B.Ed.E-33

Pedagogy of Mathematics

(गणित का अध्यापन विज्ञान)

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय,
प्रयागराज

	खण्ड – 01 **गणित के आधार**	**3**
इकाई 1	गणित की प्रकृति	**5**
इकाई 2	गणित का अधिगम, अधिगम का मनोविज्ञान एवं गणित का शिक्षण संरचनावाद तथा सक्रियवाद	**12**
इकाई 3	पाठ्यचर्या सुधार, गणित शिक्षण के लक्ष्य एवं उद्देश्य	**26**
	खण्ड – 02 **गणित शिक्षण की रणनीतियाँ -I**	**43**
इकाई 4	गणितीय प्रत्ययों का शिक्षण	**45**
इकाई 5	स्पष्टीकरण तथा खोज विधि से अधिगम	**61**
इकाई 6	समूह में गणित अधिगम, समूह कार्य एवं सहकारी या सहयोगात्मक रणनीतियाँ	**73**
	खण्ड – 03 **गणित शिक्षण की रणनीतियाँ - II**	**87**
इकाई 7	समझ के लिए शिक्षण	**89**
इकाई 8	गणित में समस्या समाधान शिक्षण, परिभाषा और महत्व	**103**
इकाई 9	बीजगणित एवं ज्यामिति में समस्या समाधान	**118**
	खण्ड – 04 **गणित अधिगम का एवं के लिए मूल्यांकन**	**131**
इकाई 10	शिक्षण अवधारणाओं के मापनीय उद्देश्यों का कथन, सामान्यीकरण, समस्या समाधान एवं प्रमाण	**133**
इकाई 11	उत्पाद और प्रक्रिया परिणामों के आकलन के लिए परीक्षण पदों की रचना, नैदानिक परीक्षण एवं उपचारात्मक शिक्षण	**160**
इकाई 12	इकाई परीक्षण का निर्माण, विशिष्टीकरण तालिका (ब्लूप्रिंट), प्रश्नपत्र का निर्माण	**175**
	खण्ड – 05 **गणित में अधिगम संसाधन**	**191**
इकाई 13	अधिगम संसाधन : अर्थ, प्रकार, संसाधनों का निर्माण एवं उसका उपयोग	**193**
इकाई 14	पाठ पुस्तक, कैलकुलेटर, प्रतिमान एवं कम्प्यूटर, ग्राफिक कैलकुलेटर	**203**
इकाई 15	गणित प्रयोगशाला, कक्षा–कक्षा के बाहर एवं कक्षा–कक्ष के अन्दर गणित	**217**

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

संरक्षक एवं मार्गदर्शक

प्रोफेसर सत्यकाम — कुलपति, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

विशेषज्ञ समिति

प्रोफेसर पी० के० स्टालिन — निदेशक, शिक्षा विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
प्रोफेसर पी० के० पाण्डेय — प्रोफेसर, शिक्षा विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
प्रोफेसर छत्रसाल सिंह — प्रोफेसर, शिक्षा विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
प्रोफेसर के० एस० मिश्रा — पूर्व कुलपति, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, प्रयागराज
प्रोफेसर धनन्जय यादव — विभागाध्यक्ष, शिक्षाशास्त्र विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, प्रयागराज
प्रोफेसर मीनाक्षी सिंह — आचार्य, शिक्षा संकाय, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी
डॉ० जी० के० द्विवेदी — सह आचार्य, शिक्षा विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
डॉ० दिनेश सिंह — सह आचार्य, शिक्षा विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
डॉ० सुरेन्द्र कुमार — सहायक आचार्य, शिक्षा विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

लेखक

डॉ० अतुल गुर्टू — सहायक आचार्य, बी. एड., के. पी. बी. एड. प्रशिक्षण महाविद्यालय, प्रयागराज (इकाई—1,2,3,4,5,13,14 एवं 15)
डॉ० संगीता चौहान — सहायक आचार्य, शिक्षाशास्त्र विभाग, बाबा भामराव अम्बेडकर केन्द्रिय विश्वविद्यालय, लखनऊ (इकाई—6,7,8 एवं 9)
प्रोफेसर पी० के० स्टालिन — निदेशक, शिक्षा विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज(इकाई—10,11 एवं 12)

सम्पादक

प्रोफेसर पी० के० पाण्डेय — प्रोफेसर, शिक्षा विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

परिमापक

प्रोफेसर छत्रसाल सिंह — प्रोफेसर, शिक्षा विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

समन्वयक

डॉ० सुरेन्द्र कुमार — सहायक आचार्य, शिक्षा विद्याशाखा, उ0 प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज

प्रकाशक

2024 (मुद्रित)

© उ0प्र0 राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज 211021

ISBN- 978-93-48270-73-3

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज सर्वाधिकार सुरक्षित। इस पाठ्यसामग्री का कोई भी अंश उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति लिए बिना मिमियोग्राफ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

नोट : पाठ सामग्री में मुद्रित सामग्री के विचारों एवं आकड़ों आदि के प्रति विश्वविद्यालय, उत्तरदायी नहीं है।

प्रकाशन : उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन विश्वविद्यालय, प्रयागराज

प्रकाशक : कुलसचिव, कर्नल विनय कुमार, उ0प्र0 राजर्षि टण्डन विश्वविद्यालय, प्रयागराज।

मुद्रक — के0 सी0 प्रिटिंग एण्ड एलाइड वर्क्स, पंचवटी, मथुरा — 281003.

B.Ed.E-33

Pedagogy of Mathematics

(गणित का अध्यापन विज्ञान)

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय,
प्रयागराज

	खण्ड – 01 गणित के आधार	3
इकाई 1	गणित की प्रकृति	5
इकाई 2	गणित का अधिगम, अधिगम का मनोविज्ञान एवं गणित का शिक्षण संरचनावाद तथा सक्रियवाद	12
इकाई 3	पाठ्यचर्या सुधार, गणित शिक्षण के लक्ष्य एवं उद्देश्य	26

खण्ड 01 : गणित के आधार

खण्ड परिचय

खंड 01 जो कि गणित के आधार से सम्बन्धित है। इस खण्ड को तीन इकाइयों के अंतर्गत विस्तृत रूप से वर्णित किया गया है जो इस प्रकार है–

इकाई 1 : गणित की प्रकृति

इकाई 2 : गणित का अधिगम, अधिगम का मनोविज्ञान एवं गणित का शिक्षण, संरचनावाद तथा सक्रियवाद

इकाई 3 : पाठ्यचर्या सुधार, गणित शिक्षण के लक्ष्य एवं उद्देश्य

इकाई 1 गणित की प्रकृति से सम्बन्धित है जिसमें गणित के अर्थ और उसकी प्रकृति को स्पष्ट रूप से समझाया गया है। गणित को विभिन्न विद्वानों के अनुसार परिभाषित करते हुए यह बताया गया है की गणित की अपनी भाषा होती है और इसका आधार ज्ञानेंद्रियाँ हैं। गणित अमूर्त प्रत्ययों की व्याख्या करता है तथा गणित समस्याओं के निदान पर भी बल देता है। गणित का ज्ञान क्रमबद्ध तथा विश्वसनीय होता है। गणित के ज्ञान के अध्ययन से छात्रों में आत्मविश्वास तथा आत्मनिर्भरता का भी विकास होता है। यह छात्रों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित करता है। गणित का अन्य विषयों के अध्ययन में भी सहयोग मिलता है। इस इकाई में गणित के महत्व एवं उसके क्षेत्र के विषय में भी विस्तृत वर्णन दिया गया है।

इकाई 2 गणित का अधिगम, अधिगम का मनोविज्ञान एवं गणित का शिक्षण, संरचनावाद तथा सक्रियवादसे सम्बन्धित है। इस इकाई में अधिगम के अर्थ को विभिन्न विद्वानों की परिभाषाओं के आधार पर समझाने का सरल प्रयास किया गया है। अधिगम के सिद्धांतों को स्पष्ट रूप से बिंदुवार रेखांकित किया गया है। अधिगम में आवश्यक तत्व जैसे भौतिक वातावरण, सामाजिक वातावरण, अनुदेशन पाठ्यवस्तु मूल्यांकन एवं व्यवहार परिवर्तन को भी स्पष्ट रूप से वर्णित किया गया है। अधिगम प्रक्रिया को प्रभावित करने वाले अनेक कारक होते हैं जिनमें प्रमुख है शारीरिक कारक, मनोवैज्ञानिक कारक, पर्यावरणीय कारक एवं अन्य विविध कारक जिसका वर्णन इस इकाई में दिया गया है। इस इकाई में अधिगम के विभिन्न मनोवैज्ञानिक आधारों, गणित शिक्षण का मनोविज्ञान तथा गणित शिक्षण की अनेक समस्याओं के विषय में प्रकाश डाला गया है।

इकाई 3 पाठ्यचर्या सुधार, गणित शिक्षण के लक्ष्य एवं उद्देश्य से सम्बन्धित है। इसमें पाठ्यक्रम के अर्थ को विभिन्न विद्वानों की परिभाषाओं के आधार पर स्पष्ट करने का प्रयास किया गया है। पाठ्यक्रम एवं पाठ्यचर्या के अंतर को बिंदुवार स्पष्ट किया गया है। इस इकाई में गणित के पाठ्यक्रम विकास के इतिहास पर भी विस्तार से चर्चा की गई है। गणित शिक्षण के अनेक उद्देश्यों यथा बौद्धिक उद्देश्य, सामाजिक उद्देश्य, अनुशासन संबंधी उद्देश्य, नैतिक उद्देश्य, जीविकोपार्जन संबंधी उद्देश्य, अवकाश के समय का सदुपयोग तथा कलात्मक उद्देश्य इत्यादि पर विस्तृत प्रकाश डाला गया है। गणित शिक्षण के व्यवहारपरक या प्राप्यउद्देश्यको बताते हुए गणित के सामान्य उद्देश्य एवं प्राप्य उद्देश्यों में अंतर को सारणी के माध्यम से बताया गया है, साथ ही विभिन्न विद्वानों के शब्दों में शैक्षिक उद्देश्यों का वर्गीकरण भी प्रस्तुत किया गया है।

इकाई–1 : गणित की प्रकृति

इकाई की संरचना

1.1 प्रस्तावना

1.2 इकाई के उद्देश्य

1.3 गणित का अर्थ

1.4 गणित की प्रकृति

- 1.4.1 गणित की अपनी भाषा होती है
- 1.4.2 गणित के ज्ञान का आधार ज्ञानेन्द्रियाँ है
- 1.4.3 गणित अमूर्त प्रत्ययों की व्याख्या करता है
- 1.4.4 गणित संख्याओं पर बल देता है
- 1.4.5 गणित का ज्ञान क्रमबद्ध तथा विश्वसनीय होता है
- 1.4.6 गणित के ज्ञान के अध्ययन से छात्रों में आत्म विश्वास तथा आत्मनिर्भरता का विकास होता है
- 1.4.7 छात्रों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित होता है
- 1.4.8 गणित अन्य विषयों में सहायता प्रदान करता है

1.5 गणित का महत्व

- 1.5.1 व्यवहारिक जीवन में गणित का उपयोग
- 1.5.2 व्यापारिक जगत में गणित का उपयोग
- 1.5.3 बालकों की मानसिक योग्यता बढ़ाने में सहायक
- 1.5.4 परिणाम की निश्चितता
- 1.5.5 सामाजिक प्रगति में सहायक

1.6 गणित का क्षेत्र

1.7 सारांश

1.8 अभ्यास के प्रश्न

1.9 चर्चा के बिन्दु

1.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

1.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1.1 प्रस्तावना

गणित एक ऐसा विषय है जिसे सामान्यतः प्रत्येक मनुष्य अपनी निजी तथा सामाजिक जिन्दगी में किसी न किसी रूप में प्रयोग करता है। गणित को सामान्य अर्थो में संख्याओं का विज्ञान या गणनाओं का विज्ञान के रूप में समझा जाता है। प्रत्येक विषयों की भांति गणित की भी अपनी एक विशिष्ट बनावट होती है जो गणित की प्रकृति को जन्म देती है, जब हम किसी दो विषयों की तुलना करते है तब हम सामान्यतः उन दो विषयों की प्रकृतियों की तुलना करते हैं। गणित की अपनी एक विशिष्ट भाषा होती है, गणित का ज्ञान अमूर्त तथ्यों की व्याख्या करता है, वह क्रमबद्ध तथा विश्वसनीय होता है। गणित के ज्ञान के अध्ययन से छात्रों में आत्म विश्वास तथा आत्म निर्भरता का विकास होता है।इस इकाई के अन्तर्गत गणित का अर्थ उसकी प्रकृति, उसके महत्व तथा क्षेत्र के बारे मे चर्चा की गई है।

1.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. गणित की विभिन्न परिभाषाओं को अपने शब्दों में लिख सकेंगे।
2. गणित की प्रकृति को समझ सकेंगे।
3. गणित के महत्व को बता सकेंगे।
4. गणित के क्षेत्र की व्याख्या कर सकंगे।

1.3 गणित का अर्थ

गणित एक ऐसा विषय जिसे सामान्यतः प्रत्येक मनुष्य अपनी निजी तथा सामाजिक जिन्दगी में किसी न किसी रूप में उपयोग करता है। गणित को सामान्य अर्थो में संख्याओं का विज्ञान या गणनाओं का विज्ञान के रूप में समझा जाता है।

गणित शब्द का उपयोग कब हुआ, यह बताना कठिन कार्य है परन्तु भारतवर्ष में गिनती के लिये 'गणन' शब्द का प्रयोग बहुत पहले से किया जाता था। सम्भवतः गणित इसी गणन शब्द का अपभ्रंश हो।

गणित के अर्थ को व्यापक तौर पर समझने के लिये कुछ निम्नलिखित परिभाषाओं को समझना पड़ेगा। जैसे–

लॉक के अनुसार–''गणित वह मार्ग है जिसके द्वारा बच्चों के मन या मस्तिष्क में तर्क करने की आदत स्थापित होती है।''

मार्शल एच स्टोन के अनुसार–''गणित एक ऐसी अमूर्त व्यवस्था का अध्ययन है जो कि अमूर्त तत्वों से मिलकर बनी है। इन तत्वों को मूर्त रूप में परिभाषित किया गया है।''

व्हाइट हैड के अनुसार– ''व्यापक महत्व की दृष्टि से गणित सभी प्रकार की औपचारिक निगमानात्मक तार्किक योग्यता का विकास है।''

बेन्जामिन पीर्स के अनुसार–''गणित एक ऐसा विज्ञान है जो आवश्यक निष्कर्ष पर पहुँचता है।''

रोजर बेंकन के अनुसार–''गणित विज्ञानों का प्रवेश द्वार एवं कुंजी है। चूँकि जो मनुष्य गणित से अनभिज्ञ है, वह विज्ञानों और विश्व की वस्तुओं का ज्ञान प्राप्त नहीं कर सकता, इसलिए गणित की उपेक्षा सम्पूर्ण ज्ञान के लिये घातक है। इससे भी अधिक खराब यह है कि ऐसे अनभिज्ञ मुनष्य न तो अपनी इस अनभिज्ञता को जानते है और न ही इसका उपचार कर सकते है।''

हर्वार्ड कमेटी के अनुसार – ''गणित को अमूर्त स्वरूप के विज्ञान के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। किसी भौतिक व्यवस्था बोध में संरचना की तत्वदर्शिता की अनिवार्य आवश्यकता कला में लेप चित्रण और संगीत में

संध्वनिकता की सराहना से कम नहीं है। वस्तुओं और घटनाओं द्वारा सामान्यीकृत रूप में यह अर्थशास्त्र में ज्योतिर्विज्ञान की अपेक्षा कम नहीं है। गणित विशिष्ट वस्तुओं और घटनाओं द्वारा साररूप में सामान्यीकृत स्वरूप में प्रदर्शित क्रम का अध्ययन है।''

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

1. गणित को सामान्य अर्थों में .... का विज्ञान समझा जाता है।
2. गणित .... व्यवस्था का अध्ययन है।

1.4 गणित की प्रकृति

प्रत्येक विषय की अपनी विशिष्ट बनावट होती है जोकि उस विषय को एक विशिष्ट आकार देती है। गणित विषय की भी अपनी एक विशिष्ट बनावट है। जिसे गणित की प्रकृति कहते है। जब किसी विषय की हम किसी दूसरे विषय से तुलना करते हैं तो मूलतः हम उसकी प्रकृति की तुलना करते हैं। गणित की प्रकृति को समझने के लिये हमें कुछ निम्नलिखित बिन्दुओं पर प्रकाश डालना पड़ेगा।

1.4.1 गणित की अपनी भाषा होती है

गणित विषय की अपनी एक विशिष्ट भाषा शैली है। भाषा से हमारा तात्पर्य है सूत्र (Formula),संकेत (Sign),पद (Term)प्रत्यय (Concepts)आदि से है। गणित के अपने अलग सूत्र, संकेत, पद होते हैं जो कि मिल कर भाषा को जन्म देते हैं।

1.4.2 गणित के ज्ञान का आधार ज्ञानेन्द्रियाँ हैं

गणित का जो भी ज्ञान हम प्राप्त करते है उनका आधार हमारी ज्ञानेन्द्रियां है। अतः इस ज्ञान का आधार वास्तविक तथा स्थायी होता है।

1.4.3 गणित अमूर्त प्रत्ययों की व्याख्या करता है

गणित मूलतः अमूर्त प्रत्ययों का ज्ञान है या इसमें अमूर्त प्रत्ययों की व्याख्या की जाती है तथा उनको समझा जाता है या हम कह सकते है कि अमूर्त प्रत्ययों को स्थूलरूप में समझाया जाता है।

1.4.4 गणित संख्याओं पर बल देता है

गणित में संख्याओं, दिशा, स्थान तथा मापन आदि का अध्ययन किया जाता है अर्थात हम कह सकते है कि गणित की प्रकृति तार्किक है।

1.4.5 गणित का ज्ञान क्रमबद्ध तथा विश्वसनीय होता है

गणित का ज्ञान क्रमबद्ध होता है तथा इसके सूत्र तथा सिद्धान्त पूरे विश्व में मान्य है अतः इसके द्वारा प्राप्त ज्ञान में सन्देह की कोई गुन्जाईश नहीं रहती। हम उस ज्ञान पर भरोसा कर सकते है जिसके कारण ज्ञान की विश्वसनीयता बढ़ जाती है।

1.4.6 गणित के ज्ञान के अध्ययन से छात्रों में आत्म विश्वास तथा आत्मनिर्भरता का विकास होता है

गणित के ज्ञान के कारण छात्र अपनी दैनिक जीवन में आने वाली घटनाओं में गणित के सूत्रों का उपयोग करना सीख जाते है (उदाहरण के तौर पर आय–व्यय, मापन, लाभ–हानि) जिसके फलस्वरूप उनमें आत्म विश्वास तथा आत्मनिर्भरता का गुण विकसित होता है।

1.4.7 छात्रों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित होता है

गणित के ज्ञान के फलस्वरूप छात्र किसी भी समस्या का हल स्वयं निकालने का प्रयास करता है तथा हल निकालते वक्त वह कुछ निश्चित क्रमों का अनुपालन करता है जिसके कारण छात्रों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित होने लगता है।

1.4.8 गणित अन्य विषयों में सहायता प्रदान करता है

गणित एक ऐसा विषय है जो लगभग सभी विषयों को आधार प्रदान करता है। जब भी किसी विषय में संख्या आ जाती है तो उसका हल निकालने के लिये हमें गणितीय सूत्रों का सहारा लेना पड़ता है। इसी कारण से गणित को 'विज्ञानों का विज्ञान' कहते है, भौतिकी, रसायनशास्त्र, खगोल शास्त्र, अर्थशास्त्र, भूगोल, वाणिज्य, संगीत इत्यादित विषय किसी न किसी रूप में गणित का सहारा लेते हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

3. निम्न कथनों में सही या गलत बताइये–

i. गणित की अपनी भाषा नहीं होती। ( )

ii. गणित का आधार ज्ञानेन्द्रिया है। ( )

iii. गणित का ज्ञान विश्वसनीय नहीं होता। ( )

iv. गणित छात्र के समस्या समाधान की योग्यता पर बल देता है। ( )

v. गणित कई विषयों का आधार है। ( )

1.5 गणित का महत्व

किसी विषय का महत्व निम्नलिखित तीन बातों पर तय किया जाता है–

1. विषय की उपयोगिता
2. विषय की मानसिक अनुशासन स्थापित करने की योग्यता
3. विषय की सांस्कृतिक उपयोगिता तथा सामाजिक उपयोगिता

गणित जैसे विषय के रूप में यह बात शतप्रतिशत लागू होती है। गणित का शिक्षा के क्षेत्र में अत्यधिक महत्व है वर्तमान सभ्यता का आधार गणित ही है।

प्लेटो, शल्ट्ज तथा हब्स आदि दार्शनिकों ने गणित को मानसिक शक्तियों को प्रशिक्षित करने का साधन माना है। जबकि यंग तथा नेपोलियन ने गणित के उपयोगिता के सिद्धान्त पर बल दिया है। प्रसिद्ध गणितज्ञ हॉगवेन ने गणित को सभ्यता और संस्कृति का दर्पण माना है।

इसके महत्व को तो हमारे पुरातन ग्रन्थों ने भी स्वीकार किया है।

वेदांग ज्योतिष का यह कथन–

यथा शिखा मयूराणा, नागाना मणयो यथा।

तद्धदवेदांय – शास्त्राणा, गणित मूर्धिर्न वर्तते।।

अर्थात जिस प्रकार मयूरों की शिखायें और सर्पो की मणियाँ शरीर में सर्वोपरि मूर्धा (मस्तक) पर विद्यमान है उसी प्रकार वेदों के अंगों तथा शास्त्रों में गणित शिरोमणि है।

गणित के संदर्भ में कोठारी कमीशन का सुझाव है कि ''विद्यालयी जीवन के प्रथम दस वर्षो में विज्ञान एवं गणित दोनो विषयों को अनिवार्य से पढ़ाया जाना चाहिये''।

उपरोक्त बिन्दुओं के आधार पर हम यह कह सकते है कि गणित एक अति महत्वपूर्ण विषय है जिसका महत्व अत्यधिक है, उपयोगिता के आधार पर इसका महत्व निम्नालिखित बिन्दुओं द्वारा स्पष्ट किया जा सकता है–

1.5.1 व्यवहारिक जीवन में गणित का उपयोग

प्रत्येक मनुष्य चाहे वह शिक्षित हो या अशिक्षित छोटा हो या बड़ा अपने जीवन में गणित का प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से उपयोग करता है।

1.5.2 व्यापारिक जगत में गणित का उपयोग

किसी भी व्यवसाय को समझने, करने तथा उसमें लाभ–हानि की गणना करने के लिये गणित की आवयकता पड़ती है। गणित की सहायता से यह पता किया जा सकता है कि व्यापार की स्थिति क्या है? लाभ हो रहा है या हानि?अतः किसी भी समाज/देश/राष्ट्र की अर्थव्यवस्था का आधार गणित ही है।

1.5.3 बालको की मानसिक योग्यता बढ़ाने में सहायक

गणित की समस्याओं को सुलझाने के लिये छात्रों को मानसिक श्रम करना पड़ता है जिससे उनका मस्तिष्क सक्रिय हो जाता है। गणित का प्रयोग करने से छात्रों में तर्कशक्ति, विश्लेषण करने की क्षमता विकसित होती है जिससे उनकी विभिन्न मानसिक शक्तियों का विकास होता है।

1.5.4 परिणाम की निश्चितता

गणित की समस्याओं के हल निश्चित होते है अर्थात निष्कर्ष में संदेह नहीं होता। जबकि दूसरे विषयों में, परिणामों में मतभेद भी आ जाता है। परिणामों की निश्चितता के कारण छात्र में आत्म विश्वास तथा वैज्ञानिक दृष्टिकोण विकसित होता है।

1.5.5 सामाजिक प्रगति में सहायक

किसी भी समाज की प्रगति में विज्ञान का बड़ा हाथ होता है। विज्ञान का आधार गणित ही है। किसी समाज की आर्थिक उन्नति के लिये गणित का बहुत बड़ा योगदान है, जैसे–जैसे समाज की आर्थिक प्रगति होती जाती है साथ–साथ उसकी सामाजिक प्रगति भी होती है। आर्थिक प्रगति का सीधा सम्बन्ध सामाजिक प्रगति से है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

4. किसी विषय का महत्व किन बातों पर निर्भर करता है? संक्षेप में बताइये।

....

....

5. गणित के संदर्भ में कोठारी कमीशन ने क्या सुझाव दिया था?

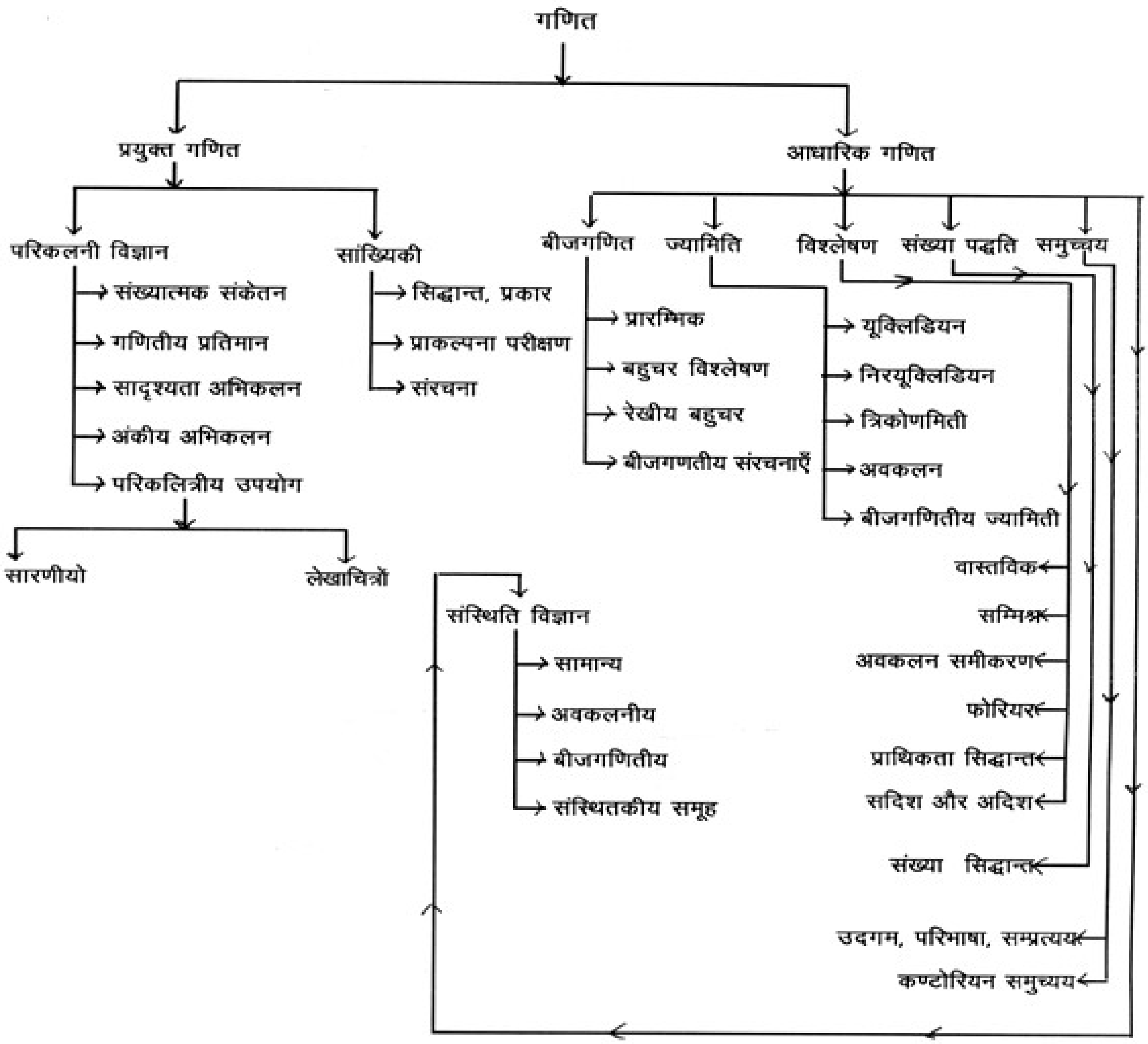
....

....

1.6 गणित का क्षेत्र

जब भी किसी विषय के क्षेत्र की चर्चा की जाती है तो यह बतलाया जाता है कि अमुक विषय का प्रयोग प्रत्यक्ष तथा अप्रत्यक्ष रूप में कहाँ–कहाँ किया जाता है।

गणित को तो विज्ञानों की रानी कहा जाता है अर्थात सभी विषय कही न कही इसका सहारा लेते है ताकि वह पूर्णता को प्राप्त कर सके। अतः गणित तो सर्वत्र व्याप्त है, पर फिर भी गणित को मोटे तौर से दो भागों में बाँट जा सकता है।



1.7 सारांश

गणित का अपना एक विशिष्ट महत्व है यह सभी विषयों का आधार विषय समझा जाता है। व्यवहारिक तथा व्यापारिक जगत में गणित का उपयोग किया जाता है। कोई भी राष्ट्र बिना गणित की सहायता के सफलता के पथ पर नहीं बढ़ सकता। गणित बालकों की मानसिक योग्यता बढ़ाने में सहायता प्रदान करता है तथा समाज की सामाजिक प्रगति में भी गणित सहायता प्रदान करता है।

1.8 अभ्यास के प्रश्न

1. गणित को परिभाषित कीजिए?
2. गणित की प्रकृति को स्पष्ट कीजिए?
3. दैनिक जीवन में गणित के महत्व पर प्रकाश डालिये?
4. गणित के कौन कौन से क्षेत्र हैं?

1.9 चर्चा के बिन्दु

1. ''गणित सभी विषयों का आधार है'' चर्चा कीजिए?

1.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. गणित को सामान्य अर्थो में संख्याओं का विज्ञान समझा जाता है।
2. गणित अमूर्तव्यवस्था का अध्ययन है।
3.
   i. गणित की अपनी भाषा नहीं होती – गलत
   ii. गणित का आधा ज्ञानेन्द्रिया है – सही
   iii. गणित का ज्ञान विश्वसनीय नहीं होता – गलत
   iv. गणित छात्र के समस्या समाधान की योग्यता पर बल देता है– सही
   v. गणित कई विषयों का आधार है – सही
4. किसी विषय का महत्व निम्नलिखित तीन बातों पर निर्भर करता है–
   i. विषय की उपयोगिता
   ii. विषय की मानसिक अनुशासन स्थापित करने की योग्यता
   iii. विषय की सांस्कृतिक उपयोगिता
5. कोठारी कमीशन के अनुसार विद्यालयी जीवन के प्रथम दस वर्षो में विज्ञान एवं गणित दोनो विषयों को अनिवार्य रूप से पढ़ाया जाना चाहिये।

1.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. कुलश्रेष्ठ, अरूण कुमार (2013) : गणित शिक्षण, मेरठ, आर लाल बुक डिपो।
2. थामस, शाजी एण्ड सेनानी, अशोक (2009) : गणित शिक्षण आगरा, अग्रवाल पब्लिकेशन्स।
3. रावत, एम0एस0 एण्ड अग्रवाल, एम0 बी0 लाल (2012) : णित शिक्षण, आगरा, अग्रवाल पब्लिकेशन्स।
4. वाजपेयी, पी0 के0 (2009) : गणित शिक्षण, इलाहाबाद, आलोक प्रकाशन।
5. सिंह, सुरेश (2009) : गणित शिक्षण, इलाहाबाद, अनुभव पब्लिसिंग हाउस।

इकाई–2 : गणित का अधिगम, अधिगम का मनोविज्ञान एवं गणित का शिक्षण संरचनावाद तथा सक्रियवाद

इकाई की संरचना

2.1 प्रस्तावना
2.2 इकाई के उद्देश्य
2.3 अधिगम का अर्थ
2.4 अधिगम के सिद्धान्त
2.5 अधिगम के आवश्यक तत्व
- 2.5.1 भौतिक वातावरण
- 2.5.2 सामाजिक वातावरण
- 2.5.3 अनुदेशन
- 2.5.4 पाठ्य वस्तु
- 2.5.5 मूल्यांकन
- 2.5.6 व्यवहार परिवर्तन

2.6 अधिगम प्रक्रिया को प्रभावित करने वाले कारक
- 2.6.1 शारीरिक कारक
- 2.6.2 मनोवैज्ञानिक कारक
- 2.6.3 पर्यावरणीय कारक
- 2.6.4 अन्य विविध कारक

2.7 अधिगम के मनोवैज्ञानिक आधार
- 2.7.1 व्यवहारवाद
- 2.7.2 अन्तदृष्टि अधिगम
- 2.7.3 संज्ञानात्मक विकास
  - 2.7.3.1 प्रो0 पियाजे का सिद्धान्त
  - 2.7.3.2 प्रो0 ब्रूनर का सिद्धान्त
- 2.7.4 संरचनावाद
- 2.7.5 अधिनियमवाद / सक्रियवाद

2.8 गणित शिक्षण का मनोविज्ञान
2.9 गणित शिक्षण की समस्यायें
2.10 सारांश
2.11 अभ्यास के प्रश्न
2.12 चर्चा के बिन्दु
2.13 बोध प्रश्नों के उत्तर
2.14 कुछ उपयोगी पुस्तकें

2.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई प्रथम खण्ड की द्वितीय इकाई है। इसमें अधिगम का अर्थ, अधिगम के विभिन्न सिद्धान्त, अधिगम के आवश्यक तत्व (भौतिक, सामाजिक, विद्यार्थी, शिक्षक), अधिगम की प्रक्रिया और उसके प्रभावित करने वाले विभिन्न तत्वों के बारे में चर्चा की गई है। इसमें अधिगम के विभिन्न मनोवैज्ञानिक आधारो के बारे में बताया गया है। इसके अतिरिक्त मनोविज्ञान किस प्रकार गणित शिक्षण को प्रभावित करता है इस पर प्रकाश डाला गया है तथा अन्त में गणित शिक्षण की उन समस्याओ का वर्णन किया गया है जो विद्यालयी गणित शिक्षण के दौरान शिक्षक द्वारा महसूस की जाती है।

2.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई को अध्ययन करने के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. अधिगम का अर्थ बता सकेंगे।
2. अधिगम की कोई एक परिभाष बता सकेगे।
3. अधिगम के कोई दो सिद्धान्त बता सकेंगे।
4. अधिगम के आवश्यक तत्वों की व्याख्या कर सकेंगे।
5. अधिगम प्रक्रिया को प्रभावित करने वाले कारकों की सूची बता सकेंगे।
6. अधिगम के मनोवैज्ञानिक आधारों की व्याख्या कर सकेंगे।
7. गणित शिक्षण की समस्यायें का अपने शब्दों में वर्णन कर सकेंगे।
8. गणित शिक्षण को प्रभावित करने वाले मनोवैज्ञानिकों सिद्धान्तों का वर्णन कर सकेंगे।

2.3 अधिगम का अर्थ

अधिगम शब्द का शाब्दिक अर्थ सीखना लिया जा सकता है। मनुष्य जन्म से लेकर मृत्यु तक कुछ न कुछ सीखता रहता है। भारतीय इतिहास में अभिमन्यु का वर्णन आया है जिसने माँ के गर्भ में ही ज्ञान प्राप्त कर लिया था, अधिगम का प्रत्यक्ष उदाहरण है। मनोवैज्ञानिकों ने सीखने को अधिगम शब्द से निरूपित किया है। मनुष्य अपनी सम्पूर्ण जिन्दगी में प्रतिदिन वातावरण के साथ कुछ न कुछ प्रतिक्रिया करता है जिसके फलस्वरूप उसको कुछ न कुछ नये सीखने को मिलता है जिसे अधिगम कहते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि अधिगम एक मानसिक प्रक्रिया है जो निरन्तर चलती रहती हैं तथा उसमे निरन्तर परिमार्जन होता रहता है। अधिगम की प्रक्रिया दो प्रमुख तत्वों पर निर्भर करती है, प्रथम मूर्त अनुभव से लाभ उठाने की योग्यता तथा दूसरा परिपक्वता उदाहरण के तौर पर यदि बालक ने कोई खाद्य वस्तु देखी और खा ली, उसका स्वाद उसको कसैला लगा तो भविष्य में यदि वह फिर वही वस्तु देखेगा, तो उसका पूर्व ज्ञान, उसको न खाने के लिये विवश करेगा। यह क्रिया निरन्तर चलती रहती है। अधिगम के अर्थ को व्यापक तौर पर समझने के लिए कुछ परिभाषाओं का अध्ययन करते हैं–

थार्नडाईक–"अधिगम उपयुक्त अनुक्रिया का चयन करना तथा उसे उत्तेजना से जोड़ना है"।

क्रो एण्ड क्रो– "अधिगम आदतों, ज्ञान और अभिवृत्तियों का अर्जन है।"

गेट्स व अन्य– "अधिगम अनुभव और प्रशिक्षण के परिणामस्वरूप व्यवहार में परिवर्तन है।"

गैज एवं बर्लनाइनर– "अधिगम एक प्रविधि है जिसमें सजीव, अनुभव के परिणामस्वरूप व्यवहार परिवर्तन करता है।"

कुप्पूस्वामी– "अधिगम वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा एक जीव, एक परिस्थिति में उसके अन्तःक्रिया के परिणाम के रूप में, व्यवहार का एक नवीन प्रतिरूप अर्जित करता है।"

उपयुक्त परिभाषाओं के अध्ययन से अधिगम के सन्दर्भ में कुछ बातें स्पष्ट होती हैं–

1. अधिगम एक मानसिक प्रक्रिया है जो व्यवहार में परिवर्तन के रूप में परिलक्षित होती है।

2. अधिगम में, व्यवहार में हुआ परिवर्तन कुछ समय तक बना रहता है तथा अभ्यास के द्वारा इसे स्थाई बनाया जा सकता है।
3. अधिगम एक निरन्तर चलने वाली प्रक्रिया है जिसमें सजीव अनुभव शामिल किये जाते हैं।
4. अधिगम में किसी व्यक्ति, परिस्थिति तथा क्रिया से अन्तःक्रिया आवश्यक है।
5. अधिगम नकारात्मक तथा सकारात्मक दोनों प्रकार का हो सकता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. अधिगम का क्या अर्थ है?

....

....

2. अधिगम की कोई एक परिभाषा दीजिये?

....

....

2.4 अधिगम के सिद्धान्त

शिक्षण एक उद्देश्यपूर्ण प्रक्रिया है जिसमें निश्चित उद्देश्यों की प्राप्ति के लिये शिक्षक तथा छात्र अन्तःक्रिया करते हैं। शिक्षण प्रभावी हुआ कि नहीं इसको अधिगम के रूप में मूल्यांकित किया जाता है। अधिक अधिगम मतलब अच्छा शिक्षण। शिक्षण में दार्शनिक, सामाजिक तथा मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों का उपयोग किया जाता है जिसमें समाजशास्त्र तथा मनोविज्ञान का तो उद्देश्य ही मानव व्यवहार का अध्ययन है। गणित शिक्षण में भी अधिगम के कई सिद्धान्तों का उपयोग किया जाता है ताकि शिक्षण को प्रभावी बनाया जाये। ये सिद्धान्त निम्नलिखित है।

- शिक्षण प्रक्रिया में छात्र सक्रिय भागीदारी तभी कर सकता है जब वह सीखने के लिये तत्पर हो अर्थात् शिक्षक का दायित्व है कि वह ऐसी परिस्थिति उत्पन्न करे ताकि छात्र सीखने के लिये तत्पर हों।
- अभ्यास का नियम से तात्पर्य है कि अधिगम की गई विषयवस्तु का अभ्यास कराया जाना चाहिये अन्यथा अधिगम विस्मृत हो सकता है।
- छात्र प्रत्येक विषय वस्तु को सीखने के लिये अपने पूर्वज्ञान का उपयोग करता है। अधिगम की गई विषयवस्तु को वह अपने पूर्वज्ञान से जोड़ता है यदि ऐसा होता है तो अधिगम ज्यादा स्थायी होता है।
- सम्प्रत्यय निर्माण के लिये मूर्त अनुभव, अमूर्त अनुभव के मुकाबले ज्यादा प्रभावशाली होते हैं तथा इनकी मात्रा भी प्रचुर होनी चाहिये।
- जिस कार्य को करने में हमें सन्तोष मिलता है उसकी हम पुनरावृत्ति करते हैं तथा जिससे असंतोष मिलता है उसे छोड़ देते हैं। अर्थात् शिक्षा में पुरस्कार तथा दण्ड का नियम यही संकेत करता है। सकारात्मक पुनर्बलन छात्र अधिगम में सहायता प्रदान करते हैं तथा नकारात्मक पुनर्बलन या दण्ड अधिगम में बाधा उत्पन्न करते हैं।
- छात्र वर्तमान में सीखी गई विषयवस्तु का जब आत्मसात ठीक प्रकार से कर लेता है तब नवीन परिस्थितियों/भविष्य में इसका स्थानान्तरण आसानी से कर सकता है।

- अधिगम में मानसिक स्थिति का अत्यधिक प्रभाव पड़ता है यदि छात्र की मानसिक स्थिति/मनोवृत्ति अधिगम क्रिया के प्रति नहीं है तो शिक्षण कितना ही प्रभावशाली क्यों न हो, वह नहीं सीखेगा। दूसरे शब्दों में संवेदनशील वातावरण अधिगम को अधिक प्रभावी बनाता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

3. अधिगम की गई वस्तु का .... कराया जाना चाहिये अन्यथा अधिगम ....हो सकता है।
4. सम्प्रत्यय निर्माण के लिये .... अनुभव .... अनुभवों के मुकाबले ज्यादा प्रभावशाली होते हैं।
5. शिक्षक का दायित्व है कि वह ऐसी .... उत्पन्न करे ताकि छात्र .... के लिये तत्पर हो।

2.5 अधिगम के आवश्यक तत्व

अधिगम को शिक्षण के उत्पाद के रूप में देखा जा सकता है क्योंकि अधिगम शिक्षण प्रक्रिया के बाद होता है। मोटे तौर पर अधिगम प्रक्रिया के तीन तत्व है।

(1) शिक्षक (2) विद्यार्थी (3) वातावरण

शिक्षक से तात्पर्य है वह व्यक्ति जो शिक्षण की प्रक्रिया को आरम्भ करता है, उसका संचालन करता है, नियंत्रण करता है तथा अन्त में मूल्यांकन करता है कि किस सीमा तक शिक्षण प्रभावी रहा है।

विद्यार्थी भी अधिगम की प्रक्रिया का आवश्यक तत्व है क्योंकि सम्पूर्ण शिक्षण व्यवस्था, विद्यार्थी के चारो तरफ ही घूमती है। छात्र किस प्रकार सीखें, क्या सीखें, किसी विधि से सीखें तथा कितना सीखें, इन सभी प्रश्नों का जवाब विद्यार्थी को ध्यान में रखकर बुना जाता है। वातावरण से तात्पर्य है वो सारी परिस्थितियाँ जो अधिगम को प्रभावित करती है। अधिगम की प्रक्रिया में वातावरण की भूमिका भी महत्वपूर्ण होती है। शिक्षक कितना भी अच्छा पढ़ायें, विद्यार्थी पढ़ने के लिये कितने ही सजग हो, पर यदि वातावरण उपयुक्त नहीं होगा तो अधिगम प्रभावित होगा।

रिचर्ड ली काल्विन ने अच्छे अधिगम के लिये निम्न छः आवश्यक तत्व बताये हैं–

2.5.1 भौतिक वातावरण– इससे तात्पर्य है वह सारी भौतिक परिस्थितियाँ जिनमें कक्षा शिक्षण होता है। भौतिक वातावरण सीधे तौर पर शिक्षण को प्रभावित करता है जिसके फलस्वरूप अधिगम भी प्रभावित होता है। स्वच्छ वायु, उचित प्रकाश आदि जैसे भौतिक तत्व है जो अधिगम को सीधे तौर पर प्रभावित करते हैं।

2.5.2 सामाजिक वातावरण– शिक्षण की प्रक्रिया के दौरान छात्र तथा शिक्षक के मध्य जो अन्तःक्रिया चलती है उसके सामाजिक परिप्रेक्ष्य में देखना सामाजिक वातावरण का निर्माण करता हैं। शिक्षक तथा छात्र के सम्बन्ध सीधे तौर अधिगम को प्रभावित करते हैं। यदि सम्बन्ध मधुर होंगे। छात्र अधिगम के लिये ज्यादा तत्पर होंगे, फलस्वरूप अधिगम प्रभावित होगा। अतः शिक्षक को उचित सामाजिक वातावरण बनाये रखने की कोशिश करनी चाहिये।

2.5.3 अनुदेशन– शिक्षण अनुदेशनों का समूह ही तो है। अनुदेशन से तात्पर्य है शब्दों का समूह जो किसी क्रिया के होने या करने का सन्देश देता है। प्रत्येक शिक्षण में अनुदेशन सम्मिलित होते हैं। यह एक जटिल संरचना का निर्माण करते हैं। परन्तु अनुदेशनों को नियंत्रित करके उचित परिस्थितियों का निर्माण किया जा सकता है।

कक्षा में अनुदेशन को हम विभिन्न रूपों में देखते हैं जिनमें सबसे ज्यादा व्याख्या विधि के रूप में देखा जाता है परन्तु अच्छा अध्यापक, समूह क्रियाओं, परिसंवाद तथा चर्चा में भी इनका उपयोग करता है।

2.5.4 **पाठ्यवस्तु–** शिक्षण के आवश्यक तत्व के तौर पर पाठ्यवस्तु को हम कैसे भूल सकते हैं। इसमें आवश्यक बात यह है कि क्या पढ़ाया जाये के साथ कैसे पढ़ाया जाये भी उतना ही महत्वपूर्ण है। क्या जो पढ़ाया जा रहा है वह छात्र को समझ में आ रहा है। यह आवश्यक प्रश्न है जिसका उत्तर हमें ढूढ़ना है।

2.5.5 **मूल्यांकन–** अच्छे शिक्षण के लिये यह भी जरूरी है कि समय–समय पर छात्रों की उपलब्धियों का मूल्यांकन अवश्य किया जाना चाहिए। मूल्यांकन का आधार उद्देश्य होते है, जो शिक्षण की प्रक्रिया को शुरू करने से पहले शिक्षक स्वयं निर्धारित करता है।

2.5.6 **व्यवहार परिवर्तन–** छात्रों के व्यवहार में परिवर्तन शिक्षण प्रक्रिया का अन्तिम तत्व है। यदि छात्र के व्यवहार में सकारात्मक दिशा में परिवर्तन हुआ तो इसका मतलब है शिक्षण उचित प्रकार से हुआ है। यदि व्यवहार में परिवर्तन नकारात्मक दिशा में हुआ तो सम्पूर्ण शिक्षण प्रक्रिया पर मंथन करना पड़ेगा कि आखिर गलती कहाँ से हुई।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

6. अधिगम प्रक्रिया के कितने तत्व होते हैं?

....

....

7. रिचर्ड ली काल्विन ने अधिगम के लिये कितने आवश्यक तत्व बताये हैं?

....

....

2.6 अधिगम प्रक्रिया को प्रभावित करने वाले कारक

प्रत्येक कार्य को करते वक्त कुछ ऐसे कारक होते हैं जो उस कार्य को प्रभावित करते हैं। ठीक उसी प्रकार अधिगम प्रक्रिया को भी कुछ कारक प्रभावित करते हैं। मनोवैज्ञानिक ने अपने शोधों के आधार पर कुछ कारकों का पता लगाया जो अधिगम की प्रक्रिया को प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से प्रभावित करते हैं। इन सबका ज्ञान किसी शिक्षक के लिये अतिआवश्यक है क्योंकि इसके अभाव में वह अपने अधिगम को प्रभावी नहीं बना पायेगा। सिम्पसन ने उत्तम स्वास्थ्य, संवेगात्मक सन्तुलन, मानसिक योग्यता आदि जैसे कारकों का वर्णन अपनी पुस्तक में किया। मोटे तौर पर उन कारकों को हम चार प्रमुख भागों में बाँट सकते हैं।

(अ). शारीरिक कारक (ब). मनोवैज्ञानिक कारक (स). पर्यावरण सम्बन्धी कारक (द). अन्य विविध कारक

2.6.1. शारीरिक कारक

- **ज्ञानेन्द्रियाँ–** अधिगम की प्रक्रिया को प्रभावित करने वाला प्रमुख कारक ज्ञानेन्द्रियाँ हैं। ज्ञानेन्द्रियों के माध्यम से मनुष्य का ज्ञान से प्रत्यक्षीकरण होता है। ज्ञानेन्दियाँ पाँच है (आँख, नाक, कान, त्वचा, जीभ)। किसी भी एक ज्ञानेन्द्रियाँ के दोषपूर्ण हो जाने से उस ज्ञानेन्द्रिय सम्बन्धित ज्ञान का अभाव हो जायेगा जिससे अधिगम प्रभावित होगा।

- **शारीरिक व मानसिक स्वास्थ्य**—बालक यदि शारीरिक व मानसिक दृष्टि से स्वस्थ है तो ज्ञानार्जन में उसका मन लगेगा फलस्वरूप अधिगम प्रभावित होगा। कल्पना कीजिये आप को बुखार है, आपकी आँखे बन्द हो रही है ऐसे वक्त में क्या आपका मन पढ़ाई में लगेगा? कहने का तात्पर्य है यदि शरीर स्वस्थ नहीं होगा तो अधिगम में बाधा आती है।
- **परिपक्वता**—छात्र की आयु बढ़ने के साथ छात्र की मानसिक योग्यता बढ़ती है जिसे परिपक्वता कहते हैं। ऐसे देखा गया है कि परिपक्व छात्र अपरिपक्व छात्रों के मुकाबले अधिगम शीघ्र तथा रूचिपूर्वक करते हैं। अतः हम कह सकते हैं कि अधिगम सीधे तौर पर परिपक्वता को प्रभावित करता है या इसका अधिगम से सीधा सम्बन्ध है।

2.6.2 मनोवैज्ञानिक कारक

- **बुद्धि**— बुद्धि का अधिगम से धनिष्ठ सम्बन्ध है। तीव्र बुद्धि वाला छात्र सामान्य बुद्धि वाले छात्र की अपेक्षा अधिगम में अधिक समय लेता है। प्रायः देखा जाता है अधिक बुद्धि वाला छात्र की अधिगम की दर सामान्य छात्र की अपेक्षा अधिक होती है।
- **रूचि**— रूचि का अधिगम से सीधा सम्बन्ध है। यदि छात्र की किसी कार्य को करने में रूचि है तो वह उस कार्य को सीखने के दौरान आयी बाधाओं को पार करने के लिये अपने को समायोजित कर लेता है। रूचि होने से बालक उन कार्य को करने में आनन्द की अनुभूति करता है। वैसे कहा भी गया है कि 'उत्तम शिक्षक वो है जो छात्र की विषय में रूचि जाग्रत करा दे।'
- **अधिगम की इच्छा**— कोई भी कार्य करने के लिये रूचि, उत्साह से ज्यादा किसी चीज की जरूरत पड़ती है तो वह है इच्छा शक्ति। पुरानी कहावत है कि 'घोड़े को घास तक लाया जा सकता है पर घास खिलाया नहीं जा सकता है।' अर्थात शिक्षक यदि छात्र में इच्छा शक्ति पैदा कर दे तो बालक स्वयं प्रतिकूल परिस्थितियों में भी अधिगम कर लेता है।
- **प्रेरणा**—अधिगम को प्रभावित करने वाले कारकों में प्रेरणा का महत्वपूर्ण स्थान है। प्रेरणा एक मानसिक शक्ति है जो व्यक्ति को क्रिया करने के लिये बाध्य करती है। आवश्यकता, प्रयोजन और प्रोत्साहन प्रेरणा से सम्बन्धित है अतः एक शिक्षक को इन सभी तत्वों का ज्ञान भलीभाँति होना चाहिये। प्रयोगों ने सिद्ध किया है कि पुरस्कार, प्रशंसा आदि तत्वों से प्रेरणा को बढ़ाया जा सकता है। पुरस्कार के कारण छात्र अधिगम में रूचि लेते हैं तथा कार्य को सरलता से सीख जाते हैं।

2.6.3 **पर्यावरणीय कारक**— कक्षा अधिगम की प्रक्रिया एक निश्चित भौतिक वातावरण में सम्पन्न होती है। उस भौतिक वातावरण के तत्व है, वायु, प्रकाश, ध्वनि तथा कक्षा का स्थान। यदि इन तत्वों में किसी भी तत्व के दूषित हो जाने पर कक्षा का भौतिक वातावरण कैसा होगा इसकी आप कल्पना कर सकते हैं। क्या आप ऐसे स्थान पर अधिगम करना पसन्द करेंगे जहाँ वायु स्वच्छ न हो, प्रकाश पूर्ण मात्रा में उपलब्ध न हो, ध्वनि की मात्रा काफी अधिक हो तथा फर्नीचर आरामदायक न हो अर्थात हम कह सकते हैं कि पर्यावरण भी एक महत्वपूर्ण तत्व है जिससे अधिगम प्रभावित होता है।

2.6.4 अन्य विविध कारक

- **शिक्षक**—शिक्षण की प्रक्रिया का सबसे महत्वपूर्ण कारक शिक्षक होता है वह शिक्षण के उद्देश्यों का निर्धारण करता, शिक्षण विधियों को चयन करता है। शिक्षण प्रक्रिया का संचालन तथा मार्गदर्शन करता है तथा जरूरत पड़ने पर प्रक्रिया का नियंत्रण भी करता है या हम कह सकते हैं कि शिक्षण की प्रक्रिया शिक्षक के बगैर अधूरी है। शिक्षक अपनी योग्यता, अनुभव, वाक्शैली, मनोविज्ञान के ज्ञान का प्रयोग करके कठिन से कठिन सामग्री को भी सरल बना देता है। अतः शिक्षक अधिगम की प्रक्रिया पर महत्वपूर्ण प्रभाव डालता है।

- **अभ्यास–** यदि किसी शिक्षण सामग्री का बार–बार अभ्यास कराया जाये तो उसका अधिगम ज्यादा स्थाई होगा ऐसा अभ्यास का नियम कहता है। अतः शिक्षक जिस सामग्री का ज्यादा बार अभ्यास करता है उसका अधिगम उतना ही स्थाई अतः कह सकते हैं कि अभ्यास अधिगम को प्रभावित करता है।
- **परिणाम का ज्ञान–** मनोवैज्ञानिकों ने अपने प्रयोगों द्वारा यह सिद्ध किया है कि यदि अधिगम प्रक्रिया के दौरान समय–समय पर छात्रों को अधिगम की प्रगति का ज्ञान कराया जाये तो अधिगम करने वाले को उससे प्रेरणा मिलती है तथा वह पूर्ण मनोयोग से अधिगम करने में लग जाता है। अतः शिक्षक को बीच–बीच में छात्रों को उनकी गलतियों के बारे में दिशा निर्देशित करते रहना चाहिये इससे अधिगम प्रभावित होता है।

बोध प्रश्न
टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

8. अधिगम प्रक्रिया को प्रभावित करने वाले दो शारीरिक कारकों को बतायें?

....

....

9. शिक्षक अधिगम प्रक्रिया को कैसे प्रभावित करता है?

....

....

2.7 अधिगम के मनोवैज्ञानिक आधार

अभी तक हमने पूर्व की पाठ्यवस्तु में यह जानने का प्रयास किया है अधिगम क्या है? इसके महत्वपूर्ण घटक कौन से हैं? इसी क्रम में अगला प्रश्न यह उठता है कि छात्र किस प्रकार सीखते हैं? इस प्रश्न का जबाब निःसन्देह अतीत से खोजा जा रहा है तथा भविष्य में भी खोजा जायेगा क्योंकि यह सबसे महत्वपूर्ण प्रश्न है। यदि शिक्षक चाहता है कि उसका शिक्षण प्रभावी हो, इसका मतलब हुआ कि अधिगम की मात्रा अधिक हो तो शिक्षक को यह भी पता होना चाहिये कि आखिर छात्र किस प्रकार सीखता है। पूर्व में कई मनोवैज्ञानिकों ने इसे बताने का कार्य किया तथा अधिगम के भिन्न–भिन्न सिद्धान्त दिये। कुछ सिद्धान्तों में सामान्य विचार विहित है तो कुछ में भिन्नता दिखाई देती है। इन्हीं समानताओं तथा विभिन्नताओं के आधार पर Hilgardने अपनी पुस्तक 'Theories of learning'में अधिगम के सिद्धान्तों का वर्णन किया है।

2.7.1 व्यवहारवाद (Behaviourism)

मनोविज्ञान का विकास अनेक अवस्थाओं में हुआ जिसको विकसित करने में मनोवैज्ञानिकों के साथ समाजशास्त्रियों तथा दार्शनिक विचारक भी थे। इसके फलस्वरूप अनेक वाद आस्तित्व में आये जिसमें व्यवहारवाद एक प्रमुख वाद है इसको विकसित करने में कई मनोवैज्ञानिकों ने योगदान दिया परन्तु जे0बी0 वाटसन का योगदान अतुलनीय है। वह पूर्णतः वातावरण की सत्ता तथा उसके महत्व को मानते थे वह व्यवहार पर नियंत्रण के लिये वातावरण परिवर्तन पर बल देते थे। व्यवहारवाद साहचर्यवाद पर आधारित है। वह मानता हैं कि उद्दीपक एवं अनुक्रिया मानसिक स्तर पर संयुक्त रूप से रहकर क्रिया करते हैं।

इस उद्दीपक अनुक्रिया (S-R) के बन्ध को सबसे पहले रूसी मनोवैज्ञानिक ईवान पी0 पॉवलाव ने सरल शब्दों में समझाया। उन्होंने अनुबन्धन तथा अनुकूलन जैसे शब्दों को निरूपित किया। बाद में इसी कार्य को थार्नडाइक और

स्किनर ने आगे बढ़ाया। उनका मत था कि अधिगम उद्दीपक एवं अनुक्रिया के साथ होने से नहीं होता बल्कि इसके लिये पुनबर्लन की आवश्यकता होती है। व्यवहारवाद को और आगे बढ़ाने में हल, टॉलमैन तथा गुथरी जैसे मनोवैज्ञानिकों का हाथ है। व्यवहारवाद व्यक्ति को यन्त्र मानता है और शिक्षा को यन्त्र संचालित क्रिया। व्यवहारवाद मन के अस्तित्व को नहीं मानता और नाहि रूचि, अभिरूचि, प्रेरणा, कल्पना आदि शब्दों का प्रयोग करना पसन्द करता है। इसने मनोविज्ञान को मानसिक शक्तियों के अध्ययन के विवाद से निकालकर ठोस वस्तुनिष्ठ धरातल प्रदान किया। व्यवहारवाद ने यह धारणा विकसित की कि सभी प्रकार का व्यवहार अर्जित किया जाता है। यह वातावरण के साथ होने वाली सतत् क्रिया है। शिक्षण जगत को इसने अभिक्रमित अनुदेशन तथा शिक्षण यन्त्र जैसी विधियाँ प्रदान की।

2.7.2 अन्तर्दृष्टि अधिगम (Insightful learning)

यह अधिगम मूलतः कोहलर के सूझ के सिद्धान्त पर आधारित है। गुड के अनुसार ''अन्तर्दृष्टि या सूझ वास्तविक स्थिति का आकस्मिक, निश्चित और तात्कालिक ज्ञान है।''

यह मानता है कि जब किसी समस्या के निराकरण का प्रयास किया जाता है। परन्तु हल नहीं निकलता तभी अचानक समस्या का कोई हल दिमाग में आता है। इस प्रकार के अधिगम में अन्तःक्रिया प्रेरणा की दमक दिखाई देती है। यह अधिगम गेस्टाल्टवादी विचारों पर आधारित है। जिसके प्रणेता वर्दीमर थे जो मानते थे कि ''किसी भी पूर्णाकृति की विशेषताएँ केवल वैयक्तिक तत्वों द्वारा नहीं अपितु इसके आन्तरिक संगठन या प्रकृति द्वारा निश्चित होती है।'' इस सिद्धान्त के अनुसार अधिगम में अनुभवों का स्थानान्तरण होता रहता है। यह अनुभव संगठित होकर अवयवी रूप धारण कर लेते हैं। इस विधि में बालक स्वयं खोजकर ज्ञान अर्जित करने के लिये तत्पर रहता है। अतः यह विधि कठिन विषयों, उदाहरण गणित में नये प्रश्नों को हल करने में उपयोगी सिद्ध हुई। यह विधि बालकों की कल्पना, तर्क, विचार शक्ति के विकास के लिये उचित अवसर प्रदान करती है।

2.7.3 संज्ञानात्मक विकास (Cognative Development)

संज्ञानात्मक विकास वह विधि है जिसमें व्यक्ति आयु की वृद्धि के साथ–साथ चिन्तन करना सीखता है। यह एक ऐसे मनोविज्ञान की शाखा है जो बालक के विकास को सूचना प्रविधि, संज्ञानात्मक साधन तथा भाषा विकास के सन्दर्भ में देखता है अर्थात हम कह सकते हैं कि संज्ञानात्मक विकास सोचने तथा समझने की शक्ति का अध्ययन है इसमें सबसे महत्वपूर्ण अध्ययन दो व्यक्तियों का रहा है। प्रथम प्रो0 जीन पियाजे तथा प्रो0 बूनर।

2.7.3.1 प्रो. जीन पियाजेका सिद्धांत–जीन पियाजेने इसी क्षेत्र में काम किया तथा अपने सिद्धान्त को संज्ञानात्मक विकास का सिद्धान्त कहा। प्रो. जीन पियाजे के अनुसार संज्ञानात्मक विकास असतत् अवस्थाओं में होता है तथा प्रत्येक अवस्था व्यक्ति में भिन्न प्रकार की संज्ञानात्मक संरचना दिखाती है। यह चार अवस्थायें निम्नलिखित हैं–

1. संवेदनात्मक बुद्धि विकास(Sensory motar)
2. पूर्व संकार्य अवस्था(Preoperational)
3. मूर्त संकार्य अवस्था(Concrete Operation)
4. औपचारिक संकार्य अवस्था(Formal operational)

किसी व्यक्ति में ज्ञान की वृद्धि उसकी संरचनात्मक संरचना तथा वातावरण की पारस्परिक अन्तःक्रिया से होती है। यह अन्तःक्रिया आत्मीकरण तथा स्थानीयकरण प्रविधियों से होती है।

2.7.3.2 प्रो0 जे.एस. ब्रूनर का सिद्धांत

यह मानसिक संरचनाओं एवं मानसिक क्रिया के विकास द्वारा अधिगम पर बल देते हैं। ब्रूनर का विश्वास था कि शिक्षण द्वारा मानसिक संरचनाओं का विकास किया जा सकता है। किसी ज्ञान की संरचनाएं हमें बताती है कि अमुक विषय की वस्तु और विचारों में क्या सम्बन्ध है।

ब्रूनर आगमनात्मक अधिगम (उदाहरण से विशेष) द्वारा सक्रिय रहते हुये संप्रत्ययों के बोध पर बल देते हैं। वह मानते थे कि सीखने के लिये बालक को मानसिक स्तर पर तैयार होना चाहिये अर्थात् इस प्रकार अधिगम बोलने से, सुनने से, पढ़ने से तथा चिन्तन से घटित होता है। प्रो0 ब्रूनर का कार्य सामान्यतः विकासात्मक मनोविज्ञान के अन्तर्गत

आता है परन्तु उन्होंने सामाजिक मनोविज्ञान पर भी कार्य किया है। ब्रूनर के अनुसार अधिगम ''एक सक्रिय प्रक्रिया है जो मात्र घटित नहीं होती है। उनके अनुसार जिस विधि से व्यक्ति, नवीन सूचनाओं और ज्ञान का संचालन करता और प्रयोग में लाता है उसे अधिगम कहते हैं। ''प्रो0 ब्रूनर (1961) के अनुसार शिक्षा का उद्‌देश्य ज्ञान देना नहीं होना चाहिये अपितु छात्र में चिन्तन प्रक्रिया तथा समस्या समाधान का कौशल विकसित करना होना चाहिये जो एक परिस्थिति से दूसरी परिस्थिति में आसानी से स्थानान्तरित किया जा सके। शिक्षा छात्रों में प्रतीकात्मक चिन्तन (Symbolicthinking)विकसित करे। उन्होंने अपनी किताब"Process of education"में कहा है कि छात्र को सक्रिय अधिगमकर्ता बनाया जाये जो अपने ज्ञान का खुद निर्माण कर सके। ब्रूनर ने संज्ञानात्मक विकास की तीन अवस्थायें बतायी थी–

1. अधिनियम अवस्था (Enactive, 0 – 1 वर्ष)–

यह पहली अवस्था है। यह बालक की आयु से एक वर्ष तक रहती है। इस अवस्था में बालक क्रिया आधारित सूचनाओं को मस्तिष्क में संग्रहित करता है तथा उसके द्वारा आस–पास के वातावरण को समझता है। उदाहरण बालक का खिलौने को हिलाना।

2. मूर्त अवस्था (Iconic, 1-6 Years)

इस अवस्था में बालक सूचनाओं को चित्रों (काल्पनिक शक्ति) के आधार पर संग्रहीत करता है। इसने इस बात का उत्तर दिया कि क्यों जब हम नये ज्ञान/विषय को सीखने का प्रयास करते हैं तब चित्र और उदाहरण उसमें मदद प्रदान करते हैं। इस अवस्था में बालक चमक, स्पष्टता, शोर तथा गति से प्रभावित होता है।

3. प्रतीकात्मक अवस्था (Symbolic, 7 साल और अधिक)

यह सबसे अन्तिम अवस्था है इसमें बालक सूचनाओं को चिन्हों, प्रतीकों, जैसे की भाषा के सन्दर्भ में संग्रहीत करता है। इस अवस्था में अचिन्तन क्रिया तथा बोधात्मक प्रक्रियायें संकेतनात्मक प्रणाली को स्थान देती है। गाय अपनी श्रेणी के जानवरों की प्रतीक है।

2.7.4 संरचनावाद (Constructivism)

निर्मितवाद एक ऐसा सिद्धान्त जिसकी धरातल को सशक्त बनाने में पियाजे, नेस्टवान (Ernstwn), ग्लेसर फेल्ड (Glasers Feld) आदि मनोवैज्ञानिकों का हाथ रहा है। यह सिद्धान्त मानता है कि अधिगम एक सक्रिय प्रक्रिया है तथा ज्ञान बाहर वस्तुगत वास्तविकता में विद्यमान नहीं है। बल्कि ज्ञान सीखने वाले व्यक्ति के मन में संरचित किया जाता है। अधिगमकर्ता आत्मीकरण तथा स्थानीयकरण की प्रक्रिया द्वारा नवीन ज्ञान को अपने पूर्व ज्ञान से जोड़ता है। यह सिद्धान्त प्रक्रिया पर बल देता है इसके अनुसार कैसे सीखते हैं यह महत्वपूर्ण है। इसमें छात्र अत्यन्त वैयक्तिक ढंग से ज्ञान का सक्रिय रूप से सृजन एवं पुनर्गठन करते हैं। इसमें शिक्षा के क्षेत्र को कई अर्थों में प्रभावित किया।

- इसने शिक्षा को ज्यादा मानवीय बनाया तथा छात्र केन्द्रित शिक्षा को बढ़ावा दिया।
- इसने पूर्व विचारधारा कि छात्र का मस्तिष्क खाली स्लेट होता है के विरोध में खड़ा होने का प्रयास किया क्योंकि इसकी मान्यता है कि छात्र वैयक्तिक ज्ञान का सृजन कर सकते हैं।
- इसके अनुसार छात्र की मदद शिक्षक को तब करनी चाहिये जब वह स्वयं आग्रह करे अन्यथा छात्र को उसकी पसन्द की समस्या से उलझने दीजिये।
- छात्र जब भी किसी प्रश्न का उत्तर देता है तब उस शब्द का नाम लेते ही उसके (छात्र) मन में जो तत्काल आता है वह उसका उत्तर होता है यदि शिक्षक को लगता है कि उत्तर को संशोधित करना है या छात्र का प्रत्यय (उस विषय) गलत है तो उसे, उस छात्र की चिन्तन प्रक्रिया का प्रतिमान बनाना होगा, कि उसने ऐसा क्यों सोचा? तब शिक्षक उसे परिमार्जित कर सकता है।

गैगनान एण्ड कैली (Gagnon and Collay) ने निर्मितवादी अधिगम के लिये चार मान्यतायें मानी थी।

1. ज्ञान की संरचना उस अधिगमकर्ता द्वारा होती है जो सक्रिय अधिगम में प्रतिभाग करता है।

2. ज्ञान प्रतीकात्मक तौर पर अधिगमकर्ता द्वारा उत्पन्न किया जाता है तथा प्रत्येक क्रिया के प्रतीक उनके द्वारा विशिष्ट होते हैं।
3. ज्ञान का सामाजिक भाग भी होता है। इन्हें किसी भी अर्थपूर्ण रूप से अलग से नहीं देखा जा सकता है।
4. जो छात्र प्रत्यय की ठीक प्रकार से समझ नहीं पाते परन्तु जानने का प्रयास करते हैं वह ज्ञान के सिद्धान्त का निर्माण करते हैं।

2.7.5 अधिनियमवाद / सक्रियवाद

मूलतः अधिनियमवाद संरचनावाद तथा समाहित संज्ञानवाद (Embodied Cognition) को मिश्रण है। इस सिद्धान्त का मानना है कि संज्ञान तथा वातावरण एक दूसरे से जुड़े है (जिन्हें अलग नहीं किया जा सकता) तथा अधिगम वातावरण तथा अधिगमकर्ता की अन्तःक्रिया के फलस्वरूप होता है। इस सिद्धान्त की उत्पत्ति का श्रेय मरूले पोण्टी (Merlean Ponty) तथा बेटीसन (Bakson) के कार्यों को जाता है। यह वाद मानता है कि क्रिया सिर्फ समझ का प्रदर्शन नहीं है अपितु वह समझ ही है। इसके फलस्वरूप व्यक्ति समूह तथा एकल में कैसे अधिगम करता है जानना संभव हुआ। इस वाद का मानना था कि वास्तविकता तथा मस्तिष्क एक दूसरे से जुड़े हैं अतः कक्षा में अधिगम वातावरण से कटकर नहीं हो सकता। यह मानता है कि अधिगम सूचनाओं में वृद्धि नहीं है अपितु यह एक सक्रिय खोज प्रक्रिया है जिसमें चेतना, स्व परिस्थिति तथा जटिल समूहों की अन्तःक्रिया चलती रहती है ताकि मनुष्य अपने को दुनिया के अनुकूल अनुकूलित कर सके। यह मानता है कि मनुष्य जो कल्पना, विचार, सूझ तथा अन्तदृष्टि विकसित करता है वह सब ज्ञान को पूर्ण करते हैं तथा इसी को कहते हैं कि अधिगम हुआ।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

निम्नलिखित के सामने सही या गलत लिखिए–

10. जे0 बी0 वाटसन व्यवहारवाद से सम्बन्धित है। (   )
11. टालमैन ने अन्तर्दृष्टि अधिगम के सिद्धान्त में उल्लेखनीय कार्य किया है। (   )
12. प्रो0 जीन पियाजे ने संज्ञानात्मक विकास की तीन अवस्थायें दी थी। (   )
13. प्रो0 बूनर ने संज्ञानात्मक विकास की चार अवस्थायें बतायी थी। (   )
14. बेटीसन का नाम अधिनियमवाद से जुड़ा है। (   )

2.8 गणित शिक्षण का मनोविज्ञान

अभी तक हम जान चुके हैं कि अधिगम का क्या अर्थ है। वह कैसे होता है तथा उसको कौन से कारक प्रभावित करते हैं। पर इस सबके जानने के पश्चात् मस्तिष्क में प्रश्न उठना है कि गणित का अधिगम किस प्रकार होता है? इसका उत्तर देने का प्रयास यदि किया जाये तो मस्तिष्क में कई मनोवैज्ञानिक सिद्धान्त आते हैं जिनका अध्ययन हम पहले ही कर चुके हैं।

गणित के शिक्षण को मोटे तौर पर दो मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों ने प्रभावित किया है। सर्वप्रथम व्यवहारवाद जो कि मानता है कि व्यवहार को बदलने से अधिगम प्रभावित होता है तथा किसी भी व्यक्ति के व्यवहार को उद्दीपन तथा अनुक्रिया के माध्यम से समझा जा सकता है तथा उसे अनुबन्धित भी किया जा सकता है। उद्दीपक अनुक्रिया के इस्तेमाल से खास किस्म का व्यवहार उत्पन्न किया जा सकता है। परन्तु बाद में मनोवैज्ञानिकों ने इस सिद्धान्त को नकार दिया उनका मानना था कि मनुष्य एक सक्रिय प्राणी है जो स्वयं सोचता है नाकि वह चूहे तथा बिल्ली की तरह है। गणित अमूर्त, संचयी तथा लम्बवत् संरचित विषय है। गणित सीखने के लिये एक विषयवस्तु सीखने के बाद

ही दूसरी विषयवस्तु सीख सकते हैं जो कि संरचनावादी मनोवैज्ञानिक सिद्धान्त की मान्यता से मिलता है। संरचनावाद मानता है कि ज्ञान बालक के अन्दर उत्पन्न होता है तथा बालक अपने पूर्व ज्ञान के आधार पर ही नवीन ज्ञान सीखता है। अतः हम कह सकते हैं कि व्यवहारवाद के बाद जिस वाद ने गणित शिक्षण को सर्वाधिक प्रभावित किया वह संरचनावाद था।

संरचनावाद मानता है कि मनुष्य के पास संख्याओं को समझने की आन्तरिक शक्ति होती है जो बड़ी और छोटी चीज का पूर्वानुमान लगा सकती है और मनुष्य अनुमान लगा लेता है कि यह गाय सुबह दिखाई देने वाली गाय से बड़ी है या यह बकरी सुबह वाली बकरी से छोटी है। मनुष्य के मस्तिष्क के पास गणित को समझने की तथा उसके अधिगम को अनुकूलित करने की क्षमता होती है। हम सभी छात्रों को गणित का एक मानकीकृत पाठ्यक्रम पढ़ाते हैं परन्तु सभी छात्रों की योग्यता, रूचियां, उत्प्रेरणा अलग–अलग होती है। जिसके फलस्वरूप अधिगम भी अलग–अलग होता है। एक कक्षा में छात्रों के ज्ञान तथा कौशल का स्तर इतना अलग होता है कि शिक्षक को गणित के शिक्षण के लिए प्रत्येक छात्र को व्यक्तिगत रूप से पढ़ना पड़ता है। इस संरचनावाद ने गणित शिक्षण को आज तक प्रभावित किया हुआ है।

परन्तु नवीन शोधों से पता चला है कि व्यक्ति जो भी अधिगम करता है वह किसी वातावरण में करता है। वातावरण को अधिगम से अलग नहीं किया जा सकता। गणित विषय में भी लगभग यह मान्यता मानी गयी है। गणित की समस्याओं को पहले व्यवहारिक तौर पर महसूस किया गया बाद में उनका हल निकालने के लिये विभिन्न सूत्र, सिद्धान्त खोजे गये। उदाहरण के तौर पर तरबूज का क्षेत्रफल निकालने की समस्या ने ही कैलकुलस की शाखा को जन्म दिया।

इसका तात्पर्य है कि कक्षा में गणित को पढ़ाते वक्त शिक्षक उस उपविषय की जन्म की कहानी को व्यवहारिक उदाहरणों से समझाये नाकि कक्षा में आकर सूत्र, नियम बताकर विषय का शुभारम्भ तथा समापन कर दे। ऐसा करने से बालक में उस प्रत्यय की समझ विकसित नहीं हो सकेगी। फलस्वरूप वह उनके लिये अरूचिकर तथा बोझिल हो जायेगा। शिक्षक कक्षा में गणित शिक्षण के दौरान उपयुक्त वातावरण प्रस्तुत करें, शिक्षण सामग्री का उपयोग करें तथा अपने भाव भंगिमाओं (Body Gestures) का उपयोग करें ताकि छात्रों को गणित के अधिगम में आसानी हो।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

15. गणित शिक्षण को प्रभावित करने वाले दो मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों के नाम बताइये?

....

....

16. गणित शिक्षण को प्रभावशाली बनाने के लिये शिक्षक द्वारा किये जाने वाले किन्हीं दो उपायों का वर्णन करें।

....

....

2.9 गणित शिक्षण की समस्यायें

गणित एक अमूर्त, व्यस्थित, परन्तु वास्तविक विषय है, जिसे पाठ्यक्रम में अनिवार्य विषय का दर्जा दिया गया क्योंकि मनुष्य की जिन्दगी बिना गणित के ना तो शुरू हो सकती है ना खत्म। यही सोच ने गणित को सभी विषयों

में काफी ऊँचा स्थान दिया। गणित को क्यों पढ़ाना चाहिये? इस बात का उत्तर जार्ज पोल्यो ने स्वयं ही इसके उद्देश्य बताते वक्त कहा था कि यदि शिक्षा ऐसे रोजगार योग्य वयस्कों का निर्माण करना, जो सामजिक और आर्थिक विकास में योगदान दे सके चाहती है तो शिक्षा का प्रमुख भाग गणित होगा। सरल शब्दों में कहे तो बालक की विचार प्रक्रिया का गणितीकरण करना गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य है। परन्तु शोधों से पता चलता है कि बालकों को स्कूली शिक्षा में गणित शिक्षण के दौरान परेशानियों का सामना करना पड़ता है।

एन0सी0आर0टी0ई0 ने अपने शोध गणित शिक्षण (2008) में इसके चार प्रमुख कारण बताये–

1. ज्यादातर बच्चों में गणित को लेकर डर व असफलता का भाव विद्यमान है।
2. पाठ्यचर्चा, जो छोटे से, प्रतिभाशाली वर्ग के साथ ही असहभागी बड़े वर्ग, दोनों को ही निराश करती है।
3. मूल्यांकन की अपरिष्कृत विधियाँ जो गणित को यांत्रिक गणनाओं के रूप में देखने के दृष्टिकोण को बढ़ावा देती है।
4. गणित शिक्षण में शिक्षकों की तैयारी और सहायता का अभाव।
5. कोष्ठीकरण (कपार्टमेंटलाइजेशन) अर्थात् शिक्षक तथा शोधकर्ताओं के बीच में बहुत दूरी या लगभग नगण्य मिलन। गणित में जो व्यक्ति गणित का अध्यापन करता है (शिक्षक) उसका कभी संवाद उन लोगों से नहीं होता जो व्यक्ति उस विषय को रूचिकर बनाने के लिये शोध कर रहे होते हैं जिसके कारण शोधों का कोई लाभ शिक्षकों को नहीं मिलता और वह अपनी पुरानी विधियों का उपयोग करते रहते हैं।
6. गणित विषय की पाठ्यचर्या में काफी परिवर्तन आया है पहले जो प्रकरण व्यक्ति बी0एस0सी0 में पढ़ता था वह अपने स्कूली पाठ्यक्रम में पढ़ने लगा है (उदाहरण कलन एवं अवकलन समीकरण) अतः गणित शिक्षा का आकार चौड़े और गोलीय होने के स्थान पर ज्यादा तना और तकु आकार हो गया है। अतः गणित पाठ्यचर्या का गतिमान होना भी एक समस्या है।
7. गणित को विशेष जेंडर से जोड़ देना अर्थात यह पुरूषों का क्षेत्र है ऐसी धारणाओं का होना
8. पाठ्यचर्या निर्माण में सामाजिक सरोकारों का अभाव।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

17. गणित शिक्षण के दौरान आने वाली परेशानियाँ कौन–कौन सी हैं? किन्हीं दो का उल्लेख कीजिये।

....

....

18. कोष्ठीकरण से आप क्या समझते हैं?

....

....

2.10 सारांश

मनुष्य अपनी सम्पूर्ण जिन्दगी में प्रतिदिन वातावरण के साथ कुछ न कुछ प्रतिक्रिया करता रहता है, जिसके फलस्वरूप उसको कुछ न कुछ नया सीखने को मिलता है इसी सीखने को मनोवैज्ञानिको ने अधिगम नाम से निरूपित किया है। अधिगम शिक्षण प्रक्रिया के उत्पाद के तौर पर देखा जा सकता है। गणित शिक्षण में अधिगम के

कई सिद्धान्तों का प्रयोग किया जाता है ताकि शिक्षण को प्रभावी बनाया जा सके। इसमें से अभ्यास का नियम, तत्तरता का नियम, मनोवृति का नियम तथा प्रभाव का नियम प्रमुख है। अधिगम एक निरन्तर चलने वाली मानसिक क्रिया है। अधिगम की प्रक्रिया को यदि समझने का प्रयास किया जाये तो यह पता चलेगा कि वस्तुतः इसके तीन प्रमुख तत्व है पहला शिक्षक है जो सम्पूर्ण प्रक्रिया को संचालित, मार्गदर्शन, तथा नियंत्रित करता है दूसरा छात्र जिसके लिये यह सम्पूर्ण प्रक्रिया बुनी जाती है तीसरा वातावरण जो इस प्रक्रिया का दिखाई न देने वाला परन्तु सबसे प्रभावी अंग है। यदि शिक्षक चाहता है कि अधिगम अधिक हो तो उसे उन कारकों का भी अध्ययन करना पड़ेगा जो अधिगम प्रक्रिया को प्रभावित करते है। इन्हें मौटे तौर पर चार वर्गो में बाँटा गया है–

1. शारीरिक कारक, 2. मनोवैज्ञानिक कारक, 3. पर्यावरणीय कारक4. अन्य कारक

मनोविज्ञान के कुछ सिद्धान्त हैं जिसने गणित अधिगम को प्रभावित किया है जिसमें, व्यवहारवाद, संज्ञानात्मक विकास, निर्मितवाद तथा अधिनियमवाद प्रमुख है तथा अन्त में गणित शिक्षण में आने वाली कुछ प्रमुख कठिनाइयों का वर्णन किया गया है। जिसमें छात्रों का गणित के प्रति डर तथा असफलता का भय, दोषपूर्ण पाठ्यचर्या, शिक्षकों की तैयारी का पूर्ण न होना तथा मूल्यांकन की अपरिष्कृत विधियां है।

2.11 अभ्यास के प्रश्न

1. अधिगम का अर्थ स्पष्ट कीजिए।
2. अधिगम की किसी एक परिभाषा की व्याख्या कीजिए।
3. अधिगम के किन्हीं दो सिद्धान्तों को अपने शब्दों में व्यक्त कीजिए।
4. अधिगम के लिये आवश्यक तत्व कौन–कौन से होते हैं? स्पष्ट कीजिए।
5. अधिगम के संरचनावाद तथा अधिनियमवाद के आधारों की व्याख्या कीजिए।
6. गणित शिक्षण में प्रयुक्त होने वाले किन्हीं दो मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों का वर्णन कीजिये।

2.12 चर्चा के बिन्दु

1. गणित शिक्षण के दौरान शिक्षक को कौन–कौन सी व्यवहारिक कठिनाइयाँ आती है? चर्चा कीजिए।
2. अधिगम प्रक्रिया को प्रभावित करने वाले विभिन्न कारकों पर चर्चा कीजिए।

2.13 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. अधिगम एक मानसिक प्रक्रिया है जिसमें सजीव अनुभव शामिल किये जाते हैं। यह नकारात्मक तथा सकारात्मक दोनो प्रकार का हो सकता है। ये व्यवहार परिवर्तन के के रूप में परिलक्षित होता है।
2. थार्नडाईक–''अधिगम उपयुक्त अनुक्रिया का चयन करना तथा उसे उत्तेजना से जोड़ना है''।
3. अधिगम की गई वस्तु का <u>**अभ्यास**</u> कराया जाना चाहिये अन्यथा अधिगम <u>**विस्मृत**</u>हो सकता है।
4. सम्प्रत्यय निर्माण के लिये <u>**मूर्त**</u>. अनुभव <u>**अमूर्त**</u>. अनुभवों के मुकाबले ज्यादा प्रभावशाली होते हैं।
5. शिक्षक का दायित्व है कि वह ऐसी <u>**परिस्थिति**</u> उत्पन्न करे ताकि छात्र <u>**अधिगम**</u> के लिये तत्पर हो।
6. 1. शिक्षक, 2. विद्यार्थी, 3. वातावरण
7. छह तत्व बतायें है–
   1. भौतिक वातावरण, 2. सामाजिक वातावरण 3. अनुदेशन, 4. पाठ्य वस्तु,
   5. मूल्यांकन 6. व्यवहार परिवर्तन
8. 1. मानसिक स्वास्थ्य, 2. परिपक्वता
9. शिक्षक अपनी योग्यता, अनुभव, वाक्शैली, मनोविज्ञान के ज्ञान का प्रयोग करके कठिन से कठिन सामग्री को भी सरल बना देता है। अतः शिक्षक अधिगम की प्रक्रिया पर महत्वपूर्ण प्रभाव डालता है।
10. जे0बी0 वाटसन व्यवहारवाद से सम्बन्धित है। **सही**

11. टालमैन ने अन्तर्दृष्टि अधिगम के सिद्धान्त में उल्लेखनीय कार्य किया। **गलत**

12. प्रो0 जीन पियाजे ने संज्ञानात्मक विकास की तीन अवस्थायें दी। **गलत**

13. प्रो0 बूनर ने संज्ञानात्मक विकास की चार अवस्थायें बतायी थी। **गलत**

14. बेटीसन का नाम अधिनियमवाद से जुड़ा है। **सही**

15. 1. व्यवहारवाद 2. संरचनावाद

16. (i) कक्षा में गणित को पढ़ाते वक्त शिक्षक उस उपविषय की जन्म की कहानी को व्यवहारिक उदाहरणों से समझाये नाकि कक्षा में आकर सूत्र, नियम बताकर विषय का शुभारम्भ तथा समापन कर दे।

(ii) शिक्षक कक्षा में गणित शिक्षण के दौरान उपयुक्त वातावरण प्रस्तुत करें, शिक्षण सामग्री का उपयोग करें तथा अपने भाव भंगिमाओं (Body Gestures) का उपयोग करें ताकि छात्रों को गणित के अधिगम में आसानी हो।

17. (i) ज्यादातर बच्चों में गणित को लेकर डर व असफलता का भाव विद्यमान है।

(ii) मूल्यांकन की अपरिष्कृत विधियाँ जो गणित को यांत्रिक गणनाओं के रूप में देखने के दृष्टिकोण को बढ़ावा देती है।

18. कोष्ठीकरण (कपार्टमेंटलाइजेशन) का अर्थ है शिक्षक तथा शोधकर्ताओं के बीच में बहुत दूरी या लगभग नगण्य मिलन।

2.14 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. कुलश्रेष्ठ, अरूण कुमार (2013) : गणित शिक्षण मेरठ, आर लाल बुक डिपो।
2. थामस, शा़जी एण्ड सेनानी, अशोक (2009) : गणित शिक्षण, आगरा, अग्रवाल पब्लिकेशन्स।
3. नेगी, जे0 एस0 (2006) : गणित शिक्षण, आगरा, विनोद पुस्तक मन्दिर।
4. एन0सी0आर0टी0ई0 (2006) : नेशनल फोकस ग्रुप ऑन टीजिंग ऑफ मैथेमेटिक्स, नई दिल्ली।
5. बाजपेयी, पी0 के0 (2009) गणित शिक्षण, इलाहाबाद, आलोक प्रकाशन।
6. भारत सरकार (1986) : नेशनल पॉलिसी ऑन एजूकेशन, नई दिल्ली, मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार।
7. भारत सरकार (2005) : राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005, एन0सी0आर0टी0ई0 नई दिल्ली।
8. यादव, एस0 के0 (2011) : नेशनल स्टडी ऑन टेन इयर स्कूल करीक्यूलम इम्पीलीमेन्टशन, नई दिल्ली, एन0सी0आर0टी0ई0।
9. रावत, एम0 एस0 एण्ड अग्रवाल, एम0बी0 लाल (2012) : गणित शिक्षण, आगरा, अग्रवाल पब्लिकेशन्स।

इकाई–3 : पाठ्यचर्या सुधार, गणित शिक्षण के लक्ष्य एवं उद्देश्य

इकाई की संरचना

3.1 प्रस्तावना

3.2 इकाई के उद्देश्य

3.3 पाठ्यक्रम का अर्थ

3.3.1 पाठ्यक्रम की परिभाषाएँ

3.4 पाठ्य विवरण या पाठ्यचर्या

3.4.1 पाठ्यचर्या तथा पाठ्यक्रम में अन्तर

3.5 पाठ्यक्रम विकास का अर्थ

3.5.1 गणित के पाठ्यक्रम विकास का इतिहास

3.5.1.1 ए करीक्यूलम फॉर टेन इयर स्कूल–अ फ्रेम वर्क

3.5.1.2. नेशनल करीक्यूलम फॉर प्राइमरी एण्ड सेकेण्डरी एजूकेशन–ए फ्रेमवर्क (1988)

3.5.1.3 राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005

3.6 उद्देश्य का अर्थ

3.6.1 उद्देश्य का महत्व

3.6.2 गणित शिक्षण के उद्देश्य

3.6.2.1 बौद्धिकउद्देश्य

3.6.2.2 सामाजिक उद्देश्य

3.6.2.3 अनुशासन सम्बन्धी उद्देश्य

3.6.2.4 नैतिक उद्देश्य

3.6.2.5 प्रयोगात्मक तथा जीविकोपार्जन सम्बन्धीउद्देश्य

3.6.2.6 अवकाश के समय का सदुपयोग

3.6.2.7 कलात्मक उद्देश्य

3.6.3 प्राप्य उद्देश्य

3.6.4 उद्देश्य तथा प्राप्य उद्देश्य में अन्तर

3.6.5 शैक्षिक उद्देश्यों का वर्गीकरण

3.7 सारांश

3.8 अभ्यास के प्रश्न

3.9 चर्चा के बिन्दु

3.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

3.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

3.1 प्रस्तावना

शिक्षण कार्य उद्देश्य रहित नहीं हो सकता क्योंकि शिक्षण का ध्येय ही पूर्व निर्धारित लक्ष्यों की प्राप्ति है। शिक्षण कार्य के दो प्रमुख बिन्दु अध्यापक तथा छात्र है। अब प्रश्न यह उठता है कि अध्यापक क्या पढ़ाये? कितना पढ़ाये? इन प्रश्नों का उत्तर ढूंढने के लिये जिस साधन की आश्यकता प्रतीत होती है उसे पाठ्यक्रम कहते हैं। यह लैटिन भाषा के शब्द क्यूरे (Currere) से उत्पन्न हुआ है। जब अध्यापक कक्षा में अध्यापन की दृष्टि से विषय वस्तु को व्यवस्थित करके शिक्षण कार्य करता है तो उसे पाठ्यचर्या कहते हैं। पाठ्यक्रम तथा पाठ्यचर्या में अन्तर है। पाठ्यक्रम एक व्यापक शब्द है जिसमें पाठ्य विवरण तथा विद्यालय वातावरण से सम्बन्धित प्रभावी एवं उपयोगी अनुभवों का समावेश होता है जबकि पाठ्य विवरण अध्यापक का कक्षा में शिक्षण की दृष्टि से विषय वस्तु का व्यवस्थित करना है। वर्तमान का युग ज्ञान का युग है। ज्ञान के विस्फोट ने पूरे विश्व को प्रभावित किया है ऐसे वक्त में पाठ्यक्रम का विकास न हो ऐसा सोचना भी मूर्खता होगी। प्रस्तुत इकाई प्रथम खण्ड की द्वितीय इकाई है। इसके अन्तर्गत पाठ्यक्रम काअर्थ, पाठ्यक्रम की विभिन्न परिभाषाओं, पाठ्यक्रमों तथा पाठ्यक्रम में अन्तर पाठ्यक्रम विकास का अर्थ, उसका इतिहास गणित शिक्षण के उद्देश्य तथा प्राप्य उद्देश्य के बारे में चर्चा की गई है।

3.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. पाठ्यक्रम का अर्थ स्पष्ट कर सकेंगे।
2. पाठ्यक्रग की विभिन्न परिभाषाएं बता सकेंगे।
3. पाठ्यक्रम तथा पाठ्यचर्या में अन्तर स्पष्ट कर सकेंगे !
4. पाठ्यक्रम के विकास का इतिहास बता सकेंगे।
5. गणित शिक्षण के उद्देश्य बता सकेंगे।
6. गणित शिक्षण के प्राप्य उद्देश्य बता सकेंगे।

3.3 पाठ्यक्रम का अर्थ

शिक्षण कार्य उद्देश्य रहित नहीं हो सकता क्योंकि शिक्षण का ध्येय ही पूर्व निर्धारित लक्ष्यों की प्राप्ति है। शिक्षण कार्य के दो प्रमुख बिन्दु अध्यापक तथा छात्र है।

अब प्रश्न यह उठता है कि अध्यापक क्या पढ़ाये? कितना पढ़ाये? ऐसे प्रश्नों के उत्तर ढूंढने के लिये हमें जिस साधन की आवश्यकता प्रतीत होती है उसे पाठ्यक्रम कहते हैं। पाठ्यक्रम (Curriculum) शब्द की उत्पत्ति लैटिन भाषा के शब्द Currere (क्यूररे) से हुई है। जिसका अर्थ है 'दौड़ का मैदान' (Race Course), अर्थात छात्र पाठ्यक्रम की सहायता से अपने गंदव्य पहुंचता है। हार्न ने इसी बात की ओर स्पष्ट करते हुये शिक्षण प्रक्रिया के चार प्रमुख अंगो में शिक्षक, पाठ्यक्रम, वातावरण तथा छात्र आदि को बताया है।

पाठ्यक्रम के व्यापक अर्थ को समझने के लिये हमें कुछ परिभाषाओं पर गौर करना होगा। आइये हम इसे समझने का प्रयास करें।

3.3.1 पाठ्यक्रम की परिभाषाएँ–

1. कनिंघम (Cunnigham) के अनुसार–

''पाठ्यक्रम कलाकार (शिक्षक) के हाथ में वह साधन है, जिससे वह अपनी चित्रशाला (विद्यालय) में अपनी सामग्री (छात्र) को अपने आदर्शो (उद्देश्यों) के अनुसार ढालता है।''

2. मुनरो के अनुसार–

''पाठ्यक्रम में वे समस्त अनुभव निहित है जिनको विद्यालय द्वारा शिक्षा के उद्देश्य की प्राप्ति के लिये उपयोग में लाया जाता है।''

3. ब्रूवेकर के अनुसार–

''पाठ्यक्रम के अन्तर्गत विद्यालय के नियंत्रण में सीखने वाले के समस्त अनुमत आते हैं। यह पाठ्यवस्तु, पाठ्यपुस्तक यहाँ तक कि अध्ययन विषय से अधिक है। पाठ्यक्रम सम्पूर्ण स्थिति तथा स्थितियों का समूह है जो शिक्षक तथा विद्यालय प्रशासक को प्राप्त होता है। इसके द्वारा विद्यालय के दरवाजे से गुजरने वाले बालकों एवं युवकों के आचरण में परिवर्तत किया जाता है।''

मुदालियर कमीशन (1952–53) के अनुसार –

''पाठ्यक्रम का अर्थ केवल उन सैद्धान्तिक विषयों से ही नहीं है जो विद्यालय में परम्परागत ढंग से पढ़ाये जाते हैं, बल्कि इसमें बच्चों के वे सभी अनुभव निहित होते हैं जिन्हें वे विद्यालय, कक्षा–कक्ष, प्रयोगशाला, पुस्तकालय, कार्यशाला तथा खेल के मैदानमें प्राप्त करते हैं। पाठ्यक्रम में वे सभी अनुभव भी सम्मिलित है जो बच्चों को अध्यापकों तथा अपने साथियों के औपचारिक एवं पारस्परिक सम्बन्धों से प्राप्त होते हैं। इस प्रकार विद्यालय का सम्पूर्ण जीवन ही पाठ्यक्रम बन जाता है जिससे बच्चों के व्यक्तित्य के सभी पक्ष प्रभावित हो सकते हैं तथा वह उनके सम्पूर्ण व्यक्तित्व के रान्तुलित विकास में सहायक होता है।''

उपर्युक्त परिभाषाओं का अवलोकन करने से रपष्ट है कि पाठ्यक्रम एक ऐसा साधन है जो शिक्षकों तथा छात्रों दोनों का मार्गदर्शन करता है तथा इसका क्षेत्र बहुत विस्तृत है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

1. पाठ्यक्रम शब्द की उत्पत्ति ....भाषा से हुयी है।
2. पाठ्यक्रम ....तथा... दोनों का मार्गदर्शन करता है।

3.4 पाठ्य–विवरण या पाठ्यचर्या

जब अध्यापक कक्षा में अध्यापन की दृष्टि से विषय वस्तु को व्यवस्थित करके शिक्षण कार्य करता है तो उसे पाठ्यचर्या या पाठ्य विवरण कहते हैं। इसमें सम्पूर्ण वर्ष में विद्यालय में बालक को दिये जाने वाले ज्ञान तथा अनुभवों का उल्लेख किया जाता है। पाठ्य–विवरण शिक्षण के उद्देश्यों की प्राप्ति में सहायता प्रदान करते हैं तथा इनकी उपयोगिता इस बात पर निर्भर करती है कि उसमें सम्मिलित प्रत्यय, प्रकरण तथा ज्ञान शिक्षण के उद्देश्यों की प्राप्ति में कहाँ तक सहायक है।

कार्टर गुड ने पाठ्य–विवरणों को बहुत ही स्पष्ट शब्दों में परिभाषित किया है। विषय का क्रम जो किसी अध्ययन क्षेत्र में उपाधि ग्रहण करने के लिये आयोजित किया जाता है, विषय विवरण या पाठ्य विवरण कहलाता है।

3.4.1 पाठ्यचर्या तथापाठ्यक्रम में अन्तर

पाठ्यक्रम एक व्यापक शब्द हे जिसमें पाठ्य विवरण तथा विद्यालय वातावरण से सम्बन्धित प्रभावी एवं उपयोगी अनुभवों का समावेश होता है जबकि पाठ्य विवरण अध्यापक का कक्षा में शिक्षण की दृष्टि से विषय वस्तु का व्यवस्थित करना है।

आइये दोनों में अन्तर को हम एक सारिणी के माध्यम से समझने का प्रयासकरेंगे।

क्र.	पाठ्यक्रम	पाठ्यचर्या
1	यह दार्शनिक पहलू है।	यह मनोवैज्ञानिक पहलू है।
2	इसका क्षेत्र व्यापक होता है।	यह पाठ्यक्रम का एक अंग होती है।
3	यह सम्पूर्ण विद्यालयी जीवन तथा व्यक्तित्व के प्रत्येक पहलू को प्रभावित करती है।	यह विषयविशेष के ज्ञान को ही प्रभावित करती है।
4	यह साध्य है।	यह पाठ्यक्रम को प्राप्त करने के लिये साधन है।
5	इसमें वातावरण की महत्ता होती है।	इसमें विषय वस्तु के निर्धारण की महत्ता होती है।
6	इसके समस्त प्रभाव मापनीय नहीं होते। इसका क्षेत्र विद्यालय के बाहर का भी होता है।	इसके प्रभाव मापनीय होते हैं। इसमें आपैचारिक रूप से कक्षा–कक्ष शिक्षण ही समाहित होता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

3. पाठ्यक्रम तथा पाठ्यचर्या में दो अन्तर बताइये?

