्वतंत्र घटनाएं

विभिन्न घटनाओं में अगर किसी एक का घटित होना अन्य घटनाओं के घटित होने को न तो प्रभावित करे तथा न ही उनसे प्रभावित हो तो इस प्रकार की घटनाओं को स्वतंत्र घटनाएं कहा जाता है। उदाहरण के लिए

i) एक पासे को बार-बार उछालने में, पहले उछाल में "5" प्राप्त करने की घटना दूसरे उछाल में "5" प्राप्त की घटना से स्वतंत्र है। इसी प्रकार तीसरे तथा बाद के उछाल में भी "5" प्राप्त करने की घटनाएं स्वतंत्र हैं।

ii) लेकिन, अगर ताश की गड्डी से दो ताश निकाले आएं तो दूसरी ताश निकालने का परिणाम पहली ताश निकालने के परिणाम पर निर्भर करेगा। (अगर पहले ताश को वापस गड्डी में न रखा जाए)। लेकिन, अगर पहली ताश वापस गड्डी में रखने के बाद दूसरी ताश निकाली जाती है तो दूसरी ताश का परिणाम पहली ताश के परिणाम से स्वतंत्र होगा।

सामूहिक निश्शेष घटनाएं

अब तक आपको यह ज्ञात हो गया होगा कि किस प्रकार प्रायिकता का मान 0 से 1 के मापक्रम के बीच होता है। असंभव घटना की प्रायिकता शून्य होती है तथा ऐसी घटना जो निश्चित रूप से घटित होने वाली है, की प्रायिकता 1 होती है। एक घटनाओं के समुच्चय {A, B, C, D,....K} को सामूहिक निश्शेष घटनाओं का समुच्चय कहा जाता है अगर इस समुच्चय से बाहर कोई और घटना संभव न हो। इसके द्वारा हम निम्नलिखित व्याख्या कर सकते हैं :

अगर {A, B, ...K} परस्पर अपवर्जी तथा सामूहिक निश्शेष घटनाओं का समुच्चय है तब उनके पृथक रूप में घटित होने की प्रायिकताओं का योग 1 होगा, क्योंकि इनमें से एक अवश्य घटित होगी। उदाहरण 1, 2 तथा 3 में दिए हुए प्रतिदर्श समष्टि सामूहिक निश्शेष घटनाओं के उदाहरण हैं।

क्रमचय तथा संचय के ज्ञान द्वारा हम जानते हैं कि अगर 52 पत्तों की गड्डी में r पत्ते निकालें जाएं तो पत्तों के सुस्पष्ट विभिन्न संभावित समुच्चयों की निश्शेष संख्या 52 होगी क्योंकि r पत्ते 52_{c_r} तरीकों से निकाले जा सकते हैं। (इकाई 4 खंड 2 में क्रमचय तथा संचय के विवेचन का पुनः स्मरण कीजिए)। r पत्तों का सुस्पष्टसंभावित संचयों (जिनकी संख्या 52_{c_r} है) का समुच्चय सामूहिक निश्शेष है तथा इनकी पृथक प्रायिकताओं का योग इकाई के बराबर है।

13.2.4 सप्रतिबंध प्रायिकता

जब घटनाएं परस्पर स्वतंत्र नहीं हैं तथा परस्पर अपवर्जी भी नहीं है तब एक घटना का घटित होना दूसरी घटना के घटित होने पर आश्रित हो सकता है। उदाहरण के लिए अगर आकाश में बादल हैं तो वर्षा हो भी सकती है तथा नहीं भी। लेकिन जब तक आकाश में बादल नहीं हैं तो वर्षा नहीं हो सकती। इसलिए घटना "वर्षा" के घटित होने की प्रायिकता आकाश में बादल होने पर आश्रित है, चाहे आकाश में बादल होने पर भी वर्षा न हो। इस प्रकार, हम वर्षा होने की सप्रतिबंध प्रायिकता को ज्ञात कर सकते हैं जिसमें आकाश में बादल होने की शर्त है। मान लिया एक वर्ष के 365 दिनों में से आकाश में बादल मानसून के चार महीनों – जून से सितम्बर – तक रहते हैं, जोकि $30+31+31+30=122$ दिन होते हैं। अतः आकाश में बादल होने की प्रायिकता $=122/365$ होगी।

लेकिन इन 122 बादल वाले दिनों में मान लिया वर्षा एक-एक दिन छोड़कर अर्थात् लगभग 61 दिन हुई। इस प्रकार वर्षा होने की सप्रतिबंध प्रायिकता जब आकाश में बादल हों तो $61/122= 1/2$ होगी।

अगर दोनों घटनाओं को x तथा y से सूचित किया जाए तब y के घटित होने की सप्रतिबंध प्रायिकता जब कि यह दिया हुआ है कि x घटित हो चुकी है, को $P(y/x)$ से सूचित किया जाता है। इस प्रकार x के घटित होने की सप्रतिबंध प्रायिकता जब y घटित हो चुकी है, को $P(x/y)$ से सूचित किया जाता है। यहां पर यह ध्यान दें कि $P(x/y)$ तथा $P(y/x)$ बराबर होने आवश्यक नहीं हैं। ऊपर दिए हुए उदाहरण में आकाश में बादल होने की सप्रतिबंध प्रायिकता जब कि वर्षा हो चुकी है $= 61/61 = 1$(क्योंकि आकाश में बादलों के बिना वर्षा नहीं हो सकती)।

यहां पर यह भी ध्यान देना आवश्यक है कि एक घटना x के घटित होने की सप्रतिबंध प्रायिकता जब y घटित हो चुकी है, तथा x और y के एक साथ घटित होने की संयुक्त प्रायिकता समान नहीं होती। इसको ऊपर दिए हुए उदाहरण द्वारा निम्नलिखित विधि से समझाया जा सकता है:

आकाश में बादल तथा वर्षा की संयुक्त घटना वर्ष के 365 दिनों में से 61 दिनों में घटित होती है। अतः x (=आकाश में बादल) तथा y (=वर्षा) के संयुक्त घटित होने की प्रायिकता $P(xy) = 61/365$. स्पष्टतः $P(xy) = P(yx)$ होती है। यह प्रायिकता सप्रतिबंध प्रायिकता $P(x/y)$ से भिन्न होती है, अर्थात् वर्षा होने की प्रायिकता जब कि आकाश में बादल हों, जो कि 1/2 है।

बोध प्रश्न 1

1. एक यादृच्छिक प्रयोग पर विचार कीजिए जिसमें 4 सिक्के उछाले जाते हैं। इसके प्रतिदर्श समष्टि का निर्माण कीजिए। निम्नलिखित को परिभाषित कीजिए :

   E_1 : कम से कम तीन शीर्ष प्राप्त करने की घटना

   E_2 : ठीक दो शीर्ष प्राप्त करने की घटना

   E_3 : अधिक से अधिक एक शीर्ष प्राप्त करने की घटना

   E_4 : कोई भी शीर्ष प्राप्त न करने की घटना

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. स्वतंत्र घटनाओं के दो उदाहरण दीजिए।

....

....

3. किसी प्रयोग की अगर A तथा B दो संभावित घटनाएं हैं तथा मान लिया P(A) = 0.4, P(A + B) = 0.7 और P(B) = p. p के किस मान के लिए A तथा B परस्पर अपवर्जी हैं ?

....

....

....

....

4. 400 विद्यार्थियों के बौद्धिक स्तर की परीक्षा ली गई तथा मान लिया इस परीक्षा के आधार पर इन 400 विद्यार्थियों को तीन श्रेणियों-उच्च (H), औसत (A), निम्न (L)-में वर्गीकृत किया गया। तत्पश्चात् इनकी गणित में परीक्षा ली गई। गणित में फेल होने वाले विद्यार्थियों की संख्या का बौद्धिक स्तर परीक्षा की विभिन्न श्रेणियों में बंटन निम्नलिखित है :

400 विद्यार्थियों का बौद्धिक स्तर तथा गणित परीक्षा परिणाम

बौद्धिक स्तर परीक्षा

परीक्षा परिणाम	उच्च (H)	औसत (A)	निम्न (L)	योग
गणित में पास	150	90	60	300
गणित में फेल	40	30	30	100
योग	190	120	90	400

संयुक्त घटना, निम्न बौद्धिक स्तर तथा गणित में फेल होने की प्रायिकता परिकलित कीजिए। गणित में फेल विद्यार्थियों में से निम्न बौद्धिक स्तर की सप्रतिबंध प्रायिकता परिकलित कीजिए। यह जांच कीजिए कि क्या यह सप्रतिबंध प्रायिकता निम्न बौद्धिक स्तर वाले विद्यार्थियों में से फेल होने वाले विद्यार्थियों की सप्रतिबंध प्रायिकता के बराबर है ?

....

....

....

....

....

....

....

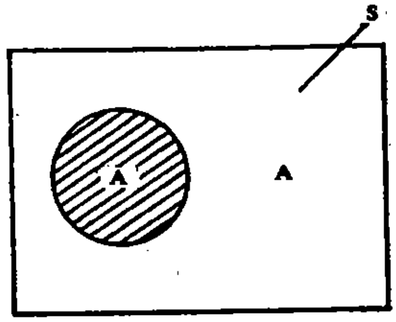
13.3 प्रायिकता के मूल प्रमेय

अब हम प्रायिकता के कुछ मूल प्रमेयों पर विचार करेंगे। मान लिया प्रतिदर्श समष्टि में A, B, C....... घटनाएँ हैं जो कि उपप्रतिदर्श समष्टि से निरूपित होती हैं तथा मान लिया इनकी प्रायिकताएं क्रमशः P(A), P(B), P(C),....... हैं। जैसा कि हम पहले व्याख्या कर चुके हैं, हम यह बिना परिमाण के मान लेते हैं कि प्रतिदर्श समष्टि S के प्रत्येक उपप्रतिदर्श समष्टि A के लिए $0 \le P(A) \le 1$, तथा $P(S) = 1$ होता है।

13.3.1 प्रमेय 1 (पूरक घटनाओं का योग प्रमेय)

अगर घटना A के न घटने को $\bar{A}$ क से सूचित किया जाए तब $P(A) = 1 - P(\bar{A})$, $\bar{A}$ को A का पूरक कहते हैं।

इस कथन के विस्तरण की आवश्यकता नहीं होनी चाहिए। अगर आज वर्षा होने की प्रायिकता 0.40 है तो स्पष्टतः वर्षा न होने की प्रायिकता 0.60 होगी। इस प्रमेय को आकृति 13.3 में दिखाया गया है जहां पर आयत कुल प्रतिदर्श समष्टि (S) को व्यक्त करती है तथा (A) घटना A के उपप्रतिदर्श समष्टि को व्यक्त करती है। $\bar{A}$ (A का न होना) S का वह अंश है जिसमें A नहीं है।

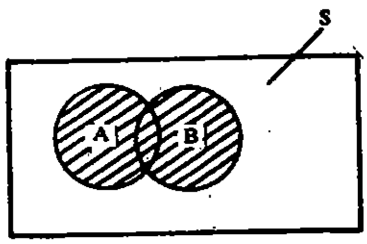


आकृति 13.3

13.3.2 प्रमेय 2 (योग प्रमेय)

$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

इस प्रमेय के अनुसार A या B या दोनों के एक साथ घटित होने की प्रायिकता = A की प्रायिकता + B की प्रायिकता - A तथा B के एक साथ घटित होने की प्रायिकता होती है। इसकी व्याख्या आकृति 13.4 में की गई है। चूंकि A तथा B का कुछ अंश एक-दूसरे पर आच्छादित है इसलिए P(A) तथा P(B) के योग में से P(AB) को घटाना होता है अन्यथा इसकी गणना दो बार हो जाएगी।



आकृति 13.4

उदाहरण 1

ताश के 52 पत्तों में से एक पत्ता यादृच्छिक तरीके से निकाला गया, इस पत्ते के चिड़ी का पत्ता या चेहरा पत्ता होने की प्रायिकता पर विचार कीजिए। मान लिया A = चिड़ी का पत्ता तथा B = चेहरा पत्ता (Face Card) हैं। यह ध्यान दीजिए कि

$P(A) = 13/52$ (क्योंकि 52 पत्तों में से 13 पत्ते ही चिड़ी के होते हैं)

$P(B) = 12/52$ (क्योंकि गड्डी में 12 चेहरा पत्ते होते हैं)

तथा $P(AB) = 3/52$ (क्योंकि चिड़ी के 3 पत्ते चेहरा पत्ते होते हैं)

तब $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

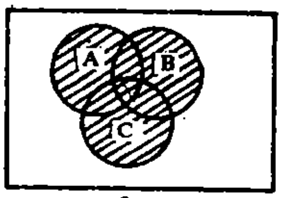
$P(A+B) = 13/52+12/52-3/22 = 22/52 = 11/26$

संकेत : यहां पर यह स्पष्ट है कि दोनों घटनाएं परस्पर अपवर्जी नहीं हैं अर्थात् कुछ बिन्दु ऐसे हैं जो कि दोनों घटनाओं में सम्मिलित हैं।

योग प्रमेय का विस्तार दो से अधिक घटनाओं के लिए भी किया जा सकता है। अगर तीन घटनाएं A, B, तथा C हैं तो इस नियम को इस प्रकार लिखा जा सकता है।

$$P(A+B+C) = P(A)+P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC)$$

इसकी व्याख्या आकृति 13.5 में की गई है।



आकृति 13.5

उदाहरण 2

तीन पाठ्यक्रमों की परीक्षा में निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

पाठ्यक्रम A में 35 प्रतिशत विद्यार्थी पास हुए।
पाठ्यक्रम B में 20 प्रतिशत विद्यार्थी पास हुए।
पाठ्यक्रम C में 25 प्रतिशत विद्यार्थी पास हुए।
पाठ्यक्रम A तथा B में 10 प्रतिशत विद्यार्थी पास हुए।
पाठ्यक्रम A तथा C में 5 प्रतिशत विद्यार्थी पास हुए।
पाठ्यक्रम B तथा C में 8 प्रतिशत विद्यार्थी पास हुए।

तथा सभी पाठ्यक्रमों में 2 प्रतिशत विद्यार्थी पास हुए।

एक विद्यार्थी के कम से कम एक पाठ्यक्रम में पास अंक प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

हल

हमें दिया हुआ है:

$P(A) = 0.35,\ P(B) = 0.20\ P(C) = 0.25\ P(AB) = 0.10$

$P(AC) = 0.05\ P(BC) = 0.08$ और $P(ABC) = 0.02$

हमें विद्यार्थी की A, B या C या एक से अधिक पाठ्यक्रम में पास होने की प्रायिकता ज्ञात करनी है। सांकेतिक रूप में यह प्रायिकता

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$$

$= 0.35 + 0.20 + 0.25 - 0.10 - 0.05 - 0.08 + 0.02$

$= 0.59$ है।

उदाहरण 3

छः सतह वाले पासे (Cube) को उछालने पर "1" या "2" प्राप्त करने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

$$P(\text{“1”} + \text{“2”}) = P(\text{“1”}) + P(\text{“2”}) - P(\text{“1”}, \text{“2”}) = 1/6 + 1/6 - 0 = 1/2$$

यह उदाहरण योग प्रमेय का सीमित रूप है। यहां पर दो परिणाम "1" तथा "2" परस्पर अपवर्जी हैं इसलिए P ("1", "2") = 0 है। इस परिस्थिति में योग प्रमेय का साधारण रूप इस प्रकार है। अगर n घटनाएं $A_1, A_2, \ldots, A_n$ परस्पर अपवर्जी हैं तो

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

अब हम ऐसी घटनाओं की जांच करेंगे जो परस्पर अपवर्जी नहीं हैं। ऐसी परिस्थिति पर विचार कीजिए जिसमें समष्टि से एक व्यक्ति को यादृच्छिक तरीके से चयन करके उसकी दो विशेषताओं, धूम्रपान आदत S (या $\bar{S}$ = धूम्रपान न करने की आदत) तथा लिंग (M या F) को लिखित किया जाता है। ये दो विशेषताएं परस्पर अपवर्जी होनी आवश्यक नहीं हैं। इस प्रयोग का प्रतिदर्श समष्टि {(MS), (FS), ($M\bar{S}$), ($F\bar{S}$)} होगा। यहां पर (MS) धूम्रपान करने वाले पुरुषों को निरुपित करता है इत्यादि। अगर समष्टि सीमित है तो बंटन की निम्नलिखित तरीके से व्याख्या की जा सकती है:

सारणी : 1

लिंग/धूम्रपान आदत	S	$\bar{S}$	योग
M	a (MS)	b ($M\bar{S}$)	a+b (M)
F	c (FS)	d ($F\bar{S}$)	c+d (F)
योग	a+c (S)	b+d ($\bar{S}$)	a+b+c+d (N)

a, b, c तथा d प्रविष्टियां क्रमशः (MS), ($M\bar{S}$), (FS) तथा ($F\bar{S}$) की संयुक्त बारंबारताओं को निरूपित करती है। अंतिम पंक्ति तथा अंतिम स्तंभ में बारंबारताएं क्रमशः धूम्रपान आदत तथा लिंग के बंटन की सीमांत बारंबारताएं कहलाती हैं।

$P(M) = \dfrac{(M)}{(N)}$ द्वारा पुरुष चयन करने की प्रायिकता प्राप्त होती है चाहे वह धूम्रपान करने वाला हो या न हो। $P(S) = \dfrac{(S)}{(N)}$ द्वारा धूम्रपान करने वाले व्यक्ति का चयन करने की प्रायिकता प्राप्त होगी चाहे उसका कोई भी लिंग हो। अगर हम धूम्रपान करने वाले व्यक्ति, जिसका लिंग दिया हुआ है, की प्रायिकता ज्ञात करना चाहें तो ऐसी प्रायिकता सप्रतिबंध प्रायिकता होगी, संकेत के रूप में

$P(S/M) = \dfrac{(SM)}{(M)} = \dfrac{P(SM)}{P(M)}$ द्वारा हमें धूम्रपान करने वाले व्यक्ति की सप्रतिबंध प्रायिकता प्राप्त होगी, जब कि यह ज्ञात है कि वह पुरुष है।

13.3.3 प्रमेय 3 (गुणन प्रमेय)

मान लिया एक प्रयोग के n संभावित परिणाम है, जो कि परस्पर अपवर्जी तथा समप्रायिक हैं। मान लिया इनमें से f_1 घटना A के घटित होने के अनुकूल है, f_2 घटना B के अनुकूल हैं तथा f_2 दोनों के घटित होने के अनुकूल है। तब दोनों के एक साथ घटित होने की प्रायिकता $P(A+B) = \dfrac{f_{12}}{n}$ होगी, इस प्रायिकता को निम्नलिखित तरीके से भी लिखा जा सकता है :

$$P(AB) = \frac{f_{12}}{f_1} \times \frac{f_1}{n}$$

$$\text{अर्थात्, } P(AB) = P\left(\frac{B}{A}\right) . P(A)$$

जहां पर $\dfrac{f_{12}}{f_1}$, B की सप्रतिबंध प्रायिकता है, जब कि A घटित हो चुका है तथा $P(A) = \dfrac{f_1}{n}$, A के घटित होने की अप्रतिबंध या सीमांत प्रायिकता है।

इसी प्रकार $P(AB) = \frac{f_{12}}{n} = \frac{f_{12}}{f_2} \times \frac{f_2}{n} = P\left(\frac{A}{B}\right) . P(B)$

जहां पर $P\left(\frac{A}{B}\right)$ तथा P(B) की समरूप व्याख्याएं हैं। जैसा कि पहले देखा था, यहां पर $P\left(\frac{A}{B}\right)$ तथा $P\left(\frac{B}{A}\right)$ बराबर होने आवश्यक नहीं हैं। वास्तव में ये एक-दूसरे के बराबर एक ही परिस्थिति में होते हैं, जब $P(A) = P(B) = 0$ हो।

उपरोक्त प्रतिपादन द्वारा हम सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात करने के प्रत्यक्ष सूत्र इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(AB)}{P(B)}$$

तथा, $$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

जब भी $P(A) \neq 0, P(B) \neq 0$

घटनाओं की स्वतंत्रता

अगर A तथा B स्वतंत्र हैं तो A के घटित होने या घटित न होने की प्रायिकता B के घटित होने या घटित न होने से प्रभावित नहीं होती। इसलिए $P\left(\frac{A}{B}\right) = P(A)$ तथा $P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B)$

इस शर्त का अर्थ है कि B's में A's का अनुपात समिष्ट में A's के अनुपात के बराबर है तथा यह B's में A's के अनुपात के बराबर है। इसी प्रकार A's में B's का अनुपात समिष्ट में B's के अनुपात के बराबर है तथा यह A's में B's के अनुपात के बराबर है।

उदाहरण : ताश की गड्डी में से इक्का निकालने की सप्रतिबंध प्रायिकता ज्ञात कीजिए, जब यह ज्ञात हो कि हाथ में चिड़ी का पत्ता है।

हल

मान लिया A इक्का निकालने की घटना को सूचित करता है तथा B चिड़ी का पत्ता निकालने को सूचित करता है। तब हमें P(A/B) ज्ञात करनी है।

अब, $$P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{1/52}{13/52} = \frac{1}{13}$$

यहां पर यह ध्यान दीजिए कि $P(A) = 4/52 = 1/13$, = गड्डी में से इक्का निकालने की प्रायिकता है। अतः $P(A/B) = P(A)$

इसका अर्थ है कि A तथा B स्वतंत्र घटनाएं हैं।

विकल्पतः चिड़ी के पत्तों में इक्कों का अनुपात $= 1/13$ है।
गड्डी में इक्कों का अनुपात $= 4/52 = 1/13$ है।
चिड़ी के पत्तों को निकालकर शेष पत्तों में इक्कों का अनुपात $= 3/39 = 1/13$ है।
इस प्रकार A तथा B स्वतंत्र घटनाएं हैं।

उपरोक्त विकसित स्वतंत्र घटनाओं के नियम को गुणात्मक नियम में प्रयोग करने पर

$$P(AB) = P(A/B). P(B) = P(A). P(B)$$

या $$P(AB) = P(B/A). P(A) = P(B). P(A)$$

अब हमारे पास दो या दो से अधिक घटनाओं की स्वतंत्रता जांच करने का एक सरल नियम है। घटनाएं A तथा B स्वतंत्र घटनाएं होंगी अगर उनके संयुक्त घटित होने की प्रायिकता उनके पृथक घटिक होने की प्रायिकताओं के गुणनफल के बराबर हो।

अब स्वतंत्र घटनाओं के लिए संशोधित गुणात्मक नियम के व्यापक रूप को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$P(A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n) = P(A_1). P(A_2). P(A_3) \ldots P(A_n)$$

उद. ७

अगर दो छह सतह वाले पासों को उछाला जाता है तो एक पासे पर सम संख्या तथा दूसरे पर विषम संख्या की प्रायिकता क्या होगी ?

हल : मान लिया E = सम संख्या तथा 0 = विषम संख्या,

इसलिए $P(E) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ तथा $P(O) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

क्योंकि E तथा O स्वतंत्र हैं, इसलिए

$P(EO) = P(E).\ P(O)$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ है ।

13.3.4 प्रमेय 4 (बेज़ प्रमेय)

पहले अनुभाग में हमने यह देखा कि

$$P(AB) = P\left(\frac{A}{B}\right).\ P(B) = P\left(\frac{B}{A}\right).\ P(A)$$

इसके द्वारा हम यह लिख सकते हैं :

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{P(A/B)\ .\ P(B)}{P(A)}$$

यह अवधारणा प्रतिलोम प्रायिकता प्राप्त करने में बहुत ही उपयोगी है । इस बात की व्याख्या हम एक उदाहरण की सहायता से करेंगे ।

उदाहरण

दो समरूप बक्से हैं जिनमें क्रमशः (i) 4 सफेद तथा 3 लाल गेंद, तथा (ii) 3 सफेद तथा 7 लाल गेंद हैं । यादृच्छिक विधि से एक बक्से का चयन करके एक गेंद को निकाला गया ।

(क) निकाली गई गेंद के सफेद होने की क्या प्रायिकता है ?

(ख) अगर निकाली गई गेंद सफेद है तो इसके पहले बक्से से प्राप्त होने की क्या प्रायिकता है?

हलः

(क) मान लिया A पहले बक्से को तथा B दूसरे बक्से को सूचित करता है । जब बक्से का चुनाव यादृच्छिक विधि से किया गया है तो $P(A) = P(B) = \frac{1}{2}$ अर्थात् दोनों घटनाएं समप्रायिक हैं । अगर A बक्से का चयन होता है तो सफेद गेंद की प्रायिकता 4/7 है, जो कि सफेद गेंद के निकालने की सप्रतिबंध प्रायिकता है, जब A बक्से का चयन किया गया है, अर्थात् $P\left(\frac{W}{A}\right) = 4/7$ इसी प्रकार $P\left(\frac{W}{B}\right) = 3/10$ सफेद गेंद की सप्रतिबंध प्रायिकता है जब B बक्से का चयन किया गया है । साथ ही A से सफेद गेंद निकालने की तथा B से सफेद गेंद निकालने की घटनाएं परस्पर अपवर्जी हैं इसलिए

$$\begin{aligned} P(W) &= P(WA) + P(WB) \\ &= P(A).\ P(W/A) + P(B).\ P(W/B) \\ &= 1/2 \times 4/7 + 1/2 \times 3/10 \\ &= 61/140 \end{aligned}$$

(ख) चूंकि $P(AW) = P(A).\ P\left(\frac{W}{A}\right) = P(W).\ P\left(\frac{A}{W}\right)$

इसलिए $P\left(\frac{A}{W}\right) = \frac{P(AW)}{P(W)} = \frac{P(A).\ P(W/A)}{P(W)}$

यह व्यंजक घटना A की प्रायिकता को निरूपित करता है, जबकि यह ज्ञात है कि निकाली हुई गेंद सफेद है अर्थात् पहले बक्से से गेंद प्राप्त करने की प्रायिकता जबकि निकाली हुई गेंद सफेद है । इसको प्रतिलोम प्रायिकता कहते हैं ।

$$P\left(\frac{A}{W}\right) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{4}{7}}{\frac{1}{2} \times \frac{4}{7} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{10}} = \frac{\frac{4}{14}}{\frac{61}{140}} = \frac{4}{14} \times \frac{140}{61} = \frac{40}{61}$$

प्रतिलोम प्रायिकता की यह धारणा सबसे पहले बेज़ के द्वारा दी गई, इसलिए, उपरोक्त परिणाम को बेज़ प्रमेय के नाम से जाना जाता है।

बोध प्रश्न 2

1. A तथा B की स्वतंत्र रूप से सच बोलने की प्रायिकताएं क्रमशः p तथा p' हैं। अगर दोनों समान कथन करें तो उनके द्वारा सच बोले जाने की प्रायिकता क्या होगी ?

....

....

....

....

....

....

2. सांख्यिकी का एक प्रश्न तीन विद्यार्थियों A, B तथा C को दिया गया, जिनकी इसे हल करने की प्रायिकताएं क्रमशः 1/3, 1/4, 1/5 है। प्रश्न हल होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए .

....

....

....

....

....

....

....

....

3. भारत की इंगलैंड के विरुद्ध क्रिकेट टैस्ट मैच जीतने की प्रायिकता 1/3 है। अगर दोनों देश तीन टैस्ट मैच खेलें तो निम्नलिखित प्रायिकताएं ज्ञात कीजिए :

(क) भारत तीनों मैच हार जाएगा।

(ख) भारत कम से कम एक मैच जीतेगा।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

$$= \frac{\frac{1}{2} \times 20 + \frac{1}{2}(-10)}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \frac{10 - 5}{1} = 5$$

इस प्रकार प्रत्याशित मान परिणामों का भारित माध्य होता है, जहां पर प्रत्येक परिणाम से संबंधित प्रायिकताएं भार होती हैं। लाजमी तौर पर भारों का योग इकाई के बराबर होता है।

उदाहरण 2

एक यादृच्छिक चर x के n विभिन्न मान $x_1, x_2.....x_n$ हो सकते हैं। इनकी सहचारी प्रायिकताएं क्रमशः $p(x_1), p(x_2).....p(x_n)$ हैं। x का प्रत्याशित मान क्या है ?

हल

परिणाम	x_1, x_2 .... x_n
प्रायिकता	$p(x_1), (x_2)$ ....$p(x_n)$

$$E(x) = x_1\, p(x_1) + x_2\, p(x_2) + \ldots\ldots + x_n\, p(x_n)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i) = \Sigma\, xp(x)$$ सरलता के लिए i को न लिखने पर -

यहां यह ध्यान दें कि $p(x_i) = \frac{f_i}{n}$

जहां पर $f_i = x_i$ के घटित होने की बारंबारता; $i = 1, 2,.....n$

तथा $n = \sum_{i=1}^{n} f_i$ घटना के घटित होने की कुल संख्या है।

इसलिए $$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{f_i}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i\, f_i = \frac{\Sigma\, x_i\, f_i}{\Sigma\, f_i} = \bar{x}$$

इस उदाहरण द्वारा यह प्रदर्शित होता है कि गणितीय प्रत्याशा यादृच्छिक चर के भारित माध्य के बराबर होती है। इस माध्य में भार तुलनात्मक बारंबारताएं/प्रायिकताएं होती हैं।

प्रायिकता बंटनों की केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में प्रत्याशित मान का बहुत प्रयोग होता है, इसका प्रायः μ से संकेतन किया जाता है। अतः हम कभी-कभी E(x) को μ से व्यक्त करते हैं। या $E(x) = \mu$

13.5.1 प्रमेय 1 : योग की प्रत्याशा

अनेक यादृच्छिक चरों के योग की प्रत्याशा उनकी पृथक प्रत्याशाओं के योग के बराबर होती है। संकेत के रूप में :

$$E(x+y+z+....+w) = E(x) + E(y) + E(z) + ... + E(w)$$

पहले हम इस प्रमेय को दो चरों x तथा y के लिए प्रमाणित करेंगे।
मान लिया x के मान $x_1, x_2 \ldots\ldots x_m$ हैं अर्थात् x_i (जहां $i = 1, 2,.....m$)
तथा y के मान $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$ हैं अर्थात् y_j (जहां $j = 1, 2 \ldots\ldots n$)

चूंकि x के प्रत्येक संभावित m मानों का योग y के प्रत्येक संभावित n मानों से हो सकता है, x+y प्राप्त करने के $m \times n$ परस्पर अपवर्जी तरीके संभव हैं। मान लिया $x = x_i$ तथा $y = y_j$ के एक साथ घटित होने की प्रायिकता p_{ij} है। तब, गणितीय प्रत्याशा की परिभाषा के अनुसार

$$E(x+y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,(x_i + y_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\,(x_i) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij}\, y_j \qquad (1)$$

अब $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i = \sum_{i=1}^{m} x_i \sum_{j=1}^{n} p_{ij}$

(क्योंकि j पर परिवर्तन के लिए x_i स्थिर है) ...(2)

तथा $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = p_i$ जो कि $x = x_i$ की y_j के प्रत्येक मान की प्रायिकता है। (सीमांत प्रायिकता की परिभाषा का पुनः स्मरण कीजिए)

∴ हम समीकरण (2) को इस प्रकार लिख सकते हैं :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i = \sum_{j=1}^{n} p_i x_i = E(x)$$

इसी प्रकार $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} y_j = \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \sum_{j=1}^{n} p_j' y_j = E(y)$

ये दोनों मान समीकरण (1) में रखने पर

$E(x+y) = E(x) + E(y)$

अब इसका विस्तार दो से अधिक चरों के लिए किया जा सकता है।

13.5.2 प्रमेय 2 : गुणनफल की प्रत्याशा

अनेक स्वतंत्र यादृच्छिक चरों के गुणनफल की गणितीय प्रत्याशा उनकी प्रत्याशाओं के गुणनफल के बराबर होती है।

संकेत के रूप में $E(xy) = E(x). E(y)$

मान लिया x_i $(i=1, 2,....m)$ x के संभावित मान हैं, तथा y_j $(j=1,2,.....n)$ y के संभावित मान हैं।

मान लिया $x=x_i$ की प्रायिकता p_i है

तथा $y=y_j$ की प्रायिकता q_j है।

तब स्वतंत्र घटनाओं के गुणनफल प्रमेय द्वारा $x=x_i$ तथा $y=y_j$ के एक साथ घटित होने की प्रायिकता $p_i q_j$ होगी। अतः गणितीय प्रत्याशा की परिभाषा के अनुसार $E(xy) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i q_j x_i y_j$

जो कि x_i, y_j $(i=1,...m), (j=1,....n)$ के एक साथ घटने के $m \times n$ तरीकों की प्रत्याशा को व्यक्त/निरूपित करता है।

अब i को स्थिर रखकर j पर योग करने पर

$$\sum_{j=1}^{n} p_i q_j x_i y_j = p_i x_i \sum_{j=1}^{n} q_j y_j$$

$$= p_i x_i E(y)$$

$$\therefore E(xy) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i E(y)$$

$$= E(y) \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$$ क्योंकि i पर योग के लिए E(y) स्थिर है,

$$= E(y). E(x)$$

इसका विस्तार दो से अधिक चरों के लिए किया जा सकता है।

13.5.3 प्रमेय 3: यादृच्छिक चर का प्रसरण

यादृच्छिक चर का प्रसरण $E\{x - E(x)\}^2$ के बराबर होता है जहां पर यादृच्छिक चर का माप उसके अपने माध्य को मूल बिन्दु मानकर किया गया है। (यहां पर पुनः स्मरण कीजिए कि Var(x)

$$= \frac{1}{n} \sum f_i (x_i - \bar{x})^2$$

यदि $n = \Sigma f_i$ है) $E(x)$ को μ से व्यक्त करते हैं। अब, $(x - 2\mu)^2 = x^2 - 2\mu x + \mu^2$

प्रमेय 1 द्वारा

$$\begin{aligned} E(x-\mu)^2 &= E(x)^2 - 2\mu E(x) + \mu^2 \\ &= E(x)^2 - 2\mu^2 + \mu^2 \\ &= E(x)^2 - \mu^2 \\ &= E(x)^2 - \{E(x)\}^2 \end{aligned}$$

$\therefore E\{x - E(x)\}^2 = E(x)^2 - \{E(x)\}^2$

अतः x का प्रसरण x^2 की प्रत्याशा तथा x की प्रत्याशा के वर्ग के अंतर के बराबर होता है।

उप-प्रमेय : यादृच्छिक चरों के योग का प्रसरण

एक से अधिक यादृच्छिक चरों के योग का प्रसरण प्राप्त करने के लिये हम इन प्रमेयों का प्रयोग कर सकते हैं।

मान लीजिये $S = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ है

जहां प्रत्येक x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ एक यादृच्छिक चर है। तब S की प्रत्याशा यह होगी

$E(S) = E(x_1) + E(x_2) + \ldots + E(x_n)$

या $E(S) = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n$ जहां μ_i, x_i की प्रत्याशा है।

इस स्थिति में S की प्रत्याशा से इसके विचलन को हम निम्न तरह से व्यक्त करेंगे:

$(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)$, इस अन्तर के वर्ग की प्रत्याशा को हम S का प्रसरण कहेंगे। यानी,

$$\begin{aligned} V(S) &= E[(x_1 + x_2 + \ldots x_n) - (\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_n)]^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{\mu}_i)^2 + 2 \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}} (x_i - \mu_i)(x_j - \mu_j) - A \end{aligned}$$

इस व्यंजक का दूसरा भाग और (i) के पदों के विभिन्न संयोगों $(i \neq j)$ के योग को व्यक्त करता है। इस भाग में $\frac{n(n-1)}{2}$ पद हैं। ऐसा क्यों है, यह आप स्वयं देखिये। [संकेत : x का प्रत्येक मान इसके शेष $n - 1$ मानों के साथ संयोजित होता है, पर इसका क्रम महत्वपूर्ण नहीं है।]

व्यंजक A का पहला पद x_i के प्रसरण को व्यक्त करता है,

$E(x_1 - \mu_i)^2 = \sigma_i^2$ $(i = 1, 2, 3 \ldots n)$

अतः

$$\boxed{V(S) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 + 2 \sum_{i,j} Cov.\,(x_i, x_j);\ i \neq j} \quad - B$$

इन्हीं प्रमेयों का प्रयोग करते हुए, हम x तथा y दो यादृच्छिक चरों के लिये यह प्रसरण का आकलन कर सकते हैं,

$$\begin{aligned} Cov.\,(x, y) &= E[(x - \mu)(y - \gamma)] \\ &= E(xy) - \mu E(y) - \gamma E(x) + \mu r \\ &= E(x, y) - \mu, r - \mu r + \mu r \\ &= E(xy) - \mu r \quad \begin{bmatrix} \because E(\mu) = \mu, \\ E(\mu r) = \mu r \end{bmatrix} \\ &= E(xy) - E(x)\,E(y) \end{aligned}$$

अतः

$$\boxed{Cov.\,(x, y) = E(xy) - E(x)\,E(y)}$$

इससे व्यंजन B में पद $Cov.\,(x_i, y_i)$ की व्याख्या होती है।

इस तरह यादृच्छिक चरों के योग का प्रसरण, चरों के प्रसरण तथा सह प्रसरणों का योग होता है। यदि चर स्वतंत्र हैं, तो समस्त सह प्रसरण शून्य हो जाते हैं।

उदाहरण 1 ·

एक ढके हुए काले बक्से में 15 समरूप गेंदें हैं – 10 लाल तथा 5 नीली। दो खिलाड़ी राम तथा रहीम हैं। बक्से में गेंदें यादृच्छिक प्रकार से बंटित हैं। अगर बक्से से यादृच्छिक तरह से निकाली गई गेंद का रंग लाल है तो खिलाड़ी को 10 रुपए प्राप्त होते हैं तथा अगर वह नीली गेंद निकालता है तो उसे 20 रुपए की हानि होती है। राम पहले तथा रहीम बाद में खेलता है।

(क) राम का प्रत्याशित लाभ या हानि क्या है?

(ख) रहीम का प्रत्याशित लाभ या हानि क्या है जब

(i) राम द्वारा निकाली गई गेंद बक्से में वापस रख दी जाती है।

(ii) राम द्वारा निकाली गई गेंद बक्से में वापस नहीं रखी जाती ?

हल

(क) मान लिया $P(R_1)$, = पहली लाल गेंद निकालने की प्रायिकता तथा $P(B_1)$=पहली नीली गेंद निकालने की प्रायिकता है।

चूंकि खेल के शुरू में कुल 15 गेंदें हैं, जिनमें 10 लाल तथा 5 नीली हैं,

$\therefore\ P(B_1) = 5/15 = 1/3$

$P(R_1) = 10/15 = 2/3$

चूंकि पहला खिलाड़ी राम है इसलिए उसका प्रत्याशित लाभ या हानि

$= 2/3 \times 10 - 1/3 \times 20 = 0$

अब रहीम के खेलने की बारी है।

(ख) (i) अगर राम गेंद को वापस बक्से में रख देता है तो बक्से में संरूपण वही रहता है। यह मानने पर की गेंदें यादृच्छिक रूप में बंटित हैं तो रहीम का प्रत्याशित लाभ और हानि भी शून्य ही होगा।

(ii) लेकिन, अगर राम द्वारा निकाली गई गेंद वापस नहीं की जाती तो रहीम का प्रत्याशित लाभ या हानि परिकलित करने के लिए हमें यह ज्ञात होना चाहिए कि राम द्वारा निकाली गई गेंद का रंग लाल था या नीला।

मान लिया राम ने लाल गेंद निकाली थी। इस परिस्थिति में बक्से में कुल गेंदें 14 रहेंगी जिनमें से 9 लाल तथा 5 नीली होंगी।

$\therefore$ P (दूसरी लाल गेंद निकाली गई) $= 9/14$

तथा P (दूसरी नीली गेंद निकाली गई) $= 5/14$

यहां यह ध्यान दें कि $9/14 < 10/15$ तथा $5/14 > 5/15$

स्पष्टतः इसका प्रभाव रहीम के प्रत्याशित लाभ या हानि पर होगा।

रहीम का प्रत्याशित लाभ (या हानि) $= 9/14 \times 10 - 5/14 \times 20$

$= 90/14 - 100/14 = -10/14 = -5/7 = -0.70$ रुपए है।

अतः रहीम की प्रत्याशित हानि 70 पैसे है।

मान लिया राम द्वारा निकाली गई गेंद नीली थी। उपरोक्त प्रकार की विधि द्वारा रहीम का प्रत्याशित लाभ निकाला जा सकता है, जोकि निम्नलिखित है :

रहीम का प्रत्याशित लाभ $= 10/14 \times 10 - 4/14 \times 20$

$= 100/14 - 80/14 = 20/14 = 10/7 = 1.42$ रुपए

अतः जब राम लाल गेंद निकालता है तो रहीम को हानि की प्रत्याशा है, लेकिन जब राम नीली गेंद निकालता है तो रहीम को लाभ की प्रत्याशा है। इसके क्या कारण हैं ? आप बताइए।

उदाहरण 2

श्री ए. रहमान, जो कि एक निगम के वित्तीय प्रबंधक हैं, के पास दो प्रतियोगी विनियोग प्रस्ताव विचाराधीन हैं। प्रत्येक प्रस्ताव के लिए उसने विभिन्न शुद्ध लाभ आंकड़े निर्धारित किए हैं तथा इनको प्राप्त करने की व्यक्तिनिष्ठ प्रायिकताएं निश्चित कर ली हैं। प्रस्ताव A के लिए उसका विश्लेषण शुद्ध लाभ 10,000 रुपए, 25,000 रुपए, 50,000 रुपए तथा 1,00,000 रुपए दर्शाता है, जिनकी प्रायिकताएं क्रमशः 0.4, 0.3, 0.2 तथा 0.1 हैं। प्रस्ताव B के लिए ए. रहमान का निष्कर्ष यह है कि सफल विनियोग (जिसमें अनुमानित शुद्ध लाभ 80,000 रुपए है) या असफल विनियोग (जिसमें शून्य शुद्ध लाभ) का संयोग (प्रायिकता) 50 प्रतिशत है।

अगर दोनों परियोजनाओं की कुल लागत समान है तो प्रत्याशित मौद्रिक लाभ की दृष्टि से रहमान कौन-से प्रस्ताव को अधिमान देंगे ?

हल

मान लिया E(A) तथा E(B), A तथा B प्रस्तावों के प्रत्याशित शुद्ध लाभ को सूचित करते हैं। तब

$$
\begin{aligned}
E(A) &= 10000 \times 4/10 + 25000 \times 3/10 + 50000 \times 2/10 + 100000 \times 1/10 \\
&= 4000 + 7500 + 10000 + 10000 \\
&= 31{,}500 \text{ रुपए} \\
E(B) &= 80000 \times 50/100 + 0 \times 50/100 \\
&= 40{,}000 \text{ रुपए}
\end{aligned}
$$

अतः श्री रहमान का अधिकतम प्रत्याशित लाभ प्रस्ताव B को स्वीकार करने से होगा।

प्रस्ताव A के लिए और परिकलन

x	p(x)	$\left\{z = \dfrac{x - 50{,}000}{50{,}000}\right\}$	Z.p(z)*	z^2	$z^2p(x)$*
10,000	0.4	–0.8	–0.32	0.64	0.256
25,000	0.3	–0.5	–0.15	0.25	0.075
50,000	0.2	0	0	0	0
1,00,000	0.1	1.0	0.10	1.00	0.100
			$\Sigma zp(z) = -0.37$		$\Sigma z^2 p(z) = 0.431$

* यहां पर यह ध्यान दें कि p(x) = p(z)

$$E(z) = \Sigma zp(z) = -0.37$$

$$
\begin{aligned}
\therefore E(x) &= 50{,}000 + 50{,}000\, E(z) \\
&= 50{,}000 - 50{,}000 \times 0.37 \\
&= 31{,}500 \\
\therefore \bar{X}_A &= 31{,}500 \\
\sigma_z^2 &= E(z^2) - \{E(z)\}^2 \\
&= \Sigma\ z^2p(z) - (0.37)^2 \\
&= 0.3431 - 0.137 \\
&= 0.294 \\
\text{अब } \sigma_{x_A}^2 &= (50{,}000)^2 \times \sigma_z^2 \\
&= (50{,}000)^2 \times 0.294 \\
\therefore \sigma_{x_A} &= 50{,}000 \times 0.54 \\
&= 27{,}000
\end{aligned}
$$

प्रस्ताव B के लिए परिकलन

x	p(x)	xp(x)	$x^2p(x)$
80,000	0.5	40,000	$64 \times 10^8 \times 0.5$
0	0.5	0	0

$$\Sigma xp(x) = 40{,}000 \quad \Sigma x^2p(x) = 32 \times 10^8$$

$$
\begin{aligned}
\therefore E(X_B) &= 40{,}000 \\
\sigma_{x_B}^2 &= E(x)^2 - \{E(x)\}^2 \\
&= 32 \times 10^8 - 16 \times 10^8 \\
&= 16 \times 10^8 \\
\therefore \sigma_{x_B} &= 4 \times 10^4 \\
&= 40{,}000
\end{aligned}
$$

परिणाम

प्रस्ताव A $\bar{X}_A = 31,500, \quad \sigma_{x_A} = 27,000$

प्रस्ताव B $\bar{X}_B = 40,000 \quad \sigma_{x_B} = 40,000$

अतः प्रस्ताव B से औसत प्राप्ति अधिक है लेकिन इसमें प्रसरण अधिक है (क्योंकि $\sigma_{x_B} > \sigma_{x_A}$)

उदाहरण 3

अगर वर्षा होती है तो एक छाता विक्रेता को प्रतिदिन 300 रुपए की आय हो सकती है, अन्यथा उसको 80 रुपए प्रतिदिन की हानि हो सकती है। अगर वर्षा का दिन होने की प्रायिकता 0.57 है तो उसकी प्रत्याशा क्या होगी ?

हल :

विक्रेता की प्रत्याशा = $300 \times 0.57 - 80 \times 0.43$ रुपए
(क्योंकि वर्षा का दिन न होने की प्रायिकता = $1.00 - 0.57$
$= 0.43$)
$= 171 - 34.4$
$= 136.60$ रुपए

बोध प्रश्न 3

यदि c एक स्थिरांक है तथा x एक यादृच्छिक चर है तो

1. सिद्ध कीजिए कि
   (i) $E(C) = C$
   (ii) $E(CX) = CE(X)$
   (iii) $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ जहां पर c एक स्थिरांक है तथा x तथा y यादृच्छिक चर हैं।

....
....
....
....
....
....
....
....

2. अगर किसी कम्पनी के शेयर की कीमत समान रहने की प्रायिकता 0.46 है, प्रति शेयर कीमत में 0.50 रुपए या 1.00 रुपए वृद्धि होने की प्रायिकताएं क्रमशः 0.17 तथा 0.023 है, तथा प्रति शेयर की कीमत में 0.25 कमी की प्रायिकता 0.14 है, प्रति शेयर प्रत्याशित लाभ क्या होगा ? लाभ का प्रसरण क्या होगा ?

....
....
....
....
....
....

3. 99 रुपए के एक पुरस्कार के लिए A तथा B एक पासा उछालते हैं जो खिलाड़ी पहले छः उछालेगा वह पुरस्कार जीतेगा। अगर पासे की पहली उछाल A शुरू करता है तो उनकी क्रमशः प्रत्याशाएं क्या हैं ?

4. पिछले 25 वर्षों में किए गए एक सर्वेक्षण के अनुसार 10 वर्षों में हल्की सर्दी थी, 8 वर्षों में सर्दी थी तथा बाकी 7 वर्षों में अत्यधिक सर्दी थी। एक कम्पनी हल्की सर्दी वाले वर्ष में 1000 सर्दी वाले वर्ष में 1300 तथा अत्यधिक सर्दी वाले वर्ष में 2000 ऊनी कोट बेचती है। आपको कम्पनी का प्रत्याशित लाभ प्राप्त करना है, जबकि एक ऊनी कोट की लागत 173 रुपए है तथा यह 248 रुपए में बेचा जाता है।

5. दो पेट्रोलियम पदार्थ A तथा B हैं। निम्नलिखित सारणी में प्रत्येक पदार्थ के शुद्ध लाभों का प्रायिकता बंटन दिया हुआ है:

पदार्थ A		पदार्थ B	
शुद्ध लाभ	प्रायिकता	शुद्ध लाभ	प्रायिकता
−10,000	0.4	0	0.40
0	0.2	1,000	0.50
5,000	0.1	5,000	0.06
15,000	0.3	8,000	0.04

दोनों पदार्थों के शुद्ध लाभ की प्रत्याशा ज्ञात कीजिए। एक उत्पादक A या B को उत्पादित कर सकता है, लेकिन दोनों को उत्पादित नहीं कर सकता। अगर सुरक्षित रहना चाहें तो वह कौन-से पेट्रोलियम पदार्थ का उत्पादन करेगा ?

13.6 सारांश

साधारण भाषा में प्रायिकता का अर्थ घटना के घटित होने का संयोग है। अनिश्चितता में निर्णयन की विधिवत तथा सुस्पष्ट अभिव्यक्ति के विकास की आवश्यकता के कारण प्रायिकता मापन के विभिन्न दृष्टिकोण प्रेरित हुए हैं। ये दृष्टिकोण, चिरप्रतिष्ठित, तुलनात्मक बारंबारता तथा अभिगृहीती दृष्टिकोण मुख्यतः विभिन्न परिस्थितियों के हल के उत्पन्न हुए, जिनमें अनिश्चितता होती है। जब घटनाएं विभिन्न निश्चित विधियों में घटित होती हैं, तो इनकी प्रायिकता परिकलन के लिए हमने विभिन्न नियमों का विकास किया है।

13.7 शब्दावली

प्रतिदर्श समष्टि : किसी प्रयोग के सभी संभावित परिणामों के समूह को प्रतिदर्श समष्टि कहा जाता है तथा इसको S से सूचित किया जाता है। यह एक यादृच्छिक प्रयोग के सभी संभावित तथा निश्शेष घटनाओं का समुच्चय है।

सप्रतिबंध प्रायिकता : अगर दो घटनाएं A तथा B परस्पर अपवर्जी नहीं हैं तथा अगर यह ज्ञात है कि B घटित हो चुकी है, तब A की प्रायिकता जब B घटित हो चुका है, सप्रतिबंध प्रायिकता कहलाती है।

सांकेतिक रूप में $P\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{P(AB)}{P(B)}$

घटनाओं की स्वतंत्रता : घटनाओं को परस्पर स्वतंत्र घटनाएं कहा जाता है अगर एक का घटित होना किसी प्रकार से दूसरे के घटित होने से प्रभावित न हो। अगर A तथा B स्वतंत्र हैं, तब

$P(AB) = P(A).\ P(B)$

प्रतिलोम प्रायिकता (बेज़ प्रमेय) : अगर एक घटना A किसी भी n परस्पर अपवर्जी तथा सामूहिक रूप से निश्शेष घटनाओं $E_1, E_2 \ldots\ldots E_n$ में से एक के साथ घटित हो सकती है, तब अगर A वास्तव में घटित होती है तो इससे पहले घटने वाली घटना E_i की प्रायिकता

$$P\left(\frac{E_i}{A}\right) = \frac{P(E_i)\, P\left(\frac{A}{E_i}\right)}{\Sigma\, P(E_i)\, P\left(\frac{A}{E_i}\right)} (i = 1, 2, \ldots\ldots n)$$

सीमांत प्रायिकता : y के किसी भी मान के लिए x का मान x के बराबर होने की प्रायिकता को x की सीमांत प्रायिकता कहते हैं। इसी प्रकार y की सीमांत प्रायिकता को परिभाषित किया जा सकता है।

गणितीय प्रत्याशा : अगर x यादृच्छिक चर है जिसके $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ मान ले सकने की प्रायिकताएं क्रमशः $P(x_1), P(x_2), \ldots\ldots P(x_n)$ हैं तो x की गणितीय प्रत्याशा $E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i\, p(x_i)$ होगी।

13.8 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Hoel P.G. 1971. *Introduction to Mathematical Statistics*, New Delhi, Asia Publishing House: New Delhi (Chapter 1)

Kenny J.F. and Keeping E.S; 1974. *Mathematics of Statistics, Part I* Affilated East-West Press Pvt. Ltd. : New Delhi (Chapter IX)

Uspensky J.V; 1978. *Introduction to Mathematical Probability*, Tata McGraw Hill Publishing Company Ltd.: N. Delhi. (Chapter 1, 2, 3, 9).

13.9 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1. (क) {(HHHH), (THHH), (HTHH), (HHTH), (HHHT)}
   (ख) {(HHTT), (HTTH), (HTHT), (TTHH), (THTH), (THHT)}
   (ग) {(TTTT), (HTTT), (THTT), (TTHT), (TTTH)}
   (घ) {(TTTT)}
2. (i) पासे के दो उछाल
   (ii) सिक्के के दो उछाल
3. 0.3 तब $P(AB) = 0$
4. 30/400, 30/100, 3/90

बोध प्रश्न 2

1. B से स्वतंत्र, A के सच बोलने की प्रायिकता $= P(A) = p$ (दिया है) । इस प्रकार A के, B से स्वतंत्र, झूठ बोलने की प्रायिकता $= 1-p$ इसी प्रकार B की प्रायिकता p' तथा $1-p'$ है ।

   A तथा B दोनों कथन तब समान होंगे जब

   (i) दोनों सच बोलें या

   (ii) दोनों झूठ बोलें

   दोनों के सच बोलने की प्रायिकता $= p \times p' = pp'$ (1)
   तथा दोनों के झूठ बोलने की प्रायिकता $= (1-p)(1-p')$
   दोनों के समान कथन होने की प्रायिकता $= pp' + (1-p)(1-p')$ (2)

   अपेक्षित उत्तर $= \dfrac{pp'}{pp' + (1-p)(1-p')}$ (समीकरण (1) तथा (2) पर ध्यान दीजिए)

2. $P(A) = \dfrac{1}{3}$, $P(B) = \dfrac{1}{4}$ तथा $P(C) = \dfrac{1}{5}$

   $P(A+B+C)$ ज्ञात कीजिए

   $= 1/3 + 1/4 + 1/5 - (1/3.\ 1/4 + 1/3.\ 1/5 + 1/4.\ 1/5) + 1/3.\ 1/4.\ 1/5$

   $= \dfrac{10+15+12}{60} - (1/12 + 1/15 + 1/20) + 1/60$

   $= 47/60 - \dfrac{(5+4+3)}{60} + 1/60$

   $= 47/60 - 12/60 + 1/60 = \dfrac{47-12+1}{60} = 36/60 = 3/5$

   दूसरी विधि

   $1-P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ ज्ञात कीजिए

   $= 1 - P(\bar{A}).\ P(\bar{B}).\ P(\bar{C})$ (क्योंकि $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ स्वतंत्र हैं)

   $= 1 - \left(1 - \dfrac{1}{3}\right)\left(1 - \dfrac{1}{4}\right)\left(1 - \dfrac{1}{5}\right)$

   $= 1 - \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} \times \dfrac{4}{5}$

   $= 1 - \dfrac{2}{5} = \dfrac{3}{5}$

3. P (भारत टैस्ट मैच हारता है) = 2/3

(क) P (भारत तीनों मैच हारता है) $= \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{27}$

(ख) P (भारत कम से कम एक मैच जीतता है) $= 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$

4. H = पति का चयन
W = पत्नी का चयन

$P(H) = \frac{1}{7}, P(W) = \frac{1}{5}$

(क) P(HW) ज्ञात करना है

$P(HW) = P(H).\ P(W) = \frac{1}{7} . \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$

(ख) $P(H\bar{W}) + P(\bar{H}W)$ ज्ञात करना है

$= P(H).\ P(\bar{W}) + P(\bar{H}) .\ P(W)$

$= \frac{1}{7} . \left(1 - \frac{1}{5}\right) + \left(1 - \frac{1}{7}\right) \frac{1}{5}$

$= \frac{1}{7} \times \frac{4}{5} + \frac{6}{7} \times \frac{1}{5}$

$= \frac{4+6}{35} = \frac{10}{35} = \frac{2}{7}$

(ग) $P(\bar{H}\bar{W})$ ज्ञात करना है

$= P(\bar{H}).\ P(\bar{W}) = \frac{6}{7} \times \frac{4}{5} = \frac{24}{35}$

5. A की जीत होगी अगर
(i) वह पहले उछाल में शीर्ष लाता है, या
(ii) वह चौथे उछाल में शीर्ष लाता है, जबकि यह दिया हुआ है कि पहले 3 उछालों में A, B तथा C ने पुच्छ उछाला है, या
(iii) वह सातवें उछाल में शीर्ष लाता है, जबकि पहले 6 उछालों में पुच्छ उछाला गया, आदि

$\therefore P(A) = P(H) + P(TTTH) + P(TTTTTTH) + \ldots\ldots$

$= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots\ldots\ldots\ldots$

$= \frac{1}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \ldots\ldots\ldots\ldots\right]$

$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\right]$

$= \frac{1/2}{1 - 1/8} = \frac{1}{2} \times \frac{8}{7} = \frac{4}{7}$

इसी प्रकार $P(B) = \frac{2}{7}$ और $P(C) = \frac{1}{7}$

बोध प्रश्न 2

1. (i) $E(C) = \sum_{i=1}^{n} cp_i$

$= cp_1 + cp_2 + \ldots\ldots + cp_n$

$= c\,(p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n)$

$= c.1$

$= c$

(ii) $E(cx) = \sum_{i=1}^{n} cx_i\ p_i$

$= cx_1 p_1 + cx_2 \bar{p}_2 + \ldots\ldots + cx_n p_n$
$= c [x_1 p_1 + x_2 + p_2 + \ldots\ldots + x_n p_n]$
$= c\,E(x)$

2. मान लिया x = प्रति शेयर लाभ
जब शेयर की कीमत में कोई परिवर्तन नहीं होता तब x = 0
$P(x = 0) = 0.46$
$P(x = 0.50) = 0.17$
$P(x = 1.00) = 0.23$
$P(x = -0.25) = 0.14$

$\therefore E(x) = 0 \times 46 + 0.50 \times 0.17 + 1.00 \times 0.20 - 0.25 \times 0.14$
$= 0 + 0.085 + 0.23 - 0.035$
$= 0.28$ रुपए अथवा 28 पैसे

$E(x^2) = 0 \times .46 + (0.50)^2 \times 0.17 + (1.00)^2 \times 0.23 + (0.25)^2 \times 0.14$
$= 0 + 0.0425 + 0.23 + .00875$
$= 0.28125$

$\sigma_x^2 = 0.28125 - (.28)^2$
$= 0.28125 - 0.0784$
$= 0.20285$

$\therefore \sigma_x = 0.45$ रुपए या .45 पैसे

3. यहां पर x = 99
A को जीतने के लिए
(i) पहले उछाल में 6 प्राप्त होना चाहिए या
(ii) पहले दो उछालों में न A तथा न B6 को उछाल पाते हैं। तीसरे उछाल में A को 6 प्राप्त होता है इत्यादि

$$\therefore P(A) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6} + \frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{5}{6}.\frac{1}{6} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{6}\left[H - \left(\frac{5}{6}\right)^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[1 + \frac{25}{36} + \left(\frac{25}{36}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots\right]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{1}{1 - \frac{25}{36}}\right] = \frac{1}{6} \times \frac{36}{11} = \frac{6}{11}$$

A का प्रत्याशित लाभ = 99 × 6/11 = 54 रुपए
इसी प्रकार, P(B) = 1 - P(A)

$$= 1 - \frac{6}{11} = \frac{5}{11}$$

$\therefore$ B का प्रत्याशित लाभ = 99 × 5/11 = 45 रुपए

4.

	p(x)	x	xp(x)
P(हल्की सर्दी)	10/25	1000	400
P(सर्दी)	8/25	1300	416
P(अत्यधिक सर्दी)	7/25	2000	560
			1376

E(x) प्रत्याशित बिक्री = 1376
$\therefore$ प्रत्याशित लाभ = 1376 (248 - 173)
= 1376 × 75
= 103,200 रुपए

5. पदार्थ A के लिए

x	$y = \frac{x}{100}$	p(y)	yp(y)	y^2	$y^2p(y)$
–10,000	–10	0.4	–4	100	40
0	0	0.2	0	0	0
5,000	5	0.1	0.5	25	2.5
15,000	15	0.3	4.5	225	67.5
			1.0		110.0

$\therefore E(y) = 0.1$

$$\sigma_y^2 = E(y^2) - [E(y)]^2$$
$$= 110 - (1.0)^2$$
$$= 110 - 1 = 99$$
$$\therefore \sigma_y = \sqrt{99} = 9.95$$
$$E(x_A) = 1 \times 1000 = 1000$$
$$\sigma_{x_A} = 9.95 \times 1000 = 9950$$

पदार्थ B के लिए

X	$y = \frac{x}{1000}$	p(y)	yp(y)	y^2	$y^2p(y)$
0	0	0.40	0	0	0
1,000	1	0.50	0.50	1	0.50
5,000	5	0.06	0.30	25	1.50
8,000	8	0.04	0.32	64	2.56
			1.12		4.56

$$\therefore E(y) = 1.12$$
$$\sigma_y^2 = 4.56 - (1.12)^2$$
$$= 4.56 - 1.25$$
$$= 3.31$$
$$\sigma_y = 1.8$$
$$E(x_B) = 1.2 \times 1000 = 1120$$
$$\sigma_{y_B} = 1.8 \times 1000 = 1800$$

$\therefore$ सुरक्षित रहने के लिए वह विकल्प B का चयन करेगा ।

13.10 पारिभाषिक शब्दावली

अनभिनत	unbiased
असंयुक्त घटनाएं	disjoint events
अभिगृहीती उपगमन	axiomatic approach
आनुभविक उपगमन	empirical approach
उपप्रतिदर्श समष्टि	sub-sample space
गणितीय प्रत्याशा	mathematical expectation
घटना	event
चिरप्रतिष्ठित विचारधारा	classical view
तर्कसंगत निगमन	logical deductions
द्विपद बंटन	binomial distribution
नाभिकीय भौतिकी	Nuclear physics
निर्णय सिद्धांत	decision theory
निश्शेष	exhaustive
पाइसों बंटन	poisson distribution
परस्पर अपवर्जी	mutually exclusive
परस्पर सम्मिलित घटनाएं	mutually inclusive events
प्रायिकता	probability
प्रायिकता बंटन	probability distribution
पुनरावृत अभिप्रयोग	repeated trials
प्रतिदर्श समष्टि	sample space
प्रतिलोम प्रायिकता	inverse probability
प्रतिचयन	sampling
प्रसामान्य बंटन	normal distribution
व्यक्तिनिष्ट प्रायिकता	subjective probability
विश्वास्यता स्तर	level of confidence
समप्रायिक	equi likely.
संयोग-क्रीड़ा	game of chance
संरूपण	configuration
सप्रतिबंध प्रायिकता	conditional probability
सर्वनिष्ठ	common
सांख्यिकीय अनुमिति	statistical inference.

