

MAEC-102 (N)
अर्थशास्त्रीय गणित

परामर्श-समिति

प्रोफेसर सीमा सिंह
प्रो. सत्यपाल तिवारी

श्री विनय कुमार

कुलपति-अध्यक्ष
निदेशक, मानविकी विद्याशाखा-
कार्यक्रम संयोजक
कुलसचिव-सचिव

विशेषज्ञ समिति

प्रो. सत्यपाल तिवारी
डॉ. अनिल कुमार यादव
प्रो.किरण सिंह
प्रो. एम.के. सिंह
डॉ. विश्वनाथ कुमार
डॉ. अनूप कुमार

**अध्यक्ष
संयोजक**

उ.प्र. राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
उ.प्र. राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
इलाहाबाद केन्द्रीय विश्वविद्यालय, प्रयागराज
एम.जे.पी. रूहेलखण्ड विश्वविद्यालय, बरेली
एस.बी. पी.जी. कॉलेज, बड़ागाँव, वाराणसी
इलाहाबाद केन्द्रीय विश्वविद्यालय, प्रयागराज

पाठ्यक्रम समन्वयक

डॉ. अनिल कुमार यादव
प्रयागराज

सहायक आचार्य, अर्थशास्त्र, उ.प्र. राजर्षि टण्डन मुक्त वि.वि.,

सम्पादक

डॉ. विश्वनाथ कुमार

आचार्य, अर्थशास्त्र विभाग, एस.बी.पी.जी.कालेज, बड़ागाँव, वाराणसी

परिभाषक

डॉ. अनिल कुमार यादव
प्रयागराज

सहायक आचार्य, अर्थशास्त्र, उ.प्र. राजर्षि टण्डन मुक्त वि.वि.,

लेखक मण्डल

लेखक

डॉ. अनिल कुमार यादव

सहायक आचार्य, अर्थशास्त्र, उ.प्र. राजर्षि टण्डन मुक्त वि.वि., प्रयागराज

खण्ड- 05, इकाई-4

डॉ. डी.एन.उरांव

सहायक आचार्य अर्थशास्त्र विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, प्रयागराज

खण्ड- 01, इकाई-1,2,3,4,5,6,7

खण्ड-02, इकाई- 1,2,3,4,5,6,7,8

खण्ड-3, इकाई- 1,2,3,4,5,6,7

खण्ड-4, इकाई- 1,2,3,4,5,6,7

खण्ड-5, इकाई- 1,2,3

मुद्रित- (माह), (वर्ष)

© उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज – (वर्ष)

ISBN-

सर्वाधिक सुरक्षित। इस पाठ्य सामग्री का कोई भी अंश उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति के बिना, मिमियोग्राफ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज की ओर से श्री विनय कुमार, कुलसचिव द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित, (माह) (वर्ष), (मुद्रक का नाम व पता)

MAEC-102(N)

अर्थशास्त्रीय गणित

खण्ड 01 गणितीय विधियाँ

इकाई 01	समुच्चय, सम्बन्ध व फलन
02	आर्थिक सिद्धान्त में फलन तथा रेखाचित्र
03	सीमा तथा निरंतरता
04	अवकलन एवं इसका निर्वचन
05	लघुगुणकीय अवकलन व लोच की माप
06	आंशिक अवकलन एवं इसका अर्थशास्त्र में प्रयोग
07	अवकलन के आर्थिक प्रयोग

खण्ड 02 परिमाणात्मक विधियाँ –1

इकाई 01	अनुकूलतम समीकरण प्रति रहित
02	प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण की धारणा
03	अनुकूलतम समीकरण की धारणा के अर्थशास्त्र में सरल प्रयोग
04	समाकलन की अवधारणा एवं इसका अर्थशास्त्र में प्रयोग
05	आव्यूह (मैट्रिक्स) बीजगणित का परिचय
06	सारणिक
07	आगत-निर्गत सारणी विश्लेषण का परिचय
08	रैखिक प्रोग्रामिंग-आलेख विधि

खण्ड 03 परिमाणात्मक विधियाँ -2

इकाई 01	आँकड़ों के संकलन की विधियाँ
02	प्रतिचयन एवं प्रतिचयन की विधियाँ
03	आँकड़ों के प्रस्तुतिकरण की विधियाँ
04	केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें I : औसत
05	केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें II : मधिका, चतुर्थक, दशमक, शतमक एवं बहुलक
06	विक्षेपण की मापें I : परिसर, माध्य एवं चतुर्थक विचलन
07	विक्षेपण की मापें II : प्रमाप विचलन एवं विषमता

खण्ड 04 समंक एवं प्रतिदर्श – 1

इकाई 01	द्विचर समंको का विश्लेषण – अवर्गीकृत समंक
02	द्विचर समंको का विश्लेषण – वर्गीकृत समंक
03	द्विचर समंको का विश्लेषण –III बहुगुणी प्रतीपगमन –दो स्वतंत्र चर
04	प्रतिचयनों की विभ्रम एवं सार्थकता परीक्षण
05	सूचकांक
06	उपभोक्ता मूल्य सूचकांक
07	काल श्रेणी विश्लेषण

खण्ड 05 समंक एवं प्रतिदर्श –2

इकाई 01	समष्टि आंकड़ों की प्रकृति एवं स्रोत : राष्ट्रीय आय
02	समष्टि आंकड़ों की प्रकृति एवं स्रोत: मूल्य स्तर एवं मुद्रा की पूर्ति
03	जनगणना सर्वेक्षण
04	राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण

खण्ड— I गणितीय विधियाँ

इकाई 01— समुच्चय, सम्बन्ध व फलन

(Sets, Relations and Functions)

इकाई का प्रारूप

- 1.1.1 परिचय
- 1.1.2 समुच्चय का अर्थ
- 1.1.3 समुच्चय के प्रकार
 - 1.1.3.1 समष्टीगत समुच्चय
 - 1.1.3.2 एकल समुच्चय
 - 1.1.3.3 परिमित व अपरिमित समुच्चय
- 1.1.4 समुच्चय की संक्रियाएँ
- 1.1.5 चर व अचर
- 1.1.6 सम्बन्ध
- 1.1.7 फलन एवं उसके प्रकार
- 1.1.8 इकाई का सारांश
- 1.1.9 पारिभाषिक शब्दावली
- 1.1.10 मुख्य शब्द
- 1.1.11 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 1.1.12 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 1.1.13 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 1.1.14 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- समुच्चय के अर्थ को समझना
- समुच्चय के प्रकार को जानना
- समुच्चय के संक्रियाओं का अध्ययन
- चर व सम्बन्ध का ज्ञान।

1.1.1 परिचय

गणितीय अर्थशास्त्र में समुच्चय के अर्थ को समझना अतिआवश्यक है क्योंकि समुच्चय सम्बन्धों के प्रयोग से जटिल आर्थिक समस्याओं को सरलता से समझने में उपयोगी होते हैं। यद्यपि आर्थिक क्रियाओं तथा उससे जुड़ी वस्तुओं का वर्गीकरण करके विश्लेषण करने से उन्हें समझना आसान हो जाता है। जैसे— उपभोक्ता वस्तुएँ, आगतेँ, पूंजीगत वस्तुएँ, बाजार शक्तियाँ आदि।

दो परिवर्तनशील राशियों के बीच क्रियाशील कार्य—कारण अथवा कारण—परिणाम सम्बन्ध की सम्पूर्ण (दिशा एवं परिमाणात्मक स्वरूप दोनों ही पक्षों को समाविष्ट करते हुए) व्याख्या करने में गणित की फलन एवं फलनात्मक सम्बन्ध की अवधारणा बहुत उपयोगी सिद्ध होती है। सामान्यतः एक ही कार्य का सम्पादन अनेक कारकों का समवेत प्रभाव होता है। आर्थिक जगत से जुड़े अनेक ऐसे विषय हैं जिनकी परिमाणात्मक माप सम्भव होती है और जो परिवर्तनशील होते हैं, इनको आर्थिक चर के रूप में परिभाषित किया जाता है। यह आर्थिक सरल/जटिल, चर/कारक परिणाम सम्बन्धों की अनेक श्रृंखलाएँ सृजित कर फलनात्मक सम्बन्धों का एक मकड़जाल तैयार कर देते हैं।

1.1.2 समुच्चय (Sets) का अर्थ

समुच्चय का अर्थ वक्तियों, वस्तुओं, अंकों एवं चिन्हों आदि के एक सुपरिभाषित समूह या संग्रह से है। सरल शब्दों में, समुच्चय मदीं वस्तुओं के इकाईयों के संग्रहित समूह को प्रस्तुत करता है। उदाहरण के लिए, क्रिकेट का एक दल अर्थात् क्रिकेट खिलाड़ियों का समुच्चय, इस समुच्चय के आधार पर हर खिलाड़ी द्वारा क्रिकेट खेले जाने की विशिष्टता है जो सुपरिभाषित है। जबकि खिलाड़ियों के कद, रंग, वजन, चेहरा आदि भिन्न—भिन्न हो सकते हैं।

समुच्चय में संग्रहित प्रत्येक वस्तु को समुच्चय का अवयव कहते हैं। समुच्चय को दो वैकल्पिक पद्धतियों से व्यक्त किया जाता है।

1.1.3 समुच्चय के प्रकार

1.1.3.1 समष्टीय समुच्चय (Universal Sets): यदि किसी निश्चित सन्दर्भ में दिए गए सभी समुच्चय एक निश्चित समुच्चय के उपसमुच्चय होते हैं तो इस निश्चित समुच्चय को समष्टीय समुच्चय या सार्वत्रिक समुच्चय कहा जाता है। इसे अंग्रेजी भाषा के अक्षर 'U' द्वारा निरूपित किया जाता है। उदाहरणार्थ— यदि वास्तविक संख्याओं का अध्ययन कर रहे हों तो सभी वास्तविक संख्याओं का समुच्चय समष्टीय समुच्चय कहा जाता है। इसी तरह यदि भारत की आर्थिक गतिविधियों का संदर्भ हो तो भारतीय अर्थव्यवस्था समष्टीय समुच्चय होगी।

1.1.3.2 एकल समुच्चय— ऐसे समुच्चय जिनमें केवल एक ही अवयव होता है, जैसे— $\{2\}$, $\{3\}$, इत्यादि।

1.1.3.3 परिमित व अपरिमित समुच्चय: वे समुच्चय जिनके अवयवों की संख्या परिमित होती है उन्हें परिमित समुच्चय कहते हैं। उदाहरण के लिए, अंग्रेजी वर्णमाला के स्वरों वर्णों (**vowels**) का

समुच्चय: $\{a, e, i, o, u\}$

यदि कोई समुच्चय में सदस्यों की संख्या अपरिमित अथवा अनगिनत होता है तब उसे अपरिमित समुच्चय कहते हैं। उदाहरण के लिए, सभी प्राकृतिक संख्याओं का समुच्चय: $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ अथवा किसी सरल रेखा के सभी बिन्दुओं का समुच्चय।

1.1.3.4 उपसमुच्चय (Subset) — जब किसी समुच्चय **A** का प्रत्येक अवयव किसी दूसरे समुच्चय **B** का भी सदस्य होता है तो समुच्चय **A** को समुच्चय **B** का उपसमुच्चय कहते हैं। उदाहरण के लिए, भारत की अर्थव्यवस्था विश्व की सभी अर्थव्यवस्थाओं के समुच्चय का एक उपसमुच्चय है। इसे प्रतिकात्मक रूप से निम्नलिखित रूप से निरूपित करते हैं— $A \subseteq B$

1.1.4 समुच्चय की संक्रियाएँ:

समुच्चयों के मध्य होने वाले महत्वपूर्ण संक्रियाएँ ही इसे अर्थशास्त्र के लिए और उपयोगी बनाता है। ये संक्रियाएँ निम्नलिखित हैं—

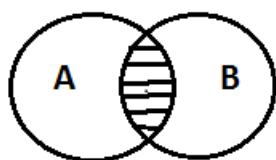
1.1.4.1 समुच्चयों का संघ या सम्मिलन (Union of Sets): दो समुच्चयों A और B का संघ एक ऐसा समुच्चय होता है जिसके अवयव या तो A या B या A और B के उभयनिष्ठ अवयव होते हैं। इसे $A \cup B$ लिखते हैं। जैसे— $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{2, 5, 6, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ इसका तात्पर्य है कि $A \cup B = \{x: x \in A \text{ अथवा } x \in B\}$ जैसे कि चित्र में $A \cup B$ दिखाया है।

चित्र संख्या: (1.1.1): $A \cup B$; समुच्चयों का संघ या सम्मिलन



समुच्चयों का सर्वनिष्ठ अथवा प्रतिच्छेद (Intersection of Sets): दो समुच्चयों A तथा B के उभयनिष्ठ अवयवों का समुच्चय A तथा B का प्रतिच्छेद होता है तब इसे $A \cap B$ लिखते हैं। उदाहरण के लिए, $A = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{2, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{5, 6\}$ इसका तात्पर्य है कि $A \cap B = \{x: x \in A \text{ अथवा } x \in B\}$ जैसे कि चित्र में $A \cap B$ दिखाया है।

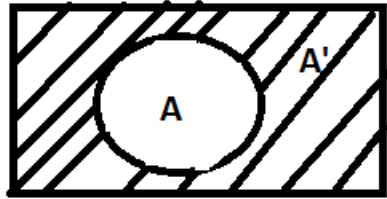
चित्र संख्या (1.1.2): $A \cap B$; समुच्चय उभयनिष्ठ या प्रतिच्छेद



पूरक समुच्चय (Complementary Sets): समुच्चय A का पूरक समुच्चय ऐसे अवयवों का समुच्चय होता है जो समष्टि समुच्चय के अवयव होते हैं किन्तु समुच्चय A के अवयव नहीं होते हैं। इन्हें A^c , A' अथवा $\bar{A}$ द्वारा सूचित किया जाता है।

$$A' = U - A = \{x: x \in U \text{ और } x \notin A\}$$

चित्र संख्या (1.1.3): पूरक समुच्चय (A')



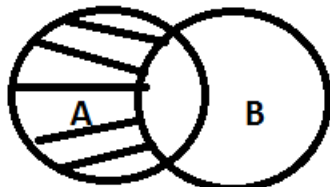
समुच्चयों का अन्तर (Differences of Sets): – दो समुच्चयों A तथा B का अन्तर वह समुच्चय होता है जिसके अवयव A के वे अवयव होते हैं जो B के अवयव न हो। इसे $A - B$ द्वारा निरूपित किया जाता है। जैसा कि वेन चित्र से दिखाया गया है। संकेत के रूप में,

यदि $A = \{1, 2, 3, 4\}$ and $B = \{2, 3, 7, 8\}$

$$A - B = \{1, 4\}$$

$$B - A = \{7, 8\}$$

चित्र संख्या (1.1.3): अन्तर ($A - B$)



1.1.5. चर व अचर

1.1.5.1 चर (Variable)

सामान्यतया बीजगणित के अन्तर्गत गणितीय सम्बन्ध को व्यक्त करने के लिए संख्याओं के स्थान पर प्रतीकों व संकेतों को उपयोग किया जाता है। वे प्रतीक अथवा राशि जो विभिन्न संख्यात्मक मान धारण करती हैं, उसे चर कहा जाता है। दूसरे शब्दों में चर वे राशियाँ होती हैं जिनका मान सदैव परिवर्तित होते रहता है। उदाहरण के लिए, किसी गणितीय सम्बन्ध में किसी चर राशि 'y' का प्रयोग उसके अनेक मान के लिए किया जा सकता है।

1.1.5.2 अचर (Constant)

वह प्रतीक व राशि जिसका मान किसी गणितीय क्रिया के दौरान परिवर्तन नहीं होता अर्थात् स्थिर होते हैं, उन्हें अचर राशि कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, ऐसे प्रतीक व चिन्ह जो एक ही मूल्य धारण कर सकें, अचर राशि कहलाते हैं। गणित में चर राशियों के लिए सामान्यतया w, x, y, z आदि तथा अचर राशियों को a, b, c, आदि के द्वारा निरूपित किया जाता है।

यदि किसी चर राशि 'y' के मूल्य अलग-अलग होते हैं, अर्थात् – 1, 2, 3, 4, ... इत्यादि तब ऐसे राशि के जितने भी संभावित मूल्य हो सकते हैं, उनके समुच्चय को उसका डोमेन (Domain) कहा जाता है। क्योंकि एक अचर राशि का एक ही मूल्य होता है फलतः उसके डोमेन में भी एक ही संख्या होगी।

1.1.5.3 स्वतंत्र एवं आश्रित चर (Independent and Dependent Variables)

वैसे चर राशि जिनका मूल्य स्वतः ही परिवर्तित होता है, स्वतंत्र चर कहलाता है। दूसरे शब्दों में, ऐसे चर मूल्यों का मान किसी दूसरे चर मूल्यों के मान में परिवर्तन से प्रभावित नहीं होते हैं। जबकि स्वतंत्र चर राशियों में होने वाले परिवर्तन के फलस्वरूप किसी दूसरे चर राशियों में भी परिवर्तन होता है तब ऐसे चर राशियों को आश्रित चर कहा जाता है। उदाहरण के लिए, यदि अन्य बातें अपरिवर्तित रहें तब

कीमत में परिवर्तन के फलस्वरूप पूर्ति की मात्रा में भी परिवर्तन होता है। यहाँ कीमत को स्वतंत्र चर तथा पूर्ति की मात्रा को आश्रित चर कह सकते हैं।

अन्तर्जात चर (Endogenous Variable): वे चर जिनका मान गणितीय मॉडल की अन्तः शक्तियों द्वारा निर्धारित होता है अर्थात् जिन चरों के मानों या परिमाणों का निर्धारण मॉडल के भीतर होता है उन्हें अन्तः चर कहते हैं। जैसे— बाजार में कीमत और मात्रा का निर्धारण बाजार की आन्तरिक शक्तियों (माँग एवं पूर्ति) द्वारा होता है। अतः बाजार विश्लेषण में कीमत और मात्रा दोनों अन्तर्जात चर हैं।

बहिर्जात चर (Exogenous Variable): वे चर जिनका निर्धारण संदर्श की आन्तरिक शक्तियों द्वारा नहीं होता अपितु प्रायः जिनका उपयोग करके संदर्श को हल किया जाता है और अन्तःचर का निर्धारण होता है। उदाहरण के लिए, एक उपभोक्ता के लिए बाजार मूल्य एक बाह्य चर है क्योंकि एक अकेला उपभोक्त बाजार मूल्य परिवर्तित नहीं करा सकता है। अर्थात् उपभोक्ता व्यवहार में उपभोग स्तर निर्धारण की दृष्टि से बाजार मूल्य दिया हुआ होता है तथा उपभोग स्तर इस दिये हुए बाजार मूल्य द्वारा निर्धारित होता है। इस प्रकार यह भी स्पष्ट हो जाता है कि एक चर जो एक संदर्श के लिए अतः चर है दूसरे संदर्श के लिए बाह्य चर हो सकता है अर्थात् संदर्श बदलने पर चर की भूमिका भी बदल सकती है।

1.1.6 संबंध (Relation) का अर्थ

चर विश्लेषण के अन्तर्गत हम सम्बन्धों का अध्ययन करते हैं। यहाँ ये स्पष्ट करना आवश्यक है कि चर विश्लेषण के अन्तर्गत किसी एक चर के मान में होने वाले परिवर्तन का अध्ययन नहीं किया जात है वरन् दो या दो से अधिक चरों के बीच के सम्बन्धों का अध्ययन किया जाता है। जैसे, $Y = 2X$, $Y = X^2$, $Y = \pm\sqrt{X}$ इत्यादि। गणितीय सम्बन्ध दो प्रकार के होते हैं—

(1) गैर-फलनात्मक

(2) फलनात्मक

1.1.6.1 गैर-फलनात्मक सम्बन्ध— चरों के बीच के ऐसे सम्बन्ध जिनसे अद्वितीय परिणाम मिलना सुनिश्चित न हो तथा जिसके फलस्वरूप चरों के बीच कारण—कार्य सम्बन्ध स्थापित करना सम्भव न हो जैसे— $Y = 2X$; X का मान 2 हाने पर $Y = 4$ का मान होगा अर्थात् परिणाम (Y) अद्वितीय नहीं है। इसकी प्रकार लॉटरी का टिकट खरीदने पर ईनाम मिल भी सकता है और नहीं मिल सकता है अर्थात् परिणाम अद्वितीय नहीं है।

1.1.6.2 फलनात्मक सम्बन्ध— चरों के बीच पाया जाने वाला ऐसा सम्बन्ध जिसमें एक चर या एक से अधिक चरों के मान द्वारा किसी दिये हुए चर के मान का अद्वितीय निर्धारण होता हो तब उसे फलनात्मक सम्बन्ध कहते हैं। फलनात्मक सम्बन्धों में एक सुस्पष्ट कारण—कार्य सम्बन्ध विहित व निहित होता है। जैसे— $Y = 2X$ । इसी प्रकार यह कथन कि कोई व्यक्ति अपने खेत पर जितनी अच्छी किस्म के बीज का प्रयोग करेगा (सिंचाई, खाद एवं खेती की देखभाल आदि समान रहने पर) प्रति एकड़ फसल का उत्पादन उतना ही अच्छा होगा।

उपरोक्त उदाहरणों में Y का मान X पर निर्भर करता है तथा उत्पादन की मात्रा बीज की किस्मों पर निर्भर कर रही है, अर्थात् Y , फसल के उत्पादन का मान X के मान, बीज की किस्म पर आश्रित है। किसी फलनात्मक सम्बन्ध में वे चर जिनका परिमाण अथवा मान किसी अन्य चर अथवा चरों के मानों पर निर्भर करता है उनको आश्रित चर कहते हैं। आश्रित चरों के मान का निर्धारण फलनात्मक सम्बन्ध का अन्तः चर होता है। इसके विपरीत जिन चरों का मान फलनात्मक सम्बन्धों की सीमाओं के बाहर होता है या दूसरे शब्दों में जो अपना मान या परिमाण स्वतन्त्र रूप से धारण करते हैं उन्हें स्वतन्त्र चर कहते हैं। किसी फलनात्मक सम्बन्ध के सन्दर्भ में जो चर 'स्वतन्त्र चर' होता है, दूसरे फलनात्मक सम्बन्ध के सन्दर्भ में आश्रित चर हो सकता है।

एक फलनात्मक सम्बन्ध में स्वतन्त्र चरों की संख्या एक से अधिक हो सकती है किन्तु आश्रित चर एक ही होता है।

फलनात्मक सम्बन्ध को सांकेतिक रूप में निम्नवत दर्शाया जाता है—

$Y = f(X)$, जहाँ, f = फलन का सूचक है, Y , आश्रित चर तथा X स्वतंत्र चर है।

जिसे, Y (चर), X (चर) का फलन है (Y is the function of X) पढ़ते हैं।

यदि स्वतन्त्र चरों की संख्या n हो तो फलनात्मक सम्बन्ध को निम्नवत लिखते हैं—

$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$

हमारे दैनिक जीवन में घटित हाने वाले आर्थिक व्यवहार के समीकरण सामान्यतया फलनात्मक सम्बन्ध होते हैं जिन्हें आधार बनाकर आर्थिक समीकरणों का निर्माण तथा आर्थिक सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया

जाता है। चूँकि अधिकांश आर्थिक चर स्वभाव से गैर-ऋणात्मक वास्तविक अंकों की सीमा से बंधे होते हैं फलतः अधिकांश आर्थिक सम्बंध या फलनात्मक सम्बंधों के डोमेन भी इस सीमा से बंधित होते हैं।

1.1.7 फलन एवं उनके प्रकार

1.1.7.1 फलन का अर्थ

अर्थशास्त्र में प्रायः विभिन्न चरों के बीच व्याप्त परस्पर सम्बंधों का अध्ययन किया जाता है।

दो चरों के बीच पाये जाने वाले पारस्परिक सम्बंध को ही फलनात्मक सम्बंध (Functional Relation) कहलाता है जिसके अनुसार एक चर राशि का मूल्य रखन पर दूसरी चर राशि का संगत मान प्राप्त किया जा सकता है और जिस सूत्र या नियम से ये दोनों राशियां परस्पर जुड़ी रहती है उसे ही गणितीय भाषा में फलन कहते हैं।

यदि चर y , चर x का एक फलन है तब $y = f(x)$ है।

यदि $y = 6x + 7$ हो तब x के प्रत्येक मान के लिए y का एक निश्चित मान प्राप्त होते हैं। अतः y को x का फलन कहते हैं।

यदि एक चर राशि x के किसी मान के लिए दूसरी चर राशि y का एक से अधिक मान हो तो y, x का फलन नहीं कहलाता बल्कि y को x का सम्बंध (Relation) कहा जाता है। उदाहरण के लिए $y^2 = x$ यहाँ पर x के प्रत्येक मान के लिए y के दो मान प्राप्त होते हैं। ऐसे सम्बंधों को कभी-कभी विविध मान फलन (Multi-Valued Function) भी कहते हैं।

मानचित्र द्वारा फलन का अर्थ (Meaning of Functions by Mapping)

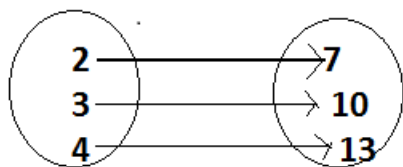
यदि किसी गैर-रिक्त समुच्चय X के प्रत्येक अवयव x का संगत (Corresponding) अरिक्त समुच्चय Y के एक निश्चित एवं अद्वितीय (unique) अवयव y से किसी नियम f द्वारा सम्बद्ध होता है तो f को समुच्चय, X को समुच्चय Y में मानचित्रण (Mapping) कहा जाता है और इसे $f: X \rightarrow Y$ से प्रदर्शित करते हैं। इसी मानचित्रण f को फलन कहते हैं। मानचित्रण दो समुच्चयों X और Y को अवयवों के बीच संगुणन के ज्यामितीय पहलू को प्रदर्शित करता है और फलन इसका विश्लेषणात्मक पहलू प्रदर्शित करता है।

यदि X तथा Y दो गैर-रिक्त समुच्चय हों और किसी नियम f द्वारा X का प्रत्येक अवयव Y के केवल एक अद्वितीय (unique) अवयव से संगुणित (Associated) हो जाए तो द्विचर सम्बंध (Binary Operation) R, X का Y में फलन कहलाता है।

इसप्रकार, $R = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$ को X का Y में फलन कहते हैं।

उदाहरण: $Y = 3x + 1$ में y, x का फलन है। यदि x एक ऐ बड़े और सात से छोटे धन पूर्णांक मान ग्रहण करे तो फलन का प्रान्त मान या प्रभाव क्षेत्र समुच्चय (2, 3, 4) हुआ और तब फलन का परास समुच्चय (7, 10, 13) हुआ।

चित्र संख्या (1.1.4): सम्बंधों का चित्रण



1.1.7.2 फलनों के प्रकार

प्रत्येक फलन में अन्तर्निहित फलनात्मक सम्बंध की व्याख्या उस सम्बंध को व्यक्त करने वाली गणितीय प्रक्रिया पर आधारित एक निश्चित समीकरण के द्वारा की जाती है। जैसे—

(अ) $Y = f(x): Y = mx + c = 3x + 1$

(ब) $Y = f(x): Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$

(स) $Y = f(x): Y = b \log X$ आदि।

इस प्रकार फलनात्मक सम्बंध में अन्तर्निहित गणितीय संक्रिया के आधार पर फलनों को दो प्रमुख वर्गों में बाँटा जाता है।

(क) बीजीय व बीजगणितीय फलन एवं (ख) अबीजीय फलन।

(क) **बीजीय फलन**— वैसे फलन जिसमें फलनों में स्वतंत्र चर व आश्रित चर के बीच फलनात्मक सम्बन्ध को बीजीगणितीय संक्रियाओं के द्वारा पूर्णतः व्यक्त किया जा सके ऐसे फलन बीजीय फलन कहलाते हैं। उदाहरणार्थ,

$$Y = f(x): Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

बीजीय फलनों के भी निम्नलिखित प्रकार होते हैं।

(अ) **अचर फलन**— ऐसे फलन जिनमें स्वतंत्र चर के सभी मानों के लिए आश्रित चर या फलन का एक निश्चित मान होता है। उन्हें अचर फलन कहते हैं।

$$\text{जैसे, } Y = f(x): Y = 15$$

(ब) **रैखिक फलन**— रैखिक फलन एक घातीय फलन होते हैं जिनके किसी भी पद का अधिकतम घातांक एक होता है। रैखिक फलनों के प्रत्येक बिन्दु पर फलन की प्रवणता समान रहती है। रैखिक फलनों में स्वतंत्र चर और आश्रित चर में हाने वाले परिवर्तनों का अनुपात स्थिर बना रहता है अर्थात् फलन में परिवर्तन की दर स्थिर रहती है। रैखिक फलन के ग्राफीय निरूपण से सरल रेखा प्राप्त किया जाता है।

(स) **द्विघातीय फलन**— द्विघातीय फलन द्वितीय घात के फलन होते हैं जिनके किसी भी पद का अधिकतम घातांक दो होते हैं। द्विघातीय फलनों में परिवर्तन की दर परिवर्तनशील होता है, ऐसे फलनों के विन्दुरेख निरूपण से शाकव आकृतियाँ (Conic Section) प्राप्त होता है। जैसे— परवलय, वृत्त, दीर्घ वृत्त, अति परवलय।

(द) **बहुपद फलन**— ऐसे फलन जिनमें अनेक पद विद्यमान होते हैं और इसके प्रत्येक पद एक गुणांक के साथ स्वतन्त्र चर का एक ऐसा पद होता है जिसका घातांक गैर-ऋणात्मक पूर्णांक हो। उदाहरण के लिए,

$$Y = f(x): Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

अबीजीय फलन— ऐसे फलन जिनको मात्र बीजीय संक्रियाओं द्वारा व्यक्त करना सम्भव न हों तथा तथा जिनको व्यक्त करने के लिए चर-घातकीय, लघुगुणकीय या त्रिकोणमितीय संक्रियाओं का सहारा लेना पड़ता है, अबीजीय फलन होते हैं।

(अ) **चर घातांकीय फलन**— वे फलन जिनकी व्याख्या ऐसे पदों की सहायता से की जाती है जिनमें घातांक में स्वतंत्र चर की भूमिका होती है। चर-घातांकीय फलन कहलाते हैं। उदाहरण के लिए,

$$Y = f(x): Y = b^x$$

$$Y = f(t): Y = a_2b^t$$

(ब) **लघुगुणकीय फलन**— वे फलन जिनको व्यक्त करने के लिए स्वतन्त्र चर के लघुगुणकों का प्रयोग किया जात है अर्थात् जिन फलनों में फलनात्मक सम्बन्ध लघुगुणकीय संक्रियाओं द्वारा व्याख्यायित होते हैं, उन्हें लघुगुणकीय फलन कहते हैं। उदाहरणार्थ—

$$Y = f(x): Y = a \log_b X$$

$$\text{or, } Y = f(x): Y = \alpha \log_e X$$

(स) **त्रिकोणमितीय फलन**: ये फलन जिनको व्यक्त करने के लिए त्रिकोणमितीय संक्रियाओं का प्रयोग किया जाता है त्रिकोणमितीय फलन कहलाते हैं। जैसे—

$$Y = f(x): Y = a \sin x$$

$$\text{or, } Y = f(\theta): Y = a \sin \theta$$

(द) **परिमेय फलन**— वे फलन जिनको दो बहुपदों के अनुपात के द्वारा व्यक्त किया जाता है, उन्हें परिमेय फलन कहते हैं।

$$\text{जैसे— } Y = f(x): Y = \frac{a_0 + a_1 X}{b_0 + b_1 X + b_2 X^2}$$

(ई) **अपरिमेय फलन**— ऐसे बीजीय फलन जिनको बहुपद के मूल जैसे वर्गमूल के द्वारा व्यक्त किया जाता है, को अपरिमेय फलन कहते हैं।

$$\text{जैसे— } Y = f(x): Y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$$

1.1.8 इकाई का सारांश

गणितीय अर्थशास्त्र में समुच्चय के अर्थ को समझना अतिआवश्यक है क्योंकि समुच्चय सम्बन्धों के प्रयोग से जटिल आर्थिक समस्याओं को सरलता से समझने में उपयोगी होते हैं। आर्थिक क्रियाओं तथा उससे जुड़ी वस्तुओं का वर्गीकरण करके विश्लेषण करने से उन्हें समझना आसान हो जाता है। जैसे—

उपभोक्ता वस्तुएँ, आगतें, पूंजीगत वस्तुएँ, बाजार शक्तियाँ आदि। यद्यपि गणितीय अर्थशास्त्र की नींव समुच्चय के सिद्धान्त, फलनात्मक सम्बन्ध एवं फलों के विभिन्न रूपों पर आश्रित है। अर्थशास्त्र के मौलिक चरों एवं उनके प्रयोग को समझने में यह इकाई बहुत उपयोगी माध्यम के रूप में कार्य करता है।

1.1.9 पारिभाषिक शब्दावली

फलनात्मक संबंध— चरों के बीच पाया जाने वाला ऐसा सम्बन्ध जिसमें एक चर या एक से अधिक चरों के मान द्वारा किसी दिये हुए चर के मान का अद्वितीय निर्धारण होता हो तब उसे फलनात्मक सम्बन्ध कहते हैं।

1.1.10 मुख्य शब्द

- समुच्चय
- सम्बन्ध
- फलन

1.1.11 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

1. किसी समुच्चय के सभी सम्भव उपसमुच्चयों के समुच्चय को. कहते हैं।
2. जिस समुच्चय में कोई भी अवयव नहीं होता है उसे कहते हैं तथा इसे द्वारा दिखाते हैं।
3. फलन में स्वतन्त्र चरों की संख्या हो सकती है।
4. माँग, पूर्ति एवं लागत फलन चतुर्थांश में सीमित रहते हैं।

1.1.12 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(क) 1. घात समुच्चय 2. रिक्त समुच्चय 3. अनके, 4. प्रथम

1.1.13 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

1. समुच्चय के अर्थ को बताएँ। उनके विभिन्न प्रकारों का भी उल्लेख करें।
2. चर से आप क्या समझते हैं? अन्तर्जात तथा बहिर्जात चरों में भेद स्पष्ट कीजिए।
3. सम्बन्ध से आप क्या समझते हैं? उदाहरण की सहायता से सम्बन्ध और फलनात्मक सम्बन्ध में भेद कीजिये।
4. फलन से आप क्या समझते हैं? फलन के विभिन्न प्रकारों का वर्णन करें।
5. गैर-फलनात्मक सम्बन्ध किसे कहते हैं?

1.1.14 संदर्भ पुस्तकें

1. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
2. Mishra, J.P., "Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)" Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.
3. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, "आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी", तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
4. अग्रवाल, डी. आर. 'प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र', (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली— 110091

5. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
6. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
7. Agarawal D. R., Quantitative Methods
8. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
9. Yamane, T., Mathematics for Economists.
10. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
11. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस, के., "आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें", शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

आर्थिक सिद्धान्त में फलन (Functions) तथा रेखाचित्र (Graphs)

प्रारूप:

- 1.2.1 परिचय
- 1.2.2 फलनों का बिन्दुरेखीय निरूपण
- 1.2.3 अर्थशास्त्र में स्वतंत्र एवं आश्रित चर
- 1.2.4 अर्थशास्त्र में प्रयोग होने वाले आर्थिक फलन
- 1.2.5 अर्थशास्त्र में रैखिक फलनों का उपयोग
- 1.2.6 इकाई का सारांश
- 1.2.7 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 1.2.8 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 1.2.9 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- फलनों के रेखाचित्रीय निरूपण की विधि को जान सकेंगे।
- अर्थशास्त्र में प्रयोग होने वाले स्वतंत्र एवं आश्रित चर को जानेंगे।
- अर्थशास्त्र में प्रयोग किये जाने वाले फलनों का अध्ययन करेंगे।
- अर्थशास्त्र में प्रयुक्त रैखिक फलनों का अध्ययन करेंगे।

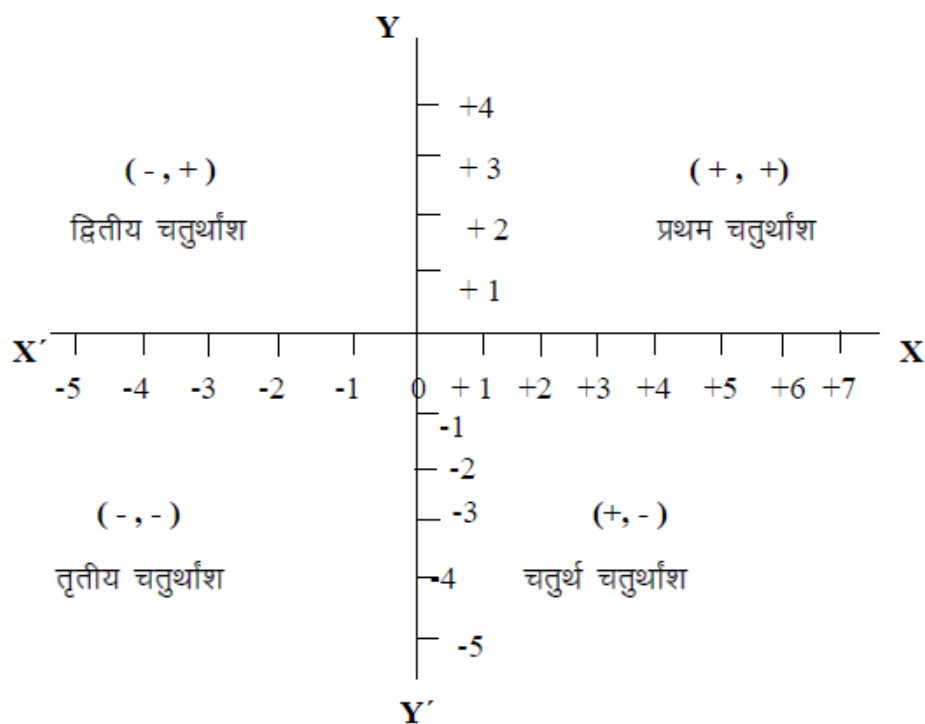
1.2.1 परिचय

फलनों में अन्तर्निहित फलनात्मक सम्बन्धों को रेखाचित्र द्वारा सहजता से स्पष्ट किया जा सकता है। एक स्वतन्त्र चर वाले फलन का रेखाचित्र आरम्भिक निर्देशांक ज्यामिति की सहायता से द्विआयामी-समतल या पृष्ठ पर अंकित किया जा सकता है किन्तु दो या दो से अधिक स्वतन्त्र चर वाले फलनों (जब सभी स्वतन्त्र चर एक साथ परिवर्तनशील हों) को अंकित करने के लिए तीन या तीन से अधिक आयामों की आवश्यकता पड़ती है जिसे पुस्तिका पर दर्शाना जटिल तथा तीन से अधिक आयामों का अंकन व्यावहारिक रूप से असम्भव होता है। यही कारण है कि बहु-स्वतन्त्र चरीय आर्थिक फलनों के विश्लेषण को रेखाचित्र द्वारा दर्शाने के लिए प्रायः एक चर को परिवर्तनशील रखते हुए शेष को स्थिर मान लिया जाता है। उदाहरण के लिए, विश्लेषण की सरलता और रेखाचित्र द्वारा सहजता से दर्शाने के लिए वस्तु के अपने मूल्य के अतिरिक्त शेष सभी स्वतन्त्र चरों को स्थिर मान कर $D_x = f(P_x)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है। जिसका रेखाचित्रीय निरूपण करने पर धनात्मक चतुर्थांश में बायें से दायें गिरती हुई रेखा या वक्र प्राप्त होती है। इसी प्रकार बहुघातीय बीजीय फलन, लघुगणकीय फलन, चर घातांकी फलन एवं त्रिकोणमितीय फलनों का रेखाचित्र हाथ से अंकित करना प्रायः असम्भव जैसा होता है। उपरोक्त तथ्यों को ध्यान में रखते हुए सरल निर्देशांक ज्यामिति को प्रयोग करते हुए अभ्यास की दृष्टि से रैखिक एवं परवलयकार फलनों के अंकन की विधि का उल्लेख किया जा रहा है।

1.2.2 फलनों का बिन्दुरेखीय निरूपण

एक स्वतन्त्र चरीय फलनों के अंकन के लिए द्विआयामी पृष्ठ को दो अक्षों— X अक्ष जो क्षैतिज अक्ष तथा Y अक्ष जो उदग्र अक्ष होता है, जो परस्पर 90° का कोण बनाते हुए एक-दूसरे को मूल बिन्दु 0 पर काटते हैं, और इस प्रकार द्वि-आयामी पृष्ठ को चार अंशों में विभक्त करते हैं। स्वतन्त्र चर की गणना X अक्ष के सहारे तथा आश्रित चर की गणना Y अक्ष के सापेक्ष व सन्दर्भ में की जाती है। मूल बिन्दु से दायीं तरफ X के मान धनात्मक तथा मूल बिन्दु से बायीं तरफ X के मान ऋणात्मक होते हैं। इसी प्रकार Y के मान मूल बिन्दु से ऊपर धनात्मक तथा मूल बिन्दु से नीचे ऋणात्मक होते हैं परिणामस्वरूप प्रथम चतुर्थांश में X तथा Y दोनों चरों के मान धनात्मक होते हैं, इसे धनात्मक धनात्मक चतुर्थांश भी कहते हैं। द्वितीय चतुर्थांश X के

मान ऋणात्मक तथा Y के धनात्मक होते हैं। तृतीय चतुर्थांश में X तथा Y दोनों के मान ऋणात्मक होते हैं इसे ऋणात्मक चतुर्थांश भी कहते हैं तथा चतुर्थ चतुर्थांश में X के मान धनात्मक तथा Y के मान ऋणात्मक होते हैं। देखें चित्र-1.2.1



चित्र- 1.2.1

सामान्यता फलन का हस्तनिर्मित आरेख बनाने के लिए स्वतन्त्र चर के पूर्णांक मानों को स्वेच्छानुसार चुना जाता है तथा इन मानों को फलन के समीकरण में रखकर आश्रित चर या फलन के मान की गणना की जाती है। तत्पश्चात् समतल पर इन चर मानों के आधार पर निश्चित बिन्दुओं को चिह्नित किया जाता है इन बिन्दुओं को परस्पर मिलाने से फलन का आरेख प्राप्त हो जाता है।

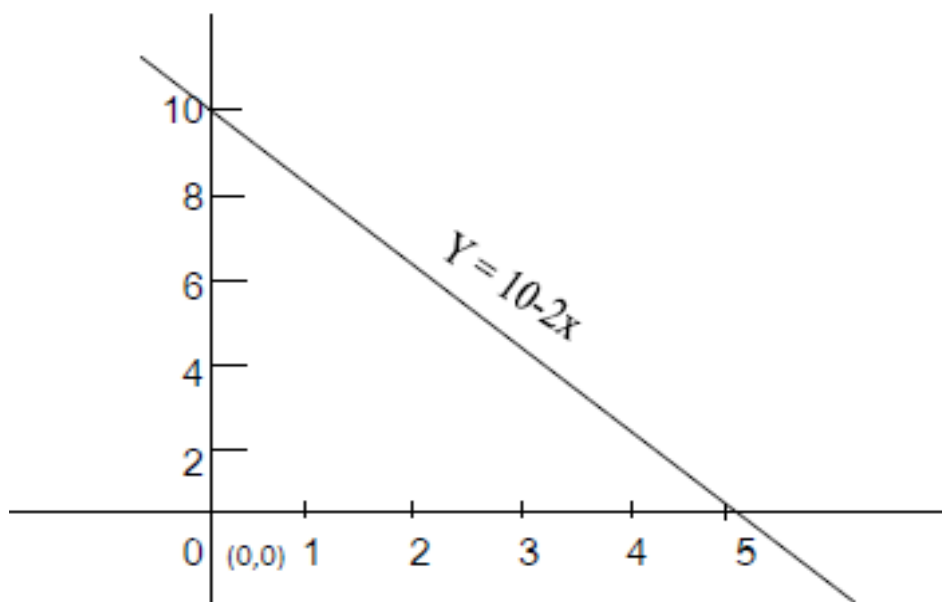
फलनों का रेखाचित्रीय निरूपण— (Graphical Presentation of Function)

उदाहरण (1)– $Y = 10 - 2x$ का बिन्दूरेखीय निरूपण कीजिए।

हल—

X	0	1	2	3	4	5	6
Y	10	8	6	4	2	0	-2

यद्यपि सारणी में X के शून्य से 6 तक के ही मान लिये गये हैं। परन्तु सभी वास्तविक संख्याएँ इस फलन के डोमेन अर्थात् X के मान हो सकते हैं।

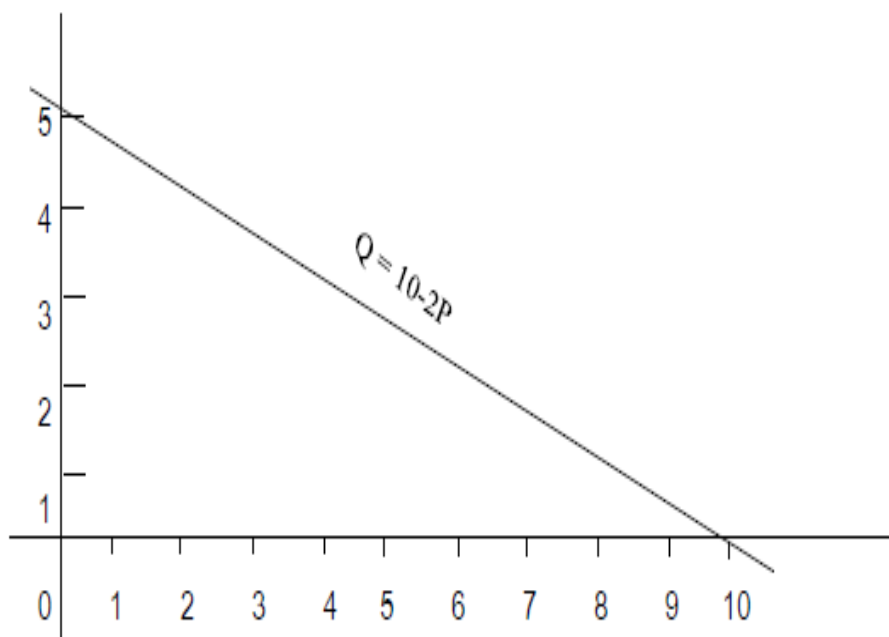


चित्र संख्या-1.2.2

चूँकि दिया गया फलन एक सरल रेखा को व्युत्पन्न करता है तथा सरल रेखा की ढाल अपरिवर्तित रहती है। सारणी से प्राप्त पाँच बिन्दुओं को मिलाते हुए सरल रेखा को ग्राफ के पूरे विस्तार तक खींचा जाता है।

टिप्पणी—

- (क) यदि उपरोक्त फलन जैसा एक माँग फलन $Q = 10 - 2P$ हों तो P और Q के केवल गैर-ऋण मान (शून्य अथवा धनात्मक मान) ही प्रासंगिक होंगे।
- (ख) यद्यपि मूल्य स्वतन्त्र चर है परन्तु प्रायः माँग को X अक्ष पर अंकित किया जाता है जिसके चलते माँग फलन का ग्राफ निम्नवत होगा—



चित्र संख्या-1.2.3

1.2.3 अर्थशास्त्र में स्वतंत्र एवं आश्रित चर (Independent and Dependent Economic Variables)

- (1) **स्वतन्त्र आर्थिक चर**— वैसे आर्थिक चर राशि जिनका मूल्य स्वतः ही परिवर्तित होता है, स्वतंत्र आर्थिक चर कहलाता है। दूसरे शब्दों में, ऐसे चर मूल्यों का मान किसी दूसरे चर मूल्यों के मान में परिवर्तन से प्रभावित नहीं होते हैं। उपर दिये गये माँग फलन में P कीमत को दर्शाता है जो स्वतः ही परिवर्तित होते हैं।
- (2) **आश्रित आर्थिक चर**—जबकि स्वतंत्र चर राशियों में होने वाले परिवर्तन के फलस्वरूप किसी दूसरे चर राशियों में भी परिवर्तन होता है तब ऐसे चर राशियों को आश्रित चर कहा जाता है। उदाहरण के लिए, यदि अन्य बातें अपरिवर्तित रहें तब कीमत में परिवर्तन के फलस्वरूप पूर्ति की मात्रा में भी परिवर्तन होता है। यहाँ कीमत को स्वतंत्र चर तथा पूर्ति की मात्रा को आश्रित चर कहते हैं। उपरोक्त माँग फलन में, Q वस्तु की मात्रा एक आश्रित चर है जो कीमत में होने वाली किसी भी परिवर्तन से पूरी तरह प्रभावित होती है।

अर्थशास्त्र में कई प्रकार के आर्थिक फलनों का प्रयोग किया जाता है जिससे आर्थिक सिद्धान्तों को सरलता से समझा जा सकता है।

2.4 अर्थशास्त्र में प्रयोग होने वाले आर्थिक फलन (Use of Economic Functions in Economics)

(अ) **माँग फलन**: किसी वस्तु की माँग तथा उसे प्रभावित करने वाले कारकों के बीच पाये जाने वाले फलनात्मक सम्बन्ध को ही माँग फलन कहते हैं। सामान्यतः माँग फलन को D_x या D_q या X या Q से निरूपित किया जाता है। संकेत के रूप में

$$D = f(P_x, P_o, Y, T, P_n \text{ etc})$$

Where,

f = फलन का चिन्ह

D = माँग की मात्रा

P_x = वस्तु X की कीमत

P_o = वस्तु X से सम्बन्धित किसी अन्य वस्तु की कीमत

Y = उपभोक्ता की आय

T = प्रचलित फैशन व रुचि व स्वाद

P_n = उपभोक्ता परिवार व सामाज की जनसंख्या

उपरोक्त समीकरण से यह स्पष्ट है कि मांगी गई मात्रा, उस वस्तु की कीमत, अन्य सम्बन्धित वस्तुओं की कीमत, उपभोक्ता की आय, उपभोक्ता की रुचि एवं आदतों पर निर्भर करती है। उपरोक्त माँग फलन को सरल विश्लेषण हेतु अन्य कारकों को स्थिर मानते हुए निम्न रूप में निरूपित किया जा सकता है—

$$D = f(P_x) \text{ यदि अन्य बातें समान व अपरिवर्तित होने पर।}$$

अर्थात्, किसी वस्तु की माँग उस वस्तु के मूल्य पर निर्भर करती है।

यह समीकरण व सूत्र व फलन स्पष्ट करता है कि किसी वस्तु की मांगी गई मात्रा (D) उस वस्तु की कीमत पर निर्भर करता है। माँग के नियम के अनुसार, *अन्य बातें समान रहने पर माँग की मात्रा एवं कीमत के बीच विपरीत सम्बन्ध होता है अर्थात् कीमत कम होने पर माँग की मात्रा बढ़ती है तथा कीमत बढ़ने पर माँग की मात्रा घटती है।*

(ब) **पूर्ति फलन (Supply Function)**: किसी वस्तु की पूर्ति एवं उसे प्रभावित करने वाले कारकों के बीच फलनात्मक सम्बन्ध को व्यक्त करता है। सूत्र के रूप में,

सामान्यतः पूर्ति फलन को S_x या S_q या X या Q से निरूपित किया जाता है। संकेत के रूप में

$$S_x = f(P_x, P_o, I_p, T, \text{ etc.})$$

Where,

S_x = पूर्ति की मात्रा

P_x = वस्तु X की कीमत

P_o = वस्तु X से सम्बन्धित किसी अन्य वस्तु की कीमत

I_p = उत्पादन के साधनों की पूर्ति कीमत

T = उत्पादन में प्रयुक्त तकनीक

उपरोक्त समीकरण से यह स्पष्ट है कि पूर्ति की मात्रा, उस वस्तु की कीमत, अन्य सम्बन्धित वस्तुओं की कीमत, उत्पादन के साधनों की पूर्ति कीमत, उत्पादन में प्रयुक्त तकनीक पर निर्भर करती है। उपरोक्त पूर्ति फलन को सरल विश्लेषण हेतु अन्य कारकों को स्थिर मानते हुए निम्न रूप में निरूपित किया जा सकता है—

$$S_x = f(P_x). \text{ यदि अन्य बातें समान व अपरिवर्तित होने पर।}$$

अर्थात्, किसी वस्तु की पूर्ति उस वस्तु के मूल्य पर निर्भर करती है।

यह समीकरण व सूत्र व फलन स्पष्ट करता है कि किसी वस्तु की पूर्ति की मात्रा (S_x) उस वस्तु की कीमत पर निर्भर करता है। पूर्ति के नियम के अनुसार, *अन्य बातें समान रहने पर पूर्ति की मात्रा एवं कीमत के बीच प्रत्यक्ष सम्बन्ध होता है अर्थात् कीमत कम होने पर पूर्ति की मात्रा कम है तथा कीमत बढ़ने पर पूर्ति की मात्रा बढ़ती है।*

(स) उत्पादन फलन (Production Function): यह निर्गत (Outputs) तथा आगतों (Inputs) के बीच तकनीकी सम्बन्धों की व्याख्या करता है। इस निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है—

$$Q = f(N, L, K)$$

Where,

Q = किसी वस्तु का उत्पादन

N = भूमि की मात्रा

L = श्रम की मात्रा

K = पूंजी की मात्रा

(द) बचत फलन (Saving Function)— बचत एवं बचत की मात्रा को प्रभावित करने वाले कारकों के बीच फललनात्मक सम्बन्ध को ही बचत फलन कहते हैं।

$$S = f(Y)$$

अर्थात् बचत आय का फलन है।

जब यह कहा जाता है कि बचत (S), ब्याज की दर (r) तथा आय के स्तर (Y) पर निर्भर करती है तब बचत फलन को निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है—

$$S = f(Y, r)$$

अर्थात् बचत ब्याज दर तथा आय का फलन है।

(ई) उपयोगिता फलन (Utility Function)— जब एक उपभोक्ता किन्हीं दो वस्तुओं की q_1 तथा q_2 मात्रा का उपभोग करता है तब इन वस्तुओं से प्राप्त उपभोक्ता की उपयोगिता (U) को निम्नवत् व्यक्त किया जा सकता है—

$$U = f(q_1, q_2)$$

इसे उपयोगिता फलन कहा जाता है। व्यवहार में आश्रित चर राशियाँ एक अथवा एक से अधिक स्वतन्त्र चरों से प्रभावित होती हैं। इस तरह, फलन दो बातों की ओर संकेत करता है—

(अ) कौन से स्वतन्त्र एवं आश्रित चर परस्पर सम्बन्धित है ? तथा

(ब) स्वतन्त्र चर आश्रित चर को किस तरह प्रभावित करते हैं ?

अब तक दिए गये स्पष्टीकरण से इस तथ्य की जानकारी नहीं हो पाती कि चर परस्पर किस तरह प्रभावित होते हैं ?

उदाहरण 1.2.1: **मांग फलन** से यह स्पष्ट होता है कि मांग कीमत पर निर्भर करती है। मांग किस तरह कीमत पर निर्भर करती है, इसकी जानकारी प्राप्त करना भी आवश्यक होता है। मांग फलन $D = f(P)$ यह स्पष्ट नहीं करता कि कीमत के कम होने पर मांग बढ़ जाती है। परन्तु, जब हम मांग फलन को $D = 8 - P$ के रूप में व्यक्त करते हैं। तब मूल्य के कम होने पर मांग बढ़ जाती है, इस तथ्य का स्पष्टीकरण प्राप्त हो जाता है।

चूँकि,	$D = 8 - P$	में,
यदि मान लें कि, $P = 1$,	तब	$D = 7$
$P = 2$,	तब	$D = 6$
$P = 8$	तब	$D = 0$ होगी।

इस तरह स्पष्ट होता है कि **मूल्य बढ़ते के साथ—साथ मांग घट जाती है** तथा मूल्य के 8 होने पर मांग शून्य हो जाती है।

इस तरह, फलन $D = 8 - P$ किसी वस्तु के मांग के नियम को अच्छी तरह से स्पष्ट करता है और इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि—

1. मूल्य (P) एक स्वतन्त्र चर है जबकि मांग (D) स्वतन्त्र चर है।
2. मूल्य घटने पर मांग बढ़ जाती है।
3. मूल्य जब बढ़कर 8 हो जाता है तब मांग शून्य हो जाती है। चूंकि मांग ऋणात्मक नहीं हो सकती अतः मूल्य ($P = 8$) 8 के बराबर होने तक ही यह फलन व्यवहारिक है। हम यह जानते हैं कि मूल्य ऋणात्मक नहीं हो सकती है। इस तरह मूल्य की सीमा 0 से 8 तक है। इस सीमा में प्रत्येक मूल्य के लिए मांग का भी एक निश्चित मान होगा। उपयुक्त तरह के फलन को रैखिक एकघातीय फलन कहते हैं। रैखिक एकघातीय फलन में चर पद एकघातीय होते हैं।

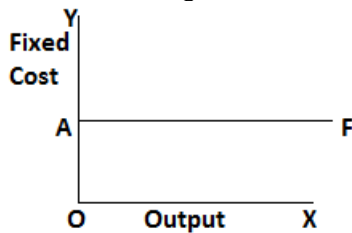
वक्र तथा उनका अर्थशास्त्र प्रयोग (Curves and its use in Economics)

आर्थिक फलनों से प्राप्त रेखाचित्रों को वक्र कहा जाता है। फलन के प्रकार के अनुसार वक्रों के स्वरूप भी भिन्न-भिन्न होते हैं। फलन के प्रकार के अनुसार ही उनके प्रकार का नामकरण किया जाता है जिसका प्रयोग विभिन्न प्रकार के आर्थिक फलनों को निरूपित करने के लिए किया जाता है। अर्थात् जितने प्रकार के फलन होंगे, उतने ही प्रकार के वक्र होंगे। जैसे—

1. रैखिक आर्थिक फलन के रेखाचित्र को रैखिक वक्र कहते हैं।
2. द्विघातीय फलन के रेखाचित्र को द्विघातीय वक्र कहते हैं।
3. चरघातांकीय फलन के रेखाचित्र को चरघातांकी वक्र कहते हैं।

1. अचर आर्थिक फलन का रेखाचित्र या वक्र (Graph or Curve of Constant Economic Function)

संलग्न चित्र में स्थिर कुल लागत फलन को प्रदर्शित किया गया है। चित्र में स्थिर कुल लागत वक्र T



चित्र-1.2.4: स्थिर लागत वक्र।

चित्र में OX—अक्ष पर उत्पादन की इकाइयों को तथा OY—अक्ष पर उत्पादन की लागत को प्रदर्शित किया गया है। चित्र से स्पष्ट है कि उत्पादन की मात्रा में परिवर्तन के बावजूद संरचनात्मक लागत स्थिर रहती है। अतः स्थिर लागत फलन को हम शून्य घात के बहुपद फलन $y = A$ के द्वारा प्रदर्शित कर सकते हैं, जहाँ A उत्पादन की स्थिर लागत है।

रैखिक फलनों का रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शन

रैखिक फलनों को एकघातीय फलन भी कहा जाता है क्योंकि इनके चर पदों की घात एक होती है। जैसे— $y = x + 4$ अथवा $y = 2x + 6$ एकघातीय फलन है क्योंकि इनके चर पदों x तथा y की घात इकाई के बराबर है। रेखीय फलन का रेखाचित्र सदैव एक सीधी रेखा के रूप में होता है।

उदाहरण 1.2.3: यदि फलन $y = x + 4$ को रेखाचित्र खींचना है तब स्वतन्त्र चर x के अलग-अलग मूल्यों के लिए y के संगत मूल्य प्राप्त किए जा सकते हैं। फलन $y = x + 4$ में यदि x का मूल्य शून्य है तब y का मूल्य 4 होगा, यदि $x = 1$ है तो $y = 5$ होगा। इस तरह दिए हुए फलन से निम्नलिखित तालिका का निर्माण किया जा सकता है—

बिन्दु	X	Y	बिन्दु के निर्देशांक
A	0	4	(0, 4)
B	1	5	(1, 5)
C	2	6	(2, 6)
D	3	7	(3, 7)
E	4	8	(4, 8)

इस तरह, उपरोक्त अलग-अलग बिन्दुओं के निर्देशांक प्राप्त होते हैं। इन बिन्दुओं को ग्राफ पेपर पर अंकित कर दिया जाता है। इन बिन्दुओं A, B, C, D तथा E को आपास में मिला दिया जाए तो प्राप्त बिन्दुपथ (Locus) फलन $y = x + 4$ का रेखाचित्र स्वरूप है।

2.5 अर्थशास्त्र में रैखिक फलनों का उपयोग (Use of Linear Function in Economics)

अर्थशास्त्र में रैखिक फलनों एवं सरल रेखा के समीकरणों का बहुत उपयोग है। बाजार में किसी वस्तु की कीमत, मांग एवं पूर्ति द्वारा निर्धारित होती है। यदि मांग और पूर्ति फलन दिये हुए हो तो हम साम्यावस्था बिन्दु पर ऐसी कीमत एवं मात्रा का निर्धारण कर सकते हैं जहां माल बेचने एवं खरीदने वाले दोनों ही सन्तुष्ट हो जायें।

माना कि मांग फलन, $q = 16 - 4p$ है(1)

तथा पूर्ति फलन, $q = -8 + 4p$ है(2)

जहाँ q वस्तु की मात्रा तथा p वस्तु की कीमत दर्शाते हैं।

अब हम q तथा p का ऐसे मान निकालने का प्रयास करेंगे जो समीकरण (1) और (2) दोनों को संतुष्ट करे। इसके लिए दोनों समीकरणों को हल करना होगा। मांग और पूर्ति की साम्यावस्था में,

$$16 - 4p = -8 + 4p \quad \text{..... (3)}$$

$$8p = 24 \quad \text{..... (4)}$$

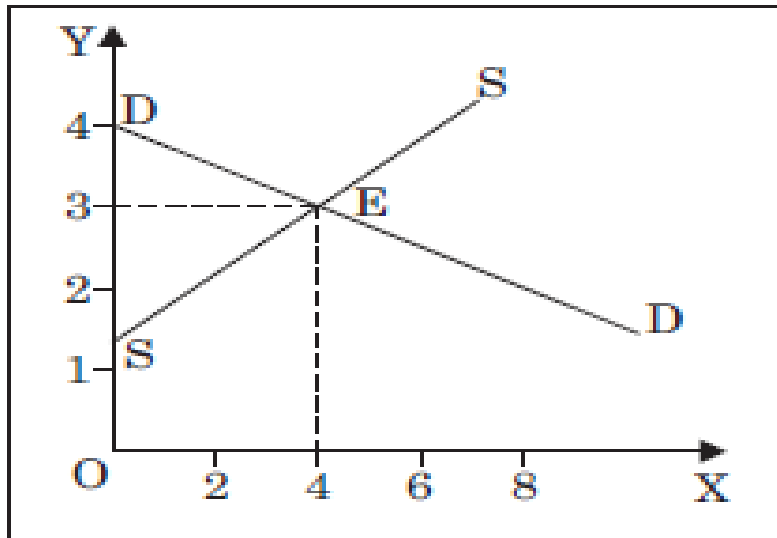
$$p = \frac{24}{8} = 3 \quad \text{..... (5)}$$

p का मान समीकरण (1) में रखने पर

$$q = 16 - 4 \times 3 = 16 - 12 = 4$$

इस प्रकार साम्यावस्था कीमत = 3 एवं मांग और पूर्ति की मात्रा 4 इकाइयों में होगी।

इन समीकरणों को हम रेखा चित्र के रूप में भी निम्न रूप से प्रदर्शित कर सकते हैं।



चित्र-1.2.5

रेखाचित्र में X-अक्ष पर वस्तु की मात्रा तथा Y-अक्ष पर वस्तु की कीमत दर्शायी गई है। DD मांग फलन तथा SS पूर्ति फलन को दर्शाते हैं। दोनों फलन एक-दूसरे को E बिन्दु पर काटते हैं। अतः साम्यावस्था भी E बिन्दु पर ही प्राप्त होगी। इस बिन्दु पर Y-भुजाक्ष साम्यावस्था मूल्य और X-भुजाक्ष मांग और पूर्ति मात्रा बतायेगा।

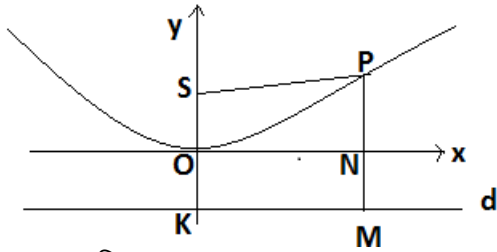
अतः साम्यावस्था मूल्य = 3 तथा वस्तु की मात्रा = 4 होगा।

अर्थशास्त्र में प्रयोग होने वाले फलन

- (अ) परवलय (Parabola)
- (ब) अतिपरवलय (Hyperbola)
- (स) लघुगणकीय फलन (Logarithmic Function)
- (द) घातीय फलन (Exponential Function)।

(अ) परवलय (Parabola): परवलय का अर्थशास्त्र में बहुत उपयोग होता है। यदि y , x और उसकी दूसरी घात पर निर्भर करता हो तो y को x का द्विघाती (quadratic) फलन कहते हैं। इस निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है—

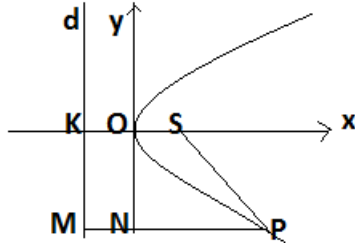
$$y = a + bx + cx^2 \quad \text{..... (1)}$$



चित्र-1.2.6- क

इसी प्रकार x , y और उसकी दूसरी घात पर निर्भर करता हो तो x को y का द्विघाती फलन कहते हैं। इस गणितीय रूप में निम्न प्रकार दर्शा सकते हैं—

$$x = a + by + cy^2 \quad \text{----- (2)}$$



चित्र-1.2.6- ख

उपर्युक्त समीकरण (1) एवं (2) परवलय के सामान्य फलनीय रूप को दर्शाते हैं। यहाँ यह उल्लेखनीय है कि परवलय के समीकरण में (1) x y का पद नहीं होता है तथा (2) x^2 अथवा y^2 में एक ही होता है।

यहाँ ध्यान देने योग्य बात है कि उपरोक्त समीकरण का केन्द्र मूल बिन्दु पर नहीं होगा जैसा कि रेखाचित्र में दर्शाया गया है—

यदि परवलय का समीकरण $y^2 = 4ax$ हो तो परवलय के समीकरण का केन्द्र पर होगा तथा परवलय वक्र रेखाचित्र के अनुसार होगा। इसी प्रकार यदि परवलय का समीकरण हो तो हमें परवलय वक्र रेखाचित्र के अनुसार प्राप्त होगा।

उपर्युक्त रेखाचित्र में O परवलय का शीर्ष (Vertex) कहा जाता है। $y^2 = 4ax$ परवलय के लिए OY अक्ष के समानान्तर एक सरल रेखा, शीर्ष से दूरी पर वक्र के दूसरी ओर होती है, जिसे डायरेक्ट्रिक्स (Directrix) कहते हैं। इसी प्रकार वक्र $x^2 = 4by$ के लिए डायरेक्ट्रिक्स OX के समानान्तर शीर्ष b दूरी पर होती है।

वह सरल रेखा जो शीर्ष से जाती है और डायरेक्ट्रिक्स के समान्तर होती है परवलय का अक्ष कहलाती है। अक्ष परवलय को दो बराबर समान भागों में विभाजित करता है। अक्ष पर शीर्ष से डायरेक्ट्रिक्स से दूसरी ओर a या b की दूरी पर अवस्थित बिन्दु की परवलय को फोकस (Focus) कहते हैं। परवलय का यह विशिष्ट गुण होता है कि इस पर किसी बिन्दु की फोकस और डायरेक्ट्रिक्स से दूरी समान होती है।

(ब) अतिपरवलय (Hyperbola): परवलय की भाँति अतिपरवलय फलन का भी अर्थशास्त्र में बहुत उपयोग है। अतिपरवलय फलन को गणितीय रूप में निम्न प्रकार दर्शा सकते हैं—

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{(जहाँ a, b स्थिरांक हैं)}$$

अथवा $\frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{y^2}{b^2}$

तब $\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2 - a^2}{a^2}$

या, $y^2 = \frac{b^2}{a^2}(x^2 - a^2)$

अथवा, $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(x^2 - a^2)}$

यदि हम निम्नलिखित तथ्यों का अनुरेखण करें तो

(1) जब $x = \pm a$, $y = 0$

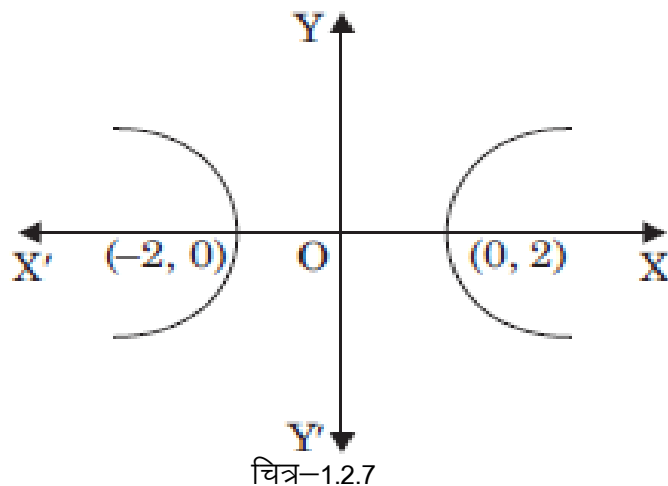
(2) यदि $a = b = 3$

तब, $y = \pm\sqrt{(x^2 - 9)}$

(3) यदि $x < a$ है तब y का मान काल्पनिक होगा,

यदि मूल बिन्दु $(0,0)$ अतिपरवलय का केन्द्र है तो अतिपरवलय वक्र निम्न प्रकार होगा—
यदि केन्द्र-बिन्दु (h, k) है तो अतिपरवलय वक्र का समीकरण निम्न प्रकार होगा—

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$



(स) लघुगणकीय फलन (Logarithmic Function): जब y, x का फलन न होकर $\log x$ का फलन हो तो उस फलन को लघुगणकीय फलन कहा जाता है। लघुगणकीय फलन का सामान्य सकीकरण निम्नवत् होता है—

$$y = \alpha + \beta \log x$$

यहाँ यदि $\alpha = 0$ तथा $\beta = 1$ हो तो यह समीकरण $y = \log x$ मात्र हो जायेगा।

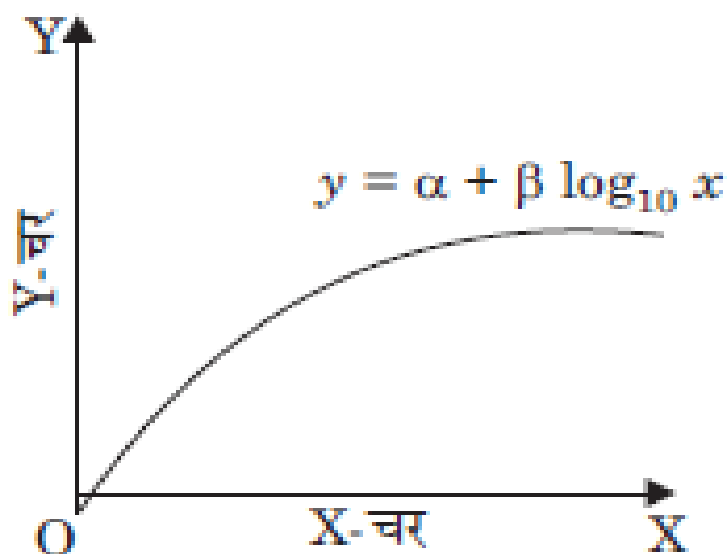
माना कि लघुगणकीय समीकरण $y = -5 + 5 \log_{10} x$ हो (यहाँ हमने $\alpha = 0$, $\beta = 5$ माना है।)

तो

$$\begin{aligned} y &= -5 + 5 \times 0 = -5 && (\text{यदि } x = 1) \\ y &= -5 + 5 \times 1 = 0 && (\text{यदि } x = 10) \\ y &= -5 + 5 \times 2 = 5 && (\text{यदि } x = 100) \\ y &= -5 + 5 \times 3 = 10 && (\text{यदि } x = 1000) \end{aligned}$$

ध्यान देने योग्य बात यह है कि इस समीकरण में x का मान 0 या ऋणात्मक नहीं हो सकता है क्योंकि इनका लघुगणक नहीं होता है। बहुधा $\log$ का आधार e लिया जाता है।

द्वि-लघुगणकीय फलन का सामान्य सकीकरण निम्न प्रकार का होता है—



चित्र-1.2.8

अथवा

$$\log y = \alpha + \beta \log x$$

$$\log y = \alpha \log x^\beta$$

$$\log y - \log x^\beta = \alpha$$

अथवा

$$\log \frac{y}{x^\beta} = \alpha$$

इसलिए,

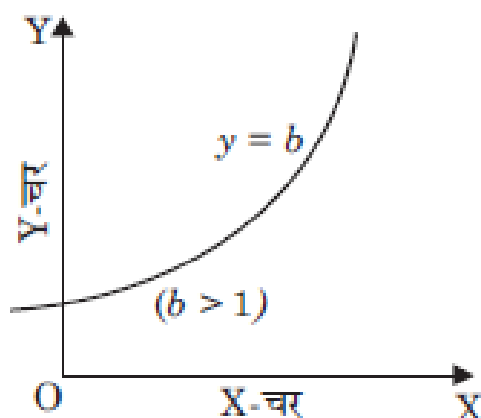
$$\frac{y}{x^\beta} = e^\alpha$$

$$y = e^\alpha x^\beta = Ax^\beta$$

(जबकि $A = e^\alpha$)(क) यदि $\beta = 1$ तब $y = \frac{A}{x}$ अथवा $xy = A$ (तब यह आयतीय परवलय हो जायेगा।)(ख) यदि $\beta < 1$ है तो x के बढ़ने के साथ y बढ़ती दर से बढ़ता है।(ग) यदि $0 < \beta < 1$ है तो x के बढ़ने के साथ y घटती दर से बढ़ता है।(घ) यदि $\beta < 0$ हो तो x बढ़ने के साथ y घटता है।

यहाँ यह उल्लेखनीय है कि घनात्मक घात उत्पादन फलन और ऋणात्मक घात माँग विश्लेषण में प्रयुक्त होती हैं। इनकी प्रमुख विशेषता यह है कि घातांक स्थिर लोच को दर्शाते हैं।

(द) **घातीय फलन (Exponential Function):** घातीय फलन भी अर्थशास्त्र में बहुत उपयोगी है। इस फलन में y , x का फलन न होकर x के घातीय का फलन का फलन होता है। इसे निम्नलिखित समीकरणों द्वारा दर्शाया जा सकता है—



चित्र-1.2.9

$$y = \log \log_e x, \quad y = e^x, \quad y = e^{\sin x}$$

इत्यादि,

यदि हमारी घातीय समीकरण $y = b^x$ हो, जबकि $\beta > 1$ है तो इसका वक्र चित्र के अनुसार होगा—

माना घातीय फलन $x = AB^y$ है तो इस समीकरण को लघुगणकीय रूप में निम्न प्रकार दर्शा सकते हैं—

$$\log x = \log A + y \log B$$

$$y \log B = \log x - \log A$$

अथवा

$$y = \frac{\log x}{\log B} - \frac{\log A}{\log B}$$

माना

$$\frac{1}{\log B} = \beta \quad \text{और} \quad \frac{\log A}{\log B} = \alpha \quad \text{तब}$$

$$y = \alpha + \beta \log x, \quad \text{जो कि}$$

हमारा लघुगणकीय फलन ही है।

उदाहरण 1.2.5: माना कि माँग और पूर्ति वक्र एक सरल रेखा है। यदि विभिन्न मूल्यों पर मूल्य और माँग की मात्रा निम्न प्रकार दी हुई हो तो माँग और पूर्ति समीकरण निकालिए।

मूल्य (P)	माँग (D)	पूर्ति (S)
2	40	50
5	20	60

हल: उपर्युक्त तालिका को निम्न प्रकार से बिन्दुओं के रूप में लिखकर रैखिक रूप दिया जा सकता है—

	माँग मूल्य बिन्दु	पूर्ति मूल्य बिन्दु
(अ)	(40, 2)	(50, 2)
(ब)	(20, 5)	(60, 5)

माना x = मात्रा तथा y = मूल्य है तो (40, 2) और (20, 5) को मिलाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

y_1, y_2, x_1 तथा x_2 का मूल्य रखने पर

$$y - 2 = \frac{5-2}{20-40} (x - 40)$$

$$\text{या } y - 2 = \frac{3}{-20} (x - 40)$$

$$\text{या } -20(y-2) = 3(x-40)$$

$$\text{या } -20y + 160 = 3x$$

$$\text{या } 3x = 160 - 20y$$

$$\text{या } x = \frac{160}{3} - \frac{20}{3}y$$

यदि x = माँग की जगह D रखें और y = मूल्य की जगह P रखें रखें तो माँग समीकरण होगा—

$$D = 53.33 - 6.66P$$

इसी प्रकार पूर्ति रेखा (50, 2) तथा (60, 5) बिन्दुओं से होकर गुजरती है और इन बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा का समीकरण होगा—

$$y - 2 = \frac{5-2}{60-50} (x - 50)$$

$$y - 2 = \frac{3}{10} (x - 50)$$

$$\text{या } 10(y-2) = 3(x-50)$$

$$\text{या } 10y - 20 = 3x - 150$$

$$\text{या } 3x = 130 - 10y$$

$$x = 43.33 - 3.33y$$

यदि x = पूर्ति मात्रा की जगह S और y = मूल्य की जगह P रखें तो पूर्ति समीकरण होगा—

$$S = 43.33 - 3.33P$$

उदाहरण 1.2.6: निम्नलिखित परवलय के फोकस और डायरेक्ट्रिक्स ज्ञात कीजिए—

$$(क) \quad y^2 = 16x$$

$$(ख) \quad x^2 = 20y$$

हल: (क) $y^2 = 16x$ की तुलना करने पर,

अतः डायरेक्ट्रिक्स शीर्ष से वक्र की दूसरी ओर -4 दूरी पर है $x = -4$ अर्थात् और फोकस शीर्ष से डायरेक्ट्रिक्स के विपरीत (4,0) पर स्थित है।

(ख) $x^2 = 4by$ से $x^2 = -20y$ की तुलना करने पर

अतः डायरेक्ट्रिक्स शीर्ष से वक्र की दूसरी ओर $+5$ दूरी पर है, अर्थात् $y = 5$ और फोकस (0, 5) पर स्थित होगा।

1.2.6 इकाई का सारांश

एक राशि के मान में परिवर्तन होने पर उस पर निर्भर दूसरी राशि के मान में परिवर्तन किस दर से होता है एवं इस परिवर्तन की दर से सम्बन्धित अनेक प्रश्नों एवं क्रियाओं का विश्लेषण एवं अध्ययन अवकल गणित (Differential Calculus) कहलाता है। परिवर्तनशील राशियों को चर (Variables) कहते हैं। वे राशियाँ जिनका मान बदलता रहता है अर्थात् जिन राशियों के अगणित संख्यात्मक मान (numerical values) दिये जा सकता है, चर (variables) कहते हैं। वे राशियाँ जिनका मान गणित की प्रत्येक संक्रिया में अपरिवर्तित रहता है, अचर कहलाती है।

फलन का सिद्धान्त दो परस्पर सम्बद्ध चर राशियों (Related Quantities) पर आधारित है। अर्थशास्त्र में रैखिक फलनों एवं सरल रेखा के समीकरणों का बहुत उपयोग है। बाजार में किसी वस्तु की कीमत, माँग एवं पूर्ति द्वारा निर्धारित होती है। यदि माँग और पूर्ति फलन दिये हुए हो तो हम साम्यावस्था बिन्दु पर ऐसी कीमत एवं मात्रा का निर्धारण कर सकते हैं जहाँ माल बेचने एवं खरीदने वाले दोनों ही सन्तुष्ट हो जायें।

1.2.7 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

5. यदि चर राशि y केवल एक चर राशि x पर आश्रित है, तब $y = f(x)$ ----- कहलाता है।
6. एक भिन्न के रूप में व्यक्त किया गया ऐसा फलन जिसके अंश और हर दोनों ही पूर्णांक घातों वाले बीजीय व्यंजक हों, ----- कहलाता है।

1.2.8 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(क) 2. आश्रित चर 3. परिमेय फलन

1.2.9 संदर्भ पुस्तकें

12. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
13. Mishra, J.P., "Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)" Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.
14. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, "आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी", तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
15. अग्रवाल, डी. आर. 'प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र', (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली- 110091
16. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
17. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
18. Agarawal D. R., Quantitative Methods
19. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
20. Yamane, T., Mathematics for Economists.
21. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
22. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., "आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें", शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड-I - इकाई 03

सीमा एवं सततता/निरंतरता (Limits and Continuity)

प्रारूप:

- 1.3.1 परिचय
- 1.3.2 अनुक्रम की सीमा
- 1.3.3 सीमा
 - 1.3.3.1 दक्षिण पक्ष और वाम पक्ष सीमा
 - 1.3.3.2 फलन की दायां पक्ष तथा बायां पक्ष सीमा ज्ञात करने की विधि
 - 1.3.3.3 सीमा का अस्तित्व
- 1.3.4 फलन की सीमा ज्ञात करने की विधि
- 1.3.5 सततता (सातत्य) एवं असततता (असातत्य) की ज्यामितीय परिभाषा
- 1.3.6 इकाई का सारांश
- 1.3.7 अपनी प्रगति की जाँच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 3.8 अपने उत्तर की जांच के लिए कुँजी
- 1.3.9 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- फलन की सीमा से सम्बन्धित समस्याओं को हल कर सकेंगे।
- सीमाओं पर प्रमेय तथा उस पर आधारित प्रश्नों को हल कर सकेंगे।
- फलन की सीमा ज्ञात करने की विधि को जान पाएँगे।
- किसी बिन्दु पर फलन का सातत्य ज्ञान करने की विधि तथा उससे सम्बन्धित समस्याओं को हल करने में सक्षम हो सकेंगे।
- सतत फलनों पर प्रमेय और उस पर आधारित प्रश्नों को हल करने में आसानी होगी।

1.3.1 परिचय (Introduction)

किसी गुणोत्तर श्रेणी $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots)$ पर विचार करें तो हम पाते हैं कि जैसे-जैसे पदों की संख्या बढ़ती जाती है वैसे-वैसे श्रेणी का योग 1 की आरंभ अग्रसर होता है। यद्यपि योगफल वास्तव में 1 के बराबर नहीं हो पाता है। इस प्रकार पदों की प्रत्याप्त संख्या लेकर योगफल और 1 के अन्तर को हम जितना चाहें उतना कम कर सकते हैं।

मान लीजिए कि दी हुई त्रिज्या के वृत्त के अन्तर्गत एक सम-बहुभुज बनाया जाता है। तब ज्यामिति से स्पष्ट है कि (क) बहुभुज का क्षेत्रफल, वृत्त के क्षेत्रफल से अधिक नहीं हो सकता है, चाहे बहुभुज में भुजाओं की संख्या कितनी भी अधिक क्यों न हो। (ख) बहुभुज में भुजाओं की संख्या को अपरिमित/अनन्त रूप से बढ़ाने पर इस वृत्त और बहुभुज के क्षेत्रफल के अन्तर को जितना चाहें कम कर सकते हैं।

कलन (Calculus) में इस तथ्य को इस प्रकार व्यक्त किया जात है कि वृत्त के अन्तर्गत खींचे गये बहुभुज के क्षेत्रफल की सीमा, जबकि भुजाओं की संख्या अपरिमित रूप से बढ़ती है। (अथवा अनन्त की ओर प्रवृत्त होती है), वृत्त का क्षेत्रफल होता है।

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\text{Area of polygone}) = \text{Area of Circle}$$

1.3.2 अनुक्रम की सीमा (Limit of a Sequence)

यदि अनुक्रम $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ पर विचार करें जिनके लिए $S_n = \frac{1}{n}$, जहां, S_n अनुक्रम का n वाँ पद प्रदर्शित करता है। हम देखते हैं कि n का मान जैसे-जैसे बढ़ता है $\frac{1}{n}$ का मान वैसे-वैसे घटता जाता

हे। वास्तव में हम n को पर्याप्त बड़ा चुनकर, $\frac{1}{n}$ को जितना चाहें उतना छोटा कर सकते हैं। यहाँ यदि $n > 10,000$ तो $\frac{1}{n} < 0.0001$ और यदि $n > 10^8$ तो $\frac{1}{n} < 10^{-8}$ इस प्रकार हम देखते हैं कि जैसे-जैसे n अनंत की ओर प्रवृत्त होता है $\frac{1}{n}$ शून्य की ओर प्रवृत्त (tends to) होता है। हम देखते हैं कि अनुक्रम $\{S_n\}$ की सीमा 0 है और इसे $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 0$ द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

1.3.3 सीमा (Limit)

माना कि $y = f(x)$ एक फलन है। यदि, $x = a$ पर $f(x)$ की सीमा कोई संख्या (मान लिया L) होती है तो इसको निम्न प्रकार लिखा जाता है:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

नोट: $x \rightarrow a$ तथा $x = a$ दोनों गणित की भाषा में समान नहीं हैं।

$x \rightarrow a$ की स्थिति में $|X - a| \neq 0$ बल्कि बहुत कम यानि नगण्य है। जबकि

$x = a$ की स्थिति में $|X - a| = 0$ है।

किसी बिन्दु ($x = a$) पर फलन की सीमाओं को दो तरह से प्राप्त किया जा सकता है।

पहला— उस बिन्दु के बायीं ओर से चलकर बिन्दु तक पहुँचा जाता है जिसे बायीं पक्ष की सीमा (ऋणात्मक पक्ष की सीमा) भी कहते हैं। इसे $\lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ द्वारा सूचित किया जाता है।

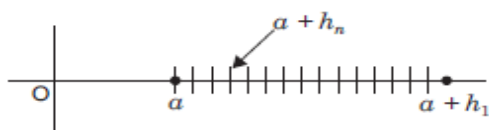
तथा दूसरा, उस बिन्दु के दायीं ओर से चलकर बिन्दु तक पहुँचा जाता है जिसे दायीं ओर की सीमा (धनात्मक पक्ष की सीमा) भी कहते हैं। इसे $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ द्वारा सूचित किया जाता है।

फलन का दायीं व दक्षिण पक्ष एवं बायीं व वाम पक्ष सीमाएं (Right Hand and Left Hand Limits of a Function)

मान लीजिए $y = f(x)$ कोई फलन है और $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$, एक धनात्मक संख्याओं का समुच्चय (a set of positive numbers) है जिसका मान सतत घट (Continually Decreasing) रहा है अर्थात्

$$h_1 > h_2 > h_3 > \dots > h_n > \dots > 0 \quad \text{----- (1)}$$

और जिसे, n को पर्याप्त बड़ा लेकर, जितना चाहें उतना इच्छानुसार छोटा बना सकते हैं। इस स्थिति में जैसे-जैसे h_n छोटा होता जाता है फलन के मान,



चित्र संख्या: 1.3.1

$$f(a + h_1), f(a + h_2), \dots, f(a + h_n) \quad \text{----- (2)}$$

घटते जाते हैं।

यदि X का मान संख्या a से अधिक से a की ओर प्रवृत्त (tend to) होती है तो फलन $f(x)$ के मान को $x = a$ पर **दक्षिण व दायीं पक्ष सीमा अथवा धनात्मक पक्ष की सीमा** भी कहते हैं। इसे

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h)$$

के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

यहाँ पर हमने x के केवल उन मानों (Values) पर ही विचार किया है जो कि a से अधिक (greater) हैं। (अर्थात् चित्र में a के दाहिनी ओर)।

अब हम के उन मानों पर विचार करेंगे जो a से कम हैं (smaller) हैं (अर्थात् चित्र में a के बायीं ओर)। जैसे-जैसे h_n छोटा होता जाता है फलन

$$f(a - h_1), f(a - h_2), \dots, f(a - h_n), \dots$$

के मान एक संख्या की ओर प्रवृत्त होते हैं। इस संख्या को फलन की वाम पक्ष अथवा ऋणात्मक पक्ष सीमा कहते हैं और इसे

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a - h)$$

के द्वारा लिखते हैं।

इसे निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया गया है—

उदाहरण (1): फलन $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ का $x=1$ पर सीमा ज्ञात करें।

इस प्रश्न को इस प्रकार भी लिख सकते हैं— $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = ?$

हल: विधि-1 (सूत्र द्वारा हल):

सर्वप्रथम दिए गए समीकरण में $x=1$ रखकर जाँच करते हैं।

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{1-1}{1-1} = \frac{0}{0} \dots\dots\dots(1) \text{ जो कि अपरिभाषित है।}$$

आगे दिए गए समीकरण $\frac{x^2-1}{x-1}$ को हल करने पर,

$$\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = (x+1) \dots\dots\dots(2)$$

उपरोक्त व्यंजक $(x+1)$ में $x=1$ रखने पर व्यंजक का मान 2 आता है जो $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1}$ का हल है।

विधि-2 (अभ्यास द्वारा हल): दायां पक्ष की सीमा

समीकरण $f(X) = \frac{x^2-1}{x-1}$ में X का मान 1 से अधिक से शुरू करके क्रमशः घटाते हुए 1 की ओर आते हैं।

$$X \quad f(X) = \frac{X^2-1}{X-1}$$

1.1	2.1
1.01	2.01
1.001	2.001
1.0001	2.0001

.....