....

....

4. पाठ्यचर्या का अर्थ संक्षेप में बतायें?

....

....

3.5 पाठ्यक्रम विकास का अर्थ

जैसा कि हम जानते है कि अतीत में ज्ञान की प्रगति और विकास की गति बहुत धीमी थी। अतः विद्यार्थियों के लिये निर्धारित किया गया कोर्स कई वर्षों तक परिवर्तित नहीं होता था पर आज विज्ञान तथा प्रौद्योगिकी का युग है। आज ज्ञान के विस्फोट ने पूरे विश्व को प्रभावित किया है। नित्–नवीन व्यवसायों का प्रार्दुभाव हो रहा है। ऐसे वक्त में पाठ्यक्रम का विकास न हो, ऐसा सोचना भी मूर्खता होगी। विकास एक निरन्तर, चलने वाली प्रक्रिया है। यह अधिगम अनुभवों के संरचित समुच्चय का उत्पादन है,परिवर्तन की प्रक्रिया में पुरानी सामग्री में संशोधन भी हो सकता है या पूर्णरूपेण नवीन निर्माण भी इसकी परिणती शिक्षार्थी संसाधन सामग्री, शिक्षक तथा अध्ययन गार्गदर्शिकाए,

अधिगम अनुभवों के कार्यक्रम, उद्देश्यों और मूल्याकन की तकनीको में बदलाव के तौर पर महसूस की जा सकती है।

3.5.1 गणित के पाठ्यक्रम विकास का इतिहास

गणित शिक्षा क्योंकि सम्पूर्ण शिक्षा का एक भाग है अतः गणित शिक्षा के पाठ्यक्रम के विकास को समझने के लिये भारतीय शिक्षा (स्कूली) के सम्रग पाठ्यक्रम की ऐतिहासिक पृष्ठभूमि को समझना होगा।

सबसे पहले भारत की किसी व्यक्ति द्वारा शिक्षा के क्षेत्र में दिये गये विचारों में सबसे पुष्ट विचार गाँधी जी के है जिन्हें हम बुनियादी शिक्षा या वर्धा शिक्षा के नाम से जानते है। बाद में इसी विचार को नई तालीम के रूप में जाकिर हुसैन जी ने प्रस्तुत किया जो कि कार्य केन्द्रित शिक्षा से व्यक्ति के जीवन को तैयार करने के लक्ष्य को ध्यान में रखकर बनाया गया था। इस प्रथम भारतीय शिक्षा के प्रतिमान की विशेषताए निम्नलिखित थी–

- बालक का सम्पूर्ण विकास
- सर्वधर्म समभाव का दृष्टिकोण विकसित करना
- राष्ट्र निर्माण के लिये तत्तपर रहना
- कार्य और ज्ञान में समाकलन और सहसम्बन्ध
- शिक्षा को आत्मनिर्भर बनाने का प्रयास करना
- शिक्षा का माध्यम मातृभाषा हो।

यह प्रथम प्रयास था जिसमें शिक्षा को सर्वसाधारण को उपलब्ध कराने की बात की गई तथा इसका संम्पूर्ण लक्ष्य चरित्र निर्माण रखा गया था। स्वतंत्रता के उपरान्त माध्यमिक शिक्षा आयोग (1952–53) तथा शिक्षा आयोग (1964–66) ने भी ग्यारह वर्षीय स्कूली शिक्षा में एक वर्षीत्र बहुउद्देश्यीय विद्यालयों का विचार तथा 10 + 2 + 3 शिक्षा पद्धति को लागू करने का विचार दिया जिसे भारतीय संसद ने संकल्प के द्वारा अपनी स्वीकृति राष्ट्रीय शिक्षानीति (1968) के रूप में दी।

3.5.1.1. करीक्यूलम फॉर टेन इयर स्कूल– अ फ्रेमवर्क **(The Curriculaum for the ten year School & A frame work -1975)**

भारतवर्ष में राष्ट्रीय स्तर पर स्कूल शिक्षा का पाठ्यक्रम बनाने का सर्वप्रथम प्रयास शिक्षा मंत्रालय तथा सामाजिक कल्याण मंत्रालय ने 1973 में किया इसके लिये एक कमेटी का गठन 1974 में किया, एन०सी०ई०आर०टी० ने इस कार्य को प्रभावी रूप में सम्पन्न कराया तथा 1975 में पूर्ण किया गया इसके अनुसार पाठ्यक्रम का स्वरूप इस प्रकार बना।

प्राथमिक शिक्षा (कक्षा 1 से 5)

कक्षा	स्कूल कार्य के क्षेत्र	समय
1–2	प्रथम भाषा गणित पर्यावरण अध्ययन (सामाजिक विज्ञान तथा सामान्य विज्ञान) कार्यनुभव और कला स्वास्थ्य शिक्षा और खेल	25% 10% 15% 25% 25%
		100%
3–5	स्कूल कार्य के क्षेत्र	समय
	प्रथम भाषा गणित	25% 15%

	पर्यावरण अध्ययन–1 (सामाजिक अध्ययन) पर्यावरण अध्ययन–2 (सामान्य विज्ञान) कार्यनुभव और कला स्वास्थ्य शिक्षा और खेल	10% 10% 20% 20%
	योग	100%

उच्च प्राथमिक अवस्था (कक्षा 6 से 10)

इसके पाठ्यक्रम का स्वरूप निर्धारित करते समय यह अवधारण रखी गई एक सप्ताह में 6 दिन कक्षा चलेगी तथा 48 कालाश प्रति सप्ताह चलेंगे जो 30–40 मिनट अवधि के होगें।

6–8		कलांश
	प्रथम भाषा द्वितीय भाषा गणित विज्ञान (जीव तथा भौतिक) सामाजिक विज्ञान (इतिहास, भूगोल, नागरिकशास्त्र) कला कार्यनुभव शारीरिक शिक्षा और खेल	8 5 7 7 6 4 5 6
	योग	48

माध्यमिक स्तर (कक्षा 9 से 10)

9–10		कलांश
	प्रथम भाषा द्वितीय भाषा तृतीय भाषा गणित विज्ञान (जीव तथा भौतिक) सामाजिक विज्ञान (इतिहास, भूगोल, नागरिकशास्त्र) कला कार्यानुभव शारीरिक शिक्षा, स्वास्थ्य शिक्षा और खेल	6 5 2 7 7 7 3 5 6
	योग	48

3.5.1.2 नेशनल करीक्यूलग फॉर प्राइमरी एण्ड सेकेण्डरी एजूकेशन–ए फ्रेमवर्क (1988)

(National Curriculum For Elementary and Secondary Education-A Frame Work 1988)

दूसरा राष्ट्रीय स्तर पर पाठ्यक्रम निर्माण का प्रयास राष्ट्रीय शिक्षा नीति (1986) के सुझावों के फलस्वरूप शुरू हुआ। यह प्रयास प्राथमिक तथा माध्यमिक शिक्षा दोनों पर किया गया।

इसमें प्रत्येक स्तर की शिक्षा के लिये न्यूतम अधिगम का स्तर तय किया गया। इस स्वरूप में सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन, प्रौद्योगिकी तथा संचार के साधनों का उपयोग, तथा शिक्षक शिक्षा पर बल दिया गया। विभिन्न स्तरों पर पाठ्यक्रम का स्वरूप निम्नलिखित निधारित किया गया।

प्राथमिक शिक्षा (8 वर्ष)

प्राथमिक अवस्था कक्षा (1–5)

क्र.सं.	क्षेत्र	समय
1	एक भाषा–मातृभाषा/क्षेत्रीय भाषा	30%
2	गणित	15%
3	पर्यावरण अध्ययन 1 और 2	15%
4	कार्यानुभव	20%
5	कला	10%
6	शारीरिक औरस्वास्थ्य शिक्षा	10%
	योग	100%

उच्च प्राथमिक (3 वर्ष)

क्र.सं.	क्षेत्र	समय
1	तीन भाषाएँ	32%
2	गणित	12%
3	विज्ञान	12%
4	सामाजिक विज्ञान	12%
5	कार्यानुभव	12%
6	कला	10%
7	शारीरिक और स्वास्थ्य शिक्षा	10%
	योग	100%

माध्यमिक स्तर (2 वर्ष)

क्र.सं.	क्षेत्र	समय
1	तीन भाषाएँ	30%
2	गणित	13%
3	विज्ञान	13%
4	सामाजिक विज्ञान	13%
5	कार्यानुभव	13%

6 7	कला शारीरिक और स्वास्थ्य शिक्षा	09% 09%
	योग	100%

इसमें भाषा का माध्यम मातृभाषा माना गया था तथा अनुदेशन की अवधि 220 दिन प्रति वर्ष मानी गई थी।

3.5.1.3 राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005(National Curriculum Fraine Work- 2005)

वर्तमान समय में शैक्षिक उद्देश्यों और शैक्षिक गुणवत्ता में विकृति आ गई है इसका प्रमाण है कि शिक्षा बालकों के लिये एक बोझ बन गई है। इसी विकृति को दुरुस्त करने के लिये पाठ्यचर्या के इस दस्तोवज ने पाठ्यचर्या निर्माण के पाँच निर्देशक सिद्धान्तों का प्रस्ताव रखा।

1. ज्ञान को स्कूल के बाहर के जीवन से जोड़ना।
2. यह सुनिश्चित करना पढ़ाई रटट प्रणाली से मुक्त हो।
3. पाठ्यचर्या को इस तरह से संवर्धन कि वह बच्चों को बहुमुखी विकास के अवसर मुहैया करवाएँ।
4. परीक्षा को अपेक्षाकृत लचीला बनाना।
5. एक ऐसी अधिभावी पहचान का विकास जिसमें प्रजातांत्रिक राज्य–व्यवस्था के अन्र्तगत राष्ट्रीय चिताएं समाहित हो।

इसके अनुसार गणित की शिक्षा का मुख्य उद्देश्य बच्चे की गणितीकरण क्षमताओं का विकास करना है। पूर्व प्राथमिक स्तर पर सारा अधिगम, खेल के जरिये होता है, अतः गिनती को क्रम में रटने की बजाय बच्चों को यह सीखनेऔर समझने की जरूरत है कि छोटे समुच्चयों के संदर्भ में नाम के खेल और संख्या में और गिनती में क्या जुडाव है।

प्राथमिक स्तर पर बच्चों में गणित के लिये सकारात्मक रूझान और रूचि विकसित करना, गणितीय खेल, पहेलियों, और कहानियों सकारात्मक रूझाव पैदा करने त्यौर गणित को रोजमर्रा की जिन्दगी से सम्बन्ध जोड़ने में मददगार हो सकती है।

उच्च प्राथमिक स्तर पर विद्यार्थी बीजगणितीय सकेंतों से परिचित होते है और स्थान और आकारों की समस्याये हल करने और सामान्यीकरण में उनका उपयोग करना सीखते है। इस स्तर पर अधिगम विद्यार्थी को द्विआयामी व त्रिआयामी समझ तथा कल्पना कौशलों को समृद्ध बनाने का भी अवसर प्रदान करता है।

माध्यमिक स्तर पर विद्यार्थी सीखी हुई कई अवधारणाओं और कौशल को समस्या सुलझाने की योग्यता में संजोते हैं। उच्चतर माध्यमिक स्तर पर गणित की पाठ्यचर्या काउद्देश्य विद्यार्थियों में गणित के उपयोग के विस्तृत फलक की पहचान और उन बुनियादी औजारों की समझ विकसित करना है जो उस उपयोग को सम्भव बनाते हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

5. बुनियादी शिक्षा प्रतिमान की दो विशेषताएँ बतायें?

....

....

6. राष्ट्रीय स्तर पर गणित पाठ्यक्रम बनाने का विचार एन०सी०ई०आर०टी० के द्वारा कियागया उसे किस नाम से

जाना जाता है?

....

....

7. राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा के किन्हीं दो पाठ्यचर्या निर्माण के निर्देशक सिद्धान्तों कोबताइये?

....

....

3.6 उद्देश्य का अर्थ

उद्देश्य शब्द की उत्पत्ति उत–दिश शब्दों के योग से हुई है। उत का अर्थ है 'उपर की ओर' तथा दिश का अर्थ है 'दिशा दिखाना। इस प्रकार उद्देश्य का शब्दिक अर्थ हुआ उपर की ओर दिशा दिखाना। यहाँ पर यह स्पष्ट करना आवश्यक है कि उपर से तात्पर्य भविष्य से है अर्थात है हम कह सकते हैं कि उद्देश्य का अर्थ है भविष्य के लिये दिशा दिखाना।

इसके अर्थ को और अधिक स्पष्ट करने के लिये हम निम्नलिखित परिभाषाओं पर गौर करेंगे।

जॉन डयूीव : ''उद्देश्य पूर्वनियोजित लक्ष्य है, जो किसी क्रिया को संचालित करता है अथवा क्रिया करने के लिये प्रेरित करता है।''

रिवलिन के अनुसार : ''शिक्षा एक अर्थपूर्ण एवं नैतिक प्रक्रिया है। अतः यह कल्पना ही नही की जा सकती कि यह उद्देश्य विहीन है।''

माध्यमिक शिक्षा आयोग के अनुसार : ''शिक्षा का उद्देश्य तकनीकी प्रशिक्षण के लिये विस्तृत सुविधा प्रदान करना होता है।''

कार्टर वी० वुड के अनुसार : ''उद्देश्य निर्धारित साक्ष्य होता है जो कार्य या क्रियाका मार्गदर्शन करता है।''

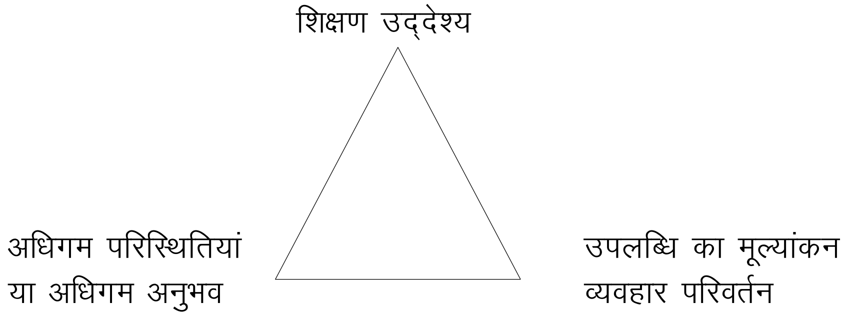
उपर्युक्त परिभाषाओं का अध्ययन करने के बाद हम कह सकते हैं कि–

1. उद्देश्य पूर्व नियोजित लक्ष्य है जो किसी क्रिया को संचालित करते हैं।
2. शिक्षा एक सोद्देश्य प्रक्रिया है जो बिना उद्देश्यों के संचालित नहीं की जा सकती।
3. उद्देश्य भविष्य केन्द्रित होते हैं।

3.6.1. उद्देश्य का महत्व

विद्यालय पाठ्यक्रम में प्रत्येक विषय का अपना एक अलग स्थान तथा महत्व होता है अतः किसी विषय के अध्ययन से पूर्व यह निर्णय किया जाना आवश्यक होता है कि उस विषय का उद्देश्य क्या है? जब तक हमारे मस्तिष्क में किसी क्रिया को सम्पादित करने का उद्देश्य स्पष्ट नहीं होगा तब तक उस क्रिया को सकुशल सम्पन्न नहीं करा सकते। जैसा कि हम जानते है कि शिक्षा एक उद्देश्य पूर्ण प्रक्रिया है, जिसके उद्देश्यों का निर्धारिण समाज द्वारा निर्धारित मान्यताएं एवं मूल्यों के आधार पर किया जाता है। जैसे–जैसे समाज में बदलाव आता है, शिक्षा के उद्देश्य भी बदलते रहते हैं।

शिक्षण उद्देश्य की प्रक्रिया को डा० बी०एस० ब्लूम ने त्रिभुजीय प्रक्रिया के तौर पर समझाया है। जिसको निम्न चित्र द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।



उपर्युक्त चित्र से स्पष्ट है कि शिक्षण प्रक्रिया के तीन ध्रुव है– 1. शिक्षण उद्देश्य 2. अधिगम अनुभव 3. व्यवहार परिवर्तन तथा तीनों ध्रुव आपस में सह सम्बन्धित तथा आश्रित है। अतः कह सकते हैं कि उद्देश्य ही सम्पूर्ण प्रक्रिया का केन्द्र बिन्दु है। इसकी आवश्यकता तथा महत्व को निम्नलिखित बिन्दुओं से और स्पष्ट किया जा सकता है।

- शिक्षण उद्देश्यों के अभाव में शिक्षण प्रक्रिया का संचालन करना कठिन कार्य है।
- उद्देश्यों के ज्ञान के आधार पर ही व्यक्ति तथा समाज का विकास उचित दिशा में होता है।
- उद्देश्यों के आधार पर ही पाठ्यक्रम शिक्षण विधि और परीक्षा प्रणाली का निर्धारण किया जाता है।
- उद्देश्य शिक्षक को मार्गदर्शन देते है तथा उसे स्पष्ट करते है कि उसे क्या पढ़ाना है? तथा कैसे पढ़ाना है?
- उद्देश्यों के आधार पर ही शिक्षण प्रक्रिया का संगठन तथा संचालन प्रभावी रूप से किया जा सकता है।
- उद्देश्य शिक्षक और छात्र दोनों को दिशाहीनता से बचाते है जिसके फलस्वरूप दोनों में धैर्य, उत्साह तथा आत्मविश्वास जागृत होता है।
- यह कार्य करने की सकारात्मक प्रवृत्ति को बढ़ावा देते हैं।
- इनका ज्ञान होने से श्रम, समय तथा धन तीनों की बचत होती है।

3.6.2 गणित शिक्षण के उद्देश्य

प्राचीन काल में गणित शिक्षण का उद्देश्य केवल मानसिक शक्तियों का विकास एवं गानसिक प्रशिक्षण था परन्तु आज का समय विज्ञान का युग है। सारी प्रगति आज विज्ञान के कारण सम्भव हुई है और विज्ञान का आधार है गणित, बिना गणित के विज्ञान के आस्तित्व की कल्पना करना भी मुश्किल प्रतीत होता है। इसी बात को आधार मानते हुए पहले शिक्षा आयोग तथा बाद में राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 ने गणित के महत्व को स्वीकार किया तथा इसको अनिवार्य विषय के तौर पर स्थापित किया। वर्तमान में सामाजिक ढाँधा का आधार गणित ही है। अतः गणित का अध्ययन अतिआवश्यक हो जाता है। गणित शिक्षण के निम्नलिखित उद्देश्य है–

3.6.2.1. बौद्धिक उद्देश्य

शल्ट्ज का कथन कि गणित की शिक्षा प्राथमिक रूप से मानसिक शक्तियों को प्रशिक्षित करने के लिये दी जाती हैः इसका आधार बनाता है। गणित के अध्ययन से बालकों में तर्कशक्ति, स्मरण शक्ति, निरीक्षण शक्ति, एकाग्रता तथा विचार शक्ति का विकास होता है। इसका अध्ययन बालकों के मस्तिष्क को क्रियाशील बनाता है या दूसरेशब्दों में कह सकते है कि गणित बालकों की बौद्धिक क्षमता को विकसित करता है। गणित के अध्ययन से बालक किसी भी समस्या का हल ज्ञात करने करने की विधि सीख लेते है उनमें रचनात्मक तथा सृजनात्मक प्रक्रिया उत्पन्न हो जाती है।

प्लेटो ने गणित के बौद्धिक मूल्य को स्पष्ट करते हुये कहा है कि गणित एक ऐसा विषय है जो मानसिक शक्तियों को प्रशिक्षित करने का अवसर प्रदान करता है। एक सुषुप्त आत्मा में चेतना एंव नवीन जागृति उत्पन्न करने का कौशल गणित ही प्रदान करता है।

3.6.2.2 सामाजिक उद्देश्य

नेपोलियन का कथन कि :गणित की उन्नति तथा वृद्धि देश की सम्पन्नता से सम्बन्धित है। इस उद्देश्य की आधारशिला का कार्य करता है। जैसा कि हम जानते है कि मनुष्य एक सामाजिक प्राणो है और समाज में रहना उसकी आवश्यकता भी है और उद्देश्य भी। मनुष्य को समाज में रहते हुये अपने दैनिक कार्यों से लेकर व्यापारिक कार्यों तक सभी कार्यों में गणित के ज्ञान की आवश्यकता पड़ती है।

इन कार्यों को सम्पन्न करने से हमारे सामाजिक उद्देश्यों की पूर्ति होती है। समाज में नित–नवीन होने वाले बदलाव, सामाजिक कठिनाइयों के अध्ययन में गणित की भूमिका महत्वपूर्ण है। अतः कह सकते है कि सामाजिक उद्देश्यों की पूर्ति में गणित का महत्वपूर्ण योगदान है।

3.6.2.3 अनुशासनात्मक उद्देश्य

इस सम्बन्ध में लॉक की उक्तिः कि गणित एक ऐसा मार्ग है, जिससे मन में तर्क की आदत स्थायी होती है। उचित प्रतीत होती है। गणित के प्रयोग से छात्र किसी घटना को व्यवस्थित करना, अन्वेषण करना विशलेषण करना, संश्लेषण करना सीख जाता है। वह भावनाओं में बहकर कोई कार्य नहीं करता बल्कि उसके कार्य करने के पीछे एक ठोस वजह होती है। गणित के ज्ञान से बालकों में परिश्रम करने की आदत विकसित होती है। उनके व्यक्तित्व में गम्भीरता, विवेक तथा चिन्तनशीलता जैसे गुण बढ़ जाते हैं। अतः हम कह सकते है कि गणित ही ऐसा विषय जो हमे अनुशासन सिखाता है।

3.6.2.4 नैतिक उद्देश्य

गणित के नियमित अध्ययन से छात्रों में नैतिकता एवं चारित्रिक विकास होता है। एक चरित्रवान व्यक्ति में ईमानदारी, सच्चाई समय की पाबन्दी, न्यायप्रियता, कर्तव्यनिष्ठा, आत्मनिर्भरता, आत्मनियंत्रण, धैर्य दूसरों को सुनना तथा सम्मान देना तथा अच्छा बुरा सोचने की शक्ति आदि गुण होते हैं। गणित के अध्ययन से यह सारे गुण छात्रों में स्वयं आ जाते हैं। जिसके फलस्वरूप छात्रों का नैतिक विकास होता है। इसी बात को और स्पष्ट करते हुये प्रसिद्ध दार्शनिक डटन ने कहा था कि गणित तर्कसम्मत विचार, यथार्थ कथन, तथा सत्य बोलने की सामर्थ्य प्रदान करता है। व्यर्थ गप्पें, आडम्बर, धोखा तथा छलकपट सब कुछ उस मन का कहना है, जिसको गणित का प्रशिक्षण नहीं दिया गया।

3.6.2.5 जीविकोपार्जन सम्बन्धी उद्देश्य

यंग महोदय का कथन कि वर्तमान युग में गणित इस सभ्यता की रीढ़ की हड्डी है जिसके अभाव में सभ्यता का विनाश निश्चित है। वर्तमान युग में गणित हर जगह विद्यमान है चाहे वह जीवन की छोटी बड़ी समस्याओं हो चाहे व्यापार या घर हर जगह गणित प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप से विद्यमान है जिसके बिना वर्तमान सभ्यता का विकास सम्भव नहीं है। वर्तमान समय में शिक्षा के क्षेत्र में बी०एस०सी० हो या इंजीनियरिंग, कम्प्यूटर का क्षेत्र हो या वणिज्य का हर जगह रोजगार प्राप्त करने के लिये गणित का ज्ञान आवश्यक है। जीविकोपार्जन के लिये गणित का ज्ञान नितांत आवश्यक है अतः कह सकते है कि जीवन जीने के के लिये गणित की आवश्यकता होती है।

3.6.2.6 अवकाश के समय का सदुपयोग

गणित अब पहले की तरह नीरस नहीं रहा है इसमें पहेलियाँ, खेल और जादू के वर्गों के द्वारा बच्चों का मनोरंजन होता है तथा उनका समय उचित प्रकार से व्यतीत होता है अन्यथा खाली दिमाग शैतान का घर होता है, इस उक्ति से हम सभी परिचित है।

3.6.2.7 कलात्मक उद्देश्य

गणित एक ऐसा विषय है जिसके नाध्यम से आप सुन्दरता और कलात्मकता को परिभाषित कर सकते है। चित्रकला, मूर्तिकला, संगीत सभी विषय गणित पर आधारित है। कल्पना कीजिये कि बिना सही अनुपात जाने क्या हग रंग बना सकते हैं, मूर्तिकला में बिना सही गणितीय ज्ञान के सर, आंखे, नाक, कान ठीक बन सकते है, संगीत के सुरो को बिना क्रमवद्ध किये क्या सही संगीत उत्पन्न किया जा सकता है? आज के युग में कपडे से लेकर आपके घर के नक्शे बनाने में गणित का योगदान है। अतः सौन्दर्य की अनुभूति कराने तथा उसका सृजन में गणित का महत्वपूर्ण योगदान है तभी विचारक लेविनिज ने कहा था कि संगीत मानव के अवचेतन मन का अंकगणित की संख्याओं से सम्बन्धित एक आधुनिक गुप्त व्यायाम है।ः

3.6.3 प्राप्य उद्देश्य

प्राप्य उद्देश्य से हमारा तात्पर्य है कि जब हम किसी उद्देश्य को प्राप्त करने के लिये छोटे–छोटे उपउददेश्य बनाते है ताकि उस कार्य/उद्देश्य को पूरा किया जा सके उसे प्राप्य उद्देश्य कहते हैं। उदाहरण के तौर पर आप को एक अच्छा माध्यमिक शिक्षक बनना है तो सबसे पहले आप को बी०ए० या बी०एस०सी० करनी पड़ेगी उसके बाद आपको बी०एड० की डिग्री की आवश्यकता पड़ेगी इत्यादि कार्य आपको करने पड़ेंगे। वह सारे कार्य जो आपको करने पड़ेंगे वह प्राप्य उद्देश्य कहलाते है। शिक्षक के लिये इनकी जरूरत ज्यादा पड़ती है क्योंकि एक तो यह निश्चित समय में पूरे किये जाते है तथा दूसरा यह उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिये साधन का कार्य करते हैं। इसको और स्पष्ट करने के लिये निम्न परिभाषाओं को समझना पड़ेगा।

N.C.E.R.T. के परीक्षा एवं मूल्यांकन दस्तावेज में प्राप्य उद्देश्य वह बिन्दु है जिसकी दिशा में कार्य किया जाता है। एक सुनियोजित परिवर्तन है जिसे किसी क्रिया द्वारा प्राप्त किया जाता है तथा जिसके लिये हम काम करते हैं।

ब्लूम के अनुसार ''शैक्षिक उद्देश्यों की सहायता से केवल पाठ्यक्रम की ही रचना एंव अनुदेशन के लिये निर्देशन नहीं दिया जाता अपितु ये मूल्यांकन की प्रविधियों के विशिष्टीकरण में भी सहायक होते हैं।''

डेविज के अनुसार ''सीखने का उद्देश्य अपेक्षित परिवर्तन का वर्णन है।''

अतः हम कह सकते हे कि प्राप्य उद्देश्य वह लक्ष्य है जिनको प्राप्त करने के लिये गणित शिक्षण की सम्पूर्ण क्रियायें केन्द्रित की जाती हैं।

3.6.4 उद्देश्य तथा प्राप्य उद्देश्यों में अन्तर

क्र.सं.	उद्देश्य	प्राप्य उद्देश्य
1	ये अनिश्चित तथा अस्पष्ट होते हैं।	ये निश्चित तथा स्पष्ट होते हैं।
2	यह व्यापक होते हैं।	यह विशिष्ट होते हैं।
3	इनका आधार दर्शनिक तथा सामाजिक होता है।	इनका आधार मनोवैज्ञानिक होता है।
4	इनकी पूर्ति की जिम्मेदारी सम्पूर्ण राष्ट्र तथासमाज के सभी व्यक्तियों की होती है।	इनकी पूर्ति की जिम्मेदारी शिक्षकों पर होती है।

5	यह सम्रग शिक्षा व्यवस्था या विषय से सम्बन्धितहोते हैं।	यह किसी प्रकरण विशेष याउपविषयसे सम्बन्धित होते हैं।
6	यह दीर्घकालिक होते हैं।	यह अल्पकालिक होते हैं।
7	ये औपचारिक होते हैं।	यह व्यावहारिक होते हैं।
8	इसका सम्बन्ध शिक्षा से होता है।	इनका सम्बन्ध शिक्षण से होता है।
9	इनका मूल्यांकन सम्भव नहीं है।	इनका मूल्यांकन सम्भव है।

3.6.5 शैक्षिक उद्देश्यों का वर्गीकरण

शिक्षा के क्षेत्र में वर्गीकरण शब्द का अर्थ है शैक्षिक उद्देश्यों के विभाजन तथा उनके परस्पर अर्न्तसम्बन्धों को समझना। वर्गीकरण का विचार सर्वप्रथम 1948 में अमेरिकन साइकोलॉजिकल ऐसोसिएशन द्वारा एक सम्मेलन में लिया गया। सम्मेलन में विचार किया गया कि निम्न तीन सिद्धांन्तों (1. शैक्षिक सिद्धान्त 2. तार्किक सिद्धान्त 3. मनोवैज्ञानिक) के आधार पर उद्देश्यों को विभाजित किया जाये। इस प्रकार तीन पक्षों के उद्देश्यों की उत्पत्ति हुई।

शैक्षिक उद्देश्य
- ज्ञानात्मक (Head)
- भावात्मक (Heart)
- क्रियात्मक (Hand)

सर्वप्रथम ज्ञानात्मक पक्ष के उद्देश्यों का वर्गीकरण डा० बी० एस० ब्लूम ने (1956) में दिया तत्पश्चात् ब्लूम, क्रथवाल तथा मसीह ने 1964 में भावात्मक पक्ष का वर्गीकरण प्रस्तुत किया तथा 1969 में सिम्पसन ने क्रियात्मक पक्ष के उद्देश्यों का वर्गीकरण प्रस्तुत किया। प्रत्येक पक्ष का विस्तार क्रन मे प्रस्तुत किया गया, इसी कारण इसे Taxonomy या चढ़ावक्रम भी कहते हैं। आइये इसे निग्नलिखित चित्र द्वारा स्पष्ट समझने का प्रयास करें।

क्र. सं.	ज्ञानात्मक पक्ष (ब्लूम के अनुसार)	भावात्मक पक्ष (ब्लूम, क्रथवाल एवं मैसी के अनुसार)	क्रियात्मक पक्ष (सिम्पसन के अनुसार)
1.	ज्ञान	आग्रहण	उद्दीपन
2.	बोध	अनुक्रिया	कार्य करना
3.	प्रयोग	अनुमूल्यन	नियंत्रण
4.	विश्लेषण	प्रत्ययीकरण	समायोजन
5.	संश्लेषण	व्यवस्थापन	स्वाभावीकरण
6.	मूल्यांकन	चरित्र निमार्ण	आदत निर्माण

यह वर्गीकरण को व्यावहारिक दृष्टि से सरल बनाने के लिये प्रयास एन०सी०आर०टी०ई० ने 1988 में किया उन्होंने अनुदेशन उद्देश्यों को निम्नलिखित वर्गों में विभाजित किया। गणित के अनुदेशन के लिये उद्देश्यों के यही वर्ग स्वीकार किये गये है।

उद्देश्य	वर्ग	विशिष्टीकरण
ज्ञानात्मक	प्रत्यास्मरण	• परिभाषाए, नियम • पद, प्रतीक • तथ्य, समीकरण • तकनीक, विधियां • सिद्धान्त

	पहचान	• पद, नियमों • परिभाषाओं, प्रतीकों • तथ्यों, विधियों • तकनीकों, समीकरणों
अवबोधात्मक		• अन्तर स्थापित करना • तुलना करना • अपने शब्दों में लिखना • उदाहरण देना, स्पष्ट करना • अनुमान लगाना, वर्गीकरण करना
प्रयोगात्मक		• विश्लेषण करना • गणना करना • सुझाव देना • सिद्ध करना • संश्लेषण करना
कौशालात्मक		• दत्त का सही प्रेक्षण और एकत्रीकरण • दत्त का संगत प्रस्तुतीकरण • चित्रों का स्पष्ट रेखांकन • ज्यामिती उपकरणों का सही प्रयोग • सही मापन करना

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

8. गणित शिक्षण के किन्हीं दो उद्देश्यों को बताइये?

....

....

9. शैक्षिक उद्देश्यों को कितने भागों में विभाजित किया गया है?

....

....

3.7 सारांश

विकास एक निरंतर चलने वाली प्रक्रिया है। यह अधिगम अनुभवों के संरचित समुच्चय का उत्पादन है। परिवर्तन की प्रक्रिया में पुरानी सामग्री में संशोधन भो हो सकता है या पूर्णरूपेण नवीन निर्माण भी। गणित के पाठ्यक्रम के इतिहास को समझने के लिये सम्पूर्ण शिक्षा के इतिहास को जानना आवश्यक है। भारतीय परिस्थिति में शिक्षा के लिये सबसे पुष्ट विचार बुनियादी शिक्षा के स्वरूप में महात्मा गांधी ने दिये। जिसके बाद माध्यगिक शिक्षा आयोग (1952—53) तथा शिक्षा आयोग (1964—66) ने भी 11 वर्षीय स्कूल शिक्षा में एक वर्षीय बहुउद्देशीय विद्यालयों का विचार तथा 10+2+3 शिक्षा पद्धिति को लागू करने का विचार दिया। एन०सी०ई०आर०टी० ने राष्ट्रीय स्तर पर

गणित शिक्षा के लिये 1975 में ए करीक्यूलम फॉर टेन इयर स्कूल–अ फ्रेम वर्क दिया।जिसको 1986 में कुछ बदलाव के बाद नेशनल करीक्यूलम फॉर प्राइमरी एण्ड सेकेण्डरी ऐजूकेशन ए फ्रेम वर्क (1988) के तौर पर दिया गया। जिसमें प्राथमिक तथा माध्यमिक शिक्षा दोनो को जोड़ा गया इसमें प्रत्येक स्तर की शिक्षा के न्यूनतम अधिगम स्तर तय किया गया। वर्तमान समय में शैक्षिक उद्देश्यों और शैक्षिक गुणवत्ता में विकृति आ गयी है इसी विकृति को दूर करने के लिये राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा (2005) का गठन किया गया।

गणित शिक्षा के उद्देश्य निम्नलिखित है–

1. बौद्धिक उद्देश्य
2. सामाजिक उद्देश्य
3. अनुशासन के संबंध में
4. नैतिक
5. प्रायोगिक
6. कलात्मक

शिक्षा के क्षेत्र में 1948 में अमेरिकन साईकोलॉजीकल एशोसिऐशन द्वारा उद्देश्यों को तीन भागों में बाटा गया है–

1. ज्ञानात्मक
2. भावात्मक
3. क्रियात्मक

जिसके लिये बी०एस० ब्लूम ने 1956 में ज्ञानात्मक पक्ष का वर्गीकरण दिया।

3.8 अभ्यास के प्रश्न

1. पाठ्यक्रम शब्द से आप क्या समझते हैं? इसकी परिभाषाएँ बताते हुये इसका अर्थ स्पष्ट कीजिये।
2. प्राप्य उद्देश्यों तथा उद्देश्यों में अन्तर स्पष्ट कीजिए।
3. ज्ञानात्मक पक्ष के लिये ब्लूम का वर्गीकरण को बतायें।

3.9 चर्चा के बिन्दु

1. गणित शिक्षण में उद्देश्यों का क्या महत्व है? चर्चा कीजिए।
2. राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005 की उपयोगिता पर चर्चा कीजिए?

3.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. पाठ्यक्रम शब्द की उत्पत्ति**लैटिन** भाषा से हुयी है।
2. पाठ्यक्रम **शिक्षक** तथा **छात्र** दोनों का मार्गदर्शन करता है।
3.

पाठ्यक्रम	पाठ्यचर्या
इसका क्षेत्र व्यापक होता है।	यह पाठ्यक्रम का एक अंग है।
यह सम्पूर्ण विद्यालयी जीवन तथा व्यक्तित्व के प्रत्येक पहलू को प्रभावित करती है।	यह विषय विशेष के ज्ञान को ही प्रभावित करती है।

4. जब अध्यापक कक्षा में अध्ययन की दृष्टि से विषय वस्तु को व्यवस्थित करके शिक्षण कार्य करता है उसे पाठ्यचर्या कहते हैं।

5. बुनियादी शिक्षा की विशेषताएँ–

(i) बालक का सम्पूर्ण विकास
(ii) बालक में सर्वधर्म समभाव का दृष्टिकोण विकसित करना

6. ए करीक्यूलम फॉर टेन इयर स्कूल अ फ्रेमवर्क (1975)

7. राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रूपरेखा 2005 के पाठ्यचर्या निर्माण के निर्देशक सिद्धान्तहैं–

- ज्ञान को स्कूल के बाहर के जीवन से जोड़ना।
- यह सुनिश्चित करना कि पढ़ाई रटंट प्रणाली मुक्त हो।

8. गणित शिक्षण के दो उद्देश्य निम्नलिखित हैं–

(i) बौद्धिक उद्देश्य
(ii) सामाजिक उद्देश्य

9. बी०एस० ब्लूम ने शैक्षिक उद्देश्यों को तीन भागों में विभक्त किया था–

(i) ज्ञानात्मक उद्देश्य
(ii) भावात्मक उद्देश्य
(iii) क्रियात्मक उद्देश्य

3.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. कुलश्रेष्ट, अरूण कुमार (2013): गणित शिक्षण मेरठ, आर लाल बुक डिपो
2. थामस, शाजी एण्ड सेनानी, अशोक (2009): गणित शिक्षण, आगरा, अग्रवाल पब्लिकेशन्स
3. नेगी, जे० एस० (2006): गणित शिक्षण, आगरा, विनोद पुस्तक मन्दिर
4. एन०सी०आर०टी०ई० (2006): नेशनल फोकस ग्रुप ऑन टीजिंग ऑफ मैथेमेटिक्स, नई दिल्ली
5. बाजपेयी, पी० के० (2009): गणित शिक्षण, इलाहाबाद, आलोक प्रकाशन
6. भारत सरकार (1936) नेशनल पॉलिसी ऑन एजूकेशन–1986, नई दिल्ली, मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार
7. भारत सरकार (2005) : राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005, एन०सी०आर०टी०ई०, नई दिल्ली
8. यादव, एस० के० (2011): नेशनल स्टडी ऑन टेन इयर स्कूल करीक्यूलम इम्पीलीमेन्टशन, नई दिल्ली, एन०सी०आर०टी०ई०
9. रावत, एम० एस० एण्ड अग्रवाल, एम०बी० लाल (2012): गणित शिक्षण, आगरा, अग्रवाल पब्लिकेशन्स।

B.Ed.E-33

Pedagogy of Mathematics

(गणित का अध्यापन विज्ञान)

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय,
प्रयागराज

खण्ड – 02

43

गणित शिक्षण की रणनीतियाँ -I

इकाई 4	गणितीय प्रत्ययों का शिक्षण	45
इकाई 5	स्पष्टीकरण तथा खोज विधि से अधिगम	61
इकाई 6	समूह में गणित अधिगम, समूह कार्य एवं सहकारी या सहयोगात्मक रणनीतियाँ	73

खण्ड 02 : गणित शिक्षण की रणनीतियाँ - I

खण्ड परिचय

खण्ड 02 गणित शिक्षण की रणनीतियां–Iसे सम्बन्धित है। इस खण्ड को भी पूर्व के खण्डों की भांति तीन इकाइयों में स्पष्ट किया गया है जो इस प्रकार है–

इकाई 4 : गणितीय प्रत्ययों का शिक्षण

इकाई 5 : स्पष्टीकरण तथा खोज विधि से अधिगम

इकाई 6 : समूह में गणित अधिगम, समूह कार्य एवं सहकारी या सहयोगात्मक रणनीतियां

इकाई 4 जो कि गणित प्रत्ययों के शिक्षण से सम्बन्धित है। इस इकाई में गणित शिक्षण की विभिन्न रणनीतियों को बताते हुए ज्ञानात्मक तथा कौशल संबंधी उद्देश्य,अववोधात्मक उद्देश्य एवं समस्या समाधान विधि के विषय में सविस्तार समझाया गया है। प्रत्यय के अर्थ को बताते हुए उसके अनेक प्रकारों जैसे– अमूर्त प्रत्यय, मूर्त प्रत्यय, स्थिर नियम प्रत्यय,चर नियम प्रत्यय इत्यादि को उदाहरण सहित समझाया गया है। प्रत्ययों के शिक्षण की अनेक विधियों को भी उदाहरण के द्वारा प्रस्तुत किया गया है।

इकाई 5 स्पष्टीकरण तथा खोज विधि से सम्बन्धित है।इस इकाई में स्पष्टीकरण की अवधारणा को बताते हुए उसके आधारभूत सिद्धांतों यथा ब्रूनर का सिद्धांत,गेने का सिद्धांत तथा जोल्ट पी.डाईन्स के सिद्धांत को उदाहरण सहित समझाया गया है। खोज विधि के संप्रत्यय एवं उसके पद तथा आधारभूत सिद्धांतों के विषय में स्पष्ट रूप से बताया गया है। दोनों ही विधियों को प्रभावी बनाने के उपाय, उनके गुण तथा सीमाओं के विषय में स्पष्ट रूप से समझाया गया है।

इकाई 6 के अंतर्गत समूह में गणित सीखना, समूह कार्य और सहकारी या सहयोगात्मक रणनीतियाँ का उल्लेख किया गया है। गणित शिक्षक को पढ़ाते समय मिलजुल कर पढ़ने पढ़ाने की व्यवस्था हेतु अनेक उपक्रमों का आयोजन करते हैं जिससे गणित विषय की दुरूह कठिनाई को छात्र दूर कर सकें। प्रस्तुत इकाई में समूह में गणित सीखना, समूह कार्य, समूह कार्य के लाभ, सक्रिय शिक्षण तकनीक का उपयोग, गणित समूह शिक्षण की प्रभावी रणनीतियों और विधियां, सहकारी शिक्षण, सहकारी शिक्षण के प्रकार, सहकारी शिक्षा के प्रमुख तत्व, पारंपरिक बनाम सहकारी शिक्षण समूहों के बीच अंतर, सहयोगात्मक शिक्षण, सहयोगात्मक शिक्षण के लाभ और सहयोगात्मक शिक्षण की विशेषताएं आदि संप्रत्ययों के बारे विचार प्रस्तुत किया गया है।

इकाई– 4 : गणितीय प्रत्ययों का शिक्षण

इकाई की संरचना

4.1 प्रस्तावना
4.2 इकाई के उद्देश्य
4.3 गणित शिक्षण की रणनीतियाँ
- 4.3.1 ज्ञानात्मक कौशल सम्बन्धी उद्देश्य
- 4.3.2 अवबोधात्मक उद्देश्य
- 4.3.3 समस्या समाधान

4.4 प्रत्यय का अर्थ
4.5 प्रत्यय के प्रकार
- 4.5.1 मूर्त प्रत्यय
- 4.5.2 अमूर्त प्रत्यय
- 4.5.3 स्थिर नियम प्रत्यय
- 4.5.4 चर नियम प्रत्यय
- 4.5.5 सम्बन्धात्मक प्रत्यय

4.6 प्रो0 जे. एस. ब्रूनर का योगदान
- 4.6.1 अधिनियम अवस्था
- 4.6.2 मूर्त अवस्था
- 4.6.3 प्रतीकात्मक अवस्था

4.7 गणित प्रत्ययों के शिक्षण की विधियाँ
- 4.7.1 आगमन विधि
- 4.7.2 निगमन विधि
- 4.7.3 आगमन तथा निगमन विधि में अन्तर
- 4.7.4 खेल विधि

4.8 सारांश
4.9 अभ्यास के प्रश्न
4.10 चर्चा के बिन्दु
4.11 बोध प्रश्नों के उत्तर
4.12 कुछ उपयोगी पुस्तकें

4.1 प्रस्तावना

जैसा कि हमनें पूर्व की इकाई में गणित की प्रकृति के सम्बन्ध में अध्ययन किया था कि गणित एक ऐसा विषय है जिसके ज्ञान का आधार निश्चित होता है जिससे उस पर विश्वास किया जा सकता है, गणित का ज्ञान यथार्थ, क्रमबद्ध तथा तार्किक होता है। गणित के नियम, सिद्धान्त तथा सूत्र सभी स्थानों पर एक समान होते हैं जिससे उनकी सत्यता की जाँच किसी भी समय तथा स्थान पर की जा सकती है। गणित एक बस्तुनिष्ठ विषय है। जबकि साहित्य, सामाजिक विज्ञान तथा कला आत्मनिष्ठ विषय है। गणित मुख्यतः समस्या, समाधान पर बल देता है जिसको सुलझाने के लिये कुछ निश्चित पदों का पालन करना पड़ता है। जिसमें मुख्य हैं (1) समस्या का परिभाषीकरण तथा सीमांकन (2) उपकल्पना या परिकल्पना का निर्माण जो कि समस्या के समाधान का संभावित हल होता है। (3) उस परिकल्पना का सत्यापन करना तथा अन्त में परिकल्पना को स्वीकार या अस्वीकार करना तथा हल निकालना।

4.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. गणित शिक्षण की रणनीतियों को बता सकेंगे।
2. प्रत्यय का अर्थ बता सकेंगे।
3. प्रत्ययों के विभिन्न प्रकारों के बारे में बता सकेंगे।
4. प्रत्यय निर्माण में प्रो0 ब्रूनर के योगदान को बता सकेंगे।
5. गणित शिक्षण की आगमन विधि को परिभाषित कर सकेंगे।
6. आगमन विधि के पद, गुण तथा दोष बता सकेंगे।
7. निगमन विधि को परिभाषित कर सकेंगे।
8. निगमन विधि के पद, गुण तथा दोष बता सकेंगे।
9. आगमन तथा निगम विधि में अन्तर स्पष्ट कर सकेंगे।
10. खेल विधि के विभिन्न सिद्धान्तों की व्याख्या कर सकेंगे।
11. खेल विधि के गुण तथा दोष बता सकेंगे।

4.3 गणित शिक्षण की रणनीतियाँ

शिक्षण का मुख्य उद्देश्य छात्रों के व्यवहार में आपेक्षित परिवर्तन लाना है। इसके लिये वह समय–समय पर विभिन्न योजनाए बनाता रहता है जिससे वह निर्धारित उद्देश्यों को प्राप्त कर सके। समय–समय पर बनायी गयी इन योजनाओं को शिक्षण आव्यूह कहते है। स्टोनस तथा मौरिस ने इसे परिभाषित करते हुए कहा था।

''शिक्षण आव्यूह (Teaching Strategy)पाठ योजना का सामान्यीकृत रूप होता है, जिसमें अपेक्षित व्यवहार परिवर्तन की संरचना अनुदेशन के रूप में सम्मिलित होती है। व्यूह रचना की रूपरेखा को प्रयुक्त करने के लिये युवितयों की भी योजन तैयार की जाती है। पाठ योजना की व्यूह रचना वृहत् पाठ्यक्रम का ही अंग मानी जाती है।''

गणित शिक्षण के लिये रणनीतियाँ इस बात पर निर्भर करती है कि अधिगम प्रक्रिया के क्या उद्देश्य हैं क्योंकि सारी व्यूह रचलायें उद्देश्यों को ध्यान में रख ही बनायी जाती है। गणित शिक्षण में मोटे तौर पर तीन उद्देश्य बनाये जाते है।

(1) ज्ञानात्मक तथा कौशल सम्बन्धी उद्देश्य।
(2) अवबोधात्मक उद्देश्य।
(3) समस्या समाधान।

4.3.1 ज्ञानात्मक कौशल सम्बन्धी उद्देश्य

इसके तहत वह उद्देश्य आते हैं जिनको छात्र याद कर लेता है तथा जरूरत आने पर उनको बता देता है। यह छात्र की याद रखने की क्रिया से सम्बन्धित है। जैसा कि छात्र को बताया जाता है वैसा ही वह कंठस्थ कर लेता है तथा जरूरत पड़ने पर उसको बता देता है। गणित में सबसे ज्यादा इन्हीं उद्देश्यों के अधिगम की आवश्यकता पड़ती है इनको प्राप्त करने के लिये शिक्षक को छात्र को अधिगम की गई सामग्री का बार–बार अभ्यास पड़ता है ताकि वह बन्ध मजबूत हो जाये।

उदाहरण के लिये (1) 5X6=30

(2) आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई Xचौड़ाई

(3) कौशल के लिये – (1) छात्र 625 का वर्गमूल निकाल सकेगा।

(2) छात्र दो अंको की संख्याओं का गुणन कर सकेंगे।

4.3.2 अवबोधात्मक उद्देश्य

यह पहले उद्देश्य से उच्च कोटि के उद्देश्य है। इनसे तात्पर्य है जब छात्र अधिगम की गई वस्तु में अपने विचार अपनी समझ जोड़ लेता है तब उसे बोध कहते हैं– बोध = कंठस्थ ज्ञान + अपनी समझ

यह ज्ञानात्मक उद्देश्यों से उच्च श्रेणी का उद्देश्य है। इसको प्राप्त करने के लिये गणित शिक्षण में विभिन्न प्रकार की व्यूह रचनायें की जाती हैं जिसमें प्रमुख हैं– प्रभुत्तवादी शिक्षण Authority Teaching Interaction and disicussionविचार विमर्श तथा अन्तः क्रिया खोज (Discovery), प्रयोगशाला (Laboratory), शिक्षक नियंत्रित क्रियायें (Teacher Controlled Presentation)

4.3.3 समस्या समाधान

विज्ञान के शिक्षकों, दार्शनिकों तथा विद्वानों द्वारा यह स्वीकार किया गया है कि शिक्षक का सबसे उच्च उद्देश्य है समस्या समाधान की प्रवृत्ति का विकास करना। गणित की अन्य क्रियायें जैसे कि सामान्यीकरण, प्रत्यय निर्माण तथा अमूर्त की व्याख्या जैसी क्रियाओं का आधार समस्या समाधान ही है। गणितज्ञों के एक पक्ष की मान्यता है कि समस्या समाधान का विद्यालयी पाठ्यचर्या में एक प्रमुख कार्य छात्रों को गणित के प्रति प्रेरित करना है ताकि अधिक से अधिक छात्र गणित के महत्व को अपनी जिन्दगी में अनुभव कर सके और ज्यादा से ज्यादा छात्र गणित शिक्षण में रूचि लें।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(i) छात्र पायथागोरस प्रमेय का सूत्र बता सकेगा ....उद्देश्य के अन्तर्गत आता है।

(ii) .... उद्देश्य, ज्ञानात्मक उद्देश्य से उच्च कोटि का है।

(iii) व्याख्यान विधि .... उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए उपयोग की जाती है

(iv) छात्र गणित के महत्व को अपनी निजी जिन्दगी में अनुभव कर सके .... के अन्तर्गत आता है।

(v) गणित शिक्षण का सबसे अन्तिम उद्देश्य .... है।

4.4 प्रत्यय का अर्थ

हम जो कुछ भी देखते हैं उन सारी वस्तुओं में कुछ न कुछ गुण/विशेषताओं होती है। उन गुणों के आधार पर यदि हम वसतुओं को वर्गीकृत करने का प्रयास करें तो हमें प्रत्यय की प्राप्ति होती है।'प्रत्यय को मेरिल एण्ड टेनीसन ने अपनी किताब 'टीजिंग कन्सेप्टस' में इस प्रकार परिभाषित किया है। ''प्रत्यय विशिष्ट बस्तुओं, चिन्हों, और घटनाओं का समुच्चय है जिन्हें किन्हीं विशेषताओं के आधार पर एक समूह प्रदान किया गया है तथा उनको किसी खास नाम या चिन्ह के नाम से जाना जाता है। ''उदाहरण के लिय गाय, कम्प्यूटर्स इत्यादि।

मान लीजिये एक लड़के के पास एक कुत्ता है जिसका नाम प्रिन्स, तो कुत्ता एक प्रत्यय है तथा वह लड़का अपने प्रिन्स के वर्तमान ज्ञान के आधार पर कुत्तों (प्रत्ययों) को पहचानने तथा वर्गीकृत करने का प्रयास करेगा। प्रत्यय को आप एक बड़ा विचार योजना विचार भी समझ सकते हैं जो वास्तव में संभव होता है। शिक्षण तथा अधिगम में प्रत्यय से तात्पर्य है, एक ऐसा तरीका जिसके माध्यम से ज्ञान तथा अनुभव को किसी एक विशिष्ट वर्ग तक सीमित कर दिया जाता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

2. निम्नलिखित में से प्रत्यय छाँटिये

(क) आयत (ख) मोहन

(ग) कलम (ग) घर

....

....

3. प्रत्यय का अर्थ बताइये?

....

....

4.5 प्रत्यय के प्रकार

प्रत्यय कई प्रकार के हो सकते हैं। प्रमुखतः हम इनको वर्गीकृत करते वक्त दिखाई देना या ना दिखाई देना का आधार लेते हैं। परन्तु मोटे तौर पर इन्हें चार प्रमुख भागों में बांटा जा सकता है।

1. मूर्त प्रत्यय (Concrete Concept)
2. अमूर्त प्रत्यय (Abstract Concept)
3. स्थिर नियम प्रत्यय (Conjunctive Concept)
4. चर नियम प्रत्यय (Disjunctive Concept)
5. सम्बन्धात्मक प्रत्यय (Relational Concept)

4.5.1 मूर्त प्रत्यय (Concrete Concept)

ऐसे प्रत्यय जो अपनी मौखिक विशेषताओं के कारण जाने जाते हैं उन्हें मूर्त प्रत्यय कहते हैं। उदारहण के तौर पर गाय, कुत्ता, त्रिकोण, वर्ग। उपयुक्त सारे प्रत्यय की अपनी विशेषतायें होती है तथा वह भौतिक तौर पर दिखाई जा सकती है। गणित में ऊँचाई, लम्बाई, भार से सम्बन्धित प्रत्यय इसी के अन्तर्गत आते हैं।

4.5.2 अमूर्त प्रत्यय (Abstract Concept)

ये सारे प्रत्यय जो किसी विशिष्ट परिभाषा में समाहित होते हैं। यह दिखाई नहीं देते परन्तु किसी खास परिस्थिति में अपने आस्तित्व को प्रमाणित करते हैं। गणित में ऐसे प्रत्यय बहुत अधिक हैं उदाहरण के तौर पर संख्या प्रणाली, मूल संकियायें (जोड़, घटाना, गुणा, भाग)।

4.5.3 स्थिर नियम प्रत्यय (Conjunctive Concept)

ऐसे प्रत्यय जिनकी संख्या एक नियम पर आधारित होती है तथा वह नियम स्थिर होता है। गणित में आकृति से सम्बन्धित प्रत्यय इसी के अन्तर्गत आते हैं त्रिकोण, वर्ग, आयत, इसी के उदाहरण है। त्रिकोण से तात्पर्य है कि एक ऐसी आकृति जो समतल में किन्ही रेखाओं के जोड़ने से बनती है तथा उसके तीन कोण आते हैं जिनका योग 180^0 होता है।

4.5.4 चर नियम प्रत्यय (Disjunctive Concept)

इससे तात्पर्य है ऐसे प्रत्ययों से जिनकी परिभाषा में कई परिस्थितियाँ होती है, किसी एक भी परिस्थिति के उपयुक्त होने पर वह उस प्रत्यय के अन्तर्गत आता है परन्तु बहुत कम सम्भावना इस बात की है कि वह सारी परिस्थितियों में उपयुक्त आये। उदाहरण के तौर पर संज्ञा (Noun)किसी व्यक्ति के नाम, स्थान या वस्तु को कहते हैं पर यह तीनों एक साथ नहीं हो सकती।

आऊट– क्रिकेट के खेल में आउट होने के कई कारण हो सकते हैं क्लीन बोल्ड, कैच, एल0बी0उब्लू0, रन आउट इत्यादि पर कोई खिलाड़ी इनमें से किसी एक प्रकार से आउट हो सकता है ना कि सारी एक साथ परिसिथति हो।

4.5.5 सम्बन्धात्मक प्रत्यय (Relationship Cencept)

सम्बन्धात्मक प्रत्यय वह प्रत्यय है जिनका नियम संरचना सम्बन्धों पर निर्भर करता है। ऐसे प्रत्ययों को समझने के लिये पहले आपको उन दोनों प्रत्ययों का ज्ञान होना चाहिए जिनको बीच में सम्बन्ध है तथा फिर सम्बन्ध का। उदाहरण के लिये समय तथा दूरी दोनों प्रथम बिन्दु तथा अन्तिम बिन्दु पर निर्भर करती है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

4. निम्नलिखित प्रत्यय किस प्रकार के प्रत्यय हैं?

(i) कुर्सी (v) नानी

(ii) किताब (vi) पोता

(iii) टेडा (vii) जोड़ना

(iv) प्यार (viii) भारी

....

....

4.6 प्रो0 जे. एस. ब्रूनर का योगदान

ब्रूनर आगमनात्मक अधिगम द्वारा सक्रिय रहते हुये संप्रत्ययों के बोध पर बल देते थे। वह मानते थे कि सीखने के लिये बालक को मानसिक स्तर पर तैयार रहना चाहिये। उनके अनुसार अधिगम एक सक्रिय है जो मात्र धटित नहीं होती है अपितु जिस विधि से व्यक्ति नवीन सूचनाओं और ज्ञान का संचालन करता है और प्रयोग में लाता है उसे अधिगम कहते हैं। ब्रूनर का कार्य सामान्यतः विकासात्मक मनोविज्ञान के अन्तर्गत आता है। ब्रूनर ने अधिगम विकास की तीन अवस्थायें बतायी है।

4.6.1 अधिनियम अवस्था :

यह पहली अवस्था है। यह बालक की उत्पत्ति से एक वर्ष तक रहती है। इस अवस्था में बालक क्रिया आधारित सूचनाओं को मस्तिष्क में संग्रहीत करता है तथा उसके द्वारा आस–पास के वातावरण को समझता है। उदाहरण बालक को खिलौने को हिलाना या बार–बार उस पर हाथ मारना।

4.6.2 मूर्त अवस्था :

इस अवस्था में बालक सूचनाओं को चित्रों (मानसिक) के आधार पर संग्रहीत करता है। इसने इस बात का उत्तर दिया कि क्यों जब हम नये ज्ञान/विषय को सीखने का प्रयास करते हैं तब चित्र और उदाहरण उसमें मदद करते हैं।

4.6.3 प्रतीकात्मक अवस्था :

यह अन्तिम अवस्था है इसमें बालक सूचनाओं को चिन्हों, प्रतीकों जैसे की भाषा के संदर्भ में संग्रहीत करता है। इस अवस्था में अचिन्तन क्रिया तथा बोधात्मक प्रक्रियायें संकेतनात्मक प्रणाली को स्थान देती है। उदाहरण के लिये हाथी अपनी श्रेणी के जानवरों का प्रतीक है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

5. निम्नलिखित कथनों में सत्य, असत्य छाँटिये–

(i) ब्रूनर ने अधिगम विकास की चार अवस्थायें बतायी हैं। (   )

(ii) क्रिया आधारित सूचनाओं को मस्तिष्क में संग्रहीत करना अधिनियम अवस्था के अन्तर्गत आता है। ( )

(iii) प्रतीकात्मक अवस्था में बालक मूर्त चिन्हों को एकत्रित करता है। (   )

(iv) कुत्ते की पहचान करना, बालक की मूर्त अवस्था को प्रदर्शित करता है। (   )

4.7 गणित प्रत्ययों के शिक्षण की विधियाँ

गणित शिक्षण में प्रत्ययों को छात्रों के समक्ष प्रस्तुत करने के दो उपागम प्रचलित है प्रथम प्रत्यय का सीधे प्रस्तुतीकरण (Direct Presentation)तथा दूसरा है प्रत्यय निर्माण (Concept Attainment)प्रथम विधि में छात्र के समक्ष प्रत्यय बताया/परिभाषित किया जाता है तथा उसके विभिन्न पक्षों को प्रस्तुत किया जाता है। इसे नियम–उदाहरण की ओर चलना कहा जाता है। अर्थात इसमें हम निगमन विधि का उपयोग करते है। दूसरी विधि में हम आगमनात्मक तर्क का प्रयोग करते हुये छात्र के समक्ष विभिन्न प्रकार के उदाहरण प्रस्तुत करते है छात्र उदाहरणों की सहायता से स्वयं नियम का निर्माण करता है।

1.7.1 आगमन विधि (Inductive Method)

इस विधि में किसी भी समस्या के समाधान के लिये पहले से ज्ञात नियमों व सिद्धान्तों का सहारा नहीं लिया जाता बल्कि पूर्ण ज्ञान के आधार पर उचित सूझ–बूझ और तर्क शक्ति के आधार पर आगे बढ़ा जाता है। शिक्षक शिक्षण करते समय बालको के समक्ष कुछ विशेष परिस्थितियाँ एवं उदाहरण प्रस्तुत करता है। इन उदहरणों के आधार पर बालक तार्किक ढंग से विचार विमर्श करते हुए किसी विशेष सिद्धान्त, नियम तथा सूत्र पर पहुँचते हैं। इस विधि में उदाहरणों से विशिष्ट परिस्थिति की ओर चला जाता है इसलिये इसे आगमन विधि कहते हैं।

परिभाषा

1. **लैण्डल के अनुसार**– ''जब कभी हम बालक के सम्मुख बहुत से तथ्य, उदाहरण या वस्तुयं प्रस्तुत करते हैं और फिर इनके स्वयं के निष्कर्ष निकलवाने का प्रयत्न करते है तब हम शिक्षण की आगमन विधि का प्रयोग करते हैं।''
2. **यंग के अनुसार**–''इस विधि में बालक विभिन्न सथूल तथ्यों के आधार पर अपनी मानसिक शक्ति का प्रयोग करते हुये स्वयं किसी विशेष सिद्धान्त, नियम, अथवा सूत्र पर पहुँचता है।''
3. **ज्यावसे के अनुसार**– ''आगमन विशेष दृष्टान्तों की सहायता से सामान्य नियमों को विधिपूर्वक प्राप्त करने की क्रिया है।''

उपरोक्त परिभाषाओं का अध्ययन करने से हम कह सकते है आगमन विधि में तीन शिक्षण सूत्रों का प्रयोग होता है प्रथम ज्ञात से अज्ञात की आरे द्वितीय विशिष्ट से सामान्य की ओर तथा तृतीय सूक्ष्म से स्थूल की ओर। इस विधि में बालक स्वयं तथ्यों एवं उदाहरणों का प्रयोग करते हुये नियम तक पहुँचता है अतः बालक इस विधि में पूर्णरूप से सक्रिय रहता है।

अवधारणा

यह विधि एक अवधारणा पर आधारित है कि कोई बालक कुछ विशेष परिस्थितियों या उदाहरणों को देखकर या अनुभव करके उनमें पायी जाने वाली एकरूपता को निष्कर्ष के रूप में अपना लेता है। उदाहरण के तौर पर मोहन ने तोता विभिन्न स्थानों पर देखा है और पाया कि वह हरे रंग का था। इस उदाहरणों की सहायता से उसने निष्कर्ष निकाला कि तोता हरे रंग का होता है।

आगमन विधि के पद – इस विधि में निम्नलिखित चार प्रमुख पदों का प्रयोग किया जाता है।

1. प्रकरण के विशिष्ट उदाहरणों का प्रस्तुतीकरण।
2. निरीक्षण करना।
3. सामान्यीकरण या नियमीकरण करना।
4. नियमों का परीक्षण एवं सत्यापन।

आगमन विधि का प्रयोग– साधारण ब्याज की समस्याओं को हल करके सूत्र की स्थापना करना।

प्रथम पद– शिक्षक छात्र के सामने साधारण ब्याज से सम्बन्धित कई उदाहरण प्रस्तुत करेगा।

उदारहरण 1– 2000 रूपये का 2 वर्ष का 5 प्रतिशत की दर से साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 2– 1000 रूपये का 5 प्रतिशत की दर से 3 वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात कीजिए।

हल उदाहरण 1– 100 रूपये का 1 वर्ष का ब्याज = 5 रूपये

1 रूपये का 1 वर्ष का ब्याज 5 / 100

2000 रूपये का 1 वर्ष का ब्याज $= \frac{5X2000}{100}$

2000 रूपये का 2 वर्ष का ब्याज $= \frac{5X2000X2}{100} = 200$

उदाहरण– 2 1000 रूपये का 1 वर्ष का ब्याज = 5

1 रूपये का 1 वर्ष का ब्याज= $\frac{5}{100}$

1000 रूपये का ब्याज 1 वर्ष का = $\frac{5X1000}{100}$

1000 रूपये का 3 वर्ष का ब्याज $= \frac{5X1000X3}{100} = 150$

द्वितीय पद– छात्र उपरोक्त दोनों उदाहरणों के हलो का निरीक्षण करेंगे।

शिक्षक प्र0 1 में 2 वर्ष का ब्याज कितना है?

छात्र $= \frac{5X2000X2}{100} = 200$ रूपया

शिक्षक प्र0 2 में 3 वर्ष का ब्याज कितना है?

छात्र= $\frac{5X1000X3}{100} = 150$ रूपया

उपरोक्त उदाहरणों के हल का निरीक्षण करके वह अनुमान लगा सकते हैं कि नियम क्या होगा?

तृतीय पद– प्र0 1 में 2 वर्ष का ब्याज कितना है $= \frac{5X2000X2}{100} = 200$

यहॉ 5= ब्याज की दर, 2000 = मूलधन, 2 = समय अवधि

= $\frac{(\text{मूलधनXदरXसमय})}{100}$

अर्थात = $\frac{(\text{मूलधनXदरXसमय})}{100}$

चतुर्थ पद– इस पद में कोई साधारण ब्याज की अन्य समस्या लेकर उसका उपयुक्त सूत्र द्वारा हल निकालकर सूत्र का सत्यापन करेंगे?

प्रश्न – 1400 रूपये का 4 प्रतिशत की दर से 5 वर्ष का साधारण ब्याज ज्ञात करना।

हल– साधारण ब्याज का सूत्र = $\frac{(\text{मूलधनXदरXसमय})}{100}$

= $\frac{1400 X5X4}{100}$ = 280 रूपये

विधि के गुण :–

1. यह एक वैज्ञानिक विधि है।
2. इस विधि द्वारा प्राप्त ज्ञान व्यवहारिक तथा स्थायी होता है। क्योकि बालक स्वयं करके सीखता है।
3. इस विधि के फलस्परूप बालक में सामान्यीकरण करने की प्रक्रिया विकसित होती है।
4. यह तार्किक एवं मनोवैज्ञानिक विधि है।
5. छोटी कक्षाओं के लिये अत्यन्त उपयोगी विधि है।
6. यह विधि छात्रों में वैज्ञानिक दृष्टिकोण, अवलोकन क्षमता, आलोचनात्मक तथा निरीक्षण शक्ति का विकास करती है।
7. इस विधि में बालक नवीन ज्ञान प्राप्त करने के प्रति सक्रिय बने रहते है।

दोष– निःसंदेह यह गणित शिक्षण की उपयोगी विधि है परन्तु कुछ सीमाये भी है जो निम्नलिखित है।

1. उच्च कक्षाओं के लिये यह विधि उपयुक्त नहीं है।
2. यह विधि अत्यन्त धीमी गति से ज्ञान प्रदान करती है अतः कह सकते है ज्ञान की प्राप्ति तथा परिश्रम ज्यादा लगता है।
3. इस विधि के सफलतापूर्वक क्रियान्वयन के लिये अनुभवी तथा योग्य अध्यापकों की आवश्यकता पड़ती है।
4. यह विधि छात्रों में समस्या समाधान की योग्यता विकसित नहीं कर पाती।
5. इस विधि के लिये उपयुक्त उदाहरणों का चयन एवं प्रस्तुतीकरण शिक्षक के लिये कठिन कार्य है।
6. इस विधि द्वारा प्राप्त ज्ञान की सत्यता जानने के लिये निगमन विधि का सहारा लेना पड़ता है।

4.7.2 निगमन विधि (Deductive Method)

यह विधि आगमन विधि के पूर्णतया विपरीत विधि है। इसमें छात्रों को ज्ञात नियम पहले बता दिया जाता है तत्पश्चात उसके उदाहरण देकर उसको हल करवाया जाता है। इस विधि में शिक्षक सर्वप्रथम छात्रों को नियम व सिद्धान्त प्रस्तुत करता है फिर उनको नियम याद करवा देता है फिर विभिन्न उदाहरण देकर उनको हल करवाता है। इसमें नियम तथा सिद्धान्त को सार्वभौमिक सच माना जाता है तथा उसके आधार पर समस्या हल करते है।

परिभाषा –

लैण्डल के अनुसार –''निगमन विधि द्वारा शिक्षण में पहले नियम या परिभाषा को सिखाया जाता है तत्पश्चात उसके अर्थ का सावधानी से स्पष्टीकरण किया जाता है और अन्त में तथ्यों का प्रयोग करके उसे पूर्णतया स्पष्ट किया जाता है।''

मैरियम बैवस्टर विश्वकोष के अनुसार –''तर्क की ऐसी विधि जिसमें सामान्य सिद्धान्तों के आधार पर मूर्त प्रयोगो/उदाहरणों को सिद्ध किया जाता है।''

रिचर्ड नौर क्यूसट के अनुसार –''तर्क की एक विधि जिसमें सामान्य से विशिष्ट की ओर चलते हैं।''

उर्पयुक्त परिभाषाओं से स्पष्ट है कि निगमन विधि से निम्नलिखित शिक्षण सूत्रों का उपयोग किया जाता है। अज्ञात से ज्ञात की ओर, सामान्य से विशिष्ट की ओर, सूक्ष्म से स्थूल की ओर तथा सिद्धान्त से स्थूल की ओर, एक तरह से कि यह ज्ञान की खोज की स्वतंत्र विधि नहीं है क्योंकि यह विधि नियम या सिद्धान्तों पर निर्भर करती है जो आगमन विधि प्रदान करती है इसमें हम आगमन विधि द्वारा खोजे गये नियम सिद्धान्तों को परखते हैं।

निगमन विधि के पद :

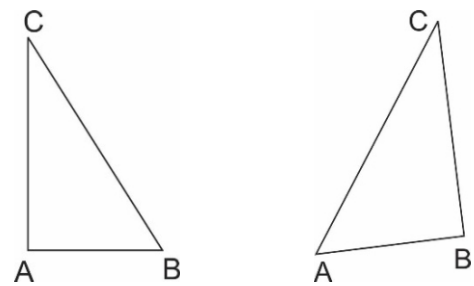
1. प्रकरण पर आधारित नियमों तथा सिद्धान्तों का प्रस्तुतीकरण
2. विशिष्ट उदाहरणों की प्रस्तुती।

3. उदाहरणों को नियम/सिद्धान्त से सम्बन्धित करना।

कार्य विधि :

इस विधि में शिक्षक नियम को छात्र को पहले बता देता है उदाहरण के लिए त्रिभुज के तीनों कोणो का योग 180^0 होता है। तत्पश्चात शिक्षक विभिन्न प्रकार के त्रिभुज बनायेगा तथा छात्रों को उनके कोणों को मापने को कहेगा तथा अन्त में तीनों कोणों का योग निकालने को कहेगा।

मान लीजिए दो त्रिभुज दिये हैं।



जब छात्र योग निकालकर संतुष्ट हो जायेंगे कि वह 180^0 आ रहा हैं फिर वह इस नियम पर आधारित निम्न प्रश्न हल करने को कहेगा।

प्र0—1 एक त्रिभुज PQR में कोण P का मान है 50^0, को Q का मान है 70^0 तो R कोण का मान बताइये।

प्र0—2 एक त्रिभुज XYZ में कोण Y का मान है 60^0, को X का मान है 90^0 तो Z कोण का मान बताइये।

विधि के गुण :

1. यह विधि अत्यन्त संक्षिप्त तथा सरल है।
2. यह विधि सभी तरह के बालकों पर उपयोग की जा सकती है।
3. यह विधि प्रत्येक उपविषयों पर उपयोग की जा सकती है।
4. यह विधि छात्रों के अभ्यास के लिये विभिन्न उदाहरण प्रस्तुत करती है तथा सूत्रों की सत्यता को परखती है।
5. इस विधि द्वारा छात्रों की स्मरण शक्ति विकसित होती है क्योंकि बालक इस विधि का उपयोग करते समय बालक को विभिन्न सूत्रों का प्रयोग करना पड़ता है।
6. इस विधि का प्रयोग करते समय शिक्षक तथा छात्रों दोनों को कम परिश्रम करना पड़ता है।

विधि की सीमायें :

1. यह मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों के विपरीत विधि है।
2. यह रटने की परम्परा को बल देती है ना कि खोज की परम्परा पर।
3. इस विधि में छात्र निष्क्रिय रहते हैं अतः कुछ समय पश्चात वह बोझिल होने लगते हैं।
4. इस विधि द्वारा प्रदत्त ज्ञान अस्थायी तथा अस्पष्ट होता है क्योंकि वह स्वयं के प्रयासों से प्राप्त नहीं होता, विद्यार्थी यंत्र की तरह कार्य करते है।
5. विद्यार्थियों को निष्कर्ष पहले से ही पता होते हैं अतः वह कार्य पूर्ण कर पाते तथा तर्क, चिन्तन एवं खोज आदि शक्तियों का विकास नहीं हो पाता।

4.7.3 आगमन तथा निगमन विधि में अन्तर

	आगमन विधि		निगमन विधि
1.	यह अध्यापन की श्रेष्ठ विधि है।	1.	यह अधिगम की श्रेष्ठ विधि है।
2.	यह स्वतंत्र विधि है।	2.	यह आगमन पर आधारित है।

3.	इसमें नियम खोजे जाते हैं।	3.	इसमें उनकी पुष्टि की जाती है।
4.	छात्र तथा शिक्षक दोनों सक्रिय रहते हैं।	4.	शिक्षक सक्रिय रहता है। छात्र सिर्फ सुनता है।
5.	मौलिक कार्यों पर बल देती हैं।	5.	समस्या समाधान पर बल देती है।
6.	इस विधि की गति धीमी है।	6.	इस विधि की गति तेज है।
7.	यह विधि मनोवैज्ञानिक है।	7.	अमनोवैज्ञानिक विधि है।
8.	छोटी कक्षाओं के शिक्षण में उपयोगी है।	8.	उच्च कक्षाओं के शिक्षण में उपयोगी है।
9.	यह विस्तृत विधि है।	9.	यह संक्षिप्त विधि है।
10.	इस विधि में विशिष्ट से सामान्य, उदाहरणों से नियम तथा स्थूल से सूक्ष्म जैसे शिक्षण सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।	10.	इसमें सामान्य से विशिष्ट, नियम से उदाहरण तथा सूक्ष्म से स्थूल जैसे शिक्षण सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।

4.7.4 खेल विधि (Playway Method)

इस विधि के जन्मदाता हैनरी काल्डवेल कुक थे। श्री काल्डवेल कुक के अनुसार बालक का जितना मन खेल में लगता है और किसी कार्य में नहीं लगता। खेल बालक की स्वाभाविक प्रवृत्ति है। उनके अनुसार बालक खेल–खेल में जो बात सीख जाते हैं वे कभी नहीं भूलते अतः विषयों के शिक्षण में खेल विधि का प्रयोग किया जाना चाहिये। उनका मानना था कि अध्यापक बालकों को खेल ही खेल में अनेक गणतीय तथ्यों, संक्रियाओं तथा अंकों का ज्ञान दे सकता है। खेल द्वारा बालक क्रियाशील रहता है। आत्म अभिव्यक्ति तथा आत्म प्रदर्शन का अवसर भी खेलों द्वारा बालक को प्राप्त होता है। इनके माध्यम से बालकों में विभिन्न व्यक्तित्व, सामाजिक गुण, विकसित किये जा सकते हैं। प्राथमिक स्तर के बालकों के लिये यह विधि तो अत्यन्त उपयुक्त है क्योंकि इस स्तर पर बालक विभिन्न प्रकार के खेल, खेलता है उदाहरण के तौर पर कूदना, भागना, उछलना, वस्तुओं से खेलना तथा सामूहिक खेल आदि।

बालक खेल खेलते वक्त पूर्ण मनोयोग से प्रतिभाग करता है, खेल के माध्यम से ही बालक की रचनात्मक तथा मानसिक क्षमताओं का विकास किया जा सकता है, बालक खेलते वक्त बालक अपनी रूचि और कौशल को प्रदर्शित भी करता है तथा स्वतंत्र भी होता है। इन्हीं सभी विषयों को ध्यान में रखकर खेल विधि का चुनाव करना चाहिये। खेल विधि का प्रयोग करते समय बालक की मानसिक, बौद्धिक एवं शारीरिक विकास के स्तर की विभिन्नताओं को देखते हुये खेल सामग्री का चयन करना चाहिए।

यह विधि कुछ प्रमुख मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों पर आधारित है जो निम्नलिखित है।

1. **स्वतंत्रता का सिद्धान्त** : यह सिद्धान्त मानता है कि यदि बालक क्रियाओं के चयन हेतु स्वतंत्र होते हैं तथा चिन्तन कर सकते है तो बालक ऐसे शिक्षण को पूर्ण मनोयोग से अपनाते है। इस विधि में बालक के मार्ग में कोई बाधा नहीं होती वह स्वतंत्र होकर क्रियाओं का चयन तथा चिन्तन कर सकता है।
2. **करके सिखने का सिद्धान्त** : इस सिद्धान्त के अनुसार यदि बालक किसी क्रिया में सक्रिय प्रतिभाग करता है तो अधिगम ज्यादा होता है। खेल विधि में बालक हमेशा सक्रिय बना रहता है अतः उसके अधिगम की दर ज्यादा होगी। जॉन ड्यूवी ने स्वतः ही कहा मस्तिष्क एक ब्लाटिंग पेपर के समान नहीं होता, जो किसी द्रव को स्वतः सोखता और धारण करता है। यह एक जीवधारी है जिसे अपने भोजन की खोज करनी पड़ती है तथा जो अपनी वर्तमान अवस्था एवं आवश्यकतानुसार चुनता और छोड़ देता है और उसे अपनी शक्ति के रूप में बदल लेता है।
3. **उपयोगिता का सिद्धान्त** : इस सिद्धान्त का मानना है कि उपयोगिता बालक को प्रयत्नशील बनाती है। खेल विधि में बालक एक निश्चित समस्या के समाधान के लिये प्रत्यनशील रहते हैं तथा उनके अपने उद्देश्य होते हैं। अतः इस विधि में बालक पूर्णतः उपयोगिता केन्द्रित होते हे।

4. **विशिष्टीकरण का सिद्धान्त** : यह सिद्धान्त मानता है कि प्रत्येक बालक की अपनी मानसिक शक्ति तथा गतिशीलता होती है तथा इस विधि में बालक अपनी व्यक्तिगत शक्तियों के उपयोग द्वारा कार्य करता है। अर्थात प्रत्येक बालक विशिष्ट होता है।
5. **खोज का सिद्धान्त** : यह विधि प्रत्येक बालक को खोज के लिये प्रेरित करती है। इस विधि में बालक को कम से कम सूचनायें दी जाती है ताकि वह अधिक से अधिक खोज कर सके। ऐसा करने से उसकी अन्वेषण शक्ति का विकास होता है।

खेल विधि के गुण :

1. यह विधि पूर्णतः मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों पर आधारित है। इसमें समस्या समाधान के लिये विभिन्न मानसिक शक्तियों का प्रयोग किया जाता है।
2. खेल विधि के द्वारा बालक का सर्वांगीण विकास सम्भव है। यह विधि के प्रयोग से बालक की ज्ञानात्मक, भावात्मक तथा क्रियात्मक तीनों पक्षों में वृद्धि होती है। यह शारीरिक विकास के साथ बालक के सामाजिक विकास, बौद्धिक विकास तथा नैतिक विकास को बढ़ाती है।
3. करके सीखने के द्वारा प्राप्त ज्ञान ज्यादा स्थाई होता है ऐसा कहना है कि इस विधि में बालक स्वयं अन्वेषण के द्वारा ज्ञान प्राप्त करता है अतः उसका ज्ञान ज्यादा स्थायी होता है।
4. बालक खेल के समय पूर्ण सक्रिय होता है तथा स्वतंत्रत होता है अतः इसके द्वारा स्वतंत्रता का वातावरण विकसित किया जा सकता है। परन्तु उसके साथ ही बालक में परिश्रम की आदत पड़ती है, खेल के दौरान वह कई जिम्मेदारियों का निर्वाह करता है जिसके फलस्वरूप बालक में उत्तरदायित्व का गुण विकसित होता है।
5. इस विधि में बालक को कोई गृहकार्य नहीं दिया जाता जो आजकल एक बहुत बड़ी समस्या बन गया है।
6. यह विधि छात्रों को अनुशासन में रहना सिखाती है।
7. इस विधि में बालक तथा छात्र के सम्बन्ध पूर्णरूप से औपचारिक नहीं होते जिसके कारण अध्यापक को बालक के नजदीक जाने का अवसर मिलता है वह उनके गुण, अवगुण, कमजोरियों को जान जाता है तथा अध्यापक छात्र सम्बन्ध मधुर होते है।
8. इस विधि के द्वारा छात्र में निरीक्षण, परीक्षण, तुलना करना तथा अन्वेषण करना जैसे गुण विकसित होते हैं जो कि छात्र के दृष्टिकोण को वैज्ञानिक बनाने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं।

दोष :

1. इस विधि के आरोपण के फलस्वरूप किसी विषय को पढ़ाने में समय ज्यादा लगता है तथा हर विषय को इस विधि के माध्यम से पढ़ाया भी नहीं जा सकता है अतः पाठ्यक्रम पूर्ण करने में इस विधि के द्वारा कठिनाई होती है।
2. जब भी छात्र खेलेगें तो प्रतिस्पर्द्धा होगी। कोई जीतेगा तथा कोई हारेगा जिसके कारण बालक के मन में द्वेष की भावना का विकास होने लगता है।
3. प्रत्येक छात्र की शारीरिक शक्ति अलग–अलग होती है। जो छात्र शारीरिक तोर पर स्वस्थ है वह खेलों में पूर्णरूप से प्रतिभाग करता है पर जो अस्वस्थ है या सक्षम नहीं है वह इस विधि को पसन्द नहीं करते। अतः हम कह सकते है कि प्रत्येक बालक इस विधि को पसन्द नहीं करता।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

6. आगमन विधि की अवधारणा बताइये।

....

....

7. निगमन विधि किन शिक्षण सूत्रों की सहायता लेती है?

....

....

8. आगमन तथा निगमन विधि में तीन अन्तर बताइये।

....

....

9. खेल विधि से क्या तात्पर्य है?

....

....

10. खेल विधि के आधारभूत सिद्धान्त कौन–कौन से हैं?

....

....

4.8 सारांश

शिक्षण का मुख्या उद्देश्य छात्रों के व्यवहार में आपेक्षित परिवर्तन लाना है। इसके लिए वह समय–समय पर विभिन्न योजनाएं बनाता रहता है जिससे वह निर्धारित उद्देश्यों को प्राप्त कर सके। समय–समय पर बनायी गयी इन योजनाओं को शिक्षण आव्यूह कहते हैं। गणित शिक्षण के लिये रणनीतियाँ इस बात पर निर्भर करती है कि अधिगम प्रक्रिया के क्या उद्देश्य हैं क्योंकि सारी व्यूह रचनायें उद्देश्यों को ध्यान में रखकर ही बनायी जाती है। गणित शिक्षण में मोटे तौर पर तीन उद्देश्य बनाये जाते हैं। (1) ज्ञानात्मक तथा कौशल सम्बन्धी उद्देश्य। (2) अवबोधात्मक उद्देश्य (3) समस्या समाधान।

हम जो कुछ भी देखते है उन सारी वस्तुओं में कुछ न कुछ गुण/विशेषतायें होती हैं। यदि उन गुणों के आधार पर यदि हम वस्तुओं को वर्गीकृत करने का प्रयास करें तो हमें प्रत्यय की प्राप्ति होती है। प्रत्यय कई प्रकार के हो सकते हैं। प्रमुखतः हम इनको वर्गीकृत करते वक्त दिखाई देना या ना दिखाई देना का आधार लेते है। परन्तु मोटे तौर पर इन्हें चार प्रमुख भागों में बांटा जा सकता है।

1. अमूर्त प्रत्यय (Abstract Concept)
2. मूर्त प्रत्यय (Concrete Concept)
3- स्थिर नियम प्रत्यय (Conjunctive Concept)
4. चर नियम प्रत्यय (Disjunctive Concept)
5. सम्बन्धात्मक प्रत्यय (Relational Concept)

ब्रूनर ने अधिगम विकास की तीन अवस्थायें बतायी हैं। गणित शिक्षण में प्रत्ययों को छात्रों के समक्ष प्रस्तुत करने के दो उपागम प्रचलित है प्रथम प्रत्यय का सीधे प्रस्तुतीकरण (Direct Presentation)तथा दूसरा है प्रत्यय निर्माण (Concept Attainment)प्रथम विधि में छात्र के समक्ष प्रत्यय बताया/परिभाषित किया जाता है तथा उसके विभिन्न पक्षों को प्रस्तुत किया जाता है। इसे नियम–उदाहरण की ओर चलना कहा जाता है। अर्थात इसमें हम निगमन विधि का उपयोग करते है। दूसरी विधि में हम आगमनात्मक तर्क का प्रयोग करते हुये छात्र के समक्ष विभिन्न प्रकार के उदाहरण प्रस्तुत करते है छात्र उदाहरणों की सहायता से स्वयं नियम का निर्माण करता है। इस विधि के

अतिरिक्त एक अन्य विधि हैं खेल विधि। इस विधि के जन्मदाता हैनरी काल्डवेल कुक थे। श्री काल्डवेल कुक के अनुसार वालक का जितना मन खेल में लगता है और किसी कार्य में नहीं लगता । खेल बालक की स्वभाविक प्रवृत्ति है।

4.9 अभ्यास के प्रश्न

1. प्रत्यय का क्या अर्थ है?
2. प्रत्ययों के विभिन्न प्रकार कौन–कौन से हैं?
3. गणित शिक्षण की आगमन विधि को परिभाषित कीजिए।
4. आगमन विधि के पद, गुण तथा दोष बताइये।
5. निगमन विधि को परिभाषित कीजिए।
6. खेल विधि के विभिन्न सिद्धान्तों की व्याख्या कीजिए।

4.10 चर्चा के बिन्दु

1. प्रत्यय निर्माण में प्रो0 ब्रूनर का क्या योगदान है? चर्चा कीजिए।
2. गणित शिक्षण की विभिन्न रणनीतियों पर चर्चा कीजिए।

4.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

1) निम्नलिखित कथनों में रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए –

(i) ज्ञानात्मक
(ii) अवबोधात्मक उद्‌देश्य
(iii) अवबोधात्मक
(iv) समस्या समाधान
(v) समस्या समाधान

2) निम्नलिखित में से प्रत्यय छाटिये।
प्रत्यय : (क) आयत (ग) कलम (घ) घर

3) प्रत्यय विशिष्ट वस्तुओं, चिन्हों और घटनाओं का समुच्चय है जिन्हे किन्हीं विशेषताओं के आधार पर एक समूह प्रदान किया गया है तथा उनको किसी खास नाम या चिन्ह के नाम से जाना जाता है।

4) निम्नलिखित प्रत्यय किस प्रकार के प्रत्यय है।

(i) कुर्सी : मूर्त प्रत्यय
(ii) किताब : स्थिर नियम प्रत्यय
(iii) टेडाः चर नियम प्रत्यय
(iv) प्यार : चर नियम प्रत्यय
(v) नानी : सम्बन्धात्मक प्रत्यय
(vi) पोता : सम्बन्धात्मक प्रत्यय
(vii) जोड़ना : अमूर्त प्रत्यय
(viii) भारी : मूर्त प्रत्यय

5) निम्नलिखित कथनों में सत्य, असत्य छाटिये –

(i) ब्रूनर ने अधिगम विकास की चार अवस्थायें बतायी है। –**असत्य**

(ii) क्रिया आधारित सूचनाओं को मस्तिष्क में संग्रहीत करना अधिनियम अवस्था के अन्तर्गत आता है। –सत्य

(iii) प्रतीकात्मक अवस्था में बालक मूर्त चिन्हों को एकत्रित करता है। –**सत्य**

(iv) कुत्ते की पहचान करना, बालक की मूर्त अवस्था को प्रदर्शित करता हे। –**असत्य**

6) यह विधि एक अवधारणा पर आधारित है कि कोई बालक कुछ विशेषपरिस्थितियों या उदाहरणों को देखकर या अनुभव करके उनमें पायी जाने वाली एकरूपता को निष्कर्ष के रूप में अपना लेता है।

7) निगमन विधि में निम्नलिखित शिक्षण सूत्रों का उपयोग किया जाता है। अज्ञात से ज्ञात की ओर, सामान्य से विशिष्ट की ओर, सूक्ष्म से स्थूल की ओर तथा सिद्धान्त से स्थूल की ओर।

8)

	आगमन विधि		निगमन विधि
1.	यह स्वतंत्र विधि है।	1.	वह आगमन पर आधारित है।
2.	इसमें नियम खोजे जाते है।	2.	इसमें उनकी पुष्टि की जाती है।
3.	छात्र तथा शिक्षक दोनों सक्रिय रहते है।	3.	शिक्षक सक्रिय रहता है। छात्र सिर्फ सुनता है।

9) इस विधि के जन्मदाता हैनरी काल्डवेल कुक थे। श्री काल्डवेल कुक के अनुसार बालक का जितना मन खेल में लगता है और किसी कार्य में नहीं लगता। खेल बालक की स्वभाविक प्रवृत्ति है। उनके अनुसार बालक खेल–खेल में जो बात सीख जाते हैं वे कभी नहीं भूलते अतः विषयों के शिक्षण में खेल विधि का प्रयोग किया जाना चाहिये। उनका मानना था कि अध्यापक बालकों को खेल ही खेल में अनेक गणतीय तथ्यों, संक्रियाओं तथा अंको का ज्ञान दे सकता है।

10) खेल विधि के आधारभूत सिद्धांत निम्न हैं–

(i) स्वतंत्रता का सिद्धान्त

(ii) करके सीखने का सिद्धान्त

(iii) उपयोगिता का सिद्धान्त

(iv) विशिष्टीकरण का सिद्धान्त

(v) खोज का सिद्धान्त

4.12 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. कुलश्रेष्ठ, अरूण कुमार (2013): गणित शिक्षण मेरठ, आर लाल बुक डिपो।

2. एन0सी0आर0टी0ई0 (2006): नेशनल फोकस ग्रुप ऑन टीजिंग ऑफ मैथेमेटिक्स, नई दिल्ली।

3. बाजपेयी, पी0के0 (2009): गणित शिक्षण, इलाहाबाद, आलोक प्रकाशन।

4. भारत सरकार (1986): नेशनल पॉलिसी ऑन एजूकेशन–1986, नई दिल्ली , मानव संसाधन विकास मंत्रालय, भारत सरकार।

5. भारत सरकार (2005): राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005, एन0सी0आर0टी0ई0, नई दिल्ली।

6. वार्टस्कोव, किम (2005): टीचिंग कॉन्सेप्ट, सेज पब्लिकेशन, कैलिफोर्निया।
7. स्मिथ एवं रेगोन (2007) इन्स्ट्रक्शनल डिजायन, सेज पब्लिकेशन, कैलीफोर्निया।
8. हायलोक, डेरेक (2010): की कॉन्सेप्ट इन टीचिंग प्राइमरी मैथमैटिक्स, सेज पब्लिकेशन, कैलिफोर्निया।

इकाई–5 : स्पष्टीकरण तथा खोज विधि से अधिगम

इकाई की संरचना

5.1 प्रस्तावना

5.2 इकाई के उद्देश्य

5.3 स्पष्टीकरण विधि

5.3.1 स्पष्टीकरण विधि की संकल्पना

5.3.2 स्पष्टीकरण विधि के मूल सिद्धांत

5.3.2.1 ब्रूनर का सिद्धान्त

5.3.2.2 जेन का सिद्धांत

5.3.2.3 जोल्ट पी० डाईन्स का सिद्धान्त

5.3.3 सर्वोत्तम स्पष्टीकरण विधि

5.3.4 स्पष्टीकरण विधि को प्रभावी बनाने का उपाय

5.3.5 स्पष्टीकरण विधि के गुण

5.3.6 स्पष्टीकरण विधि की सीमायें

5.4 खोज विधि

5.4.1 खोज विधि के पद

5.4.2 खोज विधि के मूल सिद्धांत

5.4.3 खोज विधि के गुण

5.4.4 खोज विधि की सीमायें

5.5 सरांश

5.6 अभ्यास के प्रश्न

5.7 चर्चा के बिन्दु

5.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

5.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें

5.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई में स्पष्टीकरण तथा खोज विधि के अवधारणा आधारभूत सिद्धांत गुण तथा सीमाओं के बारे में चर्चा की गई है। जैसा कि हम जानते हैं कि मनुष्य सबसे पहले बोलना सीखा जब भी बोलना सीखा तो उसके बाद उसकी कभी ना कभी किसी चीज के अध्ययन के दौरान परेशानी का भी उसे अनुभव हुआ होगा। जब भी उसकी परेशानी आई होगी तो उसने या तो स्वयं उसका समाधान खोजा होगा या किसी अन्य से वह समाधान खोजने का प्रयास करने के लिए प्रश्न पूछे होंगे इसी विधि को जिसमें समस्या के समाधान के लिए प्रयास दूसरे व्यक्ति द्वारा किया जाता है उसे स्पष्टीकरण कहते हैं। यह गणित की प्राचीनतम वीडियो में से एक है खोज विधि भी उसी प्रकार से एक विधि है जिसमें कि मनुष्य स्वयं खोज करता है तथा सत्य तत्व का पता लगता है इस इकाई में आप इन्हीं के बारे में विस्तृत रूप से अध्ययन करेंगे ।

5.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. स्पष्टीकरण विधि की व्याख्या कर सकेंगे।
2. स्पष्टीकरण विधि की अवधारणा तथा उसके आधारभूत सिद्धान्तों की व्याख्या कर सकेंगे।
3. स्पष्टीकरण विधि के गुण तथा सीमायें बता सकेंगे।
4. स्पष्टीकरण विधि को प्रभावी बनाने वाले कार्यों का वर्णन कर सकेंगे।
5. खोज विधि के पदों की व्याख्या कर सकेंगे।
6. खोज विधि के आधारभूत सिद्धान्त को बता सकेंगे।
7. खोज विधि के गुण तथा सीमायें बता सकेंगे।

5.3 स्पष्टीकरण विधि

विषय को बोधगम्य बनाने के लिये प्रत्येक शिक्षक को स्पष्टीकरण की सहायता लेनी पड़ती है। स्पष्टीकरण में विषय वस्तु का प्रस्तुतीकरण क्रमबद्ध एवं विस्तृत रूप में किया जाता है। स्पष्टीकरण, सूचना का शिक्षक अथवा विषय वस्तु का अधिकारिक ज्ञान रखने वाले से छात्र अथवा अधिगमकर्ता तक संप्रप्रेण है। यह प्रक्रिया प्रमुखतः एक पक्षीय होती है। परन्तु कभी कभार इसमें थोड़े बहुत प्रश्न भी पूछे जा सकते हैं। यह प्रविधि शिक्षक केन्द्रित है क्योंकि इसमें शिक्षण के चार प्रमुख कौन क्या, कैसे, कहाँ (4W) अर्थात कौन पढ़ेगा, क्या पढ़ेगा, कैसे पढ़ेगा तथा कहाँ पढ़ेगी का निर्धारण शिक्षक स्वयं करता है। इसलिये इस प्रविधि को उच्च–निम्न प्रविधि के नाम से भी जाना जाता है।

स्पष्टीकरण को आमतौर पर तीन शब्दों के साथ उपयोग किया जाता है जिसके फलस्वरूप स्पष्टीकरण के अर्थ के सम्बन्ध में भ्रम बना रहता है। वह तीनो शब्द है विवरण, वर्णन तथा व्याख्या। विवरण एक सहायक कथन है जिसका प्रयोग नई सूचनायें तथा तथ्यों को छात्रों के समक्ष रखते समय किया जाता है जबकि स्पष्टीकरण विस्तृत कथन होता है तथा इसका उपयोग विषय की भूमिका रखते वक्त किया जाता है। वर्णन सामान्य तथा विस्तारपूर्वक दिया गया कथन है जबकि स्पष्टीकरण विशिष्ट होता है तथा क्रमबद्ध होता है। व्याख्या किसी विषय के कठिन अंशो के सम्बद्धित होती है जबकि स्पष्टीकरण विषय के खास–खास पक्षों पर प्रकाश डालता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(क) स्पष्टीकरण प्रविधि .... क्रेन्द्रित होती है।

(ख) स्पष्टीकरण प्रविधि .... पक्षीय होती है।

(ग) वितरण एक .... कथन होता है जबकि स्पष्टीकरण .... कथन होता है।

(घ) वर्णन........................... बिन्दुओं पर किया जाता है जबकि स्पष्टीकरण .... होता है।

(ङ) व्याख्या विषय के ....से सम्बन्धित होती है।

5.3.1 स्पष्टीकरण विधि की अवधारणा

यह विधि निम्न अवधारणाओं को मानकर चलती है–

- प्रभावी प्रस्तुतीकरण अधिगम को बढ़ावा देता है।
- छात्र सुनकर अधिक सुगमता से सीखते हैं।
- व्याख्यान के द्वारा अन्य विषयों से सहसम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है।
- सम्प्रेषण के माध्यम से अधिगम की संरचना में धनिष्ठ सम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है।

5.3.2 स्पष्टीकरण विधि के मूल सिद्धांत

गणित शिक्षण में स्पष्टीकरण विधि का प्रयोग काफी महत्वपूर्ण है। यह विधि निम्न मनोवैज्ञानिक सिद्धान्तों का आधार लेती है–

5.3.2.1 ब्रूनर का सिद्धान्त

ब्रूनर आगमनात्मक अधिगम द्वारा सक्रिय रहते हुये सप्रत्ययो के बोध पर बल देते हैं। उन्होंने अपनी किताब 'Process of Education' में कहा है कि छात्र को सक्रिय अधिगमकर्ता बनाया जाये जो अपने ज्ञान का खुद निर्माण कर सके। ब्रूनर ने संज्ञानात्मक विकास की तीन अवस्थायें बतायी थी। अधिनियम अव्यवस्था मूर्त अवस्था तथा प्रतीकात्मक अवस्था, इस सिद्धान्त को विस्तृत रूप से व्याख्या पहले से ईकाई 2.7.3 में की जा चुकी है।

5.3.2.2 गेने का सिद्धांत

अधिगम परिस्थितियों के प्रत्यय को रॉबर्ट गेने ने (1965) में दिया। उनका तर्क था कि अधिगम के स्वरूप के सम्बन्ध में सामान्यीकरण अधिगम परिस्थितियों के निरीक्षण के आधार पर ही किया जा सकता है उनके अनुसार अधिगम के कई स्तर होते है तथा किसी पाठ को पढ़ाने के दौरान इन सभी स्तरों को पार करना होता है। इनके अनुसार किसी विषय को पढ़ाते वक्त अधिगम प्रक्रिया के नौ चरणों का पालन करना पड़ता है यह नौ चरण आरोही क्रम में है। प्रत्येक चरण के लिये उससे पहले का चरण पूर्व आवश्यकता का कार्य करता है–

1. ध्यान खीचना (Gaining Attention)–अर्थात शिक्षक की बात पर छात्र क्यों ध्यान दें।
2. अधिगमकर्ता को उद्देश्यों से परिचित करना (Informing learners about objective)– ताकि छात्रों को कार्य की ओर केन्द्रित किया जाये।

3. छात्रों के पूर्व ज्ञान का पता लगाना (Recall of polor know ledg)– शिक्षक, छात्रों को उस विषय के बारे में क्या जानकारी है तथा क्या शंकाये है इसका पता लगाये।
4. उद्दीपक का प्रस्तुतीकरण (Presenting the stimulus)– छात्र को शिक्षक द्वारा सूचनायें प्रदान करना।
5. छात्र को अधिगम सहायता प्रदान करना (Providing Learner Guidance)– शिक्षक द्वारा यह सुनिश्चित करना कि जो सूचनाये उन्हें प्रदान की गई है वह उनको समझ में आयी है के नहीं। इस चरण में शिक्षक को समझाने पर विशेष बल देना चाहिये।
6. निष्पति का उत्सर्जन (Elicit Performance) – शिक्षक द्वारा छात्रों की शंकाओं का पता लगाना तथा अभ्यास कराना ताकि समझ विकसित हो तथा ज्ञान स्थायी हो।
7. प्रतिपुष्टि प्रदान करना (Providing Feedback)– छात्र का प्रश्नोतर विधि अथवा विभिन्न प्रश्नों के द्वारा यह पता लगाना कि उसने क्या सीखा है तथा कहाँ कमी रह गयी थी गलती का सुधार करवाना।
8. निष्पादन का अनुमान लगाना (Asessing Performance)– योगात्मक आकलनSummative Assessmentके द्वारा पता लगाना कि छात्र ने कहाँ तक सीखा तथा कहाँ कमी रही गयी अर्थात पाठ की सफलता का पता लगाना।
9. अवधान को बढ़ाना (Enhancing Retention)– उन समस्त क्रियाओं को करना या कराना जिससे अधिगम किया गया ज्ञान छात्र के मस्तिष्क में स्थायी हो सके।

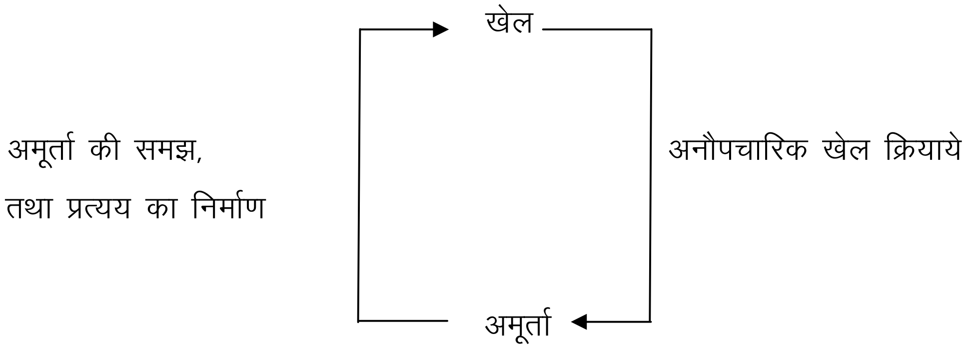
5.3.2.3 जोल्ट पी० डाईन्सका सिद्धांत

डाइन्स का गणित अधिगम का सिद्धान्त चार प्रमुख सिद्धान्तों पर आधारित है। आइये चारो सिद्धान्तों को समझने का प्रयास करते हैं।

गत्यात्मकता का सिद्धान्त

इस सिद्धान्त की मान्यता है कि किसी नये प्रत्यय की समझ एक विकासवादी प्रक्रिया है जो कि अधिगमकर्ता को तीन प्रमुख स्तरों को पार करने के बाद आती है। प्रथम अवस्था को मुक्त खेल अवस्था (Free Play) कहा जा सकता है इस अवस्था में अधिगमकर्ता को परिस्थिति के साथ अन्तरक्रिया करने के लिये स्वतंत्र छोड़ दिया जाता है। वह त्रुटि तथा भूल सिद्धान्त के आधार पर विभिन्न प्रतिक्रियायें करता है तथा तब तक प्रतिक्रियायें करता रहता है जब तक दी गई परिस्थिति से पहचान नहीं कर लेता या दूसरे शब्दों में असंरचित परिस्थिति में एक खास किस्म का व्यवहार क्रम नहीं ढूंढ लेता। दूसरी अवस्था को learning to play by rulesनियमों का खेल से अधिगम कहा जाता है।

तीसरा सबसे महत्वपूर्ण स्तर है तुलानात्मक स्तर (Comparison stage) जब छात्र नियमों से खेलना सीख जाता है तो खेलते–खेलते एक ऐसा वक्त आता है जब छात्र खेलों में तुलना करने लगता है। यह वह अवस्था है जब छात्र खेल की नियम संरचना को समझने लगता है, उसके आधार पर तुलना तथा सामान्यीकरण करने लगता है यह गणित प्रत्यय के अमूर्त पहलू को समझने की पहली सीढ़ी है। किसी गणितीय प्रत्यय की समझ से पहले यह तीनों स्तर आते हैं डाईन्स तथा गोल्डिन ने 1971 में इसे अधिगम चक्र के रूप में दर्शाया था। गत्यात्मक सिद्धान्त एक संरचना तैयार करता है कि किस प्रकार गणितीय अधिगम होता है।



डाईन्स अधिगम चक्र

अनूभूति की परिवर्तनशीलता का सिद्धान्त(**Perceptual Variability Principle**)

इस सिद्धान्त के अनुसार छात्र का प्रत्यय अधिगम सबसे ज्यादा तब होता है जब उसे प्रत्यय से सम्बन्धित बहु अनुभव प्रदान किये जाते हैं। बहु अनुभव से यहाँ तात्पर्य है कि प्रत्यय से जुड़े हुये वे सारे अधिगम जिनकी वातावरण परिस्थितियॉ भिन्न हो। परन्तु सभी अनुभव की नियम संरचना एक जैसी हो। छात्र उन विभिन्न अनुभवों में से अमूर्त पहलू (नियम संरचना) पहचान लेता है तथा भौतिक वातावरण को अलग कर लेता है। दूसरे शब्दों में छात्र प्रदान की गई अनूभूतियों में भी अमूर्ता, पहचानना सीख जाता है।

गणितीय परिवर्तनशीलता का सिद्धान्त (**The Mathematical Variability Principle**)

इस सिद्धान्त के अनुसार गणितीय प्रत्यय के सामान्यीकरण को बढ़ाने के लिये दो कार्य करने होंगे प्रथम वह सारे गुण जो कि उस प्रत्यय के निर्माण में अभिन्न अंग नहीं है को व्यवस्थित रूप से परिवर्तित किया जाये तथा वह सारे गुण जो प्रत्यय के निर्माण के अभिन्न अंग है को स्थिर रखा जाये। यदि शिक्षक ऐसा करता है तो छात्र के मस्तिष्क में गणितीय प्रत्यय की सामान्यीकरण की प्रक्रिया विकसित हो जाती है। उदाहरण के तौर पर सामान्तर चतुर्भुज प्रत्यय से मतलब है।

- ऐसी आकृति जिसकी चार भुजा हो।
- 4 भुजायें सीधी हो।
- तथा सामने की भुजा सामान्तर हो।

अतः शिक्षक विभिन्न उदाहरण छात्र के सामने प्रस्तुत करें जिसमें विभिन्न कोण, विभिन्न भुजाओं को बदला गया हो परन्तु आवश्यक गुण कि सामने की भुजा सामान्तर हो अवश्य रखे। इससे छात्र सामान्तर चतुर्भुज की संकल्पना को आसानी से समझ सकेगा।

संरचनावादी सिद्धांत (**The constructivity Principle**)

इस सिद्धान्त के अनुसार विश्लेषण हमेशा संरचना के बाद होता है। छात्रों को उनके वातावरण के साथ अन्तर क्रिया करने दी जाये वह सारी क्रियाये उनके प्रत्यय निर्माण में महत्वपूर्ण भूमिका अदा करेगी। शिक्षक छात्र के प्रत्यय को विकसित तथा पुष्ट करने में विभिन्न वातवरणीय परिस्थितियां उत्पन्न करता है तथा उनमें से उपयुक्त परिस्थितियों का चयन, करके प्रत्यय को, छात्रों में पुष्ट करता है। डाइन्स का मानना था कि दो प्रकार के विचारक होते है प्रथम संरचनावादी जो पियाजे की मूर्त संकाल अवस्था है, तथा दूसरा विश्लेषणवादी जो पियाजे की औपचारिक संकार्य अवस्था है। दोनों में अन्तरक्रिया के फलस्वरूप गणितीय प्रत्यय विकसित होता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

2. स्पष्टीकरण विधि की दो अवधारणायें बताइये।

....