इकाई 14 प्रायिकतावंटन : द्विपद, पाइसों तथा प्रसामान्य

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आपको निम्नलिखित के बारे में कुशल हो जाना चाहिए

- एक यादृच्छिक चर के प्रायिकता बंटन का वर्णन करना,
- असंतत तथा संतत यादृच्छिक चरों में पहचान करना, तथा
- द्विपद, पाइसों तथा प्रसामान्य प्रायिकता बंटनों से सम्बन्धित प्रश्नों का हल करना ।

14.1 प्रस्तावना

इस खंड की पहली इकाई में आपने प्रायिकता के बारे में अध्ययन किया था । इस इकाई में आप प्रायिकता बंटनों के बारे में तथा उनसे सम्बन्धित प्रश्नों को हल करना, सीखेंगे । पहले हम प्रायिकता बंटन के अर्थ पर विचार विमर्श करेंगे । (उपखंड 14.2) । इसके बाद हम असंतत यादृच्छिक चर की परिभाषा प्रस्तुत करेंगे तथा इसका संतत यादृच्छिक चर से भेद करेंगे तथा प्रायिकता फलन के अर्थ की व्याख्या करेंगे । तत्पश्चात, उदाहरण सहित, हम दो अत्यधिक महत्वपूर्ण असंतत प्रायिकता बंटनों-द्विपद (उपखंड 14.3) तथा पाइसों (उपखंड 14.4) की अवधारणाओं तथा विशेषताओं का विवेचन करेंगे तथा इस क्रिया में प्रायिकता घनत्व फलन (उपखंड 14.5) की महत्वपूर्ण धारणा की व्याख्या करेंगे । अन्त में हम अत्यधिक महत्वपूर्ण तथा व्यापक रूप से प्रयुक्त प्रायिकता बंटन-प्रसामान्य बंटन, एक संतत प्रायिकता बंटन का अध्ययन करेंगे तथा इसका आर्थिक सांख्यिकी में प्रश्नों के हल में किस प्रकार प्रयोग होता है (उपखंड 14.6) इसकी जानकारी प्राप्त करेंगे ।

14.2 प्रायिकता बंटन

इससे पहली इकाई में आपने प्रायिकता के बारे में अध्ययन किया था। इस इकाई में आप प्रायिकता बंटनों के बारे में सीखेंगे। प्रायिकता बंटन की अवधारणा की सरल व्याख्या के लिए हम एक प्रायिकता बंटन का उदाहरण प्रस्तुत करते हैं। निम्नलिखित में दो सिक्के उछालने पर प्राप्त शीर्षों की संख्या का प्रायिकता बंटन दिया गया है।

दो सिक्के उछालने पर प्राप्त शीर्षों की संख्या का प्रायिकता बंटन

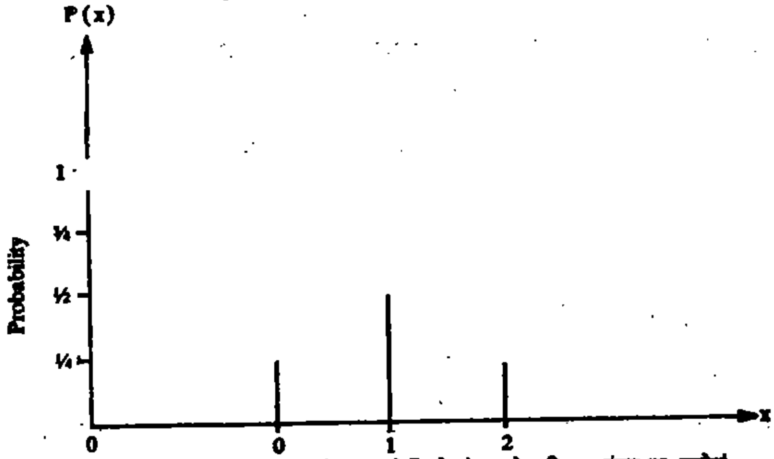
शीर्षों की संख्या x	प्रायिकता P(x)
0	1/4
1	1/2
2	1/4

यहां पर यह ध्यान दें कि शीर्षों की संख्या के विभिन्न मानों को x से सूचित किया गया है तथा इससे सम्बन्धित प्रायिकताओं को P(x) से सूचित किया गया है अतः

$P(x=0) = 1/4$
$P(x=1) = 1/2$
$P(x=2) = 1/4$

इस प्रकार प्रायिकता बंटन सभी सम्भावित घटनाओं के परिणामों की प्रायिकताएँ नियत करता है। इस उदाहरण में तीन घटनाएँ हैं : (1) कोई शीर्ष प्राप्त न करने की घटना $(x=0)$, (ii) एक शीर्ष प्राप्त करने की घटना $(x=1)$ तथा (iii) दो शीर्ष प्राप्त करने की घटना $(x=2)$ यहां पर आप यह भी ध्यान देंगे कि ये घटनाएँ निश्शेष हैं अर्थात किसी और घटना की धनात्मक प्रायिकता के साथ घटने की कोई सम्भावना नहीं है स्पष्ट है इन तीनों घटनाओं की प्रायिकताओं का योग इकाई के बराबर है। प्रायिकताओं के बंटन को प्रायिकता बंटन या प्रायिकता फलन जाना जाता है।

प्रायिकता बंटन की व्याख्या आलेख पृष्ठ पर भी की जा सकती है।



आकृति 14.1 दो सिक्कों के उछाल में प्राप्त शीर्षों की संख्या के प्रायिकता बंटन का आलेख

14.2.1 यादृच्छिक चर : असंतत तथा संतत

आप यह जानते हैं कि प्रायिकता बंटन में विचाराधीन चर एक यादृच्छिक (या संयोग) चर होता है। एक यादृच्छिक चर वह होता है जिसका मान संयोग द्वारा निर्धारित होता है। जब आप सिक्के को उछालते हैं तो सिक्का, शीर्ष या पुच्छ के बल गिर सकता है। इसी प्रकार जब आप पासे को उछालते हैं तो 6 घटनाओं 1, 2, 3, 4, 5 या 6 में से कोई भी घटित हो सकती है अच्छी तरह से फेंटी हुई ताश की गड्डी में से जब आप एक पत्ता निकालते हैं तो आपको पहले यह जानकारी नहीं होती कि यह चिड़ी का या हुक्म का या ईंट का या पान का पत्ता है। कल वर्षा हो भी सकती है या न भी। साधारण चुनाव में, क्या कांग्रेस को फिर से सत्ता प्राप्त होगी इन सभी प्रश्नों में ऐसे चर हैं जिनका मान संयोग द्वारा निर्धारित होता है।

यादृच्छिक चर असंतत या संतत हो सकता है। असंतत यादृच्छिक चर वह होता है जो केवल दिये हुए मान ले सकता है। उपरोक्त उदाहरण एक असंतत यादृच्छिक चर की व्याख्या है। यहां पर यादृच्छिक चर "शीर्षों की संख्या" के मान 0.1 या 2 हो सकते हैं, इसके मान 1½ या 0.567 आदि नहीं हो सकते। अगर हम

यादृच्छिक चर के सभी परस्पर अपवर्जी मान तथा इन मानों के घटनाओं की प्रायिकताओं की सूची तैयार करें तो इसे असंतत प्रायिकता बंटन कहा जाता है।

दिए हुए परिसर में एक यादृच्छिक चर को संतत कहा जाता है अगर इस परिसर में वह कोई भी मान ले सकता है। संतत यादृच्छिक चर शब्द का अर्थ यह है कि चर में परिवर्तन लगातार होता है।

आप संतत चर के उदाहरण इस प्रकार के प्रश्नों में पाएंगे :

1. मेरी आयु 30 वर्ष है तो मेरे 60 वर्ष तक जीवित रहने की क्या प्रायिकता है।
2. मेरे घर में बिजली का बल्ब पिछले 6 महिने से ठीक है। इसके कितनी और अवधि तक कार्य करने की प्रत्याशा है।
3. दिल्ली में धूल भरी आँधी का कितना प्रत्याशित समय है।
4. यादृच्छिक विधि से चयन किए गए भारतीय की प्रतिव्यक्ति आय 500 रुपए से अधिक होने की क्या प्रायिकता है।

उपर दिए उदाहरणों में आयु (दीर्घायु), बिजली के बल्ब का जीवन काल, धूल भरी आँधी का समय, भारत की प्रतिव्यक्ति आय, संतत यादृच्छिक चर हैं।

14.2.2 प्रायिकता द्रव्यमान फलन तथा प्रायिकता वितरण फलन

मान लीजिए x एक यादृच्छिक चर है। यह एक सिक्के के दो उछालों में शीर्षों की संख्या व्यक्त करता है। इस उदाहरण में प्रतिचयन समष्टि में x के तीन मान 0, 1 तथा 2 आते हैं। प्रायिकता द्रव्यमान फलन इन तीनों प्रतिचयन बिन्दुओं को प्रायिकता मान देता है। अतः किसी यादृच्छिक चर x के लिये, $p(x) = p(X = x)$, उस चर का प्रायिकता द्रव्यमान फलन (p.m.f.) कहलाता है। यहां,

$P(0) = P(x=0) = ¼$
$P(1) = P(x=1) = ½$
$P(2) = P(x=2) = ¼$

यहां ध्यान दीजिये कि प्रायिकता द्रव्यमान फलन निम्न दो शर्तों को पूरा करता है:

(i) $P(x) \geq 0$ और (ii) $\Sigma P(x) = 1$

किसी यादृच्छिक चर की x से नीचे के मान लेने की प्रायिकता को हम $P(x) = P(X \leq x)$ द्वारा व्यक्त करते हैं F(x) को हम यादृच्छिक चर का प्रायिकता बंटन फलन (p.d.f.) कहते हैं।

उदाहरण 1 : यादृच्छिक चर x (एक सिक्के के दो उछालों में शीर्षों की संख्या) का प्रायिकता बंटन फलन ज्ञात कीजिये।

हल:

x	p(x)	$F(x) = P(X \leq x)$
0	¼	¼
1	½	¾
2	¼	1
	$\Sigma P(x) = 1$	

इस उदाहरण की प्रतिदर्श समष्टि में सीमित बिन्दु है तथा इसका प्रायिकता बंटन फलन बिन्दुओं की प्रायिकताओं का योग है।

उदाहरण 2: एक क्यूब के एक मुंह पर 3, दो मुहों पर 2 तथा शेष तीन मुहों पर 1 अंकित है। x एक यादृच्छिक चर है जो क्यूब पर अंकित संख्याओं का मान लेता है। इस चर के p.m.f. तथा p.d.f. ज्ञात कीजिये।

हल:

x	$p(x) = P(X=x)$	$F(x) = P(X \leq x)$
1	3/6	3/6
2	2/6	5/6
3	1/€	1

यहां ध्यान दीजिये कि दूसरा स्तंभ p.m.f. तथा तीसरा स्तंभ p.d.f. प्रदर्शित करता है। यदि हमें $x = 1.5$ की प्रायिकता ज्ञात करनी हो तो हम पायेंगे कि $P(1.5) = 0$ है। तथापि, यदि हमें $x = 1.5$ का p.d.f. ज्ञात करना हो तो हम देखेंगे कि

$F(1.5) = p(x \leq 1.5) = 3/6 = ½$ है।

हम p.d.f को अन्य तरह से भी लिख सकते हैं

$F(x) = 0$ यदि $x < 1$
$F(x) = ½$ यदि $1 \leq x < 2$
$F(x) = ⅚$ यदि $2 \leq x < 3$
$F(x) = 1$ यदि $3 \leq x$

इन उदाहरणों से हमें बारम्बारता फलन तथा p.m.f. के मध्य तथा संचयी बारम्बारता फलन तथा p.d.f. के मध्य साम्यता स्पष्ट होती है यहां हम यह कह सकते हैं कि प्राय p.m.f. को सिर्फ प्रायिकता फलन भी कहते हैं।

14.2.3 द्विचरीय प्रायिकता वितरण

अब किसी यादृच्छिक प्रयोग से, प्रतिदर्श समष्टि के प्रत्येक बिन्दु के लिये दो गण्य मात्रायें प्राप्त होती हों तो दो यादृच्छिक चरों x तथा y का सृजन होता है ये चर विभिन्न बिन्दुओं के लिये अलग-अलग मान लेते हैं। किसी एक प्रतिचयन बिन्दु के लिये x तथा y विभिन्न मान ले सकते हैं। ऐसे एक बिन्दु की प्रायिकता को

$\boxed{p(x, y) = \text{Prob. } (X=x, Y=y)}$ से व्यक्त करेंगे। ये दोनों चरों x तथा y का फलन है तथा इसे संयुक्त प्रायिकता फलन कहेंगे। इसी तरह संयुक्त प्रायिकता बंटन फलन को निम्न रूप से परिभाषित करेंगे :

$$\boxed{F(x, y) = \text{Prob. } (x \leq x, Y \leq y)}$$

के मानों की .... को अनदेखा करते हुए यदि हम केवल x के विभिन्न मानों की प्रायिकता प्राप्त करना चाहते हैं तो इसे हम $\boxed{P(x, \ldots \text{Prob. } (x=x) = \Sigma\, p(x, y)}$ से व्यक्त करेंगे

यहां हम y के सभी मानों के लिये x की प्रायिकता का योग करते हैं। इस धारणा को x की सीमान्त प्रायिकता कहते हैं। इस का जिक्र इस खण्ड की पहली इकाई में किया गया था। इसी प्रकार की y सीमान्त प्रायिकता को $\boxed{P(\cdot, y) = \text{Prob. } (Y=y) = \Sigma\, p(x, y)}$ से प्राप्त किया जाता है।

यदि $p(x, \cdot)$ धनात्मक हो, तो x का मान दिया होने पर y की सप्रतिबन्ध प्रायिकता निम्न रूप द्वारा प्राप्त होती है :

$$\boxed{\text{Prob. } \{Y = y|X = x\} = \frac{\text{Prob. } \{Y=y, X=x\}}{P(X=x)} = \frac{P(x,y)}{P(x,\cdot)} = h(y|x)}$$

x के एक निश्चित मान के लिये 0, इस फलन द्वारा y के विभिन्न मानों की प्रायिकता ज्ञात की जा सकती है। इस फलन को y का सप्रतिबन्ध प्रायिकता फलन कहा जाता है। इसके बाद हम $X=x$ के लिये Y का सप्रतिबन्ध प्रायिकता बंटन फलन निम्न रूप से परिभाषित करते हैं :

$$\boxed{\text{Prob. } (Y \leq y|X=x) = \Sigma\, h(y|x)}$$

यहां पर y से छोटे y के सभी मानों पर योग किया गया है।

दो यादृच्छिक चरों x तथा y का संयुक्त बंटन फलन उनके सीमान्त बंटन फलनों की गुणन है तो दोनों यादृच्छिक चर स्वतंत्र कहलायेंगे।
x, तथा y के सभी मानों के लिए सूत्र रूप में इसकी व्युत्पत्ति यह है।

$$\boxed{\text{Prob. } (X \leq x, Y \leq y) = \text{Prob. } (X \leq x). \text{Prob } (Y \leq y)}$$

एस असंतत प्रतिदर्श समष्टि के संदर्भ में इस शर्त को हम संयुक्त प्रायिकता फलन के सीमान्त प्रायिकता फलनों के गुणन के रूप में देख सकते हैं।

$$\boxed{p(x,y) = p(x\cdot,) \times p(\cdot, y)}$$

उदाहरणः एक अनभिनत सिक्के के 5 उछालों के परिणामों से बनी प्रतिदर्श समष्टि पर विचार कीजिये। प्रथम तीन उछालों में शीर्षों की संख्या को X से व्यक्त कीजिये तथा अंतिम तीन उछालों में शीर्षों की संख्या को Y से व्यक्त करें। शीर्षों (H) तथा पुच्छों (T) के अनुक्रमों से बनी प्रतिदर्श समष्टि में 32 बिन्दु हैं। प्रत्येक अनुक्रम की लम्बाई 5 है तथा प्रत्येक की प्रायिकता 1/32 है। इन प्रतिदर्श बिन्दुओं तथा उनसे सम्बन्धित x, y के मूल्यों को निम्न तालिका द्वारा दिखाया जा सकता है।

प्रतिदर्श बिन्दु	अनुक्रम X, Y	प्रतिदर्श बिन्दु	अनुक्रम X Y
1	HHHHH 3 3	17	THHHH 2 3
2	HHHHT 3 2	18	THHHT 2 2
3	HHHTH 3 2	19	THHTH 2 2
4	HHHTT 3 1	20	THHTT 2 1
5	HHTHH 2 2	21	THTHH 1 2
6	HHTHT 2 1	22	THTHT 1 1
7	HHTTH 2 1	23	THTTH 11
8	HHTTT 2 0	24	THTTT 1 0
9	HTHHH 2 3	25	TTHHH 1 3
10	HTHHT 2 2	26	TTHHT 1 2
11	HTHTH 2 2	27	TTHTH 1 2
12	HTHTT 2 1	28	TTHTT 1 1
13	HTTHH 1 2	29	TTTHH 0 2
14	HTTHT 1 1	30	TTTHT 0 1
15	HTTTH 1 1	31	TTTTH 0 1
16	HTTTT 1 0	32	TTTTT 0 0

x तथा y के संयुक्त प्रायिकता फलन $p(x, y) = \text{Prob. } (X=x, Y=y)$ तथा सीमान्त प्रायिकता फलनों $P(x,\cdot)$ तथा $p(\cdot, y)$ को निम्न तालिका द्वारा व्यक्त किया जाता है। यहां x, y के मान 0, 1, 2, 3 हैं।

x^y	0	1	2	3	$P(x,\cdot)$
0	1/32	2/32	1/32	0	4/32
1	2/32	5/32	4/32	1/32	12/32
2	1/32	4/32	5/32	2/32	12/32
3	0	1/32	2/32	1/32	4/32
$P(\cdot,y)$	4/32	12/32	12/32	4/32	32/32

$X=1$ के लिए y का सप्रतिबंध प्रायिकता फलन प्राप्त करने के लिए $P(1, y)$ को $P(1,\cdot)$ से भाग देना पड़ता है। अतः

$\text{Prob. } (Y=0|X=1) = 2/12$, $\text{Prob. } (Y=1|X=1) = 5/12$,
$\text{Prob } (Y=2|X=1) = 4/12$ तथा $\text{Prob. } (Y=3|X=1) = \dfrac{1}{12}$

आदि। इसी तरह $X=1$ के लिए Y की सप्रतिबंध प्रत्याशा को निम्न सूत्र द्वारा व्यक्त किया जा सकता है:

$$E(Y|X=1) = 0 \times \frac{2}{12} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{4}{12} + 3 \times \frac{1}{12} = \frac{16}{12} \quad -(1)$$

$X=1$ के लिए Y की सप्रतिबंध प्रत्याशा निम्न होगी :

$$E(Y^2|X=1) = 0^2 \times \frac{2}{12} + 1^2 \times \frac{5}{12} + 2^2 \times \frac{4}{12} + 3^2 \times \frac{1}{12} = \frac{30}{12} \quad -(2)$$

तथा, $X=1$ के लिए y_i का प्रसरण यह होगा :

$$V(Y|X=1) = E(Y^2|X=1) - \{E(Y|x=1)\}^2 = \frac{30}{12} - \left(\frac{16}{12}\right)^2 = \frac{104}{144}$$

बोध प्रश्न 1

1. एक सिक्के के तीन उछालों द्वारा प्राप्त शीर्षों की संख्या का प्रायिकता बंटन बनाइए। इस प्रायिकता बंटन को आलेख या पृष्ठ पर आलेखित कीजिए।

2. निम्नलिखित में से कौन से मान्य प्रायिकता प्रव्यमान फलन हैं .

क) $P(x) = \frac{x^2}{3}, x = -1, 0, 1$

ख) $P(x) = \frac{x^3}{3}, x = -1, 0, 1$

ग) $P(x) = \frac{x^2 - x}{16}, x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

घ) $P(x) = \frac{x}{3}, x = -1, 0, 1, 3.$

3. k का ऐसा एक मान ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित में से प्रत्येक मान्य प्रायिकता प्रव्यमान फलन बन जाए :

क) $kX^2 : X = 0, 1, 2, 3$

ख) $\frac{k}{X} : X = 3, 4, 5$

ग) $\frac{k}{x^2} : X = 1, 2$

4. मान लिया 'IGNOU' की अर्थशास्त्र संकाय एक नया पाठ्यक्रम जिसका नाम "मुरगी-पालन अर्थशास्त्र" (Economics of Poultry) होगा शुरू करना चाहती है। मान लिया संकाय से मुद्रणालय को पाठ्यक्रम सामग्री भेजने में x महिनों की आवश्यकता होती है। x का प्रायिकता बंटन इस प्रकार है :

$$P(x) = \frac{X}{30};\ X = 5, 6, 9, 10$$

हमारी यह मान्यता है कि समय को महिनों की पूर्णांक संख्या में लिखित किया जाता है।

क) पाठयक्रम सामग्री को ठीक 6 महीनों में भेजे जाने की क्या प्रायिकता है

ख) इसके अधिक से अधिक 6 महिनों में भेजे जाने की क्या प्रायिकता है

ग) इसके कम से कम 6 महिनों में भेजे जाने की क्या प्रायिकता है

घ) इसके कम से कम 6 महिनों लेकिन 9 महिनों से अधिक नहीं, में भेजे जाने की क्या प्रायिकता है।

ङ) सिद्ध किजिए कि P(x) एक प्रायिकता प्रव्यमान फलन है।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

14.3 द्विपद बंटन

"द्विपद" शब्द दो का संकेत करता है। प्रायिकता बंटन के संदर्भ में द्विपद शब्द को एक घटना के दो परिणामों, जिनको क्रमशः सफलता (घटना का घटित होना) तथा असफलता (घटना का घटित न होना) कहा जाता है, के संकेत के लिए प्रयोग किया जाता है। ऐसी परिस्थिति, जिसमें द्विपद बंटन प्रयुक्त हो सकता है, की व्याख्या सिक्के को उछाल कर की जा सकती है। प्रत्येक उछाल को अभिप्रयोग तथा सिक्के को उछालने की क्रिया को प्रयोग कहते हैं। इस प्रकार के प्रयोग की निम्नलिखित विशेषताएँ होती है :

1. दी हुई संख्या में अभिप्रयोगों में से हमारी रुचि शीर्षों की संख्या में है
2. प्रत्येक अभिप्रयोग के केवल दो संभावित परिणाम होते हैं शीर्ष या पुच्छ, जो कि परस्पर अपवर्ती होती हैं।
3. प्रत्येक अभिप्रयोग में शीर्ष प्राप्त करने की प्रायिकता स्थिर रहती है
4. एक अभिप्रयोग में शीर्ष आना अन्य अभिप्रयोगों के परिणामों से स्वतंत्र होता है

इस प्रकार की विशेषताओं वाले अभिप्रयोगों को बर्नोली अभिप्रयोग कहा जाता है। बर्नोली अभिप्रयोगों की सामान्यतः विशेषताएँ निम्नलिखित है :

1. दिए हुए निश्चित अभिप्रयोगों में से हमारी रुचि सफलताओं की संख्या में है।
2. प्रत्येक अभिप्रयोग के केवल दो संभावित परिणाम होते हैं, "सफलता" या असफलता।
3. प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता स्थिर रहती है।
4. प्रत्येक अभिप्रयोग एक दूसरे से स्वतंत्र हैं।

अब हम इस प्रकार के प्रयोग में n अभिप्रयोगों में से x के सफल होने की प्रायिकता के सूत्र का विकास करने का प्रयास करेंगे। पहले हम अनभिनत सिक्का उछालने के सरल उदाहरण पर विचार करेंगे। हम 4 सिक्के

उछालने में ठीक दो शीर्ष प्राप्त करने की प्रायिकता परिकलित करेंगे तथा परिणामी व्यंजक को व्यापक रूप देंगे। इस परिस्थिति में दो सफलताएं हैं – दो शीर्ष प्राप्त करना तथा दो ही असफलताएं हैं। यहां पर यह स्पष्ट हो जाना आवश्यक है कि "सफलता" या "असफलता" में कोई मान निर्णय (value judgement) नहीं है। केवल घटना के घटित होने को सफलता तथा न घटने को असफलता कहा जाता है। इस प्रकार उत्पादित वस्तुओं में से खराब वस्तु का प्रतिदर्श में आना, सफलता कहलाता है, तथा इसका न आना असफलता कहलाता है। इसी प्रकार शीर्ष तथा पुच्छ को क्रमशः सफलता व असफलता कहा जाता है।

मान लिया एक अनभिनत सिक्के के 4 उछालों में परिणाम का अनुक्रम इस प्रकार है:

जहां पर HHTTH शीर्ष को तथा T पुच्छ को सूचित करता है मान लिया शीर्ष प्राप्त करने की प्रायिकता p है

तथा पुच्छ प्राप्त करने की प्रायिकता q है। अगर सिक्का अनभिनत है तो स्पष्टतः $p = q = \frac{1}{2}$ होगा। लेकिन अगर इसमें कोई दोष है तो $p \neq q$ होगा।

क्योंकि अभिप्रयोग स्वतंत्र है, एक अभिप्रयोग में घटना का घटित होना (या न होना) दूसरे अभिप्रयोग में घटना के घटित होने (या न होने) को प्रभावित नहीं करता अतः

1. पहले अभिप्रयोग में शीर्ष प्राप्त करने की प्रायिकता $P(H) = p$
2. पहले अभिप्रयोग में शीर्ष करना तथा दूसरे में पुच्छ प्राप्त करने की प्रायिकता
   $P(HT) = p \times q$
3. इसी प्रकार HTT प्राप्त करने की प्रायिकता $= p \times q \times q = pq^2$
4. तथा अन्त में $P(HTTH) = p \times q \times q \times p = p^2q^2$ यहां पर यह ध्यान दें कि दो शीर्ष तथा दो पुच्छ प्राप्त करने का केवल यही एकमात्र परिणाम नहीं है।
   4 अभिप्रयोगों में ⇔ ठीक दो शीर्ष तथा दो पुच्छ प्राप्त करने के 5 और अनुक्रम इस प्रकार है।

   HHTT
   TTHH
   HTHT
   THTH
   THHT

   इस प्रकार प्रत्येक अनुक्रम में दो शीर्ष तथा दो पुच्छ घटित होने वाले कुल 6 अनुक्रम हैं। इस प्रकार 4 उछालों में दो शीर्ष प्राप्त करने की प्रायिकता

   $= p^2q^2 + p^2q^2 + p^2q^2 + p^2q^2 + p^2q^2 + p^2q^2 = 6\,p^2q^2$

   अब खंड 2 में क्रमचय तथा संचय के अध्ययन का पुनः स्मरण कीजिए ध्यान दें कि वास्तव में ${}^4c_2 = 6$
   जहां पर $4 =$ अभिप्रयोगों की संख्या
   $2 =$ सफलताओं की संख्या

   अतः 4 उछालों में दो शीर्ष प्राप्त करने की प्रायिकता $= {}^4c_2\, p^2q^2$,
   क्योंकि सिक्के के चार उछालों के दो शीर्ष ${}^4c_2$ विभिन्न विधियों से प्राप्त किए जा सकते हैं।
   अब, कोई शीर्ष नहीं, एक शीर्ष, दो शीर्ष तीन शीर्ष तथा चार शीर्ष प्राप्त करने के कितने अनुक्रम हैं। ये क्रमशः 1, 4, 6, 4 तथा 1 हैं क्योंकि
   ${}^4c_0 = 1;\ {}^4c_1 = 4;\ {}^4c_2 = 6;\ {}^4c_3 = 4$ तथा ${}^4c_1 = 1$ हैं।

सारणी 14.1 सिक्के के उछाल में प्राप्त शीर्षों की संख्या

शीर्षों की संख्या (सफलताएं)				
0	1	2	3	4
TTTT	HTTT	HHTT	HHHT	HHHH
	THTT	TTHH	HHTH	
	TTHT	HTHT	HTHH	
	TTTH	THTH	THHH	
		HTTH		
		THHT		

अब हम इसको n अभिप्रयोगों तथा x सफलता संख्या जहां पर $0 \le x \le n$ है, के लिए व्यापक बनाएँगे। x सफलताओं तथा n – x असफलताओं का एक अनुक्रम इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\underbrace{FF....... F_1}_{n-x} \; \underbrace{SS....... S}_{x}$$

इस अनुक्रम की प्रायिकता $q^{n-x}.\ p^x$ है

अब x सफलताओं तथा n–x असफलताओं के अनुक्रमों की संख्या ${}^nc_x$ है अतः n अभिप्रयोगों में x सफलताओं की प्रायिकता $= {}^nc_x\, p^x q^{n-x}$

या $\boxed{P(x) = {}^nc_x\, p^x\, q^{n-x}}$ है

जैसा कि आपने पहले पढ़ा प्रायिकता बंटन की दोनों शर्तें यहां सन्तुष्ट होती है।

(1) $P(x) \ge 0$

(2) $\Sigma\, P(x) = 1$

द्विपद बंटन भी ये शर्तें सन्तुष्ट करता है।

अतः $P(x) = {}^nc_x\, p^x\, q^{n-x}$ द्विपद बंटन का प्रायिकता फलन है। सिक्के के 4 उछालों के उदाहरण में 16 (=1+4+6+4+1) सम्भावित परिणाम है। तथा इनकी प्रायिकता का ... इकाई के बराबर है $[(P+q)^4 = 1]$ व्यापक परिस्थिति के लिए आप इसे स्वयं सिद्ध कीजिए।

पास्कल का त्रिभुज

उपरोक्त n=4 के उदाहरण में हमने द्विपद गुणांको के मान प्राप्त किए हैं। निम्नलिखित पास्कल के त्रिभुज द्वारा हम n के विभिन्न मानों के लिए द्विपद गुणांको का मान प्राप्त कर सकते हैं

पास्कल का त्रिभुज

($(p+q)^n$ के पदों के गुणांक प्रदर्शित किए गए हैं)

n का मान	द्विपद गुणांक
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

उदाहरणः द्विपद बंटन के प्रयोग द्वारा, दो पासों के उछाल (या एक पासों के दो उछाल) में कम से कम एक 6 प्राप्त करने की प्रायिकता परिकलित कीजिए।

हलः इस प्रश्न में अभिप्रयोगों की संख्या=2 अर्थात् n=2 है एक पासे (Cube) में 6 समप्रायिक परिणाम 1, 2, 3, 4, 5, 6 होते हैं। अतः एक अभिप्रयोग में 6 को प्राप्त करने की प्रायिकता 1/6 है, अर्थात् $p = \frac{1}{6}$ है। 6 न प्राप्त करने (असफलता) की प्रायिकता $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ है।

यहां समस्त प्रायिकता बंटन की जांच करना शिक्षाप्रद रहेगा।

X	P(x)
0	${}^2c_0 \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^2 = 1.1.\ \frac{25}{36} = \frac{25}{36}$

अतः कम से कम एक 6 को प्राप्त करने की प्रायिकता

$= P(x \geq 1) = P(x=1) + P(x=2)$

$$= \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$$

विलोमतः P (कम से कम एक 6 मात्र प्राप्त करना)

$= 1 - P$ (कोई भी 6 न प्राप्त करना)

$= 1 - P\ (x=0)$

$$= 1 - \frac{25}{36} = \frac{11}{36}$$

यहां पर यह ध्यान दें कि अगर आप एक पासे को दो बार उछालते हैं तो या तो 6 किसी पर नहीं आएगा या एक पर आएगा या दोनों पर आएगा अतः x के केवल 3 मान हैं तथा

$$\sum_{x=0}^{2} P(x) = \frac{25}{36} + \frac{10}{36} + \frac{1}{36} = 1$$

जिसका अर्थ है कि x के ये तीन मान 6 प्राप्त करने या न करने की भी सम्भावनाओं को सम्मिलित करते हैं।

उदाहरण : मान लिया ONGC, Bombay High के 10 विभिन्न कुओं में तेल की उपलब्धता की जांच करना चाहती है। किसी एक कुएँ में तेल पाने की प्रायिकता 0.1 है। यह मान लिजिए कि एक कुएँ में तेल की उपलब्धता अन्य कुओं में तेल की उपलब्धता से स्वतंत्र है अर्थात 10 स्वतंत्र अभिप्रयोग है। निम्नलिखित प्रायिकताएं ज्ञात कीजिए।

1. एक सफल अन्वेषण
2. कम से कम एक सफल अन्वेषण
3. दो या इससे कम सफल अन्वेषण
4. तीन या इससे अधिक सफल अन्वेषण

हल

इस प्रश्न के हल से पहले याद कीजिए कि द्विपद सूत्र, $P(x) = {}^{n}c_x\, p^x\, q^{n-x}$ हमें ठीक x सफलताओं की प्रायिकता देता है।

यहां पर $p = 0.1$ = सफलता (तेल प्राप्त करने) की प्रायिकता

$\therefore q = 0.9$

$n = 10$ = कुओं की संख्या

x = सफल अन्वेषणों की संख्या

1. एक सफल अन्वेषण की प्रायिकता $P(x=1) = {}^{10}c_1\,(0.1)^1\,(0.9)^9 = 10.\,(0.9)^9$

2. P (कम से कम एक सफल अन्वेषण)

$= P(x \geq 1) = 1 - P(x=0)$

$= 1 - {}^{10}c_0\,(0.1)^0\,(0.9)^{10} = 1 - (0.9)^{10}$

3. P (दो या इससे कम सफल अन्वेषण)

$= P(X=0) + P(x=1) + P(x=2) = \sum_{x=0}^{2} P(x)$

$= \sum_{x=0}^{2} {}^{10}c_x\,(0.1)^x\,(0.9)^{10-x}$ –

$= {}^{10}c_0\,(0.1)^0\,(0.9)^{10} + {}^{10}c_1\,(0.1)\,(0.9)^9 + {}^{10}c_2\,(0.1)^2\,(0.9)^8$

$= (0.9)^{10} + 10\,(0.1) \times (0.9)^9 + 45\,(0.1)^2\,(0.9)^8$

$= (0.9)^8\,[(0.9)^2 + 10\,(0.1)\,(0.9) + 45\,(0.1)^2]$

उदाहरण : एक सत्य-असत्य परीक्षा में 50 प्रश्न हैं। पास होने के लिए एक विद्यार्थी के 60 प्रतिशत या अधिक उत्तर ठीक होने आवश्यक हैं। अगर एक विद्यार्थी प्रश्नों के उत्तर एक अनभिनत सिक्के को उछाल कर देता है जिसमें प्रत्येक प्रश्न उत्तर को शीर्ष आने पर सत्य तथा पुच्छ आने पर असत्य हो तो विद्यार्थी के पास होने की प्रायिकता क्या होगी।

हल : इस प्रश्न में $n = 50 \quad p = \frac{1}{2} \quad q = \frac{1}{2}$

50 का 60% = 30

इस प्रकार हमें $p(x \geq 30)$ ज्ञात करना है अर्थात् विद्यार्थी द्वारा 30 या इससे अधिक प्रश्न ठीक किए जाने की प्रायिकता।

$$P(x \geq 30) = P(x = 30) + P(x = 31) + \ldots\ldots + P(x = 50)$$

$$= {}^{50}c_{30}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}\left(\frac{1}{2}\right)^{20} {}^{50}c_{31}\left(\frac{1}{2}\right)^{31}\left(\frac{1}{2}\right)^{19} + \ldots\ldots + {}^{50}c_{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{50}\left[{}^{50}c_{30} + {}^{50}c_{31} + \ldots\ldots + {}^{50}c_{50}\right]$$

14.3.1 द्विपद बंटन का माध्य

अगर आप से यह पूछा जाय कि 100 अनभिनत सिक्कों के उछाल में आपको कितने शीर्षों की प्रत्याशा है तो सहजानुभूत आपका उत्तर 50 होगा निस्सन्देह, 100 सिक्कों में प्रत्येक के उछाल में 50 शीर्ष नहीं आएंगे। वास्तव में, प्रत्येक 100 सिक्कों के उछाल में शीर्षों की संख्या भिन्न होगी। लेकिन 100 सिक्कों के बहुत से उछालों में प्राप्त शीर्षों की संख्याओं का औसत 50 के बराबर होना प्रत्याशित है द्विपद अभिप्रयोगों में सफलताओं की संख्या के औसत को द्विपद बंटन का माध्य कहा जाता है। माध्य को μ से सूचित किया जाता है तथा इसको "म्यू" पुकारा जाता है। माध्य को सफलताओं की संख्या का प्रत्याशित मान $E(x)$ भी कहा जाता है

प्रमेय : द्विपद बंटन की माध्य अभिप्रयोगों की संख्या n तथा प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता p के गुणनफल के बराबर होता है

अर्थात् $E(x) = np$

उपपत्ति

$$E(x) = \sum_{x=0}^{n} xp(x)$$

जहाँ पर सफलताओं की संख्या x है,
x सफलताओं की प्रायिकता $p(x)$ है, अर्थात्

$p(x) = {}^nc_x\, p^x\, q^{n-x}$ x के घटित न होने की प्रायिकता q है तथा $q = 1 - p$ है।

इस प्रकार $p(x=1) = {}^nc_1\, p^1\, q^{n-1}$ n अभिप्रयोगों में से एक सफलता की प्रायिकता है।
इसी प्रकार $p(x=2) = {}^nc_2\, p^2\, q^{n-2}$ n अभिप्रयोगों में से दो सफलताओं की प्रायिकता है।

अतः $E(x) = 0.p(0) + 1.p(1) + \ldots\ldots + np(x)$

$$= \sum_{x=0}^{n} x.p(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x.{}^nc_x\, p^x\, q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p.p^{x-1}.\, q^{n-x}$$

$$= np \sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!\,(n-x)!}\, p^{x-1}\, q^{n-x}$$

मान लिया $y = x - 1 \quad \therefore x = y + 1$ तब $n - x = n - y - 1$

जब $x = 1$ तो $y = 0$ तथा जब $x = n$ तो $y = n - 1$

अतः $E(x) = np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!\,(n-y-1)!}\, p^{x} q^{n-y-1}$

$$= np \sum_{y=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{y!\,[(n-1)-y]!}\, p^{y}\, q^{(n-1)-y}$$

$$= np \sum_{y=0}^{n-1} (q + p)^{n-1}$$

$$= np(1)^{n-1} = np$$

अतः $\boxed{\mu \doteq np}$

अतः x का प्रत्याशित मान E(x) या माध्य μ, n तथा p का गुणनफल है।
100 अनगिनत सिक्कों के उछाल में $n = 100$ तथा शीर्ष की प्रायिकता = 0.*

$\therefore$ प्रत्याशित शीर्षों की संख्या $E(x) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$

जोकि पहले प्राप्त सहजानुभूत उत्तर के बराबर है।

उदाहरण : अगर आप एक अनगिनत पासे को 120 बार उछालते हैं तो आपको 6 प्राप्त करने की क्या प्रत्याशा है ?

हल : $p(x = 6) = \frac{1}{6} = p$

$n = 120$

अतः $E(x) = 120 \times \frac{1}{6} = 20$

14.3.2 द्विपद बंटन का मानक विचलन

द्विपद बंटन के मान विचलन का सूत्र $\sigma = \sqrt{npq}$ है

प्रमेय : द्विपद बंटन का मानक विचलन $\sigma = \sqrt{npq}$ होता है।

उपपत्ति : प्रायिकता बंटन का प्रसरण $\sigma^2 = E(x - \mu)^2$

द्विपद बंटन का प्रसरण $= \sigma^2 = E(x - hp)^2$

$$= E(x^2) - 2np\,E(x) + n^2p^2$$

$$= E(x^2) - 2x^2p^2 + x^2p^2$$

$$= E(x^2) - x^2p^2$$

अब $E(x^2) = \sum^{n} x^2.p(x)$

हम x^2 को $x(x-1) + x$ के बराबर लिखते हैं

$$E(x^2) = \sum_{x=1}^{n} [x(x-1) + x] \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=1}^{n} \frac{x(x-1)\,n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x} + \sum_{x=1}^{n} x \frac{n!}{x!\,(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

$$= \sum_{x=2}^{n} \frac{n!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^x q^{n-x} + E(x)$$ (क्योंकि जब $x = 1$ तो पहले योग का पहला पद शून्य होगा ।)

$$= n(n-1)\,p^2 \sum_{x=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(x-2)!\,(n-x)!} p^{x-2} q^{n-x} + np.$$

यहां पर हमने $n! = n(n-1)(n-2)!$ लिखा है तथा $n(n-1)\,p^2$ को योग चिन्ह से बाहर ले लिया है ।

मान लिया $y = x - 2 \quad \therefore x = y + 2$ तथा $n - x = n - y - 2 = (n-2) - y$

जब $x = 2$ तो $y = 0$ तथा जब $x = n$ तो $y = n - 2$

$$\therefore E(x^2) = n(n-1)\,p^2 \sum_{y=0}^{n-2} \frac{(n-2)!}{y!\,[(n-2)-y]!} \cdot p^y \cdot q^{(n-2)-y} + np$$

$$= n(n-1)\,p^2 \sum_{y=0}^{n-1} {}^{n-2}c_y\, p^y q^{(n-2)-y} + np$$

$$= n(n-1)\,p^2 (q+p)^{n-2} + np$$

$$= n(n-1)\,p^2 + np \quad (\because (q+p)^{n-2} = 1)$$

$$\therefore \sigma^2 = E(x^2) - n^2p^2$$

$$= n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2$$

$$= np - np^2 = np(1-p) = npq$$

$\therefore$ मान विचलन $= \sigma = \sqrt{npq}$

हमारे 100 सिक्कों के उछालने वाले उदाहरण में मानक विचलन

$$\sigma = \sqrt{100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$$ शीर्ष है ।

बोध प्रश्न 2 :

1. एक उपनगर में अस्पताल में आपातकालीन वाहन कार्य के लिए तीन एम्बूलेंस हैं । एक दिए हुए समय में इनमें से किसी एक के उपलब्ध होने की प्रायिकता 0.75 है । अगर किसी व्यक्ति को अस्पताल गाड़ी की आवश्यकता है तो

   (क) किसी गाड़ी के न मिलने की प्रायिकता क्या है ?

   (ख) गाड़ी के मिलने की प्रायिकता क्या है ?

   (ग) केवल एक गाड़ी के मिलने की प्रायिकता क्या है ?

....

....

....

....

....

2. 13 सिक्कों के उछाल में 6 शीर्ष प्राप्त होने वाले अनुक्रमों की संख्या कितनी है ?

....

....

....

....

3. एक दिए हुए उत्पादित पुर्जों के ढेर में 3 प्रतिशत दोषपूर्ण पुर्जे हैं। इनमें से प्राप्त 4 पुर्जों के प्रतिदर्श में कोई भी दोषपूर्ण न होने की क्या प्रायिकता है ?

....

....

....

....

4. मान लिया आपको EEC-03 के CMA-01 के 50 प्रश्नों में से 45 प्रश्नों के उत्तर ज्ञात हैं। आपको याद होगा कि प्रत्येक उत्तर के चार विकल्प दिए हुए हैं जिनमें से केवल एक विकल्प ठीक है। मान लिया शेष 5 प्रश्नों, जिनके उत्तर आपको ज्ञात नहीं है, के उत्तर के लिए एक विधि तैयार करते हैं जोकि इस प्रकार हैं : आप एक पासे को उछालते हैं, अगर पासे पर एक आता है तो प्रश्न का पहला विकल्प दो आता है तो दूसरा इत्यादि, उत्तर ले लेते हैं अगर पासे पर 5 या 6 आता है तो आप इसकी अवहेलना करके पासे को दोबारा उछालते हैं। अगर S सफलता (ठीक उत्तर) तथा F असफलता (गलत उत्तर) को सूचित करे तों।

1. एक अभिप्रयोग में ठीक उत्तर आने की क्या प्रायिकता है ?
2. पहले दो उत्तर ठीक तथा अन्तिम 3 उत्तर गलत होने की क्या प्रायिकता है ?
3. किन्हीं दो उत्तरों के ठीक होने तथा बाकी तीन उत्तरों के गलत होने की क्या प्रायिकता है।
4. सभी उत्तरों के गलत होने की क्या प्रायिकता है।

....

....

....

....

....

....

....

....

5. 5 सिक्कों को 3200 बार उछाला गया। शीर्ष के बंटन की बारम्बारताएं ज्ञात कीजिए तथा परिणामों को सारणीबद्ध कीजिए। सफलताओं का माध्य तथा मानक विचलन भी परिकलित कीजिए।

....

....

....

6. निम्नलिखित पर टिप्पणी कीजिए :
एक द्विपद बंटन के लिए माध्य = 3 प्रसरण = 5 है।

7. एक द्विपद बंटन के लिए माध्य = 6 तथा मानक विचलन = $\sqrt{2}$ है। द्विपद बंटन के सभी पदों को लिखिए

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1. अगर हम एक अनगिनत सिक्के के 10 उछालों के 1000 समूह लें तो हमें कितने समूहों में 6 शीर्ष तथा 4 पुच्छ प्राप्त होने की प्रत्याशा है ?

....
....
....
....
....
....
....
....

14.4 बहुपद बंटन

एक यादृच्छिक प्रयोग कीजिए जिसके $k(k > 2)$ निम्न परिणाम हो सकते हैं। $E_1, E_2, E_3 \ldots\ldots E_k$ n घटनाएँ हैं जो परस्पर अपवर्जी हैं। मान लीजिए $p_i > 0$ तथा $p_1 + p_2 + p_3 + \ldots\ldots + p_k = 1$ है। मान लीजिए इस यादृच्छिक प्रयोग को n बार दोहराया जाता है $(n \geq 2)$ तथा $X_1, X_2, \ldots\ldots, X_k$; n प्रयोगों में घटनाएँ $E_1, E_2, \ldots\ldots E_k$ घटित होने की बारम्बारताओं को व्यक्त करते हैं। यहाँ $X_1, X_2, \ldots\ldots X_k$ यादृच्छिक चर हैं लेकिन $X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_k = n$ हैं। यहाँ ध्यान दें कि हम द्विपद बंटन का व्यापीकरण कर रहे हैं।

$X_1, X_2, X_3 \ldots\ldots X_k$ के संयुक्त प्रायिकता फलन को

$$p(x_1, x_2, \ldots\ldots x_k) = \text{Prob.} \{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots\ldots X_k = x_k\}$$

$$\frac{n!}{x! \, x_2! \, x_3! \ldots\ldots x_k!} p_1^{x_1} p_2^{x_2} p_3^{x_3} \ldots\ldots p_k^{x_k}$$ से निरूपित करते हैं।

इसे निरूपित करने के लिए द्विपद बंटन के तार्किक आधार का प्रयोग किया जा सकता है। यहाँ –

अब चूंकि "i" वें प्रयोग के दो परिणाम E_j और E_k नहीं हो सकते हमारे पास $X_{ji}\, X_{ki} = 0$, जहां पर $j \neq k$ हो, होना चाहिए। इसलिए $E(X_j) = nP$

$V(xj) = nP_j\,(1-P_j)$

$Cov.\,(x_j - x_k) = nP_jP_k$

14.5 पाइसों बंटन

पाइसों बंटन एक सैद्धान्तिक असंतत बंटन है इसका नाम एक फांसीसी गणितज्ञ सिमियन पाइसों के नाम पर रखा गया जिसने इस बंटन को द्विपद बंटन के एक विशेष चरम रूप में व्युत्पन्न किया। जब द्विपद बंटन में अभिप्रयोगों की संख्या अनंततः बड़ी हो जाती है तथा किसी एक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता बहुत छोटी हो जाती है तो द्विपद बंटन पाइसों बंटन की ओर प्रवृत होता है।

निम्नलिखित में हम कुछ व्यवहारिक परिस्थितियों का जिक्र करेंगे जिनमें प्वासों बंटन का प्रयोग किया जा सकता है।

1. पूर्वी बंगाल व मोहन बागान के बीच फुटबाल मैच में 5 मिनट में किए गए गोल की संख्या। क्यों ? क्योंकि 5 मिनट में गोल करने की प्रायिकता बहुत कम होती है चाहे सैद्धान्तिक दृष्टि से गोल की प्रायिकता अधिक हो।
2. एक टेलीफोन स्वीच बोर्ड पर एक मिनट में टेलीफोन कालों की संख्या
3. दिल्ली में एक विशेष दिन में सूचित आत्महत्याओं की संख्या
4. एक विख्यात कम्पनी द्वारा निर्मित दोषपूर्ण ब्लेडों की संख्या
5. आपके पाठ्यक्रम सामग्री के इस पृष्ठ में मुद्रित गलतियों की संख्या आदि पाइसों बंटन का प्रायिकता द्रव्यमान फलन निम्नलिखित है।

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}\;;\; x = 0, 1, 2, \ldots$$

जहां पर $e = 2.71828$ एक चरघातांकी स्थिरांक है तथा λ जिसको लैमडा बोला जाता है, भी एक स्थिरांक है।

यहां पर यह ध्यान दीजिए कि हमने $x = 1, 2, \ldots\ldots n$ नहीं लिखा है जैसाकि हमने द्विपद बंटन में लिखा था क्योंकि इस बंटन में अभिप्रयोगों की संख्या अनंततः बड़ी होती है। यह भी ध्यान दीजिए कि x के सभी मानों के लिए $p(x) > 0$ है तथा

$$\sum_{x=0}^{\infty} p(x) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\cdot\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda}\left[\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= e^{-\lambda}\left[1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \frac{\lambda^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= e^{-\lambda}\, e^{\lambda} = e^0 = 1 \text{ है} \quad \left[\because e^{\lambda} = 1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots\right]$$

14.5.1 पाइसों बंटन का माध्य

$$\ldots = \ldots \quad e^{-\lambda}\,\lambda^x$$

$$= e^{-\lambda}.\ \lambda \left[\frac{\lambda^0}{0!} + \frac{\lambda}{1!} + \frac{\lambda^2}{2!} + \ldots \right]$$

$$= \lambda \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = \lambda$$

14.5.2 पाइसों बंटन का मानक विचलन

प्रसरण $\sigma^2 = E(x - \mu)^2 = E(x - \lambda)^2$

$$= E(x^2)\ \lambda^2$$

अब $E(x^2) = \sum_{x=0}^{\infty} x^2 \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} [x(x-1) + x] \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} \frac{x(x-1)\ e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} x \cdot \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{(x-2)!} + E(x)$$

$$= e^{-\lambda} \cdot \lambda^2 \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 + \lambda$$

$$\therefore \sigma^2 = E(x^2) - \lambda^2$$

$$= \lambda^2 + \lambda - \lambda^2$$

$$= \lambda$$

$\therefore$ मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\lambda}$

द्विपद तथा पाइसों बंटनों के माध्य तथा प्रसरण की अगर तुलना करें तो

$\lambda = np$ तथा

$\lambda' = npq$

क्योंकि, p बहुत छोटा होता तथा q का मान लगभग इकाई के बराबर होता है

इसलिए $np \approx npq$

14.5.3 हल किए हुए उदाहरण

उदाहरण : पूर्व अनुभव के आधार पर यह ज्ञात है कि एक संयंत्र में एक मास में औसतन 4 औद्योगिक दुर्घटनाएँ होती हैं। एक दिए हुए मास में चार से कम दुर्घटनाओं की प्रायिकता परिकलित कीजिए। इसके लिए पाइसों बंटन का प्रयोग कीजिए। ($e^{-4} = 0.0183$)

हल :

यहां पर $\lambda = 4$

मान लिया प्रतिमास दुर्घटनाओं की संख्या $= x$

पाइसों प्रायिकता नियम द्वारा $p(x) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^x}{x!}$

अर्थात् $p(x) = \frac{e^{-4} \cdot 4^x}{x!}$

दस

प्रतीक्षा काल T (मिनटों में) एक संतत यादृच्छिक चर है। इसका निश्चित पूर्वानुमान नहीं किया जा सकता (इसलिए इसको यादृच्छिक कहा जाता है) तथा यह संतत समय मापक्रम 0 से 10 मिनट में कोई भी मान ले सकता है (इसलिए यह संतत है)। इसके दशमलव निरुपण में T के मान अंकों का एक अनंत अनुक्रम है। वे अनुक्रम जो 0 से शुरु होते हैं (जैसे 0.903) 0 तथा 1 मिनट के बीच प्रतीक्षाकाल को निरुपित करते हैं। इसी प्रकार 1 से शुरु होने वाले अनुक्रम (जैसे 1.523– –) 1 से 2 मिनट के बीच प्रतीक्षा काल को निरुपित करते हैं, इत्यादि।

सही आगमन काल की अज्ञानता को निरुपित करने में हम यह महसूस कर सकते हैं कि एक-एक मिनट के 10 अन्तराल, 0 से 1, 1 से 2, इत्यादि, समप्रायिक हैं। इसी प्रकार किसी एक मिनट के अन्तराल में 0.1 मिनट के (अर्थात् 6 सैकेण्ड के) 10 अन्तराल समप्रायिक हैं, इत्यादि। इस आधार पर हम T के मानों के किसी अन्तराल की प्रायिकता परिकलित कर सकते हैं।

उपरोक्त उदाहरण में $P(0 \le T \le 10) = 1$ अर्थात् 10 मिनट के अन्तराल में बस आनी निश्चित है।

बस की प्रतीक्षा के दूसरे मिनट में आने की प्रायिकता क्या है ? अर्थात् $P(1 \le T \le 2) = ?$

यह प्रायिकता $\frac{1}{10}$ है

बस के अन्तराल $3 < T \le 5$ में आने की क्या प्रायिकता है ?

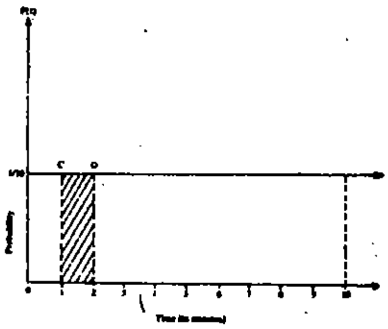
यह $\frac{2}{10}$ अर्थात् $\frac{1}{5}$ है।

दूसरी ओर, बस के किसी एक निश्चित समय T पर आने की प्रायिकता 0 है। उदाहरण के लिए $P(T = 3.567) = 0$

इसका कारण यह है कि $0 \le T \le 10$ अन्तराल में अगणनीय अनंत संख्या में बिन्दु होते हैं तथा किसी मान की प्रायिकता 1/8 अर्थात् शून्य होती है। लेकिन अगणनीय मानों वाले अन्तराल की संतत निदर्श में धनात्मक प्रायिकता हो सकती है। अपने आरंभिक प्रश्न पर दोबारा ध्यान देने पर, अगली बस के लिए प्रत्याशित प्रतीक्षा काल 5 मिनट है।

प्रायिकता घनत्व बंटन

पहले हम प्रतीक्षा काल प्रश्न की ज्यामितीय व्याख्या करते हैं। आकृति 14.2 पर ध्यान दीजिए



(T न्यूनतम) (T अधिकतम)

समय (T) मिनटों में

आकृति 14.2

क्षैतिज अक्ष समय को सूचित करता है तथा ऊर्ध्वाधर अक्ष प्रायिकता घनत्व फलन को सूचित करता है। लेकिन असंतत चर की परिस्थिति के विपरीत $P(T=t)=0;\ 0 \le t \le 10$ इस प्रकार प्रायिकता घनत्व फलन का प्रयोग संतत चर के किसी मान की प्रायिकता के लिए नहीं किया जाता। जब भी हम प्रायिकता घनत्व फलन p(T) की बात करते हैं तो हमारा अर्थ है कि t एक अन्तराल $t_1 \le t \le t_2$ में स्थित है तथा हम इस अन्तराल की प्रायिकता ज्ञात करना चाहते हैं। अब, हम उपर दिए हुए उदाहरण के लिए प्रायिकता

यहाँ यह ध्यान दीजिए कि हमारा यह परिणाम पूर्व वर्णित सहजानुभूत परिणाम के बराबर है। अतः फलन P(T) की रचना के लिए हमें कोई [1,2] की तरह कोई अन्तराल लेना पड़ता है तत्पश्चात् हम $P(1 \le T \le 2)$ ज्ञात कर सकते हैं। फलन P(T) को **प्रायिकता घनत्व फलन कहते हैं।**

यह ध्यान दीजिए कि

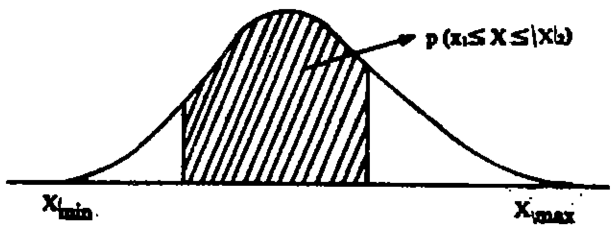
i) $P(t_i \le T \le t_j > 0$ जहां पर t_i, t_j, परिसर, जोकि समय के न्यूनतम मान 0 से शुरु होकर अधिकतम मान 10 तक है, के बीच आते हैं।

ii) पूर्ण परिसर में आयत OAB10 का क्षेत्रफल अर्थात् P(x) के आलेख के नीचे, ठीक इकाई के बराबर है $(1/10 \times 10 = 1)$

दूसरे शब्दों में $P[_{न्यूनतम} \le T \le T_{अधिकतम}] = 1$

जहाँ पर $T_{न्यूनतम} = 0$ तथा $T_{अधिकतम} = 10$ है।

इस विशेष उदाहरण (प्रतीक्षा काल) में, प्रायिकता का परिकलन अत्यन्त ही सरल था। लेकिन, प्रायिकता घनत्व फलन के प्रयोग होने वाले अधिकतर प्रश्नों में, इस प्रकार का मान परिकलित करना कोई सरल कार्य नहीं है। गणितीय दृष्टि से कुछ परिस्थितियों को छोड़कर, जहाँ सरल ज्यामिति पर्याप्त है, क्षेत्रफल परिकलित करने के लिए कलन की आवश्यकता होती है। आगे विवेचन में हम प्रायिकता घनत्व बंटन का और अधिक व्यापक उदाहरण प्रस्तुत करेंगे।



आकृति 14.3

मान लिया विचाराधीन चर $\times$ एक संतत यादृच्छिक चर है। (आकृति 14.3) इसका बारंबारता बंटन इसके प्रायिकता घनत्व फलन P(x) का आधार है। $X_{न्यूनतम}$ तथा $X_{अधिकतम}$ चर के क्रमशः न्यूनतम तथा अधिकतम मान को निरुपित करते हैं। $X_{न्यूनतम}$ तथा $X_{अधिकतम}$ के बीच वक्र के नीचे क्षेत्रफल इकाई के बराबर है। x के मानों के परिसर $[X_{न्यूनतम}, X_{अधिकतम}]$ में, मान लिया x_1 तथा x_2 कोई दो मान हैं। आकृति में छायित क्षेतफल x के अन्तराल $[x_1, x_2]$ के बीच घटित होने की प्रायिकता है।

अतः छायित क्षेत्रफल $= P(x_1 \le x \le x_2)$ है।

प्रायिकता घनत्व फलन की सहायता से आप $X_{न्यूनतम}$ तथा $X_{अधिकतम}$ के बीच आने वाले किसी अन्तराल में x के होने की प्रायिकता परिकलित कर सकते हैं। लेकिन इसके लिए कलन की आवश्यकता होती है जोकि हमारे कार्यक्षेत्र से बाहर है। अगले अनुभाग में हम एक विशेष संतत सैद्धांतिक बंटन पर विचार करेंगे जिसको प्रसामान्य बंटन कहते हैं। किसी संतत यादृच्छिक चर के प्रसामान्य प्रायिकता बंटन के लिए, आप वक्र के नीचे क्षेतफल ज्ञात करने की विधि को सीखेंगे।

14.7 प्रसामान्य बंटन

अनुभाग 14.3 में हमने द्विपद बंटन की जांच की थी जहां यादृच्छिक चर के केवल असंतत मान हो सकते हैं। उस परिवार के प्रत्येक सदस्य का चरित्र चित्रण दो प्राचलों n तथा p के विशेष मानों द्वारा होता है ...

महत्व का है : प्रसामान्य बंटन । द्विपद बंटन की तरह इसका चरित्र चित्रण भी दो प्राचल : बंटन का माध्य μ, तथा इसका मानक विचलन σ द्वारा होता है । यहाँ यह ध्यान दें कि μ तथा σ क्रमशः समष्टि के माध्य तथा मानक विचलन है ।

जब हम समष्टि से लिए गए प्रतिदर्श से संबंधित प्रश्नों को हल करते हैं तो अनुरूप माध्य $\bar{x}$ तथा मानक विचलन x को प्रतिदर्शज कहा जाता है, जो कि समष्टि प्राचलों का प्रतिपक्ष होता है । इनके पुनः स्मरण के लिए आप इस पाठ्यक्रम के खंड 1 का अध्ययन कीजिए ।

प्रसामान्य प्रायिकता बंटन निम्नलिखित समीकरण द्वारा परिभाषित होता है

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-½((x-\mu)/\sigma)^2} - \infty < x < \infty$$

जैसा कि आप जानते हैं कि π (पाई) एक स्थिरांक है तथा संख्या 3.14 के बराबर है । आपको शायद यह आश्चर्यजनक लगे कि इतनी जटिल समीकरण वाले बंटन को प्रसामान्य कहा जा सकता है जो बहुत ही उपयोगी भी हो सकता है । लेकिन वास्तव में ऐसा ही है । हम इसकी उपयोगिता पर अगले अनुभाग में प्रतिचयन तथा सांख्यिकीय अनुमिति के संदर्भ में विचार करेंगे । आप में से जो इस पाठ्यक्रम के परिशिष्ट को पढ़ना चाहेंगे उनको अर्थनिति में इसके उपयोग के बारे में जानकारी मिलेगी ।

जब चर x को मानक मात्रक के रूप में व्यक्त किया जाता है, $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ (इसको मानक प्रसामान्य विचर कहा जाता है) तो ऊपर दी हुई समीकरण भी अपनी मानक रूप की समीकरण से प्रतिस्थापित हो जाती है :

$$p(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-½z^2}, -\infty < z < \infty$$

यहां हम कहते हैं कि 'z' का बंटन प्रसामान्य है जिसका माध्य शून्य तथा प्रसरण इकाई के बराबर है। क्यों ? क्योंकि x का बंटन प्रसामान्य है तो यह सिद्ध किया जा सकता है कि उपर परिभाषित 'z' का बंटन भी प्रसामान्य होगा ।

इसके अतिरिक्त z का माध्य शून्य के बराबर है

उपपत्ति : मान लिया $z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$

$\therefore \Sigma z_i = \frac{\Sigma(x_i - \mu)}{\sigma}$ (जहां पर योग समष्टि की सभी इकाईयों पर है ।)

$$= \frac{1}{\sigma}[(\Sigma x_i - n\mu)] = \frac{n\mu - n\mu}{\sigma} = 0$$

$\therefore \Sigma z_i = 0 \therefore \bar{z} = 0$

z का प्रसरण इकाई के बराबर है

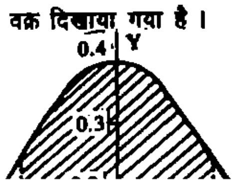
$$z_i^2 = \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2}$$

$$\therefore \Sigma z_i^2 = \frac{\Sigma(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{n\sigma^2}{\sigma^2} = n$$

अतः z का प्रसरण

$$= \frac{\Sigma z_i^2}{n} = \frac{n}{n} = 1 \text{ है ।}$$

आकृति (14.4) में z के प्रायिकता बंटन का वक्र दिखाया गया है । जिससे मानकीकृत प्रसामान्य वक्र कहते हैं ।



इस आरेख से यह स्पष्ट है कि सैद्धांतिक दृष्टि से चाहे $-\infty$ तथा $+\infty$ के बीच z का कोई मान हो सकता है, लेकिन -3 तथा +3 के बीच लगभग सभी मान आ सकते हैं। वास्तव में, आपको यह याद रहना चाहिए कि

$p(-1 \leq z \leq 1) = 0.6827$

$p(-2 \leq z \leq 2) = 0.9545$

तथा $p(-3 \leq z \leq 3) = 0.9973$

दूसरे शब्दों में मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे कुल क्षेत्रफल का 68.27% क्षेत्रफल, $z = -1$ तथा $z = +1$ के बीच होता है जो कि आकृति में दिखाया गया है। इसी प्रकार मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे कुल क्षेत्रफल का 95.45% क्षेत्रफल, $Z = -2$ तथा $Z = +2$ के बीच होता है तथा $Z = -3$ तथा $Z = +3$ के बीच क्षेत्रफल मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल का 99.73% होता है।

अब $1 - 0.9973 = 0.0027$

अतः $p(z \leq -3) + p(z \geq 3) = 0.0027$

or $p(|z| \geq 3) = 0.0027$

जहाँ पर $|z|$, z का निरपेक्ष मान है।
यहाँ पर यह ध्यान दें कि 3 का निरपेक्ष मान 3 होता है तथा -3 का निरपेक्ष मान भी 3 होता है।

मानकीकृत प्रसामान्य बंटन की विशेषताएं
आरेख द्वारा यह ध्यान दें कि

(1) मानकीकृत प्रसामान्य बंटन एक घंटाकार वक्र है,

(2) इसका माध्य, माध्यिका, बहुलक तीनों शून्य के बराबर होते हैं,

(3) वह एक एकबहुलकी बंटन है,

(4) यह एक सममित बंटन है जो कि $z = 0$ पर कोटि के साथ सममित होता है। इस परिस्थिति में, सममित से हमारा अर्थ है कि $z = -a(0 < a < \infty)$ पर कोटि, $z = a(0 < a < \infty)$ पर कोटि के बराबर होता है।

मानक प्रसामान्य वक्र की चौथी विशेषता द्वारा अगर प्रायिकता $p(0 \leq z \leq a)$ दी हुई हो तो $p(-a \leq z \leq 0)$ या $p(-a \leq z \leq a)$ ज्ञात करने में सहायता मिलती है।
मानक प्रसामान्य वक्र की सममिता के कारण $p(-a \leq z \leq a) = p(-a \leq z \leq 0) + p(0 \leq z \leq a)$
$= 2p(0 \leq z \leq a) = 2p(-a \leq z \leq 0)$
उदाहरण के लिए $p(-1 \leq z \leq 1) = 0.6827$

अतः $p(0 \leq z \leq 1) = \dfrac{0.6827}{2} = 0.34135$ होगी।

उदाहरण : अर्थशास्त्र की पिछली परीक्षा में माध्य 55 तथा मानक विचलन 15 था। विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त निम्नलिखित अंको के मानक अंक (अर्थात् मानक विचलन मात्रक में अंक) ज्ञात कीजिए
क) 60 ख) 40 ग) 55

हल : हमें दिया हुआ है $\mu = 55$ तथा $\sigma = 15$
मान लिया z मानक अंक है

तब $z = \dfrac{x^z - \mu}{\sigma} = \dfrac{x - 55}{15}$

क) $x = 60$ के लिए $z = \dfrac{60 - 55}{15} = 0.33$

ख) $x = 40$ के लिए $z = \dfrac{40 - 55}{15} = -1.00$

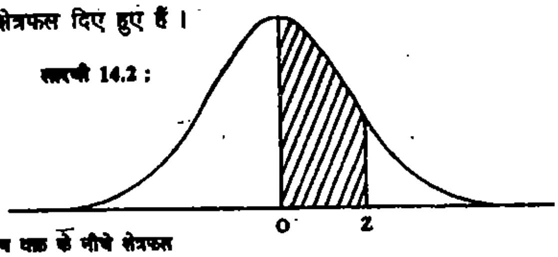
ग) $x = 55$ के लिए $z = \dfrac{55 - 55}{15} = 0$

हमारा अगला उद्देश्य मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल ज्ञात करना है हमने आपको $p(-1 \le z \le 1)$, $p(-2 \le z \le 2)$ तथा $p(-3 \le z \le 3)$ को याद रखने के लिए कहा था । इसके साथ ही आप $p \subset (0 \le z \le 1)$, $p(-2 \le z \le 0)$ इत्यादि ज्ञात कर सकते हैं ।

लेकिन अगर हमें $p(-1.5 \le z \le 1.5)$, $p(z \ge 2.5)$, $p(z \le -2.5)$ इत्यादि ज्ञात करना हो तो कैसे करेंगे ?

सौभाग्य से, सांख्यिकी विद्वानों ने z के विभिन्न मानों के लिए मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल परिकलित किए हुए हैं । सारणी 14.2 में 0 से z तक (z का मान 0 से 3.9 तक लिया गया है) मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल दिए हुए हैं ।

सारणी 14.2 :



0 से z तक मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
2	0.0793	0.0.832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4960	0.4964
7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993

इस सारणी के बारे में दो बातों पर ध्यान दीजिए :

1. प्रसामान्य बंटन की सममित विशेषता के कारण z के ऋणात्मक मानों के लिए मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल को सारणी में देना आवश्यक नहीं है। उदाहरण अगर आप $P(-2.5 \leq z \leq 0)$ ज्ञात करना चाहते हैं तो आप सिर्फ $P(0 \leq z \leq 2.5)$ ज्ञात कीजिए जिससे आपको अपना उत्तर मिल जाएगा। सारणी द्वारा यह प्रायिकता 0.4938 है।

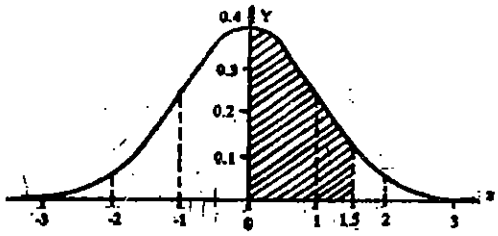
2. सारणी में z के 3.99 से अधिक मानों के लिए क्षेत्रफल दिए हुए नहीं है। वास्तव में ये आवश्यक भी नहीं है। क्योंकि $P(0 \leq z \leq 3.99) \simeq 0.5$ इसलिए $P(-3.99 \leq z \leq 3.99) \simeq 1.00$ जिसका अर्थ है कि इस अन्तराल में सारणी द्वारा लगभग पूरा क्षेत्रफल आच्छादित हो जाता है। सैद्धांतिक रूप में चाहे $-\infty$ तथा $+\infty$ के बीच z का कोई भी मान हो सकता है लेकिन सभी व्यवहारिक उद्देश्यों के लिए हम अपने आप को z के -3.99 तथा $+3.99$ के बीच मानों तक सीमित रख सकते हैं।

निम्नलिखित उदाहरणों द्वारा आप मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए सारणी का प्रयोग करना सीख सकेंगे।

उदाहरण

निम्नलिखित में प्रत्येक 'क से ग' के लिए ऊपर दी गई तालिका के प्रयोग से मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल परिकलित कीजिए।

क) $z=0$ तथा $Z=1.5$ के बीच (आकृति 14.5) पृष्ठ 53 पर दी हुई तालिका में z लिखे हुए स्तम्भ में नीचे 1.5 को देखिए तथा इसके दाईं ओर स्तम्भ की ओर चलिए। स्तम्भ शून्य में 1.5 के सम्मुख अंक 0.432 है। अतः यह आपेक्षित क्षेत्रफल है तथा z के 0 तथा 1.5 के बीच होने की प्रायिकता है। अर्थात् $P(0 \leq z \leq 1.5) = 0.4332$



ख) $z=0.58$ तथा $z=0$ के बीच (आकृति 14.6) आपेक्षित क्षेत्रफल $0=z = 0.58$ तथा $z=0$ के बीच क्षेत्रफल (सममितता द्वारा)

इसको ज्ञात करने के लिए हम z लिखे हुए स्तम्भ में नीचे 0.5 तक जाते हैं। इसके बाद दाईं ओर 8 के स्तम्भ की ओर चलते हैं। इस प्रकार आपेक्षित क्षेत्रफल 0.2190 है तथा यह z को -0.58 तथा 0 के बीच प्रायिकता को निरूपित करता है अर्थात् $P(-0.58 \leq z \leq 0)$

ग) $z = -0.52$ तथा $z = 2.25$ के बीच आपेक्षित क्षेत्रफल $= -0.52$ तथा 0 के बीच क्षेत्रफल + 0 तथा 2.25 के बीच क्षेत्रफल = 0 तथा 0.52 के बीच क्षेत्रफल (सममितता द्वारा) + 0 तथा 2.25 के बीच क्षेत्रफल

$$= 0.1985 + 0.4878$$
$$= 0.6863$$

उदाहरण एक फैक्टरी के 120 मजदूरों की मजदूरी का बंटन प्रसामान्य है जिसका माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 11.35 रुपए तथा 3.03 रुपए है। 120 मजदूरों के प्रतिदर्श में 9 रुपए से 17 रुपए के बीच मजदूरी पाने वाले मजदूरों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया यादृच्छिक चर x मजदूरी (रुपयों में) को सूचित करता है। तब x एक प्रसामान्य चर है जिसका माध्य $\mu = 11.35$ तथा मानक विचलन $6 = 3.03$ है।

अतः $\dfrac{x - \mu}{\sigma} = \dfrac{x - 11.35}{3.03} = z$ (मान लिया)

जब $x = 9,\ z = \dfrac{9 - 11.35}{3.03} = \dfrac{-2.35}{3.03} = -0.78$

जब $x = 17,\ z = \dfrac{17 - 11.35}{3.03} = \dfrac{5.65}{3.03} = 1.86$

$$\begin{aligned} \therefore P(9 < x < 17) &= P(-0.78 < z < 1.86) \\ &= P(-0.78 < z < 0) + P(0 < z < 1.86) \\ &= P(0 < z < 0.78) + P(0 < 2 < 1.86) \\ &= 0.2823 + 0.4686 \\ &= 0.7509 \text{ या } 0.75 \text{ (लगभग)} \end{aligned}$$

अतः 9 रु० से 17 रुपए के बीच मजदूरी पाने वाले मजदूरों की संभावित संख्या $= 0.75 \times 120 = 90$ होगी।

द्विपद बंटन का प्रसामान्य सन्निकटन

द्विपद बंटन एक असंतत प्रायिकता बंटन है। लेकिन अभिप्रयोगों की संख्या में जितनी वृद्धि होती है यह उतना ही अधिक निष्कोण वक्र के रूप में दिखाई देता है। इसके अतिरिक्त सफलता की प्रायिकता जितनी 0.5 के निकट आएगी बंटन उतना ही सममित होता जाएगा। अगर आप द्विपद बंटनों की, n के बढ़ते हुए मानों तथा p को 0.5 के उत्तरोत्तर निकट ला कर चाहे 0.5 से अधिक या कम से शृंखला तैयार करें, तो आप यह पायेंगे कि उत्तरोत्तर द्विपद बंटन प्रसामान्य बंटन की तरह दिखाई देते हैं।

क्योंकि द्विपद बंटन का माध्य np तथा मानक विचलन $\sqrt{npq}$ होता है तो द्विपद बंटन को मानक चर $z = \dfrac{x - np}{\sqrt{npq}}$ के लिए प्रसामान्य बंटन से सन्निकटित किया जा सकता है।

क्योंकि द्विपद तथा पाइसों बंटन आपस में संबंधित हैं इसलिए पाइसों तथा प्रसामान्य बंटन भी संबंधित होते हैं। अतः कुछ विशेष परिस्थितियों में दोनों (द्विपद तथा पाइसों) बंटन प्रसामान्य बंटन के निकट होते हैं।

उदाहरण : एक अनभिनत सिक्के को 50 बार उछाला गया। प्रायिकताएँ ज्ञात कीजिए कि शीर्षों की संख्या तथा 25 का अन्तर

क) एक से अधिक नहीं होगा

ख) तीन से अधिक नहीं होगा

इस प्रश्न का हल द्विपद बंटन के प्रसामान्य सन्निकटन के प्रयोग द्वारा कीजिए।

हल : इस प्रश्न को हल करने से पहले हम ध्यान देते हैं कि शीर्षों की संख्या एक असंतत चर है जिसके

क) हमें शीर्षों की संख्या 24 तथा 26 के बीच होने की प्रायिकता ज्ञात करनी है, या आंकड़ों को संतत चर मानने पर हमें 23.5 तथा 26.5 के बीच प्रायिकता ज्ञात करनी है।

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{x - 25}{3.5}$$

जब $x = 23.5$ है तो $z = \frac{23.5 - 25}{3.5} = \frac{-1.5}{3.5} = -0.43$

जब $x = 26.5$ है तो $z = \frac{26.5 - 25}{3.5} = \frac{1.5}{3.5} = 0.43$

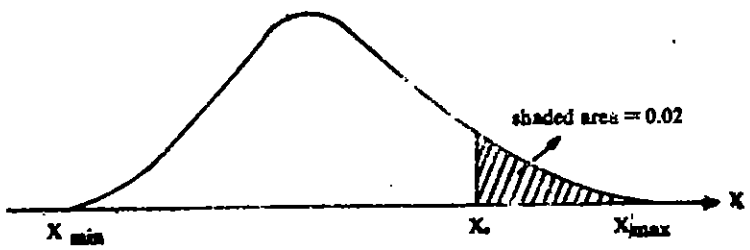
$\therefore P(-0.43 \le Z \le 0.43) = 2P(0 \le z \le 0.43)$
$= 2 \times 0.1664 = 0.3328$

अतः आपेक्षित प्रायिकता $= 0.33$ होगी।

ख) आप स्वयं कीजिए।

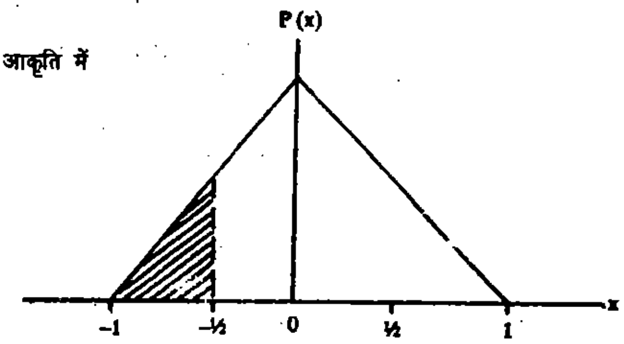
बोध प्रश्न 4

1. निम्नलिखित प्रायिकता घनत्व वक्र के लिए



$P(x_{\text{न्यूनतम}} < x < x_c)$ ज्ञात कीजिए।

2. निम्नलिखित आकृति में



i) जांच कीजिए कि $P(-1 \le x \le 1) = 1$ है, जिससे कि $P(x)$, x का प्रायिकता बंटन हो।
ii) $P(-1 \le x \le ½)$ का मान ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

3. जांच कीजिए कि $P(y)$, Y के प्रायिकता बंटन को निरूपित करता है। $P(2 \le y \le z)$ का मान ज्ञात कीजिए।

4. निम्नलिखित (क) से (घ) के प्रश्नों में प्रसामान्य वक्र के नीचे क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ।

क) $z = 1.25$ तथा $z = 2.25$ के बीच
ख) $z = -1.5$ के बाईं तरफ
ग) $z = 2.5$ के दाईं तरफ
घ) $z = 2.0$ के दाईं तरफ तथा $z = -1.0$

5. यादृच्छिक चर z जिसका बंटन मानक प्रसामान्य है, के लिए z^c का मान ज्ञात कीजिए जिससे कि

क) $P(z \ge z^c) = 0.2$
ख) $P(z \le -z^c) = 0.1$
ग) $P(z \le z^c) = 0.85$
घ) $P(|z| \ge z^c) = 0.1$

(यहां यह ध्यान दीजिए कि z^c को z का क्रांतिक मान कहा जाता है साधारण परिस्थिति के लिए $P(z \ge z^c) = \alpha$, जहां α एक निश्चित प्रायिकता की मात्रा है, z^c, z का ऐसा क्रांतिक मान है जो कि ठीक α प्रायिकता को प्रसामान्य बंटन के दाएँ पक्ष के पुच्छ में सीमित करता है।)

....

....

....

....

....