इस प्रकार हम देखते हैं कि X का मान जब 1.1 से धीरे धीरे कम होकर 1 की ओर आता है तब $f(X)$ का मान 2 की ओर अग्रसर होता है। इस प्रकार से दिए गए समीकरण के लिए दायां पक्ष की सीमा 2 है।

वायां पक्ष की सीमा

समीकरण $f(X) = \frac{x^2-1}{x-1}$ में X का मान 1 से कम से शुरू करके क्रमशः 1 की ओर बढ़ते हैं।

$$X \quad f(X) = \frac{X^2-1}{X-1}$$

0.9	1.9
0.99	1.99
0.999	1.999
0.9999	1.9999
0.99999	1.99999

.....

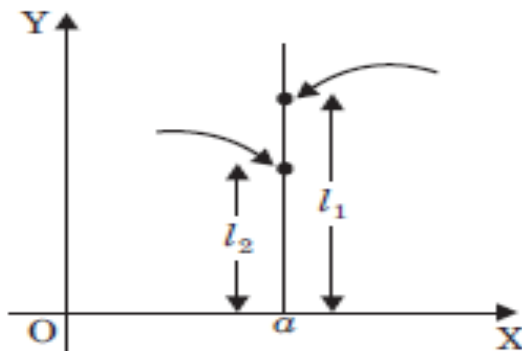
इस प्रकार हम देखते हैं कि X का मान जब 0.9 से धीरे धीरे बढ़कर 1 की ओर आता है तब $f(X)$ का मान 1.9 से बढ़ते हुए 2 की ओर अग्रसर होता है। इस प्रकार से दिए गए समीकरण के लिए वायां पक्ष की सीमा 2 है।

सीमा का अर्थ/परिभाषा (Meaning /Definition of Limit): वास्तविक संख्या L को फलन $f(X)$ की सीमा जबकि X, a की ओर अग्रसर होता है, सीमा कहते हैं यदि केवल $\varepsilon > 0$ के लिए $\delta > 0$ इस प्रकार अस्तित्व में है कि $0 < |X - a| < \delta$ तथा $|f(X) - L| < \varepsilon$ है। ऐसी दशा में हम लिखते हैं कि $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

1.3.3.1 दक्षिण पक्ष और वाम पक्ष सीमा (Right Hand and Left Hand Limits)

जब फलन की सीमा स्वतंत्र चर के मान के दाहिनी ओर से प्राप्त की जाती है तो उसे फलन की दक्षिण या दायें पक्ष सीमा (Right Hand Limit) कहते हैं और दाहिनी ओर के लिए धन चिह्न का प्रयोग करते हुए सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार से लिखते हैं—

दक्षिण पक्ष सीमा $= f(a + 0) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l_1$



चित्र संख्या: 1.3.2

वाम या बायां पक्ष सीमा (Left Hand Limit)

जब फलन की सीमा स्वतंत्र चर के मान के बायीं ओर से प्राप्त की जाती है तो उसे वाम या बायां पक्षीय सीमा (Left Hand Limit) कहते हैं और बायीं ओर के लिए (−) चिह्न का प्रयोग करते हुए सांकेतिक रूप में निम्न प्रकार से लिखते हैं—

बायां पक्ष सीमा $= f(a - 0) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l_2$

1.3.3.2 फलन की दायें पक्ष तथा बायां पक्ष सीमा ज्ञान करने की विधि (Finding Rules for Finding Right Hand Limit and Left Hand Limit)

- (क) दायें पक्ष तथा बायां पक्ष सीमा ज्ञात करने के लिए फलन में चर x के स्थान पर क्रमशः $(x+h)$ तथा $(x-h)$ प्रतिस्थापित करते हैं।
- (ख) इस प्रकार (क) से प्राप्त फलन $f(x)$ को दिये हुए बिन्दु (मान लो a) से प्रतिस्थापित करते हैं।
- (ग) अब $h \rightarrow 0$ पर फलन की सीमा ज्ञात करते हैं अर्थात् {अर्थात् (ख) से प्राप्त फलन को उपर्युक्त रूप में रखकर $h = 0$ रखते हैं}।

उदाहरण 1. फलन $f(x) = \frac{1}{2+x}$ की $x=2$ पर दक्षिण पक्ष (Right hand limit) तथा वाम पक्ष सीमा (Left hand limit) ज्ञात कीजिए।

हल : दक्षिण पक्ष सीमा

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & f(x+h) = \frac{1}{2+(x+h)} \\ \text{II.} \quad & f(2+h) = \frac{1}{2+(2+h)} = \frac{1}{4+h} \\ \text{III.} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} f(2+h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4+h} \\ \text{या} \quad & f(2+0) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

वाम पक्ष सीमा

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & f(x-h) = \frac{1}{2+(x-h)} \\ \text{II.} \quad & f(2-h) = \frac{1}{2+(2-h)} = \frac{1}{4-h} \\ \text{III.} \quad & \lim_{h \rightarrow 0} f(2-h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{4-h} \\ \text{या} \quad & f(2-0) = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

1.3.3.3 सीमा का अस्तित्व (Existence of Limit)

यदि किसी फलन $f(x)$ की $x = a$ पर दायां पक्ष तथा बायां पक्ष दोनों सीमाएँ विद्यमान तथा एकसमान हों, तो फलन $f(x)$ की $x = a$ पर सीमा का अस्तित्व होता है।

अर्थात् $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = l$

यहां l फलन की सीमा कहतलाती है तथा इसे हम निम्न प्रकार से व्यक्त करते हैं—

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

फलन $f(x)$ की $x = a$ पर सीमा तथा मान में अन्तर (Difference Between Limit and Value of a Function $f(x)$ on $x = a$)

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$$

$$f(x)$$

1. फलन की सीमा वह राशि है जिसकी ओर फलन क्रमशः अग्रसर होता है जब स्वतंत्र चर x का मान a की ओर होता है।
2. सीमा ज्ञात करने के लिए हमें $x = a$ के निकटवर्ती $f(x)$ के मानों का अध्ययन करना पड़ता है तथा निष्कर्ष निकालना पड़ता है।
3. $x = a$ पर फलन की सीमा का अस्तित्व हो सकता है।
1. वह राशि है जो कि फलन $f(x)$ में $x = a$ रखने पर प्राप्त की जाती है।
2. $x = a$ पर मान निकालने के लिए $x = a$ पर $f(x)$ का मान निकालना पड़ता है।
3. $x = a$ पर फलन का मान नहीं भी हो सकता है।

फलन का मान और सीमा (Value and Limit of a Function)

चर x के किसी मान a के लिए फलन $f(x)$ का मान और सीमांत मान भिन्न होना आवश्यक नहीं है। कुछ इस प्रकार के फलन भी होते हैं जिनके लिए $x = a$ पर $f(x)$ का मान तथा सीमान्त मान बराबर होते हैं अर्थात् $f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

सीमाओं के कुछ प्रमेय (Some Theorems on Limits)

यदि $f(x)$ और $g(x)$ दो फलन हों और $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ तो,

1. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \pm B$
2. $\lim_{x \rightarrow a} \{kf(x)\} = k \lim_{x \rightarrow a} f(x) = kA$
3. $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x)g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = AB$

होती है जिसमें यह गुण होता है कि फलन $f(x)$ की सीमा कोई संख्या (मान लो A)

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{A}{B}, \text{ यदि } B \neq 0$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} f(a + h).$$

1.3.4 फलन की सीमा ज्ञात करने की विधि (Method of Finding the Limit of a Function)

यद्यपि किसी फलन की सीमा ज्ञात करने के लिए दायाँ पक्ष एवं बायाँ पक्ष दोनों सीमाएँ ज्ञात करनी चाहिए परन्तु अध्ययन की इस अवस्था पर हम सीमा अधिकांशतः सीधे ही ज्ञात करना पसन्द करते हैं।

यदि $y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, तो सीमा ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चार तरह की स्थितियाँ हो सकती हैं:

स्थिति 1 (Type 1): जब $x \rightarrow a$; यदि $g(x) = 0$, $h(x) = 0$ तो $f(a) = \frac{0}{0}$ जो अनिर्धार्य है। इस प्रकार के फलन की सीमा निम्नलिखित प्रकार से ज्ञात की जा सकती है—

(अ) फलन को हल करके और $x \neq a$ मानकार अंश तथा हर से उभयनिष्ठ गुणनखण्ड को सरलीकृत कर लीजिए व काट दीजिए।

(ब) शेष खण्डों में x के स्थान पर a रखकर मान ज्ञात कर लीजिए। यही फलन की $x \rightarrow a$ पर सीमा होगी।

स्थिति 2 (Type 2): $x \rightarrow a$ पर $f(x)$ की सीमा ज्ञात करने के लिए $x = a + h$ रखकर, यहाँ h धनात्मक या ऋणात्मक वृद्धि (Increment) है $f(a + h)$ की सीमा ज्ञात कर लीजिए। जब $h \rightarrow 0$ अर्थात् $f(a + h)$ में $h = 0$ रखकर फलन का मान ज्ञात कर लीजिए। यही फलन की $x \rightarrow a$ पर सीमा होगी क्योंकि जब

$$x = a + h \text{ और } x \rightarrow a \text{ तो } h \rightarrow 0.$$

उदाहरण 2. $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2ax + a^2}{x - a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 2ax + a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)^2}{x - a}$$
$$= \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = a - a = 0 \quad \text{-उत्तर}$$

उदाहरण 3. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)(x + 3)}$$
$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 1)}{(x + 3)} = \frac{(2 - 1)}{(2 + 3)} = \frac{1}{5}$$

स्थिति 3 (Type 3): फलन की सीमा ज्ञात करना, जब $x \rightarrow \infty$.

ऐसे फलनों में पहले $x = \frac{1}{Z}$ रखकर सीमा का रूप को बदलकर $Z \rightarrow \infty$ के रूप में रख दीजिए। फिर स्थिति पूर्व की भाँति सीमा निकाल लीजिए।

उदाहरण 4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 3x - 7}{5x^2 - 2x - 1}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: स्पष्ट है कि यदि $x = \infty$ रखा जाए तो अंश और हर $\frac{\infty}{\infty}$ हो जायेगी। इसलिए अंश और दोनों में x^2 का भाग देने पर

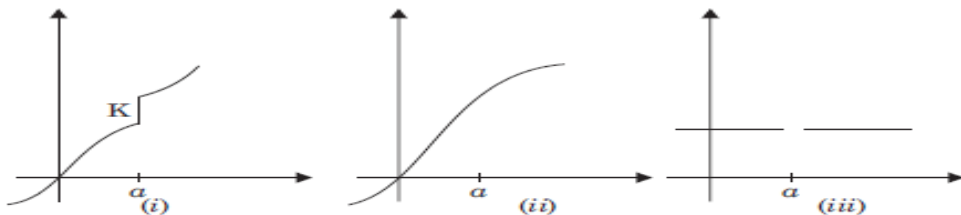
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 3x - 7}{5x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9 - \frac{3}{x} - \frac{7}{x^2}}{5 - \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{9 + 0 + 0}{5 + 0 + 0} = \frac{9}{5}$$

चूँकि इसलिए $\frac{3}{x}, \frac{7}{x^2}, \frac{2}{5x}, \frac{1}{x^2}$ शून्य की ओर अग्रसर होंगे तथा फलन $\frac{9}{5}$ की ओर अग्रसर होता है।

अतः
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{9x^2 - 3x - 7}{5x^2 - 2x - 1} = \frac{9}{5} \quad \text{उत्तर}$$

1.3.5 सतत्ता (सांतत्य) एवं असतत्ता (असांतत्य) की ज्यामितीय परिभाषा (Geometrical Definition of Continuity & Discontinuity)

यदि किसी फलन $f(x)$ का रेखाचित्र (graph) खींचने पर जो वक्र प्राप्त होता है, वह इस प्रकार हो कि किसी बिन्दु विशेष $x = a$ पर टूटता (break) न हो, अर्थात् भंग न होता हो तो ऐसे फलन $f(x)$ को उस बिन्दु (a) पर सतत् (Continuous) कहते हैं।

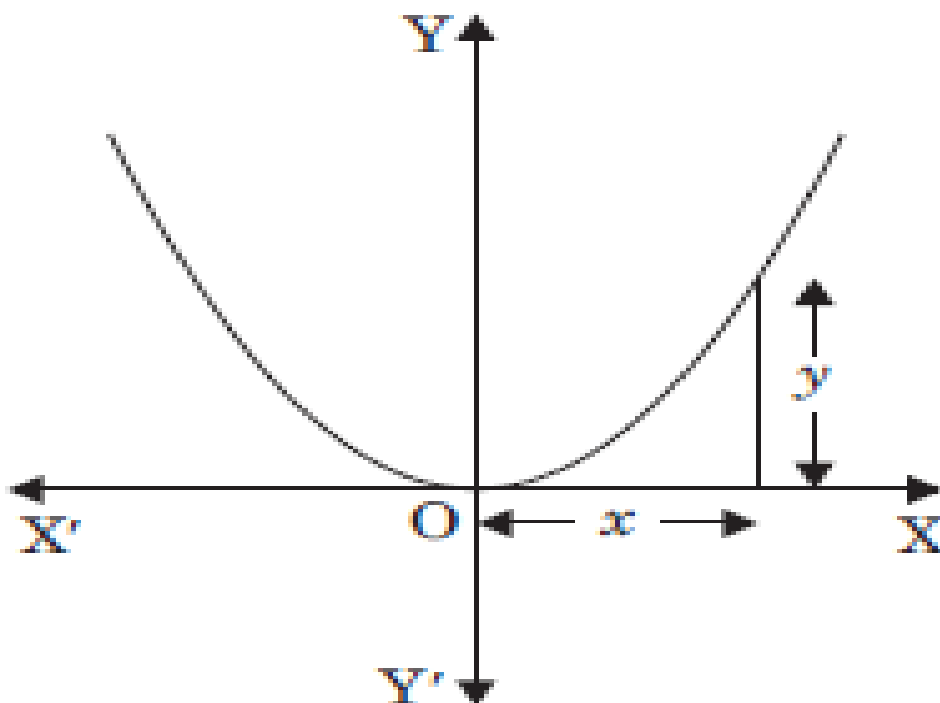


चित्र संख्या: 1.3.3

इसके विपरीत यदि किसी बिन्दु $x = a$ पर फलन $f(x)$ का बिन्दुरेख टूट (break) जाए तो बिन्दु विशेष $x = a$ पर फलन असतत् (discontinuous) फलन कहा जायेगा। फलनों के निम्न

रेखाचित्रों को देखकर ज्ञात होता है चित्र (i) में x के रेखाचित्र में बिन्दु $x = a$ पर किसी उँचाई उदाहरणार्थ k का एक 'उछाल' (jump) है। यदि हम रेखाचित्र के अनुदिश बायीं ओर से दायीं ओर चल रहे हो तो $x = a$ एक भंग (break) है और हमें $x = a$ की एक ओर से दूसरी ओर चलने में पेंसिल को उठाना पड़ेगा। फलन (iii) का वक्र भी $x = a$ पर भंग (break) है। फलन (ii) $x = a$ पर भंग (break) नहीं है अर्थात् वक्र इस प्रकार है कि टूटता नहीं है। अतः फलन $f(x)$, $x = a$ पर सतत् है।

उदाहरण (i) यदि हम फलन $y = x^2$ को रेखाचित्र खींचें तो यह एक परवलय होता है जैसा कि ज्यामिति में दिखाया गया है। ऐसे फलनों के बिन्दुरेख पर यदि हम दाहिने से बायें या बायें से दाहिने एक तरफ से दूसरी तरफ चलें तो हम कोई क्रम-भंग नहीं पायेंगे और यदि हम रेखाचित्र पर एक किनारे से दूसरे किनारे पर पेंसिल चलाये तो बीच में कहीं भी पेंसिल उठानी नहीं पड़ेगी। यह फलन संतत फलन (Continuous Function) है।



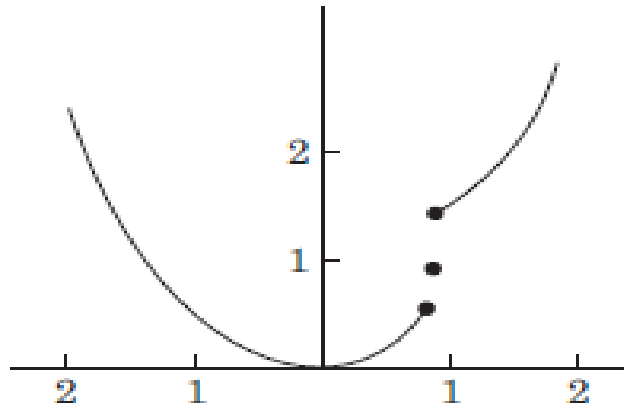
चित्र संख्या: 1.3.4

उदाहरण (ii)

$$y = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & \text{यदि } x < 1 \\ 1, & \text{यदि } x = 1 \\ x^2 & \text{यदि } x > 1 \end{cases}$$

का बिन्दुरेख यदि हम खींचें तो दो विभिन्न परवलय तथा एक बिन्दु (1,1) प्राप्त होगा जैसा कि आकृति में दिखाया गया है। यहाँ यदि हम दाहिने से बायें से दाहिने चलें तो, $x = 1$ पर क्रम भंग है और यदि हम $x = 1$ के एक तरफ से दूसरी तरफ पेंसिल चलाये तो $x = 1$ पर पेंसिल को उठाना (to lift) पड़ेगा। यह फलन असंतत (Discontinuous) है।

हम देखते हैं कि यदि किसी बिन्दु पर फलन असंतत है तो उस बिन्दु पर फलन के मान में एकाएक छलांग (Sudden Jump) होती है जबकि संतत फलन का मान, x का मान बदलने पर धीरे-धीरे बदलता है। अतः यदि किसी बिन्दु $x = a$ पर फलन संतत है तो $|f(x) - f(a)|$ का मान, x को a के बहुत सन्निकट चुनकर स्वेच्छानुसार छोटा किया जा सकता है।



चित्र संख्या: 1.3.5

किसी बिन्दु पर फलन का संतत (Continuity of a Function at any Point)

एक फलन $f(x)$, $x = a$ पर संतत कहलाता है। यदि एक स्वेच्छापूर्वक (arbitrary) चुनी गई धनात्मक संख्या ϵ जो कितनी भी छोटी हो किन्तु शून्य न हो, के लिए हम ϵ पर निर्भर एक ऐसी धनात्मक संख्या δ ऐसी प्राप्त कर सकें कि $|f(x) - f(a)| < \epsilon$, x के उन सभी मानों के लिए जिनके लिए, $0 < |x - a| < \delta$,

अर्थात् अन्तराल $(a - \delta, a + \delta)$ के किसी भी बिन्दु x पर फलन $f(x)$ तथा $f(a)$ का धनात्मक अन्तर एक स्वेच्छतया निर्दिष्ट धनात्मक संख्या ϵ से भी कम हो, तो फलन $f(x)$ बिन्दु $x = a$ पर संतत कहलाता है।

— कॉशी परिभाषा (Cauchy's)

Definition)

दूसरे शब्दों में, फलन $f(x)$, $x = a$ पर संतत (Continuous) कहलाता है यदि $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ का अस्तित्व हो और वह $x = a$ पर फलन के मान के बराबर हो।

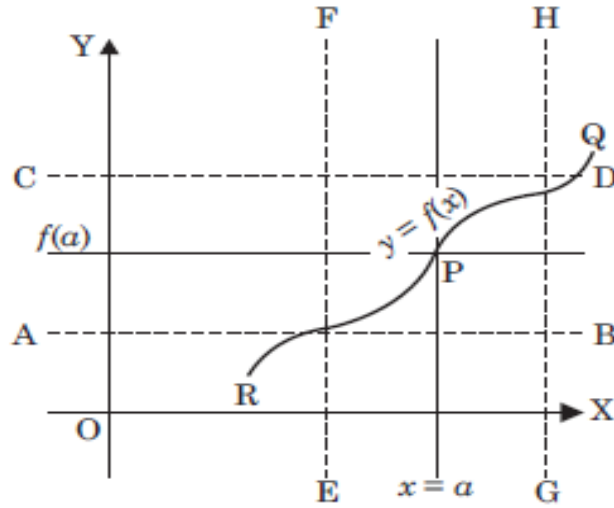
संकेत के रूप में, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ अर्थात् $[f(x) \text{ की सीमा, जब } x \rightarrow a] = [\text{फलन का मान, जब } x = a]$

अतः यदि $f(a + 0) = f(a - 0) = f(a)$, तो $f(x)$ को $x = a$ पर संतत कहते हैं। अन्यथा $x = a$ पर फलन असंतत है। फलन $f(x)$ बिन्दु $x = a$ पर संतत कहलाता है यदि फलन निम्नलिखित तीन शर्तों को पूर्ण करे:

1. यदि फलन $f(x)$, $x = a$ पर परिभाषित हो अर्थात् $x = a$ पर फलन का एक निश्चित मान हो।
2. जब x का मान a की ओर अग्रसर हो, तब $f(x)$ किसी सीमा की ओर अग्रसर हो अर्थात् $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ का अस्तित्व हो।
3. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ हो।

सातत्य का ज्यामितीय अर्थ (Geometrical Meaning of Continuity)

मान लो QR फलन $f(x)$ का रेखाचित्र है। इस रेखाचित्र में बिन्दु $P[a, f(a)]$ पर विचार करो। यदि ϵ कोई स्वेच्छतया निर्दिष्ट धनात्मक संख्या है तो रेखाएँ $y = f(a) - \epsilon$, $y = f(a) + \epsilon$, x -अक्ष के समान्तर और P के नीचे की ओर तथा ऊपर की ओर होगी।



चित्र संख्या: 1.3.6

दिये हुए ϵ के संगत $x = a$ के परितः हम एक अन्तराल जिसकी चौड़ाई 25 है, ज्ञात कर सकते हैं जिसे रेखा $x = a$ के दोनों ओर तथा y -अक्ष के समान्तर रेखाओं $x = a - \delta$ और $x = a + \delta$ द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है।

यदि दो रेखाओं $x = a - \delta$, $x = a + \delta$ के बीच फलन $f(x)$ के रेखाचित्र का प्रत्येक बिन्दु दो रेखाओं $y = a - \epsilon$, $y = a + \epsilon$ के बीच में भी हो तो फलन $x = a$ बिन्दु पर संतत है।

उदाहरण: (i) अचर फलन (Constant Function) $f(x) = c$, x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए सतत है। (ii) फलन $f(x) = \sin x$ तथा $f(x) = \cos x$, x के प्रत्येक वास्तविक मान के लिए सतत है।

3.5.1 किसी बिन्दु पर फलन का सांतत्य ज्ञात करने की विधि (Method to Finding Continuity of a Function at any Point)

सीमा (limit) की परिभाषा से स्पष्ट है कि $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ का अस्तित्व (existence) तभी होता है, जब $f(x)$ की बायाँ पक्ष सीमा $= f(x)$ की दायाँ पक्ष सीमा

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$$

अर्थात् $f(a - 0) = f(a + 0)$

अतः बिन्दु $x = a$ पर फलन $f(x)$ का सांतत्य (continuity) प्रदर्शित करने के लिए हमें दिखाना चाहिए कि इस बिन्दु पर $f(x)$ की बायाँ पक्ष सीमा $= f(x)$ की दायाँ पक्ष सीमा $=$ फलन का मान

दाहिना पक्ष सीमा (R.H.L.) के लिए $f(x)$ में $x = a + h$ रखो, जहाँ $h \rightarrow 0$ जब $x \rightarrow a$

बायाँ पक्ष सीमा (R.H.L.) के लिए $f(x)$ में $x = a - h$ रखो, जहाँ $h \rightarrow 0$ जब $x \rightarrow a$

1.3.5.2 अन्तराल में फलन का सांतत्य (Continuity of a Function in an Interval)

एक फलन $f(x)$ किसी विवृत अन्तराल (a, b) में संतत कहा जाता है यदि यह अन्तराल (a, b) में x के सभी मानों के लिए संतत है।

फलन $f(x)$ किसी संवृत अन्तराल (closed interval) $[a, b]$ में संतत कहा जाता है, यदि

(क) यह कउन सभी मानों के लिए संतत हो जिसके लिए $a < x < b$

(ख) $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$

(ग) $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$

अर्थात् फलन खुले अन्तराल (a, b) में संतत हो तथा $x = a$ पर दायाँ पक्ष से तथा $x = b$ पर बायाँ पक्ष से संतत हो।

एक अन्तराल में असांतत्य (Discontinuity in an interval): फलन $f(x)$ किसी अन्तराल में असतत कहा जाता है यदि यह अन्तराल में किसी एक बिन्दु पर अथवा बहुत से बिन्दुओं पर असतत हो।

1.3.5.3 संतत फलनो पर प्रमेय (Theorem on Continuous Functions)

- (क) यदि $f(x)$ और $g(x)$ दोनों किसी बिन्दु $x = a$ पर सतत हो तो $f(x) \pm g(x)$ भी $x = a$ पर सतत होगा।
- (ख) यदि $f(x)$ और $g(x)$ दोनों किसी बिन्दु $x = a$ पर सतत है तो $f(x) \cdot g(x)$ भी $x = a$ पर सतत होगा।
- (ग) यदि $f(x)$ किसी बिन्दु $x = a$ पर सतत है और k एक निश्चित वास्तविक संख्या है तो $kf(x)$ भी $x = a$ पर सतत होगा।
- (घ) यदि $f(x)$ और $g(x)$ दोनों किसी बिन्दु $x = a$ पर सतत हैं और $g(x) \neq 0$ तो $\frac{f(x)}{g(x)}$ भी $x = a$ पर सतत होगा।
- (च) यदि $f(x)$, $x = a$ पर सतत है और $f(x) \neq 0$ तो $\frac{1}{f(x)}$ भी $x = a$ पर सतत होगा।
- (छ) यदि $f(x)$, $x = a$ पर सतत है तो $|f(x)|$ भी $x = a$ पर सतत होगा।

उदाहरण 5. बताइए कि फलन $f(x) = x^2 + 1$, $x = 2$ पर सतत है।

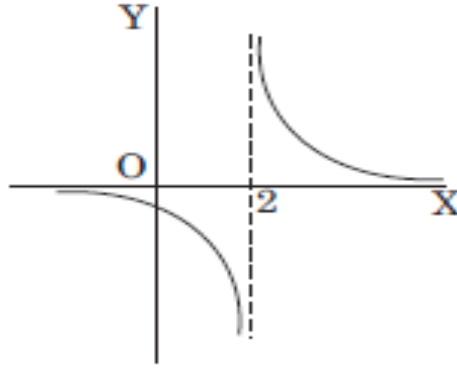
हल: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5 = f(2)$

अतः फलन $x = 2$, पर सतत है।

उदाहरण 6. फलन $f(x) = \frac{1}{x-2}$, $x = 2$ पर असतत है। सिद्ध कीजिए।

हल: (अ) $f(2)$ परिभाषित नहीं है (हर शून्य है)।

(ब) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है (∞ के बराबर है)।



चित्र संख्या: 1.3.7

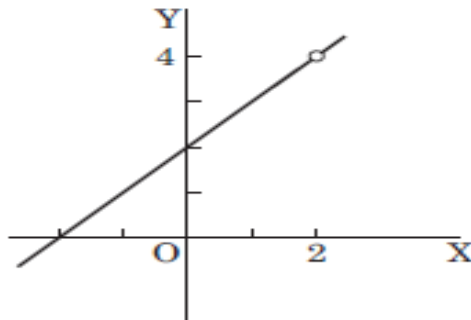
$x = 2$ को छोड़कर अन्य प्रत्येक बिन्दु पर फलन सतत है।

अतः $x = 2$ पर फलन असांतत्य (discontinuity) है।

उदाहरण 7. सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ पर असंतत (discontinuous) है।

हल: (i) $f(2)$ परिभाषित नहीं है (अंश और हर दोनों शून्य हैं)।

(ii) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$



चित्र संख्या: 1.3.8

अतः फलन $x = 2$ असंतत है।

दिये गये फलन में असांतत्य को दूर किया जा सकता है क्योंकि फलन को पुनः

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ $x \neq 2$, परिभाषित करके $f(2) = 4$.

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$, और $g(x) = x + 2$ के ग्राफ समान है जबकि पहले में छेद (hole) है।

1.3.6 इकाई का सारांश

समुच्चय $h_1, h_2, \dots, h_n, \dots$ एक अनुक्रम है जिसकी सीमा 0 है। इसी प्रकार दूसरा अनुक्रम (2) बनाता है। यहाँ पर विशेष ध्यान देने योग्य बात यह है कि सीमा प्राप्त होने (limit to exist) के लिए $f(a+h_n)$ अनुक्रम (1) की तरह के हर प्रकार के अनुक्रम के लिए, संख्या A को प्रवृत्त होना चाहिए। अर्थात् $f(a-h)-A$ का सांख्यिकीय अन्तर, h_n को पर्याप्त छोटा चुनकर, जितना चाहें इच्छानुसार उतना छोटा कर सकते हैं। $a+h_n$ {या $a-h_n$ } = x और $|x - a| = h_n$ रखने पर हम सीमा को निम्न प्रकार से परिभाषित कर सकते हैं—

सीमा का अर्थ (Meaning of Limit): $x = a$ पर फलन $f(x)$ की सीमा कोई संख्या (मान लो A होती है जिसमें यह गुण होता है कि x के उन सभी मानों के लिए जिनके लिए $|x - a|$ अर्थात् $x-a$ का संख्यात्मक मान) पर्याप्त रूप से छोटी (परन्तु शून्य नहीं) होती है, $|f(x) - A|$ अर्थात् $f(x)-A$ का संख्यात्मक मान इच्छानुसार छोटा होता है।

1.3.7 अपने प्रगति की जाँच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

1. यदि एक संख्या A की ओर प्रवृत्त होते हैं तो इस संख्या A को फलन $f(x)$ का $x = a$ पर कहते हैं।
2. जब फलन की सीमा स्वतंत्र चर के मान के बायीं ओर से प्राप्त की जाती है तो उसे कहते हैं।
3. यदि किसी फलन $f(x)$ की $x = a$ पर दायां तथा बायां पक्ष दोनों सीमाएँ विद्यमान तथा एकसमान हों, तो फलन $f(x)$ की $x = a$ पर सीमा का होता है।
4. चर के किसी मान a के लिए फलन $f(x)$ का मान और मान भिन्न होना आवश्यक नहीं है।
5. यद्यपि सीमा ज्ञात करने के लिए दायां पक्ष व बायां पक्ष दोनों सीमाएँ ज्ञात करनी चाहिए परन्तु स्तर पर हम सीमा अधिकांशतः सीधे ही ज्ञात करते हैं।

1.3.8 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(क) 1. दायां पक्ष सीमा 2. बायीं पक्ष सीमा 3. अस्तित्व, 4. सीमान्त, 5. माध्यमिक।

1.3.9 संदर्भ पुस्तकें

23. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
24. Mishra, J.P., “Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)” Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.
25. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, “आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी”, तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
26. अग्रवाल, डी. आर. ‘प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र’, (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली— 110091
27. J.K. Thukral, “Business Statistics” Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
28. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics

29. Agarawal D. R., Quantitative Methods
30. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
31. Yamane, T., Mathematics for Economists.
32. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
33. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस, के., "आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें", शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड-I
इकाई- 04
अवकलन एवं इसका निर्वचन

प्रारूप:

- 1.4.1 परिचय
- 1.4.2 अवकलन की अवधारणा एवं निर्वचन
- 1.4.3 कुछ प्रमुख फलनों के अवकलन
- 1.4.4 अवकलन के बीजगणितीय नियम
 - 1.4.4.1 दो फलनों के योग अथवा अन्तर नियम
 - 1.4.4.2 दो फलनों के गुणन फलन के अवकलन नियम
 - 1.4.4.3 दो फलनों के भाज्यफल के अवकलन नियम
 - 1.4.4.4 श्रृंखला नियम
- 1.4.5 उच्चतर कोटि के अवकलज
 - 1.4.5.1 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ
 - 1.4.5.2 उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के गुण
 - 1.4.5.3 नति परिवर्तन बिन्दु
- 1.4.6 इकाई का सारांश
- 1.4.7 मुख्यशब्द
- 1.4.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 1.4.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 1.4.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 1.4.11 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- अवकलन की अवधारणा एवं आशय
- दो फलनों के योग, अंतर गुणा तथा भागफल का अवकलन नियम
- अवकलन गुणांक गणना करने की विधि का ज्ञान
- उच्चतर अवकलन के नियम का ज्ञान होना।

1.4.1 परिचय (Introduction)

पिछली इकाई में हमलोगों ने किसी दिये हुए फलनों के सीमाओं एवं सततता की अवस्था के बारे में अध्ययन किया है। वर्तमान अध्याय में स्वतंत्र चरों में परिवर्तन के फलस्वरूप फलन के मान में होने वाले परिवर्तनों की प्रकृति एवं परिमाण का अध्ययन करेंगे। फलन के मान में परिवर्तन की दर उनके प्रत्येक बिन्दु पर स्थिर अथवा परिवर्तित होते रहती है। ऐसे फलन जिनके मान में परिवर्तन की दर स्थिर नहीं होती स्वतंत्र चर एवं आश्रित चर की दो भिन्न-भिन्न स्थितियों के बीच के छोटे अन्तरों (Δ) के माध्यम से परिवर्तन की दर की गणना त्रुटिपूर्ण परिणाम देता है। फलतः परिवर्तनशील दरों से परिवर्तित होने वाले फलनों के किसी बिन्दु पर परिवर्तन की दर, परिवर्तन की दर में हो रहे परिवर्तनों की दर आदि तथा इनकी सहायता से फलन की प्रकृति आदि को समझने के लिए स्वतंत्र चर में शून्यसम या शून्योन्मुख परिवर्तन के द्वारा फलन के परिमाण में होने वाले अति सूक्ष्म परिवर्तन के माध्यम से फलन में परिवर्तन की दर तथा अन्य उच्च कोटि की दरों की गणना की जाती है। इस प्रक्रिया को अवकलन प्रक्रिया तथा इस प्रक्रिया से प्राप्त परिणाम को अवकलज और गणित की इस विधा को अवकलन कहते हैं।

अर्थशास्त्र के विभिन्न सिद्धान्तों की विवेचना करने तथा उन्हें स्पष्टता से समझने व समझाने के लिए विभिन्न प्रकार के फलनों का प्रयोग किया जाता है। जिसके लिए फलन की सीमा व सातत्य का होना अति आवश्यक होता है। यद्यपि आर्थिक फलनों में ऐसी विशेषता पाई जाती है जो विभिन्न आर्थिक सिद्धान्तों, अर्थव्यवस्था में क्रियाशील आर्थिक शक्तियों की प्रभावोत्पादकता तथा परस्पर निर्भरता, उनकी

शक्ति संतुलन इत्यादि विषयों को समझने के लिए अवकलन प्रक्रिया व विभिन्न कोटि के अवकलजों का अध्ययन आवश्यक है।

1.4.2 अवकलन की अवधारणा (Concept of Differentiation)

पिछले इकाई में हमलोगों ने फलनों की सीमाएँ व सातत्य का अध्ययन करते हुए देखा है कि स्वतंत्र चर के मान में परिवर्तन के परिणामस्वरूप फलनों के मान में परिवर्तन होता है। चरों के बीच फलनात्मक सम्बन्ध को $y = f(x)$ जिसमें x कारण एवं y परिणाम है, द्वारा दिखाते हैं। अतः x के मान बदलने पर y अथवा $f(x)$ का मान परिवर्तित होता है। उदाहरणार्थ, यदि x के किसी विशेष मान x_1 को लिया जाए तो फलन का मान y_1 या $f(x_1)$ होगा। यहां x के विशेष मान x_1 के लिए फलन का मान y_1 या $f(x_1)$ होगा।

दोनों मानों के बीच के अन्तर को तथा द्वारा प्रदर्शित किया जाये तो—

$\Delta x = x_j - x_i$ तथा $\Delta y = y_j - y_i$ या $f(x_j) - f(x_i)$ होगा।

फलनात्मक सम्बन्ध के अध्ययन की उपयोगिता इस बात से परिलक्षित होती है कि स्वतंत्र चर (कारण) में कितना परिवर्तन करने से फलन (परिणाम) में वांछित मान प्राप्त किया जा सकता है।

इस सन्दर्भ में फलन के परिवर्तन की औसत दर जिसे $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ द्वारा ज्ञात किया जा सकता है, की गणना महत्वपूर्ण है।

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_j - y_i}{x_j - x_i} = \frac{f(x_j) - f(x_i)}{\Delta x}$$

यदि फलन सरल रैखिक या अनुपातिक है तो फलन में परिवर्तन की दर सदैव समान बनी रहती है ऐसे में Δx का मान छोटा या बड़ा होने पर कोई अन्तर नहीं पड़ता है। लेकिन जब फलन अरैखिक है तो Δx का मान बड़ा होने पर दो भिन्न-भिन्न स्थितियों के बीच घटित होने वाली विभिन्न परिवर्तन की दरों का एक औसत प्राप्त होगा। ऐसे में जबकि प्रत्येक बिन्दु पर फलन की दर परिवर्तन हो रही हो किसी विशेष स्थिति में फलन के स्वतंत्र चर के प्रभाव को समझने के लिए स्वतंत्र चर में अत्यल्प या शून्योन्मुख परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन की दर को समझना महत्वपूर्ण हो जाता है। सांकेतिक रूप में स्वतंत्र चर में अति सूक्ष्म या शून्योन्मुख परिवर्तन को ' $\Delta x \rightarrow 0$ ' द्वारा तथा स्वतंत्र चर में अति सूक्ष्म परिवर्तन की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर को $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ द्वारा दर्शाया जाता है।

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

द्वारा निरूपित किया जाता है। अवकलन ज्ञात करते समय निम्न बातें ध्यान रखनी चाहिए—

1. फलन के सतत भाग पर ही अवकलन प्राप्त किया जा सकता है।
2. अवकलज स्वयं में एक फलन होती है।

उदाहरण 1. $y = x^n$ का प्रथम सिद्धान्त से अवकलज प्राप्त कीजिए।

हल: दिया है

$$y = f(x) = x^n$$

$$f(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^n$$

प्रथम सिद्धान्त से x^n का अवकलज

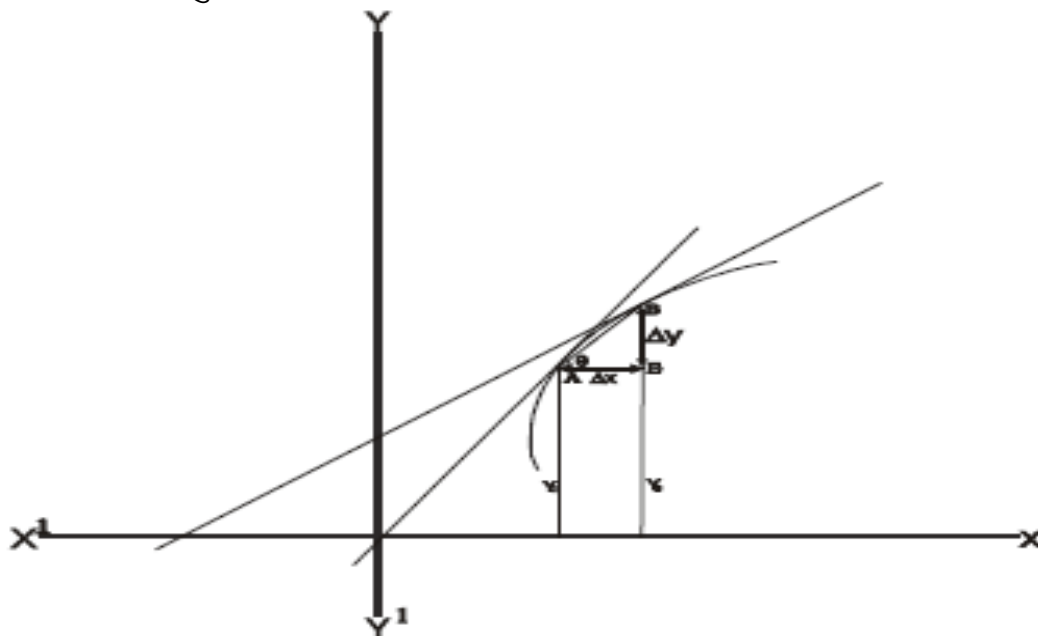
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^n - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^n + nx^{n-1}\Delta x + n(n-1)x^{n-2}(\Delta x)^2 + \dots - x^n}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \{nx^{n-1} + n(n-1)(x^{n-2})\Delta x + \dots - x^n\} \\ &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

स्वतंत्र चर शून्योन्मुख परिवर्तनों के सापेक्ष फलन में हाने वाले परिवर्तनों की गणना की इस प्रक्रिया को अवकल प्रक्रिया या अवकलन तथा अवकल प्रक्रिया से प्राप्त परिणाम $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ या $\frac{d}{dx}(y)$ को अवकलज या अवकल गुणांक कहते हैं।

Δx को धीरे-धीरे शून्योन्मुख अर्थात् शून्य के समान छोटा बनाने की क्रिया प्रक्रिया के परिणाम स्वरूप $\frac{dy}{dx}$ (जो Δx के अति सूक्ष्म न होने की स्थिति में वस्तुतः विभिन्न परिवर्तन की दरों का औसत होता है) का एक निश्चित मान प्राप्त होता है। अतः हम कह सकते हैं कि अवकलन फलन के मान में परिवर्तन की सीमांत दर है।

अवकलन का अर्थ (Meaning of Differentiation)

1. अवकलज एक दिये हुए बिन्दु पर फलन में परिवर्तन की दर को बताता है।
2. अवकलज को $\frac{dY}{dX}$ के अतिरिक्त y अथवा $f'(x)$ या महज f' अथवा Dy या $Df(x)$ द्वारा भी निरूपित किया जा सकता है।
3. अर्थशास्त्र में प्रयुक्त होने वाली सीमान्त मानों की अवधारणा दिये गये आर्थिक फलन के अवकलज के समतुल्य होती है अर्थात् किसी आर्थिक फलन का सीमान्त मान ज्ञात करने के लिए उस फलन का अवकलज ज्ञात किया जाता है।
4. दिए हुए बिन्दु पर फलन का अवकलज उस बिन्दु पर फलन की ढाल का मान बताता है। अर्थात् फलन की ढाल फलन के अवकलज की ज्यामितीय व्याख्या के समान होती है। जिसे अग्रलिखित बिन्दुरेख के ज्यामितीय विश्लेषण द्वारा समझा जा सकता है।



चित्र संख्या: 1.4.1

बिन्दुरेख में फलन $f(x)$ पर दो बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(x_2, y_2)$ को मिलाने वाली रेखा X अक्ष के साथ तथा BE के साथ θ^0 का कोण बना रही है। रेखा AB की ढाल $\tan \theta = \frac{BE}{AE} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ यदि बिन्दु B को खिसका कर A के करीब लाया जाये ताकि A और B के बीच का अन्तर शून्य जितना हो जाये अर्थात् $\Delta x \rightarrow 0$ तो AB रेखा A बिन्दु पर खींची गई स्पर्श रेखा बन जायेगी तथा इसकी ढाल $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ या $\frac{dy}{dx}$ द्वारा मापी जायेगी।

माना $y = f(x)$, x का कोई सतत फलन है, तब स्वतंत्र चर x के मान में कोई स्वेच्छ सूक्ष्म वृद्धि (Arbitrary small increment). Δx (डेल्टा x) होती हैं तथा इसके संगत के मान में वृद्धि Δy होती है तब अनुपात $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ को x के सापेक्ष y की परिवर्तन की औसत दर {Average rate of change of $y = f(x)$ with respect to x } कहते हैं।

इस प्रकार, $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$
 अथवा $\Delta y = f(x + \Delta x) - y = f(x + \Delta x) - f(x)$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

यदि Δx की प्रवृत्ति कम होते-होते शून्य की ओर अग्रसर होने की हो तो Δy का मान भी कम होता हुआ शून्य की ओर अग्रसर होगा। अतः $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ एक निश्चित सीमा की ओर अग्रसर होगा यदि $\Delta x \rightarrow 0$.

यदि $\Delta x \rightarrow 0$ तो भिन्न $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ की सीमा को $f(x)$ का x के सापेक्ष अवकलज (Derivative) या अवकल गुणांक (Differential Coefficient) कहते हैं और इसे $\frac{dy}{dx}$ या $\frac{dy}{dx}$ या $f'(x)$ या $Df(x)$ या Dy से व्यक्त करते हैं। इस तरह,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

नोट: 1. ध्यान देने की बात है कि Δx या Δy एक संकेतक है, इसका अर्थ Δ तथा x का गुणा नहीं है। इसी प्रकार $\frac{dy}{dx}$ का अर्थ 'dy को dx' से भाग देना' नहीं है।

2. सरल रूप में $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ भी लिखा जाता है यदि सीमा निश्चित हो।

1.4.3 कुछ प्रमुख फलनों के अवकलन (Differentiation of Some Important Function)

किसी फलन $f(x)$ का अवकलज ज्ञान करने की गणितीय प्रक्रिया को ही अवकलन कहते हैं।

प्रथम सिद्धान्त अथवा परिभाषा (Differentiation by First Principle or Abinition Method)

चरण (Steps):

1. $y = f(x)$ का पता लगाएँ व ज्ञात करें।
2. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ लिखिए।
3. $\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ ज्ञात कीजिए।

अवकलन के कुछ उपयोगी सूत्र

क्रम संख्या	फलन $\{y = f(x)\}$	अवकलज (Derivatives) $= \frac{dy}{dx}$
1.	$y = x$	$\frac{d}{dx}y = \frac{dy}{dx} = 1$
2.	$y = x^n$	$\frac{dy}{dx} = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$
3.	$y = a \cdot x^n$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}ax^n = a \frac{dx^n}{dx} = a \cdot nx^{n-1}$ ($a =$ अचर पद)
4.	$y = a$	$\frac{dy}{dx} = \frac{da}{dx} = 0$ ($a =$ अचर पद)
5.	$y = e^x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{de^x}{dx} = e^x$
6.	$y = e^{ax}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{de^{ax}}{dx} = a \cdot e^{ax}$
7.	$y = a^x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{da^x}{dx} = a^x \log a$
8.	$y = \log x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d \log x}{dx} = \frac{1}{x}$
9.	$y = a \cdot \log x$	$\frac{dy}{dx} = a \cdot \frac{d \log x}{dx} = \frac{a}{x}$
10.	$y = \sin x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d \sin x}{dx} = \cos x$

11.	$y = \cos x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d \cos x}{dx} = -\sin x$
12.	$y = \tan x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d \tan x}{dx} = \cot x$
13.	$y = (ax + b)^n$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d(ax + b)^n}{dx} = na(ax + b)^{n-1}$
14.	$y = \log(ax + b)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{d \log(ax + b)}{dx} = \frac{a}{ax + b}$

अवकलन के नियमों का प्रयोग (Use of Rules of Differentiation)

उदाहरण 2. फलन $y = x^2$ का अवकलन ज्ञात कीजिए।

हल:

सूत्र: यदि $y = x^n$ हो, तो $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

$$y = x^2, \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2x^{2-1} = 2x \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 3. फलन $y = \frac{1}{x^2}$ या $y = x^{-2}$ का अवकल गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल:

सूत्र: यदि $y = x^n$ हो, तो $\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$

$$y = x^{-2}, \text{ या } \frac{dy}{dx} = -2x^{-2-1}$$

$$\frac{dy}{dx} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3} \quad \text{उत्तर}$$

1.4.4 अवकलन के बीजगणितीय नियम (Algebraic Rule of Differentiation)

अवकलन के बीजगणितीय नियम से तात्पर्य उन नियमों से जो सामान्यतः अंकगणितीय एवं बीजगणितीय समस्याओं के अध्ययन में प्रयोग किया जाता है। कई बार फलन एक ही चर के दो या दो से अधिक फलनों के गणितीय संक्रियाएं (जैसे योग या अन्तर या गुणनफलन या भागफलन आदि) के रूप में होते हैं। इन परिस्थितियों हमें फलनों के अवकलन करने की विधि का ज्ञान होना आवश्यक है। सरलता के लिए एक ही चर के दो फलनों के विभिन्न संयोगों का अवकलन करने के नियम अग्रलिखित हैं।

1.4.4.1 दो फलनों के योग अथवा अन्तर नियम

नियम 1: दो फलनों के योगफल का अवकलज उन फलनों के अवकलजों के योग के बराबर होता है।

$$\begin{aligned} \text{यदि} \quad & y = f(x) = g(x) + h(x) \\ \text{तब} \quad & \frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = \frac{d g(x)}{dx} + \frac{d h(x)}{dx} \\ \text{इसी प्रकार, यदि} \quad & y = f(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots + f_n(x) \\ \text{तब} \quad & \frac{dy}{dx} = \frac{d f_1(x)}{dx} + \frac{d f_2(x)}{dx} + \dots + \frac{d f_n(x)}{dx} \end{aligned}$$

उपनियम—दो फलनों के अन्तर (difference) का अवकलज, उन फलनों के अवकलजों के अन्तर के बराबर होता है।

$$\begin{aligned} \text{यदि यदि} \quad & y = f(x) = g(x) - h(x) \\ \text{तब} \quad & \frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = \frac{d g(x)}{dx} - \frac{d h(x)}{dx} \\ \text{इसी प्रकार, यदि} \quad & y = f(x) = f_1(x) - f_2(x) - f_3(x) - \dots - f_n(x) \\ \text{तब} \quad & \frac{dy}{dx} = \frac{d f_1(x)}{dx} - \frac{d f_2(x)}{dx} - \dots - \frac{d f_n(x)}{dx} \end{aligned}$$

यदि $y = f(x) : y = ax^2 + bx$ यहाँ y, x का एक ऐसा फलन है, जो x के दो फलनों (क) $g(x) = ax^2$ तथा (ख) $h(x) = bx$ को प्रदर्शित करते हैं। इन स्थितियों दोनों फलनों का योग निम्न रूप से निरूपित किया जा सकता है—

$$y = f(x) : f(x) = g(x) + h(x)$$

इसी प्रकार यदि

$$y = f(x) : y = ax^2 - bx \text{ तो}$$

$$y = f(x) : f(x) = g(x) - h(x)$$

इन स्थितियों में $y = f(x)$ का अवकलज तथा के अवकलजों का तदानुसार योग अथवा अन्तर के रूप में व्यक्त किया जा सकता है। अर्थात् यदि $y = g(x) \pm h(x)$ तो,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = \frac{d g(x)}{dx} \pm \frac{d h(x)}{dx}$$

$$\text{या, } f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

उपरोक्त उदाहरण में यदि $y = ax^2 + bx$ तो,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(ax^2 + bx)}{dx} = \frac{d(ax^2)}{dx} + \frac{d(bx)}{dx} \\ &= a \frac{dx^2}{dx} + b \frac{dx}{dx} \\ &= a.2x + b.1 = 2ax + b \end{aligned}$$

इस प्रकार $y = ax^2 + bx$ का अवकलज $\frac{dy}{dx} = 2ax + b$ होगा।

उत्तर

उदाहरण 4. फलन $y = 4x^3 + 6x^2 + 5x$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned} \text{दिया है, } y &= 4x^3 + 6x^2 + 5x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d(4x^3)}{dx} + \frac{d(6x^2)}{dx} + \frac{d(5x)}{dx} \end{aligned}$$

$$\text{या, } \frac{dy}{dx} = 4 \frac{dx^3}{dx} + 6 \frac{dx^2}{dx} + 5 \frac{dx}{dx}$$

$$\text{या, } \frac{dy}{dx} = 4 \times 3x^2 + 6 \times 2x + 5$$

$$\text{या, } \frac{dy}{dx} = 12x^2 + 12x + 5 \quad \text{उत्तर}$$

1.4.4.2 दो फलनों के गुणनफल के अवकलन नियम (Multiplication Rule of Differentiation of Two Functions)

नियम 2: दो फलनों के गुणनफल का अवकलज, प्रथम फलन $\times$ द्वितीय फलन का अवकलज + द्वितीय फलन $\times$ प्रथम फलन का अवकलज के बराबर होता है।

यदि $y = f(x) : y = x^n, e^x$ हो तो y, x के दो फलनों, x^n [जिसे $g(x)$ माने] तथा e^x [जिसे $h(x)$ माने] का गुणनफल है। इस फलन का अवकलन निम्नवत किया जाता है।

$$\begin{aligned} \text{यदि, } y &= f(x) = g(x).h(x) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \{g(x).h(x)\} \end{aligned}$$

$$\text{या, } \frac{dy}{dx} = g(x) \frac{d h(x)}{dx} + h(x) \frac{d g(x)}{dx}$$

$$\text{या, } f'(x) = g(x).h'(x) + h(x).g'(x)$$

इस प्रकार, $y = x^n. e^x$ का अवकलन निम्न तरीके से ज्ञात किया जा सकता है।

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d(x^n e^x)}{dx} = x^n \frac{de^x}{dx} + e^x \frac{dx^n}{dx} \\ &= x^n.e^x + e^x.nx^{n-1} = e^x.x^{n-1}(x+n) \text{ होगा।} \end{aligned}$$

1.4.4.3 दो फलनों के भागफल के अवकलन नियम (Differentiation of Quotient of Functions)

नियम 3. दो फलनों के भागफल का अवकलज निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता

है। यदि $y = f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ हो तब y का अवकलज निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है—

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d f(x)}{dx} = \frac{\{h(x) \frac{d g(x)}{dx} - g(x) \frac{d h(x)}{dx}\}}{\{h(x)\}^2} \quad \{h(x) \neq 0\}$$

जहाँ, $h(x)$ शून्य के बराबर नहीं है।

अथवा/या

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{\{h(x)\}^2}$$

यदि $y = f(x) : y = \frac{\log x}{x}$ हो तो y, x के दो फलनों $\log x$ [जिसे $g(x)$ माने] तथा x [जिसे $h(x)$ माने] तो $x = \frac{g(x)}{h(x)}$ होगा जिसका अवकलन निम्नवत है।

उपरोक्त नियम के अनुसार,

यदि $y = f(x) : y = \frac{\log x}{x}$ हो तब,

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} \left\{ \frac{\log x}{x} \right\} = \frac{x \frac{d \log x}{dx} - \log x \frac{d(x)}{dx}}{x^2} \\ &= \frac{x/x - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2} = (1 - \log x) x^{-2} \end{aligned}$$

1.4.4.4 अवकलन के श्रृंखला नियम (Chain Rule of Differentiation)

अभी तक हमने फलनों के योग, अन्तर, गुणनफल एवं भागफल के अवकलन करने के नियमों का अध्ययन किया है, इस भाग में हम ऐसे जटिल फलनों के अवकलन करने की विधि का अध्ययन करेंगे, जिनको प्रत्यक्ष व सीधे अवकलित करना कठिन एवं कई बार सम्भव नहीं होता है। यद्यपि इन्हें फलन के फलन व फलनों के फलन का अवकलन के रूप में भी अध्ययन किया जाता है। चूँकि अवकलन की यह क्रिया एक श्रृंखला के रूप में सम्पादित होती है, फलतः इस नियम को अवकलन का श्रृंखला नियम कहा जाता है। संकेत के रूप में इसे निम्नलिखित तरीके से निरूपित किया जा सकता है—

माना कि $y = f\{g(x)\}$, y फलन $g(x)$ का फलन है।

पुनः माना $y = f(z)$, जहाँ $z = g(x)$

तब
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz} &= \frac{df(z)}{dz} \quad \text{तथा} \quad \frac{dz}{dx} = \frac{dg(x)}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dz} \times \frac{dz}{dx} = \frac{df(z)}{dz} \times \frac{dg(x)}{dx} \end{aligned}$$

टिप्पणी—
$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{df(z)}{dz} \times \frac{dg(x)}{dx} \\ \Rightarrow \frac{dy}{dx} &= \frac{df\{g(x)\}}{dg(x)} \times \frac{dg(x)}{dx} \end{aligned}$$

यदि $y = f(x); y = (3x + 2)^2$ तो $3x + 2$ को यदि हम t मान ले तो $y = t^2$ अर्थात् y, t का एक फलन है जिसे $y = g(t)$ मान सकते हैं। तथा t स्वयं x का फलन है।

जहाँ $t = h(x) = (3x + 2)$ है।

अथवा,
$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx}$$

इस प्रकार फलन $y = (3x + 2)^2$ का हल निम्न प्रकार से संभव है—

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} (3x + 2)^2 &= \frac{d}{dt} t^2 \cdot \frac{dt}{dx} \\ &= 2 \cdot t \cdot \frac{d(3x+2)}{dx}, \quad (t = 3x + 2 \text{ रखने पर}) \\ &= 2(3x + 2) \cdot 3 = 6(3x + 2) = 18x + 12 \end{aligned}$$

उत्तर

1.4.5 उच्च कोटि के अवकलन (Differentiation of Higher Order)

यदि किसी फलन $y = f(x)$ का x के सापेक्ष एक बार अवकलन करते हैं तो इस प्रक्रिया को प्रथम कोटि का अवकलन तथा उससे प्राप्त अवकलज को प्रथम कोटि का अवकलज या प्रथम अवकलज $\left\{ \frac{dy}{dx} \right\}$ कहते हैं। यदि प्रथम कोटि के अवकलज को पुनः उसी स्वतंत्र चर के सापेक्ष अवकलित किया जाये तब इसे द्वितीय कोटि का अवकलज $\left\{ \frac{d^2y}{dx^2} \right\}$ कहते हैं। इसी तरह से यदि अवकलन प्रक्रिया की

पुनरावृत्ति किया जाय तो प्राप्त अवकलज व अवकल गुणांक को उच्चतर कोटि के अवकलज $\{\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\}$ कहलायेंगे व प्राप्त होते हायेंगे।

उदाहरण: 5. $y = f(x) = 3x^5 + 2x^3 + 4x^2 + 23x + 126$ का

प्रथम कोटि का अवकल गुणांक व अवकलज, $\frac{dy}{dx} = 15x^4 + 6x^2 + 8x + 23 + 0$

द्वितीय कोटि का अवकल गुणांक व अवकलज, $\frac{d^2y}{dx^2} = 60x^3 + 12x + 8 + 0$

तृतीय कोटि का अवकल गुणांक व अवकलज $\frac{d^3y}{dx^3} = 180x^2 + 12 + 0$

चतुर्थ कोटि का अवकल गुणांक व अवकलज, $\frac{d^4y}{dx^4} = 360x + 0$

पंचम कोटि का अवकल गुणांक व अवकलज, $\frac{d^5y}{dx^5} = 360,$

षष्ठम कोटि का अवकल गुणांक व अवकलज, $\frac{d^6y}{dx^6} = 0$

दिये गये फलन के लिए इससे अधिक उच्च कोटि के अवकलन प्राप्त नहीं किया जा सकता है। प्रत्येक अवकलज अपने से पूर्व कोटि के अवकलज फलन में परिवर्तन की दर को बताता है। हम जानते हैं कि प्रथम कोटि की अवकल गुणांक $(\frac{dy}{dx})$ फलन में परिवर्तन की दर अथवा फलन की ढाल अथवा फलन के सीमान्त मान को प्रदर्शित करता है। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि द्वितीय कोटि का अवकलज फलन में परिवर्तन की दर में हो रहे परिवर्तन की दर अथवा फलन की ढाल में हो रहे परिवर्तन की दर अथवा फलन के सीमान्त मान में होने वाले परिवर्तन की दर को निरूपित करता है। उच्चतर कोटि के अर्थ इसी तरह सरलता से समझा जा सकता है।

1.4.5.1 फलन का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ (Maxima & Minima of Function)

जब किसी फलन $y = f(x)$ के लिए स्वतंत्र चर (x) का मान बढ़ने पर फलन (y) का मान आरम्भ में बढ़े किन्तु एक स्तर पर पहुँचने के बाद घटना आरम्भ हो जाए तो उस स्तर पर y का मान अपने तुरन्त पहले व तुरन्त बाद के मानों की तुलना में सर्वोच्च होता है। इसी प्रकार यदि स्वतंत्र चर (x) का मान बढ़ने पर फलन (y) का मान एक स्तर तक घटने के बाद बढ़ने लगे तो उस स्तर पर फलन का मान तुरन्त पहले व तुरन्त बाद की तुलना में निम्नतम होता है, किन्तु एक फलन में ऐसे सर्वोच्चतम तथा निम्नतम मान वाले अनेक बिन्दु प्राप्त हो सकते हैं, जिन्हें बिन्दुओं को सामूहिक रूप से **फलन का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ बिन्दु** कहा जाता है। किसी फलन का मान बढ़ने के बाद घटने लगे तो यह तभी सम्भव है जब फलन के मान में हो रही धनात्मक परिवर्तन घटते-घटते ऋणात्मक हो जाये इस घटनाक्रम में एक स्थिति ऐसी प्राप्त होगी जब फलन के मान में परिवर्तन की दर शून्य हो जाए, जहाँ फलन की उच्चिष्ठता निर्धारित होती है।

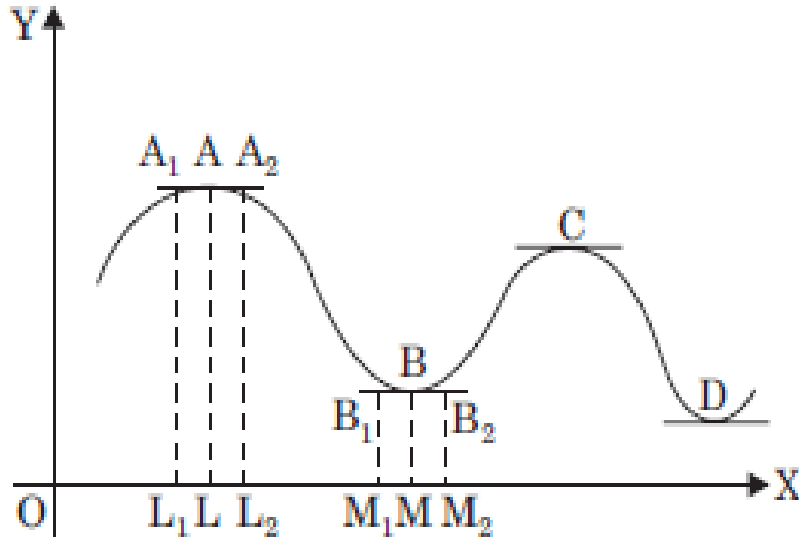
- जब फलन का मान घटने के बाद बढ़ने लगे तभी यह सम्भव है जब फलन के मान में हो रहा ऋणात्मक परिवर्तन घटते-घटते धनात्मक हो जाए। इस प्रक्रिया में एक ऐसी स्थिति प्राप्त होती है जब फलन में परिवर्तन की दर शून्य हो जाती है जिसे **फलन का न्यूनतम बिन्दु** कहा जाता है।
- उपरोक्त विवेचना से स्पष्ट है कि फलन की अधिकतम एवं न्यूनतम दोनों ही स्थितियों में फलन में परिवर्तन की दर शून्य हो जाती है अर्थात् $\frac{dy}{dx} = 0$ होता है जिसे **प्रथम कोटि प्रतिबन्ध व आवश्यक प्रतिबन्ध** कहते हैं।
- फलन की अधिकतम की स्थिति में परिवर्तन की दर धनात्मक से लगातार घटकर ऋणात्मक हो जाती है। अर्थात् फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर $(\frac{d^2y}{dx^2})$ लगातार ऋणात्मक प्राप्त होता है अतः अधिकतम की स्थिति में फलन का द्वितीय कोटि अवकल गुणांक ऋणात्मक होता है अर्थात् $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ (ऋणात्मक राशि) होता है जिसे सामान्य भाषा में **द्वितीय क्रम परीक्षण या पूरक प्रतिबन्ध** भी कहा जाता है।

- न्यूनतम बिन्दु की स्थिति में फलन में परिवर्तन की दर ऋणात्मक से बढ़ते-बढ़ते धनात्मक हो जाती है अर्थात् फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ लगातार धनात्मक प्राप्त होती है, अर्थात् $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ (धनात्मक राशि) होता है, जिसे हम द्वितीय क्रम परीक्षण या पूरक प्रतिबन्ध के नाम से जानते हैं।

फलन की अधिकतम एवं न्यूनतम की महत्वपूर्ण स्थितियाँ

अनुकूलतम बिन्दु	अनिवार्य प्रतिबन्ध	पर्याप्त प्रतिबन्ध
अधिकतम	$\frac{dy}{dx} = 0,$	$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right\} < 0$ (ऋणात्मक राशि) ($x = a$ बिन्दु पर)
न्यूनतम	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\left. \frac{d^2y}{dx^2} \right\} > 0$ (धनात्मक राशि) ($x = a$ बिन्दु पर)
नति परिवर्तन बिन्दु	$\frac{dy}{dx} = 0$	$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ ($x = a$ बिन्दु पर)

बिन्दुरेख चित्र के अनुसार चार बिन्दु प्राप्त होते हैं। इस वक्र पर ये चार बिन्दु A, B, C, D हैं जिस पर स्पर्श रेखाएँ X-अक्ष के समान्तर हैं। दिये गये चित्र में बिन्दु A पर फलन अपने अधिकतम बिन्दु है जहाँ $x = OL$ है। यह बिन्दु अपने निकटतम बिन्दु A_1 एवं A_2 से अधिकतम की स्थिति को प्रदर्शित करता है। अब फलन $f(x)$ का मान A और C पर अधिक है और A तथा C के आगे बढ़ने पर $f(x)$ के मान का बढ़ना रुक जाता है, किन्तु घटना प्रारम्भ हो जाता है। अतः A तथा C बिन्दुओं पर $f(x)$ फलन अधिकतम मान ग्रहण करता है। अतः बिन्दु A और C पर फलन का मान अधिकतम (Maximum) कहलाता है। इसी प्रकार B तथा D पर फलन का मान घटना बन्द हो जाता है अर्थात् आगे बढ़ने पर $f(x)$ का बढ़ना प्रारम्भ हो जाता है अतः $f(x)$ फलन B और D पर जो मान प्राप्त करता है उन्हें न्यूनतम कहते हैं।



चित्र संख्या: 1.4.2

उदाहरण: 6. फलन $y = f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 20x + 200$ का अनुकूलतम बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है, $y = \frac{1}{3}x^3 - 6x^2 + 20x + 200$ ————— (i)

अनुकूलतम बिन्दु ज्ञात करने हेतु दिये गये फलन को x के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - 12x + 20 \quad \text{————— (ii)}$$

अनुकूलतम बिन्दू के अनिवार्य प्रतिबन्ध $\frac{dy}{dx} = 0$ रखने पर

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = x^2 - 12x + 20 = 0 \quad \text{----- (iii)}$$

$$\Rightarrow x^2 - 10x - 2x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow x(x - 10) - 2(x - 10) = 0$$

$$\Rightarrow (x - 2)(x - 10) = 0$$

$$\Rightarrow x = 2, x = 10$$

→ द्वितीय कोटि का परीक्षण या पूरक प्रतिबन्ध

समीकरण (iii) का पुनः के सापेक्ष अवकलित करने पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 12 = 2(2) - 12 = -8 < 0$$

अतः पर्याप्त प्रतिबन्ध के अनुसार बिन्दु $x = 2$ पर फलन का मान उच्चिष्ठ है।

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 12 = 2(10) - 12 = +8 < 0$$

अतः पर्याप्त प्रतिबन्ध के अनुसार बिन्दु $x = 10$ पर फलन का मान निम्निष्ठ सिद्ध होता है।

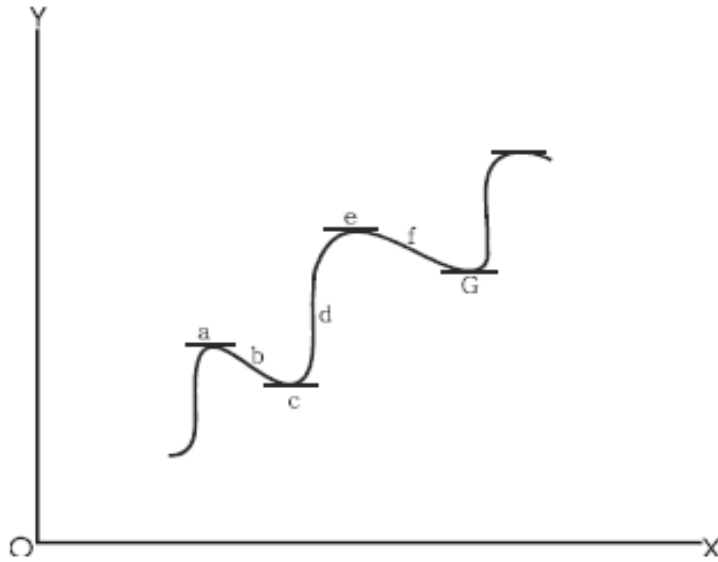
1.4.5.2 अधिकमत तथा न्यूनतम मानों के गुण

1. उच्चिष्ठ मान के बाद निम्निष्ठ मान और निम्निष्ठ मान के बाद उच्चिष्ठ मान आता है अर्थात् उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान एकान्तर क्रम से आते हैं।
2. फलन के दो समान मानों के मध्य कम-से-कम एक उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान अवश्य होता है।
3. उन बिन्दुओं पर जहाँ फलन का मान उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ है स्पर्श रेखाएँ X -अक्ष के समान्तर होती है। अतः ऐसे बिन्दुओं पर $\frac{dy}{dx}$ का मान शून्य होगा $\frac{dy}{dx} = 0$ मान देकर प्राप्त समीकरण को हल करने से x के मान ज्ञात हो जाते हैं जिन पर फलन का मान उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ होता है।
4. फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ बिन्दुओं के बाद $\frac{dy}{dx}$ का मान बदलता है। उच्चिष्ठ बिन्दु पर यह चिन्ह धन से ऋण और निम्निष्ठ बिन्दु पर ऋण से धन में परिवर्तित होता है।
5. उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ को उभयनिष्ठ रूप से चरममान या अति मान के नाम से भी जाना जाता है।

1.4.5.3 नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Inflexion)

नति परिवर्तन बिन्दु वह बिन्दु है जिस पर फलन की नति या वक्रीयता परिवर्तित हो रही हो। अर्थात् ऐसा बिन्दु जिस पर फलन की x - अक्ष के प्रति उत्तलता से अवतलता में परिवर्तित हो रही हो अथवा फलन की वक्रीयता x - अक्ष के प्रति अवतलता से उत्तलता में परिवर्तित हो रही हो।

- यदि $x = a$ पर किसी फलन का द्वितीय अवकल, $\left\{\frac{d^2y}{dx^2} = 0\right\}$ का मान शून्य है तो फलन पर $x = a$ बिन्दु नति परिवर्तन बिन्दु कहलाता है।
- जब 'फलन में परिवर्तन की दर में परिवर्तन की दर' या फलन की ढाल में परिवर्तन की दर जब ऋणात्मक होती है $\left\{\frac{d^2y}{dx^2} < 0\right\}$ तो फलन x -अक्ष के प्रति अवतल होता है।
- जब 'फलन में परिवर्तन की दर परिवर्तन की दर' या 'फलन की ढाल में परिवर्तन की दर' जब धनात्मक होती है $\left\{\frac{d^2y}{dx^2} > 0\right\}$ तो फलन x -अक्ष के प्रति उत्तल होता है।



चित्र संख्या: 1.4.3

उपरोक्त विवरण से स्पष्ट है कि फलन की नति परिवर्तन होने के लिए यह अनिवार्य है कि द्वितीय अवकलज का मान शून्य के बराबर हो ($\frac{d^2y}{dx^2}$ को धनात्मक से ऋणात्मक या ऋणात्मक से धनात्मक होने, के लिए शून्य से होकर गुजरना आवश्यक है) उसे नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यकत प्रतिबन्ध कहते हैं अर्थात् जिस बिन्दु पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ वह नति परिवर्तन बिन्दु हो सकता है नति परिवर्तन बिन्दु के लिए अनिवार्य प्रतिबन्ध

1. $\frac{dy}{dx} = 0$ अनिवार्य शर्त
2. $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$; पूरक शर्त/प्रतिबन्ध।
3. $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$; पर्याप्त शर्त व पर्याप्त प्रतिबन्ध।

उपरोक्त चित्र में बिन्दु b, d तथा f नति परिवर्तन बिन्दु हैं। नति परिवर्तन बिन्दुओं पर स्पर्श रेखाएं स्पर्श बिन्दु को प्रतिच्छेदित करती हैं।

1.4.6 इकाई का सारांश

- फलन स्वतंत्र चर के किसी निश्चित बिन्दु तक घटता है और उससे अगले मानों के लिए बढ़ता है तो घटती हुई स्थिति से बढ़ने वाली स्थिति के आने में फलन न्यूनतम मान प्राप्त करता है।
- उच्चिष्ठ मान के बाद निम्निष्ठ मान और निम्निष्ठ मान के बाद उच्चिष्ठ मान आता है अर्थात् उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान एकान्तर क्रम से आते हैं।

1.4.7 मुख्यशब्द

- **प्रथम अवकलज:** जब किसी दिये हुए फलन को स्वतंत्र चर के सापेक्ष सिर्फ एक बार अवकलन किया जाता है तब उससे प्राप्त परिणाम को प्रथम अवकलज कहा जाता है।
- **सीमान्त:** किसी चर की एक अकेली इकाई के द्वारा सकल परिणाम में लाया जाने वाला अन्तर ही सीमान्त कहलाता है।
- **अधिकतम तथा न्यूनतम बिन्दु:** किसी फलन के ऐसे बिन्दु जो अपने आस-पास के समीपवर्ती बिन्दुओं से उच्चतम तथा न्यूनतम स्थान पर अवस्थित हो उन्हें क्रमशः उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ कहते हैं। उच्चिष्ठता एवं निम्निष्ठता की इस बिन्दु को ही गणितीय अर्थशास्त्र में अनुकूलतम बिन्दु कहा जाता है।

1.4.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

7. गणित का एक मुख्य उपयोग किसी के उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात करने में होता है।
8. किसी फलन के बहुत से उच्चिष्ठ और मान हो सकते हैं।
9. के लिए $x = a$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान ऋणात्मक होता है।
10. न्यूनतम के लिए $x = a$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान होता है।

(ख) सही या गलत

1. उच्चिष्ठ के लिए $x = a$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान धनात्मक होता है।
2. निम्निष्ठ के लिए $x = a$ पर $\frac{d^2y}{dx^2}$ का मान धनात्मक होता है।
3. फलन के दो समान मानों के मध्य कम से कम एक उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान अवश्य होता है।
4. फलन के उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ बिन्दुओं पर $\frac{dy}{dx}$ का चिह्न नहीं बदलता है।

1.4.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(क) 1. फलन, 2. न्यूनतम, 3. अधिकतम, 4. धनात्मक

(ख) 1. असत्य, 2. सत्य, 3. सत्य, 4. असत्य,

1.4.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

6. किसी फलन के अवकलज की अवधारणा से आप क्या समझते हैं?
7. अवकलन को परिभाषित कीजिए एवं उनके विभिन्न नियमों का उल्लेख करें।
8. अवकलन एवं अवकलज के बीच अन्तर का वर्णन कीजिए।
9. किसी फलन के अनुकूलतम व अधिकतम तथा न्यूनतम बिन्दु से आप क्या समझते हैं।
10. नति परिवर्तन बिन्दु के अर्थ को समझाइए।

1.4.11 संदर्भ पुस्तकें

34. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
35. Mishra, J.P., "Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)" Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.
36. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, "आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी", तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
37. अग्रवाल, डी. आर. 'प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र', (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली— 110091
38. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
39. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
40. Agarawal D. R., Quantitative Methods
41. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.