....

3. ब्रूनर ने संज्ञानात्मक विकास की कितनी अवस्थायें बतायी गयी हैं?

....

....

4. गेने के नौ चरणों को क्रमबद्ध कीजिए।

....

....

5. डाईन्स के गणित अधिगम के चारों सिद्धान्तों के नाम बताइये।

....

....

5.3.3 सर्वोत्तम स्पष्टीकरण विधि

1. एक उत्तम स्पष्टीकरण विधि में विधि में शिक्षक द्वारा किसी विचार अथवा प्रत्यय की क्रमबद्ध तथा स्पष्ट व्याख्या की जाती है।
2. एक उत्तम स्पष्टीकरण विधि पूर्णतः नियोजित होती है– अर्थात शिक्षण के प्रत्येक पक्ष पूर्व शिक्षण, अन्तरक्रिया पक्ष तथा मूल्यांकन पक्ष तीनों ही पक्षों के सम्बन्ध में शिक्षक को पहले से ही नियोजन करना पड़ता है।
3. कभी कभार इस विधि में शिक्षक छात्र प्रश्नोंत्तर भी शामिल होते हैं।
4. स्पष्टीकरण विधि का प्रयोग करते वक्त शिक्षक को ब्रूनर के सिद्धान्त, जोल्टर डाइन्स के सिद्धान्त को ध्यान में रखना चाहिए।
5. स्पष्टीकरण विधि का शिक्षण गेने की अवधारणा पर आधारित होना चाहिए अर्थात शिक्षण निम्न स्तर से उच्च स्तर की तरफ हो तथा प्रत्येक उच्च स्तर के लिये नींव का काम उससे पहले प्राप्त किया गया निम्न स्तर हो। शिक्षण का अन्तिम स्तर समस्या समाधान होता चाहिए।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

6. स्पष्टीकरण विधि को प्रभावी बनाने के लिये किये जाने वाले कोई दो उपाय बताइये।

....

....

7. उत्तम स्पष्टीकरण विधि की एक विशेषण बताइये।

....

....

8. निम्नलिखित कथनों में सत्य, असत्य छाँटिये–

(क) स्पष्टीकरण विधि का शिक्षण गेने की अवधारणा पर आधारित होना चाहिये। ( )

(ख) स्पष्टीकरण विधि में संचार के साधनों का उपयोग नहीं करना चाहिये। ( )

(ग) स्पष्टीकरण विधि सूचनाओं को प्रदान करने की धीमी विधि है। ( )

(घ) स्पष्टीकरण विधि छात्र केन्द्रित विधि है। ( )

(घ) स्पष्टीकरण विधि से केवल तथ्यात्मक ज्ञान प्रस्तुत किया जा सकता है। ( )

5.3.4 स्पष्टीकरण विधि को प्रभावी बनाने के उपाय

इस विधि में सम्प्रेषण क्योंकि एक पक्षीय होता है अर्थात शिक्षक केन्द्रित होता है। अतः इस प्रक्रिया में अन्तक्रिया का मूलतः अभाव पाया जाता है तथा इसका प्रारूप भी अत्यधिक अन्तक्रिया वाली शिक्षण विधियों के मुकाबले कमजोर होता है परन्तु शिक्षक को क्रियाओं को निर्देशित तथा प्रबन्धन करते वक्त नियोजन की आवश्यकता पड़ती है। निम्नलिखित क्रियायें अपनाकर इस विधि को प्रभावशाली बनाया जा सकता है।

- सबसे पहले शिक्षक को स्वयं पाठ्यवस्तु को स्पष्ट कर लेना चाहिये कि छात्र को क्या पढ़ाना है तथा कितना पढ़ाना है।
- कहानी विधि या सहायक सामग्री का उपयोग करके अमूर्त प्रत्ययों को मूर्त बनाने का प्रयास किया जा सकता है।
- संचार के साधनों का भी भरपूर उपयोग किया जा सकता है तथा तकनीकियों के माध्यम से उदाहरण, ग्राफिक्स, चित्र, आवाज चलचित्रों के उपयोग से स्पष्टीकरण को प्रभावी बनाया जा सकता है।
- विषय सामग्री के जोड़े बनाकर भी इस विधि को प्रभावशाली बनाया जा सकता है।
- यह विधि कई विधियों के लिये सहायक विधि भी काम करती है।
- छात्रों की मानसिक योग्यता एवं रूचियों का शिक्षण में ध्यान रखना चाहिये।
- स्पष्टीकरण में प्रयुक्त होने वाली भाषा सरल, स्पष्ट एवं मनोरंजक होनी चाहिये। उसमें जटिलता नहीं होनी चाहिए।
- इस विधि का उपयोग करते समय शिक्षक को प्रश्न भी पूछना चाहिये जिससे बालक की तर्कशीलता तथा जिज्ञासा की पूर्ति की जा सके।
- इस विधि को शिक्षण उद्देश्य के साथ जोड़कर प्रस्तुत करना चाहिये।

5.3.5 स्पष्टीकरण विधि के गुण

- सूचनाओं/तथ्यों को छात्रों को प्रदान करने की तीव्रतम विधि है।
- इस विधि के लिये बहुत अधिक नियोजन की आवश्यकता नहीं पढ़ती है अतः इस विधि का आयोजन कही भी कभी भी सरलता से किया जा सकता है।
- छात्रों को प्रेरित करने से इस विधि की सबसे ज्यादा योगदान है।
- छात्रों की अनुक्रियाओं के आधार पर शिक्षक आगे के क्रियाये नियोजित कर सकता है।
- इस विधि के माध्यम से बालकों में ध्यान केन्द्रित करने की आदत पड़ जाती है।
- यह विधि मौलिक चिन्तन को बढ़ावा देती है।
- किसी नवीन विषय की भूमिका प्रस्तुत करने में यह विधि बहुत महत्वपूर्ण है।

5.3.6 स्पष्टीकरण विधि की सीमायें

- एक शिक्षक केन्द्रित विधि है, शिक्षक सक्रिय रहता है, छात्र निष्क्रिय।
- छात्रों के व्यक्तिगत विभिन्नतओं की पूर्ति नहीं कर पाती।
- उच्च कक्षाओं के लिये उपयोग विधि है ना कि निम्न कक्षाओं के लिये।
- अधिगम की प्रक्रिया पर ध्यान नहीं दिया जाता बल्कि सारा बल प्रस्तुतीकरण तकपिर किया जाता है।
- शिक्षण उद्देश्यों को इस विधि के माध्यम से पूरा नहीं किया जा सकता बल्कि बालक को तथ्यात्मक ज्ञान प्रस्तुत किया जा सकता है।
- सभी शिक्षण बिन्दुओं पर बराबर बल नहीं दिया जाता। शिक्षक जिस बिन्दु पर ज्यादा जानते है उस पर ज्यादा समय प्रदान करते है। जिस पर कम ज्ञान रखते है उस पर या तो विषयान्तर बाते करते है या फिर जल्दी से खत्म करते है।
- बालकों की अभिरूचियों तथा अभिवृत्तियों का ध्यान नहीं रखा जाता है अतः यह अमनोवैज्ञानिक विधि है।
- प्रत्येक अध्यापक इस विधि का सफलतापूर्वक उपयोग नहीं कर पाते बाल्कि कुशल एवं योग्य अध्यापक ही इस विधि का सफलतापूर्वक उपयोग कर पाते हैं।

5.4 खोज विधि(**Discovery method**)

इस विधि का जन्म जे० एस० ब्रूनर (1961) तथा आसुबेल (1964) के कार्यों को जाता है। उनके अनुसार खोज अधिगम ऐसी परिस्थिति को कहते है जब अधिगमकर्ता को तथ्यात्मक सूचना तथा प्रत्यात्मक समझ सीधे प्रस्तुत नहीं की जाती अपितु वह स्वयं दिये गये साधनों की मदद से, स्वतंत्र रूप से उन्हें खोजता है। खोज अधिगम में अधिगमकर्ता को मदद भी प्रदान की जाती है जो प्रतिपुष्टि, उदाहरणों तथा मेनुअल के माध्यम से की जाती है परन्तु वह कार्य पर निर्भर होती है यदि प्रदान किया गया कार्य दुश्कर है तो मदद ज्यादा दी जाती है आसान है तो कम, पर पूरे अधिगम के दौरान अधिगमनकर्ता को स्वयं प्रयास करना पड़ता है नाकि स्पष्टीकरण विधि (Exposition method) की तरह हर पहलू को शिक्षक द्वारा बता दिया जाता है।

खोज का विचार प्राथमिक तौर से गणित अध्यापन तथा गणित की समझ विकसित करने के लिये जरूरी है। इसे खोज विधि इसलिये कहते है क्योंकि इसमें अधिगमकर्ता स्वयं खोज करता है इसमें छात्र समस्या परिभाषित करता है, उनके समाधान के लिये विकल्प सोचता/विचारता है तथा उसका समाधान भी करता है। यह विधि शिक्षक निर्देशित खोज से पूर्णतः विपरीत है। क्योंकि इसमें शिक्षक न तो समस्या का समाधान देता ना उपयोगी नियमों का उल्लेख करता है बल्कि यह सारा कार्य छात्र स्वयं करता है।

5.4.1 खोज विधिके पद

आमतौर पर छात्र इस विधि का उपयोग करते समय निम्नलिखित पदों का प्रयोग करते हैं–

समस्या प्रस्तुत करना– शिक्षक द्वारा उच्च अधिनियम के लिये परिस्थिति उत्पन्न की जाती है परन्तु समस्या समाधान प्रस्तुत नहीं किया जाता शिक्षक द्वारा प्रसंग कहानी उदाहरण के द्वारा समस्या प्रस्तुत की जाती है परन्तु इस समस्या को परिभाषित छात्र स्वयं करते हैं।

आंकड़ो को इकट्ठा करना–छात्र समस्या को पुष्ट बनाने तथा परिभाषित करने के लिये आंकड़े एकत्र करते हैं ताकि यह बता सकें कि समस्या क्या है? कहाँ है?

आकड़ों की सारणी बनाना–एकत्र किये गये आकड़ों को एक विधिवत् रूप में सारणीकृत किया जाता है ताकि उसमें कोई संरचना (pattern) ढूढ़ी जा सके तथा आगे की सांख्यकी विधियों के लिये उन्हें तैयार किया जा सके।

परिकल्पना का निर्माण तथा उसका परीक्षण–छात्र आंकड़ों के आधार पर परिकल्पना का निर्माण करता है तथा उनको परीक्षित करके जाँचता है कि उसकी परिकल्पना ठीक है अथवा नहीं। यदि पहला परिकल्पना गलत साबित हो तो दूसरी बनाना।

नियम बनाने का प्रयास– यदि आपकी परिकल्पना के अनुसार परिणाम आये तो नियम बनाने का प्रयास करना अर्थात समस्या के पहलूओं को प्रतीकों/चिन्हों द्वारा दर्शाना तथा उनमें सम्बन्ध देखने का प्रयास करना।

नियम का सामान्यीकरण–नियम बनाने के पश्चात् छात्र का प्रयास होता है। उस नियम का सामान्यीकरण करना उदाहरण के लिये पायथागोरस का नियम कहता है कि यदि समकोण त्रिभज हो तो–

$$(\text{लम्ब})^2 + (\text{आधार})=(\text{कर्ण})$$

तक पहुंच पाते हैं। अतः इस विधि का उपयोग करते वक्त छात्रों का समूह बनाया जाना चाहिये तथा समूह यदि विभिन्न मानसिक योग्यताओं के बालकों का हो तो अति उत्तम रहता है।

5.4.2 खोज विधि के मूल सिद्धांत

यह विधि निम्नलिखित पाँच प्रमुख सिद्धान्तों पर आधारित है–

(i) क्रियाशीलता का सिद्धान्त

(ii) छात्रों के स्वतंत्र चितन के अवसर उपलब्ध कराने का सिद्धान्त

(iii) छात्रों की सूझ शक्ति के विकास का सिद्धान्त

(iv) छात्रों का वर्णन करने की क्षमताओं के विकास का सिद्धान्त

(v) सृजनात्मक के विकास का सिद्धान्त

5.4.3 खोज विधि के गुण

- यह विधि छात्रों की सृजनात्मक क्षमताओं का विकास करती है।
- इस विधि में चिन्तन तथा बोधगम्यता पर बल दिया जाता है जिसके फलस्वरूप छात्र को आन्तरिक तौर पर सन्तुष्टि प्राप्त होती है कि उसने कुछ किया।
- उच्च ज्ञानात्मक तथा भावात्मक उद्देश्यों की प्राप्ति इस विधि द्वारा सम्भव है।
- विभिन्न मानसिक योग्यताओं वाले समूह को पढ़ाने के लिये सबसे उपयुक्त विधि।
- इस विधि के माध्यम से छात्रों की विश्लेषण तथा संश्लेषण क्षमताओं का विकास किया जा सकता है।

5.4.4 खोज विधिकी सीमायें

- यह विधि के माध्यम से पढ़ाने में समय काफी लगता है।
- वर्तमान पाठ्यक्रम (गणित) इस विधि के माध्यम से नहीं पढ़ाया जा सकता अपितु पाठ्यक्रम में समुचित परिवर्तन आवश्यक है।
- अत्याधिक शिक्षक अदा की आवश्यकता होती है।
- योग्य तथा धैयवान शिक्षकों की उपलब्धता भी समस्या है।
- सम्पूर्ण पाठ्यक्रम को इस विधि के माध्यम से नहीं पढ़ाया जा सकता।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

9. खोज विधि के पदों को बताइये।

....

....

10. खोज विधि के किन्हीं दो आधारभूत सिद्धान्तों को बताइये।

....

....

11. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

(क) खोज विधि छात्रों की .... क्षमताओं का विकास करती है।

(ख) .... वाले समूह को पढ़ाने की सबसे उपयुक्त विधि खोज विधि है।

(ग) ....पाठ्यक्रम को इस विधि के माध्यम से पूरा नहीं किया जा सकता।

(घ) इस विधि में .... तथा .... पर बना दिया जाता है।

(ङ) अत्याधिक .... की आवश्यकता खोज विधि का प्रमुख दोष है।

5.5 सारांश

विषय को बोधगम्य बनाने के लिये प्रत्येक शिक्षक को स्पष्टीकरण की सहायता लेनी पड़ती है। स्पष्टीकरण में विषय वस्तु का प्रस्तुतीकरण क्रमबद्ध एवं विस्तृत रूप में किया जाता है। यह मूलतः शिक्षक केन्द्रित विधि जिसमें शिक्षक सक्रिय तथा छत्र निष्क्रिय रहता है। परन्तु छात्रों को प्रेरित करने में तथा मौलिक चिन्तन को बढ़ावा देने में यह विधि सबसे उपयुक्त है इसके माध्यम से छात्रों को सूचनाओं का ज्ञानस्रोत तरीके से दिया जा सकता है। इस विधि को उपयोग करने से पहले शिक्षक को शिक्षण के तीनों पक्षों (पूर्व, अन्तरक्रिया तथा मूल्याकन पक्ष) को पूर्ण रूप से नियोजित कर लेना चाहिये। एक पक्षीय विधि होने के कारण छात्र को सक्रिय बनाने के प्रयास किये जाते हैं अतः कहानी सुनाना, संचार के साधनों का उपयोग करना, चलचित्रों के उपयोग से इस विधि को प्रभावशाली बनाया जा सकता है।

दूसरी प्रमुख विधि को लाने का श्रेय ब्रूनर को जाता है। इस विधि में अधिगमकर्ता को तथ्यात्मक सूचनायें तथा प्रत्यय सीधे प्रस्तुत नहीं किये जाते बल्कि वह स्वयं अपने प्रयासों तथा दिये गये साधनों की मदद से उन्हें खोजता है। अतः इस विधि को खोज विधि कजा जाता है। गणित की समक्ष विकसित करने के लिये यह उपयुक्त विधि है। इस विधि में कुछ निश्चित पदों का प्रयोग करते हुये छात्र समान्यीकरण तक पहुँचता है। पर सारे छात्र ऐसा नहीं कर पाते हैं अतः शिक्षक को समूह बनाते वक्त विभिन्न मानसिक योग्यताओं के छात्रों को रखना चाहिये। इस विधि के माध्यम से छात्रों की सृजनात्मक, विलेषण तथा संश्लेषण की क्षमताओं को विकसित किया जा सकता है। परन्तु धैर्यवान तथा योग्य शिक्षकों का अभाव इस विधि की प्रमुख सीमा है।

5.6 अभ्यास के प्रश्न

1. स्पष्टीकरण विधि की व्याख्या कीजिये।

2. स्पष्टीकरण विधि की अवधारणाओं पर प्रकाश डालिये।
3. स्पष्टीकरण विधि किन सिद्धान्तों पर आधारित है? व्याख्या कीजिये।
4. स्पष्टीकरण विधि के गुण बताइये।
5. स्पष्टीकरण विधि की सीमायें बताइये।
6. खोज विधि के पदों को बताइये?
7. खोज विधि किन सिद्धान्तों पर आधारित हैं?

5.7 चर्चा के बिन्दु

1. स्पष्टीकरण विधि को कैसे प्रभावी बनाया जा सकता है? चर्चा कीजिए।
2. खोज विधि के गुण तथा सीमाओं के विषय में चर्चा कीजिए।

5.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–
   (क) स्पष्टीकरण प्रविधि **शिक्षक** क्रेन्द्रित होती है।
   (ख) स्पष्टीकरण प्रविधि **एक** पक्षीय होती है।
   (ग) विवरण एक **सहायक** कथन होता है जबकि स्पष्टीकरण विस्तृत कथन होता है।
   (घ) वर्णन **सामान्य** बिन्दुओं पर किया जाता है जबकि स्पष्टीकरण विशिष्ट होता है।
   (ङ) व्याख्या विषय के **कठिन अंशो** से सम्बन्धित होती है।
2. स्पष्टीकरण विधि की दो अवधारणायें निम्नलिखित हैं–
   i. प्रभावी प्रस्तुतीकरण अधिगम को बढ़ावा देता है।
   ii. छात्र सुनकर अधिक सुगमता से सीखते हैं।
3. ब्रूनर ने संज्ञानात्मक विकास की तीन अवस्थायें बतायी है।
4. गेने के नौ चरण निम्न हैं–
   i. ध्यान खीचना(Gaining Attention)
   ii. अधिगमकर्ता को उद्देश्यों से परिचित करना (Informing learners about objective)
   iii. छात्रों के पूर्व ज्ञान का पता लगात्ता (Recall of prior knowledge)
   iv. उद्दीपक का प्रस्तुतीकरण (Presenting the stimulus)
   v. छात्र को अधिगम सहायता प्रदान करना (Providing Learner Guidance)
   vi. निष्पति का उत्सर्जन (Elicit Performance)
   vii. प्रतिपुष्टि प्रदान करना (Providing Feedback)
   viii. निष्पादन का अनुमान लगाना (Asessing Performance)
   ix. अवधान को बढ़ाना (Enhancing Retention)
5. डाईन्स के गणित अधिगम के चारों सिद्धान्तों के नाम निम्नलिखित हैं–
   (i) गत्यात्मकता का सिद्धान्त
   (ii) अनूभूति की परिवर्तनशीलता का सिद्धान्त
   (iii) गणितीय परिवर्तनशीलता का सिद्धान्त
   (iv) संरचनावादी सिद्धान्त
6. स्पष्टीकरण विधि को प्रभावी बनाने के लिये किये जाने वाले दो उपाय निम्नलिखित हैं–

(i) सबसे पहले शिक्षक को स्वयं पाठ्यवस्तु को स्पष्ट कर लेना चाहिये कि छात्र को क्या पढ़ाना है तथा कितना पढ़ाना है।

(ii) संचार के साधनों का भी भरपूर उपयोग किया जा सकता है तथा तकनीकियों के माध्यम से उदाहरण– ग्राफिक्स, चित्र, आवाज चलचित्रों के उपयोग से स्पष्टीकरण को प्रभावी बनाया जा सकता है।

7. उत्तम स्पष्टीकरण विधि की एक विशेषता है कि–

एक उत्तम स्पष्टीकरण विधि में शिक्षक द्वारा किसी विचार अथवा प्रत्यय की क्रमबद्ध तथा स्पष्ट व्याख्या की जातीहै।

8. निम्नलिखित कथनों में सत्य, असत्य इस प्रकार है–

(क) स्पष्टीकरण विधि का शिक्षण मेने की अवधारणा पर आधारित होना चाहिये। **सत्य**

(ख) स्पष्टीकरण विधि में संचार के साधनों का उपयोग नहीं करना चाहिये। **असत्य**

(ग) स्पष्टीकरण विधि सूचनाओं को प्रदान करने की धीमी विधि है। **असत्य**

(घ) यह छात्र केन्द्रित विधि है। **सत्य**

(ङ) इस विधि से केवल तथ्यात्मक ज्ञान प्रस्तुत किया जा सकता है। **सत्य**

9. खोज विधि के पद निम्नलिखित हैं–

- समस्या प्रस्तुत करना
- आंकड़ो को इकट्ठा करना
- आकड़ों की सारणी बनाना
- परिकल्पना का निर्माण तथा उसका परीक्षण
- नियम बनाने का प्रयास
- नियम का सामान्यीकरण

10. खोज विधि के दो आधारभूत सिद्धान्त निम्नलिखित हैं–

i. क्रियाशीलता का सिद्धान्त

ii. छात्रों के स्वतंत्र चितन के अवसर उपलब्ध कराने का सिद्धान्त

11. रिक्त स्थानों की पूर्ति –

(क) सृजनात्मक

(ख) विभिन्न मानसिक योग्यताओं

(ग) वर्तमान गणित

(घ) इस विधि में **चिन्तन** तथा **बोधगम्यता** पर बल दिया जाता है।

(ङ) शिक्षक अदा की

5.10 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. एन०सी०ई०आर०टी० (2005), ए टेक्सबुक ऑफ कन्टेन्ट कम मैथेडोलोजी ऑफ टीचिंग मैथमेटिक्य, नई दिल्ली, एन०सी०आर०टी०ई०
2. एन०सी०आर०टी०ई० (2006) नेशनल फोकान ग्रुप आन टीजिंग ऑफ मैथेमेटिक्स, नई दिल्ली।
3. भारत सरकार (2005): राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005, एन० सी० ई० आर० टी० ई०, नई दिल्ली।
4. स्मिथ एण्ड रेगोन (2007): इन्स्ट्रक्शनल डिजायन, सेज पब्लिकेशन, कैलिफोनियों।
5. नन, टी० एण्ड ब्रायन, पी० (1997), लनिग एण्ड टीजिंग मैथेमेटिक्स एन इन्टरनेशनल परस्पेक्टिव, सॉइकोलाजी प्रेस।

इकाई– 6 : समूह में गणित अधिगम, समूह कार्य एवं सहकारी या सहयोगात्मक रणनीतियाँ

इकाई की संरचना

6.1 प्रस्तावना
6.2 इकाई के उद्देश्य
6.3 समूह में गणित सीखना
6.4 समूह कार्य
6.5 समूह कार्य के लाभ
6.6 सक्रिय शिक्षण तकनीक का उपयोग
6.7 गणित में समूह शिक्षण की प्रभावी रणनीति और प्रक्रिया
6.8 सहकारी शिक्षण
6.9 सहकारी शिक्षण के प्रकार
6.9.1 अनौपचारिक सहकारी शिक्षण
6.9.2 औपचारिक सहकारी शिक्षण
6.10 सहकारी शिक्षा के प्रमुख तत्व
6.11 पारंपरिक बनाम सहकारी शिक्षण समूहों के बीच अंतर
6.12 सहयोगात्मक शिक्षण
6.13 सहयोगात्मक शिक्षण के लाभ
6.14 सहयोगात्मक शिक्षण की विशेषताएं
6.15 सारांश
6.16 अभ्यास के प्रश्न
6.17 चर्चा के बिंदु
6.18 बोध प्रश्नों के उत्तर
6.19 कुछ उपयोगी पुस्तकें

6.1 प्रस्तावना

गणित सभी विषयों की जननी है। यह व्यक्ति में तर्क करने की क्षमता का विकास करती है तथा व्यक्ति को अमूर्त चिंतन को बढ़ावा देती है। गणित हमारी शिक्षा प्रणाली का एक मुख्य विषय है। इस कथन को किसी विस्तृत व्याख्या की आवश्यकता नहीं है लेकिन हमारे अधिकांश स्कूलों में गणित पढ़ाने की वर्तमान स्थिति संतोषजनक नहीं है। कई छात्र गणित से डरते हैं और गणित की परीक्षा में असफल हो जाते हैं। गणित शिक्षण की इस दयनीय स्थिति को हर कोई जानता है लेकिन बहुत कम लोग इसके कारणों का पता लगाने और गणित शिक्षण में सुधार के तरीकों को लागू करने का प्रयास करते हैं। पिछले दो दशकों के दौरान ही भारत में कुछ शिक्षक–प्रशिक्षक प्रभावी ढंग से गणित पढ़ाने के वैकल्पिक तरीकों और साधनों की खोज कर रहे हैं। इस प्रकार गणितीय निर्देशों ने हमेशा गणित शिक्षकों का ध्यान बेहतर गणितीय शिक्षण प्रणाली की ओर आकर्षित किया है जिससे गणित जैसे कठिन विषय को आसान बनाया जा सकता है।

विद्यालयों और विश्वविद्यालयों में गणित पढ़ने के लिए समूह कार्य का उपयोग किया जाता है। इसमें छात्रों में विषय वस्तु की समझ को बढ़ाने या विशेष कौशल का विकास करने में किया जाता है। इसमें छोटे–छोटे समूह में बांटकर गणित शिक्षण कार्य किया जाता है। इसे सहकारी शिक्षण कहा जा सकता है। सहकारी शिक्षा की स्थापना संयुक्त राज्य अमेरिका में सिनसिनाटी विश्वविद्यालय में 1906 में इंजीनियरिंग कॉलेज के संकाय सदस्य **हरमन श्नाइडर** द्वारा की गई थी।

6.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. समूह में गणित सीखने की महत्ता को समझ सकेंगे।
2. गणित में समूह कार्य का वर्णन कर सकेंगे।
3. सहकारी शिक्षा के प्रमुख तत्वों को जान सकेंगे।
4. सहकारी शिक्षण और उसके प्रकारों की विवेचना कर सकेंगे।
5. पारंपरिक बनाम सहकारी शिक्षण समूहों के बीच अंतर करना सीख सकेंगे।
6. गणित समूह शिक्षण की प्रभावी रणनीतियों और विधियां की व्याख्या कर सकेंगे।
7. सहयोगात्मक शिक्षण के लाभ और विशेषताओं की विवेचना कर सकेंगे।

6.3 समूह में गणित सीखना

विद्यार्थियों द्वारा गणित में रूचि ना लेना एक सामान्य बात है। इससे छुटकारा पाने के लिये गणित शिक्षक को बड़ी चतुराई से काम लेना चाहिए। गणित शिक्षक को कभी भी हतोत्साहित नहीं होना चाहिए। गणित शिक्षक कक्षा–कक्ष को खेल के मैदान के रूप में विकसित कर गणित की समस्याओं को हल करने के लिए विद्यार्थियों में गणित के प्रति उत्सुकता बढ़ाये। अपने आस पास घटित होने वाली समस्याओं को विभिन्न उदाहरणों के माध्यम से गणितीय प्रत्ययों से जोड़ना चाहिए जिससे विद्यार्थी गणित के सवालों को समझ सके। खिलौने, मॉडेल, यथार्थ अध्ययन सामग्री को प्रस्तुत कर विदयाथियों में गणित के समूह भावना व सीखने के लिए उत्सुकता उत्पन्न की जा सकती है।

डिजिटल युग में शैक्षिक खेलों के माध्यम से विद्यार्थी को एक दूसरे से जुड़कर खेल–खेल में मजेदार और नये तरीके से गणित की ढांचा समझने में मदद करती हैं। यदि आपको लगता है कि आपके विद्यार्थी शैक्षिक खेल को सिखने में रुचि नहीं लेते हैं, तो भी आप अपने शिक्षण रणनीतियों में बदलाव लाकर विद्यार्थियों का ध्यान सीखने के प्रति आकर्षित किया जा सकता है।

कुछ बच्चे खेलना पसंद करते हैं, कुछ पढ़ना। अब यह जरूरी हो जाता है कि बच्चों को को वास्तव में किस चीज में आनंद मिलता है। बच्चों की कार्य करने की प्रवृत्ति को देखकर गणित की जानकारी दे सकते हैं। उदाहरण के लिये, किसी जरूरी खेल के स्कोर के साथ या कुछ ऐसी दिलचस्प किताबों को खरीद कर कहानियों के द्वारा जिसमें गणित की बातों के बारे बताया गया हो, जैसी चीजें विद्यार्थियों की गणित में दिलचस्पी बढ़ाने के लिये उपयोग में लाई जा सकती हैं।

अरस्तू के प्रसिद्ध कथंन "मनुष्य एक सामाजिक प्राणी है।" का उपयोग गणित शिक्षक को अवश्य करना चाहिए जिससे बालकों का गणित सीखने के प्रति डर को समाप्त किया जा सकता है। हम अपने बच्चों को गणित सिखाने के लिए बहुत प्रयास करते हैं। लेकिन अक्सर यह देखने को मिलता है कि ज्यादातर बच्चे को गणित के प्रति भय बना रहता है और गणित सीख नहीं पाते हैं। ऐसा क्यों होता है कि बच्चे गणित से दूरी बनाते हैं, गणित सीखने के प्रति अरुचि दिखाते हैं, बच्चे गणित विषय में अनुत्तीर्ण होते हैं यह सब बातें शिक्षकों, अभिभावकों और विद्यार्थियों को सोचना होगा। इन सारे सवालों का जबाब है हम सभी मनुष्यों का सामाजिकता से दूर भागना। अब यह जरूरी हो जाता है कि हम सभी लोग सामाजिकता के मर्म को समझें। सामाजिकता ही वह गुण है जो समूह की भावना को जन्म देता है। सामाजिकता से हम एक दूसरे से मिलकर हर प्रकार की समस्याओं और सवालों का समाधान ढूंढते हैं। एक साथ मिलकर समाधान ढूँढने में समूह मस्तिष्क कार्य करता है जिससे बेहतर से बेहतर परिणाम या निष्कर्ष पर पहुंचते हैं। यही सामाजिकता ही शिक्षक को अलग प्रकार की शिक्षण अधिगम रणनीति अपनाने के लिए प्रेरित करता है कि विद्यार्थियों को समूह में शामिल कर गणित सीखने–सिखाने का अवसर उपलब्ध कराए। समूह में गणित सीखना एक नया अनुभव है। समूह में गणित सीखना से तात्पर्य यह है कि एक समूह में विद्यार्थियों द्वारा एक दूसरे से अंतःक्रिया करके गणित विषय के ज्ञान को समझ कर सीखना है। समूह में गणित विषय सीखने से विद्यार्थियों में गणित के प्रति व्याप्त डर का वातावरण कम हो जाता है और साथ ही गणित विषय के प्रति विद्यार्थियों में रुचि उत्पन्न होती है।

6.4 समूह कार्य

समूह एक ऐसी सामाजिक इकाई है जिसमें कम से कम दो या दो से अधिक लोग मिलकर किसी उद्देश्य को पूर्ण करते हैं। समूह के सदस्य आपस में संबंध स्थापित करते हुए एक समान मूल्य साझा करते हैं। समूह कार्य की एक आवश्यक व अनिवार्य शर्त होती है जिसमें लोग एक साथ रहते हैं। वर्तमान समय में विभिन्न समूहों द्वारा किसी समस्या से संबंधित सभी पहलुओं पर संवाद करके एक निष्कर्ष पर पहुंचते है। समूह कार्य व्यक्तिगत विकास के साथ ही सामाजिक विकास और सकारात्मक परिवर्तन में मदद करता है जिससे समूह के सभी सदस्यों में जिम्मेदारी की भावना और सामाजिक सद्भाव का भी बोध होता है। समूह कार्य में छात्र एक मिश्रित समूह में एक–दूसरे की मदद करके सामान्य उद्देश्यों को पूरा करने के लिए सीखते हैं। समूह कार्य का मूल सिद्धांत प्रत्येक व्यक्ति की दायित्वबोध पर निर्भर करता है। दायित्वविहीन कार्य लक्ष्य प्राप्त करने में बाधक होता है। इसलिए समूह के प्रत्येक सदस्य को पता होना चाहिए कि उसका समूह में क्या दायित्व है। अन्यथा समूह कार्य सफल नहीं हो पाएंगे। समूह कार्य में प्रत्येक सदस्य की भागीदारी होती है, छात्र किसी एक निश्चित उद्देश्य या समस्या के बारे में चर्चा करते हैं, और एक साथ समाधान की तलाश करते हैं। यदि छात्रों को योजनानुसार निर्देशित नहीं किया जाता है तो समूह कार्य पूर्ण करना असंभव हो जाता है। समूह के सदस्यों के बीच आपसी तालमेल से समूह कार्य की दक्षता बढ़ जाती है, जो

छात्र–केंद्रित होता है। समूह कार्य की प्रभावशीलता इस बात पर निर्भर करती है कि समूह कार्य समूह के सदस्यों के बीच आपसी तालमेल बिठाकर योजनाबद्ध और प्रोग्राम की गई गतिविधि के माध्यम से किया जाता हो। कक्षा का आकार बड़ा होने के कारण कक्ष में एक साथ समूह कार्य करना संभव नहीं है। इसलिए कक्षा को छात्रों के छोटे समूहों में विभाजित किया जाना तर्कसम्मत उचित होता है।

समूह कार्य में गणित विषय को सीखना एक खेल की तरह होता है जो सामाजिक पक्ष को बढ़ाकर अधिक मज़ेदार और आनंददायक बनाने का लक्ष्य रखता है। इस प्रकार, गणित के कठिन से कठिन पाठों को याद करने के बजाय चर्चा या बातचीत के साथ खेल–खेल में सीखना पूरा होता है। **वायगोस्टकी (1978)** ने इस बात पर जोर दिया कि "गणितीय ज्ञान बनाने और इसे साझा करने के लिए भाषा महत्वपूर्ण उपकरण है।" इसलिए यह आवश्यक हो जाता है कि छात्र गणित से संबंधित जानकारी और समझ को आपस में साझा करें। गणित सीखना सामाजिक संपर्क के माध्यम से काफी आसान हो जाता है। गणित का अच्छा ज्ञान होने का मतलब यह नहीं है कि हम गणित के किसी भी प्रश्न को आसानी से हल कर सकते हैं। इस संबंध में गणितज्ञ **जेड.एफ. कोकाक** बताते हैं, ''गणित ध्यान का विषय है। असावधानी हमसे गलतियाँ करवा सकती है, भले ही हमें पूरा प्रश्न पता हो। इस मामले में, गणित थोड़ा स्वार्थी और ईर्ष्यालु है। गणित नहीं चाहता कि हम किसी और चीज़ के बारे में सोचें''। समूह कार्य में सभी लोग एक दूसरे की उलझन को नोटिस करेंगे और गलतियाँ करने से बचेंगे। समूह कार्य में ज्ञान साझा करने से ज्ञान की पुनरावृत्ति और ज्ञान में वृद्धि होती है।

6.5 समूह कार्य के लाभ

सामान्य तौर पर समूह कार्य से छात्रों में हम की भावना का विकास कर सामाजिक प्राणी बनने में मदद मिलती है। शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में किए गए समूह कार्य के अनेकों लाभ हैं, जिनका विवरण निम्नलिखित है–

- एक–दूसरे की मदद कर मानवता का पाठ सीखते हैं।
- विद्यार्थी एक दूसरों की राय व विचारों का सम्मान करना सीखते हैं।
- नई रचनात्मक अवधारणाओं को व्यक्त करने के लिए प्रोत्साहित होते हैं।
- व्यक्तिवाद के स्थान पर सामाजिकता से परिचित होते हैं।
- सीखने का समूह अनुभव से लाभन्वित होकर तर्कशक्ति को विकसित करते हैं।
- नए संबंध बना कर मित्रता को मजबूत करते हैं।
- गलतियाँ करने के डर पर काबू कर आत्मविश्वास बढ़ाते हैं।
- अपनी बात को अभिव्यक्त करने में सुधार लाते हैं।

6.6 सक्रिय शिक्षण तकनीक का उपयोग

विचार मंथन, केस अध्ययन, समस्या आधारित शिक्षण जैसे तकनीकें छात्रों को समूह शिक्षण में सक्रिय रूप से भागीदार बनाता है। छात्रों को उनके सीखने में सहायता के लिए पाठ्यपुस्तकें, लेख, टी.एल.एम., ऑनलाइन संसाधन आदि उपलब्ध कराए जाते हैं। प्रत्येक समूह में प्रगति की निगरानी करनी चाहिए और छात्रों को समय–समय पर फीडबैक देना चाहिए ताकि फीडबैक से अन्य आवश्यक सुधार किया जा सके।

6.7 गणित में समूह शिक्षण की प्रभावी रणनीति और प्रक्रिया

1. **भूमिका सौपना–** गणित शिक्षण समूह में सदस्यों को अलग–अलग भूमिकाएं सौंप कर हर कोई को सीखने की प्रक्रिया में भागीदार बनाया जाता है। इसमें शिक्षार्थी सीखने की जिम्मेदारी खुद लेता है।
2. **स्पष्ट निर्देश प्रदान करना–** गणित शिक्षण गतिविधि के लक्ष्यों को सतत रूप से बतलाया जाता है। छात्रों को कार्य करने का विस्तृत निर्देश प्रदान किया जाता है। अपने विचार व दृष्टिकोण को साझा करने के लिए प्रोत्साहित किया जाता है।
3. **सहकर्मी निर्देश–** बच्चों से प्रश्न पूछना या राय मांग की जाती है। फिर एक सर्वेक्षण बनता है छात्र फिर छोटे समूह में अपने उत्तरों पर चर्चा करते हैं।
4. **जिग्सा–** इसमें शिक्षक कक्षा को कई छोटे समूह में बांटते हैं। प्रत्येक समूह अलग–अलग लेकिन संबंधित कार्यों पर करते हैं। समूह के सभी सदस्य कार्य कर लेते हैं तो कक्षा को मिश्रित समूह में विभाजित करते हैं। समूह का प्रत्येक शिक्षार्थी समूह के बाकी सदस्यों को सिखाता है।
5. **पोस्ट और गैलरी वर्क–** इसमें छात्रों को दो या चार के छोटे समूहों में एक साथ एक पाठ पर काम करते हैं। अपने विचारों को कागज की एक सीट पर प्रस्तुत करते हैं। जिसे कक्षा के चारों ओर दीवार पर प्रदर्शित करते हैं। गणित सीखने में सहकारी शिक्षण जिसका उपयोग छात्रों के छोटे विषम समूह को शैक्षणिक और सहयोग कौशल सीखने के लिए उपयोग किया जाता है। यह एक गणित की अक्षमता और सामाजिक संपर्क में कठिनाई वाले छात्र को निर्देशात्मक व्यवस्था प्रदान करता है।
6. **टर्न और टॉक–** इसमें शिक्षक विद्यार्थी को दो या तीन के समूह में बांटते हैं। संकेतों पर प्रक्रिया साझा करनी होती है। अलग–अलग समूह को बुलाकर पूरी कक्षा से प्रतिक्रिया प्राप्त किया जाता है।
7. **सोचें–** जोड़ी बनाएं–साझा करें– यहां शिक्षार्थी शिक्षक के संकेत पर प्रतिक्रिया देते हुए लिखते हैं और फिर उन प्रतिक्रिया को जोड़ों में साझा करते हैं। समूह में सीखने का उपयोग सदियों से शिक्षा और व्यक्तिगत विकास के साधन के रूप में किया जाता रहा है। इसकी शुरुआत 1800 दशक के उत्तरार्ध में अमेरिका में प्रगतिशील शिक्षा आंदोलन के उदय से हुआ। इसमें छात्र केंद्रित शिक्षा, सहयोग और आलोचनात्मक सोच पर जोर दिया गया है। प्राथमिक शिक्षा से लेकर विश्वविद्यालय शिक्षा के स्तर पर समूह में सीखने पर जोर दिया जा रहा है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. समूह में गणित सीखना से क्या आशय है?

....

....

2. समूह क्या है?

....

....

3. समूह कार्य से आप क्या समझते हैं?

....

....

6.8 सहकारी शिक्षण

सहकारी शिक्षण एक सीखने का दृष्टिकोण है जिसमें छात्र अपने और एक दूसरे के ज्ञान और अनुभवों को बढ़ाने के लिए कक्षा में छोटे समूहों में एक साथ काम करते हैं। छात्र अपने काम के लिए व्यक्तिगत रूप से जवाबदेह होते हैं और समग्र रूप से समूह के काम का भी मूल्यांकन किया जाता है और ऐसा वातावरण एक दूसरे को एक सामान्य उद्देश्य के अनुसार एक निश्चित शैक्षणिक लक्ष्य प्राप्त करने में मदद करते हैं जिसमें व्यक्तियों का आत्मविश्वास बढ़ता है। सहकारी शिक्षण में शिक्षार्थियों के बीच संचार और अंतःक्रिया विकसित की जाती है जिससे समस्या–समाधान और सोचने की क्षमता बढ़ती है और जिसमें छात्र सक्रिय रूप से सीखने की प्रक्रिया में भाग लेते हैं और एक–दूसरे को एक विशेष अवधारणा सिखाते हैं ।

इस प्रकार, संक्षेप में हम कह सकते हैं कि सहकारी शिक्षा एक सहकर्मी–केंद्रित शिक्षाशास्त्र है जो शैक्षणिक उपलब्धि, प्रतिधारण, आत्म–सम्मान, मानवीय मूल्यों, सहनशीलता शक्ति, दूसरों के विचारों का सम्मान करने की शक्ति आदि को प्रोत्साहित कर सकती है और सकारात्मक और स्वस्थ सामाजिक संबंधों का निर्माण कर सकती है। छात्रों के लिए और यह प्री–स्कूल से लेकर उच्चतर माध्यमिक विद्यालय तक सभी स्तरों पर एक सफल शिक्षण रणनीति है।

6.9 सहकारी शिक्षण के प्रकार

सहकारी शिक्षण सकारात्मक आत्मनिर्भरता पर आधारित शिक्षण प्रविधि है। इसमें व्यक्तियों द्वारा बेहतर प्रदर्शन के साथ ही पूरे समूह द्वारा बेहतर प्रदर्शन होता है। यह औपचारिक और अनौपचारिक हो सकता है।

6.9.1 अनौपचारिक सहकारी शिक्षण–अनौपचारिक सहकारी शिक्षण में एक कक्षा के दो से चार छात्रों के छोटे अस्थाई समूह कुछ समय के लिए या एक कक्षा अवधि तक प्रश्नों के उत्तर या देने या संकेत पर प्रक्रिया देने के लिए एक साथ मिलकर काम करते हैं। जैसे :

1. **साझा जोड़ी के बारे में विचार करें**– अध्यापक चर्चा के लिए एक प्रश्न पूछता है। छात्रों को निर्देश दिया जाता है कि वे अपने उत्तर को चर्चा करने के लिए सहकर्मी के पास जाने से पहले सोचें या लिखें फिर समूह अपने उत्तर को कक्षा में साझा करें।
2. **सहकर्मी अनुदेश**– थिंक–पेपर–शेयर में व्यक्तिगत प्रक्रिया उपकरण शामिल होते हैं। इसमें बहुविकल्पीय प्रश्न होता है। छात्र अपने उत्तर के बारे में सोचते हैं। चर्चा करने के लिए प्रतिक्रिया पर वोट करते हैं। शिक्षक द्वारा छात्र प्रतिक्रिया का ग्राफ प्रकट करने और इसे बड़ी कक्षा में चर्चा करने के लिए एक उत्तेजना के रूप में उपयोग करने से पूरा होता है।
3. **आरा**– इसमें छात्रों का समूह चार की टीम में कार्य करती है। जहां पर छात्र नई सामग्री के एक खंड पर विशेषज्ञ बन सकें। विशेषज्ञ टीम नई सामग्री के अन्य खंड पर कार्य करती हैं।

6.9.2 औपचारिक सहकारी शिक्षण–औपचारिक सहकारी शिक्षण में छात्र एक संयुक्त कार्य पूरा करने के लिए एक या अधिक कक्षा अवधि के लिए एक साथ काम करते हैं। इसमें शिक्षण गतिविधि के लिए शिक्षण उद्देश्यों को परिभाषित करता है और छात्रों को समूह में बांटता है–

- यह समूह विशेष होते हैं। यहाँ पर छात्र आवश्यक कौशल पर विशेष ध्यान होता है।
- समूह के भीतर छात्रों को विशेष भूमिका सौंपी जाती है।
- शिक्षक समूह कार्य के दौरान सक्रिय भूमिका निभाता है। कार्य की निगरानी और उचित मार्गदर्शन करता है।

- अध्यापक समूह को भविष्य में समूह कार्य के लिए संभावित सुधारों की पहचान करने तथा अन्तःक्रिया चिंतन हेतु प्रोत्साहित करता है।

6.10 सहकारी शिक्षा के प्रमुख तत्व

कोई भी शिक्षण तकनीक तभी प्रभावी और सफल होगी जब उस तकनीक का क्रियान्वयन सावधानीपूर्वक सही दिशा में किया जाए। सहकारी शिक्षण के कई रूप या तकनीकें हैं लेकिन ये सभी तकनीकें तब सबसे ज्यादा प्रभावी होती हैं जब उनमें कुछ तत्वों का सावधानीपूर्वक उपयोग शामिल होता है। शिक्षार्थियों के बीच प्रभावी शैक्षणिक वृद्धि के लिए सहकारी शिक्षा के निम्नलिखित पाँच तत्व नीचे दिए गए हैं –

(1) सकारात्मक अन्योन्याश्रय :सकारात्मक परस्पर निर्भरता एक स्वस्थ समाज की भावना है जहां सभी सदस्य एक–दूसरे की मदद करने और अपनी गति से अपनी शैक्षणिक प्रगति को बढ़ाने के लिए तैयार हैं। किसी साझा लक्ष्य या कार्य को पूरा करने के लिए समूह का प्रत्येक सदस्य एक–दूसरे पर निर्भर होता है। प्रत्येक सदस्य की सहायता से समूह पूर्व निर्धारित शैक्षणिक उद्देश्यों तक पहुँचने में सक्षम होता है।

(2) आमने–सामने बातचीत : समूह के सदस्यों की सफलता शिक्षार्थियों के भीतर और उनके बीच आमने–सामने की बातचीत पर भी निर्भर करती है जो एक–दूसरे की प्रशंसा, प्रोत्साहन, समर्थन या सहायता करने से ही संभव है।

(3) व्यक्तिगत जवाबदेही : व्यक्तिगत जवाबदेही सहकारी शिक्षा का एक अधिक महत्वपूर्ण तत्व है जिसमें प्रत्येक समूह को उसके काम के लिए ज़िम्मेदार ठहराया जाता है। यह सदस्यों को समूह के अन्य सदस्यों की उपलब्धियों पर हिचकिचाहट से बचने में भी मदद करता है।

(4) **सामाजिक कौशल** : सहकारी शिक्षण समूहों में प्रत्येक शिक्षार्थी को सामाजिक कौशल सीखने के लिए प्रेरित किया जाता है। ये सामाजिक कौशल समूह के सदस्यों में नेतृत्व करने की क्षमता विकसित करने में मदद करते हैं जैसे आत्म विश्वास, संप्रषण कौशल, आत्म सम्मान, निर्णय लेना, विश्वास–निर्माण, मदद करने की प्रवृत्ति और संचार अलग–अलग कौशल हैं जो सहकारी शिक्षा में विकसित होते हैं। प्रत्येक व्यक्ति में सामाजिक कौशल विकसित करके हम एक सभ्य समाज का निर्माण कर सकते हैं।

(5) **समूह प्रसंस्करण** : समूह प्रसंस्करण इस बात का आकलन है कि समूह अपने लक्ष्यों या कार्यों को प्राप्त करने के लिए कैसे कार्य कर रहे हैं। समूह प्रसंस्करण में छात्रों और शिक्षक को विशेष आवश्यकताओं पर चर्चा करने और समूह के भीतर समस्याओं को हल करने का मौका मिलता है। समूह के सदस्यों को अपने अवांछित व्यवहार को संशोधित करने और समूह कार्य में सफल परिणामों के लिए अपनी भावनाओं, अनुभवों, समस्याओं और समूह सीखने की प्रक्रिया के अनुपयोगी पहलुओं को व्यक्त करने का मौका मिलता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

4. सहकारी शिक्षा की स्थापना किसने किया था?

   ....

   ....

5. सहकारी शिक्षण को परिभाषित कीजिए।

   ....

....

6. सहकारी शिक्षण कितने प्रकार के होते हैं? इनके नाम लिखिए।

....

....

7. सहकारी शिक्षा के प्रमुख तत्वों के नाम लिखिए।

....

....

6.11 पारंपरिक बनाम सहकारी शिक्षण समूहों के बीच अंतर

पारंपरिक शिक्षण समूहों और सहकारी शिक्षण समूहों के बीच निम्नलिखित अंतर हैं, जो नीचे दिए गए हैं–

क्र.सं.	पारंपरिक समूह	सहकारी समूह
1.	कम अन्योन्याश्रित	उच्च सकारात्मक अन्योन्याश्रित
2.	सदस्य केवल स्वयं की जिम्मेदारी लेता है।	सदस्य अपनी और एक–दूसरे की सीख के लिए जिम्मेदार हैं।
3.	ध्यान केवल व्यक्तिगत प्रदर्शन पर है।	समूह प्रदर्शन पर ध्यान केंद्रित है।
4.	केवल व्यक्तिगत जवाबदेही	समूह और व्यक्तिगत दोनों जवाबदेही सदस्य उच्च गुणवत्ता वाले काम के लिए खुद को और दूसरों को जवाबदेह ठहराते हैं।
5.	असाइनमेंट पर एक–दूसरे की सीख के प्रति कम प्रतिबद्धता के साथ चर्चा की जाती है।	सदस्य एक–दूसरे के सीखने के प्रयासों में सहायता और समर्थन करके वास्तविक कार्य करके एक–दूसरे की सफलता को बढ़ावा देते हैं।
6.	टीम वर्क कौशल सीधे तौर पर नहीं सिखाया जाता है।	टीम वर्क कौशल पर जोर दिया जाता है।
7.	सदस्य की भागीदारी को निर्देशित करने के लिए एक नेता को नियुक्त किया जाता है।	सदस्यों को सामाजिक कौशल का उपयोग करना सिखाया जाता है और उनसे सभी सदस्यों द्वारा साझा नेतृत्व की अपेक्षा की जाती है।
8.	इस कार्य की गुणवत्ता का कोई समूह प्रसंस्करण नहीं हैं।	समूह काम की गुणवत्ता और सदस्य कितने प्रभावी ढंग से एक साथ काम कर रहे हैं, इसकी प्रक्रिया करता है।
9.	व्यक्तिगत उपलब्धियों को पुरस्कृत किया जाता है।	लगातार सुधार पर जोर दिया गया है।
10.	अधिक पूर्वाग्रह, रूढ़िवादिता, पलायनवाद, और स्थिति से वापसी/ अनुपस्थिति।	कम पूर्वाग्रह, अधिक आत्मविश्वास, अधिक भागीदारी और दृष्टिकोण में बदलाव।

छात्रों के दिमाग में जानकारी स्थानांतरित करना न केवल शिक्षा का उद्देश्य है बल्कि छात्रों के दिमाग को शक्तिशाली और उपयोगी अवधारणाओं से जोड़ना भी है। शिक्षण के लिए छात्र–केंद्रित, गतिविधि–आधारित, योग्यता–निर्भर सहकारी दृष्टिकोण का अभ्यास करने से सभी स्तरों पर शिक्षा की गुणवत्ता मजबूत होती है, जो विद्यार्थियों के लिए सीखने को एक सुखद अनुभव बना देगी। एक वास्तविक और स्वस्थ कक्षा के माहौल में छात्रों को विभिन्न तरीकों से पढ़ाया जाना चाहिए जो छात्रों को विचारों को स्वयं लागू करने का अवसर देकर छात्रों के लिए जानकारी को सार्थक और प्रासंगिक बनाते हैं।

6.12 सहयोगात्मक शिक्षण

सहयोगात्मक शिक्षण शिक्षा की एक विधि है जिसमें छात्रों का एक समूह परियोजनाओं, असाइनमेंट आदि का उपयोग करके एक साथ कुछ सीखने का प्रयास करता है। इस प्रकार के शिक्षण में छात्रों को दूसरों के कौशल और संसाधनों से सीखने का अवसर मिलता है। सहयोगात्मक शिक्षण में सीखने की प्रक्रिया के दौरान छात्र सक्रिय रहते हैं तथा छात्र एक दूसरे की धारणाओं और विचारों को जानने में मदद करते हैं। छात्रों में सोच व क्षमता के विकास करने में मदद मिलती है, इसके साथ ही उनमें बोलने और सक्रिय सुनने के कौशल का विकास होता है। सहयोगात्मक शिक्षण द्वारा छात्रों में रचनात्मकता, सृजनशीलता तथा तार्किक सोच का विकास किया जाता है। इससे छात्रों में टीमवर्क व सामूहिकता का विकास होता है।

6.13 सहयोगात्मक शिक्षण के लाभ

गणित में सहयोगात्मक शिक्षण सीखने और सीखाने का एक शैक्षिक दृष्टिकोण है जिसमें छात्रों के समूह समस्याओं को हल करने व कार्यों को पूरा करने में किया जाता है। जहां छात्र एक दूसरे से बातचीत करते हैं। समस्या पर चर्चा करते हैं। उसे जटिल प्रश्नों को हल करने की कोशिश करते हैं। सहयोगात्मक शिक्षण की अवधारणा छात्रों को याद करने, समझ बढ़ाने, नई जानकारी को प्राप्त करने में सहायक होती है, दूसरे के दृष्टिकोण को समझते हैं तथा किसी विषय पर बेहतर समझ को प्राप्त करते हैं। सहयोगात्मक शिक्षण से उत्पन्न लाभों की चार मुख्य श्रेणियाँ निम्नवत हैं–

(क) शैक्षणिक लाभ

(ख) सामाजिक लाभ

(ग) मनोवैज्ञानिक लाभ

(घ) मूल्यांकन लाभ

(क) शैक्षणिक लाभ :

(1) सहयोगात्मक शिक्षा उच्च स्तरीय सोच कौशल को विकसित करती है और यह छात्रों में मेटा–अनुभूति को बढ़ावा देती है।
(2) इसमें छात्रों को पाठ्यक्रम और कक्षा प्रक्रियाओं को विकसित करने में शामिल किया गया है।
(3) यह प्रदर्शन लक्ष्य के बजाय सीखने के लक्ष्य को बढ़ावा देता है।
(4) यह विषय वस्तु के प्रति सकारात्मक दृष्टिकोण को बढ़ावा देता है।
(5) यह उच्च उपलब्धि और कक्षा उपस्थिति को बढ़ावा देता है।

(ख) सामाजिक लाभ :

(1) सहयोगात्मक शिक्षा विविधता और समझ को प्रोत्साहित करती है।
(2) यह एक मजबूत सामाजिक सहायता प्रणाली बनाता है।
(3) छात्रों में एक–दूसरे के प्रति जिम्मेदारी विकसित होती है।
(4) यह अधिक सकारात्मक संबंध बनाता है।
(5) छात्रों को सिखाया जाता है कि विचारों की आलोचना कैसे करें लेकिन लोगों की नहीं।
(6) यह प्रक्रिया एक ऐसा वातावरण बनाती है जहां छात्र नेतृत्व कौशल विकसित करने के लिए अभ्यास कर सकते हैं।

(ग) मनोवैज्ञानिक लाभ :

(1) सहयोगात्मक अधिगम से कक्षा की चिंता काफी कम हो जाती है।
(2) यह छात्रों में आत्म–सम्मान पैदा करता है।
(3) यह छात्रों को मदद लेने और अपने साथियों से ट्यूशन स्वीकार करने के लिए प्रोत्साहित करता है।
(4) यह छात्रों और शिक्षकों के लिए उच्च्च उम्मीदें रखता है।
(5) यह सीखने के अनुभव के साथ छात्रों की संतुष्टि को बढ़ाता है।

(घ) मूल्यांकन लाभ :

(1) व्यक्तिगत छात्रों की तुलना में समूहों का पर्यवेक्षण करना आसान होता है।
(2) व्यक्तिगत मूल्यांकन के साथ साथ सामूहिक मूल्यांकन भी संभव होता है।
(3) सामूहिक मूल्यांकन में बनाए गए समूह का मूल्यांकन होता है जिससे छात्रों में परीक्षा का डर समाप्त हो जाता है।
(4) सामूहिक उपलब्धि से छात्र उत्साहित हो मिलजुल कर सीखने के लिए प्रेरित होते हैं।

6.14 सहयोगात्मक शिक्षण की विशेषताएं

सहकारी शिक्षा का उपयोग पाठ्य–पुस्तक निर्देश को पूरा करने में, छात्र को शुरू किए गए अभ्यास कौशल का विकास करने में तथा मौखिक भाषा विकास के लिए किया जाता है। इस प्रकार हम कर सकते हैं कि गणित जैसे कठिन विषय को बच्चों के छोटे–छोटे समूह में बांटकर निर्देशन प्रदान कर, गणित के सवालों को आसानी से हल तथा समझ विकसित कराया जा सकता है। वही गणित को सहयोगात्मक रणनीतियां द्वारा एक दूसरे का सहयोग करते हुए सीखते हैं। इसमें छात्रों को याद करने, समझ बढ़ाने व नई जानकारी प्रदान करने में मदद करती है। यदि इन सब रणनीतियों को अपनाकर शिक्षण कार्य किया जाए तो गणित के जटिल से जटिल सवालों को हल करने और अवधारणा के विकास में मदद मिल सकती है।

एक समूह की जिम्मेदारियों को स्पष्ट करना। कार्य शुरू करने से पहले समूह के सभी उद्देश्यों को परिभाषित करना संभव होता है। इसके बाद उन्हें कार्य की जवाबदेही में मदद मिलती है। सहयोगात्मक शिक्षण की निम्न विशेषता है–

1. सहयोगात्मक शिक्षण सभी टीम सदस्यों के समान और वितरित प्रयासों से गतिविधि के उद्देश्य को पूरा करने में मदद देती है।
2. इसमें छात्र नई चुनौतियों को स्वीकार करते हैं और अन्य छात्रों की मदद से परियोजनाओं के विभिन्न भागों पर काम करने में मदद मिलती है।
3. इसमें छात्रों के संस्था के समान विचार/रुचि रखने वाले मित्र बनाने और नेटवर्क की एक श्रृंखला बनाने में मदद मिलती है।

4. छात्रों को नए छात्रों से मिलने, उनके तौर तरीके, संस्कृतियों के बारे में जानने और उनके साथ काम करने में मदद मिलती है।
5. इसमें विभिन्न कौशलों का प्रयोजन होता है। सदस्यों के अनुभव, योग्यता व रुचि के अनुसार कार्य करने की जिम्मेदारी वितरित किया जाता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

8. सहयोगात्मक शिक्षण से आप क्या समझते हैं?

....

....

9. सहयोगात्मक शिक्षण से उत्पन्न लाभ को किन–किन श्रेणियों में बाँटा जा सकता है?

....

....

6.15 सारांश

शिक्षकों के लिए, गणित में अवधारणा प्राप्ति को बढ़ाने और छात्रों के बीच उपलब्धि प्रेरणा और गणित के प्रति रूचि विकसित करने के लिए सहकारी शिक्षण तकनीक पारंपरिक पद्धति का एक बेहतर विकल्प हो सकती है। गणितीय सामग्री से संबंधित तैयार वर्कशीट का उपयोग करके शिक्षक अपने छात्रों की गणित विषय में रुचि बढ़ा सकते हैं और उनमें गणितीय अवधारणाओं को विकसित करने में मदद कर सकते हैं।

6.16 अभ्यास के प्रश्न

1. समूह कार्य से आपका क्या आशय है? इसके लाभ का वर्णन कीजिए।
2. गणित समूह शिक्षण की प्रभावी रणनीतियों और विधियां की व्याख्या कीजिए।
3. सहकारी शिक्षण से आप क्या समझते हैं? इसके प्रकारों की व्याख्या कीजिए।
4. गणित समूह शिक्षण की प्रभावी रणनीतियों और विधियों पर प्रकाश डालिये।
5. सहयोगात्मक शिक्षण से आप क्या समझते हैं? इससे उत्पन्न लाभों का वर्णन कीजिए।

6.17 चर्चा के बिंदु

1. समूह शिक्षण की कौन– कौन सी गतिविधियों हैं? इस पर चर्चा कीजिये ।
2. सहकारी शिक्षा के प्रमुख तत्व कौन कौन से हैं? विस्तारपूर्वक चर्चा कीजिए।
3. पारंपरिक बनाम सहकारी शिक्षण समूहों के बीच क्या अंतर है? इसकी चर्चा कीजिए।

6.18 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. समूह में गणित सीखना से तात्पर्य यह है कि एक समूह में विद्यार्थियों द्वारा एक दूसरे से अंतःक्रिया करके गणित विषय के ज्ञान को समझ कर सीखना है।

2. समूह एक ऐसी सामाजिक इकाई है जिसमें कम से कम दो या दो से अधिक लोग मिलकर किसी उद्देश्य को पूर्ण करते हैं।
3. समूह कार्य से तात्पर्य छात्रों का एक मिश्रित समूह जिसमें छात्र एक–दूसरे की मदद करके सामान्य उद्देश्यों को पूरा करने के लिए सीखते हैं।
4. सहकारी शिक्षा की स्थापना संयुक्त राज्य अमेरिका में सिनसिनाटी विश्वविद्यालय में 1906 में इंजीनियरिंग कॉलेज के संकाय सदस्य हरमन श्नाइडर द्वारा की गई थी।
5. समूह कार्य में छात्रों में विषय वस्तु की समझ बढ़ाने या विशेष कौशल विकास करने में किया जाता है। इसमें छोटे–छोटे समूह में बांटकर गणित शिक्षण कार्य किया जाता है। इसे सहकारी शिक्षण कहा जा सकता है।
6. सहकारी शिक्षण दो प्रकार के होते है–

   1. अनौपचारिक सहकारी शिक्षण और 2. औपचारिक सहकारी शिक्षण।
7. सहकारी शिक्षा के पाँच प्रमुख तत्व इस प्रकार हैं–
   - (i) सकारात्मक अन्योन्याश्रय
   - (ii) आमने–सामने बातचीत
   - (iii) व्यक्तिगत जवाबदेही
   - (iv) सामाजिक कौशल
   - (v) समूह प्रसंस्करण।
8. सहयोगात्मक शिक्षण शिक्षा की एक विधि है जिसमें छात्रों का एक समूह परियोजनाओं, असाइनमेंट आदि का उपयोग करके एक साथ कुछ सीखने का प्रयास करता है। इस प्रकार के शिक्षण में छात्रों को दूसरों के कौशल और संसाधनों से सीखने का अवसर मिलता है।
9. सहयोगात्मक शिक्षण से उत्पन्न लाभों की चार मुख्य श्रेणियाँ निम्नवत हैं–

   (क) शैक्षणिक लाभ,

   (ख) सामाजिक लाभ,

   (ग) मनोवैज्ञानिक लाभ

   (घ) मूल्यांकन लाभ।

6.19 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Slavin, R.E. (2014), Cooperative Learning: Theory, Research, and Practice (3rd ed.), Bostan: Pearson.
2. Schickedanz, J.A. (2015), The Cooperative Classroom: Teaching Strategies for Using Learning Teams, New York: Routledge.
3. शर्मा, पी. डी. (2012), सहयोगात्मक शिक्षण विधियाँ. वाणी प्रकाशन, नई दिल्ली।

4. सक्सेना, एन. आर.,मिश्रा, बी. के. (2015), सहकारी शिक्षारू सिद्धांत और व्यवहार, शिक्षा भारती प्रकाशन, आगरा।
5. त्रिपाठी, आर.एस. (2013), सहकारी शिक्षण और अधिगम की विधियाँ, लक्समी पब्लिशिंग हाउस, वाराणसी।
6. कुमार, एस.(2011), सहकारी शिक्षणः सिद्धांत एवं प्रयोग,प्रभात प्रकाशन, नई दिल्ली।
7. गुप्ता,एम.(2016), सहयोगात्मक शिक्षण और अधिगम के नवीन आयाम, राजकमल प्रकाशन, पटना।

B.Ed.E-33

Pedagogy of Mathematics

(गणित का अध्यापन विज्ञान)

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय,
प्रयागराज

खण्ड – 03 87

गणित शिक्षण की रणनीतियाँ - II

इकाई 7	समझ के लिए शिक्षण	89
इकाई 8	गणित में समस्या समाधान शिक्षण, परिभाषा और महत्व	103
इकाई 9	बीजगणित एवं ज्यामिति में समस्या समाधान	118

खण्ड 03 : गणित शिक्षण की रणनीतियाँ - II

खण्ड परिचय

प्रस्तुत खण्ड 03 गणित अधिगम की रणनीतियों से संबंधित है जिसमें कुल तीन इकाईयां हैं। ये इकाईयां इस प्रकार हैं–

इकाई 7 प्रमाण समझने के लिए शिक्षण से संबंधित है, इकाई 8 गणित में समस्या समाधान शिक्षण, परिभाषा और महत्व से संबंधित है तथा इकाई 9 बीजगणित और ज्यामिति में समस्या समाधान से संबंधित है। इस खण्ड में गणित अधिगम की रणनीतियों से संबंधित विस्तृत वर्णन प्रस्तुत किया गया है। इस खण्ड की तीनों इकाइयों विवरण निम्नवत है–

इकाई 7 :इस इकाई के अंतर्गत प्रमाण समझने के लिए शिक्षण की चर्चा की गई है। गणित पढ़ाने के लिए प्रमाण की संरचना की समझ को छात्रों में विकसित करना अति आवश्यक होता है। प्रमाण समझने हेतु प्रमाण से संबंधित विभिन्न संप्रत्ययों जैसे प्रमाण की योजना, प्रमाण कार्य, प्रमाण की सैद्धांतिक रूपरेखा, प्रमाण की संरचना की समझ, प्रमाण की संरचना की समझ के स्तर का मियाज़ाकी मॉडल, छात्रों में प्रमाण समझ विकसित करने के उद्देश्य, प्रमाण शिक्षण के स्तर, गणितीय शिक्षण में प्रमाण का महत्व, गणितीय प्रमाण को समझने में पी.क्यू.4आर. (च्फ4त्) शिक्षण रणनीति, प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण, गणित शिक्षण में व्याख्यात्मक प्रमाण एवं व्याख्यात्मक प्रमाण विकास का सिद्धांत आदि का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है।

इकाई 8 :इस इकाई के अंतर्गत गणित में समस्या समाधान शिक्षण, परिभाषा और महत्व की चर्चा की गई है। गणित विषय से समस्या समाधान एक महत्वपूर्ण शिक्षण रणनीति मणि जाती है जिसका उपयोग शिक्षक कक्षा कक्ष में छात्रों की गणित विषय से संबंधित समस्याओं का समाधान करने में करता है। इस इकाई में गणितीय समस्या को हल करने के लिए समस्या समाधान शिक्षण रणनीति से संबंधित अनेक महत्वपूर्ण बिन्दुओं जैसे समस्या समाधान की परिभाषा, गणित में समस्या समाधान शिक्षण का इतिहास, समस्याओं को हल करने का तरीका, समस्या–समाधान कौशल विकसित करने की प्रक्रिया, गणित मे समस्या समाधान शिक्षण की प्रक्रिया, गणितीय समस्याओं को हल करने की विधियाँ और अनुमान, गणित मे समस्या समाधान शिक्षण का महत्व, समस्या समाधान शिक्षण में प्रयुक्त रणनीतियाँ, समस्या समाधान शिक्षण की सीमाएँ, गणित विषय में समस्या समाधान शिक्षण की प्रासंगिकता आदि का उल्लेख किया गया है।

इकाई 9 :प्रस्तुत इकाई के अंतर्गत बीजगणित और ज्यामिति में समस्या समाधान की चर्चा की गई है। समस्या समाधान रणनीति एक व्यवस्थित शिक्षण प्रक्रिया है जिसे गणितीय समस्याओं का सामना करने और प्रभावी समाधान खोजने के लिए प्रयास किया जाता है। प्रस्तुत इकाई में बीजगणित और ज्यामिति से संबंधित समस्याओं के समाधान हेतु कुछ महत्वपूर्ण बिन्दुओं जैसे समस्या–समाधान की तकनीकें, समस्या समाधान में आलोचनात्मक सोच और रचनात्मकता की भूमिका, समस्या–समाधान में सामान्य गलतियाँ और उनसे बचाव, ज्यामिति में समस्या–समाधान, ज्यामितीय अवधारणाओं का अवलोकन, ज्यामितीय समस्याओं के समाधान के उपाय, समस्या समाधान विधि के सोपान, समस्या–समाधान में ज्यामिति के साथ बीजगणित का समावेश, वास्तविक जीवन में बीजगणित–ज्यामितीय का अनुप्रयोग, बीजगणित–ज्यामितीय का अन्य विषयों से संबंध, समस्या–समाधान को बढ़ावा देने के लिए रणनीतियाँ एवं गणित में समस्या समाधान में प्रयुक्त संसाधन और उपकरण आदि का विवरण प्रस्तुत किया गया है।

इकाई–7 : प्रमाण समझने के लिए शिक्षण

इकाई संरचना

7.1 प्रस्तावना

7.2 इकाई के उद्देश्य

7.3 प्रमाण की योजना

7.4 प्रमाण कार्य

7.5 प्रमाण की सैद्धांतिक रूपरेखा

- 7.5.1 प्रमाण की संरचना की समझ
- 7.5.2 प्रमाण की संरचना की समझ के स्तर का मियाज़ॉकी मॉडल

7.6 छात्रों में प्रमाण समझ विकसित करने के उद्देश्य

7.7 प्रमाण शिक्षण के स्तर

7.8 गणितीय शिक्षण में प्रमाण का महत्व

7.9 गणितीय प्रमाण को समझने में पी.क्यू.4आर. (PQ4R) शिक्षण रणनीति

7.10 प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण

- 7.10.1 गणित शिक्षण में व्याख्यात्मक प्रमाण
- 7.10.2 व्याख्यात्मक प्रमाण विकास का सिद्धांत

7.11 सारांश

7.12 अभ्यास के प्रश्न

7.13 चर्चा के बिंदु

7.14 बोध प्रश्नों के उत्तर

7.15 कुछ उपयोगी पुस्तकें

7.1 प्रस्तावना

गणित की नींव को मजबूत करने के लिए गणितीय प्रमाण द्वारा गणितीय दावों को साबित करना आवश्यक माना जाता है। प्रमाणों के द्वारा गणितीय निष्कर्ष प्राप्त कर स्वयंसिद्धों और सिद्ध प्रमेयों को तार्किक कसौटी पर कसा जाता है। जिस प्रकार विज्ञान विषय की नींव अवलोकन और प्रयोग पर आधारित होती है, उसी प्रकार गणित विषय तर्क और प्रमाण पर आधारित होती है। प्रमाण एक गणितीय तार्किक प्रक्रिया है जो पहले से स्वीकृत सत्यों, जैसे स्वयंसिद्धों और प्रमेयों पर आधारित होता है। प्रमाण का उपयोग किसी भी गणितीय कथन की सत्यता को स्थापित करने के लिए किया जाता है।

बिना तर्क के प्रमाण की स्थापना नहीं की जा सकती है। प्रमाण क्रमबद्ध सोपानों का अनुसरण पर आधारित होता है। प्रमाण गणित के लिए मौलिक होते हैं। प्रमाण किसी भी गणितीय निष्कर्ष तक पहुँचने में एक गंभीर साधन के रूप में उपयोग किए जाते है। प्रमाण किसी विशेष गणितीय कथन विशिष्ट उदाहरणों या अनुभवजन्य साक्ष्य से परे सार्वभौमिक रूप से मान्य होते हैं।

7.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. प्रमाण की योजनाओं को समझ सकेंगे।
2. प्रमाण कार्यों की विवेचना कर सकेंगे।
3. प्रमाण की सैद्धांतिक रूपरेखा के बारे जानकारी रख सकेंगे।
4. प्रमाण शिक्षण के स्तर की व्याख्या कर सकेंगे।
5. गणितीय शिक्षण में प्रमाण का महत्व को समझ सकेंगे।
6. प्रमाण की संरचना की समझ के स्तर का मियाज़ाकी मॉडल की व्याख्या कर सकेंगे।
7. गणितीय प्रमाण को समझने में पी.क्यू.4आर. (PQ4R) शिक्षण रणनीति का वर्णन कर सकेंगे।
8. प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण की प्रक्रिया का वर्णन कर सकेंगे।

7.3 प्रमाण की योजना

हरेल और सॉडर (1998) ने प्रमाण की योजनाओं को तीन भागों वाह्य दृढ विश्वास, अनुभवजन्य और विश्लेषणात्मक के रूप में वर्गीकृत किया है, जिसका विवरण निम्नवत है–

1. **वाह्य दृढ विश्वास प्रमाण योजनाएँः** वाह्य दृढ विश्वास मुख्यतः बाहरी स्रोतों पर आधारित होती हैं। वाह्य स्रोत प्रमाणों की अवधारणाओं को प्रभावित करते हैं। ये वाह्य स्रोत सत्तावादी वर्चस्व (एक शिक्षक, एक पाठ्यपुस्तक, एक ग्रंथ, आदि), अनुष्ठान (प्रमाणों का पारंपरिक प्रारूप जैसे– यज्ञ, हवन, धार्मिक कर्मकाण्ड, सांस्कृतिक क्रियाकलाप इत्यादि) एवं प्रतीकात्मक (अंधविश्वास, रूढ़ियाँ, मान्यताएं, आदि) रूप में प्रमाणों की स्थापना में मदद करते हैं।
2. **अनुभवजन्य प्रमाण योजनाएँः** दृश्य धारणाओं या उदाहरण–आधारित प्रमाणों को अनुभवजन्य प्रमाण के अंतर्गत आते हैं जिसका उपयोग करके विद्यार्थी द्वारा अपने अनुमानों को साबित या अस्वीकृत किया जाता है। जैसे– चक्रवृद्धि ब्याज, ऐकिक नियम आदि के विभिन्न गणितीय उदाहरणों के माध्यम से सही या गलत अनुमानों को स्वीकार या अस्वीकार करते हैं।

3. **विश्लेषणात्मक प्रमाण योजनाएँ:** इसके अंतर्गत दो प्रकार के प्रमाणों को सम्मिलित किया जाता है, 1. परिवर्तनकारी प्रमाण 2. स्वयंसिद्ध प्रमाण। परिवर्तनकारी प्रमाण में तर्क से अनुमान को सही साबित किया जाता है। जैसे– जिस प्रकार 2 और 3 का योग 5 होता है, उसी प्रकार 3 और 5 का योग 8 होगा। स्वयंसिद्ध प्रमाण में कोई भी परिणाम क्रमबद्ध तार्किक प्रक्रिया की परिणाम से प्राप्त किया जाता है। जैसे– किसी भी दो संख्याओं का योग एक तीसरी संख्या होती है, के आधार पर छात्र यह सिध्द कर सकते हैं कि दो सम संख्याओं का योग हमेशा सम संख्या होती है।

7.4 प्रमाण कार्य

डीविलियर्स (1990), के अनुसार पाँच प्रकार के प्रमाण कार्य होते हैंः 1. सत्यापन/दृढ विश्वास (किसी कथन की सत्यता स्थापित करना); 2. स्पष्टीकरण (यह साबित करना कि प्रदर्शित कथन सत्य क्यों है) 3. व्यवस्थितकरण (कई परिणामों को एक वैश्विक प्रणाली में व्यवस्थित करना) 4. खोज (प्रमाण से उत्पन्न होने वाले नए परिणामों तक पहुँचना संभव बनाना) और 5. संचार (गणितीय ज्ञान को व्यक्त करना)। प्रमाण के उपयोग के दौरान कक्षा में छात्रों को दिखाए गए कुछ कार्य ही सत्यापन और स्पष्टीकरण होते हैं। व्यवस्थितकरण कार्य के अंतर्गत सत्यापनध्संचार या स्पष्टीकरण कार्यों के साथ अनौपचारिक प्रमाण दिया जा सकता है जबकि खोज के अंतर्गत लोग औपचारिक प्रमाण दे सकते हैं। अंत में संचार कार्य के द्वारा गणितीय ज्ञान को छात्रों के समक्ष प्रकट किया जाता है। डीविलियर्स के प्रमाण कार्यों पर आधारित गतिशील ज्यामिति सॉफ्टवेयर का उपयोग करते हुए, **ली(2015)** ने स्पष्ट किया कि कैसे विभिन्न पूर्व–सेवा शिक्षकों ने प्रमाण कार्यों का प्रदर्शन कर विभिन्न व्याख्याओं को उजागर करते हैं। उदाहरण के लिए, खोज कार्य स्तर पर पूर्व–सेवा शिक्षकों ने प्रमाण को स्पष्टीकरण, खोज और निगमनात्मक सत्यापन कार्यों के रूप में समझा, जबकि व्यवस्थितकरण स्तर पर पूर्व–सेवा शिक्षकों ने केवल स्पष्टीकरण और आगमनात्मक सत्यापन के रूप में देखा।

ज्यामितीय प्रमाणों में ग्राफिक भाग एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। **मेस्क्विटा (1998)** ने बताया कि जब हम ज्यामितीय समस्या का उत्तर एक चित्र के माध्यम से प्रदर्शित करते हैं तो चित्र को दो रूपों में एक वस्तु या चित्रण के रूप में देखा जा सकता है। जब चित्र को एक वस्तु के रूप में देखा जाता है, तो छात्र चित्र के गुणों या चित्र के उपयोग के बारे में तर्क किया जा सकता है। यदि चित्र को एक चित्रण के रूप में देखा जाता है, तो यह जानना हमेशा संभव नहीं होता है कि कौन सी सैद्धांतिक वस्तु चित्र का प्रतिनिधित्व करती है।

उदाहरण– एक त्रिभुज का चित्र को दो रूपों में देखा जा सकता है –

1. किसी विशिष्ट माप (वस्तु) के चित्र के रूप में या
2. बिना किसी विशिष्ट त्रिभुज के चित्रण के रूप में देखा जा सकता है।

ज्यामितीय प्रमाणों में, चित्रों के उपयोग को दो अलग–अलग संभावनाओं में देखा जा सकता है– सूचना–संबंधी या धारणा–संबंधी उपयोग। जब उपयोग सूचनात्मक होता है, तो चित्र केवल कथन में दी गई जानकारी दिखाता है और चित्र को एक वस्तु माना जाता है। जब उपयोग अवधारणात्मक होता है, तो चित्र कथन की तुलना में अधिक जानकारी दिखाता है और इसे एक चित्रण माना जाता है। इसी क्रम में **डुवल (1995)** ने बताया कि किसी समस्या के हल को साबित करने की प्रक्रिया में विवेचनात्मक प्रक्रिया एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है और विवेचनात्मक प्रक्रिया के दौरान प्रवचन के विकास और प्रवचन के विस्तार के विभिन्न तरीकों के बारे में सैद्धांतिक निर्माण किया जाता है। **डुवल** ने स्पष्ट किया कि प्रवचन के विस्तार के दो अलग–अलग तरीके हैं। संचयन मोड और प्रतिस्थापन मोड। **डुवल के अनुसार** संचयन मोड की विशेषता स्वतंत्र प्रस्तावों के समीपस्थ एवं क्रमबद्ध होने से होती है, जिन्हें इसके वैश्विक एवं वास्तविक अर्थ को खोए बिना पुनः क्रमित किया जा सकता है। प्रतिस्थापन मोड के अंतर्गत प्रस्तावों की तार्किक प्रगति है जो एक गैर–परिवर्तनीय क्रम का पालन करते हैं। प्रवचन के विकास में एक प्रस्ताव पूर्ववर्ती चरण मे निष्कर्ष होता है और अनुवर्ती चरण का आधार होता है। **साओरिन और उनके सहयोगियों**

(2019) ने बताया कि लिखित प्रवचन संचयन मोड से प्रतिस्थापन मोड तक प्रगति करता है जिसमें एक निगमनात्मक प्रक्रिया के माध्यम से प्रमाण को समाप्त किया जा सकता है। इस संबंध में, **अर्नाल–बैलेरा और ओलर–मार्सेन (2020)** ने किसी एक समस्या को हल करने के लिए एक चित्र के माध्यम से निराकरण हेतु वास्तविक मापन करने या इसके विशिष्ट गुणों को मानने एवं स्वीकार करने के रूप में अपने महत्वपूर्ण विचार प्रकाश में लाए।

7.5 प्रमाण की सैद्धांतिक रूपरेखा

प्रमाण निर्माण मुख्यतः दो महत्वपूर्ण बातों पर निर्भर करती है 1. प्रमाण का आधार और 2. प्रमाण संरचना की समझ। गणित अध्ययन में प्रमाण का आधार गणितीय परिभाषाओं, प्रमेयों, अवधारणाओं और स्वयंसिद्धों से संबंधित है। प्रमाण सीखने में छात्रों को दिए गए प्रमाण के आधारों से विश्लेषण किया जाता है और परिभाषाओं, प्रमेयों, अवधारणाओं और स्वयंसिद्धों की संरचना को निगमनात्मक विधि द्वारा छात्र समझने का प्रयास करते हैं। **हेन्ज और उसके सहयोगियों (2008)** ने बताया कि प्रमाण निर्माण एक योगिक प्रक्रिया होती है, जो निम्नानुसार है–

(1) किसी दिए गए कथन और उसकी स्थिति को समझना,

(2) आधार, तर्क और निष्कर्ष को पहचानना,

(3) मध्यवर्ती प्रस्ताव का निर्माण करना, और

(4) इन्हें एक स्वीकार्य अनुक्रम में व्यवस्थित करना।

योगिक प्रक्रिया में दो प्रकार के निगमनात्मक तर्क शामिल हैं: विधेय तर्क (सार्वभौमिक उदाहरण) और प्रस्तावना तर्क (काल्पनिक न्यायवाक्य)। विधेय तर्क में, सार्वभौमिक उदाहरण/उपयुक्त सार्वभौमिक प्रस्ताव (यानी, स्वयंसिद्ध, परिभाषाएँ और प्रमेय) से एक विशिष्ट प्रस्ताव को घटाया जाता है। प्रस्तावना तर्क में काल्पनिक न्यायवाक्य/एकवचन प्रस्तावों आधार, मध्यवर्ती प्रस्ताव और वांछित निष्कर्ष को तार्किक तरीके से जोड़ा जाता है। **मियाज़ाकी और इनके सहयोगियों (2017)** के अनुसार प्रमाण पढ़ाते समय छात्रों प्रमाण को एक संरचित तर्क के रूप में देखना चाहिए जिससे छात्रों में प्रमाण के बारे में स्पष्ट और महत्वपूर्ण जानकारी मिल सके। वे निम्नवत हैं–

(1) प्रमाण के घटक और उनके संबंध,

(2) प्रमाण अपने घटकों से कैसे बना होता है, और

(3) प्रमाण को उस संरचना की आवश्यकता क्यों होती है जो उसके पास है।

7.5.1 प्रमाण की संरचना की समझ

प्रमाण की संरचना से संबंधित कुछ महत्वपूर्ण अध्ययन का वर्णन किया गया है। **मियाज़ाकी और उनके सहयोगियों (2015)** ने अपने अध्ययन में पाया कि फ्लो–चार्ट के उपयोग द्वारा जापानी जूनियर हाई स्कूल के छात्रों को प्रमाण की संरचना की समझ का विकास होता है। **अनवर और उनके सहयोगियों (2021)** ने भी भावी गणित शिक्षकों पर अध्ययन किया और बताया कि ज्यामितीय प्रमाण पृष्ठभूमि भावी शिक्षकों की प्रमाण की संरचना समझने में मदद प्रदान करता है। एक अन्य अध्ययन में सेल्डन और उनके सहयोगियों ने प्रमाण की संरचना द्वारा एक प्रमाण का निर्माण करने का सुझाव दिया। **मैकर्की और उनके साथियों (2010)** ने अपने अध्ययन में पाया कि प्रमाण की संरचना का उपयोग स्नातक गणित के छात्रों को सुव्यवस्थित ढंग से गणितीय प्रमाण को कथन के रूप में एक गणितीय प्रस्ताव लिखने में सहायता करता है।

प्रमाण की संरचना को समझने के लिए **मियाज़ाकी और उनके सहयोगियों (2015)** द्वारा विकसित मॉडल का उपयोग किया जाता है। यह मॉडल मूल रूप से **यांग और लिन (2008)** द्वारा विकसित **RCGP मॉडल** के परिशोधन

और समायोजन पर आधारित है। यहाँ पर Reading Comprehension ofGeometry Proof का संक्षिप्त रूप RCGP है। RCGP मॉडल जापानी छात्रों के बीच प्रमाण सीखने और सिखाने की कठिनाइयों पर शोध से प्राप्त उनकी अनुभवजन्य अंतर्दृष्टि पर आधारित था। इस मॉडल में मियाज़ाकी और उनके सहयोगियों ने बताया कि छात्र किसी प्रमाण के अलग–अलग तत्वों जैसे कि आधार, निष्कर्ष और एकवचन प्रस्ताव (प्रस्तावों) को पहचानना शुरू करते हैं, फिर इन तत्वों के बीच संबंधों को पहचानते हैं, और अंत में प्रमाण के संबंधपरक नेटवर्क को समझते हैं।

7.5.2 प्रमाण की संरचना की समझ के स्तर का मियाज़ाकी मॉडल

इस मॉडल में, **मियाज़ाकी और इनके सहयोगियों (2015)** ने प्रमाण की संरचना की समझ के स्तर को तीन भागों में विभाजित किया। जिसका विवरण निम्नलिखित है–

(1) **पूर्व–संरचनात्मक स्तरः** प्रमाण की संरचना की समझ की पूर्व–संरचनात्मक स्तर पर छात्र प्रमाण को सिर्फ अर्थहीन प्रतीकात्मक वस्तुओं के संग्रह के रूप में देखते हैं। छात्र प्रतीकात्मक वस्तुओं को प्रमाणों के घटकों के रूप में पहचानने में असमर्थ होते हैं। उदाहरण के लिए, छात्र समरूप पक्षों जैसे ज्यामितीय तथ्य को जानते हैं, लेकिन यह नहीं जानते कि प्रमाण में इसका उपयोग कैसे किया जाए।

(2) **आंशिक–संरचनात्मक स्तरः** जब छात्र प्रमाण के घटकों को पहचानने लगते हैं तो वे प्रमाण समझ की आंशिक संरचनात्मक स्तर को प्राप्त कर लेते हैं। आंशिक–संरचनात्मक स्तर के दो उप–स्तर होते हैं–

(1) आंशिक–संरचनात्मक का तात्विक स्तर और (2) आंशिक–संरचनात्मक का संबंधपरक स्तर।

आंशिक–संरचनात्मक का तात्विक स्तर में छात्र प्रमाण के घटकों पर ध्यान देते हैं। उदाहरण के लिए, छात्र प्रमाण के घटकों (ज्यामिति में उपयोग किए जाने वाले आधार, निष्कर्ष और एकल प्रस्ताव) पर ध्यान देते हैं परंतु यह नहीं जानते हैं कि प्रमाण को सही साबित करने के लिए सार्वभौमिक प्रस्ताव (जैसे, प्रमेय/स्वयंसिद्ध/परिभाषा) के अनुसार इन घटकों को कैसे निर्दिष्ट किया जाए। छात्र आंशिक–संरचनात्मक का संबंधपरक स्तर प्रमाण के घटकों पर ध्यान देते हैं और वे प्रमाण के प्रत्येक तत्वों को निर्दिष्ट करने के लिए सार्वभौमिक प्रस्ताव (जैसे, प्रमेय/स्वयंसिद्ध/परिभाषा) के उपयोग करने में सक्षम होते हैं।

(3) **समग्र–संरचनात्मक स्तरः** इस स्तर पर छात्र इस योग्य हो जाते हैं कि वे अपना स्वयं का प्रमाण बना सकते हैं। छात्र एकवचन प्रस्ताव को आपस में जोड़ना और एकल प्रस्ताव को सार्वभौमिक प्रस्ताव से जोडना सीख जाते हैं और सभी प्रमाण के सभी तत्वों को तार्किक रूप से जोड़ने में सक्षम हो जाते हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. हरेल और सॉडर (1998) ने प्रमाण की योजनाओं को कुल कितने भागों में वर्गीकृत किया है?नाम बताइए।
....
....
2. डीविलियर्स (1993) के अनुसार प्रमाण कार्यों के नाम बताइए।
....
....
3. मेस्क्विटा (1998) के अनुसार ज्यामितीय समस्या का उत्तर एक चित्र के माध्यम से कितने रूपों में प्रदर्शित करते हैं?
....