6. पुरुषों के एक बड़े समूह में 5% की ऊंचाई 60 इंच से कम है तथा 40% की ऊंचाई 60 तथा 65 इंच के बीच है। अगर ऊंचाई के बंटन को प्रसामान्य मान लिया जाए तो इसका माध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

14.8 सारांश

इस इकाई में आपका परिचय, प्रायिकता बंटन, प्रायिकता द्रव्यमान फलन तथा प्रायिकता घनत्व फलन आदि अवधारणाओं से कराया गया। आपने तीन विशेष प्रायिकता बंटनों का अध्ययन भी किया – दो असंतत (द्विपद तथा पाइसों) तथा एक संतत (प्रसामान्य)। आपने इनकी विशेषताओं को तथा प्रश्नों के हल में बंटनों का प्रयोग करना सीखा। अब आप द्विपद तथा पाइसों बंटनों के लिए माध्य तथा मानक विचलन प्राप्त कर सकते हैं। अब आपको यह ज्ञात है कि किस प्रकार लघुगुणक तालिका के प्रयोग द्वारा उन प्रश्नों को हल कर सकते हैं जिनमें चर का बंटन पाइसों होता है। इसके साथ ही आप मानक प्रसामान्य वर्ग, जिसमें चर का माध्य शून्य तथा मानक विचलन इकाई होता है, के नीचे क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, सारणी के प्रयोग से भी परिचित हैं।

14.9 शब्दावली

द्विपद बंटन : एक असंतत प्रायिकता बंटन जिसकी विशेषताएँ निम्नलिखित हैं : –

1. इसमें समरूप अभिप्रयोगों की पुनरावृत्ति n बार होती है,
2. विभिन्न अभिप्रयोग एक दूसरे से स्वतंत्र होते हैं,
3. प्रत्येक अभिप्रयोग के दो संभावित परिणाम होते हैं : "सफलता" तथा "असफलता"
4. सफलता की प्रायिकता (p) तथा असफलता की प्रायिकता (q) एक अभिप्रयोग से दूसरे अभिप्रयोग में स्थिर रहती है,
5. द्विपद यादृच्छिक चर x का अर्थ n अभिप्रयोगों में प्राप्त सफलताओं की संख्या होता है।

प्रसामान्य बंटन : एक संतत प्रायिकता बंटन जिसकी विशेषताएँ निम्नलिखित हैं :

1. यह देखने में घंटाकार तथा सम्मित होता है,
2. इसके केन्द्रीय प्रवृति के माप (माध्य, माध्यिका तथा बहुलक) सभी बराबर होते हैं,
3. इसके यादृच्छिक चर का परिसर अनंत ($-\infty < x < \infty$) होता है चाहे व्यवहारिक कार्यों के लिए इसका परिसर माध्य से 3 मानक विचलन अधिक तथा इससे मानक विचलन कम के बीच होता है (अर्थात् इसका परिसर $\simeq$ 6 मानक विचलन होता है) ।

पाइसों बंटन : यह एक असंतत प्रायिकता बंटन होता है जो कि द्विपद बंटन का सीमित रूप होता है । पाइसों बंटन में

1. प्रत्येक अभिप्रयोग में सफलता की प्रायिकता बहुत ही कम होती है जिसकी प्रवृति शून्य की ओर होती है ($P \to 0$)
2. कुल अभिप्रयोगों की संख्या बहुत अधिक होती है अर्थात् $n \to \infty$ इस प्रकार इसका माध्य $\lambda = np$ परिमित होता है तथा सामान्यतः यह 5 या इससे कम होता है ।
   जब $p \to 0$ तथा $n \to \infty$ तो द्विपद बंटन की प्रवृति पाइसों बंटन की ओर होती है ! पाइसों बंटन में माध्य तथा प्रसारण बराबर होते हैं ।

प्रायिकता बंटन या प्रायिकता फलन : इसमें यादृच्छिक चर द्वारा सैद्धांतिक रूप से लिए जा सकने वाले सभी मान होते हैं तथा इन प्रायिकताओं का योग इकाई के बराबर होता है ।

यादृच्छिक चर : एक चर जिसको x से सूचित किया जाता है तथा जिसके विभिन्न मान संयोग परिणाम से संबंधित होते हैं । यादृच्छिक चर असंतत या संतत हो सकता है ।

14.9 उपयोगी पुस्तकें

Aggarwal, B.L., 1988: *Basic Statistics,* Wiley Eastern Limited: New Delhi.

Goon, A.M., M.K. Gupta, B. Dasgupta, 1985. *Basic Statistics,* The World Press Private Limited: Calcutta. (Chapter 4)

Gupta, C.B. 1985. *An Introduction to Statistical Methods,* Vikas Publishing House Pvt. Ltd.: New Delhi. (Chapter -19)

Gupta, S.C. 1988. *Fundamentals of Statistics* (Third Edition), Himalaya Publishing House: New Delhi. (Chapters 13 and 14)

Nagar, A.L. and R.K. Das, 1989. *Basic Statistics,* Oxford University Press: Delhi.

Sobol, M.G. and M.K. Starr, 1983. *Statistics for Business and Economics: An Action Learning Approach,* McGraw Hill Book Company: New York.

Spiegel, M. 1981 *Theory and Problems of Statistics: Schaum's Outline Series,* McGraw-Hill Book Company: New York, (Chapter 7)

कश्यप, ब्रजराज किशोर, 1980. *प्रायिकता एवं सांख्यिकी,* राजस्थान हिन्दी ग्रंथ अकादमीः जयपुर (अध्याय 7)

14.11 बोध प्रश्नों के संकेत या उत्तर

बोध प्रश्न 1

1. शीर्षों की संख्या P(x)

$\Sigma P(x) = \frac{2}{3} \neq 1$ जिसका अर्थ है कि $P(x)$ प्रायिकता बंटन नहीं है।

ख) $P(-1) = \frac{1}{3} < 0$ जिसका अर्थ है कि यह प्रायिकता बंटन नहीं है।

ग) $P(-2) = \frac{6}{16}, P(-1) = \frac{2}{16}, P(0) = 0, P(1) = 0, P(2) = \frac{2}{16}$

$P(3) = \frac{6}{16}, \Sigma P(x) = \frac{16}{16} = 1$, $P(x)$ प्रायिकता बंटन है।

घ) $P(-1) = -\frac{1}{3}$ अतः यह प्रायिकता बंटन नहीं है चाहे

$\Sigma P(x) = -\frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{3} + 1 = 1$ है।

3. क) $P(x) = kx^2; x = 0, 1, 2, 3$

$P(0) = 0, P(1) = k, P(2) = 4k, P(3) = 9k$

अब $\Sigma P(x) = 0+k+4k+9k = 14k = 1$

$\therefore k = \frac{1}{14}$

ख) $P(3) = \frac{k}{3}, P(4) = \frac{k}{4}$ तथा $P(5) = \frac{k}{5}$

$$\Sigma P(x) = \frac{k}{3} + \frac{k}{4} + \frac{k}{5} = k\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right) = \frac{(20+15+12)k}{60}$$

$$= \frac{47k}{60} = 1 \therefore k = \frac{60}{47}$$

ग) $P(1) = k, P(2) = \frac{k}{4}$

$\Sigma P(x) = k + \frac{k}{4} = \frac{5}{4}k \quad \therefore k = \frac{4}{5}$

4. $P(x) = \frac{x}{30}; x = 5, 6, 9, 10.$

$\therefore P(x=5) = \frac{5}{30}$

$P(x=6) = \frac{6}{30}$

$P(x=9) = \frac{9}{30}$

$P(x=10) = \frac{10}{30}$

[ध्यान दीजिए कि $P(x) \geq 0$ तथा $\Sigma P(x) = 1$]

क) $P(x=6) = \frac{6}{30} = \frac{1}{5}$

ख) $P(x=5) + P(x=6) = \frac{5}{30} + \frac{6}{30} = \frac{11}{30}$

ग) $P(x=6) + P(x=9) + P(x=10)$

बोध प्रश्न 2

1. मान लिया x = सफलताओं की संख्या
   जहाँ पर सफलता = अस्पताल गाड़ी की उपलब्धता।
   अतः x के मान 0, 1, 2, 3 हो सकते हैं।
   मान लिया P(x) = x सफलताओं की प्रायिकता, इसलिए,

   $P(x) = {}^nc_x\, p^x\, q^{n-x},\ x = 0, 1, 2, 3$

   यहाँ पर n = 3, p = 0.75 = किसी एक अस्पताल गाड़ी के उपलब्ध होने की प्रायिकता
   $\therefore q = 1-p = 1-0.75 = 0.25$ = किसी एक अस्पताल गाड़ी के उपलब्ध न होने की प्रायिकता।
   (यहां यह ध्यान दीजिए कि q, किसी भी गाड़ी के उपलब्ध न होने की प्रायिकता नहीं है)

   $\therefore P(x) = {}^3c_x\,(0.75)^x\,(0.25)^{3-x};\ x = 0, 1, 2, 3$

   पहले हम प्रायिकता बंटन तालिका को लिख लेते हैं।

उपलब्ध अस्पताल गाड़ीयों की संख्या x	उपलब्धता की प्रायिकता P(x)
0	${}^3c_0\,(0.75)^0\,(0.25)^3 = \frac{1}{64}$
1	${}^3c_1\,(0.75)^1\,(0.25)^2 = \frac{9}{64}$
2	${}^3c_2\,(0.75)^2\,(0.25)^1 = \frac{27}{64}$
3	${}^3c_3\,(0.75)^3\,(0.25)^0 = \frac{27}{64}$

अब हम प्रश्नों के उत्तर दे सकते हैं।

क) कोई गाड़ी उपलब्ध नहीं होगी $P(x=0) = \frac{1}{64}$

ख) $P(x = 0) = \frac{1}{64}$ (गाड़ी उपलब्ध होगी) = 1–P (कोई गाड़ी उपलब्ध नहीं होगी)

   $= 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$

   (यहां ध्यान दीजिए कि गाड़ी उपलब्ध होने का अर्थ है कि एक, दो या तीनों गाड़ियाँ उपलब्ध होंगी)

ग) $P(x=1) = \frac{9}{64}$

2. $^{13}c_6 = \frac{13!}{6!\,7!} = \frac{13.12.11.10.9.8.7!}{6!\,7!} = \frac{13.12.11.10.9.8}{6.5.4.3.2.1} = 1716$

   अतः अनुक्रमों की संख्या 1716 है।

3. मान लिया n = प्रतिदर्श में पुर्जों की संख्या। यहाँ पर n = 4:
   तथा x = प्रतिदर्श में दोषपूर्ण पुर्जों की संख्या,
   यहाँ पर x = 0,1,2,3,4 हो सकता है।
   P = प्रतिदर्श में से दोषपूर्ण पुर्जा प्राप्त करने की प्रायिकता

   $\therefore P = 0.03$

   $q = 1-0.03 = 0.97$

ग) यहां पर किन्हीं शब्द पर ध्यान दीजिए। कुल अनुक्रमों की संख्या $^5c_2$ होगी अतः आपेक्षित उत्तर

$$= {}^5c_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{5!}{2!\,3!}\times\frac{27}{1024} = \frac{5\times4}{2}\times\frac{27}{1024} = \frac{270}{1024}$$

घ) $^5c_0\left(\frac{1}{4}\right)^0\left(\frac{3}{4}\right)^5 = \left(\frac{3}{4}\right)^5$

5. 5 सिक्कों के प्रत्येक उछाल के लिए $n=5,\ P=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2}$

$$\therefore P(x) = {}^5c_x\left(\frac{1}{2}\right)^x\left(\frac{1}{2}\right)^{5-x} = {}^5c_x\left(\frac{1}{2}\right)^5$$

इस प्रकार 5 सिक्कों के एक उछाल में शीर्षों की संख्या का बंटम

X	P(x)	प्रत्याशित बारंबारता
0	$^5c_0\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}\times 3200 = 100$
1	$^5c_1\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$	$\frac{5}{32}\times 3200 = 500$
2	$^5c_2\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}\times 3200 = 1000$
3	$^5c_3\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}\times 3200 = 1000$
4	$^5c_4\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32}$	$\frac{5}{32}\times 3200 = 500$
5	$^5c_5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$	$\frac{1}{32}\times 3200 = 100$
योग	1	3200

5 सिक्कों के एक साथ उछाल में सफलता संख्याओं का माध्य $= np = \frac{5}{2}$ इसी प्रकार 5 सिक्कों के 3200 उछालों में सफलताओं की संख्या $= 3200 \times \frac{1}{2} = 1600$

5 सिक्कों के एक उछाल में सफलताओं की संख्या का मानक विचलन $= \sqrt{5\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}$ $= \sqrt{1.25}$

6. $np = 3,\ npq = 5$

$\therefore q = \frac{5}{3} > 1$ जो कि द्विपद बंटन में संभव नहीं है

अतः यह बंटम द्विपद नहीं है।

7. $np = 6,\ \sqrt{npq} = \sqrt{2}$ or $npq = 2$

$\therefore q = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

$\therefore p = 1 - q = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$np = 6$

6. आप स्वयं कीजिए।

उदाहरण 1: लघु e साधारण लघुगुणक तालिका देखने की विधि पर टिप्पणी ज्ञात कीजिए

हल : मान लिया $y = \log e = \log 2.718$

सबसे पहले, दशमलव बिन्दु पर ध्यान मत दीजिए तो संख्या 2718 हो जाती है वाम पक्ष के सिरे के स्तम्भ में 27 (जो कि 2718 के पहले दो अंक है) तलाश कीजिए।

इसके बाद उस स्तम्भ को देखिए जिसके ऊपर। (2718 का तीसरा अंक) लिखा है। 27 लिखी हुई पंक्ति तथा लिखे हुए स्तम्भ में आने वाली संख्या 4330 है।

अब 2718 का चौथा अंक 8 अंक वाले स्तम्भ में संख्या 13 है अब 4330 तथा 13 को जोड़िए। यह योग 4343 है अतः 2718 का अपूर्णांश = .4343
2.718 का पूर्णांक = दशमलव बिन्दु के बाईं ओर अंकों की संख्या −1, जो कि यहाँ पर $1-1=0$ है
अतः लघु 2.718 = 0.4343

उदाहरण 2 : लघु 17.468 ज्ञात कीजिए

हल : $17.4668 \simeq 17.470$

17.47 अपूर्णांश = 0.2422 $(2405 + 17 = 2422)$
17.47 का पूर्णांश = 1
अतः लघु 17.468 = 1.2422 (सन्निकटन)

उदाहरण 3

लघु 0.5678 ज्ञात कीजिए

हल: लघु $0.5678 = \bar{1}.7542 = -1 + 0.7542 = -0.2458$

प्रतिलघुगुणक तालिका देखने की विधि पर टिप्पणी

EEC-03 के खंड 2 (इकाई 3) से आपने एक संख्या का प्रतिलघु ज्ञात करने की विधि को पढ़ा था। अब आप स्वयं प्रतिलघु ज्ञात कर सकेंगे।

उदाहरण 1: मान लिया आपको 0.4343 का प्रतिलघु ज्ञात करना है

हल

चरण 1: सारणी में .43 को वाम पक्ष के सिरे में स्तम्भ में 44 वीं पंक्ति पर देखिए

(4 तथा 3, दशमलव बिन्दु के बाद पहले दो अंक है)

चरण 2: अब .4343 में दशमलव बिन्दु के बाद तीसरा अंक 4 है। इस 4 को आप सारणी के 5 वें स्तम्भ (पहले स्तम्भ पर शून्य लिखा हुआ है) में देखिए।

चरण 3: सारणी की 44 वीं पंक्ति तथा 5 वें स्तम्भ के अनुरूप संख्या (जो कि 2716) ज्ञात कीजिए

चरण 4: दशमलव बिन्दु के बाद चौथा अंक 3 है। 44 वीं पंक्ति के अनुरूप जिसमें .43 है तथा आनुपातिक अंश वाले तीसरे स्तम्भ के सम्मुख अंक 2 है। 2716 में 2 दो को जोड़िए। $(2716+2 = 2718)$

चरण 5: हमारी मूल संख्या 0.4343 है।
अतः 0.4343 का प्रति लघु = 2.718 है।
(दशमलव बिन्दु का स्थान निश्चित करने की व्याख्या के लिए आप खंड 2 इकाई 3 का अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 2: प्रतिलघु (− 0.65145) ज्ञात कीजिए।

हल : मान लिया y = प्रतिलघु (− 0.65145)

चरण 4: आनुपातिक अंश दर्शाने वाले स्तम्भों में 6 लिखा स्तम्भ देखिए।

चरण 5: 35 वीं पंक्ति तथा 6 लिखे हुए आनुपातिक अंश स्तम्भ के सम्मुख संख्या 3 है

चरण 6: इस संख्या (3) को 2228 में जोड़िए अर्थात् 2228 + 3 = 2231

चरण 7: प्रतिलघु $\bar{1}.3486 = 0.2231$

14.12 पारिभाषिक शब्दावली

अर्थमिति	econometrics
कलन	calculus
क्रांति मान	critical value
चरघातांकी	exponential
प्राचल	parameter
प्रायिकता घनत्व फलन	probability density function
प्रायिकता द्रव्यमान फलन	probability mass function
प्रायिकता निदर्श	probability model
मान निर्णय	value judgement
मानक प्रसामान्य विचर	standard normal variate
मानक मात्रक	standard unit
सांख्यिकीय अनुमिति	statistical inference
सांतत्यक	continuous
सममित	symmetrical
सहजानुभूत	intutive
प्रतिदर्श प्रतिदर्शन	sample statistic

साधारण लघुगणक तालिका

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	.0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	.0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	.0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	.1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	.1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	.1761	1790	1818	1847	1895	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	.2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	.2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	.2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2618	2742	2763	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	.2788	2810	2833	2856	2818	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	.3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	.3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	.3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	.3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	.3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	6	7	9	11	12	14	16
25	.3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	.4150	4166	4183	4200	4215	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	.4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	.4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	.4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	.4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	.4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	.5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	.5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	.5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	.5441	5433	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	.5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	.5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	.5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	.5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	.6021	6031	6042	6063	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	.6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	.6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	9	9
43	.6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	.6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	.6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	.6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	.6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	.6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	.6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	.6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	.7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	.7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	.7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	.7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7

साधारण लघुगणक सारणी

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	.7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	.7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	.7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	.7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	.7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	.7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	.7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	.7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	.7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	.8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	.8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	.8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	.8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	.8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	.8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	.8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	.8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	.8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	.8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	.8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	.8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	.8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	.8865	[illegible]	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	.8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	.8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	.9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	.9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	.9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	.9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	.9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	.9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	.9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	.9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	.9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	.9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	.9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	.9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	.9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	.9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	.9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	.9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	.9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	.9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	.9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	.9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	4	4

प्रतिलघुगणक सारिणी

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1060	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
.04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
.08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
.11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
.13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
.19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
.21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1632	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
.23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
.26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
.28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2113	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
.34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	4	5
.40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2622	1	1	2	2	3	4	4	5	5
.42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
.43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
.44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	1	3	3	4	4	5	6
.45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
.48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
.49	3090	3097	3105	3114	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

प्रतिलघु [illegible]

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	5	6	7
.51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	3296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
.53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	6	7
.56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
.58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
.59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
.60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
.61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	4246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.64	4365	4395	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
.67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
.68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
.69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
.70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
.71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
.72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
.73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
.74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
.75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
.76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5872	1	3	4	5	7	8	9	11	12
.77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
.78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
.79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
.80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
.81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
.83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
.84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
.85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
.87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
.88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
.89	7762	7780	7798	[illegible]	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
.90	7943	7962	7980	[illegible]	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
.91	812	[illegible]	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
.92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
.93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
.95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
.96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
.97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
.98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	[illegible]
.99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9908	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

NOTES

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

UGEC-03
प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियां और सर्वेक्षण तकनीकें

खंड

8

प्रतिचयन सिद्धांत तथा सांख्यिकीय अनुमिति

खंड 8 प्रतिचयन सिद्धांत तथा सांख्यिकीय अनुमिति

परिचय

इस खंड में प्रतिचयन सिद्धांत तथा सांख्यिकीय अनुमिति के बारे में जानकारी बिना गणितीय उपपत्ति के (जिसमें अत्यधिक जटिल गणित का प्रयोग होता है) दी गई है। इसमें समष्टि के एक छोटे से हिस्से, अर्थात् प्रतिदर्श, द्वारा समष्टि के बारे में अनुमिति की तर्कसंगति को समझाने का प्रयास किया गया है। इस खंड में दो इकाइयां — इकाई 15 तथा इकाई 16 हैं, जो कि प्रतिदर्श सर्वेक्षण पर अंतिम खंड के लिए आपको तैयार करेंगी।

इकाई 15

इस इकाई में आपको प्रतिचयन बंटन की मूल अवधारणाओं, जिसमें "केन्द्रीय सीमा प्रमेय" का सहजानुभूत विचार भी सम्मिलित है, की जानकारी दी जाएगी।

इकाई 16

इस इकाई में प्रेक्षित प्रतिदर्श प्रतिदर्शज द्वारा समष्टि के प्राचलों के आकलन से संबंधित अवधारणाएं दी गई हैं तथा प्रेक्षित प्रतिदर्श प्रतिदर्शज व समष्टि अभिलक्षणों को परस्पर संबंधित करने या स्वयं प्रतिदर्श प्रतिदर्शज की सार्थकता से संबंधित परिकल्पना जांच के लिए विधि को निर्दिष्ट किया गया है।

इकाई 15 प्रतिचयन तथा प्रतिचयन बंटन की मूल अवधारणाएँ

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य

इस इकाई में प्रतिचयन तथा प्रतिचयन बंटनों की मूल अवधारणाओं के बारे में जानकारी दी गई है। इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप :

- प्रारंभिक इकाई, समष्टि प्राचल तथा प्रतिदर्श प्रतिदर्शज की परिभाषा करने में समर्थ होंगे।
- यादृच्छिक चर की परिभाषा तथा इसको प्रतिचयन से संबंधित कर सकेंगे।
- केन्द्रीय सीमा प्रमेय के द्वारा माध्य या अनुपात जैसे प्रतिदर्शजों के प्रतिचयन बंटनों को समझ सकेंगे।

15.1 प्रस्तावना

देश के लोगों के आर्थिक तथा सामाजिक जीवन, अर्थव्यवस्था, कृषि क्षेत्र की कार्य पद्धति, उद्योग, व्यवसाय, परिवहन, संचार, शिक्षा तथा स्वास्थ्य सेवाओं आदि के बारे में क्रमबद्ध जानकारी को एकत्रित करने के लिए आवश्यक विभिन्न प्रकार की सांख्यिकीय सूचना की प्रकृति से हमारा परिचय पहले हो चुका है। विकास कार्यक्रमों के प्रतिपादन के लिए तथा इनमें सुधार के लिए एवं साथ ही इनके निरीक्षण तथा मूल्यांकन के लिए, इन पहलुओं के बारे में हमारा ज्ञान आवश्यक है। हमें यह भी ज्ञान है कि राष्ट्रीय लेखा, निवेश निर्गत प्रणाली, अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के लिए उत्पादन सूचकांक, कीमत सूचकांक, जीवन निर्वाह सूचकांक तथा अर्थव्यवस्था के संगठित तथा असंगठित क्षेत्रों की गतिविधियों के आंकड़ों के लिए किस प्रकार की सूचना

विभिन्न विकास कार्यक्रमों को लागू करने के लिए आवश्यक संसाधनों तथा सम्मान्यता पर आंकड़ों का हमें अत्यधिक आवश्यकता है। अगर हम सूचना एकत्रिक करने की विधि, जिससे प्राप्त सूचना की वैधता एक निश्चित कोटि के साथ त्रुटि के सह्य परिसर में हो, की लागत का इष्टतमीकरण न करें तो पर्याप्त सूचना को प्राप्त करने की लागत अनियंत्रणीय हो सकती है।

हम यह जानते हैं कि इस प्रकार की सूचना को समष्टि की सभी इकाइयों के प्रेक्षण द्वारा भी प्राप्त किया जा सकता है। हम समष्टि की पूर्ण गणना की तुलना में समष्टि से चयन किए गए प्रतिदर्श पर प्रेक्षणों के गुण एवं दोषों का संक्षिप्त विवेचन भी कर चुके हैं। उदाहरण के लिए, हम यह जानते हैं कि पूर्ण गणना में मुद्रा लागतों समय तथा अपेक्षित संसाधनों के अनियंत्रणीय होने के अतिरिक्त हमें प्रायः विचाराधीन समष्टि की प्रत्येक इकाई के बारे में सूचना की आवश्यकता ही नहीं होती। हमें तो प्रायः केवल सभी इकाइयों या इकाइयों के एक समूह के लिए संक्षिप्त सूचना की आवश्यकता होती है। इसके साथ ही सूचना का मापन अंतिम संभव दशमलव बिन्दु तक न होकर केवल सह्य त्रुटि परिसर में सनिकटन्न हो सकता है। अंत में पूर्ण गणना द्वारा प्राप्त आंकड़े, क्षेत्रकार्य नियंत्रण संबंधी कठिनाइयों तथा अप्रतिचयन त्रुटियों के कारण, अधिक त्रुटिपूर्ण होते हैं। साक्षात्कार विधि पर आधारित समाज-आर्थिक सर्वेक्षण में उत्तरदाता के पूर्वाग्रहों की समस्या होती है।

इस प्रकार हमें ऐसी विधि तलाश करने की आवश्यकता है जिससे वैध सूचना प्राप्त की जा सके और त्रुटि की माया एक सह्य परिसर में रहे तथा इस विधी की लागत भी न्यूनतम हो। इस प्रश्न का उत्तर प्रतिचयन के सिद्धातों तथा प्रतिचयन प्रविधियों द्वारा दिया जाता है। इस कार्य को करने में हमें दो मूलभूत प्रश्नों का सामना करना पड़ता है :

i) त्रुटि के सह्य परिसर का निर्धारण, तथा
ii) ऐसी दक्ष सर्वेक्षण प्रविधि ज्ञात करना जिससे आकलन त्रुटि के सह्य परिसर में रहे तथा लागत न्यूनतम हो।

इन दोनों प्रश्नों के उत्तर प्रतिचयम सिद्धातों तथा प्रतिचयन प्रविधियों द्वारा दिए जा सकते हैं। प्रतिचयन प्रविधियों का विवेचन हम अगले खंड में करेंगे।

आर.ए. फिशर, जो सांख्यिकी विज्ञान के जन्मदाताओं में से हैं, ने प्रतिचयन तथा समष्टि की पूर्णगणना की तुलना इस प्रकार की है :

"मैंने प्रतिचयन प्रक्रिया के पक्ष में चार दावे किए हैं। इनमें से तीन, अनुकूलनशीलता, गति तथा मितव्ययता के बारे में कुछ और कहने की आवश्यकता नहीं है। किसी विधि द्वारा इन तरीकों से कितना प्राप्त हो सकता है इसको दर्शाने के लिए बहुत से उदाहरण उपलब्ध हैं। लेकिन मैं ऐसा क्यों कहता हूं कि प्रतिचयन प्रक्रिया अपनी एकमात्र प्रतियोगी प्रक्रिया, समष्टि गणना, से अधिक वैज्ञानिक है ? मेरे विचार में इसका उत्तर प्रतिचयन विधि द्वारा सर्वेक्षण की प्राथमिक प्रक्रिया की अभिकल्पना तथा आयोजन है। जैसा कि त्रुटि के यादृच्छिक प्रतिचयन के गणितीय सिद्धांत में बद्धमूल है, परिशुद्धता का विचार शुरू से ही अग्रणी रहा है। सर्वेक्षण का निर्देशक शुरू से ही एक पूर्वनिर्धारित तथा ज्ञात परिशुद्धता स्तर के लिए आयोजन करता है। यह एक ऐसा विचार है जिसके बारे में वह कभी भी भूल नहीं करता है। स्पष्ट रूप से समझी हुई सावधानियों द्वारा वास्तव में प्राप्त परिशुद्धता, सर्वेक्षण के परिणामों में दृष्टिगोचर होती है।

15.2 अवधारणाएं तथा परिभाषाएं

अब हम कुछ मूल अवधारणाओं की जानकारी देंगे तथा प्रतिचयन प्रविधियों की स्पष्ट समझ तथा मूल्यांकन के लिए आवश्यक प्रतिचयन तथा आकलन सिद्धांतों की परिभाषा देंगे।

15.2.1 इकाई, समष्टि तथा क्षेत्र

एक प्रारंभिक इकाई या सिर्फ इकाई के अर्थ एक तत्व या तत्वों के समूह से है जिस पर किसी स्पष्ट परिभाषित प्रक्रिया द्वारा प्रेक्षण किए जा सकते हैं। यह प्रेक्षण सिखित करने योग्य सांख्यिकीय आंकड़ों के लिए आवश्यक होते हैं। इकाई की पहचान के लिए तथा इनका प्रेक्षण संभव होने के लिए इनकी स्पष्ट परिभाषा तथा इनका परस्पर अपवर्जी होना आवश्यक है। एक इकाई एक व्यक्ति, एक परिवार, एक घर, एक फार्म, कोई उपक्रम जैसे फैक्ट्री या कोई व्यवसायिक संस्था हो सकती है, यह एक पेड़, एक मछली, एक गाय या भैंस, किसी निश्चित आकार के खेत में चावल का पौधा या पौधों का समूह, उपभोग वस्तु या उत्पादित

इस प्रकार की निश्चित प्रारंभिक इकाइयों के समूह को जो किसी समय विशेष में किसी इलाके या क्षेत्र में हो, समष्टि कहते हैं। हम इसके बारे में पहले अध्ययन कर चुके हैं। अतः हमें व्यक्तियों, परिवारों, खेतों, पशुओं या जंगल में पेड़ों या तालाब में मछलियों आदि की समष्टि पर विचार करना पड़ सकता है जोकि अपेक्षित आँकड़ों की प्रकृति तथा पूछताछ के उद्देश्य पर निर्भर होता है। इकाइयों की संख्या परिमित अथवा अपरिमित होने पर समष्टि को क्रमशः परिमित समष्टि या अपरिमित समष्टि कहा जाता है। बहुधा, व्यवहारिक संदर्भों में हमारा सामना परिमित लेकिन बहुत समिष्ट से होगा। प्रायः हमारी रुचि परिमित समष्टि के एक हिस्से या भाग में होगी जिससे हमें निश्चित सांख्यिकीय सूचना प्राप्त करने की आवश्यकता होगी। किसी निश्चित जाँच के लिए समष्टि के इस हिस्से को अध्ययन का क्षेत्र या अध्ययन समष्टि कहा जाता है। इस परिस्थिति में, चूँकि सर्वेक्षण के परिणाम विशेष अध्ययन क्षेत्र पर निर्भर होते हैं। अतः क्षेत्र के निर्धारण में किसी प्रकार की त्रुटि, आँकड़ों की व्याख्या में अत्यधिक तोड़-मरोड़ ला सकती है। उदाहरण के लिए, अगर देश-व्यापी जोत के आकार के सर्वेक्षण में हमारी रुचि किसी निश्चित कृषि-आर्थिक क्षेत्र जिसके अनुसार देश के विभाजित किया जा सकता है, के बारे में विशेष सूचना प्राप्त करने में है, तो हमें इन क्षेत्रों को भौतिक रूप से इस प्रकार परिभाषित करना आवश्यक है ताकि कोई अस्पष्टता न रहे। इसी प्रकार अगर हमें शहरी क्षेत्रों में असंगठित मजदूरों की जीवन निर्वाह लागत का आकलन करना है तो हमें शहरी क्षेत्रों तथा असंगठित मजदूरों की स्पष्ट तथा सुनिश्चित व्याख्या करनी होगी। यह कार्य हमेशा सरल नहीं होता।

15.2.2 समष्टि प्राचल

मान लिया परिमित समष्टि में $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n$ जैसी n इकाइयाँ हैं। तथा मान लिया i वीं इकाई u_i के लिए अभिलक्षण Y का माप Y_i है। $(i = 1, 2, \ldots, N)$। उदाहरण के लिए इकाई एक घर हो सकता है तथा अभिलक्षण Y पिछले मास में इसकी आय का उपभोग हो सकता है या इकाई एक फैक्ट्री या व्यवसायिक संस्थान हो सकता है तथा Y दिए हुए समय में क्रमशः उत्पादन या बिक्री की मात्रा हो सकती है, या इकाई एक फार्म हो सकता है तथा Y चावल या गेहूँ की फसल के अंतर्गत क्षेत्रफल हो सकता है, इकाई दिन का एक घंटा हो सकता है तथा Y उस घंटे में देहली के एक चौराहे से गुजरने वाले वाहनों की संख्या हो सकती है। समष्टि की सभी इकाइयों के मान के किसी फलन को समष्टि प्राचल या केवल प्राचल कहा जाता है।

उदाहरण के लिए हम जानते हैं कि Y_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ के मानों के योग को इस प्रकार लिखा जाता है :

$$Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_n$$

तथा इनके समांतर माध्य को इस प्रकार लिखा जाता है।

$$\bar{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i = \mu$$

[प्रायः समष्टि माध्य को ग्रीक अक्षर μ से सूचित करने की परिपाटी है। इस को "म्यू" बोला जाता है]

इसी प्रकार समष्टि प्रसरण

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} (Y_i - \bar{Y})^2$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - \bar{Y}^2$$

हमें यह भी ज्ञात है कि मानक विचलन तथा समष्टि माध्य के अनुपात को विचरण गुणांक कहते हैं।

$$C(Y) = \frac{\sigma}{\mu}$$

जैसा कि हम जानते हैं प्रसामान्य बंटन के लिए, जो कि एक अभिलक्षण के बारबारता बंटन की समष्टि है तथा इसका बंटन प्रसामान्य है, दो प्राचल माध्य μ तथा प्रसारण σ^2 होते हैं।

हमें यह भी ज्ञात है कि द्विचर समष्टियों में समष्टि की प्रत्येक इकाई के दो अभिलक्षणों X तथा Y के अनुरूप दो मान X_i तथा Y_i होते हैं, समष्टि योगों X तथा Y का अनुपात (R) होता है ...

जहां पर σ_X तथा σ_Y क्रमशः X तथा Y के मानक विचलन को सूचित करते हैं। X तथा Y के बीच रैखिक संबंध का रूप इस प्रकार होता है।

$Y = \alpha + \beta X$

जहां पर $\alpha = \bar{Y} - \beta\bar{X}$

जो कि द्विचर समष्टि का समाश्रयण संबंध है।

प्रायः प्रतिदर्श का उद्देश्य समष्टि से प्रतिदर्श चयन करके समष्टि के प्राचलों के मान का ऐसा आकलन करना होता है कि आकलित प्रतिदर्श प्रतिदर्शज वैध तथा अनभिनत हों। यहां के बाद दिए जाने वाले विवेचन में हम वैध तथा अनभिनत आकलित प्रतिदर्शज के बारे में अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 15.2.1

अगर प्रति ग्राहक औसत बिक्री 25.50 रुपए हो तो 200 ग्राहकों को की गई कुल बिक्री परिकलित कीजिए।

उत्तर : $\bar{Y}$ = 25.00 रुपए

कुल बिक्री $Y = N\bar{Y} = 200 \times 25.50 = 5100$ रुपए

उदाहरण 15.2.2

अगर समष्टि में 6 मान 2, 6, 10, 12, 14, 16 हैं तो इनका समांतर माध्य किस प्रकार परिकलित किया जा सकता है?

उत्तर

यहां पर $N=6$, Y_i $(i=1, 2, \ldots\ldots 6)$ के मान क्रमशः 2, 6, 10, 12, 14 तथा 16 हैं, अतः

$$\mu = \frac{1}{6}(2 + 6 + 10 + 12 + 14 + 16) = 10$$

उदाहरण 15.2.3

ऊपर दिए हुए उदाहरण 15.2.2 में समष्टि का प्रसरण परिकलित कीजिए।

उत्तर

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Y_i^2 - \mu^2$$

ऊपर दिए हुए उदाहरण द्वारा हम जानते हैं कि $\mu = 10$

$$\therefore \sigma^2 = \frac{1}{6}(2^2 + 6^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2 + 16^2) - 10^2$$

$$= \frac{1}{6} \times 736 - 100 = 22.67$$

यहां पर यह ध्यान दीजिए कि Y, μ, तथा σ^2 सभी समष्टि प्राचल हैं।

15.3 प्रतिचयन तथा सांख्यिकीय अनुमिति : कुछ मूल अवधारणाएं

सांख्यिकीय अनुमिति के निश्चित सिद्धांतों के कारण हम समष्टि प्राचलों के प्रतिदर्शी आकलनों का प्रयोग करने योग्य हैं जो कि प्रेक्षणों के एक सीमित हिस्से पर आधारित हैं तथा अधिक से अधिक एक समष्टि चाहे वह परिमित हो, का केवल एक अंश होता है। सांख्यिकीय अनुमिति बड़ी सैद्धांतिक जटिलता का विषय है। हम यहां पर प्रतिचयन तथा सांख्यिकीय अनुमिति के सिद्धांतों से संबंधित केवल प्रारंभिक सहजानुभूत तथा मूलभूत विचार प्रस्तुत करेंगे। जैसा कि हम जानते हैं कि एक प्रतिदर्श, समष्टि का केवल सीमित अंश होता है, परिणामतः पहले के अभिलक्षणों का दूसरे के अभिलक्षणों से फर्क होना लाज़मी है। उदाहरण के लिए, अगर एक कालेज के 1000 विद्यार्थियों की औसत ऊँचाई का आकलन केवल 50 विद्यार्थियों के प्रतिदर्श के द्वारा किया जाता है, यह बिल्कुल संभव है कि प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त औसत ऊँचाई कालेज में विद्यार्थियों की समष्टि की औसत ऊँचाई से भिन्न होगी। स्पष्टतः यह प्रश्न पूछा जा सकता है : समष्टि से लिए गए सीमित प्रतिदर्श

i) समष्टि का कोई अभिलक्षण, जिसमें हमारी रुचि है वह अज्ञात हो सकता है तथा हम इसके आकार का अनुमान समष्टि से प्राप्त प्रतिदर्श के आधार पर करते हैं; या

ii) समष्टि अभिलक्षण के बारे में कुछ सूचना पहले से प्राप्त है तथा हम समष्टि से प्रतिदर्श लेकर इसकी जांच करना चाहते हैं कि यह सूचना तर्क संगत है कि नहीं।

पहले प्रकार के प्रश्न आकलन की समस्या से संबंधित हैं तथा दूसरे प्रकार के प्रश्न परिकल्पना परीक्षण से संबंधित हैं। प्रायः प्रश्न प्रतिदर्श आकलनों के आधार पर अज्ञात प्राचलों के आकलन या समष्टि प्राचलों के बारे में उपलब्ध परिकल्पना की जाँच करने से संबंधित होते हैं। फिलहाल हम इस बात पर ध्यान नहीं देंगे कि समष्टि बंटन का रूप क्या है – द्विपद, पाइसों, प्रसामान्य आदि ····।

15.3.1 यादृच्छिक चर तथा प्रतिचयन बंटन

समष्टि अभिलक्षणों के बारे में प्रतिदर्श आकलों द्वारा अनुमिति के लिए निकष, जिसको हमें निश्चित करना है, तक जाने से पहले हमें यादृच्छिक चर तथा एक प्रतिदर्शज के प्रतिचयन बंटन की जानकारी आवश्यक है।

यादृच्छिक चर के बारे में हमें कुछ जानकारी पहले से प्राप्त है। दोहराने के लिए हम कहेंगे कि एक चर की गणितीय प्रत्याशा इसका केवल एक *भारित समांतर माध्य होता* है जहां पर *भार* चर के विभिन्न लिए जा सकने वाले मानों की प्रायिकता होते हैं। उदाहरण के लिए, अगर आप किसी और व्यक्ति के साथ एक खेल को खेल रहे हैं जिसमें अगर एक अनभिनत सिक्के को उछालने पर अगर शीर्ष प्राप्त होता है तो आपको 2 रुपए प्राप्त होते हैं तथा पुच्छ प्राप्त होने पर 3 रुपए प्राप्त होते हैं तो 10 बार खेल खेलने (सिक्के का उछाल) से आपको कुल प्रत्याशित मुद्रा की मात्रा 26 रुपए होगी जो कि इस प्रकार है :

अगर 10 उछालों में 4 शीर्ष तथा 6 पुच्छ प्राप्त हुए हों तो कुल प्रत्याशित
मुद्रा की मात्रा $= 2\times4 + 3\times6 = 26$ रुपए

अतः प्रति उछाल औसत $= \dfrac{2\times4}{10} + \dfrac{3\times6}{10} = 2.60$ रुपए

संख्याएं $\dfrac{4}{10}$ तथा $\dfrac{6}{10}$, 10 उछालों में क्रमशः शीर्ष तथा पुच्छ की तुलनात्मक बारंबारताएं हैं। हम यह जानते हैं कि अगर सिक्का अनभिनत है तथा उछालों की संख्या अधिक हो तो ये तुलनात्मक बारंबारताएं $\dfrac{1}{2}$ के निकट होंगी। अतः अगर यह मान लिया जाए कि खेल को बहुत ही अधिक बार खेला गया है तो प्रति खेल प्राप्त होने वाली औसत मात्रा लगभग $\left(2\times\dfrac{1}{2} + 3\times\dfrac{1}{2}\right)$ रु. $= 2.50$ रुपए होगी। किन्तु हमारा वास्तविक उदाहरण केवल 10 खेलों का प्रतिदर्श है। इसके द्वारा हमें प्रति खेल संभावित औसत लाभ का प्रतिदर्श आकलन 2.60 रुपए प्राप्त हुआ है जिसका समष्टि मान वास्तव में 2.50 रुपए है। 2.60 रुपए को प्रतिदर्शज कहा जाता है तथा यह समष्टि प्राचल (2.50 रुपए) का प्रतिदर्शी आकलन है। इसके अतिरिक्त सिक्के के प्रत्येक उछाल पर लाभ एक यादृच्छिक चर है क्योंकि इसके द्वारा लिए जाने वाले निश्चित मानों की प्राथमिकताएं संलग्न हैं।

पिछले खंड के द्वारा हमें यह ज्ञात है कि यादृच्छिक चर का बंटन द्विपद या पाइसों हो सकता है जो कि प्रेक्षणों की संख्या अधिक होने (अप्रत्यक्ष) रूप में अपरिमित होने) पर प्रसामान्य बंटन का सन्निकटन होते हैं जब प्रेक्षणों की संख्या अधिक हो जाये तो किसी चर के संभावित बंटन की प्रसामान्य बंटन की ओर प्रवृत्ति सांख्यिकीय अनुमिति तथा प्रतिचयन सिद्धांतों के लिए निर्णायक महत्व रखती है। बहुत सी घटनाओं की व्याख्या प्रसामान्य बंटन के द्वारा की जा सकती है। ऐसा इसलिए संभव है क्योंकि प्रसामान्य बंटन की बहुत सुविधाजनक सांख्यिकीय विशेषताएं हैं। हम बिना उपपत्ति के निम्नलिखित बातें कहेंगे।

स्वतंत्र प्रसामान्य चरों का योग

क) स्वतंत्र प्रसामान्य बंटित चरों का योग भी प्रसामान्य बंटित होता है। दूसरे शब्दों में, अगर $X = X_1 + X_2$, जहां पर X_1 तथा X_2 प्रसामान्य बंटित यादृच्छिक चर हैं, तब इनका योग X भी प्रसामान्य बंटित होता है। X का माध्य μ तथा प्रसरण σ^2 इस प्रकार होते हैं, $\mu = \mu_1 + \mu_2$ तथा $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ जहां μ_1, μ_2 तथा σ_1, σ_2; X_1 तथा X_2 के क्रमशः माध्य तथा प्रसरण हैं।

15.3.2 केन्द्रीय सीमा प्रमेय – एक व्यापकीकरण

अब प्रश्न यह है कि अगर यादृच्छिक चरों का बंटन प्रसामान्य नहीं है तो क्या होगा ? यह प्रश्न बड़ा ही प्रासंगिक है क्योंकि एक सीमित प्रतिदर्श जो कि इतने अधिक प्रेक्षणों पर आधारित नहीं है का बंटन प्रसामान्य होना आवश्यक नहीं है, चाहे अधिकतर परिस्थितियों में अधिक संख्या में प्रेक्षणों के कारण प्रसामान्य बंटन विद्यमान होता है। इस कठिन परिस्थिति से निकलने के लिये हम एक शक्तिशाली प्रमेय का सहारा लेंगे जिसको केन्द्रीय सीमा प्रमेय कहते हैं। इस प्रमेय के अनुसार, कुछ विशेष परिस्थितियों में स्वतंत्र यादृच्छिक चरों के योग का बंटन उपगामी प्रसामान्य होता है, चाहे इन चरों का अपना बंटन प्रसामान्य न हो। उपगामी प्रसामान्य का अर्थ यह है कि अगर योग किए जाने वाले यादृच्छिक चरों की संख्या अधिक हो जाए तो इस योग का बंटन प्रसामान्य बंटन की ओर उपगमन करेगा।

इस प्रमेय के लागू होने की शर्तें अत्यधिक जटिल होने के कारण उनका यहां पर विवेचन नहीं किया जाएगा। फिर भी, सहजानुभूत विचार द्वारा हम यह सोच सकते हैं कि यह उपगामी प्रसामान्यता किस प्रकार प्राप्त होती है। मान लिया हम एक बहुत तेज गोलीबाजों के उदाहरण पर विचार करते हैं जो कि अपनी रायफल द्वारा लक्ष्य पर गोली दागने का प्रयास कर रहे हैं। आपने छोटे गुब्बारों को खिलौना बंदूक तथा छोटी लोहे अथवा प्लास्टिक की गोलियों से दागने का खेल अवश्य ही खेला होगा। लक्ष्य पर या गुब्बारे पर गोली मारने के बार-बार प्रयास की इस परिस्थिति में यादृच्छिक चर किसी शाट का लक्ष्य से या गुब्बारे से विचलन है। जब यह विचलन शून्य हो जाता है तो गोली लक्ष्य या गुब्बारे पर लगती है मान लिया आप वास्तव में लक्ष्य को दागने के लिए कठोर प्रयास कर रहे हैं तथा रायफल में या गोली में या लक्ष्य में कोई जानबूझकर की हुई अभिनति नहीं है। अब यह सोचना सरल है कि लक्ष्य को ठीक दागने की असफलता अर्थात् शॉट का विचलन बहुत से परस्पर स्वतंत्र कारणों से प्रभावित होता है, उदाहरण के लिए, वायु में थोड़ी परिवर्तन, रायफल के ट्रिगर को दबाते समय अंगुली का झटका, गोलीबाज की भौतिक अवस्था में जरा सा परिवर्तन आदि। शुद्ध प्रभाव (शाट का लक्ष्य से विचलन) पर इनमें से प्रत्येक कारण का बहुत थोड़ा योगदान होता है। प्रत्येक कारण के प्रभाव एक दूसरे से स्वतंत्र होते हैं। केन्द्रीय सीमा प्रमेय द्वारा हम यह अनुमान लगा सकते हैं कि शॉट के विचलनों का बंटन प्रसामान्य हो सकता है। हम एक विचलनों का प्रतिदर्श लेकर इस प्रयोग की जांच कर सकते हैं। केन्द्रीय सीमा प्रमेय प्रसामान्य बंटन को प्रमाणित न केवल इसके विद्यमान होने की संभावना की व्याख्या करता है, यह केवल सन्निकट प्रसामान्य यादृच्छिक चरों के बंटन की प्रक्रिया की व्याख्या, अनुमान या परिणाम का आधार प्रदान करता है।

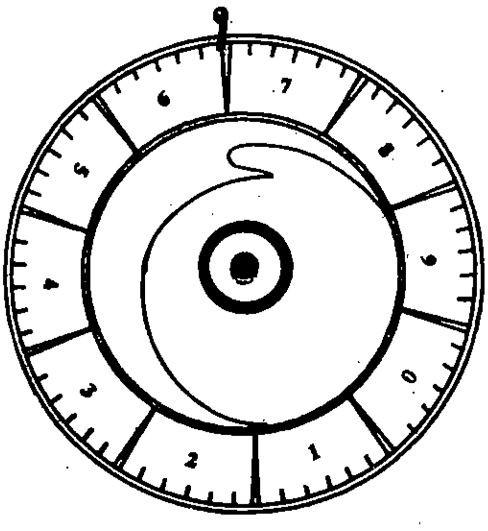
वास्तव में कहानी इस प्रकार है कि प्रसामान्य बंटन जिसको गॉसियन बंटन भी कहा जाता है सर्वप्रथम कार्ल गॉस ने अपनी अभ्यास पुस्तिका पर पैंसिल द्वारा एक विशेष बिन्दु (जो कि उसके लिए लक्ष्य था) पर मारने के प्रयासों की शृंखला से निगमन किया गया। इसके द्वारा उसको बिन्दुओं का प्रकीर्णन प्राप्त हुआ, अर्थात् जिस बिन्दु पर मारने का प्रयास कर रहा था उस बिन्दु से विचलन। इन विचलनों के सम्मुख इनकी बारंबारताओं को अंकित करने पर प्रसामान्य वक्र का प्रजनन होता हुआ पाया गया। इस प्रमेय के आधार पर ही हम एक बड़ी समष्टि से सीमित आकार के प्रतिदर्श द्वारा समष्टि के बारे में निष्कर्ष प्राप्त कर सकते हैं जहां पर स्पष्टतः प्रतिदर्श प्राप्त करने के बहुत तरीके हो सकते हैं। इस कार्य के लिए हम समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श प्राप्त करते हैं, जिसका अर्थ यह है कि समष्टि अभिलक्षण के प्रतिदर्श में मानों का परिसर जिनकी प्रायिकताएं निश्चित होती हैं। इस प्रकार स्वयं प्रतिदर्श यादृच्छिक चरों का एक समुच्चय होता है, यहां पर समष्टि के प्रत्येक सदस्य की प्रतिदर्श में लिए जाने की प्रायिकता होती है। इस प्रकार इसके द्वारा हमें प्रतिदर्श द्वारा समष्टि प्राचल का एक वैध आकलन प्राप्त होता है। अभी यह थोड़ा अस्पष्ट सा लगता होगा लेकिन यादृच्छिक प्रतिचयन के विवेचन करते समय यह स्पष्ट हो जाएगा।

15.3.3 सरल यादृच्छिक प्रतिचयन

जैसा कि अब आप ठीक प्रकार से समझ सकते हैं एक यादृच्छिक प्रतिदर्श एक प्रायिकता प्रतिदर्श होता है जिसमें समष्टि के प्रत्येक सदस्य के प्रतिदर्श में सम्मिलित किए जाने की प्रायिकता शून्य से अधिक होती है। क्योंकि प्रतिदर्श में इस प्रकार चयन किए गए मानों की प्रायिकताएं होती हैं, ये मान स्वयं यादृच्छिक चर बन जाते हैं। इस भाव में एक प्रतिदर्श को यादृच्छिक कहा जाता है। यादृच्छिक विधि का अर्थ समष्टि से प्रतिदर्श प्राप्त करने की अव्यवस्थित विधि या किसी निश्चित विधि की अनुपस्थिति नहीं होता। आपको यादृच्छिक शब्द के सामान्य प्रयोग तथा इसके प्रायिकता अर्थ में भेद करना चाहिए। उदाहरण के लिए, एक संवाददाता जो कि बजट के बारे में लोगों की प्रतिक्रियाओं का विवरण एकत्रित करना चाहता है, बाजार में जाकर

इससे पहले खंड के इकाई 14 में राम तथा रहीम द्वारा लाल तथा नीली गेंद निकालने के खेल का पुनःस्मरण कीजिए। जब पहले निकाली गेंद को वापिस रखकर दूसरी गेंद निकाली जाती है तो दोनों प्रकार की गेंद निकालने की क्रमशः प्रायिकताएं समान रहती हैं। इस परिस्थिति में दो गेंदों के प्रतिदर्श के चयन की प्रायिकत भी समान रहेगी अगर प्रत्येक चयन के बाद गेंदों को वापिस रख दिया जाय। इस प्रकार हमें एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श प्राप्त होगा। इसकी ओर व्याख्या के लिए मान लिया श्याम, रहीम, जार्ज तथा जैन एक दफ्तर के कर्मचारियों की समष्टि के चार सदस्य हैं। चारों एक ही अवकाश अवधि में अवकाश पर जाना चाहते हैं लेकिन उनका मालिक एक समय में केवल दो को छुट्टी दे सकता है। इस चयन कार्य को पूर्णतया निष्पक्ष तरीके से करने के लिए प्रत्येक के लिए चार पर्चियां श्याम के लिए (S) रहिम के लिए (R) जार्ज के लिए (G) तथा जैन के लिए (J) लिखकर एक टोकरी में रख दी जाती है, तथा उनको पूर्णतया मिलाकर प्रबंधक आंख बंद करके दो पर्ची निकालता है। समष्टि S,R, G,J से 2 के आकार के सम्भावित प्रतिदर्श SR, SG, SJ, RG, RJ तथा GJ होंगे। यहां यह ध्यान दीजिए कि S,R,G,J में से प्रत्येक 6 प्रतिदर्शों में से 3 में आता है, इस प्रकार प्रत्येक की प्रायिकताएं क्रमशः $P(S) = P(R) = P(G) = P(J) = 3/6 = 1/2$ हैं। अतः समष्टि के प्रत्येक सदस्य के अवकाश के लिए चुने जाने प्रायिकता बराबर है, जो कि 1/2 है। इसके अतिरिक्त 6 प्रतिदर्शों में से प्रत्येक के चुने जाने की प्रायिकमा भी समान है। इस प्रकार चयन प्रक्रिया सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श की दोनों शर्तों को पूरा करती है।

आप लाटरी के टिकट खरीदने तथा इसके बाद लाटरी में विजेता के चयन की विधि से परिचित हैं। इन टिकटों पर संख्याएं अंकित होती है तथा चयन क्रिया में इन टिकटों पर अंकित संख्याओं के परिसर से एक संख्या का चयन यादृच्छिक प्रतिचयन की प्रक्रिया होता है। सड़क की पटरी पर लाटरी का खेल आपने अवश्य ही खेला होगा या देखा होगा। इस खेल में एक चक्र होता है जिस पर संख्याएं अंकित होती हैं जिसको रूले चक्र कहते हैं। विजेता अंक को प्राप्त करने के लिए इस चक्र को घुमाया जाता है। इस चक्र को निम्न लिखित चित्र में दिखाया गया है।



आकृति 15.1

अब मान लिया कि टिकटों पर 5 अंकों की संख्याएं हैं। इस प्रकार टिकट की संख्या प्राप्त करने के लिए चक्र को 5 बार घुमाया जाता है तथा प्रत्येक में प्राप्त अंक को लिखित करके संख्या प्राप्त की जाती है। मान लिया इस प्रकार प्राप्त अंकों का अनुक्रम 21043 है तो जिस टिकट पर यह संख्या है उसको विजेता घोषित कर दिया जाता है। हम इस प्रकार के चक्र को बहुत बार घुमा कर प्राप्तांकों की तालिका तैयार कर सकते हैं तथा चक्र के स्थान पर इस तालिका के प्रयोग द्वारा विजेता टिकट का चयन कर सकते हैं। इस प्रकार की तालिकाओं को सांख्यिकी में यादृच्छिक संख्या तालिकाएं कहा जाता है। एक समष्टि से सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श प्राप्त करने के लिए समष्टि के सभी सदस्यों को क्रमानुसार अंकित किया जाता है। इन संख्याओं में अंकों की संख्या समान होती है जो कि समष्टि में प्रतिचयन की जाने वाली इकाइयों की संख्या पर निर्भर होती है। यादृच्छिक संख्या तालिका द्वारा यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन कैसे होता है, यह हम अब अध्ययन करेंगे, लेकिन इससे पहले कुछ और अवधारणाओं का स्पष्टीकरण आवश्यक है।

....

....

....

....

....

2) एक समष्टि में 4, 5, 7, 9, 10 संख्याएं हैं, निम्नलिखित ज्ञात कीजिए,

   i) समष्टि योग

   ii) समष्टि माध्य, तथा

   iii) समष्टि प्रसरण ।

....

....

....

....

....

....

....

....

3) एक यादृच्छिक चर का उदाहरण दीजिए ।

....

....

....

....

....

4) सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श के क्या अभिलक्षण हैं ?

....

....

....

....

....

....

15.4 प्रतिचयन बंटन

व्यवहारिक प्रश्नों में, जहां पर प्रतिदर्श एवं समष्टि, दोनों का आकार बहुत बड़ा होता है, प्रतिदर्शों की संख्या भी बहुत अधिक होती है। इस परिस्थिति में प्रतिदर्शों के निश्चित समुच्चय की प्रायिकताएं निश्चित करना कठिन हो जाता है। उदाहरण के लिए, उपरोक्त उदाहरण में अगर प्रतिदर्श का आकार दो न होकर बड़ा हो तथा संस्था का आकार बड़ा हो जिसमें कर्मचारियों की संख्या भी अधिक हो तो प्रत्येक कर्मचारी की प्रायिकता निश्चित करना कठिन हो जाता है क्योंकि हमें समष्टि में से कर्मचारियों के समुच्चय को चुने जाने के सभी संभव तरीकों के बारे में सोचना पड़ेगा। निस्संदेह प्रश्न यह है कि प्रतिदर्शों की प्रायिकताएं निश्चित करने ही कोई और सरल विधि है ?

15.4.1 माध्य का प्रतिचयन बंटन

यहां पर दोबारा केन्द्रीय सीमा प्रमेय जिसका हमने ऊपर विवेचन किया है, हमारे काम आती है। इस प्रमेय द्वारा हम पूर्ण प्रतिदर्श का निरूपण उसके माध्य द्वारा करते हैं तथा पूर्ण समष्टि से प्रतिदर्श के प्रत्येद सदस्य के घटित होने की प्रायिकता परिकलित करने के स्थान पर हम प्रतिदर्श माध्य के घटित होने की प्रायिकता परिकलित करते हैं। केन्द्रीय सीमा प्रमेय द्वारा हम यह घोषित कर सकने में समर्थ होते हैं कि अगर X_i $(i=1, 2, 3, \ldots, n)$ एक स्वतंत्र यादृच्छिक चरों का समुच्चय है तथा सभी का बंटन समान है तो

$X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ का बंटन उपगामी प्रसामान्य होता है तथा X का माध्य μ तथा प्रसरण σ^2 के मान क्रमशः

$\mu = \sum_{i=1}^{n} \mu_i = n\mu_i$ तथा $\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 = n\sigma_i^2$ है। यहां पर तथा $\mu_i \sigma_i^2$, X_i के क्रमशः माध्य तथा प्रसरण हैं।

अब हम यह जाँच करेंगे कि समान बंटन की मान्यता का क्या अर्थ है। मान लिया विद्यार्थियों की दो कक्षाएं A तथा B हैं और X_1 तथा X_2 दो यादृच्छिक चर हैं जो कि क्रमशः दो कक्षाओं में विद्यार्थियों के बौद्धिक स्तर को सूचित करते हैं। मान लिया X_1 का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः μ_1 तथा σ_1^2 है तथा X_2 का माध्य व प्रसरण क्रमशः μ_2 तथा σ_2^2 है। जब हम यह कहते हैं कि X_1 तथा X_2 का बंटन समान है तो इसका अर्थ यह है कि (i) दोनों का बंटन वही है अर्थात दोनों का बंटन प्रसामान्य है या द्विपद है इत्यादि (ii) दोनों के माध्य समान अर्थात $\mu_1 = \mu_2$ (iii) दोनों के प्रसरण भी समान है अर्थात् $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ हैं।

समान बंटन की मान्यता का अर्थ स्वतंत्रता भी हो सकता है, इसकी व्याख्या के लिए :

मान लिया समष्टि में N विद्यार्थी हैं, एक विद्यार्थी का चयन (प्रतिस्थापन सहित) कीजिए तथा मान लिया यादृच्छिक चर X_1 उसका बौद्धिक स्तर है, दूसरे विद्यार्थी का चयन कीजिए तथा मान लिया उसका बौद्धिक स्तर X_2 है जो कि एक और यादृच्छिक चर है। क्योंकि X_1 तथा X_2 एक ही समष्टि से प्राप्त किए गए हैं इसलिए इनका बंटन समान हैं। इसी प्रकार अगर तीन विद्यार्थियों का चयन (प्रतिस्थापन सहित) किया जाए तो हम इसकी व्याख्या को इस प्रकार से कर सकते हैं X_1, X_2 तथा X_3 तीन स्वतंत्र यादृच्छिक चर हैं जिनका बंटन समान है। इसका व्यापकीकरण करने पर अगर समष्टि से n आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया जाए तो हमारे पास वास्तव में n स्वतंत्र यादृच्छिक चर X_i $(i = 1, 2, 3, \ldots n)$ हैं जिनका बंटन समान होता है। इस अर्थ में n आकार का यादृच्छिक प्रतिदर्श n यादृच्छिक चरों X_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ का सृजन करता है जो कि प्रतिदर्शों के प्रतिस्थापन सहित चयन होने पर स्वतंत्र होंगे। लेकिन अधिकांश व्यवहारिक प्रश्नों में, जहां पर समष्टि का आकार बड़ा है तथा समष्टि की तुलना में प्रतिदर्श का आकार बहुत छोटा है तो यादृच्छिक चरों X_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ को बिना प्रतिस्थापन के चयन होने के बावजूद स्वतंत्र लिया जा सकता है। इसका मुख्य कारण यह है कि जब समष्टि का आकार बड़ा हो तो इससे चयन की गई एक इकाई का प्रतिस्थापन करें या न करें इसका व्यवहारिक दृष्टि से अधिक महत्व नहीं है।

केन्द्रीय सीसा प्रमेय पर पुनः आने पर जब एक समष्टि जिसका माध्य μ तथा प्रसरण σ^2 है, से n आकार के यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया जाता है तो हमारे पास n स्वतंत्र यादृच्छिक चर x_i $(i = 1, 2, \ldots n)$ होते हैं जिनका बंटन समान होता है जहां पर, $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$ प्रतिदर्श का माध्य होता है। केन्द्रिय सीमा प्रमेय द्वारा $\bar{x}$ का बंटन उपगामी प्रसामान्य होता है जिसका माध्य $E(\bar{x}) = \mu$ तथा प्रसरण $V(\bar{x}) =$ $\frac{\sigma^2}{} \left(\frac{N-n}{}\right)$ होता है। हम इसकी व्याख्या उदाहरण द्वारा करेंगे।

सारणी 5.1

X	X^2
(रुपए)	
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25
6	36
21	91

$$\mu = \frac{21}{6} = 3.5 \text{ रुपए}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N}\Sigma (X-\mu)^2} = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{91}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{17.5}{6}}$$

अब हम 2 विद्यार्थियों के प्रतिदर्श का चुनाव करते हैं, 6 विद्यार्थियों में से 2 विद्यार्थियों के संभावित प्रतिदर्शों की संख्या $^6C_2 = 15$ है। ये 15 प्रतिदर्श इस प्रकार होंगे :

1) 1,2
2) 1,3
3) 1,4
4) 1,5
5) 1,6
6) 2,3
7) 2,4
8) 2,5
9) 2,6
10) 3,4
11) 3,5
12) 3,6
13) 4,5
14) 4,6
15) 5,6

इनमें से किसी प्रतिदर्श के चुने जाने की प्राथकिमता 1/15 है। इन 15 प्रतिदर्शों के माध्य क्रमशः इस प्रकार हैं :

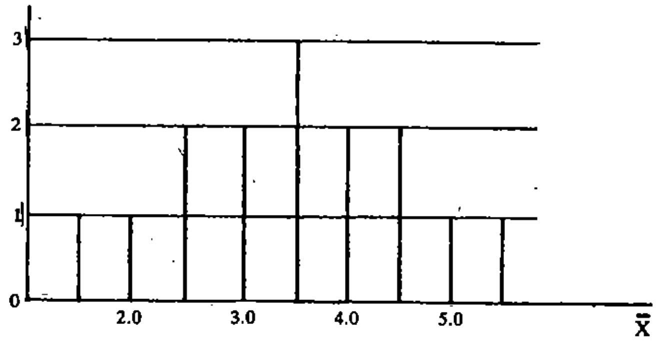
1) 1.5
2) 2
3) 2.5
4) 3
5) 3.5
6) 2.5
7) 3
8) 3.5
9) 4
10) 3.5
11) 4
12) 4.5
13) 4.5
14) 5
15) 5.5

इनमें से किसी माध्य के घटित होने की प्रायिकता उस प्रतिदर्श की प्रायिकता के बराबर है जिसका वह माध्य है, यह प्रायिकता 1/15 है। लेकिन यहां पर आप ध्यान दें कि 5वें, 8वें तथा 10वें प्रतिदर्शों का माध्य 3.5 है। अतः $\bar{X} = 3.5$ होने की प्रायिकता $= \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$ है। इसी प्रकार हम अन्य प्रतिदर्श माध्यों की प्रायिकताएं ज्ञात करके निम्नलिखित तालिका तैयार कर सकते हैं।

सारणी 15.2 : माध्य का प्रतिचयन बंटन

रुपए		प्रायिकताएँ
1.5	1	1/15
2.0	1	1/15
2.5	2	2/15
3.0	2	[illegible]

आप $\bar{X}$ को x अक्ष पर तथा बारंबारता को y अक्ष पर लेकर आरेख का आरेखण कर सकते हैं।



आरेख 15.2

यहां पर यह ध्यान दीजिए कि $\bar{X}$ अक्ष पर चर $\bar{x}$ है न कि x है। वास्तव में यह प्रतिदर्श माध्य ($\bar{X}$) का बंटन है जो कि हमें चाहिए, यह बंटन सांख्यिकीय अनुमिति के मूल सिद्धांतों में से एक है। आप यह स्वयं जाँच कर सकते हैं कि इस बंटन का माध्य समष्टि माध्य के बराबर है अर्थात्

$$\mu_{\bar{X}} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} X_i = 3.5 \text{ रुपए}$$

इस बंटन का मानक विचलन

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{17.5}{15}} \text{ है।}$$

यहां पर ध्यान देने योग्य बात यह है कि

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

जहां पर समष्टि का मानक विचलन σ है तथा माध्य के प्रतिचयन बंटन का मानक विचलन $\sigma_{\bar{X}}$ है। इसको मानक त्रुटि भी कहा जाता है। यह हम पहले ज्ञात कर चुके हैं कि $\sigma = \sqrt{\frac{17.5}{15}}$ है, इस मान को तथा N–n के मान को उपरोक्त समीकरण में रखने पर

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}} = \frac{\sqrt{\frac{17.5}{15}}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{6-2}{6-1}} = \sqrt{\frac{17.5}{15}}$$

यह आप स्वयं जांच कीजिए कि मानक विचलन के सूत्र द्वारा भी $\sigma_{\bar{X}}$ का यहीं मान प्राप्त होगा। अर्थात्

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{15}\Sigma(X_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{17.5}{15}}$$

यह आप सारणी 15.2 दिए गए बंटन द्वारा परिकलित कर सकते हैं।

अब हम एक और उदाहरण पर विचार करते हैं। मान लिया समष्टि में 5 सदस्य 4, 5, 7, 9, 10 हैं। हम इसमें से 2 आकार के सभी संभव प्रतिदर्श (बिना प्रतिस्थापन) लेते हैं। अब हमें यह ज्ञात करना है :

i) समष्टि का माध्य $\mu = \frac{4+5+7+9+10}{7} = 7$

ii) समष्टि का प्रसरण $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \mu)^2$

$$= \frac{1}{5}[(4-7)^2 + (5-7)^2 + (7-7)^2 + (9-7)^2 + (10-7)^2]$$

मानक विचलन = $\sqrt{5.2}$ = 2.28

इन प्रतिदर्शों के माध्य इस प्रकार हैं :

4.5	6.0	8.0	9.5
5.5	7.0	8.5	
6.5	7.5		
7.0			

इन माध्यों को बारंबारता के रूप में व्यवस्थित करने पर हमें माध्य का प्रतिचयन बंटन प्राप्त होता है ।

सारणी 15.3

प्रतिदर्श माध्य का मान ($\bar{X}_i$)	बारंबारता (f_i)	$f_i \bar{X}_i$	$f_i \bar{X}_i^2$
(1)	(2)	(3)	(4)
4.5	1	4.5	20.25
5.5	1	5.5	30.25
6.0	1	6.0	36.00
6.5	1	6.5	42.25
7.0	2	14.0	98.00
7.5	1	7.5	56.25
8.0	1	8.0	64.00
8.5	1	8.5	72.25
9.5	1	9.5	90.25
	= 10	70.00	509.50

माध्य के प्रतिचयन बंटन का माध्य $\mu_{\bar{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_i \bar{X}_i = \frac{1}{10} \times 70 = 7.0$

यह इस बात की व्याख्या है कि प्रतिदर्श माध्य का प्रत्याशित मान समष्टि माध्य के बराबर है ।

उपरोक्त बंटन का प्रसरण

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n} \Sigma f_i (\bar{X}_i - \mu_{\bar{X}})^2 = \frac{1}{n} \Sigma \bar{X}_i^2 - (\mu_{\bar{X}})^2$$

अतः प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि $SE_x = \sigma_{\bar{X}} = 1.95$ है ।

यह ध्यान दें कि $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N - n}{N - 1}}$

जहां पर $\sigma_{\bar{X}}$ = प्रतिदर्श माध्य की मान त्रुटि
σ = समष्टि का मानक विचलन
n = प्रतिदर्श का आकार

ऊपर दिए गए उदाहरण में पाँच संख्याओं (4, 5, 7, 9, 10) में से एक संख्या (जो कि यहां पर प्रतिचयन इकाई है), मान लिया 4 के पहले चयन में प्राप्त होने पर दूसरे चयन से पहले इसको वापिस नहीं किया जाता । इसका अर्थ यह है कि दूसरी संख्या का चयन केवल 5, 7, 9, 10 में से ही होगा । इस प्रक्रिया को प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन कहते हैं । लेकिन अगर पहली बार प्राप्त प्रतिचयन इकाई (मान लिया 4) को समष्टि में पुनः प्रतिस्थापित करके दूसरी इकाई का चुनाव किया जाता है तो 4 के दोबारा भी चुने जाने की

अब समष्टि 4, 5, 7, 9, 10 से 2 आकार के सभी संभावित प्रतिदर्श जो कि प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन किए गए हैं, इस प्रकार हैं :

(4,4),	(4,5),	(4,7),	(4,9),	(4,10)
(5,4),	(5,5),	(5,7),	(5,9),	(5,10)
(7,4),	(7,5),	(7,7),	(7,9),	(7,10)
(9,4),	(9,5),	(9,7),	(9,9),	(9,10)
(10,4),	(10,5),	(10,7),	(10,9),	(10,10)

यहां पर आप देखेंगे कि कुल संभावित प्रतिदर्शों की संख्या N^n है। यहां पर $N=5$ तथा $n=2$ है, अतः कुल संभावित प्रतिदर्शों की संख्या $5^2 = 25$ है। केन्द्रीय सीमा प्रमेय द्वारा ऊपर प्राप्त किए गए परिणामों का व्यापकीकरण इस प्रकार किया जा सकता है :

मान लिया समष्टि का आकार N है तथा इसका माध्य μ एवं मान विचलन σ है तथा प्रतिदर्श का आकार n है, तब प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन द्वारा ${}^{N}c_n$ संभावित प्रतिदर्श प्राप्त किए जा सकते हैं, तथा इतने ही प्रतिदर्श माध्य $\bar{X}_i$ $(i=1, 2, 3, \ldots\ldots, {}^{N}c_n)$ होंगे। इन प्रतिदर्श माध्यों से माध्य का प्रतिचयन बंटन बनेगा जिसके बारे में निम्न बातें कही जा सकती हैं :

i) अगर समष्टि बड़ी है तथा इसका बंटन प्रसामान्य है तो प्रतिदर्श माध्यों का बंटन भी प्रसामान्य होगा,

ii) अगर समष्टि बड़ी है और इसका बंटन प्रसामान्य नहीं है, तो प्रतिदर्श का आकार बड़ा होने पर $(n > 30)$ प्रतिदर्श माध्यों का बंटन उपगामी प्रसामान्य होगा,

iii) प्रतिदर्श माध्यों के बंटन का माध्य समष्टि माध्य के बराबर होगा,
$E(\bar{X}) = \mu$

iv) इस बंटन का मानक विचलन (मानक त्रुटि)
$\sigma_{\bar{x}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{n-1}}$ होगा

यहां पर यह स्पष्ट हो जाता है कि— जैसे-जैसे प्रतिदर्श आकार n में वृद्धि होती है, $\sigma_{\bar{x}}$ प्रतिदर्श माध्यों के मानक विचलन में कमी होती है; प्रायः यह मानक विचलन समष्टि मानक विचलन से छोटा होता है। प्रतिदर्श माध्यों के बंटन को प्रतिचयन बंटन कहा जाता है। क्योंकि प्रतिचयन बंटन का संबंध विभिन्न प्रतिदर्शों के बंटन से होता है, यह समष्टि प्राचल का आकलन होता है, जो कि इसकी प्रत्याशा होती है।

उदाहरण 15.4.1

अगर दी गई समष्टि 2, 4, 8, 8, 10, 10 हों तो 3 आकार के कितने संभावित प्रतिदर्श प्राप्त किए जा सकते हैं ?