42. Yamane, T., Mathematics for Economists.
43. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
44. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस, के., "आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें", शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड—I - इकाई 05

लघुगुणकीय अवकलन व लोच की माप

प्रारूप:

- 1.5.1 परिचय
- 1.5.2 लघुगुणकीय फलन का अवकलन
- 1.5.3 अनन्त श्रेणियाँ एवं अस्पष्ट फलन
 - 1.5.3.1 अनन्त श्रेणियों का योगफलन
 - 1.5.3.2 अस्पष्ट फलन का अवकलन
- 1.5.4 प्राचलिक फलन का अवकलन
- 1.5.5 लोच की माप
 - 1.5.5.1 मांग फलन एवं मांग की लोच
 - 1.5.5.2 मांग की लोच से मांग वक्र के स्वभाव का निवर्चन
 - 1.5.5.3 पूर्ति की लोच
- 1.5.6 इकाई का सारांश
- 1.5.7 पारिभाषिक शब्दावली
- 1.5.8 मुख्यशब्द
- 1.5.9 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 1.5.10 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 1.5.11 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 1.5.12 सन्दर्भ पुस्तक

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- लघुगुणकीय अवकलन निकालने की विधि का ज्ञान।
- अनन्त श्रेणियों के योगफल ज्ञात करना।
- अस्पष्ट फलन का अवकलन करना।
- प्राचलिक फलन एवं लोच के माप की गणना करने में सक्षम।

1.5.1 परिचय (Introduction)

पिछले इकाई में हमलोगों ने सामान्य फलन के सतत होने पर उसका अवकलन करने की विधि एवं उनके अवकलजों के बारे में अध्ययन किया है। इस इकाई में हम कुछ विशिष्ट फलनों के अवकलन करने की विधियों को सीखेंगे। विशेष रूप से लघुगुणकीय फलनों का अवकलन करने एवं उसका उचित तरीके से निवर्चन करने की कला की भी चर्चा होगी। यदि ऐसे फलनों का अवकलन करना हो जिसमें घातांक भी उसी चर राशि का फलन हो अथवा वह फलन जिसका अवकलन करना हो कई फलनों का गुणनफल या भागफल हो, तो ऐसे फलनों का अवकलन उनका लघुगुणक लेकर ज्ञात किया जाता है। इस प्रक्रिया को लघुगुणकीय अवकलन कहते हैं।

1.5.2 लघुगुणकीय अवकलन (Logarithmic Differentiation)

सर्वप्रथम दिये गये फलन में स्वतंत्र एवं आश्रित चर का पता लगाइए। x के ज्ञात फलन को y के बराबर मान लो। अब दोनों पक्षों का लघुगुणक लो जिससे घातांक गुणा में, गुणा जोड़ में, इत्यादि परिवर्तित हो जायेंगे।

अब दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करके $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करते हैं।

ध्यान रहे कि $\log(a + b) \neq \log a + \log b$.

अतः यदि $y = x^x + (\sin x)^{\cos x}$ हो, तो $\log y \neq \log x^x + \log (\sin x)^{\cos x}$

लघुगुणकीय फलन के अवकलन के कुछ महत्वपूर्ण सूत्र

$$1. \log(m \cdot n) = \log m + \log n$$

$$2. \log \left\{ \frac{m}{n} \right\} = \log m - \log n$$

$$3. \log (m)^n = n \log m.$$

उदाहरण 1. लघुगुणकीय अवकलन का प्रयोग करते हुए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए यदि $y = \frac{a-x}{a+x}$

हल:

दिया है, $y = \frac{a-x}{a+x}$ -----(i)

$$\log y = \log (a-x) - \log (a+x)$$

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{a-x} - \frac{1}{a+x}$$

$$\frac{dy}{dx} = y \left(-\frac{1}{a-x} - \frac{1}{a+x} \right)$$

$$= \frac{a-x}{a+x} \left\{ \frac{-(a+x) - (a-x)}{(a+x)(a-x)} \right\}$$

$$= -\frac{2a}{(a+x)^2} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2. फलन $y = x^{\log x}$ का x के सापेक्ष अवकलन कीजिए।

हल: दिया है, $y = x^{\log x}$

$$\log y = \log x \cdot \log x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = \log x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \log x$$

$$\Rightarrow = \frac{2}{x} \log x$$

$$\frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{2}{x} \log x$$

$$= x^{\log x} \cdot \left\{ \frac{2 \log x}{x} \right\}$$

1.5.3 अनन्त श्रेणियाँ एवं अस्पष्ट फलन

1.5.3.1 अनन्त श्रेणियों का योगफलन (Sums of infinite tables)

उदाहरण 3. यदि $y = x^{x^{x^{\dots \infty}}}$ तब सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1-y \log x)}$

हल: दिया है, $y = x^{x^{x^{\dots \infty}}}$

यहाँ $y = x^y \Rightarrow \log y = y \log x$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{1}{x} + \frac{dy}{dx} \cdot \log x$$

$$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{y} - \log x \right\} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\Rightarrow \{1 - y \log x\} \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1-y \log x)}$$

1.5.3.2 अस्पष्ट फलन (Implicit Function) का अवकलन

यदि y और x के बीच कोई ऐसा समीकरण दिया हो जिसे तुरन्त y के लिए हल नहीं किया जा सके, तो y को x का अस्पष्ट फलन (Implicit Function) कहते हैं। इसके विपरीत यदि y का मान x के रूप में ज्ञात किया जा सके, तो y को x का स्पष्ट फलन (Explicit Function) कहते हैं।

अस्पष्ट फलन का अवकलन— किसी अस्पष्ट फलन (Implicit Function) से $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात करने के लिए दिये हुए समीकरण के प्रत्येक पद का x के सापेक्ष अवकलन करो तथा फिर $\frac{dy}{dx}$ के पद एक ओर करके उसका मान ज्ञात कीजिए।

उदाहरण 1. यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है, $ax^2 + 2hxy + by^2 = 0$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$a \cdot \frac{d}{dx}(x^2) + 2h \frac{d}{dx}(xy) + b \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

या $2ax + 2h\left\{x \cdot \frac{dy}{dx} + y \cdot 1\right\} + 2by \cdot \frac{dy}{dx} = 0$

या $2(hx + by) \frac{dy}{dx} = -2(ax + hy)$

$$\frac{dy}{dx} = -\left\{\frac{ax+hy}{hx+by}\right\} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 2. यदि $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है, $ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (i)
समीकरण (i) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$a \cdot \frac{d(x^2)}{dx} + 2h \cdot \frac{d(xy)}{dx} + b \cdot \frac{d(y^2)}{dx} + 2g \frac{d(x)}{dx} + 2f \cdot \frac{d(y)}{dx} + \frac{d(c)}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow a(2x) + 2h\left(x \frac{dy}{dx} + y\right) + b\left(2y \frac{dy}{dx}\right) + 2g \cdot 1 + 2f \cdot \frac{dy}{dx} + 0 = 0$$

$$\Rightarrow 2(hx + by + f) \frac{dy}{dx} = -2(ax + hy + g)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(ax+hy+g)}{(hx+by+f)} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 3. यदि $y = x^y$, तो सिद्ध कीजिए कि $x \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-y \log x}$.

हल: दिया है, $y = x^y$, लघुगणक लेने पर

$$\log y = y \log x.$$

दोनों पक्षों का x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = y \cdot \frac{d(\log x)}{dx} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= y \cdot \frac{1}{x} + \log x \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$\Rightarrow \left\{\frac{1}{y} - \log x\right\} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

अतः $x \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{1-y \log x} \quad \text{उत्तर}$

उदाहरण 4. यदि $x^y = e^{x-y}$ तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1+\log x)^2}$.

हल: दिया है, $x^y = e^{x-y}$, दोनों पक्षों का लघुगणक लेने पर

$$\Rightarrow y \log_e x = (x-y) \log e,$$

$$\Rightarrow y \log_e x = x-y$$

$$\Rightarrow y(1 + \log x) = x$$

या $y = \frac{x}{y + \log x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1+\log x) \cdot 1 - x(1/x)}{(1+\log x)^2}$$

$$= \frac{\log x}{(1+\log x)^2} \quad \text{उत्तर}$$

1.5.4 प्राचलिक फलन का अवकलन (Parametric Function Differentiation)

कभी-कभी x और y दोनों किसी तीसरी चर राशि के फलनों के रूप में दिये होते हैं। इस तीसरी राशि को प्राचल (Parameter) कहते हैं और इस प्रकार के समीकरण **प्राचलिक समीकरण** कहलाते हैं। इस प्रकार के सम्बन्धों से हम प्राचल का विलोपन (elimination) किये बिना ही $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कर सकते हैं।

जैसे, यदि $x = f_1(t)$ और $y = f_2(t)$; जहाँ t स्वतंत्र चर राशि है तथा x और y आश्रित चर राशियाँ हैं तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \times \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} / \frac{dx}{dt}$$

अतः x के सापेक्ष y का अवकल-गुणांक, प्राचल के सापेक्ष y और x के अवकल-गुणांकों का भागफल होता है।

उदाहरण 5. यदि $x = at^2$ तथा $y = 3at$ तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ $x = at^2$ (i)

समीकरण (i) के दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dx}{dt} = 2at \quad \text{..... (ii)}$$

तथा $y = 3at$ (iii)

समीकरण (iii) के दोनों पक्षों का t के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dy}{dt} = 3a \quad \text{..... (iv)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{..... (v)}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3a}{2at} = \frac{3}{2t}$$

10उत्तर

1.5.5 लोच की माप (Measure of Elasticity)

अर्थशास्त्र में लोच निकालने के लिए अवकलन का प्रयोग किया जाता है। यदि कोई फलन $y = f(x)$ हो तो

y के साथ x की लोच निम्नलिखित तरीके से ज्ञात की जा सकती है—

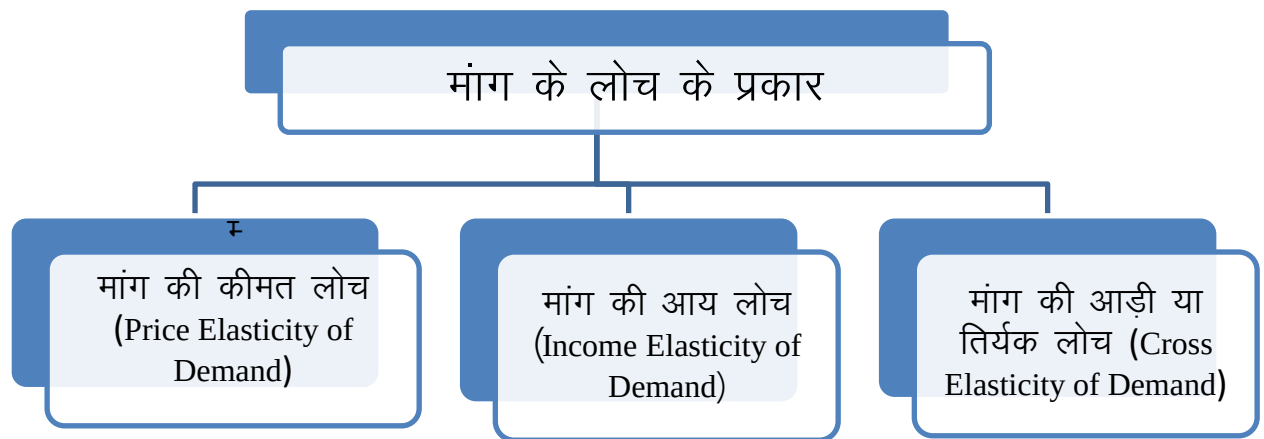
$$e_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \left\{ \frac{dy}{dx} \right\}$$

अर्थशास्त्र में आर्थिक फलन का प्रयोग बहुत व्यापक तौर पर किया जाता है लेकिन सबसे ज्यादा इसका प्रयोग उपभोक्ता व्यवहार के अन्तर्गत मांग की लोच जिसमें कीमत, आय एवं आड़ी लोच का अध्ययन किया जाता है। जबकि उत्पादन व विक्रेता के सम्बन्ध में पूर्ति की लोच व साधनों की लोच की माप आदि में भी इसका प्रयोग किया जाता है।

1.5.5.1 मांग फलन एवं मांग की लोच (Demand Function and Elasticity of Demand)

किसी वस्तु की कीमत में प्रतिशत या आनुपातिक परिवर्तन से मांग की मात्रा में हुए प्रतिशत या अ. नुपातिक परिवर्तन के अनुपात को मांग की कीमत लोच कहा जाता है।

- किसी वस्तु की मांग तथा उसको प्रभावित करने वाले विभिन्न कारकों के बीच फलनात्मक सम्बन्ध को हम मांग फलन कहते हैं अर्थात् $D_x = f(P_x, P_o, Y, T \text{ etc.})$.
- सामान्यतया अल्पकालीन मांग फलन को हम $D_x = f(P_x)$ के रूप में व्यक्त करते हैं।
- **मांग का नियम:** यदि अन्य बातें समान व स्थिर रहें तो कीमत एवं मांगी गई मात्रा में विपरीत सम्बन्ध पाया जाता है, अर्थात् कीमत बढ़ने पर मांगी गई मात्रा में कमी आयेगी इसके विपरीत कीमत में कमी होने पर मांगी गई मात्रा में वृद्धि होगी।



माना कि किसी वस्तु की कीमत (P) में परिवर्तन $(p + \Delta p)$ हो जाता है (जहाँ Δ परिवर्तन को निरूपित करता है) तथा उसके अनुरूप मांग (x) में परिवर्तन $(x + \Delta x)$ हो जाता है तब परिभाषा के अनुसार मांग की लोच,

$$e_d = e_p = \frac{\text{Proportionate Change in Quantity Demanded}}{\text{Proportionate Change in Price of Commodity}}$$

$$e_d = e_p = \frac{\frac{\text{Change in Quantity Demanded}}{\text{Previous (Original) Quantity Demanded}}}{\frac{\text{Change in Price}}{\text{Previous (Original) Price}}}$$

$$e_d = \frac{\frac{\Delta x}{x}}{\frac{\Delta p}{p}} = \frac{p}{x} \frac{\Delta x}{\Delta p}$$

इस प्रकार, $e_d = (-) \frac{p}{x} \frac{\Delta x}{\Delta p}$

चूँकि मांग के नियम के अनुसार, वस्तु की कीमत एवं उसकी मांगी गई मात्रा के बीच विपरीत व नकारात्मक (Opposite or Negative) सम्बन्ध होने के कारण कीमत-लोच का गुणक ऋणात्मक होता है।

वास्तव में, अनुपात $\left\{ \frac{p}{x} \frac{\Delta x}{\Delta p} \right\}$ कीमत p से कीमत $(p + \Delta p)$ तक औसत मांग की लोच को प्रदर्शित करता है। परन्तु हम यह जानना चाहते हैं कि किसी विशेष कीमत स्तर (मान लीजिए, P) पर मांग की लोच क्या होगी। इसके लिए हमें Δp को शून्य की ओर ले जाना होगा। कलन (Calculus) की भाषा में यह कहा जाता है कि इस अनुपात की सीमा (Limit) लेने पर, कीमत लोच को निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया जा सकता है—

$$e_d = \lim_{\Delta p \rightarrow 0} (-) \frac{p}{x} \frac{\Delta x}{\Delta p}$$

$$e_d = (-) \frac{p}{x} \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta p}$$

मांग के लोच के धनात्मक (absolute) मूल्य को $|e_d|$ से निरूपित किया जाता है।

अतः $|e_d| = \left| (-) \frac{p}{x} \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} \right|$

$$|e_d| = \frac{p}{x} \lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta p}$$

हम जानते हैं, $\lim_{\Delta p \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta p} = \frac{dx}{dp}$

अतः $e_d = (-) \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$

या, $|e_d| = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$

यहाँ, $\frac{dx}{dp}$, कीमत p में परिवर्तन होने के फलस्वरूप मांग (x) में हाने वाले परिवर्तन की दर को प्रदर्शित करता है।

इस प्रकार, उपर्युक्त सूत्र की सहायता से मांग की कीमत लोच की गणना की जा सकती है।
पुनः सूत्र को निम्नलिखित रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है:

$$e_p = (-) \frac{\frac{dx}{dp}}{\frac{x}{p}} = (-) \frac{\text{Marginal of Quantity Demanded}}{\text{Average of Quantity Demanded}}$$

उदाहरण (6) यदि मांग फलन $x = 20 - p^2$ है तब कीमत $p = 2$ होने पर मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

हल:

हम जानते हैं कि मांग की कीमत लोच,

$$|e_d| = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

यहां

$$x = 20 - p^2$$

अतः

$$\frac{dx}{dp} = -2p$$

अब, मांग के लोच के सूत्र के अनुसार, $|e_d| = \frac{p}{20 - p^2} (-2p)$

यदि $2 = p$ है तब,

$$|e_d| = \frac{2}{20 - 2^2} (-2 \times 2)$$

$\Rightarrow$

$$|e_d| = \frac{2}{20 - 4} \times (-4) = -\frac{8}{16} = -\frac{1}{2}$$

या

$$|e_d| = -\frac{1}{2} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण (7). किसी वस्तु का मांग फलन इस प्रकार दिया गया है कि $x = 76 - 3p$ जहाँ x मांग है। जबकि वस्तु की कीमत $p = 20$ दिया है तब मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है,

$$x = 76 - 3p, \text{ ----- (i)}$$

$$p = 20$$

मांग की लोच,

$$|e_d| = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

समीकरण (i) का x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$\Rightarrow$

$$\frac{dx}{dp} = 0 - 3 = -3$$

$$|e_d| = \frac{p}{76 - 3p} (-3)$$

जब $p = 20$ हो तब,

$$|e_d| = \frac{20}{76 - 3(20)} (-3)$$

$$|e_d| = \frac{20}{76 - 60} (-3) = \frac{-60}{16} = \frac{-15}{4}$$

उदाहरण 8. यदि मांग का नियम $p = 10e^{-x/2}$ है तो मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

हल:

हम जानते हैं कि

$$|e_d| = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

अब

$$p = 10e^{-x/2} \text{ ----- (1)}$$

समीकरण (1) के दोनों पक्षों का के सापेक्ष अवकलन करने पर हमें निम्नवत् प्राप्त होते हैं,

या

$$1 = 10e^{-x/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{dx}{dp}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{dp} = -\frac{1}{5e^{-x/2}}$$

$$\text{या, } e_d = \frac{p}{x} \left\{ -\frac{1}{5e^{-x/2}} \right\} = \frac{10e^{-x/2}}{x} \left\{ -\frac{1}{5e^{-x/2}} \right\}$$

$$e_d = -\frac{2}{x} \quad \text{उत्तर}$$

उदाहरण 9. सिद्ध कीजिए कि यदि मांग फलन $p = ae^{-kx}$ दिया है तब मांग की लोच $e_d = \frac{-1}{kx}$ होगी। (जहां p वस्तु की कीमत एवं x मांगी गई मात्रा हैं।)

हल:

दिया है, $p = ae^{-kx}$ ----- (1)

समीकरण (1) के दोनों पक्षों को p के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\text{या, } 1 = ae^{-kx}(-k) \frac{dx}{dp}$$

$$\frac{dx}{dp} = -\frac{1}{ake^{-kx}}$$

$$\text{चूँकि, } |e_d| = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

$$\text{अतः } |e_d| = \frac{ae^{-kx}}{x} (-) \frac{1}{ake^{-kx}}$$

$$\text{या, } |e_d| = (-) \frac{1}{kx}$$

1.5.5.2 मांग की लोच से मांग वक्र के स्वभाव का निवर्चन

(Interpretation of Nature of Demand Curve through Elasticity of Demand)

माना कि मांग फलन $x = f(x)$ है तब मांग की कीमत लोच

$$e_d = -\frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

$$\text{या } e_d = -\frac{d \cdot \log x}{d \cdot \log p}$$

ऋणात्मक चिह्न वह प्रदर्शित करता है कि मांग तथा कीमत में परिवर्तन के बीच विपरीत सम्बन्ध पाया जाता है। यदि $e_d > 1$, तब वस्तु की मांग लोचदार कही जाती है, जबकि $e_d < 1$ की दशा में वस्तु की मांग बेलोचदार होती है तथा $e_d = 1$ होने के पर वस्तु की मांग न तो लोचदार होती है और न ही बेलोचदार, बल्कि इकाई लोच वाली कही जाती है।

यदि यह मान लिया जाय कि मांग वक्र के प्रत्येक बिन्दु पर मांग की लोच स्थिर है, अर्थात् e_0 है।

$$\text{तब } \frac{dx}{dp} = (-) e_0 \frac{x}{p}$$

$$\text{या, } \frac{dx}{x} = (-) \frac{dp}{p} \cdot e_0$$

$$\text{या, } \log x = (-) e_0 \log p + \log c, \text{ जहां, } \log c \text{ समाकलन स्थिरांक है।}$$

$$x = C p^{-e_0}$$

$$X = \frac{C}{p^{-e_0}}$$

इस तरह, उपर्युक्त समीकरण से यह प्रदर्शित होती है कि मांग वक्र का स्वरूप सामान्यतः अति परवलय वक्र (Hyperbolic Curve) के आकार का होता है।

1.5.5.3 पूर्ति की लोच (Elasticity of Supply)

उदाहरण 1. कीमत की साम्य अवस्था में पूर्ति एवं मांग की लोच ज्ञात कीजिए। यदि मांग फलन $p = \sqrt{100 - x^2}$ तथा पूर्ति फलन $x = 2p - 10$ के लिए जहाँ कीमत p तथा मात्रा x है।

हल:

$$\text{दिया है, } \text{मांग फलन, } p = \sqrt{100 - x^2} \Rightarrow p^2 = 100 - x^2 \text{ ----- (1)}$$

$$\text{पूर्ति फलन, } x = 2p - 10 \text{ ----- (2)}$$

समीकरण (1) में x का मान रखने पर, $p^2 = 100 - (2p - 10)^2$

या, $p^2 = 100 - 4p^2 + 40p - 100 = -4p^2 + 40p$

या, $p^2 + 4p^2 = 40p$

या, $5p^2 = 40p \Rightarrow 5p = 40$

या, $p = 8$

अब p का मान समीकरण (2) में रखने पर, $x = 2(8) - 10 = 6$

$p = 8$ तथा $x = 6$

पूर्ति की लोच:

$$e_s = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

(पूर्ति के नियम के अनुसार कीमत एवं पूर्ति की मात्रा के बीच धनात्मक व प्रत्यक्ष सम्बन्ध होता है, यहीं कारण है कि पूर्ति के लोच के सूत्र में ऋणात्मक चिह्न को रखना अनिवार्य नहीं है।)

पूर्ति फलन

$$x = 2p - 10$$

$$\frac{dx}{dp} = 2$$

$$e_s = \frac{p}{2p-10} \times (2) = \frac{8}{6} \times (2)$$

$$e_s = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = 2.667$$

1.5.6 इकाई का सारांश

लघुगणकीय फलनों का अवकलन करने एवं उसका उचित तरीके से निवर्चन करने की कला को भी चर्चा होगी। यदि ऐसे फलनों का अवकलन करना हो जिसमें घातांक भी उसी चर राशि का फलन हो अथवा वह फलन जिसका अवकलन करना हो कई फलनों का गुणनफल या भागफल हो, तो ऐसे फलनों का अवकलन उनका लघुगणक लेकर ज्ञात किया जाता है। इस प्रक्रिया को **लघुगणकीय अवकलन** कहते हैं।

कभी-कभी x और y दोनों किसी तीसरी चर राशि के फलनों के रूप में दिये रहते हैं, इस तीसरी राशि को प्राचल (Parameter) कहा जाता है और इस प्रकार के समीकरण प्राचलिक समीकरण कहा जाता है।

1.5.7 पारिभाषिक शब्दावली

फलन (Function): चरों के बीच सम्बन्ध का सूचक।

अनन्त (Infinite): जिसका अंत न हो।

मांग की लोच— वस्तु की कीमत में अनुपातिक परिवर्तन के फलस्वरूप वस्तु की मात्रा में अनुपातिक परिवर्तन।

1.5.8 मुख्यशब्द

- ✓ **लघुगणकीय अवकलन (Logarithmic Differentiation):** यदि ऐसे फलनों का अवकलन करना हो जिसमें घातांक भी उसी चर राशि का फलन हो अथवा वह फलन जिसका अवकलन करना हो कई फलनों का गुणनफल या भागफल हो, तो ऐसे फलनों का अवकलन उनका लघुगणक लेकर आसानी से किया जा सकता है, इस सम्पूर्ण प्रक्रिया को ही **लघुगणकीय अवकलन** कहते हैं।
- ✓ **अस्पष्ट फलन (Implicit Function):** यदि x और y के बीच कोई ऐसा समीकरण दिया हो जिसे तुरन्त y के लिए हल नहीं किया जा सके, तो y को x का अस्पष्ट (Implicit Function) कहते हैं।
- ✓ **स्पष्ट फलन (Explicit Function):** इसके विपरीत यदि y का मान x के रूप में ज्ञात किया जा सके, तो y को x का स्पष्ट फलन (Explicit Function) कहा जाता है।

1.5.9 अपने प्रगति की जाँच (बहु-विकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

1. ऐसे फलन जिनका अवकलन लघुगणन लेकर ज्ञात किया जाता है उसे अवकलन कहत है।

2. $\log (a)^n = \log a \dots$
3. $\log \left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \dots$
4. $\log \left\{\frac{23}{13}\right\} = \log 23 - \log \dots$
5. $\dots = \log m + \log n$

1.5.10 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

- (क) 1. लघुगणकीय 2. n 3. $\log n$ 4. 13 5. $-\frac{y}{x}$

1.5.11 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

प्रश्न संख्या 1 से 3 के निम्नलिखित फलनों के लिए $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए—

1. $xy = c$
2. $2x^2 + y^2 = c^2$
3. $x^n + y^n = a^n$
4. मांग फलन $p + 3x - 10 = 0$ की $x = 3$ पर मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

5. यदि $y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots \infty}}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $(2y - 1)\frac{dy}{dx} = 1$

6. यदि $y = \sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\sqrt{x}^{\dots \infty}}}$ तो सिद्ध कीजिए कि $x\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{2 - y \log x}$

7. यदि $y = x^2 + \frac{1}{x^2 + \frac{1}{x^2 + \dots}}$ तो सिद्ध कीजिए $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy^2}{1 + y^2}$

1.5.12 संदर्भ पुस्तकें

Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002

Mishra, J.P., "Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)" Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, "आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी", तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139

अग्रवाल, डी. आर. 'प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र', (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली— 110091

J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.

Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics

Agarwal D. R., Quantitative Methods

Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.

Yamane, T., Mathematics for Economists.

Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.

लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., "आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें", शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड-I
इकाई-06
आंशिक अवकलन एवं इसका अर्थशास्त्र में प्रयोग

- 1.6.1 परिचय
- 1.6.2 आंशिक अवकलन की अवधारणा
- 1.6.3 प्रथम एवं द्वितीय क्रम के आंशिक अवकलज
 - 1.6.3.1 प्रथम क्रम के आंशिक अवकलज
 - 1.6.3.2 द्वितीय क्रम के आंशिक अवकलज
- 1.6.4 सम्पूर्ण अवकलन
 - 1.6.4.1 दो स्वतंत्र चर वाले फलनों के अधिकतम एवं न्यूनतम
- 1.6.5 आंशिक अवकलन के आर्थिक प्रयोग
- 1.6.6 इकाई का सारांश
- 1.6.7 पारिभाषिक शब्दावली
- 1.6.8 मुख्यशब्द
- 1.6.9 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 1.6.10 सन्दर्भ पुस्तक

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- आंशिक अवकलन का अर्थ एवं अवधारणा
- प्राथम एवं द्वितीय क्रम के आंशिक अवकलज को समझना
- आंशिक अवकलन के मदद से अधिकतम एवं न्यूनतम बिन्दु ज्ञात करना
- आंशिक अवकलन के आर्थिक प्रयोग का ज्ञान।

1.6.1 परिचय

पीछे के इकाईयों में हमलोगो ने गणितीय अर्थशास्त्र के मौलिक अवधारणाओं से लेकर कलन के अन्तर्गत अवकलन के विभिन्न तरीकों के बारे में अध्ययन किया और उनके अनुप्रयोग को भी जान पाया। इकाई चार एवं पांच में हमने कलन में उन फलनों का ही अध्ययन किया जिसमें एक स्वतंत्र चर और एक आश्रित चर होते हैं। किसी आर्थिक फलन में सदैव एक ही स्वतंत्र चर नहीं होते बल्कि एक से अधिक स्वतंत्र चर होते हैं परन्तु सामान्य अवकलन में हम अन्य आर्थिक चरों को स्थिर रख देते हैं। उदाहरण के लिए मांग की मात्रा को प्रभावित करने वाले कारकों में वस्तु की कीमत, सम्बन्धित वस्तुओं की कीमतें, उपभोक्ता की आय, जनसंख्या, फैशन व रुचि भी प्रमुख कारक होते हैं लेकिन अध्ययन की सुविधा के लिए सामान्य कलन में अन्य कारकों (सम्बन्धित वस्तुओं की कीमत, उपभोक्ता की आय, जनसंख्या, फैशन व रुचि) को स्थिर मानते हुए केवल कीमत एवं वस्तुओं की मात्रा के बीच कारण और प्रभाव अर्थात् स्वतंत्र चर में परिवर्तन (वृद्धि) के फलस्वरूप आश्रित चर वस्तु की मात्रा में कितना परिवर्तन होगा, यही जान पाते हैं। गणितीय अर्थशास्त्र में अध्ययन के परिणाम को और अधिक परिशुद्ध व परमाणिकता प्रदान करने के लिए कलन के अन्तर्गत आंशिक अवकलन का प्रयोग वांछित है।

इसके अन्तर्गत हम एक आर्थिक फलन के अन्तर्गत एक से अधिक स्वतंत्र चरों को अध्ययन में शामिल कर सकते हैं। उदाहरण के लिए किसी दिये गये भूमि पर कृषि उत्पादन की मात्रा बीज की गुणवत्ता, सिंचाई की व्यवस्था, निराई व मौसम पर भी निर्भर होता है। ऐसे आर्थिक फलनों के अध्ययन के लिए सामान्य अवकलन के बजाय आंशिक अवकलन का प्रयोग किया जाए तो ज्यादा बेहतर और उपयुक्त परिणाम प्राप्त किया जा सकता है।

1.6.2 आंशिक अवकलन की अवधारणा (Concept of Partial Differentiation)

यदि एक आश्रित चर U , स्वतंत्र चर $x_1, x_2, \dots, x_n$ पर निर्भर हो तो उसे $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ को फलन के रूप में $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ निरूपित किया जाता है। यदि

अध्ययन में दो चरों की स्थिति पर विचार करें तब, $U = f(x, y)$ जहाँ U , दो चरों x तथा y का फलन है।

यदि y को अचर या स्थिरांक (Constant) मानकर U का अवकलन x के सापेक्ष किया जाए तो अवकलज को $\frac{\partial U}{\partial x}$ लिखा जाता है तथा इसे 'x के सापेक्ष U का आंशिक अवकलज' कहते हैं। $\frac{\partial U}{\partial x}$ को 'डेल्टा यू बाई डेल्टा एक्स' पढ़ा जाता है।

इसी प्रकार, यदि x को अचर या स्थिरांक (Constant) मानकर U का अवकलन y के सापेक्ष किया जाए तो अवकलज को $\frac{\partial U}{\partial y}$ लिखा जाता है तथा इसे 'y के सापेक्ष U का आंशिक अवकलज' कहते हैं। $\frac{\partial U}{\partial y}$ को 'डेल्टा यू बाई डेल्टा एक्स' पढ़ा जाता है।

$\frac{\partial U}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial U}{\partial y}$ को क्रमशः $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ द्वारा भी निरूपित किया जा सकता है।

अवकलज की परिभाषा के अनुसार आंशिक अवकलन,

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

$$\text{इसी प्रकार, } \frac{\partial U}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

विस्तृत रूप में, यदि $U = f(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$

तब $x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n$ को अचर मानते हुए x_1 के सापेक्ष U का 'आंशिक अवकलज' $\frac{\partial U}{\partial x_1}$ होगा।

नोट: ध्यान देने योग्य बात है कि आंशिक अवकलजों पर, एक समय में केवल एक चर के अवकलजों के ही नियम लागू होते हैं।

उदाहरण 1. यदि $z = 6x^2 + 3y^3 - 15$ हो तब $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है, $z = 6x^2 + 3y^3 - 15$ ----- (1)

समी. (1) में y को अचर मानते हुए x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(6x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(3y^3)}{\partial x} + \frac{\partial(15)}{\partial x} = 6 \times 2x + 0 + 0 = 12x$$

इसी प्रकार, समीकरण (1) में x को अचर रखते हुए y के सापेक्ष पुनः आंशिक अवकलन करने पर

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial(6x^2)}{\partial y} + \frac{\partial(3y^3)}{\partial y} + \frac{\partial(15)}{\partial y} \\ &= 0 + 3 \times 3y^2 + 0 = 9y^2 \end{aligned}$$

1.6.3 प्रथम एवं द्वितीय क्रम के आंशिक अवकलज

आंशिक अवकलन में प्रथम एवं द्वितीय क्रम के अवकलज का अध्ययन आवश्यक है क्योंकि इसी के आधार पर बाकि का अवकल गुणांक ज्ञात किया जाता है। द्वितीय आंशिक अवकलन की सहायता से हम फलन के अनुकूलतम बिन्दु का पता लगा सकते हैं।

1.6.3.1 प्रथम क्रम के आंशिक अवकलज

यदि $z = f(x, y)$ हो तो $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial z}{\partial y}$ को प्रथम क्रम के आंशिक अवकलज कहते हैं। प्रथम क्रम के

आंशिक अवकलज या आंशिक अवकलन गुणांक को f_x तथा f_y अथवा f_1 तथा f_2 से भी निरूपित किया जाता है। जिसमें फलन के चिह्न के साथ अधोलिखित चिह्न स्वतंत्र चर के साथ-साथ जिसके सापेक्ष आंशिक अवकलन किया गया है, उसे भी इंगित करते हैं।

उदाहरण 2. यदि $u = ax^2 + 2hxy + by^2$ हो तो $\frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial y}$ ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है, $u = ax^2 + 2hxy + by^2$ ----- (1)

समीकरण (1) का आंशिक अवकलन x के सापेक्ष, y को अचर मानते हुए करने पर,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial(ax^2)}{\partial x} + \frac{\partial(2hxy)}{\partial x} + \frac{\partial(by^2)}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= a \frac{\partial(x^2)}{\partial x} + 2hy \frac{\partial(x)}{\partial x} + b \frac{\partial(y^2)}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= a(2x) + 2hy(1) + b(0) \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= 2ax + 2hy + 0 = 2ax + 2hy = f_1 = f_x \text{ ----- (2)}\end{aligned}$$

समीकरण (1) का आंशिक अवकलन y के सापेक्ष, x को अचर मानते हुए करने पर,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial(ax^2)}{\partial y} + \frac{\partial(2hxy)}{\partial y} + \frac{\partial(by^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= a \frac{\partial(x^2)}{\partial y} + 2hx \frac{\partial(y)}{\partial y} + b \frac{\partial(y^2)}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= a(0) + 2hx(1) + b(2y)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f_2 = f_y = 2hx + 2by \text{ ----- (3)}$$

उपरोक्त समीकरण (2) एवं (3) में $\frac{\partial u}{\partial x}$, या f_x या f_1 एवं $\frac{\partial u}{\partial y}$ या f_y या f_2 प्रथम क्रम का आंशिक अवकलन को प्रदर्शित करता है।

1.6.3.2 द्वितीय क्रम के आंशिक अवकलज

यदि $z = f(x, y)$ हो तब द्वितीय क्रम के आंशिक अवकलज को निम्न प्रकार से परिभाषित किया जाता है:

1. $\frac{\partial z}{\partial x}$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर, (प्रत्यक्ष व समान्य)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ या } f_{xx} \text{ या } f_{11}$$

2. $\frac{\partial z}{\partial x}$ का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर, (तिर्यक)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \text{ या } f_{yx} \text{ या } f_{21}$$

3. $\frac{\partial z}{\partial y}$ का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर, (प्रत्यक्ष व समान्य)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ या } f_{yy} \text{ या } f_{22}$$

4. $\frac{\partial z}{\partial y}$ का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर, (तिर्यक)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \text{ या } f_{xy} \text{ या } f_{12}$$

• यहाँ f_{xx} या f_{11} तथा f_{yy} या f_{22} प्रत्यक्ष आंशिक अवकलन एवं f_{xy} या f_{12} तथा f_{yx} या f_{21} को तिरछे या तिर्यक आंशिक अवकलज कहा जाता है।

• सामान्य प्रस्थितियों में दोनों तिर्यक व तिरछे आंशिक अवकलजों के मान एक दूसरे के बराबर होते हैं अर्थात् $f_{xy} = f_{yx}$ या $f_{12} = f_{21}$.

उदाहरण 3. यदि $z = 4x^2 + 6y^2$ हो तो $\frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ ज्ञात कीजिए। $x=1$ तथा $y=2$ के लिए इनके मान क्या होंगे?

हल:

दिया है, $z = 4x^2 + 6y^2$ ----- (1)

समीकरण (1) में y को अचर राशि मानते हुए x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4.2x + 0 = 8x \text{ ----- (2)}$$

समीकरण (1) में x को अचर राशि मानते हुए y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 6.(2y) = 12y \text{ ----- (3)}$$

पुनः समीकरण (1) में x को अचर राशि मानते हुए y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12.(1) = 12 \text{ ----- (4)}$$

अब समीकरण (2) में $\frac{\partial z}{\partial x}$ के लिए $x=1$ एवं $y=2$ का मान रखने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8x = 8(1) = 8$$

इसी प्रकार समीकरण (4) में $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ के लिए $x=1$ एवं $y=2$ का मान रखने पर,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12.(1) = 12$$

उदाहरण 4. यदि $z = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ हो तब द्वितीय क्रम के सभी चार आंशिक अवकलजों को ज्ञात करें साथ ही साथ सिद्ध करें की दो तिर्यक आंशिक अवकलजों के मान एक दूसरे के बराबर होते हैं।

हल:

दिया है, $z = x^4 + 2x^2y^2 + y^4$ ----- (1)

समीकरण (1) में y को अचर राशि मानते हुए x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 + 2y^2.(2x) + 0 = 4x^3 + 4xy^2 \text{ ----- (2)}$$

समीकरण (2) में y को अचर राशि मानते हुए पुनः x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 4.(3x^2) + 2y^2.(2) = 12x^2 + 4y^2 \text{ ----- (3)}$$

समीकरण (2) में x को अचर राशि मानते हुए y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 0 + 4x.(2y) = 8xy \text{ ----- (4)}$$

समीकरण (1) में x को अचर राशि मानते हुए y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2x^2.(2y) + 4y^3 = 4x^2y + 4y^3 \text{ ----- (5)}$$

समीकरण (5) में x को अचर राशि मानते हुए y के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4x^2(1) + 4(3y^2) = 4x^2 + 12y^2 \text{ ----- (6)}$$

समीकरण (5) में y को अचर राशि मानते हुए x के सापेक्ष आंशिक अवकलन करने पर,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8xy + 0 = 8xy \text{ ----- (7)}$$

समीकरण (4) एवं (7) को तुलना करने पर हमें ज्ञात होता है कि दोनों आंशिक अवकलजों के द्वितीय क्रम के आंशिक अवकलज आपस बराबर होते हैं। अर्थात्

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 8xy = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 8xy \text{ इति सिद्धम्, उत्तर}$$

1.6.3.3 समघातीय फलन (Homogeneous Function)

यदि $u = f(x, y)$ दो चरों x तथा y का कोई फलन है। यदि x को tx तथा y को ty से प्रतिस्थापित करने पर $f(tx, ty) = t^n f(x, y)$ हो तब फलन $f(x, y)$ n कोटि का समघातीय फलन (Homogeneous Function) कहलाता है। समघातीय फलन की यह विशेषता है कि उसके पद में स्वतंत्र चरों की घातांकों का योग समान (उसकी कोटि के बराबर) होता है।

उदाहरणार्थ:1. $u = f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\Rightarrow f(tx, ty) = (tx)^2 + (ty)^2$$

(x एवं y , स्वतंत्र चरों को t से गुणा करने पर)

$$= t^2x^2 + t^2y^2$$

$$= t^2 (x^2 + y^2) = t^2 f(x, y)$$

अतः $u = f(x, y)$, द्वितीय कोटि का समघातीय फलन है।

2. यदि $z = f(x, y) = x^2 y^3 + 2xy^4 + x^3 y^2$, x और y के फलन है तब सिद्ध कीजिए कि यह एक सजातीय फलन है।

$$\Rightarrow f(tx, ty) = (tx)^2 (ty)^3 + 2(tx)(ty)^4 + (tx)^3 (ty)^2$$

(x एवं y , स्वतंत्र चरों को t से गुणा करने पर)

$$f(tx, ty) = t^2 x^2 t^3 y^3 + 2tx t^4 y^4 + t^3 x^3 t^2 y^2$$

$$f(tx, ty) = t^{(2+3)=5} x^2 y^3 + 2t^{(1+4)=5} xy^4 + t^{(3+2)=5} x^3 y^2$$

$$f(tx, ty) = t^5 (x^2 y^3 + 2xy^4 + x^3 y^2) = t^5 f(x, y)$$

अतः $z = f(x, y)$, पंचम कोटि का समघातीय फलन है।

$$\text{बृहत् रूप में, } z = a_0 x^n y^0 + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \dots + a_n x^0 y^n \text{ ----- (I)}$$

समीकरण (I), n कोटि का समघातीय फलन है जिसमें प्रत्येक पद की कोटि n है, (अर्थात् x तथा y के घातांकों का योग प्रत्येक पद में n है)।

उपरोक्त व्यंजक z को निम्न रूप में भी प्रदर्शित किया जा सकता है:

$$z = x^n \left\{ a_0 + a_1 \frac{y}{x} + a_2 \left(\frac{y}{x} \right)^2 + \dots + a_n \left(\frac{y}{x} \right)^n \right\}$$

$$\text{अथवा प्रतीक के रूप में, } z = x^n f \left(\frac{y}{x} \right)$$

अतः x तथा y में एक व्यंजक को n कोटि का समघातीय फलन कहा जाता है यदि उसे $x^n f \left(\frac{y}{x} \right)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 5. सिद्ध कीजिए कि फलन $u = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ एक रेखीय (कोटि इकाई के बराबर) समघातीय फलन है।

हल:

$$\text{दिया है, } u = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$u = f(x, y) = f(tx, ty) = \sqrt{(tx)^2 + (ty)^2} = \sqrt{t^2 x^2 + t^2 y^2}$$

$$u = f(tx, ty) = \sqrt{t^2 (x^2 + y^2)} = t \sqrt{x^2 + y^2} = t f(x, y)$$

अतः $u = f(x, y)$ एक रेखीय समघातीय फलन है।

1.6.4 सम्पूर्ण अवकल (Total Differential)

आंशिक अवकलज के अन्तर्गत हमलोगों ने एक से अधिक स्वतंत्र चरों का आश्रित चर पर कारण प्रभाव को देखने के लिए एक समय में केवल एक चर में परिवर्तन को ध्यान में रखते हैं। यही कारण है ऐसे सभी स्वतंत्र चर के व्यक्तिगत प्रभाव को मापने के लिए हमें सम्पूर्ण अवकल की आवश्यकता पड़ती है, ताकि हम चरों के समग्र प्रभाव को माप सकें।

माना कि $u = f(x, y)$ चरों x तथा y का एक फलन है: तब u का सम्पूर्ण अवकल du , निम्न तरीके से परिभाषित किया जा सकता है:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy \text{ ----- (1)}$$

अर्थात् फलन u का सम्पूर्ण अवकलज, इस फलन के आंशिक अवकलज तथा संगत स्वतंत्र चर के अवकलज के गुणनफलों के योग के बराबर होता है।

सम्पूर्ण अवकलज (Total Derivative)

माना $u = f(x, y)$, जहाँ $x = g(t)$ तथा $y = h(t)$

तब $u = f[g(t), h(t)]$ एक चर t का फलन है,

अतः $\frac{du}{dt}$ ज्ञात किया जा सकता है।

$\frac{du}{dt}$ और आंशिक अवकलजों $\frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial y}$ में विभेद करने के लिए $\frac{du}{dt}$ को u का सम्पूर्ण अवकल गुणांक

(Total Differential Coefficient) अथवा सम्पूर्ण अवकलज (Total Derivative) कहा जाता है।

$\frac{du}{dt}$ का मान $f(x, y)$ में x और y के मान रखे बिना

सूत्र : $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$

द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 6. फलन $z = x^y$ का सम्पूर्ण अवकल ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है, $z = x^y$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1} \text{ तथा } \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \log_e x$$

अतः $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$

$$= yx^{y-1} dx + x^y \log_e x dy$$

उदाहरण 7. यदि $u = x^5 y^4$, जहाँ $x = t^2$ तथा $y = t^3$ हो तो $\frac{du}{dt}$ ज्ञात करें।

हल:

दिया है $u = x^5 y^4$, $x = t$, एवं $y = t^3$

सूत्र: $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$ ----- (1)

लेकिन, $\frac{\partial u}{\partial x} = 5x^4 y^4$ और $\frac{dx}{dt} = 2t$ ----- (2)

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 4x^5 y^3 \text{ और } \frac{dy}{dt} = 3t^2 \text{ ----- (3)}$$

अब समीकरण (2) एवं (3) के मान को समीकरण (1) में रखने पर,

$$\frac{du}{dt} = 5x^4 y^4 \cdot (2t) + 4x^5 y^3 \cdot (3t^2)$$

$$\frac{du}{dt} = 5(t^2)^4 \cdot (t^3)^4 \cdot (2t) + 4(t^2)^5 \cdot (t^3)^3 \cdot (3t^2)$$

$$= 10(t^8) \cdot (t^{12}) \cdot (t) + 12(t^{10}) \cdot (t^9) \cdot (t^2) = 22t^{21} \quad \text{उत्तर}$$

सम्पूर्ण अवकल का प्रयोग करके अस्पष्ट फलन का अवकलन

(Differentiation of Implicit Function by Using Total Differential)

यदि $f(x, y) = 0$ एक अस्पष्ट फलन है, और y, x का एक फलन है जिसके कारण f, x का संयुक्त फलन (Composite Function) हो जाता है। तब फलन को x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx}$$

चूँकि $f(x, y) = 0$ तथा f केवल x का फलन है अतः $\frac{df}{dx} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{-f_x}{f_y} \quad \left\{ \text{जहाँ, } f_x = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ और } f_y = \frac{\partial u}{\partial y} \text{ जबकि } f_y \neq 0 \right\}$$

$$\text{तथा } \frac{d^2 y}{dx^2} = - \frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{(f_y)^3}$$

उदाहरण 8. समीकरण $x^2 + y^2 - 1 = 0$, y को x का अस्पष्ट फलन के रूप में प्रदर्शित करती है तब $\frac{dy}{dx}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है,

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial y}} = - \frac{2x}{2y} = - \frac{x}{y}$$

1.6.4.1 दो स्वतंत्र चर वाले फलनों के अधिकतम एवं न्यूनतम मान (Maxima & Minima of Function of Two Variable)

आंशिक अवकलज की विधि किसी दो स्वतंत्र चर वाले फलनों के अधिकतम एवं न्यूनतम या अनुकूलतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिए एक उपयोगी यंत्र है।

यदि $u = f(x, y)$, x और y का एक फलन है तब यह फलन बिन्दु (a, b) पर अन्यता (Extremum) अर्थात् अधिकतमता अथवा न्यूनतमता को प्राप्त करने के लिए निम्नलिखित शर्तों को आवश्यक एवं पर्याप्त रूप से पूरे होने चाहिए—

फलन की अधिकतम एवं न्यूनतम की महत्वपूर्ण स्थितियां

अनुकूलतम बिन्दु अधिकतम	अनिवार्य प्रतिबन्ध $\frac{\partial u}{\partial x} = f_x = 0,$ $\frac{\partial u}{\partial y} = f_y = 0,$ ($x = a, y = b$) बिन्दु पर	पर्याप्त प्रतिबन्ध $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx} < 0$ (ऋणात्मक राशि) ($x = a, y = b$ बिन्दु पर) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy} < 0$ (ऋणात्मक राशि) ($x = a, y = b$ बिन्दु पर) $\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\} - \left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}\right\}^2 > 0$ या $(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 > 0$
न्यूनतम	$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x = 0,$ $\frac{\partial u}{\partial y} = f_y = 0,$ ($x = a, y = b$) बिन्दु पर	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ (ऋणात्मक राशि) ($x = a, y = b$ बिन्दु पर) $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} > 0$ (ऋणात्मक राशि) ($x = a, y = b$ बिन्दु पर) $\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\}\left\{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right\} - \left\{\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y}\right\}^2 > 0$ या $(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 > 0$
पल्याण (Saddle) बिन्दु	$\frac{\partial u}{\partial x} = f_x = 0,$ $\frac{\partial u}{\partial y} = f_y = 0,$ ($x = a, y = b$) बिन्दु पर	- जब f_{xx} तथा f_{yy} के चिह्न अलग-अलग हों तथा $(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 < 0$ हो। - जब f_{xx} तथा f_{yy} के चिह्न एक समान हो तथा $(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 < 0$ हो।
जाँच असफल	$f_x = 0, f_y = 0$ ($x = a, y = b$) बिन्दु पर	जब f_{xx} तथा f_{yy} के चिह्न अलग-अलग हों या एक समान हो तथा $(f_{xx})(f_{yy}) - (f_{xy})^2 = 0$ हो।

उदाहरण 9. फलन $u = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4$ के लिए अधिकतम एवं न्यूनतम बिन्दु ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया गया है,

$$u = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 2x - y = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -x + 2y + 0 = 0 \quad \text{----- (2)}$$

समीकरण (1) एवं (2) को हल करने पर

$$3x^2 + 2x - y = 0$$

$$-x + 2y + 0 = 0$$

यदि $x = 2y$ तो प्रथम समीकरण के रखने पर

$$3(2y)^2 + 2(2y) - y = 0$$

$$y(12y + 3) = 0$$

$\Rightarrow$

$$y = 0 \text{ या } y = -\frac{1}{4}$$

जब $y = 0$, तब

$$-x + 2(0) = 0 \Rightarrow x = y = 0$$

जब $y = -\frac{1}{4}$ तब

$$-x + 2\left(-\frac{1}{4}\right) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

इस प्रकार, अनिवार्य शर्त को ज्ञात करने के लिए हमारे पास दो बिन्दु $(0, 0)$ और $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4})$ है। अब हम यह ज्ञात करेंगे कि उपरोक्त मान, अधिकतम एवं न्यूनतम की शर्तों को सन्तुष्ट करते हैं या नहीं।

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 2; \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1 \text{ ----- (3)}$$

अब समीकरण (3) में $x = 0$ तथा $y = 0$ के मान को रखने पर,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6(0) + 2 = 2 > 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 > 0; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1$$

पर्याप्त शर्त की जांच

$$f_{xx} \times f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0 \Rightarrow 2 \times 2 - (-1)^2 = 3 > 0$$

अतः $(0, 0)$ बिन्दु पर फलन न्यूनतम की शर्तों को पूरा करता है।

$$u = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 4 = 4$$

इस प्रकार मूलबिन्दु $(0, 0)$ पर न्यूनतम मूल्य होगा।

बिन्दु $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4})$ के लिए,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6\left(\frac{-1}{2}\right) + 2 = -1 < 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 > 0; \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = -1$$

$$f_{xx} \times f_{yy} - (f_{xy})^2 > 0 \Rightarrow -1 \times 2 - (-1)^2 = -3 < 0$$

इस प्रकार बिन्दु $(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{4})$ पल्याण बिन्दु देता है।

1.6.4.2 लैंगरेंज गणक सहित उद्विग्न अधिकतम एवं न्यूनतम (Constrained and Maxima and Minima with Langrange's Multiplier)

निबाध के साथ अधिकतम एवं न्यूनतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिए हमें दो फलनों की आवश्यकता होती है। प्रथम फलन जिसके लिए हमें अनुकूलतम बिन्दु को ज्ञात करनी है $Z = f(x, y)$ उद्देश्यात्मक फलन कहलाता है, जहाँ Z आश्रित चर मूल्य है और x तथा y स्वतंत्र चर है। साथ ही दूसरा फलन $g(x, y) = k$ जिसे हम निबाध या सीमात्मक फलन कहते हैं को हम शून्य बना लेते हैं और इसके बाद इसमें λ विलम्बित श्रेणी के गुणक {Lagrange's Multiplier} उसी गुणा कर देते हैं।

$$Z = f(q_1, q_2) \text{ ----- (1)}$$

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = y \Rightarrow y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0 \text{ ----- (2)}$$

$$U = f(q_1, q_2) + \lambda(y - p_1 q_1 - p_2 q_2) \text{ ----- (3)}$$

यहाँ U, λ, q_1 तथा q_2 का फलन है तथा λ लैंगरेंज गुणक (Multiplier) है। यहाँ हमारा उद्देश्य U को अधिकतम करना है। अतः U को q_1, q_2 तथा λ के सन्दर्भ में आंशिक अवकलन (Partial Differentiation) करके शून्य के बराबर रखने पर—

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = f_1 - \lambda p_1 = 0 \text{ ----- (4)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = f_2 - \lambda p_2 = 0 \text{ ----- (5)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = y - p_1 q_1 - p_2 q_2 = 0 \text{ ----- (6)}$$

समीकरण (4) एवं (5) को लेने पर

$$f_1 = \lambda p_1 \text{ तथा } f_2 = \lambda p_2$$

दोनों को विभाजित करने पर

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{p_1}{p_2} \text{ ----- (7)}$$

यहाँ वही परिणाम प्राप्त हुआ जो प्रथम विधि के समीकरण से प्राप्त होता है।

समीकरण का पूर्ण अवकलन (Total Differentiation) करने पर

$$f_{11}dq_1 + f_{12}dq_2 - p_1d\lambda = \lambda dp_1$$

$$f_{21}dq_1 + f_{22}dq_2 - p_2d\lambda = \lambda dp_2$$

$$-p_1dq_1 - p_2dq_2 = -dy + q_1dp_1 + q_2dp_2$$

द्वितीय क्रम (Second Order) की शर्तों के लिए द्वितीय अवकलज का हेस सारणिक (Bordered Hession Determinant) होना चाहिए। अतः

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} & -p_1 \\ f_{21} & f_{22} & -p_2 \\ -p_1 & -p_2 & 0 \end{bmatrix} > 0 \text{ ----- (8)}$$

समीकरण (8) का विस्तार करने पर

$$f_{11}(0 \cdot f_{22} - p_2^2) - f_{12}(0 \cdot f_{21} - p_1p_2) - p_1(-p_2f_{21} - f_{22} \cdot (-p_1)) > 0$$

$$\text{अथवा } f_{11}p_2^2 - f_{12}p_1p_2 + p_1p_2f_{21} + f_{22} \cdot p_1^2 > 0$$

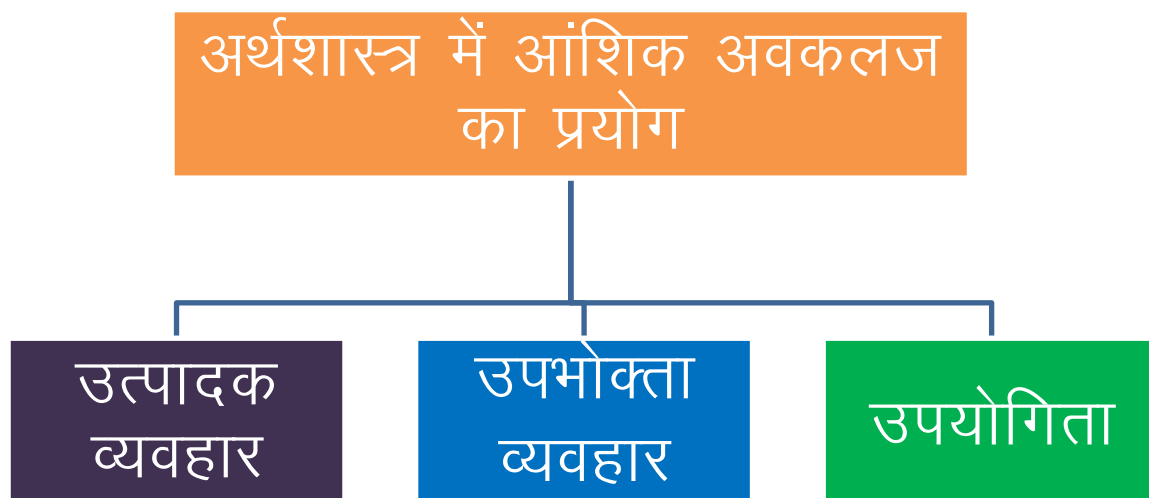
$$\text{अथवा } f_{11}p_2^2 - 2f_{12}p_1p_2 + f_{22} \cdot p_1^2 > 0$$

यहाँ वह समान परिणाम प्राप्त होता है जो प्रथम विधि से प्राप्त होता है।

1.6.5 आंशिक अवकलन का अर्थशास्त्र में प्रयोग

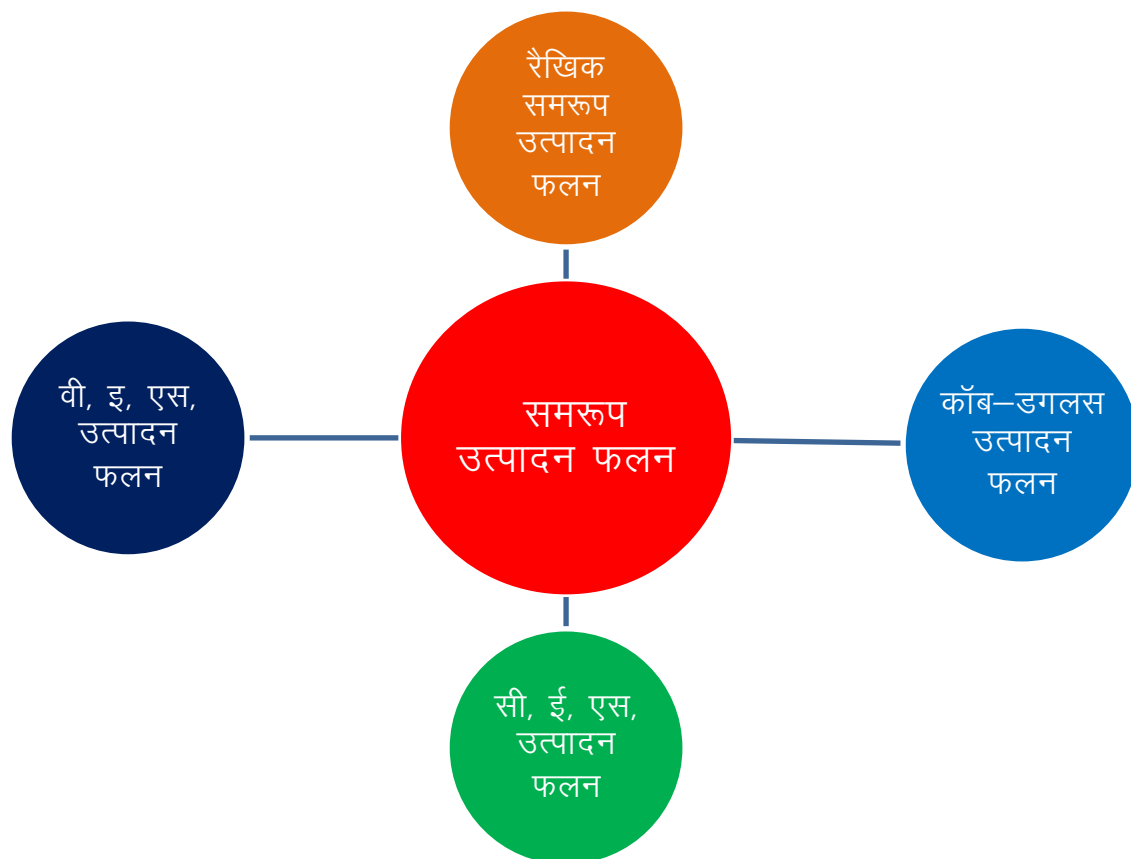
(Use of Partial Differentiation in Economics)

विशेष रूप से मात्रात्मक अर्थशास्त्र में आंशिक अवकलज एक महत्वपूर्ण यंत्र है जिसके प्रयोग से हम एक आश्रित चर पर दो या दो से अधिक स्वतंत्र चरों के कारण-प्रभाव सम्बन्ध को असानी पूर्वक अध्ययन किया जा सकता है। इस प्रकार अर्थशास्त्र के अध्ययन में आंशिक अवकलजों के प्रयोग को निम्न रूप में रेखांकित किया जा सकता है।



उत्पादक व्यवहार

आंशिक अवकल का उत्पादक व्यवहार के अन्तर्गत मुख्य रूप से हम समरूप उत्पादन फलन की चर्चा करते हैं। समरूप उत्पादन फलन मुख्यतः चार प्रकार को होते हैं।



1. रेखीय समघातीय उत्पादन फलन

रेखीय समघातीय उत्पादन फलन को प्रायः अच्छे व्यवहार का उत्पादन फलन (Well-behaved Production Function) भी कहा जाता है। इसका मुख्य वजह यह है कि अर्थशास्त्रियों के पास सीमित विश्लेषणात्मक उपकरण होने से अनुभवजन्य अध्ययनों (empirical studies) में रेखीय उत्पादन फलन का सहजता से प्रयोग किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, इस फलन की कुछ ऐसी विशेषताएं (पैमाने का स्थिर प्रतिफल प्रथम कोटि के उत्पादन फलन की एक महत्वपूर्ण विशेषता है) होती हैं जिसके कारण कम्प्यूटरों द्वारा इसकी सरलता से गणना की जा सकती है तथा इसकी विस्तृत रूप से रेखीय प्रक्रमन (Linear Programming) एवं आगत-निर्गत विश्लेषण (Input-Output Analysis) में प्रयोग होता है। साथ ही वास्तविकता के अधिक निकट होने के कारण इसका उत्पादन, वितरण तथा आर्थिक सम्बन्धी मॉडल के निर्माण में अधिक प्रयोग होता है।

रेखीय समघातीय उत्पादन फलन के लक्षण

(Features of Linearly Homogeneous Production Functions)

(अ) रेखीय सहजातीय उत्पादन फलन $Z = f(x, y)$ को निम्न दो रूपों में व्यक्त किया जा सकता है:

$$Z = x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ अथवा } Z = y \cdot h\left(\frac{x}{y}\right)$$

उपपत्ति— दिया है $Z = f(x, y)$ रेखीय सजातीय फलन है।

$$f(kx, ky) = k f(x, y)$$

चूंकि k कोई भी मूल्य ग्रहण कर सकता है,

$$\text{मान लीजिए, } k = \frac{1}{x}$$

$$\text{तब } f(kx, ky) = f\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x} y\right)$$

$$\text{या } f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1}{x} f(x, y)$$

$$\text{या } f(x, y) = x f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

या $f(x, y) = x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)$ $\{\because f\left(1, \frac{y}{x}\right)$ केवल $\frac{y}{x}$ का फलन है।}

इसी प्रकार यदि, $k = \frac{1}{y}$

तब, $f\left(\frac{x}{y}, 1\right) = \frac{1}{y} f(x, y)$

या $f(x, y) = y \cdot h\left(\frac{x}{y}\right)$

इस तरह, $Z = f(x, y) = x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) = y \cdot h\left(\frac{x}{y}\right)$

(ब) रेखीय समरूप उत्पादन फलन $Z = f(x, y)$ के आश्रित चर (Dependent Variable) के आंशिक अवकलज $\left(\frac{\partial Z}{\partial x}\right)$ तथा $\left(\frac{\partial Z}{\partial y}\right)$ y तथा x के अनुपात (अर्थात् $\frac{y}{x}$) के फलन हैं।

उपपत्ति : उपरोक्त विशेषता (अ) से हम जानते हैं

$$Z = x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) \text{----- (1)}$$

समीकरण (1) को x तथा y के सापेक्ष अलग-अलग आंशिक अवकलन करने पर

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = g\left(\frac{y}{x}\right) \cdot (1) + x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)' \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x}\right)$$

या, $\frac{\partial Z}{\partial x} = g\left(\frac{y}{x}\right) + x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)' \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right)$

या, $\frac{\partial Z}{\partial x} = g\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right) \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)' \text{-----}$

(2)

इसी प्रकार, $\frac{\partial Z}{\partial y} = 0 + x \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x}\right) = g'\left(\frac{y}{x}\right) \text{-----}$

(3)

इस तरह, समीकरण (2) तथा (3) से स्पष्ट है कि $\frac{\partial Z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial Z}{\partial y}$ दोनों ही $\frac{y}{x}$ के फलन हैं।

(स) रेखीय समघातीय फलन यूलर-प्रमेय (Euler's Theorem) को संतुष्ट करता है। अर्थात् यदि $Z = f(x, y)$ एक समघातीय उत्पादन फलन है।

{यदि $Z = f(x, y)$ एक h घात का सजातीय फलन है, तब स्वतंत्र चर x तथा y को उसके संगत अवकलज से गुणा करके जोड़ने पर प्राप्त राशि फलन के घात के गुणनफल के बराबर होता है, जिसे यूलर-प्रमेय कहते हैं। अर्थात् $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = hz$ }

(Leonhard Euler's 1707-1783 AD)

उपपत्ति— यदि $Z = f(x, y)$ एक सजातीय फलन है तब, उपरोक्त द्वितीय विशेषता के अनुसार

प्राप्त $\frac{\partial Z}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial Z}{\partial y}$ के मान को उसके संगत स्वतंत्र चर से गुणा करके जोड़ दिया जाय।

तब, $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = x \left[g\left(\frac{y}{x}\right) - \left(\frac{y}{x}\right) \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right) \right] + y \left[g'\left(\frac{y}{x}\right) \right]$

$$= x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) + y \left[g'\left(\frac{y}{x}\right) \right] - y \cdot g'\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$Z = f(x, y) = x \cdot g\left(\frac{y}{x}\right) \text{ [प्रथम विशेषता के अनुसार]}$$

इस प्रकार,

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z$$

n कोटि के समरूप उत्पादन फलन के लक्षण (Properties of a Homogeneous Production Function of Degree n)

यदि $Z = f(X, y)$ एक n कोटि का समरूप उत्पादन फलन है। तब,

$$(अ) Z = X^n \cdot \Phi\left(\frac{Y}{X}\right) + Y^n \cdot \psi\left(\frac{X}{Y}\right)$$

$$(ब) \frac{\partial Z}{\partial X} \text{ तथा } \frac{\partial Z}{\partial Y}, (n-1) \text{ कोटि के समरूप फलन है।}$$

$$(स) x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = n \cdot z = n \cdot f(X, Y)$$

नोट: यदि दिया हुआ फलन तृतीय कोटि का समरूप हो तब इसे $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 3z = 3 \cdot f(X, Y)$ के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

- यदि $P = f(L, K)$ प्रथम घात का एक सजातीय उत्पादन फलन है अर्थात् रेखीय फलन है जहाँ L श्रम और K पूंजी उत्पादन साधन है और P उत्पादन की मात्रा है तब उस स्थिति में यदि उत्पादन साधनों को उन्हीं सीमान्त उत्पादकता के आधार पर पारिश्रमिक दिया जाये तब सम्पूर्ण उत्पादन पूर्णतः वितरित हो जाती है।

2. कॉब-डगलस उत्पादन फलन (Cobb-Douglas Production Function)

$$Q = A L^\alpha K^\beta \text{ जहाँ } \alpha + \beta = 1$$

A कुशलता [गुणंक/सिथरांक](#) है।

L श्रम की मात्रा

K पूंजी की मात्रा है।

3. सी. ई. एस. उत्पादन फलन

$$Q = [\delta K^{-\rho} + (1 - \delta)L^{-\rho}]^{-1/\rho}$$

जहाँ $A > 0$,

$0 < \delta < 1$

$-1 < \rho \neq 0$

उपभोक्ता व्यवहार

- यदि किसी दिये हुए मांग फलन $q = f(x, y)$ के सन्दर्भ में आय प्रभाव धनात्मक हैं, तब वस्तुएँ सामान्य कहलाती है जबकि ऋणात्मक होने की स्थिति वे वस्तुएँ घटिया कहलाती है। दूसरे शब्दों में जब $\left(\frac{\partial q}{\partial I} > 0\right)$ धनात्मक है, तब वस्तुएँ सामान्य कहलाती है।
- यदि $\left(\frac{\partial q}{\partial I} < 0\right)$ ऋणात्मक तब द्वितीय वस्तु हीन कहलाती है।
- यदि एक वस्तु की कीमत वृद्धि के कारण आई मांग की कमी दूसरी वस्तु की मांग में कमी होती है तब दोनों वस्तुएँ आपस में पूरक कहलाती हैं। उदाहरणतः जब वस्तुएँ एक दूसरे की पूरक है तथा p_2 को अचर रखा गया है तब दोनों $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$ तथा $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} < 0$ तथा जब p_1 को अचर रखा गया हो तब $\frac{\partial x_1}{\partial p_2} < 0$ के साथ-साथ $\frac{\partial x_2}{\partial p_2} < 0$ होते हैं।
- अतः हम कह सकते हैं कि दो वस्तुएँ पूरक होंगी यदि तथा केवल यदि दोनों $\frac{\partial x_1}{\partial p_2}$ तथा $\frac{\partial x_2}{\partial p_1}$ ऋणात्मक है।
- यदि एक के कीमत में वृद्धि होने के फलस्वरूप उसकी मांग में कमी के साथ ही दूसरे वस्तु की मांग में वृद्धि हो जाय तो ये दो वस्तुएँ आपस में प्रतियोगी कहलाती हैं। इसे आंशिक अवकलज के रूप में हम निम्न प्रकार से निरूपित कर सकते हैं—

(1) प्रतियोगी वस्तुओं की शर्तें— $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$ तथा $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} > 0$

(2) पूरक वस्तुओं की शर्तें— $\frac{\partial x_1}{\partial p_1} < 0$, $\frac{\partial x_2}{\partial p_2} < 0$ तथा $\frac{\partial x_2}{\partial p_1} < 0$

- सीमान्त लागत— जब दो वस्तुओं के x_1 तथा x_2 मात्रा में उत्पादन के लिए संयुक्त लागत फलन $C = f(x_1, x_2)$ हो तो $\frac{\partial C}{\partial x_1}$, x_1 से सम्बन्धित एवं $\frac{\partial C}{\partial x_2}$, x_2 से सम्बन्धित सीमान्त लागतें कही जाती हैं।

आगम फलन (Revenue Function)

यदि एक फर्म दो उत्पादों Q_1 तथा Q_2 की मात्रा q_1 एवं q_2 का विक्रय क्रमशः p_1 तथा p_2 की कीमत पर करती है तो ऐसी स्थिति में कुल आगम व आगम फलन निम्न प्रकार से निरूपित किया जा सकता है—

$$R = p_1 q_1 + p_2 q_2 \text{ ----- (1)}$$

1.6.6 इकाई का सारांश

किसी आर्थिक फलन में सदैव एक ही स्वतंत्र चर नहीं होते बल्कि एक से अधिक स्वतंत्र चर होते हैं परन्तु सामान्य अवकलन में हम अन्य आर्थिक चरों को स्थिर रख देते हैं। उदाहरण के लिए मांग की मात्रा को प्रभावित करने वाले कारकों में वस्तु की कीमत, सम्बन्धित वस्तुओं की कीमत, उपभोक्ता की आय, जनसंख्या, फैशन व रुचि भी प्रमुख कारक होते हैं लेकिन अध्ययन की सुविधा के लिए सामान्य कलन में अन्य कारकों (सम्बन्धित वस्तुओं की कीमत, उपभोक्ता की आय, जनसंख्या, फैशन व रुचि) को स्थिर मानते हुए केवल कीमत एवं वस्तुओं की मात्रा के बीच कारण और प्रभाव अर्थात् स्वतंत्र चर में परिवर्तन (वृद्धि) के फलस्वरूप आश्रित चर वस्तु की मात्रा में कितना परिवर्तन होगा, यही जान पाते हैं। गणितीय अर्थशास्त्र में अध्ययन के परिणाम को और अधिक परिशुद्ध व परमाणिकता प्रदान करने के लिए कलन के अन्तर्गत आंशिक अवकलन का प्रयोग वांछित है।

आंशिक अवकलज के अन्तर्गत हमलोगों ने एक से अधिक स्वतंत्र चरों का आश्रित चर पर कारण प्रभाव को देखने के लिए एक समय में केवल एक चर में परिवर्तन को ध्यान में रखते हैं। यही कारण है कि सभी स्वतंत्र चर के व्यक्तिगत प्रभाव को मापने के लिए हमें सम्पूर्ण अवकल की आवश्यकता पड़ती है, ताकि हम चरों के समग्र प्रभाव को माप सकें हैं।

1.6.7 पारिभाषिक शब्दावली

प्रक्रिया (Operator) : क्रिया

शर्त (Condition) : परिस्थिति

1.6.8 मुख्यशब्द

सम्पूर्ण अवकलज (Total Derivative)

माना $u = f(x, y)$, जहाँ $x = g(t)$ तथा $y = h(t)$

तब $u = f[g(t), h(t)]$ एक चर t का फलन है,

अतः $\frac{du}{dt}$ ज्ञात किया जा सकता है।

$\frac{du}{dt}$ और आंशिक अवकलजों $\frac{\partial u}{\partial x}$ तथा $\frac{\partial u}{\partial y}$ में विभेद करने के लिए $\frac{du}{dt}$ को u का सम्पूर्ण अवकल

गुणांक (Total Differential Coefficient) अथवा सम्पूर्ण अवकलज (Total Derivative) कहा जाता है।

$\frac{du}{dt}$ का मान $f(x, y)$ में x और y के मान रखे बिना

$$\text{सूत्र : } \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{dy}{dt}$$

द्वारा ज्ञात किया जा सकता है।

- सीमान्त लागत— जब दो वस्तुओं के x_1 तथा x_2 मात्रा में उत्पादन के लिए संयुक्त लागत फलन $C = f(x_1, x_2)$ हो $\frac{\partial C}{\partial x_1}$, x_1 से सम्बन्धित एवं $\frac{\partial C}{\partial x_2}$, x_2 से सम्बन्धित सीमान्त लागतें कही जाती हैं।

1.6.9 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

1. आंशिक अवकलज से आप क्या समझते हैं ? उदाहरण के साथ स्पष्ट करें।
2. यदि $Z = x^2 + 2xy + y^2 + 2$ हो तब $\frac{\partial Z}{\partial x}$, $\frac{\partial Z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y}$ एवं $\frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x}$ के मान ज्ञात करें।
3. सम्पूर्ण अवकल एवं सम्पूर्ण अवकल गुणांक को समझाइए।
4. द्वितीय क्रम के आंशिक अवकलज को उल्लेख करें
5. फलन $U = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$ का सम्पूर्ण अवकल ज्ञात कीजिए।
6. द्वितीय आंकड़े के क्या गुण एवं अवगुण हैं? द्वितीय आंकड़े के विभिन्न स्रोतों का उल्लेख करें।

1.6.10 संदर्भ पुस्तकें

Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002

Mishra, J.P., "Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)" Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.

उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, "आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी", तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139

अग्रवाल, डी. आर. 'प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र', (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली— 110091

J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.

Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics

Agarawal D. R., Quantitative Methods

Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.

Yamane, T., Mathematics for Economists.

Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.

लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., "आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें", शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड—I
इकाई—07
अवकलज के आर्थिक प्रयोग

प्रारूप:

- 1.7.1 परिचय
- 1.7.2 प्रथम कोटि के अवकलजों का प्रयोग
 - 1.7.2.1 मांग फलन एवं मांग की लोच
 - 1.7.2.2 पूर्ति फलन
- 1.7.3 उत्पादक व्यवहार
 - 1.7.3.1 लागत विश्लेषण
 - 1.7.3.2 आगम विश्लेषण
- 1.7.4 द्वितीय कोटि के अवकलजों का प्रयोग
- 1.7.5 लाभ अधिकतमीकरण
- 1.7.6 इकाई का सारांश
- 1.7.7 मुख्यशब्द
- 1.7.8 अपने प्रगति की जाँच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 1.7.9 अपने उत्तर की जाँच के लिए कुंजी
- 1.7.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 1.7.11 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- प्रथम कोटि के अवकलजों के आर्थिक प्रयोग को जान सकेंगे।
- द्वितीय कोटि के अवकलजों के आर्थिक प्रयोग को समझना।
- अवकलन द्वारा लागत के विभिन्न घटकों को ज्ञात करना।
- अवकलन की सहायता से लाभ अधिकतमीकरण का पता लगाना
- किसी समस्या के अध्ययन हेतु प्राथमिक एवं द्वितीय आंकड़ों का चुनाव

1.7.1 परिचय

पिछले इकाई तक हमलोगों ने समुच्च के सिद्धान्त, फलन की सीमा व सततता एवं अवकलन की प्रक्रिया (साधारण एवं आंशिक अवकलज) जैसे गणितीय उपकरणों का अध्ययन किया है, जिसका मुख्य उद्देश्य अर्थशास्त्र के विभिन्न सिद्धान्तों की विवेचना करने तथा उन्हें स्पष्टता से समझने व समझाने के लिए विभिन्न प्रकार के फलनों का प्रयोग किया जाना है। ऐसे में विभिन्न आर्थिक सिद्धान्तों, अर्थव्यवस्था में क्रियाशील आर्थिक शक्तियों की प्रभावोत्पादकता तथा परस्पर निर्भरता, उनका शक्ति संतुलन इत्यादि विषयों को समझने के लिए अवकलन प्रक्रिया की प्रविधि व विभिन्न कोटि के अवकलजों के अर्थ से सुपरिचित होना अति आवश्यक है। इस इकाई के अन्तर्गत अवकलजों के विभिन्न आर्थिक कारकों को ज्ञात करने के साथ-साथ उसका क्या प्रभाव होता है इन सभी पहलुओं का चर्चा करना है।

1.7.2 प्रथम कोटि के अवकलजों के आर्थिक अनुप्रयोग

प्रथम कोटि के अवकलजों के प्रयोग मुख्य रूप से सीमान्त मान को ज्ञात करने के लिए किया जाता है। विभिन्न आर्थिक फलनों जैसे मांग फलन, पूर्ति फलन, लागत फलन, आय फलन, उत्पादन फलन, उपभोग व विनियोग फलन आदि में किया जाता है। जिसको विभिन्न उदाहरणों द्वारा नीचे स्पष्ट किया जा सकता है।

7.2.1 मांग फलन एवं मांग की लोच (Demand Function and Elasticity of Demand)

किसी वस्तु की कीमत में प्रतिशत या आनुपातिक परिवर्तन से मांग की मात्रा में हुए प्रतिशत या आनुपातिक परिवर्तन के अनुपात को मांग की कीमत लोच कहा जाता है। इसे अवकलज के रूप में निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है—

$$e_d = (-) \frac{p}{x} \cdot \frac{dx}{dp}$$

$$\text{या, } |e_d| = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

यहां $\frac{dx}{dp}$, कीमत p में परिवर्तन होने के फलस्वरूप मांग (x) में होने वाले परिवर्तन की सीमांत दर को प्रदर्शित करता है।

7.2.2 मांग की लोच एवं मांग वक्र (Demand Curve and Elasticity of Demand)

माना कि मांग फलन $p = f(x)$ है तब मांग की कीमत लोच

$$e_d = - \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

$$\text{या } e_d = - \frac{d \cdot \log x}{d \cdot \log p}$$

ऋणात्मक चिह्न वह प्रदर्शित करता है कि मांग तथा कीमत में परिवर्तन के बीच विपरीत सम्बन्ध पाया जाता है। यदि $e_d > 1$, तब वस्तु की मांग लोचदार कही जाती है, जबकि $e_d < 1$ की दशा में वस्तु की मांग बेलोचदार होती है तथा $e_d = 1$ होने के पर वस्तु की मांग न तो लोचदार होती है और न ही बेलोचदार, बल्कि इकाई लोच वाली कही जाती है।

7.2.2 पूर्ति फलन एवं पूर्ति की लोच (Elasticity of Supply)

पूर्ति की कीमत लोच कीमत में अनुपातिक या प्रतिशत परिवर्तन के फलस्वरूप पूर्ति की मात्रा में होने वाले अनुपातिक या प्रतिशत परिवर्तन को दर्शाता है। इसको अवकलज के रूप में निम्न पंक्ति से व्यक्त करते हैं—

पूर्ति की लोच:

$$e_s = \frac{p}{x} \frac{dx}{dp}$$

(पूर्ति के नियम के अनुसार कीमत एवं पूर्ति की मात्रा के बीच धनात्मक व प्रत्यक्ष सम्बन्ध होता है, यही कारण है कि पूर्ति के लोच के सूत्र में ऋणात्मक चिह्न को रखना अनिवार्य नहीं है।)

उदाहरण के लिए, यदि पूर्ति फलन, $x = 2p - 10$ है तो, $P = 8$ पर पूर्ति की लोच ज्ञात करें।

$$\frac{dx}{dp} = 2$$

$$e_s = \frac{p}{2p-10} \times (2) = \frac{8}{6} \times (2)$$

$$e_s = \frac{16}{6} = \frac{8}{3} = 2.667$$

1.7.3 उत्पादक व्यवहार (Producer Behavior)

आर्थिक क्रियाओं के अध्ययन के क्रम में उत्पादक व्यवहार का अध्ययन करना एक आवश्यक पहलू है जिसमें हम लागत विश्लेषण के अन्तर्गत औसत लागत, सीमान्त लागत एवं इनके बीच सम्बन्ध, परिवर्तनशील लागत, स्थिर लागत सम्बन्धी अवधारणाओं का गणितीय व्यंजकों एवं चिह्नों के द्वारा निरूपण किया जाता है। साथ ही साथ आगम विश्लेषण के अधीन हम औसत आगम एवं सीमान्त आगम के अर्थ एवं इनका मांग फलन तथा मांग की लोच के साथ सम्बन्ध आदि पहलुओं का भी गणितीय सूत्रों के द्वारा अध्ययन किया जाता है। उत्पादक व्यवहार से सम्बन्धित कुछ बोधात्मक प्रश्नों के हल करना भी इस भाग का प्रमुख उद्देश्य है।

1.7.3.1 लागत विश्लेषण (Cost Analysis)

किसी उत्पादन की प्रक्रिया में लागत (C), उत्पादन की मात्रा (x), उत्पादन की तकनीक (T) तथा उत्पादन के साधनों की कीमतों (P_F) आदि पर निर्भर करती है, अतः

$$C = f(x, T, P_F \text{-----})$$

को लागत फलन कहा जाता है। इस फलन में C परतंत्र चर तथा X, T, P_F आदि स्वतन्त्र चर हैं।

विश्लेषण की जटिलता से बचने के लिए हम मान लेते हैं कि उत्पादन मात्रा (x) को छोड़कर अन्य स्वतन्त्र चर स्थिर हैं। तब, लागत फलन को इस प्रकार लिखा जा सकता है:

$$C = f(x)$$

सीमान्त लागत (MC): एक अतिरिक्त इकाई के उत्पादन से कुल लागत में जो वृद्धि होती है वह सीमान्त लागत कही जाती है।

माना कि कुल लागत, कुल उत्पाद (x) का फलन है, अर्थात्, $C = f(x)$ तथा कुल उत्पादन में Δx परिवर्तन होने पर लागत में ΔC परिवर्तन हो जाता है। उत्पादन मात्रा में सूक्ष्म परिवर्तन होने पर लागत में होने वाले परिवर्तन को ज्ञात करने के लिए यह मानकर चलना होगा कि उत्पादन मात्रा को अति सूक्ष्म रूप में विभाजित किया जा सकता है तथा उत्पादन में सततता बनी हुई है। इस प्रकार, Δx को सूक्ष्मतम अर्थात् शून्य के नजदीक समझना होगा, तब प्राप्त सीमा, $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta C}{\Delta x} = \frac{dC}{dx} = MC$ को सीमान्त लागत के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। इस प्रकार, सीमान्त लागत (MC) कुल लागत फलन $C = f(x)$ का प्रथम अवकल गुणांक होता है।

औसत लागत (AC)– औसत लागत उत्पादन की प्रति इकाई लागत होती है, जिसकी कुल लागत फलन की सहायता से गणना की जा सकती है।

यदि कुल लागत फलन:

$$C = f(x), \quad \text{जहाँ, } x = \text{कुल उत्पादन}$$

$$\text{तब, } AC = \frac{C}{x} = \frac{f(x)}{x}$$

यदि हम कुल लागत फलन की इस प्रकार लिखें,

$$TC = C = f(x) + b \quad \text{जहाँ, } b = \text{स्थिर लागत}$$

तब हम इसकी सहायता से विभिन्न लागतों का मूल्य निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है:

$$\text{औसत कुल लागत} = AC = \frac{f(X) + b}{X}$$

$$\text{औसत परिवर्तनशील लागत} = AVC = \frac{f(X)}{X}$$

$$\text{औसत स्थिर लागत} = AFC = \frac{b}{X}$$

$$\text{इस प्रकार, } ATC \text{ या } AC = AVC + AFC = \frac{f(X) + b}{X}$$

$$\text{सीमान्त लागत} = MC = \frac{dC}{dx}$$

1.7.3.2 औसत तथा सीमान्त लागत वक्रों में सम्बन्ध

इस जानते हैं कि औसत तथा सीमान्त लागत वक्रों का आकार U-अक्षर की तरह होता है तथा दोनों के मध्य निम्न प्रकार के सम्बन्धों की कल्पना की जा सकती है।

(क) यदि AC गिरता है, तब MC उससे ज्यादा तेजी से गिरता है तथा AC से नीचे होता है।

(ख) जब AC न्यूनतम होता है, तब $AC = MC$ होता है।

(ग) जब AC में वृद्धि होती है तब MC उससे तेजी से बढ़ता है तथा AC से ऊपर रहता है।

इस सम्बन्ध को सिद्ध करने में कलन (Calculus) अर्थात् प्रथम कोटि के अवकलन का प्रयोग किया जाता है।

माना कि कुल लागत (C) तथा कुल उत्पादन (X) है। तब औसत लागत $= \frac{C}{X}$

(क) गिरते (AC) वक्र का विचार करने पर— यदि AC गिर रहा होता है तब, $\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{X}\right)$ का मूल्य ऋणात्मक होता है।

अर्थात् $\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{X}\right) < 0$

हम जानते हैं, $\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{X}\right) = \frac{X \frac{dC}{dx} - C \cdot \frac{dX}{dx}}{X^2}$

तब, $\frac{X \left(\frac{dC}{dx}\right) - C}{X^2} < 0 \quad \left[\because \frac{dX}{dx} = 1 \right]$

या $\left(\frac{1}{X} \cdot \frac{dC}{dx} - \frac{C}{X^2}\right) < 0$

या $\frac{1}{X} \left(\frac{dC}{dx} - \frac{C}{X}\right) < 0$

अतः $\frac{dC}{dx} - \frac{C}{X} < 0 \quad (X > 0, \text{ उत्पादन धनात्मक होता है।})$

या $\frac{dC}{dx} < \frac{C}{X} \quad \left(\frac{C}{X} = AC, \frac{dC}{dx} = MC\right)$

अतः $MC < AC$

इस तरह, यदि AC वक्र गिरता है तो MC वक्र भी गिरता है तथा AC वक्र के नीचे रहता है।

(ख) AC वक्र के उठने की स्थिति में— जब AC में वृद्धि हो रही होती है, तब $\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{X}\right)$ का मान धनात्मक होता है।

अर्थात् $\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{X}\right) > 0$

या $\frac{1}{X} \left(\frac{dC}{dx} - \frac{C}{X}\right) > 0$

या $\left\{\frac{dC}{dx} - \frac{C}{X}\right\} > 0 \quad (x > 0)$

या $\frac{dC}{dx} > \frac{C}{X}$

अतः $MC > AC$

इस प्रकार, यदि AC में वृद्धि होती है तो MC में उससे अधिक तेजी से वृद्धि होती है जिससे MC वक्र, AC वक्र से ऊपर परिलक्षित होता है।

3. यदि न्यूनतम है— यदि AC अपने न्यूनतम बिन्दु पर होती है तब MC उसे नीचे से काटती है। गणितीय संक्रियाओं के रूप में निम्न प्रकार से दर्शाया जा सकता है:

दिया है $\frac{d}{dx}\left(\frac{C}{X}\right) = 0$

तब, $\frac{X \left(\frac{dC}{dx}\right) - C}{X^2} = 0$

$\left[\because \frac{dX}{dx} = 1 \right]$

या $\left(\frac{1}{X} \cdot \frac{dC}{dx} - \frac{C}{X^2}\right) = 0$

या $\frac{1}{X} \left(\frac{dC}{dx} - \frac{C}{X}\right) = 0$

या $\frac{dC}{dx} - \frac{C}{X} = 0 \quad (X > 0, \text{ उत्पादन धनात्मक होता है।})$

अर्थात् $\frac{dC}{dx} = \frac{C}{X} \Rightarrow MC = AC$

इस प्रकार, जब AC वक्र अपने न्यूनतम बिन्दु पर होता है तब $AC = MC$ होता है।

उदाहरण 1. यदि कुल लागत फलन $C = \frac{2}{3}x^3 - 500x^2 + 1000x + 5000$ है तब ज्ञात कीजिए—

(क) औसत लागत फलन

(ख) सीमान्त लागत

(ग) वह उत्पादन की मात्रा जिस पर सीमान्त लागत औसत परिवर्तनशील लागत के बराबर होगी।

हल:

दिया गया है, कुल लागत फलन $C = \frac{2}{3}x^3 - 500x^2 + 1000x + 5000$

लागत फलन के सिद्धान्त व नियम के अनुसार,

कुल लागत = परिवर्तनशील लागत + स्थिर लागत

$$\text{अतः } C = \frac{2}{3}x^3 - 500x^2 + 1000x + 5000 = \left(\frac{2}{3}x^3 - 500x^2 + 1000x\right) + 5000$$

$$(क) \text{ औसत लागत} = AC = \frac{TC}{X} = \frac{\frac{2}{3}x^3 - 500x^2 + 1000x + 5000}{x}$$

$$AC = \frac{2x^2}{3} - 500x + 1000 + \frac{5000}{x}$$

$$(ख) \text{ सीमान्त लागत} = MC = \frac{d(TC)}{dx}$$

$$MC = \frac{d(TC)}{dx} = \frac{2 \times 3x^2}{3} - 500 \times 2x + 1000 + 0$$

$$MC = 2x^2 - 1000x + 1000$$

$$(ग) \text{ औसत परिवर्तनशील लागत} = AVC = \frac{\left(\frac{2}{3}x^3 - 500x^2 + 1000x\right)}{x}$$

$$AVC = \frac{2x^2}{3} - 500x + 1000$$

अब, सीमान्त लागत = औसत परिवर्तनशील लागत

$$\Rightarrow MC = AVC \Rightarrow 2x^2 - 1000x + 1000 = \frac{2x^2}{3} - 500x + 1000$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 1000x = \frac{2x^2}{3} - 500x$$

$$\Rightarrow 3(2x^2 - 1000x) = 2x^2 - 1500x$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 3000x = 2x^2 - 1500x$$

$$\Rightarrow 6x^2 - 2x^2 = 3000x - 1500x$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 1500x$$

$$\Rightarrow 4x = 1500$$

$$\Rightarrow x = \frac{1500}{4} = 375$$

उदाहरण 2. एक शुगर मिल का कुल लागत फलन, $(C = \frac{2}{3x} + \frac{35}{2})$ दिया गया है, जहां x उत्पादन की मात्रा को प्रदर्शित करता है, तब निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(क) कुल लागत जब उत्पादन 4 इकाइयों के बराबर हो।

(ख) औसत लागत जब उत्पादन 10 इकाइयों के बराबर हो।

(ग) सीमान्त लागत

हल:

दिया गया है, कुल लागत फलन : $C = \frac{2}{3x} + \frac{35}{2}$

(क) कुल लागत जब उत्पादन की मात्रा 4 इकाइयां हो ($x = 4$)

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{3 \times 4} + \frac{35}{2} \\ &= \frac{1}{6} + \frac{35}{2} = \frac{1+105}{6} \\ &= \frac{106}{6} = 17.67 \end{aligned}$$

(ख) औसत लागत

$$AC = \frac{C}{x} = \frac{2}{3x^2} + \frac{35}{2x}$$

औसत लागत जब उत्पादन की मात्रा 10 इकाइयां हो

$$\begin{aligned} AC &= \frac{2}{3 \times 10^2} + \frac{35}{2 \times 10} \\ &= \frac{2}{300} + \frac{35}{20} \\ &= \frac{2+525}{300} = \frac{527}{300} = 1.75 \end{aligned}$$

(ग) सीमान्त लागत

$$\begin{aligned} MC &= \frac{d(TC)}{dx} \\ MC &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3x^2} + \frac{35}{2x} \right) \\ MC &= \frac{2}{3} (-x)^{-2} = \frac{2}{3} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -\frac{2}{3x^2} \end{aligned}$$

उदाहरण 3. यदि एक फर्म का कुल लागत फलन $TC = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$ दिया है। उत्पादन (x) का वह स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर औसत लागत न्यूनतम होगी।

हल:

दिया गया है, $TC = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x$. ----- (1)

औसत लागत $AC = \frac{TC}{x} = \frac{\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x}{x}$

या $AC = \frac{TC}{x} = \frac{1}{3}x^2 - 3x + 9$ ----- (2)

तथा $MC = \frac{d(TC)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x \right)$

या $MC = x^2 - 6x + 9$ ----- (3)

हम जानते हैं औसत लागत उस बिन्दु पर न्यूनतम होती है जहां सीमान्त लागत नीचे से काटती है अर्थात् औसत लागत एवं सीमान्त लागत एकदूसरे के बराबर होते हैं। समीकरण (2) एवं (3) दोनों को बराबर करने पर

$$AC = MC$$

$$\frac{1}{3}x^2 - 3x + 9 = x^2 - 6x + 9$$

$$x^2 - 9x + 27 = 3x^2 - 18x + 27$$

$$18x - 9x = 3x^2 - x^2$$

$$2x^2 = 9x$$

$$2x = 9$$

$$x = 0, \text{ अथवा } x = \frac{9}{2} = 4.5 \text{ (लगभग)}$$

इस प्रकार, उत्पादन स्तर 5 इकाई होगा क्योंकि उत्पादन की मात्रा, x शून्य नहीं हो सकता है।

1.7.3.3 आगम विप्लेषण (Revenue Function)

कुल आगम (Total Revenue, TR): यदि उत्पादन की मात्रा x को इसकी प्रति इकाई कीमत p से गुणा किया जाए तो प्राप्त परिणाम को ही कुल आगम कहते हैं। संकेत के रूप में,

$$TR = x \times p = q \times p$$

जहाँ q = x = उत्पादन की मात्रा, p = प्रति इकाई कीमत।

औसत आगम (Average Revenue, AR): किसी वस्तु की एक निश्चित मात्रा की बिक्री से प्राप्त प्रति इकाई आय को औसत आगम अथवा औसत आय कहा जाता है। दूसरे शब्दों में, यदि कुल आगम एवं उत्पादन की मात्रा दी गई हो या ज्ञात तब औसत आगम आसानी से पता लगाया जा सकता है। संकेत के रूप में,

सूत्रानुसार, औसत आगम (AR) = कुल आगम / उत्पाद मात्रा

$$AR = \frac{\text{Total Revenue}}{\text{Output}} = \frac{TR}{x}$$

इस प्रकार, कुल आगम को बेची गई इकाइयों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त औसत आगम उत्पादन के प्रत्येक स्तर पर वस्तु की कीमत ही होती है।

क्योंकि, $AR = \frac{\text{Total Revenue}}{\text{Output}} = \frac{TR}{x} = \frac{x.p}{x} = p \text{ (कीमत)}$

तथा $p = f(x)$ औसत आगम वक्र है तो यह दर्शाता है कि कीमत, मांगी गई मात्रा का फलन है। वहीं मांग वक्र भी होता है।

सीमान्त आगम (Marginal Revenue, MR)— किसी वस्तु की एक इकाई की बिक्री से आगम में जो वृद्धि होती है उसे सीमान्त आगम कहते हैं।

चूँकि सीमान्त आगम, कुल आगम में परिवर्तन की दर को व्यक्त करता है अतः इसे निम्न तरीके से प्रदर्शित किया जा सकता है:

$$\begin{aligned} \text{MR} &= \frac{d}{dx}(\text{TR}) \\ \text{या} \quad \text{MR} &= \frac{dR}{dx} \quad (\text{TR} = R, \text{ लिखन पर}) \end{aligned}$$

1.7.3.4 कुल आगम फलन तथा मांग फलन के बीच सम्बन्ध (Relation between Total Revenue & Demand Function)

$$\text{हम जानते हैं,} \quad \text{TR} = R = p \cdot x \quad \text{----- (1)}$$

$$\begin{aligned} \text{तथा} \quad \text{MR} &= \frac{dR}{dx} \\ \text{MR} &= p \cdot \frac{dx}{dx} + x \frac{dp}{dx} \\ \text{MR} &= p + x \frac{dp}{dx} \\ \text{MR} &= p \left\{ 1 + \frac{x}{p} \frac{dp}{dx} \right\} \quad \text{----- (2)} \end{aligned}$$

7.3.2.2 औसत आगम, सीमान्त आगम तथा मांग की लोच के बीच सम्बन्ध (Relation among Average Revenue, Marginal Revenue & Elasticity of Demand)

$$\begin{aligned} \text{चूँकि मांग की लोच} \quad e_d &= - \frac{x}{p} \frac{dp}{dx} \\ \text{या} \quad - \frac{1}{e_d} &= \frac{x}{p} \frac{dp}{dx} \\ \text{MR} &= p \left\{ 1 - \frac{1}{e_d} \right\} \quad (e_d \text{ का धनात्मक मान लेने पर}) \\ \text{या} \quad \text{MR} &= \text{AR} \left\{ 1 - \frac{1}{e_d} \right\} \\ \text{या} \quad \text{MR} &= \text{AR} \left\{ \frac{e_d - 1}{e_d} \right\} \Rightarrow \frac{\text{MR}}{\text{AR}} = \left\{ \frac{e_d - 1}{e_d} \right\} \\ \text{या} \quad e_d \frac{\text{MR}}{\text{AR}} &= e_d - 1 \Rightarrow 1 = e_d - e_d \frac{\text{MR}}{\text{AR}} \\ \text{या} \quad e_d \left(1 - \frac{\text{MR}}{\text{AR}} \right) &= 1 \\ \text{या} \quad \frac{1}{e_d} &= \frac{\text{AR} - \text{MR}}{\text{AR}} \\ \text{यां} \quad e_d &= \frac{\text{AR}}{\text{AR} - \text{MR}} \end{aligned}$$

उदाहरण 4. यदि सभी बिन्दुओं पर $\text{AR} = \text{MR}$ हो, तब मांग की लोच का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

हम जानते हैं कि औसत आगम (AR), सीमान्त आगम (MR) तथा मांग की लोच (e_d) के बीच सम्बन्ध होता है,

$$\begin{aligned} \text{MR} &= \text{AR} \left\{ \frac{e_d - 1}{e_d} \right\} \\ \text{या} \quad e_d &= \frac{\text{AR}}{\text{AR} - \text{MR}} \\ \text{AR} &= \text{MR} \\ \Rightarrow e_d &= \frac{\text{AR}}{0} = \infty \quad (\text{चूँकि प्रत्येक बिन्दु पर } \text{AR} = \text{MR} \text{ हैं।}) \end{aligned}$$

उदाहरण 5. यदि सीमान्त आगम (MR) 32 रुपये तथा मांग की कीमत लोच (e_d) 3 इकाई हो, तब औसत आगम (AR) ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\text{हम जानते हैं, } AR = MR \left\{ \frac{e_d}{e_d - 1} \right\}$$

$$AR = 32 \left\{ \frac{3}{3-1} \right\} = 32 \times \frac{3}{2} = 48 \text{ रुपये।}$$

उदाहरण 6. यदि सीमान्त आगम (MR) 80 रुपये औसत आगम (AR) 120 रुपये हो, तब मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया गया है, सीमान्त आगम (MR) = 80 रुपये।

औसत आगम (AR) = 120 रुपये।

हम जानते हैं कि मांग की लोच, औसत आगम एवं सीमान्त आगम के बीच सम्बन्ध निम्न प्रकार से होता है,

$$e_d = \frac{AR}{AR - MR} \text{ ----- (1)}$$

{समीकरण (1) में सीमान्त आगम एवं औसत आगम का मान रखने पर}

$$e_d = \frac{120}{120 - 80} = \frac{120}{40} = 3 \text{ इकाई।}$$

1.7.4 द्वितीय कोटि के अवकलजों का आर्थिक प्रयोग

(Economic Use of Second Order Derivatives)

अध्ययन के इस भाग में मुख्य रूप से हम दिये गये आर्थिक फलनों के इष्टतम् बिन्दु को पता लगाना चाहते हैं। इसमें लागत न्यूनतमीकरण, उत्पादन अधिकतमीकरण, लाभ अधिकतमीकरण, उपयोगिता अधिकतमीकरण आदि कुछ प्रमुख आर्थिक फलनों का अध्ययन किया जाता है। इसे सरलता से समझने के लिए नीचे हम कुछ उदाहरणों की अध्ययन करेंगे।

उदाहरण 7. एक उत्पादक के लिए माँग फलन $x = 120 - 0.5p - 0.3p^2$ दिया है; अधिकतम आय प्राप्त करने के लिए उत्पादक कितनी इकाईयों का विक्रय करेगा।

हल:

दिया है, माँग फलन, $x = 120 - 0.5p - 0.3p^2$

$$\begin{aligned} \text{कुल आय व आगम (TR या R)} &= p \cdot x \\ &= (120 - 0.5p - 0.3p^2) \times p \\ &= 120p - 0.5p^2 - 0.3p^3 \end{aligned}$$

आय अधिकतमीकरण हेतु आवश्यक शर्त, $\frac{dR}{dp} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d(120p - 0.5p^2 - 0.3p^3)}{dp} = 0$$

$$\text{या } 120 - p - 0.9p^2 = 0$$

या $-0.9p^2 - p + 120 = 0$, जो एक द्विघातीय समीकरण है।

$$\begin{aligned} \text{या } p &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(120 \times -0.9)}}{2 \times -0.9} \\ &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 432}}{-1.8} = \frac{-1 \pm 20.8}{-1.8} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p = \frac{-1 + 20.8}{-1.8} \quad \text{या} \quad p = \frac{-1 - 20.8}{-1.8}$$

$\Rightarrow p = -\frac{21.8}{1.8}$ जो स्वीकार्य नहीं है क्योंकि किसी वस्तु का मूल्य ऋणात्मक नहीं हो सकता है।

$$\text{अतः } p = \frac{19.8}{1.8} = 11$$

$\frac{dR}{dp}$ का पुनः के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2R}{dp^2} = -1 - 1.8p$$

$$p = 11 \text{ रखने पर, } \frac{d^2R}{dp^2} = -1 - 1.8 \times 11 = -1 - 19.8$$

$p = -20.8 < 0$, जो कि के अधिकतम होने की पर्याप्त शर्त है।

अतः हम कह सकते हैं कि $p = 11$ पर आय अधिकतम है।

उदाहरण 8. दर्शाइए कि सीमान्त लागत वक्र औसत लागत वक्र के न्यूनतम बिन्दु पर उसको नीचे से काटता है।

हल: माना कि लागत फलन $C = f(x)$ है।

$$\text{तब औसत लागत फलन (AC)} = \frac{TC}{x}$$

औसत लागत फलन के न्यूनतम बिन्दु होने के लिए आवश्यक शर्त, $\frac{d(AC)}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{C}{x} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{C}{x} \right) = \frac{x \cdot \frac{dC}{dx} - C \cdot \frac{dx}{dx}}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow x \cdot \frac{dC}{dx} - C = 0 \quad (x \neq 0 \text{ या } x > 0)$$

अर्थात् AC के न्यूनतम बिन्दु पर MC वक्र AC वक्र को काटता है।

औसत लागत वक्र के न्यूनतम बिन्दु के लिए पर्याप्त शर्त

$$\begin{aligned} & \frac{d^2AC}{dx^2} > 0 \\ \Rightarrow & \frac{d}{dx} \left(\frac{x \cdot MC - C}{x^2} \right) > 0 \\ \Rightarrow & \frac{x^2 \left(\frac{d}{dx} x \cdot MC - \frac{dC}{dx} \right) - \{ (x \cdot MC - C) \times \frac{dx^2}{dx} \}}{x^4} > 0 \\ \Rightarrow & x^2 \left[\left\{ x \frac{d}{dx} MC + MC \frac{dx}{dx} \right\} - MC \right] - \{ (x \cdot MC - C) \times 2x \} > 0 \quad (x > 0) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow x^3 \frac{d}{dx} MC + MCx^2 - MCx^2 - 2MCx^2 + 2xC > 0$$

$$\Rightarrow x^3 \frac{d}{dx} MC - 2x^2 \left\{ MC - \frac{C}{x} \right\} > 0 \quad [MC = AC \text{ और } x > 0]$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} MC > 0$$

अर्थात् जब MC वक्र MR वक्र को उसके न्यूनतम बिन्दु पर काटता है तो उसे समय MC वक्र का ढाल धनात्मक होता है अर्थात् MC वक्र बायें से दायें ऊपर की ओर उठ रहा होता है; अतः यह सिद्ध हुआ कि MC वक्र AC वक्र को उसके न्यूनतम बिन्दु पर काटता है।

1.7.5 लाभ अधिकतमीकरण (Profit Maximization)

किसी फर्म के अधिकतम लाभ को ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित शर्त पूरा होना चाहिए।

फर्म का लाभ = कुल आगम या आय – कुल लागत

माना कि कुल आगम फलन, $R = TR = f(x)$

कुल लागत फलन, $C = TC = g(x)$

तब फर्म का लाभ $(\pi) = TR - TC = R - C = f(x) - g(x)$

जहाँ, x उत्पादन का स्तर, π लाभ की मात्रा है।

प्रथम विधि: प्रथम एवं द्वितीय कोटि के कलन का प्रयोग करके

कुल लाभ को अधिकतम होने के लिए दो शर्तों को पूरा करना होता है, पहला शर्त:

I: आवश्यक प्रतिबन्ध या शर्त (प्रथम कोटि की जाँच व शर्त)

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{d(TR)}{dx} - \frac{d(TC)}{dx} = 0 \quad (\text{बिन्दु } x = a \text{ पर})$$

$$\begin{aligned} \text{या} & \frac{d(TR)}{dx} = \frac{d(TC)}{dx} \\ \text{या} & MR = MC \end{aligned}$$

लाभ को अधिकतम होने के लिए दूसरी शर्त:

II: पर्याप्त प्रतिबन्ध या शर्त (द्वितीय कोटि की शर्त व जाँच)

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = \frac{d^2(TR)}{dx^2} - \frac{d^2(TC)}{dx^2} < 0 \quad (\text{बिन्दु } x = a \text{ पर})$$

या

$$\frac{d^2(TR)}{dx^2} < \frac{d^2(TC)}{dx^2}$$

अर्थात् जब लाभ अधिकतम होता है तो सीमान्त आगम (MR) तथा सीमान्त लागत (MC) एक दूसरे के बराबर होते हैं तथा सीमान्त आगम को सीमान्त लागत वक्र नीचे से काटता है।

द्वितीय विधि: बीजगणित व ज्यामीति का प्रयोग करके

लाभ उसी बिन्दु पर अधिकतम होगी जहाँ सीमान्त आय = सीमान्त लागत (i.e. MR = MC) जिसे सरल करके एवं ज्यामीतिय रेखाचित्र खींचकर आसानी से उत्पादन के स्तर एवं अधिकतम लाभ को ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 9. किसी फर्म के कुल लागत फलन तथा मांग फलन नीचे दिया गया है:

$$C = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 111x + 50$$

तथा

$$x = 100 - p$$

तब उस उत्पादन की मात्रा ज्ञात कीजिए जो अधिकतम लाभ प्रदान करता है। उत्पादन के इस स्तर पर प्राप्त लाभ की मात्रा की भी गणना कीजिए।

हल:

दिया है, $C = \frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 111x + 50$

तथा $x = 100 - p \Rightarrow p = 100 - x$ (जहाँ p कीमत स्तर व मांग फलन है)

यदि x अधिकतम लाभ प्रदान करने वाला उत्पादन का स्तर व मात्रा है तब,

अधिकतम लाभ के लिए कुल आगम फलन (R) = TR = $x \cdot p = x(100 - x) = 100x - x^2$

अब अधिकतम लाभ, $\pi = TR - TC = 100x - x^2 - \left\{\frac{1}{3}x^3 - 7x^2 + 111x + 50\right\}$
 $= 100x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 7x^2 - 111x - 50$

I. आवश्यक प्रतिबन्ध या शर्त (प्रथम कोटि की जाँच व शर्त)

$$\begin{aligned} \frac{d\pi}{dx} &= \frac{d}{dx} \left[100x - x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 7x^2 - 111x - 50 \right] \\ &= 100 - 2x - x^2 + 14x - 111 \\ &= -x^2 + 12x - 11 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow -x^2 + x + 11x - 11 = 0$$

$$\Rightarrow -x(x-1) + 11(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(11-x) = 0$$

अतः अधिकतम लाभ तभी प्राप्त होगा जब, $x = 1$ या $x = 11$

II. लाभ अधिकतम होने की दूसरी (पर्याप्त) शर्त है:

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -2x + 12 < 0$$

(अ) यदि $x = 1$, तब लाभ अधिकतम होने की दूसरी शर्त पूरी नहीं होती है।

(ब) यदि $x = 11$, तब लाभ अधिकतम होने की दूसरी शर्त पूरी हो जाती है।

अतः उत्पादन की मात्रा 11 इकाईयों के बराबर होने पर अधिकतम लाभ की प्राप्ति होगी।

अब, 11 इकाईयों के उत्पादन से होने वाला कुल लाभ,

$$\begin{aligned} \pi &= (TR - TC) \\ &= 100x - x^2 - \left\{ \frac{1}{3}x^3 + 7x^2 - 111x - 50 \right\} \\ &= -\frac{1}{3}x^3 + 6x^2 - 11x - 50 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{3}(11)^3 + 6(11)^2 - 11 \times (11) - 50$$

$$= 443.67 + 726 - 121 - 50$$

$$\text{या कुल लाभ} = 111.33$$

उत्तर

(1) जब फर्म पर कर लगा दिया जाए {अनुज्ञाशुल्क/लेवी}

यदि फर्म का माँग फलन $p = 21 - 0.6x$ तथा लागत फलन $C = x^2 + 5x + 5$ हो और सरकार फर्म पर एक मुश्त कर 10 रुपये लगा दे तो संतुलन मूल्य, उत्पादन स्तर का फर्म के ऊपर क्या प्रभाव पड़ेगा।

करारोपण से पूर्व

$$\text{फर्म का लाभ, } \pi = R - C$$

$$= (21 - 0.6x)x - (x^2 + 5x + 5)$$

$$\text{या, } \pi = -1.6x^2 + 16x - 5$$

लाभ अधिकतम की आवश्यक शर्त

$$\frac{d\pi}{dx} = 0 \Rightarrow -3.2x + 16 = 0 \text{ या } x = 5$$

पर्याप्त शर्त

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = (-3.2x + 16) = -3.2 < 0$$

$$\text{मूल्य } p = 21 - 0.6 \times 5 = 18; \text{ तथा}$$

$$\text{लाभ } \pi = -1.6(5)^2 + 16 \times 5 - 5$$

$$= -40 + 80 - 5 = 35$$

$$\text{करारोपण के बाद लागत फलन } C_t = x^2 + 5x + 5 + 10$$

$$\text{तथा } \pi = -1.6x^2 + 16x + 15$$

$$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 \Rightarrow -3.2x + 16 = 0$$

$$\text{या } x = 5, p = 21 - 0.6 \times 5 = 18$$

$$\text{तथा लाभ } \pi = -1.6(5)^2 + 16 \times 5 - 15 = 25$$

अतः एकमुश्त कर लगाने पर उत्पादन स्तर तथा बाजार मूल्य अपरिवर्तित रहता है किन्तु लाभ कर की मात्रा से कम हो जाता है अर्थात् इस स्थिति में उत्पादक को पूरा कर स्वयं वहन करना पड़ता है।

(2) वस्तु के प्रति इकाई पर कर आरोपित करने पर

माना प्रति इकाई 5 रुपये कर लगा दिया जाये तब

$$\text{लागत फलन, } C_t = x^2 + 5x + 5 + x \times 5 = x^2 + 10x + 5$$

$$\text{करारोपण के बाद लाभ फलन } \pi_t = 21x - 0.6x^2 - x^2 - 10x - 5$$

$$\text{या } \pi_t = -1.6x^2 + 11x - 5$$

$$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 \Rightarrow -3.2x + 11 = 0$$

$$\text{या } x = \frac{110}{32} = 3.4375$$

$$\text{मूल्य } p = 21 - 0.6 \times 3.4375 = 21 - 2.0625 = 18.93$$

$$\text{लाभ } \pi = -1.6 \times \left(\frac{55}{16}\right)^2 + 11 \left(\frac{55}{16}\right) - 5 = -1.6(3.4375)^2 + 11(3.4375) - 5$$

$$\pi = -1.6 \times 11.82 + 37.81 - 5 = -5.5 + 37.81 - 5 = 27.31$$

अर्थात् उत्पादन घटेगा, मूल्य बढ़ेगा तथा लाभ घटेगा।

ध्यान दें फर्म कर का पूरा भार उपभोक्ता पर डालने में सफल नहीं होती है कर का कितना भार उपभोक्ता पर डाला जा सकता है या माँग की लोच पर निर्भर करता है।

करारोपण से प्राप्त कर आय को अधिकतम करने वाली प्रति इकाई कर दर

माना कर अधिकतम करने वाली प्रति इकाई कर दर = t /इकाई

$$C_t = x^2 + 5x + 5 + tx$$

$$\pi_t = 21x - 0.6x^2 - x^2 - (5 + t)x - 5$$

लाभ अधिकतम होने की आवश्यक शर्त

$$\frac{d\pi_t}{dx} = 0 \Rightarrow -3.2x + 16 - t = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{16-t}{3.2}$$

कर आय

$$T = t \cdot x = \frac{16t-t^2}{3.2}$$

कर आय अधिकतम की आवश्यक शर्त

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Rightarrow \frac{1}{3.2} [16t - t^2] = \frac{16-2t}{3.2} = 0$$

$$\Rightarrow t = \frac{16}{2} = 8 \text{ प्रति इकाई।}$$

नति परिवर्तन बिन्दु (Point of Inflexion)

उदाहरण 1.0 यदि एक उत्पादक का उत्पादन फलन $Q = -8 + 5x + 2x^2 - \frac{1}{3}x^3$ दिया है, जहां x आगत की इकाई तथा Q उत्पादन स्तर है। आगत का वह इकाई मात्रा ज्ञात कीजिए जिस पर उत्पादन का प्रथम चरण अर्थात् उत्पत्ति वृद्धि का नियम समाप्त हो रहा है।

हल: उत्पत्ति वृद्धि का नियम लागू होने पर सीमान्त उत्पत्ति बढ़ती है जिसके कारण उत्पादन फलन x अक्ष के प्रति उत्तल होता है। उत्पत्ति नियम समाप्त होने पर उत्पादन फलन अपनी नति परिवर्तित करके x के प्रति अवतल हो जाता है। अतः उत्पत्ति वृद्धि का नियम नति परिवर्तन बिन्दु तक लागू रहता है। अतः दिये गये उत्पादन फलन का नति परिवर्तन बिन्दु ज्ञात करेंगे।

नति परिवर्तन बिन्दु की आवश्यक शर्त—

$$\frac{dQ}{dx} = 0$$

एवं
$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

पहले Q को x के सापेक्ष अवकलन $\frac{dQ}{dx}$ ज्ञात करने पर,

$$\frac{dQ}{dx} = 5 + 4x - x^2$$

$\frac{dQ}{dx}$ का x के सापेक्ष पुनः अवकलन करने पर

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left\{ \frac{dQ}{dx} \right\} = 4 - 2x$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = 0$$

$$\Rightarrow 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

नति परिवर्तन बिन्दु के लिए पर्याप्त शर्त के लिए

$$\frac{d^3Q}{dx^3} \neq 0$$

लेकिन यहाँ पर,
$$\frac{d^3Q}{dx^3} = -2 \neq 0$$

अतः आगत इकाई स्तर $x = 2$ होने पर उत्पादन का प्रथम चरण— उत्पत्ति वृद्धि का नियम समाप्त हो रहा है।

1.7.6 इकाई का सारांश

इस इकाई में हमलोगों ने गणितीय उपकरणों का अध्ययन किया है, जिसका मुख्य उद्देश्य अर्थशास्त्र के विभिन्न सिद्धान्तों की विवेचना करने तथा उन्हें स्पष्टता से समझने व समझाने के लिए विभिन्न प्रकार के फलनों का प्रयोग भी जान पाये है। ऐसे में विभिन्न आर्थिक सिद्धान्तों, अर्थव्यवस्था में क्रियाशील आर्थिक शक्तियों की प्रभावोत्पादकता तथा परस्पर निर्भरता, उनका शक्ति संतुलन इत्यादि विषयों को समझने के लिए अवकलन प्रक्रिया की प्रविधि व विभिन्न कोटि के अवकलजों के अर्थ से सुपरिचित हो पाये। इस इकाई के अन्तर्गत हम अवकलजों के विभिन्न आर्थिक कारकों को ज्ञात करने के साथ-साथ उसका अर्थव्यवस्था में क्या प्रभाव होता है इन

सभी पहलुओं का भी चर्चा किया गया है। हमलोग मांग व पूर्ति की लोच, औसत एवं सीमान्त लागत, औसत एवं सीमान्त आगम, लाभ अधिकतमीकरण, नति परिवर्तन बिन्दु आदि का भी उदाहरण सहित अध्ययन किया है।

औसत तथा सीमान्त लागत वक्रों का आकार U-अक्षर की तरह होता है तथा दोनों के मध्य निम्न प्रकार के सम्बन्धों की कल्पना की जा सकती है।

(क) यदि AC गिरता है, तब MC उससे ज्यादा तेजी से गिरता है तथा AC से नीचे होता है।

(ख) जब AC न्यूनतम होता है, तब $AC = MC$ होता है।

(ग) जब AC में वृद्धि होती है तब MC उससे तेजी से बढ़ता है तथा AC से ऊपर रहता है।

इस सम्बन्ध को सिद्ध करने में कलन (Calculus) अर्थात् प्रथम कोटि के अवकलन का प्रयोग किया जाता है।

1.7.7 मुख्यशब्द

- **मांग की लोच:** मांगी गई मात्रा में आनुपाति परिवर्तन तथा कीमत में आनुपातिक परिवर्तन के अनुपात को ही मांग की लोच कहा जाता है।
- **लाभ अधिकतमीकरण:** एक फर्म व उत्पादक के लिए लाभ अधिकतमीकरण वह बिन्दु होती है जिस पर उन्हें प्राप्त आगम तथा उत्पादन में लगे लागत का अंतर अधिकतम हो जाए।

1.7.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

11. प्रथम अवकलज फलन के को व्यक्त करता है।
12. अवकलज फलन के मान को दर्शाता है।
13. अवकलज फलन में को दर्शाता है।
14. बार-बार अवकलन करने से अवकलज की बढ़ती है।
15. उच्चिष्ठ बिन्दु फलन के बिन्दुओं में सर्वोच्च होता है।

1.7.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(क) 1. ढाल, 2. सीमान्त, 3. परिवर्तन की दर, 4. कोटि, 5. दो भागों में बाँटती है।

1.7.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

7. औसत लागत एवं सीमान्त लागत के बीच सम्बन्ध की व्याख्या कीजिए।
8. औसत आगम, सीमान्त आगम एवं मांग की लोच की बीच सम्बन्धों का वर्णन कीजिए।
9. यदि एकाधिकारी फर्म की मांग फलन $p = 200 - 0.5x$ तथा लागत फलन $C = 7x^2 + 5x + 100$ दिया हो, तब वस्तु x की वह मात्रा ज्ञात कीजिए जिस बिन्दु पर लाभ अधिकतम हो एवं लाभ की राशि भी ज्ञात कीजिए।
10. यदि वस्तु का मूल्य $P = 10$ एवं मांग फलन $x = 100 - 5p$ दिया हो तो मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

1.7.12 संदर्भ पुस्तकें

1. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
2. Mishra, J.P., "Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)" Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.

3. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, “आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी”, तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
4. अग्रवाल, डी. आर. ‘प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र’, (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली– 110091
5. J.K. Thukral, “Business Statistics” Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
6. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
7. Agarawal D. R., Quantitative Methods
8. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
9. Yamane, T., Mathematics for Economists.
10. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
11. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., “आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें”, शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड—II
परिमाणात्मक विधियाँ—1
इकाई 01
अनुकूलतम समीकरण: प्रतिबंध रहित

प्रारूप:

- 2.1.1 परिचय
- 2.1.2 अनुकूलतम समीकरण का अर्थ
 - 2.1.2.1 अनुकूलतम करने में जटिलताएँ एवं घटक व समस्याएँ
- 2.1.3 प्रतिबंध रहित अनुकूलतम समीकरण
- 2.1.4 एक चर वाले अनुकूलतम समीकरण
- 2.1.5 द्वि-चर एवं बहुचर वाले अनुकूलतम समीकरण
- 2.1.6 इकाई का सारांश
- 2.1.7 पारिभाषिक शब्दावली
- 2.1.8 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 2.1.9 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- अनुकूलतम समीकरण की अवधारणा।
- प्रति रहित अनुकूलतम समीकरण का अर्थ।
- प्रति रहित रैखिक अनुकूलतम समीकरण को पता लगाना।
- द्विघातीय व बहुघातीय अनुकूलतम समीकरण के प्रयोग

2.1.1 परिचय

गणितीय अर्थशास्त्र में अनुकूलतम समीकरण की महत्वपूर्ण भूमिका है। इस इकाई में अनुकूलतम समीकरणों के माध्यम से उस सर्वोत्तम क्रिया व विधि का पता करने का प्रयास किया जायेगा जिससे वांछित आर्थिक उद्देश्य की प्राप्ति हो सके। अवकलनों के माध्यम से ऐसे कई आर्थिक समस्याओं को हल करने का प्रयास किया जायेगा। यहाँ हमें प्रति रहित अनुकूलतम समीकरणों पर विशेष ध्यान अंकित करना है। आमतौर पर अनुकूलतम समीकरण के द्वारा आर्थिक फलन के स्तर को ज्ञात करने की कोशिश होती है जिस पर कोई उत्पादक, विक्रेता, क्रेता, उपभोक्ता आदि अपने इष्टतम बिन्दु को प्राप्त करना चाहता है।

2.1.2 अनुकूलतम समीकरण का अर्थ (Meaning of Optimum Equation)

अनुकूलतम शब्द का अर्थ हिन्दी शब्दकोष के अनुसार, इष्टतम या सर्वोत्तम, सर्वोत्कृष्ट, सबसे सही, बिलकूल उपयुक्त, सबसे उत्तम आदि होता है। जबकि समीकरण का अर्थ होता है कि विभिन्न प्रतीकों से सुसज्जित ऐसा गणितीय कथन जो दो व्यंजकों की बीच समानता रूप में प्रदर्शित करता है, समीकरण कहलाता है। दूसरे शब्दों में जब किन्हीं दो बीजगणितीय राशियों के बीच बराबर (=) का चिह्न अंकित होता है तब उस समूचे व पूरे व्यंजक (Expression) को समीकरण कहा जाता है। जैसे $3x = 12$, इसका अर्थ है कि प्रस्तुत व्यंजक इस तथ्य की ओर संकेत करता है कि x का मान 4 के बराबर है, इस वक्तव्य को समीकरण कहते हैं। इस प्रकार अनुकूलतम समीकरण के अर्थ को निम्न तरीके से समझा जा सकता है।

वैसा समीकरण जो अज्ञात राशियों के उन संभावित संयोग व संयोगों के वांछित आवंटन को समीकरण के रूप में व्यक्त करता है उसे अनुकूलतम समीकरण कहते हैं। उपरोक्त उदाहरण में, यदि एक कलम की कीमत 3 रुपये प्रति इकाई हो तथा 12 रुपये कुल राशि दी गई हो तब कलम की संख्या 4 होगी।

यदि $C = C_0 + cY_d$ समीकरण पर विचार करें तो हम कह सकते हैं कि उपभोग फलन C अपने अनुकूलतम बिन्दु, प्रायोज्य आय Y_d के किसी निश्चित मान के सन्दर्भ में निर्धारित होगी। जबकि C_0 स्वायत्त व निर्वाह उपभोग है जो प्रायोज्य आय से स्वतंत्र है।

अनुकूलतम समीकरण को अच्छी तरह से समझने के लिए आगे हम इसके विभिन्न प्रकारों एवं अवस्थाओं के बारे में चर्चा विस्तृत रूप से चर्चा करेंगे। सामान्यतया हम रेखिक एवं गैर रेखिक अनुकूलतम समीकरणों पर विशेष ध्यान करेंगे।

अनुकूलतम तकनीक एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो एक उद्यमी के साधनों को कुशलतम तरीकों से प्रयुक्त करके लाभ एवं धन को अधिकतम करता है। समस्या का मूल रूप उन वैकल्पिक साधनों को चिह्नित करना है।

2.1.2.1 अनुकूलतम समीकरण की समस्याएँ (Problems of Optimum Equation)

अनुकूलतम समीकरण के अध्ययन में बहुत सारे ऐसे घटक होते हैं तो अनुकूलतम समस्याओं को जटिल बना देते हैं और हल करने में मुश्किल पैदा करते हैं। ऐसा ही एक जटिल समस्या है बहु निर्णायक चर का विद्यमान होना। एक उत्पादक फर्म के लिए लाभ अधिकतम उत्पादन का निर्धारण सरल ढंग से किया जा सकता है। परन्तु एक बड़ी फर्म अवसर बड़ी तादाद में विभिन्न उत्पादों को उत्पाद करती है। फलस्वरूप ऐसी फर्म का लाभ अधिकतमीकरण समस्या हर उत्पादन के लिए असंख्य उत्पादक निर्णयों की जरूरत होती है।

दूसरी समस्या या घटक है वह निर्णायक चर एवं सम्बन्धित नतीजों के बीच जटिल प्रकृति का सम्बन्ध। उदाहरण के लिए— लोक नीति निर्णयों में ये निर्धारण करना अत्यन्त कठिन हो जाता है कि एक दिये हुए व्यय और बढ़ी हुई आय, रोजगार और उत्पादकता लाभ के बीच सम्बन्ध कैसे निर्धारण किया जाय। चरों के बीच कोई सरल सम्बन्ध नहीं विद्यमान होता है।

तीसरा जटिल घटक है निर्णायक चर में एक या एक से अधिक जटिल प्रतिबंधों का विद्यमान होना है। उदाहरणतः वस्तुता हर संगठन में ऐसे सीमित साधनों के प्रतिबंध होते हैं जो निर्धारक चर पर थोपे जाते हैं जैसे पूँजी, आदि जिन पर उनका वश होता है। इन प्रतिबंधों को निर्णायक समस्या में समाहित करना चाहिए नहीं तो अनुकूलतम तकनीक ऐसा हल प्रस्तुत करेगा जो व्यावहारिक दृष्टि से अस्वीकृति होगा।

इसके अतिरिक्त और भी जटिलताएँ हैं, जैसे अनिश्चितता का होना। प्रस्तुत अध्ययन में हम निर्णय करने के विश्लेषण को निश्चितता तक ही सीमित करेंगे।

2.1.3 प्रतिबंध रहित अनुकूलतम समीकरण (Optimum Equation of without Constraints)

आदर्शवादी आर्थिक निर्णय विश्लेषण उन क्रियाओं को निर्धारण करता है जो एक वांछित उद्देश्य को सर्वोत्तम ढंग से प्राप्त कर सकें। इसका अर्थ है कि ऐसी क्रिया व विधि जो उद्देश्य फलन (अधिकतम या न्यूनतम) को अनुकूलतम कर सकें। *वैसे अनुकूलतम समीकरण होते हैं जिसके तहत अनुकूलतम बिन्दु या समस्या के निर्णायक चरों में कोई भी प्रतिबन्ध नहीं रखा जाता है और अवकल के माध्यम या साधारण गणितीय संक्रियाओं (युग्मपत व द्विघातीय समीकरणों) के मदद से हल करके उसका विश्लेषण किया जाता है, ऐसे समीकरणों को ही प्रति रहित व अबाध अनुकूलतम समीकरण कहा जाता है।* उदाहरण के लिए एक कीमत-उत्पादन समस्या के सन्दर्भ में, हम उस उत्पादन स्तर को निर्धारित करना पसन्द करते हैं जहाँ लाभ अधिकतम हो। एक उत्पादन समस्या में आगतों के उन संयोगों को ज्ञात करना होता है जो उत्पादन के एक दिये हुए स्तर को न्यूनतम लागत में उत्पादित कर सकें। एक पूँजी बजट समस्या में निवेश के शुद्ध वर्तमान मान को अधिकतम करने वाले प्रोजेक्ट का चुनाव किया जा सके। अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के विभिन्न तकनीकों प्रयुक्त की जाती है।

2.1.4 एक चर वाले अनुकूलतम समीकरण (Optimum Equation of One Variable)

एक लाभ अधिकतम उदाहरण में सीमान्त विश्लेषण धारणा यह स्पष्ट करता है कि उद्देश्य और निर्णय चरों के सम्बन्ध को सारणी या रेखा या रेखा चित्र के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। यह धारणा तब जटिल हो जाती है जब कई निर्णायक चर होते हैं या फिर निर्णय चर एवं उद्देश्य फलन के मध्य सम्बन्ध को बीजगणितीय रूप में व्यक्त किया जाता है, अवकलन के महत्वपूर्ण रूपों को समस्या के अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है। अर्थशास्त्र में अधिकतम अब न्यूनतम समस्याओं के प्रयोग अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिए अवकलनों का प्रायः प्रयोग किया जाता है।

लाभ अधिकतमीकरण समस्या

सीमान्त विश्लेषण के अन्तर्गत किसी वक्र के अधिकतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिए (उदाहरण के लिए अधिकतम लाभ) एक आवश्यक शर्त (किन्तु पूँजी पर्याप्त नहीं) शर्त यह है कि इस बिन्दु पर वक्र की ढाल शून्य के बराबर हो, इसी शर्त को अवकलन के माध्यम से भी व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि एक फलन का अवकलन किसी बिन्दु की ढाल या उसकी सीमान्त मान को मापता है, फलन $Y = f(x)$ की अधिकतम मान को ज्ञात रखने की आवश्यक शर्त यह है कि इस बिन्दु पर $\frac{dy}{dx}$ अवकलन शून्य के बराबर होता है। इसे किसी और बीज गणित फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम बिन्दु को प्राप्त करने की प्रथम क्रम शर्त कहा जाता है।

उदाहरण 2.1.1 यदि लाभ फलन $\pi = -10x^2 + 140x - 50$ दिया है तब सीमान्त लाभ या प्रथम शर्त के नियम के अनुसार अनुकूलतम बिन्दु को ज्ञात करें।

हल: दिया गया है, $\pi = -10x^2 + 140x - 50$

प्रथम क्रम जांच या आवश्यक शर्त

$$\frac{d\pi}{dx} = 0$$

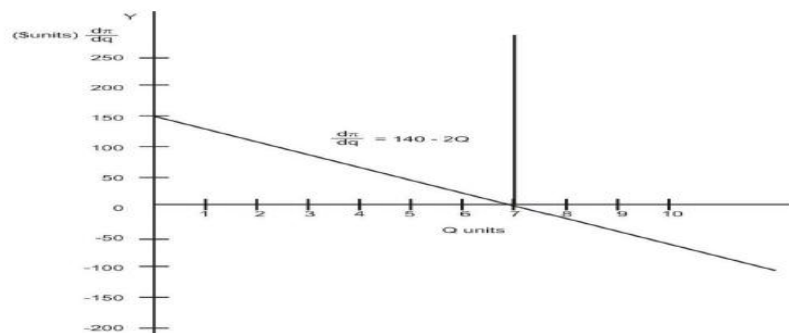
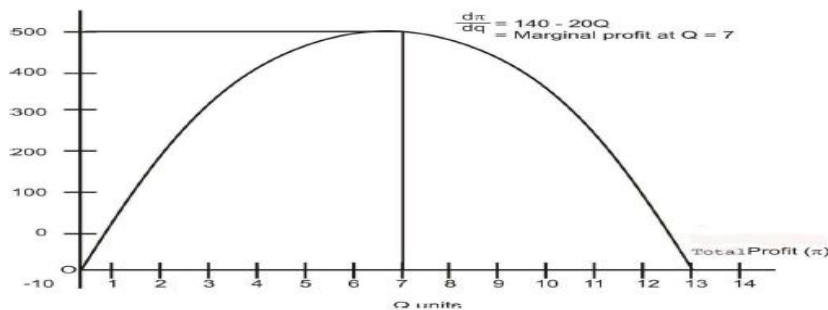
समीकरण (1) का के सापेक्ष अवकलन करने एवं शून्य के बराबर करने पर

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{d}{dx} (-10x^2 + 140x - 50) = 0$$

$$-20x + 140 = 0$$

$$x = \frac{140}{20} = 7$$

अतः उपरोक्त समीकरण को हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है कि यदि उत्पादन का स्तर 7 इकाई हो तो फर्म को अधिक लाभ अधिकतम प्राप्त होता है जो अनुकूलतम समीकरण के द्वारा प्राप्त किया गया है। इसे निम्नलिखित चित्र द्वारा भी दर्शाया जा सकता है—



चित्र 2.1.1

उदाहरण 2.1.2. यदि एक लागत फलन $C = 5x^2 - 40x + 20$ दिया है, जहां C उत्पादन की लागत तथा x उत्पादन की मात्रा है तब उत्पादन का वह अनुकूलतम स्तर ज्ञात कीजिए जहां पर लागत न्यूनतम होगी।

हल: दिया है, $C = 5x^2 - 40x + 20$ ----- (1)

⇒ प्रथम क्रम की जांच व आवश्यक शर्त

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

समीकरण (1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx} (5x^2 - 40x + 20) = 10x - 40 = 0 \text{ ----- (2)}$$

$$10x - 40 = 0$$

$$10x = 40$$

$$x = \frac{40}{10} = 4$$

$$\Rightarrow x = 4$$

$\Rightarrow$ द्वितीय क्रम की जाँच व पर्याप्त शर्त

समीकरण (2) को पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} (10x-40) = 10 > 0 \text{ न्यूनतम बिन्दु सुनिश्चित। } (x = 4 \text{ बिन्दु पर)}$$

पर)

अतः जब $x = 4$ हो अर्थात् उत्पादन का स्तर 4 इकाई के बराबर हो तब लागत फलन अपने न्यूनतम अवस्था पर होगी। जो एक अनुकूलतम बिन्दु को प्रदर्शित करती है।

2.1.5 द्वि-चर एवं बहुचर वाले अनुकूलतम समीकरण

(Optimum Equation with Two Variable & Multiple Variable)

द्वि-चर एवं बहुचर अनुकूलतम समीकरणों का हल युगपत समीकरण या अवकलन विधि से किया जा सकता है। यदि दो चर वाले अनुकूलतम समीकरण एक से अधिक हो तब युगपत समीकरण हल विधि ज्यादा उपयोगी होती है। जबकि दो चर वाले समीकरण एक हो तब उस स्थिति में आंशिक अवकलन के विधि से आसानी से हल किया जा सकता है।

उदाहरण 2.1.3 यदि $C = 3x^2 - 12x + 4xy + 2y^2 - 8y + 100$ एक लागत फलन दिया गया है तब उत्पादन के साधन x व y के उस अनुकूलतम बिन्दु के संयोग को ज्ञात कीजिए जिस पर लागत न्यूनतम बिन्दु की प्राप्ति हो सके।

हल: दिया है $C = 3x^2 - 12x + 4xy + 2y^2 - 8y + 100$ ----- (1)

प्रथम कोटि व अनिवार्य प्रतिबन्ध

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 6x - 12 + 4y + 0 - 0 + 0 = 0 \text{ ----- (2)}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 - 0 + 4x + 4y - 8 + 0 = 0 \text{ ----- (3)}$$

समीकरण (2) एवं (3) को हल करने पर

$$6x + 4y = 12$$

$$4x + 4y = 8$$

अतः जब $x = 2$ हो तब $y = 0$

इस प्रकार, अनिवार्य शर्त को ज्ञात करने के लिए हमारे प्राप्त बिन्दु $(2, 0)$ है।

अब हम ये ज्ञात करेंगे कि उपरोक्त मान, अधिकतम एवं न्यूनतम की शर्तों को सन्तुष्ट करते हैं या नहीं।

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 6; \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 4; \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = 4 \text{ ----- (4)}$$

अब समीकरण (4) में $x = 2$ तथा $y = 0$ के मान को रखने पर,

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 6 = 6 > 0; \text{ ----- (5)}$$

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 4 > 0; \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = 4 > 0 \text{ ----- (6)}$$

पर्याप्त शर्त की जाँच

$$f_x \times f_y - (f_{xy})^2 > 0 \Rightarrow 6 \times 4 - (4)^2 = 24 - 16 = 8 > 0$$

इस प्रकार $(2, 0)$ बिन्दु पर फलन न्यूनतम की शर्तों को पूरा करता है।

वैकल्पिक विधि

(हेसियन शर्त के अनुसार)

$$|H_1| < 0, |H_2| < 0 \dots \dots \dots (-1)^m |H_m| > 0 \quad (\text{अधिकतम के लिए})$$

$$|H_1| > 0, |H_2| > 0 \dots \dots \dots (-1)^m |H_m| > 0 \quad (\text{न्यूनतम के लिए})$$

यहाँ $|H_1| = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$

$$|H_1| = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)$$

$$|H_1| = \frac{\partial}{\partial x} (6x - 12 + 4y)$$

$$|H_1| = 6 > 0$$

और $|H_2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \end{vmatrix}$

समीकरण (5) एवं (6) से हमें प्राप्त होते हैं—

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 6 > 0, \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 4 > 0, \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = 4 > 0, \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} = 4 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि उत्पादन के साधन $x = 2$ तथा $y = 0$ हों तब लागत फलन का अनुकूलतम होगा जहाँ लागत न्यूनतम है।

युगपत समीकरण (Simultaneous Equation)

दो या दो से अधिक चर वाले प्रथम घात के समीकरण को युगपत समीकरण कहा जाता है। यदि किसी अज्ञात राशि x और y से सम्बन्धित दो समीकरण दिए गए हैं तब x का एक ही मान दोनों समीकरणों के लिए सत्य होगा तथा इसी तरह y का भी एक ही मान दोनों समीकरणों के लिए सत्य होगा। युग्मपत समीकरण की सहायता से अज्ञात राशि का अनुकूलतम बिन्दु ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 2.1.4 निम्नलिखित समीकरण में स्वतंत्र चर के लिए अनुकूलतम बिन्दु को ज्ञात कीजिए।

$$4x + 2y = 11 \quad \text{----- (1)}$$

$$8x - 4y = 10 \quad \text{----- (2)}$$

हल: समीकरण (1) को 2 से गुणा कर उसे समीकरण (2) के साथ जोड़ने पर

$$2 \times 4x + 2 \times 2y = 2 \times 11 \quad \text{----- (3)}$$

$$8x - 4y = 10$$

$$8x + 4y = 22$$

$$8x - 4y = 10$$

$$+ \quad + \quad +$$

$$16x = 32$$

$$x = \frac{32}{16} = 2$$

जब समीकरण (1) में x का मान रखने पर,

$$4(2) + 2y = 11$$

⇒

$$2y = 11 - 8 = 3$$

$$\begin{aligned} \text{या} & \quad y = \frac{3}{2} \\ \text{अतः} & \quad x = 2, y = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

उदाहरण 2.1.5 निम्नलिखित युग्मपत समीकरणों को हल करें।

$$7x - 5y = 11 \quad \text{----- (1)}$$

$$3x + 2y = 13 \quad \text{----- (2)}$$

हल: समीकरण (1) को 3 से तथा समीकरण (2) को 7 से गुणा करके, उसे समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर,

$$21x - 15y = 33 \quad (3 \text{ से गुणा करने पर}) \quad \text{----- (3)}$$

$$21x + 14y = 91 \quad (7 \text{ से गुणा करने पर}) \quad \text{----- (4)}$$

$$21x + 14y = 91$$

$$21x - 15y = 33$$

$$\text{-----}$$

$$29y = 58$$

$$y = \frac{58}{29} = 2$$

अब समीकरण (2) में y का मान रखने पर,

$$3x + 2(2) = 13$$

$$3x = 13 - 4 = 9$$

$$\text{या} \quad x = \frac{9}{3} =$$

$$\text{अतः} \quad x = 3, y = 2$$

2.1.6 इकाई का सारांश

गणितीय अर्थशास्त्र में अनुकूलतम समीकरणों की महत्वपूर्ण भूमिका होती है। इस इकाई में अनुकूलतम समीकरणों के माध्यम से उस सर्वोत्तम क्रिया व विधि का पता करने का प्रयास किया जायेगा जिससे वांछित आर्थिक उद्देश्य की प्राप्ति हो सके। अवकलनों के माध्यम से ऐसे कई आर्थिक समस्याओं को हल करने का प्रयास किया जायेगा। यहाँ हमें प्रति रहित अनुकूलतम समीकरणों पर विशेष ध्यान अंकित करना है। आमतौर पर अनुकूलतम समीकरण के द्वारा आर्थिक फलन के स्तर को ज्ञात करने की कोशिश होती है जिस पर कोई उत्पादक, विक्रेता, क्रेता, उपभोक्ता आदि अपने इष्टतम बिन्दु को प्राप्त करना चाहता है।

2.1.7 पारिभाषिक शब्दावली

अनुकूलतम तकनीक— ऐसे उपकरण जिनसे किसी उद्यमी के साधनों को कुशलपूर्वक प्रबन्धन किया जा सके जिससे लाभ अधिकतम व लागत न्यूनतम किया जा सके। ऐसी क्रिया व विधि जो उद्देश्य फलन (अधिकतम या न्यूनतम) को अनुकूलतम कर सकें।

अनुकूलतम समीकरण: एक बीजगणितीय व्यंजक जिसे समानता के चिन्ह से निरूपित किया जाता है और जो किसी भी आर्थिक गतिविधि व चरों को उसके इष्टतम बिन्दु को प्राप्त करने का मार्ग बताता है, अनुकूलतम समीकरण कहलाता है।

प्रति रहित व अबाध अनुकूलतम समीकरण: वैसे अनुकूलतम समीकरण होते हैं जिसके तहत अनुकूलतम बिन्दु या समस्या के निर्णायक चरों में कोई भी प्रतिबन्ध नहीं रखा जाता है और अवकल के माध्यम या साधारण गणितीय संक्रियाओं (युगपत व द्विघातीय समीकरणों) के मदद से हल करके उसका विश्लेषण किया जाता है, ऐसे समीकरणों को ही प्रति रहित व अबाध अनुकूलतम समीकरण कहा जाता है।

2.1.8 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

11. अनुकूलतम समीकरण से आप क्या समझते हैं?
12. प्रति-रहित अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के लिए कौन सी तकनीक प्रयुक्त की जाती है।
13. आर्थिक फलन $U = x^3 + y^3 - 3x - 27y + 24$ के लिए इष्टतम बिन्दु को ज्ञात कीजिए।

2.1.9 संदर्भ पुस्तकें

12. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
13. Mishra, J.P., “Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)” Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.
14. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, “आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी”, तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
15. अग्रवाल, डी. आर. ‘प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र’, (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली– 110091
16. J.K. Thukral, “Business Statistics” Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
17. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
18. Agarawal D. R., Quantitative Methods
19. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
20. Yamane, T., Mathematics for Economists.
21. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
22. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., “आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें”, शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड—II - इकाई 02

प्रतिबन्धित अनुकूलतम (Constraint Optimization) समीकरण की अवधारणा

प्रारूप:

- 2.2.1 परिचय
- 2.2.2 प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण का अर्थ
- 2.2.3 प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण संरचना
- 2.2.4 अनुकूलतम समीकरण में अवकलज का उपयोग
- 2.2.5 प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरणों की समस्याएँ
- 2.2.6 इकाई का सारांश
- 2.2.7 पारिभाषिक शब्दावली
- 2.2.8 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 2.2.9 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण के अर्थ को समझना।
- प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण की संरचना को जानना।
- अवकलन का अनुकूलतम समीकरण के प्रयोग।
- अनुकूलतम समीकरण की समस्याओं को पहचानना।

2.2.1 परिचय (Introduction)

प्रस्तुत इकाई में प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरणों के माध्यम से उस सर्वोत्तम क्रिया व उपाय को सुनिश्चित करने का प्रयास किया जायेगा जिससे वांछित उद्देश्य की प्राप्ति हो सके। यहाँ अवकलनों के माध्यम से ऐसे कई अनुकूलतम समस्याओं को हल करने का एक प्रयास किया जायेगा। विभिन्न अनुकूलतम तकनीकों का अवलोकन करके ऐसी समस्याओं का समाधान निकाला जायेगा जिससे उत्पादन एवं उपभोक्ता के उद्देश्य की पूर्ति हो सके।

यद्यपि अबाध अनुकूलतम तकनीक के अन्तर्गत समस्या के निर्णायक चरों में कोई भी प्रतिबन्ध नहीं रखा जाता है और अवकलन के माध्यम से उसका विश्लेषण किया जाता है। दूसरा अत्यन्त सरल रूप जिससे कि अनुकूलतम समस्या का निवारण किया जा सकता है, वो है समस्या के प्रतिबन्धों को बराबरी अथवा समिका सम्बन्ध द्वारा स्पष्ट करना।

रैखिक प्रायोजन समस्या उत्पादन में निर्णयात्मक समस्याओं का सर्वोत्तम हल करने में प्रयुक्त होती है इसके अन्तर्गत, दोनों ही उद्देश्य एवं प्रतिबन्धित सम्बन्धों को निर्णय चरों के रेखीय सम्बन्ध द्वारा किया जाता है। इसके अलावा द्विघाती प्रायोजन समस्या भी होती है जहाँ उद्देश्य फलन निर्णय चरों का द्विघाती रूप ग्रहण कर लेता है।

2.2.2 प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण का अर्थ (Meaning of Constraint Optimum Equation)

प्रतिबन्धित अनुकूलतम तकनीक एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो एक उद्यमी के साधनों को कुशलतम तरीकों से प्रयुक्त करके लाभ एवं धन को अधिकतम करता है। प्रतिबन्धित अनुकूलतम समस्या को लेगरेनजियन गुणक (Lagrange's Multiplier) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। हालांकि, अक्सर आर्थिक निर्णय चरों में निर्बाध एवं असमिका सम्बन्ध का रूप ले लेते हैं। सामान्यतः आर्थिक निर्णय विश्लेषण उन क्रियाओं को निर्धारित करता है जो एक वांछित उद्देश्य फलन (अधिकतम या न्यूनतम) को अनुकूलतम कर सकें। उदाहरण के लिए, एक कीमत-उत्पादन समस्या में, हम उस उत्पादन स्तर को निर्धारित करना चाहेंगे जहाँ लाभ अधिकतम हो। एक उत्पादन समस्या में आगतों के उन संयोगों को ज्ञात करना होता है जो उत्पादन के एक दिये हुए स्तर को न्यूनतम लागत में उत्पादित कर सके। एक पूँजी बजट

समस्या में निवेश के शुद्ध वर्तमान मान को अधिकतम करने वाले प्रोजेक्ट का चुनाव किया जा सके। अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के विभिन्न तकनीकें प्रयुक्त की जाती हैं। गणितीय अर्थशास्त्र और संगणक विज्ञान में किसी दिये गये शर्त व सीमा पर आर्थिक चरों के इष्टतम बिन्दु व सुसंगत हलों (Feasible Solutions) को ज्ञात करने की सर्वोत्तम समीकरण को प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण कहते हैं।

इसके लिए उचित विधियों का सहारा लेते हुए, उस फलन में निहित वास्तविक चरों या पूर्णांक चरों का मान इस प्रकार चुना जाता है कि उस फलन का मान अधिकतम या न्यूनतम (अभिष्टतम्/Optimum) हो जाय। इसके साथ यह भी आवश्यक है कि ये चर एक दिये हुए डोमेन (या समुच्चय) में से हों, दूसरे शब्दों में, ये चर कुछ अन्य दी हुई शर्तों का पालन भी करना चाहिए।

अभीष्टतम प्राप्ति के उपायों को गणित में गणितीय क्रमानुशीलन (गणितीय प्रक्रमन) के नाम से भी जाना जाता है।

अनुकूलतम समस्याओं का वर्गीकरण

(अ) प्रतिबन्धित और अप्रतिबन्धित (Constrained and Unconstrained)

(ब) रैखिक, या अरैखिक (Linear, and Nonlinear)

(स) सतत और असतत (Continuous and Discrete)

(द) शून्य, एक, दो या बहु-लक्ष्य समस्याएँ (None, One or Many Problem/Objectives)

2.2.3 प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण की संरचना (Structure of Constraints Optimum Equation)

प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण को बेहतर तरीके से समझने के लिए उसकी संरचना को जानना ज्यादा आवश्यक है। समस्या का मूल रूप उन वैकल्पिक साधनों को चिन्हित करना है जिससे, प्रतिबन्ध को ध्यान में रखते हुए एक दिये हुए उद्देश्य फलन को प्राप्त किया जा सके और फिर उन साधनों में से उस वैकल्पिक को चयन करना जिससे कि उद्देश्य की प्राप्ति सबसे कुशलतम तरीके से हो सके।

गणितीय रूप में इस समस्या को निम्नलिखित रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है।

अनुकूलतम कीजिये, $U: = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (उद्देश्य व वास्तविक फलन)

(1)

$Y = p_1x_1 + p_2x_2 + \dots + p_nx_n$ (नियंत्रित फलन)

(2)

यहां समीकरण (1) उद्देश्य फलन है जबकि समीकरण (2) प्रतिबन्ध व नियंत्रित फलन को व्यक्त करता है। समस्या की प्रकृति को देखते हुए, अनुकूलतम का तात्पर्य उद्देश्य/फलन को अधिकतम करना या न्यूनतम करने से होता है। समीकरण (2) में चिन्ह इस बात को इंगित करते हैं कि हर प्रतिबन्ध समिका अथवा असमिका के सम्बन्ध का रूप ले सकता है।

बहुत सारे ऐसे घटक होते हैं जो अनुकूलतम समस्याओं को जटिल बना देते हैं और हल करने में मुश्किल पैदा करते हैं। ऐसा ही एक जटिल घटक है समस्या में बहु निर्णायक चर को विद्यमान होना। एक उत्पादक फर्म के लिए लाभ अधिकतम उत्पादन का निर्धारण सरल ढंग से किया जा सकता है। परन्तु एक बड़ी फर्म अक्सर बड़ी तादाद में विभिन्न उत्पादों को उत्पाद करती है। ऐसी फर्म का लाभ अधिकतम समीकरण समस्या हर उत्पादन के लिए असंख्य उत्पादक निर्णयों की जरूरत होती है।

दूसरा घटक जो ऐसी समस्या को हल करने में मुश्किल पैदा करती है वो है— निर्णायक चर एवं सम्बन्धित नतीजों के बीच जटिल प्रकृति का सम्बन्ध। उदाहरण के लिए— लोक नीति निर्णयों में ये निर्धारण करन अत्यन्त कठिन हो जाता है कि एक दिये हुये व्यय और बढ़ी हुई आय, रोजगार और उत्पादकता लाभ के बीच सम्बन्ध कैसे निर्धारण किया जाय। चरों के बीच कोई सरल सम्बन्ध नहीं विद्यमान होता है।

तीसरा जटिल घटक है निर्णायक चर में एक या एक से अधिक जटिल प्रतिबन्धों का विद्यमान होना। उदाहरण के लिए हर संगठन में ऐसे सीमीत साधनों की सीमाएँ होती हैं जो निर्धारक चर पर थोपे जाते हैं। इन प्रतिबंधों को निर्णायक समस्या में समाहित करना चाहिए नहीं तो अनुकूलतम तकनीक ऐसा हल प्रस्तुत करेगा जो व्यावहारिक दृष्टि से अस्वीकृति होगा।

अन्य जटिल घटक है अनिश्चितता का होना। प्रस्तुत अध्ययन में हम निर्णय/विश्लेषण को निश्चितता तक ही सीमित करेंगे।

प्रतिबन्धित अनुकूलतम समस्या को लेगरेन्जियन गुणक (Lagrangian Multiplier) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। अक्सर हालांकि, आर्थिक निर्णय चरों में प्रतिबन्धित एक असमिका सम्बन्ध का रूप ले लेते हैं।

रैखिक प्रायोजन समस्या उत्पादन में निर्णयात्मक समस्याओं का सर्वोत्तम हल करने में प्रयुक्त होती है इसके अन्तर्गत, दोनों ही उद्देश्य एवं प्रतिबन्धित सम्बन्धों को निर्णय चरों के रेखीय सम्बन्ध द्वारा प्रस्तुत किया जाता है। इसके अलावा द्विघाती प्रायोजन समस्या भी होती है जहाँ उद्देश्य फलन निर्णय चरों का द्विघाती रूप ले लेती है।

2.2.4 अनुकूलतम समीकरण में अवकलज का उपयोग (Use of Differentiation in Optimum Equation)

एक लाभ अधिकतम उदाहरण में सीमान्त विश्लेषण धारणा यह स्पष्ट करता है कि उद्देश्य और निर्णय चरों के सम्बन्ध को सारणी या रेख चित्र के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। यह धारणा तब जटिल हो जाती है जब कई निर्णायक चर होते हैं या फिर निर्णय चर एवं उद्देश्य फलन के मध्य सम्बन्ध को बीजगणितीय रूप में व्यक्त किया जाता है, अवकलन के महत्वपूर्ण रूपों को समस्या के अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है।

2.2.4.1 अधिकतमीकरण के समस्या (Problem of Maximization)

सीमान्त विश्लेषण के अन्तर्गत किसी वक्र के अधिकतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिए (उदाहरण के लिए अधिकतम लाभ) एक आवश्यक (किन्तु पर्याप्त नहीं) शर्त यह है कि इस बिन्दु पर वक्र की ढाल शून्य के बराबर हो, इसी शर्त को अवकलन के मध्यम से भी व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि एक फलन का अवकलन किसी बिन्दु की ढाल या उसकी सीमान्त मान को मापता है, फलन $y = f(x)$ की अधिकतम मान को ज्ञात करने की आवश्यक शर्त यह है कि इस बिन्दु पर $\frac{dy}{dx}$ अवकलन शून्य के बराबर होता है। इसे किसी और बीज गणित फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम बिन्दु को प्राप्त करने की प्रथम क्रम शर्त कहा जाता है।

(क) प्रथम क्रम शर्त: लाभ अधिकतमीकरण

लाभ फलन को प्रयोग करते हुए

$$\pi = TR - TC = 40 + 140x - 10x^2$$

फलन का प्रथम अवकलन का मान शून्य रख कर हल करने पर

$$\frac{d\pi}{dx} = 140 - 20x = 0$$

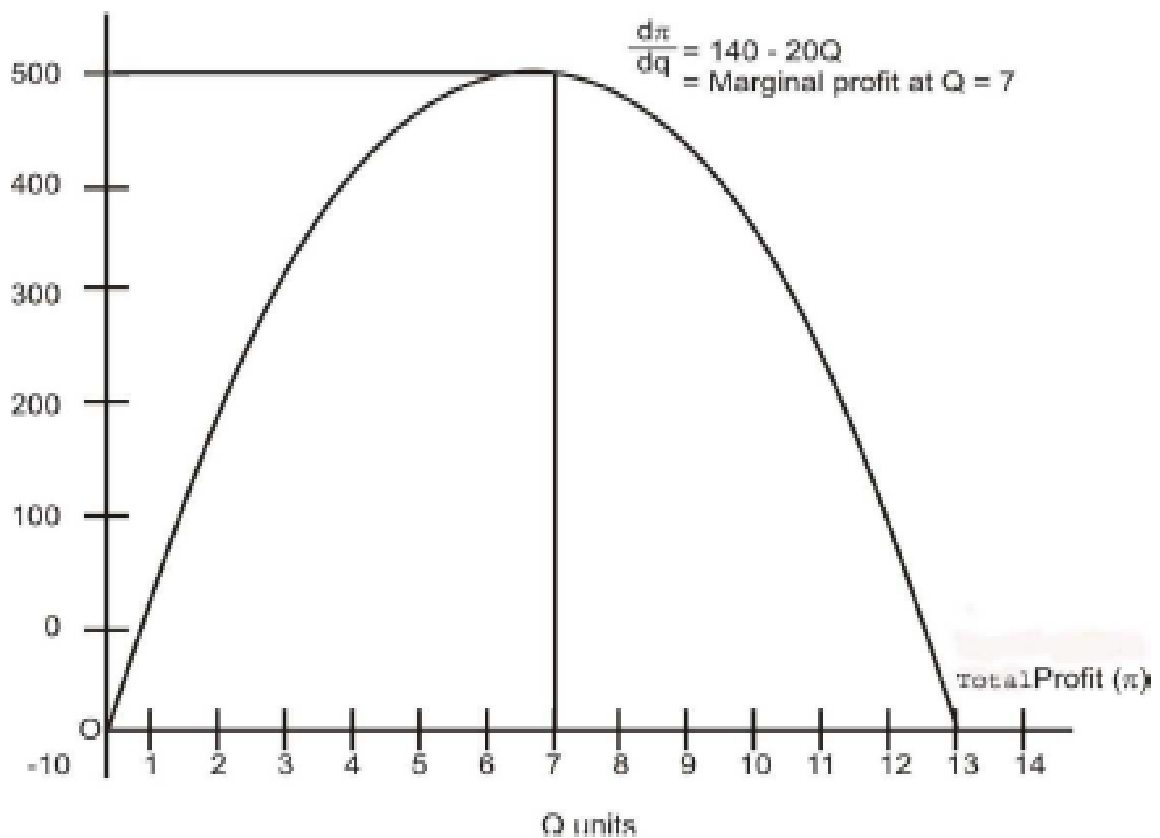
$$140 - 20x = 0$$

$$20x = 140$$

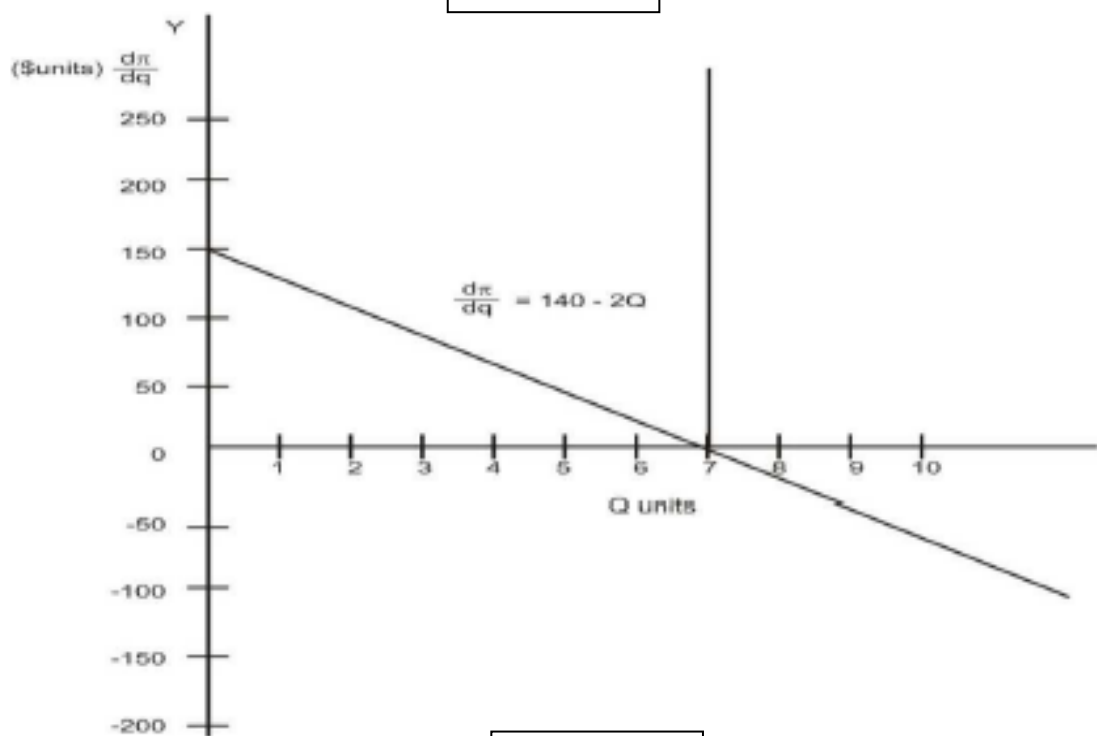
$$x = \frac{140}{20} = 7 \text{ इकाई।}$$