....

4. मियाज़ाकी और इनके सहयोगियों (2015) ने प्रमाण की संरचना की समझ को कितने स्तरों मेंविभाजित किया?

....

....

7.6 छात्रों में प्रमाण समझ विकसित करने के उद्देश्य

1. **आत्मविश्वास और क्षमता का निर्माणः** प्रमाणों की समझ विकसित होने पर विद्यार्थी में जटिल से जटिल गणितीय कार्यों को समझने और हल करने की क्षमता और आत्मविश्वास बढ़ता है। छात्र गणित में उच्च स्तरीय अनुसंधान करने के लिए तैयार होते हैं।
2. **प्रमाणों का वैचारिक ज्ञानः** प्रमाण क्या हैं, प्रमाण का उपयोग क्यों और कैसे करते हैं, आदि की बुनियादी समझ छात्रों को होनी चाहिए।
3. **प्रमाण निर्माणः** छात्र को तर्क और उचित गणितीय अवधारणाओं का उपयोग करके प्रमाण बनाने में सक्षम होना चाहिए।
4. **विश्लेषणः** प्रमाणों की वैधता, शुद्धता का विश्लेषण करने में छात्रों को सक्षम होना चाहिए तथा प्रमाण में व्याप्त तार्किक विसंगतियों या त्रुटियों का पता लगाना चाहिए जो प्रमाण को कमजोर बनाते हैं।
5. **प्रमाण तकनीकः** छात्र विभिन्न प्रकार की गणितीय समस्याओं में प्रत्यक्ष, विरोधाभास और प्रेरण जैसे प्रत्येक प्रमाण तकनीक करना सीख जाते हैं।
6. **गणितीय ज्ञान को समझनाः** शिक्षार्थियों को गणित में स्पष्टता और सटीकता की आवश्यकता को समझना चाहिए। गणितीय ज्ञान की महत्ता को समझना चाहिए।

7.7 प्रमाण शिक्षण के स्तर

प्रमाण पढ़ाने की प्रक्रिया के लिए **वान हीले (1957)** द्वारा सुझाए गए स्तरों का अनुपालन किया जा सकता है। **मैरियोटी (2006)** के अनुसार शिक्षण में प्रमाण की उपस्थिति को अक्सर गणितीय ज्ञान का समर्थन करने और इसमें शामिल अवधारणाओं को समझने की आवश्यकता को दर्शाने के लिए महत्व दिया गया है। शिक्षक को यह ध्यान देने की आवश्यकता है कि शिक्षण प्रक्रिया में कक्षा में छात्रों द्वारा उन कार्यों को कैसे लागू कराया जाए जो कक्षा में ज्यामिति प्रमाण बनाने या प्रमाण के निर्माण करने में शामिल हो सकते हैं।

कई यूरोपीय देशों ने शिक्षा की गुणवत्ता सुधारने के लिए शैक्षिक कानूनों का निर्माण कर विद्यालयों में अनिवार्य रूप से लागू किया है जिसमें प्रमाण के महत्व को स्थापित किया है। स्पेन में स्पेनिश शिक्षा की गुणवत्ता सुधारने के लिए जैविक कानून (LOMCE, जेफातुरा डे एस्टाडो, 2013) बनाया है जिसमें प्रत्येक स्पेनिश स्नातक (ग्रेड 11–12) के विद्यालयों में प्रमाण सीखना अनिवार्य है और सभी विषयों में शामिल है। यहाँ पर प्रमाण सीखने में कई शिक्षण विधियों (रिडक्टियो एड एब्सर्डम (बेतुकेपन का तर्क), इंडक्शन आदि), तर्क (निगमनात्मक और आगमनात्मक) और प्रमाण भाषाओं (ग्राफिक, बीजगणितीय या रिपोर्ट) का उपयोग कक्षा में किया जाता हैं। इटली में इतालवी शैक्षिक कानून (2015) के अनुसार हाई स्कूल (ग्रेड 9–10) में छात्रों को प्रमाण के तार्किक चरणों को समझना होगा और सरल प्रमाण बनाना होगा। इंग्लैंड में शिक्षा विभाग (2014) ने ग्रेड (10–11) के लिए राष्ट्रीय पाठ्यक्रम इस बात पर जोर देता है कि तर्क और प्रमाण समर्थन और निर्माण करने के लिए बीजगणित का उपयोग शुरू करना होगा।

शिक्षक गणितीय पाठ्यक्रम को दृष्टिगत करते हुए प्रमाण पढ़ाने के लिए वान हीले द्वारा सुझाए गए विभिन्न स्तरों का अनुसरण कर सकते हैं। **वान हीले (1957)** ने ज्यामितीय सोच के विकास के अनुक्रम में पाँच स्तरीय ज्यामितीय तर्क आधारित एक मॉडल का निर्माण किया। ये स्तर अनुक्रमिक और पदानुक्रमित हैं। इसलिए छात्र ज्यामिति सीखने की प्रक्रिया के दौरान प्रत्येक स्तर से गुजरते हैं। ये स्तर निम्न हैं–

स्तर 1– दृश्यकरण

स्तर 2– विश्लेषण

स्तर 3– अमूर्तन अर्थात (अनौपचारिक निगमन या क्रमबद्धता या संबंधपरक),

स्तर 4– औपचारिक निगमन

स्तर 5– कठोरता

स्तर 1 में छात्र गणितीय आकृतियों को बनावट के आधार पर पहचान सकते हैं, लेकिन उनके गुणों से नहीं। उदाहरण के लिए, छात्र एक वर्ग या आयत को खिड़की जैसी आकृति के रूप में देखता है। स्तर 2 के अंतर्गत शिक्षक प्रमाण शिक्षण हेतु विद्यार्थियों को इस प्रकार सक्षम बनाता है कि वे ज्यामितीय आकृतियों में निहित निश्चित गुणों की पहचान कर सके। इस स्तर पर विद्यार्थी ज्यामितीय आकृतियों के गुणों का विश्लेषण और नामकरण करना शुरू करते हैं। विद्यार्थी ज्यामितीय गुणों के बीच संबंध स्थापित नहीं कर पाते हैं तथा उन्हें अनुभवजन्य रूप से खोजे गए तथ्यों के प्रमाण की आवश्यकता नहीं दिखती है। वे आकृतियों की माप कर सकते हैं, कागज़ को मोड़ और काट सकते हैं तथा ज्यामितीय सॉफ्टवेयर आदि का उपयोग कर सकते हैं। स्तर 3 अमूर्तन में, शिक्षक विद्यार्थियों को गणितीय गुणों को अनौपचारिक निगमन/स्पष्टीकरण के साथ कुछ उदाहरणों द्वारा सत्यापित करना सिखाता है तथा ये गुण क्रमबद्ध और एक दूसरे से समबंधित होते हैं। इस स्तर पर विद्यार्थी गुणों और आंकड़ों के बीच संबंधों को समझते हैं तथा विभिन्न ज्यामितीय प्रत्ययों की सार्थक परिभाषाएँ बनाते हैं। विद्यार्थी अपने तर्क को सही ठहराने के लिए सरल तर्क देने समय तार्किक मानचित्र और आरेख बनाने में सक्षम होते हैं। वे रेखाचित्र, ग्रिड पेपर, ज्यामितीय प्रमेयों का उपयोग करने मे सक्षम होते हैं। स्तर 4 पर छात्र निगमनात्मक ज्यामितीय प्रमाण देते हुए ज्यामितीय चिंतन के बीच अंतर करने में सक्षम होते हैं। वे पहचानते हैं कि कौन से गुण अन्य ज्यामितीय संरचना से संबंधित हैं। छात्र परिभाषाओं, प्रमेयों, स्वयंसिद्धों और प्रमाणों की अवधारणा को समझते हैं। स्तर 5 पर छात्र ज्यामिति को गणितज्ञ के स्तर पर चिंतन कर सभी प्रकार के प्रमाणों का उपयोग करने में सक्षम होता हैं तथा गणितीय प्रणालियों को स्थापित करने के तरीके को समझते हैं। वे यूक्लिडियन और गैर–यूक्लिडियन ज्यामिति को समझते हैं तथा किसी दिए गए ज्यामितीय प्रणाली पर एक स्वयंसिद्ध को जोड़ने या हटाने के प्रभाव का वर्णन करने में सक्षम होते हैं।

वान हीले द्वारा निर्धारित स्तर के आवंटन में कुछ कठिनाइयाँ भी शामिल हैं। जैसे उन छात्रों को कहाँ रखा जाए जो दो लगातार स्तरों के बीच होने के संकेत दिखाते हैं। इस कठिनाई को हल करने के लिए, **गुटियरेज़ और उनके सहयोगियों (1991)** ने वान हीले के स्तरों का आकलन करने का एक वैकल्पिक तरीका प्रस्तावित किया है, जिसमें न केवल छात्रों के स्तर को प्राप्त करने का तरीका बताया गया है, बल्कि यह भी बताया गया है कि उन्होंने इस स्तर को किस हद तक हासिल किया है। **जैमे और गुटियरेज़ (1994)** ने वान हीले स्तरों के निर्धारण के लिए चार प्रमुख प्रक्रियाओं का वर्णन करते हैं:–

1. पहचान (कोई निश्चित ज्यामितीय वस्तु किस परिवार से संबंधित है? का निर्धारण करना);
2. परिभाषा (ज्यामितीय वस्तुओं की परिभाषाओं का उपयोग और निर्माण करना),
3. वर्गीकरण (विभिन्न ज्यामितीय वस्तुओं को विभिन्न परिवारों में रखना), और

4. प्रमाण (परीक्षण कथन प्रस्तुत करना)।

(गुटियरेज़ और जैमेः 1995) में आठ वस्तुओं वाला एक परीक्षण का निर्माण किया गया जिसके माध्यम से प्रत्येक छात्र के पहले चार वैन हिले स्तरों और प्रत्येक स्तर के अधिग्रहण की डिग्री का ऑकलन किया जा सकता है।

7.8 गणितीय शिक्षण में प्रमाण का महत्व

यहाँ कुछ कारण दिए गए हैं कि प्रमाण क्यों महत्वपूर्ण हैंः

1. **तर्क क्षमता का विकास करनाः** प्रमाण आधारित शिक्षण का अभ्यास करने से शिक्षार्थियों में तर्क करने का कौशल विकसित होता है। विद्यार्थियों में तर्क करने की क्षमता विकसित होने से विद्यालयी कार्यों के अलावा जीवन से जुड़े अनेकों समस्याओं को हल करने में मदद मिलती है। समस्याओं को हल करने प्रक्रिया में विद्यार्थी प्रमाणों की स्थापना के आधार पर किसी खास निष्कर्ष पर पहुंचते हैं।

2. **गणितीय संरचना और संक्रियाओं को समझनाः** गणितीय अवधारणाओं की समझ और उनमें अंतर्निहित संरचना को समझने में प्रमाण की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। गणितीय अवधारणाओं में निहित संक्रियाओं की समझ को प्रमाण एक मजबूत आधार प्रदान करता है। गणितीय अवधारणाओं का सीधा संबंध विभिन्न प्राकृतिक घटनाओं और जीवन से जुड़े समस्याओं से होता है। विभिन्न प्राकृतिक घटनाओं को समझने तथा जीवन से जुड़े विभिन्न मुद्दों को हल करने में विद्यार्थी प्रमाण की मदद लेते हैं और वह गणितीय संरचना और संक्रियाओं की सभी सामंजस्य और सुंदरता के साथ गहरी समझ विकसित करता है।

3. **सटीकता और अभ्यास को प्रोत्साहित करनाः** प्रमाणों के द्वारा विद्यार्थियों में विचारों का निर्माण और स्पष्टता का विकास होता है। भाषा और विचारों में सटीकता होने से समस्या समाधान के प्रति एक सकारात्मक दृष्टिकोण का विकास होता है। प्रमाण के माध्यम से किसी भी समस्यात्मक कार्य को हल करने में अभ्यास को प्रोत्साहन मिलता है जो किसी भी विश्लेषणात्मक खोज में सहायक होती है।

4. **गणितीय सत्य की स्थापनाः** गणित शिक्षण में गणितीय कथन की सत्यता के लिए प्रमाण अकाट्य आधार प्रदान करते हैं। अनुभवजन्य विज्ञानों में हमेशा नए प्रमुख प्रयोगों का सहारा लिया जाता है, परंतु गणित में एक निश्चित गणितीय प्रमाण होता है। गणितीय प्रमाण शिक्षण में गणितीय सत्य की स्थापना में आश्वासन प्रदान करता है।

5. **अंतर्दृष्टिः** किसी भी नई गणितीय तथ्य को सामने लाने में अंतर्दृष्टि की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। अंतर्दृष्टि द्वारा प्रमाण ढूँढना हमें यह समझने के करीब ले जाती हैं कि चीजें कैसे काम करती हैं। प्रमाण यह सिखाता है कि एक कथन सत्य क्यों है, गणित कैसे सीखें और नए ज्ञान को कैसे उपयोग करें।

6. **गणित में संचार के रूप में प्रमाणः** विचारों को संप्रेषित करने के लिए एक भाषा की आवश्यकता होती है। प्रमाण सम्प्रेषण के रूप में कार्य करता है। इसलिए प्रत्येक गणितीय विशेषता को संप्रेषित करने में प्रमाण पूरी तरह से निर्दिष्ट है कोई भी पिछले ज्ञान के आधार नए ज्ञान का निर्माण कर सकता है।

7.9 गणितीय प्रमाण को समझने में पी.क्यू.4आर. (PQ4R) शिक्षण रणनीति

थॉमस और रॉबिन्सन द्वारा 1972 में विकसित PQ4R एक मेटाकॉग्निशन रणनीति है जिसका संक्षिप्त रूप प्रीव्यू (पूर्वावलोकन), क्वेश्चन (प्रश्न), रीड (पढ़ना), रिफ्लेक्ट (चिंतन करना), रीसाइट (सुनाना), रिव्यू (समीक्षा करना) है। जहाँ प्रीव्यू (P) का अर्थ विषय का त्वरित वाचन और इसकी बुनियादी विशेषताओं का ज्ञान से है, और क्वेश्चन (Q) का अर्थ प्रकरण पर छात्र द्वारा प्रस्तुत किए गए प्रश्न से है। रीड (पहला R) का अर्थ पढ़ना है। रिफ्लेक्ट (दूसरा R) का अर्थ चिंतन करना है, रीसाइट (तीसरा R) का अर्थ बताना या सुनाना है और रिव्यू (चौथा R) का अर्थ समीक्षा करना है। **अटिया (2013)** के अनुसार PQ4R रणनीति संगठित और अनुक्रमिक तरीके से याद रखने की महत्वपूर्ण

तकनीक है जो छात्रों को उनके द्वारा पढ़ी गई जानकारी को याद रखने में मदद करती है और छात्र अधिक प्रभावी और गहन सीखने की ओर अग्रसर होता है।

1. **पूर्वावलोकन चरणः**इस चरण में छात्र गणित की किताब के विषयों और सामग्री का वाचन करता है और छात्र द्वारा अवलोकन कर बुनियादी विशेषताओं और अवधारणाओं के बारे में जानने की कोशिश किया जाता है।
2. **प्रश्न चरणः**प्रश्न पूछना अधिकांश कक्षाओं की एक केंद्रीय विशेषता है। प्रश्न छात्र को गणितीय समस्याओं या गणितीय विषयों के बारे में जानकारी एकत्र करने में मदद कर सकता है। विषयवस्तु के बारे में प्रश्न पूछकर अध्ययन के मुख्य उद्देश्य को चिन्हित किया जाता है। **बीबी (2011)** के अनुसार प्रश्न चरण में छात्र पहले की गई समीक्षाओं के आधार पर अपने प्रश्न बनाता है, और पढ़ने के चरण के उपरांत छात्र उत्तर देने के लिए उपयोग करता है।
3. **पढ़ने का चरणः** छात्र गणितीय सामग्री/समस्याओं को सटीक रूप से पढ़ता है और विषय–वस्तु या समस्या को समझता है।
4. **चिंतन चरणः** छात्र जो कुछ भी पढ़ता है उसके बारे में चिंतन और विचार कर पिछली जानकारी को नई जानकारी से जोड़ता है। इस चरण में छात्र गणितीय जानकारी में आई बाधाओं को चिन्हित कर समाधान को ढूँढता है।
5. **सुनाने का चरणः** छात्र पूर्ववर्ती चरण में पूछे गए प्रश्नों के उत्तरों को जोर से सुनाने का प्रयास करता है।
6. **समीक्षा चरणः** इसे जांच चरण भी कहते हैं। इसमें छात्र प्रकरण के मुख्य बिंदु को गहराई से देखते हैं और उत्पन्न विचारों को व्यवस्थित और स्पष्ट करके उसकी समीक्षा करते हैं। वे ग्राफिकल प्रतिनिधित्व का उपयोग कर आलोचनात्मक सारांश या नोट्स लिख सकते हैं।

पीक्यू4आर रणनीति नए विचारों और पिछले विचारों के बीच एक तरह का संबंध बनाता है। छात्र नई जानकारी को व्यवस्थित कर विभिन्न शैक्षिक स्थितियों में समाधान खोजने में मदद करता है। इसके द्वारा छात्र विषयों को पढ़कर और फिर इन विषयों पर विचार कर उसकी समीक्षा करते हैं। यह छात्रों को प्रोत्साहित कर सीखने के प्रति सकारात्मक रुझान बनाता है। गणितीय सोच और औचित्य विकसित करने में गणितीय प्रमाण की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। छात्रों को गणित की समझ विकसित करने में औचित्य सीखना चाहिए और प्रमाण बनाना चाहिए। **कोगसे और यिल्डिज़ (2011)** के अनुसार प्रमाण और तर्क गणितीय क्षमता को विकसित करते हैं क्योंकि प्रमाण के बिना नए विचारों और अटकलों की वैधता को सत्यापित करना संभव नहीं है। इसके साथ ही, गणितीय प्रमाण अटकलों, स्पष्टीकरण और खोज को भी सत्यापित करने में मदद करता है। गणितीय चर्चा को बढ़ावा देने से छात्रों प्रमाण और साबित करने की तकनीकों को सीखते हैं।

7.10 प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण

प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण के लिए तीन महत्वपूर्ण सवाल हैं जिनका उत्तर ढूँढना आवश्यक हैं। ये तीन सवाल निम्नवत हैं–

1. प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण किस स्तर के विद्यार्थियों पर संभव है?

2. प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण का विषयक्षेत्र कहाँ तक सीमित है?

3. प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण में शिक्षकों को किस प्रकार प्रमाणों का चयन करना चाहिए?

पहला सवाल यह है कि प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण किस स्तर के विद्यार्थियों पर संभव है, जानना बहुत जरूरी है। इस संबंध में, प्रसिद्ध शैक्षिक मनोवैज्ञानिक जेरोम ब्रूनर के स्पष्ट किया है कि किसी भी विषय की समझ विकसित करने के लिए छात्र को कठोरता के साथ पढ़ाया जा सकता है जिसमें छात्र विषय की सरल से

कठिन अवधारणाओं सीखता है। यह धारणा ''सर्पिल पाठ्यक्रम'' के विचार को रेखांकित करती है जहां पर छात्र अपनी स्कूली शिक्षा के दौरान पूर्व सरल ज्ञान के आधार पर नई शिक्षा की समझ विकसित करता है। उदाहरण के लिए, फ़ंक्शन का परिचय पहले कराया जाता है और पुनः दोबारा प्रस्तुत किया जाता है। कम अनुभवों के साथ माध्यमिक गणित के छात्रों को प्रमाण का अध्ययन कठिन हो जाता है छात्रों को संघर्षों का सामना करना पड़ता है। **ब्रूनर के ''सीखने के लिए तत्परता''** का सिद्धांत इस बात पर जोर देता है कि सबसे कम उम्र के छात्रों से भी गणितीय कार्य के लिए स्पष्टीकरण प्रदान करने के लिए कहा जा सकता है। प्रमाण एक प्रक्रिया है जिसमें छात्र बहस करने, कथनों पर सवाल उठाने और साक्ष्य का उचित उपयोग करने का कार्य करता है। **स्टाइलियानो और ब्लैंटन (2011)** के अनुसार माध्यमिक और उच्च–माध्यमिक स्तर पर प्रमाणों की कठोरता और भिन्नता के लिए युवा छात्रों को काम को सही ठहराने और बचाव करने के लिए तैयार किया जाता है। छोटी कक्षाओं में गणितीय कार्य के स्पष्टीकरण में प्रयुक्त तकनीकें ''प्रमाण'' नहीं लग सकती हैं। लेकिन छात्र जब गणितीय कार्य की व्याख्या करने, संप्रेषित करने या आलोचना करने के लिए तर्क कौशल विकसित कर रहे होते हैं, तब छात्र अधिक कठोर प्रमाणों का उपयोग करता है। उक्त विश्लेषण से यह स्पष्ट है कि प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण छोटी कक्षाओं से शुरू किया जा सकता है।

अब दूसरा सबसे महत्वपूर्ण सवाल उठता है कि प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण का विषयक्षेत्र कहाँ तक सीमित है। **हंग–शी वू (2002) के अनुसार**''ज्यामिति के बाहर, अनिवार्य रूप से कोई प्रमाण नहीं हैं।'' कहना पूर्ण रूप मिथ्या है। **गोंजालेज और हिंथॉर्न (2003)** ने भी अपने अध्ययन में पाया है कि गणित की विभिन्न शाखाओं में प्रमाण, या तर्क या स्पष्टीकरण का कोई रूप, सभी ग्रेड स्तरों पर गणित के छात्रों के लिए आवश्यक होना चाहिए। पूर्व में प्रमाण को ज्यामिति तक सीमित रखने का एक स्पष्टीकरण यह है कि ज्यामितीय प्रमाण की नींव ज्यामिति कक्षाओं में दी जाती है, जिसमें अभिधारणाएँ, स्वयंसिद्ध, परिभाषाएँ और प्रमेय शामिल हैं। **गोंजालेज और हिंथॉर्न (2003)** ने स्पष्ट किया कि पारंपरिक बीजगणित कक्षा के विपरीत है। उदाहरण के लिए, बीजगणित का आधारभूत विशेषताएं क्षेत्र गुण, समानता के गुण और वास्तविक संख्याओं के गुण को औपचारिक रूप से छात्रों को नहीं दिए जाते हैं। **नुथ और इलियट (1998)** के अनुसार यदि छात्रों को ज्यामिति क्षेत्र के अलावा गणित के सभी क्षेत्रों में तर्क और कठोर प्रमाणों की समझ प्रदान करते हैं, तो छात्र को समृद्ध गणितीय कार्य को सम्पन्न कर सकते हैं। प्रमाण को अब केवल ज्यामिति तक सीमित नहीं रखा जा सकता है। इसलिए यह जरूरी हो जाता है कि हम अपने छात्रों को उनकी गणित शिक्षा में प्रत्येक विषय में उपयुक प्रमाणों के माध्यम से शिक्षण का अवसर प्रदान करें।

अंतिम और महत्वपूर्ण प्रश्न यह है कि प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण में शिक्षकों को किस प्रकार प्रमाणों का चयन करना चाहिए जो विभिन्न ग्रेड स्तरों और गणित विषय क्षेत्रों के छात्रों के लिए सार्थक समझ प्रदान कर सके। प्रमाणों या सिद्ध करने की तकनीकों को शिक्षक अपनी कक्षाओं में उपयोग कर सकते हैं। शोधकर्ता नुथ (2002), इलिऑट (2018) और रूसो (2018) जैसे गणित शोधकर्ता प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण में शिक्षक को व्याख्यात्मक प्रमाण का चयन करने की सलाह देते हैं।

7.10.1 गणित शिक्षण में व्याख्यात्मक प्रमाण

गणित शिक्षा शोधकर्ता **नुथ (2002)** के अनुसार शिक्षण और सीखने के दौरान प्रमाणों से जुड़ी समस्याओं को हल करने या कम करने का प्रयास करना चाहिए। नुथ आगे बताते हैं कि गणित में प्रमाण की प्राथमिक भूमिका परिणाम की सच्चाई को स्थापित करना है और छात्रों में अंतर्निहित गणितीय अवधारणाओं की समझ को बढ़ावा देने से है। नुथ और अन्य गणित शिक्षा विशेषज्ञ गणित शिक्षण और समझ के स्तर के रूप में ''व्याख्यात्मक प्रमाण'' को महत्व देते हैं। ''व्याख्यात्मक प्रमाण'' की महत्ता के संदर्भ में हन्ना बताते हैं कि छात्र देखें कि ऐसा क्यों है, और इसके अलावा ऐसा हमेशा क्यों होना चाहिए, और यह समझ व्याख्यात्मक प्रमाणों द्वारा सबसे अच्छी तरह से उत्पन्न होती है। व्याख्यात्मक प्रमाण को एक उदाहरण के माध्यम से समझते हैं। जिसका वर्णन निम्नानुसार प्रस्तुत है–

व्याख्यात्मक प्रमाण का उदाहरणरू सिद्ध करें कि $(2n+1)$ का मान सदैव विषम संख्या होता है। जहां, n एक प्राकृतिक संख्या है।

हलः $n = 1$ के लिए, $(2x1+1) = 3$, जो कि एक विषम संख्या है।

मान लें कि यह किसी मनमाने प्राकृतिक संख्या k के लिए सत्य है, अर्थात, $S(k)= (2xk+ 1)$ एक विषम संख्या है।

फिर विचार करेंः

$S(k+1) = \{2x\ (k+1)+1\}$

$= \{2xk+ 2 +1\}$

$= \{(2xk + 1) + 2\}$

$= \{S(k) + 2\}$ जहां पर, $S(k) = (2x\,k + 1)$

$=$ {एक विषम संख्या + 2} जहां पर, $S(k)$ एक विषम संख्या है।

$=$ एक अन्य विषम संख्या

इसलिए कथन $k+1$ के लिए सत्य है, यदि यह k के लिए सत्य है। निगमन द्वारा, कथन सभी n के लिए सत्य है। उपरोक्त उदाहरण छात्रों में अंतर्निहित गणितीय अवधारणाओं को समझ के लिए व्याख्यात्मक प्रमाण के उपयोग को प्रदर्शित करता है।

7.10.2 व्याख्यात्मक प्रमाण विकास का सिद्धांत

शैक्षिक शोधकर्ता **रुसो (2018)** का अध्ययन प्राथमिक कक्षाओं में प्रमाण पढ़ाने पर केंद्रित था और उनके द्वारा सुझाए गए सिद्धांतों को गणित की किसी भी शाखा के लिए किसी भी ग्रेड स्तर पर लागू किया जा सकता है। उनके अनुसार व्याख्यात्मक प्रमाण के विकास के तीन महत्वपूर्ण सिद्धांत हैं–

1. **समस्या को एक कथन के रूप में शब्दबद्ध करना चाहिए, उसके बाद एक अनुवर्ती प्रश्न होना चाहिए। 'सत्य या असत्य' इसे साबित करें** : इसके अंतर्गत समस्या को एक अनुमान के रूप में प्रस्तुत किया जाता है जिसे सिद्ध या गलत ठहराया जा सकता है। छात्र द्वारा अपने दावे का समर्थन में सबूत इकट्ठा करने का पहला कदम है।
2. **समस्या को उत्पादकता से जोड़ने के लिए छात्रों को आवश्यक गणितीय ज्ञान की सुलभता होना चाहिएः** जिन छात्रों को प्रमाण बनाने का कम अनुभव होता है उनके लिए किसी भी समस्या की प्रकृति संज्ञानात्मक रूप से चुनौतीपूर्ण होती है। विभिन्न गणितीय विचारों और सिद्धांतों के संश्लेषण करने के उपरांत ही छात्र प्रमाण का निर्माण करने में सक्षम हो सकते हैं। इसलिए ऐसे प्रश्न पूछना महत्वपूर्ण है जिनका उत्तर देने के लिए छात्रों के पास आवश्यक गणितीय ज्ञान की समझ हो।
3. **समस्या के केंद्र में एक महत्वपूर्ण गणितीय विचार होना चाहिएः** इस चरण में शिक्षक इस बात पर विशेष ध्यान देते हैं कि उनके छात्रों को ज्ञात अवधारणाओं को कैसे चुनना है और उन्हें एक समस्या में कैसे उपयोग करना है। खोज–आधारित समस्याओं, तर्कों या सिद्धांतों के दृश्य प्रतिनिधित्व और समूह प्रस्तुतियों के माध्यम से छात्र व्याख्यात्मक प्रमाण को विकसित कर सकते हैं।

उपरोक्त तीन सिद्धांतों का पालन करते हुए शिक्षक गणित की किसी भी शाखा में सभी आयु के विद्यार्थियों के लिए प्रमाण के सार्थक अवसर पैदा कर सकते हैं। एक बार पाठ्य–सामग्री का चयन हो जाने के बाद, शिक्षक यह

विचार करता है कि, "इसे कैसे पढ़ाया जाना चाहिए?" शिक्षक इस प्रकार पाठों का आयोजन करते हैं जो उनके विद्यार्थियों को विभिन्न प्रकार के सार्थक प्रमाण के अन्वेषण का अवसर प्रदान करते हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

5.गणितीय प्रमाण को समझने में पी.क्यू.4आर. (PQ4R) शिक्षण रणनीति किसने विकसित किया था?

....

....

6.पी.क्यू.4आर. (PQ4R) शिक्षण रणनीति में पी.क्यू.4आर. (PQ4R) का संक्षिप्त रूप बताईए।

....

....

7.व्याख्यात्मक प्रमाण विकास का सिद्धांत किसने प्रतिपादित किया?

....

....

7.11 सारांश

शिक्षकों को गणित की विभिन्न शाखाओं में प्रारंभिक कक्षाओं से ही प्रमाण योजना और प्रमाण कार्य के महत्व को समझना चाहिए। शिक्षक शिक्षण प्रक्रिया को वैज्ञानिक और तार्किक बनाकर छात्रों में प्रमाण की समझ और वैज्ञानिक दृष्टिकोण को विकसित कर सकते हैं जिससे छात्रों में गणितीय विचार को समझाने का प्रयास किया जा सके। इसके अतिरिक्त, शिक्षकों को यह जानना चाहिए कि गणितीय प्रमाण बनाने और समझने के लिए च्फ4त्र शिक्षण रणनीतियों का उपयोग करने से क्या लाभ होता है। प्रमाण हेतु पूछे गए प्रश्न व्याख्यात्मक प्रकृति के होने चाहिए और छात्रों को अपने गणितीय विचारों को व्यक्त करने के लिए विभिन्न प्रकार की परिस्थितियों को उपलब्ध कराना चाहिए। कक्षा में शिक्षण के दौरान शिक्षक को संवादात्मक संकेतों का उपयोग करना चाहिए, प्रमाण की संरचना को सुविधाजनक तरीके से प्रस्तुत करना चाहिए और प्रमाण कार्यों के संबंध में छात्रों की जवाबदेही बनाए रखनी चाहिए।

विद्यार्थियों को प्रमाण पढ़ाना इसलिए महत्वपूर्ण है जिसके द्वारा उनके अंदर तार्किक तर्क और समस्या—समाधान कौशल विकसित हो सके। प्रमाणों के वैचारिक आधार और सैद्धांतिक आधार को समझना आवश्यक होता है, और शिक्षक द्वारा छात्रों में प्रमाण की समझ विकसित करने के लिए आगमनात्मक और निगमनात्मक दृष्टिकोण, पूछताछ—आधारित शिक्षण और प्रौद्योगिकी—संवर्धित विधियों जैसी प्रभावी शिक्षण रणनीतियों पर जोर दिया जाना चाहिए। व्याख्यात्मक प्रमाण द्वारा शिक्षण अंतःविषय अनुप्रयोग और समस्या समाधान सीखने को प्रासंगिक और सार्थक बनाता है। प्रमाण की संरचना की समझ छात्रों की समझ और उनके तर्क करने, स्व—मूल्यांकन करने और परिशोधन करने की क्षमता सुनिश्चित करती हैं।

7.12 अभ्यास के प्रश्न

1. प्रमाण की योजनाओं से आप क्या समझते हैं?
2. प्रमाण कार्यों क्या क्या हैं? वर्णन कीजिए।
3. प्रमाण की सैद्धांतिक रूपरेखा के बारे लिखिए।

4. गणितीय शिक्षण में प्रमाण का महत्व से आप क्या समझते हैं? व्याख्या कीजिए।
5. प्रमाण के माध्यम से गणित शिक्षण की प्रक्रिया का वर्णन कीजिए।

7.13 चर्चा के बिंदु

1. प्रमाण शिक्षण के स्तर से आप क्या समझते हैं? विस्तारपूर्वक चर्चा कीजिए।
2. प्रमाण की संरचना की समझ के स्तर का मियाज़ाकी मॉडल क्या है? चर्चा कीजिए।
3. गणितीय प्रमाण को समझने में पी.क्यू.4आर. (PQ4R) शिक्षण रणनीति से आप क्या समझते हैं? चर्चा कीजिए।

7.14 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. हरेल और सॉडर (1998) ने प्रमाण की योजनाओं को तीन भागों वाह्य दृढ़ विश्वास, अनुभवजन्य और विश्लेषणात्मक के रूप में वर्गीकृत किया है।
2. डीविलियर्स (1993) के अनुसार पाँच प्रकार के प्रमाण कार्य होते हैं– 1. सत्यापन/दृढ़ विश्वास; 2. स्पष्टीकरण; 3. व्यवस्थितकरण; 4. खोज; और 5. गणितीय ज्ञान का संचार।
3. मेस्क्विटा (1998) के अनुसार ज्यामितीय समस्या का उत्तर एक चित्र के माध्यम से दो रूपों में प्रदर्शित करते हैं– 1. एक वस्तु के रूप में और 2. एक चित्रण के रूप में।
4. मियाज़ाकी और इनके सहयोगियों (2015) ने प्रमाण की संरचना की समझ के स्तर को तीन भागों पूर्व–संरचनात्मक स्तर, आंशिक–संरचनात्मक स्तर और समग्र–संरचनात्मक स्तर में विभाजित किया।
5. गणितीय प्रमाण को समझने में पी.क्यू.4आर. (PQ4R) शिक्षण रणनीति को थॉमस और रॉबिन्सन ने 1972 में विकसित किया था।
6. पी.क्यू.4आर. (PQ4R) शिक्षण रणनीति एक मेटाकॉग्निशन रणनीति है जिसका संक्षिप्त रूप प्रीव्यू (पूर्वावलोकन), क्वेश्चन (प्रश्न), रीड (पढ़ना), रिफ्लेक्ट (चिंतन करना), रीसाइट (सुनाना), रिव्यू (समीक्षा करना) है।
7. व्याख्यात्मक प्रमाण विकास का सिद्धांत को शैक्षिक शोधकर्ता रूसो (2018) ने प्रतिपादित किया।

7.15 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Polya, G. (1945). *How to solve it:A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
2. Miyazaki, M., Fujita, T.,& Jones, K. (2015). Flow-chart proofs with open problems as scaffolds for learning about geometrical proofs. ZDM Mathematics Education, 47(7), 1–14. https://doi.org/10.1007/s11858-015-0712-5.
3. Harel, G.,& Sowder, L. (2007). Toward a comprehensive perspective on proof. In F. Lester (Ed.), Second handbook of research on mathematics teaching and learning (pp. 805–842). NCTM.
4. Russo, J. (2018). Mathematical proofs in primary schools. Mathematics Teaching, 261, 32-35.
5. Knuth, E. (2002). Proof as a tool for learning mathematics. Mathematics Teacher, 95(7), 486-490.
6. De Villiers, M. D. (1990). The role and function of proof in mathematics. Pythagoras, 17-24.
7. Attia, Mohsen, Ali. (2010). Beyond knowledge strategies in understanding the reading. Oman: Curriculum House for Publishing and Distribution.

8. Harel, G.& Sowder, L. (1998). Student*s Proof Schemes. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput& E. Dubinsky (Eds.) Research in College Mathematics Education III, (pp. 234-283). Washington, DC: American Mathematical Society.
9. मिश्र, आर. पी. (2018), शिक्षण के लिए प्रमाण की समझ, लखनऊ विश्वविद्यालय प्रकाशन, लखनऊ।
10. सिंह, के. पी. (2020), प्रमाण आधारित शिक्षण, अटलांटिक प्रकाशक और वितरक, नई दिल्ली।
11. मांगलिक, एस. के. (2019),शिक्षण में प्रमाण का महत्व, विकास प्रकाशन, जयपुर।
12. शर्मा, आर. के. (2017), प्रमाण आधारित शिक्षण विधियाँ, राजकमल प्रकाशक, आगरा।

इकाई–8 : गणित में समस्या समाधान शिक्षण, परिभाषा और महत्व

इकाई की संरचना

8.1 प्रस्तावना

8.2 इकाई के उद्देश्य

8.3 गणित में समस्या–समाधान की परिभाषा

8.4 गणित में समस्या समाधान शिक्षण का इतिहास

8.5 समस्याओं को हल करने में शिक्षण के तरीके

8.6 समस्या–समाधान कौशल विकसित करने की प्रक्रिया

8.7 गणित मे समस्या समाधान शिक्षण की प्रक्रिया

8.8 गणितीय समस्याओं को हल करने की विधियाँ और अनुमान

8.9 समस्या–समाधान की तकनीकें

8.9.1 समस्या पहचान

8.9.2 योजना निर्धारण

8.9.3 प्रतिबिंबन

8.10 समस्या समाधान में आलोचनात्मक सोच और रचनात्मकता की भूमिका

8.11 समस्या–समाधान में सामान्य गलतियाँ और उनसे बचाव

8.12 गणित मे समस्या समाधान शिक्षण का महत्व

8.13 समस्या समाधान शिक्षण में प्रयुक्त रणनीतियाँ

8.14 समस्या समाधान शिक्षण की सीमाएँ

8.15 गणित विषय में समस्या समाधान शिक्षण की प्रासंगिकता

8.16 सारांश

8.17 अभ्यास के प्रश्न

8.18 चर्चा के बिंदु

8.19 बोध प्रश्नों के उत्तर

8.20 कुछ उपयोगी पुस्तकें

8.1 प्रस्तावना

समस्या समाधान शिक्षण गणित में एक महत्वपूर्ण शिक्षण विधि है जो छात्रों को न केवल गणितीय समस्याओं को हल करने में सक्षम बनाता है बल्कि उनके तार्किक और विश्लेषणात्मक कौशल को भी सुधारता है। इस विधि का मुख्य उद्देश्य छात्रों को विभिन्न गणितीय समस्याओं का सामना करने के लिए आवश्यक उपकरण और तकनीकों से सुसज्जित करना है।

समस्या समाधान बाधाओं को पार करके लक्ष्य प्राप्त करने की प्रक्रिया है जो अधिकतम गतिविधियों का एक लगातार हिस्सा है। समाधान की आवश्यकता वाली समस्याएं सरल व्यक्तिगत कार्यों से लेकर व्यवसाय और तकनीकी क्षेत्रों में जटिल मुद्दों तक होती हैं। समस्या समाधान विधि एक व्यवस्थित प्रक्रिया है जिसे चुनौतियों का समाधान करने और प्रभावी समाधान खोजने के लिए डिजाइन किया जाता है। इस दृष्टिकोण से समस्या की पहचान करना उसकी जटिलताओं को समझना, संभावित समाधान उत्पन्न करना और सबसे सटीक विकल्प को लागू करना शामिल है। यह एक रणनीतिक ढांचा है जो महत्वपूर्ण विश्लेषण, रचनात्मक विचार मंथन और सावधानीपूर्वक योजना को बढावा देता है। गणित विषय में समस्या समाधान विधि की उपयोगिता को देखते हुए इसे गणित में शामिल किया गया है। समस्या समाधान विधि से बालकों में तर्क एवं निर्णय को लेकर किसी समस्या को सुलझाने की क्षमता का विकास करना है। कोई भी समस्यात्मक स्थिति एक रचनाहीन जीवन स्थल के क्षेत्र का प्रतिनिधित्व करती है। इस विधि में तथ्यों के आधार पर उद्देश्यों की ओर अग्रसर होते हैं। किसी भी व्यक्ति का अपने चारों ओर के वातावरण के संबंध में एक निश्चित दृष्टिकोण होता है और यही उसके जीवन स्थल के क्षेत्र का संकेत देता है। जब जीवन स्थल का क्षेत्र रचनाबद्ध होता है तो वह जान पहचान वाला और समझ में आने वाला होता है। अगर यही क्षेत्र रचना रहित होता है तो यह समस्या एवं उलझन पैदा करने वाला होता है। ऐसे क्षेत्रों को रचनाबद्ध करना आवश्यक होता है। हमारा व्यवहार बहुत अंशों में जीवन स्थल की संज्ञानात्मक संरचना पर निर्भर करता है। ऐसी स्थिति में उसे यह नहीं पता होता है कि समस्या समाधान में कौन से पद सहायता कर सकते हैं। समस्या समाधान तब संभव होता है जब जीवन स्थल एक रचना ग्रहण कर लेता है। जब हमारे सामने कोई बाधा उत्पन्न होती है या एक रचना रहित क्षेत्र हमारे सामने आता है तो समस्या का जन्म होता है। जब हमें ज्ञानात्मक रचना का बोध होता है तब उसे समस्या समाधान कहा जाता है। समस्या समाधान विधि के जनक हर्बर्ट, जॉन डीवी, टोलमैन, आइंस्टीन आदि जैसे महान गणितज्ञ और वैज्ञानिक हैं। समस्या समाधान प्रक्रिया का प्रथम चरण समस्या हल करने की आवश्यकता है। इसके बाद व्यक्ति समस्या को परिभाषित कर समस्या को समझने का प्रयास करता है। उसके बाद समस्या समाधान हेतु सामग्री एकत्रित करता है तथा उसकी उपयुक्तता की जांच कर समस्या हल करता है। यदि हल उपयुक्त नहीं हो तो पुनः समस्या को परिभाषित कर समस्या समाधान के विभिन्न चरणों को दोहराता है। गणित अध्यापन की यह एक सर्वमान्य स्वीकृत एवं प्रचलित विधि है। गणित अध्यापन में अध्यापक कक्षा में विद्यार्थियों के सामने समस्याओं को प्रस्तुत करता है तथा विद्यार्थियों द्वारा सीखे हुए नियमों, सिद्धांतों, संकल्पनाओं तथा प्रत्ययों की सहायता से समस्याओं के हल ज्ञात किए जाते हैं। यदि अध्यापक विद्यार्थियों के जीवन से जुड़ी हुई समस्याओं को कक्षा में हल करने के लिए प्रस्तुत करता है तो विद्यार्थियों में हल ज्ञात करने हेतु उत्साह एवं तत्परता का प्रभाव होता है तथा सीखने की गति में वृद्धि होती है। प्रत्येक समस्या में नवीनता होनी चाहिए। इससे विद्यार्थियों को हल करने हेतु प्रेरणा मिलती है।

यह कुशल अध्यापक स्वयं वास्तविक तथ्यों का संकलन कर विद्यार्थियों की क्षमताओं को ध्यान में रखकर समस्याओं का निर्माण करता है। विद्यार्थी समस्याओं में दी हुई स्थिति का अध्ययन पर तथ्यों का विश्लेषण करते हैं तथा सूत्रों, नियमों, सिद्धांतों, प्रमेयों की सहायता से समस्याओं का हल करते हैं। प्रत्येक समस्या का सही हल विद्यार्थियों को नए अनुभव प्रदान करता है तथा समस्या क्षमता का विकास करता है। यदि समस्या जीवन से जुड़ी हुई एवं विद्यार्थियों की आवश्यकता एवं रुचियों से संबंधित हो तो विद्यार्थियों में स्वतः समस्या हल करने हेतु जिज्ञासा

होगी तथा अन्वेषण कर एक अनुमान का निर्धारण पर समाधान ज्ञात करेंगे तथा समाधान का मूल्य निरूपण कर उपयोगिता की जांच करेंगे।

8.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. समस्या समाधान के आशय को समझ सकेंगे।
2. गणित में समस्या समाधान शिक्षण के ऐतिहासिक पृष्ठभूमि का वर्णन कर सकेंगे।
3. समस्या–समाधान कौशल विकसित करने की प्रक्रिया से अवगत हो सकेंगे।
4. गणित मे समस्या समाधान शिक्षण की प्रक्रिया की विवेचना कर सकेंगे।
5. गणित मे समस्या समाधान शिक्षण का महत्व को समझ सकेंगे।
6. समस्या समाधान शिक्षण में विभिन्न रणनीतियाँ का प्रयोग कर सकेंगे।

8.3 गणित में समस्या–समाधान की परिभाषा

जॉर्ज पोल्या (1945) ने अपनी पुस्तक ''**हाउ टू सॉल्व इट**'' में कहा, "शिक्षक का सबसे महत्वपूर्ण कार्य अपने छात्रों की मदद करना है। यह कार्य बहुत आसान नहीं है। इसके लिए समय, अभ्यास, भक्ति और ठोस सिद्धांतों की आवश्यकता होती है। छात्र को यथासंभव स्वतंत्र कार्य का अधिक से अधिक अनुभव प्राप्त करना चाहिए। लेकिन अगर वह बिना किसी मदद के अपनी समस्या के साथ अकेला रह जाता है, तो वह कोई प्रगति नहीं कर सकता है। यदि शिक्षक बहुत अधिक मदद करता है, तो छात्र के लिए कुछ भी नहीं बचा है। शिक्षक को मदद करनी चाहिए, लेकिन बहुत अधिक नहीं और बहुत कम नहीं, ताकि छात्र को काम का हिस्सा मिले।

गणित में समस्या का तात्पर्य – एक समस्या ''कोई भी कार्य या गतिविधि है जिसके लिए छात्रों के पास कोई निर्धारित या याद रखने वाले नियम या तरीके नहीं हैं, और न ही छात्रों की यह धारणा है कि कोई विशिष्ट श्सहीश समाधान विधि है''। –(**हिएबेर्ट, 1997**)

गणित में समस्या समाधान पढाने के लिए सबसे महत्वपूर्ण विषयों में से एक है। समस्या को हल करना सीखने से छात्रों को वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने की भावना विकसित करने और गणित को वास्तविक दुनिया की स्थितियों में लागू करने में मदद मिलती है। इसका उपयोग गणितीय अवधारणाओं की गहरी समझ के लिए भी किया जाता है। ''**गणित के तथ्यों**'' को सीखना पर्याप्त नहीं हैय छात्रों को अपने सोचने के कौशल को विकसित करने के लिए इन तथ्यों का उपयोग करना भी सीखना चाहिए।

एन. सी. टी. एम. (2010) के अनुसार ''समस्या समाधान'' शब्द उन गणितीय कार्यों को संदर्भित करता है जिनमें छात्रों की गणितीय समझ और विकास को बढाने के लिए बौद्धिक चुनौतियां प्रदान करने की क्षमता होती है। जब आप पहली बार ''समस्या समाधान'' सुनते हैं, तो आप किस बारे में सोचते हैं? कहानी की समस्या या शब्द की समस्या? कहानी की समस्याएं सीमित हो सकती हैं और पर्याप्त रूप से ''समस्याग्रस्त'' नहीं हो सकती हैं। उदाहरण के लिए, आप छात्रों से लंबाई और चौडाई को देखते हुए एक आयत का क्षेत्रफल खोजने के लिए कह सकते हैं। इस प्रकार की समस्या को हल करने में एक अभ्यास है और क्षेत्र की अवधारणा को समझे बिना इसे बिना सोचे समझे पूरा नहीं किया जा सकता है। इस लिए समस्या समाधान के अर्थ को समझना आवश्यक है।

''**समस्या–समाधान**'' शब्द को गणित के संदर्भ में निम्न प्रकार से परिभाषित किया गया हैः

विकल्प चुनने, व्याख्या करने, तैयार करने, मॉडल बनाने और समस्या स्थितियों की जांच करने और समाधानों को प्रभावी ढंग से संप्रेषित करने की क्षमता को समस्या समाधान कहते हैं। छात्र समस्याओं को तैयार करते हैं और

हल करते हैं जब वे गणित का उपयोग अपरिचित या सार्थक स्थितियों का प्रतिनिधित्व करने के लिए करते हैं, जब वे जांच तैयार करते हैं और अपने दृष्टिकोण की योजना बनाते हैं, जब वे समाधान खोजने के लिए अपनी मौजूदा रणनीतियों को लागू करते हैं, और जब वे सत्यापित करते है की उनके उत्तर उचित हैं।

समस्या–समाधान सीखना बच्चों के लिए सीखने का एक महत्वपूर्ण कौशल है, क्योंकि यह गणित पाठ्यक्रम का हिस्सा होने के अलावा कुछ ऐसा भी है जिसे हम अपने जीवन के हर दिन में उपयोग करते हैं। गणित में समस्या–समाधान केवल विद्यालयी कक्षा में दिए गए प्रश्नों के उत्तर पर लागू नहीं होता है। हम अपनी सामान्य दिनचर्या के हिस्से के रूप में भी हर समय समस्या–समाधान कौशल का उपयोग करते हैं। चाहे वह किसी रेस्तरां में टेबल बुक करना हो या मेहमानों के लिए जन्मदिन का केक टुकडों में काटना हो, या किसी दुकान से सामान खरीदना हो, समस्या–समाधान एक ऐसाकार्य है जिसका हम हर समय उपयोग करते हैं।

गणित में समस्या–समाधान कठिन या जटिल गणितीय प्रश्नों या स्थितियों का समाधान खोजने की प्रक्रिया है। इसमें रटे–रटाए सूत्रों को लागू करने और निर्धारित प्रक्रियाओं का पालन करने से कहीं अधिक शामिल है। इसके लिए समझ, तार्किक सोच और रचनात्मकता की आवश्यकता होती है। एक अच्छा समस्या–समाधानकर्ता समस्या की पहचान करता है, उसका विश्लेषण करता है और उसके आधार पर समाधान तक पहुँचने की रणनीति विकसित करता है। स्किनर के अनुसार, ''समस्या समाधान किसी लक्ष्य की प्राप्ति में बाधा डालती प्रतीत होती कठिनाइयों पर विजय प्राप्त करने की प्रक्रिया है।'' गणित में समस्या–समाधान के महत्व को कम करके नहीं आंका जा सकता। यह गणितीय जाँच और खोज की जीवनरेखा है। समस्या–समाधान छात्रों को सक्षम बनाता है।

- व्याख्या, प्रतिनिधित्व और समाधान के माध्यम से गणितीय समस्याओं से निपटकर आलोचनात्मक सोच और विश्लेषणात्मक कौशल विकसित करना।
- गणितीय विचारों और तकनीकों को व्यापक संदर्भ में लागू करना, जो बदले में उन्हें जीवन में व्यावहारिक और सार्थक तरीके से गणित का उपयोग करने की अनुमति देता है।
- चुनौतीपूर्ण समस्याओं को हल करना और उनके सामने आने वाली बाधाओं को पार करना सीखते समय दृढ़ता और लचीलापन विकसित होता है।
- रचनात्मकता को बढ़ावा देता है, क्योंकि इसमें आम तौर पर किसी समस्या को हल करने के लिए अलग–अलग तरीके खोजने की ज़रूरत होती है।

दूसरे शब्दों में, समस्या–समाधान केवल उत्तर खोजने के बारे में नहीं है, बल्कि यह जानना भी है कि वह उत्तर कैसे आया और गणितीय रूप से कैसे सोचना है। यह कौशल न केवल अकादमिक दुनिया के लिए बल्कि वास्तविक जीवन और सामान्य रूप से कार्यस्थल के लिए भी महत्वपूर्ण है जहाँ तर्क और विश्लेषण हमेशा काम आते हैं।

इसके अतिरिक्त, कार्य व्यवसाय की दुनिया में कई व्यवसायों और नौकरियों के लिए भी समस्या–समाधान कौशल आवश्यक हैं। एक बिल्डर का उदाहरण लें जिसे किसी काम को पूरा करने के लिए निर्माण सामग्री की मात्रा की गणना करने की आवश्यकता होती है। जो समस्या समाधान का उदाहरण है। बच्चों के लिए कम उम्र में समस्या–समाधान कौशल विकसित करना और समस्या–समाधान का अभ्यास करना महत्वपूर्ण है ताकि वे अपने जीवन में बाद में इन कौशल का उपयोग करने के लिए तैयार हो सकें। समस्या–समाधान हमारे व्यक्तिगत वित्त और बजट के प्रबंधन में भी एक बडी भूमिका निभाता है। अतः समस्या–समाधान कौशल को प्रारम्भ से सीखने और सिखाने से इनके कौशलों को वयस्कता में ले जाएंगे और भविष्य के लिए बेहतर तरीके से तैयार होंगे।

8.4 गणित में समस्या समाधान शिक्षण का इतिहास

गणित में समस्या समाधान शिक्षण की अवधारणा सदियों पुरानी है, लेकिन इसे व्यवस्थित रूप से एक शिक्षण विधि के रूप में अपनाने का इतिहास अपेक्षाकृत नया है। इस विधि की जडें प्राचीन काल में भी देखी जा सकती हैं जब गणितज्ञ और शिक्षक समस्याओं के माध्यम से गणितीय अवधारणाओं को समझाते थे।

प्राचीन यूनानियों ने गणित में समस्या समाधान का महत्व समझा। पायथागोरस, यूक्लिड, और आर्किमिडीज जैसे गणितज्ञों ने गणितीय समस्याओं को हल करने के तरीकों का विकास किया और इन्हें अपने शिक्षण में उपयोग किया। उदाहरण के लिए, यूक्लिड की ''एलीमेंट्स'' एक ऐसी रचना है जिसमें ज्यामितीय समस्याओं को हल करने की पद्धतियों का विस्तृत वर्णन है। मध्यकालीन युग में, अरबी गणितज्ञों ने भी गणित में समस्या समाधान की तकनीकों को समृद्ध किया। अल–ख्वारिज्मी की किताब ''किताब अल–जब्र'' ने बीजगणित को एक नई दिशा दी और समस्याओं को हल करने के तरीकों को व्यापक रूप से फैलाया।

पुनर्जागरण काल में गणित में समस्या समाधान का महत्व फिर से उजागर हुआ। फ्रेंच गणितज्ञ रेने देकार्त ने विश्लेषणात्मक ज्यामिति का विकास किया, जो समस्या समाधान के लिए एक नया दृष्टिकोण प्रस्तुत करता है। इस काल में गणितीय समस्याओं को हल करने के तरीकों का विकास और विस्तार हुआ, जो आगे चलकर आधुनिक गणित शिक्षण के आधार बने।

आधुनिक काल में, 20वीं सदी की शुरुआत में समस्या समाधान शिक्षण को एक व्यवस्थित और संगठित शिक्षण विधि के रूप में मान्यता मिली। इस दिशा में सबसे महत्वपूर्ण योगदान हंगेरियन गणितज्ञ जॉर्ज पोल्या का रहा। जॉर्ज पोल्या ने गणितीय समस्या समाधान के सिद्धांतों को व्यवस्थित रूप से प्रस्तुत किया। उनकी पुस्तक ''हाउ टू सॉल्व इट'' जो 1945 में प्रकाशित हुई, समस्या समाधान शिक्षण में एक मील का पत्थर मानी जाती है। पोल्या ने गणित शिक्षकों को समस्या समाधान के व्यवस्थित और प्रभावी तरीकों का उपयोग करने के लिए प्रेरित किया। 20वीं और 21वीं सदी में, समस्या समाधान शिक्षण को विश्वभर के शिक्षण संस्थानों में व्यापक रूप से अपनाया गया। विभिन्न शैक्षणिक बोर्ड और विश्वविद्यालयों ने इसे अपने पाठ्यक्रम में शामिल किया। समस्या समाधान शिक्षण ने छात्रों के गणितीय सोच, विश्लेषणात्मक क्षमता और रचनात्मकता को विकसित करने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाई।

आज, समस्या समाधान शिक्षण को एक महत्वपूर्ण शैक्षणिक दृष्टिकोण के रूप में मान्यता प्राप्त है, जो छात्रों को गणित में निपुणता प्राप्त करने और वास्तविक जीवन की समस्याओं का सामना करने के लिए तैयार करता है। इसके माध्यम से, छात्र न केवल गणितीय अवधारणाओं को गहराई से समझते हैं, बल्कि वे तार्किक और संरचित तरीके से सोचने की क्षमता भी विकसित करते हैं।

8.5 समस्याओं को हल करने में शिक्षण के तरीके

समस्याओं को हल करने के तीन तरीके है– समस्या समाधान के लिए शिक्षण, समस्या समाधान के बारे में शिक्षण और समस्या समाधान के माध्यम से शिक्षण।

समस्या समाधान के लिए शिक्षण–

समस्या समाधान के लिए शिक्षण एक कौशल सीखने के साथ शुरू होता है। उदाहरण के लिए, छात्र सीख रहे हैं कि दो अंकों की संख्या को एक अंकों की संख्या से कैसे गुणा किया जाए, और आपके द्वारा चुनी गई कहानी की समस्याएं गुणन समस्याएं हैं। सुनिश्चित करें कि जब आप समस्या समाधान के लिए पढा रहे हों, तो आप ऐसे कार्यों का चयन या विकास करें जो गणितीय समझ के विकास को बढावा दे सकें।

समस्या समाधान के बारे में शिक्षण–

समस्या समाधान के बारे में शिक्षण, एक समस्या को हल करने के लिए सुझाए गए रणनीतियों के साथ शुरू होता है। उदाहरण के लिए, ''**एक चित्र बनाएँ**'', ''**एक मेज बनाएँ**'', आदि। आप शिक्षकों की कक्षाओं में ''**समस्या समाधान विधि**'' के पोस्टर देख सकते हैं जैसे किः 1) समस्या को पढें, 2) एक योजना तैयार करें, 3) समस्या का समाधान करें, और 4) अपने काम की जांच करें। इस बात का बहुत कम या कोई प्रमाण नहीं है कि समस्या समाधान के बारे में पढाते समय छात्रों की समस्या–समाधान क्षमताओं में सुधार होता है। छात्र एक शब्द समस्या को एक अलग प्रयास के रूप में देखेंगे और गणित के बजाय अनुसरण किए जाने वाले चरणों पर ध्यान केंद्रित करेंगे।

समस्या समाधान के माध्यम से शिक्षण–

समस्या समाधान के माध्यम से शिक्षण छात्रों का ध्यान विचारों और इन्द्रिय निर्माण पर केंद्रित करता है और गणितीय प्रथाओं का विकास करता है। समस्या समाधान के माध्यम से पढाने से छात्र का आत्मविश्वास भी विकसित होता है और उनकी शक्तियों का निर्माण होता है। यह छात्रों के बीच सहयोग की अनुमति देता है और छात्रों को अपने स्वयं के सीखने में संलग्न करता है।

8.6 समस्या–समाधान कौशल विकसित करने की प्रक्रिया

समस्या–समाधान कौशल विकसित करने पर विचार करते समय, इसका सरल उत्तर अपने छात्रों को समस्याओं को हल करने की अनुमति देकर समस्या–समाधान सिखाना है। वास्तव में अभ्यास ही मनुष्य को परिपूर्ण बनाता है। इसलिए पुनरावृत्ति और समस्या–समाधान कौशल का उपयोग जारी रखने के माध्यम से, छात्र अपनी क्षमता बढा सकते हैं और अपना आत्मविश्वास बढा सकते हैं। समस्या–समाधान कौशल को कैसे विकसित किया जाए, इसका थोडा अधिक गहन उत्तर यह है कि छात्रों को अपने समस्या–समाधान कौशल को विकसित करने के लिए, उन्हें उन समस्याओं के साथ प्रस्तुत किया जाना चाहिए जिन पर उन्हें काम करना और उत्तर का पता लगाना है।

समस्या–समाधान कौशल विकसित करने के एक उदाहरण के रूप में, वर्ष 7 से वर्ष 10 के छात्रों को इस सवाल का जवाब देने के लिए कहना कि दो गुने दो क्या है? भले ही वे सही उत्तर प्रदान करें, वास्तव में समस्या–समाधान के बराबर नहीं है। ऐसा इसलिए है क्योंकि वे पहले ही सीख चुके हैं कि उत्तर क्या है और स्मृति से उत्तर को याद कर सकते हैं।

समस्या को हल करने के लिए उन्हें अपने किसी भी कौशल या ज्ञान को लागू करने की आवश्यकता नहीं है जिसका उत्तर वे पहले से ही जानते हैं। इसे ध्यान में रखते हुए, अपने छात्रों को उनके समस्या–समाधान कौशल को विकसित करने में मदद करने के लिए, ऐसा करने का सबसे अच्छा तरीका उन्हें उन समस्याओं के साथ प्रस्तुत करना है जहां उन्हें वास्तव में अपने समस्या–समाधान ज्ञान और कौशल का उपयोग करना है। छात्रों को इस तरह से चुनौती देने के लिए, इसे बहु–चरणीय शब्द समस्याओं का उपयोग करके आसानी से पूरा किया जा सकता है। बहु–चरणीय शब्द समस्याओं को पहले समझना मुश्किल होता है और उन्हें समझने की आवश्यकता होती है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. गणित में समस्या से क्या तात्पर्य है?

....

....

2. समस्या समाधान को परिभाषित कीजिए।

....

....

3. समस्याओं को हल करने के शिक्षण के कितने तरीके हैं?

....

....

8.7 गणित मे समस्या समाधान शिक्षण की प्रक्रिया

समस्या समाधान शिक्षण की प्रक्रिया में विभिन्न चरण शामिल होते हैं जिन्हें छात्रों को प्रभावी ढंग से समस्याओं को हल करने के लिए अपनाना चाहिए। गणितज्ञ जॉर्ज पोलिया द्वारा प्रस्तुत चार चरणीय प्रक्रिया, जो समस्या समाधान पर अपने काम के लिए प्रसिद्ध हैं, गणितीय अभ्यास और निर्देश के लिए अभी भी आवश्यक है। इसका विवरण निम्नलिखित है–

1. समस्या की समझ–

यह सबसे पहला और महत्वपूर्ण चरण है जहाँ छात्र समस्या को पूरी तरह समझने का प्रयास करते हैं। इसमें समस्या के सभी पहलुओं का विश्लेषण करना और समस्या के संदर्भ को समझना शामिल है। इसमें समस्या कथन को समझना, यह पता लगाना कि कौन सी मात्राएँ ज्ञात हैं और कौन सी अज्ञात हैं, और स्थितियाँ स्थापित करना शामिल है (पोल्या, 1957)। उदाहरणार्थ– संख्या 2 और 4 का गुणनफल क्या है? इस कथन को समझ लेना आवश्यक है। समस्या की समझ विकसित होने से समधान प्रस्तुत करना आसान हो जाता है।

2. योजना का निर्माण–

समस्या को समझने के बाद, छात्र एक योजना बनाते हैं कि समस्या को कैसे हल किया जा सकता है। इसमें विभिन्न तरीकों और रणनीतियों का विचार किया जाता है जो समस्या के समाधान में सहायक हो सकते हैं। इस बिंदु पर समस्या को संबोधित करने के लिए समाधानकर्ता एक कार्य योजना बनाता है। इसमें समस्या को छोटे, अधिक प्रबंधनीय घटकों में विभाजित करना, उचित सूत्र चुनना या समस्या की कल्पना करना शामिल हो सकता है (पोल्या, 1957)। उपरोक्त उदाहरण में प्रयुक्त समस्या को समाधान के लिए यह आवश्यक हो जाता है कि संख्या 2 को 4 बार सम्मिलित करना होगा।

3. योजना का कार्यान्वयन–

इस चरण में, छात्र अपनी बनाई गई योजना को लागू करते हैं। इसमें गणितीय समीकरणों का प्रयोग, गणनाएँ करना और समस्या को हल करने के लिए आवश्यक कदम उठाना शामिल है। इस चरण में, समाधानकर्ता विकसित की गई रणनीति को लागू करता है, कोई भी आवश्यक गणना करता है और गणितीय अवधारणाओं का उपयोग करता है (पोल्या, 1957)। इस चरण के अन्तर्गत उपरोक्त योजना का क्रियान्वयन आवश्यक है। संख्या 2 को 4 बार सम्मिलित करने से $2+2+2+2=8$ प्राप्त होता है।

4. समाधान का पुनरावलोकन–

अंतिम चरण में, छात्र अपने समाधान का पुनरावलोकन करते हैं। इसमें वे जाँचते हैं कि क्या उनका समाधान सही है और यदि नहीं, तो वे अपनी प्रक्रिया को संशोधित करते हैं। अंतिम चरण समाधान का मूल्यांकन करना, यह पुष्टि करना है कि यह सटीक है, और संभावित समस्या विस्तार या सामान्यीकरण के बारे में सोचना है (पोल्या,

1957)। उपरोक्त समस्या समाधान शिक्षण प्रक्रिया के अन्तर्गत प्रयुक्त तीनों सोपानों के बाद उपरोक्त समस्या से सम्बन्धित गुणनफल की अन्य समस्याओं के समाधान का सामान्यीकरण किया जा सकता है।

8.8 गणितीय समस्याओं को हल करने की विधियाँ और अनुमान

पोल्या की समस्या समाधान प्रक्रिया के अलावा, कई विधियाँ और अनुमान हैं जो समस्या समाधान को और अधिक सुविधाजनक बनाते हैं।

पीछे की ओर काम करना– इस विधि में इच्छित परिणाम से शुरू करके और पीछे की ओर काम करके आवश्यक चरणों को निर्धारित करना शामिल है (पोल्या, 1957)।

पैटर्न की पहचान करना– स्थिति समाधानकर्ता पैटर्न या प्रवृत्तियों की खोज करते हैं जो उन्हें स्थिति को बेहतर ढंग से समझने या सामान्य समाधान प्रस्तुत करने में मदद कर सकते हैं (पोल्या, 1957)।

सूचित धारणा बनाना– इसे अनुमान लगाना भी कहा जाता है, इस प्रक्रिया में एक सहज समाधान परिकल्पना तैयार करना और उसके बाद इसकी व्यवहार्यता का मूल्यांकन करना शामिल है (पोल्या, 1957)।

समस्या को तोड़ना– एक कठिन समस्या को अधिक आसानी से हल किया जा सकता है यदि इसे छोटे, अधिक प्रबंधनीय भागों में विभाजित किया जाए (पोल्या, 1957)।

8.9 समस्या–समाधान की तकनीकें

समस्या–समाधान की कुछ महत्वपूर्ण तकनीकें निम्नलिखित है –

8.9.1 समस्या पहचान

- समस्या को समझनारू सबसे पहले, आपको हाथ में मौजूद समस्या को पढ़ना और समझना चाहिए। आपको यह जानना होगा कि क्या आवश्यक है और दी गई सभी जानकारी एकत्र करें।
- समस्या को फिर से बताएंरू कभी–कभी, किसी समस्या को अपने शब्दों में फिर से लिखना या इसे छोटे भागों में विभाजित करना, आपको यह स्पष्ट कर देगा कि प्रश्न में क्या पूछा जा रहा है।
- ज्ञात और अज्ञात की पहचान करें– स्पष्ट रूप से दिखाएँ कि कौन सी जानकारी दी गई है (ज्ञात) और किसका समाधान किया जाना चाहिए (अज्ञात)।

8.9.2 योजना निर्धारण

इस तकनीकी के प्रमुख सोपान निम्नवत हैं–

एक रणनीति चुनें–समस्या को हल करने के लिए एक उपयुक्त रणनीति चुनें। कुछ सामान्य रणनीतियाँ हैं एक चित्र बनाना, एक तालिका बनाना, पीछे की ओर काम करना और समस्या को सरल बनाना।

- **परिकल्पना विकसित करना–** एक रणनीति चुनने के बाद, एक परिकल्पना बनाएँ या एक संभावित मार्ग बताएँ जो समस्या को हल कर सकता है।
- अतिरिक्त रणनीतियाँ आज़माना कभी–कभी अलग–अलग तकनीकों के साथ प्रयोग करना या यहाँ तक कि कुछ रणनीतियों को अपनाना भी समस्या को हल कर सकता है।
- **रणनीति को पूरा करना–** अब पिछले चरण में चुनी गई रणनीति को पूरा करें। प्रत्येक चरण पर सावधानीपूर्वक नज़र रखें और सुनिश्चित करें कि प्रक्रिया तार्किक है। संगठित रहनारू अपने काम को स्पष्ट

नोटेशन के साथ साफ–सुथरा रखें। सुनिश्चित करें कि आप अपने सभी चरणों को स्पष्ट रूप से लिखें, ताकि आप बिना किसी कठिनाई के अपने काम का अनुसरण कर सकें। प्रगति की निगरानी करनारू इस बात के प्रति सचेत रहें कि क्या प्रत्येक चरण आपको लक्ष्य की ओर ले जाता है। यदि नहीं, तो अपनी योजना को संशोधित करें या कोई अन्य समाधान रणनीति आजमाएँ।

8.9.3 प्रतिबिंबन

प्रतिबिम्बन तकनीकी समस्या समाधान की एक प्रमुख तकनीकी है जिसका वर्णन इस प्रकार है–

- **समाधान की समीक्षा करना–** जब अंततः समाधान प्राप्त हो जाता है, तो इसे प्राप्त करने तक अपनाई गई पूरी प्रक्रिया की समीक्षा करनी होती है। सत्यापित करें कि विभिन्न चरण तार्किक रूप से सही हैं और प्राप्त समाधान मूल समस्या का उत्तर देता है।
- **प्रक्रिया पर चिंतन–** चिंतन यह समझने की एक महत्वपूर्ण प्रक्रिया है कि समस्या–समाधान तकनीक में क्या सही या गलत हुआ। यह अन्य समस्याओं के लिए बेहतर रणनीति विकसित करने में परिलक्षित होता है।
- **समाधान का सामान्यीकरण करें–** हल किए गए समाधान को संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए सामान्यीकृत किया जा सकता है या यदि उत्तर पाने के समान लेकिन अन्य तरीके हैं।

8.10 समस्या समाधान में आलोचनात्मक सोच और रचनात्मकता की भूमिका

आलोचनात्मक सोच और रचनात्मकता गणित को हल करने में इस्तेमाल की जाने वाली कुछ प्रमुख प्रक्रियाएँ हैं। आलोचनात्मक सोच और रचनात्मकता छात्रों को बिना किसी पूर्वाग्रह के प्रश्नों से निपटने और खुले दिमाग से नए समाधान तक पहुँचने की संभावना खोजने में सक्षम बनाती है। समस्या समाधान में आलोचनात्मक सोच प्रमुख तत्व निम्नलिखित हैं –

1. **विश्लेषण–** समस्या पर कई तरीकों से विचार करें, इसे प्रबंधनीय भागों में विभाजित करें और प्रत्येक भाग की बारीकी से जाँच करें।
2. **मूल्यांकन–** छात्रों को अपनी योजनाओं और समाधानों की सटीकता का आकलन करना जारी रखना चाहिए और अपनी धारणाओं की जाँच करते रहना चाहिए और अपने तर्क को सत्यापित करना चाहिए।
3. **तार्किक तर्क–** आलोचनात्मक तर्क के लिए विभिन्न सूचनाओं को जोड़ने और साक्ष्य और ठोस सिद्धांतों के आधार पर निष्कर्ष निकालने के लिए तर्क की आवश्यकता होगी।

रचनात्मकता से समस्या को हल करने में मदद मिलती है। रचनात्मक कार्य नयेपन का बोध कराता है और समस्या समाधान में मदद भी करता है। इसके तीन प्रमुख तत्व निम्नलिखित है–

1. **नवीन सोच–** समस्या को हल करने में रचनात्मकता में अलग–अलग सोच शामिल होती है– नए तरीके विकसित करना जिसके माध्यम से किसी समस्या का समाधान किया जा सकता है। इसमें किसी की अंतर्ज्ञान और कल्पना के आधार पर नए, अनूठे समाधान खोजना शामिल है।
2. **लचीलापन–** अनुकूली समस्या समाधानकर्ता अपने विचारों में लचीले हो सकते हैं और जब भी उन्हें कोई बाधा आती है तो वे अपना दृष्टिकोण बदलने के लिए तैयार रहते हैं। वे समाधान खोजने के लिए रणनीतियों को समायोजित कर सकते हैं और तरीकों को मिला सकते हैं।

3. **दृश्यांकन**– अक्सर, रचनात्मकता के लिए समस्या और समाधान की प्रक्रिया की कल्पना करने की क्षमता की आवश्यकता होती है। यह आरेख बनाने, मॉडल का उपयोग करने या यहां तक कि विभिन्न परिदृश्यों की कल्पना करने के संदर्भ में हो सकता है जो समस्या को बेहतर ढंग से समझने में मदद करेंगे।

गणितीय समस्या–समाधान समस्या की स्पष्ट धारणा, रणनीतिक योजना, सावधानीपूर्वक रणनीति निष्पादन और चिंतनशील मूल्यांकन है। इसलिए, आलोचनात्मक सोच और रचनात्मकता को छात्रों को समस्याओं का गहन विश्लेषण करने, तार्किक रूप से सोचने और आविष्कारशील समाधान निकालने में सक्षम बनाने की प्रक्रिया के घटकों के रूप में देखा जाता है। यह छात्रों को विषय में सबसे सूक्ष्म चुनौतियों का कुशलतापूर्वक उत्तर देने और इन कौशलों को उपयोगी, व्यावहारिक तरीकों से लागू करने की क्षमता प्रदान करता है।

8.11 समस्या समाधान में सामान्य गलतियाँ और उनसे बचाव

1. अभिव्यक्तियों को सरल बनाना–

सामान्य गलती– समान पदों या बीजीय संक्रियाओं को संयोजित करने में त्रुटियाँ बहुत अलग सही समाधान में परिणत हो सकती हैं।

कैसे बचें– सरलीकरण के प्रत्येक चरण की सावधानीपूर्वक पुनः जाँच करें, अंकगणित और बीजगणितीय संक्रियाओं को ध्यान से देखें।

2. संकेत त्रुटियाँ–

सामान्य गलती– प्लस और माइनस चिह्नों वाली त्रुटियाँ गलत उत्तर देती हैं।

बचाव– समाधान प्रक्रिया के दौरान प्रत्येक पद के चिह्नों को सावधानीपूर्वक ट्रैक करें और सत्यापित करें।

3. समाधानों की अनदेखी–

नुकसान– सभी संभावित समाधानों की पहचान करने में विफल होना, विशेष रूप से दो समाधानों वाले द्विघात समीकरणों में।

बचाव– यह सुनिश्चित करने के लिए पूर्ण विधियों का उपयोग करें कि सभी समाधान मिल जाएँ, जैसे कि गुणनखंडन या द्विघात सूत्र का उपयोग करना।

4. गलत प्रतिस्थापन–

नुकसान– समीकरणों में मानों को प्रतिस्थापित करने में त्रुटियाँ गलत परिणाम दे सकती हैं।

प्रतिस्थापन– प्रतिस्थापनों पर सावधानीपूर्वक जाँच करें ताकि यह सुनिश्चित हो सके कि सही चरण किए गए हैं और समीकरणों में पद सही ढंग से रखे गए हैं।

5. समस्या की गलत व्याख्या–

नुकसान– समस्या के कथन या अपेक्षित परिणाम की खराब समझ गलत दृष्टिकोणों को जन्म दे सकती है।

बचाव– समस्या और आवश्यकताओं को पढ़ने और समझने में कुछ समय व्यतीत करें ताकि समाधान पर जाने से पहले यह समझ सकें कि क्या पूछा जा रहा है।

6. चरणों को छोड़ें–

नुकसान– समाधान की प्रक्रिया के चरणों को छोड़ने से अधूरे या गलत समाधान हो सकते हैं।

बचाव– यह सुनिश्चित करने में व्यवस्थित रहें कि हर चरण का पालन किया जाए और समाधान को सही रखने के लिए दोबारा जाँच की जाए।

इन सामान्य नुकसानों से बचकर, छात्र समस्या–समाधान में बेहतर होंगे और बीजगणित की समस्याओं के लिए अधिक सटीक और सुसंगत समाधान प्राप्त करेंगे।

8.12 गणित मे समस्या समाधान शिक्षण का महत्व

गणित में समस्या समाधान शिक्षण का महत्व निम्न कारणों से है–

1. **तार्किक सोच का विकास–** समस्या समाधान शिक्षण छात्रों को तार्किक और विश्लेषणात्मक सोच विकसित करने में मदद करता है। यह उन्हें समस्याओं का संरचित और व्यवस्थित तरीके से समाधान करने के लिए प्रशिक्षित करता है।

2. **नवाचार और रचनात्मकता–** यह शिक्षण विधि छात्रों में नवाचार और रचनात्मकता को प्रोत्साहित करती है। वे विभिन्न समस्याओं के लिए नए और अनूठे समाधान खोजने के लिए प्रेरित होते हैं।

3. **स्वतंत्रता और आत्म–निर्भरता–** समस्या समाधान शिक्षण छात्रों को आत्म–निर्भर बनने और समस्याओं को अपने आप हल करने के लिए सशक्त बनाता है। इससे उनकी आत्म–विश्वास में वृद्धि होती है।

4. **जीवन कौशल का विकास–** यह शिक्षण विधि न केवल अकादमिक जीवन में बल्कि वास्तविक जीवन में भी समस्याओं का सामना करने के लिए आवश्यक कौशल प्रदान करती है। उदाहरणार्थ– विषयों के चयन के अलावा जीवन के उद्देश्यों के निर्धारण, मानवीय अन्तर्संबन्धी की समझ एवं कार्यें को करने के लिए जीवन कौशल का विकास आवश्यक है।

8.13 समस्या समाधान शिक्षण में प्रयुक्त रणनीतियाँ

समस्या समाधान शिक्षण में विभिन्न रणनीतियाँ अपनाई जा सकती हैं जो छात्रों की समस्या समाधान क्षमता को बढाने में मदद कर सकती हैं–

समूह कार्य– छात्रों को समूहों में काम करने के लिए प्रेरित करना ताकि वे मिलकर समस्याओं का समाधान कर सकें और एक–दूसरे से सीख सकें।

खुली–समस्याएँ– खुली–समस्याएँ देने से छात्रों को विभिन्न दृष्टिकोणों से समस्याओं का समाधान खोजने के लिए प्रोत्साहित किया जा सकता है।

प्रश्न–उत्तर सत्र– प्रश्न–उत्तर सत्र के माध्यम से छात्रों को समस्याओं के बारे में गहराई से सोचने और उनकी समझ को स्पष्ट करने का अवसर मिलता है।

समस्या समाधान प्रतियोगिताएँ– प्रतियोगिताओं का आयोजन छात्रों को चुनौतीपूर्ण समस्याओं का समाधान करने के लिए प्रेरित कर सकता है और उनके प्रदर्शन में सुधार कर सकता है।

8.14 समस्या समाधान शिक्षण की सीमाएँ

हालांकि समस्या समाधान शिक्षण के कई लाभ हैं, लेकिन इसकी कुछ सीमाएँ भी हैं जो निम्नलिखित हैं–

1. **समय की आवश्यकता–** समस्या समाधान शिक्षण में अधिक समय लग सकता है, क्योंकि इसमें प्रत्येक समस्या के लिए विस्तृत विश्लेषण और योजना की आवश्यकता होती है।

2. **व्यक्तिगत अंतर–** सभी छात्र समस्या समाधान में समान रूप से सक्षम नहीं होते। कुछ छात्रों को समस्या समाधान के लिए अधिक समर्थन और मार्गदर्शन की आवश्यकता हो सकती है।

3. **शिक्षकों का प्रशिक्षण–** समस्या समाधान शिक्षण प्रभावी रूप से लागू करने के लिए शिक्षकों को विशेष प्रशिक्षण की आवश्यकता होती है। सभी शिक्षक इस विधि को सिखाने में सक्षम नहीं हो सकते।

4. **संसाधनों की कमी–** प्रभावी समस्या समाधान शिक्षण के लिए पर्याप्त संसाधनों की आवश्यकता होती है, जैसे कि उपयुक्त समस्याएं, सहायक सामग्री, और उपकरण।

8.15 गणित विषय में समस्या समाधान शिक्षण की प्रासंगिकता

गणित शिक्षण में समस्या समाधान शिक्षण की प्रासंगिकता का महत्व वर्तमान शिक्षा प्रणाली में अत्यधिक है। यह न केवल छात्रों को गणितीय समस्याओं का सामना करने में मदद करता है बल्कि उनकी तार्किक और विश्लेषणात्मक सोच को भी विकसित करता है। यहां समस्या समाधान शिक्षण की प्रासंगिकता के विभिन्न पहलुओं पर प्रकाश डालने के लिए निम्न बिन्दु हो सकते है ।

1. **तार्किक सोच और विश्लेषणात्मक क्षमता का विकास–** समस्या समाधान शिक्षण का मुख्य उद्देश्य छात्रों में तार्किक और विश्लेषणात्मक सोच को बढ़ावा देना है। जब छात्र समस्याओं का समाधान करते हैं, तो वे गणितीय अवधारणाओं को गहराई से समझते हैं और उनके विभिन्न पहलुओं का विश्लेषण करते हैं। इससे उनका तर्कशक्ति और विश्लेषणात्मक क्षमता में सुधार होता है, जो न केवल गणित में बल्कि जीवन के अन्य क्षेत्रों में भी उपयोगी होती है।

2. **रचनात्मकता और नवाचार को प्रोत्साहन–** समस्या समाधान शिक्षण छात्रों को रचनात्मक और नवीन समाधान खोजने के लिए प्रेरित करता है। जब छात्र विभिन्न तरीकों से समस्याओं का समाधान करते हैं, तो वे अपने रचनात्मक सोच का उपयोग करते हैं और नए दृष्टिकोण अपनाते हैं। यह रचनात्मकता और नवाचार को प्रोत्साहित करता है, जो उन्हें जटिल समस्याओं का समाधान करने में सक्षम बनाता है।

3. **आत्मविश्वास और आत्म–निर्भरता का विकास–** समस्या समाधान शिक्षण छात्रों को आत्म–निर्भर बनने और समस्याओं का समाधान करने में आत्मविश्वास बढ़ाने में मदद करता है। जब छात्र सफलतापूर्वक समस्याओं का समाधान करते हैं, तो उनका आत्म–विश्वास बढ़ता है और वे भविष्य में अधिक आत्म–निर्भर बनते हैं। यह आत्म–निर्भरता उन्हें जीवन की विभिन्न चुनौतियों का सामना करने के लिए तैयार करती है।

4. **जीवन कौशल का विकास–** समस्या समाधान शिक्षण न केवल अकादमिक सफलता के लिए बल्कि वास्तविक जीवन की समस्याओं का सामना करने के लिए भी महत्वपूर्ण है। यह छात्रों को विभिन्न जीवन कौशल, जैसे समस्या–समाधान, निर्णय लेने, और संकट प्रबंधन, को विकसित करने में मदद करता है। ये कौशल उन्हें व्यक्तिगत और पेशेवर जीवन में सफलता प्राप्त करने में सहायक होते हैं।

5. **गणितीय अवधारणाओं की गहन समझ–** समस्या समाधान शिक्षण छात्रों को गणितीय अवधारणाओं को गहराई से समझने का अवसर प्रदान करता है। जब छात्र समस्याओं का समाधान करते हैं, तो वे अवधारणाओं का व्यावहारिक उपयोग देखते हैं और उन्हें बेहतर ढंग से समझते हैं। यह गहन समझ उनके शैक्षणिक प्रदर्शन में सुधार लाती है और उन्हें उच्च स्तर की गणितीय समस्याओं का सामना करने के लिए तैयार करती है।

6. शिक्षण में विविधता और रुचि– समस्या समाधान शिक्षण शिक्षकों को अपने शिक्षण में विविधता लाने और छात्रों को अधिक रुचि लेने का अवसर देता है। जब छात्र समस्याओं का समाधान करते हैं, तो वे अधिक सक्रिय रूप से शामिल होते हैं और सीखने की प्रक्रिया में अधिक रुचि दिखाते हैं। यह शिक्षण विधि छात्रों को सीखने में अधिक संलग्न करती है और उनके शैक्षणिक प्रदर्शन को बढ़ावा देती है।

इस प्रकार ये इंगित होता है कि गणित शिक्षण में समस्या समाधान शिक्षण की प्रासंगिकता अत्यधिक महत्वपूर्ण है। यह विधि छात्रों में तार्किक, विश्लेषणात्मक, और रचनात्मक सोच को विकसित करती है, उन्हें आत्म–निर्भर और आत्मविश्वासी बनाती है, और जीवन कौशल का विकास करती है। इसके अलावा, यह शिक्षण में विविधता और छात्रों की रुचि को बढ़ावा देती है। इस प्रकार, समस्या समाधान शिक्षण वर्तमान शिक्षा प्रणाली में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है और छात्रों को गणित में सफलता प्राप्त करने के लिए तैयार करता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

4. समस्या समाधान की प्रमुख तकनीकें कौन–कौन सी हैं?

....

....

5. गणित मे समस्या समाधान शिक्षण की चार चरणीय प्रक्रिया का नाम लिखिए।

....

....

6. समस्या समाधान शिक्षण में प्रयुक्त किन्हीं चार रणनीतियों के नाम बताईये।

....

....

7. गणित मे समस्या समाधान शिक्षण का महत्व किन–किन कारणों से है?

....

....

8.16 सारांश

समस्या समाधान शिक्षण गणित में एक प्रभावी शिक्षण विधि है जो छात्रों के तार्किक, विश्लेषणात्मक, और रचनात्मक कौशल को विकसित करती है। यह उन्हें न केवल अकादमिक समस्याओं का सामना करने के लिए बल्कि वास्तविक जीवन की चुनौतियों का समाधान करने के लिए भी तैयार करता है। हालांकि इस विधि की कुछ सीमाएँ हैं, लेकिन इसके लाभ इसकी सीमाओं से कहीं अधिक हैं। सही रणनीतियों और संसाधनों के साथ, समस्या समाधान शिक्षण छात्रों की शिक्षा में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभा सकता है और उन्हें सफलता की राह पर अग्रसर कर सकता है।यह लेख समस्या समाधान शिक्षण के विभिन्न पहलुओं पर प्रकाश डालता है और इसके परिचय, प्रक्रिया, महत्व, रणनीतियों, और सीमाओं आदि को समझने में मदद करता है। इसके माध्यम से, शिक्षकों और छात्रों दोनों को इस विधि को अपनाने और इसका अधिकतम लाभ उठाने के लिए प्रेरित किया जा सकता है तथा समय समय पर नए नए शिक्षण प्रणालियों को छात्रों के बीच लाकर उत्साहवर्धन के लिए प्रयोग किया जा सकता है ।

8.17 अभ्यास के प्रश्न

1. समस्या–समाधान कौशल विकसित करने की प्रक्रिया का उल्लेख कीजिए।
2. गणित मे समस्या समाधान शिक्षण की प्रक्रिया का वर्णन कीजिए।
3. गणित मे समस्या समाधान शिक्षण के महत्व की विवेचना कीजिए।
4. समस्या समाधान शिक्षण में प्रयुक्त रणनीतियों का वर्णन कीजिए।
5. गणित में समस्या समाधान शिक्षण की सीमाएँ बताईए।

8.18 चर्चा के बिंदु

1. गणित में समस्या समाधान शिक्षण क्या है। चर्चा कीजिए।
2. गणित में समस्या समाधान शिक्षण का महत्व क्या है। चर्चा कीजिए।

8.19 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. गणित में समस्या का तात्पर्य – एक समस्या ''कोई भी कार्य या गतिविधि है जिसके लिए छात्रों के पास कोई निर्धारित या याद रखने वाले नियम या तरीके नहीं हैं, और न ही छात्रों की यह धारणा है कि कोई विशिष्ट ''सही'' समाधान विधि है।''
2. विकल्प चुनने, व्याख्या करने, तैयार करने, मॉडल बनाने और समस्या स्थितियों की जांच करने और समाधानों को प्रभावी ढंग से संप्रेषित करने की क्षमता को समस्या समाधान कहते हैं।
3. समस्याओं को हल करने के तीन तरीके है – समस्या समाधान के लिए शिक्षण, समस्या समाधान के बारे में शिक्षण और समस्या समाधान के माध्यम से शिक्षण।
4. समस्या पहचान, योजना निर्धारण एवं प्रतिम्बिबन।
5. गणितज्ञ जॉर्ज पोलिया द्वारा प्रस्तुत चार चरणीय प्रक्रिया समस्या की समझ, योजना का निर्माण, योजना का कार्यान्वयन और समाधान का पुनरावलोकन है।
6. समूह कार्य, खुली–समस्याएँ, प्रश्न–उत्तर सत्र एवं समस्या समाधान प्रतियोगिताएँ।
7. गणित मे समस्या समाधान शिक्षण का महत्व तार्किक सोच का विकास, नवाचार और रचनात्मकता, स्वतंत्रता और आत्म–निर्भरता व जीवन कौशल का विकास से है।

8.20 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. अली, आर., हुकमदाद, डॉ., अख्तर, ए., और खान, ए. (2010) । गणित पढ़ाने में समस्या समाधान पद्धति के उपयोग का गणित के छात्रों की उपलब्धि पर प्रभाव। एशियाई सामाजिक विज्ञान, 6(2), पृष्ठ 67. https://doi-org/10-5539/ass-v6n2p67
2. गणित में सहयोगात्मक समस्या समाधान दृ साइंसडायरेक्ट, (द.क.)। 2 अगस्त, 2024,https://www-sciencedirect-com/science/article/abs/pii/S2352154623000505
3. फुलोप, ई. (2015). गणित में समस्या समाधान रणनीतियों का शिक्षण. गणित, विज्ञान और प्रौद्योगिकी शिक्षा पर अंतर्राष्ट्रीय जर्नल, 3(1), लेख 1- https://doi-org/10-31129/lumat-v3i1-1050
4. जैसिंटो, एच., और कैरेरा, एस. (2023). प्रौद्योगिकी के साथ गणितीय समस्या समाधान सिखाने के लिए ज्ञानरू गणित शिक्षक की दक्षता का एक खोजपूर्ण अध्ययन. यूरोपिअन जर्नल ऑफ साइंस एंड मैथमैटिक्स एजुकेशन, 11(1), 105–122- https://doi-org/10-30935/scimath/12464

5. कोइचु, बी. (2014). समस्या–समाधान पर विचार. गणित और गणित शिक्षारू सामान्य आधार की खोज (पृष्ठ 113–135)। स्प्रिंगर नीदरलैंड- https://doi-org/10-007/978&94&007&7473&5_8
6. पेहलवेन, ई., हन्नुला, एम.एस., और ब्योर्कक्विस्ट, ओ. (2007) । गणित शिक्षा में शिक्षण पद्धति के रूप में समस्या समाधान. ब्रिल.https://doi-org/10-1163/9789087902445_010
7. वर्मा, पी. (2016). गणित शिक्षण में समस्या समाधान के नवीन दृष्टिकोण. भारतीय गणित शिक्षा सम्मेलन में प्रस्तुत, नई दिल्ली.
8. कुमार, एस. (2019). गणितीय समस्या समाधान और इसके शिक्षण में चुनौतियाँ. शिक्षण में नवाचार पर राष्ट्रीय संगोष्ठी, मुंबई.
9. पोल्या, जॉर्ज (1957). समस्या कैसे हल करेंरू एक नया गणितीय पद्धति दृष्टिकोण. ओरिएंट ब्लैकस्वान.
10. श्रीवास्तव, आर. के. (2005). गणित शिक्षण विधियाँ. रत्ना सागर पब्लिकेशन्स.
11. एन.सी.ई.आर.टी. (2017). गणित शिक्षा के सिद्धांत- http://ncert-nic-in/ebooks-html
12. भारतीय गणित शिक्षा परिषद (2020). गणित में समस्या समाधान शिक्षण के तकनीकी दृष्टिकोण. http://bmes-org-in/resources

इकाई– 9 : बीजगणित और ज्यामिति में समस्या–समाधान

इकाई की संरचना

9.1 प्रस्तावना

9.2 इकाई के उद्देश्य

9.3 ज्यामिति में समस्या–समाधान

9.3.1 ज्यामितीय अवधारणाओं का परिचय

9.4 ज्यामितीय समस्याओं के समाधान के उपाय

9.4.1 समस्याओं को समझना

9.4.2 ज्यामितीय गुण और प्रमेयों का उपयोग करना।

9.5 समस्या–समाधान में ज्यामिति के साथ बीजगणित का समावेश

9.6 वास्तविक जीवन में बीजगणित–ज्यामितीय का अनुप्रयोग

9.7 बीजगणित–ज्यामितीय का अन्य विषयों से सम्बन्ध

9.8 समस्या–समाधान को बढ़ावा देने के लिए रणनीतियाँ

9.9 समस्या–समाधान विधि के सोपान या चरण

9.9.1 समस्या का चयन करना या समस्या प्रस्तुत करना

9.9.2 समस्या में दिये गये तथ्यों तथा उसके सम्बन्धों को समझना

9.9.3 समस्या का विश्लेषण करना

9.9.4 योजना तैयार करना या सम्भावित हल खोजना

9.9.5 हल को प्राप्त करने के लिए सही गणना करना या योजना को क्रियान्वित करना

9.9.6 समस्या का हल ज्ञात करना एवं पुनः जाँच करना

9.10 गणित में समस्या समाधान में प्रयुक्त संसाधन और उपकरण

9.11 सारांश

9.12 अभ्यास के प्रश्न

9.13 चर्चा के बिंदु

9.14 बोध प्रश्नों के उत्तर

9.15 कुछ उपयोगी पुस्तकें

9.1 प्रस्तावना

गणित केवल संख्याएँ या सूत्र नहीं है, यह तर्क और तर्क है। गणित बहुत महत्वपूर्ण विषय है, गणित में किसी भी समस्या को हल करने के लिए आलोचनात्मक सोच और रचनात्मक और विश्लेषणात्मक दृष्टिकोण की आवश्यकता होती है। छात्र समस्याओं को अलग करके उनका विश्लेषण करने और तर्क के माध्यम से समाधान निर्धारित करने में सक्षम होते हैं। यह सामग्री है कि यह कौशल या क्षमता न केवल स्कूल में बल्कि रोजमर्रा की जंदिगी में भी काम आएगी, और सबसे महत्वपूर्ण बात यह है कि हर पेशे में।

समस्या–समाधान गणित सीखने का केंद्र है, और हल की जा रही समस्या की पहचान करने की यह पूरी प्रक्रिया एक छात्र की दृढ़ता और लचीलापन की भावना को विकसित करने में मदद करती है। गणित की समस्याओं को हल करने में चुनौतियों का सामना करने से छात्रों को विकास की मानसिकता का दृष्टिकोण विकसित करने में मदद मिलती हैय यानी गलतियों से सीखना उन्हें विफलताओं के रूप में देखने से बेहतर है। यह एक ऐसी मानसिकता है जो गणित से कहीं आगे जाती है और सीखने के सभी पहलुओं के साथ–साथ सामान्य रूप से जीवन पर भी लागू होती है। इसके अलावा, ऊपर, समस्या–समाधान पूर्णता और आश्वासन की भावना का निर्माण करता है जो छात्र को अतिरिक्त की आवश्यकता के लिए प्रेरित करता है। गणित का अभ्यास करने से व्यक्ति को गणितीय ज्ञान की अवधारणाओं को विकसित करने में भी मदद मिलती है। सूत्र और एल्गोरिदम को याद करने के बजाय, छात्र सैद्धांतिक मचानों के बारे में स्पष्ट शारीरिक अंतर्ज्ञान विकसित करते हैं जो हम उन्हें समझाते हैं।

यह अंतर्दृष्टि गणित और अन्य संबंधित क्षेत्रों में आगे के अध्ययन के लिए आवश्यक है, जो औपचारिक तर्क पर निर्भर करता है, जिसमें भौतिकी, इंजीनियरिंग अर्थशास्त्र या कंप्यूटर विज्ञान शामिल हैं। बीजगणित और ज्यामिति पर ध्यान दें। बीजगणित और ज्यामिति गणित की मूलभूत शाखाएँ हैं जो कई अन्य गणितीय निर्माणों और अनुप्रयोगों के लिए आधार के रूप में काम करती हैं। एक के लिए, यहाँ समस्या–समाधान प्रतिस्पर्धी है। बीजगणित के संचालन के लिए कुछ बुनियादी प्रतीक हैं। यह आधुनिक गणित और विज्ञान की कई शाखाओं का अग्रदूत है। बीजगणितीय समस्या समाधान समीकरण, असमानता, कार्य और ग्राफ जैसे परिणामों को हल करें। आपको अमूर्त रूप से सोचने और गणित के विचारों को निकालने का तरीका जानने की आवश्यकता है। यह कौशल उच्च–स्तरीय गणित और कई वास्तविक दुनिया के अनुप्रयोगों, कविता लेखन और वित्तीय मॉडलिंग डेटा विश्लेषण के लिए महत्वपूर्ण है। बीजगणित गणितीय अवधारणाओं को सिखाता है जिसमें समीकरणों को सामान्य बनाने की प्रक्रिया शामिल होती है जिसे चरों के लिए समाधान खोजने के लिए लागू किया जा सकता है, जो शिक्षार्थी को मात्राओं के बीच संबंधों के बारे में तर्क करने और कथन बनाने में मदद करता है। दूसरी ओर, ज्यामिति गणित की एक शाखा है जो आकृतियों और आकारों के साथ–साथ आकृतियों, गुणों के स्थान की सापेक्ष स्थिति का अध्ययन करती है।

यह एक साधन के रूप में और अपने आप में दोनों को पूरा करता है। गणित विषय के संबंध में, ज्यामिति के माध्यम से समस्या–समाधान सिखाना, प्रमेय जैसे प्रमाण जैसे आकृतियों के गुणों को समझने और लागू करने का विषय है। छात्र ज्यामिति सीखते हैं जो उनके स्थानिक तर्क का निर्माण करता है, जो वास्तुकारों और इंजीनियरों के साथ–साथ रचनात्मक कलाकारों के लिए एक अपूरणीय कौशल है। यह दृश्य सोच भी विकसित करता है इस तरह, बीजगणित और ज्यामिति पर काम करने वाले छात्र समस्या–समाधान पर ध्यान केंद्रित करने के संतुलन को संतुलित करते हैं। दोनों एक दूसरे के उद्देश्यों का समर्थन करते हैं और अक्सर एक दूसरे को पार करते हैं। उदाहरण के लिए, कुछ बीजगणितीय तकनीकों के उपयोग से, ज्यामितीय समस्याओं को हल किया जा सकता है। दूसरी ओर, ज्यामितीय अवधारणाएँ चर के बीच संबंधों को देखने और समझने में भी मदद कर सकती हैं। गति में यह समृद्धि उनकी समझ को समृद्ध करती है और साथ ही उन्हें गणित के कार्यों के साथ आने वाले विविध कौशलों के साथ बहुमुखी बनाती है।

इसके अलावा, बीजगणित और ज्यामिति के साथ समस्या–समाधान आगे के अध्ययन के लिए एक अच्छा आधार प्रदान करता है। कलन, रैखिक बीजगणित, अंतर समीकरण और गणित में किसी भी आगे के अध्ययन में बीजगणित और ज्यामिति के साथ विकसित अवधारणाएँ शामिल हैं। इन क्षेत्रों में महारत हासिल करना सुनिश्चित करता है कि एक छात्र कठोर उन्नत गणित लेने के लिए तैयार है।

शैक्षणिक लाभों के अलावा, बीजगणित और ज्यामिति में समस्या–समाधान के व्यावहारिक निहितार्थ हैं। डिज़ाइन से लेकर अनुकूलन तक कई वास्तविक जीवन की समस्याएँ, उपर्युक्त डोमेन के भीतर गणितीय अवधारणाओं को बुलाती हैं। बीजगणित और ज्यामिति में मजबूत समस्या–समाधान कौशल यह सुनिश्चित करते हैं कि एक छात्र को रोज़मर्रा की ज़िदगी या काम में किसी भी स्थिति में गणित में तर्क लागू करना आसान लगता है।

इस प्रकार समस्या समाधान को गणित का एक महत्वपूर्ण कार्य माना जाता है क्योंकि यह महत्वपूर्ण सोच, रचनात्मकता और विश्लेषणात्मकता जैसे महत्वपूर्ण कौशल को शामिल करता है। बीजगणित और ज्यामिति सबसे महत्वपूर्ण बुनियादी तत्व हैं जो छात्रों को गणितीय विचारों और अनुप्रयोगों की विस्तृत विविधता सीखने में मदद करते हैं। जैसे–जैसे छात्र दोनों विषयों में अपनी समस्या–समाधान रणनीतियों को लागू करते हैं, वे न केवल शैक्षणिक क्षेत्र में सफलता के लिए तैयार होते हैं, बल्कि व्यक्तिगत और व्यावसायिक जीवन में भी उपकरण विकसित करने के लिए तैयार होते हैं।

9.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. समस्या समाधान को परिभाषित कर सकेंगे।
2. समस्या–समाधान तकनीकों की विवेचना कर सकेंगे।
3. वास्तविक जीवन में बीजगणित और ज्यामिति के अनुप्रयोग सीख सकेंगे।
4. ज्यामितीय और बीजगणित संबंधी समस्याओं को हल करने के तरीके समझ सकेंगे।
5. ज्यामितीय और बीजगणित में समस्या–समाधान रणनीति के अनुप्रयोग की विवेचना कर सकेंगे।
6. गणित में समस्या समाधान में प्रयुक्त संसाधन और उपकरण का शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में उपयोग कर सकेंगे।

9.3 ज्यामिति में समस्या–समाधान

ज्यामिति गणित का एक प्रारंभिक विभाग है, जो बिंदुओं, रेखाओं, समतलों, सतहों और ठोस पदार्थों के गुणों और संबंधों पर केंद्रित है। यह स्थानिक संबंधों और रूपों पर दृष्टिकोण देने में व्यापक रूप से योगदान देता है, जिसका उपयोग इंजीनियरिंग, वास्तुकला, कला और कंप्यूटर ग्राफिक्स सहित कई अनुप्रयोगों में किया जाता रहा है। ज्यामिति न केवल हमारे अंदर स्थानिक कौशल का निर्माण करती है बल्कि भविष्य की गणितीय अवधारणाओं और समस्या समाधान के तरीकों की प्राप्ति का आधार बनती है।

9.3.1 ज्यामितीय अवधारणाओं का परिचय

ज्यामिति एक विशाल विषय है जिसमें ज्यामितीय आकृतियों के प्राथमिक तत्व, उनके बीच संबंध और गुण होते हैं जो उन्हें संरचना प्रदान करते हैं। मुख्य ज्यामितीय अवधारणाओं में शामिल हैं–

1. **बिंदु, रेखाएँ और समतल–** ज्यामिति के मूल तत्व, जहाँ बिंदु अंतरिक्ष में स्थान होते हैं। एक बिंदु को अंतरिक्ष में एक सटीक स्थिति या स्थान के रूप में परिभाषित किया जा सकता है जिसका कोई आयाम नहीं होता है। इसे आमतौर पर एक बिंदु द्वारा दर्शाया जाता है और एक बड़े अक्षर द्वारा लेबल किया जाता है।

रेखाएँ दोनों दिशाओं में असीम रूप से विस्तारित होती हैं। एक सीधा रास्ता जो बिना किसी विचलन के दोनों दिशाओं में अनंत तक फैला होता है और इसे दो अलग–अलग बिंदुओं द्वारा परिभाषित किया जाता है। इसकी लंबाई होती है लेकिन चौड़ाई या ऊँचाई नहीं होती। समतल दो आयामों में असीम रूप से विस्तारित होने वाली सपाट सतहें होती हैं। एक सपाट सतह जो दो आयामों में अनंत तक फैली होती है, इसे तीन गैर–समरेख बिंदुओं द्वारा परिभाषित किया जाता है।

2. **कोण**– दो रेखाओं के प्रतिच्छेदन के माध्यम से, कोण डिग्री में मापा जाता है और इसलिए इसके गुण और विभिन्न प्रकार होते हैं जिनमें न्यून कोण, समकोण, अधिक कोण और सीधे कोण शामिल हैं।

- **न्यून कोण**– ऐसा कोण जिसका माप 90 डिग्री से कम हो।
- **समकोण**– ऐसा कोण जिसका माप ठीक 90 डिग्री हो।
- **अधिक कोण**– ऐसा कोण जिसका माप 90 डिग्री से अधिक लेकिन 180 डिग्री से कम हो।
- **सीधा कोण**– ऐसा कोण जिसका माप ठीक 180 डिग्री हो।
- **कोण संबंध**– पूरक (योग 90 डिग्री है), पूरक (योग 180 डिग्री है), ऊर्ध्वाधर (प्रतिच्छेद करने वाली रेखाओं द्वारा निर्मित विपरीत कोण), और आसन्न कोण (एक सामान्य पक्ष और शीर्ष साझा करना)।

3. **आकृतियाँ और उनके गुण**– त्रिभुज, चतुर्भुज और वृत्त जैसी ज्यामितीय आकृतियाँ, उनमें से प्रत्येक के कुछ विशिष्ट गुण होते हैं और अन्य आकृतियों के साथ उनके संचालन के लिए अलग–अलग नियम होते हैं।

i) **त्रिभुज**– तीन भुजाओं वाला एक बहुभुज। मुख्य गुणों में आंतरिक कोणों का योग (180 डिग्री) और विभिन्न प्रकार (समबाहु, समद्विबाहु और विषमबाहु) शामिल हैं।

ii) **चतुर्भुज**– चार भुजाओं वाला एक बहुभुज। कुछ प्रकारों में वर्ग, आयत, समचतुर्भुज और समांतर चतुर्भुज शामिल हैं, जिनमें से प्रत्येक में भुजाओं, कोणों और विकर्णों की संख्या के विशिष्ट गुण होते हैं।

iii) **वृत्त**– एक केंद्रीय बिंदु या केंद्र से समान दूरी पर स्थित बिंदुओं का समूह। अन्य गुण त्रिज्या, व्यास, परिधि और क्षेत्र हैं।

9.4 ज्यामितीय समस्याओं के समाधान के उपाय

ज्यामिति समस्याओं के समाधान के उपाय निम्नलिखित हैं–

9.4.1 समस्या को समझना–

- **ध्यान दें**– जानें कि समस्या आपसे क्या करवाना चाहती है और इसकी सभी बाधाओं का सम्मान करें। दिए गए और आवश्यक डेटा का चयन करें।
- **महत्वपूर्ण विवरण जानें**– त्रिभुज, वृत्त, बहुभुज और ज्ञात लंबाई और संबंधों जैसे किसी भी ज्यामितीय आकार या रूप को पहचानें।

समस्या की कल्पना करना–

एक आरेख लिखें– अपनी क्षमता के अनुसार हल करने की आवश्यकता वाले बिंदुओं को ड्रा करें। ज्ञात मानों और संबंधों को लेबल करें ताकि हमें यह महसूस हो सके कि हमारा डेटा फ्रेम यहाँ कैसा दिखता है।

संरचनाएँ बनाएँ– समस्या को आसान बनाने के लिए आप तत्वों के अलावा अन्य रेखाएँ या आकृतियाँ बना सकते हैं, जैसे लंबवत, द्विभाजक, आदि।

9.4.2 ज्यामितीय गुण और प्रमेयों का उपयोग करना–

प्रमेयों को लागू करें– समस्या को हल करने के लिए स्थापित ज्यामितीय प्रमेयों और गुणों, जैसे कि पाइथागोरस प्रमेय, समान त्रिभुजों के गुण या वृत्त प्रमेय का उपयोग करें।

सूत्रों का उपयोग करें– आवश्यकतानुसार क्षेत्र, परिधि, आयतन और अन्य ज्यामितीय गुणों के लिए प्रासंगिक सूत्रों को लागू करें।

रणनीति चुनें– समस्या की प्रकृति के आधार पर सबसे प्रभावी दृष्टिकोण निर्धारित करें। इसमें सर्वांगसमता साबित करना, क्षेत्रों की गणना करना या निर्देशांक ज्यामिति का उपयोग करना शामिल हो सकता है।

योजना को क्रियान्वित करें– समस्या को हल करने के लिए एक व्यवस्थित दृष्टिकोण का पालन करें। गणनाओं में सटीकता और समाधान प्रक्रिया के दौरान तार्किक संगति सुनिश्चित करें।

9.5 समस्या–समाधान में ज्यामिति के साथ बीजगणित का समावेश

बीजगणित को ज्यामिति से जोड़ना क्यों महत्वपूर्ण है? सीखने और कौशल को सुविधाजनक बनाना, एकीकृत बीजगणित और ज्यामिति छात्रों को संख्यात्मकता की शुद्ध समझ विकसित करने में मदद करते हैं। यह बदले में एक अधिक संतुलित समाधान–उन्मुख छात्र बनाएगा क्योंकि हमने उन्हें इन क्षेत्रों के साथ अच्छी तरह से परिचित कराया है। विषयों के एकीकरण से किसी भी घटना प्रत्यय और आपसी संबंध को समझना आसान हो जाता है। विशेषकर, ज्यामिति और बीजगणित के आपसी संबंध बेहद नजदीक के रहे हैं। बीजगणित और ज्यामिति के मध्य बेहतर एकीकरण को स्थापित करने वाले प्रमुख कारक/विशेषताएं निम्नलिखित हैं–

1. **स्थानिक तर्क–** आकार, उनके गुण और तुलना जैसी ज्यामितीय समस्याओं को हल करने के लिए बीजगणितीय विधियों का भी पूरी तरह से उपयोग किया जाता है जो आपको बेहतर तार्किक तर्क का निर्माण करके स्थान की भावना की ओर ले जाता है।

2. **ज्यामिति और बीजगणित की प्रकृति–** ज्यामिति मूर्ति स्वरूप को समझने में मदद करती है साथ ही बीजगणित अमूर्त चिंतन पर आधारित होता है। रेखाओं और आकृतियों को अमूर्त रूप से हेरफेर करना (बीजगणित)। यह संयोजन आसान अमूर्त सोच और समस्या–समाधान की अनुमति देता है।

3. **आलोचनात्मक सोच–** बीजगणित और ज्यामिति का क्रॉसओवर कंट्रास्ट छात्रों को तर्क करने के लिए प्रेरित करता है जब वे ज्यामितीय समस्याओं को हल करने या इसे पूर्ववत करने के लिए बीजगणितीय साधनों को लागू करते हैं।

4. **विश्लेषणात्मक कौशल–** जिस दृष्टिकोण से हम ज्यामिति की समस्याओं को हल कर सकते हैं वह अक्सर एक सटीक और व्यवस्थित विश्लेषण होता है जो अंततः विश्लेषणात्मक कौशल के विकास में योगदान देता है, जिससे यह विभिन्न गणितीय और साथ ही वास्तविक दुनिया के परिदृश्यों में आवश्यक हो जाता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. ज्यामितीय अवधारणाएं कौन–कौन सी हैं?