उत्तर

समष्टि का आकार $N = 6$
प्रतिदर्श का आकार $n = 3$

प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन द्वारा संभावित प्रतिदर्शों की संख्या

$$ {}^{6}c_3 = \frac{61}{31\,(6-3)} = \frac{61}{31\;31} = \frac{6.5.431}{3.2.\;1.31} = 20 $$

तथा प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन द्वारा संभावित प्रतिदर्शों की संख्या $= 6^3 = 108$ होगी।

उदाहरण 15.4.2

समष्टि 2, 5, 8, 11, 14 $(N=5)$ दी हुई है, 3 आकार के सभी संभावित प्रतिदर्शों (बिना प्रतिस्थापन) को लिखिए।

उत्तर : बिना प्रतिस्थापन के संभावित प्रतिदर्शों की संख्या ${}^{5}c_c = 10$

ये प्रतिदर्श इस प्रकार हैं :

(2,8,11) (8,11,14)
(2,8,14)
(2,11,14)

उदाहरण 15.4.3

उदाहरण 14.4.2 के सभी प्रतिदर्शों के माध्य परिकलित कीजिए :

उत्तर : प्रतिदर्श माध्य इस प्रकार है :

5	8
6	9
7	9
7	11
8	
9	

उदाहरण 15.4.4

दी हुई समष्टि 2,5, 8, 11, 14 से 3 आकार के प्रतिदर्शों (बिना प्रतिस्थापन) के माध्यों के प्रतिचयन बंटन को सारणीबद्ध कीजिए।

माध्यों की मानक त्रुटि परिकलित कीजिए।

उत्तर :

इस प्रश्न का उत्तर देने के लिए हमें निम्न चरणों का पालन करना पड़ता है।

1) यह ज्ञात कीजिए कि दिए हुए आकार के कितने प्रतिदर्श प्राप्त किए जा सकते हैं यहां पर यह संख्या $^{N}C_{n} = {}^{5}C_{3} = 10$ है।
2) अब आकार 3 के सभी संभावित प्रतिदर्शों को लिखिए (यह हमने उदाहरण 15.4.2 में किया है)।
3) इन सभी प्रतिदर्शों का माध्य परिकलित कीजिए (यह उदाहरण 15.4.3 में किया गया है।)
4) इन प्रतिदर्श माध्यों को बारंबारता बंटन के रूप में व्यवस्थित कीजिए।

   यह इस प्रकार है :

x	f
5	1
6	1
7	2
8	2
9	3
11	1
योग	10

5) इस प्रतिचयन बंटन का मानक विचलन परिकलित कीजिए जिसको मानक त्रुटि भी कहा जाता है। आप उपरोक्त सारणी से यह ज्ञात कर सकते हैं कि इसका मान 0.71 है।

15.4.2 प्रतिदर्श माध्यों के प्रतिचयन बंटन का उपयोग

ऊपर अध्ययन किया गया प्रतिदर्श माध्यों का प्रतिचयन बंटन सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की चयन प्रक्रिया ज्ञात करने में अत्यंत महत्वपूर्ण है। उपरोक्त उदाहरण के संदर्भ में, जिसमें माध्य के प्रतिचयन बंटन के लिए विभिन्न प्रतिदर्शों को उनकी [illegible]

ऊपर दिए गए उदाहरणों में समष्टि तथा प्रतिदर्शों का आकार छोटा है, इसको मानकीकृत प्रसामान्य बंटन के तुल्य बनाने के लिए बदलना पड़ता है, इसके लिए सांतत्य शुद्धि (–) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{n}$ का प्रयोग किया जाता है। इसको प्रयोग करने का कारण यह है कि प्रसामान्य बंटन, जो कि प्रतिदर्श के बड़े आकार तथा अपरिमित समष्टि पर आधारित है, संतत होता है। ऊपर दिए गए उदाहरण में समष्टि परिमित है जिसके मान असंतत हैं। इस उदाहरण में सांतत्य शुद्धि (–) $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 0.25$ है क्योंकि $n=2$ है इस प्रकार 4.5 रुपए शुद्धि के बाद 4.5–0.25 हो जाते हैं।

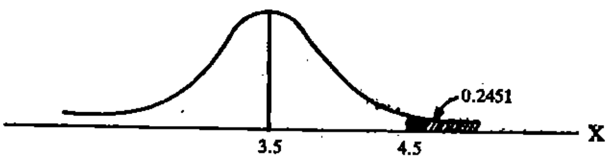
अगर हमें प्रतिदर्श माध्य $\bar{x} = 4.5$ या इससे अधिक की प्रायिकता ज्ञात करनी हो तो यह

$$P(\bar{x} > 4.5) = P(\bar{x} = 4.5) + P(\bar{x} = 5.0) + P(\bar{x} = 5.5)$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15} \text{ होगी}$$

जो कि प्रायिकता के योग प्रमेय के अनुसार (5,6), (4,6), (3,6) या (4,5) प्रतिदर्शों के चयन की प्रायिकता होगी।

निश्चित माध्यों वाले विभिन्न प्रतिदर्शों की प्रायिकताएं प्रसामान्य बंटन की क्षेत्रफल तालिका से भी ज्ञात की जा सकती हैं। क्योंकि केन्द्रीय सीमा प्रमेय द्वारा हमें ज्ञात है कि अगर समष्टि तथा प्रतिदर्श बड़े हैं, तो प्रतिदर्श माध्य का प्रतिचयन बंटन उपगामी प्रसामान्य होता है, चाहे समष्टि का बंटन प्रसामान्य न भी हो। इस प्रकार प्रसामान्य बंटन की क्षेत्रफल तालिका द्वारा विभिन्न प्रतिदर्श माध्यों के बराबर या अधिक परिसरों की प्रायिकता का परिकलन किया जा सकता है। हमने इससे पहले खंड में निश्चित मानकीकृत प्रसामान्य विचल के बराबर या अधिक परिसर की प्रायिकताएँ प्राप्त करना सीखा। एक परिमित तथा असंतत परिस्थिति से प्रसामान्य विचल कैसे प्राप्त कर सकते हैं। अब हम ऐसे प्रतिदर्श चयन करने की प्रायिकता ज्ञात करना चाहते हैं जिनका माध्य 4.5 या इससे अधिक हो। इसके लिए हम प्रसामान्यवक्र के नीचे यह क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं जोकि (4.5 – 0.25) = 4.25 रुपए से अधिक को सूचित करता हो। यह क्षेत्रफल निम्नलिखित आकृति में छायायित है :



आकृति 15.3

ऊपर हल किए हुए उदाहरण में याद कीजिए कि मानक त्रुटि

$\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{\frac{17.50}{15}} = 1.08$ रुपए है, तथा प्रतिदर्श माध्यों का माध्य 3.5 रुपए है। इसलिए 4.25 का माध्य से विचल $\bar{x} - \mu = 4.25 - 3.50 = 0.75$ रुपए है। इसके मानकीकरण के लिए हम इसे मानक त्रुटि से भाग कर देते हैं, इस प्रकार :

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma_{\bar{x}}} = \frac{0.75 \text{ रु.}}{1.08 \text{ रु.}} = 0.694 \text{ है।}$$

प्रसामान्य क्षेत्रफल तालिका द्वारा हम $z = 0.694$ के दाईं ओर वक्र के नीचे क्षेत्रफल ज्ञात करते हैं जोकि 0.2451 है। अतः $P(\bar{x} > 4.5) = 0.245$ है। इस प्रकार

इससे एक सरल परिकल्पित उदाहरण द्वारा आपको एक सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की वैद्य प्रक्रिया के तर्क से परिचय कराने का हमारा उद्देश्य पूरा हो गया ।

हम अब सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की प्रक्रिया को ज्ञात करने में केन्द्रीय सीमा प्रमेय, तथा प्रतिदर्श माध्यमों का प्रतिचयन बंटन की भूमिका का संक्षेप में व्याख्या करेंगे ।

i) दी हुई समष्टि जिसका आकार N है, से हम n आकार के $^{N}c_{n}$ प्रतिदर्शों का चयन कर सकते हैं जो हमें इतने ही माध्य प्रदान करेंगे ।

ii) इन प्रतिदर्श माध्यमों का बंटन n बड़ा होने पर उपगामी प्रसामान्य होगा (प्रायः $n > 30$ होने पर) अगर समष्टि प्रसामान्य है तो प्रतिदर्श माध्यमों का बंटन, प्रतिदर्श का आकार छोटा होने पर भी प्रसामान्य होगा । लेकिन केन्द्रीय सीमा प्रमेय द्वारा हम जानते हैं कि प्रतिदर्श का आकार अधिमानतः 30 से अधिक होना चाहिए जिससे समष्टि के प्रसामान्य होने या न होने पर भी प्रतिदर्श माध्य का प्रतिचयन बंटन उपगामी प्रसामान्य बन जाए ।

iii) प्रतिदर्श माध्यों के प्रसामान्य प्रतिचयन बंटन द्वारा हम ऐसे प्रतिदर्शों के चयन करने की प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं जिनके माध्य x_0 (मान लिया) या इससे अधिक हों । इसके लिए हम मानक प्रसामान्य विचल को परिभाषित करते हैं,

$$Z = \frac{\bar{x}_0 - \mu}{\sigma_{\bar{x}}}$$

जहाँ पर $E(\bar{x}) = \mu$ तथा $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ है,

तथा प्रसामान्य क्षेत्रफल वक्र के प्रयोग द्वारा प्रायिकता ज्ञात कर सकते हैं ।

iv) क्योंकि अधिकतर व्यवहारिक प्रश्नों में परिमित तथा असंतत परिस्थितियां होती हैं, इसलिए प्रसामान्य विचल प्राप्त करने के लिए सांतत्य शुद्धि का प्रयोग करना पड़ता है, जोकि $\frac{1}{2n}$ होती है तथा इसको प्रतिदर्श के मान में से घटाया जाता है । आप यह भी याद रखें कि $\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$ जिससे $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ को गुणा किया गया है, ऊपर (iii) में भी एक शुद्धि गुणक है जोकि परिमिति समष्टि होने पर प्रयोग किया जाता है । जब N का आकार अपरिमित हो जाय तो इस गुणक का मान इकाई के बराबर हो जाता है

$$\underset{N\to\infty}{Lt} \frac{N-n}{N-1} \to 1 \text{ तथा } \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

नोट : $\frac{N-n}{N-1} = \frac{1-n/N}{1-1/n} \simeq \frac{1-0}{1-0} = 1$ जब $N \to \infty$

अतः जब समष्टि बड़ी हो तो हम $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ को मानक त्रुटि के रूप में प्रयोग कर सकते हैं । व्यावहारिक प्रयोग में जब n का मान N के मान के 5% से कम हो (अर्थात् N की तुलना में बहुत छोटा हो) तो शुद्धि गुणक का प्रयोग नहीं किया जाता ।

बोध प्रश्न 2

1 से 5 प्रश्नों के समष्टि 2, 3, 6, 8, 11 है ।

1) ऊपर दी गई समष्टि से 2 आकार के सभी संभावित प्रतिदर्शों को लिखिए ।

....

....

....

3) माध्यों के प्रतिचयन बंटन का माध्य ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4) प्रतिदर्श माध्यों की मानक त्रुटि ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

....

5) प्रतिदर्श माध्य मे समष्टि माध्य से अधिक या बराबर होने की प्रायिकता ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

....

15.4.3 अनुपात का प्रतिचयन बंटन

अभी तक हमने अपने आपको प्रतिदर्श माध्य के प्रतिचयन बंटन तक ही सीमित रखा है, जोकि हमें सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की प्रक्रिया तक पहुंचने के लिए उपयोगी है। इसी प्रकार उपयोग होने वाला अनुपात $\bar{P}$ का प्रतिचयन बंटन है, तथा अब हम $E(\bar{P})$ तथा $V(\bar{P})$ को ज्ञात करने का प्रयास करेंगे, जो $\bar{P}$ की क्रमशः प्रत्याशा तथा प्रसरण हैं।

इसकी व्याख्या के लिए हम एक कलश, जिसमें चार लाल तथा छः नीली गेंदें हैं, पर विचार करेंगे। सम्मिलित रूप में 10 गेंदें समष्टि कहलाती हैं तथा लाल गेंदों का अनुपात $4/10 = 0.4$ है। इसको समष्टि अनुपात कहते हैं तथा यह $p=0.4$ से सूचित किया जाता है। अब हम इस समष्टि से $n=5$ आकार के प्रतिदर्शों के चयन करते हैं। इस प्रकार के संभव प्रतिदर्शों की कुल संख्या $^{10}C_5 = 252$ है। लेकिन इसमें यह माना गया है कि 5 गेंदों का समुच्चय प्रत्येक अन्य समुच्चय से भिन्न है, यह बात यहां पर तब तक सच नहीं होगी जब

अगर गेंदों में भेद किया जा सके तो चार लाल गेंदों में से 4 का चयन 4! तरीके से किया जा सकता है तथा इन 4! तरीकों को एक नीली गेंद निकालने के छः तरीकों से मिलाने पर कुल तरीकों की संख्या 4! × 6 हो जायेगी। लेकिन, क्योंकि गेंद समरूप हैं अतः हमें इसको 4! से भाग करना पड़ेगा। अतः 4 लाल तथा 1 नीली गेंद निकालने के तरीकों की संख्या $\frac{4! \times 6!}{4!} = 6$ है। इसी प्रकार, 3 लाल तथा 2 नीली गेंद निकालने के तरीकों की संख्या 4 ×3 ×2 ×6 ×5 है जिसमें पहले तीन पद लाल गेंदों के चयन के तरीके हैं तथा अंतिम दो पद नीली गेंदों के चयन के तरीके हैं। लेकिन 3 लाल गेंदों के समुच्चय में समरूप गेंदें हैं तथा 2 नीली गेंदों के समुच्चय में भी समरूप गेंदे हैं। अतः हम उपरोक्त व्यंजक को 3! ×2! से भाग कर देते हैं। इस प्रकार 3 लाल और 2 नीली गेंदों के प्रतिदर्शों की संख्या

$\frac{4 \times 3 \times 2 \times 6 \times 5}{3! \times 2!} = 60$ होगी। इसी प्रकार $\frac{4 \times 3 \times 6 \times 5 \times 4}{2! \times 3!} = 120$

2 लाल तथा 3 नीली गेंद वाले प्रतिदर्शों की संख्या होगी, $\frac{4 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3}{4!} = 60$ एक लाल तथा 4 नीली गेंदों के प्रतिदर्शों की संख्या तथा $\frac{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2}{5!} = 6$ प्रतिदर्शों में पांचों गेंद नीली होंगी।

यह जांच कीजिए कि किसी भी रंग की 5 गेंदों के कुल प्रतिदर्शों की संख्या 6+60+120+60+6 = 252

है। इसलिए अब हम विभिन्न रंगों के मिश्रण के 5 गेंदों के प्रतिदर्श चयन करने की प्रायिकताएं ज्ञात कर सकते हैं। यहां पर हम लाल गेंद को R तथा नीली गेंद को B से सूचित करेंगे। तब

$$P[4R, 1B] = \frac{6}{252}$$

$$P[3R, 2B] = \frac{60}{252}$$

$$P[2R, 3B] = \frac{120}{252}$$

$$P[1R, 4B] = \frac{60}{252}$$

$$P[5 B] = \frac{6}{252}$$

मान लिया $\bar{P}$ प्रतिदर्श में लाल गेंदों के अनुपात को सूचित करता है। तब ऐसे प्रतिदर्श के लिए, जिसमें 4 लाल तथा एक नीली गेंद है $P = \frac{4}{5} = 0.80$ है जो कि प्रतिदर्श अनुपात है, एक प्रतिदर्शज है। हम 10 गेंदों की समष्टि से 5 गेंदों के विभिन्न रंगों के मिश्रण के प्रतिदर्शों के अनुपात तथा उनकी बारंबारताओं के द्वारा निम्नलिखित सारणी तैयार कर सकते हैं :

प्रतिदर्श	$\bar{P}$	f	$\bar{P} - P$	$(\bar{P} - P)^2$	$(\bar{P} - P)^2 f$
0R, 5B	0.0	6	–0.4	0.16	0.96
1R, 4B	0.2	60	–0.2	0.04	2.40
2R, 3B	0.4	120	0.0	0.00	0.00
3R, 2B	0.6	60	0.2	0.04	2.40
4R, 1B	0.8	6	0.4	0.16	0.96
		252			6.72

यह सारणी $\bar{P}$ के विभिन्न मानों तथा उनकी बारंबारताओं से $\bar{P}$ का माध्य तथा मानक विचलन परिकलित करने के लिए है। $\bar{P}$ का माध्य ज्ञात करने के लिए भारित माध्य सूत्र का प्रयोग किया जाता है, जोकि इस प्रकार है :

अतः $\bar{P}$ के प्रतिचयन बंटन का माध्य $P = 0.4$ है।
अन्य शब्दों में,

$$E(\bar{P}) = p_1 P[X = P_1] + p_2 P[X = P_2] + \dots\dots\dots + p_5 P[X = P_5]$$

$$= 0.0 \times \frac{6}{252} + 0.2 \times \frac{60}{252} + 0 \dots\dots\dots + 0.8 \times \frac{6}{252} = 0.4$$

अतः $E(\bar{P}) = p$ है।

ऊपर दी गई सारणी द्वारा,

$\bar{P}$ का प्रसरण $V(\bar{P}) = \dfrac{\Sigma (\bar{P} - P)^2 f}{\Sigma f} = \dfrac{6.72}{252} = \dfrac{0.08}{3}$ है।

ऊपर दिए गए उदाहरण में यह कार्य सरल है, लेकिन अगर हमारे पास समष्टि तथा प्रतिदर्शों का आकार बड़ा हो तो ऊपर दी हुई विधि द्वारा मान निकालने के लिए सभी संभव प्रतिदर्शों पर योग करना एक कठिन कार्य हो सकता है। लेकिन विश्लेषण विधि के द्वारा, गणितीय प्रत्याशा प्रक्रिया के प्रयोग द्वारा निम्न सूत्र ज्ञात करना संभव है :

$$\text{Var}(\bar{P}) = \frac{P(1 - P)}{n} \times \frac{N - n}{N - 1}$$

$$= \frac{0.4 \times 0.6}{5} \times \frac{10 - 5}{10 - 1} = \frac{0.24}{9} = \frac{0.08}{3}$$

जैसा कि हमने पहले देखा था, $\sqrt{(N - n)/(N - 1)}$ परिमित समष्टि के लिए सांतत्य शुद्धि गुणक है। अब हम यह घोषणा कर सकते हैं कि N के आकार की समष्टि के लिए जिसमें समष्टि अनुपात p है, प्रतिदर्श अनुपात $\bar{p}$ के प्रतिचयन बंटन का, जब प्रतिदर्शों का आकार n हो, माध्य तथा प्रसरण इस प्रकार होंगे :

$$E(\bar{P}) = P$$

$$\text{Var}(\bar{P}) = \frac{P(1 - P)}{n} \times \frac{N - n}{N - 1}$$

जैसा कि प्रतिदर्श माध्यों के प्रतिचयन बंटन में होता है, यहां पर भी यह कहा जा सकता है कि जब प्रतिदर्श का आकार n बड़ा हो जाए तो $\bar{P}$ का प्रतिचयन बंटन उपगामी प्रसामान्य हो जाता है। व्यावहारिक नियम के रूप में जब प्रतिदर्श आकार $n \geq 25$ हो तो हम $\bar{P}$ के प्रतिचयन बंटन को प्रसामान्य मान सकते हैं।
(नोटः $\text{Var}(\bar{P})$ के वर्गमूल को $\bar{P}$ की मानक त्रुटि कहते हैं)

उदाहरण 15.4.5

एक समष्टि में 2, 3, 4, 5, 7 संख्याएं हैं। $(N = 5)$। समष्टि में विषम संख्याओं का अनुपात ज्ञात कीजिए।

उत्तर : दी हुई समष्टि में 5 में से 3 विषम संख्याएं हैं, अतः समष्टि अनुपात $p = 3/5$ है।

उदाहरण 15.4.6

समष्टि 2, 3, 4, 5, 7 में से $n=3$ के प्रतिदर्श बिना प्रतिस्थापन के चयन किए गए हैं। सभी संभावित प्रतिदर्शों को लिखिए।

उत्तर : संभावित प्रतिदर्श इस प्रकार हैं :

(2, 3, 4)	(3, 4, 5)
(2, 3, 5)	(3, 4, 7)
(2, 3, 7)	(3, 5, 7)
(2, 4, 5)	(4, 5, 7)
(2, 4, 7)	

उत्तर : प्रतिदर्श (2, 3, 4) में विषम संख्याओं का प्रतिदर्श अनुपात 1/3 है। इसी प्रकार प्रतिदर्श (2, 3, 5) में विषम संख्याओं का प्रतिदर्श अनुपात 2/3 है। सभी संभावित प्रतिदर्शों के लिए प्रतिदर्श अनुपात $\bar{p}$ इस प्रकार है :

1/3	2/3
2/3	2/3
2/3	1
1/3	2/3
1/3	
2/3	

अनुपात का प्रतिचयन बंटन

प्रतिदर्श अनुपात $\bar{P}$	बारंबारता f
1/3	3
2/3	6
1	1
योग	10

उदाहरण 15.4.8

उदाहरण 15.4.7 द्वारा यह प्रमाणित कीजिए कि अनुपात के प्रतिचयन बंटन का माध्य समष्टि अनुपात के बराबर है।

उत्तर : प्रतिचयन बंटन का माध्य

$$= \frac{1}{10}\left[\frac{1}{3} \times 3 + \frac{2}{3} \times 6 + 1 \times 1\right]$$

$$= \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

उदाहरण 15.4.5 में हमने $p = \frac{3}{5}$ परिकलित किया था। अतः $E(\bar{P}) = P$

उदाहरण 15.4.9

आप उदाहरण 15.4.7 में दी हुई सारणी द्वारा प्रसरण, सूत्र $\sigma^2 = \frac{1}{n} \Sigma f_i(x_i - \bar{x})^2$ के प्रयोग द्वारा ज्ञात कर सकते हैं। यहां पर $x_i = \bar{p}$ तथा $\bar{x} = p$ तथा $n = \Sigma f_i = 10$ है। इसका अन्य विकल्प निम्न सूत्र का प्रयोग है :

$$\text{Var}(\bar{p}) = \frac{p(1-p)}{n} \times \frac{N-n}{N-1} = \frac{3/5\,(1-3/5)}{3} \times \frac{5-3}{5-1}$$

$$= \frac{3/5 \times 2/5}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{25}$$

$$\text{मानक त्रुटि} = \sqrt{\text{Var}(\bar{p})} = +\sqrt{\frac{1}{25}} = \frac{1}{5}$$

2) अनुपात की मानक त्रुटि का सूत्र लिखिए ।

....

....

....

3) परिमित समष्टि शुद्धि क्या होती है ?

....

....

15,5 सारांश

इस इकाई में हमने समष्टि की प्रारंभिक इकाई तथा समष्टि प्राचल के आकलन के लिए प्रतिदर्श प्रतिदर्शज को परिभाषित किया है । तत्पश्चात् हमने यादृच्छिक चर तथा यादृच्छिक प्रतिचयन को समझने के लिए प्रतियचन तथा सांख्यिकीय अनुमिति की मूल अवधारणाओं का अध्ययन किया । अंत में, केन्द्रीय सीमा प्रमेय के सहजानुभूत आधार पर हमने माध्य तथा अनुपात के प्रतिचयन बंटनों की समझ प्राप्त की ज़िसके आधार पर इन प्रतिदर्शजों को समष्टि प्राचलों के आकलन के रूप में स्वीकार किया जा सकता है ।

15.6 शब्दावली

प्राचल : इसको समष्टि प्राचल भी कहा जाता है तथा यह समष्टि की सभी इकाइयों के मान का कोई फलन होता है । इसके उदाहरण समष्टि माध्य, समष्टि प्रसरण, समष्टि अनुपात आदि हो सकते हैं । यह ध्यान रखना आवश्यक है कि प्राचल, समष्टि को बनाने वाली सभी इकाइयों पर निर्भर होता है ।

समष्टि : यह सजीव तथा निर्जीव इकाइयों का समूह होता है, जोकि भौगोलिक स्थिति, समय-अवधि तथा अध्ययन के अंतर्गत अभिलक्षण से प्रेरित, जैसी सीमाओं में स्पष्ट रूप से परिभाषित होता है । समष्टि परिमित या अपरिमित हो सकती है ।

यादृच्छिक चर : ऐसा अभिलक्षण जिसके द्वारा लिए जाने वाले विभिन्न मानों के साथ उनकी प्रायिकताएं संलग्न होती हैं । एक चर X को यादृच्छिक चर कहा जाएगा अगर यह $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots, x_n$ मान लेता है तथा x_i के ये मान लेने की प्रायिकताएं क्रमशः $p_i, p_2, \ldots\ldots, p_n$ हैं ।

प्रतिदर्श : प्रतिदर्श समष्टि का उपसमुच्चय होता है । अतः यह उन इकाइयों का समूह भी होता है, जोकि समष्टि का भाग होती है । अगर समष्टि में N इकाइयां हैं तथा इससे n इकाइयों (n आवश्यक रूप में N से छोटा होता है) के प्रतिदर्श प्राप्त किए जाए तो हम समष्टि से $^{N}C_n$ संख्या में प्रतिदर्श (जब प्रतिदर्श में चयन की गई इकाई को अगली इकाई के चयन से पहले प्रतिस्थापित न किया जाए – इस प्रक्रिया को बिना प्रतिस्थापन प्रतिचयन कहते हैं) प्राप्त कर सकते हैं या (अगर चयन की गई इकाई को अगली इकाई के चयन से पहले प्रतिस्थापित कर दिया जाए – इस प्रक्रिया को प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन कहते हैं) प्रतिदर्शों की संख्या N^n होगी ।

प्रतिदर्शज : यह प्रतिचयन इकाइयों के सभी मानों का फलन होता है । प्रतिदर्श से प्राप्त मानों का समांतर माध्य प्रतिदर्शज का उदाहरण है, जबकि उसी अभिलक्षण का समष्टि द्वारा प्राप्त समांतर माध्य प्राचल का उदाहरण है । एक प्रतिदर्शज समष्टि के एक अंश द्वारा परिकलित किया जाता है । अतः इसका इसके अनुरूप प्राचल के बराबर होना आवश्यक नहीं ।

प्रतिचयन बंटन : चूँकि N के आकार की समष्टि से n आकार के बहुत से प्रतिदर्श ($^{N}C_n$ जब बिना

प्रतिचयन त्रुटि : जब प्रतिदर्श के आधार पर समष्टि के बारे में अनुमिति प्राप्त की जाती है तो इससे उत्पन्न त्रुटि को प्रतिचयन त्रुटि कहते हैं। प्रतिचयन त्रुटि समष्टि गणना में उत्पन्न नहीं होती क्योंकि यहां समष्टि का अध्ययन होता है।

15.7 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Agarwal, B.L., 1988 *Basic Statistics:* Wiley Eastern Limited, New Delhi.

Bowen, Earl K. and M.K. Starr, 1982. *Basic Statistics for Business and Economics:* Mc Graw-Hill Book Company, London.

Murthy, M.N., 1967, *Sampling Theory and Methods,* Statistical Publishing Society, Calcutta.

Nagar, A.L. and R.K. Das, 1985. : *Basic Statistics* Oxford University Press, New Delhi.

Spiegel, Murray R., 1985. *Theory and Problems of Statistics:* Schaum's Outline series. Mc Graw-Hill Book Company, New York.

कश्यप, ब्रजराज किशोर, 1980 *प्रायिकता एवं सांख्यिकी,* राजस्थान हिन्दी ग्रंथ अकादमी, जयपुर (अध्याय 8)

15.8 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) पूर्ण गणना की तुलना में प्रतिदर्श सर्वेक्षण समय, मुद्रा तथा मानव-शक्ति की आवश्यकता की दृष्टि से अधिक मितव्ययी होता है। सर्वेक्षण का उद्देश्य प्रत्येक इकाई पर सूचना प्राप्त करने की तुलना में कुछ संक्षिप्त प्रेक्षण प्राप्त करना हो सकता है। प्रतिदर्श की तुलना में पूर्ण गणना में, अप्रतिचयन त्रुटियों के कारण, अधिक त्रुटिपूर्ण परिणाम प्राप्त होने की संभावना होती है।

2) 15.2.2 के सूत्र देखिए। खंड 4 में दी हुई इन अवधारणाओं से आप पहले ही परिचित हैं

   (i) 35 (ii) 7 (iii) 5.2

3) आप सिक्का या पासा उछालने का उदाहरण दे सकते हैं। कोई और चर जिसके विभिन्न मानों के साथ उनकी प्रायिकताएं संलग्न हों, भी दिया जा सकता है।

4) 15.3.3 को पढ़िए। प्रत्येक प्रतिचयन इकाई की प्रतिदर्श में सम्मिलित किए जाने की प्रायिकता समान है। प्रत्येक प्रतिदर्श के चुने जाने की प्रायिकता भी समान है।

बोध प्रश्न 2

1) 2 संख्याओं के कुल प्रतिदर्शों (जोकि प्रतिस्थापन सहित प्राप्त किए गए हैं) की संख्या $N^n = 5^2 = 25$ है। ये प्रतिदर्श इस प्रकार हैं :

   (2,2) (2,3) (2,6) (2,8) (2,11
   (3,2) (3,3) (3,6) (3,8) (3,11)
   (6,2) (6,3) (6,6) (6,8) (6,11)
   (8,2) (8,3) (8,6) (8,8) (8,11)
   (11,2) (11,3) (11,6) (11,8) (11,11)

2) $\mu = 6.0$

बोध प्रश्न 3

यह आप स्वयं कीजिए।

15.9 पारिभाषिक शब्दावली

अभिनति	Bias
आकलन	Estimation
केन्द्रीय सीमा प्रमेय	Central Limit Theorem
निकष	Criteria
निवेश निर्गत प्रणाली	Input-Output System
प्रतिचयन बंटन	Sampling Distribution
प्रतिचयन सिद्धांत	Sumplug Theory
प्रतिचयन त्रुटि	Sampling Error
परिकल्पना	Hypothesis
मानक त्रुटि	Standard Error
सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श	Simple Random Sample

इकाई 16 सांख्यिकीय अनुमिति : आकलन तथा परिकल्पना जाँच

इकाई की रूपरेखा

16.0 उद्देश्य

इस इकाई में आकलन तथा परिकल्पना जाँच का विवरण दिया गया है। इसके अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित तथ्यों को समझने में समर्थ हो सकेंगे –

- सांख्यिकीय अनुमिति की तर्कसंगति प्रतिचयन पर किस प्रकार आधारित है,
- बिन्दु तथा अंतराल आकल प्राप्त करना जोकि बृहत् प्रतिदर्श प्रसामान्यता मान्यता के अंतर्गत विश्वास्यता अंतराल के प्रति अनभिनत तथा दक्ष होते हैं,

16.1 प्रस्तावना

जैसा कि आप जानते हैं, प्रायिकता प्रतिचयन का उद्देश्य समष्टि प्राचलों के प्रतिदर्श आकल प्राप्त करना है। अब हम यह जानने का प्रयास करेंगे कि क्या कोई ऐसा निकष स्थापित करना संभव है जिससे इन आकलों की वैधता की जांच की जा सके, तथा इनको समष्टि प्राचलों के सन्निकटन के रूप में स्वीकार किया जा सके। प्रतिदर्शों से वैध आकलन प्रक्रिया के ये निकष सांखियकीय अनुमिति विषय का एक हिस्सा है जिसको आकलन कहते हैं। इसके दूसरे भाग में हम प्रायिकता बंटनों द्वारा, प्रेक्षित मानों के समुच्चय से आकलित प्रतिदर्शज के बारे में परिकल्पना जांच की विधियों के बारे में अध्ययन करते हैं। इस परिकल्पना का संबंध अज्ञात समष्टि प्राचल के प्रतिदर्श आकल को स्वीकार करने, या ज्ञात प्राचल तथा प्रतिदर्श आकल में विचल की सीमा, या दो प्रतिदर्शों के आकलों में अंतर को स्वीकार करने (जोकि दोनों एक ही समष्टि से प्राप्त किए गए हैं या नहीं) आदि, से होता है। अब हम सांख्यिकीय अनुमिति के इन दोनों पहलुओं का बारी-बारी से विवेचन करेंगे।

16.2 आकलन की कुछ मूल अवधारणाएं

पहले हम आकलन से संबंधित कुछ मूल अवधारणाओं को परिभाषित करेंगे।

16.2.1 बिन्दु आकल

आकलक एक प्रतिदर्श प्रतिदर्शज होता है जोकि समष्टि के अज्ञात प्राचल के आकल के लिए प्रयोग होता है। बिन्दु आकल, आकलक का अकेला मान होता है। उदाहरण के लिए, प्रतिदर्श माध्य समष्टि माध्य μ का आकलक है। हम पहले से ही प्रतिदर्श माध्य $(\bar{x})$ तथा प्रतिदर्श अनुपात $(\bar{p})$ को क्रमशः समष्टि माध्यम (μ) तथा समष्टि अनुपात (p) के आकलक के रूप में जानते हैं। इसी प्रकार हम प्रतिदर्श मानक विचलन (s_x) को अज्ञात समष्टि मानक विचलन (σ_x) के आकलक के रूप में प्रयोग कर सकते हैं। प्रतिदर्श मानक विचलन s_x की परिभाषा इस प्रकार है

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma\,(x_i - \bar{x})^2}{n-1}} \qquad \text{...(16.1)}$$

जहाँ पर $\bar{x}$ = प्रतिदर्श माध्य
n = प्रतिदर्श का आकार

यहां पर यह ध्यान दीजिए की इस सूत्र में भाजक n–1 है जोकि समष्टि मानक विचलन σ_x के सूत्र में प्रयोग भाजक (N) से भिन्न है। इसका कारण यह है कि चाहे हमारे पास n स्वतंत्र प्रतिदर्श प्रेक्षण हैं, लेकिन s_x का परिकलन करने के लिए हमें पहले $\bar{x}$ आकलित करना पड़ता है, जब हम $\bar{x}$ को दिया हुआ मान लेते हैं तो एक स्वतंत्र प्रेक्षण कम हो जाता है। सूत्र में भाजक की संख्या उन स्वतंत्र प्रेक्षणों की संख्या के बराबर होती है जिनके ऊपर प्रतिदर्शज आधारित हैं। इस प्रकार हम n से भाग न देकर (n–1) से भाग करते हैं। हम बहुत शीघ्र इस बात पर पुनः विचार करेंगे।

उदाहरण 16.1

अगर हमारे पास 6 संख्याओं का एक यादृच्छिक प्रतिदर्श 1, 2, 4, 5, 7, 11 है। इसका माध्य

$\bar{x} = \dfrac{\Sigma x_i}{n} = \dfrac{30}{6} = 5$ तथा $s_x = 3.63$ है जिसको आप परिकलित करके जाँच कर सकते हैं।

ये क्रमशः समष्टि माध्य तथा समष्टि मानक विचलन के बिन्दु आकल हैं।

अब याद कीजिए कि प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ होती है जब कि प्रतिदर्श का आकार समष्टि

यहां पर यह ध्यान दीजिए कि छायायित क्षेत्रफल, अंतराल आकल में जोकि प्रतिदर्श प्रतिदर्शज (माध्य) के दोनों ओर ± 1.96 है, समष्टि प्राचल (माध्य) होने की प्रायिकता है, क्योंकि प्रतिदर्श माध्य 95% बार इस परिसर में होगा। अन्य शब्दों में समष्टि माध्य के इस परिसर से बाहर रहने की प्रायिकता केवल (1.95 = .05) 5% है क्योंकि प्रसामान्य वक्र के नीचे कुल प्रायिकता इकाई है। इस प्रकार अगर किसी एक प्रतिदर्श मानों के समुच्चय द्वारा प्राप्त प्रतिदर्श माध्य इस परिसर में है तो हम 95% विश्वास्यता के साथ यह कह सकते हैं कि प्रतिदर्श मान, समष्टि मान का अनभिनता तथा दक्ष आकल है, जबकि इसके द्वारा अनभिनतता तथा दक्षता के अन्य निकल सन्तुष्ट किए हुए हो। हम यह इसलिए कह सकते हैं कि 9% परिस्थितियों में समष्टि प्राचल के इस विश्वास्यता अन्तराल के बाहर होने की संभावना है। विश्वास्यता स्तर या विश्वास्यता गुणांक C (0.95 या 0.99) समष्टि प्राचल के बारे में हमारे द्वारा किए गए सत्य कथनों के अनुपात को निरूपित करता है जोकि माध्य के दोनों तरफ ± 1.96 या ± 2.58 अंतराल के द्वारा प्रस्तावित होते हैं, तथा जब प्रतिदर्शज को मानक प्रसामान्य विचल के रूप में मापा गया हो। संक्षेप में प्रतिदर्श आकल $\bar{x}$ के द्वारा हम प्राचल μ का ऐसा विश्वास्यता अंतराल ज्ञात करते हैं जिसके द्वारा हम 95% विश्वास्यता के साथ यह कह सकते हैं कि

$\bar{x} - 1.96\,\sigma_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + 1.96\,\sigma_{\bar{x}}$ होगा।

यहां पर यह ध्यान रहे कि, प्रसामान्य वक्र के नीचे कुल क्षेत्रफल इकाई है तो पूरक घटना की प्रायिकता अर्थात् समष्टि प्राचल के विश्वास्यता अंतराल में न रहने की घटना की प्रायिकता 1–C के बराबर होगी।

उदाहरण : एक प्रसामान्य समष्टि का मानक विचलन 10 है। एक 25 इकाइयों के यादृच्छिक प्रतिदर्श का माध्य 50 है। समष्टि माध्य का 95% तथा 99% विश्वास्यता अंतराल आकलों का निर्माण कीजिए।

हल: दी हुई सूचना इस प्रकार है

$\sigma_x = 10, n = 25, \bar{x} = 50$

पहले हम प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि ज्ञात करते हैं

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{10}{\sqrt{25}} = 2$$

अतः समष्टि माध्य का 95% विश्वास्यता अन्तराल

$\bar{x} - 1.96\,\sigma_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + 1.96\,\sigma_{\bar{x}}$

$50 - 1.96 \times 2 \le \mu \le 50 + 1.96 \times 2$

$46.1 \le \mu \le 53.9$ है,

अतः हम 95% विश्वास्यता सहित यह कह सकते हैं कि μ का मान 46.1 तथा 53.9 के बीच होगा। इस उदाहरण में 46.1 निम्न विश्वास्यता सीमा तथा 53.9 ऊपरी विश्वास्यता सीमा है।

इसी प्रकार 99% विश्वास्यता अंतराल

$\bar{x} - 2.58\,\sigma_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + 2.58\,\sigma_{\bar{x}}$ ...(16.6)

या $44.8 \le \mu \le 55.2$ है।

इन दोनों अंतरालों की तुलना करने पर हम यह पाते हैं कि विश्वास्यता स्तर अधिक होने पर विस्तृत अन्तराल आकल प्राप्त होता है और इस प्रकार आकल की परिशुद्धता में कमी आती है। वास्तव में आप 100% विश्वास के साथ कह सकते हैं कि $-\infty < \mu < \infty$ लेकिन इस कथन में कोई परिशुद्धि नहीं है।

इस उदाहरण द्वारा यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि समष्टि प्राचल के प्रतिदर्श आकल की वैधता की जांच करने के लिए हमें प्रतिदर्श प्रतिदर्शज तथा इसकी मानक त्रुटि तथा प्रतिदर्श आकार, तीनों पता होने चाहिए, अंतराल का निर्माण कर सकें। मानक त्रुटि प्राप्त करने के लिए हमें समष्टि मानक विचलन तथा प्रतिदर्श का आकार ज्ञात होना चाहिए। कभी-कभी हमें समष्टि माध्य तथा समष्टि मानक विचलन दिए होते हैं। इनके मान पता न होने पर हम इनके प्रतिदर्श आकलों को प्रयोग करते हैं। उपरोक्त उदाहरण में समष्टि माध्य दिया हुआ नहीं है, लेकिन समष्टि मानक विचलन दिया हुआ है, जिसके द्वारा हम माध्य $\bar{x}$ की मानक त्रुटि प्रत्यक्ष सूत्र के द्वारा परिकलित कर लेते हैं।

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{x}}$$

बोध प्रश्न 1

1) a) μ के अन्तराल आकल $\bar{x} \pm z \cdot \sigma_{\bar{x}}$ का सैद्धांतिक आधार क्या है? यहां पर z एक मानक प्रसामान्य विचल है।

b) 95% विश्वास्यता स्तर का क्या अर्थ है ?

c) विश्वास्यता स्तर तथा अन्तराल की चौड़ाई के बीच क्या संबंध है ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

2) a) निम्नलिखित दोनों में से कौन सा, अज्ञात समष्टि मानक विचलन का अनभिनत आकल है।

i) $\sqrt{\frac{1}{n} \Sigma (x_1 - \bar{x})^2}$

ii) $\sqrt{\frac{1}{n-1} \Sigma (x_1 - \bar{x})^2}$

b) क्या सूत्र $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{x}}$, निम्नलिखित परिस्थितियों में वैध है ?

i) $n = 10$, तथा $N = 50$

ii) $n = 10$, तथा $N = 5000$

....

....

3) a) निम्नलिखित विश्वास्यता स्तरों के लिए Z का मान ज्ञात कीजिए :

i) 91 प्रतिशत

ii) 73 प्रतिशत

iii) 86 प्रतिशत

b) निम्नलिखित आंकड़ों द्वारा विश्वास्यता अन्तराल का निर्माण कीजिए: $\bar{x} = 48$, $\sigma_x = 9$, $x = 36$ तथा विश्वास्यता स्तर = 90%

....

....

....

....

....

....

....

....

4) एक कागज बनाने वाली कम्पनी एक नई मशीन द्वारा एक रिम कागज को उत्पादित करने में लगे औसत समय का आकलन करना चाहती है। एक 36 रिम के यादृच्छिक प्रतिदर्श में औसत मशीन समय 1.5 मिनट प्रति रिम था। समष्टि मानक विचलन 0.30 दिया हुआ है। 95% विश्वास्यता स्तर के अंतराल आकल का निर्माण कीजिए।

....

....

....

....

....

....

5) एक चाय की दुकान का मालिक एक ग्राहक द्वारा किया जाने वाला औसत व्यय ज्ञात करना चाहता है। 100 ग्राहकों के प्रतिदर्श में प्रत्येक का औसत व्यय 3.50 रुपये है तथा प्रतिदर्श मानक विचलन 0.75 रुपये है। 90% विश्वास्यता स्तर सहित वास्तविक औसत व्यय का आकल कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

16.4 लघु प्रतिदर्श : स्टूडैन्ट टी बंटन

अगर समष्टि मानक विचलन ज्ञात न हो तथा न ही समष्टि माध्य ज्ञात हो तो हम प्रतिदर्श माध्य $\bar{x}$ तथा प्रतिदर्श मानक विचलन को प्रयोग करते हैं,

$$s_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x_1 - \bar{x})^2}{n - 1}},$$

यह हमें इससे पहले एकक से पता है।

अब $\bar{x}$ की मानक त्रुटि $s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$, तभी हम मानक विचल को इस प्रकार परिभाषित करते हैं

$$\boxed{t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}} \qquad \ldots(16.7)$$

लेकिन यह लघु प्रतिदर्श आकार < 30 के लिए प्रसामान्य बंटित नहीं होता, तथा हम प्रसामान्य प्रायिकता सारणी का प्रयोग नहीं कर सकते। इस परिस्थिति में विश्वास्यता अंतराल को परिभाषित करने के लिए क्या करना होगा ?

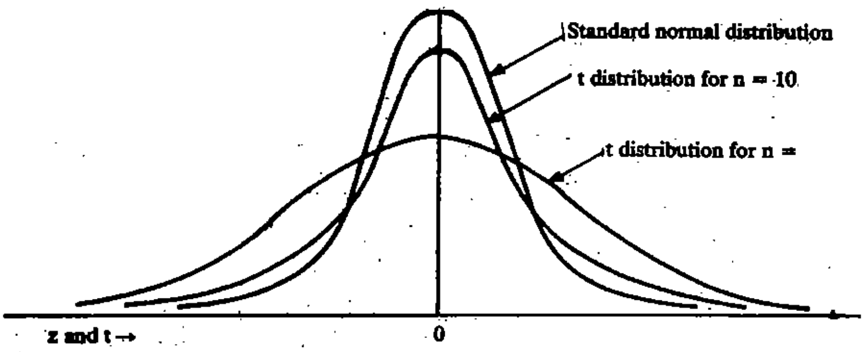
डब्ल्यू. एस. गौसेट, जो कि गिनीस ब्रीवरीज़, डबलिन, इरीलैंड में कर्मचारी थे, ने टी के इस बंटन का अध्ययन किया तथा इसके परिणामों को उपनाम ''स्टूडैन्ट'' के अंतर्गत प्रकाशित किया। इस शक्तिशाली बंटन को, जो अप्रसामान्य परिस्थितियों को हल करने में सहायक है, विशेषकर उन प्रतिदर्श आकारों के लिए जबकि प्रसामान्यता की मान्यता संतुष्ट न हो, स्टूडैन्ट टी बंटन कहते हैं। प्रसामान्य तथा स्टूडैन्ट टी बंटन की तुलना बड़ी प्रतिदर्श में इस बंटन द्वारा हल किया जाने

16.4.1 टी बंटन

निम्न आकृति 16.2, जिसमें प्रसामान्य तथा टी बंटन का अंशदान है, यह प्रदर्शित करता है कि :

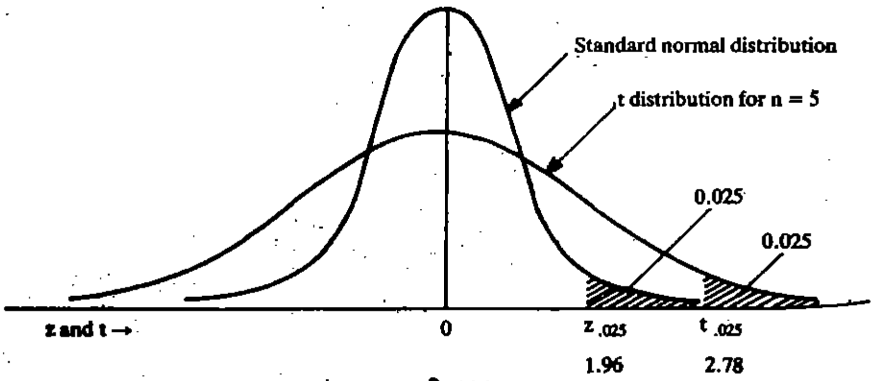
(i) जैसे प्रतिदर्श आकार में वृद्धि होती है, टी बंटन की प्रायिकता क्षेत्रफल वक्र और अधिक नुकीली हो जाती है तथा अन्त में प्रसामान्य बंटन की ओर अभिसरित हो जाती है।

(ii) टी बंटन के पुच्छ-अन्त प्रसामान्य वक्र के पुच्छ-अन्तों से ऊँचे रहते हैं।



आकृति 16.2

लघु प्रतिदर्श टी बंटन तथा बृहत् प्रतिदर्श प्रसामान्य बंटन में भेद करने वाली ये विशेषताएं इस बात की ओर संकेत करती हैं कि उसी विश्वास्यता स्तर के लिए टी बंटन का विश्वास्यता अन्तराल, प्रसामान्य बंटन के विश्वास्यता अन्तराल से बड़ा होगा। इसकी व्याख्या निम्न आकृति (16.3) में की गई है जोकि यह दर्शाती है कि, 95% विश्वास्यता अन्तराल, या 2.5% एकपक्षी पुच्छ-अन्त जोकि एक मान के विश्वास्यता अन्तराल टी बंटन के लिए 2.78 तक चौड़ा हो जाता है, जबकि दोनों शून्य से मापे गए मानक विचल हों जिनके मानक विचलन इकाई हो।



आकृति 16.3

यह आकृति 16.3 से स्पष्ट है कि उसी दाईं पुच्छ-अन्त के लिए जोकि 2.5% प्रायिकता स्तर $\left(\frac{\alpha}{2} = 0.025\right)$ के लिए क्षेत्रफल को व्यक्त करती है, मानकीकृत t का मान 2.78 है तथा मानकीकृत प्रसामान्य विचल (z) का मान 1.96 है।

प्रसामान्य बंटन अपरिमित समष्टि, या बृहत् समष्टि जोकि व्यवहारिक रूप में अपरिमित है, पर आधारित होता है। इसके विपरीत टी बंटन अधिकतर लघु प्रतिदर्श आकार, जोकि 30 से कम हो, पर आधारित होता है, इसलिए इस प्रायिकता बंटन वक्र के नीचे क्षेत्रफल, जोकि प्रसामान्य वक्र क्षेत्रफल के तुल्य है, प्रसामान्य क्षेत्रफल तालिका की तरह मानकीकृत विचल के अनुसार नहीं होते, बल्कि ये प्रतिदर्श आकार (स्वतंत्रता की कोटि) के अनुसार होते हैं। टी के मान निस्संदेह, सममित बंटन के एक तरफ पुच्छ-अन्त क्षेत्रफल के अनुरूप होते हैं।

पहले दिए गए विश्वास्यता अंतराल पर विवेचन को याद कीजिए, जहां पर हमने $\alpha = 1-c$ को पुच्छ-अन्त

होगा कि प्रतिदर्श मानक विचलन s_x के आकल के लिए हमने प्रतिदर्श आकार n के स्थान पर n-1 को भाजक लिया था, जोकि स्वतंत्रता की कोटि है तथा टी का आकलित मान इन्हीं पर आधारित है। इसके साथ ही माध्य के परिकलन पर विवेचन को याद कीजिए जहां पर हमने यह देखा था कि एक चर माध्य $\bar{x}$ के परिकलित होने पर हम इसको दिया हुआ मान लेने पर हम प्रतिदर्श में n स्वतंत्र प्रेक्षणों में से एक प्रेक्षण की स्वतंत्रता कम कर देते हैं। हम यह कह सकते हैं कि प्रश्न में यादृच्छिक चर जिनके n स्वतंत्र मान हैं, ने एक स्वतंत्र मान के लेने की संभावना को समाप्त कर दिया है, अर्थात् n स्वतंत्र कोटियों में से एक कोटि खो दी गई है।

अब हम प्रतिदर्श आकार n पर आधारित टी के मान की स्वतंत्रता की कोटि को $\nu = n-1$ (ν एक ग्रीक अक्षर जिसको 'न्यू' पुकारा जाता है) द्वारा सूचित करेंगे, क्योंकि t का आकल s_x के आकल पर आधारित है, तथा s_x को आकलित करने में हमने प्रतिदर्श माध्य $\bar{x}$ को दिया हुआ माना है, इस प्रकार हमने एक स्वतंत्रता की कोटि को खो दिया है। टी के मानकीकृत मानों को स्वतंत्रता की कोटि की संख्या के अनुसार विभिन्न सार्थकता स्तरों के लिए सारणीबद्ध किया गया है, जो कि एक पुच्छ-अंत क्षेत्रफल को निरूपित करती है। स्वतंत्रता की कोटि के विचार का स्पष्टीकरण निम्नलिखित उदाहरण द्वारा किया जा सकता है। मान लिया पाँच संख्याएँ $-2, 0, 2, 5$ तथा 8 हैं, जिनका योग 13 है तथा माध्य $\frac{13}{5}$ है। अब अगर हम पहली चार संख्याएँ $-2, 0, 2, 5$ लेते हैं तब योग 13 रहने $\left(\text{या माध्य } \frac{13}{5}\right)$ पर पाँचवीं संख्या केवल 8 ही होगी। इसका अर्थ यह है कि जैसे ही संख्याओं का योग या माध्य निश्चित हो जाता है तो हम अंतिम संख्या का चुनाव स्वतंत्र रूप से नहीं कर सकते, जोकि यहां पर 8 है। इस भाव में मानक विचलन के परिकलन में हम स्वतंत्रता की एक कोटि को खो देते हैं क्योंकि इसके परिकलन में हम $\bar{x}$ को दिया हुआ मानते हैं। टी का मान $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$ होता है जहां पर $s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$ होता है।

16.4.2 टी सारणी : विश्वास्यता अंतराल को किस प्रकार ज्ञात करना है ?

सारणी में टी के मान स्वतंत्रता की कोटि के अनुसार दिए होते हैं। यह ध्यान दीजिए कि टी मानों की सारणी प्रायः 1 से 30 तक स्वतंत्रता कोटि के लिए दी होती है। इसका कारण यह है कि 30 से अधिक प्रतिदर्श आकार के लिए टी बंटन बड़ी तीव्रता से प्रसामान्यता को अभिसरित होता है। यह भी ध्यान दीजिए कि टी बंटन तालिका में केवल एक पुच्छ-अंत क्षेत्रफल दिए हुए हैं, जबकि एक विश्वास्यता अंतराल प्रायः इस प्रकार होता है कि इसमें माध्य के दोनों तरफ प्रसरण बराबर हो, इस प्रकार एक प्रतिदर्श मान के विश्वास्यता अंतराल के बाहर होने की प्रायिकता में दोनों तरफ पुच्छ-अंत सम्मिलित होते हैं। अतः टी सारणी से मान प्राप्त करने के लिए, जिसमें केवल एक पुच्छ क्षेत्रफल दिए हुए हों, हमें यह याद रखना है कि अगर हमारा विश्वास्यता गुणांक c 95 प्रतिशत है अर्थात् $\alpha = 1-c = 0.05$ है तो हमें t का मान पुच्छ-अंत क्षेत्रफल $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$ के लिए तथा दी हुई स्वतंत्रता कोटि की संख्या के लिए देखना होगा। टी के इस मान को प्रायः $t_{\alpha/2}, \nu$ से सूचित किया जाता है, जिसका अर्थ पुच्छ-अंत क्षेत्रफल $\frac{\alpha}{2}$ तथा स्वतंत्रता कोटि ν के लिए टी का मान होता है। उदाहरण के लिए अगर हमारा विश्वास्यता गुणांक 95 प्रतिशत है ($c=0.95$), $\alpha = 1-c = 1-0.95 = 0.05$ तथा $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$ होगा।

अगर प्रतिदर्श आकार $n=16$ है तो स्वतंत्रता की कोटि $\nu = 16-1 = 15$ होगी। आप ही सारणी द्वारा यह जांच कर सकते हैं कि $t_{0.025,\,15} = 2.13$ है। प्रतीकात्मक रूप में विश्वास्यता अंतराल को इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$P\left[\bar{x} - t_{\alpha/2},\nu.\frac{s_x}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\alpha/2},\nu.\frac{s_x}{\sqrt{n}}\right] = 0.95$$

जहां पर $\bar{x}$ = प्रतिदर्श माध्य, $\alpha = 1 - c$

n = प्रतिदर्श आकार, $\nu = n - 1$ (स्वतंत्रता की कोटि)

s_x = प्रतिदर्श मानक विचलन, तथा μ = अज्ञात समष्टि माध्य।

उदाहरण

किए, ये मान 8, 7, 10, 15, 11, 6, 8, 5, 13, 12 हैं। विश्वास्यता गुणांक 95 प्रतिशत लेकर विश्वास्यता अंतराल के प्रयोग द्वारा प्रतिदिन दूषित गैस के स्राव की औसत मात्रा आकलित कीजिए।

हल

सर्वप्रथम हम प्रतिदर्श माध्य को परिकलित करते हैं।

$$\bar{x} = \frac{8+7+10+15+11+6+8+5+13+12}{10} - \frac{95}{10} = 9.5 \text{ किलोग्राम प्रतिदिन}$$

अब $s_x = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$

हमारे प्रतिदर्श के लिए

$$s_x = \sqrt{\frac{(8-9.5)^2+(7-9.5)^2+(10-9.5)^2+\ldots+(13-9.5)^2+(12-9.5)^2}{10-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{94.5}{9}} = 3.24 \text{ किलोग्राम प्रतिदिन}$$

विश्वास्यता स्तर 95 प्रतिशत है, इसलिए $c = 0.95$ तथा

$\alpha = 1 - c = 1 - 0.95 = 0.05$

$\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{0.05}{2} = 0.025$

स्वतंत्रता की कोटि $\nu = n-1 = 10 - 1 = 9$

सारणी द्वारा $t_{\alpha/2,\,\nu} = t_{0.025,\,9} = 2.26$ (यह सारणी खंड के अंत में दी गई है)

अतः विश्वास्यता अंतराल

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,\,\nu}\frac{s_x}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + t_{\alpha/2,\,\nu}\frac{s_x}{\sqrt{n}} \qquad \ldots(16.8)$$

$\bar{x}$, s_x, $t_{\alpha/2,\,\nu}$ तथा n का मान रखने पर

$$9.5 - (2.24)\frac{3.25}{\sqrt{10}} \le \mu \le 9.5 + (2.26)\frac{3.24}{\sqrt{10}}$$

या $9.5 - 2.3 \le \mu \le 9.5 + 2.3$

या $7.2 \le \mu \le 11.8$

परिणामतः हम 95 प्रतिशत विश्वास्यता से कह सकते हैं कि प्रदूषित गैसों का औसत स्राव 7.2 व 11.8 किलोग्राम प्रतिदिन के बीच है।

इस उदाहरण में अगर हमें समष्टि मानक विचलन दिया हुआ होता, मान लिया यह 3.24 किलोग्राम प्रतिदिन है, तो हम $t=2.26$ के स्थान पर $z_{0.025} = 1.96$ का प्रयोग करते। इस परिस्थिति में हमारे परिणाम का परिशुद्धि स्तर अधिक होता (अर्थात् अंतराल छोटा होता), यह अंतराल $7.5 \le \mu \le 11.5$ है। सामान्य तौर पर हम यह कह सकते हैं कि σ_x का मान ज्ञात होने पर μ के अंतराल आकलों का परिशुद्धि स्तर, उस परिस्थिति की तुलना में जब σ_x न दिया हो तथा इसे प्रतिदर्श द्वारा आकलित किया जाय, अधिक होता है।

यह बात भी ध्यान रहनी चाहिए कि इसी प्रकार के तर्क द्वारा समष्टि अनुपात का विश्वास्यता अंतराल भी आकलित किया जा सकता है। ऐसा माध्य की परिस्थिति में किया गया था। अब हम प्रतिदर्श अनुपात $\hat{p}$ समष्टि अनुपात p तथा प्रतिदर्श अनुपात की मानक त्रुटि का आकल $s_p = \sqrt{\dfrac{\hat{p}\hat{q}}{n}}$ सूत्र में प्रतिस्थापित कर सकते हैं। समष्टि अनुपात का विश्वास्यता अंतराल इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$$\boxed{\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}} \le p \le \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}} \qquad \ldots(16.9)$$

जहां पर $\hat{p}$ = प्रतिदर्श में सफलताओं का अनुपात

यह ध्यान दीजिए कि ऊपर लिखा हुआ अंतराल व्यंजक का वही रूप है जो कि μ के आकलन में था, लेकिन अब हमने x के स्थान पर p का प्रयोग किया है तथा $s_{\bar{x}} = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$ के स्थान पर $s_p = \sqrt{\frac{pq}{n}}$ का प्रयोग किया है।

16.4.3 प्रसामान्य/स्टूडेंट टी का कब प्रयोग किया जाय

प्रायः हमें न तो समष्टि प्राचलों का मान ज्ञात होता है तथा न हीं हमें यह विश्वास होता है कि समष्टि का बंटन प्रसामान्य है। लेकिन, हम यह जानते हैं कि प्रतिदर्श आकार के 30 से बड़ा होने पर, प्रतिदर्श माध्य का बंटन लगभग प्रसामान्य होता है चाहे समष्टि का बंटन प्रसामान्य न भी हो। हम यह भी जानते हैं कि चाहे समष्टि अप्रसामान्य भी हो तो $n < 30$ के लिए टी बंटन उन समष्टियों के लिए, जो एक बहुलकी है (अर्थात् केवल एक शिखर वाला), विश्वास्यता अंतराल का अच्छा सन्निकटन प्रदान करता है। अंत में, जब $n > 30$ हो तो टी बंटन बड़ी तीव्रता से प्रसामान्यता की ओर उपगामी होता है। इन धारणाओं के आधार पर जब न तो μ तथा न ही σ_x दिया हुआ हो तो, हम व्यवहारिक नियम बना सकते हैं, जब $n > 30$ हो तो को प्रतिदर्श मानक विचलन s_x से आकलित कीजिए, लेकिन समष्टि माध्य के विश्वास्यता अंतराल के निर्माण के लिए प्रसामान्य विचल (z का मान) का प्रयोग कीजिए। जब प्रतिदर्श आकार $n < 30$ हो तो टी सारणी का प्रयोग कीजिए। अगर यह ज्ञात हो कि समष्टि प्रसामान्य है तथा σ_x भी दिया हुआ है तो कोई भी प्रतिदर्श आकार होने पर प्रसामान्य विचल z तालिका का प्रयोग करें, चाहे समष्टि माध्य अज्ञात हो तथा इसका आकलन प्रतिदर्श द्वारा किया जाना हो।

यहां पर ध्यान देना आवश्यक है कि टी बंटन की ऊपर दी हुई विशेषताओं तथा इसकी व प्रसामान्य बंटन की आकृतियों की तुलना द्वारा हमें यह जानकारी है कि उसी विश्वास्यता स्तर के लिए टी बंटन द्वारा प्राप्त विश्वास्यता अंतराल प्रसामान्य बंटन द्वारा प्राप्त अंतराल से चौड़ा होता है। अतः अगर अंतराल का परिसर आकल की परिशुद्धता का सूचक है तो स्पष्टतः उसी विश्वास्यता स्तर के लिए बड़ा प्रतिदर्श आकार अधिक अच्छा रहता है, क्योंकि इसके द्वारा हमें प्रसामान्य बंटन का सन्निकटन प्राप्त होता है। हम इन विचारों का प्रयोग बाद में इस प्रश्न के उत्तर के लिए करेंगे : किसी पूर्व निर्धारित विश्वास्यता अंतराल परिसर तथा निश्चित विश्वास्यता स्तर को संतुष्ट करने के लिए प्रतिदर्श का आकार कितना बड़ा होना चाहिए ?

बोध प्रश्न 2

1) टी बंटन तथा प्रसाभान्य बंटन सारणियों के निर्माण में दो अंतरों का जिक्र कीजिए।

....
....
....
....
....
....
....
....

2) "स्वतंत्रता की कोटि" किसे कहते हैं ? जब प्रतिदर्श प्रेक्षणों की संख्या n हो तो प्रतिदर्श मानक विचलन की स्वतंत्रता की कोटि $n-1$ क्यों होती है ?

....
....
....
....
....
....

3) निम्नलिखित प्रत्येक परिस्थितियों में समष्टि माध्य के आकलन के लिए कौन-कौन से सूत्र हैं। (मान लीजिए कि समष्टि का आकार अपरिमित है।)

क) $n > 30$ σ ज्ञात है।
ख) $n > 30$ σ अज्ञात है।
ग) $n < 30$ σ ज्ञात है।
घ) $n < 30$ σ अज्ञात है।

....
....
....
....

4) निम्नलिखित प्रतिदर्श आकारों तथा विश्वास्यता स्तरों के लिए विश्वास्यता अंतराल के निर्माण के लिए उपयुक्त टी के मान ज्ञात कीजिए –

क) $n = 5$, 99%
ख) $n = 18$, 99%
ग) $n = 16$, 95%
घ) $n = 10$, 90%

....
....
....
....

5) एक बड़ी समष्टि से लिया गया 8 प्रेक्षणों का प्रतिदर्श निम्नलिखित है :
12.1, 11.9, 12.4, 12.3, 11.9, 12.1, 12.4, 12.1

क) माध्य ज्ञात कीजिए
ख) समष्टि मानक विचलन आकलित कीजिए
ग) माध्य का 90% विश्वास्यता अंतराल निर्मित कीजिए।

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

16.5 परिकल्पना की जांच

संबंध के बारे में परिकल्पना को स्वीकार/अस्वीकार करने की विधि को सूत्रबद्ध किया जा सके। हम यह पहले बता चुके हैं कि यह सांख्यिकीय अनुमिति का दूसरा महत्वपूर्ण पक्ष है, जिसमें हमें यह निर्णय करना होता है कि क्या एक प्रतिदर्श प्रतिदर्शज (उदाहरण के लिए) को समष्टि प्राचल का सन्निकटन लिया जा सकता है, या क्या एक प्रतिदर्शज के दो प्रतिदर्श मान एक ही समष्टि से हैं, इत्यादि।

16.5.1 टाइप I तथा टाइप II त्रुटियाँ

ऊपर दिए विवेचन में, जहाँ पर हमने दिए हुए विश्वास्यता स्तर या विश्वास्यता गुणांक के लिए विश्वास्यता अंतराल की अवधारणा का अध्ययन किया था, हमारी जानकारी, किसी कथन की सत्यता की प्रायिकता तथा इसकी विपरीत परिस्थिति अर्थात् किसी कथन की प्रायिकता जबकि वह वास्तव में असत्य है ($\alpha = 1-c$), से हुई थी। क्योंकि हम अनिश्चितता तथा सन्निकटन के क्षेत्र में हैं, इसलिए हमारे लिए यह सदा संभव है कि हम किसी परिकल्पना को स्वीकार करने की जोखिम उठा लें जबकि वास्तव में यह असत्य है। या इसको अस्वीकार कर दें जबकि यह वास्तव में सच है। अगर हम किसी निश्चित परिस्थिति में जिसकी प्रायिकता इकाई हो, कार्य कर रहे हैं तो यह परिस्थिति कभी नहीं आती। लेकिन, प्रायिकता की अवधारणा पर विवेचन को याद करने पर, हमें यह ज्ञात है कि प्रायिकता का इकाई के बराबर होना सभी घटनाओं, परिणामों के घटित होने की निश्चितता को व्यक्त करता है। लेकिन अधिकतर हमारा सामना कुछ समप्रायिक घटनाओं की प्रायिकता से होता है जो किसी विशेष प्रकार की घटना के अनुकूल हो, इस परिस्थिति में बाद की घटना का पहली घटना में अंश एक से कम होता है। इसलिए, अनिवार्यतः एक पूरक घटना/परिणाम यानी नकारात्मक $A(\bar{A})$ होगी। इन दोनों की A या $\bar{A}$ की प्रायिकता इकाई के बराबर होगी। अतः जब हम किसी घटना/परिणाम के बारे में कोई प्रायिकतात्मक कथन करते हैं, तो हम एक निश्चित प्रायिकता कोटि/विश्वास सहित उस परिस्थिति के बारे में केवल एक परिकल्पना को स्वीकार कर रहे होते हैं, या हम परिकल्पना को अस्वीकार करने की गलती कर सकते हैं जबकि वास्तव में वह सच है। हमारे किसी परिकल्पना को स्वीकार/अस्वीकार करने के अनुसार एक निश्चित मार्ग प्रशस्त हो सकता है, जिसके दो प्रकार से त्रुटिपूर्ण होने की संभावना होती है। इन त्रुटियों को टाइप I तथा टाइप II त्रुटियाँ कहा जाता है।

मान लिया आज के दिन के मौसम के पूर्वानुमान के अनुसार एक निश्चित प्रायिकता कोटि सहित वर्षा होने वाली है। आप पूर्वानुमान को सच मान कर छाता ले जाते हैं। लेकिन आप जानते हैं कि वर्षा हो भी सकती है या नहीं भी। इसके अतिरिक्त यह भी हो सकता है कि आप छाता न लेकर जाए तथा वर्षा हो जाए।

इन संभावनाओं को निम्नलिखित तालिका में दिखाया गया है –

	घटना/परिणाम	
कार्य	वर्षा का दिन R	साफ दिन $\bar{R}$
छाता ले जाता है (A)		टाइप II त्रुटि
छाता नहीं ले जाता ($\bar{A}$)	टाइप I त्रुटि	

अतः ऊपर दी हुई प्रायिकता सारणी में अगर व्यक्ति वर्षा के पूर्वानुमान की परिकल्पना को स्वीकार न करके छाता ले जाता लेकिन वर्षा हो जाती है तो वह टाइप I त्रुटि करता है, तथा अगर वर्षा के पूर्वानुमान की परिकल्पना को स्वीकार करके छाता ले जाता है लेकिन अगर दिन साफ रहता है तो वह टाइप II त्रुटि करता है। इस प्रकार किसी प्रायिकतात्मक परिकल्पना के लिए हम दोनों में से किसी भी प्रकार की त्रुटि कर सकते हैं।

16.5.2 "निराकरणी परिकल्पना"

अपने परिचित प्रतिचयन के प्रश्नों पर पुनः विचार करने पर हम यह जानना चाहेंगे कि क्या एक प्रतिदर्श एक विशेष समष्टि से प्राप्त हुआ है या नहीं। मान लिया संबंधित समष्टि का माध्य μ_0 है तथा प्रतिदर्श का माध्य $\bar{x}$ है। हम यह प्रश्न पूछ सकते हैं : एक समष्टि जिसका माध्य μ_0 है, से एक प्रतिदर्श, जिसका माध्य $\bar{x}$ है, के चयन की प्रायिकता कितनी है ?

स्पष्टतः हम पुच्छ-अंत प्रायिकता α के बारे में बात कर कर रहे हैं। मान लिया यह प्रायिकता $\alpha = 3\%$ है जिसका अर्थ यह है कि एक प्रतिदर्श जिसका प्रतिदर्श माध्य $\bar{x} \geq \mu_0 + z_{0.03} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ है के चुने जाने का संयोग 100 में से 3 बार है। अतः अगर हमारा निष्कर्ष यह है कि प्रतिदर्श संबंधित समष्टि से प्राप्त हुआ है

यहां हमारी मान्यता है कि समष्टि का माध्य μ_0 है। स्पष्टतः यह हमारी परिकल्पना है। संकेत के रूप में हम इस प्रस्ताव को परिकल्पना के रूप में लिखते हैं। $H_0 : \mu = \mu_0$, तथा इसको निराकरणीय परिकल्पना कहते हैं। जब हम इस परिकलपना की जांच करते हैं तो हम केवल यह कहते हैं कि निराकरणीय परिकल्पना H_0 को अस्वीकार करने की प्रायिकता, जबकि वास्तव में यह सच है, 0.03 के बराबर है। यही टाइप I त्रुटि करने की भी प्रायिकता है।

प्रतिदर्श चयन में यादृच्छिक उच्चावचनों के कारण त्रुटि करने की जोखिम सदा बनी रहती है। जिसको बड़े आकार का प्रतिदर्श लेकर कम किया जा सकता है। जैसा कि हम जानते हैं, प्रतिदर्श का आकार बड़ा होने तथा प्रसामान्यता के निकट होने पर विश्वास्यता अंतराल आकल की परिशुद्धि में वृद्धि होती है। त्रुटि करने का जोखिम जिसको पुच्छ अंत प्रायिकता द्वारा मापा जाता है, $(=1-c)$ को सार्थकता का स्तर भी कहते हैं। जब हम एक सार्थकता स्तर सहित एक कथन को कहते हैं तो हमारा अर्थ यह होता है कि इस कथन के गलत प्रमाणित होने की प्रायिकता सार्थकता स्तर (α) जितनी छोटी है। किसी गलत निराकरणीय परिकल्पना को स्वीकार करना टाइप I त्रुटि कहलाता है। स्पष्टतः प्रत्येक निराकरणीय परिकल्पना के साथ वैकल्पिक परिकल्पना होती है जोकि इसकी पूरक होती है (घटना A तथा $\bar{A}$ को याद कीजिए)। परंपरा के अनुसार स्वीकार्य सार्थकता स्तर $\alpha = 0.05$ या $\alpha = 0.01$ लिए जाते हैं अर्थात् 5% या 1% स्तर लिए जाते हैं।

क्योंकि परिकल्पना की जांच के लिए सार्थकता स्तर, पुच्छ अंत मानों से संबंधित हैं इसलिए हमने कुछ निश्चित सार्थकता स्तरों के लिए पुच्छ अंत मानों को निम्न सारणियों में दिया है।

सारणी 16.1

वृहत् प्रतिदर्श परीक्षणों के लिए क्रांतिक मान

सार्थकता स्तर (α)	0.10	0.05	0.01	0.005	0.002
एक पुच्छ परीक्षण के लिए z के क्रांतिक मान	−1.28 तथा 1.28	−1.645 तथा 1.645	−2.33 तथा 2.33	−2.58 तथा 2.58	−2.88 तथा 2.88
दो पुच्छ परीक्षण के लिए z के क्रांतिक मान	−1.645 तथा 1.645	−1.96 तथा 1.96	−2.58 तथा 2.58	−2.81 तथा 2.81	−3.08 तथा 3.08

सारणी 16.2

स्टूडैन्ट टी बंटन (कुछ एक पुच्छ क्षेत्रफलों के लिए टी के मान)

स्वातंत्र्ता की कोटि (ν)	पुच्छ क्षेत्रफल		
	0.05	0.025	0.01
5	2.02	2.57	3.36
15	1.75	2.13	2.60
30	1.70	2.04	2.46
60	1.67	2.00	2.39
∞	1.64*	1.96*	2.33*

* ये एक पुच्छ परीक्षण के लिए z के मान हैं।

नोट : ν = 1, 2 .... 30 के लिए विस्तृत टी बंटन तालिका इस खंड के अंतर में दी गई है।

उदाहरण : अगर विश्वास्यता स्तर 99% है तो दो पुच्छ परीक्षण के लिए धनात्मक क्रांतिमान ज्ञात कीजिए।

हल : क्योंकि $c = 1 - \alpha = 99\% \therefore \alpha = 0.01$ तथा $\dfrac{\alpha}{2} = 0.005$ होगा।

क्रांतिक मान $z_{0,005}$ ज्ञात करने के लिए हम मान प्रसामान्य तालिका जो कि इस पाठ्यक्रम के खंड-7 के अंत में दी हुई है, का प्रयोग करते हैं। क्योंकि वक्र के नीचे तथा $z_{\alpha/2}$ के दाईं ओर क्षेत्रफल = 0.005 है अतः 0 तथा $z_{\alpha/2}$ के बीच क्षेत्रफल 0.500 − 0.005 = 0.495 के बराबर होना चाहिए। इस क्षेत्रफल के अनुरूप $z_{\alpha/2}$ का मान = 2.58 है। अतः 2.58 इच्छित क्रांतिक मान है।

हल : मानक प्रसामान्य वक्र के नीचे तथा 0 तथा 1.65 के बीच क्षेत्रफल 0.4505 है। विश्वास्यता स्तर ज्ञात करने के लिए हम इसको दुगुना कर देते हैं। अतः विश्वास्यता स्तर $1 - \alpha = 0.4505 \times 2 = 0.9010 \simeq 0.9$

$\therefore \alpha = 0.1$ प्रत्येक पुच्छ पर प्रत्येक क्षेत्र का क्षेत्रफल $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ है।

बोध प्रश्न 3

1) क). टाइप I तथा टाइप II त्रुटियाँ क्या है ?