अतः उत्पादन व वस्तु की मात्रा 7 इकाई होने पर अधिकतम लाभ की प्राप्ति होगी।

यह लाभ और प्रथम अवकलन फलन अनुकूलतम हल है। इसे निम्नलिखित चित्र—2.1 एवं 2.2 के द्वारा दर्शाया गया है जहाँ फलन न बढ़ रहा है न घट रहा है। दूसरे शब्दों में, जहाँ ढाल (या प्रथम अवकलन) शून्य के बराबर होती है।



चित्र-2.2.1



चित्र-2.2.1

(ख) द्वितीय अवकलन एवं द्वितीय क्रम शत

फलन के अवकलन को शून्य के बराबर करके निर्णायक चर के मान का हल निकालने से यह साक्ष्य नहीं हो जाता है कि वह बिन्दु ही प्राप्त होगा जिस पर फलन का अधिकतम मान लिया प्राप्त होता है। एक U आकृति फलन की ढाल न्यूनतम बिन्दु पर भी शून्य के बराबर होती है और फलन अपना न्यूनतम मान इस दिये पर बिन्दु पर प्राप्त करता है। दूसरे शब्दों में,

अवकलन को शून्य पर तय करना फलन अधिकतम मान निकालने के लिए एक आवश्यक शर्त तो अवश्य हैं पर पर्याप्त नहीं। दूसरी शर्त, जिसे द्वितीय क्रम शर्त भी कहते हैं में उद्देश्य फलन के द्वितीय क्रम के अवकलज का मान ऋणात्मक होना चाहिए।

इस स्थिति को नीचे दिये गये चित्र-2.2.2 के माध्यम से समझाया गया है। चित्र-2.2.2 में दोनों बिन्दु A तथा B पर फलन की ढाल (प्रथम अवकलन $\frac{dy}{dx}$) शून्य के बराबर है। हालांकि सिर्फ बिन्दु B पर ही फलन अपना अधिकतम मान प्राप्त करती है। हम यह देख सकते हैं कि फलन $y = f(x)$ के अधिकतम मान B के पड़ोस में सीमान्त मान (अथवा ढाल) निरन्तर घटता जा रहा है। पहले $\frac{dy}{dx}$ के बिन्दु तक तो ढाल धनात्मक है और इसके पश्चात ढाल ऋणात्मक हो जाती है।

अतः हमें यह आवश्यक रूप से निर्धारित कर लेना चाहिए कि ढाल की सीमान्त मान (ढाल की ढाल) घटती रही है। यह देखने के लिए कि सीमान्त मान घट रही है एक परीक्षण किया जा सकता है। सीमान्त मान का अवकलन निकालना और फिर यह जांच करना कि फलन के दिये गये बिन्दु पर यह ऋणात्मक है अथवा नहीं। इस प्रकार, हमें अवकलन का अवकलन निकालने की आवश्यकता होगी अर्थात् फलन का द्वितीय अवकलन और फिर परीक्षण करना कि यह शून्य से कम है अथवा नहीं।

फलन $y = f(x)$ का द्वितीय अवकलन इस प्रकार लिखा जाता है। $\frac{d^2y}{dx^2}$ एक अधिकतम बिन्दु तब प्राप्त होता है जब द्वितीय अवकलन ऋणात्मक होता है और $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$ ।

उदाहरण 2.2.1. दिये गये लाभ फलन $\pi = 150 + 25x - 3x^2$ से लाभ अधिकतमीकरण को प्रदर्शित कीजिए।

हल: दिया है $\pi = 150 + 40x - 5x^2$ -----(1)

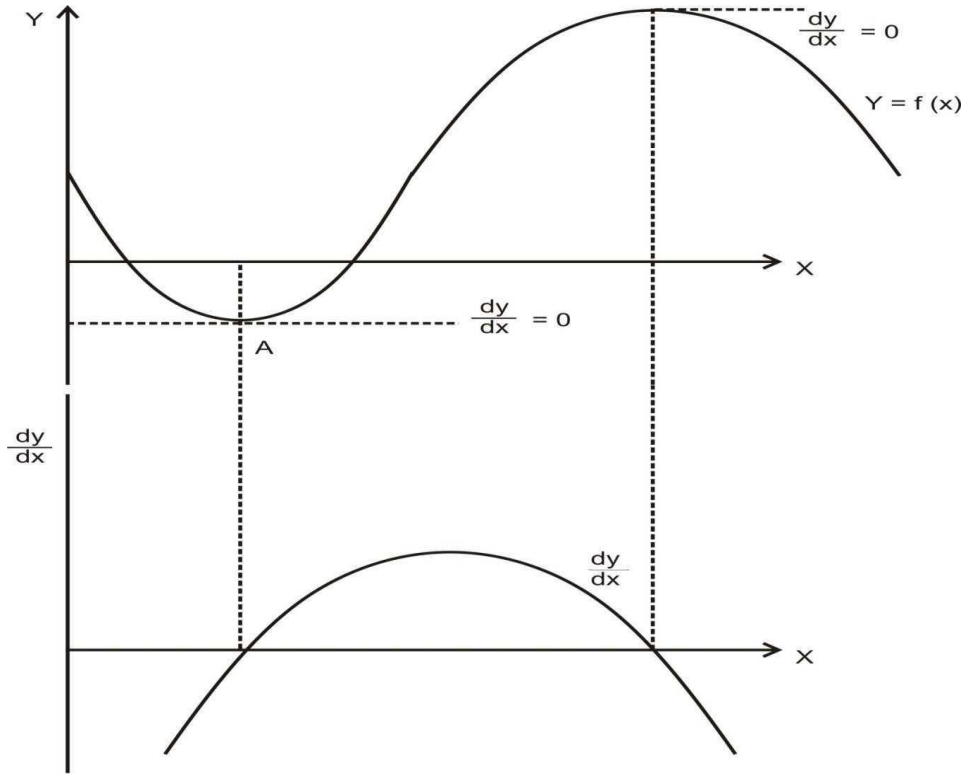
समीकरण (1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर,

$$\frac{d\pi}{dx} = 0 + 40 - 10x = 0 \Rightarrow x = 4$$

$$\frac{d^2\pi}{dx^2} = -10 < 0 \quad \text{जहां } x = 4$$

क्योंकि $\frac{d^2\pi}{dx^2} = -10 < 0$ हम जानते हैं कि लाभ अधिकतम बिन्दु प्राप्त हो गया।

फलन के न्यूनतम मान को ज्ञात करने के लिए विपरीत शर्त को लिया जाता है चित्र में $y = f(x)$ फलन के लिये बिन्दु A (न्यूनतम मान) के पड़ोस में सीमान्त मान (ढाल) निरन्तर बढ़ रहा है। प्रथम तो ढाल उस बिन्दु तक ऋणात्मक है जहाँ $\frac{dy}{dx} = 0$ और उसके पश्चात् ढाल धनात्मक हो जाती है। अतः हम यह परीक्षण करके देखते हैं कि यदि $\frac{d^2y}{dx^2}$ किसी बिन्दु पर है तो यह न्यूनतम बिन्दु है।



फलन का अधिकतम एवं न्यूनतम मान

चित्र - 2.2.2

2.2.4.2 न्यूनतमीकरण के समस्या (Problem of Minimization)

निर्णय लेने की स्थितियों में, न्यूनतमीकरण भी एक उद्देश्य होता है। लाभ अधिकतमकरण समस्याओं की भांति अवकलन को इस संदर्भ के अनुकूलतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिये भी प्रयुक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 2.2.2. दिये गये $C = 15 - 0.040x + 0.00008x^2$ लागत फलन के लिए उत्पादन का वह स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर लागत न्यूनतम हो, जहाँ, $C =$ लागत एवं $x =$ उत्पादन स्तर है।

हल: दिया गया है, $C = 15 - 0.040x + 0.00008x^2$ ----- (1)

समीकरण (1) को x के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$\frac{dC}{dx} = 0 - 0.40 + 0.00016x = 0 \text{ ----- (2)}$$

$$x = \frac{0.40}{0.00016} = \frac{040 \times 100000}{00016 \times 1000} = \frac{4000}{16} = 250$$

समीकरण (2) को पुनः x के सापेक्ष दोबारा अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2C}{dx^2} = +0.00016 > 0 \text{ ----- (3)}$$

क्योंकि द्वितीय अवकलन धनात्मक है, का उत्पादन स्तर = 250 वह मात्रा है जब औसत लागत एवं कुल लागत न्यूनतम होगी।

निष्कर्ष के रूप में, हम कह सकते हैं, किसी फलन का अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात करने के लिए उपर्युक्त दो शर्तों की आवश्यकता होती है। प्रथम क्रम शर्त उस बिन्दु को निर्धारित करती है जहाँ अवकलन $\frac{dy}{dx} = 0$ । एक से अधिक बिन्दु होने पर द्वितीय क्रम शर्त को प्रयुक्त किया जाता है। जिससे फलन के दिये गये बिन्दुओं को अधिकतम या न्यूनतम मान निर्धारित किया जा सकें। द्वितीय $\frac{d^2y}{dx^2}$ अवकलन यह इंगित करता है कि दिया गया बिन्दु फलन का अधिकतम मान $\left(\frac{d^2y}{dx^2} < 0\right)$ अथवा न्यूनतम मान $\left(\frac{d^2y}{dx^2} > 0\right)$ है।

2.2.5 लैंगरेज गुणक सहित प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण (अधिकतम व न्यूनतम)

लेगरेज गुणक के प्रयोग के प्रयोग द्वारा विभिन्न प्रतिबंधित समस्याओं अनुकूलतम हल ज्ञात किया जाता है। इसकी कार्यविधि को नीचे के उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया गया है—

मान लिया कि एक उत्पादक अपने उत्पादों के लिए न्यूनतम लागत संयोजन (Least Cost Combination) की स्थिति प्राप्त करना चाहता है।

मान लिया कि दो आगतों वाला सतत उत्पादन फलन $Q = Q(a, b)$ है जहाँ $Q_a, Q_b > 0$ है तथा दानों आगतों की कीमतें क्रमशः P_a और P_b है।

ऐसी स्थिति में उत्पादक उत्पादन की लागत, $C = aP_a + bP_b$ को कम से कम स्तर पर लाना चाहता है जबकि उसको एक निश्चित मात्रा, $Q_0 = Q(a, b)$ का उत्पादन अनिवार्य रूप से करना है।

उपरोक्त समस्या में उद्देश्य फलन/लागत समीकरण $C = aP_a + bP_b \dots\dots\dots(1)$ तथा अनिवार्य प्रतिबंध समीकरण $Q_0 = Q(a, b) \dots\dots\dots(2)$ है।

Q_a तथा Q_b दोनों आगतों की क्रमशः सीमांत उत्पादकता है। आर्थिक रूप से इन दोनों को आवश्यक रूप से धनात्मक माना जाता है।

यहाँ, लेगरेजियन समीकरण, $Z = aP_a + bP_b + \mu[Q_0 - Q(a, b)] \dots\dots\dots(3)$ है।

जहाँ, μ लेगरेजियन गुणक है।

न्यूनतम लागत संयोग को प्राप्त करने के लिए पहली एवं अनिवार्य शर्तें निम्नलिखित हैं—

$$Z_\mu = Q_0 - Q(a, b) = 0 \dots\dots\dots(a)$$

$$Z_a = P_a - \mu Q_a = 0 \dots\dots\dots(b)$$

$$Z_b = P_b - \mu Q_b = 0 \dots\dots\dots(c)$$

उपरोक्त समीकरण (a) को हल करने पर $Q_0 = Q(a, b)$ प्राप्त होता है जो प्रतिबंध समीकरण ही है।

समीकरण (a) और (b) को हल करने पर,

$$\frac{P_a}{Q_a} = \frac{P_b}{Q_b} = \mu \dots\dots\dots(d)$$

$$\text{या, } \frac{Q_a}{P_a} = \frac{Q_b}{P_b} = \mu \dots\dots\dots(e)$$

चूँकि P_a, P_b, Q_a, Q_b सभी धनात्मक हैं अतः μ भी धनात्मक है।

समीकरण (e) से स्पष्ट है कि न्यूनतम लागत संयोग के लिए अनिवार्य शर्त यह है कि आगतों की सीमांत उत्पादकता और उनकी कीमत का अनुपात समान होना चाहिए।

समीकरण (e) को दूसरे तरीके से लिखने पर,

$$\frac{P_a}{P_b} = \frac{Q_a}{Q_b} \dots\dots\dots(f)$$

उपरोक्त समीकरण में $\frac{P_a}{P_b}$ सम लागत वक्र की ढाल है तथा $\frac{Q_a}{Q_b}$ सम उत्पाद वक्र की ढाल है।

द्वितीय क्रम की शर्त के अनुसार,

न्यूनतम लागत संयोग के लिए ऋणात्मक बोर्डर हेसियन (Bordered Hessian) का मान ऋणात्मक होना चाहिए। इसे आव्यूह के रूप में निम्नलिखित प्रकार से लिया जाता है —

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & Q_a & Q_b \\ Q_a & -\mu Q_{aa} & -\mu Q_{ab} \\ Q_b & -\mu Q_{ba} & -\mu Q_{bb} \end{vmatrix} = \mu(Q_{aa} Q_b^2 - 2Q_{ab} Q_a Q_b + Q_{bb} Q_a^2) < 0$$

चूँकि संतुलन की स्थिति में का मान धनात्मक होता है अतः अनुकूलतम संतुलन की स्थिति में

$$(Q_{aa} Q_b^2 - 2Q_{ab} Q_a Q_b + Q_{bb} Q_a^2) < 0$$

2.2.6 इकाई का सारांश

प्रतिबंधित अनुकूलतम तकनीक एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो एक उद्यमी के साधनों को कुशलतम तरीकों से प्रयुक्त करके लाभ एवं धन को अधिकतम करता है। प्रतिबंधित अनुकूलतम समस्या को लेगरेजियन गुणक (Langrange's Multiplier) द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। हालांकि, अक्सर आर्थिक निर्णय चरों में निबाध एवं असमिका सम्बन्ध का रूप ले लेते हैं।

सामान्यतः आर्थिक निर्णय विश्लेषण उन क्रियाओं को निर्धारित करता है जो एक वांछित उद्देश्य फलन (अधिकतम या न्यूनतम) को अनुकूलतम कर सकें। उदाहरण के लिए एक कीमत-उत्पादन समस्या में, हम उस उत्पादन स्तर को निर्धारित करना चाहेंगे जहां लाभ अधिकतम हों। एक उत्पादन समस्या में आगतों के उन संयोगों को ज्ञात करना होता है जो उत्पादन के एक दिये हुए स्तर को न्यूनतम लागत में उत्पादित कर सकें। एक पूँजी बजट समस्या में निवेश के शुद्ध वर्तमान मान को अधिकतम करने वाले प्रोजेक्ट का चुनाव किया जा सके। अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के विभिन्न तकनीकें प्रयुक्त की जाती हैं। *गणितीय अर्थशास्त्र और संगणक विज्ञान में किसी दिये गये शर्त व सीमा पर आर्थिक चरों के इष्टतम बिन्दु व सुसंगत हलों (Feasible Solutions) को ज्ञात करने की सर्वोत्तम समीकरण को प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण कहते हैं।*

इसके लिए उचित विधियों का सहारा लेते हुए, उस फलन में निहित वास्तविक चरों या पूर्णांक चरों का मान इस प्रकार चुना जाता है कि उस फलन का मान अधिकतम या न्यूनतम (अभीष्टतम/Optimum) हो जाय। इसके साथ यह भी आवश्यक है कि ये चर एक दिये हुए डोमेन (या समुच्चय) में से हों, दूसरे शब्दों में, ये चर कुछ अन्य दी हुई शर्तों का पालन भी करना चाहिए।

अभीष्टतम प्राप्ति के उपायों को गणित में गणितीय क्रमानुशीलन (गणितीय प्रक्रमन) के नाम से भी जाना जाता है।

अनुकूलतम समस्याओं का वर्गीकरण

- (अ) प्रतिबन्धित और अप्रतिबन्धित (Constrained and Unconstrained)
- (ब) रैखिक, द्विघाती या अरैखिक (Linear, Quadratic and Nonlinear)
- (स) सतत और असतत (Continuous and Discrete)
- (द) शून्य, एक, दो या बहु-लक्ष्य समस्याएँ (None, One or Many Problem/Objectives)

2.2.7 मुख्यशब्द

- **अनुकूलतम तकनीक:** ऐसे उपकरण जिनसे किसी उद्यमी के साधनों को कुशलपूर्वक प्रबन्धन किया जा सके जिससे लाभ अधिकतम किया जा सके।
- **प्रतिबन्धित अनुकूलतम समस्या:** ऐसी अनुकूलतम समस्या जिसे उद्देश्य एवं निबाध फलनों द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। जहाँ निर्णायक चरों पर प्रतिबन्ध होना है।
- **अबाध अनुकूलतम समस्या:** ऐसी अनुकूलतम समस्या जहाँ निर्णय चरों पर कोई प्रतिबन्ध लागू नहीं होता है और अवकलन के माध्यम से इसे हल किया जा सकता है।
- **लैंगरेन्जेज गुणक:** इस तकनीक का प्रयोग ऐसी समस्याओं के हलों को ज्ञात करने के लिए प्रयुक्त किया जाता है। जहाँ समस्याओं के प्रतिबन्धों का समिका सम्बन्ध द्वारा व्यक्त जा सके।

2.2.8 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

14. प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण से आप क्या समझते हैं?
15. प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण के विभिन्न प्रकारों का वर्णन कीजिए।
16. प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण में अवकलन के प्रयोग का वर्णन कीजिए।
17. लॉगरेन्ज गुणक के द्वारा किस प्रकार से अनुकूलतम समीकरण का हल किया जाता है?

2.2.9 संदर्भ पुस्तकें

23. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
24. Mishra, J.P., "Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)" Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.

25. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, “आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी”, तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
26. अग्रवाल, डी. आर. ‘प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र’, (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली– 110091
27. J.K. Thukral, “Business Statistics” Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
28. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
29. Agarawal D. R., Quantitative Methods
30. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
31. Yamane, T., Mathematics for Economists.
32. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
33. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., “आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें”, शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड—II- इकाई 03

अनुकूलतम समीकरण की धारणा के अर्थशास्त्र में प्रयोग

प्रारूप:

- 2.3.1 परिचय
- 2.3.2 गणितीय अर्थशास्त्र में अनुकूलतम समीकरण की धारणा
- 2.3.3 गैर-प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण के अर्थशास्त्र में प्रयोग
 - 2.3.3.1 युगपत अनुकूलतम समीकरण
 - 2.3.3.2 अवकलन का अनुकूलतम समीकरण में प्रयोग
- 2.3.4 प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण का अर्थशास्त्र में प्रयोग
- 2.3.5 उपयोगिता फलन एवं अनुकूलतम समीकरण
- 2.3.6 इकाई का सारांश
- 2.3.7 पारिभाषिक शब्दावली
- 2.3.8 मुख्यशब्द
- 2.3.9 अपने प्रगति की जाँच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 2.3.10 अपने उत्तर की जाँच के लिए कुंजी
- 2.3.11 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 2.3.12 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- गणितीय अर्थशास्त्र में अनुकूलतम समीकरण की धारणा
- गैर-प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण के अर्थशास्त्र में प्रयोग
- प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण का अर्थशास्त्र में प्रयोग
- उपयोगिता फलन एवं अनुकूलतम समीकरण

2.3.1 परिचय (Introduction)

इस इकाई के अन्तर्गत हम गणितीय अर्थशास्त्र में अनुकूलतम समीकरण के प्रयोग का अध्ययन करेंगे। यद्यपि प्रथम इकाई में हमलोगों ने गैर-प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण तथा द्वितीय इकाई में प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण के मौलिक गणितीय रूपों के बारे में अध्ययन किया है। यहाँ हम गैर-प्रतिबन्धित एवं प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण के आर्थिक प्रयोग का अध्ययन करेंगे।

आदर्शवादी आर्थिक निर्णय विश्लेषण के उन क्रियाओं को निर्धारित करता है, जो एक वांछित उद्देश्य को सर्वोत्तम ढंग से प्राप्त कर सके। इसका तात्पर्य है कि ऐसी क्रिया जो एक उद्देश्य फलन (अधिकतम या न्यूनतम) को अनुकूलतम कर सके। उदाहरण के लिए एक कीमत-उत्पादन समस्या में, हम उस उत्पादन स्तर को निर्धारित करना चाहेंगे जहाँ लाभ अधिकतम हों। एक उत्पादक समस्या में आगतों के उन संयोगों को ज्ञात करना होता है जो उत्पादन के एक दिये हुए स्तर को न्यूनतम लागत में उत्पादित कर सके। एक पूँजी बजट समस्या में निवेश के शुद्ध वर्तमान मान को अधिकतम करने वाले प्रोजेक्ट को चुनाव किया जा सके। अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के विभिन्न तकनीकें प्रयुक्त की जाती हैं।

उपभोक्ता सन्तुलन की स्थिति उस दशा में होती है, जब बजट रेखा या कीमत रेखा उदासीन वक्र को स्पर्श करती है। दूसरे शब्दों में, बजट रेखा की ढाल और उदासीन वक्र की ढाल समान होने पर उपभोक्ता सन्तुलन की स्थिति में होता है।

उदासीनता वक्र प्रणाली में उदासीनता वक्र के ढलान को सीमान्त उपयोगिताओं के अनुपात में परिभाषित किया गया है तथा बजट रेखा के ढलान को कीमतों के अनुपात से परिभाषित किया गया है। उदासीनता वक्र विश्लेषण स्पष्ट करता है कि वक्र के प्रत्येक बिन्दु पर उपभोक्ता को समान तुष्टिगुण प्राप्त होती है।

2.3.2 गणितीय अर्थशास्त्र में अनुकूलतम समीकरण की धारणा (Concept of Optimum Equation in Mathematical Economics)

अनुकूलतम तकनीक एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो एक उद्यमी के साधनों को कुशलतम तरीकों से प्रयुक्त करके लाभ एवं धन को अधिकतम करता है। समस्या का मूल रूप उन वैकल्पिक साधनों को चिन्हित करना है जिससे, प्रतिबन्धों को ध्यान में रखते हुए उद्देश्य फलन को प्राप्त किया जा सके और फिर उन साधनों में से उस वैकल्पिक को चयन करना जिससे कि उद्देश्य की प्राप्ति सबसे कुशलतम तरीके से हो सके।

2.3.3 गैर-प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण के अर्थशास्त्र में प्रयोग (Use of Non-Constraints Optimum Equations in Economics)

गैर अनुकूलतम समीकरण ऐसे होते हैं जिसके तहत अनुकूलतम बिन्दु या समस्या के निर्णायक चरों में कोई भी प्रतिबन्ध नहीं रखा जाता है और अवकल के माध्यम या साधारण गणितीय संक्रियाओं (युगपत व द्विघातीय समीकरणों) के मदद से हल करके उसका विश्लेषण किया जाता है, ऐसे समीकरणों को ही प्रतिबंध रहित व अबाध अनुकूलतम समीकरण कहा जाता है। उदाहरण के लिए एक कीमत-उत्पादन समस्या के सन्दर्भ में, हम उस उत्पादन स्तर को निर्धारित करना पसन्द करते हैं जहाँ लाभ अधिकतम हो। एक उत्पादन समस्या में आगतों के उन संयोगों को ज्ञात करना होता है जो उत्पादन के एक दिये हुए स्तर को न्यूनतम लागत में उत्पादित कर सकें। एक पूँजी बजट समस्या में निवेश के शुद्ध वर्तमान मान को अधिकतम करने वाले प्रोजेक्ट का चुनाव किया जा सकें। अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के विभिन्न तकनीकें प्रयुक्त की जाती हैं।

2.3.3.1 युगपत अनुकूलतम समीकरण (Simultaneous Optimum Equation)

दो या दो से अधिक चर वाले प्रथम घात के समीकरणों के समूह को युगपत समीकरण कहा जाता है। यदि किसी अज्ञात राशि x और y से सम्बन्धित दो समीकरण दिए गए हैं तब x का एक ही मान दोनों समीकरणों के लिए सत्य होगा तथा इसी तरह y का भी एक ही मान दोनों समीकरणों के लिए सत्य होगा। युगपत समीकरण की सहायता से अज्ञात राशि का अनुकूलतम बिन्दु ज्ञात किया जा सकता है।

उदाहरण 2.3.1. निम्नलिखित समीकरण में स्वतंत्र चर के लिए अनुकूलतम बिन्दु को ज्ञात कीजिए।

$$4x + 2y = 11 \text{ ----- (1)}$$

$$8x - 4y = 10 \text{ ----- (2)}$$

हल: समीकरण (1) को 2 से गुणा कर उसे समीकरण (2) के साथ जोड़ने पर

$$2 \times 4x + 2 \times 2y = 2 \times 11 \text{ ----- (3)}$$

$$8x - 4y = 10$$

$$8x + 4y = 22$$

$$8x - 4y = 10$$

$$+ \quad + \quad +$$

$$16x = 32$$

$$x = \frac{32}{16} = 2$$

जब समीकरण (1) में x का मान रखने पर,

$$4(2) + 2y = 11$$

$$\Rightarrow 2y = 11 - 8 = 3$$

$$\text{या } y = \frac{3}{2}$$

$$\text{अतः } x = 2, y = \frac{3}{2}$$

उदाहरण 2.3.2 निम्नलिखित युगपत समीकरणों को हल करें।

$$7x - 5y = 11 \text{ ----- (1)}$$

$$3x + 2y = 13 \text{ ----- (2)}$$

हल: समीकरण (1) को 3 से तथा समीकरण (2) को 7 से गुणा करके, उसे समीकरण (2) में से समीकरण (1) को घटाने पर,

$$21x - 15y = 33 \quad (3 \text{ से गुणा करने पर}) \quad \text{-----} \quad (3)$$

$$21x + 14y = 91 \quad (7 \text{ से गुणा करने पर}) \quad \text{-----} \quad (4)$$

$$21x + 14y = 91$$

$$21x - 15y = 33$$

$$- \quad - \quad -$$

$$29y = 58$$

$$y = \frac{58}{29} = 2$$

अब समीकरण (2) में y का मान रखने पर,

$$3x + 2(2) = 13$$

$$\Rightarrow 3x = 13 - 4 = 9$$

$$\text{या} \quad x = \frac{9}{3} =$$

$$\text{अतः} \quad x = 3, y = 2$$

2.3.3.2 अवकलन का अनुकूलतम समीकरण में प्रयोग (Use of Differentiation in Optimum Equation)

एक लाभ अधिकतम उदाहरण में सीमान्त विश्लेषण धारणा यह स्पष्ट करता है कि उद्देश्य और निर्णय चरों के सम्बन्ध को सारणी या रेखा या रेखा चित्र के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। यह धारणा तब जटिल हो जाती है जब कई निर्णायक चर होते हैं या फिर निर्णय चर एवं उद्देश्य फलन के मध्य सम्बन्ध को बीजगणितीय रूप में व्यक्त किया जाता है, अवकलन के महत्वपूर्ण रूपों को समस्या के अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है। अर्थशास्त्र में अधिकतम ब न्यूनतम समस्याओं के अनुकूलतम हलों को ज्ञात करने के लिए अवकलों का प्रायः प्रयोग किया जाता है।

लाभ अधिकतमीकरण समस्या

सीमान्त विश्लेषण के अन्तर्गत किसी वक्र के अधिकतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिए (उदाहरण के लिए अधिकतम लाभ) एक आवश्यक शर्त (किन्तु पर्याप्त नहीं) शर्त यह है कि इस बिन्दु पर वक्र की ढाल शून्य के बराबर हो, इसी शर्त को अवकलन के माध्यम से भी व्यक्त किया जा सकता है। क्योंकि एक फलन का अवकलन किसी बिन्दु की ढाल या उसकी सीमान्त मान को मापता है, फलन $Y = f(x)$ की अधिकतम मान को ज्ञात करने की आवश्यक शर्त यह है कि इस बिन्दु पर $\frac{dy}{dx}$ अवकलन शून्य के बराबर होता है। इसे किसी और बीज गणित फलन के अधिकतम अथवा न्यूनतम बिन्दु को प्राप्त करने की प्रथम क्रम शर्त कहा जाता है।

उदाहरण 2.3.3. यदि लाभ फलन $\pi = -10x^2 + 140x - 50$ दिया है तब सीमान्त लाभ या प्रथम शर्त के नियम के अनुसार अनुकूलतम बिन्दु को ज्ञात करें।

हल: दिया गया है, $\pi = -10x^2 + 140x - 50$

प्रथम क्रम जांच या आवश्यक शर्त

$$\frac{d\pi}{dx} = 0$$

समीकरण (1) का के सापेक्ष अवकलन करने एवं शून्य के बराबर करने पर

$$\frac{d\pi}{dx} = \frac{d}{dx} (-10x^2 + 140x - 50) = 0$$

$$-20x + 140 = 0$$

$$x = \frac{140}{20} = 7$$

अतः उपरोक्त समीकरण को हल करने पर हमें यह प्राप्त होता है कि यदि उत्पादन का स्तर 7 इकाई हो तो फर्म को अधिक लाभ अधिकतम प्राप्त होता है जो अनुकूलतम समीकरण के द्वारा प्राप्त किया गया है।

2.3.4 प्रतिबन्धित अनुकूलतम समीकरण का अर्थशास्त्र में प्रयोग (Use of Constraint Optimum Equation in Economics)

उदाहरण 2.3.4. यदि एक लागत फलन $C = 5x^2 - 40x + 20$ दिया है, जहाँ C उत्पादन की लागत तथा x उत्पादन की मात्रा है तब उत्पादन का वह अनुकूलतम स्तर ज्ञात कीजिए जहाँ पर लागत न्यूनतम होगी।

हल: दिया है, $C = 5x^2 - 40x + 20$ ----- (1)

⇒ प्रथम क्रम की जाँच व आवश्यक शर्त

$$\frac{dC}{dx} = 0$$

समीकरण (1) को x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{dC}{dx} = \frac{d}{dx} (5x^2 - 40x + 20) = 10x - 40 = 0$$
 ----- (2)

$$10x - 40 = 0$$

$$10x = 40$$

$$x = \frac{40}{10} = 4$$

⇒

$$x = 4$$

⇒ द्वितीय क्रम की जाँच व पर्याप्त शर्त

समीकरण (2) को पुनः x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$\frac{d^2C}{dx^2} = \frac{d^2}{dx^2} (10x - 40) = 10 > 0 \text{ न्यूनतम बिन्दु सुनिश्चित।} \quad (x = 4 \text{ बिन्दु पर})$$

पर)

अतः जब $x = 4$ हो अर्थात् उत्पादन का स्तर 4 इकाई के बराबर हो तब लागत फलन अपने न्यूनतम अवस्था पर होगी। जो एक अनुकूलतम बिन्दु को प्रदर्शित करती है।

उदाहरण 2.3.5. यदि $C = 3x^2 - 12x + 4xy + 2y^2 - 8y + 100$ एक लागत फलन दिया गया है तब उत्पादन के साधन x एवं y के उस अनुकूलतम बिन्दु के संयोग को ज्ञात कीजिए जिस पर लागत न्यूनतम बिन्दु की प्राप्ति हो सके।

हल: दिया है $C = 3x^2 - 12x + 4xy + 2y^2 - 8y + 100$ ----- (1)

प्रथम कोटि व अनिवार्य प्रतिबन्ध

$$\frac{\partial C}{\partial x} = 6x - 12 + 4y + 0 - 0 + 0 = 0$$
 ----- (2)

$$\frac{\partial C}{\partial y} = 0 - 0 + 4x + 4y - 8 + 0 = 0$$
 ----- (3)

समीकरण (2) एवं (3) को हल करने पर

$$6x + 4y = 12$$

$$4x + 4y = 8$$

अतः जब $x = 2$ हो तब $y = 0$

इस प्रकार, अनिवार्य शर्त को ज्ञात करने के लिए हमारे प्राप्त बिन्दु $(2, 0)$ है।

अब हम ये ज्ञात करेंगे कि उपरोक्त मान, अधिकतम एवं न्यूनतम की शर्तों को सन्तुष्ट करते हैं या नहीं।

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 6; \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 4; \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = 4$$
 ----- (4)

अब समीकरण (4) में $x = 2$ तथा $y = 0$ के मान को रखने पर,

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 6 = 6 > 0;$$
 ----- (5)

$$\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 4 > 0; \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = 4 > 0$$
 ----- (6)

पर्याप्त शर्त की जाँच

$$f_x \times f_y - (f_{xy})^2 > 0 \Rightarrow 6 \times 4 - (4)^2 = 24 - 16 = 8 > 0$$

इस प्रकार (2, 0) बिन्दु पर फलन न्यूनतम की शर्तों को पूरा करता है।

वैकल्पिक विधि

(हेसियन शर्त के अनुसार)

$$|H_1| < 0, |H_2| < 0 \dots \dots \dots (-1)^m |H_m| > 0 \quad (\text{अधिकतम के लिए})$$

$$|H_1| > 0, |H_2| > 0 \dots \dots \dots (-1)^m |H_m| > 0 \quad (\text{न्यूनतम के लिए})$$

यहां $|H_1| = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$

$$|H_1| = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial C}{\partial x} \right)$$

$$|H_1| = \frac{\partial}{\partial x} (6x - 12 + 4y)$$

$$|H_1| = 6 > 0$$

और $|H_2| = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \end{vmatrix}$

समीकरण (5) एवं (6) से हमें प्राप्त होते हैं—

$$\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} = 6 > 0, \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} = 4 > 0, \frac{\partial^2 C}{\partial x \partial y} = 4 > 0, \frac{\partial^2 C}{\partial y \partial x} = 4 > 0$$

$$|H_2| = \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि उत्पादन के साधन $x = 2$ तथा $y = 0$ हों तब लागत फलन का अनुकूलतम होगा जहां लागत न्यूनतम है।

उदाहरण 2.3.6 दिये गये $C = 15 - 0.040x + 0.00008x^2$ लागत फलन के लिए उत्पादन का वह स्तर ज्ञात कीजिए जिस पर लागत न्यूनतम हो, जहाँ, $C =$ लागत एवं $x =$ उत्पादन स्तर है।

हल: दिया गया है, $C = 15 - 0.040x + 0.00008x^2$ ----- (1)

समीकरण (1) को x के सापेक्ष में अवकलन करने पर

$$\frac{dC}{dx} = 0 - 0.40 + 0.00016x = 0 \quad \text{----- (2)}$$

$$x = \frac{0.40}{0.00016} = \frac{040 \times 100000}{00016 \times 1000} = \frac{4000}{16} = 250$$

समीकरण (2) को पुनः x के सापेक्ष दोबारा अवकलन करने पर,

$$\frac{d^2 C}{dx^2} = +0.00016 > 0 \quad \text{----- (3)}$$

क्योंकि द्वितीय अवकलन धनात्मक है, का उत्पादन स्तर = 250 वह मात्रा है जब औसत लागत एवं कुल लागत न्यूनतम होगी।

निष्कर्ष के रूप में, हम कह सकते हैं, किसी फलन का अधिकतम एवं न्यूनतम मान ज्ञात करने के लिए उपर्युक्त दो शर्तों की आवश्यकता होती है। प्रथम क्रम शर्त उस बिन्दु को निर्धारित करती है जहां अवकलन $\frac{dy}{dx} = 0$ । एक से अधिक बिन्दु होने पर द्वितीय क्रम शर्त को प्रयुक्त किया जाता है। जिससे फलन के दिये गये बिन्दुओं को अधिकतम या न्यूनतम मान निर्धारित

किया जा सकें। द्वितीय $\frac{d^2y}{dx^2}$ अवकलन यह इंगित करता है कि दिया गया बिन्दु फलन का अधिकतम मान $\left(\frac{d^2y}{dx^2} < 0\right)$ अथवा न्यूनतम मान $\left(\frac{d^2y}{dx^2} > 0\right)$ है।

2.3.4.1 क्षतिपूरक माँग फलन (Compensated Demand Function)

क्षति पूरक माँग वस्तु की वह मात्रा दर्शाता है जो एक उपभोक्ता निश्चित शर्तों (जैसे-कर, आर्थिक सहायता) आदि के अन्तर्गत क्रय करता है।

यदि

$$U = f(q_1, q_2) \text{ तब व्यंजक}$$

$$Z = p_1 q_1 + p_2 q_2 + \lambda (\bar{U} - f(q_1, q_2))$$

को आंशिक अवकलन करके शून्य के बराबर रखने पर

$$\frac{\partial Z}{\partial q_1} = p_1 - \lambda f_1 = 0 \Rightarrow p_1 = \lambda f_1 \Rightarrow \lambda = \frac{p_1}{f_1}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial q_2} = p_2 - \lambda f_2 = 0 \Rightarrow p_2 = \lambda f_2 \Rightarrow \lambda = \frac{p_2}{f_2}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = \bar{U} - f(q_1, q_2) = 0 \Rightarrow \bar{U} = U = f(q_1, q_2)$$

यदि, $U = \bar{U} = f(q_1, q_2) = q_1 q_2$ हो तब

q_1 एवं q_2 के लिए हल करने पर अभीष्ट क्षतिपूरक माँग होगी—

$$q_1 = \sqrt{\left(\frac{\bar{U} \cdot p_2}{p_1}\right)}, \quad q_2 = \sqrt{\left(\frac{\bar{U} \cdot p_1}{p_2}\right)},$$

2.3.4.2 स्लटस्की समीकरण लोच रूप में (Slutsky Equation in Elasticity Form)

हम जानते हैं कि माँग की लोच,

$$E_p = \frac{p}{q} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{q} \frac{dq}{dp}$$

स्लटस्की समीकरण

$$\frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) U = \text{अचर}, \quad -q_1 \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) p = \text{अचर}$$

दोनों तरफ $\frac{p_1}{q_1}$ से गुणा करने पर

$$\frac{p_1}{q_2} \frac{\partial q_1}{\partial p_1} = \frac{p_1}{q_2} \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) U = \text{अचर}, \quad \frac{q_1 p_1}{q_2} \left(\frac{\partial q_1}{\partial p_1}\right) = \text{अचर}$$

अथवा

$$\eta_{1p} = \eta_1 - \frac{p_1 q_1}{y} \eta_{1y}$$

यहाँ η_{1p} = कीमत लोच, η_{1s} = प्रतिस्थापन लोच तथा η_{1y} = आय लोच प्रदर्शित करते हैं।

2.3.5 उपयोगिता फलन एवं अनुकूलतम समीकरण (Utility Function and Optimum Equation)

उदाहरण 2.3.7 यदि दो वस्तुओं के लिए उपयोगिता फलन $U = 3x^2 y^2$ है तथा बजट परिसीमा $2x + 3y = 18$ हो तो x एवं y वस्तुओं की माँगी जाने वाली मात्राओं को ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया उपयोगिता फलन है—

$$U = 3x^2 y^2$$

तथा बजट परिसीमा (Budget Constraint) है—

$$2x + 3y = 18$$

या $2x + 3y - 18 = 0$

लैंगरेज गुणक का प्रयोग करने पर माँग फलन होगी—

$$Z = 3x^2 y^2 + \lambda(2x + 3y - 18) \quad \text{----- (1)}$$

माँग फलन का 'x', 'y' तथा 'λ' के संदर्भ में पृथक-पृथक आंशिक अवकलन करते हैं। इसके उपरान्त उपयोगिता को अधिकतम करने के लिए प्रथम अवकलज (first derivative) को शून्य के बराबर पर रखने पर—

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = 6xy^2 + 2\lambda = 0 \quad \text{----- (2)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = 6x^2y + 3\lambda = 0 \quad \text{----- (3)}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 2x + 3y - 18 = 0 \quad \text{----- (4)}$$

समीकरण (2) एवं (3) को लेने पर

$$\frac{-2\lambda}{-3\lambda} = \frac{6xy^2}{6x^2y} \quad \text{अथवा} \quad \frac{2}{3} = \frac{y}{x} \quad \text{अथवा} \quad 2x = 3y$$

अथवा $x = \frac{3}{2}y$

x का मान समीकरण (4) में रखने पर,

$$2 \times \frac{3}{2}y + 3y - 18 = 0$$

अथवा $6y = 18$ अथवा $y = \frac{18}{6} = 3$

y का मान पुनः समीकरण (4) में रखने पर

$$2x + (3 \times 3) - 18 = 0$$

अथवा $2x = 9$ अथवा $x = \frac{9}{2} = 4.5$

अतः तथा वस्तु को माँगी जाने वाली मात्रा क्रमशः 4.5 तरह 3 प्राप्त होगी।

2.3.6 इकाई का सारांश

आर्थिक निर्णय विश्लेषण के उन क्रियाओं को निर्धारित करता है, जो एक वांछित उद्देश्य को सर्वोत्तम ढंग से प्राप्त कर सके। इसका तात्पर्य है कि ऐसी क्रिया जो एक उद्देश्य फलन (अधिकतम या न्यूनतम) को अनुकूलतम कर सकें। उदाहरण के लिए एक कीमत-उत्पादन समस्या में, हम उस उत्पादन स्तर को निर्धारित करना चाहेंगे जहाँ लाभ अधिकतम हों। एक उत्पादक समस्या में आगतों के उन संयोगों को ज्ञात करना होता है जो उत्पादन के एक दिये हुए स्तर को न्यूनतम लागत में उत्पादित कर सके। एक पूँजी बजट समस्या में निवेश के शुद्ध वर्तमान मान को अधिकतम करने वाले प्रोजेक्ट को चुनाव किया जा सकें। अनुकूलतम समस्याओं को हल करने के विभिन्न तकनीकें प्रयुक्त की जाती हैं।

यदि किसी वस्तु की कीमत में परिवर्तन हो जाये तो उपभोक्ता के उपभोग में क्या परिवर्तन होंगे? यह कीमत प्रभाव बताता है।

यदि किसी वस्तु की कीमत में कमी हो जाती है तो उपभोक्ता की वास्तविक आय में वृद्धि हो जाती है। इसके विपरीत वस्तु की कीमत में वृद्धि हो जाने से उपभोक्ता की वास्तविक आय में कमी आ जायेगी।

यदि किसी वस्तु की सापेक्ष में कीमत वृद्धि हो जाती है तो उपभोक्ता प्रतिस्थापित वस्तु का उपभोग अधिक करने लग जाता है।

जब किसी वस्तु की कीमत में परिवर्तन हो जाता है तो उपभोक्ता की संतुष्टि स्तर में भी परिवर्तन आ जाता है, इसलिए उपभोक्ता संतुलन भी दूसरे अन्य उदासीनता वक्र पर स्थापित हो जाता है।

गिफिन वस्तुओं तथा घटिया वस्तुओं, दोनों स्थितियों में आय प्रभाव ऋणात्मक होता है।

2.3.7 पारिभाषिक शब्दावली

गिफिन वस्तु— वह वस्तु जिसका आय प्रभाव, प्रतिस्थापन प्रभाव से अधिक होता है, अर्थात् कीमत कम होने पर वस्तु की माँग भी कम हो जाती है, गिफिन वस्तुएं कहलाती हैं।

प्रतिस्थापन वस्तुएं— यदि दो वस्तुओं का प्रतिस्थापन प्रभाव धनात्मक होता है तब ऐसे वस्तुओं को प्रतिस्थापन वस्तुएं कहते हैं।

2.3.8 मुख्य शब्द

- **अनुकूलतम समीकरण:** अनुकूलतम समीकरण होते हैं जिसके तहत अनुकूलतम बिन्दु या समस्या के निर्णायक चरों में कोई भी प्रतिबन्ध नहीं रखा जाता है और अवकल के माध्यम या साधारण गणितीय संक्रियाओं (युग्मपत व द्विघातीय समीकरणों) के मदद से हल करके उसका विश्लेषण किया जाता है, ऐसे समीकरणों को ही प्रति रहित व अबाध अनुकूलतम समीकरण कहा जाता है।
- **उपयोगिता फलन:** जब किसी वस्तु की कीमत में परिवर्तन हो जाता है तो उपभोक्ता की संतुष्टि स्तर में भी परिवर्तन आ जाता है, इसलिए उपभोक्ता संतुलन भी दूसरे अन्य उदासीन वक्र पर स्थापित हो जाता है।

2.3.9 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

1. एक उपभोक्ता की आय रहती है।
2. जिस बिन्दु पर उपभोक्ता को अधिकतम संतुष्टि प्राप्त होती है, वह संतुलन कहलाता है।
3. उपभोक्ता संतुलन की स्थिति उस दशा में होती है जब बजट रेखा या कीमत रेखा वक्र को स्पर्श करती है।
4. उदासीन वक्र प्रणाली में उदासीनता वक्र के ढलान को उपयोगिता के अनुपात में परिभाषित किया गया है।
5. उदासीनता वक्र का ढाल = सीमान्त उपयोगिता का अनुपात।

(ख) बहुविकल्पीय प्रश्न

6. यदि किसी वस्तु की कीमत में कमी हो जाती है तो उपभोक्ता की वास्तविक आय में क्या परिवर्तन होता है ?
(अ) कीमत (ब) उपभोग (स) उपभोक्ता (द) वस्तु।
7. यदि किसी वस्तु की कीमत में कमी हो जाती है तो उपभोक्ता की वास्तविक आय में क्या परिवर्तन होता है ?
(अ) कमी (ब) वृद्धि (स) समान (द) इनमें से कोई नहीं।
8. वस्तु की कीमत में वृद्धि हो जाने से उपभोक्ता की वास्तविक आय में क्या परिवर्तन होता है ?
(अ) समान (ब) वृद्धि (स) समान (द) इनमें से कोई नहीं
9. $E_p = (-) \dots \dots \dots \frac{\Delta q}{\Delta p}$
(अ) $\frac{q}{p}$ (ब) $\frac{d}{q}$ (स) $\frac{q}{d}$ (द) $\frac{p}{q}$
10. कीमत प्रभाव = प्रतिस्थापन प्रभाव + ...
(अ) आय प्रभाव (ब) कीमत प्रभाव (स) उपभोक्ता प्रभाव (द) सभी।

2.3.10 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

- (क) 1. स्थिर 2. उपभोक्ता 3. उदासीन 4. सीमान 5. $\frac{MU_1}{MU_2}$
- (ख) 6. (अ) कीमत 7. (ब) वृद्धि 8. (स) समान 9. (द) $\frac{p}{q}$ 10. (अ) आय प्रभाव।

2.3.11 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

18. लेंगरेज गुणक से आप क्या समझते हैं ? यह कैसे कार्य करता है?
19. $Z = x^3 + x^2 - xy + y^2 + 14$ के उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ मूल्य निकालिये।
20. **उदाहरण 4.** $U = x^a y^b$ दो वस्तुओं की तुष्टिगुण फलन है जहाँ x तथा y इन दोनों वस्तुओं की क्रमशः मात्रायें हैं। x तथा y वस्तुओं पर खर्च की जाने वाली आय M है तो सिद्ध कीजिए की वस्तुओं की माँग—

$$x = \frac{aM}{(a+b)p_x} \quad \text{तथा} \quad y = \frac{bM}{(a+b)p_y}$$

जहाँ p_x तथा p_y , x तथा y वस्तुओं की कीमते हैं।

2.2.12 संदर्भ पुस्तकें

34. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
35. Mishra, J.P., “Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)” Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.
36. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, “आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी”, तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
37. अग्रवाल, डी. आर. ‘प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र’, (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली— 110091
38. J.K. Thukral, “Business Statistics” Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
39. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
40. Agarawal D. R., Quantitative Methods
41. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
42. Yamane, T., Mathematics for Economists.
43. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
44. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., “आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें”, शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड—02 — इकाई 04

समाकलन की अवधारणा एवं इसका अर्थशास्त्र में प्रयोग

प्रारूप:

- 2.4.1 परिचय
- 2.4.2 समाकलन की अवधारणा व परिभाषा
 - 2.4.2.1 प्रति-अवकलज के रूप में समाकलन
 - 2.4.2.2 व्यापक समाकलन
- 2.4.3 अनिश्चित एवं निश्चित समाकलन
- 2.4.4 समाकलन के मूल नियम
 - 2.4.3.1 समाकलन के मानक सूत्र
 - 2.4.3.2 प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन
 - 2.4.3.3 खण्डशः विधि द्वारा समाकलन
- 2.4.5 अर्थशास्त्र में समाकलन का उपयोग
- 2.4.6 इकाई का सारांश
- 2.4.7 मुख्य शब्द
- 2.4.8 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 2.4.9 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- समीकरणों का समाकलन निकालना
- अर्थशास्त्र में समाकलन का उपयोग करना

2.4.1 परिचय (Introduction)

गणितीय अर्थशास्त्र में एक आर्थिक फलन में होने वाले परिवर्तन के लिए सामान्यतया अवकलन का प्रयोग करते हैं, जो आर्थिक गतिविधियों के सूक्ष्मतः स्तर की ओर अग्रसर करती है। जबकि, अवकलन के विपरीत हमें आर्थिक फलनों के घटकों व चरों को एकीकृत करके समझने की आवश्यकता होती है जिसे समाकलन के रूप में अध्ययन किया जाता है। दूसरे शब्दों में आर्थिक तथ्यों के विश्लेषण में हमें अनेकों बार सूक्ष्म से व्यापक और व्यापक से सूक्ष्म की ओर गतिमान होना पड़ता है। अत्यन्त सरल रूप में कुल लागत से सीमान्त लागत तथा कुल आगम से सीमान्त आगम ज्ञात करते हैं। अवकलन का अध्ययन करते समय हमने देखा है कि कुल लागत व आगम दिये होने पर सीमान्त लागत व सीमान्त आगम का मान ज्ञात किया जाता है जो यह प्रदर्शित करता है कि स्वतंत्र आर्थिक चर में एक सूक्ष्म इकाई के परिवर्तन से कुल आर्थिक फलन में क्या परिवर्तन होता है। समाकलन एक तरह से अवकलन का ही प्रतिलोम क्रिया है जिसमें यदि सीमान्त लागत अथवा सीमान्त आगम दिया हो तब कुल लागत अथवा कुल आगम फलन को ज्ञात किया जाता है।

2.4.2 समाकलन की अवधारणा एवं परिभाषा (Concept and Definition of Integration)

समाकलन की अवधारणा वास्तव में इसके दो भिन्न लक्षणों और दो भिन्न प्रयोगों में निहित है। एक दृष्टि में समाकलन एक निश्चित भौतिक अभिव्यक्ति का सीमांकित मूल्य है, जो गणितीय विश्लेषण में दृष्टिगोचर होता है, आरेखीय शब्दावली में एक वक्र के भीतर के क्षेत्रफल को व्यक्त करता है। इस दृष्टिकोण से समाकलन को निश्चित समाकलन कहते हैं। दूसरे दृष्टिकोण से समाकलन अवकलन की ही उल्टी प्रक्रिया है। किसी चर के फलन का अवकलज उसी चर का फलन होता है। यदि इसका व्युत्क्रम प्राप्त किया जाए तो दूसरा फलन ऐसा प्राप्त होता है जिनका पहला फलन अवकलज था। यदि अवकलज का अस्तित्व है तो दूसरा फलन ही समाकलन होता है और इस दृष्टिकोण से समाकलन को अनिश्चित समाकलन कहते हैं। इस प्रकार समाकल की अवधारणा निश्चित तथा अनिश्चित समाकलन में निहित है।

2.4.2.1 प्रति-अवकलज के रूप में समाकलन (Integration in form of Anti-Derivative)

समाकलन की परिभाषा (Definition of Integration)— किसी (फलन का अवकलन ज्ञात करने की प्रतिलोम (Inverse) संक्रिया को समाकलन (Integration) कहते हैं। अवकल गणित में हम दिये गये फलन का अवकल गुणांक (differential coefficient) ज्ञात करते हैं, परन्तु समाकल-गणित में हमें उन फलनों को ज्ञात करना होता है जिनका अवकल गुणांक दिया हुआ फलन है।

उदाहरण 2.4.1— माना कि $f(x)$, x का कोई फलन है जिसका अवकल गुणांक $f'(x)$ है अर्थात्

$$\frac{d}{dx}\{f(x)\} = f'(x)$$

तब हम कहते हैं कि $f'(x)$ का एक **समाकल (integral)**, $f(x)$ है।

प्रतीक के रूप में हम इसे निम्न तरीके से निरूपित कर सकते हैं—

$$\int f'(x) dx = f(x) + c \quad \text{----- (1)}$$

यहां “ $\int$ ” समाकलन का प्रतीक है जिसे समाकलन चिह्न (sign of integration) कहा जाता है। यह चिह्न अंग्रेजी वर्णमाला व रोमन लिपि “S” के पतला व वृहत् स्वरूप को इंगित करता है जिसे ज्यादा लम्बा खींचने पर यह बनावट प्राप्त होता है। चूंकि अंग्रेजी शब्द “SUM” या योग व समग्र के प्रथम अक्षर को प्रदर्शित करता है जो फलन के समाकलन को निरूपित करता है। दूसरे शब्दों में संकेत $\int$ अंग्रेजी अक्षर का विकृत रूप है। वस्तुतः समाकलन योग की एक विशेष विधि है और अंग्रेजी शब्द “SUM” के प्रथम अक्षर S से ही संकेत $\int$ बना है।

समीकरण (1) के बायाँ पक्ष dx में x से यह प्रकट होता है कि समाकल (integration) चर (variable) x के सापेक्ष किया गया है। यदि समाकलन किसी अन्य चर के सापेक्ष करना हो, तो x के स्थान पर चर को रख देते हैं।

किसी फलन का समाकलन (integration) करने की विधि को समाकलन करना (integration) कहते हैं। जिस फलन का समाकलन किया जाता है उसे **समाकल्य (integrand)** कहते हैं तथा समाकलन द्वारा प्राप्त फलन को **समाकल (integral)** कहते हैं।

$$\int f'(x) dx = f(x) \text{ में } f'(x) \text{ समाकल्य और } f(x) \text{ समाकल है।}$$

$$\text{अर्थात् } \frac{d}{dx} \left\{ \int f'(x) dx \right\} = \frac{d}{dx} f(x) = f'(x)$$

इससे स्पष्ट होता है कि अवकलन और समाकलन प्रतिलोम संक्रियाएँ हैं।

2.4.2.2 व्यापक समाकलन (Comprehensive Integrals)

अवकलन गणित से, हम जानते हैं कि यदि फलन $f(x)$ का अवकल गुणांक (Differential coefficient) $f'(x)$ है, तो $F(x) + c$ का अवकल गुणांक भी $f'(x)$ ही होगा, जहाँ c कोई स्वेच्छा अचर (arbitrary constant) है।

$$\text{अर्थात् यदि } \frac{df(x)}{dx} = f'(x)$$

$$\text{तो } \frac{d}{dx} \{f(x) + c\} = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} (c) = \frac{d}{dx} f(x) + 0 = f'(x)$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + c$$

जहाँ c एक स्वेच्छा अचर है जिसके असंख्य मान हो सकते हैं।

अतः किसी फलन का समाकल अद्वितीय (unique) नहीं होता है, चूंकि c को भिन्न-भिन्न मान देने पर $f'(x)$ के अनेक समाकल (integrals) प्राप्त होते हैं, अतः यदि $f(x)$, $f'(x)$ का कोई समाकल (integral) हो, तो $F(x) + c$ उसका व्यापक समाकल (Comprehensive Integral) होगा।

2.4.3 अनिश्चित एवं निश्चित समाकलन (Indefinite and Definite Integrals)

x के सन्दर्भ में $f'(x)$ के समाकलन $\int f'(x) dx$ को अनिश्चित समाकल (indefinite integral) कहा जाता है क्योंकि इसका कोई निश्चित अंकीय मूल्य नहीं होता है। जब यह $f(x) + c$ के बराबर होता है, तब इसे $f'(x)$ का सामान्य समाकल (General Integral) कहा जाता है। c का

मूल्य निश्चित हो जाने पर इसे विशिष्ट समाकल कहा जाता है। ध्यान रहे कि c का मूल्य निश्चित हो जाने पर भी इसका मूल्य x के मूल्य के साथ परिवर्तित होता है। अतः अनिश्चित समाकल चर x का ही फलन होता है, जिसे अनिश्चित समाकलन कहते हैं।

यदि a तथा b चर x की निम्न तथा उच्च सीमा हो जहाँ $a \leq x \leq b$, तो समाकल को

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

लिखते हैं तथा इस प्रकार के समाकल को निश्चित समाकल (definite integral) कहते हैं जिसका मान c तथा x रहित है, अर्थात् c को लुप्त करने के लिए,

$$\int f(x)dx]_{x=a} = F(a) + c \quad \text{----- (i)}$$

$$\int f(x)dx]_{x=b} = F(b) + c \quad \text{----- (ii)}$$

(ii) में से (i) को घटाते हैं,

$$\int f(x)dx]_{x=b} - \int f(x)dx]_{x=a} = F(b) - F(a)$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि निश्चित समाकल का मान c की उच्च सीमा तथा निम्न सीमा के लिए अनिश्चित समाकल के मान का अन्तर होता है, जिसे निश्चित समाकलन कहते हैं।

2.4.4 समाकलन के मूल नियम (Basic Rule of Integrations)

हमने यह जाना कि समाकलन अवकलन का प्रतिलोम है। किसी फलन का समाकलन ज्ञात करने के निम्नलिखित कुछ नियमों का अध्ययन हम निम्नलिखित उप शीर्षकों के द्वारा करेंगे।

2.4.4.1 समाकलन के मानक सूत्र (Standard Formula of Integration)

कुछ मानक फलनों के अवकल गुणांक ज्ञात करने के लिए मानक सूत्र निम्नलिखित हैं—

- 1 $\int f(x)dx = F(x)$
- 2 $\int 0dx = C = \text{Constant}$
- 3 $\int 1dx = X$
- 4 $\int Adx = A \int 1dx = AX$
- 5 $\int Af(x)dx = A \int f(x)dx$
- 6 $\int X^n dx = \frac{X^{n+1}}{n+1}$
- 7 $\int e^x dx = e^x$
- 8 $\int \frac{1}{x} dx = \log x$
- 9 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log f(x)$
- 10 $\int a^x dx = a^x \frac{a^x}{\log a}$
- 11 $\int \sin x dx = -\cos x$
- 12 $\int \cos x dx = \sin x$

2.4.4.2 अवकलन की मुख्य क्रियाएँ (Operations)

अवकलन के दौरान सामान्यतः निम्नलिखित क्रियाएँ की जाती हैं —

(i). योग/घटाव की क्रियाएँ

यदि $U = f(X)$ तथा $V = f(X)$

$$\int (U \pm V) dx = \int U dx \pm \int V dx$$

$$\text{उदाहरण 2.4.2 } \int (2X^2 + e^x) dx = \int 2X^2 dx + \int e^x dx = 2\frac{X^3}{3} + e^x + C$$

(ii). गुणा की क्रियाएँ:

यदि $U = f(X)$ तथा $V = f(X)$

$$\int U V dx = U \int V dx - \int (U' \int V dx) dx$$

$$\begin{aligned}\text{Ex 2.4.3. } \int x e^x dx &= x \int e^x dx - \int (1 \cdot \int e^x dx) dx \\ &= x e^x - \int e^x dx \\ &= x e^x - e^x + c\end{aligned}$$

(iii). प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन (Integration by Substitution)

इस प्रक्रिया में दिये हुए समाकल्य (Integrand) को मानक सूत्रों (Standard formula) में परिवर्तित करके समाकल किया जाता है। इसके लिए समाकल्य की चर राशि के किसी फलन को अन्य चर राशि के बराबर रखते हैं और समाकल्य में प्रतिस्थापित कर समाकल्य को नई चर राशि के फलन के रूप में इस प्रकार परिवर्तित कर लेते हैं कि सूत्रों का प्रयोग सरलता से किया जा सके।

साधारणतया एक दिय गये फलन $\int f(x)dx$ को हम एक दूसरे फलन $f(u)du$ में बदल सकते हैं। यदि x को उचित रूप में u द्वारा प्रतिस्थापित किया जा सके। यह विधि विशेषकर दो फलनों के गुणनफल का समाकल ज्ञात करने में उपयोगी होती है। उदाहरण द्वारा इसे आसानी से समझ सकते हैं।

उदाहरण: 2.4.4. $\int 3x^2(x^3 + 7) dx$ का मान ज्ञात करें।

हल: सर्वप्रथम मान लेते हैं कि

$$t = x^3 + 7$$

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2 \quad \text{या} \quad dt = 3x^2 dx$$

t का मान मूल फलन में रखने पर (ध्यान रहे dx को भी dt के सन्दर्भ में बदलना पड़ता है)

$$\begin{aligned}\int t dt &\text{ क्योंकि } 3x^2 dx = dt \\ &= \frac{t^2}{2} + c = \left[\frac{(x^3 + 7)^2}{2} \right] + c\end{aligned}$$

उदाहरण: 2.4.5. $\int (2 + 3x)^2 dx$ का मान ज्ञात करें।

$2 + 3x = t$ मान लेते हैं।

हल:

$$\text{या} \quad 3dx = dt \quad \text{या} \quad dx = \frac{dt}{3}$$

$$\begin{aligned}\text{पुनः} \quad \int t^2 \frac{dt}{3} &= \frac{1}{3} \int t^2 dt \\ \frac{1}{3} \times \frac{t^3}{3} + c &= \frac{1}{99} (2 + 3x)^3 + c\end{aligned}$$

उदाहरण: 2.4.6. $\int e^{ax} dx$ ज्ञात करें।

हल:

$$t = ax$$

$$dt = a dx \quad \text{या} \quad dx = \frac{1}{a} dt$$

$$\begin{aligned}\int e^{ax} dx &= e^t \times \frac{dt}{a} = \frac{1}{a} \int e^t dt = \frac{1}{a} e^t + c \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} + c\end{aligned}$$

(iv). खण्डशः विधि द्वारा समाकलन (Integration by Parts)

समाकलन का यह बहुत चर्चित विधि है। इसको प्रयांग दो फलनों के गुणनफल का समाकलन ज्ञात करने में किया जाता है। यदि x के दो फलन u और v हो तब उसका अवकलन है—

$$d(uv) = u dv + v du \quad (\text{differential के नियम के अनुसार})$$

$$\text{अब} \quad u dv = d(uv) - v du$$

समाकलन करने पर—

$$\int u dv = uv - \int v du \quad \text{----- (1)}$$

इसी खण्ड समीकरण (1) को ही खण्डशः समाकलन कहते हैं।

खण्डशः समाकलन को सूविधापूर्वक निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\int (uv) dx = u \int v dx - \int \left[\frac{du}{dx} \cdot \int v dx \right] dx \quad \text{----- (2)}$$

अर्थात्

दो फलनों के गुणनफल का समाकलन = पहला फलन $\times$ दूसरा फलन का समाकलन – पहले फलन का अवकलज और दूसरे फलन के समाकलन के गुणनफल का समाकलन

यहाँ समीकरण (2) में u और v दोनों x के फलन हैं। यहाँ पर एक बात ध्यान देने योग्य है कि हम दोनों फलनों में से किसी को भी पहला और किसी को दूसरा फलन मान सकते हैं, लेकिन दूसरा फलन उसे ही मानना चाहिए जिसका समाकलन सरलतापूर्वक ज्ञात किया जा सके।

2.4.5 अर्थशास्त्र में समाकलन का उपयोग (Use of Integrations in Economics)

कलन में अवकलन के साथ समाकलन का अर्थशास्त्र में बहुत तेजी से प्रयोग हो रहा है। अर्थशास्त्र में प्रयोग को निम्न तरीके से अध्ययन किया जा सकता है—

2.4.5.1 लागत फलन (Cost Function)

अवकलन करते समय हमें कुल के मान द्वारा सीमान्त का मान ज्ञात होता है। चूँकि समाकलन अवकलन की विपरीत प्रक्रिया है, अतः सीमान्त का समाकलन करके हम कुल का मान ज्ञात कर सकते हैं—

$$MC = \frac{dC}{dx} \Rightarrow dC = MC dx \quad \text{----- (1)}$$

(तिर्यक गुणा करने तथा दोनों तरफ समाकलन पर)

$$\text{तो } \int dC = \int MC dx = C \quad \text{----- (2)}$$

नोट: अल्पकाल में कुल लागत कभी भी शून्य नहीं होती है क्योंकि स्थिर लागत कभी शून्य नहीं होती है। दीर्घकाल में उत्पादन शून्य होने की दशा में स्थिर लागत शून्य हो सकती है।

उदाहरण 2.4.7: यदि एक बेकरी फर्म की सीमान्त लागत $= 3 + 150x - 9x^2$ दी हुई है तो कुल लागत निकालो जबकि तीन इकाई उत्पादन करने पर कुल लागत 1000 रुपये होती है।

हल: हम जानते हैं कि कुल लागत,

$$\begin{aligned} \text{कुल लागत (TC)} &= \int (3 + 150x - 9x^2) dx \quad \text{----- (1)} \\ &= 3x + 150 \frac{x^2}{2} - 9 \frac{x^3}{3} + B \quad \text{(जहाँ, B एक अचर राशि है।)} \end{aligned}$$

$$= 3x + 75x^2 - 3x^3 + B \quad \text{----- (2)}$$

तथा औसत लागत,

$$AC = \frac{TC}{x} = 3 + 75x - 3x^2 + \frac{B}{x} \quad \text{----- (3)}$$

चूँकि $x = 3$ तथा $TC = 1000$ दिया हुआ है,

अतः समीकरण (2) में उपरोक्त उत्पादन की मात्रा 3 इकाई एवं कुल लागत 300 रुपये रखने पर अचर राशि B का मान निम्न तरीके से ज्ञात किया जा सकता है।

$$\begin{aligned} 1000 &= (3 \times 3) + 75(3)^2 - 3(3)^3 + B \\ &= 9 + (75 \times 9) - 81 + B \\ &= 9 + 675 - 81 + B = 603 + B \end{aligned}$$

$$\text{या } B = 1000 - 603 = 397$$

$$\text{इस प्रकार, } TC = 3x + 75x^2 - 3x^3 + 399$$

2.4.5.2 आगम फलन (Revenue Function)

जिस प्रकार हम कुल लागत के अवकलन से सीमान्त लागत की गणना की जाती है उसी प्रकार कुल आगम के अवकलन से सीमान्त आगम ज्ञात कर सकते हैं, तथा समाकलन विधि से सीमान्त आगम के द्वारा कुल आगम का मान ज्ञात किया जा सकता है।

यदि, सीमान्त आगम,

$$(MR) = \frac{dR}{dx} \text{ हो तब}$$

$$\text{कुल आगम, } TR = \int MR dx = \int \frac{dR}{dx} \times dx$$

तथा $x = 0$ होने की स्थिति में $TR = 0$ होगा।

(अ) कुल उपभोग (Total Consumption) का मान भी सीमान्त उपभोग (MC) या उपभोग की सीमान्त प्रवृत्ति (MPC) के समाकलन द्वारा सरलतापूर्वक ज्ञात किया जा सकता है।

कुल उपभोग (C) = $\int \frac{dc}{dy} \times dy$ (जहाँ, C = f(y); C, y का फलन है और y आय के स्तर को निरूपित करता है।)

(ब) कुल उपयोगिता (Total Utility-TU) का मान सीमान्त उपयोगिता (MU-Marginal Utility) के समाकलन द्वारा प्राप्त किया जा सकता है।

कुल उपयोगिता (TU) = $\int \frac{dU}{dx} \times dx$ (जहाँ, U = f(x), U, x का फलन है और उपभोग की जाने वाली वस्तु की मात्रा को प्रदर्शित करता है।)

(स) कुल उत्पादन (TP) का मान सीमान्त उत्पादन (MP) के समाकलन द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

कुल उत्पादन (TP) = $\int \frac{dp}{dq} \times dq$ (जहाँ P = f(q); P, q का फलन है और q साधन की इकाई को प्रदर्शित करता है।)

2.4.5.3 लाभ (Profit)

यदि हमें किसी फर्म के अधिकतम लाभ का मान ज्ञात करना है, जबकि हमारे पास सीमान्त लागत एवं सीमान्त आगम फलन दिये गये हैं—

अधिकतम लाभ = कुल आगम – कुल लागत

अर्थात्

$$\pi = TR - TC$$

समाकलन द्वारा

$$TR = \int \frac{dR}{dx} \times dx$$

$$TC = \int \frac{dC}{dx} \times dx$$

$$\pi = \int \frac{dR}{dx} \times dx - \int \frac{dC}{dx} \times dx$$

2.4.5.4 पूँजी संचयन (Capital Formation)

पूँजी के वास्तविक स्टॉक में होने वाली वृद्धि को पूँजी संचयन कहते हैं। पूँजी संचयन की दर को $\frac{dk}{dt}$ द्वारा लिखते हैं जहाँ k समय (t) का फलन है।

पूँजी संचयन की दर वहीं है जो निवल निवेश (It) किसी समय बिन्दु पर होता है।

$$\frac{dk}{dt} = I(t)$$

यदि कुल पूँजी स्टॉक का मान निकालना हो तो पूँजी संचयन की दर $\frac{dk}{dt}$ का समाकलन ज्ञात करना होगा—

$$k(t) = \int I(t)dt = \int \frac{dk}{dt} \times dt$$

$$k(t) = \int dk$$

2.4.5.5 पेरेटो का आय वितरण का सिद्धान्त (Income Distribution Theory of Pareto)

पेरेटो का आय वितरण का सिद्धान्त V. Pareto द्वारा निम्न आय वितरण का सिद्धान्त प्रतिपादित किया गया—

यदि, किसी समूह में x के बराबर या अधिक आय वाले व्यक्तियों की संख्या N है तो,

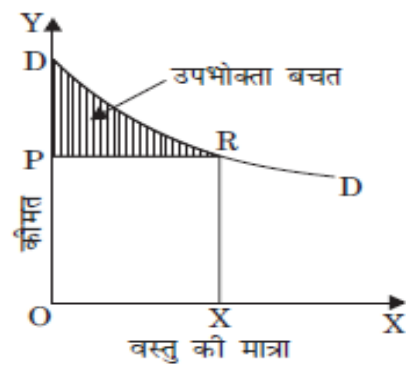
$$N = \frac{A}{x^a}$$

जहाँ, A तथा a स्थिरांक है। a का मान लगभग 1.5 के बराबर है।

2.4.5.6 उपभोक्ता बचत (Consumer Surplus)

मार्शल ने अपने तुष्टिगुण विश्लेषण में यह माना है कि प्रत्येक उपभोक्ता विवकेशील है और अपने सीमित साधनों से अधिकतम संतुष्टि प्राप्त करना चाहता है। तुष्टिगुण की माप की जा सकता है और इसे मुद्रा में मापकर गणनावाचक संख्या में व्यक्त किया जा सकता है। मुद्रा की सीमान्त उपयोगिता स्थिर रहती है। किसी वस्तु के उपभोग से वंचित रहने की अपेक्षा उपभोक्ता उसके लिए जितनी मुद्रा/कीमत देने के लिए तैयार है और जितनी मुद्रा वास्तव में अदा करता है, दोनों का अन्तर उपभोक्ता की बचत कहलाता है। वास्तव में उपभोक्ता की बचत कुल तुष्टिगुण और कुल विनिमय मूल्य का अन्तर है।

$$\begin{aligned}
 \text{उपभोक्ता की बचत} &= \text{कुल तुष्टिगुण} - \\
 \text{कुल कीमत} &= \text{सीमान्त तुष्टिगुण} \\
 &\quad \text{फलन का} \\
 &\quad \text{समाकलन} - \\
 &\quad \text{वस्तु की प्रति} \\
 &\quad \text{इकाई कीमत} \times \\
 &\quad \text{उपभोग इकाईयों} \\
 &\quad \text{की संख्या।}
 \end{aligned}$$



जहाँ, कुल तुष्टिगुण = माँग फलन का

$$\text{समाकलन} = \int_0^{x_0} f(x)dx$$

$$\text{कुल कीमत} = p_0 \times x_0$$

ताशिंग के अनुसार संभव कीमत तथा वास्तविक कीमत का अन्तर "उपभोक्ता का अतिरेक है।" उपयोगिता विश्लेषण में यह कल्पना की गई है कि धन की सीमान्त उपयोगिता अचर है तथा सभी उपभोक्ताओं का उपयोगिता फलन एक जैसा होता है। एक वस्तु का माँग वक्र यह दर्शाता है कि दी गई कीमत पर लोगों द्वारा कितनी मात्रा क्रय की जाएगी।

मान लिया जाए कि $p = f(x)$ एक वस्तु की माँग फलन है। मान लें कि उपभोक्ता वस्तु की x_0 मात्रा को p_0 कीमत पर क्रय करता है। इसका अर्थ है कि p_0 कीमत पर x_0 मात्रा का उपभोक्ता क्रय करने तथा उत्पादक विक्रय करने के लिए तैयार है। इस प्रकार उपभोक्ता का कुल व्यय $= p_0 x_0$ ।

उपभोक्ता द्वारा अस्तु को न खरीदने की अपेक्षा x_0 मात्रा खरीदने के दौरान प्राप्त कुल उपयोगिता की माप –

$$\int_0^{x_0} f(x)dx \text{ द्वारा किया जाता है।}$$

इस प्रकार

$$\text{उपभोक्ता बचत} = \int_0^{x_0} f(x)dx - p_0 x_0$$

उपभोक्ता की बचत = उपभोक्ता को प्राप्त कुल उपयोगिता – उपभोक्ता द्वारा किया गया कुल व्यय

दिये गये रेखाचित्र में DD माँग है। उपभोक्ता किसी वस्तु की OP कीमत देता है तथा माना वह OX क्रय करता है। रेखाचित्र में क्षेत्र OXRD के बराबर उपभोक्ता वस्तु पर कुल व्यय करता है किन्तु वह वास्तव में OXRP व्यय करने को तैयार था। उपभोक्ता बचत दोनों का अन्तर है।

$$\text{उपभोक्ता बचत} = \text{क्षेत्रफल OXRD} - \text{OXRP क्षेत्रफल}$$

$$\text{उपभोक्ता बचत} = \int_0^x (\text{Demand Curve या माँग वक्र}) dx - p.x$$

उदाहरण 2.4.8. यदि माँग वक्र $p = 100 - 5x + 3x^2$ हो और $x = 5$ इकाई हो तो उपभोक्ता बचत ज्ञात कीजिए।

हल: यहाँ माँग वक्र,

$$p = 100 - 5x + 3x^2 \text{ है तथा माँग की मात्रा है } x = 5$$

$$\text{तब } p = 100 + (5 \times 5) - (3 \times 5 \times 5) = 125 - 75 = 50$$

$$\text{उपभोक्ता बचत} = \int_0^x (\text{Demand Curve या माँग वक्र}) dx - p.x$$

$$= \int_0^5 (100 + 5x - 3x^2) dx - 50 \times 5$$

$$= \left[100x - \frac{5x^2}{2} + \frac{3x^3}{3} \right]_0^5 - 50 \times 5$$

$$= \left[100 \times 5 - \frac{5 \times 5 \times 5}{2} + \frac{3 \times 5 \times 5 \times 5}{3} \right]_0^5 - 50 \times 5$$

$$= [100 \times 5 - 62.5 + 125]_0^5 - 150$$

$$= 625 - 62.5 - 125 = 442.5$$

4.5.7 उत्पादक बचत (Producer Surplus)

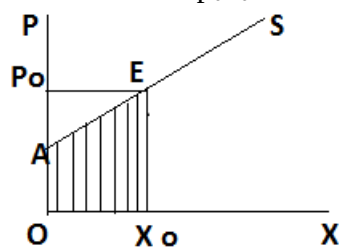
हमने माना कि उत्पादकों के उत्पादन फलन समान है तथा $p = f(x)$ पूर्ति फलन है जहाँ p वस्तु की कीमत और वस्तु की पूर्ति है। उत्पादक की बचत का अर्थ है उत्पादक वस्तु किस कीमत पर बेचना चाहता है और किस कीमत पर बेचता है। यदि वह जिस कीमत पर वस्तु बेचना चाहता है वह कम है और जिस पर वास्तव में वस्तु बेची जाती है वह अधिक है तब उत्पादक को बचत प्राप्त होती है।

उत्पादक की बचत = $p \cdot x - \int_0^x \text{Supply Curve (पूर्ति वक्र)} dx$

यह माना गया है कि धन की सीमान्त उपयोगिता अचर है तथा सभी उत्पादकों का उत्पादन फलन एक जैसा है।

माना कि $p = f(x)$ पूर्ति फलन है तथा पूर्ति वक्र, दी गई कीमत p पर, पूर्ति हो सकते वाली वस्तु की मात्रा दर्शाता है, जहाँ p बाजार कीमत है। माना कि उत्पादक x_0 मात्रा को p_0 [$p_0 = f(x_0)$] कीमत पर बेचता है। इसका अर्थ है कि उपभोक्ता इस कीमत पर क्रय करने को इच्छुक है तथा उत्पादक मात्रा बेचने को इच्छुक है।

अतः उत्पादक की आय = $p_0 x_0$



चित्र से स्पष्ट है कि उत्पादक p_0 से कम कीमत पर भी वस्तु की कुछ मात्रा को बेचने के लिए तैयार था। परन्तु उसको वास्तव में अपनी समस्त विक्री के लिए p_0 कीमत प्राप्त होता है। इन्हीं दोनों का अंतर उत्पादक की बचत के रूप में जाना जाता है। वास्तव में पूर्ति वक्र उत्पादक के लिए सीमांत लागत वक्र होती है। इसका समाकलन करने पर कुल लागत वक्र प्राप्त होता है। इस दृष्टि से उत्पादक की बचत = विक्री से कुल आय – उत्पादन की कुल लागत

$$\text{उत्पादक बचत} = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} f(x) dx$$

इस प्रकार,

$$\begin{aligned} \text{उत्पादक का अधिशेष व बचत} &= \text{पूर्ति वक्र के ऊपर का छाया वाला क्षेत्रफल (P_0 E A)} \\ &= p_0 x_0 - \int_0^{x_0} f(x) dx \\ &= p_0 x_0 - \int_0^{x_0} p dx \end{aligned}$$

इसलिए, यह क्षेत्रफल (उत्पादन का अधिशेष) सीमान्तिक समाकल की सहायता से सरलता से आधारित किया जा सकता है।

उदाहरण 2.4.9 एक वस्तु की मांग और पूर्ति फलन $p_d = 18 - 2x - x^2$ तथा $p_s = 2x - 3$ हैं उपभोक्ता और उत्पादक की बचत ज्ञात कीजिए।

हल: मांग फलन, $p_d = 18 - 2x - x^2$ ----- (1)