....

....

2. ज्यामितीय गुण और प्रमेयों का उपयोग कैसे करेंगे?

....

....

3.बीजगणित और ज्यामिति के मध्य बेहतर एकीकरण को स्थापित करने वाले प्रमुख कारक/विशेषताएं क्या हैं?नाम लिखिए।

....

....

9.6 वास्तविक जीवन में बीजगणित–ज्यामितीय का अनुप्रयोग

बीजगणित और वास्तविक दुनिया में इसके अनुप्रयोग दिखाते हैं कि इन गणितीय अवधारणाओं का उपयोग स्कूल से परे रोजमर्रा की जिंदगी में कैसे किया जाता है। यह जानना कि ये विचार वास्तविक दुनिया की स्थितियों से कैसे संबंधित हैं, छात्रों को रोजमर्रा की समस्याओं को हल करने में मदद करने वाले गणित की समझ देता है। अमूर्त गणितीय सिद्धांतों को वास्तविक दुनिया की स्थितियों से जोड़ते हुए, यह संबंध गणित के अमूर्तन को वास्तविकता के करीब लाता है।

1. **वास्तविक दुनिया में अनुप्रयोग (व्यावहारिक प्रासंगिकता)**– बच्चों के लिए गणित अमूर्त लग सकता है, लेकिन इसे वास्तविक अनुप्रयोगों से जोड़ने से उन्हें इसके महत्व की अच्छी समझ मिलती है। उदाहरण के लिए, बीजगणित का उपयोग व्यक्तिगत वित्त को हल करने में मदद के लिए किया जाता है, और ज्यामिति स्थानों के डिजाइन या स्थानिक संबंधों को समझने में सहायता करती है।

2. **अधिक जुड़ाव**– यह देखने में सक्षम होना कि गणित वास्तविक दुनिया की स्थितियों में कहाँ फिट बैठता है, छात्रों को अधिक प्रेरित महसूस करा सकता है और इस प्रकार, विषय में अधिक रुचि पैदा कर सकता है

3. **समस्या–समाधान कौशल में सुधार**– वास्तविक दुनिया में समस्याओं को हल करने के लिए बीजगणित और ज्यामिति का उपयोग करने से छात्रों को महत्वपूर्ण सोच कौशल सीखने में मदद मिलती है। ये कौशल न केवल अकादमिक और रोज़मर्रा के निर्णय लेने में काम आते हैं, बल्कि पेशेवर सेटिंग में भी काम आते हैं।

4. **महत्वपूर्ण सोच**– जब भी छात्र वास्तविक दुनिया की समस्याओं को हल करने के लिए जानकारी का विश्लेषण और व्याख्या करते हैं, तो उनके महत्वपूर्ण सोच कौशल मजबूत होने वाले हैं।

5. **रचनात्मक समाधान**– वास्तविक दुनिया में, कई समस्याएँ बहु–समाधान वाली होती हैं या असामान्य समाधानों की आवश्यकता होती है। यह छात्रों को अपनी रचनात्मकता का प्रयोग करने और विभिन्न रणनीतियों को आज़माने का अवसर देता है।

6. **दैनिक निर्णय लेना–** मौलिक समस्या–समाधान कौशल दैनिक जीवन में सुविचारित निर्णय लेने के लिए महत्वपूर्ण हैं– यह बजट तैयार करने से लेकर, विभिन्न खरीदों के बीच निर्णय लेने से लेकर निवेश पर रिटर्न का मूल्यांकन करने तक कुछ भी हो सकता है।

9.7 बीजगणित–ज्यामितीय का अन्य विषयों से सम्बन्ध

बीजगणित–ज्यामितीय युग्मन कई वास्तविक जीवन के अनुप्रयोगों में महत्वपूर्ण है, जहाँ शीर्ष परिणामों के लिए स्थानिक संबंधों के साथ गणितीय मॉडल की आवश्यकता होती है। बीजगणित और ज्यामिति विषय का अनुप्रयोग विभिन्न विषयों में प्रमुखता से किया जाता है जिसे कुछ उदाहरणों के माध्यम से समझ सकते हैं –

1. **विज्ञान और वास्तुकला–** सिविल इंजीनियरिंग जैसे विभिन्न क्षेत्रों में, यह ज्यामितीय रूपों का निर्माण करने और उन्हें गणितीय समीकरणों में स्थापित करने का काम करता है। उदाहरण के लिए, बीजगणित वास्तुशिल्प तत्वों के आयामों को निर्धारित करने में शामिल हैय ज्यामितीय सिद्धांतों का उपयोग संरचनात्मक गहराई और सौंदर्य लागू तरीके से किया जाता है।

2. **कंप्यूटर ग्राफिक्स और डिज़ाइन–** कंप्यूटर ग्राफिक्स बीजगणितीय अवधारणाओं को ज्यामिति के साथ जोड़कर छवियों को डिज़ाइन और दृश्यमान रूप से बनाते हैं। रेंडरिंग और एनिमेशनरू बीजगणितीय समीकरण, साथ ही ज्यामितीय परिवर्तन डिजिटल वातावरण में एनीमेशन को रेंडर करने के लिए महत्वपूर्ण हैं।

3. **भौतिकी और इंजीनियरिंग–** भौतिकी में बहुत सी समस्याओं (जैसे प्रक्षेप्य गति या वस्तुओं पर कार्य करने वाले बल) के लिए आपको वास्तविक दुनिया के परिदृश्यों को मॉडलिंगध्समाधान करने के तरीकों के रूप में केवल बीजगणित और ज्यामिति के साथ दो जटिल विचारों को एक साथ रखने में सक्षम होने की आवश्यकता होती है। जबकि बीजीय समीकरण केवल भौतिक नियमों को आत्मसात करते हैं, ज्यामितीय सिद्धांत उनका प्रतिनिधित्व करते हैं।

4. **रोबोटिक्स और स्वचालन–** रोबोटिक्स में, हमें अक्सर रोबोटिक सिस्टम के डिज़ाइन में ज्यामिति के साथ बीजगणित को मिलाना पड़ता है क्योंकि अधिकांश रोबोट नियंत्रण योजनाएँ नियोजन उद्देश्यों के लिए सरलीकृत निर्देशांक अभ्यावेदन का उपयोग करती हैं। उदाहरण के लिए, गतिज समीकरण और ज्यामितीय परिवर्तन रोबोटिक भुजाओं और अन्य स्वचालित प्रणालियों की गतिधस्थिति को मॉडल करते हैं।

बीजगणित और ज्यामिति एक साथ छात्रों को गणित पर एक अलग दृष्टिकोण देते हैं क्योंकि वे देख सकते हैं कि अकादमिक और व्यावसायिक रूप से सीखने के सभी पहलुओं में गणित कितना महत्वपूर्ण है। यह उत्तेजना की एक और परत जोड़ता है जिसके साथ छात्र समस्या–समाधान कौशल विकसित कर सकते हैं और उन्हें उन पाठों को विभिन्न विषयों में अनुप्रयोगों की एक श्रृंखला में लागू करने के लिए तैयार करते हैं।

9.8 समस्या–समाधान को बढ़ावा देने के लिए रणनीतियाँ

1. अभ्यास और दृढ़ता–

- **अभ्यास–** समस्या–समाधान कौशल मांसपेशियों की ताकत की तरह हैं–जितना अधिक आप उनका उपयोग करेंगे, वे उतने ही मजबूत और अधिक उपलब्ध होंगे। एक सामान्य सूची से अलग–अलग समस्याओं पर अभ्यास करके आप उन तरकीबों और युक्तियों से अधिक परिचित हो जाते हैं जो अधिक बार हल करने में सहायता करती हैं। आवश्यक कौशल और आत्मविश्वास बनाने के लिए आपको आसान से लेकर चुनौतीपूर्ण समस्याओं की एक श्रृंखला के साथ खुद को आगे बढ़ाना चाहिए।

- **विश्लेषण–** उनसे सीखने के लिए त्रुटियों और गलतफहमियों पर ध्यान केंद्रित करना। विचार करें कि क्या गलत हुआ है, और ऐसा क्यों हो रहा है, और भविष्य के मुद्दों के लिए इन सबक का उपयोग करें। गलतियाँ सीखने और अन्वेषण करने का एक अच्छा अवसर हैं और इससे गहरी समझ और कौशल में सुधार हो सकता है।
- **दृढ़ता–** कई समस्याएँ इतनी कठिन होंगी कि उन्हें धैर्य और दृढ़संकल्प की आवश्यकता होगी। ऐसी कुछ समस्याएँ हैं जिन्हें हल करने में काफी समय लगता है, और सबसे अधिक संभावना है कि प्रारंभिक दृ ष्टिकोण काम नहीं करेगा। दृढ़रहें, अलग–अलग तरीके आज़माएँ, और असफलता को खुद को हतोत्साहित न करने दें।

2. आलोचनात्मक सोच और रचनात्मकता–

- **पहेली का विश्लेषण करें–** हम जटिल मुद्दों को एकल घटकों में तोड़ते हैं और महत्वपूर्ण जानकारी, प्रतिबंध या प्रासंगिकता और उद्देश्यों की पहचान करते हैं। विश्लेषण की यह विधि आपको विचार के साथ मुद्दे का पता लगाने और एक अच्छी तरह से परिभाषित समाधान बनाने की अनुमति देती है।
- **कई समाधान विकसित करें–** जब किसी समस्या का सामना करना पड़ता है, तो विभिन्न तरीकों पर विचार करें जिससे आप स्थिति का विश्लेषण कर सकते हैं। कई दृष्टिकोणों का उपयोग करने से नए समाधान और नई अंतर्दृष्टि मिल सकती है। विभिन्न तरीकों का परीक्षण करें और देखें कि कौन से संयोजन सबसे प्रभावी हैं।
- **रचनात्मक परिणाम उत्पन्न करें–** बॉक्स से बाहर सोचें और समस्याओं को हल करने के लिए अपरंपरागत दृ ष्टिकोणों का पता लगाएं। रचनात्मक समस्या–समाधान में उन समाधानों के बारे में सोचना शामिल है जो बॉक्स से बाहर हैं और गणित के बारे में नए और अभिनव तरीकों से सोचते हैं। मान्यताओं पर सवाल उठाएं और विभिन्न क्षेत्रों के बारे में सोचें जिन्हें आपने छोड़दिया हो सकता है।

9.9 समस्या समाधान विधि के सोपान या चरण

इसके अन्तर्गत निम्नलिखित छः चरण होते हैं–

9.9.1 समस्या का चयन करना या समस्या प्रस्तुत करना–

सर्वप्रथम गणित विषय के अन्तर्गत आने वाले उपविषयों में निहित प्रकरणों का चयन करके किसी एक समस्या को शिक्षक द्वारा छात्रों के सम्मुख प्रस्तुत किया जाता है।

9.9.2 समस्या में दिये गये तथ्यों तथा उसके सम्बन्धों को समझना–

द्वितीय चरण में छात्रों को यह निर्देश दिया जाता है कि वे समस्या को हल करने से पूर्व बार–बार पढ़ें। बार–बार पढ़ने से समस्या के विभिन्न घटकों और उसके आपसी सम्बन्धों को समझने में मदद मिलती है कि समस्या में क्या दिया हुआ है तथा क्या ज्ञात करना है।

9.9.3 समस्या का विश्लेषण करना–

तृतीय चरण के अन्तर्गत समस्या का विश्लेषण प्रश्नोत्तर विधि द्वारा किया जाता है। समस्या में दिये तथ्यों तथा उनके सम्बन्धों को समझने के उपरान्त यह आवश्यक हो जाता है कि कौन–कौन से तथ्य समस्या समाधान के लिए आवश्यक है और कौन–कौन से तथ्य अनावश्यक। इससे छात्रों में समस्या का विश्लेषण करने की आदत विकसित होगी और आत्मविश्वास के साथ समस्या समाधान कर सकेंगे।

9.9.4 योजना तैयार करना या सम्भावित हल खोजना–

इस सोपान के अन्तर्गत विद्यार्थी समस्या समाधान के लिए योजना तैयार करता है। समस्या समाधान में कौन से नियम, सूत्र, सिद्धांत, समीकरण, आरेख, चार्ट आदि की जरूरत है, इसका निर्णय लिया जाता है जिससे समस्या को हल करने के तरीके मालूम हो जाते हैं।

9.9.5 हल को प्राप्त करने के लिए सही गणना करना या योजना को क्रियान्वित करना–

पंचम सोपान के अन्तर्गत विद्यार्थी हल प्रस्तुत करते समय सामान्य गणना सम्बन्धी त्रुटियों को ध्यान में रखते हुए कार्य को सम्पादित करता है। अक्सर यह देखा गया है कि छात्र दशमलव के गुणा, जोड़, घटाना एवं भाग करते समय त्रुटियाँ करते हैं। इसके लिए शिक्षक को यह आवश्यक हो जाता है कि वे विद्यार्थियों को अभ्यास करायें।

9.9.6 समस्या का हल ज्ञात करना एवं पुनः जाँच करना–

अन्तिम चरण में समस्या को हल करने के उपरान्त प्राप्त उत्तर या समाधान की जाँच की जाती है जिससे गणना सम्बन्धी त्रुटियों को दूर किया जा सके। समाधान की जाँच करने की आदत विद्यार्थियों में आदत होनी चाहिए। जो भी उत्तर प्राप्त हो उसकी तर्कसंगतता के बारे में विद्यार्थियों को विचार करना चाहिए।

उदाहरण 1: बीजगणित सम्बन्धी समस्या समाधान

चरण 1: समस्या प्रस्तुत करना–

एक संख्या दूसरी संख्या से 12 अधिक है। दोनों संख्याओं का योग 56 है, तो प्रत्येक संख्या ज्ञात कीजिए।

चरण 2: समस्या में दिये तथ्यों एवं उनके सम्बन्धों को समझना–

विद्यार्थी दो संख्याओं की तलाश करेंगे। चूँकि एक संख्या दूसरी संख्या के रूप में लिख सकते हैं। इसलिए हम मान लेंगे–

$x =$ अन्य संख्या

चूँकि एक संख्या दूसरी संख्या से 12 अधिक है, इसलिए

$x + 12 =$ एक संख्या

चरण 3: विश्लेषण करना–

दोनों संख्याओं का योग = 56

चरण 4: योजना तैयार करना–

$$x + x + 12 = 56$$

चरण 5: योजना क्रियान्वित करना एवं हल प्राप्त करने के लिए सही गणना करना–

$$x + x + 12 = 56$$

$$2x + 12 = 56$$

$$2x = 56 - 12$$

$$x = \frac{44}{2}$$

$x = 22$

चरण 6: पुनः जाँच करना–

यदि हम 22 और 34 (22 से 12 अधिक) को जोड़े तो 56 प्राप्त होता है।

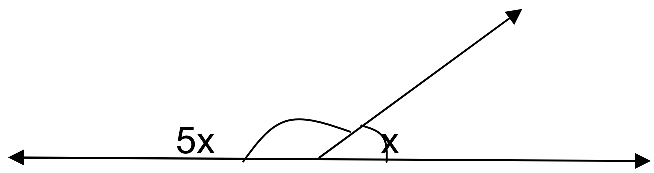
अन्तिम उत्तर– उत्तर संख्या 22 है।

एक अन्य संख्या 22 +12= 34है।

उदाहरण 2: ज्यामिति सम्बन्धी समस्या समाधान

चरण 1: समस्या प्रस्तुत करना–

नीचे दी गई आकृति में प्रत्येक कोण की माप ज्ञात कीजिए।



चित्र– 1

चरण 2: समस्या में दिये गये तथ्यों एवं उनके सम्बन्धों को समझना–

चित्र– 1 में दोनों कोण एक सीधी रेखा पर बने हुए हैं। अतः वे दोनों कोण एक दूसरे के सम्पूरक कोण हैं।

चित्र– 1 में बताया गया है कि –

x = एक कोण

$5X$ = अन्य कोण

चरण 3: विश्लेषण करना–

सम्पूरक कोणों का योग 180^0 होता है।

x और $5X$ एक दूसरे के सम्पूरक हैं।

चरण 4: योजना तैयार करना–

$$x + 5X = 180^0$$

चरण 5: योजना क्रियान्वित करना एवं हल प्राप्त करने के लिए सही गणना करना–

$$x + 5X = 180^0$$

$$6X = 180^0$$

$$x = \frac{180^0}{6}$$

$$x = 36^0$$

चरण 6: पुनः जाँच करना–

यदि $x = 36^0$ है तो $5x = 5x30^0 = 150^0$ होगा।

30^0एवं150^0 का योग 180^0होता है।

अतः दोनों कोण एक दूसरे के सम्पूरक हैं।

अन्तिम उत्तर – दो कोण 30^0एवं150^0हैं।

9.10 गणित में समस्या समाधान में प्रयुक्त संसाधन और उपकरण

विभिन्न प्रकार के मृदुल सामग्री तथा कठोर सामग्री का उपयोग ज्यामिति और बीजगणित में किया जाता है। ऑनलाइन संसाधन और गणितीय उपकरणों की मदद से गणित में समस्या समाधान करना बेहद ही आसान होता है। जिसका विवरण निम्नलिखित है–

1. **ऑनलाइन संसाधन–** खान अकादमी, कोर्सेरा और मकग जैसी वेबसाइटें विभिन्न प्रकार की शिक्षण सामग्री प्रदान करती हैं जो मुख्य रूप से गणित और समस्याओं को हल करने पर केंद्रित होती हैं। इन वेबसाइटों में पाठ, अभ्यास हैं जिनमें शिक्षार्थी अपने कौशल का अभ्यास कर सकते हैं, और लोगों को बेहतर ढंग से सिखाने के लिए वीडियो हैं। इसके अलावा, छात्र और शिक्षक स्टैक एक्सचेंज या आर्ट ऑफ़प्रॉब्लम सॉल्विंग (AoPS) जैसी वेबसाइटों का उपयोग करते हैं, जो गणितीय प्रश्नों पर केंद्रित हैं, जहाँ कोई अन्य प्रतिभागियों के साथ चौट और चर्चा कर सकता है कि उन्होंने किस तरह से विशेष समस्याओं को हल किया या यहाँ तक कि किसी अन्य व्यक्ति को सहायता प्रदान कर सकता है जो मदद चाहता है। इन प्लेटफ़ॉर्म में शामिल होना दूसरों से समर्थन प्राप्त करने, विचारों का आदान–प्रदान करने या सलाह प्राप्त करने के लिए उपयोगी हो सकता है। इसके अतिरिक्त, Brilliant-orgमें मज़ेदार इंटरैक्टिव पहेलियाँ और कक्षाएँ हैं जो सोचने के साथ–साथ समस्या–समाधान को भी बढ़ावा देती हैं।

2. **गणितीय सॉफ़्टवेयर–** डेस्मोस या जियोजेब्रा सॉफ्टवेयर उपयोगकर्ताओं को ग्राफ़फ़ंक्शन, ज्यामितीय आकृतियों आदि को देखने की अनुमति देता है। बीजगणितीय और ज्यामितीय चुनौतियों के बीच जटिल लिंक की समझ को सक्षम करने के लिए इस उपकरण का उपयोग उपयोगकर्ता द्वारा किया जा सकता है। इसके अलावा, गणितीय उपकरण MATLAB उन्नत संख्यात्मक विश्लेषण प्रतीकात्मक बीजगणित ग्राफ़िकल विज़ुअलाइज़ेशन क्षमताओं को सक्षम बनाता है। अधिक कठिन समस्याओं के लिए गहन शोध विश्लेषण करने के लिए इन उपकरणों का उपयोग करके समाधान की तलाश की जानी चाहिए।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

4. समस्या–समाधान को बढ़ावा देने के लिए किन रणनीतियों को अपनाना चाहिए?

....

....

5. गणित में समस्या समाधान में प्रयुक्त संसाधन और उपकरण के नाम बताइए।

....

....

9.11 सारांश

गणित में समस्या–समाधान, जिसमें बीजगणित और ज्यामिति दोनों शामिल हैं, एक प्रमुख संपत्ति है जो कक्षा से कहीं आगे जाती है। समस्याओं को प्रभावी ढंग से हल करने के लिए आवश्यक कौशल आपके महत्वपूर्ण सोच कौशल, विश्लेषणात्मक तर्क और रचनात्मक समस्या–समाधान क्षमताओं को विकसित करने का एक शानदार तरीका है जो वास्तविक दुनिया के अनुप्रयोगों पर लागू होते हैं। उनमें से कुछ हैं–

समस्या–समाधान की प्रकृति

समस्याओं का वर्णन करना, अर्थ और आवश्यक रणनीतियों को समझना कठिन नहीं है, इसलिए व्यक्ति को अपना पर्याप्त समय उनके लिए समर्पित करना चाहिए। समस्या–समाधान की प्रक्रिया के इर्द–गिर्द महत्वपूर्ण सोच और रचनात्मकता का विचार केवल गुणवत्ता में सुधार करता है और इसे समझना कितना आसान है।

कार्यस्थल की समस्याओं का समाधान

कार्यालय की नौकरियां जिनमें सरल समाधान शामिल होते हैं (जहाँ आप एक उत्तर चुन सकते हैं और उसे तुरंत प्रस्तुत कर सकते हैं) सभी अलग–अलग हैं। लोगों को c|ध्क। की बुनियादी समझ होनी चाहिए, जिसका अर्थ है कि उन्हें चर, समीकरण और फ़ंक्शन को समझना चाहिए, इसलिए रैखिकध्द्विघात समीकरणों या समीकरणों की प्रणालियों को हल करने में खराब विचार कभी भी ठीक नहीं होने चाहिए, इसलिए गलत ग्राउंड स्टेप्स और लाइनों के बारे में अधिक जागरूक रहें ताकि समस्या–समाधान कौशल के रूप में बीजगणित के साथ आगे मदद मिल सके।

ज्यामिति की समस्याओं को हल करें–ज्यामिति में समस्याओं को सही ढंग से हल करने के लिए, आपको ज्यामितीय अवधारणाओं जैसे कि बिंदु, रेखाएँ, कोण या आकृतियों की ठोस समझ होनी चाहिए।

आरेखों पर चित्र बनाना और मुख्य संबंध ढूँढ़ना–ऐसी रणनीतियाँ अक्सर समस्याओं की कल्पना करती हैं और ज्यामितीय गुणों और प्रमेयों पर विचारों का उपयोग करती हैंय निर्देशांक ज्यामिति सहित उदाहरण।

इंजीनियरिंग और ज्यामितीय सिद्धांत– इसके अलावा इंजीनियरिंग, भौतिकी और अन्य डोमेन कई अलग–अलग ज्यामितीय सिद्धांतों के उपयोग पर अपने अनुप्रयोग को आधार बनाते हैं। बीजगणित और त्रिकोणमिति का संयोजन विभिन्न क्षेत्रों में समझ और समस्या–समाधान तकनीकों में भी सुधार करता है।

समस्या–समाधान कौशल विकसित करना– अन्य स्नातक छात्रों, समाधान पुस्तिकाओं और संभवतः शिक्षण सामग्री की मदद से बार–बार समस्याओं को हल करना छात्रों को नई रणनीतियों या दृष्टिकोणों के बारे में सोचने में मदद

करेगा, जिससे वे मजबूत गणित समस्या हल करने वाले और महत्वपूर्ण विचारक बनेंगे। दूसरारू ऑनलाइन प्लेटफ़ॉर्म, गणित सॉफ़्टवेयर, अध्ययन समूह और ट्यूशन जैसे उपयोगी संसाधनों का ज्ञान और अनुप्रयोग न केवल मदद प्रदान करेगा बल्कि वास्तविक समस्या–समाधान कौशल के विकास को भी जन्म दे सकता है। गणित शिक्षाविदों द्वारा गणितीय समझ और वास्तविक दुनिया की स्थितियों में इसके अनुप्रयोग को एकीकृत करना महत्वपूर्ण है ताकि सामान्य लोगों को विभिन्न समस्याओं को प्रभावी ढंग से लेने के लिए कौशल और रणनीतियों से बेहतर ढंग से सुसज्जित किया जा सके।

9.12 अभ्यास के प्रश्न

1. समस्या समाधान को परिभाषित कीजिए।
2. समस्या समाधान की प्रमुख तकनीकों का उल्लेख कीजिए।
3. समस्या समाधान में सामान्य गलतियाँ और उनसे बचाव कैसे करेंगे?
4. ज्यामितीय अवधारणाओं की विवेचना कीजिए।
5. वास्तविक जीवन में बीजगणित–ज्यामितीय का अनुप्रयोग कैसे करेंगे?
6. बीजगणित–ज्यामितीय का अन्य विषयों से संबंध के बारे में विस्तारपूर्वक लिखिए।
7. समस्या–समाधान में ज्यामिति के साथ बीजगणित का समावेश आप कैसे करेंगे?
8. गणित में समस्या समाधान में प्रयुक्त संसाधन और उपकरण का वर्णन कीजिए।

9.13 चर्चा के बिंदु

1. ज्यामिति और बीजगणित में समस्या समाधान रणनीति का अनुप्रयोग कैसे किया जाता है? चर्चा कीजिए।
2. गणित में समस्या समाधान में प्रयुक्त संसाधन और उपकरण का दैनिक जीवन में उपयोग आप कैसे करेंगे? चर्चा कीजिए।

9.14 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. बिंदु, रेखाएँ, समतल, कोण एवं आकृतियां।
2. प्रमेय लागू करना, सूत्र का उपयोग करना, रणनीति चुनना और उसे क्रियान्वित करना।
3. स्थानिक तर्क, ज्यामिति और बीजगणित की प्रकृति, आलोचनात्मक सोच और विश्लेषणात्मक कौशल।
4. अभ्यास और दृढ़ता, आलोचनात्मक चिंतन और रचनात्मकता।
5. ऑनलाइन संसाधन और गणितीय सॉफ्टवेयर।

9.15 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Wu, H. H., & Wu, H. (2020). *Algebra and geometry* (Vol. 132). American Mathematical Soc..
2. Beardon, A. F. (2005). *Algebra and geometry*. Cambridge University Press.
3. Schoenfeld, A. H., & Sloane, A. H. (2016). *Mathematical thinking and problem solving*. Routledge.
4. Divakaran, P. P. (2018). The Mathematics of India. *Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences. doi*, *10*, 978-981.
5. Larson, L. C. (2012). *Problem-solving through problems*. Springer Science & Business Media.
6. एस., रॉबर्टसन (2001), समस्या समाधान के अध्ययन का परिचयः समस्या समाधान, मनोविज्ञान प्रेस, ISBN 0-415-20300-7 शेट्टी, बालकृष्ण (2003), गणित क्या है? नेशनल बुक ट्रस्ट, नई दिल्ली।

B.Ed.E-33
Pedagogy of Mathematics
(गणित का अध्यापन विज्ञान)

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय,
प्रयागराज

खण्ड – 04

गणित अधिगम का एवं के लिए मूल्यांकन

इकाई 10	शिक्षण अवधारणाओं के मापनीय उद्देश्यों का कथन, सामान्यीकरण, समस्या समाधान एवं प्रमाण	**133**
इकाई 11	उत्पाद और प्रक्रिया परिणामों के आकलन के लिए परीक्षण पदों की रचना, नैदानिक परीक्षण एवं उपचारात्मक शिक्षण	**160**
इकाई 12	इकाई परीक्षण का निर्माण, विशिष्टीकरण तालिका (ब्लूप्रिंट), प्रश्नपत्र का निर्माण	**175**

खण्ड04 : गणित अधिगम का एवं के लिए मूल्यांकन

खण्ड परिचय

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा– 2005 में सीखने सिखाने की महत्ता और शिक्षकों की भूमिका के सम्बन्ध में कहा गया है "शिक्षक सीखने सिखाने की परिस्थितियों में उत्साहवर्धक सहयोगी तथा सीखने को सहज बनाने वाले बनें जो अपने विद्यार्थियों को उनकी प्रतिभाओं की खोज में, उनकी शारीरिक तथा बौद्धिक क्षमताओं को पूर्णता तक जानने में, उनमें अपेक्षित सामाजिक तथा मानवीय मूल्यों व चरित्र के विकास में तथा जिम्मेदार नागरिकों की भूमिका निभाने में समर्थ बनाएं।" गणित पढ़ाने में शिक्षक के दायित्व बढ़ जाते है। गणित सीखना तभी सफल माना जाता है, जब गणित सीखने के लिए मूल्यांकन में प्रयुक्त रणनीतियों और उपकरणों का सही उपयोग हो।

प्रस्तुत खण्ड 04 गणित अधिगम का एवं के लिए मूल्यांकन से संबंधित है जिसमें गणित विषय में मूल्यांकन संबंधित विभिन्न महत्वपूर्ण संप्रत्ययों की चर्चा की गई है। गणित विषय कोई अमूर्त अवधारणा नहीं है। इसे पढ़कर या याद कर विद्यार्थियों द्वारा सीखा या सिखाया नहीं जा सकता है। इस खण्ड में गणित अधिगम का और के लिए मूल्यांकन से संबंधित विस्तृत वर्णन प्रस्तुत किया गया है। वर्तमान खण्ड को तीन इकाइयों में बांटा गया है जिसका विवरण निम्नवत है–

इकाई 10 के अंतर्गत गणित में मापनीय उद्देश्यों की विशेषता, शिक्षा में मापन योग्य उद्देश्यों का महत्व, गणित शिक्षण के लिए मापनीय लक्ष्य विकसित करना, मापनीय उद्देश्यों का कक्षा में क्रियान्वयन, मापनीय उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए शिक्षण रणनीतियां, गणितीय सामान्यीकरण, सामान्यीकरण के प्रकार, सामान्यीकरण के शैक्षिक अनुप्रयोग के साथ गणित में समस्या समाधान एवं प्रमाण का विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है।

इकाई 11 के अंतर्गत गणित विषय से संबंधित परीक्षण पद के अर्थ, परीक्षण पदों के प्रकार, परीक्षण पदों का निर्माण, नैदानिक परीक्षण के उद्देश्य, विशेषताएं और उसके प्रकार के साथ ही उपचारात्मक शिक्षण के बारे में विस्तार पूर्वक वर्णन किया गया है।

इकाई 12 के अंतर्गत इकाई परीक्षण के अर्थ, परिभाषा, उद्देश्य, महत्व एवं इकाई परीक्षण के निर्माण के विभिन्न सोपानों सहित ब्लू प्रिंट की चर्चा की गई है। इसके साथ ही गणित विषय से संबंधित विभिन्न प्रकार के प्रश्न पत्रों के निर्माण संबंधी जानकारी का वर्णन किया गया है।

इकाई– 10 : शिक्षण अवधारणाओं के मापनीय उद्देश्यों का कथन, सामान्यीकरण, समस्या समाधान एवं प्रमाण

इकाई की संरचना

10.1 प्रस्तावना
10.2 इकाई के उद्देश्य
10.3 मापनीय उद्देश्यों की परिभाषा और विशेषताएँ
10.4 शिक्षा में मापन योग्य उद्देश्यों का महत्व
10.5 गणित शिक्षण के लिए मापनीय लक्ष्य विकसित करना
10.6 मापनीय उद्देश्यों का कक्षा में क्रियान्वयन
10.6.1 मापनीय उद्देश्य पर आधारित निर्देशात्मक योजना
10.6.2 मापनीय उद्देश्यों पर आधारित विभेदित निर्देश
10.7 मापनीय उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए शिक्षण रणनीतियाँ
10.7.1 प्रत्यक्ष निर्देश
10.7.2 सहयोगी शिक्षण
10.7.3 समस्या–आधारित शिक्षा
10.7.4 उद्देश्यों के साथ मूल्यांकन का मिलान
10.7.5 शिक्षण को निर्देशित करने के लिए परीक्षा परिणामों का उपयोग करना
10.7.6 पृष्ठपोषण और हस्तक्षेप
10.8 गणित शिक्षा में मापनीय उद्देश्यों का भविष्य
10.9 गणितीय सामान्यीकरण
10.10 गणितीय सामान्यीकरण की परिभाषा
10.11 ऐतिहासिक संदर्भ मे गणितीय सामान्यीकरण के उदाहरण
10.12 गणितीय सामान्यीकरण के प्रमुख सिद्धांत
10.13 गणित में सामान्यीकरण के प्रकार
10.14 गणित के प्रमुख क्षेत्रों में सामान्यीकरण
10.15 गणित में सामान्यीकरण के अनुप्रयोग और शैक्षिक निहितार्थ
10.16 गणित में समस्या समाधान और प्रमाण
10.17 गणितीय समस्या समाधान और प्रमाण की ऐतिहासिक पृष्ठभूमि
10.18 गणितीय समस्या समाधान का अर्थ
10.19 गणित प्रमाण का अर्थ
10.20 गणितीय प्रमाण के उद्देश्य
10.21 प्रमाण के प्रकार
10.22 प्रमाण के घटक
10.23 प्रमाण और समस्या समाधान का महत्व
10.24 गणितीय समस्याओं को हल करने की तकनीकें
10.25 सारांश
10.26 अभ्यास के प्रश्न
10.27 चर्चा के बिंदु
10.28 बोध प्रश्नों के उत्तर
10.29 कुछ उपयोगी पुस्तकें

10.1 प्रस्तावना

गणित शिक्षा सीखने के सामान्य संदर्भ में एक बहुत ही मौलिक आधार है जो तार्किक सोच और तर्क प्राप्त करने में सक्षम बनाता है, समस्याओं को हल करने और अमूर्त रूप से सोचने की क्षमता को बढ़ावा देता है। इसका महत्व विज्ञान, इंजीनियरिंग, अर्थशास्त्र, प्रौद्योगिकी और अन्य क्षेत्रों में प्रासंगिक है। रोजमर्रा के खर्चों की गणना करने से लेकर जटिल वैज्ञानिक सिद्धांतों को समझने तक, गणितीय क्षमता अपरिहार्य है। इसलिए, छात्रों को इस आधुनिक और अधिक जटिल दुनिया के लिए तैयार करने के लिए प्रभावी गणित शिक्षा बहुत महत्वपूर्ण है।

गणित में शिक्षा कुछ संख्याओं और सूत्रों को सीखने से कहीं अधिक है। यह अवधारणाओं और उनके उपयोग की समझ पैदा करने का एक प्रयास है। यह छात्रों को पैटर्न की जांच करने, संरचनाओं का विश्लेषण करने और व्यवस्थित रूप से समस्या–समाधान करने के लिए प्रोत्साहित करता है। यह प्रक्रिया छात्रों को सटीकता, तार्किक प्रवाह और विश्लेषणात्मक तर्क के मूल्य के लिए मानसिकता विकसित करने में मदद करती है। दोनों व्यक्तिगत और व्यावसायिक विकास में मुख्य कौशल हैं क्योंकि वे वास्तविक जीवन की समस्याओं का सामना करने और सूचित विकल्प बनाने के लिए तैयार करते हैं।

सीखने के लक्ष्यों की प्राप्ति में इसकी केंद्रीय भूमिका मापनीय लक्ष्य निर्धारित करने में निहित है। मापनीय उद्देश्य विशिष्ट, स्पष्ट, प्राप्त करने योग्य लक्ष्य जो वर्णन करते हैं कि कोई छात्र किसी पाठ, इकाई या पाठ्यक्रम के पूरा होने पर क्या सीखेगा और क्या करेगा। यह मल्टीटास्क करने की इस क्षमता के कारण है कि मापनीय उद्देश्य शिक्षक के लिए एक रोडमैप और छात्र के लिए एक मार्गदर्शक दोनों के रूप में कार्य करता है। मापनीय उद्देश्य शिक्षकों को एक संगठित ढांचा प्रदान करते हैं जिसके भीतर वे निर्देश की योजना बना सकते हैं और उसे वितरित कर सकते हैं। वे सुनिश्चित करते हैं कि शिक्षण रणनीतियाँ वांछित सीखने के परिणामों की ओर निर्देशित हों, और इस प्रकार निर्देश अधिक केंद्रित और प्रभावी हो। स्पष्ट उद्देश्य शिक्षकों को ऐसे पाठ डिजाइन करने में सक्षम बनाते हैं जो धीरे–धीरे छात्रों के ज्ञान और कौशल को विकसित करेंगे, साथ ही सीखने में सुसंगतता और व्यापकता प्रदान करेंगे। इसके अलावा, वे समझ में अंतराल की पहचान करने में सहायता करते हैं और शिक्षक को उन्हें संबोधित करने में सक्षम बनाते हैं, छात्रों की सीखने की जरूरतों के अनुसार निर्देश को अलग–अलग करने की अनुमति देते हैं, और सभी छात्रों को सफल होने के लिए समान अवसर की गारंटी देते हैं। मापनीय उद्देश्यों के होने से छात्रों को स्पष्टता और दिशा में लाभ होता है। यह जानना कि क्या अपेक्षित है, छात्र को अपने प्रयास और अपनी सीखने की गतिविधियों के लक्ष्यों पर ध्यान केंद्रित करने में सक्षम बनाता है। स्पष्ट लक्ष्य निर्धारित किए जा सकते हैं जिन्हें छात्र प्राप्त करने का प्रयास करने में सक्षम हैंय इससे प्रेरणा और जुडाव बढ सकता है। लक्ष्यों की दिशा में काम करते हुए, छात्र अपनी प्रगति की निगरानी कर सकते हैं, उन्होंने जो हासिल किया है उससे आत्मविश्वास प्राप्त कर सकते हैं, और महसूस करना शुरू कर सकते हैं कि वे सीखने के मालिक हैं।

गणित का अध्ययन अकादमिक विकास का एक मूलभूत घटक है क्योंकि यह छात्रों को महत्वपूर्ण सोच और समस्या–समाधान कौशल प्रदान करता है, जो उन्हें अपने व्यक्तिगत और व्यावसायिक जीवन दोनों में सफलता के लिए आवश्यक है। हालाँकि, यह सुनिश्चित करने के लिए कि छात्र गणितीय विचारों को समझें, केवल एक पूर्ण पाठ्यक्रम होने से कहीं अधिक हैय इसके लिए सटीक, मात्रात्मक शिक्षण उद्देश्यों के विकास की भी आवश्यकता होती है। मापने योग्य उद्देश्य स्पष्ट मार्गदर्शन और स्पष्टता प्रदान करते हैं जो शिक्षण रणनीतियों और छात्र परिणामों को बेहतर बनाते हैं। वे शिक्षण और सीखने दोनों के लिए सटीक लक्ष्य के रूप में कार्य करते हैं (मार्जानो, 2009)। गणित शिक्षा में

मापने योग्य उद्देश्यों के महत्व की जाँच की गई है, साथ ही यह भी बताया गया है कि वे कैसे कुशल निर्देश का समर्थन करते हैं, छात्रों की भागीदारी बढाते हैं, और मूल्यांकन और प्रतिक्रिया के लिए आधार के रूप में कार्य करते हैं। व्यवहारवादी आंदोलन, विशेष रूप से राल्फ टायलर के लेखन में, मात्रात्मक शैक्षिक उद्देश्यों के विचार को लोकप्रिय बनाने का श्रेय दिया जाता है। टायलर (1949) ने अच्छी तरह से परिभाषित शैक्षिक लक्ष्यों की आवश्यकता पर प्रकाश डाला जिन्हें देखा और मापा जा सकता है। इस दृष्टिकोण ने ब्लूम के वर्गीकरण (ब्लूम एट अल., 1956) जैसे नवाचारों का अनुसरण करने का मार्ग तैयार किया, जिसने सीखने के उद्देश्यों के बारे में सोचने के लिए एक व्यवस्थित रूपरेखा स्थापित की और शैक्षिक उद्देश्यों को संज्ञानात्मक डोमेन में समूहीकृत किया। मापनीय उद्देश्य गणित शिक्षकों के लिए अपरिहार्य उपकरण बन रहे हैं, जिससे उन्हें स्पष्ट, संक्षिप्त और पाठ्यक्रम के लक्ष्यों के अनुरूप निर्देश बनाने की अनुमति मिलती है। प्रभावी निर्देश को सुविधाजनक बनाने में भूमिका गणित शिक्षा में मापनीय उद्देश्य मुख्य रूप से कुशल निर्देश का समर्थन करने के लिए काम करते हैं। शिक्षक अपने विद्यार्थियों को जो कुछ भी सिखाना चाहते हैं, उसे रेखांकित करके केंद्रित और जानबूझकर पाठ बना सकते हैं। शैक्षिक गतिविधियों की योजना बनाने और प्रभावी शिक्षण तकनीकों को चुनने के लिए एक रूपरेखा मापनीय उद्देश्यों (एंडरसन और क्रैथवोल, 2001) द्वारा प्रदान की जाती है। उदाहरण के लिए, ''छात्र एक चर में रैखिक समीकरणों को हल करने में सक्षम होंगे'' जैसा उद्देश्य प्रशिक्षक को ऐसे पाठ डिजाइन करने का निर्देश देता है जो इस लक्ष्य को पूरा करने के लिए आवश्यक जानकारी और क्षमताओं को लक्षित करते हैं। मापनीय लक्ष्य सीखने के उद्देश्यों के साथ संसाधनों और निर्देशात्मक सामग्रियों के समन्वय में सहायता कर सकते हैं। शिक्षक पाठ्यपुस्तकों, सॉफ्टवेयर और अन्य शैक्षिक संसाधनों का चयन कर सकते हैं जो इन लक्ष्यों की प्राप्ति को सीधे बढावा देते हैं जब उद्देश्य अच्छी तरह से परिभाषित होते हैं (मार्जानो, 2009)। यह संरेखण गारंटी देता है कि शिक्षा का हर पहलू सुसंगत है और एक एकल, सुसंगत सीखने की प्रक्रिया में योगदान देता है।

मापनीय उद्देश्य भी ऑकलन और मूल्यांकन के चरण में महत्वपूर्ण हैं। वे एक आधार प्रस्तुत करते हैं जिससे ऑकलन किया जा सकता है जो छात्रों के सीखने और प्रदर्शन को प्रभावी ढंग से माप सकता है। उद्देश्यों के लिए ऑकलन को मैप करके, शिक्षक डेटा प्राप्त करने में सक्षम होंगे, जिसके निहितार्थ दर्शाते हैं कि प्रगति के मामले में छात्र कहाँ तक पहुँच गए हैं और इसलिए उन क्षेत्रों पर ध्यान केंद्रित करें जिनमें उन्हें सुधार करने की आवश्यकता हैय फिर वे केंद्रित प्रतिक्रिया देंगे। इस प्रक्रिया के माध्यम से चल रहे मूल्यांकन से शिक्षण और सीखने दोनों में निरंतर सुधार को बढावा मिलता हैय यह सुनिश्चित करता है कि लक्ष्य लगातार प्राप्त किए जाएँ।

गणित शिक्षा प्रासंगिक कौशल और ज्ञान का आवश्यक समावेश प्रदान करती है जो कक्षा के बाहर की सेटिंग में कटौती करती है। शिक्षक और शिक्षार्थियों के लिए मार्गदर्शन, दिशा और स्पष्टता प्रदान करते हुए इसे संभव बनाने के लिए मापनीय उद्देश्य महत्वपूर्ण हैं। अच्छी तरह से निर्धारित लक्ष्यों के साथ, एक शिक्षक एक उचित और सहायक शिक्षण वातावरण तैयार कर सकता है।

10.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. मापनीय उद्देश्यों को परिभाषित कर सकेंगे।
2. शिक्षा में मापन योग्य उद्देश्यों का महत्व को समझ सकेंगे।
3. गणित शिक्षण के लिए मापनीय लक्ष्य विकसित कर सकेंगे।
4. मापनीय उद्देश्यों का कक्षा में क्रियान्वयन कर सकेंगे।
5. मापनीय उद्देश्यों को प्राप्त करने की शिक्षण रणनीतियों की विवेचना कर सकेंगे।
6. गणितीय सामान्यीकरण का अर्थ और उसके प्रकार की विवेचना कर सकेंगे।

7. गणित में सामान्यीकरण के अनुप्रयोग और शैक्षिक निहितार्थ को समझ सकेंगे।
8. गणित में समस्या समाधान और प्रमाण का अर्थ और महत्व को समझ सकेंगे।
9. गणितीय समस्याओं को हल करने की तकनीक को समझ सकेंगे।

10.3 मापनीय उद्देश्यों की परिभाषा और विशेषताएँ

शिक्षा में मापनीय उद्देश्य वे लक्ष्य हैं जिन्हें छात्रों से किसी पाठ, इकाई या पाठ्यक्रम के अंत में पूरा करने की अपेक्षा की जाती है। उद्देश्य ठीक–ठीक बताते हैं कि छात्र क्या सीखेंगे और क्या करेंगे और यह स्पष्ट मार्गदर्शक के रूप में कार्य करते हैं कि उन्हें क्या निर्देश और मूल्यांकन दिया जाएगा। मापनीय शब्दों में एक प्रभावी उद्देश्य की कुछ मुख्य विशेषताएँ होती हैं– विशिष्टता, स्पष्टता और प्राप्ति। ये विशेषताएँ उद्देश्यों को यथार्थवादी, समझने योग्य और साकार करने योग्य बनाती हैं, जिससे गुणवत्ता समृद्ध होती है।

1. विशिष्टता– यह विशेषता इस बात से निर्धारित होती है कि किसी उद्देश्य को किसी विशेष बिंदु पर किस हद तक विस्तृत किया गया है। सरल शब्दों में, यह सटीक रूप से इंगित करता है कि छात्र को क्या सीखना है और क्या करने में सक्षम होना है, और इसके बारे में बहुत कम अस्पष्टता है। वे इस अर्थ में विशिष्ट हैं कि वे विशिष्ट कौशल, ज्ञान क्षेत्रों या व्यवहारों पर ध्यान केंद्रित करते हैं जिन्हें छात्रों को हासिल करना होता है। उदाहरण के लिए, गणित के पाठ के लिए एक उद्देश्य हो सकता है, ''छात्र द्विघात सूत्र को लागू करके द्विघात समीकरणों को हल करने में सक्षम होंगे।'' यह स्पष्ट रूप से बताता है कि क्या अपेक्षित है, शिक्षकों और छात्रों को उस विशिष्ट इच्छित परिणाम पर ध्यान केंद्रित करने में मदद करता है। उद्देश्यों की विशिष्टता तब केंद्रित शिक्षण रणनीतियों और उपलब्धि को मापने के लिए स्पष्ट माप प्रक्रियाओं को डिजाइन करने में मदद करती है।

2. स्पष्टता– यदि भाषा सरल और स्पष्ट है तो उद्देश्य स्पष्ट हैं। स्पष्ट उद्देश्यों को छात्रों, शिक्षकों और अन्य हितधारकों द्वारा समझा जा सकता है। वे तकनीकी शब्दजाल या भाषा के उपयोग से बचते हैं जो शिक्षार्थी को बहुत जटिल लग सकती है। उदाहरण के लिए, ''छात्र संख्यात्मक संचालन में दक्षता प्रदर्शित करेंगे'' जैसे अस्पष्ट लक्ष्य के बजाय, इसे एक विशिष्ट लक्ष्य से प्रतिस्थापित किया जाना चाहिए, उदाहरण के लिए, ''छात्र पूर्ण संख्याओं को सही ढंग से जोडेंगे, घटाएंगे, गुणा करेंगे और भाग देंगे।'' स्पष्ट रूप से परिभाषित उद्देश्य छात्रों को यह समझने में सक्षम बनाते हैं कि उनसे क्या करने की अपेक्षा की जाती है, इसलिए वे अपनी सीखने की गतिविधियों और प्रयास पर ध्यान केंद्रित करते हैं। इसके अलावा, वे शिक्षक को प्रत्येक प्रतिभागी को लक्ष्य और अपेक्षित परिणाम संप्रेषित करने में मदद करते हैं, ताकि सीखने के लक्ष्य की एक सामान्य समझ हो।

3. प्राप्ति– इसका मतलब है कि लक्ष्य को निर्धारित समय सीमा के भीतर और उपलब्ध संसाधनों के साथ प्राप्त किया जा सकता है। प्राप्त करने योग्य लक्ष्य केवल इसलिए यथार्थवादी होते हैं क्योंकि वे किसी छात्र की वर्तमान समझ, कौशल और योग्यताओं को दर्शाते हैं। उन्हें छात्रों को उनके सीखने को बढाने के लिए पर्याप्त चुनौती देनी चाहिए लेकिन उपलब्धि और प्रेरणा की भावना देने के लिए प्राप्त करने योग्य होना चाहिए। उदाहरण के लिए, एक प्राथमिक बीजगणित कक्षा के लिए एक उपयुक्त लक्ष्य होगारू ''छात्र एक चर के साथ रैखिक समीकरणों को हल करने में सक्षम होंगे।'' यदि लक्ष्य बहुत अधिक निर्धारित किए जाते हैं, तो परिणाम निराशा और अरुचि होगीय यदि वे बहुत कम निर्धारित किए जाते हैं, तो छात्रों को पर्याप्त रूप से चुनौती नहीं दी जाएगी या उन्हें गंभीर सीखने के लिए मजबूर नहीं किया जाएगा। प्राप्ति सुनिश्चित करती है कि उद्देश्य उत्पादकता और सीखने में सहायता देने के लिए संतुलन बनाए रखें। इसलिए, मापने योग्य उद्देश्य शिक्षा की धारा में महत्वपूर्ण उपकरण हैं जो छात्रों के लिए स्पष्ट, विशिष्ट और प्राप्त करने योग्य लक्षित सीखने के लक्ष्यों को निर्दिष्ट करते हैं। इन विशेषताओं को शामिल करने के साथ, निर्देशात्मक योजनाएँ और ऑकलन प्रभावी ढंग से डिजाइन किए जा सकते हैं ताकि छात्रों की सफलता को पूरी तरह से समर्थन मिले। स्पष्टता सुनिश्चित करती है कि उद्देश्य सटीक और केंद्रित हैंय स्पष्टता का मतलब है कि

उन्हें समझना आसान है, और प्राप्ति का मतलब है कि वे यथार्थवादी हैं और उन तक पहुँचना संभव है। इसलिए, मापन योग्य उद्देश्यों का एक समूह मिलकर एक ऐसा ढांचा तैयार करता है जो छात्रों को सार्थक और मापन योग्य शैक्षिक परिणाम प्राप्त करने के लिए मार्गदर्शन के साथ शिक्षण और सीखने की प्रक्रिया को बेहतर बनाता है।

10.4 शिक्षा में मापन योग्य उद्देश्यों का महत्व

1. **निर्देशों का मार्गदर्शन–** मापनीय उद्देश्य निर्देशों का मार्गदर्शन करते हैं। यह शिक्षक को यह स्पष्ट मार्ग देता है कि क्या पढ़ाया जाना चाहिए और क्या हासिल किया जाना चाहिए। दूसरे शब्दों में, शिक्षक बाद में प्रभावी पाठ डिजाइन और निर्देश रणनीति विकसित कर सकते हैं क्योंकि उनके पास स्पष्ट, विशिष्ट और प्राप्त करने योग्य लक्ष्य होते हैं। हालाँकि, ऐसा दृष्टिकोण प्रत्येक बाद के पाठ को तार्किक रूप से और सुसंगत रूप से पिछले पाठ का अनुसरण करने की अनुमति देता है और छात्रों को धीरे–धीरे आत्मविश्वास के साथ सामग्री में महारत हासिल करने में सहायता करता है। उदाहरण के लिए, ''छात्र वास्तविक दुनिया की समस्याओं को हल करने के लिए पाइथागोरस प्रमेय को लागू करने में सक्षम होंगे'' जैसे उद्देश्य शिक्षक के लिए स्पष्टता बनाए रखते हैं कि किस तरह के स्पष्ट शिक्षण और गतिविधियाँ छात्रों को उस उद्देश्य तक सफलतापूर्वक पहुँचने की ओर ले जाती हैं। इस तरह के केंद्रित निर्देश शिक्षण की गुणवत्ता को बढ़ाते हैं और निर्देशात्मक समय का कुशल उपयोग सुनिश्चित करते हैं ताकि छात्रों को अधिकतम सीखने के अनुभव प्राप्त हों।

2. **छात्रों की समझ बढाना–** स्पष्ट और मापन योग्य उद्देश्य छात्रों की समझ को बहुत बढाते हैं। स्पष्ट अपेक्षाओं के साथ, छात्र जान सकते हैं कि उनसे क्या अपेक्षित है और वे फलदायी दिशाओं में प्रयास कर सकते हैं। यह छात्रों को सीखने के उद्देश्य और कार्य पर ध्यान केंद्रित करने में सक्षम बनाता है। वास्तविक लक्ष्य, जैसे कि ''छात्र विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्रफल और परिधि की गणना करने में सक्षम होंगे,'' छात्रों को वास्तविक उद्देश्य देते हैं जो उनके सीखने को अधिक सार्थक और उद्देश्यपूर्ण बनाते हैं। इसके अलावा, मापने योग्य लक्ष्य छात्रों को अपनी प्रगति को ट्रैक करने की अनुमति देते हैं। इन लक्ष्यों को प्राप्त करते समय, छात्र सुधार के वास्तविक प्रमाण देखते हैं जो उनके आत्मविश्वास के स्तर को बढाता है और विकास की मानसिकता को प्रोत्साहित करता है। यह आत्म–जागरूकता व्यक्ति को सीखने के प्रति अधिक चिंतित बनाती है और इसमें अधिक सक्रिय भागीदार बनाती है।

3. **मूल्यांकन को आसान बनाना–** मूल्यांकन शिक्षा का एक बहुत ही महत्वपूर्ण पहलू है और मापने योग्य उद्देश्य अच्छे मूल्यांकन प्रपत्रों को स्थापित करने के लिए एक उत्कृष्ट आधार हैं। जब मूल्यांकन स्पष्ट और स्पष्ट रूप से परिभाषित उद्देश्यों के साथ संरेखित होते हैं, तो शिक्षक यह निर्धारित करने में बेहतर स्थिति में होते हैं कि छात्र वांछित सीखने के परिणाम तक पहुँच गए हैं या नहीं। अपनी प्रकृति से, संरेखण मूल्यांकन को प्रासंगिक और मान्य बनाता है, जो छात्र के प्रदर्शन के बारे में विश्वसनीय जानकारी प्रदान करता है। मापन योग्य उद्देश्य रचनात्मक और योगात्मक मूल्यांकन में अंतर करने की अनुमति भी देते हैं। उद्देश्यों को पूरा करने की दिशा में चल रही प्रगति को रचनात्मक मूल्यांकन, जैसे कि प्रश्नोत्तरी और कक्षा की गतिविधियों द्वारा मापा जा सकता है, जिससे शिक्षक छात्रों को समय पर प्रतिक्रिया प्रदान कर सकते हैं और यदि आवश्यक हो तो निर्देश समायोजित कर सकते हैं। अंत में, अंतिम परीक्षा या प्रोजेक्ट जैसे योगात्मक मूल्यांकन, किसी इकाई या पाठ्यक्रम के अंत में उद्देश्यों की महारत का ऑकलन कर सकते हैं। संक्षेप में, शिक्षा में मापन योग्य उद्देश्य होने के कई लाभ हैं। वे शिक्षण के लिए एक स्पष्ट रूपरेखा प्रदान करके ऐसा करते हैं, जो पाठों को केंद्रित और सुसंगत बनाता है। वे अपेक्षाओं और लक्ष्यों को स्पष्ट रूप से निर्धारित करके छात्रों की समझ को बढाते हैं, जो छात्रों को प्रेरित और सीखने में रुचि रखेगा। अंत में, यह मूल्यांकन की सुविधा के लिए फायदेमंद है क्योंकि मूल्यांकन के साधन

विशिष्ट सीखने के परिणामों के साथ संरेखित होते हैंय इसलिए, यह प्रासंगिक होगा। साथ में, ये लाभ शिक्षक और छात्रों के लिए अधिक व्यवस्थित, कुशल और उत्पादक सीखने के अनुभव लाते हैं।

10.5 गणित शिक्षण के लिए मापनीय लक्ष्य विकसित करना–

गणित शिक्षा के लिए मात्रात्मक लक्ष्य बनाना एक महत्वपूर्ण कार्य है, जिसमें स्पष्टता, विशिष्टता और अधिक सामान्य शैक्षिक उद्देश्यों के साथ संबंध की गारंटी देने के लिए कई महत्वपूर्ण कारकों को ध्यान में रखना पडता है। ये लक्ष्य कुशल शिक्षण और सीखने की आधारशिला बनाते हैं, छात्र की भागीदारी, मूल्यांकन और निर्देशात्मक डिजाइन को निर्देशित करते हैं। सटीक, मापने योग्य, प्राप्य, प्रासंगिक और समयबद्ध लक्ष्य विकसित करने के लिए, सबसे पहले उद्देश्य निर्माण के मूल सिद्धांतों को समझना चाहिए, जिसमें ब्लूम के संशोधित वर्गीकरण और SMART मानदंड (डोरन, 1981; एंडरसन और क्रैथवोल, 2001) का उपयोग करना शामिल है।

शैक्षणिक लक्ष्यों को संज्ञानात्मक डोमेन में वर्गीकृत करने के लिए एक व्यवस्थित ढांचा – जो याद रखने और समझने जैसी निम्न–क्रम की सोच क्षमताओं से लेकर विश्लेषण, मूल्यांकन और निर्माण जैसे उच्च–क्रम के कौशल तक होता है – ब्लूम के संशोधित वर्गीकरण (एंडरसन और क्रैथवोल, 2001) द्वारा प्रदान किया गया है। शिक्षक सटीक, अच्छी तरह से परिभाषित सीखने के उद्देश्य बना सकते हैं जो इस वर्गीकरण के उपयोग से संज्ञानात्मक प्रक्रियाओं की एक विस्तृत श्रृंखला को संबोधित करते हैं। उदाहरण के लिए, ''लागू करने'' के स्तर के लिए एक लक्ष्य यह हो सकता है, ''छात्र समकोण त्रिभुजों से जुडी वास्तविक दुनिया की समस्याओं को हल करने के लिए पाइथागोरस प्रमेय को लागू करने में सक्षम होंगे।'' मात्रात्मक और सटीक होने के अलावा, यह लक्ष्य वास्तविक दुनिया की स्थितियों में गणितीय विचारों के उपयोग पर भी प्रकाश डालता है।

यह गारंटी देकर कि उद्देश्य समयबद्ध, विशिष्ट, मापने योग्य, प्राप्त करने योग्य और प्रासंगिक हैं, SMART मानदंड मापने योग्य लक्ष्यों के विकास को और बढाने में मदद करते हैं (डोरन, 1981)। जब उद्देश्य विशिष्ट होते हैं, तो स्पष्टता समाप्त हो जाती है, जिससे शिक्षण और मूल्यांकन को आगे बढने का एक स्पष्ट मार्ग मिलता है। ''छात्र बीजगणित को समझेंगे'' जैसा लक्ष्य बहुत सामान्य है। एक उद्देश्य जो अधिक केंद्रित है, वह कुछ इस तरह हो सकता है ''छात्र उपयुक्त बीजगणितीय तकनीकों का उपयोग करके एक चर के साथ रैखिक समीकरणों को हल करने में सक्षम होंगे।'' स्पष्टता का यह स्तर गारंटी देता है कि इच्छित लक्ष्य शिक्षक और विद्यार्थियों दोनों द्वारा समान रूप से समझा जाता है। उद्देश्यों को तैयार करने का एक और आवश्यक घटक मापनीयता है। जिस तरीके से उद्देश्यों को व्यक्त किया जाता है, उससे यह मूल्यांकन करना संभव होना चाहिए कि वे पूरे हुए हैं या नहीं। इस तरह से कर्ता क्रियाओं का उपयोग करके अवलोकनीय और मापने योग्य छात्र क्रियाओं का वर्णन किया जाता है। ''समझना'' या ''जानना'' जैसे कम परिमाणात्मक वाक्यांशों की तुलना में ''हल करना'', ''समझाना'', ''लागू करना'' और ''विश्लेषण करना'' जैसी क्रियाएँ अधिक वांछनीय हैं (मेगर, 1997)। उदाहरण के लिए, ''छात्र गुणनखंड द्वारा द्विघात समीकरणों को हल करने में सक्षम होंगे'' जैसा लक्ष्य यह स्पष्ट करता है कि छात्रों को क्या करने में सक्षम होना चाहिए और उन गतिविधियों का उपयोग करके उनका ऑकलन करना आसान बनाता है जिनमें उन्हें समस्याओं को हल करने की आवश्यकता होती है।

ऐसे लक्ष्य निर्धारित करें जो कठिन और प्राप्त करने योग्य दोनों हों ताकि छात्र बिना हारे या हतोत्साहित हुए खुद को आगे बढाने के लिए प्रेरित हों (लॉक और लैथम, 2002)। मिडिल स्कूल के छात्रों को ''द्विघात सूत्र निकालने'' का लक्ष्य एक अप्राप्य लक्ष्य का एक उदाहरण है। एक व्यवहार्य लक्ष्य हो सकता है, ''छात्र द्विघात समीकरणों की जडें खोजने के लिए द्विघात सूत्र का उपयोग करने में सक्षम होंगे।'' प्रासंगिकता वह डिग्री है जिस तक कोई उद्देश्य छात्रों की जरूरतों और पाठ्यक्रम के व्यापक लक्ष्यों दोनों के अनुरूप है। छात्रों की सहायता करने के लिए, वे जो सीख रहे हैं उसके महत्व और उद्देश्य को समझने के लिए, उद्देश्य वास्तविक दुनिया की स्थितियों के लिए प्रासंगिक और

वास्तविक होने चाहिए (विगिन्स और मैकटीघे, 2005)। ''छात्र वास्तविक जीवन की स्थितियों से संबंधित समस्याओं को हल करने के लिए विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के क्षेत्र की गणना करने में सक्षम होंगे, जैसे कि दीवार को ढंकने के लिए आवश्यक पेंट की मात्रा निर्धारित करना,'' ज्यामिति पाठ में एक प्रासंगिक लक्ष्य हो सकता है। समयबद्ध उद्देश्य सीखने की प्रक्रिया के लिए एक समय सीमा निर्धारित करते हैं, तात्कालिकता की भावना पैदा करते हैं और निर्देशात्मक गति के नियंत्रण में सहायता करते हैं (डोरन, 1981)। ऐसा ही एक लक्ष्य हो सकता है, ''इकाई के अंत तक, छात्र दिए गए डेटा सेट का उपयोग करके बॉक्स–एंड–व्हिस्कर प्लॉट का निर्माण और व्याख्या करने में सक्षम होंगे।'' यह समयबद्ध विशेषता यह सुनिश्चित करती है कि लक्ष्य की एक परिभाषित समाप्ति तिथि हो, जो शैक्षिक गतिविधियों और मूल्यांकन के संगठन को सुविधाजनक बनाती है। मात्रात्मक उद्देश्यों के प्रभावी डिजाइन के लिए निरंतर आत्मनिरीक्षण और सुधार भी आवश्यक है। शिक्षकों के लिए यह लगातार ऑकलन करना महत्वपूर्ण है कि उनके लक्ष्य निर्देश को कितनी अच्छी तरह से निर्देशित कर रहे हैं और छात्र विकास को बढा रहे हैं। छात्र प्रदर्शन डेटा का विश्लेषण करना, छात्र इनपुट प्राप्त करना और सर्वोत्तम प्रथाओं का आदान–प्रदान करने के लिए साथियों के साथ काम करना इस चिंतनशील दृष्टिकोण के कुछ उदाहरण हैं (ब्रूकहार्ट, 2010)। उदाहरण के लिए, छात्रों के कौशल और शैक्षिक सेटिंग को बेहतर ढंग से अनुकूल बनाने के लिए एक लक्ष्य को बदलने की आवश्यकता हो सकती है यदि इसे पूरा करना उनके लिए अक्सर बहुत कठिन या आसान होता है। इसके अतिरिक्त, छात्रों की भागीदारी और उनके सीखने पर स्वामित्व की भावना को बढाया जा सकता है जब उन्हें सीखने के उद्देश्यों को बनाने और समझने की प्रक्रिया में शामिल किया जाता है (मार्जानो, 2009)। छात्रों के प्रेरित और केंद्रित होने की संभावना अधिक होती है जब उन्हें पता होता है कि वे वास्तव में किसके लिए काम कर रहे हैं और सफलता कैसी दिखती है। प्रशिक्षक एक सत्र या इकाई की शुरुआत में लक्ष्यों को स्पष्ट रूप से रेखांकित करके और नियमित आधार पर छात्र की प्रगति का ऑकलन करने के लिए उन पर फिर से जाकर इसमें मदद कर सकते हैं।

मात्रात्मक लक्ष्य बनाते समय विभेदीकरण को प्राथमिकता देना एक और महत्वपूर्ण कारक है। शिक्षकों को इस तथ्य के मद्देनजर अपने लक्ष्यों को संशोधित करना चाहिए कि छात्रों की सीखने की विभिन्न शैलियाँ और माँगें होती हैं ताकि यह सुनिश्चित किया जा सके कि हर छात्र सफल हो सके (टॉमलिंसन, 2014)। इसमें कठिनाई के विभिन्न स्तरों के साथ उद्देश्य बनाना या विद्यार्थियों को यह दिखाने के लिए कई विकल्प प्रदान करना शामिल हो सकता है कि उन्होंने क्या सीखा है। भिन्नों के पाठ के लिए एक उन्नत लक्ष्य, उदाहरण के लिए, ''छात्र भिन्नों के जोड और घटाव से जुडी जटिल शब्द समस्याओं को हल करने में सक्षम होंगे'' होगा, जबकि एक मौलिक उद्देश्य हो सकता है, ''छात्र दृश्य मॉडल का उपयोग करके भिन्नों की पहचान करने और उन्हें दर्शाने में सक्षम होंगे।'' संक्षेप में, गणित शिक्षा के लिए मात्रात्मक लक्ष्य विकसित करना एक जटिल प्रक्रिया है जिसके लिए कई रूपरेखाओं और मार्गदर्शक अवधारणाओं के गहन मूल्यांकन की आवश्यकता होती है। शिक्षक स्पष्ट, स्पष्ट और प्रासंगिक उद्देश्य विकसित कर सकते हैं जो सफल निर्देश को निर्देशित करते हैं, सटीक मूल्यांकन को सक्षम करते हैं, और ब्लूम के संशोधित वर्गीकरण और SMARTमानदंडों का उपयोग करके छात्र जुडाव में सुधार करते हैं। यह सुनिश्चित करने के लिए कि उद्देश्यों को शिक्षार्थियों की विशिष्ट आवश्यकताओं के अनुरूप बनाया गया है और उनके समग्री शैक्षणिक प्रदर्शन का समर्थन किया गया है, निरंतर चिंतन, छात्र संपर्क और विभेदीकरण भी इस प्रक्रिया के आवश्यक तत्व हैं। गणित निर्देश में मापनीय उद्देश्यों को विकसित करने और उन्हें व्यवहार में लाने के तरीकों को बेहतर बनाने में चल रहे शोध और व्यावसायिक विकास महत्वपूर्ण होंगे क्योंकि शैक्षिक परिदृश्य लगातार बदल रहा है।

संक्षेप में, गणित शिक्षा में शिक्षण, मूल्यांकन और छात्र सीखने को निर्देशित करने वाले सटीक और अच्छी तरह से परिभाषित उद्देश्यों के विकास के लिए मात्रात्मक लक्ष्य महत्वपूर्ण हैं। इन उद्देश्यों में गणितीय विषयों की एक विस्तृत श्रृंखला शामिल है, जैसे कि कलन, बीजगणित, ज्यामिति, सांख्यिकी, अंकगणित और रैखिक बीजगणित। प्रत्येक को अलग–अलग गणितीय दक्षता स्तरों पर अद्वितीय आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए डिजाइन किया

गया है। शिक्षक अपनी प्रभावकारिता में सुधार कर सकते हैं और छात्रों को ऐसे लक्ष्य बनाकर सार्थक सीखने के परिणाम प्राप्त करने में मदद कर सकते हैं जो स्पष्ट, मात्रात्मक, प्राप्य, प्रासंगिक और समयबद्ध हों।

10.6 मापनीय उद्देश्यों का कक्षा में क्रियान्वयन

कक्षा में मापनीय उद्देश्य संगठित और प्रभावी शिक्षण के लिए महत्वपूर्ण तत्व हैं। ये उद्देश्य निर्देश के लिए एक दिशा देते हैं, सुनिश्चित करते हैं कि पाठ सुसंगत और लक्ष्य–उन्मुख है, और विविध छात्र आवश्यकताओं के लिए विभेदित निर्देश सुनिश्चित करने का अवसर प्रदान करते हैं। इस प्रकार एक अच्छी तरह से परिभाषित शिक्षण रणनीति स्पष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति की ओर संरेखित होती है जो शिक्षकों को छात्रों को सफलता दिलाने में सक्षम एक उत्तरदायी, गतिशील और सहायक शिक्षण वातावरण बनाने में सक्षम बनाती है।

10.6.1 मापनीय उद्देश्य पर आधारित निर्देशात्मक योजना

1. **पाठ योजना–** अच्छी पाठ योजना मापनीय उद्देश्यों को निर्धारित करने से शुरू होती है। ये उद्देश्य पाठ को एक स्पष्ट उद्देश्य देते हैं जो दिखाते हैं कि छात्रों को क्या सीखना चाहिए और अंत में क्या करने में सक्षम होना चाहिए। इस तरह के उद्देश्य के बारे में सोचेंरू ''छात्र अपनी विशेषताओं के आधार पर विभिन्न त्रिभुजों की पहचान करेंगे और उन्हें समूहीकृत करेंगे।'' इस लक्ष्य को ध्यान में रखते हुए, शिक्षक इसे प्राप्त करने में मदद करने के लिए गतिविधियाँ और सामग्री बना सकते हैं। इसका मतलब है सही शिक्षण विधियों को चुनना, जैसे विचारों को समझाना और समूहीकरण का अभ्यास करने के लिए हाथों से किए जाने वाले कार्यों का उपयोग करना। साथ ही मापनीय उद्देश्य शिक्षकों को यह पता लगाने में मदद करते हैं कि पाठ के प्रत्येक भाग को कितना समय लेना चाहिए। इससे यह सुनिश्चित होता है कि वे सभी महत्वपूर्ण विषयों को कवर करते हैं और साथ ही छात्रों को शामिल होने और समझने का समय देते हैं।

2. **इकाई नियोजन–** इकाई नियोजन में व्यापक लक्ष्यों के इर्दगिर्द पाठों को व्यवस्थित करना शामिल है जो पाठ्यक्रम मानकों के अनुरूप हैं। पूरी इकाई के लिए मापने योग्य लक्ष्य निर्धारित करके, शिक्षक यह सुनिश्चित कर सकते हैं कि प्रत्येक पाठ छात्रों द्वारा पहले से ज्ञात और किए जा सकने वाले कार्यों पर आधारित हो, जिससे विषय की पूरी समझ विकसित हो। उदाहरण के लिए, बीजगणित की एक इकाई में ऐसे लक्ष्य हो सकते हैं, जैसे ''छात्र एक चर के साथ रैखिक समीकरण और असमानताओं को हल करेंगे,'' और ''छात्र एक निर्देशांक तल पर रैखिक समीकरणों का ग्राफ बनाएंगे।'' ये इकाई लक्ष्य व्यक्तिगत पाठों के क्रम और सामग्री का मार्गदर्शन करते हैं, यह सुनिश्चित करते हुए कि वे एक साथ फिट हों और आगे बढें। इसके अलावा, मापने योग्य लक्ष्यों के साथ इकाई नियोजन शिक्षकों को छात्र की प्रगति की जाँच करने और आवश्यकतानुसार शिक्षण को बदलने के लिए इकाई के दौरान और अंत में विभिन्न प्रकार के परीक्षणों का उपयोग करने की अनुमति देता है।

10.6.2 मापनीय उद्देश्यों पर आधारित विभेदित निर्देश

1. **विविध शिक्षण आवश्यकताओं को संबोधित करना–** विभेदित निर्देश छात्रों की विविध शिक्षण आवश्यकताओं को पूरा करने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। मापने योग्य उद्देश्य विशिष्ट कौशल और ज्ञान की पहचान करने के लिए एक संरचना बनाते हैं जिसे सभी छात्रों को हासिल करना चाहिए, साथ ही छात्रों को इन उद्देश्यों तक कैसे पहुँचना है, इस बारे में गुंजाइश देते हैं। शिक्षक विभिन्न शिक्षण शैलियों, जैसे दृश्य, श्रवण और गतिज के अनुरूप विभिन्न शिक्षण विधियों को लागू कर सकते हैं। उदाहरण के लिए ''छात्र भिन्नों की अवधारणा को समझेंगे'' उद्देश्य को लें। शिक्षक भिन्नों की पट्टियों जैसे दृश्य उपकरणों का उपयोग कर सकते हैं, व्याख्यानों के माध्यम से समझा सकते हैं, और आकृतियों को भागों में काटने जैसे व्यावहारिक कार्य कर सकते हैं। यह विधि सुनिश्चित करती है कि सभी छात्र अपनी सीखने की प्राथमिकताओं से मेल खाने वाले तरीके से सामग्री तक पहुँच सकें।

2. **विभिन्न कौशल स्तरों के लिए उद्देश्यों को अनुकूलित करना–** कक्षा में छात्रों के पास अक्सर ज्ञान और कौशल के विभिन्न स्तर होते हैं। विभिन्न कौशल स्तरों के अनुरूप मापने योग्य लक्ष्यों को समायोजित करने में प्रत्येक छात्र को चुनौती देने के लिए कार्यों को बदलना शामिल है। उदाहरण के लिए, जबकि उन्नत छात्र भिन्नों के साथ मुश्किल समस्याओं को हल कर सकते हैं, जो छात्र संघर्ष करते हैं वे बुनियादी भिन्न विचारों को सीख सकते हैं और उनके साथ सरल गणित कर सकते हैं। शिक्षक ऐसे स्तरित असाइनमेंट बना सकते हैं जो एक ही लक्ष्य को लक्षित करते हैं लेकिन वे कितने जटिल और गहरे हैं, इसमें अंतर होता है। यह सुनिश्चित करता है कि सभी छात्र एक ही लक्ष्य की ओर काम करें लेकिन एक ऐसी गति और स्तर पर जो उनके कौशल के अनुकूल हो, जो सीखने को निष्पक्ष बनाने और सभी को शामिल करने में मदद करता है।

10.7 मापनीय उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए शिक्षण रणनीतियाँ

10.7.1 प्रत्यक्ष निर्देश– जब छात्र नए विचार और कौशल सीखते हैं तो प्रत्यक्ष निर्देश मापने योग्य लक्ष्यों तक पहुँचने पर एक मजबूत प्रभाव डालता है। इस दृष्टिकोण में बातचीत, शो और निर्देशित अभ्यास के माध्यम से स्पष्ट सीधी शिक्षा शामिल है। यह लक्ष्य लें–''छात्र द्विघात सूत्र का उपयोग करके द्विघात समीकरण हल करेंगे।'' शिक्षक सूत्र के चरण–दर–चरण विश्लेषण से शुरू कर सकते हैं। फिर, वे उदाहरण दिखाएंगे और छात्रों को अभ्यास समस्याओं के माध्यम से ले जाएंगे। यह विधि सुनिश्चित करती है कि छात्रों को स्पष्ट संगठित जानकारी मिले। यह उन्हें लक्ष्य तक पहुँचने के लिए आवश्यक बुनियादी विचारों को समझने में मदद करता है।

10.7.2 सहयोगी शिक्षण– एक साथ काम करने से छात्रों को स्पष्ट लक्ष्य प्राप्त करने में मदद मिलती है, समुदाय की भावना का निर्माण होता है और उनकी आलोचनात्मक सोच को तेज करता है। गणित की कक्षा में, ''विद्यार्थी समीकरणों की प्रणालियों के साथ वास्तविक दुनिया की समस्याओं से निपटेंगे'' जैसे लक्ष्य को टीम प्रोजेक्ट या समूह समस्या–समाधान के माध्यम से पूरा किया जा सकता है। बच्चे समस्याओं को हल करने के विभिन्न तरीकों के बारे में बात कर सकते हैं, जो वे जानते हैं उसे साझा कर सकते हैं और एक–दूसरे के विचारों से सीख सकते हैं। यह दृष्टिकोण न केवल उन्हें लक्ष्य तक पहुँचने में मदद करता है बल्कि दूसरों से बात करने और एक टीम के रूप में काम करने में उनके कौशल का निर्माण भी करता है। ये कौशल स्कूल और वास्तविक दुनिया दोनों में उपयोगी हैं।

10.7.3 समस्या–आधारित शिक्षा– समस्या–आधारित शिक्षा (PBL) पढाने के लिए जटिल वास्तविक दुनिया की समस्याओं का उपयोग करती है। यह विधि उन लक्ष्यों को प्राप्त करने के लिए अच्छी तरह से काम करती है जिनके लिए उच्च–क्रम की सोच और ज्ञान के अनुप्रयोग की आवश्यकता होती है। यह लक्ष्य लें–''विद्यार्थी एक सरल वास्तुशिल्प मॉडल को डिजाइन करने के लिए ज्यामितीय सिद्धांतों को लागू करेंगे।'' इसके लिए एक PBL गतिविधि छात्रों से विशिष्ट नियमों के आधार पर एक संरचना डिजाइन करने के लिए कह सकती है। PBL छात्रों को सार्थक कार्यों में शामिल करता है जो उन्हें उनके द्वारा सीखी गई चीजों का उपयोग करने के लिए प्रेरित करते हैं। इससे विषय की गहरी समझ और बेहतर याददाश्त होती है। जब छात्र वास्तविक समस्याओं पर काम करते हैं, तो वे देखते हैं कि उनका सीखना क्यों मायने रखता है और अपने लक्ष्यों तक पहुँचने के लिए प्रेरित महसूस करते हैं। कक्षा में स्पष्ट लक्ष्य निर्धारित करना शिक्षण और सीखने को व्यवस्थित और प्रभावी बनाने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। शिक्षक यह सुनिश्चित कर सकते हैं कि प्रत्येक पाठ एक लक्ष्य पर केंद्रित हो और सावधानीपूर्वक पाठ और इकाई नियोजन के माध्यम से विषय की पूरी समझ की ओर ले जाए। इन लक्ष्यों के आधार पर अलग–अलग छात्रों की जरूरतों के हिसाब से पाठ तैयार करने से सभी छात्रों को अच्छा प्रदर्शन करने का मौका मिलता है। प्रत्यक्ष शिक्षण, टीम वर्क और

वास्तविक समस्याओं को हल करने जैसी शिक्षण विधियों का उपयोग करके, शिक्षक सीखने के लिए एक जीवंत और सहायक स्थान बना सकते हैं जो छात्रों को शामिल करता है और उन्हें हासिल करने में मदद करता है। अंत में स्पष्ट लक्ष्य अच्छी शिक्षा की कुंजी हैं जो हमें कैसे पढाते हैं और कैसे जाँचते हैं कि छात्र सीख रहे हैं, ताकि उन्हें सफल होने में मदद मिल सके। स्पष्ट लक्ष्यों की जाँच और रेटिंग यह समझने के लिए कि छात्र कैसे कर रहे हैं और यह सुनिश्चित करने के लिए कि हम अपने शिक्षण लक्ष्यों को प्राप्त कर रहे हैं, हमें उनकी प्रगति को मापने और उसका ऑकलन करने की आवश्यकता है। शिक्षक इस बारे में उपयोगी जानकारी प्राप्त कर सकते हैं कि बच्चे कैसा प्रदर्शन कर रहे हैं, उन्हें उपयोगी प्रतिक्रिया दे सकते हैं और स्कूल वर्ष के दौरान और अंत में परीक्षणों का उपयोग करके छात्रों की जरूरतों को बेहतर ढंग से पूरा करने के लिए अपने पाठों को बेहतर बना सकते हैं। आइए देखें कि किस तरह के परीक्षण हमारे लक्ष्यों के साथ कैसे मेल खाते हैं, हम अपने शिक्षण को आकार देने के लिए परीक्षण परिणामों का उपयोग कैसे कर सकते हैं, और परीक्षण उपकरणों और विधियों के कुछ उदाहरण।

10.7.4 उद्देश्यों के साथ मूल्यांकन का मिलान– मापनीय उद्देश्यों के साथ मूल्यांकन का मिलान सुनिश्चित करता है कि मूल्यांकन यह परीक्षण करता है कि छात्रों को क्या सीखना चाहिए। यह मिलान ऐसे मूल्यांकन बनाने में मदद करता है जो मान्य, विश्वसनीय और शिक्षण उद्देश्यों से जुडे होते हैं।

उदाहरण के लिए, यदि लक्ष्य है ''छात्र द्विघात सूत्र का उपयोग करके द्विघात समीकरण हल करेंगे,'' तो मिलान परीक्षण में ऐसे प्रश्न शामिल होने चाहिए जिनमें छात्रों को द्विघात सूत्र का उपयोग करने की आवश्यकता हो। यह स्पष्ट संबंध सुनिश्चित करता है कि परीक्षण यह मापता है कि छात्रों को क्या सीखना चाहिए, यह दर्शाता है कि वे सामग्री को कितनी अच्छी तरह समझते हैं और उसमें महारत हासिल करते हैं।

10.7.5 शिक्षण को निर्देशित करने के लिए परीक्षा परिणामों का उपयोग करना– परीक्षण डेटा को देखने का मतलब है कि छात्रों ने पैटर्न, ताकत और उन क्षेत्रों को खोजने के लिए कैसा प्रदर्शन किया, जिनकी आवश्यकता है। पॉप क्विज, परीक्षाओं और अन्य परीक्षणों के परिणामों की जाँच करके, शिक्षक उन विशिष्ट विचारों को पहचान सकते हैं जो छात्रों को परेशान करते हैं और इन मुद्दों को संबोधित करने के लिए अपने शिक्षण के तरीके को बदल सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि कई छात्र द्विघात समीकरणों के गुणनखंड पर एक परीक्षा प्रश्न के साथ संघर्ष करते हैं, तो शिक्षक इस विषय पर फिर से जा सकते हैं। वे छात्रों को अवधारणा को बेहतर ढंग से समझने में मदद करने के लिए अधिक अभ्यास करा सकते हैं और नए शिक्षण तरीके आजमा सकते हैं।

10.7.6 पृष्ठपोषण और हस्तक्षेप– छात्रों की शिक्षा को बढाने के लिए समय पर और सक्षम पृष्ठपोषण आवश्यक है। पृष्ठपोषण विस्तृत होना चाहिए, जिसमें यह बताया जाना चाहिए कि छात्रों ने क्या सही किया और उन्हें यह बताया जाना चाहिए कि वे कैसे सुधार कर सकते हैं। अच्छा पृष्ठपोषण वह होता है जो शिक्षार्थियों को यह समझने में सक्षम बनाता है कि वे कहाँ गलत हुए, उससे सीखें और भविष्य के कामों में इस नई जानकारी का उपयोग करें। लक्षित हस्तक्षेप पृष्ठपोषण के अलावा विशिष्ट छात्र आवश्यकताओं का भी समर्थन कर सकते हैं। ये एक–पर–एक ट्यूशन, छोटे समूह निर्देश, और लक्षित कौशल या अवधारणाओं से संबंधित विभेदित दत्तकार्य हो सकते हैं।

10.8 गणित शिक्षा में मापनीय उद्देश्यों का भविष्य

जैसे–जैसे शिक्षा बदलती और रूपांतरित होती है, सीखने के परिणामों का महत्व केवल बढ सकता है क्योंकि इसे डिजिटल तकनीकी क्रांति से गुजर रही दुनिया में नए शैक्षिक मॉडल तक बढाया जाता है। बाह्य मूल्यांकन गणित

शिक्षा में मापनीय उद्देश्यों का भविष्य इस बात पर निर्भर करेगा कि यह व्यक्तिगत शिक्षण, डेटा–संचालित निर्देश और योग्यता–आधारित शिक्षा जैसे बढ़ते रुझानों के साथ किस हद तक संरेखित होता है।

- **व्यक्तिगत शिक्षण–** किसी व्यक्तिगत छात्र की ताकत, जरूरतों और रुचि के अनुसार विशेष रूप से तैयार की गई शिक्षा जिससे छात्र अपनी गति से पाठ्यक्रम कार्य के माध्यम से आगे बढ सकते हैं। यह प्रक्रिया छात्रों की भागीदारी को प्रोत्साहित करता है और अंततः सभी छात्रों को उच्चतम उपलब्धि की ओर ले जाता है।

- **डेटा–संचालित निर्देश–** रचनात्मक और योगात्मक मूल्यांकन के निरंतर विश्लेषण के माध्यम से, शिक्षक प्रदर्शन को बेहतर बनाने के लिए सीखने के अंतराल के आधार पर मापनीय उद्देश्यों को समायोजित कर सकते हैं। यह तरल दृष्टिकोण सुनिश्चित करता है कि लक्ष्य वर्तमान रहें और छात्र की जरूरतों से प्रेरित हों।

- **योग्यताआधारित–** योग्यताआधारित, जिसका अर्थ है कि शिक्षक कक्षा में समय के बजाय विषय–वस्तु की महारत पर ध्यान केंद्रित करते हैं। मापने योग्य सीखने के उद्देश्य इस मॉडल के बिल्कुल अनुकूल हैं, वे प्रशिक्षक और छात्र दोनों को यह आसानी से देखने योग्य लक्ष्य देते हैं कि क्या सीखा जाना चाहिए। योग्यता–आधारित शिक्षा की ओर आंदोलन निर्देश और मूल्यांकन के लिए अपेक्षाओं के एक नए सेट को दर्शाता है, जो सीखने के मार्गों में लचीलेपन को महत्व देता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. मापनीय उद्देश्य को परिभाषित कीजिए।

   ....

   ....

2. मापनीय उद्देश्य की तीन विशेषताएं बताईये।

   ....

   ....

3. मापनीय उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए शिक्षण रणनीतियां कौन–कौन सी हैं?

   ....

   ....