....
....
....
....
....
....

ख) निराकरणीय परिकल्पना क्या होती है ? आप निराकरणीय परिकल्पना को कैसे स्वीकार या अस्वीकार करते हैं ?

....
....
....
....
....
....
....
....

ग) आप सांख्यिकीय परिकल्पना के दो पुच्छ परीक्षण को किस परिस्थिति में प्रयोग करेंगे ?

....
....
....
....
....
....
....
....

घ) आप सांख्यिकीय परिकल्पना के एक पुच्छ परीक्षण को किस परिस्थिति में प्रयोग करेंगे ?

....
....
....
....
....

च) (ग) तथा (घ) के क्रांतिक क्षेत्र क्या हैं ?

....

....

....

....

....

....

....

....

छ) सार्थकता स्तर तथा विश्वास्यता स्तर में भेद कीजिए ।

....

....

....

....

....

....

....

2) मान लिया आप निम्नलिखित परिकल्पना की जाँच करना चाहते हैं :

H_0 : धूम्रपान आपकी सेहत के लिए हानिकारक है ।

H_a : धूम्रपान आपकी सेहत के लिए हानिकारक नहीं है ।

निराकरणीय परिकल्पना के रूप में, शब्दों के प्रयोग द्वारा यह बताइए कि निम्नलिखित द्वारा क्या निरूपित होता है ?

क) टाइप I त्रुटि

ख) टाइप II त्रुटि

इनमें से कोन-सी त्रुटि गंभीर है ?

....

....

....

....

....

....

3) मान लिया सार्थकता स्तर 0.05 पर हम एक परिकल्पना की जाँच करना चाहते हैं । यह बताइएं कि क्या निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य ।

क) टाइप I त्रुटि होने की प्राथमिकता 0.95 है ।

ख) H_0 को अस्वीकार करने की प्राथमिकता 0.05 है ।

ग) H_0 को अस्वीकार न करने की प्राथमिकता, जबकि यह सच है, 0.95 है ।

घ) H_0 को अस्वीकार न करने की प्राथमिकता 0.95 है ।

....

....

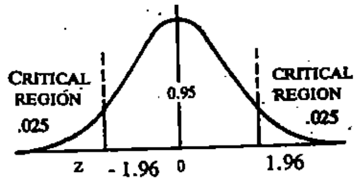
16.6 प्रसामान्य मान्यता के अंतर्गत जाँच प्रक्रिया

उपरोक्त विवेचन द्वारा यह स्पष्ट है कि प्रत्येक प्रशिक्षण प्रक्रिया में निम्न चरण होते हैं – (i) निराकरणीय परिकल्पना (H_0) तथा इसकी वैकल्पिक परिकल्पना का प्रतिपादन करना, (ii) सार्थकता स्तर (α) का निर्धारण, जिसके अनुरूप विश्वास्यता अंतराल में निराकरणीय परिकल्पना होती है, तथा (iii) इस अंतराल को प्रसामान्य विचल से संबंधित करना, जो कि परीक्षण प्रतिदर्शन को निरूपित करता है। अगर प्रतिदर्श आकार वृहत् है ($n > 30$) तो प्रसामान्य मान्यता मान्य होती है अन्यथा हमें लघु प्रतिदर्श पर आधारित समष्टि प्राचल के आकल लेने होते हैं अर्थात् टी बंटन का प्रयोग करते हैं, जिसका हम बाद में अध्ययन करेंगे। अब हम परिकल्पना की जाँच की उस विधि का अध्ययन करेंगे जिसमें हम प्रसामान्य z विचल का प्रयोग कर सकते हैं।

मानचित्र दी हुई परिकल्पना के अनुसार, प्रतिदर्श S का प्रतिचयन बंटन माध्य μ_s तथा मानक विचलन σ_s के साथ प्रासामान्य है। तब हम मानकीकृत प्रसामान्य विचल को परिभाषित कर सकते हैं।

$z = \dfrac{S - \mu_s}{\sigma_s}$ जिसका माध्य 0 तथा मानक विचलन 1 है।

जैसा कि हम जानते हैं कि इसको प्रसामान्य क्षेत्रफल के साथ विश्वास्यता अंतराल $\pm$ 1.96 तथा सार्थकता स्तर $\alpha = 1 - c = 1 - 95\% = 5\% = 0.05$, जो कि विश्वास्यता गुणांक 0.95 के अनुरूप है, के साथ संबंधित किया जा सकता है। इसको निम्नलिखित आकृति में दिखाया गया है।



आकृति 16.4

दोनों पुच्छ-अंत पर छायायित क्षेत्रफलों को α सार्थकता स्तर के लिए क्रांतिक क्षेत्र कहा जाता है। यहाँ पर जब हमारा परीक्षण दो पुच्छ है तो प्रत्येक क्रांतिक क्षेत्र $\dfrac{\alpha}{2} = 0.025$ होगा।

अब, अगर एक यादृच्छिक विधि से लिए गए प्रतिदर्श के आधार पर हम यह पाते हैं कि संबंधित प्रतिदर्शज z का मान –1.96 से 1.96 परिसर के बाहर है तो हमारा निष्कर्ष यह होगा कि, परिकल्पना सच होने की परिस्थिति इस प्रकार की घटना की प्रायिकता केवल 0.05 है, अर्थात् आकृति में छायायित क्षेत्रफल के बराबर है जो कि बहुत छोटा है। अतः हम यह कह सकते हैं कि z के इस मान तथा परिकल्पना के अंतर्गत प्रत्याशित मान में सार्थक अंतर है इसलिए निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार किया जाता है। कुल छायायित क्षेत्रफल परीक्षण का सार्थकता स्तर है तथा यह हमारे परिकल्पना को अस्वीकार करने की परिस्थिति में हमारे गलत प्रमाणित होने की प्रायतिकता है, अर्थात् यह टाइप I त्रुटि की प्रायतिकता है। अब हम अपने परीक्षण के परिणामों की व्याख्या इस प्रकार कर सकते हैं –

निराकरणीय परिकल्पना $H_0 : S = \mu$ को 0.05 सार्थकता स्तर पर अस्वीकार किया जाता है, विकल्पतः प्रतिदर्श प्रतिदर्शज का दिया हुआ मान, 5% या 0.05 सार्थकता स्तर पर सार्थक है।

(नोट : कभी-कभी 1% या 0.01 सार्थकता स्तर भी प्रयोग किया जाता है इस परिस्थिति में विश्वास्यता गुणांक 99% या 0.99 होता है)।

परिसर $\pm$ 1.96 के बराबर z के मानों को क्रांतिक मान कहा जाता है तथा इन मानों के क्षेत्र को क्रांतिक क्षेत्र कहा जाता है। यह क्रांतिक क्षेत्र निराकरणीय परिकल्पना के अस्वीकार करने का क्षेत्र या सार्थकता क्षेत्र होता है। इस प्रकार z के मान जो $\pm$ 1.96 परिसर के बीच आते हैं। इनको परिकल्पना के स्वीकरण मान

मान माध्य 0 के दोनों ओर $\pm$ 1.96 परिसर के बाहर होता है, इसको एक और तरीके से भी व्यक्त किया जा सकता है, प्रेक्षित प्रतिदर्शज 5% स्तर पर सार्थक है। अगर प्रतिदर्शज का प्रतिदर्श मान तथा इसके अनुरूप z का मान $\pm$ 1.96 के परिसर में है तो हम निराकरणीय परिकल्पना को स्वीकार कर सकते हैं जिसका अर्थ होगा कि प्रतिदर्शज s के प्रतिदर्श को समष्टि से प्राप्त किया हुआ माना जा सकता है। z को परीक्षण प्रतिदर्शज कहा जाता है।

हमने यह देखा है कि ऊपर दी हुई तालिकाओं में प्रसामान्य बंटन के पुच्छ-अंत पर क्रांतिक क्षेत्र की प्रायिकताएँ दी होती हैं। अगर हमारी निराकरणीय परिकल्पना ऐसी है कि हमारी रुचि ऐसे विश्वास्यता अंतराल में है जो, कि प्रतिदर्शज z के माध्य (=0) के अनुरूप दोनों तरफ बराबर विभाजित है तब ऊपर व्याख्या किए हुए परीक्षण का संबंध दोनों पुच्छ-अंतों से होता है। इस परीक्षण को दो पुच्छ परीक्षण कहते हैं। कभी-कभी हमारी रुचि दो पुच्छ परीक्षण में नहीं होती, हमारी निराकरणीय परिकल्पना ऐसी होती है कि हम सिर्फ यह जानना चाहते हैं कि क्या z, –1.96 से कम है या यह 1.96 से अधिक है, लेकिन दोनों परिस्थितियों का एक साथ अध्ययन नहीं करते। इस परिस्थिति में हमें दोनों में से एक पुच्छ पर विचार करना होता है, जो कि इस बात पर निर्भर है कि हमारी रुचि विश्वास्यता अंतराल के ऋणात्मक या धनात्मक पक्ष में है।

16.6.1 माध्य तथा अनुपात के लिए सार्थकता परीक्षण

हम यह जानते हैं कि बृहत् प्रतिदर्श या प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन के लिए, प्रतिदर्श s के लिए प्रसामान्यता की मान्यता लागू होती है जिसका माध्य μ_s तथा मानक विचलन σ_s होता है।

1) माध्य : यहाँ पर $S = \bar{x}$ प्रतिदर्श माध्य, $\mu_{\bar{x}} = \mu_{\bar{x}} = \mu$ समष्टि माध्य तथा $\sigma_s = \sigma$ समष्टि मानक विचलन तथा $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, जहाँ पर प्रतिदर्श का आकार n है।

z का मान इस प्रकार प्राप्त किया जाता है

$$\boxed{z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}} \qquad ...(16.10)$$

जब σ दिया हुआ न हो तो इसका आकल प्रतिदर्श से प्राप्त किया जाता है, जिसको s से सूचित किया जाता है।

उदाहरण : (बृहत् प्रतिदर्श, दो पुच्छ परीक्षण)

एक टिकिया में 10 मिलिग्राम एसपिरिन होनी चाहिए। 100 टिकिया के यादृच्छिक प्रतिदर्श द्वारा माध्य 10.2 मिलीग्राम तथा मानक विचलन 1.4 मिलीग्राम प्राप्त हुआ। क्या 0.05 सार्थकता स्तर पर हम कह सकते हैं कि 10.2 तथा 10 में सार्थक अंतर है ?

हल : हमें यह जाँच करनी है $H_0 : \mu = 10$, वैकल्पिक $H_a = \mu \neq 10$ (प्रश्न की प्रकृति के अनुसार यह स्पष्ट है कि हमारा परीक्षण दो पुच्छ परीक्षण होना चाहिए)
हमारा निर्णय नियम इस प्रकार होगा :
सार्थकता स्तर $\alpha = 0.05$ के लिए
अगर $z < -z_{\alpha/2}$ या $z > z_{\alpha/2}$
अर्थात् $z < -z_{0.025}$ या $z > z_{0.025}$ तो H_0 को अस्वीकार कीजिए।
हम परीक्षण प्रतिदर्शज z को x_0 से इस प्रकार परिकलित करते हैं।

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

यहाँ पर σ अज्ञात है अतः हम इसका आकलन प्रतिदर्श मानक विचलन s द्वारा करते हैं

$$\therefore z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{10.2 - 10}{1.4/\sqrt{100}} = 1.43$$

z के क्रांतिक मान $\pm z_{0.025} = \pm 1.96$ है
क्योंकि आकलित z का मान अंतराल (–1.96, 1.96) के बीच है हम निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार नहीं कर सकते। निस्संदेह इसका अर्थ यह नहीं है कि H_0 को सत्य स्वीकार किया जा रहा है।

उदाहरण : (बृहत् प्रतिदर्श, एक पुच्छ परीक्षण)

हल

1) $H_0 : \mu = 1.5$
2) $H_a\ \mu < 1.5$ (एक पुच्छ परीक्षण, बाईं पुच्छ)
3) निर्णय नियम : अगर $z < -z_\alpha$ अर्थात् $z < -z_{0.01}$ तो H_0 को अस्वीकार कीजिए
4) परीक्षण प्रतिदर्शज : $z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\sigma_x/\sqrt{n}}$

   क्योंकि समष्टि मानक विचलन अज्ञात है हम इसके स्थान पर प्रतिदर्श आकल का प्रयोग करेंगे।

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{1.4 - 1.5}{0.21/7}$$

$$= \frac{-0.1}{0.03} = -3.33$$

5) क्रांतिक मान : $-z_{0.01} = -2.33$ ($z=0$ तथा $z = 2.33$ के नीचे वक्र का क्षेत्रफल $= 0.49$ है)
   क्योंकि z का आकलित मान < z का क्रांतिक मान, अर्थात् आकलित मान क्रांतिक क्षेत्र में आता है, इसलिए हम निराकरणीय परिकल्पना को स्वीकार नहीं करते।

2) अनुपात :

यहां पर प्रतिदर्शज $S = \bar{p}$, जो कि द्विपद बंटन में सफलताओं के अनुपात जैसा है।
$\mu_s = \mu_{\bar{p}} = p$, जहां पर p से अर्थ समष्टि में सफलताओं के अनुपात से है।
n = प्रतिदर्श आकार तथा

$$\sigma_x = \sigma_{\bar{p}} = \sqrt{\frac{pq}{n}} \text{ जहां पर } q = 1-p$$

$$\text{अतः} = z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{pq/n}} \qquad \ldots(16.11)$$

उदाहरण : एक डॉक्टर का यह दावा है कि उसके कुल नियोजित सम्मिलनों में से 12% रद्द हो जाते हैं। 6 सप्ताह की अवधि में उसके 200 नियोजित सम्मिलनों में से 21 रद्द हो गए। $\alpha = 0.05$ स्तर पर यह जाँच कीजिए कि क्या वास्तव में रद्द हुए नियोजित सम्मिलनों का अनुपात 12% से भिन्न है?

हल

1) $H_0 : p = 0.12$
2) $H_a = p \neq 0.12$ (दो पुच्छ परीक्षण)
3) निर्णय नियम : अगर $z > z_{0.025}$ या $z < -z_{0.025}$ तो H_0 को अस्वीकार कर दीजिए।
4) परीक्षण प्रतिदर्शज

$$z = \frac{\bar{p} - p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$$

यहाँ पर $\bar{p} = \dfrac{21}{200} = 0.105$, $p = 0.12$,

$q = 1-0.12 = 0.88$ तथा $n = 200$

$$\therefore z = \frac{0.105 - 0.12}{\sqrt{\frac{(0.12)\,(0.88)}{200}}} = -0.65$$

5) क्रांतिक मान : $\pm z_{0.025} = \pm 1.96$
6) क्योंकि -0.65 अंतराल $(-1.96, 1.96)$ के बीच है, अतः हम निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार नहीं करते।

नोट : जब $p = \dfrac{x}{n}$, जहां पर x से अर्थ प्रतिदर्श में वास्तव सफलताओं की संख्या है तो z का मान इस

जहाँ पर $\mu_{\bar{x}} = \mu = Np$ तथा $\sigma_{\bar{x}} = \sqrt{Npq}$
इस प्रकार अन्य प्रतिदर्शजों के परिणाम भी लिखे जा सकते हैं।

16.6.2 प्रतिदर्शों के अंतर के सार्थकता परीक्षण

1) माध्यों का अंतर

मान लिया $\bar{x}_1$ तथा $\bar{x}_2$ दो प्रतिदर्शों के माध्य हैं जिनके आकार n_1 तथा n_2 (बड़े) हैं तथा ये क्रमशः समष्टियों, जिनके माध्य μ_1 तथा μ_2 हैं तथा मानक विचलन σ_1 तथा σ_2 हैं, से प्राप्त किए गए हैं। अब निराकरणीय परिकल्पना, H_0: $\mu_1 = \mu_2$ है, अर्थात् प्रतिदर्श ऐसी दो समष्टियों से प्राप्त किए गए हैं जिनके माध्य बराबर हैं। हमारी स्वतंत्र प्रसामान्य बंटित यादृच्छिक चरों के योग (अनुभाग 15.3) तथा केन्द्रीय सीमा प्रमेय (अनुभाग 15.4) की जानकारी द्वारा तथा $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ लेने पर, माध्य अंतरों का प्रतिचयन बंटन उपगामी प्रसामान्य बंटित होता है जिसके माध्य तथा मानक विचलन इस प्रकार होंगे –

$$\mu_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = 0 \text{ तथा } \sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

यहां पर अगर σ_1 तथा σ_2 अज्ञात हों तो हम प्रतिदर्श मानक विचलन s_1 तथा s_2 का प्रयोग कर सकते हैं।

इस प्रकार z का मान

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - 0}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}} \text{ होगा ।} \qquad (16.13)$$

z के द्वारा हम उपर्युक्त सार्थकता स्तर पर निराकरणीय परिकल्पना की जांच कर सकते हैं।

उदाहरण : हमारा उद्देश्य एक स्कूल के दो सैक्शनों A तथा B के विद्यार्थियों के गणित के ज्ञान ती तुलना करना है। प्रत्येक सैक्शन से 50 विद्यार्थियों के यादृच्छिक प्रतिदर्श प्राप्त किए गए तथा उनको समान परीक्षा में बैठाया गया। परीक्षा में प्राप्त अंकों से निम्न परिणाम प्राप्त हुए –

सैक्शन A	सैक्शन B
$n_1 = 50$	$n_2 = 50$
$\bar{x}_1 = 81.4$	$\bar{x}_2 = 84.5$
$s_1 = 4.6$	$s_2 = 4.0$

क) $\mu_1 - \mu_2$ का 95% विश्वास्यता अंतराल ज्ञात कीजिए।

ख) $\alpha = 0.05$ के प्रयोग द्वारा यह ज्ञात कीजिए कि क्या μ_1 तथा μ_2 में अंतर सार्थक है।

हल

$\mu_0 : \mu_1 = \mu_2$ या $\mu_1 - \mu_2 = 0$
$\mu_0 : \mu_1 \neq \mu_2$ या $\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

क्योंकि समष्टि मानक विचल दिए हुए नहीं है अतः हम प्रतिदर्श मानक विचलनों का प्रयोग करते हैं।

$\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ का मानक विचलन

$$s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(4.6)^2}{50} + \frac{(4.0)^2}{50}}$$

$$= \sqrt{0.4232 + 0.3200}$$

$$= \sqrt{0.7432}$$

$$= 0.862$$

z के क्रांतिक मान $\neq z_{0.025} = \pm 1.96$ है।

क) $\mu_1 - \mu_2$ का 95% विश्वास्यता अंतराल $\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{0.025}\, s$

z का परिकलन –

$$z = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sigma_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}$$

$$= \frac{-3.1}{0.862} = -3.60$$

प्रेक्षित $z = -3.60$ का मान $-z_{\alpha/2} = -1.96$ से कम है।
निर्णय : हम निराकरणीय परिकल्पना μ_0 को अस्वीकार करते हैं तथा यह कह सकते हैं कि 5% स्तर पर अंतर सार्थक है।

2) अनुपातों में अंतर

मान लिया $\bar{p}_1$ तथा $\bar{p}_2$ प्रतिदर्श अनुपात हैं जो कि बृहत् प्रतिदर्शों, जिनके आकार n_1 तथा n_2 हैं, से प्राप्त किए गए हैं। ये प्रतिदर्श उन समष्टियों से प्राप्त किए गए हैं जिनमें अनुपात क्रमशः p_1 तथा p_2 है। निराकरणीय परिकल्पना, कि समष्टि प्राचलों के बीच कोई अंतर नहीं है, पर विचार कीजिए, अर्थात् $\mu_0 : p_1 = p_2$ लीजिए, जिसका अर्थ है कि वास्तव में प्रतिदर्श उसी समष्टि से प्राप्त हुए हैं। हमारी केन्द्रीय सीमा प्रमेय की जानकारी के अनुसार, $p_1 = p_2 = p$ मानने पर, हम देखते हैं कि अनुपातों के अंतर का प्रतिचयन बंटन उपगामी प्रसामान्य है जिसका माध्य मानक विचलन इस प्रकार है :

$$\mu_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = 0 \qquad \sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \sqrt{pq\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}$$

जहां पर $p = \dfrac{n_1\bar{p}_1 + n_2\bar{p}_2}{n_1 + n_2}$ को समष्टि अनुपात का आकल लिया जाता है तथा $q = 1-p$ है। अब z का मान इस प्रकार किया जाता है –

$$z = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2 - 0}{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}} = \frac{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}} \qquad \text{...(16.14)}$$

इसी प्रकार अन्य प्रतिदर्शजों के द्वारा भी का मान परिकलित किया जा सकता है।

उदाहरण : यह विश्वास किया जाता है कि शहर के 12% वयस्क पुरुष मृत्युदंड को अधिमान देते हैं, जबकि केवल 10% वयस्क महिलाएँ इसको अधिमान देती हैं। अगर 150 पुरुषों का यादृच्छिक प्रतिदर्श तथा 100 महिलाओं का यादृच्छिक प्रतिदर्श लेकर उनसे यह पूछताछ की जाय कि क्या वे मृत्यु दंड को अधिमान देते हैं या नहीं तो यह प्रायिकता ज्ञात कीजिए कि मृत्यु दंड को अधिमान देने वाले पुरुषों का अनुपात, मृत्यु दंड को अधिमान देने वाली महिलाओं के अनुपात से कम से कम 3 प्रतिशत अधिक होगा।

हल

मान लिया p_1 = मृत्यु दंड को अधिमान देने वाले पुरुषों का प्रतिशत 0.12

p_2 = मृत्यु दंड को अधिमान देने वाली महिलाओं का प्रतिशत 0.10

यहाँ पर समष्टि प्राचल $p_1 - p_2$ है तथा प्रतिदर्श प्रतिदर्शज $\bar{p}_1 - \bar{p}_2$ है।

$\mu_s = \mu_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = p_1 - p_2 = 0.12 - 0.10$

प्रतिदर्श अनुपातों के अंतर की मानक त्रुटि

$$\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

$$= \frac{.12 \times .88}{150} + \frac{.10 \times .90}{100}$$

$$= 0.04$$

अतः $\bar{p}_1 - \bar{p}_2 = 0.03$ के लिए z का मान

$$z = \frac{(\bar{p}_1 - \bar{p}_2) - \mu_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}}{\sigma_{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}}$$

अतः $P[(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \geq 0.03] = P(z \geq 0.25)$

$$= 0.5000 - 0.0987$$

$$= 0.4013 \text{ अर्थात् } 40.13\%$$

उदाहरण : यह सूचना प्राप्त हुई है कि विश्वविद्यालय B की तुलना में विश्वविद्यालय A से परीक्षा पास करना सरल है। विश्वविद्यालय A तथा B से क्रमशः 150 तथा 195 विद्यार्थियों ने यादृच्छिक प्रतिदर्श लिए गए। इनमें से 60 विद्यार्थी विश्वविद्यालय A से तथा 72 विद्यार्थी विश्वविद्यालय B से पास हुए। क्या यह सूचना की वैधता का सूचक है ? $\alpha = 0.01$ प्रयोग कीजिए।

हल

p का संयोजित आकल $\hat{p} = \dfrac{\hat{p}_1 n_1 + \hat{p}_2 n_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{60+72}{150+195} = 0.38 \text{ है}$$

$\hat{p}_1 - \hat{p}_2$ की आकलित मानक त्रुटि

$$s_{\hat{p}_1 - \hat{p}_2} = \sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)} = \sqrt{(0.38)(0.62)\left[\frac{1}{150} + \frac{1}{195}\right]}$$

$$= 0.053 \text{ है।}$$

$H_0 : p_1 - p_2 = 0$

$H_a : p_1 - p_2 > 0$ (एक पुच्छ परीक्षण)

$\alpha = 0.01,$

z का क्रांतिक मान $z_{0.01} = 2.33$

तथा z का परिकलित मान $= \dfrac{\dfrac{60}{150} - \dfrac{72}{195}}{0.053} = \dfrac{0.4 - 0.37}{0.053} = \dfrac{0.03}{0.053}$

$$= 0.57 < 2.33$$

अतः हम सूचना को स्वीकार नहीं कर सकते, क्योंकि निराकरणीय परिकल्पना μ_0 को अस्वीकार नहीं किया जा सकता

बोध प्रश्न 4

1) एक कलश में गेंदें हैं जो या तो लाल हैं या नीली हैं। इन रंगों के अनुपात बराबर होने की परिकल्पना की जांच के लिए हम 64 गेंदों का प्रतिदर्श (प्रतिस्थापन सहित) लेना स्वीकार करते हैं, निकाली गई गेंद का रंग देखकर हम निम्नलिखित निर्णय नियम अपनाते हैं –

   i) अगर 28 से 36 के बीच लाल गेंदें प्राप्त हुई हैं तो परिकल्पना स्वीकार कीजिए।

   ii) अन्यथा परिकल्पना को अस्वीकार कीजिए।

   क) सार्थकता का स्तर α ज्ञात कीजिए।

   ख) आलेख द्वारा निणर्य नियम तथा (क) में प्राप्त परिणाम की व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

2) एक बल्ब के निर्माता का यह दावा है कि उसके कम से कम 95 प्रतिशत बल्ब आई.एस.आई. विनिर्देशन के अनुकूल हैं। 200 बल्बों के निरीक्षण द्वारा यह पाया गया कि 18 बल्ब विनिर्देशन के अनुकूल नहीं थे। सार्थकता स्तरों (क) 0.01 तथा (ख) 0.05 पर उसके दावे की जांच कीजिए।

3) राम द्वारा निर्मित 100 बल्बों के प्रतिदर्श द्वारा माध्य जीवन काल 1190 घंटे तथा मानक विचलन 90 घंटे परिकलित किया गया। रहीम द्वारा निर्मित 75 बल्बों के प्रतिदर्श का माध्य जीवन काल 1230 घंटे तथा मानक विचलन 120 घंटे परिकलित किया गया। क्या दोनों व्यक्तियों द्वारा निर्मित बल्बों के माध्य जीवनकालों में (क) 0.05, (ख) 0.01 सार्थकता स्तरों पर अंतर है ?

4) दो कलशों A तथा B में बराबर संख्या में गेंदें हैं। लेकिन प्रत्येक कलश में लाल तथा सफेद गेंदों का अनुपात अज्ञात है। प्रत्येक कलश से 50 गेंदों का प्रतिदर्श (प्रतिस्थापन सहित) लिया गया जिनमें कलश A से 32 लाल गेंदें तथा कलश B से 24 लाल गेंदें प्राप्त हुई। सार्थकता स्तर 0.05 के प्रयोग से इन परिकल्पनाओं की जांच कीजिए –

क) दोनों कलशों में लाल गेंदों का अनुपात बराबर है,

ख) कलश B की तुलना में कलश A में लाल गेंदों का अनुपात अधिक है।

....
....
....
....
....
....

16.7 लघु प्रतिदर्शों के लिए जाँच प्रक्रिया

लघु प्रतिदर्शों ($n < 30$) जब समष्टि मानक विचलन अज्ञात हो तो हम जानते हैं कि प्रसामान्यता की मान्यता लागू नहीं होती, यहाँ पर प्रतिदर्शज का प्रतिचयन बंटन टी बंटन होता है।

16.7.1 टी-परीक्षण

हम z की तरह ही टी प्रतिदर्शज को परिभाषित करते हैं $t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}}$, जहां पर $\bar{x}$ तथा $s_{\bar{x}}$ प्रतिदर्श के माध्य तथा मानक विचलन हैं तथा μ समष्टि माध्य है, n प्रतिदर्श का आकार तथा $\nu = n-1$ स्वतंत्रता को कोटि है।

$$\therefore t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_{\bar{x}}} \sim t_{\alpha/2,\nu}$$

अतः विश्वास्यता गुणांक 95 प्रतिशत के अनुरूप विश्वास्यता अंतराल का अर्थ सार्थकता स्तर $\alpha = 1-c = 1.95 = 0.05$ है। जब हमारी रुचि दो पुच्छ परीक्षण में होती है तो विश्वास्यता अंतराल को इस प्रकार लिखते हैं –

$$\bar{x} - t_{\alpha/2,\nu} \frac{s_{\bar{x}}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + t_{\alpha/2,\nu} \frac{s_{\bar{x}}}{\sqrt{n}}$$

जहां पर $\frac{\alpha}{2} = 0.025$, जोकि टी वक्र के एक पुच्छ-अंत का क्षेत्रफल है। जब हम निराकरणीय परिकल्पना $H_0: \mu = \mu_0$ की जांच के लिए टी सारणी से टी का क्रांतिक मान स्वतंत्रता की कोटि ν तथा पुच्छ-अंत क्षेत्रफल $\frac{\alpha}{2}$ के लिए प्राप्त करते हैं। पहले की तरह यहां भी प्रायः 5 प्रतिशत या 1 प्रतिशत विश्वास्यता स्तर का प्रयोग किया जाता है।

16.7.2 माध्य, माध्यों के अंतर का सार्थकता परीक्षण

यहां पर भी हम z परीक्षणों, जो कि प्रसामान्यता पर आधारित है, की तरह प्रतिदर्श माध्य या दो प्रतिदर्श माध्यों में अंतर की सार्थकता के परीक्षण कर सकते हैं।

1) **माध्य:** निराकरणीय परिकल्पना $H_0: \mu = \mu_0$ जिसका अर्थ है कि प्रतिदर्श माध्य तथा समष्टि माध्य में सार्थक अंतर नहीं है, की जांच के लिए हम निम्नलिखित सूत्र द्वारा t का मान परिकलित करते हैं।

$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s_x/\sqrt{n}}$, जहाँ पर $\bar{x}$ तथा s_x प्रतिदर्श के माध्य तथा मानक विचलन हैं। इसके बाद टी-सारणी द्वारा $\nu = n - 1$ स्वतंत्रता की कोटि तथा पुच्छ-अंत प्रायिकता $\frac{\alpha}{2}$ के अनुरूप टी का क्रांतिक मान देखते हैं।

यहां पर α सार्थकता का स्तर है तथा हमारा परीक्षण दो पुच्छ परीक्षण है। एक पुच्छ परीक्षण में $\frac{\alpha}{2}$ के स्थान पर पुच्छ-अंत क्षेत्रफल α लिया जाता है।

अगर $t > t_{\alpha/2,\nu}$ या $t < -t_{\alpha/2,\nu}$ हो तो H_0 को अस्वीकार कर देते हैं।

उदाहरण : (एक पुच्छ परीक्षण)

15 बैटरियों के एक यादृच्छिक प्रतिदर्श का परीक्षण किया गया तथा यह पाया गया कि $\bar{x} = 1.4$ वोल्ट तथा $s = 0.21$ वोल्ट था। सार्थकता स्तर 0.01 पर क्या यह $\mu < 1.5$ वोल्ट का सचक है ?

हल

1) $H_0 : \mu = 1.5$
2) $H_a : \mu < 1.5$ (एक पुच्छ परीक्षण, बाईं पुच्छ)
3) $\alpha = 0.01$
4) t का परिकलित मान $t = \dfrac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \dfrac{1.4 - 1.5}{0.21/\sqrt{15}}$

$$= \frac{-0.1}{0.21} \times \sqrt{15} = -1.84$$

5) t का क्रांतिक मान $-t_{0.01,\,14} = -2.624_{(\nu = n-1 = 14)}$
6) निर्णयः हम H_0 को अस्वीकार नहीं कर सकते, क्योंकि $-1.84 > -2.624$ अर्थात् $\bar{x}$ तथा μ का अंतर जो कि -0.1 है वह केवल प्रतिचयन त्रुटि के कारण हो सकता है।

2) माध्यों का अंतर

मान लिया दो यादृच्छिक प्रतिदर्श जिनके आकार n_1 तथा n_2 हैं, को दो समष्टियों से प्राप्त किया गया है जिनके मानक विचलन बराबर हैं ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$), तथा दोनों प्रतिदर्शों के माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः $\bar{x}_1$, s_1 तथा $\bar{x}_2$, s_2 हैं। हम निराकरणीय परिकल्पना, कि दोनों प्रतिदर्श एक ही समष्टि, जिसका माध्य μ तथा मानक विचलन σ है, से प्राप्त किए गए हैं, की जाँच करना चाहते हैं।
अर्थात् $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu,\ \sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ (अज्ञात है)
हम μ का आकलन $\bar{x}$ से तथा σ का आकलन s के द्वारा करते हैं। s का मान निम्नलिखित सूत्र द्वारा प्राप्त किया जाता है –

$$s^2 = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{(n_1 - 1) + (n_2 - 1)} = \frac{(n_1 - 1)\, s_1^2 + (n_2 - 1)\, s_2^2}{n_1 + n_2 - 2},$$ यह σ^2 का संयोजित आकल है।

अब माध्यों के अंतर की मानक त्रुटि $s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2} = s\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}$

तथा $$\boxed{t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s_{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}}} \qquad \ldots(16.14)$$

यह पुनः स्मरण कीजिए कि n_1 तथा n_2 प्रेक्षणों के दो समुचयों का संयोजित प्रसरण

$s^2 = \dfrac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2}$, जहाँ पर $s_i^2 = \dfrac{1}{n_i}\Sigma (x_i - \bar{x})^2$, $i = 1, 2$ यहाँ पर i वें प्रतिदर्श का प्रसरण s_i^2 है।

क्योंकि टी-परीक्षण में स्वतंत्रता की कोटि का प्रयोग होता है, यहां पर स्वतंत्रता की कोटि $n_1 + n_2 - 2$ है। प्रत्येक प्रतिदर्श में माध्य परिकलित करने के कारण दो स्वतंत्रता की कोटि कम हो जाती है। टी के इस मान की तुलना हम इसके क्रांतिक मान से जोकि टी सारणी में $n_1 + n_2 - 2$ स्वतंत्रता की कोटि तथा दिए हुए सार्थकता स्तर के लिए हो, से करते हैं। यहाँ भी सार्थकता स्तर प्रायः 5 प्रतिशत या 1 प्रतिशत लिया जाता है।

उदाहरण

विद्यार्थियों के दो यादृच्छिक समूहों के प्रयोग द्वारा सांख्यिकी के अध्ययन की दो विधियों A तथा B की तुलना की गई। प्रायोगिक अनुदेश के अंत में प्रत्येक समूह की समान परीक्षा ली गई। प्रत्येक समूह द्वारा प्राप्तांक, दो प्रसामान्य समष्टियों, जिनके प्रसरण समान हैं, से यादृच्छिक प्रतिदर्श माने जा सकते हैं। अगर यह मान लिया जाए कि $\mu_1 = \mu_2$ तथा $n_1 = 16$, $n_2 = 12$, $\bar{x}_1 = 80.7$, $\bar{x}_2 = 73.2$, $s_1^2 = 12.8$ तथा $s_2^2 = 8.5$ हैं तो टी प्रतिदर्शज का मान तथा इससे संबंधित स्वतंत्रता की कोटि ज्ञात कीजिए। यह जाँच कीजिए कि क्या मान्य $\mu_1 = \mu_2$ सार्थकता के 1 प्रतिशत पर लागू होती है।

हल

$$\text{परिकलित } t = \frac{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{s\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} = 5.93$$

स्वतंत्रता की कोटि $\nu = 16 + 12 - 2 = 26$

टी का क्रांतिक मान $t_{0.005,26} = 2.780$

क्योंकि परिकलित मान क्रांतिक मान से अधिक तो हम निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार कर देते हैं।

16.8 प्रतिदर्श का आकार कितना बड़ा होना चाहिए ?

अभी तक किए गए अध्ययन में आपने देखा है कि समष्टि से प्रतिदर्श की सहायता से जाँच की जाने वाली परिकल्पना का विश्वास्यता अंतराल से संबंध होता है जोकि स्वयं विश्वास्यता स्तर, मानक त्रुटि, तथा प्रतिदर्श आकार पर निर्भर है। क्योंकि वास्तविक परिस्थितियों में अधिकतर प्रतिचयन क्रियाओं का लागतों से संबंध होता है, इसलिए हमें लागतों को सीमित तथा प्रतिदर्श के पर्याप्त आकार को सुरक्षित होता है। हमें पर्याप्त प्रतिदर्श आकार का कैसे पता लगे ? इस प्रकार का उत्तर तीन कारकों पर निर्भर करता है –

i) हम विश्वास्यता अंतराल की परिशुद्धता (छोटा) कितनी चाहते हैं ?

ii) हम किस विश्वास्यता स्तर पर संतुष्ट होना चाहते हैं।

iii) समष्टि, जिससे प्रतिदर्श लिया जाना है, कितनी प्रसरित है, अर्थात् उसका मानक या विचलन या आकलित प्रतिदर्शज की मानक त्रुटि, कितनी है?

माध्य के आकलन के लिए प्रतिदर्श आकार

समष्टि माध्य μ का विश्वास्यता अंतराल आकल निम्नलिखित है –

$$\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \le \mu \le \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$$

हम इस अंतराल के व्यंजक को $\bar{x} \pm e$ जहाँ पर $e = z_{\alpha/2}\frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$, भी लिख सकते हैं। e का वर्ग लेने पर

$$e^2 = z^2_{\alpha/2}, \frac{\sigma_x^2}{n}$$

$$\text{या } n = z^2_{\alpha/2}, \frac{\sigma_x^2}{e^2} \qquad \text{...(16.15)}$$

σ_x^2 के बारे में कुछ जानकारी होने पर, $\alpha/2$ तथा विश्वास्यता के किन्हीं मानों के द्वारा हम इस व्यंजक को n के लिए हल कर सकते हैं। किसी पिछले सर्वेक्षण या किसी प्रायोगिक पूछताछ द्वारा प्रसरण के बारे में कुछ जानकारी पहले से ही प्राप्त की जा सकती है। कुछ परिस्थितियों में प्रसरण की कामचलाऊ रूपरेखा के लिए जानकार लोगों, जोकि विचाराधीन समष्टि से परिचित है, से राय ली जा सकती है। जब हम यह मानते हैं कि प्रसामान्य विचर z का 95 प्रतिशत अविश्वास्यता अंतराल माध्य से $\pm 2\sigma$ दूरी के बीच होता है, तो इस परिसर के न्यूनतम तथा अधिकतम मान को प्रेक्षित मानों के न्यूनतम तथा अधिकतम मानों के बराबर लेते हैं। अब हम निम्न सन्निकट संबंध को लिख सकते हैं –

$$2 \times 2\sigma_x \approx \text{अधिकतम मान} - \text{न्यूनतम मान}$$

$$\text{या } \sigma_x \approx \frac{\text{अधिकतम मान} - \text{न्यूनतम मान}}{4} \qquad \text{...(16.16)}$$

क्योंकि $\pm 2\sigma_x$ का अर्थ कुल परिसर का $4\sigma_x$ के बराबर होना है। इस परिसर का सन्निकट मान ज्ञात करने के लिए एक छोटा तथा कम समय का प्रायोगिक सर्वेक्षण वास्तविक प्रतिदर्श सर्वेक्षण, जिसका आकार हमें प्राप्त करना है, पहले किया जाता है।

उदाहरण

दक्षिणी देहली में घरेलू महिला सहायता की औसत मासिक आय के आकलन के लिए एक प्रतिदर्श लिया जाना है जिसका आकल केवल अंतराल $\pm$ 100 रुपये के बीच होना चाहिए। इस बारे में जानकारी रखने वाली एक गृहणी ने बताया कि अधिकतम मासिक आय 1000 रुपये तथा न्यूनतम मासिक आय 200 रुपये

इस

$C = 0.99, \alpha = 0.01, \frac{\alpha}{2} = 0.005$

अतः $Z_{0.005} = 2.58$

$$\sigma_x \simeq \frac{\text{अधिकतम - न्यूनतम}}{4} = \frac{1000 - 200}{4} = 200 \text{ रुपये}$$

$$\therefore n = \left(\frac{Z_{\alpha/2} \cdot \sigma_x}{e}\right)^2 = \left(\frac{2.58 \times 200}{100}\right)^2 = (5.16)^2 = 27 \text{ (सन्निकट)}$$

बोध प्रश्न 5

1) भूतकाल में एक मशीन ने 0.50 मिली मीटर मोटी वस्तुओं को उत्पादित किया है। यह ज्ञात करने के लिए कि क्या मशीन उपयुक्त कार्यशील हालत में है या नहीं, 10 वस्तुओं का एक प्रतिदर्श लिया गया जिसमें माध्य मोटाई 0.53 मि. मी. तथा मानक विचलन 0.03 मि.मी तथा। 0.05 तथा 0.01 सार्थकता स्तर के प्रयोग द्वारा इस परिकल्पना की जाँच कीजिए कि मशीन ठीक हालत में है।

....

....

....

....

....

....

....

....

2) किसी वस्तु के भार का 23.2 प्रतिशत लोहा है। 10 वस्तुओं के प्रतिदर्श द्वारा औसत लोहा अंश 23.5 प्रतिशत तथा मानक विचलन 0.24 प्रतिशत परिकलित किया गया। 0.01 तथा 0.05 सार्थकता स्तर पर क्या यह माना जा सकता है कि उत्पाद आपेक्षित विनिर्देशन पूरा करता है।

....

....

....

....

....

....

....

....

3) अर्थशास्त्र की एक परीक्षा में एक कक्षा में 12 विद्यार्थियों के माध्य अंक 78 तथा मानक विचलन 6 थे जबकि दूसरी कक्षा के 15 विद्यार्थियों के माध्य अंक 74 तथा मानक विचलन 8 थे। 0.05 सार्थकता स्तर के प्रयोग द्वारा यह जाँच कीजिए कि क्या पहला समूह दूसरे से बेहतर है ?

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

16.9 सारांश

इस इकाई में हमने बिन्दु आकल, अंतराल आकल तथा अनभिनतता तथा दक्षता की परिभाषा सहित सांख्यिकीय अनुमिति की मूल अवधारणाओं का अध्ययन किया। इसके पश्चात् अपने बृहत् प्रतिदर्शों, जो कि प्रसामान्य बंटित है, के लिए विश्वास्यता अंतराल तथा विश्वास्यता स्तर की अवधारणाओं की परिभाषा की। इसके बाद लघु प्रतिदर्शों के लिए स्टूडेंट टी बंटन का अध्ययन किया तथा एक व्यावहारिक नियम बनाया जिससे यह जाना जा सके कि प्रसामान्य या स्टूडेंट टी बंटन का प्रयोग किन परिस्थितियों में किया जाता है। तत्पश्चात् हमने टाइप I तथा टाइप II त्रुटियों की परिभाषा तथा निराकरणीय परिकल्पना स्थापित करने की विधि का अध्ययन किया। अंत में हमने प्रसामान्य मान्यता तथा लघु प्रतिदर्शों के लिए (टी परीक्षण) परिकल्पना जाँच की विधियों का अध्ययन किया।

16.10 शब्दावली

क्रांतिक क्षेत्र : परीक्षण प्रतिदर्श (z या t) के मानों का ऐसा समुच्चय जिससे परिकल्पना अस्वीकार हो जाती है। यह वक्र के नीचे वह क्षेत्रफल होता है जो कि सार्थकता पर निर्भर होता है।

स्वतंत्रता की कोटि : इसका संबंध स्वतंत्र प्रेक्षणों की संख्या से होता है। जब हम प्रसरण का परिकलन करते हैं तो कुल वर्गों के योग $\Sigma(x_i - \bar{x})^2$ को स्वतंत्रता की कोटि (n–1) से विभाजित किया जाता है, जहाँ पर n प्रेक्षणों की संख्या है।

दक्ष आकलक : एक प्रतिदर्शज, जो कि अनभिनत है तथा अन्य प्रतिदर्शजों (जोकि उसी समष्टि प्राचल के आकलक है) की तुलना में जिसका प्रसरण भी कम है, को दक्ष आकलन कहा जाता है। उदाहरण के लिए, प्रतिदर्श माध्यिका के तुलना में प्रतिदर्श माध्य समष्टि माध्य का दक्ष आकलन होता है।

सार्थकता का स्तर : यह क्रांतिक क्षेत्र की परिभाषा के लिए प्रयोग किया गया प्रायिकता स्तर होता है। इसको α द्वारा सूचित किया जाता है तथा व्यावहारिक प्रयोग में इसके मान 0.05 या 0.01 लिए जाते हैं।

सांख्यिकीय परिकल्पना : यह समष्टि प्राचल या समष्टि बंटन के रूप के बारे में कोई सुझाव होता है।

टी बंटन : प्रसामान्य बंटन की तरह यह भी सममित, एक बहुलकी, संतत तथा घंटी के आकार का, बंटन होता है। इस बंटन का प्रयोग तब किया जाता है जब प्रतिदर्श आकार छोटा हो अर्थात् 30 से कम हो। अगर प्रेक्षणों की संख्या में वृद्धि होती है तो टी बंटन प्रसामान्य बंटन की ओर उपगामी होती है। टी बंटन का प्रयोग, परिकल्पना जाँच में तब किया जाता है जब प्रतिदर्श का आकार छोटा हो तथा समष्टि मानक विचलन अज्ञात हो।

परिकल्पना की जाँच : यह निराकरणीय परिकल्पना को स्वीकार या अस्वीकार के निकष का नियम होता है।

टाइप I त्रुटि : सत्य निराकरणीय परिकल्पना के अस्वीकार होने पर यह त्रुटि उत्पन्न होती है। टाइप I त्रुटि की प्रायिकता क्रांतिक क्षेत्र के क्षेत्रफल द्वारा प्राप्त होती है जिसको सार्थकता स्तर भी कहते हैं।

टाइप II त्रुटि : जब एक असत्य परिकल्पना स्वीकार होती है तो यह त्रुटि उत्पन्न होती है।

अनभिनत आकलक : जब एक प्रतिदर्श प्रतिदर्शज का माध्य इसके अनुरूप समष्टि प्राचल के बराबर हो तो इस प्रतिदर्शज को समष्टि प्राचल का अनभिनत आकलक कहते हैं।

16.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Agarwal, B.L., 1988. *Basic Statistics*, Wiley Eastern Limited : New Delhi. (Chapters 7 and 8).

Bowen, Earl K. and M.K. Starr, 1982. *Basic Statistics for Business and Economics*, McGraw-Hill Book Company : London. (Chapters 10 and 11).

Freund, J.E. and F.T. Williams, 1982. *Elementary Business Statistics : The Modern Approach*, Prentice Hall Inc. : London.

Goon, A.M., M.K. Gupta, B. Dasgupta, 1985. *Basic Statistics*, The World Press Private Limited, Calcutta. (Chapter 12).

Nagar, A.L. and R.K. Das, 1985. *Basic Statistics, Oxford University Press : New Delhi.* (*Chapters* 10 *and* 11).

Spiegel, Murray R., 1985. *Theory and Problems of Statistics :* Schaum's Outline Series. McGraw-Hill Book Company : New York. (Chapters 10 and 11).

Weimer, Richard C., 1987. *Applied Elementary Statistics:* Brooks Cole Publishing Company, Monterey : California. (Chapters 8, 9, 10 and 11).

16.12 बोध प्रश्नों के संकेत या उत्तर

बोध प्रश्न 1

1) क) संकेत : विश्वास्यता अंतराल के निर्माण में मानक प्रसामान्य विचल के महत्व की संक्षेप में व्याख्या कीजिए ।

ख) अनुभाग 16.3 (पहला अनुच्छेद) को देखिए ।

ग) संकेत : संबंध विपरीत है । व्याख्या कीजिए कि क्यों ?.

2) क) (i) अभिनत

(ii) अनभिनत

ख) (i) नहीं । $\frac{n}{N} = \frac{1}{5} < \frac{1}{20}$ (तुलनात्मक लघु समष्टि)

(ii) हाँ । $\frac{n}{N} = \frac{1}{500} < \frac{1}{20}$ (तुलनात्मक वृहत् समष्टि)

3) क) संकेत : '?' ज्ञात कीजिए ।

क) $z = 0$ तथा $z = ?$ के बीच क्षेत्रफल का दुगुना $= 0.91$

ख) $z = 0$ तथा $z = ?$ के बीच क्षेत्रफल का दुगुना $= 0.73$

ग) $z = 0$ तथा $z = ?$ के बीच क्षेत्रफल का दुगुना $= 0.86$

ख) संकेत : $\bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$ जहाँ पर $\frac{\alpha}{2} = 0.05$ तथा

$z_{\alpha/2} = 1.64$

4) $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \frac{0.30}{\sqrt{36}} = \frac{0.30}{6} = 0.05$

अतः आपेक्षित विश्वास्यता अंतराल

$\bar{x} - 1.96\, \sigma_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + 1.96\, \sigma_{\bar{x}}$

$1.5 - 1.96 \times (0.05) \le \mu \le 1.5 + 1.96 \times (0.05)$

$1.402 \le \mu \le 1.598$

5) $\bar{x} = 3.50$, $S_x = 0.75$, $n = 100$, $\alpha = 0.1$

$\frac{1-\alpha}{z} = \frac{1-0.1}{z} = 0.45$

$P(0 \le z \le 0.45) = 1.64$

$s_{\bar{x}} = S_x/\sqrt{n} = 0.75$

अतः आपेक्षित विश्वास्यता अंतराल

$\bar{x} - 1.64\, s_{\bar{x}} \le \mu \le \bar{x} + 1.64\, s_{\bar{x}}$ $3.38 \le \mu \le 3.62$ रुपये

बोध प्रश्न 2

1) क) टी सारणी में आकलित किए जाने वाले समष्टि प्राचल के विश्वास्यता अंतराल के बीच होने की प्रायिकता नहीं दी होती। इसके स्थान पर यह समष्टि प्राचल के विश्वास्यता अंतराल से बाहर रहने की प्रायिकता देती है।

ख) हमें स्वतंत्रता की कोटि का निर्धारण करना होता है।

2) आप स्वयं कीजिए।

3) क) $\bar{x} \pm z \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

ख) $\bar{x} \pm z \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ जहाँ पर $s = \sqrt{\dfrac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$ है।

ग) (क) की तरह

घ) $\bar{x} \pm t \cdot \dfrac{s}{\sqrt{n}}$ जहाँ पर s को (ख) में परिभाषित किया गया है तथा $t = t_{\alpha/2, \nu}$ तथा

$\nu = n - 1$

4) क) $\nu = 5 - 1 = 4, \quad \alpha = 0.01, \quad \dfrac{\alpha}{2} = 0.005$

$\therefore t_{0.005,4} = 4.60$

ख) $t_{0.005,17}$ ज्ञात कीजिए।

ग) $t_{0.025,15}$ ज्ञात कीजिए।

घ) $t_{0.05,9}$ ज्ञात कीजिए।

5) क) 12.15

ख) 0.2

ग) (12.016, 12.284)

बोध प्रश्न 3

1) क) अनुभाग 16.5.1 तथा 16.5.2 (चौथा अनुच्छेद) तथा शब्दावली को देखिए।

ख) अनुभाग 16.5.2 (तीसरा अनुच्छेद) देखिए।

ग) जब प्रतिदर्शज का मान प्राचल के दो तरफ दूर होने पर निराकरणीय परिकल्पना को अस्वीकार करना हो तो दो पुच्छ परीक्षण का प्रयोग किया जाता है।

घ) (i) $H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_a : \mu > \mu_0$ या

(ii) $H_0 : \mu = \mu_0 \quad H_a : \mu < \mu_0$

च) भाग 16.5 देखिए।

छ) $\alpha = 1 - c$ जहाँ पर α = सार्थकता का स्तर

c = विश्वास्यता का स्तर

2) क) H_0 को अस्वीकार करने की प्रायिकता जबकि यह सत्य है अर्थात् जब परीक्षण द्वारा : 'धूम्रपान आपकी सेहत के लिए हानिकारक' हो जाए।

ख) जब असत्य H_0 स्वीकार हो जाए।

3) क) असत्य ख) असत्य ग) सत्य घ) असत्य
(नोट : लिखने का सही तरीका (ग) है)

बोध प्रश्न 4

1) क) 0.3174

ख) आलेख पृष्ठ पर क्रांतिक क्षेत्र को दिखाइए।

3) क) हाँ ख) नहीं ।

4) क) बराबर अनुपात की परिकल्पना दो पुच्छ परीक्षण द्वारा तथा 0.05 सार्थकता स्तर पर अस्वीकार नहीं होती ।

ख) 0.05 सार्थकता स्तर पर एक पुच्छ परीक्षण द्वारा यह पता चलता है कि B की तुलना में A में लाल गेंदों का अनुपात अधिक है ।

बोध प्रश्न 5

1) संकेत : $H_0 : \mu = 0.50$

$H_a : \mu \neq 0.50$

$$t = \frac{\bar{x} - \mu}{s_x/\sqrt{n}} \sim 3.00$$

क) $\pm\, t_{0.025}, 9 = \pm\, 2.26$: H_0 को अस्वीकार कीजिए ।

ख) $\pm\, t_{0.005}, 9 = \pm\, 3.25$: H_a को स्वीकार कीजिए ।

2) दोनों सार्थकता स्तरों पर तथा पुच्छ परीक्षण द्वारा यह निष्कर्ष है कि उत्पाद द्वारा आपेक्षित विनिर्देशन पूरे नहीं होते ।

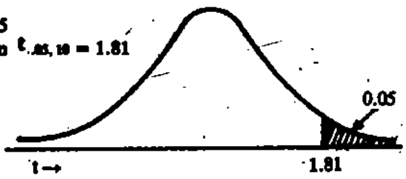
3) एक पुच्छ परीक्षण तथा 0.05 सार्थकता स्तर पर हमारा निष्कर्ष यह है कि प्रथम समूह दूसरे से अच्छा नहीं है ।

16.13 पारिभाषिक शब्दावली

अंतराल आकस	Interval estimate
एक पुच्छ परीक्षण	One tailed test
क्रांतिक क्षेत्र	Critical region
दक्ष आकसक	Efficient estimator
दो पुच्छ परीक्षण	Two tailed-test
नियोजित सम्मिलन	Appointment
निराकरणीय परिकल्पना	Null hypothesis
बिन्दु आकस	Point estimate
विनिर्देशन	Specification
विश्वास्यता अंतराल	Confidence interval
वैकल्पिक परिकल्पना	Alternate hypothesis
स्वतंत्रता की कोटि	Degree of freedom
सार्थकता स्तर	Level of significance
संयोजित आकस	Pooled estimate

उदाहरण
अगर पुच्छ क्षेत्रफल 0.05 तथा है $\nu = 15$ तब $t_{0.5,\,15} = 1.81$

Example:
If tail area is 0.05
and $\nu = 10$, then $t_{.05,\,10} = 1.81$



स्टूडेंट टी बंटन
चुने हुए पुच्छ क्षेत्रफल के मूल्य

	पुच्छ क्षेत्रफल					
स्वतन्त्रता की कोटि	0.25	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	1.00	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66
2	0.82	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92
3	0.76	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84
4	0.74	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60
5	0.73	1.48	2.02	2.57	3.36	4.03
6	0.72	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71
7	0.71	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50
8	0.71	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36
9	0.70	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25
10	0.70	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17
11	0.70	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11
12	0.70	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05
13	0.69	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01
14	0.69	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98
15	0.69	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95
16	0.69	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92
17	0.69	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90
18	0.69	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88
19	0.69	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86
20	0.69	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85
21	0.69	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83
22	0.69	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82
23	0.69	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81
24	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80
25	0.68	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79
26	0.68	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78
27	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77
28	0.68	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76
29	0.68	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76
30	0.68	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75
40	0.68	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70
60	0.68	1.30	1.67	2.00	2.39	2.66
x	0.67	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58

NOTES

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

प्रारंभिक सांख्यिकीय विधियां तथा सर्वेक्षण तकनीकें

खंड

9

प्रतिदर्श सर्वेक्षण

विशेषज्ञ समिति

प्रो. वाई.के. अलघ
सदस्य, योजना आयोग
नई दिल्ली

प्रो. अमिय के. बागची
निदेशक, समाज विज्ञान अध्ययन केंद्र
कलकत्ता

प्रो. बी.बी. भट्टाचार्य
आर्थिक विकास संस्थान
दिल्ली

प्रो. टी.एन. कृष्णन
अध्यक्ष, विकास अध्ययन केंद्र
त्रिवेन्द्रम

प्रो. बी. सर्वेश्वर राव
अर्थशास्त्र विभाग (सेवा निवृत्त)
आंध्र विश्वविद्यालय
वाल्टेयर

प्रो. सी.एच. हनुमंत राव (अध्यक्ष)
आर्थिक विकास संस्थान
दिल्ली

प्रो. नीलकंठ रथ
गोखले राजनीति एवं अर्थशास्त्र संस्थान
पुणे

प्रो. बोधायन चट्टोपाध्याय (संयोजक)
अर्थशास्त्र विभाग
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
नई दिल्ली

पाठ्यक्रम निर्माण दल

प्रो. जे. रॉय
भारतीय सांख्यिकी संस्थान
203, बी.टी. रोड
कलकत्ता

संकाय सदस्य
प्रो. बोधायन चट्टोपाध्याय
डॉ. श्रवण कुमार सिंह
श्री अर्घ्य कुसुम मित्रा
श्री कौस्तुभ बारिक
कु. मधु बाला
श्री दीपायन भट्टाचार्य
श्री आर.ए. चौधरी

सचिवालयिक सहायक
श्री प्रवीण कुमार शर्मा
श्रीमती शान्ति रामचन्द्रन
कु. रेखा तिवारी
श्री आर.एम. भारद्वाज (हिन्दी प्रस्तुति)
प्रो. बी.एन. कौल (संरचना संपादक)
प्रो. बी.सांबशिव राव (भाषा संपादक)

सामग्री निर्माण

श्री बालकृष्ण सेल्वराज
कुलसचिव
मुद्रण एवं प्रकाशन प्रभाग
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

दिसम्वर 1991

ISBN-81-7263-046-8

इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय के पाठ्यक्रमों के विषय में और अधिक जानकारी विश्वविद्यालय के कार्यालय मैदान गढ़ी

खंड 9 प्रतिदर्श सर्वेक्षण

परिचय

इस खंड में प्रतिदर्श सर्वेक्षण के संपूर्ण क्षेत्र, अभिकल्पना, प्रविधियां, आकलन प्रक्रिया तथा सामाजिक-आर्थिक सर्वेक्षण के मूल सिद्धांतों की व्याख्या की गई है।

इस खंड में दो इकाईयां हैं—इकाई 17 तथा इकाई 18।

इकाई 17 में मुख्य प्रकार की प्रतिदर्श अभिकल्पनाओं तथा प्रविधियों का जिक्र है जिनमें प्रतिस्थापन सहित तथा प्रतिस्थापन सरल यादृच्छिक प्रतिचयन से लेकर स्तरित प्रतिचयन, बहुचरणी प्रतिचयन, क्रमबद्ध प्रतिचयन तक हैं। यहां यादृच्छिक संख्या सारणी के प्रयोग द्वारा अनुरूप यादृच्छिक प्रतिचयन प्रक्रिया की भी जानकारी मिलेगी।

इकाई 18 में विभिन्न प्रकार के प्रतिदर्श अभिकल्पनाओं के लिए प्रतिदर्श प्रेक्षणों द्वारा समष्टि प्राचलों के अनगिनत आकलन के लिए वैध आकलन प्रक्रिया की जानकारी दी गई है। यहां पर आपको सर्वेक्षण लागतों, प्रतिचयन तथा प्रतिदर्श आकार में परस्पर संबंध के बारे में भी जानकारी मिलेगी तथा बाद में सामाजिक-आर्थिक सर्वेक्षण का नियोजन करने के मूल सिद्धांतों का जिक्र भी किया गया है।

इकाई 17 प्रतिचयन अभिकल्पनाएं

इकाई की रूपरेखा

17.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन द्वारा आप निम्नलिखित प्रकार के प्रतिदर्शों को यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं के प्रयोग द्वारा प्राप्त करने की विधि सीख सकेंगे :

- प्रतिस्थापन सहित/बिना सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श
- आकार की आनुपातिक प्रायिकताओं सहित प्रतिचयन तथा गुच्छ प्रतिचयन
- समान प्रायिकताओं तथा आकार की आनुपातिक प्रायिकताओं सहित क्रमबद्ध प्रतिचयन
- बहुचरणी यादृच्छिक प्रतिचयन
- स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन

17.1 प्रस्तावना

जैसा कि हम पहले से जानते हैं कि जब एक सामाजिक-आर्थिक [illegible]

गिनती या माप किया जा सकता है। ये अभिलक्षण गुणात्मक या परिमाणात्मक हो सकते हैं। सांख्यिकी-विद् की रुचि किसी विशेष व्यष्टि के अभिलक्षण में न होकर समष्टि की सभी इकाइयों के अभिलक्षण समूह–योग, माध्य या अनुपात में होती है। समष्टि के इन संख्यात्मक अभिलक्षणों को प्राचल कहते हैं। यह इससे पहले खंड से हमें ज्ञात है।

प्राचलों का यथार्थ मान प्राप्त करना कभी भी संभव नहीं होता। इसके दो कारण हैं : (i) समष्टि की किसी निश्चित इकाई के लिए अभिलक्षण का यथार्थ मान करना संभव न हो; तथा (ii) समष्टि की सभी इकाइयों से सूचना प्राप्त करना व्यवहार्य न हो। जो कुछ प्राप्त किया जाता है, सामान्यतः वह प्राचल के यथार्थ मान का सन्निकटन होता है। व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए सन्निकटन में कुछ त्रुटि की मात्रा को इस रूप में स्वीकार किया जा सकता है कि इस आकार की त्रुटियों से सूचना द्वारा निष्कर्ष प्राप्त करने पर कोई प्रभाव नहीं होता। वास्तव में आवश्यकता से अधिक परिशुद्धता स्तर प्राप्त करना कोई बुद्धिमानी नहीं है क्योंकि यह खर्चीला तथा बहुधा प्राप्त करना असंभव हो सकता है। हम पहले से जानते हैं कि आर.ए. फिशर ने प्रतिदर्श सर्वेक्षण के बारे में क्या कहा है? उनके अनुसार, प्रतिदर्श सर्वेक्षण, पूर्ण गणना का व्यवहार्य विकल्प होता है, जोकि प्रायः इसमें बेहतर होता है।

17.2 कुछ मूल अवधारणाएं

हम पहले अध्ययन की गई प्रतिचयन की कुछ अवधारणाओं को संक्षेप में दोहराते हैं। चूंकि हमारे रुचि व्यष्टियों के मानों में न होकर समूह में है तथा एक निश्चित आकार की त्रुटि स्वीकार्य है, इसलिए समष्टि में से व्यष्टियों का एक उपयुक्त निरूपक समुच्चय प्राप्त करना तथा इस चुने हुए समुच्चय की व्यष्टियों से ही सूचना प्राप्त करना संभव होता है। इन आंकड़ों से एक उपयुक्त संचय का परिकलन किया जा सकता है तथा इसके प्राचल के सन्निकटन के रूप में प्रयोग किया जा सकता है। यहां पर यह सावधानी रखना अत्यंत आवश्यक है कि समुच्चय का चयन किसी भी प्रकार से चयनकर्ता की जानकारी या अज्ञानता की अभिन्नतता से प्रभावित न हो। इसलिए यह सुझाव दिया जाता है कि समुच्चय का चुनाव, सिक्का उछालने, पासा फेंकने या आंख बंद करके एक थैले से कुछ संख्या में टिकट प्राप्त करना जैसी एक निष्पक्ष संयोग प्रक्रिया द्वारा किया जाना चाहिए।

17.2.1 प्रतिचयन का प्रारंभिक ज्ञान

समष्टि से संयोग प्रक्रिया द्वारा चयन किए गए व्यष्टियों के समुच्चय को प्रतिदर्श कहते हैं। प्रतिदर्श की व्यष्टियों के प्रेक्षित मानों से परिकलित परिमाण को प्रतिदर्शज कहते हैं। जब प्रतिदर्श का प्रयोग प्राचल के सन्निकटन के लिए किया जाता है तो यह प्राचल का आकल कहलाता है। संयोग प्रक्रिया जिसके द्वारा प्रतिदर्श का चुनाव किया जाता है, प्रतिचयन अभिकल्पना कहलाती है। प्रतिदर्श से आकल को परिकलित किए जाने वाले नियम को आकलन प्रक्रिया कहते हैं। प्रतिचयन अभिकल्पना तथा आकलन प्रक्रिया को एकत्रित रूप में प्रतिचयन युक्ति कहते हैं।

17.2.2 प्रतिचयन तथा अप्रतिचयन त्रुटियां

निश्चित व्यष्टियों से संकलित आंकड़ों में त्रुटियां, जोकि व्यष्टि की अज्ञानता या पूछी गई सूचना को व्यक्त करने की उसकी अनिच्छुकता, प्रेक्षित किए जाने वाले या मापे जाने वाले अभिलक्षण की अस्पष्ट परिभाषा, अन्वेषक की व्यक्तिपरक अभिनतता, सम्मिलित की जाने वाली समष्टि के सही परिभाषा करने की असफलता, आंकड़ों के लिखने तथा संसाधन में, समग्र त्रुटियों को अप्रतिचयन त्रुटियां कहते हैं। आंकड़ों को इस प्रकार की त्रुटियों से बिल्कुल बचाना असंभव होता है, लेकिन आंकड़ों को एकत्रित करने की प्रक्रिया के ध्यानपूर्वक आयोजन द्वारा, जिसमें पूछताछ सूची की अभिकल्पना तथा अन्वेषक का प्रशिक्षण तथा सूचना देने वाले का इच्छापूर्ण सहयोग सम्मिलित होता है। इस प्रकार की त्रुटियों को कम

प्राचल के आन्तरिक मान से भिन्न होता है क्योंकि इसका परिकलन सभी व्यष्टियों पर आधारित न होकर उनके एक उपसमुच्चय के अभिलक्षणों पर आधारित होता है। इस अंतर को प्रतिचयन त्रुटि कहा जाता है। हम यह जानते हैं कि प्रतिदर्श का चयन एक संयोग प्रक्रिया द्वारा किया जाता है। इसलिए दी हुई प्रतिचयन युक्ति के लिए प्रतिचयन त्रुटि एक यादृच्छिक चर होती है। इसलिए प्रतिचयन त्रुटियों की प्रकृति की जांच के लिए प्रायिकता सिद्धांत का प्रयोग किया जा सकता है तथा इसके द्वारा ऐसी सीमाएं निश्चित की जा सकती हैं जिनके बीच इन त्रुटियों के घटित होने की प्रायिकताएं बहुत अधिक हों। प्रतिचयन त्रुटि के आकार को बड़ी सीमा तक, एक उपयुक्त प्रतिचयन अभिकल्पना को प्रयोग करके, नियंत्रित किया जा सकता है।

अप्रतिचयन त्रुटि की कठिनाई यह है कि यह अत्यन्त व्यक्तिपरक होती है तथा सरल गणितीय विश्लेषण के वशवर्ती नहीं होती। अप्रतिचयन त्रुटियों पर नियंत्रण आंकड़ों के एकत्रित करने की प्रक्रिया के केवल ध्यानपूर्वक निरीक्षण तथा प्रबंध द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। कार्य का पैमाना जितना बड़ा होगा, उतनी ही प्रभावी-प्रबंध की समस्या होगी। दी हुई साधनों की मात्रा से पूर्ण गणना की तुलना में प्रतिदर्श सर्वेक्षण के लिए अप्रतिचयन त्रुटियों का नियंत्रण करना अत्यन्त सरल होता है

यहां यह जानना आवश्यक है कि प्रतिदर्श सर्वेक्षण की तुलना में पूर्ण गणना द्वारा आंकड़े एकत्रित करने की कुल लागत अत्यन्त अधिक होती है तथा प्रतिदर्श सर्वेक्षण में सम्मिलित प्रतिव्यष्टि से आंकड़े प्राप्त करने की लागत अत्यन्त ऊंची होती है। अगर इस अतिरिक्त राशि को बुद्धिमानी से व्यय किया जाए तो प्रतिदर्श में सम्मिलित किसी व्यष्टि के लिए अप्रतिचयन त्रुटि का आकार पूर्ण गणना में त्रुटि की तुलना में अत्यन्त कम होने की प्रत्याशा करना तर्कसंगत होता है।

त्रुटि के दो घटकों—प्रतिचयन तथा अप्रतिचयन—में से दूसरा अर्थात् अप्रतिचयन त्रुटि प्रायः अत्यधिक बड़ी होती है। केवल अप्रतिचयन के प्रभावशाली नियंत्रण द्वारा ही हम त्रुटि की एक तर्कसंगत निम्न सीमा सहित प्राचल का सन्निकटन प्राप्त कर सकते हैं। इसलिए संचयों के निर्धारण के लिए, प्रतिदर्श सर्वेक्षण अधिक प्रभावशाली होते हैं क्योंकि जब इनका उपयुक्त तरीके से संचालन किया जाता है तो अप्रतिचयन त्रुटि का आकार बहुत ही न्यून होता है।

17.2.3 प्रतिदर्श से श्रेष्ठ आकल के अभिलक्षण

किसी प्रतिचयन युक्ति के पुनरावृत्ति द्वारा आकल के भिन्न संख्यात्मक मान प्राप्त होते हैं। अगर प्रतिचयन युक्ति की अत्यधिक पुनरावृत्ति की जाए तो हमें आकल के उतने ही अधिक मान प्राप्त होंगे। प्रतिचयन युक्ति की पुनरावृत्ति परिमिति संख्या में होने पर इससे प्राप्त आकलों के सभी संभावित मानों के बारबारता बंटन को प्रतिदर्शज का प्रतिचयन बंटन जाना जाता है। चाहे व्यवहार में प्रतिदर्श युक्ति का प्रयोग सामान्यतः केवल एक ही बार किया जाता है, लेकिन प्राचलन आकल के उद्देश्य के लिए प्रतिदर्शज के प्रतिचयन बंटन के अंतर्गत अवधारणा का प्रयोग युक्ति की श्रेष्ठता के माप की परिभाषा के लिए किया जाता है।

मान लीजिए प्राचल μ_s के आकल के लिए प्रतिदर्श से प्रतिदर्शज S का परिकलन किया गया है। अगर S के प्रतिचयन बंटन का समांतर माध्य μ_s के बराबर है तो प्रतिदर्शज S को (या प्रतिचयन युक्ति को, जिसके द्वारा S की उत्पत्ति हुई है) अनभिनत कहा जाता है। आकल की श्रेष्ठ विशेषताओं में से एक यह है कि यह अनभिनत होना चाहिए, या बुरे से बुरा इसकी अभिनता कम होनी चाहिए। प्रतिदर्शज के प्रतिचयन बंटन के माध्य तथा प्राचल के मान के अंतर को अभिनतता कहते हैं।

अनभिनत आकलों की तुलना के लिए हम प्रतिदर्शज के प्रतिचयन बंटन के मानक विचलन पर विचार करते हैं, जिसको प्रतिदर्शज की मानक त्रुटि कहा जाता है। अनभिनत आकल की जितनी छोटी मानक त्रुटि होगी उतना ही अधिक उसका प्राचल के नजदीक होने की संभावना होती है। उन सभी प्राचल के अनभिनत आकलों में से वह आकल जिसकी मानक त्रुटि न्यूनतम हो, को सबसे अच्छा या अत्यन्त दक्ष कहा जाता है।

प्रायिकता सिद्धांत की भाषा में संयोग प्रक्रिया से चुने हुए प्रतिदर्श से परिकलित प्रतिदर्शज S एक यादृच्छिक चर होता है। अगर $E(S) = \mu_s$ हो तो यह μ_s का अनभिनत आकल होता है, यहां पर E यादृच्छिक चर की प्रत्याशा को सूचित करता है। μ_s के अनभिनत आकल S की मानक त्रुटि $S.E.(S) = +\sqrt{\text{प्रसरण}}\,(S)$ होती है। μ_s के आकलन उद्देश्य के लिए एक आकलक को अनभिनत कहा जाता है अगर $E(S) \neq \mu_s$ हो। इस अभिनतता की मात्रा $\delta = E(S) - \mu_s$ होती है। आकलक S की माध्य वर्ग त्रुटि को $MSE(S) = E(S-\mu_s)^2 =$ प्रसरण $(S) + \delta^2$ परिभाषित किया जाता है, जहां पर δ अभिनतता की मात्रा है।

यहां पर यह ध्यान दीजिए कि मानक त्रुटि स्वयं समष्टि की सभी व्यष्टियों के अभिलक्षणों का फलन होती है। दूसरे शब्दों में, यह स्वयं भी समष्टि प्राचल होता है। इससे पहले खंड में हमने प्रतिदर्श प्रेक्षणों से मानक त्रुटि के आकलन की समस्या पर विचार किया था। अब हम प्रतिदर्श अभिकल्पना के संदर्भ में इन पर विचार करेंगे।

अगले दो भागों में हम प्रतिदर्श के चुनाव तथा प्राचल के आकलन की विभिन्न विधियों पर विचार करेंगे।

बोध प्रश्न 1

1) पूर्ण गणना की तुलना में प्रतिदर्श सर्वेक्षण को प्रायः अधिमान क्यों दिया जाता है? (लगभग 50 शब्दों में उत्तर दीजिए)

....