पूर्ति फलन $p_s = 2x - 3$ ----- (2)

संतुलन की स्थिति में, $P_d = P_s$

$$18 - 2x - x^2 = 2x - 3$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0 \quad \Rightarrow x^2 + 7x - 3x - 21 = 0$$

$$\text{या, } x(x + 7) - 3(x + 7) = 0 \quad \Rightarrow (x - 3)(x + 7)$$

जब $x = 3$, $x = -7$ अर्थात् वस्तु की मात्रा ऋणात्मक नहीं हो सकती है,

$x = 3$ वस्तु की मात्रा है जिसका मान समीकरण (2) में रखने पर कीमत $p = 3$ होगा।

$$\text{उपभोक्ता बचत} = \int_0^3 (18 - 2x - x^2) dx - 3 \times 3$$

$$= \left[18x - x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^3 - 3 \times 3$$

$$= 18 \times 3 - (3)^2 - \frac{(3)^3}{3} - 9 = 54 - 9 - 9 - 9 = 27$$

$$\begin{aligned}
\text{उत्पादक बचत} &= p_0 x_0 - \int_0^{x_0} f(x) dx \\
&= 3 \times 3 - \int_0^3 (2x - 3) dx \\
&= 9 - \left[\frac{2x^2}{2} - 3x \right]_0^3 = 9 - [x^2 - 3x] = 9 - [3 \times 3 - 3 \times 3] \\
&= 9 - (9 - 9) = 9 - 0 = 9
\end{aligned}$$

2.4.6 इकाई का सारांश

- किसी फलन का अवकलन ज्ञात करने की प्रतिलोम (Inverse) संक्रिया को समाकलन (Integration) कहते हैं। अवकलन गणित में हम दिये हुए फलन का अवकल गुणांक (differential coefficient) ज्ञात करते हैं, परन्तु समाकल-गणित में हमें उन फलनों को ज्ञात करना होता है जिनका अवकल गुणांक दिया हुआ फलन है।
- चिह्न “ $\int$ ” समाकलन का प्रतीक है जिसे समाकलन चिह्न (Sign of Integration) कहते हैं। यह फलन के समाकलन को निरूपित करता है। dx में x से यह प्रकट होता है कि समाकल (integration) चर (Variable) x के सापेक्ष किया गया है।
- समाकलन की अवधारणा निश्चित एवं अनिश्चित समाकल में समाहित है।
- समाकलन की प्रमुख विधियाँ (क) प्रतिस्थापन द्वारा समाकलन, (ख) खण्ड-समाकलन, (ग) आंशिक भिन्न द्वारा समाकलन, (घ) भाग देकर समाकलन।
- किसी फलन पर क्रमशः समाकलन तथा अवकलन दोनों संक्रियाएँ की जाये तो फलन यथावत् रहता है।

2.4.7 मुख्यशब्द

- **उपभोक्ता बचत:** जब एक उपभोक्ता किसी वस्तु की निश्चित मात्रा के लिए जितना भुगतान करना चाहता है और वास्तव में जितना भुगतान किया है वह कम हो अर्थात् इन दोनों कीमतों के बीच धनात्मक अन्तर को ही उपभोक्ता की बचत कहते हैं।
- **उत्पादक बचत:** उत्पादक बचत सामान्यतया पूर्ति फलन पर होता है जो एक उत्पादक प्राप्त करता है। यदि किस निश्चित वस्तु की मात्रा जिस कीमत में बेचना चाहता है उससे अधिक दाम में वास्तव में बेच पाता है तब उसे उत्पादक की बचत कहते हैं।

2.4.8 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

21. अर्थशास्त्र में समाकलन के उपयोग को समझाएँ।
22. उत्पादक बचत को गणितीय विधि से वर्णन करें।
23. उपभोक्ता बचत से आप क्या समझते हैं ?
24. यदि माँग फलन वक्र $p = 33 - 3x - 2x^2$ हो और $x = 3$ इकाई हो तो उपभोक्ता बचत ज्ञात कीजिए।
25. माँग फलन $p = 100 - 2x^2$ हो तो $p = 5$ रु. पर उपभोक्ता बचत कितनी होगी ? यदि $p = 0$ हो तो बचत कितनी होगी ?
26. यदि एक माँग वक्र $p = 100 - 5x + 3x^2$ हो और $x = 5$ इकाई हो तो उपभोक्ता बचत ज्ञात कीजिए।
27. निम्न फलनों का x के सापेक्ष समाकल ज्ञात कीजिए—
28. (अ) $4xe^{x^2+5} \cdot 8xe^{x^2+3} \cdot e^{5x}$
29. (ब) $(3x^2 + 1)(x^3 + x)$
30. (स) $3x^5 + \frac{1}{x^6} + 2x$
31. (द) $4x^2 \sqrt{2(x^3 + 3)}$

2.4.9 संदर्भ पुस्तकें

1. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
2. Mishra, J.P., “Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)” Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.
3. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, “आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी”, तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
4. अग्रवाल, डी. आर. ‘प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र’, (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली– 110091
5. J.K. Thukral, “Business Statistics” Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
6. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
7. Agarawal D. R., Quantitative Methods
8. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
9. Yamane, T., Mathematics for Economists.
10. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
11. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., “आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें”, शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड—02 — इकाई—05

आव्यूह (Matrix) बीजगणित का परिचय

प्रारूप:

- 2.5.1 परिचय
- 2.5.2 आव्यूह की परिभाषा
 - 2.5.2.1 आव्यूह का क्रम
 - 2.5.2.2 सदिश तथा आव्यूह
- 2.5.3 आव्यूह के प्रकार
- 2.5.4 आव्यूह के बीजगणितीय नियम
 - 2.5.4.1 आव्यूह के योग
 - 2.5.4.2 आव्यूह के अन्तर
 - 2.5.4.3 आव्यूह के गुणनफलन
- 2.5.5 आव्यूह के परिवर्त
- 2.5.6 इकाई का सारांश
- 2.5.7 मुख्यशब्द
- 2.5.8 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 2.5.9 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त विद्यार्थी समझ सकेंगे:

- आव्यूह का अर्थ को जान सकेंगे
- आव्यूह के गुण एवं प्रकार को समझ सकेंगे।
- आव्यूह के योग के नियम का प्रयोग कर सकेंगे।
- आव्यूह के गुणनफल के नियम को समझ सकेंगे।

2.5.1 परिचय

इस इकाई में हम आर्थिक समस्याओं के अनुकूलतम विन्दु को ज्ञात करने के एक और विधि का अध्ययन करेंगे जिसे आव्यूह कहा जाता है। आव्यूह को सर्वप्रथम सिल्वेस्टर ने 1850 ई. में परिभाषित किया था। उनके अनुसार, संख्याओं के किसी आयताकार सारणी अथवा आयताकार अंकायत (Rectangular Array), जिसे पंक्तियों (Rows) तथा स्तंभों में व्यवस्थित किया गया हो, आव्यूह कहलाता है। दूसरे शब्दों में एक आव्यूह संख्याओं या अभिव्यक्तियों का एक आयताकार सारणी है। इन संख्याओं या व्यंजकों को पंक्तियों और स्तंभों में व्यवस्थित किया जाता है। मैट्रिक्स का आकार उसकी पंक्तियों और स्तंभों का उपयोग करके दर्शाया जाता है। इसलिए, p पंक्तियों और q स्तंभों वाले आव्यूह को $p \times q$ मैट्रिक्स कहा जाता है। आधुनिक समय में आव्यूह को एक अतिसंमिश्र (hypercomplex) संख्या के रूप में मानते हैं। इस दृष्टिकोण के प्रवर्तक मिल्टन (1853) और केली (1858) माने जाते हैं।

सरल शब्दों में, m पंक्तियों (Rows) और n स्तंभों (Columns) में mn संख्याओं के विन्यास (Permutation) को $m \times n$ क्रम का आव्यूह (Matrix) कहते हैं।

a_{11}	a_{12}		a_{1n}
a_{21}	a_{22}		a_{2n}
...	...		...
...	...		...
a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}

यहाँ संख्याएँ $a_{11}, a_{12}, \dots$ आव्यूह के घटक या अवयव (Elements or Constitutions) कहलाती है।

क्षैतिज (Horizontal) अवयवों से पंक्ति (Row) और ऊर्ध्वाधर (Vertical) अवयवों से स्तंभ (Column) बनते हैं।

2.5.2 आव्यूह की परिभाषा

आव्यूह का अर्थ है समूह में रखना। इसमें क्षैतिज बद्धों को “पंक्तियाँ” तथा खड़े बद्धों को स्तम्भ कहा जाता है। आव्यूह कोई संख्या नहीं है, इसका कोई सांख्यिक मान नहीं है यह एक क्रमिक संख्याओं का समूह है। परम्परानुसार आव्यूह को अंग्रेजी के बड़ी A, B, C वर्णमाला द्वारा एवं उसके अवयव को छोटी वर्णमाला a, b, c, ... x, y, z द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

यदि m एवं n वास्तविक (real) अथवा समिश्र संख्याओं से लिये गये अंकों या उनके प्रतीकों के आयताकार अंकायत (Rectangular Array) जिसे पंक्तियों तथा स्तम्भों ($m \times n$) में व्यवस्थित किया गया हो, तब उसे आव्यूह (Matrix) कहा जाता है। सामान्यतः यह विन्यास [] से घिरा रहता है।

एक आव्यूह जिसमें m पंक्तियों (Rows) तथा n स्तम्भ (Column) हों तो आव्यूह $m \times n$ क्रम का आव्यूह कहलाता है। m पंक्तियों तथा n स्तम्भों के आव्यूह को $m \times n$ क्रम (Order) का आव्यूह कहते हैं। आव्यूह में लिखित संख्याएँ उसके अवयव (elements) कहलाते हैं।

$m \times n$ आव्यूह को सामान्यतया निम्न तरीके से प्रदर्शित किया जा सकता है—

$$A_{m \times n} = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Bmatrix}$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि आव्यूह वास्तव में क्रमबद्ध अंकों का आयताकार विन्यास (Rectangular Arrangement of Ordered Numbers) है।

$$B_{m \times n} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{mj} \dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

आव्यूह b_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$) को उस आव्यूह के अवयव (elements) कहा जाता है। अथवा b_{ij} में पादांक i पंक्ति के लिए तथा j स्तम्भ के लिए है। इस आव्यूह को $[b_{ij}]$ से भी निरूपित किया जाता है।

संक्षेप में, m पंक्तियों तथा n स्तम्भों में व्यवस्थित संस्थाओं का एक आयताकार क्रम बन्धन जिसे प्रदर्शन के निश्चित नियमों के अनुसार कोष्ठकों () या { } या दो खड़ी रेखाओं के एक जोड़े द्वारा घेर दिया गया हो, आव्यूह कहलाता है।

2.5.2.1 आव्यूह का क्रम (Order of a Matrix)

किसी आव्यूह का क्रम आव्यूह में विद्यमान पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या द्वारा निर्धारित होता है। किसी आव्यूह के क्र को निम्न तरीके से निरूपित किया जा सकता है।

आव्यूह का क्रम = (पंक्तियों की संख्या $\times$ स्तम्भों की संख्या)

क्रम विन्यास के भीतर स्थित संख्याओं या उनके प्रतीकों को अवयव कहा जाता है।

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad 3 \times 3 \text{ का आव्यूह है।}$$

में तीन पंक्तियों एवं तीन स्तम्भ हैं अतः यह क्रम 3×3 की आव्यूह है।

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 3 \end{bmatrix}, \quad F = [2 \quad 4 \quad 7]$$

B में 2 पंक्तियों एवं 2 स्तम्भ हैं अतः यह 2×2 की आव्यूह है। इसी प्रकार C का क्रम 2×1 , आव्यूह D का क्रम 3×2 , आव्यूह E का क्रम 2×3 और आव्यूह F का क्रम 1×3 है।

यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों की संख्या केवल 1 है तो ऐसी आव्यूह को हम "क्षैतिज आव्यूह" कहते हैं। इसी प्रकार यदि आव्यूह में स्तम्भों की संख्या केवल 1 है तो ऐसी आव्यूह को हम "स्तम्भ आव्यूह" कहा जाता है।

यदि किसी आव्यूह में पंक्तियों एवं स्तम्भों की संख्या बराबर है तो ऐसे आव्यूह को वर्ग आव्यूह कहते हैं।

2.5.2.2 सदिश तथा आव्यूह (Vector and Matrix)

वास्तविक क्षेत्र (real field) से लिए गये प्रतीकों या अंकों के क्रमित समुच्चय को सदिश कहते हैं। जैसे,

$$\begin{aligned} V_1 &= (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) \\ V_2 &= (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) \\ &\vdots \\ V_m &= (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) \end{aligned}$$

m सदिश हैं। इन पंक्तियों के समुच्चय को आव्यूह कहते हैं। अतः आव्यूह

$$V_{m \times n} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{mj} \dots & b_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

जहाँ प्रत्येक पंक्ति एक सदिश है।

युग्मपत समीकरणों

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 8 \\ 3x + y + 3z &= 7 \\ x + 3y + 4z &= 9 \end{aligned}$$

के बायें पक्षों से अज्ञात राशियों के गुणांकों को आयताकार अंकायत के रूप में निम्न तरीके से प्रदर्शित किया जा सकता है—

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

जो एक 3×3 क्रम का आव्यूह है।

2.5.3 आव्यूह के प्रकार (Types of Matrices)

1. **क्षैतिज आव्यूह (Horizontal Matrix):** यदि एक आव्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तम्भों की संख्या से कम हो अर्थात् $m \times n$ क्रम के आव्यूह जिसमें $m < n$ हो। उदाहरण—

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ e & b & d \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

2. **खड़ा आव्यूह (Vertical Matrix):** यदि एक आव्यूह में पंक्तियों की संख्या स्तम्भों की संख्या से अधिक अर्थात् $m \times n$ क्रम के आव्यूह जिसमें $m > n$ हो। उदाहरण—

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \\ d & a \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

3. **पंक्ति आव्यूह (Row Matrix or Vector):** वह आव्यूह जिसमें केवल एक पंक्ति हो उसे पंक्ति आव्यूह या सदिश (Row Vector) कहते हैं। जैसे—

$$A = [1 \quad 4 \quad 6]_{1 \times 3}$$

4. **स्तम्भ आव्यूह (Column Matrix):** जिस आव्यूह में केवल एक स्तम्भ हो उसे स्तम्भ आव्यूह या स्तम्भ सदिश (Column Vector) कहते हैं। जैसे—

$$A = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

5. **सदिश आव्यूह (Vector Matrix):** जिस आव्यूह में केवल एक पंक्ति या केवल एक स्तम्भ हो उसे सदिश आव्यूह कहते हैं। इस प्रकार सदिश आव्यूह दो प्रकार के होते हैं— (क) पंक्ति सदिश एवं (ख) स्तम्भ सदिश।

6. **वर्ग आव्यूह (Square Matrix):** यदि पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या बराबर हो तो आव्यूह को 'वर्ग आव्यूह' कहते हैं, अर्थात् यदि $m = n$ हो तो अंकायत को $n \times n$ क्रम का आव्यूह (या n क्रम का वर्ग आव्यूह) कहते हैं। इसके सम्बन्ध में, अन्य आव्यूह को, जहां $m \neq n$ हो, 'आयताकार आव्यूह' कहते हैं। जैसे—

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}_{2 \times 2} \quad \text{अर्थात् } n = 2, \text{ पंक्ति एवं स्तम्भ की संख्या समान।}$$

n क्रम के वर्ग आव्यूह का उदाहरण

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{1j} \dots \dots \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & b_{2j} \dots \dots \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \dots \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{nj} \dots \dots \dots & b_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

में $b_{11}, b_{22}, \dots \dots \dots b_{nn}$ अवयव के अनुदिश विकर्ण को मुख्य विकर्ण (Principal Diagonal) कहते हैं तथा अवयव $b_{n1}, b_{(n-1)2}, \dots \dots \dots b_{1n}$ के अनुदिश विकर्ण को द्वितीयक विकर्ण (Secondary Diagonal) कहते हैं।

7. **इकाई अथवा तत्समक आव्यूह (Identity Matrix):** यदि एक वर्ग आव्यूह के प्रमुख विकर्ण (Principal Diagonal) पर प्रत्येक अवयव 1 हो और अन्य सभी स्थानों पर 0 हों, तो आव्यूह तत्समक व इकाई आव्यूह कहलाता है। तत्समक आव्यूह को I_n से निरूपित किया जाता है। जहाँ n उस आव्यूह के क्रम का सूचक है। अर्थात्—

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

इकाई अथवा एकवत् आव्यूह को सामान्यतः $[\delta_{ij}]$ से निरूपित किया जाता है, जहां δ_{ij} क्रोनेकर डेल्टा है जिसमें,

$$\delta_{ij} = 0, i \neq j \\ \delta_{ij} = 1, i = j$$

8. **शून्य आव्यूह (Null Matrix):** वह आव्यूह जिसके सभी अवयव शून्य हो, उसे शून्य आव्यूह कहलाता है। शून्य आव्यूह को 0 से निरूपित किया जाता है। जैसे—

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3×4 क्रम का शून्य आव्यूह को सूचित करता है।

9. **अदिश आव्यूह (Scalar Matrix):** ऐसा आव्यूह जिसका क्रम n हो तथा जिसके मुख्य विकर्ण के समस्त अवयव एक समान हों और शेष अवयव शून्य के बराबर हो, अदिश आव्यूह कहलाता है। जैसे—

$$\lambda = \begin{pmatrix} \beta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \beta \end{pmatrix}_{n \times n} \quad \text{यह एक अदिश आव्यूह है।}$$

10. **विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix):** $n \times n$ क्रम के एक ऐसे आव्यूह को, विकर्ण आव्यूह कहते हैं जिसके मुख्य विकर्णों के अवयवों (जिनका समान होना आवश्यक नहीं है) को छोड़कर शेष सभी अवयव शून्य हों। मुख्य विकर्ण वर्ग आव्यूह का वह विकर्ण है जिस पर पहली पंक्ति का पहला, दूसरी का दूसरा अवयव उपस्थित है। उदाहरण के लिए,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

इस प्रकार हम कह सकते हैं कि अदिश, विकर्ण आव्यूह का ही एक विशेष रूप हैं, जहाँ विकर्ण के समस्त अवयव समान हैं। यदि विकर्ण के सभी अवयव अथवा कम-से-कम एक अवयव भी शून्य न हो तो आव्यूह को विकर्ण आव्यूह कहते हैं।

- 11 **त्रिभुजीय आव्यूह (Triangular Matrix):** यदि किसी वर्ग आव्यूह के मुख्य विकर्ण के नीचे या ऊपर या नीचे के सभी अवयव शून्य हो तो उस आव्यूह को त्रिभुजीय आव्यूह कहा जाता है। त्रिभुजीय आव्यूह निम्नलिखित दो प्रकार के होते हैं—

(क) **ऊपर त्रिभुजीय आव्यूह (Upper Triangular Matrix):** वह त्रिभुजीय आव्यूह जिसमें मुख्य विकर्ण के नीचे के सभी अवयव शून्य हो, उन्हें सामान्यतया ऊपरी त्रिभुजीय आव्यूह कहते हैं। उदाहरण के लिए,

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 13 & 5 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

(ख) **निम्न त्रिभुजीय आव्यूह (Lower Triangular Matrix):** वह त्रिभुजीय आव्यूह को जिसमें मुख्य विकर्ण के ऊपर के सभी अवयव शून्य हो, उसे ही निम्न त्रिभुजीय आव्यूह कहा जाता है। उदाहरण के लिए,

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 7 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

12. **परिवर्त आव्यूह (Transposed Matrices):** जब किसी आव्यूह की स्तंभों को पंक्तियों तथा पंक्तियों को स्तंभों में परिवर्तन के उपरान्त प्राप्त आव्यूह को मूल आव्यूह का परिवर्त आव्यूह कहते हैं। परिवर्त आव्यूह को मूल आव्यूह में t , T या 'उपरिलेख के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 4 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \text{ } 3 \times 2 \text{ क्रम के आव्यूह का परिवर्त } A^T \text{ या } A' = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 6 \end{bmatrix}, \text{ } 2 \times 3 \text{ क्रम का आव्यूह है।}$$

13. **सममित आव्यूह (Symmetric Matrix):** यदि किसी वर्ग आव्यूह के पंक्तियों एवं स्तंभों को आपस में बदल दिया जाए जिसमें प्रथम पंक्ति प्रथम स्तंभ, द्वितीय पंक्ति द्वितीय स्तंभ, आदि-आदि और इस प्रकार बने नये आव्यूह भी मूल आव्यूह के बराबर हो तो उसे सममित आव्यूह कहते हैं। अर्थात् यदि किसी आव्यूह A का आव्यूह परिवर्त A^T , A के बराबर हो तो A को एक सममित आव्यूह कहा जाता है। उदाहरण के लिए—

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 7 \end{bmatrix}, \text{ यहाँ } A \text{ तथा } A^T \text{ आपस में बराबर है अर्थात् } (A = A^T)$$

संकेत के रूप में, $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ को सममित आव्यूह कहते हैं, यदि $a_{ij} = a_{ji}$

14. **विषम सममित आव्यूह (Skew Symmetric Matrix)—** यदि वर्ग आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ में $a_{ij} = -a_{ji}$ हो तो A एक विषम सममित आव्यूह कहलाता है। उदाहरण के लिए—

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ -3 & 0 & 10 \\ -4 & -10 & 0 \end{bmatrix}$$

दूसरे शब्दों में, वर्ग आव्यूह A को विषम सममित आव्यूह कहा जाता है यदि $A^T = -A$ हो।

15. **ऋणात्मक आव्यूह (Negative Matrix):** यदि किसी दिये हुए आव्यूह $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ के सभी अवयवों को '−1' से गुणा करने पर जो आव्यूह बनता है उसे दिये हुए आव्यूह A का ऋणात्मक आव्यूह कहते हैं और इसे $-A$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। जैसे—

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ के संगत ऋणात्मक आव्यूह } \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ है।}$$

2.5.4 आव्यूह के बीजगणितीय गुण (Algebraic Properties of Matrices)

2.5.4.1 आव्यूह का योग (Addition of Matrices)

यदि दो आव्यूह A तथा B का क्रम अथवा आयाम (Order or Dimension) एक सा हो, तब दोनों आव्यूहों का योग किया जा सकता है। इस योग को $A + B$ अर्थात् A तथा B का योग (योगफल) कहा जाता है। $A + B = C$ एक ऐसा नया आव्यूह है जिसका प्रत्येक अवयव A तथा B के संगत अवयवों का योग होता है। इस प्रकार,

$$\begin{aligned} [c_{ij}]_{m \times n} &= [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} \\ &= [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n} \end{aligned}$$

अर्थात्

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

जहां, $i = 1, 2, \dots, m$ तथा $j = 1, 2, \dots, n$

उदाहरण 2.5.1: यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$ तब $A + B$ ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है, $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2+3 & 4+5 & 3+1 \\ 4+2 & 3+5 & 5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 4 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix} \quad \text{उत्तर।}$$

बीजगणितीय लक्षण:

(क) आव्यूह के योग के लिए क्रमविनिमय (Commutative) का सत्य है, अर्थात्

$$A + B = B + A$$

(ख) आव्यूह के योग के लिए साहचर्य (Association) का नियम भी सत्य है, अर्थात्

$$A + (B + C) = (A + B) + C = A + B + C$$

(ग) समक्रमीय r आव्यूहों का योग $= A + B + \dots + R$.

(घ) यदि A तथा B आव्यूह के क्रम एकसमान नहीं है तो योग करना सम्भव नहीं है।

(च) $A + 0 = 0 + A = A$, यदि $A + X = 0$ तब $X = -A$ अथवा $(A) + (-A) = 0$ प्रत्येक आव्यूह का एक और केवल एक ही योग व्युत्क्रम (Additive Inverse) होता है।

(छ) किसी अचर राशि के साथ बंटन (Association) का नियम भी सत्य है, अर्थात्

$$K(A + B) = KA + KB$$

{इसे आव्यूह के गुणनफल के पश्चात् स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है।}

(ज) **निरसन नियम (Cancellation Law):** यदि A, B तथा C समान क्रम के आव्यूह है तो $A + B = A + C$ सभी सत्य हैं यदि और केवल यदि (if and only if) $B = C$.

2.5.4.2 आव्यूह का घटाव (Subtraction of Matrices)

(अ) यदि तीन समक्रमीय आव्यूहों C, A तथा B में सम्बन्ध, $B + C = A$, नियम लागू होता है तब

$$C = A - B \text{ अथवा } [C_{ij}] = [a_{ij}] - [b_{ij}], \text{ अर्थात् A तथा B का अन्तर है।}$$

(ब) आव्यूह $(-B)$ वह आव्यूह है जिसके अवयव B के अवयवों को (-1) से गुणा करने पर आते हैं। दो आव्यूहों के अन्तर की व्याख्या $A + (-B)$ द्वारा की जा सकती है।

$$\text{अर्थात् } A - B = A + (-B) = [a_{ij} - b_{ij}]$$

$A - B$ एक ऐसा नया आव्यूह है जिसका प्रत्येक अवयव A तथा B के संगत अवयवों का अन्तर होता है। सामान्यतः $A - B \neq B - A$.

उदाहरण 2.5.2: यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ में से आव्यूह $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ घटाइए।

हल: दिया है, $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

$$A - B = \begin{bmatrix} 4-2 & 5-3 \\ 7-4 & 8-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{उत्तर।}$$

2.5.4.3 आव्यूह का गुणनफल (Multiplication of Matrix)

दो आव्यूह A तथा B में गुणनफल AB तभी सम्भव व अनुकूलनीय (Conformable for the product AB) हो सकते हैं यदि आव्यूह A में स्तम्भों की संख्या, आव्यूह B में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो। इसके विपरीत यदि आव्यूह B में स्तम्भों की संख्या, आव्यूह A में पंक्तियों की संख्या के बराबर हो तभी BA संभव या अनुकूलनीय माने जायेंगे।

$$A_{m \times n} \times B_{n \times q} = (AB)_{m \times q}$$

इस तरह से आव्यूह गुणन AB परिभाषित है, किन्तु गुणन BA अनिवार्यतः परिभाषित नहीं है।

यदि $A_{1 \times n} = [a_1 \ a_2 \ \dots \dots \dots a_n]$ एक पंक्ति आव्यूह है,

$$\text{तथा } B_{n \times 1} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \text{ एक स्तम्भ आव्यूह है}$$

तब इन दोनों आव्यूहों AB में गुणनफल निम्न प्रकार से सम्पादित हो सकते हैं।

$$AB = [a_1 \ a_2 \ \dots \dots \dots a_n] \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$AB = [a_1b_1 + a_2b_2 + \dots \dots \dots + a_nb_n]$$

इस प्रकार प्राप्त AB आव्यूह का क्रम 1×1 है अर्थात् AB एक अवयव (अदिश राशि) है।

गुणन प्रक्रिया: दो आव्यूहों का आपस में गुणा करने की प्रक्रिया संक्षेप में निम्नलिखित प्रकार से पूरा की जा सकती है—

(क) पहले आव्यूह के पहली पंक्ति के प्रत्येक अवयव को दूसरे आव्यूह के पहले स्तम्भ के संगत अवयव से गुणा कीजिए तथा गुणनफलों को आपस में जोड़ दीजिए। इस प्रकार जो संख्या प्राप्त होगी वह नये आव्यूह की पहली पंक्ति तथा पहले स्तम्भ का अवयव होगी।

(ख) उपर्युक्त के अनुसार पहले आव्यूह की पहली पंक्ति के अवयवों तथा दूसरे आव्यूह के दूसरे स्तम्भ के अवयवों से नये आव्यूह की पहली पंक्ति तथा दूसरे स्तम्भ का अवयव प्राप्त होगा। इसी प्रकार नये आव्यूह के भी सभी अवयव ज्ञात किये जा सकते हैं।

उदाहरण 2.5.3: आव्यूह A तथा B का गुणा कीजिए यदि $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ तथा $B = [7 \ 5 \ 3]$

हल: यहां A का क्रम 3×1 तथा B का क्रम 1×3 है, अतः AB का क्रम 3×3 होगा।

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [7 \ 5 \ 3]$$

$$AB = \begin{bmatrix} 3 \times 7 & 3 \times 5 & 3 \times 3 \\ 2 \times 7 & 2 \times 5 & 2 \times 3 \\ 1 \times 7 & 1 \times 5 & 1 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 15 & 9 \\ 14 & 10 & 6 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{उत्तर।}$$

आव्यूह—परिवर्त (Transposeed Matrix Or Transpose of a Matrix)

किसी आव्यूह की पंक्तियों तथा स्तम्भों को आपस में बदलने से प्राप्त आव्यूह, मूल आव्यूह का आव्यूह—परिवर्त कहलाता है।

यदि मूल आव्यूह का क्रम $m \times n$ है तो आव्यूह—परिवर्त का क्रम $n \times m$ होगा। आव्यूह—परिवर्त को मूल आव्यूह पर ऊर्ध्व प्रत्यय (T) या (') लगाकर प्रदर्शित किया जाता है। जैसे—

$$\text{यदि } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2 \times 3} \quad \text{हो तब,}$$

$$\text{तब, } A^T \text{ या } A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

उदाहरण 2.5.4: आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$ का आव्यूह—परिवर्त लिखिए।

$$\text{हल: दिया है } A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 4 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$

पंक्तियों तथा स्तम्भों को आपस में बदलने पर,

$$A' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 7 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}_{3 \times 2}$$

आव्यूह-परिवर्त की कुछ प्रमुख लक्षण (Some Important Properties of Transpose of Matrix)

(अ) आव्यूह-परिवर्त का परिवर्त मूल आव्यूह ही होगा, अर्थात्

$$(A^T)^T = A \text{ अथवा } (A')' = A$$

(ब) दो आव्यूह A तथा B के योग का परिवर्त (अथवा पक्षान्तरणित) उनके अलग-अलग परिवर्त के योग के बराबर होता है, अर्थात्

$$(A + B)' = A' + B' = B' + A'$$

(स) दो आव्यूह तथा के गुणनफल का परिवर्त, विपरीत क्रम (Reverse Order) में उनके परिवर्तों के गुणनफल के बराबर होता है, अर्थात्

$$(AB)' = B'A'$$

(द) $(ABC)' = [(AB)C]' = C'(AB)' = C'B'A'$

(इ) $(kA)' = k A'$, जहाँ k अदिश है।

उदाहरण 2.5.5: यदि $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ दिया है तब $(A+B)' = A' + B'$ सत्यापित कीजिए एवं $(AB)'$ भी ज्ञात कीजिए।

हल: $A' = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ----- (1)

$$A + B = \begin{bmatrix} 0+1 & 1+2 \\ 2+3 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

$$(A+B)' = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \text{ ----- (2)}$$

समी. से, $A' + B' = \begin{bmatrix} 0+1 & 2+3 \\ 1+2 & 3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$ ----- (3)

समी. (2) एवं (3) से, $(A+B)' = A' + B'$

अब $(AB)' = B'A' = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$
 $= \begin{bmatrix} 0+3 & 2+9 \\ 0+4 & 4+12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$ ----- (4)

अतः $(AB)' = \begin{bmatrix} 3 & 11 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$ उत्तर।

5.2.6 इकाई का सारांश

- आव्यूह का अर्थ है समूह में रखना। इसमें क्षैतिज बद्धों को “पंक्तियाँ” तथा खड़े बद्धों को स्तम्भ कहा जाता है। आव्यूह कोई संख्या नहीं है, इसका कोई सांख्यिक मान नहीं है यह एक क्रमिक संख्याओं को समूह है। परम्परानुसार आव्यूह को अंग्रेजी के बड़ी A, B, C वर्णमाला द्वारा एवं उसके अवयव को छोटी वर्णमाला a, b, c, ... x, y, z द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।
- यदि एक वर्ग आव्यूह के प्रमुख विकर्ण (Principal Diagonal) पर प्रत्येक अवयव 1 हो और अन्य सभी स्थानों पर 0 हों, तो आव्यूह तत्समक व इकाई आव्यूह कहलाता है। तत्समक आव्यूह को I_n से निरूपित किया जाता है। जहाँ n उस आव्यूह के क्रम का सूचक है।

2.5.7 मुख्यशब्द

- **पंक्ति आव्यूह (Row Matrix or Vector):** वह आव्यूह जिसमें केवल एक पंक्ति हो उसे पंक्ति आव्यूह या सदिश (Row Vector) कहते हैं। जैसे—

$$A = [1 \ 4 \ 6]_{1 \times 3}$$
- **स्तम्भ आव्यूह (Column Matrix):** जिस आव्यूह में केवल एक स्तम्भ हो उसे स्तम्भ आव्यूह या स्तम्भ सदिश (Column Vector) कहते हैं। जैसे—

$$A = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix}_{3 \times 1}$$

- **वर्ग आव्यूह (Square Matrix):** यदि पंक्तियों तथा स्तम्भों की संख्या बराबर हो तो आव्यूह को 'वर्ग आव्यूह' कहते हैं, अर्थात् यदि $m = n$ हो तो अंकायत को $n \times n$ क्रम का आव्यूह (या n क्रम का वर्ग आव्यूह) कहते हैं। इसके सम्बन्ध में, अन्य आव्यूह को, जहां $m \neq n$ हो, 'आयताकार आव्यूह' कहते हैं।

2.5.8 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

32. यदि $A = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ हो तो AB ज्ञात कीजिए।

33. $A \times I$ का मान ज्ञात कीजिए यदि $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ दिया है?

34. यदि $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ दिया है तब A^2 ज्ञात कीजिए।

2.5.9 संदर्भ पुस्तकें

1. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
2. Mishra, J.P., "Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)" Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.
3. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, "आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी", तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
4. अग्रवाल, डी. आर. 'प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र', (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली- 110091
5. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
6. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
7. Agarawal D. R., Quantitative Methods
8. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
9. Yamane, T., Mathematics for Economists.
10. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition
11. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., "आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें", शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड-2 – इकाई-6: सारणिक (Determinants)

प्रारूप:

- 2.6.1 परिचय
- 2.6.2 सारणिक प्रसार के नियम
 - 2.6.2.1 उपसारणिक
 - 2.6.2.2 सहखण्ड
- 2.6.3 सारणिक के गुण/लक्षण
- 2.6.4 सहखण्डज आव्यूह एवं व्युत्क्रम आव्यूह
- 2.6.5 क्रैमर के नियम
- 2.6.6 इकाई का सारांश
- 2.6.7 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 2.6.8 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- सारणिक के अर्थ को समझ सकेंगे
- उपसारणिक एवं सहखण्ड का अध्ययन
- व्युत्क्रम आव्यूह एवं क्रैमर नियम द्वारा युगपत समीकरण को हल करना।

2.6.1 परिचय

इस इकाई के अन्तर्गत हम बीजगणितीय आर्थिक विश्लेषण के दौरान युगपत समीकरणों को सहजता से हल करने हेतु सारणिक के प्रयोग पर विचार करेंगे। सारणिक एक ऐसा सशक्त एवं उपयोगी यंत्र है जिसके माध्यम से समीकरणों के अज्ञात चरों के मान ज्ञात किये जा सकते हैं। इतना ही नहीं अनेक प्रकार के अर्थिक समस्याओं को सुगमता से हल किया जा सकता है। इस तकनीक का प्रयोग आगत-निर्गत विश्लेषण एवं रैखिक प्रयोजन के अध्ययन में भी किया जाता है।

यद्यपि सारणिक वर्ग आव्यूह के एक विशेष रूप है जिसमें पंक्तियों और स्तम्भों की संख्या समान होती है।

सारणिक का अर्थ एवं परिभाषा (Meaning and Definition of Determinants)

$n \times n$ राशियों ($a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$) को दो समान्तर ऊर्ध्वाधर (Vertical) रेखाओं के मध्य वर्ग अंकायत (Square Array) में लिखे गये क्रम-विन्यास को n -क्रम का सारणिक कहते हैं। किसी भी सारणिक को संकेत Δ या किसी भी विशिष्ट बड़े अक्षर (Capital Letter) द्वारा निरूपित किया जाता है। प्रतीक रूप में,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n^2 राशियों, a_{ij} $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ सारणिक के अवयव (elements) या रचक (Constituents) कहलाते हैं। प्रथम पादांक (Suffix) i , पंक्ति का अभिसूचक तथा द्वितीय पादांक j , स्तम्भ को अभिसूचक है।

ऊपर दायें हाथ वाले कोने से प्रारम्भ करके विकर्ण के अनुदिश लिखे अवयव ($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$) मुख्य विकर्ण (Principal Diagonal) के अवयव कहलाते हैं। क्षैतिज अवयव पंक्ति (Row) तथा ऊर्ध्वाधर अवयव स्तम्भ (Column) बनाते हैं।

सारणिक में जितनी पंक्तियों होती है उतने ही स्तम्भ। अतः सारणिक का रूप (Shape of the Determinant) वर्गाकार होता है।

सारणिक किसी 'निश्चित मान' का बोध कराने का एक विशेष तरीका है। जैसे, $c_1b_2 - c_2b_1$ को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\begin{bmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{bmatrix}$$

2.6.2 सारणिक प्रसार के नियम (Rules For Expanding a Determinant)

किसी सारणिक का मान ज्ञात करने के लिए उस सारणिक को किसी पंक्ति तथा स्तम्भ के अवयवों के रूप में प्रदर्शित करना उस सारणिक का प्रसार कहलाता है। सारणिक का प्रसार करने का अर्थ है सारणिक का मान ज्ञात करना।

सारणिक के प्रसार में किसी पंक्ति अथवा स्तम्भ के प्रत्येक अवयव को मूल सारणिक से एक क्रम कम के सारणिक से गुणा किया जाता है जो कि उस अवयव से जाने वाली पंक्ति एवं स्तम्भ को निरस्त कर देने पर प्राप्त होता है तथा पदों से पहले एकान्तरतः क्रमशः धन व ऋण के चिन्ह लगाये जाते हैं।

किसी भी पंक्ति अथवा स्तम्भ को लेकर सारणिक का प्रसार किया जा सकता है। किन्तु पदों में चिह्नों का क्रम निम्न नियम से होना चाहिए—

$$\begin{bmatrix} + & - & + & \dots \\ - & + & - & \dots \\ + & - & + & \dots \end{bmatrix}$$

6.2.1 उपसारणिक (Minor)

सारणिक के प्रसार में किसी अवयव से गुणा करने वाले जिसके स्तम्भ व पंक्ति को छोड़ दिया जाए उस छोटे सारणिक को उस सारणिक को उस अवयव का उपसारणिक कहते हैं। अवयव d_{ij} की पंक्ति तथा d_{ij} के स्तम्भ को छोड़ने के पश्चात् शेष अवयवों से बना सारणिक, d_{ij} का उपसारणिक कहलाता है। उदाहरण के लिए,

$$\text{सारणिक } D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{bmatrix}$$

पर यदि विचार किया जाए तब

(1) प्रथम पंक्ति एवं प्रथम स्तम्भ को छोड़ने के पश्चात् प्राप्त सारणिक

$$\begin{vmatrix} d_{22} & d_{23} \\ d_{32} & d_{33} \end{vmatrix} \text{ है। इस सारणिक को अवयव } d_{11} \text{ का}$$

उपसारणिक कहा जाता है।

(2) अवयव d_{12} का उपसारणिक प्रथम पंक्ति एवं द्वितीय स्तम्भ को छोड़ने के पश्चात् ज्ञात किया जा सकता है, अर्थात्

$$d_{12} \text{ का उपसारणिक } = \begin{vmatrix} d_{21} & d_{23} \\ d_{31} & d_{33} \end{vmatrix}$$

(3) अवयव d_{13} का उपसारणिक प्रथम पंक्ति एवं तृतीय स्तम्भ को छोड़ने के पश्चात् प्राप्त किया जा सकता है, अर्थात्

$$d_{13} \text{ का सारणिक } = \begin{vmatrix} d_{21} & d_{22} \\ d_{31} & d_{32} \end{vmatrix}$$

उपसारणिक को प्रायः उस अवयव के संगत बड़े अक्षरों (Capital Letter) से निरूपित किया जा सकता है, जैसे— अवयव d_{11} का उपसारणिक D_{11} अथवा M_{11}

d_{21} का उपसारणिक D_{21} अथवा M_{21}

d_{23} का उपसारणिक D_{23} अथवा M_{23}

सारणिक प्रसार की लाप्लास नियम (Laplace's Expansion Method of Determinants)

प्रथम पंक्ति के अवयवों में तृतीय क्रम के सारणिक का प्रसार निम्न प्रकार है—

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}M_{11} - b_{12}M_{12} + b_{13}M_{13}$$

अथवा,

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

प्रथम पंक्ति के द्वारा सारणिक प्रसार करने हेतु पहले b_{11} रखा जाता है और इसके आगे द्वितीय क्रम का सारणिक रखा जाता है जो b_{11} की पंक्ति और स्तम्भ को निरस्त करने के बाद शेष अवयवों से बनता है जिसे उपसारणिक (Minor) कहते हैं, तथा M_{11} (या B_{11}) से प्रदर्शित किया जाता है। दूसरे अवयव b_{12} ऋणात्मक चिह्न सहित रखा जाता है और इसे इसके संगत उपसारणिक (M_{12}) से गुणा किया जाता है जो प्रथम पंक्ति और द्वितीय स्तम्भ को निरस्त करके शेष अवयवों से बना है। अन्त में तृतीय अवयव b_{13} रखकर इसके उपसारणिक (M_{13}) से गुणा किया जाता है जो प्रथम पंक्ति तथा तृतीय स्तम्भ को निरस्त करने के बाद शेष अवयवों से बनता है।

यह विधि 4×4 क्रम के सारणिक में भी प्रयुक्त की जा सकती है।

उदाहरण 2.6.1: सारणिक $A = \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 11 & 9 \end{vmatrix}$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया है $A = \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 11 & 9 \end{vmatrix}$

यहाँ द्वितीय क्रम के सारणिक का विस्तार करने के लिए पहले मुख्य विकर्ण के अवयवों का गुणा किया जाता है तथा उसमें से दूसरे विकर्ण के अवयवों का गुणा करके घटा देते हैं, अर्थात्

$$A = \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 11 & 9 \end{vmatrix} = 12 \times 9 - 8 \times 11 = 108 - 99 = 9$$

6.2.2 सहखण्ड (Cofactor)

जब उपसारणिक को उसके सारणिक स्थानिक चिह्न से गुणा किया जाये तो प्राप्त परिणाम को ही संगत अवयव का सहखण्ड कहा जाता है। दूसरे शब्दों में अवयव a_{ij} का सहखण्ड जो C_{ij} से प्रदर्शित किया जाता है, वह उपसारणिक M_{ij} होता है जिसके लिए निर्धारित बीजगणितीय चिह्न लगाया जाता है। अर्थात् उपसारणिक में i तथा j का योग सम (even) हो, तो उपसारणिक तथा सहखण्ड का चिह्न एक-सा होगा,

$$C_{ij} \equiv M_{ij} \text{ यदि } i + j = \text{सम संख्या, जैसे } 2, 4, 6, 8 \text{ आदि।}$$

यदि यह विषम हो, जैसे 3, 5, 7, 9 आदि, तब सहखण्ड का चिह्न उपसारणिक के चिह्न से विपरीत होगा, अर्थात्

$$C_{ij} \equiv -M_{ij} \text{ यदि } i + j = \text{विषम संख्या}$$

संक्षेप में, उपसारणिक को उसके संगत चिह्न सहित सहखण्ड कहा जाता है,

$$\text{अर्थात् } C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

उपर्युक्त स्थिति में, सारणिक $B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$ का प्रसार निम्न प्रकार प्रस्तुत किया जा

सकता है—

$$|B| = b_{11}|C_{11}| + b_{12}|C_{12}| + b_{13}|C_{13}|$$

$$|B| = \sum_{j=1}^3 b_{ij} |C_{ij}|$$

$$\text{जहाँ, } |C_{11}| = \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}, |C_{12}| = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix}, |C_{13}| = \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix}$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि b_{11} का सहखण्ड ($+M_{11} = C_{11}$), b_{12} का सहखण्ड ($-M_{12} = C_{12}$) तथा b_{13} का सहखण्ड ($+M_{13} = C_{13}$), है।

2.6.3 सारणिक के गुण/लक्षण (Properties of Determinants)

प्रमेय (Theorem) 1: यदि किसी पंक्ति (अथवा स्तम्भ) के सभी अवयवों को किसी अचर राशि से गुणा किया जाय तो सारणिक के मान में उस राशि का गुणा हो जाता है। उदाहरणार्थ,

सारणिक $A = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ की पहली पंक्ति को 5 से गुणा करके उपर्युक्त नियम का सत्यापन कीजिए।

हल: सारणिक $A = \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix}$ की पहली पंक्ति के प्रत्येक अवयव को 5 से गुणा करने पर,

$$|A| = \begin{vmatrix} 40 & 5 & 15 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 40 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} + 15 \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 40(15-2) - 5(20-6) + 15(8-18) = 520 - 70 - 150 = 300$$

$$|A| = 5(60) = 5 \begin{vmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5 [8(15-2) - 1(20-6) + 3(8-18)]$$

$$= 5 [104 - 14 - 30] = 5 [104 - 44] = 5 [60] \text{ इति सिद्धम्।}$$

प्रमेय (Theorem)2: यदि सारणिक में पंक्तियों को स्तम्भों और स्तम्भों को पंक्तियों में बदल दिया जाय तो सारणिक का मान अपरिवर्तित रहता है। उदाहरणार्थ,

उदाहरण 2.6.2: सिद्ध कीजिए कि सारणिक $A = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$ के पंक्तियों को स्तम्भों में और स्तम्भों को पंक्तियों में परिवर्तन करने पर उसके मान में कोई परिवर्तन नहीं होगा।

हल: दिया गया है, $A = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = 5 \times 8 - 6 \times 7 = 40 - 42 = -2$

पंक्तियों को स्तम्भों में परिवर्तन करने पर $A = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \Rightarrow |A| = 5 \times 8 - 7 \times 6 = -2$

प्रमेय (Theorem)3: यदि किसी सारणिक में आसन्न (समीप की) दो पंक्तियों अथवा दो स्तम्भों को परस्पर बदल लिया जाय तो सारणिक का संख्यात्मक मान वहीं रहता है परन्तु चिह्न में परिवर्तन हो जाता है। अर्थात्

$$A = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix}$$

यहाँ समीप के दो स्तम्भों को आपस में बदला गया है।

विस्तार करने पर $|A| = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - b_1(a_2c_3 - a_3c_2) + c_1(a_2b_3 - a_3b_2)$
 $= -[b_1(a_2c_3 - a_3c_2) - b_2(a_1c_3 - a_3c_1) + b_3(a_1c_2 - a_2c_1)]$

$$= - \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & b_1 \\ a_2 & c_2 & b_2 \\ a_3 & c_3 & b_3 \end{vmatrix} \text{ इस प्रकार प्रमेय सिद्ध हुआ।}$$

उपप्रमेय (Corollary)– यदि किसी पंक्ति (या स्तम्भ) का किसी अन्य पंक्ति (या स्तम्भ) से विषम (Odd) संख्या बार विनिमय कर दिया जाय तो सारणिक के चिह्न में परिवर्तन हो जाता है किन्तु यह क्रिय सम (Even) संख्या बार की जाय ता चिह्न परिवर्तित नहीं होता है।

$$\text{संख्यात्मक रूप से, } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1(20-1) - 2(15-2) + 3(3-8) \text{ ----- (1)} \\ = 19 - 26 - 15 = -22$$

प्रथम पंक्ति तथा द्वितीय पंक्ति को आपस में बदलने पर

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 3(10-3) - 4(5-6) + 1(1-4) = 21 + 4 - 3 = 22 \text{ ----- (2)}$$

द्वितीय पंक्ति तथा तृतीय पंक्ति को आपस में बदलने पर,

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3(3-10) - 4(6-5) + 1(4-1) = -21 - 4 + 3 = -22 \text{ ----}$$

-(3)

प्रमेय (Theorem) 4: यदि किसी सारणिक के कोई दो स्तम्भ अथवा कोई दो पंक्तियाँ सर्वसम (Identical) हों तो उसका मान शून्य होता है।

संख्यात्मक रूप में, $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \\ 5 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 3(28-2) - 4(21-5) + 1(6-20) = 78-64-14 = 0$

यहाँ सारणिक के प्रथम एवं द्वितीय स्तम्भ सर्वसम हैं अतः इन्हें आपस में बदने पर सारणिक का मान शून्य प्राप्त होता है।

प्रमेय (Theorem) 5: यदि एक पंक्ति अथवा स्तम्भ दूसरी पंक्ति (अथवा स्तम्भ) का कोई गुणा हो तो सारणिक का मान शून्य हो जाता है। (प्रमेय 4, इसी प्रमेय का एक विशिष्ट रूप है।)

प्रमेय (Theorem) 6: यदि किसी सारणिक की किसी पंक्ति (या स्तम्भ) का प्रत्येक अवयव शून्य हो तो उस सारणिक का मान शून्य होता है। उदाहरण के लिए,

$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1(0 \times 1 - 0 \times 3) - 4(0 \times 1 - 0 \times 7) + 5(0 \times 3 - 0 \times 7) = 1 \times 0 - 4 \times 0 + 5 \times 0 = 0$, इति सिद्धम्।

2.6.4 आसन्न/सहखण्डज आव्यूह एवं व्युत्क्रम आव्यूह (Adjacent of Matrix and Inverse of Matrix)

आसन्न/सहखण्डज आव्यूह (Adjacent of Matrix)

यदि $A = [a_{ij}]$ एक $n \times n$ क्रम का एक वर्ग आव्यूह है तथा उसका सारणिक $|A|$ है और सारणिक $|A|$ में अवयव a_{ij} का सहखण्ड (Cofactor) उपसारणिक चिह्न सहित है, तब सहखण्ड आव्यूह $[C_{ij}]_{n \times n}$ के परिवर्त को ही आव्यूह A का आसन्न/सहखण्डज आव्यूह कहा जाता है जिसे $\text{adj. } A$ से निरूपित किया जाता है।

उदाहरण 2.6.3: आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ का सहखण्डज ज्ञात कीजिए।

हल: दिया है, $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix}$

आव्यूह A का सारणिक जो $|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 1 \\ 7 & 9 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ के समतुल्य है।

a_{11} का सहखण्ड, $C_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = +(48-9) = 39$

a_{12} का सहखण्ड, $C_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -(32-7) = 25$

a_{13} का सहखण्ड, $C_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = +(36-42) = -6$

a_{21} का सहखण्ड, $C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 9 & 8 \end{vmatrix} = +(18-45) = 27$

a_{22} का सहखण्ड, $C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = +(24-35) = -35$

a_{23} का सहखण्ड, $C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = +(27-14) = -13$

a_{31} का सहखण्ड, $C_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = +(2-30) = -28$

a_{32} का सहखण्ड, $C_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(3-20) = 17$

a_{33} का सहखण्ड, $C_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = +(18-8) = 10$

सहखण्डों का आव्यूह, $C = \begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} 39 & 25 & -6 \\ 27 & -35 & -13 \\ -28 & 17 & 10 \end{vmatrix}$$

$$\text{Adj } A = (C)^T = \begin{bmatrix} 39 & 27 & -28 \\ 25 & -35 & 17 \\ -6 & -13 & 10 \end{bmatrix} \text{ अभीष्ट उत्तर।}$$

व्युत्क्रम आव्यूह अथवा आव्यूह का व्युत्क्रम (Inverse Matrix or Inverse of a Matrix)

अव्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह (Singular Square Matrix): यदि एक वर्ग आव्यूह के संगत सारणिक का मान शून्य हो तो उसे अव्युत्क्रमणीय आव्यूह कहा जाता है। अर्थात् यदि $|A| = 0$ तब आव्यूह अव्युत्क्रमणीय है।

व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह (Non-Singular Square Matrix): यदि किसी वर्ग आव्यूह के संगत सारणिक का मान शून्य न हो तो उसे व्युत्क्रमणी आव्यूह कहा जाता है। अर्थात् यदि $|A| \neq 0$ तब आव्यूह व्युत्क्रमणीय है।

किसी व्युत्क्रमणीय वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम वह वर्ग आव्यूह है, जिससे मूल आव्यूह को गुणा करने पर इकाई आव्यूह प्राप्त होता है। दूसरे शब्दों में, दो वर्ग आव्यूहों A तथा B के लिए यदि सम्बन्ध $AB = I$ सत्य है तो आव्यूह B, आव्यूह A का व्युत्क्रम या प्रतिलोम आव्यूह कहलाता है। आव्यूह A के प्रतिलोम (व्युत्क्रम) को A^{-1} से निरूपित करते हैं।

इस प्रकार यदि $AB = I$ तब $B = A^{-1}$

$$\Rightarrow AA^{-1} = I$$

व्युत्क्रम आव्यूह के मुख्य गुण (Main Properties of Inverse Matrix)

(1) यदि आव्यूह का व्युत्क्रम आव्यूह A^{-1} है तब

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

अर्थात् आव्यूह तथा उसके व्युत्क्रम का गुणनफल क्रमविनिमय के नियम का पालन करता है। अर्थात् यदि A का व्युत्क्रम A^{-1} है तो A^{-1} का व्युत्क्रम A है। संकेत रूप में,

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

(2) किसी भी व्युत्क्रमणीय आव्यूह का व्युत्क्रम अद्वितीय होता है।

(3) यदि दो आव्यूह तथा समान क्रम के व्युत्क्रमणीय आव्यूह है तो AB भी व्युत्क्रमणीय है तथा

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

इस नियम को व्युत्क्रम का विपरीत नियम (Reversible law of Inverse) कहा जाता है।

(4) तीन आव्यूह A, B तथा C के लिए

$$(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

(5) किसी आव्यूह के परिवर्त का व्युत्क्रम, व्युत्क्रम के परिवर्त के बराबर होता है। संकेत रूप में,

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'$$

अर्थात् व्युत्क्रम की तथा परिवर्त की संक्रियाएं परस्पर क्रमविनिमय के नियम का पालन करती हैं।

$$(6) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

(7) यदि A कोई आव्यूह है और B कोई व्युत्क्रमणीय आव्यूह (और दोनों m क्रम के वर्ग आव्यूह हैं) तो एक और केवल एक आव्यूह ऐसा होगा कि यदि,

$$A = BX \text{ तब,}$$

$$X = B^{-1}A,$$

लम्बिक आव्यूह (Orthogonal Matrix)

यदि आव्यूह A के निम्नलिखित सम्बन्ध

$$A'A = I = AA'$$

अर्थात्

$$A' = A^{-1} \text{ सत्य हो तो}$$

आव्यूह A को लम्बिक आव्यूह कहा जाता है। इसकी मुख्य विशेषता यह है कि $|A| = -1$ या $+1$ है।

सारणिक तथा सहखण्ड द्वारा व्युत्क्रम आव्यूह की गणना (Computation of Inverse Matrix through Determinant and Adjoint Matrix)

प्रमेय (Theorem): यदि A कोई आव्यूह है तो

$$A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} \quad |A| \neq 0$$

सोपान—

- (अ) सर्वप्रथम वर्ग आव्यूह A के सारणिक $|A|$ का मान ज्ञात करें।
- (ब) सारणिक $|A|$ के प्रत्येक अवयव के सहखण्ड C_{ij} ज्ञात करें।
- (स) सारणिक (A) के सहखण्डों से बना आव्यूह A^* लिखिए।
- (द) आव्यूह A^* का परिवर्त $(A^*)^T$ लिखिए। यहीं अभीष्ट $\text{Adj } A$ है।
- (ई) $\text{Adj } A$ को सारणिक $|A|$ के मान से भाग दीजिए। भागफल ही अभीष्ट व्युत्क्रम आव्यूह A^{-1} है।

उदाहरण 2.6.4: आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ का व्युत्क्रम आव्यूह ज्ञात कीजिए।

हल:

प्रथम चरण: सारणिक $|A| = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 24 - 10 = 14$ अर्थात् व्युत्क्रमणीय आव्यूह है।

द्वितीय चरण: सारणिक $|A|$ के सहखण्ड
 $C_{11} = 3, C_{12} = -2, C_{21} = -5$ और $C_{22} = 8$

तृतीय चरण: अतः सहखण्डों से बना आव्यूह
 $A^* = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}$

चतुर्थ चरण: सहखण्डज
 $(A^*)^T = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} = \text{adj } A$

पंचम चरण: $A^{-1} = \frac{\text{adj } A}{|A|} = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$
 $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{-5}{14} \\ \frac{-2}{14} & \frac{8}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{14} & \frac{-5}{14} \\ \frac{-1}{7} & \frac{4}{7} \end{bmatrix}$

2.6.5 क्रैमर का नियम (Cramer's Rule):

युग्मपत समीकरण को हल करते हुए अज्ञात चर राशि के मान को ज्ञात करने का सरल तरीका है जिसके अन्तर्गत आव्यूह के व्युत्क्रम के गणना में होने वाली जटिलताओं से बचा जा सकता है।

दो चरों वाली रैखिक युग्मपत् समीकरणों के हल के लिए क्रैमर नियम निम्न प्रकार है:

यदि युग्मपत् समीकरण, $a_1x + b_1y = c_1$ दिया है।
 $a_2x + b_2y = c_2$

साथ ही, $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ x और y के गुणांकों का सारणिक

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

सारणिक Δ के प्रथम स्तम्भ में x के गुणांक को स्थिरांक से स्थानान्तरित किया गया है।

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

सारणिक Δ के प्रथम स्तम्भ में y के गुणांक को स्थिरांक से स्थानान्तरित किया गया है।

तब, $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$ तथा $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ जहां $\Delta \neq 0$

उदाहरण 2.6.5: निम्नलिखित समीकरणों को क्रैमर विधि से हल करें।

$$\begin{aligned} 7x - 5y &= 11 \\ 3x + 2y &= 13 \end{aligned}$$

हल: दिया गया है

$$7x - 5y = 11$$

$$3x + 2y = 13$$

x तथा y के गुणांकों का सारणिक

$$\Delta = \begin{vmatrix} 7 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 14 - (-)15 = 29 \quad \text{----- (1)}$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -5 \\ 13 & 2 \end{vmatrix} = 22 - (-) 65 = 87 \quad \text{----- (2)}$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 7 & 11 \\ 3 & 13 \end{vmatrix} = 91 - 33 = 58 \quad \text{----- (3)}$$

x के मान के लिए समीकरण (2) को (1) से भाग देने पर

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{87}{29} = 3$$

y के मान के लिए समीकरण (3) को (1) से भाग देने पर

$$y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{58}{29} = 2$$

अतः x = 3 तथा y = 2 है, उत्तर।

उदाहरण 2.6.6: क्रैमर के नियम से निम्न समीकरणों को हल कीजिए।

$$2x + y - z = 5$$

$$3x - 2y + 2z = -3$$

$$x - 3y - 3z = -2$$

हल: x, y तथा z के गुणांक का सारणिक

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 2(6 + 6) - 1(-9 - 2) + (-1)(-9 + 2) \\ &= 24 + 11 + 7 = 42 \quad \text{----- (1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_x &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{vmatrix}, \Delta \text{ में पहले स्तम्भ को अचर पदों से प्रतिस्थापित करने पर} \\ &= 5(6 + 6) - 1(9 + 4) + (-1)(9 - 4) \\ &= 60 - 13 - 5 = 42 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_y &= \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}, \Delta \text{ में दूसरे स्तम्भ को अचर पदों से प्रतिस्थापित करने पर} \\ &= 2(9 + 4) - 5(-9 - 2) + (-1)(-6 + 3) \\ &= 26 + 55 + 3 = 84 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_z &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & -3 \end{vmatrix}, \Delta \text{ में तीसरे स्तम्भ को अचर पदों से प्रतिस्थापित करने पर} \\ &= 2(4 - 9) - 1(-6 + 3) + 5(-9 + 2) \\ &= -10 + 3 - 35 = -42 \end{aligned}$$

$$\Delta_x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{42}{42} = x = 1$$

$$\Delta_y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{84}{42} = y = 2$$

$$\Delta_z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-42}{42} = z = -1 \quad \text{उत्तर।}$$

2.6.6 इकाई का सारांश

$n \times n$ राशियों ($a_{11}, a_{12}, \dots, a_{nn}$) को दो समान्तर ऊर्ध्वाधर (Vertical) रेखाओं के मध्य वर्ग अंकायत (Square Array) में लिखे गये क्रम-विन्यास को n -क्रम का सारणिक कहते हैं। किसी भी सारणिक को संकेतक Δ या किसी भी विशिष्ट बड़े अक्षर (Capital Letter) द्वारा निरूपित किया जाता है। प्रतीक रूप में,

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

n^2 राशियों, a_{ij} $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, n$ सारणिक के अवयव (elements) या रचक (Constituents) कहलाते हैं। प्रथम पादांक (Suffix) i , पंक्ति का अभिसूचक तथा द्वितीय पादांक j , स्तम्भ को अभिसूचक है।

ऊपर दायें हाथ वाले कोने से प्रारम्भ करके विकर्ण के अनुदिश लिखे अवयव ($a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$) **मुख्य विकर्ण** (Principal Diagonal) के अवयव कहलाते हैं। क्षैतिज अवयव **पंक्ति** (Row) तथा ऊर्ध्वाधर अवयव स्तम्भ (Column) बनाते हैं।

सारणिक में जितनी पंक्तियों होती है उतने ही स्तम्भ। अतः सारणिक का रूप (Shape of the Determinant) वर्गाकार होता है।

2.6.7 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

35. सारणिक की परिभाषा दीजिए तथा इसके मुख्य गुण लिखिए।
36. सारणिक की प्रमुख विशेषताओं का वर्णन कीजिए।
37. दो चरों वाले युगपत् समीकरणों को हल करने के लिए 'क्रैमर का नियम' स्पष्ट कीजिए।
38. उचित उदाहरण देते हुए सारणिक की महत्वपूर्ण विशेषताएं बताईए।

2.6.8 संदर्भ पुस्तकें

1. Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India.
2. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
3. R.P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India Ltd., Delhi, India.
4. 1. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
5. 2. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
6. 3. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.

खण्ड—II

इकाई—07 आगत—निर्गत विश्लेषण

प्रारूप:

- 2.7.1 परिचय
- 2.7.2 आगत—निर्गत विश्लेषण की मान्यताएँ
- 2.7.3 आगत निर्गत विश्लेषण के प्रकार
 - 2.7.3.1 समय आधारित—स्थैतिक व प्रवैगिक
 - 2.7.3.2 सीमा आधारित—बन्द व खुला आगत निर्गत विश्लेषण
 - 2.7.3.3 एकीकरण आधारित—एकीकृत व गैर—एकीकृत
- 2.7.4 तकनीकी गुणांक आव्यूह
 - 2.7.4.1 लियान्टिफ का स्थैतिक आगत—निर्गत खुला मॉडल
 - 2.7.4.2 लियोन्टिफ का आगत—निर्गत बन्द मॉडल
 - 2.7.4.3 हॉकिन्स साइमन शर्त
- 2.7.5 आव्यूह के लक्षण
 - 2.7.5.1 आगत—निर्गत मॉडल की विशेषताएँ
 - 2.7.5.2 आगत—निर्गत मॉडल का अर्थशास्त्र में महत्व
 - 2.7.5.3 आगत—निर्गत मॉडल की सीमाएँ
- 2.7.6 इकाई का सारांश
- 2.7.7 मुख्यशब्द
- 2.7.8 अपने प्रगति की जाँच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 2.7.9 अपने उत्तर की जाँच के लिए कुंजी
- 2.7.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 2.7.11 सन्दर्भ पुस्तक

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- आगत—निर्गत विश्लेषण के अवधारणा को समझना
- आगत—निर्गत मॉडल के विभिन्न प्रकार को जानना
- तकनीकी गुणांक आव्यूह का संख्यात्मक अध्ययन
- आव्यूह के महत्व एवं विशेषताओं को जानना।

2.7.1 परिचय

आगत—निर्गत मॉडल एक अनुभव जनित बहुबाजार विश्लेषण है। यह प्रायः एक अन्तर औद्योगिक प्रवाह विश्लेषण (Analysis of Inter-Industry flows or inter-Industry Relations) अथवा बहुक्षेत्रीय विश्लेषण भी कहा जाता है। आगत—निर्गत विश्लेषण को सर्वप्रथम फ्रांसिसी अर्थशास्त्री क्वैस्ने (Quesnay) ने अपने सिद्धान्त के अन्तर्गत प्रस्तुत किया था, इसके पश्चात् इस सिद्धान्त को हॉवर्ड विश्वविद्यालय के प्रो. वैंसली लियोन्टीफ (W. W. Leontief) ने आगत—निर्गत विश्लेषण के रूप में विकसित किया। प्रो. लियोन्टीफ को अर्थशास्त्र के क्षेत्र में इस महान उपलब्धि के लिए 1973 का नोबेल पुरस्कार प्रदान किया गया था। आगत—निर्गत विश्लेषण राष्ट्रीय अर्थव्यवस्था को संतुलित करने हेतु एक संविन्यास है जिसके अन्तर्गत उत्पादन की मात्रा तथा अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों में इसके आबंटन का अध्ययन किया जाता है। (Input-Output Analysis is the arrangement of a balance of National Economy which presents the volume of output and its allocation to various sectors of the economy) लियान्टिफ ने इस प्रकार के संतुलों का अध्ययन संयुक्त राष्ट्र अमेरिका के लिए सन् 1919, 1929 तथा 1939 में समुचित सरणियों की सहायता द्वारा किया था। वर्तमान समय में अन्य देशों ने भी इस प्रकार का अध्ययन किया है क्योंकि प्रत्येक राष्ट्र का उद्देश्य तीव्रगति से विकास करना होता है। इस उद्देश्य की पूर्ति हेतु उनको अपने उपलब्ध साधनों द्वारा उत्पादन की मात्रा के लक्ष्य का अध्ययन करना आवश्यक है। प्रायः आर्थिक पारस्परिक रूप से दूसरे पर अन्तर निर्भर होती है।

इस पाठ के अध्ययन करने का मुख्य उद्देश्य है कि प्रत्येक उद्योग की पूंजी का कितना भाग आगत श्रम पर तथा कितना भाग अन्य उद्योगों द्वारा उत्पादित किये गये आगतों पर व्यय होता है। इसके अलावा प्रत्येक उद्योग की निर्गत मात्रा तथा विभिन्न उद्योगों में आगतों के रूप में उनके विभाजन का अध्ययन करना भी आश्यक होता है। *आगत-निर्गत विश्लेषण के अन्तर्गत हम अन्तरीय उद्योग वितरण तथा आगतों अथवा निर्गतों के विभिन्न उद्योगों में प्रवाह का अध्ययन करते हैं, अतः हम इसको अन्तर औद्योगिक प्रवाह विश्लेषण कहते हैं।*

आगत निर्गत प्रकल्पनाओं के द्वारा सामान्य बहुबाजार सन्तुलन विश्लेषण को सरलतापूर्वक प्रस्तुत किया जाता है जिसे लियोन वालरस निदर्श (Leon Walras Model) कहते हैं। इसके अन्तर्गत उपयोगिता फलनों की अवहेलना की जाती है तथा उपभोक्ता मांगों को बाहरी सूचना के आधार पर व्यक्त किया जाता है एवं फर्म की अपेक्षा उद्योग को उत्पादन की इकाई माना जाता है, क्योंकि उत्पादन क्षेत्र में अनुकूलतमीकरण की कोई समस्या उत्पन्न नहीं होती है अर्थात् आगत-निर्गत विश्लेषण की समस्या हेतु निम्न तीन तथ्यों का होना अवश्यक है।

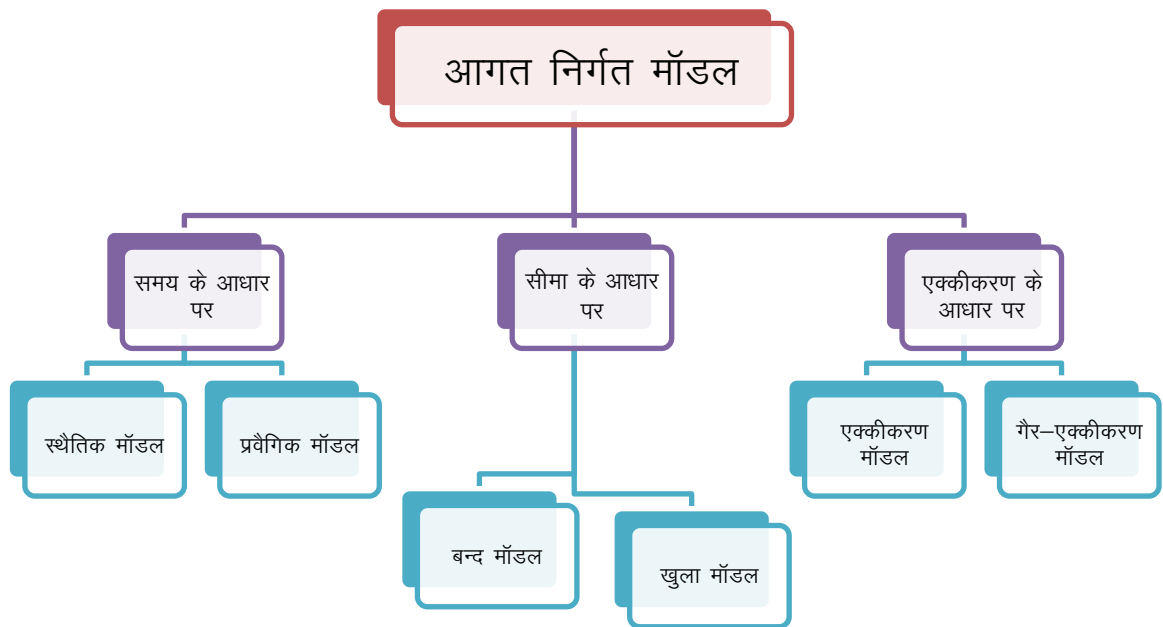
- (अ) आगत-निर्गत विश्लेषण के अन्तर्गत अधिकांशतः उत्पादन का ही अध्ययन किया जाता है। सामान्यतः आगत-निर्गत विश्लेषण में मांग सिद्धान्त महत्वपूर्ण नहीं है। लियोन्टिफ के खुले मॉडल में मांग क्षेत्र को शामिल नहीं किया गया है।
- (ब) इस विश्लेषण का विशिष्टता की दृष्टि से अनुभवयुक्त अन्वेषण आवश्यक है। आगत-निर्गत विश्लेषण द्वारा उपयुक्त निदर्श वालरस सामान्य संतुलन सिद्धान्त से अधिक संकुचित होता है, क्योंकि इसके अन्तर्गत तथ्यों की संख्या कम होती है।
- (स) इस विधि के अन्तर्गत स्थापित निर्गतों द्वारा बाजार संतुलन की शर्तों की पूर्ति करना आवश्यक नहीं है क्योंकि आगत-निर्गत विश्लेषण के अन्तर्गत अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों के मध्य अन्तर निर्भरता का अध्ययन किया जाता है, इसलिए सामान्य संतुलन घटना को इससे सम्बद्ध कर लिया जाता है।

2.7.2 आगत-निर्गत विश्लेषण की मान्यताएँ (Assumptions of Input-Output Analysis)

आगत-निर्गत विश्लेषण की निम्नलिखित मान्यताएँ होती हैं—

1. पूरे अर्थव्यवस्था को दो भागों में विभाजित की जाती है— अन्तः उद्योग क्षेत्र तथा अन्तिम मांग क्षेत्र और प्रत्येक क्षेत्र का उप-क्षेत्रों में भी विभाजन किया जा सकता है।
2. अर्थव्यवस्था पूर्ण संतुलन की अवस्था होती है।
3. किसी एक उद्योग का उत्पादन अन्य उद्योगों के लिए आगत के रूप में प्रयोग किया जाता है।
4. तकनीकी प्रगति स्थिर रहती है, इसका तात्पर्य यह है कि आगत गुणांक स्थिर रहते हैं।
5. एक उद्योग में एक ही वस्तु का उत्पादन होता है।
6. यह मॉडल सजातीयता उत्पाद पर आधारित है।
7. सभी उत्पादन इकाईयाँ स्थिर अनुपात में आगतों का प्रयोग की जाती हैं।
8. साधनों के बीच कोई प्रतिस्थापनता का नियम लागू नहीं होती है।
9. उत्पादन इकाईयों के बीच होने वाले सभी लेन-देन मुद्रा या मौद्रिक इकाई में व्यक्त की जाती है।
10. सामान्यतः उत्पादन के स्थिर पैमाने के प्रतिफल का नियम लागू होता है।
11. आगत-निर्गत विश्लेषण में किसी प्रकार की बाह्य मित्तव्ययताएँ व गैर अमित्तव्ययताएँ उत्पन्न नहीं होती हैं।
12. बाजार में पूर्ण प्रतियोगिता पाई जाती है।
13. वस्तु की कीमत, मांग, रुचि एवं साधनों की पूर्ति में कोई परिवर्तन नहीं होता है।
14. समोत्पाद वक्र सामान्यतया उत्तलता के स्वभाव को मानती है अर्थात् जैसे आगतों में वृद्धि की जाती है वैसे-वैसे हमें उत्पादन के ह्यसमान का नियम लागू होता है।

2.7.3 आगत निर्गत मॉडल के प्रकार (Types of Input Output Model)



- (1) **समय तत्व के आधार पर वर्गीकरण (Classification on the Basis of Time Element)**
जब आगत निर्गत मॉडल का विश्लेषण दिये गये समय तत्व के आधार पर किया जाए तब वह समय आधारित वर्गीकरण कहा जाता है। ये दो प्रकार के होते हैं—
 - (अ) **स्थैतिक आगत निर्गत मॉडल (Static Input Output Model):** स्थैतिक आगत-निर्गत विश्लेषण के अन्तर्गत किसी समय बिन्दु पर होने वाली लेन-देन को प्रदर्शित किया जाता है। इस विश्लेषण के तहत प्रयुक्त चरों के नीचे लिखावट में 't' लिखने की आवश्यकता नहीं होती है।
 - (ब) **प्रवैगिक आगत निर्गत मॉडल (Dynamic Input Output Model):** प्रवैगिक आगत निर्गत विश्लेषण वह है जिसमें समय तत्व का विशेष ध्यान रखा जाता है जो किसी विशिष्ट समय अवधि के अन्तर्गत लेन देन को प्रदर्शित करता है और चरों के नीचे 't' लिखना आवश्यक होता है।
- (2) **सीमा के आधार पर वर्गीकरण (Classification on the Basis of Boundary):** इस मॉडल में भौगोलिक व क्षेत्रीय सीमा के आधार पर आगत निर्गत मॉडल का अध्ययन किया जाता है। विशेषकर प्राथमिक क्षेत्र, श्रम या अन्तिम मांग जैसे घटकों को मॉडल में शामिल करने अथवा न करने के आधार पर विश्लेषण किया जाता है। सीमा के आधार पर दो प्रकार के आगत-निर्गत मॉडल होते हैं।
 - (अ) **बन्द आगत-निर्गत मॉडल (Closed Input-Output Model):** वह आगत निर्गत मॉडल जिसमें उत्पादित सभी वस्तुओं व सेवाओं को आन्तरिक क्षेत्रों द्वारा पूर्णतः उपभोग या उपयोग कर लिया जाता है। दूसरे शब्दों में, इस मॉडल में अन्तिम मांग एवं प्राथमिक आगतों को शामिल नहीं किया जाता है बल्कि ये अनुपस्थित पाये जाते हैं।
 - (ब) **खुला आगत-निर्गत मॉडल (Open Input-Output Model):** वह मॉडल जिसमें उद्योगों व उत्पादन इकाईयों द्वारा उत्पादित वस्तुओं एवं सेवाओं का आन्तरिक रूप से उपयोग/उपभोग न हो सके बल्कि शेष भाग अन्तिम मांग के रूप में बच जाय अथवा आगत के रूप में किसी बाहरी साधन, श्रम व प्राथमिक आगत के रूप में सम्मिलित किया जाये तब उसे खुला आगत-निर्गत मॉडल कहा जाता है।
- (3) **एकीकरण के आधार पर वर्गीकरण (Classification On the Basis of Aggregation):** यदि आगत-निर्गत मॉडल का वर्गीकरण विश्लेषण में प्रयुक्त होने वाले क्षेत्रों के एकीकरण के

आधार पर हो तब उसे एकीकरण वर्गीकरण कहलाता है। एकीकरण के आधार पर दो प्रकार के आगत-निर्गत मॉडल होते हैं—

(अ) **एकीकृत आगत-निर्गत मॉडल (Aggregative Input-Output Model):** वह आगत-निर्गत मॉडल जिसमें विश्लेषण के दौरान एक अर्थव्यवस्था में सभी संभावित क्षेत्रों को मॉडल में सम्मिलित किया जाए, तब उन्हें एकीकृत आगत-निर्गत मॉडल कहा जाता है। यह मॉडल खुले आगत-निर्गत मॉडल की तरह व्यवहार करता है। इसके अन्तर्गत किसी भी आर्थिक क्षेत्र को नहीं छोड़ा जाता है।

(ब) **गैर-एकीकृत आगत-निर्गत मॉडल (Disaggregative Input-Output Model):** वह आगत-निर्गत मॉडल जिसमें विश्लेषण के अन्तर्गत एक अर्थव्यवस्था में सभी संभावित आर्थिक/उत्पादन क्षेत्रों को एक साथ सम्मिलित नहीं किया जा सके अर्थात् कुछ क्षेत्रों को आगत-निर्गत मॉडल में सम्मिलित नहीं किया जा सके, तब ऐसे मॉडल को ही गैर-एकीकृत आगत-निर्गत मॉडल कहा जाता है। यह मॉडल बन्द आगत-निर्गत मॉडल की तरह ही व्यवहार करता है। इसके अन्तर्गत कुछ क्षेत्रों को छोड़ दिया जाता है जैसे कि बन्द मॉडल में अन्तिम माँग व प्राथमिक क्षेत्र व श्रम आगत को सम्मिलित नहीं किया जाता है।

खुला स्थैतिक आगत-निर्गत सारणी

	उत्पादक क्षेत्र (उद्योग)	कार्य क्षेत्र (क्रय क्षेत्र)			अन्तिम मांग (घरेलू क्षेत्र) (4)	कुल उत्पादन या कुल आय
		इस्पात (1)	निर्माण (2)	यातायात (3)		
विक्रय क्षेत्र	इस्पात (1)	50	150	50	50	300
	निर्माण (2)	60	30	70	60	220
	यातायात (3)	25	40	35	40	140
	कुल लागत या	135	220	155	150	660
	कुल आगत					

2.7.4 तकनीकी गुणांक आव्यूह (Technological Coefficient Matrix)

2.7.4.1 लियांटिफ का स्थैतिक आगत-निर्गत खुला मॉडल (Leontief's Static Input -Output Model)

लियोन्टिफ का स्थैतिक आगत-निर्गत मॉडल उपर्युक्त मान्यताओं पर आधारित है। लियोन्टिफ का स्थैतिक मॉडल को एक उदाहरण द्वारा समझाया जा सकता है। माना कि अर्थव्यवस्था चार क्षेत्रों में बंटी हुई है। इनमें कृषि एवं उद्योग अन्तः उद्योग के रूप में तथा घरेलू क्षेत्र अन्तिम माँग क्षेत्र के रूप में लिया गया है।

आगत-निर्गत सारणी की सहायता से इस मॉडल को सरलता से समझा जा सकता है। इस सारणी में तीनों क्षेत्रों का निर्गत (Output), पंक्तियों (Rows) अर्थात् क्षैतिज रूप में दर्शाया गया है जबकि इन क्षेत्रों के आगत (Input), एवं स्तम्भों (Columns) अर्थात् लम्बवत् रूप में दर्शाया गया है। प्रथम पंक्ति का कुल योग 300 इकाईयाँ है जो इस्पात उद्योग का कुल निर्गत प्रदर्शित करती है। जिसमें 50 इकाईयाँ इस्पात स्वयं, 150 इकाईयाँ निर्माण, यातायात क्षेत्र 50 तथा शेष 50 इकाईयाँ अन्तिम माँग के रूप में घरेलू क्षेत्र 50 द्वारा इस्तेमाल किया जाता है। सारणी में दूसरी पंक्ति निर्माण के कुल उत्पादन को प्रदर्शित करती है। निर्माण क्षेत्र द्वारा कुल 220 इकाईयाँ उत्पादित किया जाता है। जिसमें से 60 इकाईयाँ इस्पात क्षेत्र, 30 इकाईयाँ स्वयं निर्माण, 70 इकाईयाँ यातायात क्षेत्र एवं 60 इकाईयाँ घरेलू क्षेत्र द्वारा अन्तिम माँग के रूप में प्रयोग किया जाता है। सारणी के तीसरी पंक्ति में यातायात क्षेत्र के कुल निर्गत जो 140 इकाईयाँ है, को दिखाया गया है। जिसमें से 25 इकाईयाँ इस्पात उद्योग, 40 इकाईयाँ निर्माण, 35 इकाईयाँ स्वयं यातायात क्षेत्र के द्वारा आगत के रूप में प्रयोग किया जाता है जबकि शेष 40 इकाईयाँ अन्तिम माँग के रूप में घरेलू क्षेत्र के द्वारा उपभोग की जाती है।