10.9 गणितीय सामान्यीकरण

गणित एक ऐसा विषय है जहाँ एक छात्र संख्याओं के रूप में दर्शाए गए विभिन्न संख्याओं के बीच पैटर्न, संरचना और संबंधों की पहचान करने में शामिल होता है। गणित को समझने का एक और तरीका यह है कि इसे अमूर्तता की भाषा के रूप में माना जाए जो विभिन्न गणितीय विचारों को संप्रेषित करने के लिए अमूर्त अवधारणाओं, संरचना और प्रतीकों के उपयोग को संदर्भित करता है। अमूर्त गणित का उपयोग गुणों, संबंधों और विभिन्न गणितीय संक्रियाओं को अधिक लचीले ढंग से और सामान्य रूप से वर्णित करने के लिए किया जाता है। उदाहरण के लिए 7 या 9 जैसी संख्याएँ कहने के बजाय गणितीय अमूर्तता में पूर्णांकों या वास्तविक संख्याओं के सामान्य गुणों का अध्ययन करना शामिल होगा। ऐसा ही एक और उदाहरण सेट और फंक्शन का है जहाँ गणितज्ञ विशिष्ट सेट या फंक्शन के साथ काम करने के बजाय सेट और फंक्शन के सामान्य गुणों का उपयोग करता है।

गणितीय विचारों को व्यक्त करने के कई तरीके हैं। गणितीय सामान्यीकरण की अवधारणा पैटर्न, अवधारणाओं और गणितीय गुणों को पहचानने और व्यापक संदर्भ में विस्तारित करने में एक धावक है जो गणितीय संक्रियाओं से संबंधित अधिक सिद्धांतों और कथनों के विकास के लिए तरीके प्रदान करता है। यह गणितीय खोज के लिए एक आधार प्रदान करता है क्योंकि यह लोगों को विशेष उदाहरण से लेकर इसके व्यापक अनुप्रयोग तक सीखने का अवसर प्रदान करता है। गणितीय सामान्यीकरण का कार्य किसी विशिष्ट समस्या की पहचान करने से शुरू होता है। इसे निम्न उदाहरण से समझा जा सकता है।

चरण–1 पहले कुछ संख्याओं का योग देखें–

$1 = 1$

$1 + 2 = 3$

$1 + 2 + 3 = 6$

$1 + 2 + 3 + 4 = 10$

चरण–2 पैटर्न खोजें– उपरोक्त के योग की प्रक्रिया में परिमाण क्रमशः 1, 3, 6 और 10 हैं। जिसका अर्थ है कि प्रत्येक योग में प्रयुक्त क्रमागत संख्या और अंतिम संख्या से थोडी बड़ी है।

चरण–3 नियम बनाएँ – उपरोक्त के आधार पर हम कोई पैटर्न की पहचान कर सकते है और संख्याओं का योग ज्ञात करने के लिए सूत्र तैयार कर सकते है। जैसे–

योग= $n\ (n+1)/2$, जहॉ n क्रम की अन्तिम संख्या है।

चरण–4 नियम का उपयोग करें और गणना करें–

•प्रथम योग के लिए– $1\times(1+1)/2 = 1\times(2)/2 = 1$

•द्वितीय योग के लिए– $2\times(2+1)/2 = 2\times(3)/2 = 3$

•तृतीय योग के लिए– $3\times(3+1)/2 = 3\times(4)/2 = 6$

•चतुर्थ योग के लिए– $4\times(4+1)/2 = 4\times(5)/2 = 10$

इस प्रकार हम पाते हैं कि प्रत्येक परिणाम हमारे द्वारा गणना की गई राशि से मेल खाता है। उपरोक्त उदाहरण से, हम कह सकते हैं कि कुछ उदाहरणों को देखकर और एक पैटर्न ढूंढकर, हम एक सूत्र बनाते हैं जो किसी भी संख्या के पदों के योग के लिए काम करता है।

उपर्युक्त उदाहरण से यह स्पष्ट है कि यदि छात्र विशिष्ट संख्या की परवाह किए बिना ऊपर बताए गए समान नियमों को लागू करते हैं तो परिणाम समान होगा। यह समस्या–समाधान को सरल बनाता है और गणितीय समझ को बढ़ाने में भी योगदान देता है।

सामान्यीकरण करने की क्षमता उच्च–क्रम सोच कौशल के लिए महत्वपूर्ण है। छात्रों को एक विशेष समस्या से परे देखने और सामान्य पैटर्न की पहचान करने की भी आवश्यकता होती है। जैसे–जैसे छात्रों को विभिन्न गणितीय संक्रियाओं के लिए सामान्य नियम की समझ मिलती है, सामान्यीकरण करने की यह क्षमता समस्या–समाधान में योगदान देती है, यह छात्रों को गणित में सीखे गए सिद्धांत को अपरिचित स्थितियों में लागू करने में सक्षम बनाती है, जिसके परिणामस्वरूप सामग्री की अधिक व्यापक समझ होती है।

10.10 गणितीय सामान्यीकरण की परिभाषा

गणितीय अवधारणाओं और प्रमेयों की पहुँच और अनुप्रयोग को बडी सेटिंग्स तक विस्तारित करना गणितीय सामान्यीकरण के रूप में जाना जाता है। अमूर्तता की प्रक्रिया के माध्यम से, गणितज्ञ सामान्य नियम विकसित करने में सक्षम होते हैं जो एक सुसंगत ढांचे के भीतर कई विशेष परिस्थितियों को कवर करते हैं। गणितीय अवधारणाओं के दायरे को बढाकर गणित के प्रतीत होने वाले असंबंधित क्षेत्रों में गहरी समझ और जुडाव संभव हो जाता है। उदाहरण के लिए, प्राकृतिक संख्याओं से वास्तविक संख्याओं तक अंकगणितीय संक्रियाओं को सामान्य बनाने के लिए पूर्ण संख्याओं की विशेषताओं और संक्रियाओं का विस्तार करके भिन्न, अपरिमेय संख्याएँ और ऋणात्मक संख्याएँ शामिल करना आवश्यक है। (आर्टिन, 2011)।

गणितीय ज्ञान की उन्नति में गणितीय सामान्यीकरण द्वारा किए गए योगदान को कम करके आंकना असंभव है। गणितज्ञ व्यापक सिद्धांतों को तैयार करके चुनौतीपूर्ण मुद्दों को हल करने के लिए अधिक शक्तिशाली उपकरण और तरीके तैयार कर सकते हैं। क्षेत्र में नए निष्कर्ष और विकास अक्सर इन सामान्यीकरणों का परिणाम होते हैं, जो अक्सर अंतर्निहित संरचनाओं और संबंधों को उजागर करते हैं जो विशेष मामलों में तुरंत स्पष्ट नहीं होते हैं (कोरंट और रॉबिंस, 1996)। गणित में सामान्यीकरण का उद्देश्य गणित में, सामान्यीकरण का मूल लक्ष्य जटिल अवधारणाओं को सरल बनाना और सुसंगत सिद्धांत प्रदान करना है जिनकी क्रॉस–डोमेन प्रयोज्यता है। सार्वभौमिक पैटर्न और सिद्धांतों को खोजना जो विभिन्न मुद्दों पर लागू हो सकते हैं, कई, अद्वितीय समाधानों की आवश्यकता को कम करता है, जिसे सामान्यीकरण द्वारा सरलीकरण के रूप में जाना जाता है। उदाहरण के लिए, समरूपता, अंकगणित और बहुपद समीकरणों का विश्लेषण करने के लिए एक एकीकृत ढांचा समूहों, वलयों और क्षेत्रों (डमिट और फूटे, 2004) जैसी बीजीय संरचनाओं के विस्तार द्वारा प्रदान किया जाता है। सुसंगत सिद्धांतों का निर्माण गणितीय सामान्यीकरण का एक अतिरिक्त महत्वपूर्ण उद्देश्य है। बहु–विषयक अध्ययन को प्रोत्साहित किया जाता है और एकीकृत सिद्धांतों द्वारा बेहतर समझ संभव होती है जो कई गणितीय क्षेत्रों को एक ही वैचारिक छत के नीचे लाते हैं। उदाहरण के लिए, श्रेणी सिद्धांत गणित की विभिन्न शाखाओं में एक सामान्य भाषा प्रदान करता है, जिससे कंप्यूटर विज्ञान, बीजगणित और टोपोलॉजी (मैक लेन, 1998) जैसे विषयों में अवधारणाओं और विधियों को साझा किया जा सकता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

4. सामान्यीकरण गणित के किन–किन क्षेत्रों में किया जाता है?

....

....

5. गणित में सामान्यीकरण के प्रकार क्या हैं? नाम बताइए।

....

....

6. गणितीय सामान्यीकरण के प्रमुख सिद्धांतों के नाम बताइए।

....

....

10.11 ऐतिहासिक संदर्भ मे गणितीय सामान्यीकरण के उदाहरण

1. यूक्लिडियन ज्यामिति–

गणितीय सामान्यीकरण के पहले और सबसे महत्वपूर्ण उदाहरणों में से एक यूक्लिडियन ज्यामिति है, जिसे ग्रीक गणितज्ञ यूक्लिड ने अपनी आधारभूत पुस्तक ''एलिमेंट्स'' में विकसित किया था। लगभग 300 ईसा पूर्व, यूक्लिड ने अपने ''एलिमेंट्स'' लिखे, जो 13 खंडों का एक संग्रह है जो ज्यामिति, संख्या सिद्धांत और गणितीय तर्क में विभिन्न विषयों को संबोधित करता है। यूक्लिड की विधि सीमित संख्या में अभिधारणाओं या स्वयंसिद्धों से शुरू करना था, फिर इन आधारभूत विचारों से प्रमेयों की एक विशाल श्रृंखला तक काम करना था। बाद में गणितीय कठोरता और तार्किक संरचना के लिए आधार सामान्य स्वयंसिद्धों से विशेष परिणामों का अनुमान लगाने की इस प्रक्रिया द्वारा स्थापित किया गया था (हीथ, 1956)।

विशेष रूप से, समानांतर अभिधारणा, यूक्लिडियन ज्यामिति की पाँच अभिधारणाओं में से एक थी और यह आधारशिला के रूप में कार्य करती थी जिस पर शास्त्रीय ज्यामिति का निर्माण किया गया था। सदियों की गणितीय जांच और चर्चा समानांतर अभिधारणा की विशेष जटिलता से उत्पन्न हुई, जो बताती है कि किसी दिए गए रेखा पर न होने वाले बिंदु के माध्यम से, दी गई रेखा के समानांतर एक रेखा होती है। 19वीं शताब्दी में गैर–यूक्लिडियन ज्यामिति का उद्‌भव यूक्लिड के अन्य स्वयंसिद्धों से समानांतर अभिधारणा को प्रदर्शित करने के प्रयासों का परिणाम था। यह एक बहुत बडा सामान्यीकरण था जिसने अनुशासन को पूरी तरह से बदल दिया (बॉयर, 1991)।

समय के साथ, अंकगणित में कई महत्वपूर्ण विस्तार किए गए हैं, गणित का वह क्षेत्र जो संख्याओं और जोड़, घटाव, गुणा और भाग जैसे मूलभूत कार्यों से संबंधित है। समय के साथ, पूर्णांक, परिमेय संख्याएँ, वास्तविक संख्याएँ और जटिल संख्याएँ अंकगणित के शुरुआती क्षेत्र में जुड गईं, जो प्राकृतिक संख्याओं और बुनियादी संचालनों तक सीमित थी। प्रत्येक विस्तार के साथ, छोटे सेटों के लिए वर्णित विशेषताओं और संचालनों का विस्तार करके संख्याओं के अधिक जटिल सेटों को कवर किया गया।

उदाहरण के लिए वस्तुओं की गिनती वह मूल संदर्भ था जिसमें जोड की धारणा को समझा गया था। गणित के विकास के साथ, जोड को परिमेय संख्याओं, शून्य और धनात्मक पूर्णांकों के अलावा ऋणात्मक और धनात्मक पूर्णांकों को शामिल करने के लिए विस्तारित किया गया। इन कई संख्याओं में विनिमेयता और साहचर्यता जैसी विशेषताओं को बनाए रखने के लिए, इस सामान्यीकरण ने जोड को फिर से परिभाषित करना आवश्यक बना दिया (काट्ज, 2009)। राफेल बॉम्बेली जैसे गणितज्ञों ने अंततः 16वीं शताब्दी में संख्याओं की अवधारणा को जटिल संख्याओं तक विस्तारित किया, जो एक महत्वपूर्ण प्रगति थी, क्योंकि इससे वास्तविक संख्या रेखा से परे की संख्याओं की नई समझ की आवश्यकता हुई।

2. पुनर्जागरण काल–

14वीं से 17वीं शताब्दी का पुनर्जागरण असाधारण रचनात्मक और बौद्धिक गतिविधि का समय था जिसका गणित पर बडा प्रभाव पडा। गणितीय सामान्यीकरण का निर्माण प्राचीन ग्रीक और रोमन काल के ज्ञान के पुनरुत्थान के साथ–साथ हाल की खोजों द्वारा प्रेरित था। लियोनार्डो फिबोनाची इस अवधि में एक महत्वपूर्ण व्यक्ति थेय अपनी पुस्तक ''लिबर अबासी'' (1202) के साथ, उन्होंने हिंदू–अरबी संख्यात्मक प्रणाली को यूरोप में लाया। यह प्रणाली, जो रोमन अंकों का एक विस्तार थी, ने गणितीय गणनाओं और अंकगणित को आसान बना दिया (डेवलिन, 2011)।

16वीं और 17वीं शताब्दी की वैज्ञानिक क्रांति के दौरान गणितीय विचारों का विस्तार और भी तेज हो गया। रेने डेसकार्टेस और आइजैक न्यूटन दो उल्लेखनीय गणितज्ञ थे जिन्होंने क्रांतिकारी योगदान दिया। ज्यामितीय रूपों

को गणितीय रूप से व्यक्त किया जा सकता है, जिसका श्रेय डेसकार्टेस द्वारा विश्लेषणात्मक ज्यामिति के निर्माण को जाता है, जिसने बीजगणितीय तकनीकों का उपयोग करके ज्यामितीय विचारों का विस्तार किया। बीजगणित और ज्यामिति के इस गहन विस्तार ने कैलकुलस (डेसकार्टेस, 1954) के लिए आधार का काम किया।

17वीं शताब्दी के उत्तरार्ध में गॉटफ्रीड विल्हेम लीबनिज और आइजैक न्यूटन द्वारा कैलकुलस को स्वतंत्र रूप से बनाया गया था। परिवर्तन की तात्कालिक दरों और वक्रों के नीचे के क्षेत्रों की धारणाएँ, जिनकी प्राचीन गणितज्ञों ने अपरिष्कृत संस्करणों में जाँच की थी, कैलकुलस द्वारा विस्तारित की गईं। सीमाओं, व्युत्पन्नों और समाकलनों के आगमन के साथ गणित और विज्ञान में गहरा परिवर्तन हुआ, जिसने गति, विकास और परिवर्तन में मुद्दों से निपटने के लिए एक सुसंगत रूपरेखा पेश की (क्लाइन, 1972)।

3. आधुनिक गणितीय सिद्धांत–

आधुनिक गणितीय सिद्धांत 19वीं और 20वीं शताब्दी में उभरे, जो सामान्यीकरण की प्रवृत्ति को आगे बढाते हैं। कार्ल फ्रेडरिक गॉस, निकोलाई लोबाचेवस्की और जानोस बोल्याई जैसे गणितज्ञों ने गैर–यूक्लिडियन ज्यामिति बनाई, जिसने समानांतर रेखाओं के विचार को आगे बढाया और यह स्पष्ट किया कि कई ज्यामितीय प्रणालियाँ थीं जिन्हें यूक्लिडियन ज्यामिति (ग्रीनबर्ग, 1993) के स्थान पर बनाया जा सकता था। इस परिवर्तन ने आइंस्टीन के सापेक्षता के सामान्य सिद्धांत के लिए आधार तैयार किया और अंतरिक्ष की हमारी समझ के लिए महत्वपूर्ण प्रभाव डाला।

क्षेत्र, वलय और समूह जैसी संरचनाओं का विचार सबसे पहले बीजगणित में दिखाई दिया। एवरिस्ट गैलोइस के समूह सिद्धांत ने समरूपता की अवधारणा का विस्तार किया और बहुपद समीकरणों और उनके समाधानों को समझने के लिए एक रूपरेखा पेश की। इन विचारों को वलय और क्षेत्र सिद्धांतों द्वारा विस्तारित किया गया, जिसने विविध बीजीय प्रणालियों से निपटने के लिए एक एकीकृत विधि प्रदान की (गैलियन, 2017)।

1800 के दशक के उत्तरार्ध में जॉर्ज कैंटर द्वारा सेट सिद्धांत की शुरूआत एक और महत्वपूर्ण विस्तार था। इसने सेट की विशेषताओं को परिभाषित और जांचा, जो वस्तुओं के समूह हैं, जिससे गणित को एक ठोस आधार मिला। अनंत और निरंतरता का विचार कैंटर के अनंत सेटों पर काम और कार्डिनैलिटी (डौबेन, 1990) की शुरूआत से पूरी तरह से बदल गया था। 20वीं सदी में कार्यात्मक विश्लेषण और अमूर्त बीजगणित के विकास ने सामान्यीकरण में महत्वपूर्ण प्रगति को चिह्नित किया। जबकि कार्यात्मक विश्लेषण ने क्वांटम भौतिकी और अन्य विज्ञानों के लिए महत्वपूर्ण निहितार्थों के साथ अनंत–आयामी स्थानों में कलन का विस्तार किया, अमूर्त बीजगणित ने बीजगणितीय और अंकगणितीय संरचनाओं को व्यापक बनाया (क्रेजगि, 1978)। गणितीय सिद्धांत और अनुप्रयोग के विकास में गणितीय सामान्यीकरणों द्वारा बहुत सहायता मिली है। सामान्यीकरणों ने यूक्लिडियन ज्यामिति और अंकगणितीय संक्रियाओं के शुरुआती उदाहरणों से लेकर समकालीन गणित के जटिल सिद्धांतों तक, अधिक समझ और रचनात्मकता के लिए आवश्यक उपकरणों और रूपरेखाओं की आपूर्ति की है। सामान्यीकरण की प्रक्रिया अभी भी वही है जो नई गणितीय अवधारणाओं के विकास और पहले से मौजूद जानकारी के एकीकरण को आगे बढ़ाती है क्योंकि गणित आगे बढना जारी रखता है।

10.12 गणितीय सामान्यीकरण के प्रमुख सिद्धांत

गणितीय सामान्यीकरण की अवधारणा केवल शिक्षाविदों तक ही सीमित नहीं है, बल्कि इसका उपयोग वास्तविक दुनिया की स्थितियों में भी किया जाता है। इंजीनियरिंग, विज्ञान और अर्थशास्त्र जैसे विभिन्न क्षेत्रों के लोग अपने संबंधित क्षेत्रों से जुडे समाधानों की भविष्यवाणी करने और उन्हें खोजने के लिए विभिन्न गणितीय सामान्यीकृत मॉडलों पर बहुत अधिक निर्भर करते हैं। उदाहरण के लिए, बीजगणित के सिद्धांत, जो चरों को शामिल करने के लिए अंकगणित के संचालन को सामान्यीकृत करते हैं, का उपयोग एल्गोरिदम डिजाइन करने और प्रौद्योगिकी और डेटा

विश्लेषण में जटिल समस्याओं को हल करने में किया जाता है। ऐतिहासिक संदर्भ में सामान्यीकरण की प्रक्रिया गणित की उन्नति के पीछे एक महत्वपूर्ण कारक रही है। उदाहरण के लिए ज्यामिति में आकार की अवधारणा को यूक्लिडियन ज्यामिति की आधार अवधारणा बनाने के लिए सामान्यीकृत किया गया है, जो गुणों के निर्यात में योगदान देता है जिसे विभिन्न ज्यामितीय संदर्भों में लागू किया जा सकता है। गणितीय सामान्यीकरण से जुडी विभिन्न चुनौतियाँ हैं। चूंकि गणितीय सामान्यीकरण को विभिन्न स्थितियों में लागू किया जाता है, इसलिए अवधारणा की जांच करना महत्वपूर्ण है, ताकि प्रवाह और गलत धारणाओं से बचा जा सके। गणित में सामान्यीकरण की अवधारणा गणितीय सोच की प्रक्रिया में आधारशिला के रूप में कार्य करती है और अमूर्त अवधारणाओं को व्यावहारिक दुनिया से जोडने वाले पुल के रूप में कार्य करती है। शिक्षा में, शिक्षक गणित और समस्या–समाधान की गहरी समझ विकसित करने के लिए सामान्यीकरण की अवधारणा का उपयोग कर सकते हैं। यह छात्रों के संज्ञानात्मक विकास में भी योगदान देता है। गणितीय सामान्यीकरण के सिद्धांत और विशेषताएं। गणितीय सामान्यीकरण एक बुनियादी प्रक्रिया है जो विशेष तथ्यों या उदाहरणों को लेती है और उन्हें व्यापक, सार्वभौमिक सत्य में विस्तारित करती है। यह एक महत्वपूर्ण प्रक्रिया है जो गणितीय समझ और उपयोग को आगे बढाती है, इस प्रकार गणितज्ञों के साथ–साथ छात्रों को व्यक्तिगत घटनाओं से सामान्यीकृत सिद्धांतों में बदलने की अनुमति देती है। गणितीय सामान्यीकरण के सिद्धांतों और विशेषताओं की समझ गणितीय सोच और समस्या–समाधान में इसकी भूमिका को समझाने में मदद करती है। गणितीय सामान्यीकरण के प्रमुख सिद्धांत हैं–

पैटर्न पहचान– गणित में विषय से संबंधित विभिन्न उदाहरणों या घटनाओं पर अलग–अलग अवलोकन किए जाते हैं। यह सामान्यीकरण का पहला सिद्धांत है जहां व्यक्ति पैटर्न की पहचान करने में शामिल होता है और समानताओं और दोहराई जाने वाली संरचनाओं की पहचान करने की कोशिश करता है। उदाहरण के लिए, 2,4,6,8,2,4,6,8,2,4,6,8 और 3,b]c]d123; a]b]c] done जैसे कई संख्या अनुक्रमों को देखते समय आप देख सकते हैं कि प्रत्येक अनुक्रम एक स्थिर राशि से बढता है। क्रमिक पदों के बीच एक निरंतर अंतर होता है।

अमूर्तता–जब कोई प्रासंगिक गुणों की पहचान करने और अवांछित विवरणों को हटाने के लिए अवधारणा या विचार को फल्टिर करता है तो इसे अमूर्तता के सिद्धांत के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। अमूर्तता के सिद्धांत का उपयोग विभिन्न सूत्रों को तैयार करने के लिए किया जा सकता है जो विभिन्न स्थितियों में सरल परिणाम प्रदान करेंगे उदाहरण के लिए, एक आयत का क्षेत्रफल लंबाई और चौडाई वाले आयत के विशिष्ट मामले से सूत्र आयत का क्षेत्रफल = लम्बाई×चौडाई तक सामान्यीकृत किया जा सकता है, जो सभी आयतों पर लागू होता है।

सामान्यीकरण औरविशिष्टता– गणित में, सामान्यीकरण में विशिष्टता और प्रयोज्यता के बीच संतुलन होना चाहिए। सामान्यीकरण का मुख्य उद्देश्य एक सार्वभौमिक कथन बनाना है जिसका उपयोग विशेष संदर्भ में किया जा सकता है। पाइथागोरस प्रमेय का उदाहरण लें जो सामान्यीकृत करता है कि एक समकोण त्रिभुज में, कर्ण का वर्ग अन्य दो भुजाओं के वर्गों के योग के बराबर होता है। यह सभी समकोण त्रिभुजों पर लागू होता है, लेकिन इसके विशिष्ट अनुप्रयोग बहुत दूर और विविध हैं।

सत्यापन और प्रमाण– गणितीय सामान्यीकरण को सत्यापित और मान्य करने की आवश्यकता थी। यह मुख्य रूप से निरंतर परीक्षण पर आधारित था ताकि यह सुनिश्चित किया जा सके कि ऐसे सिद्धांत सभी आवश्यक मान्यताओं के तहत मान्य हैं। उदाहरण के लिए, यह प्रदर्शित किया जाना चाहिए कि अंकगणितीय अनुक्रमों के लिए सामान्य सूत्र न केवल पहले वर्णित अनुक्रमों पर लागू होता है, बल्कि किसी भी अन्य अंकगणितीय अनुक्रम पर भी लागू होता है। यह दिखाने के लिए कि सामान्यीकरण सही हैं, हमें प्रमाणों की आवश्यकता है।

पुनरावृत्त परिशोधन– इसका मतलब है कि सामान्यीकरण एक सतत प्रक्रिया है जिसमें गणित के कई पुनरावृत्तियाँ शामिल हैं। इस मामले में, नए विचार या जटिल गणितीय संरचनाएँ सामने आती हैं, जिससे उदाहरण के लिए, जब

बीजीय संख्या सिद्धांत विकसित किया गया था, तो इन शुरुआती चरणों को परिष्कृत किया गया था ताकि शुरू में बहुपद समीकरणों के पूर्णांक समाधानों से सामान्यीकरण किया जा सके। गणितीय सामान्यीकरण की विशेषताएँ सार्वभौमिकतारू सामान्यीकरण की सार्वभौमिकता संपत्ति एक व्यापक विशेषता है। उदाहरण के लिए, अभाज्य संख्याओं का विचार जो शुरू में केवल एक और खुद से विभाज्य कुछ पूर्णांकों पर लागू होता था, उसे एक व्यापक श्रेणी में विस्तारित किया जाता है जो एक से बडे सभी पूर्णांकों के लिए मान्य है जिनका कोई अन्य विभाजक नहीं है।

प्रयोज्यता– सामान्यीकरण गणितीय अवधारणाओं को विभिन्न समस्याओं और क्षेत्रों में अधिक लागू करते हैं। सामान्यीकरण विस्तार के लिए पैटर्न बताते हैं और विभिन्न संदर्भों में उपयोग किए जाने वाले उपकरणों की ओर भी ले जाते हैं। फaक्शन अवधारणा जोड और गुणा को कम मूर्त क्षेत्रों में विशेष संचालन के रूप में सामान्यीकृत करती है, इसलिए कलन, बीजगणित आदि में उनके अनुप्रयोग को सुविधाजनक बनाती है।

10.13 गणित में सामान्यीकरण के प्रकार

गणित के विभिन्न प्रकार के सामान्यीकरण को विशेष अवलोकनों या पैटर्न के अनुसार वर्गीकृत किया जा सकता है जिन्हें व्यापक स्थितियों तक बढाया गया है। गणितीय सामान्यीकरण के कई प्रमुख उदाहरण यहां दिए गए हैं–

बीजीय सामान्यीकरण –

यह विशिष्ट अंकगणितीय या बीजीय संचालन लेने और उन्हें अधिक अमूर्त रूपों में सामान्यीकृत करने की प्रक्रिया है, यह व्यापक बीजीय संरचनाओं और सिद्धांतों को बनाने में आधारभूत है।

उदाहरणों में शामिल हैं– बीजीय अभिव्यक्तियों और समीकरणों के परिणामस्वरूप चर को शामिल करने के लिए अंकगणितीय संचालन को सामान्यीकृत करनाय और रैखिक समीकरणों को बहुपद वाले तक विस्तारित करना।

ज्यामितीय सामान्यीकरण–

इसका मतलब है कि विभिन्न ज्यामितीय गुणों या आकृतियों को अधिक सामान्य रूपों में सामान्यीकृत किया जाता है। इसमें आकृति का विस्तार करने जैसी चीजें शामिल हैं, उदाहरण के लिए, त्रिभुज के साथ–साथ बहुभुजों के माध्यम से एक आयत के क्षेत्र सूत्र से समांतर चतुर्भुज के क्षेत्रों तक, या समतल शब्द समस्याओं पर किसी भी दो बिंदुओं के बीच दूरी सूत्र जैसी ज्यामितीय धारणाओं के साथ निर्देशांक का उपयोग करना।

संभाव्यतावादी और सांख्यिकीय सामान्यीकरण–

इसमें विशिष्ट संभाव्यता और सांख्यिकी अवधारणाओं को व्यापक सिद्धांतों और अनुप्रयोगों तक विस्तारित करना शामिल है। इसमें सामान्य वितरण के लिए द्विपद वितरण जैसे संभाव्यता वितरण को सामान्य बनाना और जनसंख्या मापदंडों का अनुमान लगाने के लिए नमूना सांख्यिकी का विस्तार करना, नमूना डेटा के आधार पर जनसंख्या के बारे में व्यापक निष्कर्ष निकालने के लिए परिकल्पना परीक्षण लागू करना शामिल है।

सेट–सैद्धांतिक सामान्यीकरण–

इसमें सेट सिद्धांत से व्यापक संदर्भों तक अवधारणाओं का विस्तार करना शामिल है। इसमें परिमित से अनंत सेट, विभिन्न प्रकार की अनंतता और कार्डिनैलिटी के साथ–साथ सेट के बीच कार्यों और संबंधों को सामान्य बनाना शामिल है, जैसे कि बाइनरी संबंधों को एन–एरी संबंधों तक विस्तारित करना और तुल्यता और क्रम संबंधों जैसी संरचनाओं पर विचार करना।

टोपोलॉजिकल सामान्यीकरण ज्यामिति और कलन से टोपोलॉजी तक अवधारणाओं का विस्तार करता है, निरंतर विकृतियों के तहत संरक्षित गुणों का अध्ययन करता है। इसमें ज्यामितीय स्थानों को स्थलीय स्थानों में सामान्यीकृत करना और होमोमोर्फिक स्थानों पर विचार करना शामिल है, जहाँ दो स्थान समतुल्य होते हैं यदि उन्हें लगातार एक दूसरे में विकृत किया जा सकता है।

संख्या सैद्धांतिक सामान्यीकरण में विशिष्ट संख्याओं या संख्या प्रणालियों के गुणों को व्यापक वर्गों तक विस्तारित करना शामिल है। इसमें पूर्णांकों को अधिक सामान्य संख्या प्रणालियों जैसे तर्कसंगत, वास्तविक और जटिल संख्याओं में सामान्यीकृत करना और अंकगणितीय संक्रियाओं को मॉड्यूलर प्रणालियों तक विस्तारित करना शामिल है, जिससे सर्वांगसमता और मॉड्यूलर समीकरण जैसी अवधारणाएँ सामने आती हैं।

गणितीय सामान्यीकरण एक शक्तिशाली उपकरण है जो गणितज्ञों और छात्रों को विशिष्ट अवलोकनों और सिद्धांतों को व्यापक संदर्भों तक विस्तारित करने, नए संबंधों और अनुप्रयोगों को उजागर करने की अनुमति देता है। सामान्यीकरणों को बीजगणितीय, ज्यामितीय, विश्लेषणात्मक, संभाव्यता, सेट–सैद्धांतिक, स्थलीय और संख्या–सैद्धांतिक प्रकारों में वर्गीकृत करके, हम उन विविध तरीकों को बेहतर ढंग से समझ सकते हैं जिनसे गणितीय अवधारणाएँ विकसित होती हैं और अध्ययन के विभिन्न क्षेत्रों में जुडती हैं

10.14 गणित के प्रमुख क्षेत्रों में सामान्यीकरण

गणित की कई शाखाओं में, जिनमें से प्रत्येक के अपने अलग–अलग विचार और उपयोग हैं, गणितीय सामान्यीकरण सर्वव्यापी हैं। इसमें उन प्रमुख डोमेन का सारांश दिया गया है जिनमें सामान्यीकरण आवश्यक हैं।

1. अंकगणित और बीजगणित– बीजगणित और अंकगणित में सामान्यीकरण मौलिक अवधारणाओं और संचालनों को अधिक जटिल संरचनाओं तक विस्तारित करते हैं। **उदाहरणों** में रिंग, फील्ड और समूह जैसी बीजीय संरचनाएँ, साथ ही संख्या प्रणालियों का सामान्यीकरण (जैसे पूर्णांक से जटिल संख्याओं तक जाना) शामिल हैं (आर्टिन, 2011)।

2. ज्यामिति और टोपोलॉजी– ज्यामिति और टोपोलॉजी में, सामान्यीकरण बुनियादी ज्यामितीय विचारों को उच्च–आयामी, अधिक अमूर्त स्थानों तक विस्तारित करने को संदर्भित करता है। ऐसे सामान्यीकरणों के उदाहरण जो अंतरिक्ष और सातत्य की प्रकृति की नई समझ प्रदान करते हैं, उनमें गैर–यूक्लिडियन ज्यामितियां और स्थलाकृतिक स्थान शामिल हैं (मुन्क्रेस, 2000)।

3. कैलकुलस और विश्लेषण– मापन सिद्धांत की खोज और कई चरों के कार्यों के लिए विभेदन और एकीकरण विधियों के विस्तार ने कैलकुलस और विश्लेषण के डोमेन को बहुत व्यापक बना दिया है। अधिक जटिल स्थितियों में कार्यों और उनकी विशेषताओं पर कठोर विचार इन सामान्यीकरणों (रुडिन, 1976) द्वारा संभव बनाया गया है।

4. संख्या सिद्धांत– संख्या सिद्धांत में, सामान्यीकरण में पूर्णांकों की विशेषताओं को जटिल, वास्तविक और तर्कसंगत संख्याओं सहित अन्य संख्या प्रणालियों पर लागू करना शामिल है। बीजीय और विश्लेषणात्मक संख्या सिद्धांतों का उद्भव, जो इन विस्तारित प्रणालियों के भीतर विशेषताओं और कनेक्शनों में गहराई से उतरते हैं, इन सामान्यीकरणों (लैंग, 1994) का परिणाम है।

5. गणितीय तर्क– गणितीय तर्क में सामान्यीकरण तार्किक अवधारणाओं के अनुप्रयोग को अधिक सामान्य सेटिंग्स में संदर्भित करता है, जिसमें सेट सिद्धांत, मॉडल सिद्धांत और कम्प्यूटेबिलिटी सिद्धांत शामिल हैं। ये सामान्यीकरण औपचारिक प्रणालियों की क्षमताओं और गणितीय तर्क की सीमाओं को समझने के लिए एक आधार प्रदान करते हैं (एंडर्सन, 2001)।

वैचारिक सीमाओं के विस्तार, जटिल अवधारणाओं के सरलीकरण और सुसंगत सिद्धांतों के विकास के माध्यम से, गणितीय सामान्यीकरण क्षेत्र की उन्नति के लिए आवश्यक हैं। गणितज्ञ अंतर्निहित संरचनाओं को उजागर कर सकते हैं, अधिक शक्तिशाली उपकरण और प्रक्रियाएँ प्रदान कर सकते हैं, और सामान्यीकरण के माध्यम से बहु–विषयक अध्ययन को बढावा दे सकते हैं। संख्या सिद्धांत, अंकगणित और बीजगणित, ज्यामिति और टोपोलॉजी, कलन और विश्लेषण, और गणितीय तर्क के क्षेत्र सभी इस बात के उदाहरण हैं कि कैसे सामान्यीकरण का गणितीय ज्ञान और अनुसंधान पर महत्वपूर्ण प्रभाव पडता है।

10.15 गणित में सामान्यीकरण के अनुप्रयोग और शैक्षिक निहितार्थ

1. गणितीय सिद्धांतों का एकीकरण– अक्सर ''गणित का गणित'' कहा जाने वाला श्रेणी सिद्धांत कई गणितीय विचारों को एक साथ लाने के लिए आवश्यक है। श्रेणी सिद्धांत, जिसे पहली बार 1945 में ईलेनबर्ग और मैक लेन द्वारा प्रस्तुत किया गया था, एक ऐसा ढाँचा है जो संरचनाओं की तुलना में गणितीय संरचनाओं के बीच संबंधों पर अधिक जोर देता है। श्रेणियाँ आकारिकी, या तीरों और वस्तुओं से बनी होती हैं, जो बहुत ही अमूर्त तरीके से गणितीय विचारों के मूल का प्रतिनिधित्व करती हैं। गणित की कई शाखाओं के बीच जटिल संबंधों को उजागर करने की श्रेणी सिद्धांत की क्षमता इसकी मुख्य उपलब्धियों में से एक है। गणितज्ञ समस्याओं को एक से दूसरे में बदलने के लिए फंक्टर और प्राकृतिक परिवर्तन जैसे विचारों का उपयोग करके डोमेन के बीच ज्ञान और तकनीकों को अधिक आसानी से स्थानांतरित कर सकते हैं। जिस तरह से श्रेणी सिद्धांत ने तर्क, बीजगणित और टोपोलॉजी को एकजुट किया है, वह इस एकीकृत शक्ति का प्रमाण है। उदाहरण के लिए, श्रेणी सिद्धांत में एक प्रमुख प्रमेय, योनेडा लेम्मा, गणितीय वस्तुओं की विशेषताओं पर प्रकाश डालता है, यह विश्लेषण करके कि वे एक दूसरे से कैसे संबंधित हैं (मैक लेन, 1998)।

इसके अलावा, श्रेणी सिद्धांत का होमोटोपी सिद्धांत और बीजगणितीय ज्यामिति जैसे समकालीन गणितीय विषयों पर प्रभाव पड़ता है। ज्यामितीय वस्तुओं को समझने के लिए श्रेणी लेंस का उपयोग करके बीजगणितीय ज्यामिति में योजनाओं को अधिक व्यापक और लचीले ढंग से देखा जा सकता है (हार्टशोर्न, 1977)। इसी तरह, मॉडल श्रेणियाँ और होमोटोपी सीमाएँ जैसी श्रेणीबद्ध संरचनाएँ होमोटोपी सिद्धांत में उपयोगी हैं, जो निरंतर विरूपण तक टोपोलॉजिकल स्पेस की जाँच करती हैं, और जटिल टोपोलॉजिकल प्रक्रियाओं को समझने के लिए एक ठोस आधार प्रदान करती हैं (गोएर्स और जार्डाइन, 1999)।

2. व्यावहारिक अनुप्रयोग–

i) इंजीनियरिंग और भौतिकी –

इंजीनियरिंग और भौतिकी को गणित के व्यापक अनुप्रयोगों से बहुत लाभ होता है, विशेष रूप से अंतर समीकरणों, रैखिक बीजगणित और कलन के क्षेत्रों में। गणितीय सामान्यीकरण इंजीनियरिंग में जटिल प्रणालियों का प्रतिनिधित्व और विश्लेषण करना संभव बनाता है। उदाहरण के लिए, अंतर समीकरण और रैखिक बीजगणित नियंत्रण सिद्धांत के प्रमुख घटक हैं, जो स्थिर और प्रभावी सिस्टम बनाने के लिए महत्वपूर्ण है। इंजीनियर स्टेट–स्पेस अभ्यावेदन जैसे सामान्यीकरण का उपयोग करके अधिक आसानी से परिष्कृत नियंत्रण तकनीक बना सकते हैं, जो उन्हें गतिशील सिस्टम को व्यापक रूप से मॉडल करने में सक्षम बनाता है (ओगाटा, 2010)। विज्ञान पर गणितीय अमूर्तता का प्रभाव सापेक्षता सिद्धांत और क्वांटम यांत्रिकी के भौतिकी में शास्त्रीय यांत्रिकी के अनुप्रयोगों द्वारा देखा जाता है। क्वांटम अवस्थाओं के संभाव्य चरित्र का वर्णन क्वांटम यांत्रिकी द्वारा किया जाता है, जो कणों और तरंगों के शास्त्रीय ज्ञान को सामान्यीकृत करता है। यह ऑपरेटर सिद्धांत और हिल्बर्ट स्पेस (शंकर, 2011) जैसी परिष्कृत गणितीय अवधारणाओं का उपयोग करके ऐसा करता है। इसी तरह, अंतर ज्यामिति और टेंसर कैलकुलस का उपयोग

सामान्य सापेक्षता, आइंस्टीन के विशेष सापेक्षता के सामान्यीकरण में स्पेसटाइम की वक्रता और पदार्थ और ऊर्जा से इसके संबंध को समझाने के लिए किया जाता है (मिसनर, थॉर्न, और व्हीलर, 1973)। ये सामान्यीकरण प्रौद्योगिकी में प्रगति के साथ–साथ भौतिक सिद्धांतों की गहरी समझ में योगदान करते हैं। उदाहरण के लिए, समकालीन इलेक्ट्रॉनिक्स के मूलभूत घटक अर्धचालक और ट्रांजिस्टर का निर्माण क्वांटम यांत्रिकी के विचारों पर आधारित है। खगोल विज्ञान और ब्रह्मांड विज्ञान में, सामान्य सापेक्षता ऐसे अनुप्रयोग प्रदान करती है जो ब्लैक होल, गुरुत्वाकर्षण तरंगों और विस्तारित ब्रह्मांड के बारे में हमारे ज्ञान को बेहतर बनाते हैं।

ii) कंप्यूटर विज्ञान और क्रिप्टोग्राफी–

गणित में सामान्यीकरण ने क्रिप्टोग्राफी और कंप्यूटर विज्ञान पर बडा प्रभाव डाला है। एल्गोरिदम की प्रभावशीलता और बाधाओं को समझने के लिए एक आधार एल्गोरिदम सिद्धांत और कंप्यूटर विज्ञान में कम्प्यूटेशनल जटिलता में विस्तार द्वारा प्रदान किया जाता है। उदाहरण के लिए, कंप्यूटर मुद्दों और उनकी अंतर्निहित कठिनाई की एक व्यवस्थित जांच जटिलता सिद्धांत के व्यक्तिगत एल्गोरिदम को एल्गोरिदम की कक्षाओं में विस्तारित करके संभव हो जाती है (सिपसर, 2013)। कंप्यूटर विज्ञान में, श्रेणी सिद्धांत बहुत उपयोगी है, विशेष रूप से कार्यात्मक प्रोग्रामिंग और प्रोग्रामिंग भाषा सिद्धांत के क्षेत्रों में। हास्केल जैसी कार्यात्मक प्रोग्रामिंग भाषाओं में, मोनाड जैसे विचार – जिन्हें पहली बार श्रेणी सिद्धांत के भीतर खोजा गया था – का उपयोग स्थिति और दुष्प्रभावों को संभालने के लिए किया जाता है, जिसके परिणामस्वरूप क्लीनर और अधिक रखरखाव योग्य कोड होता है (वाडलर, 1992)।

क्रिप्टोग्राफिक एल्गोरिदम की सुरक्षा बीजगणितीय संरचनाओं और संख्या सिद्धांत पर आधारित है। एलिप्टिक कर्व क्रिप्टोग्राफी (ECC), जो पारंपरिक तकनीकों की तुलना में कम कुंजी लंबाई के साथ उच्च सुरक्षा प्रदान करती है, एलिप्टिक कर्व्स (कोब्लिट्ज, 1987) जैसी अधिक जटिल संरचनाओं के लिए बुनियादी अंकगणित को सामान्यीकृत करने के परिणामस्वरूप विकसित की गई थी। ECCका उपयोग अक्सर डिजिटल संचार को सुरक्षित करने के लिए किया जाता है, जैसे कि SSL/TLS प्रोटोकॉल के माध्यम से इंटरनेट सुरक्षा।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

7. शास्त्रीय ज्यामिति के निर्माण का श्रेय किसे दिया जाता है?

....

....

8. विश्लेषणात्मक ज्यामिति के निर्माण का श्रेय किसे दिया जाता है?

....

....

9. गणित के क्षेत्र में अनंत और निरंतरता के विचार पर आधारित अनंत सेटों के सिद्धांत पर काम की शुरूआत सर्वप्रथम किसने किया था?

....

....

10. कई गणितीय विचारों को एक साथ लाने के लिए ''गणित का गणित'' कहे जाने वाला सिद्धांत का नाम बताइए।

....

....

11. गणित में श्रेणी सिद्धांत को कब और किसने पहली बार प्रस्तुत किया?

....

....

12. गणितीय सामान्यीकरण को परिभाषित कीजिए।

....

....

10.16 गणित में समस्या समाधान और प्रमाण

गणित के बारे में एक आम गलतफहमी यह है कि यह अपरिवर्तनीय सत्य और समाधानों पर आधारित एक अनुशासन है। समस्या समाधान और प्रमाण के परस्पर जुडे तरीके इस क्षेत्र के लिए आवश्यक हैं क्योंकि वे गणितीय अनुसंधान और विकास के लिए आधारशिला के रूप में काम करते हैं। चुनौतीपूर्ण समस्याओं के उत्तर ढूँढना समस्या समाधान कहलाता है, और गणितज्ञ अपने निष्कर्षों की सटीकता की पुष्टि करने के लिए प्रमाण का उपयोग करते हैं। ये क्षमताएँ गणितीय सिद्धांत के विकास के लिए महत्वपूर्ण हैं, लेकिन इनका अधिक सामान्य शैक्षिक और वास्तविक दुनिया के उपयोगों के लिए भी महत्वपूर्ण प्रभाव है। समस्या समाधान और प्रमाण के तरीके गणित के मूल में हैं, जिसे कभी–कभी ब्रह्मांड की भाषा के रूप में संदर्भित किया जाता है। गणितीय प्रगति और जांच की नींव इन दो पहलुओं से बनी है। गणित में, समस्या समाधान विभिन्न तरीकों और दृष्टिकोणों का उपयोग करके गणितीय कठिनाइयों को पहचानने, समझने और संबोधित करने की प्रक्रिया है। इसके विपरीत, गणितीय दावों और विचारों की सटीकता की पुष्टि करने की औपचारिक प्रक्रिया को प्रमाण के रूप में जाना जाता है। जब संयुक्त किया जाता है, तो ये क्षमताएँ गणित में किसी के ज्ञान का विस्तार करने और अनुशासन की बेहतर समझ विकसित करने के लिए महत्वपूर्ण होती हैं।

10.17 गणितीय समस्या समाधान और प्रमाण की ऐतिहासिक पृष्ठभूमि

गणितीय समस्या समाधान और प्रमाण का एक समृद्ध और विविध इतिहास है, जिसकी विशेषता महत्वपूर्ण मोड और प्रभावशाली व्यक्तियों के योगदान हैं। गणितीय प्रमाण और समस्या समाधान की उत्पत्ति प्राचीन संस्कृतियों में हुई है। उदाहरण के लिए, बेबीलोनियों और मिस्रियों ने व्यापार, कृषि और खगोल विज्ञान से संबंधित वास्तविक दुनिया की समस्याओं से निपटने के लिए समस्याओं को हल करने के शुरुआती तरीके बनाए (वैन डेर वेर्डन, 1961)। लेकिन गणितीय प्रमाण का औपचारिककरण वास्तव में प्राचीन ग्रीस में आकार लेना शुरू हुआ।

यूनानी गणितज्ञ जिन्होंने गणितीय प्रमाण के क्षेत्र में महत्वपूर्ण योगदान दिया, उनमें यूक्लिड, पाइथागोरस और आर्किमिडीज शामिल हैं। लगभग 300 ईसा पूर्व, यूक्लिड ने ''एलिमेंट्स'' लिखा, एक मौलिक पुस्तक जिसमें उन्होंने ज्यामितीय विचारों और उनके प्रमाणों को व्यवस्थित रूप से स्थापित किया। हीथ (1956) के अनुसार, इस अध्ययन ने स्वयंसिद्ध विधि विकसित की, जो स्वयंसिद्ध सत्यों के आधार पर गणितीय दावों को साबित करने का एक व्यवस्थित तरीका है।

यूनानी गणितीय ज्ञान को मध्य युग में इस्लामी गणितज्ञों द्वारा बनाए रखा और विकसित किया गया था। अल–ख्वारिज्मी और अल–किंदी जैसे शिक्षाविदों द्वारा बीजगणित और संख्या सिद्धांत को महत्वपूर्ण रूप से आगे बढाया गया, जिन्होंने समस्या–समाधान रणनीतियों के विकास में भी योगदान दिया (बर्गग्रेन, 2003)। पूरे यूरोपीय पुनर्जागरण के दौरान गणित में नई रुचि पैदा हुई, जिसका श्रेय फिबोनाची जैसे गणितज्ञों के योगदान को जाता है जिन्होंने समस्याओं को हल करने के लिए नई तकनीकें विकसित कीं, खासकर बीजगणित और अंकगणित में (सिग्लर, 2002)।

समकालीन युग में गणित का क्षेत्र समस्या समाधान और प्रमाण दोनों में तेजी से आगे बढा है। 17वीं शताब्दी में न्यूटन और लीबनिज द्वारा कैलकुलस के निर्माण ने विभिन्न भौतिकी और इंजीनियरिंग मुद्दों को संभालने के लिए मजबूत उपकरण प्रदान करके गणितीय समस्या समाधान को बदल दिया (बॉयर, 1959)। कैंटर, फ्रेज और रसेल जैसे गणितज्ञों ने 19वीं और 20वीं शताब्दी में गणितीय तर्क और सेट सिद्धांत को औपचारिक रूप दिया, जिसका कठोर प्रमाण पद्धतियों के निर्माण पर प्रभाव पडा (क्लेन, 1952)।

10.18 गणितीय समस्या समाधान का अर्थ

गणित में, समस्या समाधान वह प्रक्रिया है जिसके द्वारा लोग या संगठन गणितीय मुद्दों को पहचानते हैं, उन्हें संबोधित करने के तरीकों के साथ आते हैं, और फिर समाधान तक पहुँचने के लिए इन तरीकों का उपयोग करते हैं। सही प्रतिक्रिया का पता लगाने के अलावा, इस प्रक्रिया में अंतर्निहित विचारों और मुद्दे के पीछे तर्क को समझना शामिल है। समस्या समाधान, जिसके लिए रचनात्मकता, रणनीतिक सोच और गणितीय सिद्धांतों की गहन समझ की आवश्यकता होती है, स्कोनफेल्ड (1985) के अनुसार गणितीय सोच का एक महत्वपूर्ण घटक है।

10.19 गणित प्रमाण का अर्थ

पहले से स्थापित स्वयंसिद्धों, परिभाषाओं और प्रमेयों पर आधारित एक तार्किक तर्क जो किसी विशेष कथन की वैधता स्थापित करता है, उसे गणित में प्रमाण कहा जाता है। गणितीय ज्ञान की स्थिरता और निर्भरता सुनिश्चित करने के साथ–साथ नए निष्कर्षों को मान्य करने के लिए, प्रमाण आवश्यक हैं। हन्ना (2000) ने जोर देकर कहा कि साबित करने का कार्य इस क्षेत्र के लिए आवश्यक है क्योंकि यह परिकल्पनाओं को मान्यता प्राप्त गणितीय तथ्यों में परिवर्तित करता है।

10.20 गणितीय प्रमाण के उद्देश्य

एक तार्किक तर्क जो गणितीय कथन की सत्यता को उचित संदेह से परे साबित करता है, उसे गणितीय प्रमाण कहा जाता है। क्योंकि वे गणितीय विचारों और निष्कर्षों की पुष्टि और मूल्यांकन के लिए एक रूपरेखा प्रदान करते हैं, इसलिए प्रमाण गणित के लिए आवश्यक हैं।

प्रमाण को तार्किक चरणों के अनुक्रम का उपयोग करके बनाया जाना चाहिए, जिनमें से प्रत्येक को पहले से परिभाषाओं, स्वयंसिद्धों या बताए गए प्रमेयों द्वारा समर्थित किया जाना चाहिए। यह व्यापक (हर परिदृश्य को संबोधित करते हुए) और ठोस (सही ढंग से तर्क करना) होना चाहिए।

10.21 प्रमाण के प्रकार

1. **ठोस प्रमाण**– प्रत्यक्ष प्रमाण परिभाषाओं, स्वयंसिद्धों और पहले से स्थापित प्रमेयों का उपयोग करके किसी प्रस्ताव की सत्यता को आसानी से समझने योग्य तरीके से प्रदर्शित करता है। आम तौर पर, यह एक रैखिक तरीके से मान्यताओं से निष्कर्ष तक आगे बढ़ता है (वेलेमैन, 2006)।

2. **अप्रत्यक्ष प्रमाण**– अप्रत्यक्ष प्रमाण, जिसे अक्सर विरोधाभास द्वारा प्रमाण के रूप में जाना जाता है, इस धारणा से शुरू होता है कि साबित किया जाने वाला प्रस्ताव गलत है। यह अनुमान तार्किक तर्क के माध्यम से विरोधाभास उत्पन्न करता है, जो मूल कथन को वैध साबित करता है (वेलेमैन, 2006)।

3. **प्रेरण प्रमाण**– प्रेरण प्रमाण की एक विधि है जिसका उपयोग सभी प्राकृतिक संख्याओं के बारे में दावों का समर्थन करने के लिए किया जाता है। इसमें दो चरण होते हैंरू प्रेरक चरण, जो दर्शाता है कि यदि कथन

किसी दिए गए मान के लिए मान्य है, तो यह अगले मान के लिए भी मान्य है, और आधार मामला, जो प्रारंभिक मान के लिए कथन को साबित करता है (रोसेन, 2019)।

4. **रचनात्मक और गैर–रचनात्मक प्रमाण–** रचनात्मक प्रमाण एक उदाहरण बनाने का तरीका प्रदान करता है जो प्रमाण के तहत प्रस्ताव का समर्थन करता है। दूसरी ओर, एक गैर–रचनात्मक प्रमाण यह दर्शाता है कि ऐसा उदाहरण किसी विशेष उदाहरण की पेशकश किए बिना मौजूद है (वेलेमैन, 2006)।

10.22 प्रमाण के घटक

1. **परिभाषाएँ–** परिभाषाएँ प्रमाण में प्रयुक्त शब्दों और विचारों को उनके सटीक अर्थ प्रदान करती हैं। रोसेन (2019) के अनुसार, ये गणितीय सोच के मूल तत्व हैं।
2. **अभिधारणाएँ और स्वयंसिद्ध–** अभिधारणाएँ, जिन्हें स्वयंसिद्ध भी कहा जाता है, वे बुनियादी मान्यताएँ हैं जिन्हें बिना सबूत के स्वीकार किया जाता है। वे प्रमेयों की व्युत्पत्ति के लिए आधार के रूप में काम करते हैं (रोसेन, 2019)।
3. **लेम्मा और प्रमेय–** परिभाषाओं, स्वयंसिद्धों और पहले के प्रमेयों के आधार पर दिखाए गए महत्वपूर्ण दावों को प्रमेय कहा जाता है। लेम्मा अंतरिम निष्कर्ष हैं जो अधिक जटिल प्रमेयों के लिए प्रमाण के रूप में काम करते हैं। (वेलेमैन, 2006)।
4. **तर्कपूर्ण बचाव और तर्क–** प्रमाणों में तार्किक तर्कों द्वारा सख्त अनुमान नियमों का पालन किया जाना चाहिए ताकि यह सुनिश्चित हो सके कि प्रत्येक चरण तार्किक रूप से उसके पहले वाले चरण का अनुसरण करता है। औचित्य में अक्सर स्वयंसिद्ध, परिभाषाएँ और पिछले प्रमेयों का हवाला दिया जाता है (रोसेन, 2019)।

10.23 प्रमाण और समस्या समाधान का महत्व

गणित में समस्या समाधान और प्रमाण के महत्व को बढा–चढाकर बताना असंभव है। गणित के दायरे को बढाने और गणितीय विचारों की गहन समझ हासिल करने के लिए ये क्षमताएँ आवश्यक हैं। समस्याओं को हल करने से दृढता, आलोचनात्मक सोच और विभिन्न सेटिंग्स में गणित के ज्ञान के अनुप्रयोग को बढावा मिलता है। इसके विपरीत, प्रमाण गणितीय निष्कर्षों की सटीकता और विश्वसनीयता की गारंटी देता है, जिससे गलतियों और गलतफहमियों का प्रसार रुक जाता है।

एक बडे परिप्रेक्ष्य में, ये क्षमताएँ अकादमिक और व्यावहारिक दोनों संदर्भों में उपयोग के लिए अमूल्य हैं। गणितीय समस्या समाधान और प्रमाण इंजीनियरों, वैज्ञानिकों, अर्थशास्त्रियों और कई अन्य व्यवसायों के काम के लिए आवश्यक हैं, जिन्हें जटिल समस्याओं को हल करने, अच्छी तरह से सूचित निष्कर्ष पर पहुँचने और अपने डोमेन में नवाचार करने की आवश्यकता होती है। इसलिए, इन क्षमताओं को विकसित करना गणित शिक्षण और अनुसंधान में एक प्राथमिक लक्ष्य है।

10.24 गणितीय समस्याओं को हल करने की तकनीकें

गणितज्ञ जॉर्ज पोलिया द्वारा प्रस्तुत चार–चरणीय प्रक्रिया, जो समस्या–समाधान पर अपने काम के लिए प्रसिद्ध हैं, गणितीय अभ्यास और निर्देश के लिए अभी भी आवश्यक है।

समस्या को पहचानें– इस पहले चरण में समस्या कथन को समझना, यह पता लगाना कि कौन सी मात्राएँ ज्ञात हैं और कौन सी अज्ञात हैं, और स्थितियाँ स्थापित करना शामिल है (पोलिया, 1957)।

एक योजना बनाएँ– इस बिंदु पर समस्या को संबोधित करने के लिए समाधानकर्ता एक कार्य योजना बनाता है। इसमें समस्या को छोटे, अधिक प्रबंधनीय घटकों में विभाजित करना, उचित सूत्र चुनना या समस्या की कल्पना करना शामिल हो सकता है (पोलिया, 1957)।

योजना को क्रियान्वित करें– इस चरण में, समाधानकर्ता विकसित की गई रणनीति को लागू करता है, कोई भी आवश्यक गणना करता है और गणितीय अवधारणाओं का उपयोग करता है (पोलिया, 1957)।

समीक्षाधविस्तार– अंतिम चरण समाधान का मूल्यांकन करना, यह पुष्टि करना है कि यह सटीक है, और संभावित समस्या विस्तार या सामान्यीकरण के बारे में सोचना है। (पोल्या, 1957)।

विधियाँ और अनुमान

पोल्या की विधि के अलावा, कई विधियाँ और अनुमान हैं जो समस्या–समाधान को सुविधाजनक बनाते हैं–

पीछे की ओर काम करना– इस विधि में इच्छित परिणाम से शुरू करके और पीछे की ओर काम करके आवश्यक चरणों को निर्धारित करना शामिल है (पोल्या, 1957)।

पैटर्न की पहचान करना– स्थिति समाधानकर्ता पैटर्न या प्रवृत्तियों की खोज करते हैं जो उन्हें स्थिति को बेहतर ढंग से समझने या सामान्य समाधान प्रस्तुत करने में मदद कर सकते हैं (पोल्या, 1957)।

सूचित धारणा बनाना– इसे अनुमान लगाना भी कहा जाता है, इस प्रक्रिया में एक सहज समाधान परिकल्पना तैयार करना और उसके बाद इसकी व्यवहार्यता का मूल्यांकन करना शामिल है (पोल्या, 1957)।

समस्या को तोडना– एक कठिन समस्या को अधिक आसानी से हल किया जा सकता है यदि इसे छोटे, अधिक प्रबंधनीय भागों में विभाजित किया जाए (पोल्या, 1957)।

10.25 सारांश

संक्षेप में, मात्रात्मक लक्ष्यों का निर्माण एक सफल गणित शिक्षा कार्यक्रम का एक अनिवार्य घटक है। ये लक्ष्य शिक्षण और सीखने की दिशा और स्पष्टता देते हैं, छात्र जुडाव, निर्देशात्मक रणनीतियों और मूल्यांकन प्रक्रिया में सुधार करते हैं। मापनीय उद्देश्य शिक्षकों को केंद्रित और जानबूझकर निर्देश बनाने, निर्देशात्मक सामग्रियों का समन्वय करने और छात्रों को क्या पता होना चाहिए, इसकी रूपरेखा बनाकर सटीक प्रतिक्रिया देने में सहायता करते हैं। हालाँकि, शिक्षकों को गहन समझ और विभेदित उद्देश्यों को प्रोत्साहित करने में कठिनाइयों के बारे में भी पता होना चाहिए। शिक्षा के क्षेत्र में निरंतर परिवर्तन होते रहने के कारण, मापनीय उद्देश्यों के अनुप्रयोग में सुधार लाने तथा विद्यार्थियों के सीखने पर उनके प्रभाव को अनुकूलतम बनाने के लिए निरंतर अनुसंधान और व्यावसायिक विकास अत्यंत महत्वपूर्ण है।

संक्षेप में, गणितीय सामान्यीकरण गणित की उन्नति के लिए आवश्यक हैं क्योंकि वे सिद्धांतों को एकीकृत करते हैं, जटिल विचारों को स्पष्ट करते हैं, और अलग–अलग गणितीय धारणाओं की गहरी समझ को बढावा देते हैं। इसके अंतःविषय अनुप्रयोगों के कारण, उनका प्रभाव गणित से परे है और कई अन्य क्षेत्रों को प्रभावित करता है। सामान्यीकरण गणित में नवाचार के मामले में सबसे आगे हैं और गणितीय अवधारणाओं के विकास के साथ–साथ उन्नति को बढावा देना और मानवीय समझ की सीमाओं को व्यापक बनाना जारी रखेंगे। गणितीय सामान्यीकरण का कक्षा में और छात्र सीखने के लिए महत्वपूर्ण परिणाम हैं। यह समझ की गहराई को बढाता है, समस्या–समाधान कौशल विकसित करता है, आलोचनात्मक विचार को बढावा देता है, और यह सुनिश्चित करता है कि पाठ्यक्रम को यथासंभव प्रभावी बनाया जाए। शिक्षण रणनीतियों और मूल्यांकन में सामान्यीकरण को शामिल करने से छात्रों को

गहरी, अधिक जुडी हुई समझ बनाने में मदद मिल सकती हैय उन्हें उच्च–स्तरीय गणित पाठ्यक्रमों में सफल होने में सक्षम बनाता है, और वास्तविक दुनिया के अनुप्रयोगों के लिए गणितीय सोच का उपयोग करता है। सामान्यीकरण छात्रों को विभिन्न स्थितियों में गणितीय सिद्धांतों की व्याख्या, उपयोग और विस्तार करने में सक्षम बनाता है।

गणित के विकास और कई क्षेत्रों में इसके अनुप्रयोगों के लिए प्रमाण और समस्या समाधान आवश्यक हैं। ये क्षमताएँ जटिल विचारों की जाँच और उच्च गणित में नए गणितीय ज्ञान के निर्माण की सुविधा प्रदान करती हैं। गणितीय समस्या समाधान और प्रमाण वास्तविक दुनिया में इंजीनियरिंग समाधान, आर्थिक मॉडल और तकनीकी प्रगति के आधार के रूप में काम करते हैं। इन क्षमताओं की उपयोगिता व्यावहारिक मुद्दों के प्रभावी संचालन में दिखाई देती है, जो गणित की ताकत और अनुकूलनशीलता को प्रदर्शित करती है।

गणितीय तर्क और प्रमाण–खोज आवश्यक कौशल हैं। पोलिया की चार–चरणीय प्रक्रिया और अन्य अनुमान गणितीय मुद्दों को हल करने के लिए संगठित तरीके प्रदान करते हैं, और प्रमाण गणितीय दावों की सटीकता और विश्वसनीयता की गारंटी देते हैं। गणित में अध्ययन करने या शोध करने वाले किसी भी व्यक्ति को इन विचारों को समझना होगा।

10.26 अभ्यास के प्रश्न

1. गणित शिक्षण में मापन योग्य उद्देश्यों का महत्व की विवेचना कीजिए।
2. गणित शिक्षण के लिए मापनीय लक्ष्य को आप कैसे विकसित करेंगे? विश्लेषण कीजिए।
3. आप मापनीय उद्देश्यों का कक्षा में क्रियान्वयन कैसे करेंगे? वर्णन कीजिए।
5. गणितीय सामान्यीकरण के प्रमुख सिद्धांतों की विवेचना कीजिए।
6. गणित में सामान्यीकरण के अनुप्रयोग और शैक्षिक निहितार्थ की व्याख्या कीजिए।
7. गणित में समस्या समाधान और प्रमाण का अर्थ और महत्व स्पष्ट कीजिए।
8. गणित में प्रमाण के घटकों का वर्णन कीजिए।
9. गणितीय समस्याओं को हल करने की प्रमुख तकनीकों की विवेचना कीजिए।

10.27 चर्चा के बिंदु

1. गणित शिक्षण में मापनीय उद्देश्यों से आप क्या समझते हैं? चर्चा कीजिए।
2. गणित शिक्षण में सामान्यीकरण से क्या तात्पर्य हैं? चर्चा कीजिए।
3. गणित में समस्या समाधान और प्रमाण से संबंधित अवधारणाओं से आप क्या समझते हैं? चर्चा कीजिए।

10.28 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. शिक्षा में मापनीय उद्देश्य वे लक्ष्य हैं जिन्हें छात्रों से किसी पाठ, इकाई या पाठ्यक्रम के अंत में पूरा करने की अपेक्षा की जाती है।

2. मापनीय उद्देश्य की तीन विशेषताएं विशिष्टता, स्पष्टता और प्राप्ति हैं।

3. मापनीय उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए प्रमुख शिक्षण रणनीतियां प्रत्यक्ष निर्देश, सहयोगी शिक्षण, समस्या–आधारित शिक्षा, उद्देश्यों के साथ मूल्यांकन का मिलान, शिक्षण को निर्देशित करने के लिए परीक्षा परिणामों का उपयोग करना व फीडबैक और हस्तक्षेप हैं।

4. सामान्यीकरण गणित के अंकगणित और बीजगणित, ज्यामिति और टोपोलॉजी, कैलकुलस और विश्लेषण, संख्या सिद्धांत, गणितीय तर्क आदि क्षेत्रों में किया जाता है।

5. गणित में सामान्यीकरण के प्रकार के नाम बीजीय सामान्यीकरण, ज्यामितीय सामान्यीकरण, संभाव्यतावादी और सांख्यिकीय सामान्यीकरण तथा सेट–सैद्धांतिक सामान्यीकरण हैं।

6. गणितीय सामान्यीकरण के प्रमुख सिद्धांतों के नाम पैटर्न पहचान, अमूर्तता, सत्यापन और प्रमाण, पुनरावृत्त परिशोधन और प्रयोज्यता हैं।

7. शास्त्रीय ज्यामिति के निर्माण का श्रेय यूक्लिड को दिया जाता है।

8. विश्लेषणात्मक ज्यामिति के निर्माण का श्रेय रेने डेसकार्टेस को दिया जाता है।

9. गणित के क्षेत्र में अनंत और निरंतरता का विचार पर आधारित अनंत सेटों के सिद्धांत पर काम की शुरूआत सर्वप्रथम जॉर्ज कैंटर ने किया था।

10. कई गणितीय विचारों को एक साथ लाने के लिए ''गणित का गणित'' कहा जाने वाला सिद्धांत का नाम श्रेणी सिद्धांत है।

11. गणित में श्रेणी सिद्धांत को 1945 में ईलेनबर्ग और मैक लेन द्वारा पहली बार प्रस्तुत किया।

12. गणितीय सामान्यीकरण को गणितीय अवधारणाओं और प्रमेयों की पहुँच और अनुप्रयोग को बडी सेटिंग्स तक विस्तारित करने के रूप में परिभाषित कर सकते हैं।

10.29 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. Anderson, L. W., & Krathwohl, D. R. (Eds.). (2001). *A taxonomy for learning, teaching, and assessing: A revision of Bloom's taxonomy of educational objectives*. Longman.
2. Bloom, B. S., Engelhart, M. D., Furst, E. J., Hill, W. H., & Krathwohl, D. R. (1956). *Taxonomy of educational objectives: The classification of educational goals. Handbook I: Cognitive domain*. Longmans, Green and Co.
3. Boyer, C. B. (1991). *A history of mathematics* (2nd ed.). John Wiley & Sons.
4. Courant, R., & Robbins, H. (1996). *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods*. Oxford University Press.
5. Devlin, K. (2011). *The man of numbers: Fibonacci's arithmetic revolution*. Walker & Company.

6. Greenberg, M. J. (1993). *Euclidean and non-Euclidean geometries: Development and history* (3rd ed.). W. H. Freeman.
7. Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 5-23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465
8. Heath, T. L. (1956). *The thirteen books of Euclid's elements* (2nd ed.). Dover Publications.
9. Katz, V. J. (2009). *A history of mathematics: An introduction* (3rd ed.). Addison-Wesley.
10. Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Oxford University Press.
11. Lang, S. (1994). *Algebraic Number Theory* (2nd ed.). Springer.
12. Mager, R. F. (1997). *Preparing instructional objectives*. Center for Effective Performance.
13. Marzano, R. J. (2009). *Designing & teaching learning goals & objectives*. Marzano Research Laboratory.
14. Polya, G. (1957). *How to Solve It: A New Aspect of Mathematical Method* (2nd ed.). Princeton University Press.
15. Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Academic Press.

इकाई– 11 : उत्पाद और प्रक्रिया परिणामों के आकलन के लिए परीक्षण पदों की रचना,नैदानिक परीक्षण एवं उपचारात्मक शिक्षण

इकाई की संरचना

11.1प्रस्तावना

11.2 इकाई के उद्‌देश्य

11.3 परीक्षण पद का अर्थ

11.4 परीक्षण पद के विभिन्न प्रकार

11.4.1 निबंधात्मक पद और उसके प्रकार

11.4.2 निबंधात्मक पद की विशेषताएं

11.4.3 वस्तुनिष्ठ पद और उसके प्रकार

11.4.4 वस्तुनिष्ठ पद की विशेषताएं

11.5 उत्पाद और प्रक्रिया परिणामों के ऑकलन के लिए परीक्षण पदों का निर्माण

11.6 नैदानिक परीक्षण

11.6.1 नैदानिक परीक्षण के उद्देश्य

11.6.2 नैदानिक परीक्षण की विशेषताएं

11.6.3 नैदानिक परीक्षण के सोपान

11.6.4 नैदानिक परीक्षण के प्रकार

11.7 उपचारात्मक शिक्षण

11.7.1 उपचारात्मक शिक्षण के महत्वपूर्ण तत्व

11.7.2 उपचारात्मक शिक्षण के लाभ

11.8 सारांश

11.9 अभ्यास प्रश्न

11.10 चर्चा के बिंदु

11.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

11.12 कुछ उपयोगी पुस्तकें/संदर्भ

11.1 प्रस्तावना

प्रस्तुत इकाई के अंतर्गत परीक्षण पद के निर्माण, निदानात्मक परीक्षण और उपचारात्मक शिक्षण के बारे में विस्तारपूर्वक वर्णन किया गया है। परीक्षण पदों का निर्माण एक बहुत महत्वपूर्ण विषय है। यह एक अच्छी प्रक्रिया है जिसमें परीक्षणों के लिए तैयार किया गया पद बनाया जाता है। इसमें पद के हर हिस्से का विस्तृत अध्ययन होता है ताकि विद्यार्थियों को सही ज्ञान और समझ मिल सके परीक्षण पदों का निर्माण विद्यार्थियों के योग्यता और क्षमता को आकलन करने के लिए किया जाता है और उन्हें परीक्षाओं में सफलता प्राप्त करने में मदद करता है। इस प्रक्रिया में अधिगमकर्ताओं के विचारों और सुझावों का महत्वपूर्ण स्थान होता है यह पदों में प्रश्न समझने और याद करने की क्षमता को विकसित करते हैं। इस तरह से परीक्षण पदों का निर्माण शिक्षा प्रणाली में एक आवश्यक कदम है। परीक्षण पद के विभिन्न प्रकार और उनकी विशेषताओं का वर्णन भी किया गया है।

निदानात्मक परीक्षण द्वारा विद्यार्थियों की विषयगत कठिनाइयों का पता लगाया जाता है जिससे छात्रों के अधिगम स्तर को बढ़ाने में मदद मिलती है। निदानात्मक परीक्षण एक विशेष प्रकार का परीक्षण है जिसका मुख्य उद्देश्य छात्रों की कठिनाइयों और उनकी सीखने की समस्याओं की पहचान करना है। यह परीक्षण आमतौर पर शैक्षिक समस्याओं की गहराई से समझने के लिए उपयोग में लाया जाता है जिससे उचित समाधान और सुधारात्मक कदम उठाए जा सके। निदानात्मक परीक्षण के उद्देश्य, विशेषताओं, प्रकार और इसके निर्माण के प्रमुख सोपान के बारे में इस इकाई में बताया गया है।

उपचारात्मक शिक्षण विशेषकर एक प्रकार की शिक्षण अधिगम प्रक्रिया है जिसमें विद्यार्थियों की कमियों को दूर करने के लिए विभिन्न प्रकार की शैक्षणिक प्रविधियां के माध्यम से उनकी सीखने की समस्याओं को हल करने के लिए बनाई गई एक रूपरेखा होती है। यह एक ऐसी प्रविधि है जिसका मुख्य उद्देश्य विद्यार्थियों की मानसिक योग्यता को उन्नत करना और शैक्षणिक दक्षता को सुधारना होता है। उपचारात्मक शिक्षण निदानात्मक परीक्षण के उपरांत ही संचालित की जाती है।

11.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. परीक्षण पद की संकल्पना को समझ सकेंगे।
2. परीक्षण पद के विभिन्न प्रकारों को बता सकेंगे।
3. परीक्षण पदों की विभिन्न विशेषताओं को बता सकेंगे।
4. उत्पाद और प्रक्रिया परिणामों के आकलन के लिए परीक्षण पदों का निर्माण कर सकेंगे।
5. नैदानिक परीक्षण के बारे में बता सकेंगे।
6. उपचारात्मक शिक्षण के बारे में बता सकेंगे।

11.3 परीक्षण पद का अर्थ

पदों का ऐसा संकलन जो एक विशेष प्रक्रिया द्वारा तर्कसंगत व व्यवस्थित ढंग से चयनित किया जाता है, परीक्षण कहलाता है। परीक्षण पद विशेष कर परीक्षण के अंतर्गत ऐसे कथन होते हैं जिनका निर्माण किसी खास उद्देश्य को –ष्टिगत किया जाता है जिससे विद्यार्थियों की विभिन्न विशेषताओं व गुणों को मापा जाता है। दूसरे शब्दों में, परीक्षण पद ऐसे कथन होते हैं जिनकी सहायता से विद्यार्थियों की विभिन्न प्रकार की विशेषताओं योग्यताओं, क्षमताओं तथा गुणों का मापन किया जाता है। परीक्षण पद द्वारा विशेष कर छात्रों के ज्ञानात्मक व्यवहार के मापन पर बल दिया जाता है। जैसा कि हम जानते हैं विभिन्न प्रकार के परीक्षण पदों का उपयोग कर हम विद्यार्थियों की

शैक्षिक उन्नति का आकलन करते रहते हैं। यह परीक्षण पद मुख्यतः छात्रों की कक्षा में उन्नति के संदर्भ में तथा उनके शैक्षिक उपलब्धि को ज्ञात करने हेतु प्रयोग में ले जाते हैं।

11.4 परीक्षण पद के विभिन्न प्रकार

उत्पाद और प्रक्रिया परिणाम के आकलन की विश्वसनीयता और वस्तुनिष्ठता के आधार पर परीक्षण पदों को मुख्यतः दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है–

अ) निबंधात्मक पद

ब) वस्तुनिष्ठ पद

11.4.1 निबंधात्मक पद और उसके प्रकार

लिखित परीक्षाएं लेने हेतु निबंधात्मक पदों का प्रयोग मुख्यतः किया जाता है। निबंधात्मक पदों को सर्वप्रथम 2000 ईसा पूर्व चीन में लिखित परीक्षा हेतु प्रयोग में लाया जाता था। सामान्यतः शैक्षिक उपलब्धि के मापन हेतु निबंधात्मक पदों का प्रयोग किया जाता है। इसके द्वारा विद्यार्थियों की आलोचनात्मक चिंतन, सृजनशीलता, तार्किक विश्लेषण व संश्लेषण क्षमता, मूल्यांकन क्षमता, अभिव्यक्ति क्षमता आदि विभिन्न प्रकार की योग्यताओं का मापन किया जाता है। यद्यपि निबंधात्मक पदों का निर्माण अत्यंत सरल और शीघ्रता से किया जाना संभव है बावजूद इसके निबंधात्मक पदों द्वारा विद्यार्थियों की योग्यता और गुणों के मापन की विश्वसनीयता और मानक हमेशा संदेहास्पद ही रहती है।

शिक्षण उद्देश्यों की प्राप्ति एवं वांछित योग्यता मापन की प्रकृति के आधार पर निबंधात्मक पद विभिन्न प्रकार के होते हैं जिनका विवरण निम्नलिखित है –

1. आलोचनात्मक पद–

इस प्रकार के पदों का निर्माण तब किया जाता है जब किसी विचार, तथ्य, प्रक्रिया, उत्पाद, योजना, मुद्दा तथा पक्ष की आलोचना करनी होती है। जैसे– ''गणित एक नीरस विषय है।'' कथन की आलोचना कीजिए।

2. व्याख्यात्मक पद –

इसके द्वारा किसी प्रक्रिया निर्माण, संबंध स्थापना व सिद्धांत प्रतिपादन की तार्किक व्याख्या विद्यार्थियों द्वारा अपेक्षित होती है। जैसे– त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180° होता है। क्यों? व्याख्या कीजिए।

3. उदाहरणार्थ पद–

इस प्रकार के पदों के निर्माण का मुख्य उद्देश्य यह होता है कि विद्यार्थी विभिन्न प्रकार के उदाहरणों व –दृष्टांतों की सहायता से दिए गए। पूछे गए सवालों का जवाब दे सकें। जैसे– वर्गमूल कैसे ज्ञात किया जाता है? उदाहरण देकर समझाइयें।

4. वर्णनात्मक पद–

वर्णनात्मक पद के माध्यम से विद्यार्थियों से यह अपेक्षा की जाती है कि किसी घटना प्रक्रिया वस्त्र नियम परिभाषा सिद्धांत सूत्र आदि के बारे में विस्तार पूर्वक वर्णन कर सकें। इनका निर्माण अत्यंत सरल होता है। जैसे–रामानुजन के कार्यों का वर्णन कीजिए।

5. तुलनात्मक पद–

जब दो विभिन्न विचारों वस्तुओं नियमों परिभाषाओं तथ्यों आदम समानता असमानता एवं गुण दोष के आधार पर तुलना करने का प्रयोजन होता है, तब इस प्रकार के पदों का निर्माण किया जाता है। जैसे– बीजगणित एवं रेखागणित की प्रमुख विशेषताओं की तुलना कीजिए।

6. विश्लेषणात्मक पद–

जब किसी तथ्य, यंत्र, प्रक्रिया, पुस्तक, विचार, सिद्धांत आदि के विभिन्न पक्षों का विश्लेषण और उनके आपसी घटकों के संबंध के बारे में जानकारी इकट्ठा करनी होती है, तब इस प्रकार के पदों का निर्माण उपयुक्त माना जाता है। जैसे– त्रिभुज कितने प्रकार के होते हैं? विश्लेषण कीजिए।

7. विवेचनात्मक पद–

इस प्रकार के पदों के अंतर्गत विद्यार्थी से यह अपेक्षा की जाती है कि दी गई किसी समस्या या स्थित के पक्ष और विपक्ष में तार्किक विचार व्यक्त करते हुए विद्यार्थी एक निर्णायक निष्कर्ष को प्रस्तुत करे। जैसे– प्रारम्भिक गणित का अध्ययन सभी के लिए आवश्यक होता है। इसके पक्ष और विपक्ष में विचार व्यक्त कीजिए।

11.4.2 निबंधात्मक पद की विशेषताएं

निबंधात्मक पद की प्रमुख विशेषताएं इस प्रकार हैं –

1. निबंधात्मक पद द्वारा विद्यार्थियों की सृजनात्मक क्षमता तार्किक विश्लेषण आलोचनात्मक चिंतन मूल्यांकन क्षमता एवं अभिव्यक्ति क्षमता का मापन किया जा सकता है।
2. इसके द्वारा विद्यार्थियों की शैक्षिक योग्यता का सर्वोत्तम ढंग से मापन किया जा सकता है।
3. निदानात्मक परीक्षण के निर्माण में इस प्रकार के पदों का उपयोग कम किया जाता है।
4. निबंधात्मक पद कम विश्वसनीय तथा कम वैध माने जाते हैं।
5. संपूर्ण पाठ्यवस्तु के प्रतिनिधित्व इसके द्वारा करना कठिन होता है।
6. इन पदों के द्वारा विद्यार्थियों की उच्च मानसिक योग्यताओं तथा व्यक्तित्व का मूल्यांकन आसानी से किया जा सकता है।
7. इस प्रकार के पदों का निर्माण अल्पव्ययी तथा इनके मापन की वस्तुनिष्ठ कम होती है।
8. इनके इस्तेमाल से लेखन शैली मजबूत होती है।
9. इस प्रकार के पदों के प्रत्युत्तर की मापन में हेलो प्रभाव तथा कैरी ओवर प्रभाव की संभावना अत्यधिक होती है।

हेलो प्रभाव से तात्पर्य किसी सकारात्मक विशेषता य नकारात्मक विशेषता के आधार मापनकर्ता भविष्य में मापन के दौरान सकारात्मक या नकारात्मक दृष्टिकोण अपनाकर मूल्यांकन करता है।

कैरी ओवर प्रभाव से तात्पर्य मूल्यांकनकर्ता द्वारा शुरूआत के प्रश्नों के उत्तर के आधार बाद के प्रश्नों के उत्तर का मूल्यांकन से होता है। इसके अन्तर्गत यदि शुरूआत के उत्तर अच्छे हो तो बाद के उत्तरों का मूल्यांकन अच्छा होता है और यदि शुरूआत के उत्तर अच्छे नहीं दिये हो तो बाद के उत्तरों का मूल्यांकन भी कम द्वारा किया जाता है।

11.4.3 वस्तुनिष्ठ पद और उसके प्रकार

ऐसा माना जाता है कि 20वीं शताब्दी के आरंभ में वस्तुनिष्ठ पदों का प्रयोग होना शुरू हुआ। वस्तुतः वस्तुनिष्ठ पदों का निर्माण कठिन होता है परंतु मूल्यांकन की –दृष्ट से ये अधिक विश्वसनीय और वैध होते हैं। वस्तुनिष्ठ पद ऐसे पद होते हैं जिनका एक निश्चित व सही उत्तर होता है तथा इस वांछित उत्तर की अपेक्षा विद्यार्थी

द्वारा की जाती है। मूल्यांकन में विषयनिष्ठता से बचने के लिए कभी–कभी वस्तुनिष्ठ पदों को वरीयता दिया जाना जरूरी हो जाता है।

विशिष्ट शिक्षण उद्देश्यों के आकलन हेतु पूछे गए पदों के उत्तर की उपलब्धता (चयन एवं स्मरण) के आधार पर वस्तुनिष्ठ पदों का वर्गीकरण दो भागों में किया जा सकता है जिसका विवरण निम्नवत है–

अ) चयन पद

ब) आपूर्ति पद

अब विद्यार्थीगण उक्त वर्णित दोनों वस्तुनिष्ठ प्रकार के पदों के बारे में अध्ययन करेंगे। चयन पद के अंतर्गत छात्रों को दिए गए उत्तरों में से सही उत्तर का चयन करना होता है। चयन पद मुख्यतः चार प्रकार के होते हैं जो निम्न है–

1. **सत्यासत्य पद–** दिए गए पद की सत्यता और असत्यता की जांच की जाती है। उदाहरणार्थ–

i) 22 दिसम्बर को राष्ट्रीय गणित दिवस मनाते हैं – सत्य/असत्य

ii) काल फ्रेडरिक गॉस को गणित का राजकुमार कहा जाता है। – सत्य/असत्य

2. **बहुविकल्प पद–** इस प्रकार के पद के अंतर्गत दिए गए उत्तरों में से एक उत्तर सही होता है और शेष उत्तर गलत होते हैं। उदाहरणार्थ–

i) चतुर्भुज के चारों कोणों का योग होता है–

a) 180° **b)** 360° **c)** 270° **d)** 90°

3. **वर्गीकरण पदः–**

एक ऐसा पद जिसमें दिए गए शब्द समूह में से एक शब्द असंगत होता है उसे असंगत शब्द को विद्यार्थी चयनित करते हैं। उदाहरणार्थ –

i) त्रिभुज, चतुर्भुज, वर्ग, वृत्त।

4. **मिलान पद–**

इस प्रकार के पद को दो स्तंभों में विभिन्न शब्दों द्वारा लिखा जाता है तथा दोनों स्तंभों के विभिन्न शब्दों को आपस में मिलान करना होता है। उदाहरणार्थ–

i) **प्रथम स्तंभ**	**द्वितीय स्तंभ**
केंद्रीय प्रवृत्ति की माप	मध्यांक
विचलन की माप	धन मीटर
आयतन की माप	प्रसार
क्षेत्रफल की माप	वर्ग मीटर

आपूर्ति पद के अंतर्गत छात्रों को सही उत्तर का स्मरण द्वारा करना होता है। विद्यार्थी अपने ज्ञान व विवेक के आधार पर सही उत्तर को बताने का प्रयास करते हैं। आपूर्ति पद मुख्यतः दो प्रकार के होते हैं जो निम्न है–

1. **सरल प्रत्यास्मरण पद–** इस प्रकार के पद विद्यार्थियों से संक्षिप्त प्रश्न पूछे जाते हैं जिसका उत्तर केवल एक शब्द, एक अंक, नाम, आदि के रूप में दिया जाता है। उदाहरणार्थ–

   i) त्रिभुज के तीनों कोणों का योग कितना होता है?

2. **रिक्त स्थान पूर्ति पद–** इस प्रकार के पद अपूर्ण होते हैं जिनको किसी शब्द, नाम, अंक, या वाक्यांश पूर्ण किया जाता है। उदाहरणार्थ–

i) 3 और 4 का गुणनफल .... होता है।

11.4.4 वस्तुनिष्ठ पद की विशेषताएं

विद्यार्थियों की योग्यताओं के मूल्यांकन की विषयनिष्ठता को कम करने हेतु आधुनिक समय में वस्तुनिष्ठ पदों के प्रयोग का प्रचलन अत्यधिक मात्रा में होने लगा है। वस्तुनिष्ठ पदों की विशेषताएं निम्नलिखित हैं–

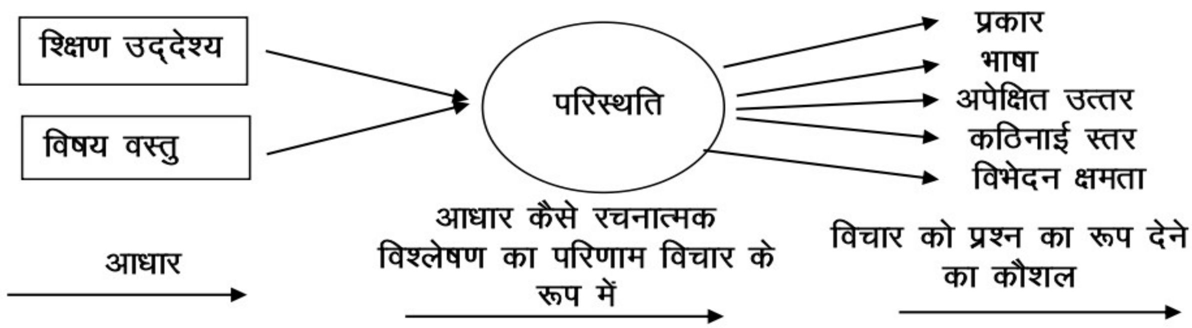
1. ये पद अधिक विश्वसनीय और अधिक वैध होते हैं।
2. इनके इस्तेमाल से विद्यार्थियों में रटने की प्रवृत्ति कम होती है।
3. इनके इस्तेमाल से विद्यार्थियों की उच्च मानसिक योग्यताओं का मापन संभव नहीं होता है तथा नकल की संभावना बढ़जाती है।
4. इनका निर्माण श्रमसाध्य, कठिन और अत्यधिक समय लेने वाला होता है।
5. विद्यार्थियों के व्यक्तित्व का मापन संभव नहीं होता है।
6. इनके अत्यधिक इस्तेमाल से विद्यार्थियों की लेखन शैली कमजोर हो जाती है।
7. इस प्रकार के पदों को प्रोत्साहन देने से संपूर्ण पाठ्यवस्तु का उचित प्रतिनिधित्व हो जाता है।

11.5 उत्पाद और प्रक्रिया परिणामों के ऑकलन के लिए परीक्षण पदों का निर्माण

विभिन्न प्रकार के गणितीय संक्रियाओं संकल्पनाओं, पाठ्य सामग्रियों एवं पाठ्य सामग्री निर्माण प्रक्रियाओं को समझना शिक्षण अधिगम प्रक्रिया का एक आवश्यक अंग है। शैक्षिक उद्देश्यों की पूर्व की जांच के लिए आकलन आवश्यक है। उसके लिए मूल्यांकनकर्ता संरचनात्मक तथा योगात्मक मूल्यांकन के द्वारा गणितीय उत्पादों तथा गणितीय प्रक्रियाओं के परिणाम का पता लगता है। गणितीय उत्पादों के अंतर्गत शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में प्रयुक्त शिक्षण विधि, प्रवेश विधि, पाठ्यक्रम, पाठ्य–पुस्तकें आदि को रखा जा सकता है जिसको योगात्माक आकलन द्वारा स्वीकार या अस्वीकार कर विद्यार्थियों में गणित के प्रति लगाव उत्पन्न किया जा सकता है। साथ ही साथ गणित के क्षेत्र में किसी भी प्रकार के गणितीय कार्यक्रम, योजना, प्रक्रिया के निर्माणाधीन अवस्था में सुधार की –दृष्टि से किए गए संरचनात्मक आकलन हेतु विभिन्न प्रकार के पदों का निर्माण आवश्यक होता है।

उत्पाद और प्रक्रिया परिणामों के आकलन के लिए परीक्षण पदों का निर्माण आवश्यकतानुसार विशिष्टिकरण सारणी के आधार पर किया जाना उपयुक्त माना जाता है। निबंधात्मक पदों का निर्माण अपेक्षाकृत वस्तुनिष्ठ पदों से आसान, अल्पव्ययी और कम समय में होता है। निबंधात्मक पद उच्च कक्षा के विद्यार्थियों की उच्च मानसिक क्षमताओं के आकलन हेतु प्रयुक्त किया जाता है। परीक्षण पदों के लिए उपयुक्त निर्देश तैयार किया जाता है और उसमें प्रयुक्त

भाषा संकेत विद्यार्थियों के योग्यता स्टार के अनुरूप बनाए जाते हैं। वस्तुनिष्ठ प्रकार के पद का निर्माण के लिए प्रसिद्ध शिक्षाशास्त्री आर. एच. दवे ने शिक्षण उद्देश्य, विषयवस्तु, परिस्थिति पर आधारित एक महत्वपूर्ण मॉडल प्रस्तुत किया। इस मॉडल में शिक्षण उद्देश्य तथा विषयवस्तु को वस्तुनिष्ठ पदों के निर्माण के आधार पर के रूप में लिया गया है, जिसका विवरण निम्नवत है –



स्त्रोतः आधुनिक मापन और मूल्यांकन द्वारा लिखित डॉ. एस. पी. गुप्ता, पृष्ठ संख्या– 172

परीक्षण पदों का निर्माण करते समय निम्नलिखित बातों का ध्यान रखा जाना चाहिए जिससे उपयुक्त और सार्थक परीक्षण पद बनाए जा सके–

1. दोहरे अर्थ वाले वाक्यों का प्रयोग नहीं करना चाहिए। साथ ही साथ अत्यधिक जटिल वाक्य और क्लिष्ट शब्दावली के प्रयोग से बचना चाहिए।
2. दोहरे नकारात्मक वाक्य के प्रयोग से बचना चाहिए।
3. पाठ्य–पुस्तकों में प्रयुक्त वाक्य को यथावत परीक्षण पदों के रूप में प्रयोग नहीं करना चाहिए।
4. विशिष्ट उद्देश्य केंद्रित परीक्षण पद का निर्माण अच्छा माना जाता है।
5. परीक्षण हेतु बहुविकल्प पद के निर्माण में प्रयुक्त उत्तरों को निश्चित क्रम देने से बचना चाहिए।
6. परीक्षण पदों का सही उत्तर देने के लिए अनावश्यक प्रकार के संकेतों के प्रयोग से सदैव बचना चाहिए।
7. परीक्षण पदों की रचना करते समय उनके आपसी संबंधों को उजागर नहीं होने देना चाहिए।
8. परीक्षण पदों कठिनाई स्तर व विभेदन क्षमता का भी ध्यान रखना चाहिए।
9. परीक्षण पदों के दिए गए विकल्पों में ''उपरोक्त सभी'' अथवा ''उपरोक्त से कोई नहीं'' जैसे विकल्प को सम्मिलित करने से बचना चाहिए।
10. पूछे गए परीक्षण पदों को पाठ्यवस्तु की सीमा के अंतर्गत होना चाहिए तथा संपूर्ण पाठ्यवस्तु का प्रतिनिधित्व करने वाला होना चाहिए।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. परीक्षण पद का अर्थ संक्षेप में लिखिए।

....

....

2. परीक्षण पद कितने प्रकार के होते हैं?

....

....

3. निबंधात्मक पद से आप क्या समझते हैं? संक्षेप में लिखिए।

....

....

4. वस्तुनिष्ठ पद कितने प्रकार के होते हैं?

....

....

11.6 नैदानिक परीक्षण

नैदानिक परीक्षण को निदानात्मक परीक्षण भी कहा जाता है। गणित शिक्षण में इस परीक्षण के द्वारा विद्यार्थियों की गणितीय समस्याओं की पहचान करना तथा उन शैक्षिक उद्देश्यों का पता लगाना होता है जिसे प्राप्त करने में विद्यार्थी कठिनाई महसूस करते हैं। निदानात्मक परीक्षण परिमाणात्मक न होकर के गुणात्मक होता है। इस परीक्षण का मूल उद्देश्य यह नहीं है कि किसी छात्र ने किसी खास विषय में कितना अंक प्राप्त किया है बावजूद इसके इस परीक्षण द्वारा यह ज्ञात किया जाता है कि कोई विद्यार्थी किसी खास उद्देश्य अथवा विषयवस्तु को समझने में क्यों असफल रहा है? निदानात्मक परीक्षण द्वारा इस प्रश्न का उत्तर प्राप्त किया जाता है कि कोई विद्यार्थी किसी विषयवस्तु या प्रकरण को क्यों नहीं जानता तथा विद्यार्थी किसी विषयवस्तु किन किन पक्षों को नहीं जानता है।

कुछ प्रमुख विद्वानों ने नैदानिक परीक्षण को परिभाषित किया है जो निम्न अनुसार है–

1. **गुड के अनुसार–** निदान का अर्थ है अधिगम संबंधित समस्याओं एवं कर्मियों के स्वरूप का निर्धारण।
2. **गुड और ब्राफी के अनुसार** – यह शिक्षण अधिगम में छात्रों की समस्याओं के विशिष्ट स्वरूप का निदान करने एवं उनके उत्तरों की सावधानी से जांच करने की प्रक्रिया है।
3. **मरसेल के अनुसार** – जिस शिक्षण में छात्रों की विशिष्ट समस्याओं का निदान करने हेतु विशेष प्रयास किए जाते हैं, उसे निदानात्मक परीक्षण कहा जाता है।

11.6.1 नैदानिक परीक्षण के उद्देश्य

गणित शिक्षण में नैदानिक परीक्षण के उपयोग के उद्देश्य निम्न अनुसार हैं–

1. गणित विषय के पाठ्यक्रम में प्रयुक्त शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में सुधार लाना।
2. नैदानिक परीक्षण के उपयोग द्वारा गणित विषय की पाठ्य सामग्री में अपेक्षित सुधार लाना।
3. गणित विषयवस्तु के किसी खास समस्या की पहचान करना तथा विद्यार्थियों की कमियों को पता लगाकर उपचारात्मक शिक्षण का सुझाव देना।

4. विद्यार्थी द्वारा किसी गणितीय संप्रत्यय को समझने में क्यों, कितना, क्या, किस स्तर आदि जैसे प्रश्नों के उत्तर का पता लगाना।

11.6.2 नैदानिक परीक्षण की विशेषताएं

गणित शिक्षण में शैक्षिक उद्देश्यों की पूर्ति करने में बाधक तत्वों की पहचान करने में नैदानिक परीक्षण का प्रयोग करना आवश्यक होता है नैदानिक परीक्षण की विशेषताएं निम्नवत है–

1. नैदानिक परीक्षण पाठ्यक्रम के अनुर अप विशिष्ट उद्देश्यों की पूर्ति के लिए बनाए जाते हैं
2. नैदानिक परीक्षण का निर्माण मानकीकृत एवं अमानकीकृत दोनों रूप में किया जाता है।
3. नैदानिक परीक्षण की प्रकृति गुणात्मक तथा विश्लेषणात्मक होती है।
4. नैदानिक परीक्षण द्वारा विद्यार्थियों की मानसिक प्रक्रिया के स्वरूप को समझने में मदद मिलती है।
5. नैदानिक परीक्षण द्वारा विद्यार्थियों की शिक्षक की योग्यता का मापन नहीं किया जाता वरन् विद्यार्थियों की विषयवस्तु संबंधी कमजोर बिंदु की पहचान की जाती है जिसके आधार पर उचित शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया का आयोजन किया जाता है।
6. नैदानिक परीक्षण में विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त/अर्जित परिणाम महत्वपूर्ण नहीं होते हैं। बावजूद इसके द्वारा यह पता लगाया जाता है कि विद्यार्थी किसी गणितीय समस्या का किस स्तर तक समाधान करने में सक्षम है?
7. नैदानिक परीक्षण के उपयोग हेतु समय सीमा का निर्धारण पर बल नहीं दिया जाता है एवं इसके उपयोग से विद्यार्थियों की प्रगति का ऑकलन वस्तुनिष्ठ रूप से किया जाता है।

11.6.3 नैदानिक परीक्षण के सोपान

जैसा की यह स्पष्ट है की नैदानिक परीक्षण द्वारा विद्यार्थियों की समस्याओं की पहचान की जाती है तथा यह पता लगाया जाता है की विद्यार्थी द्वारा अनुभूत गणित पाठ्यक्रम से संबंधित विशिष्ट कठिनाइयां कौन कौन सी हैं। निदानात्मक परीक्षण का उपयोग करते समय निम्नलिखित सोपानों का अनुसरण किया जाता है–

1. **विद्यार्थियों का पता लगाना–** प्रथम सोपान के अंतर्गत निदानात्मक परीक्षण द्वारा यह पता लगाया जाता है कि कौन से विद्यार्थी ऐसे हैं जिन्हें निदान की आवश्यकता है?

2. **समस्याओं की अवस्थिति का पता लगाना–** निदानात्मक परीक्षण द्वारा यह पता लगाया जाता है कि छात्रों को पाठ्यक्रम में कहां–कहां पर समस्याएं अनुभूति होती हैं?

3. **समस्या के कारण का पता लगाना–** निदानात्मक परीक्षण द्वारा यह पता लगाया जाता है कि विद्यार्थियों को गणितीय संप्रत्यय क्यों नहीं समझ में आ रही हैं और उसके क्या कारण हैं। विद्यार्थियों से संबंधित समस्याओं का कारण शारीरिक, मानसिक, व्यक्तिगत, सामाजिक वातावरण तथा अनुदेशनात्मक भी हो सकते हैं।

4. **उपचार और सुझाव देना–** समस्या का कारण मालूम होने किस तरह के उपचार और सुझाव दिया जाए? क्या उपचार और सुझाव देना आवश्यक है?