....

....

....

....

....

2) i) प्रतिदर्श, प्राचल तथा प्रतिदर्शज, प्रत्येक की एक वाक्य में परिभाषा दीजिए।

....

....

....

ii) प्रतिचयन तथा अप्रतिचयन त्रुटि के बीच अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

3) प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त श्रेष्ठ आकल के अभिलक्षणों को परिभाषित कीजिए।

....

....

....

....

....

17.3 प्रतिदर्शों के चयन की विधियां

सैद्धांतिक तौर पर प्रतिदर्श का चयन, समष्टि की प्रत्येक इकाई के लिए टिकट बनाकर, जिस

17.3.1 यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याएं

अंकों के लंबे अनुक्रम को, जिसमें प्रत्येक स्थान को स्वतंत्र रूप में 0, 1, 2, ..., 9 अंकों में से एक के द्वारा इस प्रकार से भरा जाता है कि किसी एक स्थान की इनमें से किसी एक अंक द्वारा भरे जाने की प्रायिकता 1/10 होती है, यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं की शृंखला कहते हैं। धारणात्मक दृष्टि से हम यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं की प्रजनन प्रक्रिया के बारे में इस प्रकार विचार कर सकते हैं। समान आकारके दस कार्ड लीजिए, जिन पर 0, 1, 2, ..., 9 संख्याएं लिखी हुई हों। इनको एक थैले में रखकर अच्छी तरह से मिला लीजिए। अब थैले में से आंख बंद करके एक कार्ड निकालिए और इस पर लिखे अंक को लिख लीजिए। इस कार्ड को वापस थैले में रख दीजिए, तथा कार्डों को दोबारा मिलाइए। उसमें से एक कार्ड को उसी प्रकार बंद करके फिर निकालिए तथा इस पर लिखे अंक को लिख लीजिए। यह यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं की श्रृंखला का दूसरा अंक होगा। इस प्रक्रिया को बार-बार दोहराने पर हम उत्तरोत्तर संख्याओं के एक अनुक्रम का प्रजनन कर सकते हैं, जोकि यादृच्छिक संख्याओं की श्रृंखला कहलाता है। वास्तविक व्यवहार में यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं का प्रजनन और विधियों से भी किया जाता है। इन विधियों में मशीन यंत्र या अधिकतर उत्तरोत्तर गुणा या योग की गणितीय एलगोरिथम (alogrithms) विधि होती है। लेकिन व्यवहारिक सांख्यिकी-विद् के लिए यादृच्छिक प्रतिचयन तालिका अत्यन्त उपयोगी हैं, जिनमें से निम्नलिखित बहुत प्रसिद्ध हैं:

Tracts for Computers No. 15 (by L.H.C. Tippelt) and No. 24 (by M.G. Kendall and B. Smith), Cambridge University Press

Table XXXII in Statistical Tables for Biological Agricultural and Medical Research (by R.G. Fisher and F. Yates), Oliver and Boyd

One million random digits (Rand Corporation), The Free Press

यहां पर हमने 8000 यादृच्छिक अंकों की यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं के चार पृष्ठ सम्मिलित किए हुए हैं।

समष्टि से यादृच्छिक प्रतिदर्श के चयन के लिए यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याएं उपयोगी होती हैं। ये यादृच्छिक प्रयोगों तथा घटनाओं, जोकि संयोग पर आधारित हैं, के अनुकरण में भी उपयोगी होती हैं। हम समष्टि से यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं द्वारा प्रतिदर्श चयन की विभिन्न विधियों की व्याख्या करेंगे।

यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याएं-I

4266	1833	1920	6140	9806	1980	2124	7160	2395	5496
9326	9451	7687	2194	2154	8626	5273	7401	5485	7006
3360	7336	6112	0067	4657	3891	0981	8172	3475	3668
7695	8271	3176	5233	1675	7959	0097	8138	6258	1316
0562	0265	3884	6613	7555	6072	4812	2008	5849	5606
3117	0579	1518	7745	6331	0055	6613	1165	0494	2737
3373	1301	1616	5253	7692	4582	1532	2434	7435	9308
4797	6115	5354	4885	1128	5845	7991	0776	9193	3186
7084	9440	0610	1333	1020	1553	6874	8111	8439	5171
2077	5204	0147	0275	7940	2005	4349	8211	5244	0556
8425	9790	2850	6893	1414	0923	3077	6358	4082	2604
5008	2587	7722	9855	9086	5121	1357	9237	3381	5194
5879	5136	7146	5498	9477	4934	4431	9456	0380	6048
4834	2653	0162	7590	7694	5176	6164	0819	4042	9638
6019	2653	9949	5183	5669	2379	9169	4388	8271	0897
4456	6666	7277	5740	3535	0520	7083	1958	7383	6050
1040	2938	7097	9417	6460	3701	9889	5292	8656	5716
5920	4839	7960	5010	1111	5237	6929	9205	4169	2155
3262	7698	2095	3504	3319	8842	7777	4681	8757	3288
3422	3163	2964	4839	2482	6342	5426	4491	3354	1550
5200	4662	1067	6596	5213	1391	9709	5764	1316	9836
4382	1950	5826	9658	3542	2147	7325	0145	7065	6088
3075	2963	6050	2543	3838	4683	9409	7941	5081	3349
6392	5109	8070	0504	3131	5151	3376	5783	7589	1719
2992	4830	8819	4907	6895	0626	7856	5908	5996	8176

9197	1648	3196	0991	1074	7536	9231	0151	5916	9033
8142	0953	1572	3523	9706	8005	3784	6377	0332	4213
1566	0563	8832	6191	4474	3894	7950	0685	0560	7206
0362	1316	3605	7469	0329	7130	8797	7144	3931	2641
9964	5760	8798	1697	6530	8280	8999	3769	2857	5019
6416	9596	0461	2575	0135	6923	3593	7940	8990	1739
0899	6459	8310	7109	9154	8480	4169	7637	9418	5246
7555	9360	1078	4041	3425	2124	6852	5298	8411	1997
6653	3931	9746	6681	8012	0968	3035	6846	6146	5465
9935	0705	8944	9359	2535	7204	5230	5966	0452	4021
1687	3423	5103	6616	2842	1057	3124	3811	2985	9131
4783	3325	8627	5214	6123	9435	8657	5672	0500	5619
7520	8697	1346	6143	1315	1950	6204	2744	9359	8837
4159	1522	5691	5637	7357	1645	7235	5106	8505	6879
8101	7398	1124	6379	4041	3597	4609	6473	2501	8428
8319	2590	7208	9256	5605	0133	7676	5963	3221	7832
0262	4960	9970	6806	0361	6979	6489	4185	2516	6810
7580	5913	3827	6089	2074	3735	8424	2566	7633	4165
4513	9696	2345	2464	0053	4291	5998	3204	0267	7998
3449	7930	8099	9859	0530	2946	2431	1721	0421	6499

यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याएं II

7875	8695	9718	9086	8600	0860	7715	1690	0793	2141
4693	2122	3861	2254	8368	9337	6227	4870	3616	5036
1650	0507	5455	3317	5235	1867	0748	5775	5501	5182
8818	4330	3702	8898	0822	674	0493	5584	7101	7112
2493	0341	7572	3715	3217	7946	9657	5827	7758	5562
7588	8347	2277	8783	6490	8582	7684	4580	4727	7995
5622	4782	7836	4908	5827	6845	0379	5073	2679	0196
3021	3550	0903	9402	7315	2121	1404	8391	4292	0283
6384	8151	5778	1197	4315	8438	9283	0589	5816	7016
7000	1054	7899	7971	6700	0105	4789	1466	2742	2753
6949	1975	6871	9722	0424	4073	8256	3696	1063	2941
8732	1295	1633	4050	3291	3156	5929	1315	6063	6718
1088	6718	0857	2128	4424	7609	0592	3121	8024	7114
5308	7625	3463	4101	5797	2088	7876	8910	2629	1861
3310	9249	9369	7589	1211	0555	2865	7045	3916	3487
5048	9142	9119	1820	2231	2183	6384	8340	8024	7811
9743	5184	2918	4530	8763	8928	3031	5253	4167	0001
0536	7234	3249	1670	1579	4789	1872	0827	4227	5367
2656	8919	4919	1202	6719	7224	2076	1320	4243	1073
8256	3690	9411	9936	6106	1097	5373	2176	2301	4754
3789	2635	6945	5656	9710	1835	0480	9271	8849	3165
6713	9675	5626	7101	9356	2500	4647	5754	3789	2635
6429	9262	3894	5565	8856	3016	9748	3714	5982	5684
0939	1123	9320	1304	2874	5472	5485	8024	2587	4987
2478	9871	5428	7348	7145	7725	4146	8785	7423	2541
4687	5478	5742	3254	0896	5548	7537	7551	9054	2447
8523	1484	8754	5939	5175	3751	2321	4826	9387	4587
5411	0028	7095	1291	0465	6930	2114	8847	3958	7930
1649	0880	7931	3213	4896	1335	5820	6836	7399	9824
5158	7501	1937	1881	7319	2227	6104	7173	4440	3446
1757	7833	5067	0419	6811	9098	3769	4483	3765	8245
1587	5011	9726	2844	5023	5635	3768	4150	5080	6848
1574	0544	3572	3092	6776	0740	5380	4656	9181	6772
8159	7611	4615	9965	4160	6354	3050	5760	5081	4974
9800	6655	7666	1305	5163	0995	1116	8062	1538	0777
4023	4670	6758	0827	2351	0154	0610	7356	7130	8770
2891	2461	5676	8812	8191	2833	1815	1328	1281	8573
6702	1288	3648	2982	9727	5498	4796	9890	2571	8397
9862	2910	9612	8311	3041	3730	3578	3109	4862	1095

6224	6469	8162	8437	3573	3771	5139	3444	8565	3899
0155	3732	3029	[illegible]	6356	4229	4587	1521	8705	1886
9552	6952	8124	[illegible]	1237	9799	4351	5135	5929	1783
3860	9230	8392	4158	3979	5555	2113	6785	1170	8584
3979	6374	2776	8369	3933	1993	1739	9602	1333	3520
4675	3819	5948	7604	5956	3561	5385	7044	1092	1320
7675	3516	9633	4253	9551	2934	6394	1451	5774	1608

यावृच्छिक प्रतिचयन संख्याएं-III

2862	8132	4827	7758	5824	6854	9137	9199	0583	3278
2826	6671	6000	5036	3136	2908	4942	2149	8929	0915
4271	2013	3717	0577	7803	1372	5855	2449	4718	8231
0701	8940	2009	7881	9540	7969	2931	2074	4829	4950
4176	4312	8228	2176	6265	3619	9522	2909	5564	1824
7716	5855	6169	6265	3619	9522	2909	5641	8277	1658
9322	1625	6459	3231	3935	0345	0928	4344	0118	2662
9319	8353	1750	7588	1531	5701	1223	2628	9410	5201
3487	4904	1343	5813	0409	0058	0879	3058	4930	9478
7133	2586	5258	6299	8427	7774	6818	7573	2883	4223
1632	9644	8392	4826	3425	5234	4913	3415	5052	0046
6210	6765	9652	1331	9197	0015	7684	5265	2271	9503
3383	2522	6051	5698	9459	0162	2894	5901	6228	9416
9768	6153	3661	9298	7353	7381	2022	0839	8932	0046
3351	3717	8265	2992	2609	2315	5485	5751	7417	0682
3919	9376	8517	1311	2923	7056	6752	6479	6687	8723
2619	9190	4808	1209	8216	5392	8594	0293	8709	7941
6440	3701	9889	5292	8656	5716	6920	4839	7960	5110
1111	5227	6929	9205	4169	2755	3262	7698	0953	5037
4380	6159	2678	2424	7975	4336	6730	6476	8293	6995
8738	3280	9965	8063	2550	0701	4787	7701	4849	7131
7779	3521	2794	6202	2079	0893	6746	1090	8494	0831
9763	73388	3909	6012	1420	4276	1301	7613	0173	6987
7164	1739	9100	3913	0080	7862	0707	0248	9190	1980
4667	8114	5366	6067	1232	8175	5772	6735	3505	3274
9851	1568	1120	9246	7883	2739	9362	6536	1995	2292
0955	6418	2477	1758	6240	4007	9428	8719	6316	4775
7308	5505	6705	1527	8360	6145	1312	6854	6492	8603
1925	9937	3872	3693	8318	7281	9504	4747	5926	7393
3501	0017	2542	9795	9785	3349	3799	7039	1814	8474
8318	4323	2853	5561	5119	0656	9034	7903	5329	2799
2579	5327	6471	9066	1594	7378	9921	3877	8862	4040
0794	2887	1963	1647	7573	0855	0567	0515	2783	6061
4513	0668	5464	9286	0319	[illegible]	4304	7575	2657	1195
5384	3970	7138	2795	6810	9038	0923	6384	3588	8995
4151	9079	3713	1843	8107	1419	7105	2352	5630	9526
9862	9095	0760	9396	1108	7958	4277	6525	6125	1701
8230	2203	5837	0417	7069	8163	9603	1811	1961	0303
0616	0509	5012	0628	1394	0839	9048	1077	1015	5308
4997	1235	9125	2020	5946	4012	0727	9214	4668	4912
9902	9714	5639	0175	0031	3813	8081	3447	5790	6701
2332	2445	2910	8455	4960	5144	9530	0148	0204	1032
1584	7502	3695	5620	8915	5727	4102	1129	0066	8262
6011	8418	7873	2314	5269	0501	4804	1937	9548	4750
2369	5567	6389	4016	9442	0198	7866	8237	2911	8451
7732	0469	6070	6333	4843	3375	5277	6189	8485	9098
4945	1925	0184	6067	9699	0744	5000	7360	2563	9408
7677	9326	4269	4822	8871	5178	8829	0693	6160	7758
6834	7384	9379	9192	8085	2914	7460	3570	8508	4405
4302	0675	2388	1336	1212	3937	0174	9103	1802	1015

यावृच्छिक प्रतिचयन संख्याएं-IV

1498	3222	5087	8199	3133	5466	8986	3423	9013	6476
3284	8491	2383	6283	4067	8115	1066	3240	0434	3676
2319	5745	7157	6134	8539	6823	9629	2583	5542	1733
4558	7615	5803	5606	1782	2253	6429	2254	4567	8048
0535	9402	0618	1422	7204	1603	1211	5023	3563	2630

6388	6095	5061	8152	4037	7122	3534	8501	5089	2005
9046	3693	8827	8293	5146	6018	2576	0043	7891	8157
9850	9317	1296	0131	7509	7989	1815	4378	5769	0601
8221	9691	6994	0354	0132	9968	9416	3726	4406	3550
3823	9921	1219	1149	2050	2682	7697	2895	3397	8988
1406	3241	8226	7541	4635	4184	9325	0726	0613	4372
1362	5191	6353	5093	7829	4786	5495	3445	0638	2419
8890	9912	3216	9937	0380	7370	9477	5374	5165	2034
2457	5948	6090	1974	8721	5114	7461	0662	2371	1970
2365	1584	5651	3397	5485	6489	9927	5053	9884	8116
4059	6410	0445	2247	5672	1923	7295	1864	9076	8760
4186	0562	0907	3927	7941	2051	8649	2750	5323	2169
9418	4936	8276	9904	6369	0199	3940	2622	0783	0405
9607	8736	2995	2771	2264	4014	0663	5351	6525	1585
9641	3636	4558	0182	8893	4348	0344	3534	8035	5033
2418	2937	8290	3424	0456	5170	0445	5166	[illegible]	9735
0157	8239	9267	0478	6557	5963	3979	8247	3437	8734
7225	6089	2211	2541	4495	3448	6034	8556	7201	5748
0182	5760	0437	8218	1579	8509	3170	7960	1958	5629
1241	3183	6558	7963	6547	8982	6403	6536	9674	2473
7473	4318	2600	3361	1115	8786	9580	3061	4114	6556
8861	4062	6880	5364	0398	2258	1563	5620	2451	1916
1044	2323	8387	3170	3104	2694	6989	2636	6738	5414
1161	9330	7686	4403	2058	9463	3671	2737	2901	1598
6818	6236	6635	2662	3336	8732	1075	8420	0094	1162
1026	9026	1866	7839	4029	4710	4177	9630	2045	0001
7423	9379	4480	0147	5364	0273	5379	0568	9590	0965
5402	0221	3755	8076	6868	8318	7024	8918	7269	8131
4843	2906	0757	5291	1946	3095	9973	2298	6719	8046
0042	6664	7569	5233	2706	7533	8380	0837	0566	7497
3318	9319	9022	1162	7016	3836	2845	5813	1472	3125
8472	5480	6451	1563	3513	9867	5875	2993	2317	0615
2798	5993	7475	0921	7827	2337	1727	1215	7746	3526
7833	2035	3936	7884	3829	4691	1019	0421	6983	8468
5800	5970	4541	6587	4326	2057	4429	8476	5496	2296
4332	8805	3329	7242	9570	1082	7572	0874	3346	7333
8961	9445	3488	3457	0524	7940	1963	3188	3494	6728
8473	8813	1754	9561	1204	8769	2846	7521	5535	1665
9657	3058	1768	3224	1967	5430	5401	0827	5720	8743
3467	3338	9619	4453	4883	4570	5247	9401	9633	1883

17.3.2 दी हुई इकाइयों के समूह से समान प्रायिकताओं सहित एक इकाई का चयन

मान लीजिए हमें N=273 इकाइयों के समूह, जिनको क्रमिक रूप में अंकित किया हुआ है, से एक इकाई का यादृच्छिक चयन करना है। चूंकि 273 एक तीन-अंकों वाली संख्या है, इसलिए हम तीन संख्या वाली यादृच्छिक संख्याओं का प्रयोग करेंगे। मान लीजिए हम यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याएं पृष्ठ-iii की पंक्ति 6 तथा स्तम्भ 1 से शुरू करते हैं। यादृच्छिक अंकों की शृंखला को तीन अंकों के लगातार समूहों में इस प्रकार तोड़ा जाता है जैसे 771, 658, 556, 169, 626.... आदि। इस अनुक्रम में पहली तीन अंक संख्या जोकि 1 तथा 273 के बीच है, चौथी अर्थात् 169 है। अतः 169वीं इकाई का चयन किया जाता है।

यहां पर यह ध्यान दीजिए कि हमें पहले तीन, तीन अंक वाली यादृच्छिक संख्याओं—771, 658, 556 को अस्वीकार करना पड़ा क्योंकि वह परिसर (1, 273) से बाहर हैं। वास्तव में 000 से 999 के बीच 1000 संख्याओं में से केवल 273 संख्याएं 001 तथा 273 के बीच हैं, जिनका प्रयोग किया जा सकता है तथा बाकी 727 संख्याएं 000, 274-999 प्रयोग लायक नहीं हैं। अतः इस परिस्थिति में तीन अंक संख्या को अस्वीकार करने की प्रायिकता 0.727 है, जोकि बहुत अधिक है।

ऐसी पद्धति को ज्ञात करना आवश्यक है जिसके द्वारा यादृच्छिक संख्याओं के बड़े अनुपात का

एक से अधिक संख्याओं को संलग्न किया गया है। उदाहरण के लिए पहली इकाई के साथ संलग्न संख्याएं 001, 274 तथा 547 हैं। इसी प्रकार, दूसरी इकाई के संलग्न संख्याएं 002, 275, 548 हैं।

इकाई	संलग्न तीन अंक संख्याएं		
1	001	274	547
2	002	275	548
3	003	276	549
...	...	...	...
271	271	544	817
272	272	545	818
273	273	546	819

अब तीन अंक वाली संख्याएं 000, 820-999 संख्याएं किसी भी इकाई से संलग्न नहीं हैं क्योंकि अगर ये घटित होती हैं तो इनको अस्वीकार किया जाना चाहिए। इस पद्धति के अंतर्गत अस्वीकार की प्रायिकता केवल 0.181 है।

इस प्रकार हम एक तीन अंक यादृच्छिक संख्या R का चयन करते हैं। अगर चयन की गई संख्या 000 या 820, 821....999 है तो इसको अस्वीकार कर दिया जाता है तथा एक और तीन संख्या का चुनाव किया जाता है। जब तक हमें 001 तथा 819 के बीच एक संख्या प्राप्त नहीं होती। इस संख्या को 273 से भाग करके शेष ज्ञात किया जाता है अगर शेष S है तो उस इकाई जिसकी संख्या S है का चुनाव कर लिया जाता है। अगर शेष S शून्य के बराबर है तो इकाई संख्या 273 का चुनाव किया जाता है।

इस प्रकार N इकाइयों के समूह, जोकि 1 से N तक क्रमिक रूप से अंकित हैं, से यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं के प्रयोग द्वारा एक इकाई के यादृच्छिक चयन की विधि इस प्रकार है। मान लीजिए N की लंबाई t है अर्थात् N में अंकों की संख्या t है। तब बड़ी से बड़ी t अंकों की ऐसी संख्या ज्ञात कीजिए जोकि N से भाज्य हो तथा इस संख्या को हम M कहते हैं। 1 तथा M के बीच एक t अंकों वाली संख्या का चयन कीजिए जिसके लिए आप t अंकों की यादृच्छिक संख्याओं को एक के बाद दूसरे को देखते हैं, जब तक 1 तथा M के बीच आने वाली संख्या प्राप्त न हो जाए। इस संख्या को R से सूचित करते हैं। R को N से विभाजित कीजिए तथा शेष S प्राप्त कीजिए। अगर शेष $S \neq 0$ है तो S वीं इकाई का चयन कीजिए तथा अगर $S=0$ है तो N वीं इकाई का चयन कीजिए।

17.3.3 दी हुई इकाईयों के समूह से बहुत-सी इकाईयों का (क) प्रतिस्थापन सहित, तथा (ख) प्रतिस्थापन बिना चयन

मान लीजिए हमें एक 23 इकाईयों के समूह से 9 इकाईयों का यादृच्छिक चयन (क) प्रतिस्थापन सहित, तथा (ख) प्रतिस्थापन बिना, करना है।

यहां पर $N=23$ एक $t=2$ अंक संख्या है तथा दो अंकों की बड़ी से बड़ी संख्या जो 23 से भाज्य है $M=92$ है। हम पृष्ठ II पंक्ति 18 स्तम्भ 19 से शुरू करें तो हमें दो अंक संख्याओं से लगातार से यादृच्छिक संख्याएं प्राप्त होंगी : 79, 47, 89, 18, 72, 08, 27, 42, 27, 53, 67, 26, 56.... इत्यादि। चूंकि इनमें से कोई भी संख्या परिसर (01, 92) के बाहर नहीं है इसलिए सभी का प्रयोग किया जा सकता है। अब इनको 23 से भाग किया जाता है तो ये शेष बचते हैं : 10, 1, 20, 18, 3, 8, 4, 19, 4, 7, 21, 3, 10.... इत्यादि जोकि चयन की गई इकाईयों पर अंकित संख्याएं हैं।

अगर हमारा चयन प्रतिस्थापन सहित है तो पहले चयन हो चुकी इकाई के एक से अधिक बार चयन होने की संभावना होती है। इस परिस्थिति में उन 9 इकाइयों का चयन होगा, जिन पर क्रम संख्या 10, 1, 20, 18, 3, 8, 4, 19 तथा 4 है। इस प्रकार, चौथी इकाई का सातवें तथा नौवें स्थान पर दो बार चयन हुआ है।

अगर हमारा चयन प्रतिस्थापन बिना है तो जिस इकाई का पहले चुनाव हुआ है, उसको दोबारा नहीं चुना जा सकता। इस प्रकार के चयन में 9 इकाई की क्रम संख्याएं : 10, 1, 20, 18, 3, 8, 4, 19 तथा 7 होंगी। यहां पर चौथी इकाई के दोबारा चयन को छोड़ देते हैं।

दिया जाता है तो प्रतिचयन को प्रतिस्थापन सहित कहा जाता है। इस प्रकार की परिस्थिति में उसी इकाई के एक से अधिक बार चुने जाने की संभावना होती है। इसके विपरीत, अगर एक बार चुनी गई इकाई को समष्टि में वापस नहीं रखा जाता तो किसी भी इकाई के दूसरी बार चुने जाने की कोई संभावना नहीं होती। इस प्रकार के प्रतिचयन को प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन कहा जाता है। प्रतिस्थापन सहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन को संक्षिप्त रूप में SRSWR तथा प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन को संक्षिप्त रूप में SRSWOR लिखा जाता है।

जब एक N इकाइयों की समष्टि से n इकाइयों का सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श का चुनाव किया जाता है, तो समष्टि की सभी इकाइयों के किसी अभिलक्षण के योग का आकलन करने के लिए हम इसके अनुरूप प्रतिदर्श योग t को $\frac{N}{n}$ से गुणा कर देते हैं। सहजानुभूत आभास के द्वारा यह स्पष्ट है, क्योंकि प्रत्येक प्रतिदर्श इकाई वास्तव में समष्टि इकाइयों के $\frac{N}{n}$ के लिए है। इसका गणितीय औचित्य बाद में दिया गया है।

17.3.4 इकाइयों के समूह से असमान प्रायिकताओं सहित, जोकि आकार की आनुपातिक हैं, एक इकाई का चयन

कभी-कभी इकाइयों, जिनमें से एक का चुनाव किया जाना है, का आकार भिन्न होता है तथा हम यादृच्छिक चयन की ऐसी विधि चाहते हैं जिसमें एक इकाई के चुने जाने की प्रायिकता इसके आकार की आनुपातिक हो, जिससे बड़े आकार के चयन की प्रायिकता भी अधिक हो। इस उद्देश्य की प्राप्ति के लिए हम इकाइयों का एक नया समूह तैयार करते हैं जहां पर प्रत्येक इकाई का पुनरावृत्त उसके आकार के अनुसार उतनी ही बार किया जाता है (जोकि एक धनात्मक पूर्णांक लिया जाता है)। इस नए समूह से हम एक चयन समान प्रायिकता सहित कर सकते हैं।

उदाहरण के लिए, 7 इकाइयों के समूह से एक इकाई के चयन पर विचार कीजिए। मान लीजिए इन 7 इकाइयों के आकार क्रमशः 3; 2, 11, 1, 7, 6, तथा 9 हैं। इस प्रकार, हम इकाइयों का एक नया समूह बनाते हैं जिसमें इकाई संख्या 1 का पुनरावृत्त 3 बार, इकाई संख्या 2 का पुनरावृत्त दो बार, इकाई संख्या 3 का पुनरावृत्त 11 बार, इकाई संख्या 3 का पुनरावृत्त केवल एक बार, इकाई संख्या 5 का पुनरावृत्त 7 बार, इकाई संख्या 6 का पुनरावृत्त 6 बार तथा इकाई संख्या 7 का पुनरावृत्त 9 बार किया गया है। इसके लिए हम इकाई संख्या 1 को तीन क्रमिक संख्याएं 1, 2, 3 देते हैं, इकाई संख्या 2 को दो क्रमिक संख्याएं 4 और 5 देते हैं, इकाई संख्या 3 को 11 क्रमिक संख्या 6, 7,.....16 देते हैं .....आदि जैसा कि निम्नलिखित में दिखाया गया है:

इकाई संख्या	आकार	आकार का संचयी योग	संलग्न क्रमिक संख्याएं
1	3	3	01-03
2	2	5	04-05
3	11	16	06-16
4	1	17	17
5	7	24	18-24
6	6	30	25-30
7	9	39	31-39

इस प्रकार इस नए समूह में N=39 इकाइयां हैं, जिसमें से एक का यादृच्छिक चयन, समान प्रायिकताओं सहित, विवेचित विधियों द्वारा किया जाता है। यहां पर N एक 2 अंक संख्या है तथा बड़ी से बड़ी दो अंक संख्या, जोकि 39 से भाज्य हैं; M=78 है। हम 01 से 78 में से दो अंक की संख्या का चुनाव करते हैं। दिए हुए यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं में से हम पृष्ठ 1, पंक्ति 1 तथा स्तम्भ 1 से शुरू करते हैं। पहली ऐसी दो अंक संख्या R=42 है जिसको 39 पर भाग देने से शेष S=3 बचता है। जोकि मूल समूह की इकाई संख्या 1 के अनुरूप है। अतः मूल समूह की इकाई संख्या 1 का चुनाव हो जाता है।

N इकाईयों के समूह से एक इकाई के यादृच्छिक चयन की व्यापक विधि जिसमें iवीं इकाई के चयन की प्रायिकता इसके "आकार" X_i के आनुपातिक है तथा X_i एक धनात्मक पूर्णांक

इस विधि में इकाइयों के आकारों के योग की आवश्यकता होती है, जोकि इकाइयों की संख्या अधिक होने पर परिकलित करना कठिन हो सकता है। इसकी वैकल्पिक विधि में दो यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं ξ तथा η का प्रयोग किया जाता है, ξ का मान 1 तथा N के बीच तथा η का मान 1 तथा X अधिकतम के बीच, जहां पर X अधिकतम $X_1, X_2, ...X_n$ में से अधिकतम आकार को सूचित करता है, लिया जाता है। अगर ξ=i तथा $\eta \leq X_i$ हो तो iवीं इकाई का चयन हो जाएगा। अन्यथा युग्म (ξ,η) को अस्वीकार कर दिया जाता है तथा एक और युग्म को तब तक प्राप्त किया जाता है, जब तक इकाई का चयन नहीं हो जाता।

ऊपर दिए गए उदाहरण में N=7 तथा X अधि.=11 है।

ξ के लिए हम एक अंक की ऐसी यादृच्छिक संख्या लेते हैं जो 1 तथा 7 के बीच हो तथा η के लिए दो अंक संख्या लेते हैं, जो 01 तथा 99 के बीच हो। हम ξ का चयन यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं के पृष्ठ-II की पहली पंक्ति तथा पहले स्तम्भ से शुरू करके करते हैं तथा η का चयन इसी पृष्ठ की 26वीं पंक्ति तथा पहले स्तम्भ से शुरू करके हैं। ξ के चयन के लिए एक अंक की यादृच्छिक संख्याएं 7, 8, 7, 5, 8, 6, 9, 7, 1, 8, 9, 0, 8, 6..... आदि हैं तथा η के चयन के लिए दो अंक की यादृच्छिक संख्याएं 46, 87, 54, 78, 57, 42, 32, 54, 08, 69..... आदि हैं। अमान्य अंकों को अस्वीकार करने पर ξ के विकल्प का अनुक्रम 7, 7, 5, 6, 5, 7, 1, 6.... आदि है। इसी प्रकार η के विकल्पों का अनुक्रम (11 से भाग करने पर तथा शेष लेने पर) 2, 10, 10, 1, 2, 9, 10, 10, 8, 4.... आदि है। पहला युगम (ξ=7, η=2) है। अतः सातवीं इकाई का चयन किया जाएगा क्योंकि η का मान सातवीं इकाई के आकार से कम या बराबर है।

आकार की आनुपातिक प्रायिकता सहित प्रतिचयन को संक्षिप्त रूप में PPS लिखा जाता है तथा यह या तो प्रतिस्थापन सहित PPSWR होती है या प्रतिस्थापन बिना PPSWOR होती है। इस पाठ्यक्रम में हमारी रुचि केवल PPSWR सहित चयन में रहेगी। ऊपर व्याख्या की गई प्रतिचयन विधि द्वारा यह स्पष्ट है कि यह वही विधि है जिसमें समष्टि की प्रत्येक इकाइयों के उनके आकार के अनुसार छोटे टुकड़े किए जाते हैं।

तब इन छोटे टुकड़ों की समष्टि से एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श का चयन किया जाता है। निस्संदेह ये टुकड़े करना केवल हमारे दिमाग में ही होता है और इसके लिए हम इकाई के आकार के अनुसार इसे उतनी ही क्रमिक संख्याएं आबंटित कर देते हैं।

N इकाइयों की एक समष्टि पर विचार कीजिए जिसमें iवीं इकाई के लिए रुचि अभिलक्षण Y_i है तथा इसका आकार X_i है। चूंकि संकल्पनात्मक दृष्टि से iवीं इकाई X_i उप-इकाइयों में बंटी हुई है, तो संकल्पना दृष्टि से बंटी हुई समष्टि में कुल उप-इकाइयों की संख्या $X=X_1+X_2+.....+X_n$ होगी। इन X उप-इकाइयों से हमें η उप-इकाइयों के प्रतिदर्श का चयन करना है। अगर चयन की गई उप-इकाई वास्तव में iवीं इकाई में आती है तो चयन की गई इस उप-इकाई के अभिलक्षण का मान $Y^* = \frac{Y_i}{X_i}$ माना जाता है। यहां यह ध्यान दीजिए कि सभी X उप-इकाइयों के लिए Y^*_i का योग केवल $Y=Y_1+Y_2+....+Y_n$ है। इसलिए प्रतिदर्श मानों Y^*_i के योग S द्वारा Y के आकलन के लिए हमें S को $\frac{X}{n}$ से गुणा करना पड़ता है।

17.3.5 गुच्छ प्रतिचयन

अभी तक हमने समान या असमान प्रायिकताओं तथा प्रतिस्थापन बिना या सहित तथा एक के बाद एक आधार पर प्रतिदर्श के चयन पर विचार किया है। प्रतिदर्श चयन की एक और विधि में एक के बाद एक इकाई का चयन न करके पूरे प्रतिदर्श का चयन एक साथ किया जा सकता है। इसके लिए हम इकाइयों के गुच्छ बनाते हैं (जहां पर ये गुच्छे अतिव्यापन कर भी सकते हैं या न भी करें, लेकिन प्रत्येक इकाई का कम से कम एक गुच्छ में विद्यमान होना अनिवार्य है), और तब इन गुच्छों में से एक या अधिक गुच्छों का समान या असमान प्रायिकताओं सहित यादृच्छिक चयन किया जाता है। एक गुच्छ में इकाइयों की संख्या सभी गुच्छों में इकाइयों की संख्या के समान या असमान हो सकती है। उदाहरण के लिए, N=18 इकाइयों से हम प्रत्येक 3 इकाइयों के 6 गुच्छे इस प्रकार बना सकते हैं:

और उदाहरण के लिए N=17 इकाइयों की एक समष्टि पर विचार कीजिए, जहां पर 6 गुच्छ इस प्रकार बनाए गए हैं:

(u_1, u_2, u_3), (u_4, u_5, u_6), (u_7, u_8, u_9), (u_{10}, u_{11}, u_{12}), (u_{13}, u_{14}, u_{15}), तथा (u_{16}, u_{17})

यहां पर भी 6 गुच्छ हैं जोकि परस्पर अतिव्यापन नहीं हैं लेकिन पहले 5 गुच्छों के आकार 3 है तथा अंतिम गुच्छ का आकार दो है। इनमें से अगर एक गुच्छ का यादृच्छिक चयन, समान प्रायिकताओं सहित, किया जाता है तो पहले 5 गुच्छों में से चयन होने पर प्रतिदर्श का आकार 3 तथा छठे गुच्छे के चयन होने पर प्रतिदर्श का आकार 2 होगा। अतिव्यापी गुच्छों के उदाहरण के लिए N=17 इकाइयों की समष्टि की परिस्थिति पर विचार कीजिए जिसमें प्रत्येक 3 इकाइयों के 17 गुच्छे इस प्रकार बनाए गए हैं:

(u_1, u_2, u_3), (u_4, u_5, u_6), (u_7, u_8, u_9), (u_{10}, u_{11}, u_{12}), (u_{13}, u_{14}, u_{15}), तथा (u_{16}, u_{17})

यहां पर दो गुच्छों के बीच शून्य, एक या दो इकाइयां उभयनिष्ठ हो सकती हैं। इसमें से एक गुच्छ का यादृच्छिक चयन किया जा सकता है।

यहां पर यह स्पष्ट है कि गुच्छों का निर्माण बहुत विधियों से हो सकता है। गुच्छ प्रतिचयन के कुछ लाभ हैं। पहला, अगर केवल एक गुच्छ का ही चयन किया जाना है तो गुच्छ का कोई आकार होने के बावजूद हमें यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं का केवल एक बार प्रयोग करना है। दूसरा, अगर गुच्छों का निर्माण भौगोलिक सामीप्यता के आधार पर किया गया है तो एक से दूसरी इकाई तक जाने की परिवहन लागत बहुत कम हो जाएगी। तीसरा, अगर गुच्छों का निर्माण इस प्रकार किया गया हो कि गुच्छों के योगों के बीच प्रसरण छोटा रहे तो समष्टि योग या माध्य पर प्रतिचयन उच्चावचनों का न्यूनतम प्रभाव रहता है।

गुच्छ प्रतिचयन को नई समष्टि, जिसमें नई इकाइयां गुच्छ होती हैं, से प्रतिचयन के रूप में भी देखा जा सकता है। गुच्छ प्रतिचयन के द्वारा समष्टि के योग या माध्य के आकलन की समस्या के लिए हम प्रत्येक गुच्छ के लिए (नई इकाई) एक नए अभिलक्षण पर विचार कर सकते हैं, जोकि प्रत्येक मूल इकाइयों के चर के मानों का योग होता है। (जटिल परिस्थितियों में, गुच्छ का यह अभिलक्षण मूल इकाइयों के अभिलक्षण मानों का भारित योग (सरल योग के स्थान पर)हो सकता है।) अगर गुच्छे अतिव्यापी नहीं हैं तो गुच्छों के अभिलक्षण मानों का योग समष्टि में सभी मूल इकाइयों के अभिलक्षण मानों के योग के बराबर होगा। अगर गुच्छ अतिव्यापी हैं तो सममित परिस्थिति में गुच्छों के अभिलक्षण मानों का योग समष्टि की मूल इकाइयों के अभिलक्षण मानों के योग का गुणक होगा। गुच्छ प्रतिचयन द्वारा समष्टि योग के अनभिनत आकल के लिए इन तथ्यों का प्रयोग किया जा सकता है।

अगर एक गुच्छ का ही चयन किया जाता है तो मूलतः यह नई समष्टि से केवल एक (नई) इकाई के प्रतिचयन की परिस्थिति है और इसलिए इन परिस्थितियों में प्रतिचयन प्रसरण का आकलन सामान्यतः संभव होता है।

गुच्छ प्रतिचयन का महत्वपूर्ण रूपांतर क्रमबद्ध प्रतिचयन है जिसका विवेचन अब किया जाएगा।

बोध प्रश्न 2

1) समष्टि की 236 इकाइयों में से 5 इकाइयों के प्रतिस्थापन सहित एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श (SRSWR) का चयन कीजिए, जहां पर समष्टि इकाइयों को 1 से 236 तक क्रम में अंकित किया हुआ है।

....

....

....

....

....

....

2) 20 इकाइयों की समष्टि से, जिनको 1 से 20 तक क्रम में अंकित किया गया है, 10

3) अंग्रेज़ी वर्णमाला के 26 अक्षरों A, B, C, ..., Z में से 5 अक्षरों का एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श का प्रतिस्थापन बिना चयन (SRSWOR) कीजिए।

4) A B C D E F G अक्षरों का एक यादृच्छिक क्रमचय प्राप्त कीजिए। (संकेत : इसका अर्थ 7 इकाइयों की समष्टि से एक 7 इकाइयों का सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श प्रतिस्थापन बिना चयन (SRSWOR) होता है।

5) निम्नलिखित सारणी में एक गांव के 1668 व्यक्तियों की जातीय मूल (G_1, G_2, G_3 से सूचित) तथा व्यवसाय (P_1, P_2, P_3, P_4 से सूचित) के आधारों पर बंटन दिया हुआ है। इस समष्टि से 10 इकाइयों का एक सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श प्रतिस्थापन बिना चयन (SRSWOR) कीजिए।

जातीय मूल	व्यवसाय				योग
	P_1	P_2	P_3	P_4	
G_1	211	572	312	37	1132
G_2	78	149	103	15	345
G_3	42	83	58	8	191
	331	804	473	60	1668

17.4 क्रमबद्ध प्रतिचयन

क्रमबद्ध प्रतिचयन में समष्टि की इकाइयों की रैखिक या वृत्तीय सूची तैयार करने के बाद पहली प्रतिदर्श इकाई का यादृच्छिक चयन करके बाद में प्रत्येक I-वीं (जहां पर I को प्रतिचयन अंतराल कहते हैं), इकाई का चयन तब तक किया जाता है, जब तक आवश्यक संख्या में इकाइयों का चयन नहीं हो जाता या सूची समाप्त नहीं हो जाती।

17.4.1 समान प्रायिकताओं सहित क्रमबद्ध प्रतिचयन

समष्टि की N इकाइयों से n इकाइयों के रैखिक क्रमबद्ध प्रतिचयन में यह मान लिया जाता है कि इकाइयों को 1 से N तक क्रमिक संख्याएं प्रदान कर दी गई हैं। इसके बाद प्रतिचयन अंतराल $I = \frac{N}{n}$ परिकलित किया जाता है, जहां पर $\frac{N}{n}$ एक पूर्णांक संख्या है। अगर $\frac{N}{n}$ एक

Iवीं इकाई है। तब rवीं इकाई से शुरू करके प्रत्येक Iवीं इकाई का उत्तरोत्तर चयन तब तक किया जाएगा जब तक सूची समाप्त नहीं हो जाती। उदाहरण के लिए, अगर $N=17$ है तथा $n=3$ है तो $I=17/3=5.7$ जोकि 6 के सन्निकट है। अब हम पहली 6 इकाइयों $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ में से एक इकाई का यादृच्छिक चयन करते हैं। अगर पहले चयन की हुई इकाई u_1 है तो प्रतिदर्श u_1, u_7, u_{13} होगा। अगर पहले u_2 का चयन हुआ है तो प्रतिदर्श u_2, u_8, u_{14} होगा। लेकिन अगर पहले u_5 का चयन हुआ है तो प्रतिदर्श (u_5, u_{11}, u_{17}) होगा। लेकिन अगर पहले u_6 का चयन हुआ है तो प्रतिदर्श में केवल दो इकाइयां (u_6, u_{12}) होंगी। अतः यहां पर प्रतिदर्श आकार एक यादृच्छिक चर हैं, यहां पर 5 प्रतिदर्शों में यह 3 तथा एक प्रतिदर्श में दो हैं। इस प्रकार प्रतिदर्श आकार का प्रत्याशित मान 17/6 या व्यापक परिस्थिति में $\frac{N}{I}$ होता है।

परिवर्तनशील प्रतिदर्श आकार की समस्या को वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन द्वारा हल किया जा सकता है जिसमें पहली इकाई का यादृच्छिक चयन पूरी समष्टि से किया जाता है तथा बाद में प्रत्येक I वीं इकाई को वृत्ताकार रूप में प्रगमन करके जब तक ठीक n इकाइयों का चयन नहीं हो जाता, प्राप्त किया जाता है। अतः $N = 17, n = 3, I = 6$ के साथ अगर पहली चयन की गई इकाई u_1 है तो पहले की तरह प्रतिदर्श (u_1, u_7, u_{13}) इकाईयां का होगा। अगर पहली चयन की गई इकाई u_5 है तो यहां भी पहले की तरह प्रतिदर्श (u_5, u_{11}, u_{17}) इकाईयां का होगा। लेकिन अगर पहले इकाई u_6 का चयन किया गया है तो प्रतिदर्श में (u_6, u_{12}, u_1) इकाइयां सम्मिलित की जाएंगी। यहां पर u_1 को u_{12} से वृत्ताकार तरीके से छठी इकाई के रूप में लिया गया है, जो निम्नलिखित में दिखाया गया है।

$$1 \to 2 \to 3 \to \ldots\ldots \to 15 \to 16 \to 17$$

इसी प्रकार, अगर पहले u_{15} का चुनाव होता है तो प्रतिदर्श में u_{15}, u_4, u_{10} इकाईयां होंगी।

अतः रैखिक क्रमबद्ध प्रतिचयन में अगर N को n द्वारा पूरा भाग नहीं किया जा सकता तो हमें याद रखना चाहिए कि कुछ प्रतिदर्शों का आकार n से भिन्न हो सकता है। हम इस परिस्थिति में प्रस्तावित प्रतिदर्श आकार को n से तथा वास्तविक प्रतिदर्श आकार को n' सूचित करते हैं। यहां सरलतापूर्वक यह देखा जा सकता है कि प्रतिदर्श योग को वास्तविक प्रतिदर्श आकार द्वारा भाग करने पर प्राप्त माध्य केवल उस परिस्थिति में समष्टि माध्य का अनभिनत आकलक होगा जब N को n द्वारा पूरा भाग किया जा सके अन्यथा रैखिक क्रमबद्ध प्रतिदर्श का माध्य समष्टि माध्य का अभिनत आकलक होगा। जब प्रतिदर्श योग को प्रतिचयन अंतराल I से गुणा करके N से भाग किया जाए तो प्रत्येक परिस्थिति में अनभिनत आकलक प्राप्त होगा। दूसरे शब्दों में, रैखिक क्रमबद्ध प्रतिदर्श द्वारा समष्टि माध्य का आकलक अपरिवर्तित प्रतिदर्श माध्य द्वारा प्राप्त होता है, जिसमें प्रतिदर्श योग को वास्तविक प्रतिदर्श आकार से भाग न करके प्रत्याशित प्रतिदर्श आकार $\frac{N}{I}$ से भाग किया जाता है, जोकि एक भिन्न संख्या हो सकती है।

वृत्ताकार क्रमबद्ध प्रतिचयन के लिए प्रतिदर्श माध्य आवश्यक तौर पर समष्टि माध्य का अनभिनत आकलक होता है।

17.4.2 आकार की आनुपातिक समावेश की प्रायकता सहित क्रमबद्ध प्रतिचयन

रैखिक क्रमबद्ध प्रतिचयन में ठीक I संख्या में गुच्छ होते हैं, जहां पर I प्रतिचयन का अंतराल है तथा प्रत्येक इकाई किसी एक ही गुच्छे में होती है। चूंकि प्रत्येक गुच्छ के चयन की प्रायिकता समान होती है, इसलिए किसी एक इकाई के प्रतिदर्श में चुने जाने की प्रायिकता $\frac{1}{I}$ होती है, जोकि प्रत्येक इकाई के लिए समान है। इसी प्रकार, वृत्ताकार क्रमबद्ध प्रतिचयन में N गुच्छे होते हैं तथा प्रत्येक गुच्छ में n इकाइयां होती हैं। प्रत्येक इकाई ठीक n गुच्छों में आती है। चूंकि एक गुच्छ के चयन की प्रायिकता समान होती है, तो किसी इकाई के प्रतिदर्श में सम्मिलित किए जाने की प्रायिकता $\frac{n}{N}$ है, जोकि प्रत्येक इकाई के लिए समान है।

कुछ परिस्थितियों में इकाई को सम्मिलित करने की प्रायिकता को इसके आकार के आनुपातिक बनाना वांछनीय हो सकता है। जैसा कि एक के बाद एक प्रतिचयन में किया था,

प्रतिदर्श में कर लिया जाता है। यह विधि केवल उस परिस्थिति में प्रयोग हो सकती है जब **प्रतिचयन अंतराल (उप-इकाईयों के चयन के लिए) इकाई के सबसे बड़े आकार से बड़ा हो।**

अतः अगर i वीं इकाई का आकार X_i है (X_i का मान धनात्मक पूर्णांक होना चाहिए), तब संचयी योग $S_i = X_1 + X_2 + ... + X_i$ तैयार किए जाते हैं। इकाई संख्या 1 के क्रमिक संख्याएं से S_{i-1} तक, प्रदान की जाती हैं, इकाई संख्या 2 को $S_1 + 1$ से S_2 तक .... तथा इकाई संख्या i को $S_{i-1} + 1$ से S_i तक .... तथा अंत में इकाई संख्या N को $S_{N-1} + 1$ से S_N तक संख्याएं प्रदान की जाती हैं। इन क्रमिक संख्याओं को संकल्पनात्मक रूप में उप-इकाइयों की क्रमिक संख्याएं लिया जा सकता है। n इकाइयों के प्रतिदर्श के चयन के लिए प्रतिचयन अंतराल का आकार $I = \frac{S_n}{n}$ प्रयोग किया जाता है। यहां पर यह जांच की जाती है कि I का आकार $X_1, X_2...$ या X_n से बड़ा है (अगर यह शर्त पूरी नहीं होती तो प्रतिचयन से पहले बड़ी इकाई के टुकड़े करने पड़ सकते हैं।) इसके बाद ऊपर दी गई विधि के अनुसार रैखिक या वृत्ताकार क्रमबद्ध प्रतिदर्श प्राप्त किया जा सकता है।

इस प्रकार के प्रतिदर्श से माध्यम आकलन की प्रक्रिया वही है, जोकि आकार के आनुपातिक प्रायिकताओं सहित एक के बाद एक प्रतिचयन में होती है। अगर i वीं इकाई के अभिलक्षण का मान Y_i है तथा इसका आकार X_i है तो इस इकाई की प्रत्येक उप-इकाई के अभिलक्षण मान $Y_i^* = \frac{Y_i}{X_i}$ होगा। समष्टि में इस नए चर का प्रति उप-इकाई माध्य $\mu^* = (Y_i + ... Y_n)$ $(X_1 + ... + X_n)$ है। इसका अनभिनत आकल क्रमबद्ध प्रतिदर्श द्वारा, जोकि रैखिक या वृत्ताकार हो सकता है, प्राप्त किया जा सकता है। इस आकल के लिए हम प्रतिदर्श में नए चर के योग को प्रत्याशित प्रतिदर्श आकार (रैखिक क्रमबद्ध प्रतिचयन में) या वास्तविक प्रतिदर्श आकार (वृत्ताकार क्रमबद्ध प्रतिचयन में) से भाग कर देते हैं। अगर इस आकल को Y^* से सूचित किया जाए तब प्रति मूल इकाई माध्य का आकल $\mu = \overline{Y}^* (X_1 + ... + X_n)/ N = \overline{Y}^*$ $\overline{X}$ प्राप्त किया जाता है, जोकि $\overline{Y}^*$ तथा औसत आकार $\overline{X}$ का गुणनफल होता है।

17.4.3 समान प्रायिकताओं सहित रैखिक क्रमबद्ध प्रतिचयन का उदाहरण

क्रमबद्ध प्रतिदर्श प्राप्त करने से पहले इकाई को एक सुविधाजनक क्रम में रखना आवश्यक होता है जिससे शुरू से अंत तक इकाई के अभिलक्षण मानों का अच्छा प्रसरण निश्चित किया जा सके। हम रैखिक क्रमबद्ध प्रतिचयन विधि की व्याख्या एक तहसील के N = 128 गांवों में से n = 8 का प्रतिदर्श लेकर करेंगे, जहां पर पहले इन गांवों को इनके वृद्धिमान भौगोलिक क्षेत्रफल के क्रम में लिखा गया है। यहां पर प्रतिचयन अंतराल I = 128/8 = 16 है। इसलिए एक गांव का पहले 16 गांवों में से समान प्रायिकता सहित यादृच्छिक चयन किया जाएगा। इसके बाद प्रत्येक सोलहवां गांव तब तक चुनते जाएंगे जब तक सूची समाप्त न हो जाए। 16 गांवों में से एक के चयन के लिए हम (01-80) परिसर में दो अंक यादृच्छिक संख्याओं का प्रयोग करते हैं। हमें यादृच्छिक संख्या तालिका के पृष्ठ 1, पंक्ति 2 तथा स्तम्भ 3 से शुरू करने पर संख्याएं 26, 94, 51... आदि प्राप्त होती हैं। प्रयोग की जाने वाली संख्या 26, 51... आदि हैं जिसमें से पहली संख्या 26 गांव संख्या 10 के अनुरूप है। इस प्रकार 10 वां गांव प्रतिदर्श में चुना जाएगा। इसके बाद प्रतिदर्श में और चुने जाने वाले गांव संख्याए 10 + 16 = 26, 26 + 16 = 42, 42 + 16 = 58, 58 + 16 = 74, 74 + 16 = 90, 90 + 16 = 106 तथा 106 + 16 = 122 होंगी। प्रतिचयन का उद्देश्य 1961 में प्रति गांव में औसत कृषकों की संख्या का आकलन करना है। प्रतिदर्श में चुने गए 8 गांवों में कृषकों की संख्या निम्नलिखित है :

गांव की कोटि	10	26	42	58	74	90	106	122	योग
1961 में कृषकों की संख्या	421	168	917	563	1158	1348	1709	1741	8025

इस उदाहरण में N, n का सही गुणक है अतः 3 सही पूर्णांक है। यहां पर रैखिक, क्रमबद्ध प्रतिदर्श का माध्य; समष्टि माध्य का अनभिनत आकलक है। 1961 में प्रति गांव में कृषकों की औसत संख्या का आकल 8025/8 = 1003.125 है। एक और क्रमबद्ध प्रतिदर्श, जिसका आकार 8 हो, के बिना इस आकल की मानक त्रुटि का आकलन संभव नहीं है।

करते हैं। यहां पर प्रतिचयन अंतराल $\frac{N}{n} = 128/9 = 14.22$ जोकि एक भिन्न संख्या है। हम इसका सन्निकटन लेते हैं, अर्थात् $I = 14$ लेते हैं। अत: प्रतिदर्श की पहली इकाई का चुनाव पहले 14 गांवों से किया जाएगा। अगर पहले गांव का चयन हो जाता है तो प्रतिदर्श में वही गांव जिनकी कोटि 1, 15, 29, 43, 57, 71, 85, 99, 113 तथा 127 है, कुल 10 गांव रह जाएंगे। अर्थात् प्रतिदर्श आकार 10 होगा। इसके विपरीत, अगर 14 वां गांव चुना जाता है तो प्रतिदर्श में 14, 28, 42, 56, 70, 84, 98, 112, 126 कोटि के 9 गांव होंगे। यहां पर प्रतिदर्श आकार 9 होगा। इस प्रकार प्रतिदर्श आकार एक यादृच्छिक चर 9 या 10 होगा। प्रत्याशित प्रतिदर्श आकार $\frac{N}{I} = 128/14 = n^*$ होगा।

हम पृष्ठ 2 पंक्ति 4 स्तम्भ 6 से शुरू करके (01-84) परिसर में दो अंकों की यादृच्छिक संख्याएं प्रयोग करते हैं। ये संख्याएं 33, 03, 70... आदि हैं जोकि सभी प्रयोग की जा सकती है। पहली संख्या 33 को 14 से भाग करने पर 5 शेष बचता है। इस प्रकार, पहले चुने जाने वाले गांव की कोटि 5 होगी। इस प्रकार 9 गांवों का क्रमबद्ध प्रतिदर्श 5, 19, 33, 47, 61, 75, 89, 103, 117 होगा। 1961 में इन गांवों में कृषकों की संख्या क्रमश: 530, 343, 351, 393, 451, 1565, 1149, 719 तथा 109 थी जिनका योग 5610 है। प्रति गांव कृषकों की औसत संख्या प्राप्त करने के लिए हमें इस योग को प्रत्याशित प्रतिदर्श आकार $n^* = 128/14 = 9.142857$ से भाग करना पड़ेगा। इस प्रकार 1961 में प्रति गांव में कृषकों की औसत संख्या = 5610/9.142857 = 613.5938 है।

17.4.4 समान प्रायिकताओं सहित वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन का उदाहरण

तहसील के $N = 128$ गांवों में से $n = 8$ गांवों का वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन विधि द्वारा प्रतिदर्श प्राप्त करने के लिए, पहले गांव का यादृच्छिक चयन 128 गांवों के समूह से समान प्रायिकताओं सहित किया जाता है। हम (001-896) परिसर में से एक तीन अंकों की संख्या का चुनाव पृष्ठ 3 पंक्ति 9 स्तम्भ 18 से शुरू करके करते हैं। ये संख्याएं 09, 058, 087... आदि हैं जोकि सभी प्रयोग हो सकती हैं। पहली संख्या 090 है, इसलिए पहले चुने जाने वाले गांव की कोटि 90 है। प्रतिचयन अंतराल $\frac{1}{n} = 16$ है। इसलिए और चुने जाने वाले गांवों की कोटि 90 + 16 = 106, 106 + 16 = 122, तथा फिर 126 + 16 = 1138 है, जोकि 10 कोटि के गांव के अनुरूप है (वृत्तकार रूप में), (128 को 128 से भाग करने पर 10 आता है), इसके बाद 10 + 6 = 26, 26 + 6 = 42, 42 + 16 = 58 तथा अंत में 58 + 16 = 74 होगी। इस प्रकार 8 चुने हुए गांवों की कोटि 90, 106, 122, 10, 26, 42, 58 तथा 74 है। यहां पर प्रतिदर्श माध्य, समष्टि माध्य का अनभिनत आकलक है।

इसके विपरीत अगर हमें $n = 9$ गांवो का चयन करना है तो प्रतिचयन अंतराल $\frac{N}{n} = 14.22$ जोकि एक भिन्न संख्या है तथा इसका सन्निकट पूर्णांक $I = 14$ को प्रतिचयन अंतराल लिया जाएगा। यादृच्छिक शुरुआत 1 से 128 तक कहीं से भी शुरू हो सकती है। मान लीजिए पहले की तरह पहले चयन किए गए गांव की कोटि 90 है तब बाकी 8 गांवों में चुने जाने वाले गांवों की कोटि 90 + 14 = 104, 104 + 14 = 118, 118 + 14 = 132, वृत्ताकार रूप में इसको 4 लिया जाएगा, 4 + 14 = 18, 18 + 14 = 32, 32 + 14 = 46, 46 + 14 = 60 तथा 60 + 14 = 74 होंगी। यहां पर भी प्रतिदर्श माध्य, समष्टि माध्य का अनभिनत आकलक होगा।

17.4.5 आकार के आनुपातिक प्रायिकताओं सहित वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन का उदाहरण

मान लीजिए समष्टि में N इकाइयां हैं तथा i वीं इकाई का आकार है, जोकि एक धनात्मक पूर्णांक है। हमें वृत्तीय क्रमबद्ध प्रतिचयन द्वारा n इकाई का ऐसा प्रतिदर्श प्राप्त करना है जिससे i वीं इकाई के सम्मिलित किए जाने की प्रायिकता इसके आकार X_i के आनुपातिक हो। पहले की तरह हम i वीं इकाई को X_i उप-इकाइयों में बंटा हुआ सोच लेते हैं। इस प्रकार, कुल उप-इकाइयों की संख्या $\sum_{i=1}^{N} X_i = X$ (मान लीजिए) होगी। अब हम इस नई समष्टि से समान प्रायिकताओं सहित वृत्तीय क्रमबद्ध विधि द्वारा n उप-इकाइयों का चयन करते हैं। यहां पर प्रतिचयन अंतराल $I = \frac{X}{n}$ है। यहां हमारी मान्यता यह है कि किसी इकाई का आकार इस प्रतिचयन अंतराल से अधिक नहीं है। अब 1 तथा X के बीच एक यादृच्छिक संख्या ξ का चयन किया जाता है, मान लीजिए आकारों के संचयी योग $S_0 = O$, $S_1 = X_1$, $S_2 = X_1 + X_2$, S_3

का मान X होगा। इस प्रकार परिकलित प्रत्येक ξ_i का मान 1 तथा X के बीच होगा। अब हम प्रत्येक ξ_i के लिए j का ऐसा मान ज्ञात करते हैं जिससे $X_{j-1} < \xi_i \leq X_j$ हों। तब ξ के अनुरूप इकाई j का चयन किया जाएगा। इस प्रकार, हम $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ के अनुरूप n इकाइयों का प्रतिदर्श प्राप्त कर सकते हैं।

इस प्रकार के प्रतिदर्श द्वारा समष्टि अभिलक्षण का योग परिकलित करने के लिए हम प्रत्येक प्रतिदर्श इकाई के लिए एक नए अभिलक्षण $\frac{y}{x}$ पर विचार करते हैं, जहां पर x प्रतिदर्श इकाई का आकार है। इस नए अभिलक्षण का प्रतिदर्श माध्य समष्टि में Y के योग तथा X के योग के अनुपात का अनभिनत आकलक होता है। इसलिए प्रतिदर्श माध्य $\frac{Y}{x}$ को समष्टि के आकार से गुणा करने पर जो आकल प्राप्त होगा वह समष्टि में Y के योग का अनभिनत आकल होगा।

17.5 बहुचरणी प्रतिचयन

एक बड़े शहर में परिवारों के प्रतिदर्श द्वारा सूचना प्राप्त करने की परिस्थिति पर विचार कीजिए। प्रायः इस प्रकार के प्रतिदर्श को प्रत्यक्ष रूप से प्राप्त करना संभव नहीं होता क्योंकि सभी परिवारों की सूची (जिसको फ्रेम कहते हैं), जिससे प्रतिदर्श प्राप्त किया जाना है, सुविधापूर्वक उपलब्ध नहीं होती। इन परिस्थितियों में प्रतिदर्श का चयन चरणों में किया जा सकता है। प्रायः शहर-खंडों की सूची (यह छोटे-छोटे भौगोलिक क्षेत्र होते हैं, जिनमें स्थानीय प्रशासन के लिए शहर को बांटा जाता है—इनके कोई भी नाम हो सकते हैं) उपलब्ध होती है तथा पहले चरण में शहर खंडों का किसी उपयुक्त प्रतिचयन विधि द्वारा प्रतिदर्श चयन किया जाता है। दूसरे चरण में हमारी रुचि अब सभी खंडों में नहीं रहती, लेकिन केवल उन्हीं खंडों में रहती है, जोकि पहले चरण में प्रतिदर्श द्वारा चयन किए गए हैं। इन चयन किए गए खंडों में अब परिवारों के प्रतिदर्श का चयन दूसरे चरण में किया जाता है। इसके लिए इन खंडों में परिवारों की सूची अगर उपलब्ध नहीं है तो तैयार की जाती है। यहां पर खंडों में परिवारों को दूसरे चरण की प्रतिचयन इकाइयों के रूप में प्रयोग किया जाता है।

ऊपर दिया गया उदाहरण दो-चरणी प्रतिचयन का उदाहरण है, लेकिन बहुचरणी प्रतिचयन विन्यास में प्रतिचयन इकाइयों के श्रेणीबद्ध संगठन के बारे में सोच सकते हैं। उदाहरण के लिए, शहरी परिवारों के अध्ययन में, शहर तथा कस्बे पहले चरण की इकाइयां बन सकते हैं, शहर या कस्बे में नगर खंडों को दूसरे चरण की इकाइयां लिया जा सकता है। पहले चरण में शहरों तथा कस्बों के प्रतिदर्श का चयन किया जाता है। दूसरे चरण में चयन किए गए प्रत्येक शहर या कस्बों से खंडों का प्रतिदर्श लिया जाएगा। तीसरे तथा अंतिम चरण में, चयन किए गए प्रत्येक खंड से परिवारों का प्रतिदर्श लेकर आंकड़ों का संकलन किया जाएगा।

बहुचरणी प्रतिदर्श से समष्टि योग के आकलन के लिए हम चरण अनुक्रम के निचले सिरे से चलते हैं तथा इससे पहले चरण की इकाइयों का आकल प्राप्त करते हैं, जोकि निचले चरण की इकाइयों पर आधारित होता है। अतः गांवों के माध्यम से परिवारों के दो-चरणी प्रतिचयन में देश के लिए योग के आकलन के लिए पहले प्रत्येक चयन किए गए गांव के लिए योग का आकलन, उस गांव में चयन किए गए परिवारों से किया जाता है। इसके बाद देश के योग का आकलन, प्रतिदर्श में चयन किए गए गांवों के योग के आकल द्वारा किया जाता है।

17.6 स्तरण

जैसा कि पहले विवेचन कर चुके हैं, प्रतिदर्श द्वारा प्राप्त आकल में हमेशा प्रतिचयन त्रुटि होती है। जितनी प्रतिचयन त्रुटि कम होगी, उतना ही अच्छा हमारा आकल होगा। इसलिए प्रतिदर्श का ऐसा चयन करने की कोशिश करनी चाहिए कि प्रतिचयन त्रुटि कम से कम रहे।

प्रतिचयन की किसी तर्कसंगत विधि से यह प्रत्याशी होनी है कि जितना प्रतिदर्श का आकार

प्रदान किया जाएगा तथा प्रतिचयन त्रुटि समाप्त हो जाएगी। इस प्रकार, समष्टि में जितनी अधिक समरूप इकाइयां होंगी, उनमें उतना ही कम प्रसरण होगा तथा इसके समरूप प्रतिदर्श से प्राप्त आकल की प्रतिचयन त्रुटि भी उतनी ही कम होगी। लेकिन समष्टि में इकाइयों के बीच प्रसरण प्राकृतिक होता है तथा सांख्यिकी-विद् के पास इसको छोटा या बड़ा करने का कोई रास्ता नहीं होता। तब किस प्रकार प्रतिचयन त्रुटि को कम करने का प्रयास किया जा सकता है?

इसको स्तरण प्रविधि द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। पहले विषमांगी समष्टि को कई उप-समष्टियों में इस प्रकार बांटा जाता है जिससे प्रत्येक उप-समष्टि में इकाइयां लगभग समरूप हों। विभिन्न उप-समष्टियों के माध्य एक-दूसरे से बहुत भिन्न हो सकते हैं, लेकिन इससे कोई अंतर नहीं पड़ता। ऐसी प्रत्येक उप-समष्टि को स्तर (स्ट्रेटम) कहा जाता है तथा समष्टि को स्वतंत्र रूप में प्रतिदर्श लिए जाते हैं तथा इनसे स्तर के योग का आकल प्राप्त किया जाता है। चूंकि प्रत्येक स्तर समरूप है इसलिए स्तर के योग के आकल में प्रतिचयन त्रुटि की मात्रा कम होती है। विभिन्न स्तर योगों के जोड़ द्वारा समष्टि योग का आकलन किया जाता है। चूंकि योग के प्रत्येक घटक में प्रतिचयन त्रुटि की मात्रा कम है, इसलिए यह योग में भी कम होगी।

स्तर से प्रतिचयन की कोई भी उपयुक्त विधि प्रयोग में लाई जा सकती है। स्तरण प्रक्रिया इस प्रकार से की जानी चाहिए कि अध्ययन किए जाने वाले अभिलक्षण का प्रसरण स्तर के अंदर न्यूनतम हो, लेकिन स्तरों के बीच प्रसरण अधिकतम हो।

बोध प्रश्न 2

1) यह बताइए कि किस प्रकार स्तरण, प्रतिचयन त्रुटि को कम करने में सहायक है?

....

....

....

....

....

....

2) एक ज़िले में 132 गांव हैं। इस ज़िले में से 2640 परिवारों का एक प्रतिदर्श, 44 गांवों के सरल यादृच्छिक प्रतिचयन तथा इन गांवों में से प्रत्येक गांव से 60 परिवारों का सरल यादृच्छिक प्रतिचयन करके, लिया गया। यह
   क) स्तरण प्रतिचयन विधि का उदाहरण जिसमें गांवों को स्तर तथा परिवारों को प्रतिचयन इकाई लिया गया है।
   ख) दो-चरणी प्रतिचयन विधि का उदाहरण है। गांव इकाई प्रथम चरण इकाई तथा परिवार को दूसरे चरण की इकाई लिया गया है।

   सही घोषणा पर ✓ निशान लगाइए।

3) इन बोध प्रश्नों के बाद दी गई सारणी में, भारत के तमिलनाडु राज्य की एक तहसील में 128 गांव दिए हुए हैं : (1) अनुक्रमांक संख्या (2) वर्ग मील में क्षेत्रफल, (3) 1951 में खेती के अंतर्गत क्षेत्रफल (4) 1951 में व्यक्तियों की संख्या (5) 1961 में व्यक्तियों की संख्या (6) 1961 में कृषकों की संख्या (7) 1961 में पारिवारिक उद्योगों में श्रमिकों की संख्या (8) 1961 में परिवारों की संख्या।

   निम्नलिखित विधियों द्वारा तहसील से 8 गांवों का एक प्रतिदर्श प्राप्त कीजिए

   क) प्रतिस्थापन सहित सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श

....

....

ख) प्रतिस्थापन बिना सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श

ग) प्रतिस्थापन सहित, एक के बाद एक चयन करके, जिसमें प्रायिकताएं गांव के क्षेत्रफल को आनुपातिक हैं।

घ) प्रतिस्थापन सहित, एक के बाद एक चयन करके, जिसमें प्रायिकताएं 1951 में खेती के अंतर्गत क्षेत्रफल के बराबर हैं।

च) प्रतिस्थापन सहित, एक के बाद एक चयन करके, जिसमें प्रायिकताएं 1951 में व्यक्तियों की संख्या की आनुपातिक हैं।

छ) समान प्रायिकताओं सहित रैखिक क्रमबद्ध प्रतिचयन जिसमें गांवों को क्षेत्रफल के अनुसार वृद्धिमान क्रम में लिखा गया हो।

ज) समान प्रायिकताओं सहित वृत्त क्रमबद्ध प्रतिचयन जिसमें गांवों को 1951 में

....

....

....

....

झ) वृत्ताकार क्रमबद्ध प्रतिचयन जिसमें किसी गांव के सम्मिलित किए जाने की प्रायिकता उसके क्षेत्रफल की आनुपातिक है। गांवों के मूल में कोई परिवर्तन नहीं होता।

....

....

....

....

....

....

ट) एक गांव का प्रतिचयन जिसकी प्रायिकता उसके क्षेत्रफल के आनुपातिक है तथा बाकी 127 गांवों में से 7 गांवों का चयन प्रतिस्थापन बिना सरल यादृच्छिक प्रतिचयन (SRSWOR) विधि द्वारा होता है।

....

....

....

....

....

....