इसी प्रकार स्तम्भों (Column) को लें तो इन क्षेत्रों की लागत को बताते हैं। प्रथम स्तम्भ यह बताता है कि इस्पात क्षेत्र में 300 इकाईयाँ को उत्पाद करने के लिए 135 इकाईयाँ की लागत

आती है जिसमें 50 इकाईयाँ स्वयं इस्पात, 60 इकाईयाँ निर्माण क्षेत्र एवं 25 इकाईयाँ यातायात से लेकर उत्पादन की जाती है।

	उत्पादक क्षेत्र (उद्योग)	कार्य क्षेत्र (क्रय क्षेत्र)			अन्तिम मांग (4)	कुल उत्पादन या कुल आय
		इस्पात (1)	निर्माण (2)	यातायात (3)		
विक्रय क्षेत्र	इस्पात (1)	50	150	50	50	300
	निर्माण (2)	60	30	70	60	220
	यातायात (3)	25	40	35	40	140
	कुल लागत या	135	220	155	150	660
	कुल आगत					

	उत्पादक क्षेत्र (उद्योग)	कार्य क्षेत्र (क्रय क्षेत्र)			अन्तिम मांग (4)	कुल उत्पादन या कुल आय
		इस्पात (1)	निर्माण (2)	यातायात (3)		
विक्रय क्षेत्र	इस्पात (1)	X_{11}	X_{12}	X_{13}	D_1	X_1
	निर्माण (2)	X_{21}	X_{22}	X_{23}	D_2	X_2
	यातायात (3)	X_{31}	X_{32}	X_{33}	D_3	X_3

यदि उपरोक्त सारणी में स्तम्भों को ले तो निम्न उत्पादन फलन प्राप्त होंगे—

$$X_1 = f_1 (X_{11}, X_{21}, X_{31}) \text{ अथवा } 300 = f_1 (50, 60, 25)$$

$$X_2 = f_2 (X_{12}, X_{22}, X_{32}) \text{ अथवा } 220 = f_2 (150, 30, 40)$$

$$X_3 = f_3 (X_{13}, X_{23}, X_{33}) \text{ अथवा } 140 = f_3 (50, 70, 35)$$

इसी प्रकार से कुल उत्पादन को विभिन्न क्षेत्रों में निम्न प्रकार से बाँटा जा सकता है।
(पंक्ति में सभी क्षेत्रों के भाग को जोड़ने पर)

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + X_{13} + D_1$$

$$X_2 = X_{21} + X_{22} + X_{23} + D_2$$

$$X_3 = X_{31} + X_{32} + X_{33} + D_3$$

हम यहाँ मानते हैं कि i उद्योग का कुल उत्पादन n उद्योगों द्वारा आगत के रूप में काम में लाया जाता है तो ऐसी स्थिति में,

$$X_1 = X_{11} + X_{12} + \dots + X_{in} + D_1$$

लियोन्टिफ ने स्थिर गुणांक की धारणा का भी मान है। इस स्थिति में तकनीकी गुणांक (Technological Coefficient) होगा—

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

यहाँ, x_{ij} = i वाँ उद्योग का उत्पादन जो कि j वें उद्योग द्वारा काम में लाया जाता है।

X_i = j वें उद्योग का कुल उत्पादन

सारणी -7.3: तकनीकी आव्यूह

	उत्पादक क्षेत्र (उद्योग)	कार्य क्षेत्र (क्रय क्षेत्र)			अन्तिम मांग (4)	कुल उत्पादन या कुल आय
		इस्पात (1)	निर्माण (2)	यातायात (3)		
विक्रय क्षेत्र	इस्पात (1)	$\frac{50}{300} = 0.16$	$\frac{150}{220} = 0.68$	$\frac{50}{140} = 0.36$	50	300
	निर्माण (2)	$\frac{60}{300} = 0.2$	$\frac{30}{220} = 0.14$	$\frac{70}{140} = 0.5$	60	220
	यातायात (3)	$\frac{25}{300} = 0.06$	$\frac{40}{220} = 0.18$	$\frac{35}{140} = 0.25$	40	140

लियोन्टिफ आगत-निर्गत विश्लेषण को आव्यूह बीजगणित को सहायता से निम्न प्रकार दर्शाया जा सकता है। यदि हमारा सामान्य मॉडल निम्न है—

यहाँ $X_1 = i$ वें क्षेत्र का कुल उत्पादन, जहाँ $i = 1, 2, \dots, n$
 $x_{ij} = i$ वें क्षेत्र के उत्पादन का वह हिस्सा जो j वें क्षेत्र द्वारा आगत के रूप में उपयोग किया जाता है।

$$\begin{aligned} X_1 &= x_{11} + x_{12} + \dots + x_{1n} + D_1 \\ X_2 &= x_{21} + x_{22} + \dots + x_{2n} + D_2 \\ &\vdots \\ X_3 &= x_{31} + x_{32} + \dots + x_{3n} + D_n \end{aligned}$$
$$a_{ij} = \frac{a_{ij}}{X_j} \quad \text{जहाँ, } x_i = j\text{वें क्षेत्र का कुल उत्पादन}$$

अब हमारे युगपत समीकरण होंगे—

यहाँ $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} D_1 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}$

$$-a_{31}X_1 - a_{32}X_2 - \dots + X_n - a_{3n}X_n = D_n$$
$$(I-A) = \begin{bmatrix} (1-a_{11}) & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & (1-a_{22}) & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n1} & (1-a_{nn}) & \end{bmatrix}$$

लियोन्टिफ बन्द आगत-निर्गत निदर्श में माँग व घरेलू क्षेत्र एवं प्राथमिक आगत (श्रम आगत) आदि को सम्मिलित नहीं किया जाता है। यदि इन दोनों क्षेत्रों का भी आर्थिक व्यवस्था में विलय कर लिया जाए तो कोई भी क्षेत्र ऐसा नहीं रहेगा जिसका संबंध बाह्य क्षेत्र से हो। ऐसी स्थिति

में प्रत्येक वस्तु माध्यमिक वस्तुओं (Intermediate Goods) की प्रकृति की होगी क्योंकि इस (n + 1) उद्योग व्यवस्था में उत्पादित निर्गतों को, इन्हीं निर्गतों के उत्पादन हेतु प्रयोग किया जाता है। इस दशा को बन्द निदर्श (Closed Model) कहा जाता है।

दो चरों के बीच पाये जाने वाले पारस्परिक सम्बन्ध ही फलनात्मक सम्बन्ध (Functional Relation) कहलाता है जिसके अनुसार एक चर राशि का मूल्य रखने पर दूसरी चर राशि का संगत मान ज्ञात किया जा सकता है।

बन्द मॉडल के संतुलन समीकरण

$$X_i = \sum_{j=1}^{n+1} X_{ij} \quad \text{जहाँ, } (i = 1, 2, \dots, n+1) \quad \text{----- (7.4)}$$

स्थिर तकनीकी गुणांक की दशा में,

$$x_{ij} = a_{ij} X_j \quad \text{----- (7.5)}$$

समीकरण (7.4) का मैं रखने पर

$$X_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_j$$

$$\text{अथवा} \quad X_i = \sum_{j=1}^{n+1} a_{ij} X_j = 0 \quad \text{-----}$$

(7.6)

उदाहरण 2.7.1: निम्नलिखित अन्तरण आव्यूह से आगत-निर्गत सह-गुणांक ज्ञात कीजिए।

उत्पादन क्षेत्र

खरीदारी क्षेत्र

	कृषि	उद्योग	अंतिम माँग	कुल उत्पादन
कृषि	300	600	100	1000
उद्योग	400	1200	400	2000

यदि प्राप्त माँग बदलती है क्रमशः 200 और 800, तो कुल उत्पादन ज्ञात कीजिए जो नई माँग के समकक्ष हो।

हल (Solution): दिये गये तकनीकी गुणांक का सूत्र प्रयोग करने पर,

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}$$

यहाँ,

a_{ij} = तकनीकी गुणांक,

X_j = jवें क्षेत्र में कुल उत्पादन,

x_{ij} = jवें क्षेत्र का वह उत्पादन जो iवें क्षेत्र द्वारा काम में (अवशोषण) लाया जाता है।

क्षेत्र	कृषि	उद्योग	कुल उत्पादन
कृषि	$\frac{300}{1000} = 0.3$	$\frac{600}{2000} = 0.3$	1000
उद्योग	$\frac{400}{1000} = 0.4$	$\frac{1200}{2000} = 0.6$	2000

यदि अन्तिम माँग कृषि तथा उद्योग में क्रमशः 200 तथा 800 हो जाए तब—

क्षेत्र	कृषि	उद्योग	अन्तिम माँग	कुल उत्पादन
कृषि	300	600	200	1100
उद्योग	400	1200	800	2400

अतः कुल उत्पादन (Gross Output) = 1100 + 2400 = 3500 इकाई।

उदाहरण 2.7.2. निम्नलिखित सारणी अर्थव्यवस्था के तीन क्षेत्रों इस्पात, विनिर्माण और शिक्षा के साथ करोड़ों रुपये के अन्तर-क्षेत्रीय लेन-देन दिया गया है। इसके लिए सहगुणांक आव्यूह की गणना कीजिए।

उत्पादन क्षेत्र	इस्पात	निर्माण	शिक्षा	अन्तिम माँग	कुल उत्पादन
इस्पात	50	25	25	100	200
विनिर्माण	40	50	10	200	300
शिक्षा	100	50	150	300	600

हल (Solution): हम जानते हैं कि

$$\{ \text{तकनीकी गुणांक} = a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \}$$

तकनीकी गुणांक गणना सारणी

उत्पादन क्षेत्र	इस्पात	विनिर्माण	शिक्षा	कुल उत्पादन (Total Output)
इस्पात	$\frac{50}{200} = 0.25$	$\frac{25}{300} = 0.03$	$\frac{25}{600} = 0.04$	200
विनिर्माण	$\frac{40}{200} = 0.20$	$\frac{50}{300} = 0.16$	$\frac{10}{600} = 0.016$	300
शिक्षा	$\frac{100}{200} = 0.50$	$\frac{50}{300} = 0.16$	$\frac{150}{600} = 0.25$	600

उदहारण 2.7.3. निम्नलिखित आगत निर्गत मॉडल में तकनीकी आव्यूह के लिए अन्तिम मांग की गणना कीजिए।

उत्पादन क्षेत्र	क्षेत्र I	क्षेत्र II	अन्तिम माँग
क्षेत्र I	0.1	0.3	F_1
क्षेत्र II	0	0.2	F_2
श्रम	0.9	0.8	

यदि अन्तिम माँग,
 $F_1 = 0.5y + 100$
 $F_2 = 0.3y + 200$

तो आय का संतुलन और विभिन्न क्षेत्रों का निर्गत ज्ञात कीजिए। परिणामों की तुलना कीजिए यदि $F_1 = 100$, $F_2 = 200$ दिया गया हो।

हल: संतुलन की स्थिति में, $F_1 = F_2$
 $0.5y + 100 = 0.3y + 200$

अथवा $5y + 1000 = 3y + 2000$

अथवा $2y = 1000$

अथवा $y = 500$

पुनः $F_1 = 0.5y + 100 = (0.5 \times 500) + 100 = 350$

$F_2 = 0.3y + 200 = (0.3 \times 500) + 200 = 350$

हम जानते हैं कि—

$$X = AX + D$$

अथवा $X = (I - A)^{-1}D$

यहाँ $X =$ क्षेत्र I तथा क्षेत्र II का कुल उत्पादन है

$X =$ इकाई आव्यूह

$D =$ अन्तिम माँग

$A =$ आव्यूह गुणांक (Coefficient of Matrix)

अब

$$I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.9 & -0.3 \\ 0 & 0.8 \end{bmatrix}$$

$$(I - A)^{-1} = \frac{\text{Adjoint}}{\text{Determinant}}$$

$$\text{Det of } (I - A) = \begin{vmatrix} 0.9 & -0.3 \\ 0 & 0.8 \end{vmatrix} = 0.72$$

$$\text{पक्षान्तरणित आव्यूह } (I - A) = \begin{bmatrix} 0.9 & 0 \\ -0.3 & 0.8 \end{bmatrix}$$

0.9 का सहखण्ड = 0.8

0.3 का सहखण्ड = 0

0 का सहखण्ड = 0.3

0.8 का सहखण्ड = 0.9

$$\text{आव्यूह } (I - A) \text{ का सहखण्डज} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$[\because (-1)^{i+j} \text{ for cofactor sign}]$

$$(I-A)^{-1} = \frac{1}{0.72} \begin{bmatrix} 0.8 & 0.3 \\ 0 & 0.9 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{0.8}{0.72} & \frac{0.3}{0.72} \\ 0 & \frac{0.9}{0.72} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.41 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix}$$

अब $(I-A)^{-1}D = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.41 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 350 \\ 350 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 532.0 \\ 437.5 \end{bmatrix}$

इस प्रकार, प्रथम क्षेत्र का कुल उत्पादन = 532.0 इकाईयाँ।

तथा द्वितीय क्षेत्र का उत्पादन = 437.5 इकाईयाँ।

यदि $F_1 = 100$ तथा $F_2 = 200$ हो तब

$$X(I-A)^{-1}D = \begin{bmatrix} 1.11 & 0.41 \\ 0 & 1.25 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 100 \\ 200 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 192 \\ 250 \end{bmatrix}$$

इस स्थिति में प्रथम क्षेत्र का उत्पादन = 192 इकाईयाँ

तथा द्वितीय क्षेत्र का उत्पादन = 250 इकाईयाँ।

2.7.4.3 हॉकिन्स एवं साइमन की शर्तें (Hawkins and Simon Conditions)

हॉकिन्स साइमन शर्त हमें यह बताते हैं कि दिया गया कोई आगत-निर्गत निदर्श अर्थव्यवस्था में लागू होगा या नहीं अर्थात् तकनीक आव्यूह का हल सम्भव है अथवा नहीं। यदि हमें प्राथमिक समीकरण $X = (I-A)^{-1}F$ दिया गया है तो $(I-A)$ को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

$$\begin{bmatrix} (1 - a_{11}) & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{11} & \cdots & (1 - a_{nn}) \end{bmatrix}$$

उपरोक्त तकनीकी आव्यूह के लिए हॉकिन्स साइमन शर्त निम्नलिखित हैं—

(1) आव्यूह $[I - A]$ का सारणिक हमेशा धनात्मक ($|I - A| > 0$) होना चाहिए।

(2) विकर्ण तत्व अर्थात् $(1-a_{11})$, $(1-a_{22})$, $(1-a_{33})$ $(1-a_{nn})$ पद धनात्मक होने चाहिए अर्थात् a_{11} , a_{22} , a_{33} , ..., a_{nn} हमेशा 1 से कम होने चाहिए।

2.7.5 आगत निर्गत मॉडल के लक्षण (Features of Input Output Model)

आर्थिक क्षेत्र में आगत-निर्गत विश्लेषण की प्रविधि एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करती है। आर्थिक सिद्धान्त पर विचार, राष्ट्रीय-लेखों की रचना, आर्थिक योजनाओं की रचना, उद्योगों का पारस्परिक संबंधों तथा निर्भरता का अध्ययन करना, व्यापार चक्रों का अध्ययन इत्यादि महत्वपूर्ण क्षेत्र हैं, जिनका विश्लेषण इस प्रविधि से ही संभव हुआ है। वर्तमान में लगभग अर्थव्यवस्था के प्रत्येक क्षेत्र में इस तकनीकी का प्रयोग किया जाने लगा है, किन्तु वर्तमान में इस तकनीकी का प्रयोग विशेषकर नियोजित अर्थव्यवस्था में अधिक बढ़ता जा रहा है।

2.7.5.1 आगत-निर्गत मॉडल की विशेषताएँ (Properties of Input Output Model)

1. यह मॉडल केवल उत्पादन से सम्बन्धित है।
2. यह केवल तकनीकी प्रविधिक समस्याओं के बारे में बताता है।
3. यह एक विशुद्ध संख्यात्मक अन्वेषण पर आधारित है।
4. आगत-निर्गत निदर्श में माँग पक्ष विश्लेषण नहीं किया जाता है।
5. इसका विश्लेषण आंशिक सन्तुलन के वजाय सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था पर केन्द्रित है।
6. आगत-निर्गत मॉडल का प्रयोग अर्थव्यवस्था के विनियोजन एवं पूर्वानुमान किया जाता है।
7. मॉडल इस बात को भी व्यक्त करता है कि विभिन्न आर्थिक क्षेत्र, उप-क्षेत्र एवं उद्योग आपस में किस प्रकार अन्तर्सम्बन्धित हैं।
8. आगत-निर्गत विश्लेषण मॉडल सांख्यिकीय अन्तर्सम्बन्धों पर आधारित है।
9. इसमें बन्द या खुला स्थैतिक एवं प्रावैगिक आगत-निर्गत मॉडल का अध्ययन किया जाता है।

2.7.5.2 आगत-निर्गत मॉडल का अर्थशास्त्र में महत्व (Importance of Input Output Model in Economics)

वर्तमान में कई समाजवादी तथा अन्य देशों ने अपने आर्थिक विकास में कार्यक्रमों को सम्पन्न करने के लिए आगत-निर्गत तकनीकी की मौलिक धारणाओं को अपनाया है। अधिकतर समाजवादी एवं साम्यवादी अर्थव्यवस्था का यही संरचनात्मक विचार होता है कि सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था को एक सुगम समन्वित एकीकृत सिद्धान्त के अंतर्गत ढाला जाए। सभी औद्योगिक इकाइयाँ राष्ट्रीय नियोजन संस्था के अन्तर्गत नियंत्रण में रहती हैं। अतः इस केन्द्रीय संस्था का यह दायित्व है कि वह अर्थव्यवस्था की आवश्यकताओं का जायजा ले एवं आवश्यकताओं के अनुरूप विभिन्न उत्पादक साधनों को उपलब्ध कराये ताकि अधिकतम सामाजिक कल्याण के उद्देश्य की पूर्ति की जा सके। इसके महत्व को निम्न बिन्दु में व्यक्त किया जा सकता है—

1. एक उत्पादक किसी वस्तु विशेष के विभिन्न प्रकारों एवं उनके मात्राओं के बारे में जानकारी एकत्रित करके उसमें आवश्यक सुधार एवं समायोजन करते हुए अपनी स्थिति को बेहतर बना सकता है।
2. अन्तर्क्षेत्रीय सम्बन्ध होने के कारण फर्मों की प्रवृत्ति एवं सम्भावित संयोगों का भी ज्ञान एक उत्पादक के लिए काफी उपयोगी साबित होती है।
3. आर्थिक आपातकाल जैसे युद्ध, हड़ताल, आर्थिक उच्चावचनों व प्राकृतिक आपदाओं की स्थिति में भी आगत-निर्गत निदर्श की सहायता से इसके बुरे प्रभावों से बचने के साथ आगे की योजना तैयार की जा सकती है।
4. इसका महत्व राष्ट्रीय आय लेखांकन में ज्यादा उपयोगी माना जाता है।
5. किसी अर्थव्यवस्था के अन्तर्गत क्षेत्रीय विकास की स्थिति को पता लगाने में काफी उपयोगी साबित होती है।
6. आगत-निर्गत के माध्यम से योजनाओं में आवश्यकता अनुसार बदलाव सम्भव है।

2.7.5.3 आगत-निर्गत मॉडल की सीमाएँ (Limitations of Input Output Model)

यू तो लियोन्टिफ आगत-निर्गत विश्लेषण का आर्थिक विश्लेषण में महत्वपूर्ण योगदान है, इसके बावजूद इनकी कुछ कमियाँ हैं जिसे निम्नलिखित रूप में रेखांकित किया जा सकता है—

1. **पूर्व-धारणों की अवयवहारिकता (Impracticability of the Assumptions)**— लियोन्टिफ आगत-निर्गत मॉडल की मान्यताएँ अवयवहारिक हैं। क्योंकि इसमें तकनीकी गुणांक (Technological Coefficient) को स्थिर माना जाता है जबकि तकनीकी स्थिरता अथवा उत्पादन में परिवर्तन से लगाये गये साधनों की मात्राओं में भी लगातार परिवर्तन होते हैं। अर्थव्यवस्था के सभी क्षेत्रों की पूँजी संरचना समान होती है किन्तु प्रत्येक क्षेत्र की पूँजी की माँग भिन्न-भिन्न होती है, फलतः पूँजी संरचना भी प्रत्येक क्षेत्र के लिए भिन्न-भिन्न होगी।
2. **उत्पादन के अन्य साधनों की उपेक्षा (Neglecting Certain Factors)**— इस मॉडल में केवल मध्यवर्ती वस्तुओं और पूँजीगत साधनों की ही चर्चा की जाती है जबकि एक आगत-निर्गत मॉडल में श्रम, तकनीकी परिवर्तन, ब्याज दर में परिवर्तन आदि भी उत्पादन को काफी हद तक प्रभावित करते हैं।
3. **एक पक्षीय सिद्धान्त (One Sided Analysis)**— यह सिद्धान्त एक पक्षीय विश्लेषण के पहलू पर आधारित है क्योंकि इसमें अर्थव्यवस्था के केवल उत्पादक क्षेत्र (Production Sector) को ही विश्लेषण में सम्मिलित किया जाता है। अतः उपभोक्ता एवं वितरण क्षेत्र की बिल्कुल उपेक्षा की गई है।
4. **साधन प्रतिस्थापन की उपेक्षा (Neglecting Factors of Substitution)**— तकनीकी गुणांक की स्थिरता की मान्यता साधन प्रतिस्थापन की संभावनाओं की उपेक्षा करती है। किन्तु वास्तविकता में देखा जाए तो ऐसी प्रतिस्थापन की संभावनाएँ अल्पकाल में भी होती हैं। दीर्घकाल में इनकी संभावनाएँ बहुत अधिक बढ़ जाती हैं।
5. **रेखीय संबंधों का लोप (Absence of Linear Relations)**— इस मॉडल में एक क्षेत्र का आगत दूसरे क्षेत्र का निर्गत है अर्थात् क्षेत्रों में रेखीय संबंध पाया जाता है, जो तथ्यों के विपरीत है, क्योंकि साधनों की अविभाज्यता के कारण निर्गत में वृद्धि बराबर नहीं होती है।
6. **भौतिक इकाइयों का प्रयोग (Use of Physical Units)**— व्यवहार में वस्तुओं तथा सेवाओं को केवल मौद्रिक रूप में ही व्यक्त किया जाता है। यद्यपि भौतिक इकाइयों के रूप में आगत-निर्गत विश्लेषण के संतुलन सकीकरणों द्वारा अर्थव्यवस्था का समुचित रूप में

पूर्वानुमान कठिन होता है। इस प्रकार यह देखते हैं कि आगत-निर्गत सारणी तथा तकनीकी गुणांकों को निर्मित करने में अत्यन्त कठिनाई का सामना करना पड़ता है।

7. **जटिलता (Complexity)**— इस विश्लेषण में अनेक संरचनात्मक समीकरणों एवं गणितीय तकनीकियों का सहारा लेना पड़ता है, जिनके लिए उच्च गणित तथा सांख्यिकीय विधियों का ज्ञान आवश्यक है। इस कारण से यह तकनीकी अत्यधिक जटिल हो जाती है।
8. प्रत्येक उत्पादक क्षेत्र केवल एक ही वस्तु का उत्पादन करता है।
9. समय तत्व का विलोपन।
10. गैर-संतुलन की विचार धारा।

2.7.6 इकाई का सारांश

- आगत शब्द का तात्पर्य उत्पादक का उत्पादन के लिए सामग्री की मांग से है। इसी तरह निर्गत शब्द का अर्थ उत्पादकता के फल से जुड़ा है। लागत का मतलब उसी सामग्री से है जो उत्पादक उत्पादन के लिए क्रय करता है जबकि निर्गत शब्द का अर्थ उससे है जिसका उत्पादक विक्रय करता है। अतः आगत किसी फर्म के लिए लागत है जबकि निर्गत प्राप्ति।
- आगत-निर्गत विश्लेषण की सहायता से अन्तः उद्योग संबंध तथा सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था की अन्तः निर्भरता प्राप्त होती है क्योंकि एक उद्योग का निर्गत दूसरे उद्योग के लिए आगत हो सकता है।
- कभी-कभी आगत- निर्गत आव्यूह का हल, ऋणात्मक संख्या आ जाता है। यदि हमारा हल निर्गत, ऋणात्मक निर्गत आता है तो इसका अर्थ यह है कि हम निर्गत से अधिक आगत का प्रयोग कर रहे हैं, जो कि एक अवास्तविक स्थिति है।
- व्यवहार में वस्तुओं तथा सेवाओं को केवल मौद्रिक रूप में ही व्यक्त किया जाता है। अतएव भौतिक इकाइयों के रूप में आगत-निर्गत विश्लेषण के संतुलन समीकरणों द्वारा अर्थव्यवस्था का समुचित रूप में पूर्वानुमान कठिन होता है।
- आर्थिक क्षेत्र में आगत-निर्गत विश्लेषण की प्रविधि एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करती है। आर्थिक सिद्धान्त पर विचार, राष्ट्रीय-लेखों की रचना, आर्थिक योजनाओं की रचना, उद्योगों का पारस्परिक संबंधों तथा निर्भरता का अध्ययन करना, व्यापार चक्रों का अध्ययन इत्यादि महत्वपूर्ण क्षेत्र हैं, जिनका विश्लेषण इस प्रविधि से ही संभव हुआ है।

2.7.7 मुख्यशब्द

- आगत (Input): प्राप्त।
- निर्गत (Output): निकलना।

2.7.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

16. आगत का तात्पर्य उत्पादक का करने के लिए सामग्री की मांग करने से है।
17. शब्द का अभिप्राय उत्पादकता प्रयास के परिणाम के फल से है।
18. किसी एक उद्योग का कुल उत्पादन किसी अन्य उद्योग के के रूप में उपयोग किया जाता है।
19. मॉडल की मान्यताएँ अव्यावहारिक है।
20. आगत-निर्गत विश्लेषण की सहायता से अंतः उद्योग संबंध तथा सम्पूर्ण अर्थव्यवस्था को अंतः प्राप्त होती है।

2.7.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(क) 1. उत्पादन, 2. निर्गत, 3. आगत, 4. लियोन्टिफ, 5. निर्भरता

2.7.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

7. लियोन्टिफ का आगत-निर्गत बन्द मॉडल से क्या अभिप्राय है?
8. एक आयोजित अर्थव्यवस्था के लिए आगत-निर्गत निदर्शों का महत्व समझाइए।

9. बंद अर्थव्यवस्था में आगत–निर्गत मॉडल को स्पष्ट करें।
10. किसी फर्म की लागत बढ़ने पर उत्पादन पर क्या प्रभाव पड़ेगा?

2.7.11 संदर्भ पुस्तकें

1. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
2. Mishra, J.P., “Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)” Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.
3. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, “आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी”, तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
4. अग्रवाल, डी. आर. ‘प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र’, (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली– 110091
5. J.K. Thukral, “Business Statistics” Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
6. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
7. Agarawal D. R., Quantitative Methods
8. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
9. Yamane, T., Mathematics for Economists.
10. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
11. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., “आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें”, शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड—II

इकाई—08 रैखिक प्रोग्रामिंग—आलेख विधि

संरचना:

- 2.8.1 परिचय
 - 2.8.1.1 रेखीय प्रक्रमन का अर्थ
- 2.8.2 रेखीय प्रक्रमन की मौलिक अवधारणा
 - 2.8.2.1 रेखीय प्रक्रमन का महत्व
 - 2.8.2.2 रेखीय प्रक्रमन की प्रमुख विशेषताएं
 - 2.8.2.3 रेखीय प्रक्रमन की सीमाएं
- 2.8.3 रेखीय प्रक्रमन समस्याओं के प्रकार व वर्गीकरण
 - 2.8.3.1 उत्पादन समस्या
 - 2.8.3.2 मिश्रित समस्या
 - 2.8.3.3 आहार समस्या
 - 2.8.3.4 परिवहन समस्या
- 2.8.4 रेखीय प्रक्रमन समस्या का विन्दूरेखीय विधि से हल
- 2.8.5 रेखीय प्रक्रमन समस्या को सिम्पलेक्स विधि
- 2.8.6 इकाई का सारांश
- 2.8.7 पारिभाषिक शब्दावली
- 2.8.8 मुख्यशब्द
- 2.8.9 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 2.8.10 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 2.8.11 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 2.8.12 सन्दर्भ पुस्तक

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- रेखीय प्रक्रमन के अर्थ को समझना
- रेखीय प्रक्रमन समस्याओं के प्रकार को जानना
- रेखीय प्रक्रमन समस्या का विन्दूरेखीय विधि से हल
- रेखीय प्रक्रमन समस्या को सिम्पलेक्स विधि से हल

2.8.1 परिचय (Introduction)

रेखीय प्रक्रमन एक गणितीय विधि है जिसका गणितीय जार्ज डैनजिंग (George Dantzing) ने, सेनाओं को पूर्ति पहुँचाने की समस्या से सम्बन्धित अमेरिका की वायु सेना के विभिन्न कार्य-कलापों की योजना बनाने के लिए, 1947 में विकसित किया था। फर्म के आर्थिक सिद्धान्त, प्रबंधात्मक अर्थशास्त्र, अन्तःप्रादेशिक व्यापार, सामान्य सन्तुलन विश्लेषण, कल्याण अर्थशास्त्र और विकास आयोजन में प्रयोग के लिए भी इसका विकास हुआ है। इस अभ्यास में फर्म से संबंधित रेखीय प्रक्रमन की व्याख्या की जा रही है।

2.8.1.1 रेखीय प्रक्रमन का अर्थ (Meaning of Linear Programming)

रेखीय प्रक्रमन उस विधि या तकनीकी को कहते हैं जोकि उत्पादन में निर्णयात्मक समस्याओं का सर्वोत्तम हल ज्ञात करने में प्रयुक्त होती है। यहाँ सर्वोत्तम हल से तात्पर्य उत्पादन लागत न्यूनतम तथा लाभ अधिकतम, मांग तथा पूर्ति के नियमों का ध्यान रखते हुए हो और प्रयोग में आने वाले सीमित साधनों का वैकल्पिक प्रयोग सम्भव हो।

‘रेखीय प्रक्रमन’ दो शब्दों से बना है, रेखीय शब्द का तात्पर्य यह है कि दो या अधिक चरों के मध्य रेखीय सम्बन्ध है। जैसे— $y = cx + d$ एक रेखीय समीकरण है। जबकि ‘प्रक्रमन’ शब्द का

अर्थ है समस्या का अनुकूलतम हल किसी व्यवस्था के अन्तर्गत किया गया है जिसकी एक निश्चित योजना (Plan) है तथा गणितीय तकनीक पर आधारित है।

‘रेखीय प्रक्रमन’ एक ऐसी गणितीय विधि है जो उपलब्ध सीमित साधनों का परस्पर प्रतिस्पर्धी क्रिया-कलापों में अनुकूलतम प्रकार से आबंटन करने के लिए प्रयुक्त की जाती है जबकि प्रयुक्त सभी चरों के बीच रेखीय सम्बन्धों को एकघातीय युगपत समीकरणों अथवा असमिकाओं के द्वारा दर्शाया गया हो।

सरल शब्दों में, रेखीय प्रक्रमन अधिकतमीकरण अथवा न्यूनतमीकरण के अध्ययन हेतु वह गणितीय तकनीक है जिसके अन्तर्गत समस्याओं के उचित हल निकाले जाते हैं। दूसरे शब्दों में, गणितीय भाषा में यह उन सब समस्याओं पर लागू होती है जिनमें, कुछ चरों के रूप में व्यक्त रेखीय असमानताओं का व्यवस्था के रहते हुए, अधिकतमीकरण (Maximization) तथा न्यूनतमीकरण (Minimization) के हलों की जरूरत होती है। यदि x और y , दो चर (Variables), z के फलन (Function) हों, तो z का मूल्य उस समय अधिकतम होगा, जब उस बिन्दु से की गई किसी भी गति से z का मूल्य कम हो जाए। z का मूल्य उस समय न्यूनतम होता है, जबकि किसी भी गति से z का मूल्य अधिक हो जाए।

2.8.2 रेखीय प्रक्रमन की मौलिक अवधारणा

रेखीय प्रक्रमन समस्या का गणितीय रूप (Mathematical Form of Linear Programming Problem)

यदि दो निर्णय चर x_1 तथा x_2 हैं तथा तीन निबाध/प्रतिबंध हैं तब रेखीय प्रक्रमन समस्या को गणितीय रूप में निम्न प्रकार प्रदर्शित किया जा सकता है:

उद्देश्य फलन, $Z = c_1x_1 + c_2x_2$ का अनुकूलतम मान ज्ञात कीजिए

जबकि

$$(i) a_{11}x_1 + a_{12}x_2 (\leq, =, \geq) b_1$$

$$(ii) a_{21}x_1 + a_{22}x_2 (\leq, =, \geq) b_2$$

$$(iii) x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{रेखीय निबाध (प्रतिबन्ध) हों।}$$

यहाँ c_1, c_2 निश्चित/स्थिरांक हैं। $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ मॉडल गुणांक हैं जिनके मान ज्ञात हैं। $x_1, x_2 \geq 0$ (अर्थात् $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$) गैर-ऋणात्मक निबाध हैं। प्रतिबन्ध ($\leq, =, \geq$) में से समस्या की प्रकृति के अनुसार केवल एक चिह्न लिया जाता है। चर x_1 तथा x_2 के मान ज्ञात करने होते हैं। x_1 तथा x_2 के मान ज्ञात करने की सम्पूर्ण प्रक्रिया ही रेखीय प्रक्रमन समस्या का हल कहलाता है। आव्यूह रूप में, रेखीय प्रक्रमन समस्या को निम्न प्रकार लिखा जा सकता है:

$$\text{अनुकूलतम कीजिए, } B = AX$$

$$\text{जबकि, } AX (\geq, =, \leq) B \text{ तथा } X \geq 0$$

नोट— रेखीय निबाधों तथा गैर-ऋणात्मक निबाधों के साथ-साथ कभी-कभी अतिरिक्त या व्यर्थ या फालतू निबाध (Redundant Constraints) लगा दिए जाते हैं जिनसे सम्भाव्य हल प्रभावित नहीं होता है। दूसरे शब्दों में, एक निबाध दूसरे निबाध को निरस्त कर देता है। जैसे : $x \leq 5$, असमिका $x \geq 2$ के सापेक्ष व्यर्थ है।

रेखीय प्रक्रमन समस्या को गणितीय रूप में इंगित करना (Formulation of a Linear Programming Problem): विभिन्न परिस्थितियों में किसी समस्या को रेखीय प्रक्रमन विधि से हल करने के लिए उसे गणितीय रूप में प्रदर्शित करना आवश्यक होता है। रेखीय प्रक्रमन विधि में समस्या (जिसका हल करना है।) को समीकरण के रूप में (अर्थात् गणितीय रूप में) प्रस्तुत करना, रेखीय प्रक्रमन समस्या का सूत्रीकरण कहा जाता है।

प्रथम चरण: दी गई सूचना के आधार पर अधिकतमीकरण करना है या निम्नतमीकरण करना है, इसका निर्धारण कीजिए।

द्वितीय चरण: उन चरों की पहचान कीजिए जिनके मान ज्ञात करने हैं तथा उन्हें प्रतीक रूप (x_1, x_2 या x, y) में लिजिए।

तृतीय चरण: उद्देश्य फलन को चरों के रेखीय फलन के रूप में व्यक्त कीजिए।

चतुर्थ चरण: निबाधों को समीकरण/असमीकरण के रूप में चरों के पदों में व्यक्त कीजिए।

पंचम चरण: गैर-ऋणात्मक प्रतिबन्ध लिखिए।

अन्त में, उद्देश्य फलन, रेखीय निबाध तथा गैर-ऋणात्मक प्रतिबन्धों को एक साथ लिखकर रेखीय प्रक्रमन समस्या का मॉडल प्राप्त कीजिए।

कुछ प्रमुख परिभाषाएँ (Some Main Definitions)

- (क) **उद्देश्य फलन (Objective Function):** वह फलन जिसका न्यूनतम या अधिकतम (अर्थात् अनुकूलतम) मान ज्ञात करना होता है, उद्देश्य फलन कहलाता है। जैसे:
रेखीय उद्देश्य फलन, $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$
- (ख) **हल (Solution):** चरों $x_1, x_2, \dots, x_n$ के ऐसे मानों का समुच्चय जो दिए हुए रेखीय प्रतिबन्धों (Linear Constraints) को सन्तुष्ट करते हैं समस्या का हल कहलाता है।
- (ग) **सम्भाव्य हल (Feasible Solution):** चरों $x_1, x_2, \dots, x_n$ के ऐसे मानों का समुच्चय जो दिए हुए रेखीय प्रतिबन्धों (Linear Constraints) के साथ-साथ गैर-ऋणात्मक प्रतिबन्धों $x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$ को भी सन्तुष्ट करता है, समस्या या सम्भाव्य हल कहलाता है।
- (घ) **मौलिक सम्भाव्य हल (Basic Feasible Solution):** एक ऐसा सम्भाव्य हल (Feasible Solution) जिसमें केवल m चरों (जबकि m आवश्यकता से सम्बन्धित प्रतिबन्धों की संख्या है) का मान धनात्मक हो तथा अन्य सभी चरों के मान शून्य हों।
- (च) **अनकूलतम हल (Optimum Solution):** वह सम्भाव्य हल जो दिए हुए उद्देश्य फलन का अधिकतम यह न्यूनतम मान हो।
- नोट:** रेखीय प्रक्रमन समस्या को हल करने में प्रायः निम्नलिखित स्थितियाँ हो सकती हैं—
(अ) समस्या का कोई सम्भाव्य हल न हो (No Feasible Solution)
(ब) समस्या के अनेक हल हों (Multiple Feasible Solution)
(स) समस्या का सम्भाव्य हल असीम या अपरिबद्ध हो (Unbounded Feasible Solution)।

2.8.2.1 रेखीय प्रक्रमन का महत्व (Importance of Linear Programming)

आज के समय में अर्थव्यवस्था के लगभग सभी क्षेत्रों में रेखीय प्रक्रमन का प्रयोग किया जा रहा है। इस तरह से अर्थशास्त्र के अध्ययन में रेखीय प्रक्रमन का बहुत महत्व है जिन्हें निम्नलिखित बिन्दुओं के द्वारा समझा जा सकता है—

- (अ) नीति आयोग (पंचवर्षीय योजनाओं) में रेखीय प्रक्रमन प्रणाली का उपयोग अन्न संग्रहण, परिवहन, बहुस्तर नियोजन, आदि क्षेत्रों में किया जाता है।
- (ब) भारतीय रेलवे के अन्तर्गत भी विभिन्न क्षेत्रों में रेखीय प्रक्रमन का उपयोग किया जाता है।
- (स) कृषि क्षेत्र में रेखीय प्रक्रमन प्रणाली का उपयोग फसल चक्र खाद्यान्न तथा नकदी फसलों का मिश्रित उत्पादन करना तथा उर्वरकों के मिश्रण, आदि में किया जाता है।
- (द) हवाई कम्पनियाँ भी मार्ग के निर्धारण तथा प्रत्येक मार्ग पर वायुयानों की संख्या को निर्धारित करने, आदि के लिए रेखीय प्रक्रमन प्रणाली का उपयोग कर रही है।
- (इ) वाणिज्य संस्थाएं एवं व्यक्तिगत व्यापारी भी लागत न्यूनतमीकरण तथा लाभ अधिकतमीकरण हेतु रेखीय प्रक्रमन तकनीक का प्रयोग करते हैं।
- (फ) तेल शोधक कारखाने, स्टील उद्योग, आदि से भी रेखीय प्रक्रमन प्रणाली का उपयोग किया जाता है।
- (ग) उत्पादन प्रबन्धन, बाजार प्रबन्धन, मानव शक्ति संसाधन, आदि में भी रेखीय प्रक्रमन का उपयोग किया जाने लगा है।
- (ह) मिलिट्री ऑपरेशन व युद्ध आदि में भी रेखीय प्रक्रमन का प्रयोग किया जा रहा है।

8.2.2 रेखीय प्रक्रमन की प्रमुख विशेषताएँ (Main Features of Linear Programming)

रेखीय प्रक्रमन द्वारा हल निकालने योग्य समस्याओं में निम्न विशेषताएँ परिभाषित या सम्मिलित हो जाती हैं:

- (क) **निर्णय चर (Decision Variable)—** सीमित साधनों के अन्तर्गत वस्तुओं की मात्रा की चरों x, y आदि द्वारा व्यक्त किया जाता है।
- (ख) **उद्देश्य फलन (Objective Function)—** प्रयुक्त चरों में रेखीय फलन जिसका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण किया जाता है, रेखीय प्रक्रमन समस्या का उद्देश्य फलन कहा जाता है।
- (ग) **निबाध (Constraints)—** रेखीय प्रक्रमन समस्या के अनुकूलतम (अधिकतम या न्यूनतम) हल के लिए जो सीमाएँ निर्धारित की जाती हैं उन्हें निबाध/प्रतिबंध कहा जाता है।

- (घ) **वैकल्पिक समाधान (Alternative Course of Action)**— रेखीय प्रक्रमन समस्या के हल के लिए अनेक विकल्प होने चाहिए ताकि उनमें से उस विकल्प का चुनाव किया जा सके जिससे उद्देश्य फलन का अधिकतमीकरण अथवा न्यूनतमीकरण हो जाए।
- (च) **रेखीय एवं गैर-ऋणात्मक शर्त (Linearity and Non-Negativity Condition)**— उद्देश्य फलन तथा निबाध सभी रेखीय होने चाहिए तथा सभी चरों के मान गैर-ऋणात्मक होने चाहिए।
- (छ) **योगात्मकता (Additivity)**— अलग-अलग क्रियाकलापों में प्रयुक्त किसी साधन की मात्राओं का योग सम्भव होना चाहिए।
- (ज) **विभाजन (Divisibility)**— अनुकूलतम हल प्राप्त करते समय निर्णय चरों को सतत माना जाता है अर्थात् उनके भिन्नात्मक मान हो सकते हैं।
- (झ) **निर्धारित (Deterministic)**— रेखीय प्रक्रमन की विधि से वहीं समस्याएँ हल की जाती हैं जिन्हें रेखीय मॉडल के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। यह मानते हुए कि मॉडल (Model Coefficient) पूर्णतया ज्ञात है।

8.2.3 रेखीय प्रक्रमन की सीमाएँ (Limitations of Linear Programming)

1. रेखीय प्रक्रमन तकनीक के अन्तर्गत चरों में रेखीय सम्बन्ध की परिकल्पना की जाती है जबकि व्यवहार में इस प्रकार का सम्बन्ध नहीं पाया जाता है।
2. वे समस्याएँ जिनमें चर योज्य (Additive) नहीं हैं, उनका हल इस तकनीक से नहीं किया जा सकता है।
3. इस तकनीक की संकल्पना 'प्रतिफल निरन्तर प्राप्त होता रहता है' यथार्थवाची नहीं है।
4. कभी-कभी रेखीय प्रक्रम तकनीक द्वारा प्राप्त उचित हल फर्म/कम्पनी के लिए उपयोगी नहीं होगा।

2.8.3 रेखीय प्रक्रमन समस्याओं के प्रकार व वर्गीकरण (Classification of Linear Programming Problems)

- 1) उत्पाद लाइन समस्याएँ (Product Line Program)
- 2) उत्पादन कार्यक्रम समस्याएँ (Production Scheduling Problem)
- 3) उत्पादन बंटन समस्याएँ (Production Allocation Problems)
- 4) उत्पादन-योजना समस्याएँ (Production-Planning Problems)
- 5) मिश्रित उत्पाद समस्याएँ (Product Mix Problems)
- 6) आहार समस्याएँ (Diet Problems)
- 7) ट्रिम हानि समस्याएँ (Trim Loss Problems)
- 8) परिवहन समस्याएँ (Transportation Problems)

रेखीय प्रक्रमन समस्याओं के उदाहरण—

2.8.3.1 उत्पादन समस्या (Production Problem)— एक उत्पादक दो प्रकार के उत्पाद P_1 व P_2 दो मशीनों M_1 तथा M_2 की मदद से उत्पादित करता है। उत्पाद P_1 की एक इकाई तैयार करने के लिए मशीन M_1 पर 1 घण्टा व मशीन M_2 पर 3 घण्टे कार्य करना होता है तथा उत्पाद P_2 की एक इकाई तैयार करने के लिए प्रत्येक मशीन पर दो घण्टे कार्य करना होता है। यदि P_1 व P_2 के प्रति इकाई लाभ क्रमशः 60 रुपये व 50 रुपये हों तथा मशीन M_1 व M_2 एक सप्ताह में क्रमशः 40 व 60 घण्टे तक कार्य कर सकती है तो दोनों उत्पादों की कितनी-कितनी इकाईयाँ बनानी चाहिए जिससे कि कुछ लाभ अधिकतम हो।

2.8.3.2 मिश्रित उत्पाद समस्या (Product Mix)— एक खिलौने की कम्पनी दो प्रकार की गुड़िया बनाती है, बेसिक वर्जन गुड़िया A और डीलक्स वर्जन गुड़िया B। B प्रकार की प्रत्येक गुड़िया प्रकार A की गुड़िया की तुलना में, बनाने में दूना समय लेती है और कम्पनी के पास बेसिक दर्जन की तरह ही 2,000 गुड़िया प्रतिदिन बनाने का समय है। कुल मिलाकर दोनों A और B तरह की 1,500 गुड़िया प्रतिदिन बनाने हेतु प्लास्टिक की पर्याप्त मात्रा प्राप्त की जाती है। डीलक्स वर्जन के लिए फैन्सी ड्रे की आवश्यकता होती है जिनमें मात्र 600 प्रतिदिन उपलब्ध है। यदि कम्पनी को A और B गुड़ियों पर क्रमशः 3.00 रुपये और 5.00 रुपये प्रति गुड़िया लाभ प्राप्त हो तो अधिकतम लाभ के लिए प्रत्येक तरह की प्रतिदिन कितनी गुड़िया बनाई जाएँ?

8.3.3 आहार समस्या (Diet Problem)— एक मरीज की प्रतिदिन की विटामिन A, B, C की आवश्यकता क्रमशः 15 मिग्रा विटामिन A, 50 मिग्रा विटामिन B और 25 मिग्रा विटामिन C के लिए है। यह विटामिन्स एक आम, एक सन्तरे एवं एक सेब से इस क्रम से मिलते हैं: आम से 5.0 मिग्रा A, 1 मिग्रा B, 1 मिग्रा C, सन्तरे से 2 मिग्रा B, 3 मिग्रा C एवं सेब से 0.5 मिग्रा A, 3 मिग्रा B, 1 मिग्रा C।

एक आम, एक सन्तरा और एक सेब का मूल्य क्रमानुसार 0.59 रुपये, 0.25 रुपये और 0.40 रुपये है।

मरीज की प्रतिदिन की विटामिन की आवश्यकताओं की पूर्ति करने के लिए इन फलों को कितना-कितना खरीदा जाए जिससे कि दैनिक मूल्य न्यूनतम हों।

8.3.4 परिवहन समस्या (Transportation Problem)— एक कम्पनी चार गोदामों से P_1, P_2, P_3, P_4 तीन बाजारों की मांग M_1, M_2, M_3 की आपूर्ति करती है। प्रत्येक गोदाम पर क्रमशः a_1, a_2, a_3, a_4 मात्रा उपलब्ध है। प्रत्येक बाजार की मांग क्रमशः b_1, b_2, b_3 है। माना $(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + b_1 + b_2 + b_3)$, c_{ij} , $i = 1, 2, 3, 4$ तथा $j = 1, 2, 3$ गोदाम P_i से बाजार M_j तक माल पहुंचाने की लागत है। गोदामों से बाजार को माल भेजने को माल भेजने की परिवहन योजना तैयार करना जिससे कि लागत न्यूनतम हो।

2.8.4 रेखीय प्रक्रमन समस्या का विन्दुरेखीय विधि से हल (Graphical Solution of a Linear Programming Problem)

यदि रेखीय प्रक्रमन समस्या केवल दो चरों (x, y या x_1, x_2) तक ही सीमित है तो उस ग्राफीय विधि से हल किया जा सकता है।

प्रक्रिया (Procedure) के चरण

प्रथम चरण— समस्या को सर्वप्रथम रेखीय प्रक्रमन समस्या के रूप में लिखें, यदि इस रूप में न दी हुई हो।

द्वितीय चरण— प्रतिबन्धों को प्रदर्शित करने वाले समीकरणों अथवा असमिकाओं को ग्राफ पर अंकित करें। इसके लिए प्रत्येक असमीकरण (Inequation) या असमिका (Inequality) के संगत एक सरल रेखा कार्तीय पद्धति के अन्तर्गत उचित पैमाना मानकर खींचें। ग्राफ पर किसी सरल रेखा को खींचने के लिए कम-से-कम दो बिन्दुओं की आवश्यकता होती है।

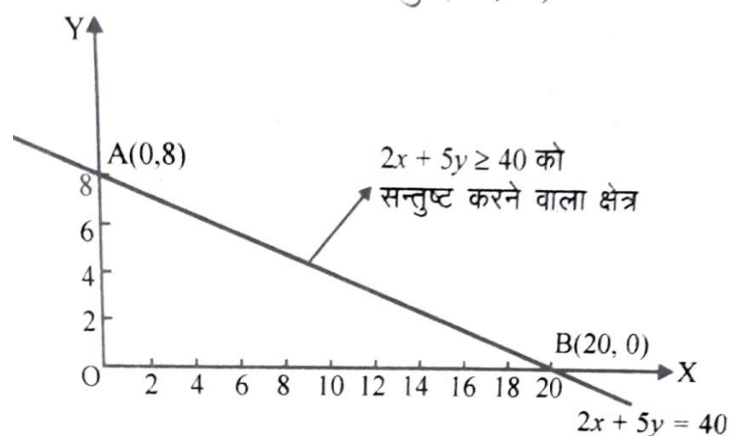
(i) माना असमिका के रूप में एक प्रतिबन्ध निम्न प्रकार है:

$$2x + 5y \geq 40$$

इस प्रतिबन्ध (निबाध) के संगत सरल रेखा $2x + 5y = 40$ को ग्राफ पर निरूपित करना है। यहां, $x = 0$ रखने पर, $y = 8$ प्राप्त होता है अर्थात् बिन्दु (0,

8)

तथा रखने पर प्राप्त होता है अर्थात् बिन्दु (20, 0)।



चित्र संख्या-2.8.1

इस प्रकार दो बिन्दुओं A(0, 8) तथा B(20, 0) से होती हुई एक सरल रेखा खींचा गया है। यह पता लगाने के लिए कि प्रतिबन्ध $2x + 5y \geq 40$ को पूरा करने वाले बिन्दु या क्षेत्र रेखा AB के ऊपर की ओर है या नीचे की ओर निम्न प्रक्रिया अपनाई जाती है,

असमीकरण

$$2x + 5y > 40$$

में x के स्थान पर 0 तथा y के स्थान 0 पर रखने पर,

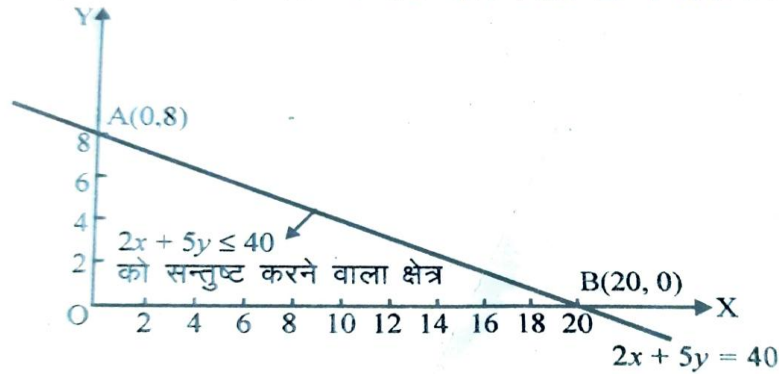
$$2 \times 0 + 5 \times 0 > 40$$

अर्थात्

$$0 > 40$$

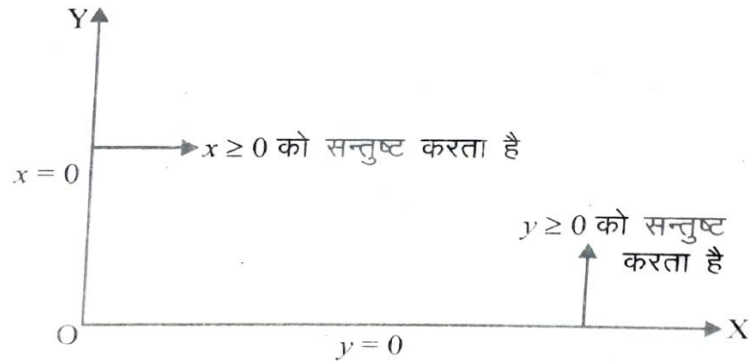
जो सही नहीं है अर्थात् मूलबिन्दु $(0, 0)$ इस असमिका को सन्तुष्ट नहीं करता है। अतः रेखा AB के ऊपर का वह भाग जिसमें मूलबिन्दु नहीं है, असमिका $2x + 5y > 40$ को सन्तुष्ट करता है। इस बात का एक तीर के निशान द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

(ii) यदि प्रतिबन्ध $2x + 5y \leq 40$ होता तो अभीष्ट क्षेत्र चित्र-2.8.2 द्वारा प्रदर्शित किया गया है।



चित्र-2.8.2

(iii) गैर-ऋणात्मक प्रतिबन्धों $x \geq 0, y \geq 0$ के संगत सरल रेखाएं $x = 0$ तथा $y = 0$ हैं जहां $x = a$ को y -अक्ष (OY) प्रदर्शित करता है तथा $y = 0$ को x -अक्ष (OX) प्रदर्शित करता है। तथा के मानों को प्रथम चरण में ही सीमित किया गया है (चित्र-8.1 देखें)।



चित्र-2.8.3

तृतीय चरण (साध्य क्षेत्र ज्ञात करना)— (x, y) के ऐसे मानों का समुच्चय (या क्षेत्र) जो दी हुई रेखीय प्रक्रमन समस्या के सभी प्रतिबन्ध तथा गैर-ऋणात्मक शर्त की पूर्ति करता है, **साध्य हल** या **सम्भाव्य हल (Feasible Solution)** कहलाता है।

असमीकरणों को सन्तुष्ट करने वाले इस उभयनिष्ठ क्षेत्र (Common Region) को छायांकित भी किया जा सकता है।

चतुर्थ चरण (अनुकूलतम हल ज्ञात करना)— “किसी भी रेखीय प्रक्रमन समस्या का अनुकूलतम हल, यदि सम्भव है तो साध्य हलों के क्षेत्र का कोई शीर्ष बिन्दु ही होगा।”

वह साध्य हल जो कि उद्देश्य फलन $Z = c_1x + c_2y$ को अनुकूलतम (अधिकतम या न्यूनतम) करता है उचित हल या अनुकूलतम हल (Optimal Solution) कहलाता है।

यदि साध्य हल उद्देश्य फलन को न्यूनतम करता है तो वह न्यूनतम साध्य हल (Minimum Feasible Solution) कहलाता है। यदि साध्य हल उद्देश्य फलन को अधिकतम करता है तो वह अधिकतम साध्य हल (Maximum Feasible Solution) कहलाता है। इसके लिए प्रत्येक शीर्ष के निर्देशांक ज्ञात करें और उसके संगत उद्देश्य फलन का मान ज्ञात करें।

उदाहरण 2.8.1: निम्नलिखित समीकरण को बिन्दुरेख विधि से हल कीजिए।

हल: Maximize

$$R = 12x + 15y$$

Subject to (i)

$$12x + 4y \leq 48 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$6x + 12y \leq 72 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$14x + 12y \leq 84 \quad \dots\dots\dots (3)$$

$$(ii) \quad x \geq 0, y \geq 0$$

प्रत्येक असमानता को विन्दुरेख द्वारा व्यक्त करने के लिए, हम तीनों समीकरणों के असमानता चिह्न ($\leq$) छोड़कर, बराबर ($=$) के चिह्न लेते हैं। अतः समीकरण (1) को यूँ लिखते हैं:

$$12x + 4y = 48$$

यह मानकर कि वस्तु x केवल आगत A की सभी 48 इकाइयों द्वारा उत्पादित की जाती है तथा वस्तु y बिल्कुल नहीं तो:

$$12x + 0 = 48 \text{ (अधिकतम की स्थिति में)}$$

$$\text{या} \quad x = 4 \text{ (जब } y = 0 \text{)}$$

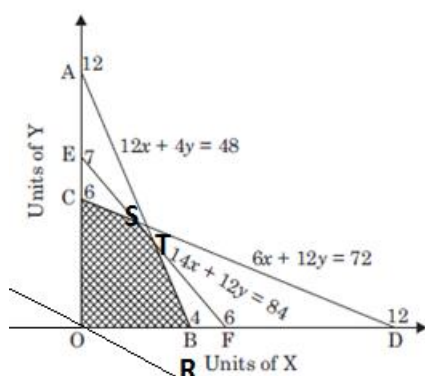
इसी प्रकार यह मान कर कि सभी 48 इकाइयों से केवल वस्तु ही उत्पादित की जाती है तब,

$$0 + 4y = 48$$

$$\text{या} \quad y = 12 \text{ (जब } x = 0 \text{)}$$

समीकरण $12x + 4y = 48$ को चित्र-8.4 में AB रेखा द्वारा दर्शाया गया है जहाँ OA = Y तथा OB = 4x रेखा AB पर कोई भी बिन्दु जैसे T समीकरण $12x + 4y = 48$ को सन्तुष्ट करता है क्योंकि इस रेखा AB के नीचे तथा बाईं ओर का क्षेत्र असमानता $12x + 4y \leq 48$ को सन्तुष्ट करता है।

चित्र-8.4



इसी प्रकार समीकरण $6x + 12y = 72$ को हल करने पर: $x = 12$ तथा $y = 6$ प्राप्त होते हैं जिन्हें चित्र-8.4 में CD रेखा द्वारा निरूपित किया गया है, जहाँ OC = 6, Y-अक्ष में तथा OD = 12, X-अक्ष में, और समीकरण $14x + 12y = 84$ को हल करने पर हमें प्राप्त होता है, $x = 6$ तथा $y = 7$ जिन्हें चित्र-8.4 में, रेखा द्वारा प्रदर्शित किया गया है जहाँ OE = 7, Y-अक्ष में, तथा OF = 6, X-अक्ष में निरूपित है।

संभाव्य क्षेत्र (Feasible Region): चित्र-8.4, यह प्रदर्शित करता है कि छायांकित (Shaded) क्षेत्र में सभी बिन्दु जो एक-दूसरे को काटती हुई तीनों रेखाओं द्वारा घिरे हुए हैं प्रत्येक तीनों असमानताओं को सन्तुष्ट करेंगे। बिन्दु S पर EF रेखा, CD रेखा को काटती है तथा बिन्दु T पर CD रेखा AB को काटती है। इस प्रकार OBTSC क्षेत्र जो तीनों रेखाओं के एक-दूसरे को काटने वाले S एवं T बिन्दुओं के बाईं ओर नीचे स्थित है, तीनों समीकरणों की असमानताओं को सन्तुष्ट करता है। यह छायांकित (Shaded) क्षेत्र उत्पादन का संभाव्य क्षेत्र कहलाता है तथा प्रत्येक बिन्दु जो इस क्षेत्र के अन्तर या इसकी सीमा पर होता है समस्या का संभाव्य हल व्यक्त करता है।

अनुकूलतम हल (Optimum Solution)– दिए गए रैखिक प्रायोजन का रेखा चित्र द्वारा हल करने के लिए दिए गए प्रतिबंधों कि रेखाचित्रों द्वारा प्राप्त कोणिक बिन्दुओं (Corner Points) को चिन्हित करने के बाद उद्देश्य समीकरण $R = 12x + 15y$ का रेखाचित्र $R = 0$ मानते हुए खिंचा जाता है। अनुकूलतम ह प्राप्त करने के लिए उद्देश्य समीकरण को धीरे धीरे समानान्तर रूप से ऊपर उठाया जाता है। उद्देश्य फलन को अधिकतम करने वाले प्रश्नों में इस प्रक्रिया में उद्देश्य फलन जिस कोणिक बिन्दु को सबसे अंत में स्पर्श करता है वह बिन्दु अनुकूलतम बिन्दु होता है तथा उस बिन्दु पर उद्देश्य चर का मान भी अधिकतम होता है। चित्र से स्पष्ट है कि उद्देश्य समीकरण को समानान्तर रूप से ऊपर उठाने के क्रम में यह S बिन्दु पर सबसे अंत में स्पर्श करता है। अतः S बिन्दु पर उद्देश्य चर का मान अनुकूलतम मान है।

नोट: न्यूनतमीकरण के उद्देश्य वाले प्रश्नों में जिस बिन्दु को उद्देश्य समीकरण सबसे पहले स्पर्श काता है वही बिन्दु अनुकूलतम बिन्दु कहलाता है तथा उस बिन्दु पर उद्देश्य चर का मान अनुकूलतम होता है।

इस प्रक्रिया की शुद्धता की जाँच बीजगणितीय विधि से की जा सकती है।

बीजगणितीय विधि द्वारा हल:

विभिन्न बिन्दु B, T, S, C जो संभाव्य हल को व्यक्त करते हैं, इनमें से कौन-सा इष्टतम बिन्दु है जो फर्म के आगम को अधिकतम करेगा? इस बिन्दु को बीज गणित द्वारा कैसे जाना जा सकता है?

हम समीकरणों (1) एवं (2) से बिन्दु B तथा C के अक्षों (Coordinates) को जानते हैं जिनके अनुसार $OB = 4X$ तथा $OC = 6Y$ बिन्दु T के अक्षों को निर्धारित करने के लिए हम समीकरणों (1) एवं (2) को युगपत समीकरणों के रूप में लेते हैं। (क्योंकि रेखाएँ AB तथा EF बिन्दु T पर काटती हैं) और इनको हल करते हैं:

$$12x + 4y = 48 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$14x + 12y = 84 \quad \dots\dots\dots (3)$$

समीकरण (1) को 3 से गुणा करके तथा समीकरण (3) को उसमें से घटाकर:

$$36x + 12y = 144$$

$$14x + 12y = 84$$

$$22x = 60$$

$$x = \frac{60}{22} = 2.73$$

अब समीकरण (1) में $x = 2.73$ के मूल्य का लगाकर,

$$12 \times 2.73 + 4y = 48$$

$$32.76 + 4y = 48$$

$$4y = 48 - 32.76$$

$$4y = 15.24$$

$$y = 3.81$$

अतः बिन्दु T के अक्षांक $x = 2.73$ तथा $y = 3.81$ है।

इसी प्रकार बिन्दु S के अक्षांकों को समीकरणों (3) एवं (2) द्वारा हल करने पर $x = 1.5$ तथा $y = 5.25$ ।

X तथा Y के इष्टतम संयोग ढूँढने के लिए X और Y की कीमतों (क्रमशः 12 रुपये एवं 15 रुपये) को इन अक्षांकों के बिन्दु के मूल्यों को जो ऊपर निकाले गए हैं स्थानापन्न करत हैं। बिन्दु B पर $x = 4$ तथा $y = 0$ इनको उद्देश्य फलन (रुपये में) $f = 12x + 15y$ में स्थानापन्न करने से:

$$(\text{रु. } 12). (4) + (\text{रु. } 15) (0) = \text{रु. } 48 \quad \dots\dots\dots (4)$$

बिन्दु T पर $x = 2.73$ तथा $y = 3.81$ होने पर, इसी प्रकार प्राप्त करते हैं,

$$(\text{रु. } 12).(2.73) + (\text{रु. } 15).(3.81) = \text{रु. } 89.91 \quad \dots\dots\dots (5)$$

बिन्दु S पर $x = 1.5$ तथा $y = 5.25$ होने पर हमें प्राप्त होता है,

$$(\text{रु. } 12).(1.5) + (\text{रु. } 15).(5.25) = \text{रु. } 96.75 \quad \dots\dots\dots (6)$$

बिन्दु C पर $x = 0$ तथा $y = 6$ होने पर

$$(\text{रु. } 12).(0) + (\text{रु. } 15)(6) = \text{रु. } 90 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$14x + 12y = 84$$

$$6x + 12y = 72$$

2.8.5 रेखीय प्रक्रमन समस्या को सिम्पलेक्स विधि (Simplex Method for Solving A LPP)

सिम्पलेक्स विधि का आविष्कार जॉर्ज बी. डैन्टजिंग (George B. Dantzig) ने 1947 में किया था। इसके अन्तर्गत रेखीय प्रक्रमन समस्या को मानक रूप में लिखा जाता है। एक सम्भाव्य हल (Feasible Solution) से प्रारम्भ किया जाता है और फिर पुनरावृत्ति विधि (Iterative Procedure) से हल में सुधार किया जाता है। रेखीय प्रक्रमन की बेसिक प्रमेयों का कथन (Statement of Basic Linear Programming)।

1. रेखीय प्रक्रमन समस्या का प्रत्येक बेसिक सम्भाव्य हल (Basic Feasible Solution) एक कॉन्वेक्स समुच्चय (Convex Set) का चरम बिन्दु है तथा प्रत्येक चरम बिन्दु निबाधों के समुच्चय (Set of Constraints) का बेसिक सम्भाव्य हल है। कॉन्वेक्स समुच्चय बिन्दुओं का वह समुच्चय जिसमें यदि p और q दो बिन्दु हों, तो इनका संयोग भी उसी समुच्चय में होगा।
2. एक उद्देश्य फलन Z का अनुकूलतम तब घटित होता है, जबकि सम्भाव्य क्षेत्र (Feasible Region) का कम-से-कम एक चरम बिन्दु (Vertex) विद्यमान हो और सम्भाव्य परिवद्ध (Bounded) हो।

गणना विधि (Computational Procedure)

1. स्लेक चरों की सहायता से असमिकाओं को समीकरणों में बदला जाता है।
2. प्रदत्त सूचना को एक सारणी में रखते हैं जिसे सिम्पलेक्स तालिका कहते हैं।
3. एक प्रारम्भिक बेसिक सम्भाव्य हल का पता लगाते हैं और उससे आगे की प्रक्रिया शुरू करते हैं।
4. इस हल का परीक्षण करते हैं और यह देखते हैं कि यह अनुकूलतम है या नहीं।
5. यदि यह हल अनुकूलतम नहीं होता तो संशोधित तालिका बनाई जाती है। इसके लिए अन्तर्गमन चर या प्रवेश करने वाला चर (Incoming Variable or Entering Variable) व बहिर्गमन या बाहर जाने वाला चर (Outgoing Variable or Departing Variable) निश्चित करते हैं जिससे कि अगला हल निकाला जा सके।
6. इस हल का परीक्षण करते हैं और यह पता करते हैं कि यह अनुकूलतम है या नहीं। इसी प्रकार तब तक तालिकाएँ बनाते रहें जब तक कि अनुकूलतम हल प्राप्त न हो सके।

दो चरों के लिए सिम्पलेक्स तालिका का खाका (Layout of Simplex Table for Two Variables)

यदि उद्देश्य फलन, अधिकतमीकरण

$$Z = C_1X_1 + C_2X_2 + 0.s_1 + 0.s_2$$

दो निबाध

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + 1.s_1 + 0.s_2 = b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + 0.s_1 + 1.s_2 = b_2$$

सिम्पलेक्स सारणी

C_B	C_j	आधार	C_1	C_2	0	0	X_B	अनुपात
			X_1	X_2	s_1	s_2		
0		s_1	a_{11}	a_{12}	1	0	b_1	न्यूनतम (की रॉ)
0		s_2	a_{21}	a_{22}	0	1	b_2	
$\bar{C}_j$			गुणांक आव्यूह		तत्समक आव्यूह			
$= C_j - Z_j$			$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_4$ अधिकतम		$Z = \dots\dots\dots$	
					(की कॉलम)			

व्याख्या (Explanation)

1. C_j पंक्ति या उद्देश्य पंक्ति (Objective Row)– उद्देश्य फलन के निर्णायक चरों, स्लेक चरों तथा सरप्लस चरों के गुणांक।
2. C_{ij} स्तम्भ या उद्देश्य पंक्ति (Objective Column)– उद्देश्य फलन में उन चरों के गुणांक जो तत्समक आव्यूह बनाते हैं।
3. आधार स्तम्भ (Basic Column)– इसमें वे बेसिक लिखे जाते हैं जिनके गुणांक स्तम्भ C_{ij} में लिखे गए हैं चरों का क्रम तत्समक आव्यूह में 1 के सामने होता है।
4. बॉडी आव्यूह (Body Matrix)– निबाधों के बाईं ओर के चरों के गुणांकों द्वारा बनती है जो एकक आव्यूह में नहीं है।
5. तत्समक आव्यूह (Identity Matrix)– बेसिक चरों के गुणांकों से निर्मित आव्यूह।
6. X_B स्तम्भ (X_B Column) या मात्रा स्तम्भ (Quantity Column)– आधार स्तम्भ में आये चरों के मान।
7. सदिश पंक्ति (Vector Row)– बॉडी आव्यूह तथा तत्समक आव्यूह में आए चरों के संगत सदिश।

8. **इण्डेक्स पंक्ति (Index Row)**— या **षुद्ध मूल्यांकन पंक्ति (Net Evaluation Row)** या $\bar{C}_j$ पंक्ति— $\bar{C}_j = C_j - Z_j = C_j - C'_{ij}X_j$
 $= C_j - C'_{ij}$ और X_j का आन्तरिक गुणनफल
 बेसिक चरों के लिए $\bar{C}_j = 0$, सदैव
- $\bar{C}_j$ के आधार पर अनुकूलतम हल का परीक्षण किया जाता है:
- (अ) यदि सभी $\bar{C}_j > 0$, हल अनुकूलतम है।
 यदि कोई भी $\bar{C}_j > 0$ नहीं है, परन्तु कुछ शून्य है तब अन्य अनुकूलतम हल विद्यमान हैं।
 यदि सभी $\bar{C}_j < 0$ तब हल अद्वितीय अनुकूलतम हल है।
- (ब) यदि $\bar{C}_j > 0$ कुछ j के लिए, तब हल अनुकूलतम नहीं है। अतः आगे पुनरावृत्ति की जाएगी।
- (स) यदि $\bar{C}_j$ के अधिकतम सम्भव मान के संगत स्तम्भ X_j के सभी अवयव ऋणात्मक या शून्य है तो हल असीम (Unbounded) है।
9. **की स्तम्भ (Key Column)**— वह स्तम्भ जिसमें धनात्मक $\bar{C}_j$ अधिकतम हैं इसके संगत संदिश X_j प्रवेश करता है जिसे ऊपर की ओर तौर (↑) का निशान लगाकर व्यक्त कर सकते हैं।
10. **इण्डेक्स स्तम्भ (Index Column)** या **अनुपात स्तम्भ (Ratio Column)**— इस स्तम्भ में अनुपात ज्ञात किए जाते हैं जहाँ,
- $$\text{पहली पंक्ति के लिए अनुपात} = \frac{b_1}{\text{sangat ki Stambh ka man}}$$
- $$\text{दूसरी पंक्ति के लिए अनुपात} = \frac{b_2}{\text{Sangat ki Stambh ka Man}}$$
11. **की व मुख्य पंक्ति (Kew Rows)** या **प्रमुख/पायवट पंक्ति (Pivot Row)**— वह पंक्ति जिसमें गैर-ऋणात्मक अनुपात सबसे कम हैं।
 न्यूनतम अनुपात के संगत चर का संदिश बहिर्गमन करेगा जिसे नीचे की ओर तीर के निशान (↓) से व्यक्त कर सकते हैं।
12. **की/मुख्य फैक्टर (Key Fctor)** या **की/प्रमुख अवयव (Key Element)**— वय अवयव जो की स्तम्भ तथा की पंक्ति के कटान बिन्दु पर स्थित है **मुख्य पंक्ति (Main Row)** के नए मान लिखने के लिए इस संख्या को 1 (यदि यह 1 न हो) में परिवर्तित कर लिया जाता है।

रेखीय प्रक्रमन समस्या का द्वैत (Dual of a Linear Programming Problem)

प्रत्येक रेखीय प्रक्रमन समस्या से सम्बन्धित एक दूसरी रेखीय प्रक्रमन समस्या होती है जिसे पहली समस्या का द्वैत (Dual) कहते हैं। इस सम्बन्ध में पहली समस्या को **प्राथमिक या प्राइमल (Primal)** कहते हैं। किसी द्वैत का द्वैत स्वयं में प्राइमल होता है। प्राथमिक द्वैत के जोड़े में किसी को भी प्राथमिक माना जा सकता है, फलस्वरूप दूसरी द्वैत होगी।

द्वैध समस्या:

रैखिक प्रयोजन की किसी भी अधिकतमीकरण की समस्या को न्यूनतमीकरण अथवा न्यूनतमीकरण की समस्या को अधिकतमीकरण में बदले की प्रक्रिया को द्वैध परिवर्तन कहा जाता है।

प्रमुख समस्या (Primal Problem)

Maximize Revenue, $R = 12x + 15y$
 Subject to,
 $12x + 14y \leq 48$
 $6x + 12y \leq 72$
 $14x + 12y \leq 84$
 $x \geq 0, y \geq 0$

द्वैध समस्या (Dual Problem)

Minimize Cost, $C = 48A + 72B + 84C$
 Subject to
 $12A + 6B + 14C \geq 12$
 $14A + 12B + 12C \geq 15$
 $A \geq 0, B \geq 0, C \geq 0$

छात्र इस द्वैध समस्या का हल आहार समस्या के किए गए हल की तरह स्वयं करें।
प्राथमिक द्वैत जोड़े के दो महत्वपूर्ण रूप हैं—

1. **सममित प्राथमिक द्वैत (Symmetric Primary Dual)**— प्राथमिक-द्वैत जोड़े को सममित रूप में कहा जाता है यदि सभी चर गैर-ऋणात्मक है तथा सभी निबाध असमिकाएँ हैं ($\leq$ अधिकतमीकरण की स्थिति में तथा $\geq$ न्यूनतमीकरण की स्थिति में) परन्तु प्राचलों के चिह्न स्वैच्छिक है। अन्यथा इस असममित रूप में कहा जाता है।

2. **असममित (Assymmetric Dual)**

दूसरे वर्गीकरण के अनुसार प्राथमिक (Primal) दो प्रकार के होते हैं—

(अ) **मिश्रित प्राथमिक रूप (Mixed Primal Form)**—यदि किसी प्राथमिक के निबाधों में समीकरण और असमिकाओं (किसी भी दिशा में) का मिश्रण हो, गैर-ऋणात्मक तथा अनियन्त्रित चर हों, तब इस मिश्रित प्राथमिक रूप का कहा जाता है।

(ब) **मानक प्राथमिक रूप (Standard Primal Form)**— यदि सभी निबाधों का एक प्रकार का चिह्न [अधिकतमीकरण की स्थिति में ($\leq$) चिह्न तथा न्यूनतमीकरण की स्थिति में ($\geq$)] हों, तब वह मानक प्राथमिक रूप का कहा जाता है।

किसी प्रक्रमन का द्वैत बनाना (Formulation of the Dual of Primal Programme)

सामान्य नियम [प्रदत्त प्राथमिक को मानक रूप में लिखना]

1. मिले-जुड़े निबाधों (Mixed Constraints) को एक दिशा में बदलें। अर्थात् अधिकतम मान ज्ञात करने की स्थिति में (छोटा या बराबर $\leq$) के रूप में तथा न्यूनतम मान ज्ञात करने की स्थिति में (बड़ा या बराबर $\geq$) के रूप में रखें।
2. असममित रूप को सममित रूप में बदलें। यदि कोई निबाध समीकरण के रूप में है तो उसे दो असमिकाओं के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।
यदि कोई चर चिह्न में अनियन्त्रित (Unrestricted in Sign) हैं तो उसे दो धनात्मक चरों के अन्तर के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

2.8.6 इकाई का सारांश

- **रेखीय प्रक्रमन** उस विधि या तकनीक को कहते हैं जोकि उत्पादन में निर्णयात्मक समस्याओं का सर्वोत्तम हल ज्ञात करने में प्रयुक्त होती है। यहां सर्वोत्तम हल से तात्पर्य उत्पादन लागत न्यूनतम तथा लाभ अधिकतम, मांग तथा पूर्ति के नियमों का ध्यान रखते हुए हो और प्रयोग में आने वाले साधनों का वैकल्पिक प्रयोग सम्भव हों।
- **‘रेखीय प्रक्रमन’** दो शब्दों से बना है, रेखीय शब्द का तात्पर्य यह है कि दा या अधिक चरों के मध्य रेखीय सम्बन्ध है। जैसे— $y = cx + d$ एक रेखीय समीकरण है। जबकि ‘प्रक्रमन’ शब्द का अर्थ है समस्या का अनुकूलतम हल किसी व्यवस्था के अन्तर्गत किया गया है जिसकी एक निश्चित योजना (Plan) है तथा गणितीय तकनीक पर आधारित है।
- फर्म का नवक्लासिकी सिद्धांत तक समय में एक या दो चरों को लेकर निर्णयकरण की समस्या का विश्लेषण करता है। इसका संबंध एक समय में एक उत्पादन प्रक्रिया से होता है।
- आहार समस्या पहली आर्थिक समस्या थी जिसका रेखीय प्रोग्रामिंग द्वारा हल लागत वेफ न्यूनतमीकरण द्वारा किया गया था।
- रेखीय प्रोग्रामिंग अर्थशास्त्रा में बहुत ही लाभदायक साधन सिद्ध हुआ है परन्तु इसकी अपनी सीमाएँ हैं। वास्तव में, अनेक संरोधों वेफ कारण वास्तविक समस्याएँ रेखीय प्रोग्रामिंग तकनीक द्वारा हल नहीं की जा सकती हैं।

2.8.7 पारिभाषिक शब्दावली

- **निर्णय चर (Decision Variable)**— सीमित साधनों के अन्तर्गत वस्तुओं की मात्रा की चरों x , y आदि द्वारा व्यक्त किया जाता है।
- **उद्देश्य फलन (Objective Function)**— प्रयुक्त चरों में रेखीय फलन जिसका अधिकतमीकरण या न्यूनतमीकरण किया जाता है, रेखीय प्रक्रमन समस्या का उद्देश्य फलन कहा जाता है।
- **निबाध (Constraints)**— रेखीय प्रक्रमन समस्या के अनुकूलतम (अधिकतम या न्यूनतम) हल के लिए जो सीमाएँ निर्धारित की जाती हैं उन्हें निबाध कहा जाता है।

- **वैकल्पिक समाधान (Alternative Course of Action)**— रेखीय प्रक्रमन समस्या के हल के लिए अनेक विकल्प लहोने चाहिए ताकि उनमें से उस विकल्प का चुनाव किया जा सके जिससे उद्देश्य फलन का अधिकतमीकरण अथवा न्यूनतमीकरण हो जाए।
- **रेखीय एवं गैर-ऋणात्मक शर्त (Linearity and Non-Negativity Condition)**— उद्देश्य फलन तथा निबाध सभी रेखीय होने चाहिए तथा सभी चरों के मान गैर-ऋणात्मक होने चाहिए।
- **योगात्मकता (Additivity)**— अलग-अलग क्रियाकलापों में प्रयुक्त किसी साधन की मात्राओं का योग सम्भव होना चाहिए।
- **विभाजन (Divisibility)**— अनुकूलतम हल प्राप्त करते समय निर्णय चरों को सतत माना जाता है अर्थात् उनके भिन्नात्मक मान हो सकते हैं।
- **निर्धारित (Deterministic)**— रेखीय प्रक्रमन की विधि से वहीं समस्याएं हल की जाती हैं जिन्हें रेखीय मॉडल के रूप में प्रदर्शित किया जा सकता है। यह मानते हुए कि मॉडल (Model Coefficient) पूर्णतया ज्ञात है।

2.8.8 मुख्यशब्द

- रेखीय (Linear): रेखिक।
- विधि (Method): नियम
- इष्ट (Optimum): वांछित।
- प्रमुख (Primal): मुख्य।

2.8.9 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें—

21. रेखीय प्रायोजना विधि में गैर-समीकरणों की संख्या अधिक हाने के कारण ————— विधि अधिक जटिल हो जाती है।
22. कोई भी हल जो गैर-ऋणात्मक प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है, एक ————— हल कहलाता है।
23. कोई भी संभाव्य हल जो उद्देश्य फलन को अधिकतम या न्यूनतम करता है, वह ————— संभाव्य हल कहलाता है।
24. गैर समीकरणों को समीकरणों में बदलने के लिए आवश्यकतानुसार ————— अथवा आधिक्य चर का प्रयोग करना चाहिए।
25. वह हल जो गैर-ऋणात्मक शर्त की पूर्ति न करता हो, तो वह ————— हल कहलाता है।