5. **समस्या की रोकथाम–** यदि उपचार और सुझाव देना आवश्यक हो तो समस्या की रोकथाम कैसे की जाए? पर विचार करना चाहिए।

11.6.4 नैदानिक परीक्षण के प्रकार

जांच की प्रकृति के आधार पर निदानात्मक परीक्षण दो प्रकार के होते हैं–

1) **ज्ञान आधारित परीक्षण–** ज्ञान आधारित परीक्षण के आधार पर यह पता लगाया जाता है कि छात्रों को गणित विषय पर आधारित ज्ञान और समझ का स्तर क्या है और वह किन–किन गणितीय संप्रत्यायों को समझने में कमजोर हैं और कठिनाइयों का सामना करता हैं। उदाहरण के तौर पर गणित में प्रारंभिक संप्रत्यय को समझने में समस्याएं और गणित के जटिल संक्रियाओं पर आधारित संप्रत्यय को समझने में समस्याएं।

2) **कौशल आधारित परीक्षण–** इस परीक्षण के अंतर्गत विद्यार्थियों की विशेष योग्यताओं, मानसिक क्षमताओं जैसे गणना, लेखन, तार्किक विश्लेषण, आलोचनात्मक चिंतन, सृजनात्मक क्षमता आदि की जांच की जाती है। विशेष कर कौशल आधारित परीक्षण प्रदर्शन एवं क्रियाकलाप से संबंधित जांच पर आधारित होता है। उदाहरण के तौर पर समस्या समाधान आधारित विभिन्न गतिविधियां एवं लेखन कार्य कौशल पर आधारित होते हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

5. निदानात्मक परीक्षण को परिभाषित कीजिए।

....

....

6. निदानात्मक परीक्षण के उद्देश्य क्या हैं? कोई तीन उद्देश्यलिखिए।

....

....

7. निदानात्मक परीक्षण कितने प्रकार के होते हैं?

....

....

11.7 उपचारात्मक शिक्षण

नैदानिक परीक्षण के द्वारा विद्यार्थियों की क्षमताओं, योग्यताओं का पता लगाने के साथ ही विद्यार्थियों की विषय से संबंधित कठिनाइयों, कमजोरियों और समस्याओं का भी पता लगाया जाता है। विशेषकर गणित विषय के बारे में यह कहावत प्रचलित है कि गणित नीरस विषय है जिसके अध्ययन में बच्चे कम रुचि लेते हैं। नैदानिक परीक्षण के उपयोग से विद्यार्थियों की उन कमजोरियों के बारे जानकारी प्राप्त हो जाती जिससे यह पता चलता है कि विद्यार्थी गणित विषय के कौन से प्रकरण/संप्रत्यय को समझ नहीं पाता है? विद्यार्थियों की विषयगत कठिनाइयों का समाधान करने के लिए गणित विषय का शिक्षक अपनी अध्यापन रणनीतियों में परिवर्तन लाकर शिक्षण कार्य करता है जिसे उपचारात्मक शिक्षण कहते हैं।

ब्लायर के अनुसार– ''उपचारात्मक शिक्षण का मुख्य कार्य है दोषपूर्ण अध्ययन और अध्यापन के प्रभाव को दूर करना। इसका मुख्य लक्ष्य है इन दोनों दोषों तथा दोषों के कारणों को खोजना एवं कमजोरियों का निराकरण करना।''

योकम और सिम्पसन के अनुसार– ''उपचारात्मक शिक्षण उस विधि को खोजने का प्रयत्न करता है जो विद्यार्थी को अपनी कुशलता या विचार की त्रुटियों को दूर करने में सफलता प्रदान करे।''

अध्ययन–अध्यापन के उपरांत निदानात्मक परीक्षण द्वारा विद्यार्थियों की कमियों का पता लगाना और उपचारात्मक शिक्षण द्वारा उन कमजोरियों को दूर करने का कार्य सतत चलता रहता है जब तक विद्यार्थियों की कमियों को दूर न कर लिया जाए। उपचारात्मक शिक्षण संपूर्ण शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया का एक महत्वपूर्ण अंग माना जाता है और उपचारात्मक शिक्षण के आयोजन से शिक्षक अपने छात्रों द्वारा महसूस की गई कठिनाइयों, समस्याओं एवं उनकी विषयगत कमजोरियों को दूर करता है।

11.7.1 उपचारात्मक शिक्षण के महत्वपूर्ण तत्व

इसके अंतर्गत निम्नलिखित तीन तत्वों का उल्लेख किया गया है–

1)विशेष कक्षा का आयोजन–

उपचारात्मक शिक्षण प्रदान करने से पूर्व अध्यापक विद्यार्थियों का व्यक्तिगत या छोटे समूह का निर्माण करता है जिसमें गणितीय संप्रत्ययों और मूलभूत सिद्धांतों पर आधारित अतिरिक्त कक्षाओं का आयोजन किया जाता है। अतिरिक्त कक्षाओं के संपादन हेतु शिक्षक विद्यार्थियों को विशिष्ट शिक्षण प्रविधियां के बारे आवश्यक दिशा निर्देश देता है।

2)प्रस्तावित क्रियाकलापों का क्रियान्वयन–

विद्यार्थियों की कमजोरी को ध्यान में रखते हुए विशिष्ट गतिविधियों और अभ्यास कार्य को तैयार कर योजना बनाता है जिसके माध्यम से विद्यार्थी अपनी पढ़ने की समस्याओं का निदान करता है।

3)प्रतिपुष्टि और सुधार करना–

उपचारात्मक शिक्षण के दौरान और बाद में विद्यार्थियों को निरंतर प्रतिपुष्टि प्रदान किया जाता है और उनकी समस्याओं को – दृष्टगत सुधार किया जाता है। गणित विषय के अध्यापन में अध्यापकों द्वारा अनेक समस्याओं का सामना करना पड़ता है। गणित कक्षा में कुछ छात्र उच्च बुद्धि वाले होते हैं तथा कुछ छात्र औसत बुद्धि स्तर के होते हैं। औसत बुद्धि स्तर के छात्रों को गणित पढ़ाने में शिक्षक द्वारा विशेष शिक्षण तकनीकी का प्रयोग करना उपयुक्त होता है और तीव्र बुद्धि के छात्रों के लिए एक अलग शिक्षण रणनीति का आयोजन करना होता है जिससे छात्र अपने सीखने की क्षमता और सीखने की गति के आधार पर अधिगम अर्जन करते हैं। गणित विषय में उपचारात्मक शिक्षण को प्रदान करते समय निम्नलिखित शिक्षण रणनीतियों का आयोजन किया जाता है–

अ) औसत/मंद बुद्धि के विद्यार्थियों के लिए उपचारात्मक शिक्षण रणनीति–

1. औसत बुद्धि के विद्यार्थियों को कक्षा की अग्रिम पंक्ति में बैठना चाहिए जिससे शिक्षक और विद्यार्थी के मध्य सीधा संवाद स्थापित हो।
2. अध्यापन कार्य में अभ्यास और प्रत्यास्मरण पर विशेष बल दिया जाए और छात्रों को ज्यादा से ज्यादा अभ्यास कार्य में शामिल किया जाए।
3. औसत बुद्धि और मंद बुद्धि के विद्यार्थियों के लिखित कार्य को विशेष ढंग से मूल्यांकन कर उनकी समस्या का निराकरण हेतु विचार विमर्श किया जाए।
4. मंदबुद्धि और औसत बुद्धि के विद्यार्थियों को ज्यादा से ज्यादा प्रोत्साहन देकर उनकी समस्याओं के निराकरण के लिए अलग–अलग ढंग से समझाने हेतु विशेष प्रकार के मॉडल चार्ट और –दृश्य श्रव्य सामग्री का प्रयोग किया जाए।
5. औसत बुद्धि और मंदबुद्धि के विद्यार्थियों को यदि आवश्यक को तो उन्हें एक अलग पक्ष में बैठाया जाए जहां पर इनकी संख्या 15 से ज्यादा ना हो।

6. औसत और मंदबुद्धि के विद्यार्थियों द्वारा अधिक से अधिक क्रियात्मक और प्रयोगात्मक कार्य करवाए जाएं और खेल विधि के माध्यम से समस्याओं के निराकरण हेतु प्रोत्साहित किया जाए।
7. ऐसे छात्रों को ज्यादा से ज्यादा व्यावहारिक और समस्यामूलक प्रश्न दिया जाए और मौखिक तथा लिखित प्रश्नों का भी अभ्यास कराया जाए।

ब) तीव्र बुद्धि के विद्यार्थियों हेतु उपचारात्मक शिक्षण रणनीति–

1. इनके बौद्धिक क्षमता और स्तर के अनुरूप पर्याप्त मात्रा में अधिगम सामग्री दिया जाए।
2. ऐसी शिक्षण विधि का प्रयोग किया जाए जिससे प्रकृति के छात्र शीघ्रता से अधिक अधिगम अर्जन कर सकें
3. प्रखर बुद्धि के विद्यार्थी आवश्यकता पड़ने पर औसत और मंदबुद्धि के विद्यार्थियों की मदद करें इसके लिए शिक्षक उन्हें प्रोत्साहित करें।
4. अधिक से अधिक गृह कार्य दिए जाएं और कमजोर विद्यार्थियों की मदद हेतु उन्हें प्रोत्साहित भी किया जाए जिससे एक सर्व समावेशी कक्षा वातावरण और समाज का निर्माण संभव हो सके।
5. प्रखर बुद्धि के विद्यार्थियों को पाठ्यक्रम के अतिरिक्त अन्य सामग्री को भी बताया जाए और उनकी अभिरुचि के अनुरूप अधिक ज्ञानार्जन हेतु प्रोत्साहित की किया जाए।
6. उचित दिशा निर्देश और उच्च स्तरीय अध्ययन सामग्री दिया जाए।
7. अधिगम हेतु विशेष शिक्षण नवाचार रणनीतियों के माध्यम से शिक्षण कार्य संपादित किया जाए।

11.7.2 उपचारात्मक शिक्षण के लाभ

1) समय की बचत होती है।

2) समस्याओं का समाधान हो जाता है।

3) विद्यार्थियों का आत्मविश्वास और विषय के प्रति रुचि विकसित होती है।

4) शैक्षणिक क्षमता में अभिवृद्धि होती है।

5) स्वयं के प्रति हीन भावना खत्म होती है।

6) अन्य विद्यार्थियों से समायोजन स्थापित करने में मदद मिलती है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

8. उपचारात्मक शिक्षण से आप क्या समझते हैं?

....

....

9. उपचारात्मक शिक्षण के महत्वपूर्ण तत्व कौन से हैं?

....

....

11.8 सारांश

परीक्षण पर निर्धनात्मक परीक्षण और रोकारात्मक शिक्षण शिक्षा की गुणवत्ता को सुधारने में विद्यार्थियों की मदद करने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। अच्छे परीक्षण पद का निर्माण करते समय विशेष सावधानियों को ध्यान में रखना चाहिए। यही परीक्षण पद विद्यार्थियों की योग्यताओं तथा क्षमताओं का मापन करते हैं। गणित विषय में गणितीय सिद्धांत और संप्रत्ययों के अनुरूप परीक्षण पद बनाए जाते हैं। परीक्षण पद विद्यार्थियों की प्रगति और समझ को मापता है। उपयुक्त परीक्षण पदों का चयन निदानात्मक परीक्षण में इस उद्देश्य को ध्यान में रखकर किया जाता है कि छात्रों द्वारा सीखने में अनुभूत समस्याओं और कमजोरियों को पहचाना जा सके। अंत में उपचारात्मक शिक्षण द्वारा विद्यार्थियों की समस्याओं को हल किया जाता है।

11.9 अभ्यास के प्रश्न

1. परीक्षण पद से क्या तात्पर्य है?
2. परीक्षण पद कितने प्रकार के होते हैं?
3. परीक्षण पद की विशेषताएं बताइए।
4. गणितीय संकल्पनाओं से संबंधित विभिन्न उत्पाद और प्रक्रिया परिणामों के आकलन के लिए परीक्षण पदों का निर्माण के विषय में संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।
5. नैदानिक परीक्षण का निर्माण का मुख्य उद्देश्य क्या है?
6. उपचारात्मक शिक्षण क्यों किया जाता है? स्पष्टीकरण दीजिए।

11.10 चर्चा के बिंदु

1. अधिगमकर्ता गणितीय संकल्पनाओं से संबंधित विभिन्न उत्पाद और प्रक्रिया परिणामों के आकलन के लिए परीक्षण पदों का निर्माण कैसे करेंगे? चर्चा कीजिए।
2. नैदानिक परीक्षण और उपचारात्मक शिक्षण से आप कया समझते हैं? चर्चा कीजिए।

11.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

1) परीक्षण पद विशेष कर परीक्षण के अंतर्गत ऐसे कथन होते हैं जिनका निर्माण किसी खास उद्देश्य को दृष्टगत किया जाता है जिससे विद्यार्थियों की विभिन्न विशेषताओं व गुणों को मापा जाता है। दूसरे शब्दों में, परीक्षण पद ऐसे कथन होते हैं जिनकी सहायता से विद्यार्थियों की विभिन्न प्रकार की विशेषताओं योग्यताओं, क्षमताओं तथा गुणों का मापन किया जाता है।

2) उत्पाद और प्रक्रिया परिणाम के आकलन की विश्वसनीयता और वस्तुनिष्ठता के आधार पर परीक्षण पदों को मुख्यतः दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है–

अ) निबंधात्मक पद और **ब)** वस्तुनिष्ठ पद।

3) लिखित परीक्षाएं लेने हेतु निबंधात्मक पदों का प्रयोग मुख्यतः किया जाता है। निबंधात्मक पदों को सर्वप्रथम 2000 ईसा पूर्व चीन में लिखित परीक्षा हेतु प्रयोग में लाया जाता था। सामान्यतः शैक्षिक उपलब्धि के मापन हेतु निबंधात्मक पदों का प्रयोग किया जाता है। इसके द्वारा विद्यार्थियों की आलोचनात्मक चिंतन, सृजनशीलता, तार्किक विश्लेषण व संश्लेषण क्षमता, मूल्यांकन क्षमता, अभिव्यक्ति क्षमता आदि विभिन्न प्रकार की योग्यताओं का मापन किया जाता है।

4) विशिष्ट शिक्षण उद्देश्यों के आकलन हेतु पूछे गए पदों के उत्तर की उपलब्धता (चयन एवं स्मरण) के आधार पर वस्तुनिष्ठ पदों का वर्गीकरण दो भागों में किया जा सकता है जिसका विवरण निम्नवत है—

अ) चयन पद

ब) आपूर्ति पद

5)**मरसेल के अनुसार** — जिस शिक्षण में छात्रों की विशिष्ट समस्याओं का निदान करने हेतु विशेष प्रयास किए जाते हैं, उसे निदानात्मक परीक्षण कहा जाता है।

6) गणित शिक्षण में नैदानिक परीक्षण के उपयोग के उद्देश्य निम्न अनुसार हैं—

i. गणित विषय के पाठ्यक्रम में प्रयुक्त शिक्षण अधिगम प्रक्रिया में सुधार लाना।
ii. नैदानिक परीक्षण के उपयोग द्वारा गणित विषय की पाठ्य सामग्री में अपेक्षित सुधार लाना।
iii. गणित विषयवस्तु के किसी खास समस्या की पहचान करना तथा विद्यार्थियों की कमियों को पता लगाकर उपचारात्मक शिक्षण का सुझाव देना।

7) जांच की प्रकृति के आधार पर निदानात्मक परीक्षण दो प्रकार के होते हैं—

i) ज्ञान आधारित परीक्षण— ज्ञान आधारित परीक्षण के आधार पर यह पता लगाया जाता है कि छात्रों को गणित विषय पर आधारित ज्ञान और समझ का स्तर क्या है और वह किन—किन गणितीय संप्रत्यायों को समझने में कमजोर हैं और कठिनाइयों का सामना करता हैं। उदाहरण के तौर पर गणित में प्रारंभिक संप्रत्यय को समझने में समस्याएं और गणित के जटिल संक्रियाओं पर आधारित संप्रत्यय को समझने में समस्याएं।

ii) कौशल आधारित परीक्षण— इस परीक्षण के अंतर्गत विद्यार्थियों की विशेष योग्यताओं, मानसिक क्षमताओं जैसे गणना, लेखन, तार्किक विश्लेषण, आलोचनात्मक चिंतन, सृजनात्मक क्षमता आदि की जांच की जाती है। विशेष कर कौशल आधारित परीक्षण प्रदर्शन एवं क्रियाकलाप से संबंधित जांच पर आधारित होता है। उदाहरण के तौर पर समस्या समाधान आधारित विभिन्न गतिविधियां एवं लेखन कार्य कौशल पर आधारित होते हैं।

8) **योकम और सिम्पसन के अनुसार—**

''उपचारात्मक शिक्षण उस विधि को खोजने का प्रयत्न करता है जो विद्यार्थी को अपनी कुशलता या विचार की त्रुटियों को दूर करने में सफलता प्रदान करे।''

9) उपचारात्मक शिक्षण के अंतर्गत निम्नलिखित तीन तत्वों का उल्लेख किया गया है—

i) विशेष कक्षा का आयोजनरू उपचारात्मक शिक्षण प्रदान करने से पूर्व अध्यापक विद्यार्थियों का व्यक्तिगत या छोटे समूह का निर्माण करता है जिसमें गणितीय संप्रत्ययों और मूलभूत सिद्धांतों पर आधारित अतिरिक्त कक्षाओं का आयोजन किया जाता है। अतिरिक्त कक्षाओं के संपादन हेतु शिक्षक विद्यार्थियों को विशिष्ट शिक्षण प्रविधियां के बारे आवश्यक दिशा निर्देश देता है।

ii) प्रस्तावित क्रियाकलापों का क्रियान्वयनरू विद्यार्थियों की कमजोरी को ध्यान में रखते हुए विशिष्ट गतिविधियों और अभ्यास कार्य को तैयार कर योजना बनाता है जिसके माध्यम से विद्यार्थी अपनी पढ़ने की समस्याओं का निदान करता है।

iii) प्रतिपुष्टि और सुधार करनारू उपचारात्मक शिक्षण के दौरान और बाद में विद्यार्थियों को निरंतर प्रतिपुष्टि प्रदान किया जाता है और उनकी समस्याओं को – दृष्टगत सुधार किया जाता है।

11.12 कुछ उपयोगी पुस्तकें / संदर्भ

1. गुप्ता, एस पी (2016),आधुनिक मापन और मूल्यांकन, शारदा प्रकाशन, इलाहाबाद।
2. Mangal, S.K. (2019).Pedagogy of Mathematics. Tandon Publication, Ludhiana
3. Yadav, S.(2023).Teaching of Mathematics, Shri Vinod Pustak Mandir. Agra
4. Sahni, M.(2020).Pedagogy of Mathematics, Global Net Publication, New Delhi

महत्वपूर्ण वेबलिंकः

- https://hindiamrit-com/meaning&and-definition-of-diagnostic-test-in&hindi/
- https://sstmaster-com/diagnostic-test-in-hindi/

इकाई – 12 : इकाई परीक्षण का निर्माण, विशिष्टीकरण तालिका (ब्लूप्रिंट), प्रश्न पत्र का निर्माण

इकाई की संरचना

12.1 प्रस्तावना

12.2 इकाई के उद्देश्य

12.3 इकाई परीक्षण का अर्थ एवं परिभाषा

12.4 इकाई परीक्षण के उद्देश्य

12.5 इकाई परीक्षण का महत्व एवं आवश्यकता

12.6 इकाई परीक्षण निर्माण के सोपान

- 12.6.1 परीक्षण की योजना बनाना
- 12.6.2 परीक्षण के पद लिखना
- 12.6.3 पदों को व्यवस्थित करना
- 12.6.4 छात्रों को निर्देश देना
- 12.6.5 परीक्षण के लिए समय निर्धारित करना
- 12.6.6 प्रश्नवार विश्लेषण करना
- 12.6.7 उत्तर कुंजी और अंकन योजना तैयार करना
- 12.6.8 समीक्षा और संपादन करना

12.7 प्रश्न पत्र निर्माण

12.8 प्रश्न पत्र निर्माण के चरण

- 12.8.1 प्रश्न पत्र की योजना बनाना
- 12.8.2 प्रश्न पत्र का ब्लूप्रिंट तैयार करना
- 12.8.3 मॉडल प्रश्न पत्र तैयार करना
- 12.8.4 अंकन योजना तैयार करना
- 12.8.5 प्रश्न पत्र को परिष्कृत करना
- 12.8.6 प्रश्न पत्र का संपादन करना
- 12.8.7 प्रश्न पत्र की समीक्षा करना

12.9 सारांश

12.10 अभ्यास के प्रश्न

12.11 चर्चा के बिंदु

12.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

12.13 कुछ उपयोगी पुस्तकें

12.1 प्रस्तावना

इकाई परीक्षण छात्रों की समझ और ज्ञान के विभिन्न स्तरों का ऑकलन करने का एक साधन है। यह सुनिश्चित करता है कि छात्र न केवल तथ्यों को याद रखें, बल्कि वे अवधारणाओं को भी समझें और उन्हें वास्तविक जीवन की स्थितियों में लागू कर सकें। उदाहरण के लिए, यदि कोई छात्र किसी गणितीय सिद्धांत को समझता है, तो इकाई परीक्षण के माध्यम से यह देखा जा सकता है कि वह सिद्धांत को समस्याओं को हल करने में कितना प्रभावी रूप से उपयोग कर सकता है तथा इकाई परीक्षण छात्रों को उनकी अपनी प्रगति का ऑकलन करने में मदद करता है। जब छात्रों को उनके प्रदर्शन के बारे में प्रतिक्रिया मिलती है, तो वे यह समझ सकते हैं कि उनके कौन से क्षेत्र मजबूत हैं और किन क्षेत्रों में उन्हें सुधार की आवश्यकता है। यह आत्म–मूल्यांकन छात्रों को उनकी अध्ययन रणनीतियों में सुधार करने और बेहतर परिणाम प्राप्त करने के लिए प्रेरित करता है।

इकाई परीक्षण शिक्षक और छात्रों के बीच संवाद का एक माध्यम होता है। शिक्षक, परीक्षण परिणामों के आधार पर छात्रों को व्यक्तिगत प्रतिक्रिया दे सकते हैं, जिससे उन्हें उन समस्याओं और कठिनाइयों को समझने में मदद मिलती है जिनका वे सामना कर रहे हैं। इससे छात्रों को अपनी कमजोरियों को दूर करने और बेहतर प्रदर्शन करने के लिए आवश्यक समर्थन मिलता है। इसके साथ इकाई परीक्षण शिक्षण प्रक्रिया के प्रभावी प्रबंधन में सहायक होता है। जब शिक्षक यह समझते हैं कि किस इकाई में छात्रों को सबसे अधिक कठिनाई हो रही है, तो वे अपनी शिक्षण पद्धति में बदलाव कर सकते हैं और उन क्षेत्रों पर अधिक ध्यान केंद्रित कर सकते हैं। इससे शिक्षण की गुणवत्ता में सुधार होता है और छात्रों को उनकी आवश्यकताओं के अनुसार सहायता मिलती है।

12.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. इकाई परीक्षण के अर्थ एवमं परिभाषा को बता सकेंगे।
2. इकाई परीक्षण के उद्देश्यों की विवेचना कर सकेंगे।
3. इकाई परीक्षण का महत्व एवं आवश्यकता को समझ सकेंगे।
4. इकाई परीक्षण निर्माण के सोपानों का वर्णन कर सकेंगे।
5. प्रश्न पत्र निर्माण के सोपानों की विवेचना कर सकेंगे।

12.3 इकाई परीक्षण का अर्थ एवं परिभाषा

"इकाई परीक्षण" शब्द दो शब्दों से मिलकर बना है इकाई और परीक्षण इसलिए इकाई परीक्षण का अर्थ जानने से पहले इन दोनों शब्दों के बारे में जानना आवश्यक है।

इकाई का अथरूः इकाई शब्द के कुछ अलग–अलग अर्थ निम्नलिखित है।

- किसी पाठ्यक्रम, पाठ्यपुस्तक या विषय का एक महत्वपूर्ण हिस्सा, जिसे छोटे–छोटे हिस्सों में बांटा गया हो। जैसे, सामाजिक अध्ययन, व्यावहारिक कला या विज्ञान में एक उपविभाजन।
- किसी शैक्षणिक विषय के भीतर एक विशिष्ट और स्वायत्त खंड, जो एक पाठ्यक्रम या पाठ्यपुस्तक में शामिल होता है। उदाहरण के लिए, विज्ञान में **"रासायनिक प्रतिक्रियाएं"** एक इकाई हो सकती है।
- **डॉ0 ब्लूम** ने अपनी पुस्तक **"हैंडबुक ऑन फॉर्मेटिव एंड समेटिव इवैल्युएशन ऑफ स्टूडेंट लर्निंग"** में 'यूनिट' शब्द को निम्नलिखित शब्दों में परिभाषित करते हैं–"एक यूनिट संबंधित और अर्थपूर्ण गतिविधियों की एक व्यापक श्रृंखला होती है जिसे इस प्रकार विकसित किया गया है कि यह छात्र के उद्देश्यों को प्राप्त करने, महत्वपूर्ण शैक्षिक अनुभव प्रदान करने और उपयुक्त व्यवहारात्मक परिवर्तन लाने में सक्षम हो।"

अतः इकाई शब्द का तात्पर्य किसी समस्या या परियोजना से संबंधित शिक्षण गतिविधियों की समग्रता से है। इसलिए, इकाई केवल विषय वस्तु का प्रतिनिधित्व नहीं करती है बल्कि इसमें शिक्षण अनुभव भी शामिल होते हैं। इसलिए, पाठ्यक्रम को उन अनुभवों की इकाइयों में संगठित करने पर जोर दिया जाता है जो विषय वस्तु को समाहित करते हैं। इस प्रकार एक इकाई एक निश्चित उद्देश्य के लिए छात्र को सौंपी गई एक गतिविधि है।

परीक्षण का अर्थ–

क्लिंटन आई. चेस के अनुसार, "परीक्षण (टेस्ट) एक प्रणालीबद्ध तरीका है जिसमें किसी व्यक्ति के प्रदर्शन की तुलना एक निर्धारित मानक से की जाती है।

अतः परीक्षण शब्द का अर्थ एक विशेष इकाई पर आधारित प्रणालीबद्ध, सावधानीपूर्वक तैयार किए गए प्रश्नों की श्रृंखला है, जिसका उद्देश्य उस इकाई को पढाने के बाद छात्र के प्रदर्शन का ऑकलन करना है। परीक्षण शब्द किसी भी प्रकार के उपकरण या प्रक्रिया के लिए इस्तेमाल होता है जो क्षमता, उपलब्धि, रुचि और अन्य गुणों को मापता है। आमतौर पर 'परीक्षा', 'क्विज' और 'टेस्ट(परीक्षण)' शब्द एक ही तरह से उपयोग किए जाते हैं। लेकिनरू

- 'क्विज' छोटा और अनौपचारिक होता है।
- 'टेस्ट(परीक्षण)' लंबा और अधिक सावधानीपूर्वक तैयार किया गया होता है।
- 'परीक्षा' बहुत व्यापक और समग्र प्रक्रिया होती है।

इकाई और परीक्षण का अलग–अलग अर्थ जानने के बाद, यह जानना आवश्यक है कि जब इन दो शब्दों को मिलाकर एक एकल शब्द 'इकाई परीक्षण' बनाया जाता है, तो इसका क्या अर्थ होता है।

इकाई परीक्षण (Unit Test) एक प्रकार का आंतरिक मूल्यांकन होता है जो छात्रों की एक विशिष्ट इकाई के अंत में उनकी समझ और ज्ञान का मूल्यांकन करता है। इसका उद्देश्य छात्रों की शैक्षिक प्रगति को मापना और शिक्षकों को यह समझने में मदद करना है कि किस प्रकार से पढाई में सुधार की आवश्यकता हो सकती है।

इकाई परीक्षण एक उपकरण, तकनीक या विधि को संदर्भित करती है जिसका उद्देश्य छात्रों के ज्ञान को मापना या किसी विशेष इकाई को पूरा करने की उनकी क्षमता का ऑकलन करना होता है। इस अर्थ में, इकाई परीक्षण को मूल्यांकन के एक रूप के रूप में माना जा सकता है। इकाई परीक्षण को कुछ बुनियादी आवश्यकताओं को पूरा करना चाहिए, जैसे कि वैधता और विश्वसनीयता। परीक्षण सुनिश्चित करता है कि छात्रों ने जिस सामग्री का अध्ययन किया है, उसे सही तरीके से समझा और आत्मसात किया है। इकाई परीक्षण आमतौर पर एक पाठ्यक्रम की विशिष्ट इकाई या खंड के अंत में आयोजित किया जाता है और इसमें विभिन्न प्रकार के प्रश्न शामिल होते हैं, जैसे बहुविकल्पीय प्रश्न, लघु उत्तर प्रश्न, और निबंधात्मक प्रश्न।

Oarter V. Goodद्वारा संपादित ''डिक्शनरी ऑफ एजुकेशन'' के अनुसार, ''एक यूनिट टेस्ट वह परीक्षा है जिसका उपयोग छात्रों द्वारा कई निर्देशित अध्ययन योजनाओं में किए गए अध्ययन और उनके अनुभव की समझ और कौशल की जांच के लिए किया जाता है।''

डब्ल्यू. एन. दांडेकर के अनुसार, "इकाई परीक्षण एक छोटा परीक्षण है जिसे किसी विशेष इकाई की शिक्षण समाप्ति के बाद दिया जाता है। यह केवल प्रश्नों का एक आकस्मिक मूल्यांकन नहीं है, बल्कि इसे पूर्वनिर्धारित प्रक्रिया के अनुसार लागू किया जाना चाहिए।"

अतः 'इकाई परीक्षण' का अर्थ है एक परीक्षण जो नियमित शिक्षण पाठ्यक्रम के दौरान किसी विशेष इकाई को पढाने के बाद निर्धारित किया जाता है ताकि छात्रों की उस विशेष इकाई की आत्मसात और निपुणता का परीक्षण किया जा सके।

12.4 इकाई परीक्षण के उद्देश्य

इकाई परीक्षण के कुछ महत्वपूर्ण उद्देश्य निम्नलिखित हैं –

ज्ञान का मूल्यांकन–इकाई परीक्षण का मुख्य उद्देश्य यह सुनिश्चित करना है कि छात्रों ने सीखने के दौरान दी गई जानकारी को समझा और याद रखा है। यह मूल्यांकन छात्रों के ज्ञान को परखता है और यह जांचता है कि वे विभिन्न अवधारणाओं को कितना गहराई से समझते हैं।

समझ का ऑकलनरू यह परीक्षण यह निर्धारित करता है कि छात्र सिखाई गई अवधारणाओं और सिद्धांतों को कितनी अच्छी तरह समझते हैं। समझ का ऑकलन करने के लिए प्रश्न छात्रों से उन अवधारणाओं को समझाने, तुलना करने और विश्लेषण करने के लिए कह सकते हैं।

अनुप्रयोग कौशल– इकाई परीक्षण छात्रों की क्षमता का परीक्षण करता है कि वे सिखाई गई जानकारी को व्यावहारिक स्थितियों में कैसे लागू कर सकते हैं। यह परीक्षण छात्रों से वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने के लिए सिखाई गई अवधारणाओं का उपयोग करने के लिए कह सकता है।

प्रगति का निर्धारण– इकाई परीक्षण के माध्यम से शिक्षक यह समझ सकते हैं कि छात्रों ने इकाई के दौरान कितनी प्रगति की है। यह छात्रों की सीखने की यात्रा का एक माप प्रदान करता है और यह दर्शाता है कि वे कितनी दूर आ चुके हैं और उन्हें अभी भी कहां सुधार की आवश्यकता है।

शिक्षण विधियों की प्रभावशीलता का मूल्यांकन– इकाई परीक्षण से प्राप्त परिणाम शिक्षकों को यह समझने में मदद करते हैं कि उनकी शिक्षण विधियाँ कितनी प्रभावी रही हैं। अगर अधिकांश छात्र किसी विशेष विषय पर अच्छा प्रदर्शन नहीं करते हैं, तो यह संकेत हो सकता है कि शिक्षण पद्धति में बदलाव की आवश्यकता है।

भविष्य की योजना– इकाई परीक्षण से प्राप्त जानकारी शिक्षकों को भविष्य के लिए योजना बनाने में मदद करती है। वे यह समझ सकते हैं कि किन क्षेत्रों में छात्रों को अधिक सहायता की आवश्यकता है और भविष्य की इकाइयों के लिए पाठ योजनाओं को समायोजित कर सकते हैं।

फीडबैक का माध्यम– इकाई परीक्षण छात्रों को उनकी अपनी प्रगति के बारे में फीडबैक प्रदान करता है। यह उन्हें यह समझने में मदद करता है कि वे किन क्षेत्रों में मजबूत हैं और किन क्षेत्रों में उन्हें सुधार करने की आवश्यकता है।

प्रमाणन और योग्यता– कुछ मामलों में, इकाई परीक्षण का उपयोग यह प्रमाणित करने के लिए भी किया जाता है कि छात्र एक विशेष इकाई या पाठ्यक्रम में योग्यता प्राप्त कर चुके हैं। यह भविष्य के अध्ययन के लिए महत्वपूर्ण हो सकता है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. इकाई से आपका क्या आशय है?

....

....

2. परीक्षण का अर्थ स्पष्ट कीजिए।

....

....

3. इकाई परीक्षण को परिभाषित कीजिए।

....

....

12.5 इकाई परीक्षण का महत्व एवं आवश्यकता

इकाई परीक्षण निम्नलिखित कारणों से महत्वपूर्ण है–

1. यह एक लघु प्रश्न पत्र विकसित करने के मानदंडों को संतुष्ट करता है।
2. इकाई परीक्षण महत्वपूर्ण है क्योंकि इसका ब्लू प्रिंट हमें परीक्षण की कार्यात्मक तस्वीर प्रदान करता है। यह हमें उद्देश्यों, सामग्री के क्षेत्रों और प्रश्नों के प्रकार के संदर्भ में अंक भार जानने में मदद करता है।
3. इकाई परीक्षण छात्रों को कक्षा में किसी विषय के पूरा हो जाने के बाद उसकी समीक्षा करने में मदद करता है, और वे अपनी ताकत और कमजोरियों को पहचान सकते हैं।
4. यदि नियमों के अनुसार संचालित किया जाए, तो इकाई परीक्षण पूरे वर्ष छात्रों की उपलब्धियों के उद्देश्यपूर्ण मूल्यांकन में मदद करता है।
5. यह जानना उपयोगी है कि छात्र ने इकाई को सही ढंग से समझा है या नहीं। इससे शिक्षक की शिक्षण विधियों पर भी प्रकाश डाला जा सकता है और शिक्षण की ताकत और कमजोरियों का मूल्यांकन किया जा सकता है। इससे शिक्षण प्रक्रिया में सुधार करने में मदद मिलेगी।

इकाई परीक्षण की आवश्यकता कई कारणों से महत्वपूर्ण है। सबसे पहले, यह छात्रों के सीखने के स्तर का सटीक मूल्यांकन करने में मदद करता है। जब शिक्षक किसी विशेष इकाई का परीक्षण करते हैं, तो वे यह समझ सकते हैं कि छात्रों ने कहा तक ईकाई को आत्मसात किया है और वे किस हद तक विषय की अवधारणाओं को समझते हैं। यह जानकारी शिक्षकों को यह निर्धारित करने में मदद करती है कि क्या शिक्षण विधियाँ प्रभावी रही हैं या उनमें सुधार की आवश्यकता है।

इकाई परीक्षण छात्रों के आत्मविश्वास को बढाने में मदद करता है। जब छात्र परीक्षण में अच्छा प्रदर्शन करते हैं, तो उन्हें अपनी क्षमताओं पर विश्वास होता है और वे आगे की चुनौतियों का सामना करने के लिए प्रेरित होते हैं। इसके विपरीत, यदि वे कमजोर प्रदर्शन करते हैं, तो उन्हें यह जानने का मौका मिलता है कि वे किन क्षेत्रों में सुधार कर सकते हैं, जिससे वे भविष्य में बेहतर तैयारी कर सकते हैं। इकाई परीक्षण शिक्षा प्रणाली की समग्र गुणवत्ता को बनाए रखने में मदद करता है। यह सुनिश्चित करता है कि शिक्षण और सीखने की प्रक्रिया दोनों ही उच्च मानकों पर आधारित हों और छात्रों को उनकी पूरी क्षमता तक पहुँचने में मदद मिल सके। इसके माध्यम से, शिक्षा का उद्देश्य केवल जानकारी प्रदान करना नहीं, बल्कि एक संपूर्ण शैक्षिक अनुभव प्रदान करना है जो छात्रों को जीवन के हर क्षेत्र में सफल होने के लिए तैयार करता है।

व्यावहारिक दृष्टिकोण से, यूनिट टेस्ट का उपयोग शिक्षक के दैनिक कार्य में लाभदायक होता है और आंतरिक मूल्यांकन योजना में उनका मार्गदर्शन करता है। शिक्षक निम्नलिखित तरीकों से यूनिट टेस्ट का उपयोग कर सकते हैं–

1) प्रत्येक इकाई के शिक्षण के अंत में तुरंत छात्रों की उपलब्धियों का मूल्यांकन करने के लिए।
2) व्यक्तिगत उपलब्धियों की तुलना पूरे समूह की उपलब्धियों से करने के लिए।
3) एक ही विषय के विभिन्न इकाइयों में उपलब्धियों के स्तर की तुलना करने के लिए।
4) एक ही स्कूल में एक वर्ग की उपलब्धियों की तुलना दूसरे वर्ग से करने के लिए।

12.6 इकाई परीक्षण निर्माण के सोपान

इकाई परीक्षण निर्माण की मुख्य प्रक्रिया निम्नलिखित है–

1) इकाई परीक्षण तैयार करना
2) इकाई परीक्षण का संचालन करना
3) परीक्षण का मूल्यांकन करना, अर्थात उत्तर पुस्तिकाओं का मूल्यांकन करना
4) परीक्षण के माध्यम से प्राप्त परिणामों की व्याख्या करना

इन प्रक्रियाओं से इकाई परीक्षण तैयार करने के चरण विकसित किया जा सकता है। यदि इकाई परीक्षण को एक प्रभावी और दक्षतापूर्ण मूल्यांकन उपकरण के रूप में काम करना है, तो इसकी तैयारी कई सावधानीपूर्वक विचारों पर आधारित होनी चाहिए। एक अच्छा इकाई परीक्षण तैयार करने की प्रक्रिया एक व्यवस्थित प्रक्रिया है, जिसमें अच्छी तरह परिभाषित चरण होते हैं। एक अच्छा इकाई परीक्षण तैयार करने के महत्वपूर्ण चरण हैं

1. परीक्षण की योजना बनाना
2. परीक्षण के पद लिखना
3. पदों को व्यवस्थित करना
4. छात्रों को निर्देश देना
5. परीक्षण के लिए समय निर्धारित करना
6. प्रश्नवार विश्लेषण करना
7. उत्तर कुंजी और अंकन योजना तैयार करना
8. समीक्षा और संपादन करना

इन सभी चरणों का विस्तृत अध्ययन इस प्रकार है–

12.6.1 परीक्षण की योजना बनाना –

योजना बनाना न केवल महत्वपूर्ण है बल्कि परीक्षण निर्माण का एक आवश्यक पहलू है। केवल विभिन्न प्रकार के प्रश्नों को एक साथ जोडकर एक अच्छा परीक्षण तैयार नहीं किया जा सकता है।

प्रो0 लिंडक्विस्ट के अनुसार, "परीक्षण की योजना बनाना एक जटिल प्रक्रिया है जिसमें कई चरण शामिल होते हैं। इसमें यह तय करना शामिल है कि परीक्षण में कौन–कौन से विषय और प्रश्न शामिल होंगे, प्रश्न कितने कठिन होंगे, किस प्रकार के प्रश्न होंगे, परीक्षक को क्या निर्देश दिए जाएंगे, परीक्षण को कैसे पुनरुत्पादित किया जाएगा, विशेषज्ञों से समीक्षा कैसे करवाई जाएगी, और परीक्षण के लिए आवश्यक उपकरण और सुविधाएं कैसे उपलब्ध करवाई जाएंगी।"

रॉस के शब्दों में, "अच्छे परीक्षण केवल संयोग से नहीं होते। न ही वे कुछ पलों की उच्च प्रेरणा या उत्साह का परिणाम होते हैं। इसके विपरीत, यह प्रक्रिया शांत, सोच–समझकर और समय लेने वाली होती है।"

परीक्षण की योजना बनाते समय, शिक्षक को जितना हो सके उतना स्पष्ट रूप से यह निर्धारित करना चाहिए कि वह क्या मापना चाहता है, अर्थात् शैक्षिक उद्देश्यों को परीक्षण की योजना का प्रारंभिक बिंदु बनाना चाहिए। ऐसे उद्देश्य कई प्रकार के होते हैं। कुछ जानकारी के अधिग्रहण को निर्दिष्ट करते हैं, कुछ जानकारी के अनुप्रयोग को दर्शाते हैं,जिसमें समस्या–समाधान और तर्क का विश्लेषण शामिल है, अन्य नए जानकारी की व्याख्या करने की क्षमता को निर्दिष्ट करते हैं, आदि।उद्देश्य विषय से विषय और यहां तक कि इकाई से इकाई में भी भिन्न होते हैं। इसके अलावा, कुछ उद्देश्यों को सबसे अच्छे तरीके से केवल कुछ विशेष विषयोंध्इकाइयों के माध्यम से ही प्राप्त किया जा सकता है। स्वाभाविक रूप से, विभिन्न विषयध्इकाईयां विभिन्न उद्देश्यों को अलग–अलग महत्व देती हैं।

इकाई परीक्षण के माध्यम से मूल्यांकन किए जाने वाले उद्देश्यों को तय करने के बाद और इन विभिन्न उद्देश्यों को दिए गए महत्व को निर्धारित करने के बाद, शिक्षक को आगे की योजना बनानी चाहिए।

उद्देश्यानुसार अंकों का विभाजन–उद्देश्यों को तय करने और उन्हें दिए गए महत्व को निर्धारित करने के बाद, शिक्षक से अपेक्षा की जाती है कि वे एक तालिका तैयार करें जिसमें उद्देश्यानुसार अंकों का विभाजन दिखाया जाए–

तालिका सं–1

क्रम0 संख्या	उद्देश्य	अंक	प्रतिशत
1.	ज्ञान		
2.	समझ		
3.	अनुप्रयोग		
	कुल		

उद्देश्यानुसार अंकों के विभाजन को दिखाने वाली तालिका तैयार करने के बाद, शिक्षक से अपेक्षा की जाती है कि वे शामिलकिए जाने वाले विषयवस्तु का एक रूपरेखा तैयार करें। विषयवस्तु की रूपरेखा महत्वपूर्ण है क्योंकि विषयवस्तु वह माध्यम है जिसके द्वारा उद्देश्यों को प्राप्त और मूल्यांकित किया जाना है।

उप–इकाईयों के अनुसार अंकों का विभाजन–अब, विभिन्न विषयवस्तुओं में विभिन्न संख्या में इकाइयां और उप–इकाइयां होती हैं। फिर, विभिन्न उप–इकाइयों का महत्व अलग–अलग होता है, अर्थात वे महत्व में समान नहीं होतीं। इसलिए, अंकों को भी उन उप–इकाइयों की सापेक्ष स्थिति को ध्यान में रखते हुए आवंटित किया जाना चाहिए। इसलिए, यह आवश्यक है कि टेस्ट निर्माता एक तालिका तैयार करें जिसमें इकाईवार अंकों का विभाजन दिखाया जाए, जैसा कि नीचे दिया गया है–

तालिका सं–2

क्रम0 सं0	उप–इकाइयाँ	अंक	अंको का प्रतिशत
1.	प्रतीकात्मक प्रतिनिधित्व और समीकरणों का निर्माण		
2.	समीकरणों का समाधान		
3.	समस्याएँ		
	कुल		

परीक्षण निर्माता को फिर यह तय करना होगा कि वह निबंध प्रकार के प्रश्नों का उपयोग करेगा या वस्तुनिष्ठ प्रकार के प्रश्नों का। उपयोग किए जाने वाले प्रकार का चयन मापने के लिए उद्देश्यों की प्रकृति पर निर्भर करेगा।

प्रश्नों के प्रकार के आधार पर अंकों का विभाजन–परीक्षण में एक से अधिक प्रकार के प्रश्न शामिल हो सकते हैं। प्रश्नों की विविधता छात्रों के लिए एकल रूप से अधिक रोचक हो सकती है। इसके अलावा, एक प्रकार का प्रश्न सभी उद्देश्यों की दिशा में छात्रों की वृद्धि का मूल्यांकन करने के लिए सबसे उपयुक्त नहीं होता है। कुछ प्रकार के प्रश्न कुछ उद्देश्यों के लिए सबसे उपयुक्त होते हैं जबकि अन्य प्रकार के प्रश्न अन्य उद्देश्यों के लिए सबसे उपयुक्त होते हैं। इसका मतलब है कि प्रश्नों का प्रकार विभिन्न उद्देश्यों के आधार पर भिन्न होगा।

उसे निम्नलिखित प्रकार से तीसरी तालिका तैयार करनी चाहिए–

तालिका सं– 3

क्रम0 सं0	प्रश्नों का प्रकार	अंक	अंको का प्रतिशत
1.	निबंध प्रकार के प्रश्न		
2.	वस्तुनिष्ठ प्रकार के प्रश्न		
3.	अन्य प्रकार के प्रश्न		
	कुल		

प्रश्नों के कठिनाई स्तर का निर्धारण—परीक्षण में एक से अधिक प्रकार के कठिनाई स्तर के प्रश्न शामिल हो सकते हैं।

तालिका सं– 4

क्रम0 सं0	कठिनाई स्तर	अंक	अंको का प्रतिशत
1.	निम्न		
2.	औसत		
3.	कठिन		
	कुल		

इन तीन तालिकाओं को तैयार करने के बाद, परीक्षण निर्माता को इन तीन तालिकाओं के आधार पर परीक्षण का अंतिम ब्लू प्रिंट तैयार करने के लिए आगे बढना चाहिए।

ब्लू प्रिंट परीक्षण की योजना का अंतिम चरण होता है। यह निर्देशात्मक उद्देश्यों, सामग्री और प्रश्नों के प्रकार को दिए गए भारांक का एक सामूहिक चित्र है। यह प्रत्येक निर्देशात्मक उद्देश्य और सामग्री के संबंध में प्रश्नों के वितरण को विकसित करता है। इसके लिए, निर्देशात्मक उद्देश्यों को स्तंभों में और सामग्री को पंक्तियों में लिया जाता है। प्रत्येक स्तंभ को आगे तीन छोटे स्तंभों में विभाजित किया जाता है ताकि प्रश्नों के प्रकार को दर्शाया जा सके।

तालिका सं–5

क्रम0सं0	उद्देश्य	ज्ञानात्मक			संज्ञानात्मक			अनुप्रयोग			कुल		
	प्रश्नों का प्रकार	**E**	**S**	**O**	**E**	**S**	**O**	**E**	**S**	**O**	**E**	**S**	**O**
1.	प्रतीकात्मक प्रतिनिधित्प और समीकरणों का निर्माण												
2.	समीकरणों का समाधान												
3.	समस्याएँ												
	कुल												

Note:E -Essay type questions
S - Short answer type questions
O - Objectives type of questions

12.6.2 परीक्षण के पद लिखना—

जब ब्लू प्रिंट तैयार हो जाता है, तो अगला चरण प्रश्न लिखना है। अच्छे प्रश्न लिखना आसान नहीं है। ''प्रश्न लिखना एक कला है। इसके लिए विशेष क्षमताओं का एक असामान्य संयोजन आवश्यक होता है। इसे केवल व्यापक और आलोचनात्मक रूप से निगरानी में किए गए अभ्यास के माध्यम से ही निपुण किया जा सकता है। यह उच्च गुणवत्ता के मानकों और शिल्पकला में गर्व की भावना की मांग करता है और इसे विकसित करने की प्रवृत्ति होती है।''

इसलिए, प्रश्न लिखते समय, किसी को अच्छे प्रश्न की विशेषताओं को नहीं भूलना चाहिए। उन विशेषताओं को ध्यान में रखते हुए, परीक्षण निर्माता को ष्त्रुटिरहित प्रश्नष लिखने होते हैं जो ब्लू प्रिंट की आवश्यकताओं को पूरा करते हैं।

हम कुछ प्रश्नों को चुनकर उन्हें कागज पर नहीं रख सकते। ''प्रश्न लेखन मूलतः एक रचनात्मक कार्य है। प्रत्येक प्रश्न, जब इसे लिखा जाता है, नए समस्याएँ और नए अवसर प्रस्तुत करता है। कोई भी नियमों का सेट नहीं हो सकता है जो उत्कृष्ट परीक्षण प्रश्नों के उत्पादन की गारंटी दे सके। सिद्धांत स्थापित किए जा सकते हैं और सुझाव दिए जा सकते हैं, लेकिन यह प्रश्न लेखक का निर्णय है कि इन सिद्धांतों और सुझावों का अनुप्रयोग (और

कभी–कभी अनदेखी) कैसे किया जाता है, जो यह निर्धारित करता है कि एक अच्छा प्रश्न बनेगा या साधारण प्रश्न।'' डोरोथी सी. एडकिंस इसे जोडते हुए कहती हैं कि, ''परीक्षण प्रश्नों का निर्माण मूलतः एक अत्यधिक रचनात्मक कार्य है, जिसमें एक सामग्री का चयन करना जो उपयुक्त हो और एक भेदभावकारी प्रश्न की संभावना पैदा करता हो, और उस सामग्री को एक समस्या कथन में विकसित करना।''

12.6.3 पदों को व्यवस्थित करना–

जब सभी प्रश्न लिख लिए जाते हैं, तो प्रश्न पत्रों को कुछ विशेषज्ञों के पास उनकी समीक्षा और टिप्पणियों के लिए भेजा जाना चाहिए। उनके साथ चर्चा के अनुसार, कुछ प्रश्नों को फिर से लिखा जाना चाहिए, कुछ को संशोधित किया जाना चाहिए और अन्य को हटा देना चाहिए। अंततः अंतिम प्रश्नों को एक इकाई–परीक्षण बनाने के लिए संकलित किया जाता है।अब यह सामान्यतः सहमति प्राप्त है कि जब एक ही परीक्षण में विभिन्न प्रकार के प्रश्नों का उपयोग किया जाता है, तो उन्हें प्रश्नों के प्रकार के आधार पर व्यवस्थित किया जाना चाहिए (जैसेः–बहुविकल्पीय, पूर्णता प्रकार, संक्षिप्त उत्तर प्रकार आदि)

प्रश्नों को व्यवस्थित करने के विभिन्न तरीकों के अपने–अपने लाभ और सीमाएँ होती हैं, इसलिए सामान्य सहमति यह है कि प्रश्नों को किसी विशेष क्रम में व्यवस्थित करने की आवश्यकता नहीं है, सिवाय इसके कि उन्हें प्रश्नों के प्रकार के आधार पर समूहित किया जाना चाहिए। प्रत्येक प्रकार के भीतर, पहले कुछ प्रश्न सरल होने चाहिए और फिर उन्हें यादृच्छिक तरीके से रखा जा सकता है।

इकाई–परीक्षण को कुछ विशेषज्ञों के पास उनकी समीक्षा और टिप्पणियों के लिए उपलब्ध कराया जाना चाहिए। विषय विशेषज्ञों और मूल्यांकन और माप के क्षेत्र के विशेषज्ञों के साथ चर्चा से इकाई–परीक्षण अधिक सटीक हो जाता है। उनके सुझावों के अनुसार, परीक्षणों को अधिक सटीकता के लिए संशोधित और पुनर्व्यवस्थित किया जाना चाहिए।

12.6.4 छात्रों को निर्देश देना–

छात्रों को दिए गए निर्देश इकाई–परीक्षण निर्माण में एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। ये निर्देश परीक्षण का अभिन्न हिस्सा होते हैं। खराब तरीके से योजनाबद्ध निर्देश अक्सर परीक्षण की विश्वसनीयता में कमी का कारण बनते हैं। स्पष्ट निर्देश परिणामों को बहुत हद तक प्रभावित करते हैं। लिंडक्विस्ट ने सही कहा है, ''अस्पष्ट निर्देश पूरे समूह या कुछ छात्रों के अंकों को अलग–अलग मात्रा में कम कर सकते हैं।'' इसलिए, निर्देशों का उद्देश्य स्पष्ट और सटीक होना चाहिए।

प्रश्नों के निर्देशों को स्पष्ट और संक्षिप्त होना चाहिए, ताकि सबसे कमजोर छात्र भी समझ सके कि उनसे क्या अपेक्षित है, भले ही वह उसे पूरा न कर सके। निर्देशों को सरल, संक्षिप्त और पर्याप्त होना चाहिए ताकि छात्रों को निम्नलिखित के बारे में जानकारी मिल सके–

1. परीक्षा पूरा करने का समय (Time allowed) –

परीक्षण पूरा करने के लिए उपलब्ध समय स्पष्ट रूप से बताया जाना चाहिए। यह सुनिश्चित करना चाहिए कि समय पर्याप्त हो ताकि परीक्षण को पूरा किया जा सके, लेकिन इतना लंबा न हो कि यह असुविधाजनक हो।

2. अधिकतम अंक (Maximum marks) –

परीक्षण के लिए अधिकतम अंक स्पष्ट रूप से दिए जाने चाहिए। उदाहरण के लिए, यह परीक्षण 50 अंकों का है।

3. प्रश्नों की संख्या (Number of questions)–

यह स्पष्ट करना चाहिए कि छात्रों को कितने प्रश्न करने हैं। उदाहरण के लिए, ''सभी प्रश्न अनिवार्य हैं'' या ''प्रश्न संख्या 1 से 5 तक के उत्तर दें।''

4. उत्तर कैसे और कहां रिकॉर्ड करें (How and where to record the answers) –

छात्रों को यह बताया जाना चाहिए कि उन्हें अपने उत्तर कहां और कैसे दर्ज करना है। उदाहरण के लिए, ''उत्तर कक्ष में अपना उत्तर लिखें'' या ''उत्तर शीट पर सही विकल्प को अंकित करें।''

इन निर्देशों को स्पष्ट, संक्षिप्त और सरल तरीके से लिखना महत्वपूर्ण है ताकि छात्र बिना किसी भ्रम के परीक्षण दे सकें। इसके अलावा, निर्देशों में सभी आवश्यक जानकारी शामिल होनी चाहिए ताकि छात्र अपने उत्तरों को सही तरीके से दर्ज कर सकें।

12.6.5 परीक्षण के लिए समय निर्धारित करना–

परीक्षण के लिए उपलब्ध समय एक व्यावहारिक कारक है जो परीक्षण में शामिल किए जाने वाले प्रश्नों की संख्या को सीमित करता है। थॉर्नडाइक और हेगन ने बताया कि ''अधिकांश शिक्षक निर्मित परीक्षणों को शक्ति परीक्षण (power tests) होना चाहिए, न कि गति परीक्षण (speed tests) अर्थात, ''समय इतना होना चाहिए कि कम से कम 80% छात्र प्रत्येक प्रश्न का उत्तर देने का प्रयास कर सकें।''

परीक्षा के लिए समय निर्धारण के महत्वपूर्ण बिंदु–

a) **समय की पर्याप्तता–** परीक्षा का समय इतना होना चाहिए कि छात्रों को सभी प्रश्नों को समझने और उत्तर देने के लिए पर्याप्त समय मिल सके।

b) **80% छात्रों का मानदंड–** परीक्षण को इस तरह से डिजाइन करना चाहिए कि कम से कम 80% छात्र सभी प्रश्नों का उत्तर देने का प्रयास कर सकें।

c) **व्यावहारिकता–** परीक्षा के लिए निर्धारित समय व्यावहारिक होना चाहिए, जो परीक्षा की लंबाई और प्रशासन में संतुलन बनाए रखे।

परीक्षण में दिए गए समय में पूछे जा सकने वाले प्रश्नों की संख्या कई कारकों पर निर्भर करती है, जैसे–

1. **परीक्षण में उपयोगी प्रश्नों का प्रकार–** विभिन्न प्रकार के प्रश्नों को हल करने में लगने वाला समय अलग–अलग होता है। उदाहरण के लिए, बहु विकल्पीय प्रश्नों को हल करने में कम समय लगता है, जबकि निबंध प्रकार के प्रश्नों को अधिक समय की आवश्यकता होती है।
2. **छात्रों की आयु और शैक्षिक स्तर–** छोटे बच्चों या निम्न शैक्षिक स्तर के छात्रों को प्रश्नों को समझने और उत्तर देने में अधिक समय लग सकता है।
3. **छात्रों की क्षमता स्तर–** छात्रों की क्षमता और कौशल स्तर के आधार पर प्रश्नों को हल करने में लगने वाला समय भिन्न हो सकता है।
4. **प्रश्न की लंबाई और जटिलता–** लंबे और जटिल प्रश्नों को हल करने में अधिक समय लगता है।
5. **प्रक्रिया उद्देश्य का प्रकार जो परीक्षण किया जा रहा है–** यदि प्रश्न विशिष्ट कौशल या प्रक्रियाओं का परीक्षण कर रहे हैं, तो वे प्रश्न अधिक समय ले सकते हैं।
6. **प्रश्न द्वारा मांगी गई गणना या मात्रात्मक सोच की मात्रा–** गणनात्मक या मात्रात्मक सोच की आवश्यकता वाले प्रश्नों को हल करने में अधिक समय लग सकता है।

परीक्षण इतना लंबा होना चाहिए कि यह पर्याप्त, विश्वसनीय हो और इतना छोटा हो कि इसे सुगमता से संचालित किया जा सके। मार्शल, जे0सी0 और हेल्स, एल0 डब्ल्यू0 ने सुझाव दिया है कि 35 से 45 बहुविकल्पीय प्रश्नों का परीक्षण 40 मिनट में संचालित किया जा सकता है। उन्होंने यह भी स्पष्ट किया कि समय का अनुमान परीक्षण में शामिल प्रश्नों के प्रकार पर निर्भर करता है। उनके अनुसार, ''परीक्षण के लिए समय निर्धारित करने में सबसे अच्छा मार्गदर्शक शिक्षक का व्यक्तिगत अनुभव है।''

12.6.6 प्रश्नवार विश्लेषण करना–

जब परीक्षा तैयार हो जाती है, तो परीक्षा निर्माता को परीक्षा में शामिल प्रश्नों का विश्लेषण करना चाहिए। परीक्षा में प्रत्येक प्रश्न का निम्नलिखित सात बिंदुओं के संदर्भ में विश्लेषण किया जाना चाहिए–

1) **प्रश्न का क्रमांक** – प्रश्न का सीरियल नंबर।
2) **प्रश्न द्वारा परीक्षण किए गए उद्देश्य** – प्रश्न द्वारा परीक्षण किए जाने वाले उद्देश्य या उद्देश्यों का विवरण।
3) **प्रश्न के आधार पर विशिष्टता/विशिष्टताएँ–** प्रश्न किस विशिष्टता/विशिष्टताओं पर आधारित है, जैसे पहचानता है, पहचानता है, परिवर्तित करता है, भेदभाव करता है, व्याख्या करता है, स्थान बताता है, याद करता है, उपयोग करता है, विचारों को व्यवस्थित करता है, समझाता है आदि।
4) **प्रश्न द्वारा कवर किए गए विषय/विषय** – प्रश्न द्वारा कवर किए गए विषय या विषयों का विवरण।
5) **प्रश्न का प्रकार–** प्रश्न का प्रकार, जैसे निबंध प्रकार, लघु उत्तर प्रकार, वस्तुनिष्ठ प्रकार आदि।
6) **प्रश्न की कठिनाई स्तर** – प्रश्न की कठिनाई स्तर, जैसे प्रश्न कठिन है, औसत है, आसान है आदि।
7) **प्रश्न को आवंटित अंक** – प्रश्न को दिए गए अंक।

12.6.7 उत्तर कुंजी और अंकन योजना तैयार करना–

अंकन योजना उत्तर की अपेक्षित रूपरेखा, अपेक्षित बिंदुओं की संख्या और प्रत्येक बिंदु को मिलने वाले अंकों को दर्शाती है। वस्तुनिष्ठ प्रकार के प्रश्नों में, यह समस्या उत्पन्न नहीं होती क्योंकि उत्तर स्पष्ट होते हैं जैसे एक शब्द, वाक्यांश आदि और सामान्यतरू सभी वस्तुओं को समान अंक दिए जाते हैं। जब कई परीक्षक उत्तर पुस्तिकाओं का मूल्यांकन कर रहे हों, तो अंकन योजना और स्कोरिंग कुंजी बहुत महत्वपूर्ण होती हैं। सभी को प्रश्न पत्र सेट करने वाले का दृष्टिकोण और प्रत्येक उत्तर के पहलुओं के लिए अंक आवंटन की जानकारी होनी चाहिए। अंकन योजना और स्कोरिंग कुंजी सामान्य संदर्भ फ्रेम के रूप में मूल्यांकन के लिए सामान्य आधार प्रदान करती हैं। यह मानक में एकरूपता लाने में सहायक होती हैं और इस प्रकार मूल्यांकन में वस्तुनिष्ठता सुनिश्चित करती हैं।

यह परीक्षा निर्माण का अंतिम

12.6.8 समीक्षा और संपादन करना–

चरण है। इसका उद्देश्य यह देखना है कि क्या परीक्षाएँ डिजाइनिंग के दौरान लिए गए सभी निर्णयों को कवर करती हैं। परीक्षा को संपादित करते समय निम्नलिखित प्रश्नों को ध्यान में रखना चाहिए–

1. क्या प्रश्न पत्र पर दिन, तारीख, मानक और निर्धारित समय दिखाए गए हैं?
2. क्या विकल्पों के बारे में निर्देश स्पष्ट रूप से दिए गए हैं?
3. क्या प्रत्येक प्रश्न या उसके भागों को आवंटित अंक स्पष्ट रूप से प्रश्न पत्र पर संकेतित हैं?
4. क्या अपेक्षित उत्तर की लंबाई संकेतित है?
5. क्या छात्रों को क्या करना है इसके बारे में स्पष्ट, विशिष्ट और बिंदुवार निर्देश प्रश्न पत्र की शुरुआत में दिए गए हैं?
6. क्या प्रश्नों को उनके प्रकार के आधार पर सही ढंग से समूहित किया गया है?
7. क्या प्रत्येक समूह में प्रश्नों को उनकी कठिनाई स्तर के क्रम में व्यवस्थित किया गया है?
8. क्या प्रत्येक अनुभाग की शुरुआत में संबंधित विशिष्ट निर्देश दिए गए हैं?
9. क्या प्रश्न पत्र के प्रशासन के लिए स्पष्ट निर्देश, यदि आवश्यक हो, दिए गए हैं?

परीक्षण को लेखक और क्षेत्र के कुछ विशेषज्ञों द्वारा समीक्षा की जानी चाहिए। उद्देश्य यह जांचना है कि क्या परीक्षण वास्तव में डिजाइन के अनुसार निर्मित किया गया है।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

4. इकाई परीक्षण की योजना बनाने में किन–किन बिंदुओं का ध्यान में रखा जाता है?

....

....

5. इकाई परीक्षण में किस प्रकार के प्रश्नों को सम्मिलित किया जा सकता है?

....

....

6. इकाई परीक्षण में समय निर्धारण के महत्वपूर्ण बिन्दु क्या हैं?

....

....

12.7 प्रश्न पत्र निर्माण

प्रश्न पत्र सामान्यतः उपयोग किया जाने वाला मूल्यांकन उपकरण है। प्रश्न पत्रों का उपयोग सारांशात्मक मूल्यांकन के लिए किया जा सकता है, जैसे किसी सत्र या वर्ष के अंत में मूल्यांकन करना। इसका उपयोग नैदानिक उद्देश्यों के लिए भी किया जा सकता है, ताकि शिक्षक नए अवधारणा को सिखाने से पहले छात्र की पूर्व शिक्षा को समझ सकें।

एक अच्छे प्रश्न पत्र का निर्माण करना एक कला है। इसके लिए उस विषय की समझ आवश्यक है जिसका परीक्षण किया जा रहा है, बच्चों द्वारा उस विषय को सीखने का तरीका, अच्छे प्रश्नों को निर्माण करने के सिद्धांत, और छात्रों की क्षमता स्तरों से मेल खाने वाला संतुलित प्रश्न पत्र विकसित करने की प्रक्रिया की जानकारी होना जरूरी है।

12.8 प्रश्न पत्र निर्माण के चरण

प्रश्न पत्र तैयार करने के लिए सात चरण होते हैं–

1. प्रश्न पत्र की योजना बनाना
2. प्रश्न पत्र का ब्लूप्रिंट तैयार करना
3. मॉडल प्रश्न पत्र तैयार करना
4. अंकन योजना तैयार करना
5. प्रश्न पत्र को परिष्कृत करना
6. प्रश्न पत्र का संपादन करना
7. प्रश्न पत्र की समीक्षा करना

12.8.1 प्रश्न पत्र की योजना बनाना–

प्रश्न पत्र के डिजाइन पर निर्णय एक नीतिगत निर्णय होता है, इसके निर्माण में निम्नलिखित बिंदुओं का ध्यान रखा जाना चाहिए–

1) विभिन्न प्रकार के प्रश्नों को दिए जाने वाले महत्व का निर्धारण करना। अर्थात, कितने निबंध, लघु उत्तर, या बहुविकल्पीय प्रश्न होने चाहिए, ताकि प्रश्न पत्र संतुलित हो सके।
2) प्रश्न पत्र में कितने प्रश्न होंगे, प्रत्येक प्रकार के प्रश्नों के लिए कितने अंक होंगे, और प्रश्न पत्र के लिए कितना समय आवंटित किया जाएगा, इस पर निर्णय लिया जाना चाहिए।
3) प्रत्येक प्रश्न पत्र में कितने अनुभाग होंगे, यह भी तय किया जाना चाहिए।
4) अधिगम उद्देश्यों और विषय के टॉपिक्स या क्षेत्रों को दिए जाने वाले महत्व का निर्धारण करना चाहिए ।

12.8.2 प्रश्न पत्र का ब्लूप्रिंट तैयार करना–

प्रश्न पत्र का ब्लूप्रिंट, जो विनिर्देशों की तालिका है, एक द्वि–आयामी चार्ट होता है जो उद्देश्यों या सीखने के संदर्भ में विभिन्न प्रश्नों (अंकों और संख्या के अनुसार) की स्थिति को दर्शाता है।

गणित प्रश्न–पत्र का ब्लूप्रिंट

(Blue Print of Mathematics Question Paper)

प्रश्न–पत्र – रेखागणित　　　　कुल प्रश्न–

कक्षा – 8　　　　अवधि– 1 घण्टा 30 मिनट

उद्देश्य		ज्ञान			बोध			अनुप्रयोग			कुल प्रश्न			कुल प्रश्न
		40%			40%			20%			100%			
		अति लघु उत्तरी प्रश्न	लघु उत्तरी प्रश्न	दीर्घ उत्तरी प्रश्न	अति लघु उत्तरी प्रश्न	लघु उत्तरी प्रश्न	दीर्घ उत्तरी प्रश्न	अति लघु उत्तरी प्रश्न	लघु उत्तरी प्रश्न	दीर्घ उत्तरी प्रश्न	अति लघु उत्तरी प्रश्न	लघु उत्तरी प्रश्न	दीर्घ उत्तरी प्रश्न	
प्रकरण	भार	20%	13%	3%	20%	13%	7%	10%	7%	7%	50%	33%	17%	100%
सरल रेखा	30%	2	1	1	2	1	-	1	1	-				9
वृत्त	37%	2	1	-	2	2	2	1	1	-				11
त्रिभुज	33%	2	2	-	2	1	-	1	-	2				10
योग	100%	6	4	1	6	4	2	3	2	2	15	10	5	30

12.8.3 मॉडल प्रश्न पत्र तैयार करना–

मॉडल प्रश्न पत्र को एक आइटम कार्ड पर लिखा जाता है। एक मॉडल आइटम कार्ड नीचे दिया गया है।

उद्देश्य	समग्री क्षेत्र / विषय	प्रश्न का प्रकार	प्रश्न	मॉडल उत्तर	उत्तर के बिंन्दु	अंक	अनुमानित कठिनाई स्तर	अनुमानित समय	अंकों के बिंदु

इस प्रकार का मॉडल आइटम कार्ड प्रश्न पत्र को व्यवस्थित और संतुलित बनाने में मदद करता है, जिससे सभी आवश्यकताओं और उद्देश्यों को पूरा किया जा सके।

12.8.4 अंकन योजना तैयार करना–

एक बार मॉडल प्रश्न पत्र तैयार हो जाने के बाद, अगला कदम अंकन योजना विकसित करना होता है। अंकन योजना का उद्देश्य उत्तर के विभिन्न भागों को अंक आवंटित करना है। अंकन योजनाएँ दो प्रकार की होती हैं– विश्लेषणात्मक (वस्तुनिष्ठ प्रकार और संक्षिप्त उत्तर प्रकार) और वैश्विक (दीर्घ उत्तर प्रकार)।

12.8.5 प्रश्न पत्र को परिष्कृत करना–

मॉडल प्रश्न पत्र और अंकन योजना तैयार हो जाने के बाद, एक महत्वपूर्ण पुनरावलोकन की सिफारिश की जाती है। प्रश्नों को परिष्कृत करते समय, निम्नलिखित प्रश्न पूछना आवश्यक है–

1) क्या प्रश्न महत्वपूर्ण सीखने के परिणाम की जांच करता है ?
2) क्या यह पूर्व निर्धारित उद्देश्य पर आधारित है ?
3) प्रश्न पाठ्यक्रम के उद्देश्यों के अनुरूप होना चाहिए।
4) प्रश्नों को व्यावसायिक कौशल और क्षमता पर जोर देना चाहिए।
5) प्रश्न पत्र को संपादित करना

12.8.6 प्रश्न पत्र का संपादन करना–

संपादन, प्रश्न पत्र तैयार करने का अगला कदम होता है। संपादन करते समय निम्नलिखित बिंदुओं की जांच करनी चाहिए–

1) **प्रश्नों का समूह बनाना**– प्रश्नों को उद्देश्यों, प्रश्नों के प्रकार, सामग्री क्षेत्र आदि के अनुसार समूहित करें।
2) **प्रश्नों की संख्या**– प्रश्नों की सही संख्या और क्रम सुनिश्चित करें।
3) **प्रशासन के लिए निर्देश**– प्रश्न पत्र के प्रशासन के लिए स्पष्ट निर्देश प्रदान करें।

12.8.7 प्रश्न पत्र की समीक्षा करना–

प्रश्न पत्र की समीक्षा करने के लिए एक चेकलिस्ट का उपयोग किया जा सकता है ताकि सभी महत्वपूर्ण बिंदुओं को सुनिश्चित किया जा सके।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

क) नीच दिये गये रिक्त स्थान में उत्तर लिखिये।

ख) इकाई के अन्त में दिये गये उत्तरों से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

7.इकाई परीक्षण की लंबाई के संबंध में मार्शल, जे.सी. और हेल्स, एल.डब्ल्यू. ने क्या सुझाव दिए?

....

....

8.प्रश्न पत्र से आपका क्या आशय है?

....

....

9.प्रश्न पत्र निर्माण के चरणों के नाम लिखिए।

....

....

12.9 सारांश

गणित विषय में शिक्षण अधिगम प्रक्रिया के उपरांत योगात्मक मूल्यांकन हेतु तैयार किया गया परीक्षण जो किसी इकाई से संबंधित हो इकाई परीक्षण कहलाता है। इकाई परीक्षण वास्तव में किसी इकाई के संदर्भ में विद्यार्थी का उपलब्धि मापन हेतु प्रयोग में लाया जाने वाला उपकरण होता है। इकाई परीक्षण का महत्व व उपयोग इस बात से अधिक बढ़ जाता है क्योंकि इसके द्वारा शिक्षक को अपनी शिक्षण प्रविधि में सुधार लाने, कमजोर विद्यार्थियों की कमियों का पता लगाने, विद्यार्थियों के अधिगम को बढ़ाने और कक्षा कक्ष वातावरण को बेहतर बनाने में मदद मिलती

है। इकाई परीक्षण निर्माण में सबसे प्रमुख चरण के अंतर्गत ब्लू प्रिन्ट बनाना होता है जिसमें प्रश्नों के प्रकार, उद्देश्य निर्धारण, कठिनाई स्तर, विषयवस्तु अधिभार आदि का महत्वपूर्ण भूमिका होती है। सत्रांत मूल्यांकन हेतु प्रश्न पत्र निर्माण किया जाता है। प्रश्न निर्माण के महत्वपूर्ण सात चरण प्रश्न पत्र की डिजाइन, प्रश्न पत्र का ब्लूप्रिंट तैयार करना, मॉडल प्रश्न पत्र तैयार करना, अंकन योजना तैयार करना, प्रश्न पत्र को परिष्कृत करना, प्रश्न पत्र का संपादन करना और प्रश्न पत्र की समीक्षा करना होते हैं जो एक अच्छे प्रश्न पत्र निर्माण के लिए आवश्यक माने जाते हैं।

12.10 अभ्यास के प्रश्न

1. इकाई परीक्षण के अर्थ एवमं महत्व को बताइये।
2. इकाई परीक्षण के उद्देश्यों का वर्णन कीजिए।
3. इकाई परीक्षण निर्माण के सोपानों का वर्णन कीजिए।
4. प्रश्न पत्र निर्माण के सोपानों का वर्णन कीजिए।

12.11 चर्चा के बिंदु

1. इकाई परीक्षण के अर्थ, उद्देश्य, महत्व और उसके निर्माण से आप क्या समझते हैं? चर्चा कीजिए।
2. प्रश्न पत्र निर्माण के चरण क्या है? विस्तार पूर्वक चर्चा कीजिए।

12.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. ब्लूम ने अपनी पुस्तक "हैंडबुक ऑन फॉर्मेटिव एंड समेटिव इवैल्युएशन ऑफ स्टूडेंट लर्निंग" में 'यूनिट' शब्द को निम्नलिखित शब्दों में परिभाषित करते हैंरू "एक यूनिट संबंधित और अर्थपूर्ण गतिविधियों की एक व्यापक श्रृंखला होती है जिसे इस प्रकार विकसित किया गया है कि यह छात्र के उद्देश्यों को प्राप्त करने, महत्वपूर्ण शैक्षिक अनुभव प्रदान करने और उपयुक्त व्यवहारात्मक परिवर्तन लाने में सक्षम हो।"
2. क्लिंटन आई. चेस के अनुसार, "परीक्षण (टेस्ट) एक प्रणालीबद्ध तरीका है जिसमें किसी व्यक्ति के प्रदर्शन की तुलना एक निर्धारित मानक से की जाती है।
3. डब्ल्यू. एन. दांडेकर के अनुसार, "इकाई परीक्षण एक छोटा परीक्षण है जिसे किसी विशेष इकाई की शिक्षण समाप्ति के बाद दिया जाता है। यह केवल प्रश्नों का एक आकस्मिक मूल्यांकन नहीं है, बल्कि इसे पूर्वनिर्धारित प्रक्रिया के अनुसार लागू किया जाना चाहिए।"
4. इकाई परीक्षण की योजना बनाने में प्रमुख चार बिंदुओं उद्देश्यानुसार अंकों का विभाजन, उप–इकाईयों के अनुसार अंकों का विभाजन, प्रश्नों के प्रकार के आधार पर अंकों का विभाजन एवं प्रश्नों के कठिनाई स्तर का निर्धारण का ध्यान रखा जाता है।
5. इकाई परीक्षण में वस्तुनिष्ठ, संक्षिप्त उत्तर और दीर्घ उत्तर प्रकार के प्रश्नों को सम्मिलित किया जा सकता है।
6. इकाई परीक्षण में समय निर्धारण के महत्वपूर्ण बिन्दु समय की पर्याप्तता, 80% छात्रों द्वारा सभी प्रश्नों का उत्तर देने का मानदंड और व्यावहारिकता हैं।
7. इकाई परीक्षण की लंबाई के संबंध में मार्शल, जे.सी. और हेल्स, एल.डब्ल्यू. ने सुझाव दिया है कि 35 से 45 बहुविकल्पीय प्रश्नों का परीक्षण 40 मिनट में संचालित किया जा सकता है।
8. प्रश्न पत्र सामान्यतः उपयोग किया जाने वाला मूल्यांकन उपकरण है। प्रश्न पत्रों का उपयोग सारांशात्मक मूल्यांकन के लिए किया जा सकता है, जैसे किसी सत्र या वर्ष के अंत में मूल्यांकन करना।
9. प्रश्न पत्र निर्माण के सात चरण इस प्रकार हैं– प्रश्न पत्र की डिजाइन, प्रश्न पत्र का ब्लूप्रिंट तैयार करना, मॉडल प्रश्न पत्र तैयार करना, अंकन योजना तैयार करना, प्रश्न पत्र को परिष्कृत करना, प्रश्न पत्र का संपादन करना और प्रश्न पत्र की समीक्षा करना।

12.13 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. अग्रवाल, ममता (1988), अंग्रेजी में मूल्यांकन की एक पुस्तिका, एनसीईआरटी, नई दिल्ली।
2. राजपूत, सरला एट अल, (2002), पेपर सेटिंग पर पुस्तिका, एनसीईआरटी, नई दिल्ली।
3. Carter, V. Good (Ed.) - "Dictionary of Education" 2nd edition (New York: McGraw Hill Book Company), 1959, p. 587.
4. Bloom and others - "Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning" (New York: McGraw Hill Book Company), 1971, p. 17.
5. W.N. Dandekar, "Evaluation in Schools"- (Poona: Shri Vidya Prakashan), 1971, p. 119.
6. B.S. Bloom and Others: "Handbook on Formative and Summative Evaluation of Student Learning" (New York: McGraw Hill Book Company), 1971, p. 20.
7. Lindquist, E.F.: "Educational Measurement" (Washingtons American Council on Education), p1966, p. 159.

B.Ed.E-33

Pedagogy of Mathematics

(गणित का अध्यापन विज्ञान)

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय,
प्रयागराज

खण्ड – 05

गणित में अधिगम संसाधन

191

इकाई 13	अधिगम संसाधन : अर्थ, प्रकार, संसाधनों का निर्माण एवं उसका उपयोग	193
इकाई 14	पाठ पुस्तक, कैलकुलेटर, प्रतिमान एवं कम्प्यूटर, ग्राफिक कैलकुलेटर	201
इकाई 15	गणित प्रयोगशाला, कक्षा–कक्षा के बाहर एवं कक्षा–कक्ष के अन्दर गणित	217

खण्ड 05 : गणित में अधिगम संसाधन

खण्ड परिचय

खण्ड 05 गणित में अधिगम संसाधन से सम्बन्धित है। अन्य खण्डों की भांति इस खण्ड को भी तीन इकाइयों में विभाजित किया गया है जो इस प्रकार है–

इकाई 13 अधिगम संसाधन के अर्थ, प्रकार, संसाधनों का निर्माण एवं उसका उपयोग से सम्बन्धित है। इस इकाई में अधिगम संसाधनों के अर्थ को समझाते हुए उसके अनेक प्रकारों जैसे– विशेष गणितीय उपकरण, चित्र या मॉडल, सूचना संप्रेषण तकनीकी, गणितीय गेम्स एवं अभ्यास सेट इत्यादि को उदाहरण सहित समझाया गया है। अधिगम संसाधनों के निर्माण एवं उपयोग की विधि के विषय में भी बहुत ही सरल ढंग से समझाया गया है।

इकाई 14 पाठ पुस्तक, कैलकुलेटर, प्रतिमान एवं कंप्यूटर ग्राफिक तथा कैलकुलेटर से सम्बन्धित है। इस इकाई में गणित पाठ पुस्तक को परिभाषित किया गया है। अनेक विद्वानों की परिभाषाएं भी दी गई हैं। पाठ पुस्तक की आवश्यकता एवं महत्व को बिन्दुवार रेखांकित किया गया है। पाठ पुस्तक की विशेषताओं को बताते हुए उसकी कमियों की तरफ भी संकेत किया गया है। गणित शिक्षण में कैलकुलेटर का उपयोग किस प्रकार किया जाना चाहिए? कैलकुलेटर के उपयोग करने संबंधी क्या भ्रांतियां हैं?इन सभी को उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट किया गया है। इस इकाई में कैलकुलेटर से संबंधित शिक्षकों की चिंताएं एवं समाधान के विषय में भी बताया गया है। कंप्यूटर के उपयोग से संबंधित चुनौतियों के विषय में भी ध्यान आकर्षित किया गया है साथ ही प्रतिरूप के संप्रत्यय एवं उसके प्रकारों के विषय में भी बताया गया है।

इकाई 15 गणित प्रयोगशाला, कक्षा–कक्षा के बाहर एवं कक्षा–कक्षा के अंदर गणित से सम्बन्धित है। इसके अंतर्गत गणित प्रयोगशाला को परिभाषित करते हुए उसके उद्देश्य के विषय में विस्तृत प्रकाश डाला गया है। गणित प्रयोगशाला के लिए आवश्यक सामग्री को बताते हुए गणित प्रयोगशाला के कार्यों को भी व्याख्यायित किया गया है। अध्ययन कक्ष के बाहर दैनिक कार्यों एवं व्यवहारों में गणित सिद्धांतों के उपयोग एवं उसके अभ्यास के विषय में बिंदुवार विस्तृत रूप में स्पष्ट किया गया है और बताया गया है कि हम विभिन्न समयों पर चाहे वह क्रय करना हो, समय देखना हो या मापन करना हो इत्यादि में गणित का उपयोग करते हैं।

इकाई– 13 : अधिगम संसाधनः अर्थ, प्रकार, संसाधनों का निर्माण एवं उसका उपयोग

इकाई की संरचना

13.1 प्रस्तावना

13.2 इकाई के उद्देश्य

13.3 अधिगम संसाधनों का अर्थ

13.4 गणितीय संसाधनों के प्रकार

13.5 गणितीय संसाधनों का निर्माण

13.6 गणितीय संसाधनों का उपयोग

13.7 सांराश

13.8 अभ्यास के प्रश्न

13.9 चर्चा के बिन्दु

13.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

13.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

13.1 प्रस्तावना

गणित को शुरू से ही नीरस तथा जटिल विषय के रूप में माना गया है तथा इसका शिक्षण कराने वाले व्यक्ति को तो कितनी ही परेशानियों का सामना करना पड़ता है। इसी शिक्षण की परेशानियों को दूर करने के लिये सहायक सामग्रिया का विचार रखा गया, जिसका कार्य किसी भी विषय के शिक्षण को रूचिपूर्ण एवं सुग्राह्य बनाया जा सके। यह सामग्रियाँ एक तरफ तो शिक्षक को शिक्षण के उद्देश्यों की प्राप्ति मे मदद प्रदान करती है दूसरी तरफ उसको उसके कौशल निखारने मे भी मदद प्रदान करती है।

शैक्षिक संसाधनों के अंतर्गत मोटे तौर पर कई प्रकार की वस्तुएं आती है उदाहरण के तौर पर आई.सी.टी., गेम, टूल इत्यादि विशेष गणितीय उपकरण के तौर पर आते हैं। कई बार हम चित्रों और मॉडलों का प्रयोग भी गणित की कक्षाओं में करते हैं जो कि गणित को और महत्वपूर्ण और सरल बनाने में मदद करते हैं कई बार शिक्षक टेलीविजन, रेडियो, कंप्यूटर, इंटरनेट आदि का भी कक्षा में प्रयोग करता है यह सब संदेश व्यवहार तकनीकी अंतर्गत आते हैं। कई समय शिक्षक के द्वारा कुछ खेल भी कक्षा में खिलाए जाते हैं तथा इसके सिवा सबसे परंपरागत शिक्षण का तरीका जो शिक्षक के सदा से सहायता करता आया है वह पुस्तक पुस्तक है। जो शिक्षक और छात्रों दोनों को ही शिक्षण में मदद प्रदान करते हैं अंत में कई बार हम दैनिक उपयोग की चीजें भी कक्षा में शिक्षक द्वारा प्रयोग की जाती है जैसे– कपड़ा, समय सारणी, रसीदें, सुचीपत्र स्केल आदि यह सब बालक के बौद्धिक स्तर को उत्तम बनाने का प्रयास करते हैं। गणित ज्ञान में निपुण होने से और तथा और इन सब चीजों का प्रयोग करने से छात्रों के अंदर गणित के प्रति प्रोत्साहन जागृत होगा वह नए–नए अनुभवों को प्राप्त कर सकेंगे उन्हें नए प्रकार के मानसिक चित्रों को बनाने का भी अभ्यास हो सकेगा उनकी जिज्ञासाओं और विचार–विमर्श अधिक प्रभावी हो पायेगा। इस इकाई में अधिगम संसाधनों का अर्थ प्रकार, निर्माण तथा उपयोग के विषय में चर्चा की गयी है।

13.2 इकाई के उद्देश्य

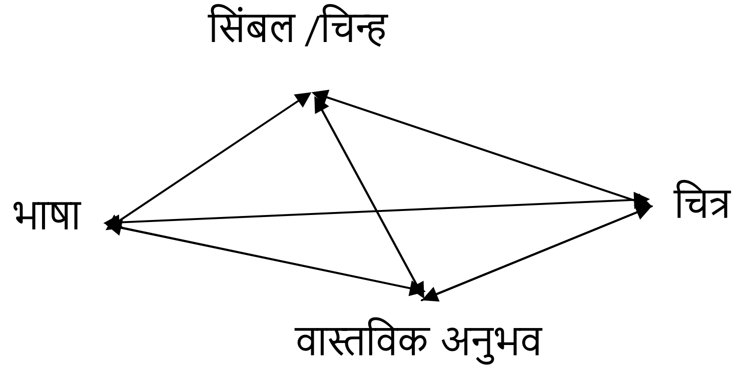
इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. अधिगम संसाधनों का अर्थ बता सकेंगे।
2. विभिन्न गणितीय संसाधनों के बारे में बता सकेंगे।
3. गणितीय संसाधन के निर्माण के समय ध्यान देने वाली सावधानियों के विषय में बता सकेंगे।
4. गणितीय संसाधनों के उपयोग सम्बन्धी कुछ विचारणीय बिन्दुओं को बता सकेंगे।

13.3 अधिगम संसाधनों का अर्थ

सूक्ष्म कल्पना जनित विचारों को यदि प्रत्यक्ष अनुभव मे आने वाली वस्तुओं जैसे पिक्चर, मॉडल आदि से कोई संबंध स्थापित करके शिक्षण कार्य किया जाए तो छात्र अधिक सरलता और स्पष्टता से उसे हृदयांगम कर पाते है। इस प्रकार की वस्तुओं को ही सामान्यतः शैक्षिक संसाधन कहा जाता है। विकीपीडिया ने इस इस प्रकार परिभाषित किया है– ''लेख, वीडियों , कम्प्यूटर साफ्टवेयर और अन्य ऐसी सामाग्री जो शिक्षक, छात्रों को उनके शैक्षिक स्तर और पाठ्यक्रम के अनुरूप शिक्षण कार्य में उपयोगी समझते है को शैक्षिक संसाधन कहा जाता है। यह आवश्यक है कि इसका स्थानीय/प्रान्तीय/राष्ट्रीय स्तर पर प्रयोग हेतु अनुमोदन ले लिया गया है। सामाजिक विचारों, पाठ्यक्रम स्तर, छात्रों की आयु मस्तिष्क विकास संबंधी धारणाओं से भी इन संसाधनों का सामान्यीकरण होना चाहिए।

जेरोम ब्रूनर के अनुसार प्रत्यक्ष क्रियाशील वस्तुओं, चित्रों और सांकेतिक शब्दावलियों का उपयोग छात्र के मस्तिक मे एक मानसिक स्टोर को विकसित कर देता है जिसको वह नये विचारो पर अपनी प्रतिक्रिया दे पाता है इनका परस्पर संबंध इस प्रकार दर्शाया जा सकता है।



इस प्रकार के शिक्षण से छात्र की पकड़ गणितीय विचारों सूत्रों पर अधिक अच्छे ढंग से हो सकेगी।

बोध प्रश्न
टिप्पणी :
(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

निम्न में सही या गलत का निशान लगायें–

1. शैक्षिक संसाधन शिक्षण को नीरस बनाते है। ( )
2. ब्रूनर के अनुसार प्रत्यक्ष क्रियाशील वस्तुयें चिन्ह छात्रों के मन में एक मानसिक स्टोर विकसित कर देती है। ( )

13.4 गणितीय संसाधनों के प्रकार

विशेष गणितीय, उपकरण, चित्र, ICT, गेम, टूल, पेपर सामान्य उपयोग की वस्तु आदि जो गणित शिक्षण को सरल ओर ग्राह्म बनाने में उपयोगी हो को गणितीय संसाधन कहा जा सकता है। गणितीय संसाधन के निम्न प्रकार हैं–

1. विशेष गणितीय उपकरण सूक्ष्म गणितीय विचारों सूत्रों को मॉडलों के माध्यमों से समझाते है।

2. चित्र/मॉडल उंगली, अबेकस, बडिस्ट्रिग छात्रों को संख्याओं का क्रम, पैटर्न और अन्य लक्षण सरलता मे समझाने में बड़े सहायक सिद्ध हुए हैं।

3.सूचना और संदेश व्यवहार तकनीक (ICT - Information and Communication Technology)- इससे तात्पर्य है रोबोट, केल्कुलेटर, टेलीविजन, रेडियो, आडियो/विडियो टेप, डिजिटल कैमरा, कम्प्यूटर, इंटरनेट का उपयोग। गणितीय सोच विकसित करने मे उपर्युक्त का प्रयोग लाभकारी सिद्ध हो सकता है पर शिक्षक को भी इनके प्रयोग की अच्छी ट्रेनिंग होनी चाहिए।

4. **गणितीय गेम्स–** पूरी कक्षा, छोटे समूह या जोड़े बना कर खेले जा सकते है। जिसमें छात्र अधिक तन्मयता और रूचि से गणित के विचारों और सूत्रों को हृदयांगम कर सकेगे। अनेको प्रकार के खेलों से अभ्यास रूचिकर ढंग मे

करवाया जा सकता है कौन सा खेल खेलना उचित होगा यह शिक्षक की सोच, छात्र का मानसिक स्तर और पाठ्यक्रम पर निर्भर होगा। खेल मे जीतने की एक प्रकार से चुनौती मिलती है जो छात्रों मे जोश भरता है और वह अधिक अच्छे ढंग से सोचकर गणितीय सूत्रों पर कार्य करता है। उचित खेल के चुनाव से छात्रों मे गणितीय सूत्रों के सही चुनाव, अभ्यास की समझ का तेजी से विकास हो सकता है।

5. **अभ्यास शीट व पुस्तक–** यह पुरानी प्रयोग मे आने वाली टेक्नीक है जिसमें प्रायः छात्र को कठिनाई होती है। वह गणित को कठिन, नीरस, उबाउ विषय मान लेता है। अच्छा होगा कि इनको आधार भूत नमूना मानते हुए छात्र को मिलते जुलते प्रश्न बनाना और हल करने का अभ्यास कराया जाए। इसमें छात्र की जिज्ञासा गणितीय विचारों मे बढ़ेगी तथा वह इसमे कुछ नया करने की ओर प्रवृत्त होगा किन्तु यह सावधानी रखनी पड़ेगी कि कही छात्र इसी को वास्तविक दुनिया न मान ले। अभ्यास शीट और पुस्तक आधारित कार्य सदैव छात्र की प्रतिभा मेघा शक्ति का सही आंकलन है – यह आवश्यक नही। अधिक अच्छा होगा कि अभ्यास शीट पर किये गये कार्य तथा अध्यापक द्वारा दिये गये कार्य के परिणामों पर उचित तुलनात्मक समीक्षा की जाय। यह कहा जा सकता है कि अभ्यास शीट कार्य एक स्प्रिंग बोर्ड की तरह छात्र की गणितीय सोच शक्ति तथा वास्तविक गणित से अधिक मजबूती से जुड़ने को प्रवृत्त करेगी।

6. **सामान्य उपयोग की वस्तुएं–** गणित अध्यापक छात्रों के बौद्धिक स्तर व पाठ्यक्रम के अनुसार सामान्य जीवनोप योगी वस्तुओं का उपयोग कर सकता है जैसे पैक करने का समान, विभिन्न छपे डिजाइनों वाले कागज। कपड़ा, समय सारिणी रसीदे, सूची पत्र, स्केल आधारित नक्शे विभिन्न मापक यन्त्र आदि आदि। पूरी कक्षा, छोटे, ग्रुप, मॉडल खेल क्रिया कलाप मे इस प्रकार से शिक्षण मे नवीनता रोचकता उत्पन्न की जा सकती है। जानी पहचानी व उपयोगी वस्तुओं से गणित का संबंध जुड़ने से छात्र आनन्दित भी होगा गणितज्ञान में निपुण होने की ओर आकर्षित भी।

कहा जा सकता है कि इससे–

(1) छात्र गणित ज्ञान के प्रति प्रोत्साहित होंगे।

(2) पढ़ने–पढ़ाने में नये अनुभव होंगे।

(3) दृश्य उपकरण छात्र मस्तिष्क मे मानसिक चित्र बना सकेंगे।

(4) गणितीय विचारों का प्रवाह समुचित रूप से छात्र मस्तिष्क मे प्रभावी रूप से चल सकेगा।

(5) छात्रों मे गणितीय विचारों के प्रति जिज्ञासा और परस्पर विचार विनिमय और अधिक प्रभावी ढंग से हो सकेगा।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए–

3. गेम, टूल, पेपर इत्यादि को .... कहा जा सकता है।
4. .... सूक्ष्म गणितीय विचारों को मॉडलों के माध्यम से समझाते हैं।

5. टेलिविजन, रेडियो, इंटरनेट आदि .... के उदाहारण हैं।
6. .... छात्रों में गणित की समझविकसित करने में मदद करते हैं।
7. गणित की जानकारी का सबसे पुराना साधन .... है।
8. गणित का अध्यापक छात्रों के .... को बढ़ाने के लिए सामान्य वस्तुएं उपयोग कर सकता है।

13.5 गणितीय संसाधनों का निर्माण

जैसा कि जानते है कि शैक्षिक संसाधन शिक्षण प्रक्रिया की प्रभावशीलता को बढ़ाने के कार्य करते है। परन्तु गणित विषय के संदर्भ मे यह बात ज्यादा प्रसांगिक लगती है। गणित वैसे तो अमूर्त विषय है इसकी अधिकतर समस्यायें मूर्त नहीं होती। अतः शिक्षक के सामने कई बार शिक्षण के समय यह प्रश्न आता है कि समस्या को छात्रों के सामने कैसे रखा जाये या उसे कैसे छात्रों को समझाया जाये ऐसी स्थिति मे हमे गणित सहायक समाग्री की आवश्यकता प्रतीत होती है। यह शिक्षण सहायक सामग्रिया गणित विषय के लिये अत्यन्त उपयोगी सिद्ध हुई है।

- विषय मे रूचि जागृत करने में
- छात्रों का ध्यान केन्द्रिकरण में
- यह क्रियात्मकता पर बल देती है
- छात्रों को मूर्त तथा प्रत्यक्ष अनुभव प्रदान करती है।
- शिक्षण मे विविधता लाती है।
- शिक्षण प्रक्रिया को प्रभावशाली बनाती है।

उर्पयुक्त बातों से स्पष्ट होता है कि गणित सहायक सामाग्री की महत्ता कितनी है। अतः इनको निर्मित करते वक्त हमें कुछ बातों को ध्यान मे रखना पड़ता है–

- सर्वप्रथम शिक्षण के उद्देश्यों के अनुरूप
- छात्रों का मानसिक/बौद्धिक स्तर के अनुरूप
- सामग्री की रोचकता
- विषय अनुरूपता
- सामग्री की दृष्टिगोचरता
- सामग्री का मूल्य/उपलब्धता
- सहायक सामाग्री उपयोग मे आसान होनी चाहिये
- यदि रंगो का प्रयोग किया गया है तो वह चटक रंग हो तो बेहतर है उदाहरण लाल, नीला, पीला इत्यादि
- यदि चित्र है तो स्पष्ट सुन्दर तथा उचित अनुपात मे होने चाहिये
- यदि मॉडल प्रतिमान है, तो उसकी प्रकृति ऐसी होनी चाहिये कि छात्र उसे समझ सके।
- छात्रो के सामाजिक तथा सांस्कृतिक वातावरण से मेल खाता होना चाहिये
- आधुनिक तकनीकों को समावेश किया जा सकता है बशर्ते छात्र उस तकनीक से भलिभांति परिचित हो, उसकी भाषा से परिचित हो तथा वह तकनीक शिक्षण के सही अर्थ को प्रदर्शित कर सके।
- सहायक सामाग्री का वजन ज्यादा नही होना चाहिये ताकि उसको स्थानांतरित करने मे परेशान ना हो।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

9. शिक्षण सामग्रियों का निर्माण गणित शिक्षण में क्या सहायता प्रदान करता है?

....

....

13.6 गणितीय संसाधनों का उपयोग

ठोस चित्र मय संकेतो से मानसिक गणितीय विचारों तक सही सही पहुंचने में कुछ छात्रों को कठिनाई हो सकती है। यह कठिनाई किसी विशेष संकेत से या उस क्षेत्र विशेष के छात्रों की सामान्य कठिनाई हो सकती है। संकेतो माडलों आदि का चयन तो अध्यापक ही करेगा जो उसकी समझ से विशेष गणितीय विचार संबंधित संकेत/माडल अन्तर्हित है जब कि छात्र का बौद्धिक स्तर ठीक ठीक मेल नही खा रहा है। इस प्रकार इनका चयन संबंधी बड़ी जिम्मेदारी अध्यापक पर होगी। एक ही कक्षा के भिन्न भिन्न छात्र भिन्न भिन्न अर्थ समझ सकते है। जो इनके बौद्धिक स्तर पर निर्भर होगा। अध्यापक को इन अन्तरों को समझना होगा और उसका उचित निराकरण करने उपाय भी ढूंढ़ने होगे। अध्यापक को संकेतो/मॉडलों के निर्माण कर्ताओं , छात्रों और अपने बौद्धिक स्तर के सूक्ष्म अन्तरों पर विशेष ध्यान देना होगा।

कक्षा में सामान्यः तौर पर 3 बौद्धिक स्तर के छात्र होते है– सामान्य सामान्य से अधिक तथा सामान्य से कम। तीनों स्तर पर एक ही संकेतो मॉडल उपयुक्त हो भी सकता है पर यह आवश्यक नहीं। अध्यापक को तीनों स्तरों के छात्र– समूहों की आवश्यकतानुसार संकेतो मॉडलों का चयन करना होगा। प्रभावी शिक्षण के लिये यह आवश्यक गुण माना जायेगा कि शिक्षक तीनों स्तरों के छात्र समूहों के लिये उपयुक्त मॉडल, चित्र, भाषा और सिम्बलों का चयन करे और प्रभावी ढंग से छात्रो को गणितीय विचार ह्दयांगम करा सके।

गणितीय शिक्षण संबंधी शोधो के परिणामों से स्पष्ट है कि शिक्षक की शैक्षिक, संसाधन चयन संबंधी योग्यता पर बहुत कुछ निर्भर रहेगा कि कौन सी संसाधन कब और किस बौद्धिक स्तर के छात्र के लिये करना है। तीनों स्तरों के छात्र समूह जो एक साथ संसाधन कब और किस बौद्धिक स्तर के छात्र के लिये करना है। तीनों स्तरों के छात्र समूह जो एक साथ कक्षा में है को उचित परामर्श/विचार –विनिमय से संतुष्ट करना है। उनकी जिज्ञासा के सूक्ष्म अन्तरों को समझना और उनका निराकरण करना अध्यापक की स्वयं की समस्या है जिसका हल उसे स्वयं ही ढूढंना होगा। शिक्षण संसाधनो पर अत्यधिक निर्भर हो जाना भी अनुत्पादक सिद्ध हो सकता है। यदि कम उदाहरण दिये जायेगे तो छात्र त्रुटिपूर्ण अर्थ भी समझ सकते है। चयन में लचीलापन लाने से कक्षा में छात्रों में यह संस्कार विकसित होगा कि किसी भी गणितीय समस्या का हल खोजने के एक से अधिक विधियॉ हो सकती है– इस प्रकार गणितीय खोज के संस्कारों का बीजारोपण भी छात्रों के मन–मस्तिष्क पर हो सकेगा। यह कहना उचित होगा कि गणितीय संसाधन के चयन मे छात्र–छात्र संवाद और छात्र– अध्यापक संवाद की भी एक भूमिका होनी चाहिए जिससे कि सही गणितीय समझ का विकास हो सके, त्रुटिपूर्ण अर्थ जल्दी मे पकड़ मे आ सके तथ उसे विशेष संसाधन के प्रभावीपन होने की सही संभावना का पता चल सके।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

10. कक्षा में समान्यतः कितने प्रकार के बौद्धिक स्तर के छात्र होते हैं?