एक तहसील के 1951 तथा 1961 की जनगणना में, गांव के अनुसार पूर्ण गणना द्वारा प्राप्त आंकड़े।

क्र.सं.	1951 की जनगणना			1961 की जनगणना			
	क्षेत्रफल वर्गमील में	खेती के अन्तर्गत क्षेत्रफल (एकड़ों में)	व्यक्तियों की संख्या	व्यक्तियों की संख्या	कृषकों की संख्या	पारिवारिक उद्योगों में श्रमिकों की संख्या	परिवार की संख्या
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1.	5.97	2544	3295	3552	806	153	757
2.	1.55	428	378	420	193	0	78
3.	3.51	1177	2574	2819	819	116	548
4.	9.96	4567	4466	4802	1970	327	1004
5.	8.46	2618	3915	4040	1149	196	873
6.	9.71	4113	3240	3644	1510	151	703
7.	6.16	1869	3402	2303	611	97	541
8.	12.06	2713	4918	5082	888	39	984
9.	9.42	2237	2461	2554	1291	74	523
10	1.21	600	511	506	257	0	97
11.	15.11	3420	6851	7409	1855	141	1455
12.	12.86	4012	4782	4873	1741	131	903
13.	7.73	1949	3753	3802	1345	63	758
14.	2.13	695	1209	977	343	22	198
15.	6.03	1569	1816	2252	586	5	445
16.	12.74	4562	4942	5542	1543	80	1066
17.	6.90	2221	2383	2538	719	179	541

24.	2.56	719	941	1045	101	42	215
25.	2.95	607	1287	1513	336	99	276
26.	2.46	482	1058	1124	419	10	240
27.	4.03	1527	2111	2167	432	72	415
28.	3.74	136	1337	1506	303	33	282
29.	1.95	767	827	772	192	05	169
30	6.44	1648	2535	2772	1091	104	607
31.	11.33	2440	5820	6181	1830	303	1334
32.	9.28	2434	3378	3012	1219	126	716
33.	4.90	1638	1877	2342	543	35	472
34.	0.18	61	3402	084	93	93	812
35.	11.25	4505	5769	5700	1675	133	1189
36.	5.37	1751	3148	3822	884	121	717
37.	5.28	2622	054	2708	1039	107	599
38.	5.86	2848	4201	4585	941	51	958
39.	6.91	3013	3523	3879	1348	4	878
40	4.28	1509	1714	1400	438	9	289
41.	8.33	2949	3479	3850	1272	71	785
42.	13.23	2041	7420	8086	2261	101	1668
43.	4.38	1959	2681	2523	455	7	549
44.	4.28	1371	2870	3139	916	5	657
45.	7.70	3290	4435	4781	1380	28	1004
46.	5.85	2526	3265	3592	904	75	756
47.	4.97	2935	4096	4054	1438	35	793
48.	2.71	1109	984	1185	445	22	237
49.	14.30	2821	200	7924	2299	209	1508
50.	13.96	3678	8368	8493	2259	126	1667
51.	6.40	811	3180	3312	446	65	704
52.	9.13	453	2083	2996	888	39	657
53.	3.86	1665	1804	1891	277	37	332
54.	8.07	2350	4021	4201	793	54	850
55	1.35	564	1303	1303	421	0	279
56.	9.06	2487	3243	2915	1085	30	590
57.	4.60	904	1306	1540	383	62	323
58.	10.67	2040	0017	6572	1813	126	1414
59.	3.57	1314	1043	1808	304	36	381
60.	6.52	1500	7357	6758	1116	71	1512
61.	6.17	1657	2988	3042	1145	110	629
62.	5.01	1053	4020	3052	055	51	715
63.	5.57	2071	5142	6384	1168	106	1400
64.	2.53	872	1880	2105	820	34	409
65.	5.64	1718	5133	5803	1505	77	1200
66.	6.08	316	656	532	75	3	116
67.	1.78	653	1704	1828	271	0	398
68.	3.80	2357	3809	3908	821	69	858
69.	6.35	3258	2780	727	841	12	573
70.	8.97	4051	5131	5059	1700	271	1036
71.	3.47	1209	3970	3984	1323	29	841
72.	2.55	1658	039	2119	644	25	470
73.	6.27	2608	4281	4295	818	50	905
74.	3.61	1289	3664	3767	607	7	906
75.	4.59	599	3534	3363	925	44	749
76.	7.21	2573	4159	4444	1813	19	968
77.	4.39	1414	2444	2373	373	62	528
78.	3.31	980	1010	1021	170	5	196
79.	4.65	1543	2593	2559	633	32	546
80.	10.15	3060	4654	4961	1304	39	1033
81.	9.27	2600	3834	4699	1047	84	965
82.	2.32	1210	2188	2160	937	26	434
83.	6.07	2937	4049	4298	1137	52	914
84.	3.09	1867	2887	3114	559	35	689
85.	2.77	1337	1153	949	249	15	215
86	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

91	8.47	4424	5150	5709	1409	53	1207
92.	5.58	1881	953	1223	1	0	261
93.	10.87	4139	2366	2929	109	0	750
94.	7.35	4072	1292	3797	0	1	1229
95.	1.20	612	7153	8584	1167	129	1826
96.	16.36	5507	4865	3083	690	127	1401
97.	11.29	4634	9436	10472	2659	78	2073
98.	3.05	1667	381	550	67	0	107
99.	3.43	2013	1665	1801	591	18	379
100.	0.80	156	9113	10471	1508	846	2302
101.	3.67	1425	2540	3394	953	10	649
102.	5.17	2566	4816	5001	489	83	1091
103.	4.60	2304	2728	3458	451	29	689
104.	3.00	1356	4091	3506	399	2	530
105.	0.82	610	2069	4333	1074	125	1134
106.	0.96	603	4340	4583	530	27	921
107.	1.23	631	1503	1481	235	66	356
108.	1.88	1074	369	1499	269	31	314
109.	3.03	1059	2323	2739	932	77	593
110.	4.57	2366	1963	2195	307	67	467
111.	4.32	2618	5596	6169	1367	77	1247
112.	1.77	428	695	925	181	1	193
113.	7.18	2075	8822	8040	320	65	1696
114.	5.56	2290	4558	4650	1091	60	969
115.	4.66	1870	3466	3461	553	104	682
116.	3.56	1328	2639	2740	917	6	549
117.	3.01	1612	2955	3151	1181	43	709
118.	3.25	1653	1430	1483	473	0	310
119.	1.91	933	1155	1284	440	22	265
120.	8.15	2698	2895	2925	1069	112	629
121.	1.44	730	1781	1953	561	6	397
122.	5.72	2128	2975	3145	713	28	683
123.	2.79	1753	4109	4020	928	67	842
124.	2.75	772	577	1757	402	100	373
125.	4.03	2096	1328	2448	0	6	652
126.	3.51	2862	4231	4194	1020	73	889
127.	6.56	2377	4543	5158	783	118	1065
128.	4.77	1318	1058	1116	222	8	236
Total	715.82	248752	415149	443319	109248	8968	93129

एक वर्गमील = 640 एकड़, एक एकड़ = 0.4047 हैक्टेयर

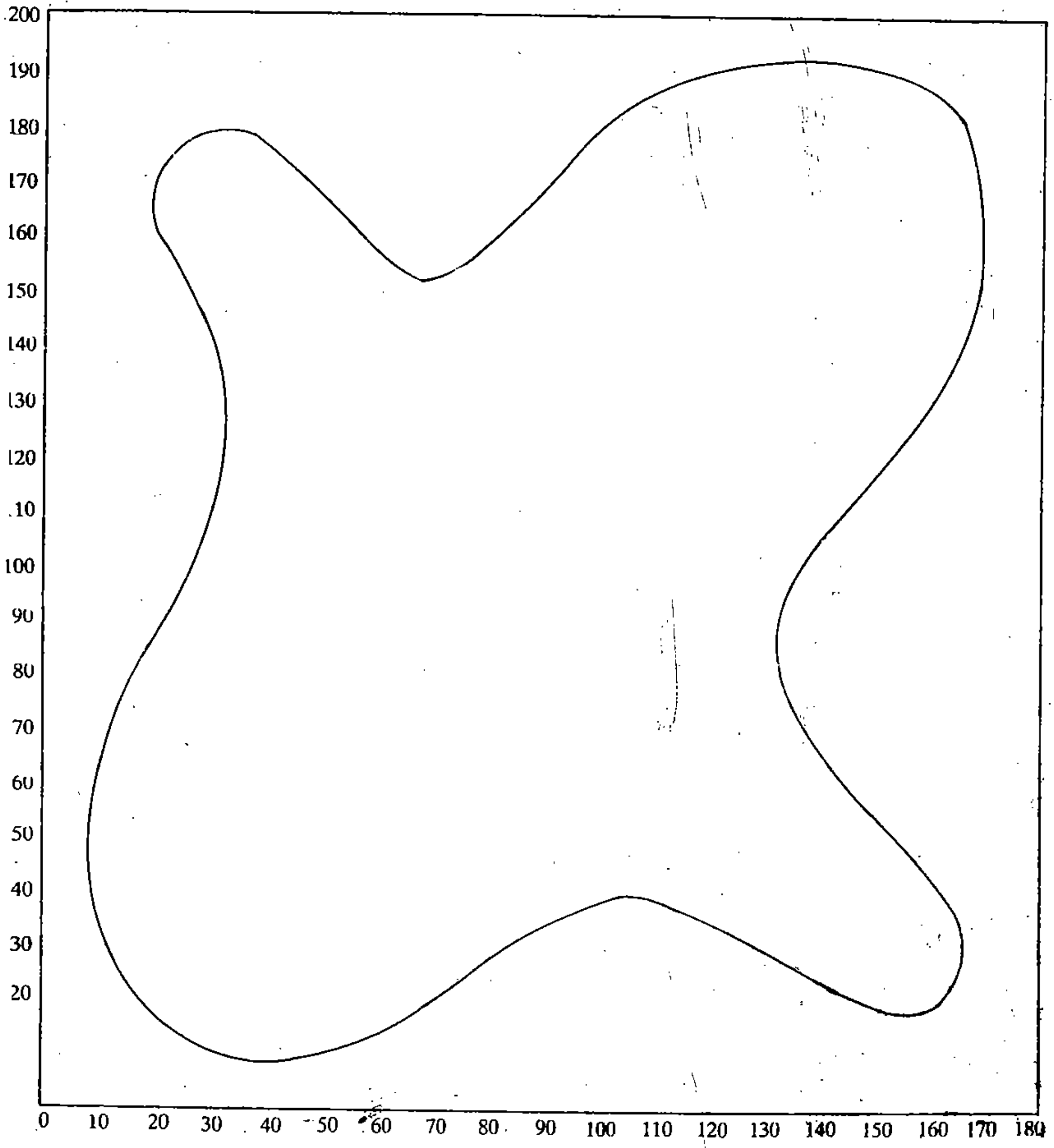
स्रोत : मदुरै ज़िला, मद्रास राज्य के लिए जिला जनगणना पुस्तिका (1951 की जनगणना) तथा मूल जनगणना एब्सट्रेक्ट (1961 जनगणना)

4) नीचे दिए गए अनियमित क्षेत्र के अंदर यादृच्छिक तौर पर 10 बिन्दुओं के स्थान निर्धारित कीजिए।

(**संकेत** : $0 \leq X \leq 180$ तथा $0 \leq Y \leq 200$ परिसर में निर्देशांक (X, Y) का यादृच्छिक चयन कीजिए। इस बन्दु को अंकित कीजिए, अगर बिन्दु क्षेत्र के बाहर है तो इसको अस्वीकार कर दीजिए।)

17.7 सारांश

इस इकाई में यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा विभिन्न प्रकार की प्रतिचयन अभिकल्पनाओं की व्याख्या की गई है। इन प्रतिचयन अभिकल्पनाओं के ये रूप हैं : प्रतिस्थापन सहित/बिना, सरल यादृच्छिक प्रतिचयन, आकार के आनुपातिक प्रायिकता सहित सरल यादृच्छिक



सहित क्रमबद्ध प्रतिचयन, समान प्रायिकताओं सहित रैखिक क्रमबद्ध प्रतिचयन तथा समान प्रायिकताओं सहित वृत्ताकार क्रमबद्ध प्रतिचयन तथा अंत में बहुचरणी प्रतिचयन तथा स्तरण यादृच्छिक प्रतिचयन।

इनके अध्ययन के बाद आपके लिए यादृच्छिक संख्या तालिकाओं की सहायता से विभिन्न प्रतिदर्श अभिकल्पनाओं का, वास्तव में प्रयोग करना संभव हो सकेगा।

17.8 शब्दावली

आकलन

शक्ति, समय, लागत) तो प्रतिदर्श प्रतिदर्शज द्वारा समष्टि प्राचल के बारे में अनुमति के लिए आंकलन विधि का प्रयोग किया जाता है।

आंकल

प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर प्रतिदर्शज का मान जिसका प्रयोग समष्टि प्राचलन के सन्निकटन के रूप में किया जाता है, आकल कहलाता है।

बहुचरणी प्रतिचयन

यह चरणों में प्रतिदर्श प्राप्त करने की विधि है। इस विधि में विभिन्न चरणों में प्रतिचयन इकाइयां भिन्न होती हैं। उदाहरण के लिए, परिवारों के सर्वेक्षण में, पहले चरण की प्रतिचयन इकाइयां प्रशासनिक ज़िला हो सकती हैं। दूसरे चरण की इकाइयां गांव हो सकती हैं तथा तीसरे और अंतिम चरण की इकाइयां दूसरे चरण में प्राप्त गांवों के परिवार हो सकते हैं।

अप्रतिचयन त्रुटि

आंकड़ों के विनिर्देशन, संकलन तथा संशोधन के चरणों में उत्पन्न त्रुटियां, अप्रतिचयन त्रुटियां कहलाती हैं। ये त्रुटियां समष्टि अथवा गणना तथा प्रतिदर्श सर्वेक्षण, दोनों में होती हैं, लेकिन पूर्ण गणना में इनके होने की संभावना अधिक होती है। विभिन्न चरणों में वस्तु-निष्ठ तथा सही विधि के प्रयोग द्वारा तथा अधिक कार्य-कुशल एवं प्रशिक्षित लोगों को लगाकर, अप्रतिचयन त्रुटियों का नियंत्रण किया जा सकता है।

आकार के आनुपातिक प्रायिकता

प्रतिचयन इकाई के आकार के अनुसार चयन की प्रायिकता भिन्न होती है।

प्रतिचयन अभिकल्पना

प्रतिचयन अभिकल्पना के दो घटक होते हैं—चयन प्रक्रिया तथा आकलन प्रक्रिया। चयन प्रक्रिया में समष्टि की कुछ इकाइयों को प्रतिदर्श में सम्मिलित किए जाने की विधि के नियम होते हैं। आकलन प्रक्रिया में समष्टि प्राचलों के प्रतिदर्श आकलों के परिकलन के नियम होते हैं।

प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन

प्रतिदर्श प्राप्त करने की ऐसी विधि (सरल यादृच्छिक प्रतिचयन SRS या क्रमबद्ध यादृच्छिक या कोई और प्रतिदर्श) जिसमें किसी इकाई को चयन करने के बाद वापस समष्टि में प्रतिस्थापित कर दिया जाता है तथा इसी प्रतिदर्श में इस इकाई का पुनरावृत्त हो सकता है।

प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन

प्रतिदर्श प्राप्त करने की ऐसी विधि जिसमें चयन की गई इकाई को वापस समष्टि में प्रतिस्थापित नहीं किया जाता तथा इस प्रकार प्रतिदर्श में इसका पुरानवृत्त संभव नहीं होता।

स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन

इस विधि में विषमांगी समष्टि को समरूप उप-समष्टियों (स्तरों) में बांटा जाता है। प्रत्येक स्तर (स्ट्रेटम) से उप-समष्टियां इस प्रकार प्राप्त की जाती हैं जिससे प्रतिदर्श समष्टि का अधिक निरूपक हो सके।

क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन

इस प्रतिचयन विधि में समष्टि की सभी इकाईयों की रैखिक या वृत्ताकार सूची तैयार की जाती है। एक बार जब पहली प्रतिचयन इकाई का चयन हो जाता है तो बाकी इकाइयों का चुनाव नियमित अंतराल, जिसको प्रतिदर्श अंतराल कहते हैं, के बाद किया जाता है।

अनभिनतता

अगर $E(S) = \mu$, तो प्रतिदर्शज S को प्राचल μ का अनभिनत आकल कहा जाता है।

17.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Cochran, W.G., 1959. *Sampling Techniques,* Asia Publishing House/Wily-Eastern: Bombay/Delhi

Murthy, M.N., 1967. *Sampling Theory and Methods,* Statistical Publishing Society: Calcutta.

17.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1

1) पूर्ण गणना की तुलना में प्रतिदर्श सर्वेक्षण, पैसे अथवा समय दोनों ही दृष्टि से अधिक किफायती हैं। सर्वेक्षण का मूल उद्देश्य कुछ संक्षिप्त जानकारी हासिल करना होता है। पूर्ण गणना में अप्रतिचयन त्रुटियां बहुत ज्यादा होती है।
2) i) इन सारे शब्दों को खण्ड 17.1 में परिभाषित किया गया है।
   ii) प्रतिचयन त्रुटि का मुख्य कारण है, प्रतिदर्श के आधार पर सम्पूर्ण जनसंख्या के बारे में निष्कर्ष निकालना। सम्पूर्ण गणना में यह त्रुटि नहीं होती।
   अप्रतिचयन त्रुटियां मुख्यतः आंकणों के संकलन व उनके रूपान्तरण के समय उत्पन्न होती हैं। ये त्रुटियां प्रतिदर्श सर्वेक्षण तथा सम्पूर्ण गणना दोनों में विद्यमान रहती है।
3) उप खण्ड 17.2.3 देखिये तथा उत्तर दीजिये।

बोध प्रश्न 2

1) आप यादृच्छिक संख्या सारणियों (RNT) की सहायता से प्रतिदर्श चयन की प्रक्रिया से परिचित हैं। कोई भी RNT-I लीजिये। हम यादृच्छिक संख्याओं को 426, 618, 331... जैसी तीन अंकों की शृंखला के रूप में लिख सकते हैं। 944 के ऊपर $(236 \times 4 = 944)$ की सारी संख्याओं को नजर अंदाज कीजिये। इन संख्याओं को 23.6 से भाग देकर क्षेत्रफल निकाल लीजिये। यह प्रतिचयन SRSWR विधि से किया गया है अतः प्रथम पांच संख्याएं चुनिये। ये संख्याएं 190, 146, 95, 212 तथा 142 हैं। यदि आप कोई अन्य RNT चुनते हैं या फिर RNT-I का कोई अन्य हिस्सा चुनते हैं तो एक अन्य प्रतिदर्श प्राप्त होगा।
2) कोई भी RNT, मान लीजिये RNT III लीजिये। चूंकि जनसंख्या में 29 इकाईयां हैं अतः यादृच्छिक संख्याओं को दो अंको वाली शृंखला 28, 62, 81, 84, 48, 27... के रूप में लिखते हैं। 87 से ऊपर $(29 \times 3 = 87)$ की संख्याओं को नजर अंदाज कीजिये। इन संख्याओं को 29 से भाग दीजिये तथा क्षेत्रफल 28, 4, 23, 26, 19, 4... 19, 23, 23... प्राप्त कीजिये। पहली दस संख्याएं चुनिये ताकि किसी की पुनरावृत्ति ने हो। हमें SRSWOR का प्रतिचयन करना है। ये संख्याएं 28, 4, 23, 26, 19, 1, 10, 25, 8 तथा 12 है।
3) अक्षरों को A = 1, B = 2.... की तरह अंक प्रदान कीजिये। कोइ भी RNT तथा यादृच्छिक संख्याओं को दो अंकों वाली संख्याओं में रूपांतरित कीजिये। 78 से ऊपर $(26 \times 3 = 78)$ की संख्याओं को नजर अंदाज कीजिये तथा संख्याओं को 26 (अंग्रेजी अक्षरों की संख्या) से भाग देकर क्षेत्रफल ज्ञात करें। पहले पांच अंक चुनिये ताकि किसी की पुनरावृत्ति न हों। इसके बाद सबद्ध अक्षरों का प्रतिदर्श प्राप्त हो जायेगा।
4) अक्षरों को संख्याएं प्रदान कीजिये। यहां N = 7 है अतः एक अंक वाली संख्याएं चुनिये। RNT की कोई भी पंक्ति (मान लीजिए RNT-II की पांचवीं पंक्ति) लीजिये। ये संख्याएं 2, 4, 9, 3, 0, 3, 4, 1, 7 हैं। 0, 8, तथा 9 को नजर अंदाज करना है क्योंकि इनसे सम्बद्ध कोई भी असर नहीं है। किसी भी संख्या की पुनरावृत्ति नहीं होती है। प्रथम 7 प्रासंगिक संख्या 2, 4, 3, 1, 7, 5 तथा 6 है तथा अक्षरों का यादृच्छिक क्रम BDCAGEF है।
5) 1668 व्यक्तियों को क्रमांक 1, 2, 3..., 1668 दिये गये हैं। प्रथम या व्यक्ति G तथा P के साथ जुड़े हैं, 572 व्यक्तियों को दत्त संख्याएं 212 से 783 तक G तथा P में हैं 78

बोध प्रश्न 3

1) उपखण्ड 17.6 देखिये तथा उत्तर दीजिये।
2) "ख" पर सही का चिन्ह लगाइये।
3) क) 128 गांवों से 8 गांवों का एक SRSWR प्रतिदर्श चुनना है। मान लीजिये RNT II चुनी जाती है। इन संख्याओं को तीन अंकों वाली श्रृंखला 787, 586, 959,... के रूप में रखें। 896 के ऊपर के अंकों को नजर अंदाज करें। इन संख्याओं को 128 से भाग दें और शेषफल प्राप्त करें। चूंकि प्रतिचयन SRSWR है अतः पुनरावृत्ति की परवाह न करें। चुने हुए गांव के क्रमांक 19, 74, 79, 47, 92, 3, 4, तथा 25 हैं।

ख) 8 के आकार का SRSWOR उपर्युक्त विधि से प्राप्त किया जा सकता है। हमें सिर्फ यह देखना है कि किसी भी गांव की पुनरावृत्ति न हो।

ग) आपको PPS विधि से प्रतिदर्श चुनने की विधि ज्ञात है। इसमें सारे गांवों के क्षेत्रफल को जोड़कर RNT की सहायता से प्रतिदर्श का चयन करना पड़ता है। यह विधि कठिन है। अन्य विधि यह है—यादृच्छिक संख्याओं की दो श्रृंखलायें लीजिये। एक गांव के लिये तथा दूसरी गांव के क्षेत्रफल के लिये। चूंकि गांवों की संख्या 128 है अतः प्रथम श्रृंखला को 3 अंकों वाली संख्याओं के क्रम में लिखें। गांवों का अधिकतम क्षेत्रफल 16.36 वर्ग मील ज्ञात कीजिये, दशमलव चिन्ह को नजर अंदाज कीजिये तथा चार अंकों वाली यादृच्छिक श्रृंखला बनाइये। दोनों श्रृंखलाओं से संख्याएं चुनिये। मान लीजिये पहली श्रृंखला के पहले चयन में 42 (426-128 × 3 = 42) प्राप्त होता है (RNT I की पहली पंक्ति) तथा दूसरी श्रृंखला के पहले चयन में 1498 (RNT I की पहली पंक्ति) प्राप्त होती है। 42वें गांव का क्षेत्रफल 13.23 वर्ग मील है और चूंकि 1498, 1323 से अधिक है, अतः इस गांव को नहीं चुना जायेगा। उसी गांव को चुनें जिसका क्षेत्रफल यादृच्छिक क्षेत्रफल से अधिक हो। इस प्रक्रिया को तब तक दोहरायें जब तक पूरा प्रतिदर्श प्राप्त न हो जाये।

घ) यहां हमें दोनों RNT को (ग) बताई गयी विधि से संयोजित करना है। दूसरी श्रृंखला में हमें खेती के अंतर्गत क्षेत्रफल को लेना है।

च) इस उदाहरण में दूसरी RNT में हम 1951 व्यक्तियों की संख्या को लेंगे। हम सारे गांवों को वृद्धिमान क्षेत्रफल के अनुसार क्रमबद्ध करेंगे। अगली इकाई के खण्ड 18.3 में ऐसा किया गया है। 128 गांवों में 8 के आकार का एक रैखिक प्रतिदर्श प्राप्त करना है। अतः प्रतिदर्श अन्तराल I = N/n = 128/8 = 16 होगा। हम 1, 2,... 16 तक की संख्याओं से एक संख्या का चयन यादृच्छिक तरीके से करना है। इस संख्या से सम्बद्ध गांव इस प्रतिदर्श का पहला होगा। शेष गांव इस संख्या में 16 जोड़ते हुए प्राप्त किये जा सकते हैं।

छ) इस विधि में 128 गांवों में प्रथम का चुनाव यादृच्छिक विधि से करना है। शेष का चुनाव इस संख्या में 16 जोड़ते हुए किया जा सकता है।

ज) प्रश्न के अनुसार गांवों को उनके मूल क्रम में रखना चाहिये। गांवों के क्षेत्रफल को जोड़कर संचयी योग ज्ञात कीजिये। प्रतिदर्श अन्तराल 128 गांवों के कुल क्षेत्रफल तथा 8 (n = 8) के भागफल के बराबर होगा। अब प्रतिदर्श का चुनाव क्रमबद्ध यादृच्छिक प्रतिचयन के अनुसार करना है। प्रतिदर्श की 8 इकाईयों में से एक क्षेत्रफल के PPS विधि द्वारा तथा शेष 7 SRSWOR द्वारा प्राप्त किये जाते हैं।

त) प्रश्न में दिये गये संकेत का पालन कीजिये।

17.11 पारिभाषिक शब्दावली

अप्रतिचयन त्रुटि	:	Non-sampling error
आपरिवर्तित प्रतिदर्श माध्य	:	Modified sample mean
क्रमबद्ध प्रतिचयन	:	Systematic sampling
गुच्छ प्रतिचयन	:	Cluster sampling
प्रतिचयन युक्ति	:	Sampling strategy
प्रतिदर्श अभिकल्पना	:	Sample design
बहुचरणी प्रतिचयन	:	Multistage sampling

इकाई 18 आकलन प्रक्रिया

इकाई की रूपरेखा

18.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप निम्नलिखित के बारे में समर्थ हो सकेंगे:

- इससे पहली इकाई में दिए हुए प्रतिदर्श अभिकल्पनाओं द्वारा प्राप्त प्रतिदर्श प्रेक्षणों से समष्टि तथा प्रसरण की आकलन प्रक्रिया तैयार करना।
- सर्वेक्षण लागत, प्रतिचयन त्रुटि तथा प्रतिचयन आकार में परस्पर संबंध के बारे में जानकारी।
- सामाजिक-आर्थिक सर्वेक्षण के लिए निश्चत चरणों का आयोजन करना।

18.1 प्रस्तावना

इससे पहली इकाई में प्रतिदर्श चयन की विधियों का वर्णन किया गया है जिसमें प्रत्येक
परिस्थिति में समष्टि के माध्य या योग के आकलन के बारे संकेत भी हैं। लेकिन प्रतिदर्श

18.2 समष्टि के योग या माध्य का आकलन

अभी तक प्रतिचयन के बारे में किए गए अध्ययन द्वारा यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि समष्टि का माध्य ही ऐसा अकेला महत्वपूर्ण अभिलक्षण है जिसका प्रायः माप किया जाता है। इसका कारण यह भी है कि त्रुटियों के सिद्धांत, जिसमें प्रसामान्य बंटन का प्रयोग किया गया हो, द्वारा प्रायिकता का गणित इस माप के साथ आसानी से मेल खाता है। माध्य का आकल प्राप्त करने के लिए निस्संदेह हमें यह जानना आवश्यक है कि पहले योग कैसे प्राप्त किया जाए। ये विधियां प्रतिदर्श अभिकल्पना पर निर्भर करती हैं। इस विधि का आधार खंड 7 में किया गया अध्ययन है, जिसका आप पुनः स्मरण कर सकते हैं।

18.2.1 सरल यादृच्छिक प्रतिचयन

N व्यष्टियों की एक समष्टि पर विचार कीजिए, जिसके एक अभिलक्षण की जांच करनी है। समष्टि में iवीं व्यष्टि के लिए मान लीजिए, इस अभिलक्षण का मान Y_i है, i=1, 2,..... N है। समष्टि का माध्य $\mu = \frac{1}{N}[Y_1 + ... + Y_N]$ तथा प्रसरण $\sigma^2 = \frac{1}{N}[(Y_1-\mu)^2 + ... + (Y_n-\mu)^2]$ होगा।

मान लीजिए इस समष्टि से प्रतिस्थापन सहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन या प्रतिस्थापन बिना सरल यादृच्छिक प्रतिचयन विधि द्वारा एक n व्यष्टियों का प्रतिदर्श लिया जाता है। व्यष्टियों का चयन समान प्रायिकता सहित यादृच्छिक तरीके से एक-एक करके किया जाता है। जब चयन प्रतिस्थापन सहित होता है तो पहले चयन की गई व्यष्टि का प्रतिस्थापन करके अगली व्यष्टि का चयन करते हैं तथा प्रतिस्थापन में मान लीजिए समष्टि की iवीं व्यष्टि के एक से अधिक बार चुने जाने की संख्या को E_i से सूचित करते हैं, i=1, 2, ...N है। तब $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ .... ϵ_N यादृच्छिक चर होंगे। प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन में, क्योंकि एक व्यष्टि के एक से अधिक बार चुने जाने की संभावना होती है तो प्रत्येक ϵ_i का मान 0, 1, 2... .....N हो सकता है। प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन में कोई व्यष्टि एक से अधिक नहीं चुनी जा सकती, इसलिए ϵ_i का मान 0 या 1 हो सकता है। दोनों परिस्थितियों में, $\epsilon_1 + \epsilon_2 + ... + \epsilon_N = n$ होता है। दोनों परिस्थितियों में प्रतिदर्श का योग $S = Y_1\epsilon_1 + ... + Y_N\epsilon_N$ तथा प्रेक्षणों के वर्ग का योग $S_2 = Y_1^2\epsilon_1 + ... + Y_N^2\epsilon_N^2$ होगा।

प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन में ϵ_1, ϵ_2 .... ϵ_N का संयुक्त बंटन, बहुपद होगा जहां पर प्रत्येक N खानों (Cell) में प्रत्येक की प्रायिकता $\frac{1}{N}$ होगी तथा n प्रेक्षणों की कुल संख्या होगी। अतः $E(\epsilon_i) = \frac{n}{N}$, $V(\epsilon_i) = \frac{n(N-1)}{N^2}$ तथा $Cov.(\epsilon_i, \neq_j) = -\frac{n}{N^2}$, i=j = 1 2,........ N है।

यहां पर $V(\epsilon_i)$, ϵ_i के प्रसरण को तथा $Cov.(\epsilon_i, \epsilon_j)$ इनके सह-प्रसरण को सूचित करता है।

प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन में iवीं इकाई के चयन की प्रायिकता $\frac{n}{N}$ है। अतः $P(\epsilon_i=1) = \frac{n}{N}$ तथा $P(\epsilon_i=0) = \left(1 - \frac{n}{N}\right)$ iवीं तथा jवीं इकाई, दोनों के एक साथ चयन की प्रायिकता

$$P(\epsilon_i=1; \epsilon_j=1) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} \text{ है। अतः}$$

$E(\epsilon_i=0) = \frac{n}{N}$, $V(\epsilon_i) = \frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)$ तथा $Cov.(\epsilon_i, \epsilon_j) = -\frac{n(N-n)}{N^2(N-1)}$ $i \neq j$ 1=2, ..., N है।

$$\text{अब, } E(S) = Y_1 E(\epsilon_1) + Y_2 E(\epsilon_2) + ... + Y_N E(\epsilon_N)$$

$$= \frac{n}{N}[Y_1 + Y_2 + \quad + Y_N] =$$

जोकि, प्रतिस्थापन सहित तथा प्रतिस्थापन बिना, दोनों प्रतिचयनों में सच है। लेकिन

$$V(S) = V(Y_1\epsilon_1 + \ldots\ldots + Y_N\epsilon_N)$$
$$= Y_1^2\, v(\epsilon_1) + \ldots\ldots + Y_N^2\, v(\epsilon_N) + 2Y_1 Y_2 \text{ cov. }(\epsilon_1\epsilon_2)$$
$$+ \ldots\ldots + 2Y_{N-1} Y_N \text{ cov. }(\epsilon_{N-1}, \epsilon_N)$$
$$= A\,(Y_1 + \ldots\ldots + Y_N^2) + B\,(2Y_1Y_2 + \ldots\ldots + 2\,Y_{N-1}Y_N)$$

जहां पर $A = V(\epsilon_i)$ तथा $B = \text{cov.}(\epsilon_i, \epsilon_j)$ है, इन दोनों के प्रतिस्थापन सहित या प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन में अलग-अलग मान होंगे। लेकिन, क्योंकि
दोनों परिस्थितियों में $Y_1^2 + \ldots\ldots + Y_N^2 \text{-} N(\mu^2\text{-}\sigma^2)$

तथा $2\,(Y_1Y_2 + \ldots\ldots + Y_N)$

$$= (Y_1 + \ldots\ldots Y_N)^2 - (Y_1^2 + Y_2^2 + \ldots\ldots Y_N^2)$$
$$= (N\mu)^2 - N\,(\sigma^2 + \mu^2)$$
$$= N(N-1)\,\mu^2 - N\,\sigma^2$$

होता है।

$$\therefore V(S) = NA\,(\sigma^2 + \mu^2) + B\,(N\,(N-1)\,\mu^2 - N\sigma^2)$$
$$= N\,[A+(N-1)B]\,\mu^2 + N(A-B)\sigma^2 = N(A-B)\sigma^2$$

क्योंकि दोनों परिस्थितियों में $A + (N-P)\,B = O$ होता है।

लेकिन प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन में $A\text{-}B = \frac{n(N-1)}{N^2} + \frac{n}{N^2} = \frac{n}{N}$ तथा प्रतिस्थापन बिना

प्रतिचयन में $A\text{-}B = \frac{n}{N}\left(1\text{-}\frac{n}{N}\right) + \frac{n(N\text{-}n)}{N^2(N\text{-}1)} \cdot \frac{n}{N} = \left(1\text{-}\frac{n\text{-}1}{N\text{-}1}\right)$ होता है।

अतः अगर हम प्रतिदर्श माध्य को $\overline{Y} = \frac{S}{n}$ लिखें, तो हमें प्रतिस्थापन सहित तथा प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन, दोनों में,

$E(\overline{Y}) = \mu$ प्राप्त होगा। लेकिन

$$V(\overline{Y}) = \frac{1}{n^2}\,V(S) = \frac{\sigma^2}{n} \text{ प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन में}$$

$$\frac{\sigma^2}{n}\,1\text{-}g \text{ प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन में जहां पर } g = \frac{n-1}{N-1}$$

नोट : अगर यह प्रमाण आपको कठिन लगे तो आप केवल परिणाम को याद रख सकते हैं।

अतः दोनों परिस्थितियों, प्रतिस्थापन सहित/प्रतिचयन बिना में प्रतिदर्श माध्य समष्टि माध्य का अनभिनत आकलक है तथा प्रत्याशा के अनुसार प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन में प्रतिदर्श माध्य का प्रसरण कम है।

अब हम प्रतिदर्श प्रसरण $\gamma = \frac{1}{n}\,S_2 - \overline{Y}^2$ पर विचार करते है।

$E(\nu) = \frac{1}{n}\,E\,(S_2) - E\,(\overline{Y}^2)$ तथा $E(\overline{Y}^2) = \mu^2 + v\,(\overline{Y})$

$E(S_2)$ तथा $V\,(\overline{Y})$ के पहले प्राप्त मानों को प्रतिस्थापित करने पर

$$E(V) = \begin{cases} \left(1\text{-}\frac{1}{n}\right)\sigma^2 \text{ जब प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन हो} \\ \left[1\text{-}\frac{1}{n}\,(1\text{-}g)\right]\sigma^2 \text{ जब प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन हो} \end{cases}$$

अतः दोनों परिचयन परिस्थितियों में प्रतिदर्श प्रसरण समष्टि प्रसरण σ^2 का अनभिनत आकलक नहीं है। σ^2 का अनभिनत आकलन इस प्रकार से परिभाषित है:

अतः प्रतिदर्श माध्य के प्रतिचयन ब[illegible] का प्रसरण

$$e^2 = \begin{cases} \dfrac{\nu}{n-1} & \text{प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन में} \\ \dfrac{\nu}{n-1}(1-f) & \text{प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन में} \\ & \text{जहां पर } f = \dfrac{n}{N} \end{cases}$$

नोट : अगर यह प्रमाण आपको कठिन लगे तो आप केवल परिणाम को याद रख सकते हैं।

18.2.2 आकार के आनुपातिक प्रायिकताओं सहित प्रतिचयन

N इकाई की एक समष्टि पर विचार कीजिए। प्रत्येक इकाई के साथ इसके आकार का माप सहचारी है, जिसको हम एक धनात्मक पूर्णांक मानते हैं। हम iवीं इकाई के आकार को X_i से सूचित करते हैं, $i=1, 2, \ldots\ldots N$ है, तथा $X_1 + X_2 + \ldots\ldots + X_N$ को X से सूचित करते हैं। हम यादृच्छिक प्रतिचयन संख्याओं द्वारा इकाई के चयन, जिसमें इकाई के चयन की प्रायिकता उसके आकार के आनुपातिक हो, की विधि का अध्ययन कर चुके हैं। इस प्रकार i वीं इकाई के चयन की प्रायिकता $P_i = \frac{X_i}{X}$ होती है, $i=1, 2\ldots\ldots N$ है।

मान लीजिए iवीं इकाई का सहचारी मान Y_i है, $i=1, 2, \ldots\ldots N$ है। हमारी रुचि n प्रतिदर्श इकाईयों पर आधारित प्रेक्षणों, जोकि समष्टि से एक-एक करके प्रतिस्थापन सहित इस प्रकार प्राप्त किए गए हैं, कि किसी इकाई के चयन की प्रायिकता उसके आकार की आनुपातिक है, द्वारा प्रति इकाई माध्य $\mu = \frac{1}{N}(Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_N)$ के आकलन में है। इस प्रतिचयन विधि को आकार के आनुपातिक प्रायिकताओं तथा प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन या संक्षेप में DPSWR कहते हैं।

हम यह पहले देख चुके हैं कि यह प्रतिचयन विधि, प्रतिस्थापन सहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन SRSWR के समान है अर्थात् यह विस्तृत आकार की समष्टि, जिसमें मूल इकाई को छोटी उप-इकाइयों में बांट कर नई इकाईयां हैं, से प्रतिचयन है। अतः iवीं मूल इकाईयों को Xi उप-इकाईयों में बंटा हुआ माना गया है। प्रत्येक उप-इकाई का अभिलक्षण मान $Y_i^* = \frac{Y_i}{X_i}$ लिया गया है। इस प्रकार, कुल उप-इकाईयों की संख्या $X = X_1 + \ldots\ldots + X_N$ तथा इन उप-इकाइयों के अभिलक्षण मानों का योग

$$Y_1^*X_1 + Y_2^*X_2 + \ldots\ldots + Y_N^*X_N = Y_1+Y_2 + \ldots\, Y_N = N\mu \text{ है।}$$

प्रति इकाई नए अभिलक्षण का माध्य मान $\mu^* = \frac{N\mu}{X}$ है। तथा इसका प्रसरण

$$\sigma^{*2} = \frac{1}{X}\left(Y_1^{*2}X_1 + \ldots\ldots + Y_N^{*2}X_N\right) - \mu^{*2}$$

$$= \frac{1}{X}\left(\frac{Y_1^2}{X_1} + \ldots\ldots + \frac{Y_N^2}{X_N}\right) - \mu^{*2} \text{ है।}$$

मान लीजिए n आकार के PPSWR प्रतिदर्श द्वारा परिकलित नए अभिलक्षण का माध्य $\overline{Y}^*$ तथा प्रसरण ν^* है। तब SRSWR के परिणामों द्वारा हमें यह बात ज्ञात है कि $E(\overline{Y}^*) = \mu^*$, $V(\overline{Y}^*) = \frac{\sigma^{*2}}{n}$ तथा $E(\nu^*) = \left(1-\frac{1}{n}\right)\sigma^{*2}$ होगा।

अतः $\hat{\mu} = \frac{X\overline{Y}^*}{N}$ समष्टि माध्य μ का अनभिनत आकलक होगा तथा इसका प्रसरण $V(\hat{\mu})$

$= \frac{X^2\sigma^{*2}}{N^2 n}$ होगा।

है। प्रतिस्थापन बिना, आकार के आनुपातिक प्रतिचयन PPSWOR कठिन है तथा इसका विवेचन यहां नहीं किया जाएगा।

व्यवहार में, निस्संदेह, मूल इकाईयों को कभी बांटा नहीं जाता। अगर iवीं इकाई के अनुरूप एक उप-इकाई का चयन हो जाता है तो PPSWR में मान को $\frac{Y_i}{X_i}$ लिखा जाता है तथा सभी परिकलन अभिलक्षण के इस नए मान के द्वारा किए जाते हैं।

18.2.3 क्रमबद्ध प्रतिचयन

इस प्रतिचयन की पूर्ण रूप से व्याख्या हम पहले ही कर चुके हैं। यहां पर ध्यान रखने वाली बात केवल यह है कि एक क्रमबद्ध प्रतिदर्श द्वारा प्रतिचयन त्रुटि का आकलन संभव नहीं होता।

18.2.4 बहुचरणी प्रतिचयन

विचारों को निश्चित करने के लिए हम एक समष्टि पर विचार करते हैं जिसकी प्रथम चरण इकाईयां M हैं तथा प्रत्येक प्रथम चरण इकाई के लिए बहुत-सी दूसरे चरण की इकाईयां हैं। मान लीजिए iवीं प्रथम चरण इकाई के लिए N_i दूसरे चरण की इकाईयां है $i=1, 2 ...., M$ है। इस प्रकार समष्टि में दूसरे चरण की कुल इकाईयां $N=N_1+N_2+.......+N_M$ होंगी। मान लीजिए हम iवीं प्रथम चरण इकाई तथा jवीं दूसरे चरण की इकाई के अभिलक्षण को Y_{ij} से सूचित करते हैं। इस प्रकार, iवीं प्रथम चरण की इकाई का योग

$$Y_i=Y_{i1}+Y_{i2}+.......+Y_{ij} \text{ तथा}$$

समष्टि के लिए सर्वयोग $Y=Y_1+Y_2+.......+Y_M$ होगा।

मान लीजिए समष्टि से सरल यादृच्छिक प्रतिचयन द्वारा केवल पहले चरण की एक इकाई को ही प्राप्त किया जाता है तथा पहले चरण में चयन की गई इकाई के लिए दूसरे चरण की इकाईयों की पूर्ण गणना की जाती है। इस प्रकार हम पहले चरण की इकाई में आने वाली दूसरे चरण की इकाईयों का योग प्राप्त कर सकते हैं, जिसको Y से सूचित किया जा सकता है। अतः Y एक यादृच्छिक चर है जोकि $Y_1, Y_2, ... Y_M$ में से केवल एक मान ले सकता है (यह पहले चरण में चयन इकाई पर निर्भर है) तथा यह प्रत्येक मान लेने की प्रायिकता $\frac{1}{M}$ है। Y का प्रत्याशित मान तथा प्रसरण क्रमशः इस प्रकार होंगेः

$$E(Y)=\frac{1}{M}(Y_1+Y_2+........+Y_M)=\mu$$

$$V(Y)=\frac{1}{M}\left[(Y_1-\mu)^2+.........+(Y_M-\mu)^2\right]=\sigma_0^2$$

परिणामतः समष्टि योग $Y=M\mu$ का अनभिनत आकल MY तथा इसका प्रसरण $M^2\sigma_0^2$ होगा।

अगर पहले चरण में SRSWR विधि द्वारा m इकाईयों का चुनाव किया जाए तथा इन इकाईयों की सभी दूसरे चरण की इकाईयों की गणना की जाए तो हमें m योग $Y_1, Y_2 ...... Y_m$ प्राप्त होंगे। इनके लिए हम $\hat{Y}=m\bar{y}$ परिकलित कर सकते हैं, जहां पर $\bar{Y}=\frac{1}{m}(Y_1+Y_2+........+Y_m)$ है। यहां पर समष्टि योग Y का अनभिनत आकल $\hat{Y}$ होगा। $\hat{Y}$ का प्रसरण $v(\hat{Y})$ $=\frac{M^2\sigma_0^2}{m}$ होगा।

अगर, हम चयन की गई प्रथम चरण की प्रत्येक इकाई में से दूसरे चरण की इकाईयों का प्रतिदर्श लेते हैं तो मान लीजिए iवीं पहले चरण की इकाई, जिसमें N_i दूसरे चरण की इकाईयां हैं, से दूसरे चरण की इकाईयों का SRSWR विधि द्वारा प्रतिदर्श प्राप्त करते हैं। तो प्रतिदर्श माध्य $\bar{Y}_i$, $\mu_i=\frac{Y_i}{N_i}$ का अनभिनत आकल होगा इसलिए $\hat{Y}_i=N_i\bar{Y}_i$ हमें Y_i का अनभिनत आकल प्रदान करेगा। हम iवीं पहले चरण की इकाई में दूसरे चरण की इकाईयों के प्रसरण

जिससे $V(\hat{Y}_i) = \frac{N_i^2\sigma_i^2}{n_i}$ होगा।

योग के आकल के लिए हमें चयन की हुई पहले चरण की इकाई के योग के आकल को m से गुणा करना होता है। मान लीजिए इसको हम T से सूचित करते हैं। अतः T एक यादृच्छिक चर है जिसका $M\hat{Y}_i = MN_i\bar{Y}_i$, i = 1, 2,...M में से कोई मान हो सकता है, जोकि इस बात पर निर्भर है कि प्रथम चरण की M इकाईयों में से किसका चयन होता है। यहां यह भी ध्यान दीजिए कि ये मान स्वयं भी यादृच्छिक चर हैं। अगर हम यह मान लें कि iवीं प्रथम चरण की इकाई का चयन हुआ है तो T के सप्रतिबंध प्रत्याशित मान तथा सप्रतिबंध प्रसरण क्रमशः

$$E(T/i) = MY_i \text{ तथा } V(T/i) = \frac{M^2N_i^2\sigma_i^2}{n_i} \text{ होंगे}$$

ये मान दूसरे चरण के प्रत्येक संभव प्रतिदर्श पर परिकलित किए हुए हैं। T के अप्रतिबंध प्रत्याशित मान को प्राप्त करने के लिए हम सभी संभव प्रथम चरण के प्रतिदर्शों के लिए MY_i का प्रत्याशित मान परिकलित करते हैं।

$$E(T) = \frac{1}{M}(MY_1 + \ldots\ldots + MY_m) = Y_1 + Y_2 + \ldots\ldots + Y_m = Y$$

जोकि यह दर्शाता है कि T, Y का अनभिनत आकल है। T के अप्रतिबंध प्रसरण को परिकलित करने के लिए हमें T की सप्रतिबंध प्रत्याशा के प्रसरण में T के सप्रतिबंध प्रसरण की प्रत्याशा को जोड़ना होगा, जहां पर प्रत्याशा तथा प्रसरण दोनों का परिकलन प्रथम चरण के सभी संभव प्रतिदर्शों पर परिकलित किया गया है।

अब $VE(T/i) = M^2 V(Y_i) = M^2\sigma_0^2$ (प्रत्याशा का प्रसरण)

$$\text{तथा } EV(T/i) = \frac{1}{M}\left[\frac{M^2N_1^2\sigma_1^2}{n_1} + \frac{M^2N_2^2\sigma_2^2}{n_2} + \ldots\ldots\ldots + \frac{M^2N_m^2\sigma_m^2}{n_m}\right]$$

$$= M\left[\frac{N_1^2\sigma_1^2}{n_1} + \frac{N_2^2\sigma_2^2}{n_2} + \ldots\ldots + \frac{N_m^2\sigma_m^2}{n_m}\right] \text{(प्रसरण की प्रत्याशा)}$$

अतः T का अप्रतिबंध प्रसरण

$$V(T) = M\left[M\sigma_0^2 + \sum_{i=1}^{M}\frac{N_i^2\sigma_i^2}{n_i}\right] = \delta^2 \text{ (मान लीजिए)}$$

अगर अब हम व्यावहारिक परिस्थिति पर विचार करें, जहां पर m पहले चरण की इकाईयों का प्रतिदर्श SRSWR विधि द्वारा प्राप्त किया जाता है तथा बाद में प्रत्येक पहले चरण की इकाईयों से एक पूर्व-निर्धारित संख्या में दूसरे चरण की इकाईयों का प्रतिदर्श भी SRSWR विधि द्वारा प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार, हम समष्टि योग Y के m स्वतंत्र आकल T_1, T_2 .... T_N जोकि प्रत्येक पहले चरण की इकाई से प्राप्त है, प्राप्त कर सकते हैं। इनको सम्मिलित करके प्रतिदर्श माध्य $\bar{T} = 1/m\,(T_1 + T_2 + \ldots\ldots + T_m)$ प्राप्त किया जा सकता है, जोकि Y का अनभिनत आकलक है। स्पष्टतः $\bar{T}$ का प्रसरण $V(\bar{T}) = \delta^2/m$ जोकि $V/_{(m-1)}$ द्वारा अनभिनततः आकलित है, जहां पर V = प्रतिदर्श प्रसरण,

$$V = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}(T_j - \bar{T})2$$

सामान्यतः हमें अपने आपको प्रत्येक चरण में SRSWR विधि तक सीमित रखना आवश्यक नहीं है। हम एक व्यापक परिस्थिति पर विचार करते हैं, जहां पर m पहले चरण की इकाईयों का चुनाव स्वतंत्र रूप में प्रतिस्थापन सहित एक के बाद एक चयन करके तथा किसी चयन में कोई प्रतिचयन विधि प्रयोग करके किया गया है। प्रतिचयन विधि पर केवल शर्त यह है कि प्रत्येक इकाई के प्रतिदर्श में चयन की प्रायिकता धनात्मक होनी चाहिए। इसके पश्चात् पहले चरण में प्राप्त की गई प्रत्येक इकाई से हम किसी प्रतिचयन विधि द्वारा दूसरे चरण या इससे निम्न संख्या की [illegible]

प्राप्त समष्टि योग Y का अनभिनत आकल T_i है, i=1, 2........ m है। तब

$E(T_i) = Y, V(T_i) = S_i^2$

(जोकि अलग-अलग पहले चरण की इकाईयों के लिए भिन्न हो सकता है।

तथा Cov. $(T_i, T_j) = 0$ जब $i \neq j = 1, 2......m$ क्योंकि पहले चरण की इकाईयों का प्रतिचयन स्वतंत्र है तथा प्रतिस्थापन सहित है। तब, स्पष्टत: $\bar{T} = 1/m\,(T_1 + ... + T_m)$ समष्टि योग Y का अनभिनत आकलक है, तथा

$V(\bar{T}) = 1/m^2\left[\delta^2_1 + ... + \delta^2_m\right]$ जहां पर $\delta^2 = 1/m\left[\delta^2_1 + ... + \delta^2_m\right]$ लिया है।

मान लीजिए हम $T_1, ..., T_m$ के प्रतिदर्श प्रसरण को V द्वारा सूचित करते हैं, अर्थात्

$$V = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(T_i-\bar{T})^2 = \frac{1}{m}(T^2_1 + ... + T^3_M) = \bar{T}^2$$

V का प्रत्याशित मान

$$E(V) = \frac{1}{m}\left[E(T^2_1) + ... + E(T^2_m)\right] - E(\bar{T}^2)$$

लेकिन $E(T^2_i) = V(T_i) + \left[E(T_i)\right]^2 = \delta^2_i + Y^2$

तथा $E(\bar{T}^2) = V(\bar{T}) + \left[E(\bar{T})\right]^2 = \frac{\delta^2}{m} + Y^2$

अत: $E(V) = \frac{1}{m}\left[\delta_1^2 + Y^2 + ... + \delta^2_m + Y^2\right] - \left[\frac{\delta^2}{m} + Y^2\right] = \frac{m-1}{m}\delta^2$

क्योंकि $\delta^2 = \frac{1}{m}\left[\delta^2_1 + ... + \delta^2_m\right]$

इस प्रकार समष्टि के योग के प्रसरण का अनभिनत आकलन $\frac{V}{m-1}$ है।

18.2.5 स्तरित प्रतिचयन

समष्टि माध्य के आकल का प्रतिचयन प्रसरण, प्रतिदर्श आकार तथा समष्टि की इकाईयों के बीच परिवर्तनशीलता पर निर्भर होता है। प्रतिचयन प्रसरण को कम करने की एक सुविधाजनक विधि, समष्टि को कई समरूप उपसमष्टियों में बांटना है जिससे एक उपसमष्टि की इकाईयों के बीच परिवर्तनशीलता, विभिन्न उपसमष्टियों की इकाईयों के बीच परिवर्तनशीलता से कम हो। इन प्रत्येक उपसमष्टियों को स्तर कहा जाता है तथा समष्टि को तुलनात्मक समरूप समष्टियों में बांटने की क्रिया को स्तरण कहते हैं। पूरी समष्टि से प्रतिदर्श के रूप में प्राप्त की जाने वाली इकाईयां अब विभिन्न स्तरों में बंटित की जाती है। प्रत्येक स्तर से एक निश्चित इकाईयों का प्रतिदर्श प्राप्त किया जाता है तथा स्तर का माध्य इन इकाईयों से आकलित किया जाता है। विभिन्न स्तरों के माध्य के आकलों को एकत्र करके समष्टि माध्य का आकलन किया जाता है। चूंकि एक स्तर की इकाईयों के बीच परिवर्तनशीलता कम है तो स्तर के माध्य के आकल का प्रतिचयन प्रसरण भी छोटा होगा। परिणामत: समष्टि माध्य के संयुक्त आकल का प्रतिचयन प्रसरण, बिना स्तरण के प्राप्त प्रतिदर्श द्वारा आकल के प्रतिचयन प्रसरण से छोटा होगा।

एक स्तर के अंदर प्रतिचयन तथा आकलन की विधि बहुत लोचदार हो सकती है। लेकिन ह प्रत्येक स्तर में सरल यादृच्छिक प्रतिचयन विधि द्वारा स्तरण की प्रभावशीलता की व्याख्या करेंगे।

मान लीजिए समष्टि में N इकाईयां हैं जिसमें विचाराधीन अभिलक्षण का माध्य μ तथा इसका प्रसरण σ^2 है। मान लीजिए समष्टि को k परस्पर अपवर्जी तथा निशशेष स्तरों में विभाजित किया गया है तथा jवें स्तर में N_j इकाईयां हैं, j=1, ..., k हैं। मान लीजिए jवें स्तर में अभिलक्षण का माध्य तथा प्रसरण क्रमश: μ_j तथा σ^2_j से सूचित किए जाते हैं, i=1, 2...., k हैं।

तब हम यह जानते हैं कि $\mu = \frac{1}{m}\left[N_1\mu_1 + ... + N_k\mu_k\right]$

तथा $\sigma^2 = \sigma_w^2 + \sigma_B^2$

जहां पर $\sigma_w^2 = \frac{1}{N}(N_1\sigma_w^2 + ... + N_k\sigma_k^2)$ स्तर के बीच औसत प्रसरण है तथा

स्तरण का मुख्य उद्देश्य $\sigma_{\bar{y}}$ की तुलना में $\sigma_{\hat{\mu}}$ को कम बनाना है। अगर हम पूर्ण समष्टि से n इकाईयों का सरल यादृच्छिक प्रतिदर्श लेते हैं तो प्रतिदर्श माध्यम $\bar{Y}$ समष्टि माध्य का अनभिनत आकल होता है तथा इसका प्रसरण (प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन में परिमित समष्टि परिशुद्धि पर ध्यान न देने पर) $V(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{N}$ होता है। स्तरण प्रतिचयन में, प्रत्येक स्तर से स्वतंत्र प्रतिदर्श प्राप्त किए जाते हैं तथा इनके आधार पर स्तर के माध्यम का आकलन किया जाता है। मान लीजिए jवें स्तर से n_i इकाईयों के प्रतिदर्श का चुनाव सरल यादृच्छिक प्रतिचयन विधि द्वारा किया जाता है, $j = 1, 2, ..., k$ है। प्रतिदर्श का कुल आकार $n = n_1 + ... + n_k$ है। मान लीजिए jवें स्तर से प्राप्त प्रतिदर्श का माध्य $\bar{Y}_j$ है, जोकि μ_j का अनभिनत आकलन है (चाहे प्रतिचयन प्रतिस्थापन सहित या बिना किया गया है)। मान लीजिए Y_j, jवें स्तर से प्राप्त प्रतिदर्श के प्रेक्षणों का प्रसरण है। तब समस्त समष्टि माध्यम μ का आकलक

$\hat{\mu} = \frac{1}{N}(N_1 Y_1 + ... + N_k Y_k)$ है। जोकि स्पष्टत: अनभिनत है। चूंकि विभिन्न स्तरों से किए गए प्रतिचयन स्वत्तंत्र हैं, इसलिए $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2 ..... \bar{Y}_k$ भी स्वतंत्र होंगे। μ का प्रतिचयन प्रसरण $\bar{V}$

$V(\mu) = \frac{1}{N^2}\left[N_1^2 V(\bar{Y}_1) + ... + N_k^2 V(\bar{Y}_k)\right]$ होगा

अब हम ध्यान करें कि

$$V(\bar{Y}_j) = \begin{cases} \frac{\sigma_j^2}{n_i} & \text{प्रतिस्थापन सहित प्रतिचयन में (SRSWR)} \\ \frac{\sigma_j^2}{n_j}\left(1 - \frac{n_j - 1}{N_j - 1}\right) & \text{प्रतिस्थापन बिना प्रतिचयन में (SRSWOR)} \end{cases}$$

इसका अनभिनत आकल e_j^2 होता है, जिसका मान

$$e_j^2 = \begin{cases} \frac{V_j}{n_j - 1} & \text{जब SRSWR है} \\ \frac{V_j}{n_j - 1}\left(1 - \frac{n_j}{N_j}\right) & \text{जब SRSWOR है} \end{cases}$$

अत: हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है:

$$v(\hat{\mu}) = \begin{cases} \frac{1}{N^2}\left(N_1^2 \frac{\sigma_1^2}{n_1} + ... + N_k^2 \frac{\sigma_k^2}{n_k}\right) \text{जब SRSWR है} \\ \frac{1}{N^2}\left[N_1^2 \frac{\sigma_1^2}{n_1}\left(1 - \frac{n_1 - 1}{N_1 - 1}\right) + ... + N_k^2 \frac{\sigma_k^2}{n_k}\left(1 - \frac{n_1 - 1}{N_k - 1}\right)\right] \end{cases}$$

जब SRSWOR है।

बोध प्रश्न 1

1) SRSWR तथा SRSWOR के लिए माध्य तथा प्रसरण के अनभिनत आकलों को लिखिए तथा बताइए कि ये अनभिनत क्यों हैं?

....

....

....

....

....

....

....

2) (i) आका पातिक प्रायिकता सहित प्रतिचयन विधि (SWPPS) की व्याख्या कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

(ii) PPSWR के माध्य तथा प्रसरण के अनभिनत आकलों को लिखिए।

....

....

....

3) बहुचरणी प्रतिचयन तथा स्तरित यादृच्छिक प्रतिचयन में भेद को स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4) बहुचरणी प्रतिचयन तथा सरल यादृच्छिक प्रतिचयन के माध्य तथा प्रसरण के अनभिनत आकलों को लिखिए।

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

18.3 स्तरित प्रतिचयन : कैसे किया जाए?

18.3.1 उदाहरण : एक तहसील से गांवों का प्रतिचयन

स्तरण विधि : तहसील के 128 गांवों को उनके क्षेत्रफल के अनुसार वर्धमान क्रम में व्यवस्थित करने के बाद, इनको तीन स्तरों $k=3$ में विभाजित किया गया। पहला स्तर न्यूनतम $N_1=60$ गांवों द्वारा, दूसरा स्तर अगले $N_2=40$ गांवों द्वारा तथा तीसरा स्तर अधिकतम $N_3=28$ गांवों द्वारा बनाया गया।

प्रतिचयन विधि : यह निर्णय लिया गया कि पहले स्तर से $n_1=3$, दूसरे स्तर से $n_2=2$ तीसरे स्तर से $n_3=3$ गांवों का चयन, प्रत्येक परिस्थिति में स्वतंत्र रूप से प्रतिस्थापन सहित सरल यादृच्छिक प्रतिचयन, द्वारा किया जाएगा।

आकलन की विधि : iवें स्तर के प्रतिदर्श प्रेक्षणों के आधार पर प्रतिदर्श माध्य $\overline{Y}_i$ तथा प्रतिदर्श प्रसरण v_i का परिकलन किया जायगा। $\overline{Y}_i$ के प्रतिचयन प्रसरण का आकल

$e_i^2=\frac{v_i}{n_i-1}$ के रूप में प्राप्त किया जाएगा।

128 गांवों की समष्टि के माध्य का आकलन $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\left[N_1\overline{Y}_1+N_2\overline{Y}_2+N_3\overline{Y}_3\right]$ प्राप्त किया

जाएगा। $\hat{\mu}$ का प्रतिचयन प्रसरण $e^2 = \frac{1}{N^2}\left[N_1^2 e_1^2 + N_2^2 e_2^2 + N_3^2 e_3^2\right]$ के रूप में आकलित किया

जाएगा। अध्ययन के अंतर्गत चर, 1961 में गांवों में कृषकों की संख्या है।

प्रतिदर्शों का चयन : स्तर 1 में 60 गांव हैं, जिनकी कोटि 1 से 60 है। तीन गांवों के चयन के लिए हम 01-60 तक दो अंकों की यादृच्छिक संख्याएं प्रयोग करते हैं। पृष्ठ 1, पंक्ति 10 तथा स्तम्भ 13 से शुरू करने पर हमें ये यादृच्छिक संख्याएं प्राप्त होती हैं: 79, 71, 67, 00; 01, 05, 47, 89...... आदि, जिनमें से प्रयोग के लायक पहली तीन संख्याएं 01, 05, 47 है। कोटि द्वारा गांव की क्रमांक संख्या की पहचान के लिए हम यह देखते हैं कि कोटि 1 वाले गांव की क्रमांक संख्या 34 है, कोटि 5 वाले गांव की क्रमांक संख्या 106 है तथा कोटि 47 वाले गांव की क्रमांक संख्या 101 है। इस प्रकार पहले स्तर में चुने गए गांव की क्रमांक संख्या 34, 106 तथा 101 हैं। स्तर 2 में 40 गांव हैं जिनकी कोटि 61 से 100 है। हम यह मान लेंगे कि इनको स्तर के अंदर 1 से 40 तक नई कोटि दी गई है। इन 40 इकाईयों में से चयन के लिए हम 01 से 80 तक दो अंकों वाली यादृच्छिक संख्याएं प्रयोग कर सकते हैं। यादृच्छिक संख्याओं के पृष्ठ 2, पंक्ति 21 तथा स्तम्भ 17 से शुरू करके हमें संख्याएं 97, 10, 18, 35..... प्राप्त होती हैं, जिनमें से पहली दो प्रयोग लायक संख्याएं 10 तथा 18 हैं। समष्टि में इनकी पुरानी कोटि 60 + 10 = 70 तथा 60+ 18 = 78 है। 70 कोटि के अनुरूप क्रमांक संख्या 37 है तथा 78 कोटि के अनुरूप क्रमांक संख्या 30 है। इस प्रकार, स्तर 2 में चयन किए गए गांवों के क्रमांक 37 और 38 हैं। स्तर 3 से 28 गांवों में से 3 गांवों का प्रतिदर्श प्राप्त करने के लिए हम यह देखते हैं कि इनकी कोटि 101 से 128 है। अब हम इनको स्तर के अंदर 1 से 28 तक नई कोटि प्रदान करते हैं। 28 गांवों में से 3 गांवों के चयन के लिए हम 01 से 84 तक दो अंक संख्याओं का प्रयोग करते हैं, यहां पर 84 बड़ी से बड़ी वह संख्या है जो 28 से भाज्य है। यादृच्छिक संख्याओं के पृष्ठ 3, पंक्ति 16 तथा स्तम्भ 5 से शुरू करके हमें संख्याएं 93, 76, 85, 17, 13, 11 आदि प्राप्त होती हैं। पहली तीन प्रयोग लायक संख्याएं 76, 17 तथा 13 है, संख्या 76 की कोटि 20 है (76 को 28 से भाग करने पर शेष)। अतः स्तर 3 के अंदर चयन की गई इकाईयों की कोटि 20, 17 तथा 13 है। समष्टि में इनकी पुरानी कोटि 120, 117 तथा 113 है। इनकी क्रमांक संख्याएं क्रमशः 8, 93 तथा 6 हैं।

कोटि	गांव की क्रमांक संख्या	क्षेत्रफल वर्ग मीलों में	खेती के अंतर्गत क्षेत्रफल एकड़ों में (1951)	व्यक्तियों की संख्या (1961)	व्यक्तियों की संख्या (1951)	कृषकों की संख्या (1961)	पारिवारिक उद्योगों में श्रमिकों की संख्या (1961)	परिवारों की संख्या (1961)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	34	0.18	61	3402	3684	93	46	812
2	100	0.80	156	9113	10471	1506	846	2302
3	105	0.82	610	2069	4333	1074	125	1134

8	107	1.23	631	1563	1481	235	66	356
9	21	1.29	527	588	605	126	38	111
10	55	1.35	564	1241	1303	421	0	279
11	121	1.44	730	1781	1953	561	6	397
12	2	1.55	428	378	420	193	0	78
13	19	1.63	608	832	886	291	10	200
14	112	1.77	428	695	925	181	1	193
15	67	1.78	653	1764	1828	271	0	398
16	108	1.88	1074	1369	1499	269	31	314
17	119	1.91	933	1155	1284	440	22	265
18	29	1.95	767	827	772	192	5	169
19	14	2.13	695	1299	977	343	22	198
20	88	2.24	1333	4283	4339	506	15	960
21	82	2.32	1210	2188	2160	937	26	434
22	26	2.46	482	1058	1124	419	10	240
23	64	2.53	872	1880	2105	826	34	409
24	72	2.55	1658	2039	2119	644	25	470
25	24	2.56	719	941	1045	191	42	215
26	89	2.58	1509	1470	1505	168	18	314
27	48	2.71	1109	984	1185	445	22	237
28	124	2.75	772	1577	1757	402	100	373
29	85	2.77	1337	1153	949	249	15	215
30	123	2.79	1753	4109	4029	928	67	842
31	25	2.95	607	1287	1513	336	99	276
32	104	3.00	1356	4091	3590	399	2	536
33	20	3.03	1124	865	820	351	2	174
34	109	3.03	1959	2323	2739	932	77	593
35	98	3.05	1667	381	550	67	0	107
36	84	3.08	1867	2887	3114	559	35	689
37	118	3.25	1653	1430	1483	473	0	310
38	78	3.31	980	1010	1021	170	5	196
39	99	3.43	2013	1665	1801	591	13	379
40	71	3.47	1209	3970	3984	1323	29	841
41	3.	3.51	1177	2574	2819	819	116	548
42	116	3.56	1328	2639	2740	917	6	549
43	59	3.57	1314	1643	1808	304	36	381
44	74	3.61	1289	3664	3767	607	57	906
45	117	3.61	1612	2955	3151	1181	43	709
46	101	3.67	1425	2540	3394	953	10	649
47	28	3.74	1367	1337	1506	393	33	282
48	68	3.80	2357	3809	3968	821	69	858
49	53	3.86	1665	1894	1891	277	37	332
50	27	4.03	1527	2111	2167	432	72	415
51	125	4.03	2096	1328	2446	0	6	652
52	40	4.28	1599	1714	1466	438	9	289
53	44	4.28	1371	2870	3139	916	4	657
54	111	4.32	2618	5596	6169	1367	77	1247
55	43	4.38	1959	2681	2523	455	7	549
56	77	4.30	1414	2444	2373	373	62	528
57	110	4.57	2366	1963	2195	367	67	467
58	87	4.58	1930	3726	3607	563	98	759
59	75	4.59	599	3534	3363	925	44	749
60	57	4.60	901	1306	1510	383	60	383
61	103	4.60	2394	2728	3458	451	29	689
62	79	4.65	1543	2593	2559	633	32	546
63	86	4.66	1031	3732	3883	910	60	767
64	115	4.66	1870	3466	3461	553	104	682
65	128	4.77	1318	1058	1116	222	8	236
66	33	4.90	1638	1877	2342	543	35	472
67	47	4.97	2935	4096	4054	1438	35	793
68	62	5.01	1053	4020	3052	955	51	715
69	102	5.17	2566	4816	5061	489	83	1091
70	37	5.28	2622	2654	2768	1039	107	599
71	36	5.37	1751	3145	3822	884	121	717
72	92	5.56	1881	953	1223	1	0	261
73	114	5.56	2296	4558	4650	1091	60	969
74	63	5.57	2071	6142	6384	1158	106	1400
75	65	5.64	1718	5133	5803	1565	77	1200

82	61	6.17	1657	2988	3042	1145	110	629
83	73	6.27	2608	4281	4295	818	50	905
84	69	6.35	3258	2780	2727	841	12	573
85	51	6.40	811	3180	3312	446	65	704
86	30	6.44	1645	2533	2772	1091	104	607
87	60	6.52	1506	7357	6758	1116	71	1512
88	127	6.56	2377	4543	5158	783	118	1068
89	17	6.90	2221	2383	2538	719	179	541
90	39	6.91	3031	3523	3879	1348	84	878
91	1	6.97	2544	3295	3552	806	153	757
92	66	6.98	316	656	532	75	3	118
93	113	7.18	2075	8822	8946	2320	65	1696
94	76	7.21	2573	4159	4444	1813	19	968
95	94	7.35	4072	1292	3797	0	1	1229
96	23	7.40	2770	3464	3665	1454	29	718
97	45	7.70	3290	4435	4781	1380	28	1004
98	13	7.73	1949	3753	3802	1345	63	758
99	18	7.80	2423	2836	2988	797	52	631
100	54	8.07	2350	4021	4201	793	54	850
101	120	8.15	2698	2895	2925	1069	112	629
102	41	8.33	2249	3479	3850	1272	71	785
103	5	8.46	2618	3915	4040	1149	196	873
104	91	8.47	4424	5150	5709	1409	53	1207
105	126	8.51	2562	4231	4194	1020	73	889
106	70	8.97	4051	5131	5059	1709	271	1036
107	56	9.06	2487	3243	2915	1085	30	590
108	22	9.09	2767	6365	6325	1906	152	1197
109	52	9.13	1453	2683	2996	888	39	657
110	81	9.27	2600	3834	4699	1047	84	965
111	32	9.28	2434	3378	3612	1219	126	716
112	9	9.42	2237	2461	2554	1291	74	523
113	6	9.71	4113	3249	3644	1510	151	763
114	4	9.96	4567	4466	4892	1970	327	1064
115	80	10.15	3060	4654	4961	1304	39	1033
116	58	10.67	2040	6017	6572	1813	126	1414
117	93	10.87	4139	2366	2929	109	0	750
118	97	11.29	4634	9436	10472	2659	78	2073
119	31	11.33	2440	5820	6181	1830	373	1334
120	8	12.06	2713	4918	5082	888	39	984
121	16	12.74	4562	4942	5542	1543	80	1066
122	12	12.86	4012	4782	4873	1741	131	903
123	42	13.23	2641	7420	8086	2261	101	1668
124	35	13.25	4505	5769	5700	1675	133	1189
125	50	13.96	3678	8368	8493	2259	126	1667
126	49	14.30	2821	8200	7924	2299	269	1668
127	11	15.11	3420	6851	7409	1855	141	1455
128	96	16.36	5507	4865	6083	690	127	1401

प्रतिचयन के परिणाम निम्नलिखित में प्रस्तुत हैं:

स्तर I, $N_1 = 60$, $n_1 = 30$		स्तर II, $N_2 = 40$, $n_2 = 2$		स्तर III, $N_3 = 28$, $n_3 = 3$	
चयन हुए गांवों की क्रमांक संख्या	कृषकों की संख्या 1961	चयन हुए गांवों की क्रमांक संख्या	कृषकों की संख्या 1961	चयन हुए गांवों की क्रमांक संख्या	कृषकों की संख्या 1961
34	93	37	1039	8	888
106	530	38	941	93	109
101	953			6	1510

आकलन: निम्न सारणी में प्रति गांव में कृषकों की औसत संख्या का आकलन तथा आकल की मानक त्रुटि के परिकलन दिए गए हैं।

स्तर	N	n	प्रतिदर्श माध्य $\bar{Y}$	प्रतिदर्श प्रसरण V	प्रतिदर्श माध्य की मानक त्रुटि का वर्ग $e^3 = \frac{V}{n-1}$

समष्टि माध्य का संयुक्त आकल $\hat{\mu} = \frac{1}{N}\left[N_1\bar{Y}_1 + N_2\bar{Y}_2 + N_3\bar{Y}_3\right]$

$= 738.43$

तथा प्रतिचयन प्रसरण का आकल $e^2 = \frac{N_1^2 e_1^2 + N_2^2 e_2^2 + N_3^2 e_3^2}{N^2}$

$= 21637.94$

अत: समष्टि माध्य के आकल की मानक त्रुटि $e = 147.10$ है।

18.3.2 स्तरित बनाम सरल यादृच्छिक प्रतिचयन

अब हम सीधे सरल यादृच्छिक प्रतिचयन की तुलना में स्तरित प्रतिचयन की दक्षता की तुलना करना चाहेंगे।

स्तर संख्या	सम्मिलित गांवों की कोटि	गांवों की संख्या कोटि	गांवों का क्षेत्रफल वर्ग मीलों में		गांवों में खेती के अंतर्गत क्षेत्रफल एकड़ों में (1951)		गांवों में व्यक्तियों की संख्या 1951 में)		1961 में कृषकों की संख्या		
			न्यूनतम	अधिकतम	न्यूनतम	अधिकतम	न्यूनतम	अधिकतम	योग	प्रति गांव (औसत)	गांवों के बीच प्रसरण
1)	1-60	60	0.18	4.60	61	2618	378	9113	31774	529.667	122092.95
2)	61-100	40	4.60	8.07	316	4072	656	8822	35914	897.850	220080.08
3)	101-128	28	8.15	16.36	1453	5507	2366	8368	41470	1481.071	302071.64
सभी	1-128	128	0.18	16.36	61	5507	378	9113	109158	852.979	328039.47

उपरोक्त तालिका में दिए गए कुछ आंकड़े इन चरों से संबंधित हैं: (i) वर्ग मीलों में क्षेत्रफल (ii) 1951 में खेती के अंतर्गत क्षेत्रफल, एकड़ों में, तथा (iii) 1951 में व्यक्तियों की संख्या। पूरे तहसील के गांवों को 3 स्तरों से विभाजित किया गया है। 1961 में प्रति गांव में औसत कृषकों की संख्या के आकलन के उद्देश्य के लिए स्तरण के प्रभावशील के अध्ययन के लिए हमने (क) स्तर में कुल कृषकों की संख्या (ख) प्रति गांव में कृषकों की औसत संख्या, तथा (ग) एक स्तर में कृषकों की संख्या के अनुसार गांवों के बीच प्रसरण। यह ध्यान रखना आवश्यक है कि इस प्रकार के आंकड़े प्रतिचयन के आयोजन के समय उपलब्ध नहीं होते, लेकिन यहां पर प्रयोग की गई प्रतिचयन विधि की प्रभावशीलता के शव-परीक्षा अध्ययन के लिए इनका प्रयोग किया गया है।

पहले हम यह देखते हैं कि आकलन किए जाने वाले प्राचल का सत्य मान, तहसील में, 1961 में, प्रति गांव में कृषकों की औसत संख्या μ=852.797 है। तहसील में गांवों में कृषकों की संख्या का **प्रसरण** $\sigma^2 = 328039.47$ **है।**

अगर समष्टि से प्रतिस्थापन सहित n=8 आकार का यादृच्छिक प्रतिदर्श लिया जाता है तथा प्रतिदर्श माध्य $\bar{Y}$ को समष्टि माध्य का आलकन लिया जाता है तो आकलक का प्रसरण

$V(\bar{Y}) = \frac{\sigma^2}{n} = 41004.933$ होगा अर्थात् आकलक की मानक त्रुटि $s.e.(\bar{Y}) = V(\bar{Y}) =$ 202.50 होगा।

इसके विपरीत, अगर समष्टि को तीन स्तरों में स्तरित किया गया है जिसमें $N_1 = 60$ गांव, जोकि न्यूनतम क्षेत्र के हैं, पहले स्तर में, N_3=28 अधिकतम क्षेत्रफल वाले गांव तीसरे स्तर में तथा बाकी N_2=40 गांवों जिनका क्षेत्रफल इनके बीच है, को दूसरे स्तर में जैसा कि ऊपर दिखाया गया है। पहले, दूसरे तथा तीसरे स्तरों से क्रमश: $n_1 = 3$, $n_2 = 2$ तथा $n_3 = 3$ गांवों के SRSWR प्रतिदर्श प्राप्त किए गए हैं। समष्टि माध्य का आकलन इस प्रकार किया जाएगा:

$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\left[N_1\bar{Y}_1 + N_2\bar{Y}_2 + N_3\bar{Y}_3\right]$ जहां पर $\bar{Y}_i$, i वें स्तर का प्रतिदर्श माध्य है।

इस आकल का प्रसरण $V(\mu) = \frac{1}{N^2}\left(N_1^2\frac{\sigma_1^2}{n_1} + N_2^2\frac{\sigma_2^2}{n_2} + N_3^2\frac{\sigma_3^2}{n_3}\right)$ जिसको वैकल्पिक रूप में इस प्रकार लिखा जा सकता है :

$V(\hat{\mu}) = P_1^2 e_1^2 + P_2^2 e_2^2 + P_3^2 e_3^2$

$P_2 = \frac{40}{128} = 0.3125$ तथा $P_3 = \frac{28}{128} = 0.21878$ है।

अतः स्तरित प्रतिदर्श द्वारा समष्टि माध्य के संयुक्त आकलक का प्रसरण

$V(\hat{\mu}) = P_1^2 e_1^2 + P_2^2 e_2^2 + P_3^2 e_3^2 = 24506.6524$

इस प्रकार आकलक की मानक त्रुटि s.e. $(\hat{\mu}) = 156.55.$

इससे यह स्पष्ट हो जाता है कि स्तरण के द्वारा हम समष्टि के आकल की मानक त्रुटि को 202.50 (SRSWR द्वारा) से 156.55 (स्तरित SRSWR द्वारा) तक कम करने में समर्थ हुए हैं। यह कमी 22.7 प्रतिशत है। हमें यह प्राप्ति इस वास्तविकता के बावजूद हुई है कि स्तरण द्वारा स्तर के अंदर अधिक समरूपता पाने का उद्देश्य ठीक प्रकार से प्राप्त नहीं हुआ है। स्तर 3 में प्रसरण का आकार अब भी अधिक है, यह लगभग सारे तहसील के गांवों के बीच प्रसरण के बराबर है।

18.3.3 स्तरों में प्रतिदर्श का आकार का आबंटन

अब हम 8 गांवों के कुल प्रतिदर्श आकार का तीन स्तरों में आबंटन के प्रश्न की ओर ध्यान केन्द्रित करेंगे। स्तर I से 3 गांव, स्तर II से 2 गांव तथा स्तर III से 3 गांव का प्रतिदर्श लेने का निर्णय बिल्कुल मनमाना था। इसका कारण प्रत्येक स्तर में गांवों के बीच परिवर्तनशीलता के बारे में सूचना की कमी थी। जब यह सूचना उपलब्ध हो तो एक स्तर से लिए जाने वाले प्रतिदर्श का आकार गुणनफल $N\sigma$ के आनुपातिक होना चाहिए, जहां पर N स्तर में इकाईयों की संख्या तथा σ स्तर में इकाईयों के बीच मानक विचलन है। यहां पर $N_1 = 60$, $N_2 = 40$, $N_3 = 28$ है, तथा मानक विचलन $\sigma_1 = 349.32$, $\sigma_2 = 469.13$ तथा $\sigma_3 = 549.61$ है। तीनों स्तरों से प्राप्त प्रतिदर्श संख्याएं क्रमशः n_1, n_2, n_3, ऐसी होनी चाहिए कि ये $N_1\sigma_1 = 20965.2$, $N_2\sigma_2 = 18765.2$ तथा $N_3\sigma_3 = 15389.1$ के आनुपातिक हों। इन संख्याओं का योग $N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2 + N_3\sigma_3 = 55119.5$ है। इस प्रकार $\frac{N_1\sigma_1}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2 + N_3\sigma_3} = 0.38.$ $\frac{N_2\sigma_2}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2 + N_3\sigma_3} = 0.34$

तथा $\frac{N_3\sigma_3}{N_1\sigma_1 + N_2\sigma_2 + N_3\sigma_3} = 0.28$ है। अतः $n_1 : n_2 : n_3$ का

अनुपात 0.38: 0.34: 0.28 होना चाहिए। अगर कुल प्रतिदर्श का आकार $n_1 + n_2 + n_3 = 8$ तो $n_1 = 8 \times 0.38 = 3.04$, $n_2 = 8 \times 0.34 = 2.72$ तथा $n_3 = 8 \times 0.28 = 2.24$ या इसका सन्निकट पूर्णांक लेने पर $n_1 = 3$, $n_2 = 3$ तथा $n_3 = 2$ है। स्तरों के प्रतिदर्श के आबंटन द्वारा समष्टि

माध्य के आकल का प्रसरण $V(\hat{\mu}) = \frac{1}{N_2}\left[N_1^2\frac{\sigma_1^2}{n_2} + N_2^2\frac{\sigma_2^2}{n_2} + N_3^2\frac{\sigma_3^2}{n_3}\right] = P_1^2\frac{\sigma_1^2}{n_2} + P_2^2\frac{\sigma_2^2}{n_2} + P_3^2\frac{\sigma_3^2}{n_3}$

$$= (0.46875)^2 \times \frac{122092.95}{3} + (0.3125)^2 \times \frac{220080.08}{3} + (0.21878)^2 \times \frac{302071.64}{2}$$

$$= 8942.3547 + 7164.0651 + 7229.2825 = 23335.7023$$

इस प्रकार आकलक की मानक त्रुटि s.e. $(\hat{\mu}) = V(\hat{\mu}) = 152.76$, **जोकि पहले मान** 156.55 से थोड़ा-सा कम है।

18.3.4 एक वैकल्पिक योजना

स्तरण के प्रभावों को उन्नत करने के लिए हम तीन चरों के प्रयोग द्वारा एक वैकल्पिक योजना पर विचार करते हैं : प्रत्येक गांव से संबंधित भौगोलिक क्षेत्रफल, 1951 में खेती के अंतर्गत क्षेत्रफल तथा 1951 में व्यक्तियों की संख्या। यहां पर फिर 3 स्तर होंगे, पहला स्तर छोटे गांवों का, तीसरा स्तर बड़े गांवों का तथा दूसरा स्तर बाकी गांवों का होगा। यहां पर छोटे या बड़े की परिभाषा केवल भौगोलिक क्षेत्रफल के आधार पर न होकर, तीनों विचाराधीन चरों के आधार पर होगी। इस बात को ध्यान में रखते हुए पहले स्तर में यह गांव लिए जाएंगे जिनमें छोटे तीन निकष इस प्रकार हैं : (1) भौगोलिक क्षेत्र 7 वर्ग मील से अधिक नहीं होना चाहिए, (2) 1951 में खेती के अंतर्गत क्षेत्रफल 1800 एकड़ से अधिक नहीं होना चाहिए तथा (3) 1951 में गांव में व्यक्तियों की संख्या 4000 से अधिक नहीं होनी चाहिए। इसी

स्तरण की इस योजना के अंतर्गत पहले स्तर में $N_1 = 55$ गांव हैं, जिनकी भौगोलिक क्षेत्रफल के **वर्धमान क्रम** में कोटि 1, 3, 4, 7-19, 21-29, 31, 33, 35, 37, 38, 40-47, 49, 50, 52, 53, 56, 59, 60, 62, 63, 65, 66, 71, 79, 82, 85, 86, 92 है।

दूसरे स्तर में, $N_2 = 51$ गांव हैं, जिनकी भौगोलिक क्षेत्रफल के वर्धमान क्रम में कोटि 2, 5, 6, 20, 30, 32, 34, 36, 39, 48, 51, 54, 55, 57, 58, 61, 64, 67-70, 72-78, 80, 81, 83, 84, 87-91, 95, 96, 98, 99, 101-103, 107, 109-113, 117 हैं।

तीसरे स्तर में, $N_3 = 22$ गांव हैं, जिनकी भौगोलिक क्षेत्रफल के वर्धमान क्रम में कोटि 93, 94, 97, 100, 104-106, 108, 114-116, 118-128 है।

तीन स्तरों से संबंधित प्रासंगिक आंकड़े निम्नलिखित में दिए गए हैं :

स्तर संख्या	आकार N	1961 में कृषकों की संख्या: योग	प्रति गांव माध्य	प्रसरण	मानक विचलन σ	$N\sigma$	$N\sigma$ के अनुपातिक
1)	55	27618	502.145455	104879.1066	323.8504	17812	0.359
2)	51	44403	870.647059	162541.1692	403.1639	20561	0.414
3)	22	37137	1688.045455	263825.6783	513.6396	11300	0.227
योग	128	109158	852.796875	328039.443	572.7473	49673	1.000

कुल प्रतिदर्शों की संख्या $n = 8$ को स्तर I, II तथा III में $n_1\sigma_1 : n_2\sigma_2 : n_3\sigma_3$ के अर्थात् 0.359 : 0.414 : 0.227 के अनुपात में आबंटित करना है। इससे हमें $n_1 = 3$, $n_2 = 3$, तथा $n_3 = 2$ प्राप्त होता है। इस प्रकार स्तर I से 3 गांवों का, स्तर II से 3 गांवों का तथा स्तर III से 2 गांवों का प्रतिदर्श लेना है। अगर $\bar{Y}_1, \bar{Y}_2, \bar{Y}_3$ क्रमशः स्तर, I, II तथा III के प्रतिदर्श माध्य को सूचित करते हैं तो समष्टि माध्य का आकल $\hat{\mu}\ \frac{1}{N}(N_1\bar{Y}_1 + N_2\bar{Y}_2 + N_3\bar{Y}_3)$ होगा तथा इसका

प्रतिचयन प्रसरण $V(\hat{\mu}) = \frac{1}{N^2}\left[N_1^2 \frac{\sigma_1^2}{N_2} + N_2^2 \frac{\sigma_2^2}{N_2} + N_3^2 \frac{\sigma_3^2}{N_2}\right]$
$= 18952.7652$ होगा।

तब आकल की मानक त्रुटि = s.e. $(\hat{\mu})\ \ Nv(\hat{\mu}) = 137.67$.

यहां इस बात पर दोबारा बल देना आवश्यक है कि ऊपर दिए गए विवेचनों का उद्देश्य केवल समष्टि के स्तर करने में सावधानी रखने की आवश्यकता की व्याख्या करना है। वास्तविक व्यवहार में, निस्संदेह विचाराधीन चर के मान स्तरण के प्रभावों की जांच के लिए उपलब्ध नहीं होंगे। लेकिन हमने यह सिद्ध किया है कि केवल भौगोलिक क्षेत्रफल पर आधारित स्तरण द्वारा हम मानक त्रुटि को 202.50 से कम करके 156.55 तक लाने में समर्थ हो सके हैं तथा अगर स्तरण को तीनों उपलब्ध चरों पर आधारित करते हैं तो मानक त्रुटि और कम होकर 137.67 है।

18.4 सम्मिश्रित प्रतिचयन अभिकल्पना

वास्तविक व्यवहार में प्रतिदर्श चयन की बहुत-सी विधियों को मिलाकर एक सम्मिश्रित प्रतिचयन अभिकल्पना तैयार होती है। अधिकतर परिस्थितियों में फ्रेम (समष्टि में प्रतिचयन इकाईयों की सूची), अनुपस्थिति के कारण, हमें बहुचरणी-अधिमानतः द्विचरणी प्रतिचयन अभिकल्पना को अपनाना पड़ता है। प्रथम चरण में प्रतिचयन की इकाई प्रायः एक प्रशासनिक क्षेत्र, जैसे ग्रामीण क्षेत्र में एक गांव या शहरी क्षेत्र में एक शहर-खंड हो सकती है। इन इकाईयों को भौगोलिक समीप्यता तथा प्रासंगिक चरों की समरूपता (जिनके बारे में वर्तमान सूचना जनगणना या अन्य अभिलेखों से प्राप्त है) के आधार पर बहुत से स्तरों में बांटा जाता है। प्रत्येक पहले चरण के स्तरों से एक निश्चित संख्या में, प्रथम चरण प्रतिचयन इकाईयों का यादृच्छिक चयन किसी उपयुक्त विधि के चयन द्वारा किया जाता है। चूंकि यह यादृच्छिक चयन प्रधान कार्यालय में किया जाता है, जहां पर साधन उपलब्ध होते हैं तथा

दूसरे चरण में, प्रत्येक पहले चरण में चयन की गई इकाईयों के लिए, अंतिम प्रतिचयन इकाईयों (परिवार, औद्योगिक या व्यावसायिक संस्थान आदि) की सूची तैयार की जाती है। इसमें जहां संभव हो, स्तरण के बाद एक सरल विधि के प्रयोग, जैसे समान प्रायिकताओं सहित वृत्ताकार क्रमबद्ध प्रतिचयन, द्वारा एक प्रतिदर्श का चयन किया जाता है।

प्रतिचयन के प्रथम तथा दूसरे चरणों में, प्रत्येक स्तरों से प्राप्त किए जाने वाले प्रतिदर्शों के आकार के निर्धारण के लिए दो मूल सिद्धांतों को प्रयोग किया जाता है–(1) स्वयं भार करने का सिद्धांत, जोकि इस बात को सुनिश्चित करता है कि प्रतिदर्श योग पर एक स्फीति गुणक के प्रयोग द्वारा समष्टि योग को आकलित किया जा सकता है, (2) अनुकूलतम आबंटन का सिद्धांत–किसी निश्चित पूर्व-निर्धारित प्रतिचयन त्रुटि स्तर को प्राप्त करने के लिए प्रतिचयन लागत को न्यूनीकरण या स्थिर प्रतिचयन लागत के लिए त्रुटि का न्यूनीकरण।

सम्मिश्रित प्रतिचयन अभिकल्पना के लिए आकलन प्रक्रिया की निम्नलिखित उदाहरण द्वारा व्याख्या की गई है :

सामाजिक-आर्थिक जांच करने के लिए भारत के समुदाय विकास खंडों से, द्विचरणी स्तरित अभिकल्पना के प्रयोग द्वारा, परिवारों के प्रतिदर्शों का चयन किया गया।

खंड के 86 गांवों को तीन प्रथम चरण स्तरों में बांटा गया।

पहले चरण में, प्रत्येक स्तर से स्वतंत्र रूप में गांवों का प्रतिदर्श, प्रतिस्थापन सहित एक के बाद एक करके तथा 1981 की जनगणना के अनुसार, किसी गांव के चयन की प्रायिकता, उस गांव की जनसंख्या के अनुपातिक सहित, प्राप्त किया गया।

प्रत्येक चुने हुए गांव से, दूसरे चरण में, परिवारों के प्रतिदर्श का चयन इस प्रकार किया गया : पहले चुने हुए गांव में परिवारों की सूची तैयार की गई तथा इसके दो स्तरों में विभाजित किया गया। पहले स्तर में उन परिवारों को सम्मिलित किया गया जो कृषि योग्य भूमि के स्वामी हैं तथा दूसरे स्तर में बाकी परिवारों को लिया गया जिनके पास कोई कृषि योग्य भूमि नहीं थी। प्रत्येक स्तर में बाकी परिवारों को उनके मासिक उपभोग व्यय के ह्रासमान क्रम में व्यवस्थित किया गया। प्रथम स्तर से 5 परिवारों का समान प्रायिकता वृत्ताकार क्रमबद्ध प्रतिदर्श तथा दूसरे स्तर से 8 परिवारों का प्रतिदर्श, प्रत्येक चुने हुए गांव से लिया गया।

प्रत्येक चुने हुए परिवार से, बहुत-सी अन्य सूचना के अतिरिक्त, परिवार में वर्तमान सदस्यों की संख्या (जुलाई, 1987) तथा जून, 1987 में कुल उपभोग व्यय पर सूचना एकत्रित की गई।

निम्नलिखित सूचनाओं के आधार पर, एक विशेष समुदाय विकास खंड के लिए यह आकलित कीजिए :

i) जुलाई, 1987 में कुल परिवारों तथा व्यक्तियों (परिवारों के सदस्य) की संख्या तथा जून, 1987 में उनका कुल उपभोग व्यय।
ii) प्रति परिवार औसत व्यक्तियों की संख्या तथा जून, 1987 में प्रति परिवार तथा प्रति व्यक्ति औसत उपभोग व्यय।

ऊपर (i) में प्राप्त आकलों की मानक त्रुटि का परिकलन कीजिए।

प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवार, जोकि ईंटों के बने मकानों में रहते हैं; की पहचान निम्नलिखित रूपण (format) में दी गई है :

चुने हुए गांव की क्रमांक संख्या/दूसरे चरण का स्तर/प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवार की क्रमांक संख्या।

समुदाय विकास खंड में सभी परिवारों के लिए, जोकि ईंटों के बने मकान में रहते हैं, निम्नलिखित का आकलन कीजिए :

i) परिवारों की संख्या
ii) सदस्यों की संख्या
iii) कुल उपभोग व्यय, तथा

इन आकलों की मानक त्रुटि परिकलित कीजिए।

इसके अतिरिक्त समस्त समुदाय खंड के लिए परिवारों का अनुपात तथा ईंटों के बने हुए

विषम तथा सम संख्या के गांवों को अलग-अलग दो स्वतंत्र अर्द्ध-प्रतिदर्श के रूप में लीजिए तथा अर्द्धप्रतिदर्श अंतरों द्वारा सभी अनुपात-आकलों की मानक त्रुटि के कामचलाऊ आकल प्राप्त कीजिए।

प्रतिचयन में सम्मिलित परिवारों, जोकि ईंटों के बने मकानों में रहते हैं, की पहचान :

1. 1/1/3, 1. 1/1/4 1. 1/2/6
1. 2/1/1, 1. 2/1/3 1. 2/1/4 1. 2/2/8
2. 1/1/2, 2. 1/1/3 2. 1/2/5
2. 2/1/3 2. 2/1/5
2. 3/1/2, 2. 3/1/3, 2. 3/1/4 2. 3/2/1, 2. 3/2/7
2. 4/1/5, 2. 4/2/6
3. 1/1/2 3. 1/1/3, 3. 1/2/4
3. 2/1/4 3. 2/1/5, 3. 2/2/3 3. 2/2/6

पहले चरण में स्तर संख्या : 1
स्तर में गांवों की संख्या : 23 प्रतिदर्श में सम्मिलित गावों की संख्या : 2
कुल जनसंख्या (1981) : 16974

चुने हुए गांव की क्रमांक संख्या : 1.1 जनसंख्या (1981) : 752

कृषि योग्य भूमि के स्वामी परिवारों की कुल संख्या : 52
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 5

प्रतिदर्श परिवार संख्या :	1	2	3	4	5
सदस्य (जुलाई, 1987) :	3	5	4	4	3
व्यय (रुपयों में, जून, 87) :	475	702	612	587	478

कृषि योग्य भूमिहीन परिवारों की कुल संख्या : 94
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 8

प्रतिदर्श परिवार संख्या :	1	2	3	4	5	6	7	8
सदस्य (जुलाई, 87) :	4	6	5	6	7	4	5	6
व्यय (रुपयों में, जून, 87) :	555	782	648	835	902	580	666	778

चुने हुए गांव की क्रमांक संख्या : 1.2 जनसंख्या (1981) : 1107

कृषि योग्य भूमि के स्वामी परिवारों की कुल संख्या : 76
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 5

प्रतिदर्श परिवार संख्या :	1	2	3	4	5
सदस्य (जुलाई, 87)	7	4	4	6	5
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	943	610	664	835	705

कृषि योग्य भूमिहीन परिवारों की कुल संख्या : 142
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 8

प्रतिदर्श परिवार संख्या :	1	2	3	4	5	6	7	8
सदस्य (जुलाई, 87)	8	6	7	7	5	6	4	4
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	1025	784	912	857	710	690	580	570

चुने हुए गांव की क्रमांक संख्या : 2.1 जनसंख्या (1981) : 921

कृषि योग्य भूमि के स्वामी परिवारों की कुल संख्या :79
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 5

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5
सदस्य (जुलाई, 87)	2	4	5	4	5
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	378	600	702	585	670

कृषि योग्य भूमिहीन परिवारों की कुल संख्या : 92
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 8

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8
सदस्य (जुलाई, 87)	7	5	3	6	6	6	4	5
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	905	641	443	753	787	695	575	607

चुने हुए गांव की क्रमांक संख्या : 2.2 जनसंख्या (1981) : 1053

कृषि योग्य भूमि के स्वामी परिवारों की कुल संख्या : 87
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 5

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5
सदस्य (जुलाई, 87)	4	4	3	5	4
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	612	587	487	684	643

कृषि योग्य भूमिहीन परिवारों की कुल संख्या : 104
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 8

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8
सदस्य (जुलाई, 87)	5	6	4	5	6	6	4	5
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	640	752	552	641	732	775	582	615

चुने हुए गांव की क्रमांक संख्या : 2.3 जनसंख्या (1981) : 593

कृषि योग्य भूमि के स्वामी परिवारों की कुल संख्या : 38
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 5

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5
सदस्य (जुलाई, 87)	4	3	4	4	5
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	621	484	583	634	685

कृषि योग्य भूमि के स्वामी परिवारों की कुल संख्या : 72
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 8

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8
सदस्य (जुलाई, 87)	5	7	9	4	6	5	6	8
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	645	888	1087	582	741	623	695	895

चुने हुए गांव की क्रमांक संख्या : 2.4 जनसंख्या (1981) : 856

कृषि योग्य भूमि के स्वामी परिवारों की कुल संख्या : 65
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 8

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5

कृषि योग्य भूमिहीन परिवारों की कुल संख्या : 75
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 8

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8
सदस्य (जुलाई, 87)	8	7	6	5	3	4	4	5
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	1011	815	825	712	512	617	587	602

प्रथम चरण में स्तर संख्या : 3
स्तर में गांव की संख्या : 21   प्रतिदर्श में सम्मिलित गांवों की संख्या : 2
कुल जनसंख्या (1981) : 18186

कृषि योग्य भूमि के स्वामी परिवारों की कुल संख्या : 160
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 5

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5
सदस्य (जुलाई, 87)	4	5	5	3	5
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	612	703	691	560	682

कृषि योग्य भूमिहीन परिवारों की कुल संख्या : 158
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 8

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8
सदस्य (जुलाई, 87)	4	6	6	5	4	4	7	6
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	552	783	694	683	612	541	880	808

चुने हुए गांव की क्रमांक संख्या : 3.2   जनसंख्या (1981) : 1305

कृषि योग्य भूमिहीन परिवारों की कुल संख्या : 133
प्रतिदर्श में सम्मिलित व परिवारों की संख्या :

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5
सदस्य (जुलाई, 87)	5	3	5	4	4
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	681	531	679	635	598

कृषि योग्य भूमिहीन परिवारों की कुल संख्या : 130
प्रतिदर्श में सम्मिलित परिवारों की संख्या : 8

प्रतिदर्श परिवार संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8
सदस्य (जुलाई, 87)	6	5	5	4	7	6	8	2
व्यय (रुपयों में, जून, 87)	752	640	683	573	890	789	1015	512

1) गांव स्तर योग का आकलन

प्रथम चरण स्तर	गांव	द्विचरण स्तर	परिवारों की संख्या		प्रतिदर्श परिवार का योग		स्तर के लिए आकलित योग	
			स्तर में	प्रतिदर्श में	व्यक्तियों की संख्या	व्यय	व्यक्तियों की संख्या	व्यय
1	1	1	52	5	19	2854	197.6	29681.6
1	1	2	94	8	43	5746	505.25	67515.5
1	2	1	76	5	26	3757	395.2	57106.4
1	2	2	142	8	47	6128	834.25	108772.0
2	1	1	79	5	20	2935	316.0	46373.0
2	1	2	93	8	42	5406	483.0	63160.0

2	3	2	72	8	50	6156	450.0	55404.0
2	4	1	65	5	19	2922	247.0	37986.0
2	4	2	75	8	42	5681	393.75	53259.375
3	1	1	160	5	22	3248	704.0	103936.0
3	1	2	158	8	42	5553	829.5	109671.75
3	2	1	133	5	21	3124	558.6	83098.4
3	2	2	130	8	43	5854	698.75	95127.5

2) प्रति इकाई आकार के गांव माध्य का आकलन

प्रथम चरण स्तर	गांव	आलकन गांव का आकार	गांव के लिए आकलित योग व्यक्तियों की संख्या	व्यय	गांव के लिए प्रति इकाई आकार माध्य व्यक्तियों की संख्या	व्यय
1	1	752	703	97197	0.934840	129.2513
1	2	1107	1229	165878	1.110208	149.8446
2	1	921	799	108542	0.867535	117.8523
2	2	1053	881	121183	0.836657	115.0836
2	3	593	602	78257	1.015177	131.9680
2	4	856	641	91245	0.748932	106.5946
3	1	1559	1534	213608	0.983964	137.0160
3	2	1305	1257	178226	0.963218	136.5716

3) स्तर तथा तहसील में मान त्रुटि के साथ कुल व्यक्तियों की संख्या का आकलन

प्रथम चरण स्तर	स्तर का आकार	प्रतिदर्श गांवों की सं.	प्रति इकाई क्षेत्रफल में व्यक्तियों की संख्या		कुल व्यक्तियों की संख्या			
	P	n	माध्य $\bar{V}$	मा.वि. s	मा.त्रु. s.e. $s\sqrt{n-1}$	आकल $P.\hat{\mu}$	मा.त्रु. s.e. $Ps\sqrt{n-1}$	$(s.e.)^2$
1	16974	2	1.022524	0.087684	0.087684	17356	1489.3	2215180
2	27641	4	0.867050	0.095970	0.55408	12966	1531.5	2345592
3	18186	2	0.973591	0.010373	0.010373	17706	188.6	35586

तहसील के लिए योग 59028 $(s.e.)^2 = 4596358$

4) स्तर तथा तहसील में मानक त्रुटि के साथ कुल मासिक व्यय का आकलन

प्रथम चरण स्तर	स्तर का आकार	प्रतिदर्श में प्रति आकार कुल व्यय				कुल व्यय		
	P	सम्मिलित गांवों की संख्या (n)	माध्य $\bar{x}$	मा.वि. s	मा.त्रु. $s\sqrt{n-1}$	आकल	मा.त्रु. (s.e.)	$(s.e.)^2$
1	16974	2	139.5480	10.2966	10.2966	2368687	174775	3.054642×10^{10}
2	27641	4	117.8746	9.1331	5.2730	3258173	14751	2.124323×10^{10}
3	18186	2	136.7938	0.2222	0.2222	2487732	4041	$.00163\times10^{10}$

तहसील के लिए योग 8114592 $(s.e.)^2 = 5.180598\times10$ s.e. = 227609 = आकल का 2.8%.

6. अर्द्ध प्रतिदर्श आकल

स्तर	विषम संख्या वाले गांव व्यक्तियों की संख्या	व्यय	व्यय/व्यक्ति	सम संख्या वाले गांव व्यक्तियों की संख्या	व्यय	व्यय व्यक्ति
1	15868	2193912		18845	2543462	
2	26020	3452641		21912	3063704	
3	17894	2491773		17517	2483691	
तहसील के लिए योग	59782	8138326	136.1334	58274	8090857	138.8416

	अर्द्ध प्रतिदर्शित आकलों का माध्य	मानक त्रुटि का दिया हुआ आकल 40 प्रतिदर्शित आकलों के माध्य का आधा	तुलनात्मक त्रुटि
व्यक्तियों की संख्या	59028	754	1.3
कुल व्यय	8114592	237340.3	0.3
प्रति व्यक्ति व्यय	137.49	13541	1.0

नोट : ई.ई.सी.-03, खंड 8 में हमने प्रतिदर्श मानक विचलन को इस प्रकार परिभाषित किया था। $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum (X_i-\bar{X})^2}$ इसके द्वारा मानक त्रुटि, (s.e.) = s n थी। लेकिन यहां पर s की परिभाषा $s = \sqrt{\frac{1}{n}\sum (X_i-\bar{X})^2}$ तथा मानक त्रुटि (s.e.) = s n-1 है

बोध प्रश्न 2

इकाई 17 में दिए गए बोध प्रश्न 2 में व्याख्या की हुई प्रत्येक प्रतिचयन प्रक्रियाओं के लिए, 128 गांवों के पूरे तहसील में निम्नलिखित आकल प्राप्त कीजिए:

1) कुल क्षेत्रफल
2) 1951 में खेती किया गया क्षेत्रफल
3) 1951 में व्यक्तियों की संख्या
4) 1961 में व्यक्तियों की संख्या
5) 1961 में कृषकों की संख्या
6) 1961 में परिवारों की संख्या तथा अनुपात
7) 1961 में कुल व्यक्तियों में कृषकों का अनुपात
8) 1961 में प्रति परिवार में व्यक्तियों की संख्या

प्रत्येक आकल की उसके अनुरूप प्राचल के वास्तविक मान से तुलना कीजिए तथा आकल की प्रतिशत त्रुटि का परिकलन कीजिए। जहां संभव हो, आकलित योग की मानक त्रुटि का भी आकल कीजिए।

18.5 प्रतिदर्श सर्वेक्षणों का आयोजन

जैसा कि इससे पहले इकाई में सविस्तार प्रतिपादित है, अभिकल्पना की प्रकृति के बारे में निर्णय लेने के बाद, प्रतिदर्श सर्वेक्षण के आयोजन में, प्रतिदर्श का आकार तथा सर्वेक्षण की आंकड़ों संबंधी आवश्यकताओं के अनुकूल प्रश्नावली या सूची के गठन के बारे में निर्णय लेने होते हैं। अब हम इन दोनों पहलुओं की ओर ध्यान केन्द्रित करेंगे तथा बहुत से परिचित सामाजिक-आर्थिक सर्वेक्षणों के द्वारा इनकी व्याख्या करेंगे।

18.5.1 प्रतिदर्श आकार

खंड 6, इकाई 16 के अंत में, प्रतिदर्श का आकार कितना बड़ा होना चाहिए, के बारे में

गुणांक, जिसको हम परिवर्तनशीलता के माप के रूप में जानते हैं, समय अवधि तथा संबंधित अभिलक्षण के लिए तुलनात्मक अधिक स्थिर होता है। प्रसरण गुणांक की इस विशेषता के प्रयोग द्वारा किसी प्राचल के आकलन के लिए प्रतिदर्श का आकार, निश्चित त्रुटि की मात्रा सहित, ज्ञान करना, या दिए हुए आकार के प्रतिदर्श द्वारा प्राचल के आकल में प्रतिशत त्रुटि का पूर्वानुमान प्राप्त करना, संभव होता है। इसको हम उसी समष्टि के बारे में पूर्ववर्ती समयावधि के लिए उपलब्ध सूचना का प्रयोग या उसी समष्टि से किसी और संबंधित अभिलक्षण के बारे में सूचना प्राप्त करना या प्रारंभिक मार्गदर्शी सर्वेक्षण द्वारा कर सकते हैं।

यह हम पहले से जानते हैं कि प्रतिदर्श माध्य (प्रतिस्थापन बिना) की मानक त्रुटि होती है।

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$

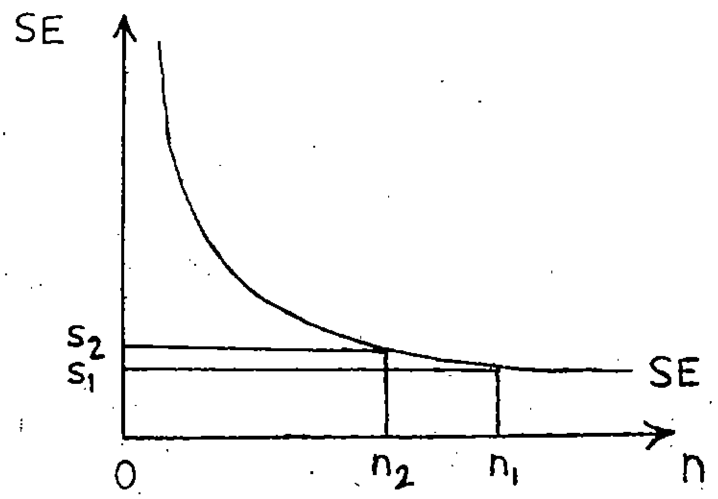
इस समीकरण के दोनों पक्षों को $\bar{x}$ से भाग करने पर प्रतिदर्श माध्य $\bar{x}$ के प्रसरण गुणांक के अनभिनत आकल (तुलनात्मक मानक त्रुटि) $C(\bar{X})$ का व्यंजक प्राप्त होती है।

$$C(\bar{x}) = \frac{C}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{N-n}{N-1}}$$ जहां पर C समष्टि प्रसरण का गुणांक है।

अब अगर हम यह निर्णय ले लेते हैं कि हम e% तुलनात्मक मानक त्रुटि $C(\bar{x})$, को सहन कर सकते हैं तो इसको ऊपर दिए हुए व्यंजक में प्रतिस्थापित करने पर हम प्रतिदर्श आकार का मान n का मान प्राप्त कर सकते हैं:

$$n = \frac{NC^2}{(n-1)\,e^2+c^2}$$

अगर हमें समष्टि प्रसरण गुणांक के बारे में कुछ पूर्व सूचना है या इसके न होने पर, हम मार्गदर्शी सर्वेक्षण द्वारा इसके आकार के बारे में मोटे तौर पर अनुमान ज्ञात कर सकते हैं तो यह मान उपरोक्त व्यंजक में रखने पर प्रतिदर्श आकार का मान प्राप्त किया जा सकता है। इस व्यंजक से यह भी पता चलता है कि आकल के दिए हुए परिशुद्धि स्तर, अर्थात् स्वीकार्य त्रुटि की मात्रा के लिए, समष्टि आकार N के अनुपात में प्रतिदर्श आकार n को बढ़ाना आवश्यक नहीं है। वास्तव में दिए हुए परिशुद्धि स्तर के लिए N में वृद्धि के साथ प्रतिचयन भिन्न संख्या $f = \frac{n}{N}$ में कमी होती है। यह एक उपयोगी विशेषता है जोकि हमें सर्वेक्षण की लागत पर प्रतिबंध लगाने में समर्थ बनाती है तथा समष्टि आकार में वृद्धि के साथ इसके बढ़ने से रोकती है। प्रतिचयन त्रुटि को प्रतिदर्श आकार के सम्मुख अंकित करने पर हम एक वक्र प्राप्त करते हैं, जोकि निम्नलिखित आकृति में दर्शाया गया है।



इस वक्र के बारे में ध्यान रखने लायक बात यह है कि प्रतिदर्श आकार में वृद्धि के साथ प्रतिचयन वक्र समतल होता जाता है, जोकि इस बात का सूचक है कि एक निश्चित बिन्दु के

सर्वेक्षण सूची की विस्तृतता पर भी निर्भर करती है, जिसमें जांच में लगने वाला समय तथा लागतों का निर्धारण होता है। अब हम प्रतिदर्श सर्वेक्षण के आयोजन के इन अन्य पहलुओं पर विचार करेंगे।

18.6 आंकड़े संकलन के उद्देश्य तथा विधियां

वह संस्था, जिसको सांख्यिकीय सूचना की आवश्यकता होती है, सर्वेक्षण के उद्देश्यों का प्रतिपादन करती है। सर्वेक्षण सांख्यिकी-विद् सूचना के प्रयोगकर्ता को सर्वेक्षण के उद्देश्य अंतिम परिणामों की परिशुद्धता तथा लागत के बारे में जानकारी प्रदान करता है।

आंकड़ों का प्रयोग आर्थिक तथा सामाजिक विकास के लिए राष्ट्रीय आयोजन में किया जाता है। आंकड़ों की आवश्यकता के प्रतिपादन के लिए समष्टि योग, माध्य, अनुपात आदि जिनके आकल प्राप्त किए जाते हैं, तो सूचित करना आवश्यक होता है। इसके साथ ही, विभिन्न अभिलक्षणों की अनुमत त्रुटि का भी जिक्र होना चाहिए। गुणता तथा सर्वेक्षण लागत में हमेशा सवैद विनिमय होता रहता है।

एक सर्वेक्षण पुनरावर्ती या किसी विशेष उद्देश्य (ad hoc) के लिए हो सकता है जोकि इस बात पर निर्भर होगा कि आंकड़ों का संकलन आवर्ती है कि नहीं। जब हम केवल वर्तमान परिस्थिति का अध्ययन करना चाहते हैं तो हमारा सर्वेक्षण विशेष उद्देश्य (ad hoc) सर्वेक्षण होगा। इसके विपरीत, अगर हमारी रुचि समय के साथ परिवर्तन ज्ञात करने में है, तो पुनरावृत्ति प्रतिदर्श की आवश्यकता होती है।

आंकड़े संकलन की विधि

आंकड़े संकलन की विभिन्न विधियां इस प्रकार हैं :

1) भौतिक प्रेक्षण या मापन
2) व्यक्तिगत साक्षात्कार
3) द्रव्यात्मक पूछताछ
4) पंजीकरण की विधि
5) अभिलेखों में प्रतिलेखन

इनमें से पहली चार विधियों का संबंध इकाईयों से प्रत्यक्ष रूप में प्रारंभिक आंकड़ों के संकलन से होता है तथा अंतिम विधि का संबंध, पहली चार विधियों द्वारा संकलित आंकड़ों से प्राप्त द्वितीयक आंकड़ों से होता है।

प्रेक्षण तथा मापन

आंकड़ों का संकलन भौतिक प्रेक्षणों द्वारा व्यक्ति निर्णय या मापन उपकरण के प्रयोग द्वारा किया जाता है। अतः फसल सर्वेक्षण में, विभिन्न फसलों के अंतर्गत क्षेत्रफल को, उगाई हुई फसल को देखकर तथा प्रत्येक प्रतिदर्श फसल के अंतर्गत फसल क्षेत्रफल को तैयार करके, प्राप्त किया जाता है। इस विधि द्वारा प्राप्त आंकड़े अन्य कई विधियों से अधिक सही होते हैं, लेकिन इसमें अधिक प्रयास तथा लागत भी होती है।

व्यक्तिगत साक्षात्कार

व्यक्तिगत साक्षात्कार विधि में सांख्यिकी आंकड़ों का संकलन, उत्तरदाता से संपर्क करने तथा प्रश्न पूछकर किया जाता है। इस विधि में अन्वेषक, उत्तरदाता से व्यक्तिगत संपर्क करता है। वह उत्तरदाता को सर्वेक्षण के उद्देश्य तथा आवश्यक आंकड़ों की प्रकृति के बारे में जानकारी दे सकता है। इस परिस्थिति में उत्तरदाता की ओर से असहयोग से बचने का लाभ हो सकता है।

द्रव्यात्मक पूछताछ

द्रव्यात्मक पूछताछ में आंकड़ों का संकलन प्रश्नावली के माध्यम से किया जाता है। ये

स्पष्ट बनाना आवश्यक होता है जिससे उत्तरदाताओं की दर को बढ़ाया जा सके। इस विधि की एक कमी यह है कि प्रश्नावली में केवल वही प्रश्न सम्मिलित किए जाते हैं, जो वैचारिक दृष्टि से समझने में सरल होते हैं।

पंजीकरण की विधि

इस विधि में उत्तरदाता अपेक्षित सूचना को निश्चित स्थानों पर पंजीकृत कराता है। अतः, जन्म-मरण संबंधी आंकड़े नगरपालिकाओं के पास लिखित होते हैं। इस विधि में भीलागत कम रहती है। लेकिन यहां भी उत्तर प्राप्त न होने, उदासीनता तथा अनिच्छा की समस्या रहती है।

अभिलेखों से प्रतिलेखन

जब आंकड़े पहले ही विभिन्न स्थानों पर रजिस्टरों में उपलब्ध होते हैं तो प्रतिलेखन विधि का प्रयोग किया जाता है। इन आंकड़ों को संकलित करके एक स्थान पर एकत्रित किया जाता है। इन आंकड़ों की गुणता अधिक से अधिक मूल आंकड़ों की गुणता के बराबर होती है।

18.7 समाज-आर्थिक पूछताछ

सामाजिक-आर्थिक सूचना, प्रायः प्रश्नावली के प्रयोग द्वारा साक्षात्कार विधि से संकलित की जाती है। इस प्रकार के सर्वेक्षणों में निम्नलिखित आवश्यक चरण होते हैं :

प्रश्नावली एवं अनुसूची

प्रश्नावली विधि में सूचक द्वारा पूर्व-निर्धारित प्रश्नों के उत्तर दिए जाते हैं। इस विधि में हमारी यह मान्यता है कि उत्तरदाता प्रश्नों को समझता है तथा उत्तर देने में समर्थ है क्योंकि अन्वेषक उससे सूचना प्राप्त करने में कोई प्रभाव नहीं डालता। इसके विपरीत अनुसूची विधि में प्रश्नों का सही रूप नहीं दिया होता। अन्वेषक अपने प्रशिक्षण तथा आदेश के आधार पर प्रश्न पूछकर उत्तरदाताओं से सूचना प्राप्त करता है। इसमें अन्वेषक अभिनतता की संभावना होती है। चूंकि वह सूचक द्वारा प्रदान की गई सूचना को प्रभावित कर सकता है उसके लिए, जहां तक संभव हो, वस्तु-परक होना आवश्यक होता है। अगर सर्वेक्षण मदों में जटिलता हो तो प्रश्नावली विधि में भी उत्तर अभिनतता हो सकती है। इस परिस्थिति में अन्वेषकों को ऐसा प्रशिक्षण दिया जाता है कि वह सूचक के उत्तर को प्रभावित किए बिना अवधारणाओं की व्याख्या कर सके।

सर्वेक्षण, संदर्भ तथा सूचना काल

पहले हम इन पारिभाषिक शब्दों की व्याख्या करते हैं। सर्वेक्षण काल वह समयावधि होती है जिसमें अपेक्षित आंकड़े संकलित किए जाते हैं। संदर्भ काल वह समयावधि होती है जिससे सभी इकाईयों के लिए संकलित आंकड़ों का संबंध होना चाहिए। सूचना काल (जोकि संदर्भ काल का अंश या पूर्ण काल हो सकता है) वह समयावधि होता है जिसके लिए अपेक्षित सांख्यिकीय सूचना एक समय में एक इकाई के लिए संकलित की जाती हैं। संदर्भ काल सर्वेक्षण के उद्देश्यों पर निर्भर होता है। सूचना के मदों की प्रकृति तथा सर्वेक्षण संचालन शर्तों द्वारा सूचना काल का निर्धारण होता है। उदाहरण के लिए, रोजगार संबंधी पूछताछ के लिए सूचना काल एक सप्ताह होता है। इसके अतिरिक्त उन मदों के लिए जो मौसमी उच्चावचनों से प्रभावित होती हैं, सूचना काल एक वर्ष होता है। कुछ विशेष परिस्थितियों में जब हम एक काल से दूसरे काल में परिवर्तनों को जानना चाहते हैं तो गतिमान सूचना काल होना आवश्यक होता है।

प्रतिचयन फ्रेम (frame) की समस्याएं

हम यह जानते हैं कि समष्टि में सभी प्रतिचयन इकाईयों की निश्शेष सूची को प्रतिचयन फ्रेम कहते हैं। प्रतिदर्श सर्वेक्षण को दक्ष बनाने के लिए एक सुनिर्मित प्रतिचयन फ्रेम, जिसमें आधुनिक तथा पर्याप्त सूचना हो, की आवश्यकता होती है। बहु-चरणी प्रतिचयन के प्रत्येक चरण में अच्छा प्रतिचयन फ्रेम प्राप्त करने की समस्या होती है। पहले तथा दूसरे चरण के

प्रतिचयन अभिकल्पना का चयन

प्रतिचयन फ्रेम द्वारा प्रदान की गई सूचना के प्रयोग के लिए विशेष सर्वेक्षण प्रतिचयन अभिकल्पना के विकास की क्रिया में बहुत-सी समस्याएं जैसे तकनीकी, परिचालन तथा लागत विचार, आती है। अभिकल्पना के चयन में अन्य बातों को स्थिर रखते हुए कम लागत या कम आकलों की त्रुटि का सिद्धांत अपनाया जाता है। दोनों परिस्थितियों में अप्रतिचयन त्रुटियों के नियंत्रण के लिए पर्याप्त कदम लिए जाने आवश्यक होते हैं अन्यथा इनका आकार बड़ा होने पर सर्वेक्षण परिणामों को बुरी तरह से प्रभावित कर सकता है। प्रायः बड़े पैमाने के प्रतिदर्श सर्वेक्षणों में स्तरित इकाई चरण या बहुचरणी अभिकल्पना का प्रयोग किया जाता है। एक स्तर के बीच इकाईयों का चयन क्रमबद्ध प्रतिचयन या इकाईयों को एक उपयुक्त क्रम में रखने के बाद क्रमबद्ध परिवर्तनशीलता अनुपात प्रतिचयन, द्वारा किया जाता है। परिवर्तनशीलता उपयुक्तता प्रतिचयन में आकार के माप के चयन का प्रश्न भी होता है। प्रारंभिक प्रतिचयन अभिकल्पना के विकास के कार्यक्षेत्र तथा सारणीयन का आयोजन आवश्यक होता है। दी हुई लागत से प्रति इकाई अधिकतम सूचना प्राप्त की जानी चाहिए।

मार्गदर्शी सर्वेक्षण

एक सर्वेक्षण के प्रभावशाली आयोजन के लिए आंकड़ों के संकलन की समष्टि तथा लागत पहलू संबंधी पूर्व सूचना की आवश्यकता होती है। इसके लिए सांख्यिकी-विद् एक मार्गदर्शी सर्वेक्षण का आयोजन करता है। यह सर्वेक्षण, प्रश्नावली या सूची तैयार करने में, कार्य क्षेत्र तथा सारणीयन की प्रक्रिया के विकास में तथा क्षेत्र में काम करने वाले कर्मचारियों के प्रशिक्षण में सहायक होता है। जैसा कि हम जानते हैं कि मार्गदर्शी सर्वेक्षण द्वारा प्रतिदर्श आकार ज्ञात करने के लिए कभी-कभी अध्ययन के अंतर्गत अभिलक्षण की परिवर्तनशीलता का मोटे तौर पर ज्ञान भी प्राप्त किया जाता है।

क्षेत्र कार्य

क्षेत्र से आंकड़ों का संकलन, किसी पहले से स्थापित संस्था के सामान्य प्रशासनिक गतिविधि के उपोत्पाद (by product) के रूप में भी हो सकता है। इस परिस्थिति में लागत कम होती है। आंकड़ों के संकलन की अन्य विधि में स्थाई क्षेत्र संस्था हो सकती है जिसमें पूर्ण प्रशिक्षित पूर्णकालिक कर्मचारी होते हैं। अन्वेषकों का अवधारणाओं तथा मदों की परिभाषा, विभिन्न स्रोतों से सूचना प्राप्त करना तथा इसको ठीक करने की कला में, प्रशिक्षण, अत्यन्त महत्वपूर्ण होता है। **अन्वेषकों द्वारा आंकड़ों के विभिन्न कार्यों, सर्वेक्षण परिचालन में मदें जैसे प्रतिचयन फ्रेम तैयार करना, प्रतिचयन इकाईयों की पहचान तथा इनसे संपर्क करना, पूछताछ, साक्षात्कार या प्रेक्षण आदि में लगने वाले समय का हिसाब रखना भी आवश्यक होता है।**

सर्वेक्षण आंकड़ों का संसाधन

सर्वेक्षण द्वारा संकलित आंकड़ों के विश्लेषण के तीन पहलू हैं :

1) सारणीयन या आंकड़ों का संक्षिप्तीकरण
2) विषय विश्लेषण
3) सांख्यिकीय विश्लेषण

पहले पहलू का अध्ययन हम खंड 4 में कर चुके हैं। यहां पर सांख्यिकी-विद् त्रुटि की मात्रा का आकलन करता है। यह ध्यान दीजिए कि इस त्रुटि के आकलों में दोनों, प्रतिचयन तथा अप्रतिचयन त्रुटियां सम्मिलित होती हैं। संक्षिप्त सारणीयन के बाद विषय विश्लेषण किया जाता है। इसमें विभिन्न अभिलक्षणों में संबंध तथा प्रवृत्तियों के अध्ययन के लिए तथा सर्वेक्षण के परिणामों की अन्य स्रोतों से प्राप्त आंकड़ों की तुलना के लिए आंकड़ों का अर्थपूर्ण, भौगोलिक, आर्थिक, जनसांख्यिकी या किसी अन्य दृष्टि से क्रॉस (Cross) सारणीयन सम्मिलित होता है। सांख्यिकीय विश्लेषण से हमारा अर्थ उस विश्लेषण से होता है जिसके द्वारा भविष्य में सर्वेक्षण की सांख्यिकीय प्रविधियों को सुधारने में सहायता मिलती है। सर्वेक्षण आंकड़ों के आयोजन में आंकड़ों की विस्तृत गणता संवीक्षा, प्रश्नावली या सूचियों का

18.8 राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण

इसका आरंभ 1950 में राष्ट्रीय विकास के आयोजन के लिए आवश्यक सामाजिक-आर्थिक आंकड़ों को प्राप्त करने के लिए, प्रतिचयन पूछताछ करने के लिए किया गया था। इसके द्वारा सतत सर्वेक्षण "दौर" (rounds) के रूप में किए जाते हैं। आरंभ में प्रति वर्ष सर्वेक्षण किए जाते थे, लेकिन 70 के दशक के अंत से प्रति पांच वर्ष में एक सर्वेक्षण किया जाने लगा है।

इन सर्वेक्षणों में पूछताछ के विषय बड़े भिन्न होते हैं। निम्नलिखित के परिकलन के लिए सांख्यिकीय सूचना की आवश्यकता होती है :

i) उपभोग व्यय सहित राष्ट्रीय आय

ii) जोत क्षेत्रों का बंटन

iii) भारत में रोजगार परिस्थिति

iv) अनाजों के अंतर्गत क्षेत्रफल तथा उत्पादन दरों का आकलन

v) कृषि श्रमिकों की आर्थिक दशा आदि।

राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण का संदर्भ काल, अध्ययन के अंतर्गत अभिलक्षण पर आधारित एक दिन, एक सप्ताह, एक महीना या एक वर्ष हो सकता है। प्रतिदर्श परिवारों के व्यक्तिगत साक्षात्कार द्वारा अन्वेषक आंकड़े संकलित करते हैं। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण एक बहु-विषय सर्वेक्षण संस्था है।

एक विषय सर्वेक्षण की तुलना में बहु-विषय सर्वेक्षण के लाभ :

i) समय तथा मुद्रा की दृष्टि से अधिक मितव्ययी होता है।

ii) उसी बजट सूचना काल में अधिक परिशुद्धि स्तर।

भारतीय अर्थव्यवस्था, जोकि अधिकतर कृषि पर निर्भर है, मौसमी उच्चावचनों से प्रभावित होती रहती है। इस मौसमी कारक को ध्यान में रखते हुए सर्वेक्षण काल एक पूर्ण वर्ष होना वांछनीय है। लेकिन राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण में प्रायः सर्वेक्षण काल एक वर्ष से बहुत छोटा होता है। अतः यहां पर आंकड़ों का संकलन, गतिमान सूचना काल के आधार पर किया जाता है। इसके विपरीत, बिन्दु सर्वेक्षण में प्राप्त आकल एक समय बिन्दु के संदर्भ में होते हैं। इस प्रकार, मौसमी उच्चावचनों की रुकावटों को दूर किया जाता है। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण का भौगोलिक क्षेत्र पूरा भारतवर्ष है। कुछ दौरों में दूरगामी क्षेत्रों को सम्मिलित नहीं किया गया है।

अब हम ग्रामीण क्षेत्र के उत्पादन सर्वेक्षण क्षेत्र पर प्रतिदर्श अभिकल्पना के विभिन्न पहलुओं का विवेचन करेंगे। केवल कृषि क्षेत्र के उत्पादन के आंकड़े ही नहीं, बल्कि पारिवारिक विनिर्माण इकाईयां (लघु तथा कुटीर उद्योग) भी मौसमी उच्चावचनों से प्रभावित होती हैं। रोज़गार के आंकड़े भी मौसमी उच्चावचनों से प्रभावित होते हैं, अतः विभिन्न मौसमों में आंकड़ों का संकलन किया जाता है।

भारत में लगभग 60 लाख गांव है। इससे समष्टि संघटित होती है। राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण ने 14वें दौर में केवल 2500 गांवों का सर्वेक्षण किया था। इस प्रकार प्रतिदर्श आकार कुल समष्टि का बहुत छोटा अनुपात है। अन्वेषकों का कार्यभार केवल सैद्धांतिक विचारों पर निर्भर न होकर अनुभाविक आधारों पर भी निर्भर होता है। 14 वें दौर में लगभग 400 अन्वेषक थे, जिनमें से प्रत्येक को लगभग 6 गांव दिए गए थे। कार्यभार का निर्धारण समस्त भारत की औसत आवश्यकता के अनुसार किया गया लेकिन इसमें संचार व्यवस्था, मौसम तथा अन्य कारकों को भी ध्यान में रखा गया।

प्रतिदर्श अभिकल्पना

उपयुक्त स्तरण तथा व्यवस्थित करके तथा समान प्रायिकता सहित गांवों का वृत्ताकार क्रमबद्ध चयन करके सामाजिक-आर्थिक तथा फसल सर्वेक्षणों का पूर्ण एकीकरण किया जाता है। दूसरे शब्दों में, भूमि प्रयोग तथा उत्पादन सर्वेक्षण गांवों के एक समान समुच्चय पर किया

राज्यों को इन गांवों का आबंटन उनकी जनसंख्या, भौगोलिक क्षेत्रफल, फसल क्षेत्रफल, पारिवारिक इकाईयों में संलग्न व्यक्तियों की संख्या आदि संयुक्त विचारों पर आधारित था। प्रत्येक राज्य में साथ-साथ लगी हुई तहसीलों को एकत्रित करके स्तरों का निर्माण किया गया। ये स्तर जनसंख्या घनत्व, समुद्र-तल ऊपर ऊंचाई, खाद्य फसलों की खेती आदि की दृष्टि से समरूप थे। इस प्रकार स्तरों को इस प्रकार बनाया गया कि वे की जाने वाली पूछताछ के विषयों में लगभग समरूप थे। उदाहरण के लिए, समुद्र-तल से ऊंचाई तथा जनसंख्या घनत्व परिवारों के चयन में अच्छा स्तरण प्राप्त करने में सहायक होते हैं।

एक बार जब प्रतिदर्श में गांवों का चयन हो जाता है तो गांवों में रहने वाले परिवारों के चयन की प्रक्रिया शुरू हो जाती है। (i) परिवार का आकार, (ii) विनिर्माण इकाईयों में स्वयं रोज़गार, तथा (iii) जीवन निर्वाह के मुख्य तरीके आदि पर सूचना संकलित की जाती है। इस सूचना के प्रयोग द्वारा विभिन्न पूछताछों में परिवारों का चयन किया जाता है।

शहरी क्षेत्र

शहरी क्षेत्र में सर्वेक्षण के लिए विषय लगभग ग्रामीण क्षेत्र के विषयों जैसे ही होते हैं जैसे–उपभोक्ता व्यय, लघु पारिवारिक विनिर्माण इकाई, रोज़गार आदि।

बोध प्रश्न 3

1) एक उपयुक्त उदाहरण द्वारा व्याख्या कीजिए कि जब समष्टि में कुल प्रतिचयन इकाईयां, विश्वास्यता अंतराल या स्वीकार्य त्रुटि की मात्रा तथा समष्टि में प्रेक्षित अभिलक्षण की परिवर्तनशीलता का परिसर दिया हुआ हो तो आप प्रतिदर्श आकार का आकलन किस प्रकार करेंगे?

....
....
....
....
....
....
....
....

2) अगर स्वीकार्य त्रुटि की मात्रा दी हुई हो तो क्या अनुकूलतम सर्वेक्षण लागत प्राप्त करना संभव है? अगर है तो कैसे, व्याख्या कीजिए।

....
....
....
....
....
....
....
....

3) क्षेत्र सर्वेक्षण से पहले आपके द्वारा लिए जाने वाले विभिन्न चरणों की व्याख्या कीजिए।

....
....
....

. . . .

4) राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण की मुख्य विशेषताओं का वर्णन कीजिए।

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

18.9 सारांश

इस इकाई में आपने प्रतिदर्श प्रेक्षणों द्वारा (जोकि इकाई 17 में दिए गए किसी प्रतिदर्श अभिकल्पना के अनुसार प्राप्त किए गए हों), समष्टि के माध्य तथा प्रसरण के अनभिनत आकल प्राप्त करने की विभिन्न आकलन विधियों का अध्ययन किया। यह ध्यान रखना आवश्यक है कि प्रत्येक प्रतिदर्श अभिकल्पना की माध्य तथा प्रसरण के अनभिनत आकल प्राप्त करने की अपनी अत्यन्त विशिष्ट आकलन प्रक्रिया होती है। बाद में आपको सर्वेक्षण लागत, प्रतिचयन त्रुटि तथा प्रतिदर्श आकार के बारे में कुछ जानकारी दी गई। इस जानकारी के आधार पर आप यह समझने में समर्थ हैं कि सर्वेक्षण लागतों का किस प्रकार इष्टतमीकरण किया जा सकता है। अंत में आपको यह जानकारी दी गई कि सामाजिक-आर्थिक सर्वेक्षण के परिचालन से पहले आपको किन-किन ठोस चरणों को अपनाना पड़ता है। इसके बाद, संक्षेप में, राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण का विवेचन किया गया है।

18.10 शब्दावली

अभिनत : समष्टि प्राचल तथा प्रतिदर्श प्रतिदर्शज के प्रत्याशित मान के अंतर को अभिनत कहते हैं। उदाहरण के लिए, अगर S प्रतिदर्शज है तथा μ_s प्राचल है तो अभिनत $= \mu_s - E(S)$

गुच्छ प्रतिचयन : इस विधि में इकाईयों के विभिन्न गुच्छे बनाए जाते हैं तथा व्यक्तिगत प्रतिचयन इकाईयों के स्थान पर इकाईयों के गुच्छ का चयन किया जाता है।

त्रुटि वर्ग माध्य : iवें प्रतिदर्श पर आधारित आकल S_i तथा प्राचलन μ_s के अंतर ($S_i - \mu_s$) को आकल की त्रुटि कहते हैं। यह त्रुटि प्रत्येक प्रतिदर्श के लिए भिन्न होती है। वर्ग माध्य इन विचलों के वर्ग का माध्य MSE (S) = E $(S - \mu)^2$ होता है, जहां पर MSE (Mean Square Error) त्रुटि वर्ग माध्य तथा E प्रत्याशित मान को सूचित करता है।

प्रश्नावली : उत्तरदाताओं से सूचना प्राप्त करने के लिए पूर्व-निर्धारित प्रश्नों का समुच्चय।

सूचनाकाल : यह संदर्भ काल का अंश या पूर्ण काल होता है जिसमें एक इकाई के लिए एक समय में अपेक्षित सांख्यिकीय सूचना का संकलन किया जाता है।

प्रतिचयन फ्रेम : यह समष्टि में विद्यमान सभी प्रतिचयन इकाईयों की, उनके उपयुक्त पहचान विवरण सहित, सूची होती है। मानचित्रों तथा आवश्यक सहायक सूचना द्वारा **प्रतिचयन इकाईयों** की पहचान को और वस्तुपरक बनाया जा सकता है।

मानक त्रुटि : यह प्रतिदर्शज के प्रतिचयन बंटन का मानक विचलन होता है।

सर्वेक्षण काल : वह समयावधि जिसमें अपेक्षित आंकड़ों का संकलन किया जाता है।

18.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

Cochran, W.G., 1959. *Sampling Techniques*. Asia Publishing House. Wiley-Eastern: Bombay/Delhi.

Murthy, M.N., 1967. *Sampling Theory and Methods*. Statistical Publishing Society: Calcutta.

18.12 बोध प्रश्नों के उत्तर या संकेत

बोध प्रश्न 1

1) उपखण्ड 18.2.1 देखिये। SRSWR तथा SRSWOR दोनों में सपष्टि का अनभिनत माध्यम प्रतिचयन माध्यम होता है। प्रसरण का आकल SRSWR में σ^2/n तथा SRSWOR में होता है। प्रतिचयन आकलों का सम्भावित मोल निकालिये तथा सिद्ध कीजिये कि वे अनभिनत हैं।
2) i) 18.2.2 में देखिये तथा उत्तर दीजिये।
   ii) माध्य का अनभिनत आकल $X\bar{Y}^*/N$ तथा प्रसरण का अनभिनत आकल $X^2/V/N^2$ (n-1) होता है।
3) स्तरित प्रतिचयन में समष्टि को विभिन्न स्तरों में बाँटा जाता है। प्रत्येक स्तर से प्रतिचयन इकाईयां चुनी जाती हैं। बहुचरणी प्रतिचयन में, एक से अधिक चरणों पर प्रतिचयन किया जाता है। अगर दो चरण हैं, उदाहरणार्थ : खण्ड (Block) तथा गांव तो दूसरे चरण में उन्हीं खण्डों में से गांवों को चुना जाता है जिन खण्डों को पहले चरण में चुना गया था।

बोध प्रश्न 2

SRSWR द्वारा प्राप्त प्रतिचयन में गांवों के क्रमांक 3, 4, 19, 25, 47, 74, 79 तथा 92 हैं। (1) कुल क्षेत्रफल, (2) 1951 में खेती किया गया क्षेत्रफल, (3) 1951 में व्यक्तियों की संख्या, (4) 1961 में व्यक्तियों की संख्या, (5) 1961 में कृषकों की संख्या, तथा (6) 1961 में परिवारों की संख्या निम्न सारणी में दी गयी है :

क्रम	चुने हुए गांव की क्रम संख्या	क्षेत्रफल (वर्गमील)	कृषि क्षेत्रफल 1951 में	1951 में व्यक्ति	1961 में व्यक्ति	1961 में कृषक	1961 में परिवार
1	3	3.51	1177	2574	2819	819	548
2	4	9.96	4567	4466	4892	1970	1004
3	19	1.63	608	832	886	291	200
4	25	2.95	607	1287	1513	336	276
5	47	4.97	2935	4096	4054	1438	793
6	74	3.61	1289	3664	3767	607	906
7	79	4.65	1543	2593	2559	633	546
8	92	5.56	1881	953	1223	1	261
प्रतिचयन योग		36.84	14607	20465	21713	6095	4534
$\hat{Y} = N\bar{Y}$		589.44	2337112	327440	347408	97520	72544

2) 1951 में कृषि क्षेत्रफल = 233712 एकड़
3) 1951 में व्यक्ति = 327440
4) 1961 में व्यक्ति = 347408
5) 1961 में कृषक = 97520
6) 1961 में परिवार = 72544
7) 1961 में कृषकों का प्रतिचयन योग = 6095
1961 में व्यक्तियों का प्रतिचयन योग = 21713
1961 में कृषकों और व्यक्तियों का प्रतिचयन अनुपात

$$= \frac{6095}{21713} = 0.2807$$

प्रतिचयन अनुपात समष्टि अनुपात का एक अनभिनत आकल होता है अतः 1961 में पूरी तहसील के सारे व्यक्तियों में कृषकों का अनुपात 0.2807 है।

8) 1961 में 8 प्रतिचयित गांवों में व्यक्तियों का योग 21713 था।
1961 में इन 8 गांवों में परिवारों की संख्या 4534 थी अतः 1961 में प्रति परिवार व्यक्तियों की संख्या

$$= \frac{\text{1961 में कुल व्यक्ति}}{\text{1961 में कुल परिवार}}$$

$$\simeq \frac{\text{1961 में प्रतिचयित गांवों में कुल व्यक्ति}}{\text{1961 में प्रतिचयित गांवों में कुल परिवार}}$$

$= \frac{21713}{4534} = 4.7889 \simeq 5$ थी (व्यक्तियों की संख्या दशमलव में नहीं हो सकती)

वास्तविक मूल्य से आकलों की तुलना

$$\text{प्रतिशत त्रुटि} = \frac{\text{वास्तविक–आकलित}}{} \times 100$$

1) (715.82–589.44) × 100/715.82 = 17.65% (कम आकलित)
2) (248752–2337112) × 100/248752 = 6.05% (कम आकलित)
3) (415149–327440) × 100/415149 = 21.13% (कम आकलित)
4) (443319–347408) × 100/443319 = 21.63% (कम आकलित)
5) (109248–97520) × 100/109248 = 10.74% (कम आकलित)
6) (93129–72544) × 100/93129 = 22.10% (कम आकलित)
7) समष्टि अनुपात = 109248/443319 = 0.2464
त्रुटि = (0.2464–0.2807) × 100/0.2464 = 13.92% (अधिक आकलित)
8) समष्टि में प्रति परिवार व्यक्ति = $\frac{\text{कुल व्यक्ति}}{\text{कुल परिवार}} = \frac{443319}{99129} = 4.4721$

प्रतिचयन में प्रति परिवार व्यक्ति = 4.7889
त्रुटि = (4.4721–4.7889) × 100/100 = 7.08 (अधिक आकलित)
मानक त्रुटि = प्रतिचयन प्रसरण के वर्गमूल को मानक त्रुटि कहते हैं।

$$= \sqrt{V(\hat{Y})} = \sqrt{\frac{N^2 s^2}{n}} \text{ जहां } s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (Y_i-\bar{Y})^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{i=1}^{n} Y_i^2 - n\bar{Y}^2\right.$$

यहां N = 128 तथा n = 8 हैं।

मानक त्रुटियां $\sum_{i=1}^{8}$ $n\bar{Y}$ s^2 मानक त्रुटियां

5) कृषकों की	7586221	4643628	420370	29341
6) परिवारों की	3240418	256944	95825	14009

$[N^2 (1-f)\, s^2]/n$ जहां $s^2 = (npq)/(n-1)$ तथा $f = n/N$ है

7) = 0.2817 q = 0.7183. n = 8, N = 128 f = n/N = 0.0625

आकल की मानक त्रुटि = $\sqrt{N^2 (1-f)\, s^2/n}$

$= \sqrt{(128)^2 (0.9375) (1.61876)/8}$

$= 55.75$

बोध प्रश्न 3

1) उपखण्ड 18.5 तथा खण्ड 8 की इकाई 16 देखिये तथा उत्तर दीजिये।
2) उपखण्ड 18.5 देखिये और उत्तर दीजिये।
3) उपखण्ड 18.6 तथा 18.7 देखिये तथा उत्तर दीजिये।
4) उपखण्ड 18.8 देखिये तथा उत्तर दीजिये।

18.13 पारिभाषिक शब्दावली

अनुसूची	:	Schedule
इष्टतमीकरण	:	Optimisation
उत्तरदाता	:	Respondent
दौर	:	Round
परिवर्तनशीलता	:	Variability
प्रतिलेखन	:	Transcription
प्रश्नावली	:	Questionnaire
मार्गदर्शी सर्वेक्षण	:	Pilot survey
राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण	:	National Sample Survey (NSS)
सूचना काल	:	Information period
संदर्भ काल	:	Reference period
सामाजिक—आर्थिक सर्वेक्षण	:	Socio-economic survey
सम्मिश्रित प्रतिचयन अभिकल्पना	:	Composite sampling design
सर्वेक्षण काल	:	Survey period
क्षेत्र कार्य	:	Field work
त्रुटि वर्ग माध्य	:	Mean Square Error (M.S.E.)

NOTES