....

....

11. शिक्षक को शिक्षण सहायक सामाग्री के चयन में क्या सावधानी बरतनी चाहिए?

....

....

13.7 सारांश

गणित वैसे तो मूल रूप से एक जटिल तथा नीरस विषय माना गया है, इसका शिक्षण करने वाले व्यक्ति को कितनी ही परेशानियों का सामना करना पड़ता है इसी को दूर करने के लिए ताकि गणित शिक्षण प्रभावशाली हो सके तथा छात्रों को आसानी से वह समझ में आए हम कुछ संसाधनों का प्रयोग करते हैं जिन्हें शैक्षिक संसाधन भी कहा जाता है। विकिपीडिया ने इसको इस प्रकार परिभाषित किया है लेख वीडियो कंप्यूटर सॉफ्टवेयर तथा अन्य कोई भी सामग्री जो शिक्षक को छात्रों के उनकी शैक्षिक स्तर और पाठ्यक्रम के अनुरूप शिक्षण कार्य करने में उपयोगिता प्रदान करें उसे शैक्षिक संसाधन कहते हैं। मोटे तौर पर कक्षा में तीन प्रकार के बौद्धिक स्तर के छात्र होते हैं सामान्य, सामान्य से अधिक, सामान्य से कम तीनों स्तरों पर एक ही प्रकार के चित्रों संकेतों का उपयोग करना आवश्यक नहीं है यह अध्यापक के ऊपर निर्भर करता है। जबकि वह अपने प्रभावी शिक्षण के लिए किस प्रकार के छात्रों पर किस प्रकार का चित्र या शैक्षिक संसाधन का उपयोग करता है यह अत्यधिक जरूरी है क्योंकि अगर क्योंकि अगर उच्च बौद्धिक स्तर के छात्रों के ऊपर निम्न प्रकार के शैक्षिक संसाधन का उपयोग किया जाएगा तो उनका समय खराब होगा या निम्न बौद्धिक स्तर के छात्रों के ऊपर उच्च मानसिक स्तर के शैक्षिक संसाधनों का उपयोग किया जाएगा तो उनको समझ में ही नहीं आएगा जिससे शैक्षिक संसाधन का मूलतः उद्देश्य ही बेकार हो जाएगा। शैक्षिक संसाधनों को निर्मित भी किया जा सकता है गणित आमतौर पर वैसे तो अमूर्त विषय हैं परंतु शैक्षिक संसाधन निर्मित करने से उनमें मूर्तता आ जाती है। यह कई प्रकार से छात्रों के लिए उपयोगी सिद्ध होते हैं जैसे विषय को विषय में रुचि जागृत करने में छात्रों का ध्यान केंद्रीकरण करने में इसके द्वारा छात्र क्रियात्मक पर बल देते हैं शिक्षण में प्रभाविता आती है तथा शिक्षण प्रक्रिया को प्रभावशाली बनाते हैं अंत में हम कह सकते हैं कि जब भी शिक्षक गणित शिक्षण सामग्रियों को बनाए तो वह कुछ चीजों का अवश्य ध्यान रखें सर्वप्रथम शिक्षण के उद्देश्यों के और छात्रों के बौद्धिक स्तर के अनुरूप हो, सामग्री रोचक हो उसमें दृष्टिगोचरता हो तथा उसकी उपलब्धता तथा कीमत भी सही हूं उसमें चटक रंगों का प्रयोग किया जाना चाहिए चित्र अधिक स्पष्ट होने चाहिए तथा वह मूल से बिल्कुल भिन्न नहीं नहीं होने चाहिए तथा उसमे छात्र के सामाजिक और सांस्कृतिक वातावरण का भए समावेश होना चाहिए।

13.8 अभ्यास के प्रश्न

1. गणित शिक्षण संसाधन से आप क्या समझते हैं?
2. गणित संसाधनो के प्रकार बताएं?
3. गणित संसाधनों के निर्माण मे किन बातों का ध्यान रखना चाहिए?

4. शिक्षण में गणित संसाधनोंका उपयोग क्यों करना चाहिए?

13.9 चर्चा के बिन्दु

1. गणित संसाधनों का निर्माण किस प्रकार किया जाता है? चर्चा कीजिए।
2. गणित संसाधनों का प्रयोग कक्षा में किस प्रकार किया जाय जिससे अधिकतम लाभ हो सके? चर्चा कीजिए।

13.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. असत्य
2. सत्य
3. गणितिय संसाधन
4. विशेष गणितिए उपकरण
5. सूचना और संदेश व्यवहार तकनीक
6. गणितीय गेम्स
7. पुस्तक
8. बौद्धिक स्तर
9. शिक्षण सामग्रियों का निर्माण गणित शिक्षण रुचि विकसित करने, ध्यान केंदीयकरण करने तथा शिक्षण प्रक्रिया को प्रभावशाली बनती है।
10. कक्षा मे समान्यतः तीन प्रकार के बौद्धिक स्तर के छात्र होते हैं।
11. शिक्षक को शिक्षण सहायक सामाग्री के चयन करते समय पाठ के उद्देश्यों तथा छात्र के मानसिक स्तर को ध्यान में रखना चाहिए।

13.11 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. बीईएस–009 प्राथमिक विद्यालय के लिए गणित का शिक्षण(2012), लर्नर ब्लॉक 1–4, SLM,नई दिल्लीः इग्नू।
2. एनसीईआरटी (2005), राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005. नई दिल्लीः एनसीईआरटी।
3. एनसीईआरटी (2006), पोजिशन पेपरः नेशनल फोकस ग्रुप ऑन टीचिंग ऑफगणित, नई दिल्लीः एनसीईआरटी।
4. नसीटीई (2009), शिक्षक शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यक्रम ढांचा, नया दिल्लीः राष्ट्रीय शिक्षक शिक्षा परिषद।
5. हेलॉक, डेरेक (2006), प्राथमिक शिक्षकों के लिए गणित की व्याख्या (तीसरा) सीजे प्रकाशन इंडिया प्राइवेट लिमिटेड।

इकाई– 14 : पाठ पुस्तक, कैलकुलेटर, प्रतिमान एवं कम्प्यूटर, ग्राफिक कैलकुलेटर

इकाई की संरचना

14.1 प्रस्तावना

14.2 इकाई के उद्देश्य

14.3 गणित पाठ्यपुस्तक की परिभाषा

- 14.3.1 पाठ्यपुस्तक की आवश्यकता एवं महत्व
- 14.3.2 एक अच्छी गणित पाठ्यपुस्तक के आधार
- 14.3.3 गणित पाठ्यपुस्तक की कमियाँ

14.4 गणित शिक्षण में कैल्कुलेटर

- 14.4.1 कैल्कुलेटर से संबंधित भ्रांतियाँ और उनका समाधान

14.5 अभिभावकों द्वारा जानने योग्य कैल्कुलेटर उपयोग के लाभ

14.6 कैल्कुलेटर सम्बन्धित विद्यालयी शिक्षकों की चिन्ताएँ तथा सम्भावित समाधान

14.7 ग्राफिंग कैल्कुलेटर तथा उनका उपयोग

14.8 शिक्षक की भूमिका में कंप्यूटर

14.9 कंप्यूटर शिक्षण के लाभ

14.10 कंप्यूटर शिक्षण के समक्ष चुनौतियाँ तथा उनका समाधान

14.11 प्रतिरूप

14.12 सारांश

14.13 अभ्यास के प्रश्न

14.14 चर्चा के बिन्दु

14.15 बोध प्रश्नों के उत्तर

14.16 कुछ उपयोगी पुस्तकें

14.1 प्रस्तावना

पाठ्य पुस्तक का अपना एक महत्व है इसके अनेक कारण हैं। पाठ्य पुस्तक शिक्षक तथा छात्र दोनों को मदद प्रदान करती है। स्व–अधिगम में भी सहायक होती है। इसके द्वारा प्रदान किया गया ज्ञान प्रमाणिक होता है। यह शैक्षिक उद्देश्यों की प्राप्ति तथा शिक्षण सहायक सामग्रियों को एकत्रित तथा चयनित करने में भी मदद प्रदान करती है।जैसा कि हमें विदित ही है कि दुनिया में प्रत्येक चीजों के कुछ फायदे होते हैं तथा उससे कुछ हानियां या कमियां भी होती है। पाठ्य पुस्तक में भी कुछ कमियां पाई जाती हैं। सर्वप्रथम तो यह है कि इसके द्वारा छात्र पूर्णतया किताबी कीड़ा बन जाता है। इसके द्वारा प्रदान किए ज्ञान में अनुभव की कमी होती है। यह एक तरह से शिक्षण प्रक्रिया को भी सीमित करती है तथा इसके द्वारा प्रदान किया ज्ञान कभी भी नबीन नहीं हो सकता। इसकी प्रामाणिकता हमेशा लेखक की योग्यता पर ही निर्भर करती है। वर्तमान में अब गणित शिक्षण को प्रभावी बनाने के लिए कैलकुलेटर नामक यंत्र का भी उपयोग किया जा रहा है क्योंकि गणित एक अमूर्त विषय है जिसमें संख्याओं का जोड़ना, घटाना, भाग तथा गुण आदि जैसी क्रियाएं की जाती हैं। अतः एक यंत्र का आविष्कार हुआ जिसमें हम यह सारी क्रियाएं बहुत ही जल्दी कर लेते हैं। परंतु कैलकुलेटर के संबंध में कुछ भ्रांतियां भी अवश्य प्रचलित है जिनका निराकरण भी बहुत जरूरी है। सर्वप्रथम तो यह कैलकुलेटर एक बैसाखी है जैसा प्रयोग करोगे वैसा ही वह फल देगा। वह अपने आप पर कोई भी कार्य करने में सक्षम नहीं है। दूसरा यदि कैलकुलेटर के द्वारा कार्य किया जाएगा तो छात्रों में उत्साह की कमी हो जाएगी तथा वह गणित को सीखेंगे नहीं एवं गणित की मूलभूत क्रियाओं को करने में बालक अपने आप को असमर्थ समझेगा।

वर्तमान में एक चीज का गणित में काफी उपयोग किया जा रहा है जिसको हम कंप्यूटर मानते हैं कंप्यूटर के द्वारा कोई भी चीज संख्या का गणितीय भाग बहुत ही जल्दी से हल कर लिया जाता है। इसके पास मुद्रण तथा विस्तार की भी अपार क्षमता है।

गणित में आज के समय में कुछ प्रतिमॉनों का भी उपयोग किया जा रहा है प्रतिमॉनों से हमारा तात्पर्य ऐसे मॉडलों से है जो वास्तविक परिस्थितियों का कुछ प्रतिरूप होते हैं। इनका उपयोग शिक्षण में तभी किया जाता है जब प्रस्तुत की जाने वाली सामग्री या तो महंगी हो या जटिल हो या उसका आकार या तो बहुत बड़ा हो या छोटा हो। शिक्षण में इनके का उपयोग करने के लिए दो प्रकार के प्रतिमॉनों यानी मॉडलों का उपयोग किया जाता है। पहले वह जो एक जगह पर स्थिर होते हैं। यह छात्र को मूल संकल्पना के बारे में अच्छी तरह समझा सकते हैं। दूसरा क्रियात्मक, यह वह प्रतिमॉन है जिसके द्वारा किसी भी कार्य को कैसे किया जाता है यह समझाया जाता है। इस इकाई में इन्ही सब प्रकार के अधिगम सहायक सामग्रियों जैसे कि कैल्कुलेटर, कंप्यूटर, गणित पाठ्यपुस्तक इत्यादि के बारे में चर्चा की गई है।

14.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. गणित पाठ्यपुस्तक की आवश्यकता बता सकेंगे।
2. एक अच्छी गणित पाठ्यपुस्तक की विशेषताओं को बता सकेंगे।
3. गणित शिक्षक के पाठ्यपुस्तक की उपयोगिता पर संक्षिप्त निबन्ध लिख सकेंगे।
4. कैल्कुलेटर का अर्थ बता सकेंगे।
5. कैल्कुलेटर से सम्बन्धित विभिन्न भ्रांतियों तथा उनका निवारण कर सकेंगे।
6. कैल्कुलेटर के उपयोग लिख सकेंगे।
7. ग्राफिंग कैल्कुलेटर पर संक्षिप्त टिप्पणी लिख सकेंगे।
8. कंप्यूटर शिक्षण के लाभों तथा उनके शिक्षण में आने वाली बाधाओं की सूची बना सकेंगे।
9. गणित शिक्षण में प्रतिमान के उपयोग को बता सकेंगे।

14.3 गणित पाठ्यपुस्तक की परिभाषा

पाठ्यपुस्तक की निम्नलिखित परिभाषाएँ हैं–

बैकस्टर के विश्वकोश के अनुसार–

''पाठ्यपुस्तक एक अनुदेशनों की पुस्तिका है जिसमें उस विषय के सभी सिद्धांतों को अनुदेशनों के माध्यम से दिया जाता है।''

एजूकेशन रिसर्च (तृतीय अध्याय) के विश्वकोश के अनुसार–

''पाठ्यपुस्तक एक अधिगम का यन्त्र है जिसको ज्यादातर विद्यालय अपने अनुदेशनों के कार्यक्रमों को मदद प्रदान करने के लिए उपयोग करते हैं। सामान्यतः यह पुस्तिका के रुप में मुद्रित तथा जिल्ददार होती है जो छात्रों को रुपांतरित की जाती है तथा अनुदेशन माध्यम के लिए उपयोग की जाती है।''

सी०वी० गुड के अनुसार–

''पाठ्यपुस्तक एक ऐसी पुस्तिका है जो किसी विशेष विषय से संबंधित विषयवस्तु को एक व्यवस्थित क्रम में रखती है तथा किसी विशेष पाठ्यक्रम के लिए अधिगम सामग्रियों के प्रमुख स्त्रोत की तरह कार्य करती है।''

मार्श (1992) के अनुसार–

''शिक्षकों द्वारा छात्रों को प्रोत्साहित किया जाने वाला उपकरण जो कि छात्रों को किसी विशेष प्रकरण या समस्या पर अधिकतम ज्ञान देता है।''

एन. के. कोचर के अनुसार–

''एक विशेष प्रकार की लिखित पुस्तक जिसमें चयनित विषयवस्तु को एक व्यवस्थित क्रम में रखा गया होता है।''

उपर्युक्त परिभाषाओं के अध्ययन के पश्चात् आप समझ गए होंगे कि पाठ्यपुस्तक है :–

- लिखित तथा मुद्रित पुस्तिका।
- विषय विशेष की आधिकारिक पुस्तक।
- चयनित ज्ञान की पुस्तिका।
- यह शिक्षक तथा छात्रों दोनों की मदद करती है।
- किसी विषय के शैक्षिक उद्देश्यों को प्राप्त कराने वाला उपकरण।
- किसी विषय में ज्ञान प्रदान करने वाला प्रमुख स्त्रोत/साधन।
- यह औपचारिक तथा अनौपचारिक दोनों प्रकार के शिक्षा के साधनों में मदद प्रदान करती है।

14.3.1 पाठ्यपुस्तक की आवश्यकता एवं महत्व

बार तथा बर्तन का कथन कि पाठ्यपुस्तक किसी राष्ट्र, समाज या व्यक्ति के लिए महत्वपूर्ण साधन है स्वयं पाठ्यपुस्तक की आवश्यकता की कहानी कहता है। गणित की जरुरत मनुष्य को जीवन के प्रत्येक क्षण में होती

है अतः उसको पूरा करने के लिए पाठ्यपुस्तक की आवश्यकता प्रतीत होती है। इसलिए गणित की आवश्यकता को बताने के लिए निम्नलिखित कारण दिए हुए हैं–

- **शिक्षक की मदद के लिए**–पाठ्यपुस्तक शिक्षक को जरुरी दिशा निर्देश प्रदान करती है। वह एक सहायक पुस्तिका के तौर पर शिक्षक को कक्षा में प्रश्न पूछने, अभ्यास प्रश्न देने, चित्र को समझाने तथा अन्य शैक्षिक क्रियाओं में मदद प्रदान करती है। कभी कभार वह शिक्षण विधियों की भी जानकारी प्रदान करके शिक्षक का उचित मार्गदर्शन करती है।

- **छात्र की मदद करती है**– शिक्षक के साथ छात्र को तो पाठयपुस्तक सबसे ज्यादा मदद प्रदान करती है। इसके माध्यम से छात्र को पाठ्यपुस्तक के बारे में सम्पूर्ण जानकारी हो जाती है। उसे कितना तथा क्या पढ़ना है? उसे अध्ययन के लिए पूर्णतः शिक्षक पर निर्भर नहीं रहना पड़ता तथा वह चाहे तो शिक्षक के पढ़ाने से पहले ही उस पाठ को पढ़ सकता है। पाठ्यपुस्तक छात्र को अभ्यास का अवसर प्रदान करती है, जिससे वह परीक्षा में अधिक अंक ला सके।

- **शिक्षण को प्रभावी बनाने के लिए**–शिक्षण प्रभावी तभी हो सकता है जब शिक्षक तथा छात्र दोनों अपना कार्य पूर्ण मनोयोग से करे तथा निर्धारित उद्देश्यों को निश्चित समय में प्राप्त करें। पाठ्यपुस्तक शिक्षण को सफल बनाने का प्रयास करती है।

- **स्व अधिगम में सहायक**–पाठ्यपुस्तक शिक्षा के औपचारिक तथा अनौपचारिक साधन के रुप में प्रयुक्त की जा सकती है। छात्र इसके माध्यम से स्वयं अध्ययन करके ज्ञान प्राप्त कर सकते हैं। अतः यदि पाठ्यपुस्तक ठीक प्रकार से लिखी गई हो तो छात्र को स्व अधिगम के लिए प्रेरित करती है तथा यह तो सिद्ध है कि व्यक्ति जब तक स्वयं अध्ययन नहीं करेगा, तब तक वह विद्वान नहीं हो सकता चाहे शिक्षक कितना ही अच्छा क्यों न हो।

- **प्रामाणिक ज्ञान प्रदान करने के लिए**–पाठ्यपुस्तक में ज्ञान को तार्किक तरीके से एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित किया जाता है। अतः किसी ज्ञान के उत्सुक छात्र के लिए पुस्तक एक प्रामाणिक आधार है, ज्ञान प्रदान करने का। इसमें ज्ञान को प्राप्त करने के लिए निश्चित आधार प्रदान किए जाते हैं।

- **उद्देश्यों की प्राप्ति हेतु**–सम्पूर्ण शिक्षण की प्रक्रिया कुछ निश्चित उद्देश्यों को प्राप्त करने के लिए संपादित की जाती है। पाठ्यपुस्तक उद्देश्यों को प्राप्त कराने में शिक्षक को मदद प्रदान करती है। पाठ्यपुस्तक के सहयोग से ही शिक्षक उद्देश्यों को प्राप्त करता है।

- **शिक्षण सहायक सामग्री के रूप में**– पाठ्यपुस्तक शिक्षण सहायक सामग्री के रुप में भी शिक्षक को शिक्षण में मदद प्रदान करता है। शिक्षक को शिक्षण को सफल बनाने के लिए कई अन्य साधनों की भी जरुरत पड़ती है जिसमें पाठ्यपुस्तक भी एक साधन है। पाठ्यपुस्तक में निहित ज्ञान तथा अभ्यास कार्य शिक्षक को शिक्षण में सहायता प्रदान करते है।

- **अभ्यास प्रदान करने के लिए**– गणित को हमेशा से ही एक कठिन विषय के तौर पर समझा गया। अधिगम के द्वितीय नियम के अनुसार "**ज्यादा अभ्यास ज्यादा मजबूत बन्ध**" (उद्दीपक अनुक्रिया बन्ध)। गणित पाठ्यपुस्तक में मौजूद अभ्यास कार्य छात्र को सीखे गए ज्ञान को दोहराने का अवसर प्रदान करते हैं, जो विषय की समझ के लिए अत्यंत जरुरी ळें

14.3.2 एक अच्छी गणित पाठ्यपुस्तक के आधार

अभी तक आपने पाठ्यपुस्तक का अर्थ तथा आवश्यकता के बारे में अध्ययन किया। इसके बाद मस्तिष्क में पहला प्रश्न यह आता है कि अच्छी पाठ्यपुस्तक की क्या विशेषता है? इसको समझने के लिए दो प्रमुख आधार हैं–

1) भौतिक आधार तथा 2) शैक्षिक आधार या ज्ञान का आधार।

पाठ्यपुस्तक के आधार

भौतिक आधार (Physical Aspects)	शैक्षिक आधार (Academic Aspects)
1. मूल्य	1. विषयवस्तु
2. प्रयुक्त कागज	2. प्रस्तुतिकरण
3. जिल्द का प्रकार	3. भाषा शैली
4. छपाई	4. उदाहरणों का प्रयोग
5. आकार व बनावट	5. अभ्यास कार्य
6. विविध कारक	

1.भौतिक आधार

(1) **मूल्य** –पुस्तक का मूल्य न ज्यादा होना चाहिए न कम, बल्कि औसत होना चाहिए, ताकि ज्यादा से ज्यादा छात्र उसे खरीद सकें।

(2) **प्रयुक्त कागज़** –की गुणवत्ता अच्छी होनी चाहिए।

– मोटा तथा चिकना होना चाहिए।

– ज्यादा समय तक चलने वाला ;स्वदह रेंजपदहद्ध होना चाहिए।

(3) **जिल्द** –पुस्तक का मुख्य पृष्ठ प्रभावी (आकर्षक) तथा मजबूत होना चाहिए।

–जिल्द मजबूत होनी चाहिए ताकि सिलाई न खुले।

– किताब को खोलने में परेशानी नही होनी चाहिए।

– पुस्तक के पृष्ठों की कटाई उचित प्रकार से होनी चाहिए।

(4) छपाई —प्रत्येक अक्षर में स्पष्टता होनी चाहिए, ताकि पढ़ने में कठिनाई न हो।

—शुद्धता होनी चाहिए, वर्तनी की गलतियाँ (Spelling mistakes) न हों।

– दो शब्दों तथा दो पंक्तियों के बीच का अंतर निर्धारित होना चाहिए।

– हाशिया पूरा **धूतर** होना चाहिए।

– प्रत्येक नया अध्याय नए पृष्ठ से शुरु होना चाहिए।

– दो प्रमुख विषय बिन्दुओं में अन्तर होना चाहिए ताकि वह स्पष्ट दिखाई दे।

(5) आकार तथा बनावट–

पाठ्यपुस्तक का आकार संतुलित होना चाहिए। न तो बहुत बड़ा और न ही बहुत छोटा ताकि उसे उठाने तथा एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने में विद्यार्थी को परेशानी का अनुभव हो।

2. शैक्षिक आधार –

(1)विषय वस्तु —छात्रों के मानसिक स्तर के अनूकूल होनी चाहिए।

– अद्यतन होनी चाहिए।

– में ज्ञान प्रामाणिक होना चाहिए।

– छात्रों की उत्सुकता बनाए रखने वाली होनी चाहिए।

– में संदेशों को भी दिया जाना चाहिए ताकि नवीन अध्ययन के लिए वह मदद करे।

(2) प्रस्तुतिकरण – विषय को उपविषय/प्रकरण में भली प्रकार विभाजित किया जाना चाहिए।

– प्रत्येक प्रकरण में पूर्ण जानकारी होनी चाहिए तथा पृष्ठों की संख्या का ध्यान रखा जाना चाहिए।

– प्रस्तुतिकरण स्पष्ट तथा सरल होना चाहिए।

– प्रकरणों को सरल से कठिन के आधार पर व्यवस्थित करना चाहिए।

(3) भाषा शैली– पुस्तक में प्रयुक्त भाषा शैली शुद्ध तथा स्पष्ट होनी चाहिए।

– भाषा में कठिन शब्दों का प्रयोग नहीं किया जाना चाहिए यदि किया गया हो तो उसका अर्थ बता देना चाहिए।

– भाषा का स्तर छात्रों के मानसिक स्तर के अनुकूल होना चाहिए।

(4) उदाहरणों का प्रयोग

– उदाहरण सटीक होने चाहिए।

– परिस्थितियों से सम्बन्धित होने चाहिए।

– उदाहरणों की संख्या पर्याप्त होनी चाहिए।

– व्यावहारिक होने चाहिए।

– सामाजिक आदर्शों/मान्यताओं के अनुरुप होने चाहिए।

– उदाहरण बालक को प्रोत्साहित करने वाले होने चाहिए।

– पूरी पुस्तक के प्रत्येक प्रकरण में समान रुप से वितरित होने चाहिए।

– उदाहरण देते समय भाषा का ध्यान देना चाहिए।

(5) अभ्यास कार्य – पाठ में अवश्य होना चाहिए।

– संख्या पर्याप्त होनी चाहिए।

– पाठ के अन्त में होना चाहिए।

– प्रत्येक उद्देश्य की पूर्ति में सहायक होना चाहिए।

– अभ्यास कार्य शुद्ध तथा उसके निर्देश स्पष्ट होने चाहिए।

14.3.3 गणित पाठ्यपुस्तक की कमियाँ

पाठयपुस्तक सिर्फ शिक्षक तथा छात्रों को मदद ही प्रदान नहीं करती अपितु इसकी कुछ कमियाँ भी है :–

- पाठ्यपुस्तक पर अत्यधिक निर्भरता छात्र को पूर्णतः किताबी कीड़ा बनाती है।
- इनके द्वारा प्राप्त ज्ञान में प्रत्यक्ष अनुभव की कमी होती है क्योंकि छात्र ने ज्ञान सिर्फ पढ़कर ग्रहण किया है। इसके फलस्वरूप वह ज्ञान न तो स्थाई होता है और न ही प्राथमिक स्त्रोत होता है, बल्कि वह तो द्वितीय स्त्रोत होता है, ज्ञान को प्राप्त करने का।
- शिक्षण की प्रक्रिया को सीमित करता है।
- पाठ्यपुस्तक द्वारा प्राप्त ज्ञान कभी भी नवीन नही हो सकता।
- पाठ्यपुस्तक से प्राप्त ज्ञान की प्रामाणिकता उस पुस्तक के लेखक की योग्यता पर निर्भर करती है।
- एक तरह से कहा जाए तो यह शिक्षक की उपस्थिति को भी खारिज करती है। यदि पुस्तकों से ज्ञान प्राप्त हो जाएगा तो शिक्षक का उपस्थिति पर प्रश्न चिन्ह लग जाएगा।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. सी. वी. गुड के अनुसार पाठ्यपुस्तक की परिभाषा बताइये।

....

....

2. गणित पाठ्यपुस्तक की कमियाँ क्या हैं?

....

....

14.4 गणित शिक्षण में कैल्कुलेटर

गणित शब्द के मस्तिष्क में आते ही एक थकाने वाली प्रक्रिया जिसमें बार–बार नीरस ढंग से संख्याओं को जोड़ना, घटाना, भाग और गुणा करना तथा किसी सूत्र में संख्याएँ परिवर्तित कर–कर के अन्तिम उत्तर या निष्कर्ष पर पहुँचना, का ही स्मरण हो आता है। जो उस प्रक्रिया को बिना त्रुटि के पेन्सिल और कागज पर कर पाते हैं, वे गणित में रुचि रखने वाले कहे जाते हैं। जो जितनी शीघ्रता से त्रुटि रहित निष्कर्ष पर आ जाता है वह उतना ही होशियार माना जाता है। बहुत सी प्रक्रियाएं मस्तिष्क में ही बिना पेन्सिल और कागज के करने वालों को गणित में बहुत मेधावी माना जाता है। इसीलिए गणित एक कठिन, उबाऊ और डराने वाला विषय बन कर रह गया है।

पर यह तो मात्र नींव है जिसमे गणित का भवन खड़ा है। वास्तविक गणित का अर्थ है संख्याओं को सही रुप में समझना, संख्या विचार का विकास, संख्याओं के आधार पर तर्क, मूल्यकरण, त्रुटिरहित विचारों (संख्या) से उचित निष्कर्ष पर पहुँचना जिस तक पहुँचने में जोडने–घटाने आदि की उबाऊ प्रक्रिया से गुजरना पड़ता है। कैल्कुलेटर इसी उबाऊ प्रक्रिया को बिना थके, त्रुटिरहित ढंग से करके छात्र को तरोताजा दिमाग से गणित के वास्तविक महल में प्रवेश कराता है और छात्र प्रमुदित मन से गणितीय विचारों को आत्म सात करने में समर्थ होता है। उचित ढंग से प्रयोग करने पर यह छात्र को गणित शिक्षा में नित नवीन ऊँचाईयों तक ले जाने में एक अत्यन्त उपयोगी सहायक उपकरण सिद्ध हो सकता है। आवश्यकता इससे डरने की नहीं वरन् इसके उचित प्रयोग करने की है।

गणित शिक्षण कक्ष और गणित अभ्यास में कैल्कुलेटर के बढते उपयोग से कुछ भ्रांतियाँ भी उत्पन्न हो गयी हैं, जबकि यह मात्र एक छोटा आधुनिक इलेक्ट्रॉनिक सस्ता उपयोगी यंत्र है। क्या हम पूर्व काल की तरह आज मोरपंखी कलम, अनार डंडी कलम और भोजपत्र का उपयोग करते हैं? नहीं न। पूर्व काल में **पाटी** गणित के नाम से प्रसिद्ध इसलिए था क्योंकि तब लकड़ी की पट्टी पर रेत/धूल बिछा कर किसी नुकीली चीज से या उंगली से ही जोड़–घटाना आदि किया जाता था पर अब **स्लेट–बत्ती(Chalk)** से गुजर कर कागज–पेन्सिल तक तो आ ही गए हैं। अगला परिवर्तन कैल्कुलेटर के रूप में होना है। तो आइए समझें कि संबंधित भ्रम क्या है और उनका समाधान क्या है?

14.4.1 कैल्कुलेटर से सम्बन्धित भ्रांतियाँ और उनका समाधान

- **भ्रम संख्याः कैल्कुलेटर बैसाखी है।**
  कैल्कुलेटर के उपयोग से छात्रों में सुस्ती आ जाएगी और वे इसके बिना असहाय से हो जाएँगे। यह सही है कि **प्रारम्भिक गुणा भाग कैल्कुलेटर शीघ्रता से त्रुटि रहित उत्तर दे देगा पर उस को उचित निष्कर्ष पर पहुंचाना ही तो गणितीय विचार का विकास है**। कैल्कुलेटर यह नहीं सोच सकता कि कौन सा सूत्र लगेगा? इस उबाऊ हिस्से को पूरा करके छात्र को सीखने–सोचने के लिए अधिक समय उचित कैल्कुलेटर के उपयोग से मिलेगा।

- **भ्रम संख्या 2ः सब कार्य जब कैल्कुलेटर कर देगा तो नए गणितीय विचारों को समझने–हल करने में उत्साह का अभाव हो जाएगा।**
  कैल्कुलेटर तो भाग आधारभूत जोड़–घटाना आदि ही शीघ्रता से वह सोचता नहीं है। सच तो यह है कि छात्र नए गणितीय नमूने सोच और उन्हें हल कर सकेगा। उनका ध्यान अब नए उपयोगी गणितीय सिद्धान्तों, नमूनों पर अधिक केन्द्रित हो पाएगा तथा वह गणित के वास्तविक अर्थ और महत्व को समझ पाएँगे।

- **भ्रम संख्या 3ः जब मैंने नहीं सीखा तो मेरा बच्चा क्यों सीखे?**

उत्तर बड़ा सरल है कि उस समय यह कैल्कुलेटर की तकनीक उपलब्ध नहीं थी, जैसी आज है। जब भी कोई नई तकनीक आती है तो कुछ पुरानी विधियाँ स्वतः ही हट जाती हैं। नई विधियों/तकनीकों से अनजाना सा डर लगता तो है पर उसे हावी नहीं होने देना चाहिए। गणित मात्र जोड़, घटाना, गुणा, भाग नहीं है– यह उबाऊ प्रक्रिया कैल्कुलेटर से दूर करके वास्तविक गणित समझ उत्पन्न कर गणित शिक्षा के अर्थ और महत्व को जानने की आवश्यकता है। जब आधारभूत गुणा–भाग आदि क्षणभर में बिना पेन्सिल–कागज के त्रुटिरहित ढंग से किया जा सकता है तो क्यों न किया जाय।

- **भ्रम संख्या 4: कैल्कुलेटर के कारण छात्र मूलभूत गणित प्रक्रियाएँ प्रभावी ढंग से कर पाने में अपने को असमर्थ समझने लगेंगे।**

  यह भी विचार उचित नहीं है क्योंकि नई तकनीक से वह छात्र भी गणित के प्रति आकर्षित होंगे जो इसे उबाऊ कठिन जानकर इसे पढ़ते ही नहीं थे। आज के समय की आवश्यकता है कि व्यक्ति को सही सोचना चाहिए, मिलजुल कर काम करना चाहिए, समस्याएँ हल होनी चाहिए, समय कम लगना चाहिए तथा समाधान का शीघ्रता से प्रसारण होना चाहिए। कैल्कुलेटर का प्रयोग इस दिशा में एक उचित प्रभावी प्रक्रिया सिद्ध होगी।

- **भ्रम संख्या 5: इतना भी कैल्कुलेटर पर निर्भर हो जाना उचित नहीं कि इसके बिना काम ही न किया जा सके। कैल्कुलेटर के उपलब्ध न रहने पर या अचानक इसकी बैटरी खराब हो जाने पर गणितीय कार्य (आवश्यक) को स्थगित तो नहीं किया जा सकता।**

  कैल्कुलेटर के साथ मानसिक और पेन्सिल पेपर पर गुणा–भाग आदि की मूल गणना भी गणित कक्षा में सिखायी जाएगी। वह शिक्षा समाप्त नहीं होगी। गणितीय समझ, उपयुक्त सूत्रों का चयन परिणाम का विश्लेषण आदि तो मानव मस्तिष्क ही कर पाएगा। कैल्कुलेटर तो मूलभूत जोड़–घटाना आदि क्रियाएँ ही शीघ्रता से त्रुटि रहित परिणाम ही देंगे क्योंकि सस्ते और इतने छोटे कैल्कुलेटर अब उपलब्ध हैं जो आम आदमी क्रय कर अपनी जेब, पर्स, कार, ऑफिस में रख सकता है। कैल्कुलेटर तो मानव मस्तिष्क पर से मात्र उबाऊ एकरुपता वाली गणितीय क्रियाओं को शीघ्रता से करने में ही सहायक हो सकता है। वह कभी मानव मस्तिष्क को हटा कर स्वयं प्रतिष्ठित नहीं हो सकता। दोनों के कार्य और क्षमताओं में कोई समानता नहीं है क्योंकि कैल्कुलेटर को मानव मस्तिष्क ने ही बनाया है जिसकी क्षमताएँ असीम हैं। **कैल्कुलेटर स्वयं किसी नए कैल्कुलेटर को बना सकता है और न उसका उच्चीकरण कर सकता है।**

14.5 अभिभावकों द्वारा जानने योग्य कैल्कुलेटर उपयोग के लाभ

सामान्यतः अभिभावक और अध्यापक इस अज्ञात भय से ग्रसित हैं कि कैल्कुलेटर सीखने और रखने के बाद कैल्कुलेटर के उपलब्ध न रहने पर गणितीय क्रियाएँ करना बहुत ही कठिन प्रतीत होने लगेगा।

गत दशकों के कालखंड में गणित ज्ञान में अत्यधिक उन्नति हुई है और इसका स्तर सामान्य गुणा–भाग की मूल क्रियाओं से बहुत ऊपर उठ गया है। अब नई खोज, नए पैटर्न, नमूने, विचार, संख्या आधारित विचार, **विनिमय–वस्तुओं में परस्पर संबंध समस्या समाधान**। मूलभूत गुणा–भाग आदि प्रक्रियाएँ साधन हैं (साध्य नहीं) उच्च समस्याओं के समाधान निकालने का उबाऊ रुटीन गुणा–भाग कैल्कुलेटर से करने से मस्तिष्क को आराम मिलेगा और वह गणित ज्ञान को नई उच्च समस्याओं का हल निकालने में समर्थ हो सकेगा।

अभिभावकों को समझना होगा कि कैल्कुलेटर बैसाखी नहीं बनेगा और न ही छात्र सुस्त बनेंगे वरन् अब वे गणित विषय के पाठ्यक्रम में और अधिक रुचि लेंगे। कैल्कुलेटर कार्य को सरल बनाता है पर वास्तविक गणित तो छात्र ही करेगा। समस्या कर प्रकृति को समझना, उपयुक्त विधि सूत्र का चयन और परिणाम का विश्लेषण तो मानव

मस्तिष्क को ही करना होता है। अत्यधिक गति से त्रुटि रहित गणना कर कैल्कुलेटर अब उन समस्याओं का समाधान करने में भी समर्थ होने लगे है जो अब तक असंभव तरीके लगते थे। अनेकों (सैकड़ों–हजारों) शोध परियोजनाओं के निष्कर्षों के अनुसार कैल्कुलेटर उपयोग के विरुद्ध अज्ञात भय को दूर भगाना ही होगा क्योंकि इसके प्रयोग से होने वाले लाभ बहुत हैं।

14.6 कैल्कुलेटर सम्बन्धित विद्यालयी शिक्षकों की चिन्ताएँ तथा संभावित समाधान

मूलभूत उबाऊ मूलभूत गुणा भाग के शीघ्रता से सम्पन्न हो जाने पर छात्र गणित के वास्तविक स्वरुप को समझ महत्वपूर्ण जानकारी प्राप्त कर सकेगा। उसे गणित अब नीरस नहीं वरन् रोचक अद्‌भुत विषय लगने लगेगा।

कुछ महत्वपूर्ण विचारणीय बिन्दु इस प्रकार हो सकते हैं जिसमें कैल्कुलेटर का प्रयोग उपयोगी सिद्ध हो सकता है:—

- गणित आधारित नए पैटर्न–नमूनों पर प्रयोग।
- अंकगणित/बीजगणित की विशेषताओं पर प्रयोग।
- उबाऊ कठिन लगने वाली गणनाओं में भी समाधान (गणितीय) खोजना।
- विभिन्न परिस्थितियो में कैल्कुलेटर का उपयोग।
- नए–नए तरीके से कैल्कुलेटर का गणितीय समस्याओं का हल खोजने में सोचना।

छात्र स्वयं समस्या (गणितीय) का समाधान निकालने में स्वयं प्रवृत्त होंगे। उन्हें लगेगा जैसे यह उनका आविष्कार है। इस प्रकार उन्हे गणित अब एक अच्छा, सरल व रोचक विषय लगेगा।

14.7 ग्राफिंग कैल्कुलेटर तथा उनका उपयोग

ग्राफिंग कैल्कुलेटर एक बुद्धिमान मित्र की तरह कार्य करता है अतः छात्र को इस उपकरण के प्रयोग के समय अधिक होशियारी से कार्य करना चाहिए। विभिन्न शोध परियोजनाओं के निष्कर्षों के अनुसार इनके उपयोग से कक्षा का शैक्षणिक वातावरण जीवन्त हो जाता है। छात्रों का आत्म विश्वास बढ़ जाता है। छात्रों की गणितीय सूत्र के उचित चुनाव की समझ बढ़ती है तथा समस्या समाधान की दिशा की ओर तेजी आती है। इसका यह अर्थ नहीं कि पुरानी मानसिक पेन्सिल कागज की पद्धति बेकार हो चली है पर दोनों पद्धतियों में उचित सामंजस्य बैठाने की आवश्यकता है।

ग्राफ से गणित अब और अच्छी तरह से समझ में आ सकता है। **कैल्कुलस/कैल्कुलेटर** ने ग्राफ शुद्ध रुप से बनाना सिखाया तो कंप्यूटर आधारित ग्राफ ने प्रमुख गणितीय विचारों को समझना और अधिक सरल कर दिया। सस्ते ग्राफिंग कैल्कुलेटर ने विद्यालयी शिक्षण में एक क्रान्ति सी ला दी है। जटिल समस्या जीवन्त हो कर छात्र के समक्ष आती है और वह अपनी बुद्धि का उपयोग कर उसका हल ढूँढने में भागीदारी करना सही परिणाम पाने से अधिक रोचक हो जाता है।

परीक्षा के समय भी उचित प्रश्नपत्र बना कर ग्राफिंग कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति मिलनी चाहिए जैसे कि शिक्षण कक्ष या गृह कार्य करने में मिलती है। पद्धतियों में उचित सामंजस्य बनाकर और सही चुनाव से जटिल मानसिक गणितीय विचारों को सरलता से समझा जा सकता है। छात्र गणितीय समस्याओं के हल ढूँढने में अधिक पैनी समझ से प्रवेश करने में समर्थ होंगे। इस प्रकार अधिक विश्वास और अधिकार पूर्वक गणितीय समस्याओं का निदान संभव हो सकेगा।

14.8 शिक्षक की भूमिका में कंप्यूटर

जहां बहुपठित (बिना गुरु के पुस्तकों से ज्ञान प्राप्त करने वाला) को पाखंडी मूर्ख व बहुश्रुत (गुरुओं के श्रीमुख से सुन–समझकर ज्ञान प्राप्त करने वाला) को ही वास्तविक ज्ञानी विद्वान पंडित मानने की परम्परा रही हो, वहाँ कंप्यूटर से शिक्षा देने का विचार अटपटा तो लगता है पर वर्तमान में कंप्यूटर से शिक्षा देने का विचार तथा इस पद्धति का विकास बहुत तेज़ी से हो रहा है। अभी तक तो कंप्यूटर शिक्षक के सहायक के रुप में ही शिक्षण कक्ष में आते हैं पर प्रतीत हो रहा है कि शीघ्र ही शिक्षक कक्ष से लोप हो जाएँगे और मात्र कंप्यूटर ही शत प्रतिशत शिक्षण का कार्य करने लगेगा। इस परिवर्तन में कुछ व्यावहारिक कठिनाइयाँ निम्नवत् हैं–

- कंप्यूटर में प्रमुख रुप से अंग्रेज़ी भाषा ही प्रयुक्त होती है, अतः छात्रों के लिए अंग्रेजी भाषा का अच्छा ज्ञान आवश्यक होगा। अन्य भाषाएँ हाशिये पर चली जाएँगी।
- सही, सरल, सस्ते शिक्षण सॉफ्टवेयरों का विकास भी आवश्यक होगा जो प्रभावी ढंग से छात्रों की जिज्ञासा शान्त कर सके।
- अनुभव से शिक्षक में शिक्षण कला का विकास होता है पर कंप्यूटर शिक्षक सदैव एक सा ही रहेगा।
- **शिक्षण नियन्त्रकों और छात्रों को पहले कंप्यूटरों का सही उपयोग व प्रभावी ढंग से समझाना भी आवश्यक हो।** अल्पज्ञानी छात्रों से कंप्यूटरों के खराब हो जाने की समस्या उत्पन्न होगी।
- **कंप्यूटर अध्यापन विज्ञान** पर अभी तक कोई प्रभावी शोध नहीं हुआ है जिसकी महती आवश्यकता है।

14.9 कंप्यूटर शिक्षण के लाभ

कुछ प्रमुख लाभ संक्षेप में निम्नवत् हैं–

- मानवीय मस्तिष्क के सापेक्ष कंप्यूटरों की कार्य करने की गति और स्मरण शक्ति बहुत अधिक होती है।
- लचीले सॉफ्टवेयरों से छात्रों की प्रगति समझी जा सकेगी और कमजोर छात्रों की कमियों को दूर करने के लिए प्रभावी उपचारात्मक अभ्यासों का विकास संभव होगा।
- विभिन्न स्तर वाले छात्रों को उनके अनुसार आदर्श अध्यापकों के द्वारा तैयार पाठ्यों को एक ही कंप्यूटर से प्रोग्रामिंग करके सबको शिक्षा दी जा सकती है।
- अन्य शिक्षण सहायक उपकरणों की गुणवत्ता में भी वृद्धि की जा सकती है, छात्रों से प्राप्त फीडबैक के आधार पर और यह गुणवत्ता की बढ़ोतरी अन्य कंप्यूटरों में भी स्थानान्तरित की जा सकती है।

14.10 कंप्यूटर शिक्षण के समक्ष चुनौतियाँ तथा उनका समाधान

कंप्यूटर विधि को प्रभावी ढंग से लागू करने में कुछ चुनौतियाँ/कठिनाइयाँ भी प्रतीत होती हैं। कुछ तो मात्र काल्पनिक ही प्रतीत होती हैं पर अन्य चुनौतियों की समस्या भी प्रभावी ढंग से हल की जा सकती है। कुछ प्रमुख चुनौतियाँ और उनसे निपटने के सुझाव निम्न हैं–

✓ कंप्यूटर प्रोग्रामिंग तो कोई मानव ही करेगा, कंप्यूटर स्वयं तो कर नहीं सकता।सत्य है, पर एक बार प्रोग्रमिंग सॉफ्टवेयरों बन जाने के बाद उसका हर कंप्यूटर में प्रयोग हो सकेगा।

✓ कंप्यूटर पर कार्य करते हुए अचानक वह खराब हो जाए तो छात्र क्या करेगा?वर्तमान में यह समस्या अब अत्यन्त ही कम हो गयी है। फिर यदि उत्पन्न होती है तो छात्र उस दिन अनुपस्थित छात्र का कंप्यूटर प्रयोग में ला सकता है। केन्द्रीय कंप्यूटर से जुड़ कर भी वह पाठ्यक्रम पढ़ा जा सकता है। केन्द्रीय कम्प्यूटर भी यदि फेल हो जाय तो नई मशीन में भी बैकअप कॉपी से डाटा कॉपी किया जा सकता है।

- ✓ कंप्यूटर प्रोग्राम में प्रायः बग आ जाते है जिससे छात्र को कठिनाई हो जाएगी।प्रोग्रामरों से लगातार फीडबैक करते रहने पर यह समस्या अत्यन्त ही कम होगी। फिर भी बाहरी किसी विशेषज्ञ से फोन सम्पर्क कर समस्या का हल हो जाएगा। तब तक छात्र किसी दूसरे कोर्स का पाठ पढ़ सकता है।

- ✓ कुछ छात्र जान बूझकर कंप्यूटर खराब कर सकते हैं।कंप्यूटर शिक्षण में कक्षा का वातावरण अधिक सुखद होगा और अनुशासन समस्या स्वतः कम हो जाएगी। फिर यदि होगी तो उन्हें वैसे ही हल किया जाएगा जैसे वर्तमान में होता है।

- ✓ मेधावी छात्र कंप्यूटर प्रोग्राम में छेड़खानी कर उसे बदल सकते हैं।प्रथम तो ऐसे छात्र नगण्य होंगे जो इतने सक्षम हों। फिर कंप्यूटरों में सेफगार्ड प्रोग्राम भी तो होते हैं।

- ✓ यदि मानव शिक्षक नहीं होगा तो छात्र समय बरबाद कर सकते हैं।यदि निश्चित समय तक छात्र कार्य नहीं करेगा तो संवाद फीचर प्रोग्राम छात्र को कार्य करने और कक्षा शिक्षण में आनन्दपूर्वक बनाए रखेगा।

- ✓ कंप्यूटर तथ्य ही बता सकता है, सोचने की शक्ति का विकास नहीं कर सकता।उच्चस्तर की सोचने की शक्ति के विकास के 3 अंग है। पहला अच्छा ज्ञान, दूसरा सोच उत्पन्न करने वाले प्रश्न, तीसरा प्राप्त ज्ञान को विश्लेषण तथा संश्लेषण करने के लिए समय। कंप्यूटर इन तीनो कार्यों को सुविधापूर्वक कर सकता है।

- ✓ कंप्यूटर फैसला नहीं कर सकता, जबकि मानव शिक्षक फैसला करने में भी सक्षम होते हैं।यह सही है कि कंप्यूटर ग्रामर के तकनीकी बिन्दुओं पर और उत्पादक सोच हेतु मूल नए विचारो की महत्ता पर फैसला नही दे सकते। इसके लिए सेमीनार, वर्कशॉप आदि को भी इस शिक्षण में जोड़ना होगा।

- ✓ कंप्यूटर छात्रों में परस्पर संवाद नहीं बना पाएगा।यह सोच सही नहीं है क्योंकि इन्टरनेट सुविधा से जुड़े कंप्यूटर शिक्षण में दूसरे विद्यालयों, विदेशी विद्यालयों मेधावी छात्रों से अधिक सुविधापूर्ण परस्पर विचार विनिमय होगा। इस प्रकार अधिक विविधता वाले प्रदेशों, धर्मों, देशों के छात्रों में परस्पर संवाद स्थापित होगा।

- ✓ कंप्यूटर छात्रों पर व्यक्तिगत रुप से ध्यान नहीं दे पाएगा। यह आंशिक समस्या है जो अधिक सेमीनार आयोजन, छात्रो की समस्याओं के फीडबैक से दूर की जाएगी।

- ✓ कंप्यूटर शिक्षण में शिक्षक–छात्र का सौहार्दपूर्ण परस्पर संवाद नहीं हो पाएगा।यह भी आंशिक समस्या है। जब रुटीन शिक्षण का कार्य कंप्यूटर करने लगेंगे तो मॉडल मानव शिक्षकों को अधिक समय मिलेगा और वे अधिक प्रभावी ढंग से छात्रों से परस्पर संवाद स्थापित कर सकेंगे।

- ✓ कंप्यूटर स्क्रीन पर पढ़ने से छात्रों को दृष्टिगत समस्या उत्पन्न होगी।दृष्टिगत समस्या तो कुछ छात्रों को पुस्तको के पढ़ने से भी हो जाती है। कंप्यूटर की रंगीन स्क्रीन के आने से पढ़ना औरं अधिक सुखद व आनन्ददायक होगा। यह समस्या गंभीर प्रकृति की प्रतीत नहीं होती है। छात्र कक्षा में स्क्रीन पर पढ़ने के अतिरिक्त टाइप करने और परस्पर संवाद करने में भी तो समय व्यतीत करेंगे।

- ✓ प्रत्येक छात्र को कंप्यूटर देने से व्यय बहुत अधिक होगा।प्रारंभ में तो व्यय होगा पर समय के साथ व्यय कम होता जाएगा क्योंकि पुस्तकें क्रय नहीं करनी होंगी और स्कूल के स्टाफ पर किया जाने वाला वार्षिक व्यय भी कम हो जाएगा। कुल मिला कर कुल व्यय कम ही होगा जिससे देश को लाभ मिलेगा।

व्यावहारिक सुझाव

नई कंप्यूटर शिक्षण पद्धति हेतु प्रारंभिक अरुचि अध्यापकों में भी हो सकती है पर बराबर प्रशिक्षण, सेमीनार, वर्कशॉप और प्रोत्साहित करने से कंप्यूटर की सहायता से शिक्षण कार्य करने में रुचि उत्पन्न करना सम्भव हो सकेगा। इन्टरनेट की सुविधा को प्रयोग में लाकर राष्ट्रीय–अन्तर्राष्ट्रीय आयोजनों से भी जुड़ना सम्भव होगा और परस्पर आवश्यक संवाद भी। रोलमॉडल स्कूलों, अध्यापकों, विशेषज्ञों के परस्पर विचार विनिमय से उच्चकोटि के आदर्श पाठ्यक्रम बनाए और पढ़ाए जा सकेंगे। इस प्रकार पाठ्यक्रमों का उच्चीकरण और स्तरीयकरण हो पाएगा। विश्व में कही की भी नई तकनीक, विचार, पाठ्यक्रम का उपयोग हो सकेगा।

हंगरी की **डेबरिकेन** यूनिवर्सिटी में शिक्षण को बराबर प्रशिक्षण देने का कार्यक्रम **अल्गोरिथ्मिक गणित (Algorithmic Mathematics)** के नाम से सफलतापूर्वक चल रहा है। यह मॉडल प्रशिक्षण स्थानीय आवश्यकताओं के अनुरुप परिवर्धित, संशोधित व परिवर्तित करके अपनाया जा सकता है, अथवा इससे प्रेरणा लेते हुए अपना स्वयं का प्रशिक्षक मॉडल विकसित किया जा सकता है।

14.11 प्रतिरूप

गणित शिक्षण में प्रतिरुपों का बड़ा ही महत्व है। प्रतिरुप का अर्थ है किसी सामग्री की एक प्रति जिनका भौतिक स्वरुप वास्तविक सामग्री जैसा ही होता है। कभी–कभी ऐसी परिस्थितियाँ शिक्षक के सामने आती हैं जिनके कारण वह वास्तविक सामग्री को कक्षा में छात्रों के समक्ष प्रस्तुत नहीं कर सकता। ऐसे में छात्रों को अधिगम में परेशानी का सामना न करना पड़े इसके लिए वह वास्तविक सामग्री का मॉडल प्रस्तुत करता है, इसे ही शिक्षण प्रतिरुप कहते हैं। ये परिस्थितियाँ शिक्षक के सामने तब आती हैं, जब–

1. प्रस्तुत की जाने वाली सामग्री महंगी होती है।
2. प्रस्तुत की जाने वाली सामग्री जटिल होती है जिसका प्रदर्शन सम्भव नहीं।
3. प्रस्तुत की जाने वाली सामग्री का आकार या तो बहुत बड़ा या बहुत छोटा होता है।

यह त्रिविमीय साधन है। प्राथमिक तथा माध्यमिक स्तर के गणित शिक्षण में इनका काफी महत्व है। ज्यामिति के शिक्षण में मॉडल विशेष स्थान रखते हैं। उदाहरण के लिए त्रिभुजों के प्रकार, ज्यामति के प्रमेय, पिरामिड, शंकु, बेलन, आयत, गोला, घन, वृत्त आदि आकृतियों का क्षेत्रफल पढ़ाते समय मॉडल का प्रयोग लाभदायक सिद्ध होता है।

सामान्यतः प्रतिरुप/मॉडल दो प्रकार के होते हैं–

1. स्थिर प्रतिरुप (Static Model)
2. क्रियात्मक प्रतिरुप (Working Model)

इसके अतिरिक्त शिक्षक को छात्रों को स्वयं प्रतिरुपों के निर्माण करने के लिए प्रेरित करना चाहिए। इनको निर्मित करने के लिए छात्र को लकड़ी, धातुएँ (लोहा, एल्यूमीनियम, ताँबा), मिट्टी, कागज, प्लास्टर ऑफ पेरिस, थर्माकोल तथा प्लास्टिक इत्यादि सामग्रियों की आवश्यकता पड़ती है। इनको निर्मित करते समय निम्नलिखित सावधानियों को ध्यान में रखना चाहिए।

1. प्रतिरुप/मॉडल वास्तविक सामग्री जैसा ही लगना चाहिए।
2. इसका रंग जहाँ तक सम्भव हो, वास्तविक सामग्री जैसा ही होना चाहिए।
3. इसका आकार कक्षा में प्रदर्शन करने योग्य होना चाहिए न तो अत्यधिक बड़ा और न अत्यधिक छोटा।

4. मॉडल को बनाते समय फिनिशिंग पर ध्यान देना चाहिए। इसमें कोई नोंकें (Edges) नहीं होनी चाहिए जिससे छात्रों को उपयोग करते समय कोई चोट लगने की सम्भावना हो।
5. शिक्षक को यदि इसका उपयोग कक्षा में करना है तो उसे इसका पूर्वाभ्यास करके देख लेना चाहिए ताकि वास्तविक प्रदर्शन के समय कोई कठिनाई का सामना ना करना पड़े।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

3. कम्प्यूटर शिक्षण के क्या लाभ हैं?

....

....

4. प्रतिरूप कितने प्रकार का होता है?

....

....

14.12 सारांश

उपर्युक्त इकाई में पाठ्य पुस्तक के बारे में चर्चा की गई है।एक अच्छी पाठ्यपुस्तक होने के लिए दो प्रमुख आधार हैं– शैक्षिक आधार तथा भौतिक आधार। शैक्षिक आधार के अंतर्गत विषयवस्तु प्रस्तुतीकरण, भाषा शैली, उदाहरणों का प्रयोग तथा अभ्यास कार्यों पर जोर दिया जाता है। परंतु भौतिक आधारों के अंतर्गत पुस्तक का मूल्य उसमें प्रयुक्त कागज जिल्द का प्रकार, छपाई तथा आकार या बनावट इत्यादि आते हैं। पाठ्य पुस्तक में भी कुछ कमियां पाई जाती हैं। सर्वप्रथम तो यह है कि इसके द्वारा छात्र पूर्णतया किताबी कीड़ा बन जाता है। इसके द्वारा प्रदान किए ज्ञान में अनुभव की कमी होती है। यह एक तरह से शिक्षण प्रक्रिया को भी सीमित करती है तथा इसके द्वारा प्रदान किया ज्ञान कभी भी नवीन नहीं हो सकता। इसकी प्रामाणिकता हमेशा लेखक की योग्यता पर ही निर्भर करती है।

वर्तमान में अब गणित शिक्षण को प्रभावी बनाने के लिए कैलकुलेटर नामक यंत्र का भी उपयोग किया जा रहा है क्योंकि गणित एक अमूर्त विषय है जिसमें संख्याओं का जोड़ना, घटाना, भाग तथा गुण आदि जैसी क्रियाएं की जाती हैं। अतः एक यंत्र का आविष्कार हुआ जिसमें हम यह सारी क्रियाएं बहुत ही जल्दी कर लेते हैं। परंतु कैलकुलेटर के संबंध में कुछ भ्रांतियां भी अवश्य प्रचलित है जिनका निराकरण भी बहुत जरूरी है। सर्वप्रथम तो यह कैलकुलेटर एक बैसाखी है जैसा प्रयोग करोगे वैसा ही वह फल देगा। वह अपने आप पर कोई भी कार्य करने में सक्षम नहीं है। दूसरा यदि कैलकुलेटर के द्वारा कार्य किया जाएगा तो छात्रों में उत्साह की कमी हो जाएगी तथा वह गणित को सीखेंगे नहीं एवं गणित की मूलभूत क्रियाओं को करने में बालक अपने आप को असमर्थ समझेगा।

वर्तमान में एक चीज का गणित में काफी उपयोग किया जा रहा है जिसको हम कंप्यूटर मानते हैं कंप्यूटर के द्वारा कोई भी चीज संख्या का गणितीय भाग बहुत ही जल्दी से हल कर लिया जाता है। इसके पास मुद्रण तथा विस्तार की भी अपार क्षमता है। इसके द्वारा किसी भी चीज को बहुत ही लंबे समय तक संरक्षित भी किया जाता है। परंतु कंप्यूटर की उपयोग में कुछ कमियां भी हैंजैसे कि यह मोटे तौर पर जिस क्रिया द्वारा कार्य करता है उसको

सॉफ्टवेयर कहते हैं और सॉफ्टवेयर का विकास तो मनुष्य ही करेगा वह स्वयं कुछ नहीं करता। दूसरा अंग्रेजी भाषा का अत्यधिक प्रयोग भी इन सॉफ्टवेयरो में किया जा रहा है। अतः शिक्षक के लिए यह बहुत जरूरी है कि कंप्यूटर का कक्षा में यदि वह उपयोग करता है तो वह बहुत सोच समझकर करें।

गणित में आज के समय में कुछ प्रतिमॉनों का भी उपयोग किया जा रहा है प्रतिमॉनों से हमारा तात्पर्य ऐसे मॉडलों से है जो वास्तविक परिस्थितियों का कुछ प्रतिरूप होते हैं। इनका उपयोग शिक्षण में तभी किया जाता है जब प्रस्तुत की जाने वाली सामग्री या तो महंगी हो या जटिल हो या उसका आकार या तो बहुत बड़ा हो या छोटा हो। शिक्षण में इनके का उपयोग करने के लिए दो प्रकार के प्रतिमॉनों यानी मॉडलों का उपयोग किया जाता है। पहले वह जो एक जगह पर स्थिर होते हैं। यह छात्र को मूल संकल्पना के बारे में अच्छी तरह समझा सकते हैं। दूसरा क्रियात्मक, यह वह प्रतिमॉन है जिसके द्वारा किसी भी कार्य को कैसे किया जाता है यह समझाया जाता है। दोनों ही प्रकार के प्रतिमान बालक को मूर्तता प्रदान करते हैं। जो बालक को किसी भी विषय को समझने में अत्यंत आवश्यक है। अतः शिक्षक से यह उम्मीद की जाती है की गणित विषय का शिक्षण करते समय वह इन चीजों का ध्यान रखें वह यदि इन माध्यमों का प्रयोग करके ठीक प्रकार से शिक्षण कार्य को करेगा तो गणित विषय अमूर्त ना होकर मूर्त बन जाएगा।

14.13 अभ्यास के प्रश्न

1. गणित पुस्तक की आवश्यकता क्या है?
2. तीसरा गणित पाठ पुस्तक की उपयोगिता पर एक निबंध लिखिए ?
3. कैलकुलेटर का अर्थ बताएं?
4. कैलकुलेटर के उपयोग लिखे?
5. ग्राफिक कैलकुलेटर पर एक संक्षिप्त टिप्पणी लिखें?
6. गणित शिक्षण में प्रतिमानों के उपयोग को बताएं?

14.14 चर्चा के बिन्दु

1. एक अच्छी गणित पुस्तक की क्या विशेषताएं होती हैं? चर्चा कीजिए।
2. कैलकुलेटर का प्रयोग गणित की कक्षा में सफलता पूर्वक कैसे किया जा सकता है? चर्चा कीजिए।

14.15 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. सी०वी० गुड के अनुसार–

   ''पाठ्यपुस्तक एक ऐसी पुस्तिका है जो किसी विशेष विषय से संबंधित विषयवस्तु को एक व्यवस्थित क्रम में रखती है तथा किसी विशेष पाठ्यक्रम के लिए अधिगम सामग्रियों के प्रमुख स्त्रोत की तरह कार्य करती है।''

2. गणित पाठ्यपुस्तक की निम्नलिखित कमियाँ हैं–

   - पाठ्यपुस्तक पर अत्यधिक निर्भरता छात्र को पूर्णतः किताबी कीड़ा बनाती है।
   - इनके द्वारा प्राप्त ज्ञान में प्रत्यक्ष अनुभव की कमी होती है क्योंकि छात्र ने ज्ञान सिर्फ पढ़कर ग्रहण किया है। इसके फलस्वरूप वह ज्ञान न तो स्थाई होता है और न ही प्राथमिक स्त्रोत होता है, बल्कि वह तो द्वितीय स्त्रोत होता है, ज्ञान को प्राप्त करने का।
   - शिक्षण की प्रक्रिया को सीमित करता है।

- पाठ्यपुस्तक द्वारा प्राप्त ज्ञान कभी भी नवीन नही हो सकता।
- पाठ्यपुस्तक से प्राप्त ज्ञान की प्रामाणिकता उस पुस्तक के लेखक की योग्यता पर निर्भर करती है।

3. कुछ प्रमुख लाभ संक्षेप में निम्नवत् हैं–
   - मानवीय मस्तिष्क के सापेक्ष कंप्यूटरों की कार्य करने की गति और स्मरण शक्ति बहुत अधिक होती है।
   - लचीले सॉफ्टवेयरों से छात्रों की प्रगति समझी जा सकेगी और कमजोर छात्रों की कमियों को दूर करने के लिए प्रभावी उपचारात्मक अभ्यासों का विकास संभव होगा।
   - विभिन्न स्तर वाले छात्रों को उनके अनुसार आदर्श अध्यापकों के द्वारा तैयार पाठ्यों को एक ही कंप्यूटर से प्रोग्रामिंग करके सबको शिक्षा दी जा सकती है।
   - अन्य शिक्षण सहायक उपकरणों की गुणवत्ता में भी वृद्धि की जा सकती है, छात्रों से प्राप्त फीडबैक के आधार पर और यह गुणवत्ता की बढ़ोतरी अन्य कंप्यूटरों में भी स्थानान्तरित की जा सकती है।
4. सामान्यतः प्रतिरुप/मॉडल दो प्रकार के होते हैंः–
   1. स्थिर प्रतिरुप (Static Model)
   2. क्रियात्मक प्रतिरुप (Working Model)

14.16 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. इग्नू (2012), बीईएस–009 प्राथमिक विद्यालय के लिए गणित का शिक्षण, लर्नर ब्लॉक 1–4, SLM, नई दिल्लीः इग्नू।
2. एनसीईआरटी (2005), राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005, नई दिल्लीः एनसीईआरटी
3. एनसीईआरटी (2006), पोजिशन पेपरः नेशनल फोकस ग्रुप ऑन टीचिंग ऑफगणित, नई दिल्लीः एनसीईआरटी।
4. एनसीटीई (2009), शिक्षक शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यक्रम ढांचा, नया दिल्लीः राष्ट्रीय शिक्षक शिक्षा परिषद।
5. हेलॉक, डेरेक (2006), प्राथमिक शिक्षकों के लिए गणित की व्याख्या, सीजे प्रकाशन इंडिया प्राइवेट लिमिटेड।

इकाई– 15 : गणित प्रयोगशाला, कक्षा–कक्ष के बाहर एवं कक्षा–कक्ष के अन्दर गणित

इकाई की संरचना

15.1 प्रस्तावना

15.2 इकाई के उद्देश्य

15.3 गणित प्रयोगशाला का अर्थ

15.3.1 गणित प्रयोगशाला कीआवश्यकता तथा महत्व

15.3.2 गणित प्रयोगशाला के उद्देश्य

15.3.3 गणित प्रयोगशाला के लिए आवश्यक सामग्री

15.3.4 गणित प्रयोगशाला के कार्य

15.4 कक्षा के बाहर गणित

15.4.1 क्रय

15.4.2 समय

15.4.3 मापन

15.4.3.1 गिनना

15.4.3.2 संख्या संबंधी क्रियाकलाप

15.4.3.3 तर्क–वितर्क और समस्या समाधान

15.4.3.4 नम्बर खेल

15.4.3.5 विविध

15.5 सारांश

15.6 अभ्यास के प्रश्न

15.7 चर्चा के बिन्दु

15.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

15.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें

15.1 प्रस्तावना

गणित का पठन–पाठन सदैव से ही नीरस और शुद्ध रूप से स्मरण शक्ति पर आधारित रहा है, जिसमें कुछ नया करने और सोचने की आवश्यकता प्रतीत नहीं होती। छात्रों को यह विषय कठिन लगता है क्योंकि छात्र इसके सिद्धान्तों और उपयोगों का पुनर्लेखन तो कर पाता है किन्तु अपनी बुद्धि का प्रयोग करके जिज्ञासा को शांत करने के लिए वर्तमान के संदर्भ में पुनर्भाषित नहीं कर पाता। इस प्रकार उसका मस्तिष्क रूढ़िग्रस्त होकर इसके अध्ययन से ही दूर हो जाता है। इस कमी को दूर करने हेतु NCERT ने स्कूल शिक्षण में राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रूपरेखा के माध्यम से गणित प्रयोगशाला की स्थापना गणित शिक्षण के लिए प्रस्तावित की है, जिसके माध्यम से छात्र गणितीय विचारों को स्वयं प्रयोग करके समझ सकेंगे और चार्टों, फाइलों, गणितीय पहेलियों का उपयोग करके गणित शिक्षण को जीवन्त क्रिया–कलाप बनाकर उसमें भागीदारी कर सकेंगे।

15.2 इकाई के उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप इस योग्य हो जायेंगे कि–

1. गणित प्रयोगशाला का अर्थ बता सकेंगे।
2. गणित प्रयोगशाला के उद्देश्य बता सकेंगे।
3. गणित प्रयोगशाला की स्थापना के लिए आवश्यक सामग्रियों की सूची बना सकेंगे।
4. गणित प्रयोगशाला के महत्व को बता सकेंगे।
5. उन गतिविधियों/क्रियाओं की सूची बना सकेंगे जिसके माध्यम से गणित को कक्षा के बाहर भी पहुँचाया जा सकता है।

15.3 गणित प्रयोगशाला का अर्थ

गणित प्रयोगशाला से तात्पर्य ऐसे स्थान से है जहाँ छात्र विभिन्न प्रकार के गणितीय प्रयोग कर सकें, गणितीय खेल खेले जा सकें, गणितीय पहेलियाँ हल कर सकें तथा विभिन्न गणितीय मॉडलों के साथ छेड़–छाड़ करके उन्हें नया रूप देने का प्रयास कर सकें। एडवोगेन (2003)ने गणितीय प्रयोगशाला को परिभाषित करते हुए कहा है कि गणितीय प्रयोगशाला एक विशिष्ट स्थान अथवा कक्ष है जहाँ विभिन्न सटीक तथा अद्यतन गणितीय अनुदेशनात्मक सामग्री उपलब्ध होती है जो कि गणित के शिक्षण, अधिगम तथा शोध कार्यों को प्रभावित करती है तथा जिसका संचालन पूर्ण रूप से प्रशिक्षित तथा योग्य व्यक्ति (गणित अध्यापक) के द्वारा किया जाता है।

उपर्युक्त परिभाषा के आधार पर हम कह सकते हैं कि गणितीय प्रयोगशाला है –

- एक विशिष्ट कक्ष।
- जिसमें सटीक तथा अद्यतन गणितीय सामग्री होती है।
- यहाँ छात्र तथा शिक्षक विशिष्ट अनुदेशनात्मक दृश्यों के लिए एकत्रित होते हैं।
- इसके संचालन के लिए पूर्णतः प्रशिक्षित तथा योग्य व्यक्ति चाहिए।

प्रमुख गणितज्ञों के चित्रों, जीवनियों, गणित का इतिहास और गणित के उपयोगों के चित्रों/चार्टों को प्रयोगशाला में प्रदर्शित करना छात्रों में गणित के प्रति अभिरूचि उत्पन्न करेगा। विभिन्न गणितीय मॉडलों के माध्यम से गणित के क्षेत्र में कुछ नवीनता लाने के लिए छात्रों को प्रेरित करेगा। विभिन्न पत्रिकाओं, समाचारपत्रों में प्रकाशित

गणित संबंधी सूचनाओं को संक्षेप में प्रयोगशाला में के सूचनापट्ट पर नित्य लिखना भी छात्रों के गणित ज्ञान को अद्यतन रखेगा और गणित के प्रति उनके नकारात्मक विचारों को सकारात्मक बनाने में सहायक होगा। एक सामान्य श्यामपट्ट भी छात्रों को शिक्षण देने हेतु तथा छात्रों को जिज्ञासा शांत करने में उसका उपयोग करने की सुविधा देने हेतु भी प्रयोगशाला में आवश्यक है। परकार, चाँदा, पैमाना, स्टेंसिल आदि का प्रयोग भी गणित शिक्षण को रोचक बनाएगा। विभिन्न प्रकार मापन और तौलने की सुविधा का होना भी आवश्यक है। सर्वे उपकरण, कोणीय दूरी को सेक्सटेंट, ऊँचाई के कोण हेतु क्लीनोमीटर, चित्रों, नक्शों को समानुपातिक रूप में बड़ा या छोटा करने के उपकरण, स्लाइड रूल, कैल्कुलेटर, लॉग टेबल, कम्प्यूटर भी प्रस्तुतियों को उत्तम बनाने में सहायता करते हैं। उपयुक्त और पर्याप्त मात्रा में फर्नीचर की उपलब्धता भी प्रयोगशाला में किए जाने वाले अभ्यास को सुगम ग्राह्य और आनंददायक बनाते हैं।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

1. गणित प्रयोगशाला को परिभाषित कीजिए।

....

....

2. गणित प्रयोगशाला में प्रयोग होने वाली सामग्रियों की सूची बनाएं।

....

....

15.3.1 गणित प्रयोगशाला की आवश्यकता तथा महत्व

प्राचीन काल से ही शिक्षा में गणित के महत्व और आवश्यकता को पहचाना गया है, पर इसकी शिक्षण विधि को रोचक, बोधगम्य और सरल बनाने पर ध्यान न दिए जाने से यह विषय कठिन, दुर्गम्य, और नीरस बनकर ही रह गया। इस कमी को दूर करने के लिए गणितीय विचारों—सूत्रों को क्रियाकलापों (दैनिक) और प्रयोगों द्वारा सिद्ध करने की विधि का विकास किया गया। छात्र स्वयं की जिज्ञासा के अनुरूप प्रश्न बनाना और स्वबुद्धि का प्रयोग कर उसका हल ढूँढता है। इस प्रकार व स्वयं गणित शिक्षण को समझता है, उसे अपने पर बोझ नहीं लगता। निम्नलिखित बिंदु विचारणीय हैं—

- उपलब्ध वस्तु और परिस्थितियों का आकलन कर गणित सूत्रों का ठीक—ठीक प्रयोग करना सरल हो जाता है।
- मॉडलों के उपयोग से ज्यामितीय आकृतियाँ और उनके गुण समझना सरल हो जाता है।
- दैनिक जीवन में गणित की उपयोगिता समझ में आती है।

- स्वयं ही प्रश्नों को उठाना और हल खोजना आत्मतुष्टि देता है।
- सोच और कार्य का अच्छा तालमेल हो जाता है।
- छात्र स्वयं सोचता है, अन्य छात्रों से विचार–विमर्श कर अध्यापक से मार्गदर्शन लेकर गणितीय सूत्र का अच्छा प्रयोगकर्ता हो जाता है।
- अध्यापक भी ठोस वस्तुओं, मॉडलों, चार्टों, ग्राफ, पोस्टर, आदि की सहायता से विषय को अधिक सरल और बोधगम्य बना पाते हैं।
- उपरोक्त विचारों का संज्ञान लेते हुए (NCERT)ने स्कूल शिक्षा हेतु पाठ्यक्रम रूपरेखा का विकास किया है और स्कूलों में गणित प्रयोगशाला की स्थापना के लिए निर्देश दिया है।
- अमूर्त गणितीय प्रत्ययों को मूर्त रूप प्रदान करना।
- छात्रों को गणित के व्यावहारिक उपयोगों से परिचित कराना।
- छात्रों में विभिन्न कौशलों का विकास करना, जिससे वह विभिन्न उपकरणों का प्रयोग कर सकें।
- गणित शिक्षण को छात्रों के समक्ष रूचिपूर्ण तथा अर्थयुक्त रखना।
- छात्रों में अवलोकन शक्ति का विकास करना।
- छात्रों में समस्या के समाधान की प्रवृत्ति विकसित करना।

15.3.2 गणित प्रयोगशाला के उद्देश्य

जैसा कि हमने अभी पढ़ा कि गणित प्रयोगशाला की स्थापना निम्नलिखित उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए की गई है। विज्ञान अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान व दिशा–निर्देशों के आधार पर की थी। गणित छात्रों की जिज्ञासा की प्रवृत्ति उत्पन्न करना, स्वयं प्रयोग करके सीखना, गणित के प्रति कठिनता के भय को हटाकर बोधगम्य बनाना तथा विषय को रूचिकर बनाना, गणित ज्ञान से दैनिक सामान्य क्रियाओं को अधिक सुगम बनाना, गणित प्रयोगशाला के मुख्य उद्देश्य कहे जाते हैं। गणित अध्यापक भी मॉडल, चार्ट, ग्राफ, पोस्टर आदि की सहायता से नीरस सूक्ष्म गणित के सूत्रों को रोचक और अधिक बोधगम्य बनाते हुए छात्रों को इस विषय के प्रति दुरूहता के भाव को हटा सकते हैं।

15.3.3 गणित प्रयोगशाला के लिए आवश्यक सामग्री

विज्ञान अनुसंधान एवं प्रशिक्षण संस्थान ने NCERT के दिशा–निर्देशों ंऔर प्रमुख भारतीय गणितज्ञों के सुझावों के आधार पर गणित प्रयोगशाला की अवधारणा को मूर्त रूप दिया है, जिनमें प्राथमिक स्तर, उच्च प्राथमिक स्तर व उच्च माध्यमिक स्तर के पाठ्यक्रमों की आवश्यकताओं पर ध्यान देते हुए प्रयोगशाला में प्रयुक्त होने वाली वस्तुओं, प्रसिद्ध गणितज्ञों के चित्र सहित जीवन वृत्त और प्रमुख गणितीय सूत्रों की चित्रनुमा प्रस्तुतियों को सम्मिलित किया गया है।

गणित प्रयोगशाला के माध्यम से गणित शिक्षण को प्रभावी एवं रोचक बनाने हेतु निम्न सामग्री एवं उपकरणों का होना आवश्यक है–

प्रारम्भिक गणितीय विचारों को रोचक ढंग से समझाने हेतु चार्ट, ग्राफ कागज़, बोर्ड, बोर्ड पिन, कैंची, फीता, तराजू–बाँट, घड़ियाँ, गोलियाँ, गेंद आदि की आवश्यकता होती है।

15.3.4 गणित प्रयोगशाला के कार्य

गणित प्रयोगशाला के लिए एक बड़ा कक्ष जिसमें 30-35छात्र सुविधापूर्वक एवं स्वतंत्रतापूर्वक प्रयोग कार्य कर सकें, अध्यापक से आवश्यक निर्देश ले सकें तथा विचार–विमर्श कर सकें, को प्रयोगशाला कक्ष बनाना चाहिए। उपकरण, चार्ट, मॉडल, कम्प्यूटर आदि उचित स्थान पर विद्यालय तथा पाठ्यक्रम की आवश्यकतानुसार यथास्थान उपलब्ध करने की व्यवस्था होनी चाहिए।

गणित प्रयोगशाला के लिए एक प्रशिक्षित व्यक्ति की भी आवश्यकता पड़ती है ताकि वह प्रयोगशाला को सकुशल संचालित कर सके तथा निम्नलिखित गणित प्रयोगशाला के कार्यों को संपन्न कर सके।

एडवीगेन (2003)ने गणित प्रयोगशाला के निम्नलिखित कार्य बताए थे–

- छात्रों को गणित के अमूर्त प्रत्ययों से मूर्त प्रत्ययों की और ले जाकर उनके अनुमतों को उन्नतशील बनाना।
- छात्रों में व्यक्तिगत खोज का उत्साह तथा विभिन्न प्रत्ययों में संबंध ढूंढने की प्रवृत्ति का विकास करना।
- छात्रों को गणित के अधिगम के लिए प्रेरित करना।
- गणित के ज्ञान की समझ के लिए ठोस धरातल बनाना।
- छात्रों में सृजनात्मकता को प्रोत्साहित करते हुए समस्या के समाधान की प्रवृत्ति का विकास करना।
- छात्रों को सीखने के लिए व्यक्तिगत विभिन्नताओं के आधार पर समय देना।
- कक्षीय अनुदेशनों को अर्थपूर्ण एवं प्रभावी बनाना।
- छात्रों को गणितीय अधिगम प्रक्रिया में भाग लेने के लिए तत्पर बनाना न कि निष्क्रिय श्रोता की तरह प्रतिभागी बनाए रखना।

उपर्युक्त विचारों के अध्ययन के पश्चात् हम कह सकते हैं कि गणित प्रयोगशाला के निम्नलिखित कार्य हैं–

- अमूर्त गणितीय प्रत्ययों को मूर्त रूप प्रदान करना।
- छात्रों को गणित के व्यावहारिक उपयोगों से परिचित कराना।
- छात्रों में विभिन्न कौशलों का विकास करना, जिससे वह विभिन्न उपकरणों का प्रयोग कर सकें।
- गणित शिक्षण को छात्रों के समक्ष रूचिपूर्ण तथा अर्थयुक्त रखना।
- छात्रों में अवलोकन शक्ति का विकास करना।
- छात्रों में समस्या के समाधान की प्रवृत्ति विकसित करना।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

3. गणित प्रयोगशाला के कोई दो कार्य बताइए।

....

....

4. गणित प्रयोगशाला के महत्व को संक्षेप में समझाएँ।

....

....

15.4 कक्षा के बाहर गणित

जाने अनजाने सभी जीवन के दैनिक कार्यों में गणित ज्ञान का उपयोग करते हैं। आवश्यकता इस बात की है कि उपयोग करते समय गणित की महत्ता को स्वीकारें तथा उसका और अधिक प्रभावी ढंग से प्रयोग करने की विधियों के संबंध में इस प्रकार विचारें जैसे कि कोई प्रयोगशाला में प्रयोग करता है कि नवीन परिस्थितियों में उपलब्ध ज्ञान किस प्रकार आगे बढ़ाएँ। इससे गणित विषय रोचक, जीवनोपयोगी तथा बोधगम्य बनकर जीवन का हिस्सा बन जाएगा और गणित की कठिनता और नीरसता का डर सदैव के लिए समाप्त हो जाएगा।

निम्न क्रियाकलापों में गणित ज्ञान का उपयोग समझ–बूझकर करने से कार्य भी त्रुटिपूर्ण ढंग से संपन्न होता है और गणित विषय की सरल, जीवनोपयोगी ज्ञान के रूप में पैठ बनती है।

15.4.1 क्रय

- ✓ विभिन्न मूल्य के सिक्कों को गिनना और कुल सिक्कों का मूल्य ज्ञात करना।
- ✓ भुगतान के समय किस मूल्य के कितने सिक्कों की आवश्यकता होगी।
- ✓ छुट्टियाँ मनाने के कार्यक्रमों के विभिन्न प्रचार प्रपत्रों में दिखाए गए मूल्यों का तुलनात्मक अध्ययन।
- ✓ बोतलों, पैकेटों पर चिपकाए गए लेबलों में दर्शाए गए मात्रा, रंग, गुणवत्ता आदि में कोई भ्रामकता तो नहीं है?
- ✓ पेट्रोल क्रय करते समय उसकी लिटर में मात्रा और कुल मूल्य की गणना दर्शाए गई दर से ठीक है?
- ✓ बताई जा रही छूट दर के अनुसार कुल भुगतान ठीक है?
- ✓ बैंक खातों में ब्याज़ दर के अनुरूप जोड़ी जा रही धनराशि की गणना ठीक हो रही है या नहीं?
- ✓ विभिन्न दुकानों पर मिलने वाली एक ही वस्तु के मूल्यों में क्या अन्तर है?

✓ खाने की थाली में विभिन्न वस्तुओं की मात्रा और उसकी प्रदर्शित दर की गणना ठीक है या नहीं?

✓ पूरे परिवार का एक साथ सिनेमा, **तरणतारण/तरणताल** आदि में जाने का खर्च कितना आएगा?

15.4.2 समय

✓ घड़ी के डायल पर प्रदर्शित अंकों को ठीक–ठीक समझना।

✓ टाइम–टेबल से यात्रा में लगने वाले समय की गणना और कुल दूरी कितनी है जबकि यात्रा रेल या बस या हवाई जहाज़ से हो रही हो?

✓ कैलेंडर देखकर सही दिन, हफ्ता, महीना, बताना।

✓ किसी व्यक्ति का जन्मदिन कितने दिनों बाद आएगा, यह ज्ञात करना।

✓ स्कूल, कार्यालय, बाज़ार आदि कितनी दूर हैं और वहाँ पहुँचने में कितना समय लगता है?

✓ जन्मदिन से किसी भी डेट–टाइम पर आयु क्या है?

✓ परिवार के सदस्यों की आयु की गणना करना तथा ज्ञात करना कि कौन किससे बड़ा और कितना बड़ा है?

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

5. जब आप बाज़ार से कोई वस्तु क्रय करते हैं तो कोई दो क्रियाकलाप/गतिविधि बताइए जिसमें गणित का उपयोग होता हो।

....

....

6. निम्न में से गणित की आवश्यकता पड़ने वाली क्रियाएं कौन–कौन सी है?

- घड़ी देखकर समय बताना।
- किसी परिवार के सदस्यों के नाम बताना।
- रेलवे समयसारिणी से देखकर दो स्टेशनों के बीच की दूरी तथा भाड़ा बताना।
- यदि किसी परिवार के दो सदस्यों की आयु दी जाए तो दोनों की आयु के बीच का अंतर बताना।

15.4.3 मापन

✓ यात्रा करते समय गंतव्य स्थान अभी कितनी दूर है तथा अभी और कितना ईंधन लगेगा?

✓ परिवार के सदस्यों की लंबाई को नापना कि कौन सबसे लंबे कद का है और कौन सबसे कम कद का?

- ✓ हाथ या पैर के कदमों से दूरी नापना।
- ✓ मानचित्र से यात्रा की दूरी नापना।
- ✓ कपड़े कितने छोटे या बड़े हैं?
- ✓ सड़क पर प्रदर्शित चिन्हों से दूरी ज्ञात करना कि अभी कितनी दूरी तय करना शेष है?
- ✓ वज़न तौलने वाली मशीन के स्केल को ठीक–ठीक समझना।
- ✓ अलग–अलग रूटों से जाने पर दूरी का अन्तर ज्ञात करना।
- ✓ स्नान के समय प्रयोग में आने वाली बाल्टियों में आने वाली मात्रा से कुल कितना पानी प्रयोग किया गया है, यह समझना।
- ✓ पार्सल बनाने में कितना कागज़ और सुतली आदि लगेगा, इसकी गणना करना।
- ✓ अपने भार, लंबाई, ब्लड–प्रेशर, आदि को डायरी में प्रदर्शित करना।
- ✓ घर में प्रयुक्त होने या बर्बाद होने वाले पानी की मात्रा की गणना करना।
- ✓ पार्सल को लपेटने में कितना कागज़ और सुतली लगेगी?

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

7. दैनिक जीवन में मापन से संबंधित कोई तीन क्रियाएँ बताएं।

....

....

15.4.3.1 गिनना

- ✓ यात्रा करते समय कितनी कारें किस–किस रंग की आती–जाती हुई दिखीं?
- ✓ मैदान में किस–किस प्रकार के और कितनी संख्या में जानवर हैं?
- ✓ कितने घरों के नंबर विषम और सम हैं?
- ✓ पुस्तकों में कितनी कहानियाँ हैं और वे कितने–कितने पृष्ठों की हैं?
- ✓ खेलों में गोल औसत या रन औसत निकालना।
- ✓ 100 या 200 तक शीघ्रता से सीधी और उल्टी गिनती गिनना।
- ✓ बागों में कितनी पंक्तियाँ हैं और प्रत्येक पंक्ति में कितने पौधे हैं?

15.4.3.2 संख्या संबंधी क्रियाकलाप

- ✓ किसी कार की नंबर प्लेट पर लिखे अंकों को जोड़ते हुए एकल अंक पर पहुँचना, फिर यह देखना कि किस कार का एकल अंक सबसे बड़ा या सबसे छोटा है?
- ✓ बच्चों में मिठाई या खिलौने बाँटने में समूह बनाना।
- ✓ टेलीफोन नंबरों में प्रयुक्त अंकों का स्थानिक मान (Place Value) निकालना।
- ✓ सैंडविचों का प्रयोग करके भिन्नों ($^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_6$) को प्रदर्शित करना।
- ✓ समाचारपत्रों में बड़ें नंबरों में से सबसे बड़ा नंबर ज्ञात करना।
- ✓ विश्व के विभिन्न हिस्सों में तापमान को चेक करना।
- ✓ कार के नंबरों से उस कार की आयु ज्ञात करना।
- ✓ बिजली–गैस मीटरों को ठीक–ठीक पढ़ना।

बोध प्रश्न

टिप्पणी :

(क) नीचे दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

(ख) इकाई के अंत में दिए गए बोध प्रश्नों के उत्तर से अपने उत्तर का मिलान कीजिए।

8. दैनिक जीवन में गिनती से संबंधित कोई दो क्रियाएँ बताइए, जिनमें गणित की आवश्यकता पड़ती हो?

....

....

9. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

- बिजली/गैस मीटर को पढ़कर राशि ज्ञात करना, __________ क्रियाकलाप है।
- कार की प्लेट के विभिन्न नंबरों को जोड़कर एकल अंक बनाना, __________ क्रियाकलाप है।
- 1 से 100 तक उल्टी गिनती गिनना __________ क्रियाकलाप है।

15.4.3.3 तर्क–वितर्क और समस्या समाधान

- ✓ चार या छः लोगों के लिए खाने की मेज़ को सजाना।
- ✓ पूरे परिवार के साथ 1 दिन की छुट्टी मनाने की योजना बनाना।
- ✓ धोने के लिए साइज़ और रंगों के कपड़े छाँटना।
- ✓ बगीचे में प्रयोग करने के लिए खूँटी टंगों, बीजों, डिज़ाइनों को छाँटना।

- ✓ साइज़ के अनुसार समूह के लिए वस्तुओं का क्रय करना।

15.4.3.4 नंबर खेल

- ✓ लूडो या साँप–सीढ़ी का खेल।
- ✓ शतरंज (Chess) का खेल या चित–पट का खेल।
- ✓ ताश के खेल जैसे ब्रिज, रमी, पेशेंस आदि।
- ✓ व्यापार (Business) का खेल।

15.4.3.5 विविध

- ✓ नर्सरी बच्चों की कविताएँ और गीत गाना।
- ✓ विविध तरीकों से लगातार ताली बजाना।
- ✓ कोणों को पहचानना, विशेषकर समकोण को।
- ✓ यात्रा करते समय दिग्सूचक (Compass) के प्रयोग से दिशा, डिग्री, कोण आदि ज्ञात करना।
- ✓ रेत से विभिन्न साइज़ों और डिज़ाइनों के घर बनाना।

15.5 सारांश

गणित विषय का पाठ्यक्रम सदैव से ही नीरस तथा स्मरणशक्ति पर आधारित रहा है, जिसमें कुछ नया कर पाने तथा सोचने की आवश्यकता प्रतीत नहीं होती। छात्रों को यह विषय कठिन लगता है क्योंकि छात्र इसके सिद्धान्तों और उसके उपयोगों को पुर्नलेखन तो कर पाता है, किंतु अपनी जिज्ञासा को शांत नहीं कर पाता। इसी कमी को दूर करने के लिए NCERTने राष्ट्रीय पाठ्यक्रम की रूपरेखा के माध्यम से स्कूल शिक्षण में गणित प्रयोगशाला की स्थापना प्रस्तावित की।

गणित प्रयोगशाला वास्तव में एक विशिष्ट कक्ष है, जिसमें सटीक तथा अद्यतन गणितीय सामग्री होती है, यहाँ छात्र तथा शिक्षक दोनों विशिष्ट अनुदेशनात्मक उद्देश्यों के लिए एकत्रित होते हैं। इसके संचालन के लिए पूर्णतः प्रशिक्षित तथा योग्य व्यक्ति होने चाहिए।

गणित प्रयोगशाला की स्थापना का प्रमुख उद्देश्य था कि छात्रों के मस्तिष्क में से गणित के प्रति डर खत्म हो सके तथा वह खेल–खेल में गणितीय सिद्धांतों को समझ सकें। गणितीय प्रयोगशाला को स्थापित करने के लिए NCERT ने निम्नलिखित प्रमुख उपकरणों की आवश्यकता बताई, जिसमें कुछ स्थूल वस्तुएँ जैसे कि तुला, कैंची, अबैकस, गत्ता, कील, पिन, काँच की गोलियाँ होनी चाहिए। इसके अतिरिक्त तस्वीरें (गणितज्ञों की) चार्ट, प्रतिमान, श्यामपट्ट तथा सूचनापट्ट भी होना चाहिए। ज्यामिति की रेखाचित्र बनाने के लिए ज्यामिति बनाने वाले उपकरण भी होने चाहिए।

वर्तमान शिक्षा व्यवस्था में शिक्षक का कार्य काफी बढ़ गया है। इसको पूरा करने में गणित प्रयोगशाला काफी मदद करती है। वह छात्रों को अमूर्त प्रत्ययों को समझाने में शिक्षक की मदद करती है, छात्रों को विशेष उपकरणों को संचालित करने में मदद प्रदान करती है तथा सबसे विशेष कि वह छात्रों में गणित के प्रति उत्सुकता जगाए रखने में मदद प्रदान करती है।

जाने–अनजाने हम सभी गणित का उपयोग अपने दैनिक जीवन में करते रहते हैं। यदि शिक्षक चाहता है कि बालक गणित को भली–भांति समझ सके, इसके लिए आवश्यकता इस बात की है कि हम सब विभिन्न दैनिक क्रियाओं में गणित का अभ्यास करें। विभिन्न क्रियाएँ जैसे बाज़ार से सामान खरीदना, मापना, गिनना, खेलों इत्यादि में हम गणितीय सिद्धांतों का बहुतायत में प्रयोग करते हैं। फर्क सिर्फ इतना है कि उन क्रियाओं को पहचानें ताकि गणित को कक्षा के बाहर भी स्थापित किया जा सके।

15.6 अभ्यास के प्रश्न

1. गणित प्रयोगशाला के अर्थ को स्पष्ट कीजिए।
2. गणित प्रयोगशाला की स्थापना के उद्देश्य बताइए।
3. गणित प्रयोगशाला की स्थापना के लिए किन सामग्रियों की आवश्यकता पड़ती है?
4. गणित प्रयोगशाला के महत्व को अपने शब्दों में स्पष्ट कीजिए।
5. गणित को कक्षा से बाहर स्थापित करने के लिए कुछ दैनिक क्रियाओं की सूची बनाइए तथा प्रत्येक क्रिया से एक–एक उदाहरण भी दीजिए।

15.7 चर्चा के बिन्दु

1. गणित प्रयोगशाला अपने उद्देश्यों की पूर्ति कैसे करता है? चर्चा कीजिए।
2. हम अपने दैनिक जीवन में गणित का प्रयोग किन–किन रूपों में करते हैं? चर्चा कीजिए।

15.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

1) गणित प्रयोगशाला वह स्थान है, जहाँ पर अद्यतन गणितीय अनुदेशनात्मक सामग्री रखी होती है, जिसका एक विशेष प्रशिक्षित व्यक्ति द्वारा संचालित किया जाता है।

2) गणित प्रयोगशाला में प्रयुक्त होने वाली सामग्रियाँ निम्न हैं–

- गणित से संबंधित चार्ट तथा चित्र बनाना।
- गणितीय आकृति के प्रतिमान।
- विभिन्न स्थूल सामग्री जैसे कि गत्ता, बोर्ड, कैंची, कागज़, आदि।
- विभिन्न ज्यामिति रेखाचित्रों को बनाने वाले उपकरण।

- सूचनापट्ट तथा विभिन्न गणित से संबंधित पत्रिका तथा समाचारपत्र के लेख।

3) गणित प्रयोगशाला के दो कार्य निम्नलिखित हैं–

- छात्रों के अनुभवों को उन्नतशील बनाना।
- छात्रों में समस्या के समाधान की प्रवृत्ति का विकास करना।

4) गणित प्रयोगशाला में छात्र स्वयं समस्या का समाधान खोजता है तथा गणितीय सिद्धांतों को व्यावहारिक रूप से समझने का प्रयास करता है। इसमें इस प्रकार वातावरण उत्पन्न किया जाता है कि छात्र स्वयं अधिगमकर्ता बने, जिससे उसके आत्म–विश्वास में वृद्धि होती है तथा वह प्रत्ययों को आत्मसात भी कर लेता है।

5) जब हम बाज़ार से कोई वस्तु क्रय करते हैं तो गणित की दो गतिविधियाँ/क्रियाकलाप निम्नलिखित हैं–

- खरीदी गई वस्तु के लिए कितने मूल्य के कितने सिक्कों की आवश्यकता पड़ेगी, इसको गिनना।
- एक ही प्रकार की किन्हीं दो वस्तुओं के मूल्यों में विभेद करना।

6) गणित की आवश्यकता पड़ने वाली क्रियाएँ हैं–

- घड़ी को देखकर समय बताना।
- रेलवे समयसारिणी से देखकर किन्हीं दो स्टेशनों के बीच की दूरी तथा भाड़ा बताना।

7) मापन से संबंधित दैनिक क्रियाएँ हैं–

- कपड़ों की लंबाई नापना।
- तौलने वाली मशीन (Weighing Machine) के तुला को देखकर भार का पता लगाना।
- अपने परिवार के सदस्यों की लंबाई तथा भार ज्ञात करना।

8) गिनती से संबंधित दो क्रियाएँ हैं–

- दी गई पुस्तक के पृष्ठों की गिनती करना।
- आपके मोहल्ले में कितनी कारें हैं? उनकी गिनती करना।

9) रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए–

- बिजली/गैस मीटर को पढ़कर राशि ज्ञात करना, <u>संख्या संबंधी</u> क्रियाकलाप है।
- कार की प्लेट के विभिन्न नंबरों को जोड़कर एकल अंक बनाना, <u>संख्या संबंधी</u> क्रियाकलाप है।
- 1 से 100 तक उल्टी गिनती गिनना, <u>गिनना संबंधी</u> क्रियाकलाप है।

15.9 कुछ उपयोगी पुस्तकें

1. इग्नू (2012), बीईएस–009 प्राथमिक विद्यालय के लिए गणित का शिक्षण, लर्नर ब्लॉक 1–4, SLM, नई दिल्लीः इग्नू।
2. एनसीईआरटी (2005), राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005, नई दिल्लीः एनसीईआरटी
3. एनसीईआरटी (2006), पोजिशन पेपरः नेशनल फोकस ग्रुप ऑन टीचिंग ऑफगणित, नई दिल्लीः एनसीईआरटी।
4. एनसीटीई (2009), शिक्षक शिक्षा के लिए राष्ट्रीय पाठ्यक्रम ढांचा, नया दिल्लीः राष्ट्रीय शिक्षक शिक्षा परिषद।
5. हेलॉक, डेरेक (2006), प्राथमिक शिक्षकों के लिए गणित की व्याख्या, सीजे प्रकाशन इंडिया प्राइवेट लिमिटेड।

NOTE

NOTE

NOTE