(ख) बहुविकल्पीय प्रश्न

1. रेखीय प्रक्रमन किसमें बहुत ही उपयोगी सिद्ध हुआ है?
(क) अर्थशास्त्र में (ख) विज्ञान में (ग) गणित (घ) राजनीति में
2. अनेक संशोधन के कारण वास्तविक समस्याएँ किस तकनीक द्वारा हल नहीं की जा सकती हैं?
(क) अवकल (ख) रेखीये प्रक्रमन (ग) समाकलन (घ) अन्तर समीकरण
3. कौन-सी समस्या पहल आर्थिक समस्या थी जिसका रेखीय प्रक्रमन द्वारा हल लागत के समीकरण द्वारा किया गया?
(क) धन (ख) आवास (ग) आहार (घ) पानी।

2.8.10 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(क) 1. विन्दुरेख, 2. संभाव्य, 3. अनुकूलतम, 4. स्लैक एवं 5. असाध्य।

(ख) 1. (क) अर्थशास्त्र में, 2. (ख) रेखीये प्रक्रमन और 3. (ग) आहार

2.8.11 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

11. रेखीय प्रक्रमन से आप क्या समझते हैं?
12. एक सरल संख्यात्मक उदाहरण की सहायता से बताइए कि एक रेखीय प्रक्रमन समस्या को विन्दुरेख विधि से कैसे हल किया जाता है?
13. रेखीये प्रक्रमन के महत्व तथा सीमाओं की विवेचना कीजिए।
14. किसी व्यवसाय में रेखीय प्रक्रमन के किसी एक उपयोग का वर्णन कीजिए।
15. रेखीये प्रक्रमन समस्या को हल करने के लिए सिम्पलेक्स विधि को समझाइए तथा इसकी परिकलन प्रक्रिया के चरण लिखिए।

2.8.12 संदर्भ पुस्तकें

1. Mathematics for Economists, DECO403, Lovely Professional University, Laxmi Publications (P) Ltd, 113 Golden House, Daryaganj, New Delhi-110002
2. Mishra, J.P., "Mathematical Economics (गणितीय अर्थशास्त्र)" Sahitya Bhawan Publications, Hospital Road, AGRA-282003.
3. उत्तराखण्ड मुक्त विश्वविद्यालय, "आर्थिक गणितीय विधियाँ एवं प्रारम्भिक सांख्यिकी", तीनपानी बाई पास रोड, ट्रान्सपोर्ट नगर के पास, हल्द्वानी – 263139
4. अग्रवाल, डी. आर. 'प्रारम्भिक गणितीय अर्थशास्त्र', (प्रथम संस्करण) वृन्दा पब्लिकेशन्स प्रा. लिमिटेड, दिल्ली- 110091
5. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
6. Monga G. S., Mathematics and Statistics for Economics
7. Agarawal D. R., Quantitative Methods
8. Chiang, A. C., Fundamental Methods of Mathematical Economics.
9. Yamane, T., Mathematics for Economists.
10. Mehta B. C. And Madnani G.M. K., Mathematics for Economist, Latest Edition.
11. लाल, एस. एन. एवं चतुर्वेदी, एस. के., "आर्थिक विश्लेषण की तकनीकें", शिव पब्लिकेशन्स, प्रयागराज

खण्ड—III परिमाणात्मक विधियाँ— 2

इकाई—01

आंकड़ों के संकलन की विधियाँ

प्रारूप:

- 1.1 परिचय
- 1.2 समंक संकलन की प्रारम्भिक बातें
- 1.3 आंकड़ों के प्रकार
 - 1.3.1 प्राथमिक आंकड़े
 - 1.3.2 द्वितीय आंकड़े
- 1.4 प्राथमिक एवं द्वितीय आंकड़ों में अन्तर
- 1.5 प्राथमिक एवं द्वितीय आंकड़ों में चयन
- 1.6 इकाई का सारांश
- 1.7 मुख्यशब्द
- 1.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 1.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 1.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 1.11 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए विभिन्न तरह के आंकड़ों की जरूरत
- प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ों के अर्थ को समझना
- प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ों से संबंधित विधियाँ और उनके स्रोत
- किसी समस्या के अध्ययन हेतु प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ों का चुनाव

1.1 परिचय (Introduction)

किसी भी ज्ञान की शाखा के लिए आंकड़ें प्राथमिक आगत होते हैं। आंकड़ों का संकलन अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी के विषय से निर्धारित नहीं होते हैं। ये सभी क्षेत्रों के जांच के मूल कच्चे पदार्थ हैं। चिकित्सा क्षेत्र में लगे हुए व्यक्ति बीमारियों से संबंधित, संक्रमित लोगों एवं संबंधित उपचार के परिणाम आदि से संबंधित सूचना का एकत्रीकरण; राजनैतिक विज्ञान से संबंधित लोग जनता की मतदान व्यवहार के बारे में सूचना एकत्रीकरण, सामाजशास्त्र को जाति व्यवस्था, अन्तर जातिय विवाह, नगरीकरण, दहेजप्रथा, महिलाओं की स्थिति आदि से संबंधित सूचनाओं की आवश्यकता होती है। कृषि विज्ञान उत्पादन की प्रवृत्ति, फसल प्रारूप, संकर प्रकार के बीजों वाली भूमि, गहन खेती आदि से संबंधित आंकड़े एकत्र करते हैं।

समंक ही अर्थशास्त्र विषय का आधार है। आर्थिक समंक, आर्थिक नीतियों के निर्माण का प्रमुख आधार है। आर्थिक नीतियाँ जैसे निर्धनता उन्मूलन एवं बेरोजगारी, कीमत में वृद्धि को रोकना, विकास, विदेशी व्यापार, कृषि का विकास एवं उद्योग आदि में काफी कठिनाई होगी यदि इन आर्थिक मुद्दों से संबंधित पूर्ण सूचनाएँ सरकार को न मिले। किसी भी क्षेत्र के सामाजिक-आर्थिक समस्या के स्वभाव, क्षेत्र, कारण एवं प्रभाव से संबंधित आंकड़ें इन समस्याओं के तीव्र समाधान के लिए अप्रत्यक्ष साधन प्रदान करता है।

1.2 समंक संकलन की प्राथमिक बातें (Primary Things of Data Collection)

किसी भी अच्छे एवं बेहतर आर्थिक नीतियों के निर्माण एवं उसकी सफलता समंकों की गुणवत्ता व विश्वसनीयता पर निर्भर करती है जिनपर ये नीतियाँ आधारित हैं। किसी भी आर्थिक समंक की विश्वसनीयता एवं बेहतर गुणवत्ता तय करने के लिए प्रमुख व सर्वोच्च विश्वसनीय शोधार्थी या सरकारी विभागों को समंक संकलन कार्य में लगाया जाना चाहिए।

समंकों के संकलन की प्रारम्भिक तैयारियाँ निम्नलिखित हैं—

15. परीक्षण का उद्देश्य स्पष्ट रूप से परिभाषित होना चाहिए ताकि समंक संकलन में लगे व्यक्तियों को भी अच्छी तरह से पता हो कि कौन से आंकड़े एकत्र किये जाने चाहिए।
16. समंक संकलन का क्षेत्र, समय एवं स्वभाव जिसका संकलन करना है, इसके पूरे तंत्र, पूर्ण रूप से निर्धारित होना चाहिए।
17. किसी भी सांख्यिकी परीक्षण के लिए समंक संकलन से पूर्व यह तय कर लेना चाहिए कि आंकड़ों के प्रकार क्या है अर्थात् प्राथमिक और द्वितीय आंकड़े।
18. किस प्रकार के आंकड़े व सर्वेक्षण करना है इसका निर्णय अध्ययन के प्रारम्भिक स्तर पर ही तय कर लेना चाहिए। सर्वेक्षण संगणना या निदर्शन पर आधारित हो सकता है। किसी भी सर्वेक्षण के प्रकार का चुनाव परीक्षण की आवश्यकता पर निर्भर करता है।
19. सर्वेक्षण दल के सदस्यों का प्रशिक्षण भी महत्वपूर्ण तत्व है। समंकों का संकलन एक परिष्कृत तकनीक है जिसके लिए सांख्यिकी ज्ञान, विशेषज्ञता एवं चातुर्य की आवश्यकता होती है। अप्रशिक्षित प्रगणक आंकड़ों की गुणवत्ता को क्षति पहुँचा सकते हैं। गैरअनुभवी सर्वेक्षणक को भी अच्छी प्रशिक्षण के द्वारा समंकों के उच्च गुणवत्ता को संकलित किया जा सकता है।

1.3 समंकों का प्रकार (Types of Datas)

किसी भी परीक्षण के लिए उद्देश्य एवं विषय क्षेत्र एकदम स्पष्ट होना चाहिए अर्थात् शोधकर्ता या अन्वेषक को निर्धारित कर लेना चाहिए कि आंकड़े किस स्रोत से लिया जाना है। आंकड़े दो तरीकों से एकत्र किए जा सकते हैं;

1. आंकड़े स्वयं अन्वेषक या उनके द्वारा नियुक्त व्यक्ति के माध्यम से प्राप्त किये जा सकते हैं; और
 2. प्रकाशित स्रोतों से भी वह आंकड़े एकत्र कर सकते हैं।
- शोधकर्ता व अन्वेषक द्वारा मूल स्रोतों से एकत्रित समंक प्राथमिक आंकड़े कहलाते हैं। लेकिन, यदि शोधकर्ता अन्य स्रोतों से प्राप्त आंकड़ों का प्रयोग करें तब ऐसे आंकड़े द्वितीय आंकड़े कहलाते हैं। अतः आंकड़े दो प्रकार के होते हैं:
1. प्राथमिक समंक
 2. द्वितीय समंक

1.3.1 प्राथमिक समंक (Primary Data)

ये समंक एक अन्वेषक या अभिकरण द्वारा पहली बार सांख्यिकीय अन्वेषण के उद्देश्य से संकलित किया जाता है। ये प्रथम स्रोत की सूचनाएँ होती हैं। प्रो. होरिश सेक्रीष्ट के अनुसार, “...प्राथमिक समंक का अर्थ उन समंकों से है जो मूल व वास्तविक है, अर्थात् जिसमें छोटा या समूह नहीं बने हों, ये तत्व लिपिपद्ध या पदों को अंकों के रूप व्यक्त हो। ये आवश्यक रूप से कच्चे आंकड़े होते हैं।” प्राथमिक समंक जो एक बार संकलित हैं और प्रकाशित या प्रयोग होने के बाद द्वितीय आंकड़े कहलाते हैं। जहां तक संभव हो सके प्राथमिक समंकों का प्रयोग किया जाना चाहिए इसके निम्नलिखित कारण हैं—

1. द्वितीयक स्रोत के समंक में त्रुटियाँ हो सकती है जब प्राथमिक स्रोतों से अंकों का लिपीकरण किया जाता है।
2. प्राथमिक स्रोतों में प्रयोग किये जाने वाले परिभाषा एवं संबंधित इकाईयों का उल्लेख होता है।
3. प्राथमिक स्रोतों के अन्तर्गत समंकों के संकलन में प्रयुक्त अनुसूची एवं न्यायदर्श के चयन संबंधी प्रक्रियाओं की प्रति प्रायः शामिल किया जाता है।
4. प्राथमिक स्रोत प्रायः समंकों का विस्तृत रूप प्रस्तुत करता है।

प्राथमिक समंक के संकलन की विधियाँ (Methods of Collection of Primary Data)

प्राथमिक समंक, अवलोकन या प्रतिवादी से एक रचना या दूसरी या व्यक्तिगत साक्षात्कार द्वारा प्रत्यक्ष संचार स्थापित करके एकत्रित कर सकते हैं। इस प्रकार, दूसरे शब्दों में, प्राथमिक समंक के संकलन के बहुत सारे विधियाँ हैं। कुछ महत्वपूर्ण विधियाँ निम्नलिखित हैं:-

1. अवलोकन विधि
2. साक्षात्कार विधि
3. प्रश्नावली विधि
4. अनुसूची विधि
5. अन्य विधियाँ जो गारंटी कार्ड, वितरक अंकेक्षण, पेंन्ट्री अंकेक्षण, उपभोक्ता समुदाय, यांत्रिक युक्ति आदि।

1. अवलोकन अथवा सर्वेक्षण विधि (Observation or Survey Method)

अवलोकन विधि एक लोकप्रिय समंक संकलन विधि है जिसका सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है विशेष रूप से व्यवहारिक विज्ञान के अध्ययन में। व्यक्ति एवं उनके व्यवहार किसी विशेष पसंद की स्थिति में किस प्रकार है, इसे सूचना एकत्र करने के लिए सामान्यतः प्रयोग किया जाता है। ऐसे बहुत से अध्ययन हैं जिसके अन्तर्गत खरीदारी व्यवहार से संबंधित घटक जो इन्हें प्रभावित करते हैं, जैसे ब्राण्ड चुनाव एवं मात्रात्मक खरीदारी के लिए सलाह देने वाले कार्यकर्ताओं की उपलब्धता एवं उनकी निर्भरता। अवलोकन विधि के अन्तर्गत, अनवेन्षक अपने प्रत्यक्ष अवलोकन अर्थात् प्रतिवादी से बिना कुछ पूछे ही सूचनाएँ प्राप्त करता है।

गुण (Merits): अवलोकन तकनीक अन्य समंक संकलन तकनीक की तुलना में कई माइने में काफी बेहतर तकनीक है।

1. इस विधि की सबसे बड़ी उपलब्धी है कि व्यक्तिगत पक्षपात से मुक्त है, यदि अवलोकन सही तरीके से किया गया हो। अन्य तकनीकों से भिन्न, जो पूरी तरह अपने अतीत के चिन्तन या पूर्वाभास के स्वभाव से प्रभावित होती है, अवलोकन तकनीक में मानव के संभावित विद्यमान व्यवहार है को लिपिबद्ध करना इसके गुण को और उत्कृष्ट बना देता है। इस प्रकार, यह आंकड़े एवं प्रतिवादी के व्यवहार का सही चित्रण प्रस्तुत करता है जो पूर्व या बाद में प्रभावित होने वाले कारकों जैसे तनाव एवं चिन्ता से मुक्त होता है। यह ऐसे समंकों को तैयार करता है जो कठिन व्यवहारिक हल के लिए प्रत्यक्ष उपाय सूझाता है।
2. इस विधि से प्राप्त सूचनाएँ वर्तमान परिदृश्य में क्या हो रहा है इसके बारे में बताता है; यह किसी पहले के व्यवहार एवं भविष्य के इरादे या मुद्रा द्वारा जटिल नहीं बनती है।
3. यह विधि प्रतिवादी के उत्तर की इच्छा की दृष्टि से स्वतंत्र होता है जैसा कि प्रतिवादी के सक्रिय सहयोग की अपेक्षा, साक्षात्कार एवं प्रश्नावली विधि की स्थिति में अपेक्षाकृत अल्प मांग होती है। आगे, यह विधि उस समय और महत्वपूर्ण हो जाती है जब प्रतिवादी अपने भावनाओं को किसी एक या अन्य कारणों के चलते मौखिक रूप में व्यक्त नहीं सकते हैं।

सीमाएँ (Limitation): इतने गुण होने के बावजूद, इस अवलोकन विधि की कुछ कमियाँ निम्नलिखित हैं-

1. यह संभव नहीं है कि हर बार घटना के समय अन्वेष्टक मौजूद रहे, घटना के बारे में पूर्वानुमान लगाने में कुछ अनदेखी स्थितियों को बेवजह सम्मिलित किया जा सकता है। उस समय घटना स्थल पर विरले व्यक्ति मौजूद होते हैं जिससे प्रत्यक्ष अवलोकन की रचना में व्यवधान उत्पन्न होता है जो सही एवं प्रभावी आंकड़े संकलित नहीं हो पाते हैं।
2. अवलोकन तकनीक के प्रयोग में, ये व्यवहारिक कठिनाई है, क्योंकि एक घटना की अवधि निर्धारित होती है। उदाहरण के लिए, निजी एवं गोपनीय व्यवहार को अवलोकित नहीं किया जाता है।
3. अवलोकन को पूरी तरह से मात्रात्मक रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता है

4. यह एक खर्चिला विधि है।
5. इस तकनीक के द्वारा प्रदत्त सूचनाएँ बहुत सीमित क्षेत्र के लिए ही प्रयोग किया जा सकता है।

2. साक्षात्कार विधि (Interview Method):

समंक संकलन की साक्षात्कार विधि के अन्तर्गत मौखिक शाब्दिक प्रस्तुती के माध्यम से मौखिक शाब्दिक प्रतिवाद या उत्तर प्राप्त किया जाता है। इस विधि का प्रयोग प्रत्यक्ष व्यक्तिगत साक्षात्कार एवं अप्रत्यक्ष मौखिक साक्षात्कार द्वारा किया जा सकता है।

प्रत्यक्ष व्यक्तिगत साक्षात्कार (Personal Direct Interview)

समंक संकलन की यह विधि, जिसमें वह व्यक्ति जिससे सूचना लेनी है अर्थात् प्रतिवादी से आमने-सामने सम्पर्क स्थापित कर पूरा किया जाता है। साक्षात्कारकर्ता, प्रतिवादी से सर्वे या समस्या से संबंधित प्रश्न पूछते हैं। व्यक्तिगत साक्षात्कार दरवाजे-2 जाकर या सार्वजनिक स्थानों जैसे दूकान आदि के अनुसार सर्वेक्षण किया जाता है। सामान्यतः साक्षात्कारकर्ता का तरीका होता है कि स्वयं एक क्षमतावान प्रतिवादी की तरह व्यवहार करे और प्रतिवादी का सहयोग लेना सुनिश्चित करने की चेष्टा करे, पूर्व निर्धारित प्रश्नों का उत्तर प्राप्त हो सके। व्यक्तिगत साक्षात्कार थोड़ा महंगा होने के बावजूद ज्ञान, इरादा, जननांकीय विशेषता, व्यवहार, राय एवं जीवन शैली से संबंधित गंभीर सूचनाएं प्रदान करता है। भारत में इस विधि का बहुतायत प्रयोग किया जाता है और बहुत प्रभावी माना जाता है।

सामान्यतः व्यक्तिगत साक्षात्कार विधि में एक संरचनात्मक तरीके से सूचना एकत्र किये जाते हैं। ऐसे साक्षात्कार को हम संरचनात्मक साक्षात्कार कहते हैं। ऐसे साक्षात्कार में पूर्व निर्धारित प्रश्नों का प्रयोग करते हैं एवं उच्च स्तरीय तकनीकों से प्रसारित या लेखा किया जाता है। इस प्रकार, साक्षात्कार कर्ता एक संरचनात्मक साक्षात्कार में निश्चित प्रक्रिया को पूरा करते हुए प्रश्नों रूप एवं उनके क्रम विन्यास का विशेष ध्यान रखता है। जैसे कि असंरचनात्मक साक्षात्कार में लोचपूर्ण प्रश्न रखे जाते हैं। असंरचनात्मक साक्षात्कार में, किसी पूर्व निर्धारित एवं मानक तकनीकों के व्यवस्थ द्वारा सूचनाएं एकत्रित नहीं किये जाते हैं। एक गैर-संरचनात्मक साक्षात्कार में, साक्षात्कार कर्ता को काफी हद तक स्वतंत्रता होती है अर्थात् वो आवश्यकता अनुसार कुछ प्रश्नों को अनुसूची से हटा सकता है या कुछ प्रश्न और भी जोड़ सकता है। वर्णनात्मक एवं विश्लेषणात्मक शोध की स्थिति में असंरचनात्मक साक्षात्कार विधि के द्वारा सूचनाओं को एकत्र करना एक महत्वपूर्ण कदम होता है। लेकिन व्याख्यात्मक अध्ययन में संरचनात्मक साक्षात्कार विधि का ज्यादा प्रयोग किया जाता है क्योंकि यह विधि लागत के दृष्टि से ज्यादा लाभकारी होता है।

गुण (Merits): व्यक्तिगत साक्षात्कार के निम्नलिखित फायदे हैं:

1. जब आंकड़े स्वयं अन्वेषक द्वारा एकत्र किये जाये तो उसमें सत्यता एवं विश्वसनीयता अधिक पाई जाती है।
2. यह अमूर्त परिघटनाओं, जैसे प्रतिवादी के मानसिक स्थिति एवं उनके इरादों से संबंधित भाव के अध्ययन में सहायक होता है।
3. यह विधि पूर्व में घटित किसी घटना के वास्तविक चित्र को प्रस्तुत करने में ज्यादा लाभकारी होता है क्योंकि सूचनादाता उस घटना के बारे में ज्यादा विश्वसनीय एवं सही सूचनाएँ साक्षात्कार कर्ता को देता है।
4. प्रत्येक पहलू से प्राप्त सूचनाओं की मात्रा अत्यधिक होती है।
5. एक योग्य एवं अनुभवी साक्षात्कार कर्ता, किसी व्यक्ति विशेष या व्यक्तियों के समूह से एक घटना से अति गोपनीय सूचनाएँ भी प्राप्त कर सकता है जो अन्य विधियों से संभव नहीं है।
6. यह प्रतिवादी के बहुगुणी पहलुओं वाले समस्याओं के स्वभाव एवं वातावरण के अध्ययन के लिए एक शक्तिशाली एवं उचित विधि है, जो उनके जीवन शैली को प्रभावित करते हैं। ऐसी स्थिति में साक्षात्कार प्रायः प्रतिवादी के घर पर ही आयोजन किया जाता है।
7. वस्तुनिष्ठ सूचनाएँ संरचनात्मक साक्षात्कार अनुसूची एवं मानक परिस्थितियों में वर्गीकरण पैमाने के प्रयोग कर आसानी से एकत्र किया जा सकता है।

8. यह विधि, बच्चों एवं निरक्षर प्रतिवादियों से सूचना एकत्र करने हेतु बहुत उपयोगी है जो अनवेन्षक को प्रतिवादी के आदत, चेहरे के भाव एवं स्वभाव को अवलोकन करने का अवसर प्रदान करता है।
प्रतिवादी के व्यक्तिगत विशेषता एवं वातावरण से संबंधित अन्य या पूरक सूचनाएँ एकत्र करने हेतु अनवेन्षक को अवसर प्रदान करता है, जिसका प्रायः निष्कर्षों के निर्वचन में बड़ा महत्व है। यह एक लचीला उपागम है, जो आवश्यकतानुसार नये प्रश्नों को जोड़ने व जांच करने को अवसर प्रदान करता है। इस तरह से यह विधि अन्य विधियों की तुलना में ज्यादा बेहतर व उत्कृष्ट है।
9. अन्वेषक उन सूचनाओं को भी लेने का प्रयास करता है जो प्रायः नहीं दिये जाते हैं, इन्हें तुरंत एवं प्रतिक्रिया से प्राप्त करता है।
10. जैसा कि साक्षात्कार एक प्रकार के पारस्परिक प्रोत्साहक सामाजिक प्रतिक्रिया है, उसमें प्रतिवादी के साथ मैत्रीपूर्ण व्यावहार की उम्मीद और बढ़ जाता है। यह किसी प्रश्न के अनुत्तरित होने की संभावना को कम कर देता है। उपरोक्त विशेषताओं के बावजूद एक समान एवं सजातीय सूचनाओं को एकत्र करने के लिए एक लाभकारी विधि है।

सीमाएँ (Limitation): यद्यपि, साक्षात्कार तकनीकी प्रतिवादियों से सूचना एकत्र करने का सर्वोत्तम तकनीक है, इसके बावजूद निम्नलिखित आलोचनाओं से मुक्त नहीं है:

1. लागत, उर्जा एवं समय की दृष्टि से यह तकनीक काफी खर्चीला है, क्योंकि विस्तृत क्षेत्रों में न्यायदर्श बिखरे हुए होते हैं। ऐसे में अनवेन्षक का न्यायदर्श से संबंध स्थापित हो पाने की संभावना कम होती है जो अत्याधिक व्यय के बावजूद कुछ भी अच्छा परिणाम नहीं दे सकता है।
2. व्यक्तिगत पूर्वाग्रह एवं पक्षपात की संभावना इस विधि में अन्य विधि के तुलना में ज्यादा है।
3. साक्षात्कार कर्ता को अच्छे से प्रशिक्षित एवं निरीक्षण किया जाना चाहिए अन्यथा वे वांछित सूचनाएँ एकत्र करने के आयोग्य हो सकते हैं। अप्रशिक्षित या अल्प प्रशिक्षित व्यक्ति पूरे कार्य को बर्बाद कर सकते हैं।
4. अनवेन्षक एवं प्रतिवादी के इरादों को प्रभावित करने वाले सामाजिक स्थिति तथा उनके वैचारिक बिन्दु भी सूचनाओं की गुणवत्ता को प्रभावित करते हैं। अनवेन्षक के द्वारा प्रतिवादी के साथ संबंध स्थापित करने में भी यह समस्या उत्पन्न करता है और इस प्रकार सूचना की गुणवत्ता भी प्रभावित होती है। उदाहरण के लिए, एक निम्न सामाजिक स्थिति वाला अनवेन्षक, किसी धनी व्यक्ति से सम्पर्क स्थापित करने में संकोच करेगा, या हो सकता है कि सौहार्द्रपूर्ण संबंध स्थापित उनसे नहीं कर पाये। दूसरी तरफ, वह अनवेन्षक को उतना महत्व न दे और इस प्रकार सही सूचनाएँ प्राप्त नहीं की जा सकती है।
5. यदि सूचनादाता प्रतिपुरुष एवं विपरीत लिंग का हो, तब मनो सामाजिक कारक के कारण सूचनाएँ निश्चित रूप से त्रुटिपूर्ण होगी। एक पुरुष/स्त्री, किसी स्त्री/पुरुष को सही सूचनाएं नहीं दे सकता है।
6. ऐसे बहुत सी बातें हैं, जिन्हें पूरी तरह से शब्दों में व्यक्त या बोला नहीं जा सकता है; लेकिन उनपर काम किया जा सकता है या दिखाया जा सकता है। इसके अतिरिक्त, यह किसी सीमित क्षेत्र/न्यायदर्श में प्रयोग किया जा सकता है, जब अध्ययन का क्षेत्र बहुत छोटे आकार का हो। इस तरह से, यह पूरे समग्र के विशेषताओं पर प्रकाश नहीं डालता है।

यद्यपि, साक्षात्कार तकनीक त्रुटि से मुक्त नहीं है, फिर भी, यह विधि काफी प्रभावी है जब किसी प्रशिक्षित, शिक्षित एवं अनुभवी अनुसंधान कर्ता द्वारा सावधानीपूर्वक प्रयोग किया जाय। साक्षात्कार विधि के सफलता पूर्वक लागू करने के लिए अनुसंधान कर्ता का चयन सावधानीपूर्वक करके उन्हें प्रशिक्षित एवं इसके बारे में बताया जाना चाहिए। अनुसंधानकर्ता को ईमानदार, विश्वासी, कठिन परिश्रमी, निष्पक्ष एवं उसे तकनीकी रूप से योग्य तथा आवश्यक व्यवहारिक अनुभव होना चाहिए। औचक क्षेत्र निरीक्षण, ये सुनिश्चित कर सकता है कि अनुसंधानकर्ता न तो धोखेबाज है, न ही किसी दिये गये निर्देशानुसार कार्य को कुशल तरीके से करने में विचलित

होता है। यह विधि वृहत् सर्वेक्षण के वजाय गहन क्षेत्र सर्वेक्षण के लिए ज्यादा उपयुक्त है। अतः इस विधि का प्रयोग वहां करना चाहिए जहाँ एक सीमित क्षेत्र का गहन अध्ययन करना हो।

अप्रत्यक्ष मौखिक साक्षात्कार (Indirect Oral Interview)

संमंक संकलन की इस विधि के अन्तर्गत, अनुसंधान कर्ता उस तीसरे व्यक्ति से सूचना एकत्र करता है जो प्रत्यक्ष/अप्रत्यक्ष रूप से संबंधित व नजदीक है जिसके बारे में सूचना एकत्र करनी है। ऐसे में सूचनादाता वैसी सूचनाएँ भी प्रदान कररता है जो व्यक्ति स्वयं अपने बारे में नहीं बता पाता है। उदाहरण के लिए, किसी जूआरी या नशेबाज या भ्रष्ट व्यक्ति से सही सूचनाएँ एकत्र करना एक कठिन कार्य है जिनकी सामाजिक प्रतिष्ठा पहले से ही बर्बाद हो चुकी है। इसी प्रकार, पुलिस चोरी एवं हत्या के मामले में सुराग तलाशने के लिए उस तीसरे व्यक्ति से जानने का प्रयास करती है जो इसके बारे में जानता हो। इन व्यक्तियों के बारे में सही चित्रण हेतु, उस व्यक्ति का साक्षात्कार किया जा सकता है और उनके जवाब को दर्ज किया जा सकता है जो उस तीसरे व्यक्ति/समस्या के बारे में पूर्ण जानकारी रखता हो; जो पक्षपाती न हो; जो स्वयं को प्रस्तुत करने योग्य हो; एवं व्यक्ति तथ्य को किसी नया रूप देने हेतु प्रेरित नहीं हुआ हो। ऐसे व्यक्ति जिनसे साक्षात्कार किया जाता है उन्हें चश्मदीद गवाह कहते हैं एवं उनके उत्तर को रिकार्ड कर लिया जाता है। इस विधि का प्रयोग प्रायः किसी जाँच समीति या जाँच आयोग द्वारा किया जाता है।

इस विधि की सफलता के लिए यह आवश्यक है कि किसी एक व्यक्ति के तथ्य या साक्ष्य पर ही विश्वास नहीं किया जाय; तथ्य की सत्यता एवं वास्तविक स्थिति को जानने के लिए हमें विभिन्न लोगों के विचार को भी सुनना चाहिए। ऐसे लोगों के चयन में अधिकतम अभ्यास करना चाहिए क्योंकि यही विचार अन्तिम निष्कर्ष तक पहुँचा सकता है।

गुण (Merit): इस विधि के गुण निम्नलिखित हैं—

1. यह विधि वृहत् क्षेत्र को सम्मिलित करता है।
2. यह संभव है कि सीमित समय, पैसे एवं मानव शक्ति में ही एक बेहतर परिणाम दे सके।
3. यह विधि सामान्यतः मानव पक्षपात से मुक्त होता है अर्थात् साक्षात्कारकर्ता एवं उत्तरदाताओं दोनों ही तरफ से।
4. यदि आवश्यकता पड़े तो, किसी दिये गये समस्या पर माहिरों के विचार एवं विशेषज्ञों के सूझाव को भी, जाँच के अधिक प्रभावी एवं योग्य तरीकों से संपादन के लिए, प्रयोग किया जा सकता है।

सीमाएँ (Limitation): सूचना एकत्र करने की यह विधि भी त्रुटियों से मुक्त नहीं है।

1. निष्कर्ष गलत हो सकते हैं क्योंकि जो सूचनाएँ प्राप्त की गई है वह प्रत्यक्ष नहीं बल्कि अप्रत्यक्ष व्यक्ति से प्राप्त की गई।
2. यदि चश्मदीद गवाहों में पक्षपात की भावना हो तब वे अपने पसंद की सूचनाएँ सर्वप्रथम व सूची में उपर रखना चाहेंगे।

3. दूरभाष सर्वेक्षण (Telephonic Survey)

दूरभाष सर्वेक्षण का प्रयोग सामान्यतया व्यक्तिगत साक्षात्कार के लिए किया जाता है, विशेष रूप से जब सूचनाएँ अतिशीघ्र एवं कमखर्च में प्राप्त करनी हो तथा वांछित सूचनाओं की मात्रा सीमित हो। दूरभाष साक्षात्कार “संयोगात्मक” शोध समस्याओं की स्थिति में ज्यादा बेहतर होता है जैसे दूरदर्शन देखना या रेडियो कार्यक्रम सुनना। इस प्रकार के अध्ययन के लिए कुछ दूरभाष उपभोक्ताओं के कॉल को न्यायदर्श के रूप रखते हैं और कार्यक्रम प्रसारित होने पर उन्हें बता देते हैं। जो व्यक्ति कॉल सून रहा होता है उन्हें बस कहते हैं “आप अभी टी.वी. देख रहे हैं?” और यदि हाँ तब “कौन सा कार्यक्रम आप देख रहे हैं?” अन्य प्रश्न जैसे “कितनी बार आप इस कार्यक्रम को देखते हैं?” “इस कार्यक्रम को कौन प्रायोजित करता है?” और इस तरह से पूछ सकते हैं।

गुण (Merit):

1. यह विधि व्यक्तिगत साक्षात्कार की तुलना में अधिक मितव्ययी है एवं अल्प समय खपत वाली विधि है।
2. यह डाक विधि की तुलना में अत्याधिक लचीला है।

3. व्यक्तिगत साक्षात्कार की वजाए दूरभाष के माध्यम से लोगों का सहयोग अक्सर प्रयुक्त आसानी से प्राप्त होती है। विशेष रूप से औद्योगिक सर्वेक्षण में यह सत्य है, जहाँ कार्यकारी दल अक्सर मिलने के लिए व्यस्त होते हैं और साक्षात्कारकर्ता को भी देख नहीं पाते हैं, लेकिन दूरभाष माध्यम से जल्द ही उनके पास पहुँच सकता है। आगे, दूरभाष के माध्यम से शाम के समय में व्यक्तिगत साक्षात्कार के लिए संबंध स्थापित किया जा सकता है जब अधिकाधिक लोग खाली रहते हैं।
4. डाक विधि के तुलना में उत्तर को प्राप्ति का दर अत्यधिक होता है; अनुत्तरित की दर सामान्यतया न्यूनतम रहता है।
5. उत्तरदाता को बिना कोई असुविधा देते हुए उत्तर को रिकार्ड किया जा सकता है।
6. साक्षात्कारकर्ता, आवश्यकता को अधिक आसानी से वर्णन कर सकता है।
7. सर्वेक्षण के समय यदि प्रतिवादी से सम्पर्क हुआ तो लाभप्रद है नहीं तो उनसे सम्पर्क स्थापित नहीं किया जा सकता है इसके एक या अन्य कारण हो सकते हैं।
8. किसी भी क्षेत्र कर्मचारी की आवश्यकता नहीं होती है और आसानी से इसको प्रशासित किया जा सकता है। कुछ भी हो, संमंक संकलन यह विधि कमियों से मुक्त नहीं है। इनमें से कुछ को नीचे बिन्दुवार दिया जा रहा है।

सीमाएँ (Limitations):

1. दूरभाष साक्षात्कार विधि की मूल कमी, उसका अपेक्षाकृत सीमित मात्रा में सूचनाओं को प्राप्त (अन्य विधियों की तुलना में) करना एवं किसी दूरभाष उपभोक्ताओं के न्यायदर्श में पक्षपात को मौजूद होना। ग्राहकों की संख्या के अलावा विभिन्न विशेषताएँ हैं, विशेषरूप से आय एवं स्थानिक अवस्थिति संबंध में। न्यायदर्श में आयोग्य गैर-ग्राहक को सम्मिलित करने से उत्तर गंभीर रूप से प्रभावित हो सकता है।
2. लागत के दृष्टि से यह बृहत भौगोलिक क्षेत्र को प्रतिबंधित करता है।
3. यह गहन सर्वेक्षण के लिए उचित नहीं है जहाँ विभिन्न प्रश्नों के बृहत उत्तर अपेक्षित हो।
4. अनुसंधानकर्ता के पक्षपात होने की संभावना अपेक्षाकृत अधिक है।
5. प्रश्न छोटा एवं बात करने के लिए उपर्युक्त होना चाहिए; शोध को नियंत्रित करना कठिन है।
6. उनकी गोपनीयता की रक्षा विशेष रूप से, आय से संबंधित प्रश्नों में, उत्पादों के स्वामित्व में, संबंधित प्रकृति या निवास, आदि पर लोगों की बढ़ती इच्छा एवं अपराधों के संख्या की बढ़ती हुई दर बहुत हद तक टेलीफोन सर्वेक्षण को रोकती है।

4. संवाददाताओं के माध्यम से सूचना व जानकारी (Information Through Correspondence)

सामाचार पत्र, पत्रिका, इलेक्ट्रॉनिक मीडिया एवं अन्य एजेंसियों के द्वारा स्थानीय एजेंटों एवं संवाददाताओं के माध्यम से सूचना एकत्र करने की बहुत प्रचलित विधि है जिसका विभिन्न विषयों से संबंधित सूचनाएं नियमित आधार पर जरूरत पड़ती है। जाँच एजेंसियाँ सूचना एकत्र करने के लिए क्षेत्र के आधार पर स्थानीय एजेंट या संवाददाताओं को नियुक्त करती है। ये व्यक्ति अपने संबंधित क्षेत्रों से सूचनाएँ एकत्र करते हैं एवं उसे सुसज्जित करके मुख्य कार्यालय पहुँचाते हैं। ज्यादातर भुगतान किये जाने वाले व्यक्ति होते हैं। कुछ सरकारी विभाग भी सूचना एकत्र करने के लिए इस तकनीक का प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, मार्केटिंग समीति के कर्मचारियों द्वारा कृषि उत्पाद की कीमत जैसे अनाज, सब्जियाँ, फल, चारा, इत्यादि से संबंधित आकड़ें एकत्र किये जाते हैं। वे इन सूचनाओं को प्रसारित करने के लिए ऑल इण्डिया रेडियो एवं दूरदर्शन को भेज देते हैं।

गुण:

1. यह सूचना संकलन का सबसे मितव्ययी विधि है।
2. यह विधि वहाँ बहुत उचित है जहाँ सूचनाओं की आवश्यकता नियमित आधार पर है।
3. यह विस्तृत जाँच या अन्वेषण के लिए ज्यादा उपर्युक्त है।
4. इस विधि के माध्यम से, संबंधित एजेंसिया या विभाग विभिन्न बिन्दुओं व मुद्दों से संबंधित वृहत सूचनाएँ एकत्र कर सकते हैं।
5. समय बीतने के साथ, स्थानिय एजेंसियाँ एवं संवाददाताएँ अपने विषय में माहिर हो जाते हैं, वे विश्वसनीय एवं पूर्ण सूचनाएं प्राप्त करने में निपूण हो जाते हैं।

सीमाएँ (Limitation):

1. यह विधि आकस्मिक विषयों पर सामान्य सूचना प्राप्त करने के लिए अच्छा हो सकता है। यह उच्चस्तरीय एवं शोध आधारित विषयों की जाँच व अन्वेषण के लिए विश्वसनीय नहीं हो सकता है।
2. पुनः आकस्मिक आउटलुक, सूखी दिनचर्या, व्यक्तिगत पूर्वाग्रहों एवं व्यक्तिगत कारणों के कारण असत्य, अपूर्ण एवं गलत सूचनाएं मिल सकती है।
3. इस विधि के अन्तर्गत, सूचनाओं की गुणवत्ता शिक्षा, सूचनाओं का स्तर, काम के प्रति प्रतिबद्धता, स्थानीय एजेंसियों एवं संवाददाताओं की विश्वसनीयता तथा ईमानदारी पर निर्भर करता है। दूर्भाग्य से, अधिकतर संवाददाताओं में इन गुणों व विशेषताओं का अभाव पाया जाता है।

5. प्रश्नावली विधि (Questionnaire Methods):

प्रश्नावली विधि सामाजिक वैज्ञानिक, शोधार्थी एवं उद्योग लोगों के बीच बहुत प्रचलित है। जहाँ सूचना एक बृहत क्षेत्र से संबंधित सूदूर इलाकों में रहकर एकत्र करना होता है ऐसे जगहों के लिए यह विधि काफी उपयोगी है।

एक प्रश्नावली, शोध या समस्या से संबंधित विभिन्न प्रश्नों का गुच्छा होता है। इसे सूचनादाता को डाक के माध्यम से भेज दिया जाता है। उत्तरदाता या सूचनादाता से यह आग्रह किया जाता है कि प्रश्नावली को अच्छे तरीके से भरकर पुनः वापस शोध एजेंसियों व व्यक्ति के पास भेज दें।

गुण: (Merits)

1. प्रश्नावली विधि शोध या अन्वेषण कार्य के लिए अन्य विधियों के तुलना में बहुत मितव्ययी विधि है।
2. यह विधि वहाँ ज्यादा उपयुक्त है जहाँ सूचनाओं की संख्या अधिक व लम्बी और वृहत क्षेत्र को सम्मिलित करना हो।
3. यह अनुसंधानकर्ताओं के प्रयास एवं समय दोनों को ही बचाता है। यह संमंक संकलन की सुविधाजनक विधि है।

सीमायें (Limitations):

1. इस विधि का कार्यक्षेत्र शिक्षित व्यक्तियों के लिए सीमित है जो विभिन्न प्रश्नों के अर्थ को आसानी समझ सकते हैं और सही सूचना चित्रित कर सकते हैं।
2. आंकड़े संग्रह की इस विधि के लिए उत्तरदाताओं से उच्च कोटि के सहयोग की आवश्यकता होती है। उत्तर के अनिश्चित होने का खतरा बना रहता है।
3. बहुत से उत्तरदाता अपूर्ण बिगड़ा हुआ एवं गलत सूचनाएँ भेज देते हैं। वे प्रश्नावली को बहुत ही लापरवाह तरीके से भरते हैं। आकस्मिक आउटलुक, जो सामान्यतया अधिकतर अपरिचित उत्तरदाता की स्थिति में पाया जाता है, इस विधि के विशेष कमी को प्रदर्शित करता है।
4. बहुत से उत्तरदाता, प्रश्नावली को ससमय नहीं भेजते हैं। जिसके कारण एक समय सीमा में दिये गये अध्ययन कार्य एवं शोध योजनाएँ प्रभावित हो सकती है।
5. यह देखा गया है कि इस विधि की सफलता प्रश्नावली की गुणवत्ता पर निर्भर करती है। एक बेहतर एवं रोचक प्रश्नावली किसी निष्पक्ष उत्तरदाता को भी प्रभावी

रूप से उत्तर देने के लिए प्रेरित कर सकता है और अन्वेषक को अच्छे उत्तर प्राप्त हो सकते हैं।

प्रश्नावली का मसौदा तैयार (Preparation of Matter of Questionnaire)

प्रश्नावली विधि से समंकों के संकलन की सफलता मुख्य रूप से प्रश्नावली के मसौदे पर निर्भर करता है। प्रश्नावली के लिए उचित मसौदे को तैयार करना एक कला है। इसे तेज बुद्धि, बेहतर सोच एवं समृद्ध अनुभव के द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। इसे पूरा करने के लिए कोई विशेष नियम एवं बंधन नहीं जिसके अनुसार मसौदे तैयार किया जा सके।

प्रभावी एवं सफल तरीके से समंक संकलन के लिए प्रश्नावली का मसौदा तैयार करते समय निम्नलिखित बातों पर विशेष ध्यान दिया जाना चाहिए।

1. सर्वप्रथम, प्रश्नावली को आकर्षक, स्वच्छ एवं साफ सुथरा तथा समझने योग्य होना चाहिए। ताकि, सूचनादाता इसे भरने में कोई बोझ महसूस न करे और यथाशीघ्र वापस भेज दे।
2. एक स्वपता लिफाफा जिसमें आवश्यक डाक टिकट लगा हो, प्रश्नावली के साथ निश्चित रूप संलग्न किया जाना चाहिए।
3. उत्तर की अनिश्चितता के खतरे को देखते हुए जितनी आवश्यकता है उससे ज्यादा ही लोगों को प्रश्नावली भेजा जाना चाहिए। उत्तरदाता को प्रोत्साहित करने के लिए भी कुछ सोचना चाहिए ताकि उनमें उत्तर देने के लिए प्रेरणा बढ़े।
4. प्रश्नावली विधि का उपयोग इस तरह की समस्याओं के लिए किया जाना चाहिए जिसमें लोग उपयोगी उत्तर दे पायें। उदाहरण के लिए, कर्मचारी संघ वित्त आयोग से संबंधित प्रश्नावली का उत्तर यथाशीघ्र ही भेज देते हैं।
5. यह उचित होगा कि प्रश्नावली में ऐसे प्रश्नों को जगह न दें जिसका उत्तर देने के लिए उत्तरदाता अनिच्छुक हो। कुछ अति गोपनीय प्रश्नों को नहीं पूछा जाना चाहिए।
6. प्रश्न छोटा, साधारण एवं आसान होना चाहिए।
7. ज्यादातर प्रश्नों का उत्तर वस्तुनिष्ठ होना चाहिए।
8. प्रश्नों का विन्यास व क्रम तार्किक रूप में होना चाहिए।
9. प्रश्न प्रायः समूहों एवं उप-समूहों में विभाजित, एवं उप-समूह तथा सुविधाजनक संख्या में हो सकते हैं, जिससे प्रतिवादी एवं अन्वेषक दोनों के लिए आसानी हो सके।

6. अनुसूची के माध्यम से सूचना (Information Through Schedule)

इस विधि के अन्तर्गत प्रणाली या अन्वेषक व्यक्तिगत रूप से अनुसूची लेकर सूचना एकत्र करते हैं जिसमें प्रश्न के गुच्छे होते हैं। प्रश्नावली विधि एवं अनुसूची में केवल इतना अन्तर है कि पहली विधि में प्रश्नावली उत्तरदाता को डाक के माध्यम से भेज दी जाती है जबकि दूसरे विधि में प्रणाली या अन्वेषक स्वयं अनुसूची लेकर प्रतिवादी के पास जाते हैं। प्रणाली स्वयं प्रतिवादी से सम्पर्क स्थापित करता है। वे उत्तरदाताओं से मैत्रीपूर्ण वातावरण में प्रश्न पूछते हैं एवं उन्हें लिख लेते हैं।

गुण (Merits):

1. यह सामाजिक के अशिक्षित वर्ग से सूचना एकत्र करने का सबसे प्रभावी एवं सफल विधि है।
2. इसमें उत्तर के अनिश्चित होने की सीमित संभावना बचती है। केवल कुछ ही ऐसे लोग होते हैं जो व्यक्तिगत साक्षात्कार देने से इनकार करते हैं।
3. संकलित समंकों की शुद्धता की कोटि एवं विश्वसनीयता का स्तर, प्रश्नावली विधि के तुलना में इस विधि में अत्यधिक होता है। प्रणाली या अन्वेषक बातचीत के दौरान कुछ पूरक प्रश्न भी उत्तरदाता से पूछ सकता है एवं उन्हें चतुराई पूर्वक उन्हें जांच भी कर सकता है।
4. चूंकि, प्रणाली उत्तरदाता से उनके आवास में ही संपर्क करता है, अतः वे उत्तरदाता के सामाजिक-आर्थिक परिवेश से विभिन्न प्रकार उपयोगी प्रश्न/सूचनाएँ प्राप्त कर

सकते हैं। इस प्रकार की सूचनाएँ अर्थशास्त्रियों के लिए बहुत उपयोगी होता है जो लोगों के जीवन स्तर, निर्धनता, बेरोजगारी, ग्रामीणों की आर्थिक स्थिति, महिलाओं का विकास में भूमिका आदि के अध्ययन में व्यस्त/लगे हों।

सीमाएँ (Limitations):

1. अन्वेषण की अन्य विधि की तुलना में अनुसूची विधि विशेष रूप से बहुत खर्चिली विधि है। प्रगणक को प्रत्येक व्यक्ति जो उस सर्वेक्षण से संबंधित हों उनसे व्यक्तिगत तौर से मिलना होता है। इस क्रिया में अत्याधिक मौद्रिक, समय एवं प्रयास की आवश्यकता होती है।
2. इस विधि की सफलता प्रगणक की ज्ञान, प्रशिक्षण, विशेषज्ञता एवं अनुभव पर निर्भर करता है। इसमें बहुत विभिन्न विचारों एवं स्वभाव वाले बहुतायत लोगों को धैर्य के साथ संभालना पड़ता है। उस समय और विकट समस्या हो जाती है जब लोग इस योजना में रूची नहीं लेते हैं।
3. यह विधि बृहत् अध्ययन के लिए उपयोगी नहीं होता है जहाँ एक विस्तृत क्षेत्र का अध्ययन करना होता है। यह सीमित अध्ययन क्षेत्र के लिए ज्यादा उपयुक्त होता है जहाँ इसका गहन अध्ययन करना होता है।
4. अनुसूची विधि सरकारी विभागों के लिए उपयुक्त नहीं होता है क्योंकि विभागीय प्रगणक इस विधि के लिए अनुपयुक्त हैं। वे बिना क्षेत्र में गये ही क्षेत्र के कार्य को करने में विशेषज्ञ होते हैं। यह विधि वैसे व्यक्तियों के हाथ से सफल होगी जो विश्वासी, कठिन परिश्रमी एवं जिम्मेवार लोग हों।

प्रश्नावली एवं अनुसूची विधि में अन्तर (Difference Between Questionair and Schedule)

प्रश्नावली एवं अनुसूची दोनों ही विधियाँ एक ही तरह की हैं परन्तु कुछ तरीकों से अन्तर भी है। ये महत्वपूर्ण अन्तर निम्नलिखित हैं—

1. प्रश्नावली सामान्यतया उत्तरदाता को उत्तर देने के लिए लिफाफे में विहित पते पर भेजी जाती है जो प्रतिवादी के बिना किसी सहायता से संभव नहीं हो सकता है। अनुसूची विधि में शोधकर्ता या प्रगणक स्वयं अनुसूची को भरता है जिसे आवश्यकता पड़ने पर निर्वचन भी करता है।
2. प्रश्नावली अपेक्षाकृत मितव्ययी विधि है अनुसूची विधि की तुलना में विशेष रूप से प्रगणक की नियुक्ति, प्रशिक्षण एवं क्षेत्र भ्रमण के लिए मुद्रा की मात्रा के दृष्टि से।
3. अनुसूची की तुलना में प्रश्नावली में अनुत्तरित या गलत उत्तर की संभावना अधिक होती है।
4. अनुसूची की स्थिति में उत्तरदाता की पहचान स्पष्ट होती है जबकि प्रश्नावली की स्थिति में कभी-कभी स्पष्ट नहीं होता है कि किसने जवाब दिया है।
5. प्रश्नावली विधि में बहुत धीमी गति से उत्तर प्राप्त होते हैं कभी-कभी तो समय से प्रश्नावली को वापस भेजते ही नहीं, फलतः शोध कार्य बाधित होता है लेकिन अनुसूची विधि में प्रगणक स्वयं अनुसूचियों को भरकर सूचनाएँ एकत्र करता है जो समय से शोध कार्य के लिए सम्पादित हो पाता है।
6. प्रश्नावली विधि का प्रयोग तभी किया जा सकता है जब उत्तरदाता साक्षर या सहयोग के लिए तैयार हो, जबकि अनुसूची के स्थिति में, जब प्रतिवादी या उत्तरदाता निरक्षर हो तब भी उनसे सूचनाएँ एकत्र की जा सकती है।
7. अनुसूची विधि के साथ-साथ अवलोकन विधि का भी प्रयोग किया जा सकता है परन्तु प्रश्नावली विधि में ये संभव नहीं है।

1.3.2 द्वितीय आंकड़े (Secondary Datas)

अधिकतर सांख्यिकी कार्य एवं आर्थिक शोध में द्वितीय आंकड़ों का प्रयोग प्रमुख आगत के रूप में प्रयोग किया जाता है। द्वितीय आंकड़े उस प्रकार के आंकड़े होते हैं जो वर्तमान प्रयोग कर्ता के द्वारा मौलिक रूप से एकत्र नहीं किये जाते हैं। “आंकड़े जो किस दूसरे व्यक्ति द्वारा संकलित किये गये हो अर्थात् प्रयोगकर्ता दूसरी बार प्रयोग करता हो तो उसे द्वितीय समंक कहते हैं।”

वे आंकड़े जो किसी प्रकाशित या अप्रकाशित स्रोतों से लिए गये हों तो द्वितीय आंकड़े कहलाते हैं। उदाहरण के लिए, जनगणना के आंकड़े भारत सरकार द्वारा संकलित किया जाता है,

लेकिन जब इसका प्रयोग किसी भी व्यक्तिगत शोधार्थी एवं अन्य संगठन और विभागों द्वारा अपने अध्ययन के लिए किया जाय तो वह द्वितीय आंकड़े कहलायेंगे। समंक जो किसी व्यक्ति, विभिन्न एजेंसियों, संस्थाओं एवं सरकारी विभागों द्वारा विभिन्न तरीकों से संकलित समंक प्राथमिक स्वभाव के हाते हैं। जब पहले से संकलित ये आंकड़े किसी दूसरे के द्वारा प्रयोग किया जाय तो वह द्वितीय समंक हो जाते हैं। उदाहरण के लिए, एक व्यक्ति द्वारा किसी क्षेत्र विशेष के खेती प्रारूप से संबंधित आंकड़े एकत्र करता है। ये आंकड़े किसी दूसरे शोधकर्ता के द्वारा अपने शोध कार्य में प्रयोग किया जाता है। पहले व्यक्ति या शोधार्थी द्वारा संग्रहित समंक प्राथमिक, जबकि दूसरे शोधार्थी के द्वारा संग्रहित समंक का प्रयोग द्वितीय समंक कहलायेगा। द्वितीय समंक सस्ता एवं प्रयोग के लिए आसान होता है। द्वितीय समंक किसी व्यक्तिगत शोधकर्ता के लिए बहुत उपयोगी है क्योंकि सीमित संसाधन एवं समय, प्राथमिक समंक संकलन के लिए इजाजत नहीं देता है। लेकिन द्वितीय आंकड़े शुद्धता एवं अनुपयुक्तता की समस्या से ग्रसित होता है।

द्वितीय आंकड़ों के स्रोत (Secondary Data Sources)

1. अन्तर्राष्ट्रीय संगठनों के प्रकाशन जैसे U.N.O, I.B.R.D., I.M.F., I.L.O. इत्यादि।
2. केन्द्र एवं राज्य सरकार के प्रकाशन।
3. विभिन्न जांच आयोगों एवं समीतियों के परिणाम एवं रिपोर्ट।
4. व्यक्तिगत विद्यार्थी, शोधार्थी, शैक्षणिक एवं शोध संस्थान, विश्वविद्यालय आदि के द्वारा दिये परिणाम एवं प्रकाशन।
5. उद्योग एवं व्यापारिक संगठन जैसे FICCI, CII, PHDCCI, इत्यादि के प्रकाशन एवं रिपोर्ट।
6. केन्द्रीय एवं व्यवसायिक बैंकों के रिपोर्ट इत्यादि।
7. सामाजपत्र एवं पत्रिकाएँ जैसे इकोनॉमिक्स टाइम्स, फाइनेंसियल टाइम्स, इकोनॉमिक एण्ड पॉलिटिकल वीकली इत्यादि।
8. बहुत सारे सरकारी विभाग अपने स्थिति एवं निष्पादन से संबंधित आंकड़े एकत्रित एवं प्रकाशित करते हैं। जैसे, कृषि विभाग, वाणिज्य, स्वास्थ्य, शिक्षा, आदि; विस्तृत जानकारी एकत्रित करते हैं एवं उनका पुस्तक या पत्रिका के रूप में प्रकाशन करते हैं।

अप्रकाशित समंक स्रोत (Unpublished Data Sources)

वे द्वितीय आंकड़े जिन्हें अप्रकाशित स्रोतों से एकत्र किये जाते हैं अप्रकाशित स्रोत कहलाते हैं। ऐसे बहुत से अध्ययन विश्वविद्यालय में शोधार्थी द्वारा किये जाते हैं जिनका प्रकाशन नहीं होता है। वे पुस्तकालय में ही रखे होते हैं। सरकार एवं निजी कार्यालय के कार्यालयीय रिकार्ड तथा फाइलों में कई सूचनाएँ होती हैं जो वास्तव में प्रकाशित नहीं होती हैं, ये सभी अप्रकाशित स्रोत कहलाते हैं।

द्वितीय आंकड़ों की सीमाएँ (Limitations of Secondary Data Sources)

बाउले ने सच कहा है कि प्रकाशित सांख्यिकी का प्रयोग, किसी प्रत्यक्ष मूल्य पर, उसके अर्थ एवं सीमाओं को जाने बिना सुरक्षित नहीं होगा—

1. यह भी संभव हो सकता है वर्तमान में जिस समस्या की जांच के लिए आंकड़े का प्रयोग किया जा रहा है हो सकता है द्वितीय आंकड़े किसी अलग उद्देश्य के लिए संग्रहित किया गया हो। अतः एकत्रित सूचनाएँ वर्तमान जांच के लिए उपयुक्त नहीं हो सकते हैं।
2. द्वितीय समंक के संकलन में जो प्रक्रियाएँ अपनाई गई हो वो अनुचित हो।
3. अन्वेषक के व्यक्तिगत पूर्वाग्रह एवं पक्षपातपूर्ण व्यवहार से भी ये आंकड़े प्रभावित हुए हों।

4. समय अवधि जिसके लिए समंक संकलित किये गये थे वह काफी छोटा या अल्प हो।

2.4 प्राथमिक समंक एवं द्वितीयक समंक में अन्तर (Difference Between Primary & Secondary Data)

आधार	प्राथमिक आंकड़े	द्वितीयक आंकड़े
लागत कारक	अधिक धन राशि की आवश्यकता	अपेक्षाकृत कम धन की आवश्यकता
स्रोत	अन्वेषक एजेंसियाँ	कुछ अन्य अन्वेषक एजेंसियाँ अपने प्रयोग के लिए संग्रहित करती हैं
समय कारक	अधिक समय की आवश्यकता होती है।	संग्रहण के लिए अल्प समय की आवश्यकता होती है
संगठन	एक वृहत संगठन की आवश्यकता	किसी संगठनात्मक व्यवस्था की आवश्यकता नहीं
सावधानी	कोई अतिरिक्त सावधानी की आवश्यकता नहीं	द्वितीयक आंकड़ों के प्रयोग में विशेष ध्यान देने की जरूरत पड़ती है

1.5 प्राथमिक एवं द्वितीयक समंकों में पसन्द या चुनाव (Choice of Primary and Secondary Data Sources)

शोधकर्ता को निश्चित रूप से यह तय करना चाहिए कि कब वह प्राथमिक या द्वितीयक आंकड़ों का प्रयोग करेंगे। जब इन दोनों में से किसी एक का चयन करनी हो तो निम्नलिखित बातों को ध्यान में अवश्य रखना चाहिए:

1. समस्या के स्वभाव एवं कार्यक्षेत्र को जान लेना चाहिए।
2. वित्तीय संसाधनों की उपलब्धता।
3. समय की उपलब्धता।
4. वांछित शुद्धता की कोटि।
5. अन्वेषक की स्थिति अर्थात् व्यक्तिगत या निगम या सरकारी इत्यादि। प्राथमिक आंकड़े उन स्थितियों में लिये जाने चाहिए जहाँ द्वितीयक आंकड़े विश्लेषण का आधार प्रदान नहीं करता हो।

1.6 इकाई का सारांश

सांख्यिकीय आंकड़े निम्नलिखित दो प्रकार के होते हैं:

1. प्राथमिक आंकड़े मूल आंकड़े होते हैं जिन्हें पहली बार किसी विशेष स्रोत से अनुसंधानकर्ता स्वयं एकत्रित करते हैं। प्राथमिक आंकड़े प्रत्यक्ष व्यक्तिगत अनुसंधान, अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान, संवाददाताओं द्वारा सूचनाएँ, प्रश्नावली विधि एवं अनुसूची के द्वारा सूचना के माध्यम से एकत्रित किया जा सकता है।
2. द्वितीयक आंकड़े ज्यादातर सांख्यिकीय एवं शोध कार्य के गहन अध्ययन के लिए प्रयोग किया जाता है। द्वितीयक आंकड़े मूलतः प्रयोगकर्ता द्वारा एकत्र नहीं किये जाते हैं। जब वर्तमान प्रयोगकर्ता आंकड़े किसी प्रकाशित या अप्रकाशित स्रोतों से लेते हैं तो ऐसे आंकड़े को द्वितीयक आंकड़े कहते हैं।

द्वितीयक आंकड़ों के बहुत से प्रकाशित एवं अप्रकाशित स्रोत हैं जैसे; रिपोर्ट, निष्कर्ष, सामाचारपत्र, पत्रिकाएँ, शोध पत्र, शोध किताबें आदि। द्वितीयक आंकड़े अपेक्षाकृत आसानी से प्राप्त किये जा सकते हैं एवं प्रयोग के लिए भी सस्ते होते हैं, लेकिन द्वितीयक आंकड़े कई विसंगतियों एवं अनिश्चितता से ग्रसित होते हैं।

1.7 मुख्यशब्द

- **प्राथमिक स्रोत:** ये वो आंकड़े हैं जिन्हें प्रयोगकर्ता स्वयं एकत्रित करते हैं।
- **द्वितीय स्रोत:** ये वे आंकड़े होते हैं जो पहले से ही संग्रहित होते हैं जिसे किसी दूसरे व्यक्ति या एजेंसियों द्वारा एकत्र किये जाते हैं।
- **अन्वेषक:** जो व्यक्ति सूचना एकत्र करने का कार्य करता है उन्हें अन्वेषक कहा जाता है।

1.8 अपने प्रगति की जाँच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

26. जो आंकड़े अवलोकन द्वारा संग्रहित किये जाते हैं उन्हें ----- कहते हैं।
27. प्राथमिक आंकड़े ----- होते हैं जिन्हें प्रथम बार किसी विशेष स्रोत स्वयं संग्रहित किया जाता है।
28. द्वितीयक आंकड़े उस समय प्रयोग करना चाहिए जब -----
29. द्वितीय आंकड़े ----- हो सकते हैं।

1.9 अपने उत्तर की जाँच के लिए कुंजी

- (क) 1. प्राथमिक आंकड़े, 2. मूल आंकड़े, 3. आंकड़े जो अध्ययन की उद्देश्य एवं आवश्यकता को पूरा करें, 4. प्रकाशित एवं अप्रकाशित

1.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

39. प्रश्नावली को परिभाषित करें ? प्रश्नावली के मसौदा तैयार करते समय किन बातों का ध्यान रखना चाहिए?
40. प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ों का वर्णन करें। प्राथमिक एवं द्वितीय आंकड़ों में क्या अन्तर है?
41. प्राथमिक आंकड़े क्या हैं? प्राथमिक आंकड़ों के संकलन के विभिन्न विधियों का उल्लेख करें।
42. द्वितीय आंकड़े के क्या गुण एवं अवगुण हैं? द्वितीय आंकड़े के विभिन्न स्रोतों का उल्लेख करें।

1.11 संदर्भ पुस्तकें

45. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
46. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
47. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
48. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
49. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
50. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
51. अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण , भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
52. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
53. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
54. Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India.
55. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
55. R.P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India Ltd., Delhi, India.

खण्ड—III

इकाई 02

प्रतिचयन एवं प्रतिचयन की विधियाँ

प्रारूप:

2.1 परिचय

2.1.1 समग्र व जनसंख्या

2.2 समंक संकलन की विधियाँ एवं उनके प्रकार

2.2.1 संगणना विधि

2.2.2 प्रतिचयन विधि

2.3 प्रतिचयन के प्रकार

2.3.1 साधारण दैव निदर्शन

2.3.2 स्तरीय दैव निदर्शन

2.3.3 व्यवस्थित निदर्शन

2.3.4 गुच्छ व समूह निदर्शन

2.3.5 बहुस्तरीय निदर्शन

2.3.6 उद्देश्यपूर्ण निदर्शन

2.3.7 अभ्यंश निदर्शन

2.3.8 सुविधाजनक निदर्शन

2.3.9 विस्तृत निदर्शन

2.4 प्रतिचयन त्रुटियाँ

2.5 प्रतिचयन का महत्व

2.5.1 प्रतिचयन अथवा संगणना विधि में पसन्द या चयन

2.6 इकाई का सारांश

2.7 मुख्यशब्द

2.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

2.9 अपने उत्तर की जाँच के लिए कुंजी

2.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

2.11 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य:

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

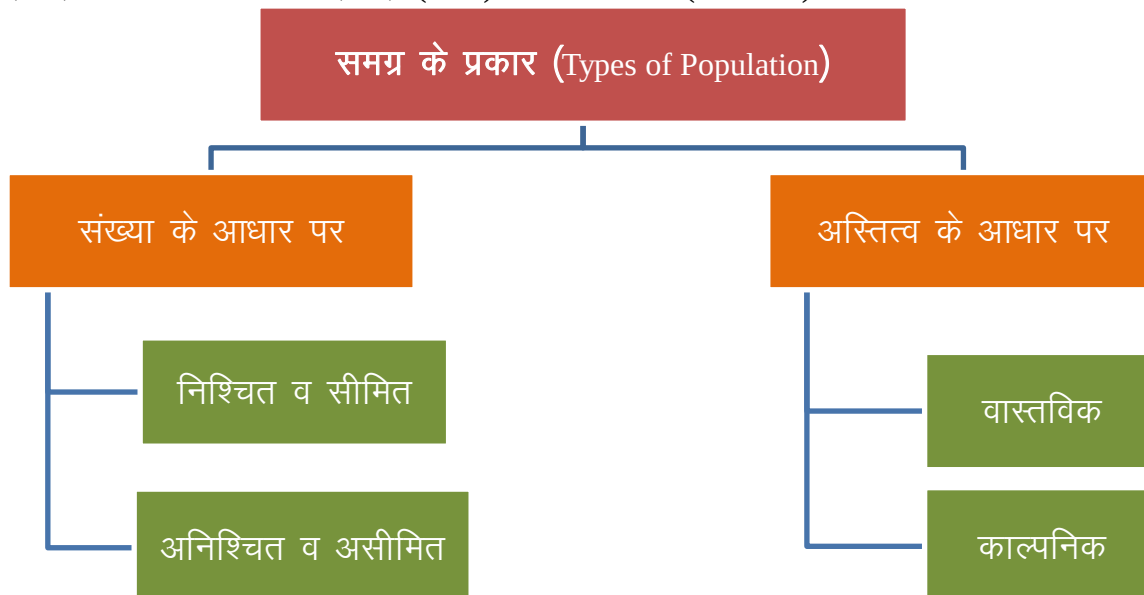
- सांख्यिकीय विश्लेषण की लिए विभिन्न तरह के आंकड़ों की जरूरत
- प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ों के अर्थ को समझना
- प्राथमिक एवं द्वितीय आंकड़ों से संबंधित विधियाँ और उनके स्रोत
- किसी समस्या के अध्ययन हेतु प्राथमिक एवं द्वितीयक आंकड़ों का चुनाव

2.1 परिचय (Introduction)

सामान्यतः सांख्यिकी के अन्तर्गत किसी भी समस्या के अध्ययन हेतु प्रतिचयन एक प्रारम्भिक एवं अत्यन्त ही महत्वपूर्ण सोपान है जिसके बिना समंकों को संकलित करना एक कठिन कार्य होता है। प्रत्येक व्यावसायिक उपक्रम के अन्तर्गत प्रबन्धकों द्वारा समय-समय पर अनेक व्यावसायिक निर्णय लेने होते हैं जिसके लिए उन्हें अनुसंधान कार्य की आवश्यकता पड़ती है। इन परिस्थितियों में बिना सांख्यिकीय आंकड़ों के संकलन एवं विश्लेषण के उचित निर्णय नहीं लिये जा सकते हैं। लेकिन अच्छे एवं विश्वसनीय समंक संकलन हेतु बेहतर प्रतिचयन विधि का चुनाव भी एक अहम मुद्दा होता है।

2.1.1 समग्र या समष्टि एवं इसके प्रकार (Universe or Population & its types)

खोज या अनुसंधान क्षेत्र की सम्पूर्ण इकाइयाँ सामूहिक रूप से समग्र या समष्टि कहलाती है। सम्भावित अवलोकनों के सम्पूर्ण समूह को, जिनका अनुसन्धान किया जा रहा है, समग्र कहा जाता है। ए. सी. रोसेण्डर के अनुसार “एक समग्र विचारधीन विषय—इकाइयों की सम्पूर्णता है।” संक्षेप में, अनुसन्धान इकाई की परिभाषा के अन्तर्गत आने वाले समस्त पद समूह समग्र कहलाता है। उदाहरण के लिए, गोपी वनस्पति मिल्स, प्रयागराज के श्रमिकों की आर्थिक स्थिति का सर्वेक्षण करना है, तो इस मिल के सभी श्रमिक सम्बन्धित सर्वेक्षण के समग्र होंगे। समग्र की इकाइयाँ व्यक्तिगत रूप से ‘इकाई’ (Unit) अथवा ‘अवयव’ (Element) कहलाती है।



निश्चित और अनन्त समग्र (Finite and Infinite Population)

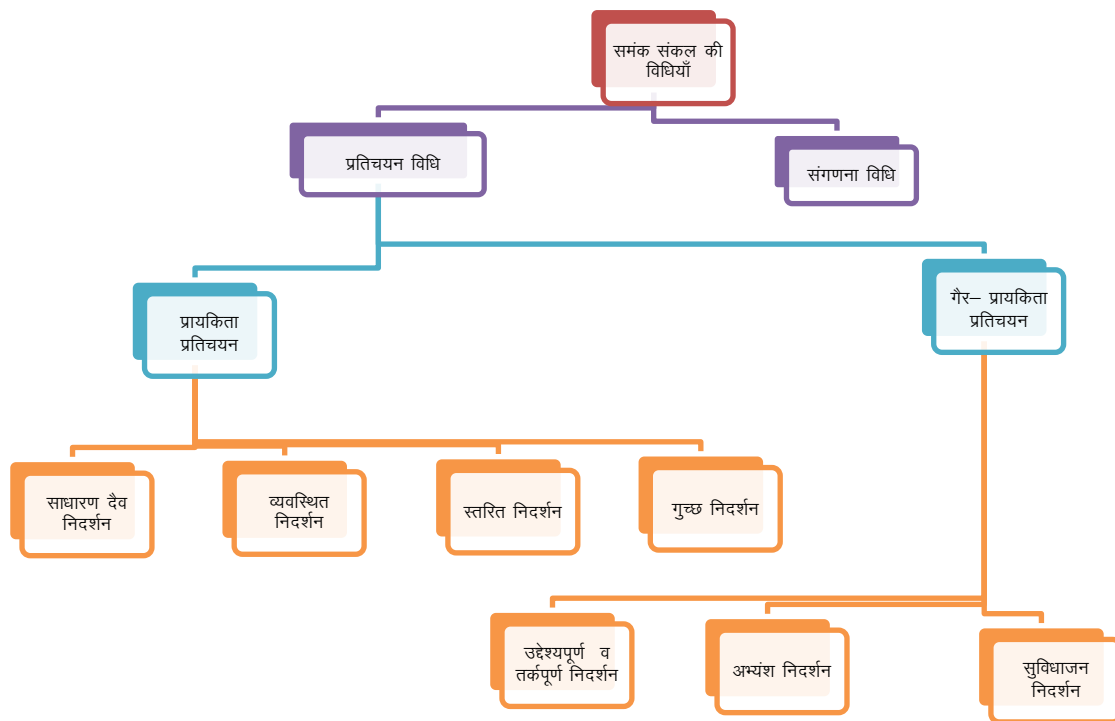
निश्चित या परिमित समग्र में इकाइयों की संख्या निश्चित होती है; जैसे, किसी विश्वविद्यालय के छात्र या फर्म के श्रमिक। अनन्त या अपरिमित समग्र में इकाइयों की संख्या अनन्त होती है; जैसे, विद्यार्थियों के सर के बाल की संख्या या पेड़ में पत्तियों की संख्याओं का अध्ययन अनन्त या अपरिमित समग्र कहलाता है। यदि इकाइयों की संख्या ज्ञात न की जा सके अथवा सैद्धान्तिक दृष्टि से कोई सीमांकन न हो सके तो भी समग्र अनन्त ही होता है; जैसे, आकाश में तारागण अथवा टी. वी. के एक सीरियल को देखने वाले दर्शक, आदि।

वास्तविक और काल्पनिक (Real and Hypothetical) समग्र— ठोस विषय वाले समग्र को वास्तविक अथवा विद्यमान समग्र कहते हैं; जैसे, अर्थशास्त्र विभाग के छात्र, चीनी मिल के श्रमिक, आदि। काल्पनिक अथवा सैद्धान्तिक समग्र में विषय—सामग्री ठोस नहीं होती है, बल्कि काल्पनिक होती है; जैसे, सिक्कों की उछाल के आधार पर चित-पट के गिरने की संख्या से बना समग्र।

2.2 समंक संकलन की विधियाँ उनके प्रकार (Techniques or Methods of Data Collection and their types)

समंक संकलन की विधियाँ

अनुसंधान के अन्तर्गत समग्र के विषय में विशिष्ट जानकारी हासिल करने हेतु समंक संकलन के लिए निम्नलिखित विधियाँ हैं—



2.2.1 संगणना विधि (Census or Population Method)

संगणना विधि एक लोकप्रिय समंक संकलन विधि है जिसका सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है विशेष रूप से व्यवहारिक विज्ञान के अध्ययन में। जब अनुसन्धान के विषय से सम्बन्धित समग्र या समूह (Universe or Population) की प्रत्येक इकाई का सर्वेक्षण किया जाता है तो वह समग्र या संगणना अनुसन्धान कहलाता है। इस रीति के अनुसार अनुसन्धान करते समय अनुसन्धान करने वाला समस्त समूह की जांच करता है और अनुसन्धान से सम्बन्धित प्रत्येक इकाई के सम्बन्ध में सूचना एकत्र करता है। जैसे, उत्पादन गणना (Census of Production), आयात-निर्यात गणना, जनगणना, किसी नगर के मध्यम श्रेणी के सारे परिवारों के आय-व्यय की जांच करना आदि।

प्रयोग और उपयुक्तता

संगणना विधि का प्रयोग निम्नलिखित स्थितियों में किया जाता है—

- (क) जब विषय का गहन अध्ययन करना हो।
- (ख) जब अनुसन्धान का क्षेत्र सीमित हो।
- (ग) जब उच्च स्तर की शुद्धता एवं विश्वसनीयता अपेक्षित हो।
- (घ) जब अनुसन्धानकर्ता के पास पर्याप्त साधन हो।
- (च) जब न्यायदर्श विधि का प्रयोग कठिन अथवा वांछित न हो।

संगणना अनुसन्धान प्रणाली के लाभ/गुण (Merits/ Advantages of Census)

1. **गहन अध्ययन सम्भव**— इस विधि के द्वारा विषय का गहन अध्ययन सम्भव है जिससे अनुसन्धानकर्ता को उस विषय का पूर्ण ज्ञान प्राप्त हो जाता है तथा उसे उन बातों का भी अच्छी तरह पता लग जाता है जो अन्यथा ध्यान से ओझल हो जाता है।
2. **उच्च स्तर की शुद्धता**— इस रीति का अनुसरण करने पर उच्च स्तर की शुद्धता की आशा होती है। यही कारण है कि अनुसन्धान के प्रत्येक भाग का व्यक्तिगत निरीक्षण हो जाता है, अतः परिणाम बहुत अंश तक शुद्ध होते हैं।
3. **इकाइयों की भिन्नता में उपयुक्त**— यह रीति वहाँ के लिए बहुत उपयुक्त है जहाँ इकाइयाँ एक-दूसरे से भिन्न (heterogeneous) हों और निदर्शन पद्धति (Sampling Method) का सफल होना कठिन हो।
4. **कुछ परिस्थितियों में आवश्यक**— यदि जाँच की प्रकृति ऐसी है कि सभी पदों का समावेश आवश्यक है तो समग्र अनुसन्धान आवश्यक होता है; जैसे, जनगणना, उत्पादन, आयात-निर्यात सम्बन्धी जानकारी।

संगणना अनुसन्धान प्रणाली के सीमाएँ

1. **असुविधाजनक**— यह प्रणाली बहुत असुविधाजनक है, क्योंकि इसके लिए अलग से पूरा बड़ा विभाग बनाना पड़ता है। प्रबन्ध सम्बन्धी कठिनाइयाँ भी उत्पन्न हो जाती है।
2. **सबके लिए सम्भव नहीं**— क्योंकि इस रीति का प्रयोग बहुत धनी व शक्ति-संपन्न व्यक्ति या संस्थाएँ ही कर सकती है।
3. **सभी परिस्थितियों में सम्भव नहीं**— अधिकांश परिस्थितियों में कई कारणों से समग्र अनुसन्धान सम्भव नहीं होता। जहाँ क्षेत्र विशाल व जटिल हो, जिसमें समग्र की प्रत्येक इकाई से सम्पर्क स्थापित करना सम्भव न हो पाता है।
4. **नाशवान इकाइयों की स्थिति में बेकार**— यदि समग्र की इकाइयाँ अवलोकन करते समय नष्ट हो जाती हैं, तो इस विधि का प्रयोग बेकार है; जैसे, बिजली के बल्बों की जीवन अवधि ज्ञात करना।
5. **अधिक समय व परिश्रम की जरूरत**— संगणना विधि में समक संकलन हेतु बहुत अधिक श्रम व समय लगता है तथा अनुसंधानकर्ताओं को बहुत परिश्रम की आवश्यकत पड़ती है।
6. **सांख्यिकीय विभ्रम का ज्ञात न होना**— इस रीति में एक दोष यह है कि सांख्यिकीय विभ्रम का पता नहीं लगाया जा सकता है।
7. **अत्याधिक धन का व्यय**— संगणना विधि से अनुसंधान के लिए अधिक समय और बड़े आकार के संगठन की आवश्यकता होती है। इस कार्य के लिए बड़ी संख्या में प्रगणक (enumerators) लगाने पड़ते हैं एवं उनके प्रशिक्षण की व्यवस्था करनी पड़ती है। अतः इस प्रणाली के अपनाने पर बहुत अधिक धन व्यय करना पड़ता है।
8. **सीमित अनुसन्धान के लिए उपयोगी**— यह विधि सीमित क्षेत्र में उपयोगी हो सकता है। वृहत क्षेत्र में इसका प्रयोग काफी खर्चीला तो कभी-कभी असंभव सा प्रतीत लगता है।

2.3 प्रतिचयन तथा प्रतिचयन के प्रकार (Sample & Types of Sampling)

जब पूरे समष्टि में से किसी विशिष्ट आधार पर थोड़ा-सा भाग अनुसंधान के लिए लिया जाता है तो उसे नमूना, बानगी, प्रतिनिधि अंश न्यायदर्श अथवा प्रतिदर्श कहते हैं। समग्र की प्रत्येक इकाई को निदर्शन इकाई कहते हैं तथा चुनी हुई इकाई विशेष अथवा इकाइयों को निदर्शन कहा जाता है।
“एक प्रतिदर्श किसी बड़े समूह, जिसके बारे में हम जानकारी प्राप्त करना चाहते हैं, में से लिया गया छोटा संकलन होता है।”

—जी. डब्लू. स्नेडेकोर एवं डब्ल्यू. जी. कोचरन।

प्रतिचयन या निदर्शन अनुसन्धान (Sampling Investigation)

किसी समग्र में से चयनित उसका प्रतिनिधित्व करने वाली इकाइयों का एक समूह न्यायदर्श या प्रतिदर्श कहलाता है और किसी विशिष्ट आधार पर समग्र से न्यायदर्श चयन करने की विधि (या प्रक्रिया) को निदर्शन कहते हैं।

जब समस्त समग्र की जाँच न करके इमें से किसी विशिष्ट आधार पर न्यायदर्श के रूप में थोड़ा सा भाग जाँच के लिए ले लिया जाता है, जो उसे निदर्शन अनुसन्धान या न्यायदर्श अनुसन्धान कहते हैं।
प्रतिचयन अनुसंधान विधि अत्यधिक परिणामों में समकों के अध्ययन के लिए कभी-कभी एकमात्र सम्भव व प्रायः सर्वाधिक व्यावहारिक और सामान्यतः सबसे अधिक कुशल साधन है।

—प्रो. नीसबैंगर

प्रतिचयन अनुसंधान प्रणाली के गुण व लाभ (Merits/Advantages)

1. **सरल एवं कम खर्चीली**— यह रीति सरल तथा कम खर्चीली है। इसको अपनाने पर समय, धन, श्रम सभी की बचत होती है।
2. **सामाजिक व आर्थिक समस्याओं के लिए उपयुक्त**— चूँकि इस रीति में समय कम लगता है इसलिए शीघ्रता से बदलती हुई सामाजिक व आर्थिक समस्याओं से सम्बन्धित अनुसन्धानों के लिए यह प्रणाली बहुत उपयुक्त है।
3. **फल प्रायः वही**— यदि बुद्धिमानी से न्यायदर्श का चयन क्रिया जाय तो परिणाम लगभग वही होगा जो समग्र अनुसन्धान में होता है।
4. **वैज्ञानिक**— यह विधि अधिक वैज्ञानिक प्रतीत होती है क्योंकि उपलब्ध समकों की दूसरे न्यायदर्शों द्वारा जाँच की जा सकती है।

5. **विस्तृत जांच प्रणाली**— चूंकि चुनी हुई सामग्री बहुत थोड़ी हाती है, अतः उसकी विस्तृत रूप से जांच की जा सकती है।
6. **सांख्यिकीय विभ्रम ज्ञात होना**— अनुसंधानकर्ता केवल न्यायदर्श के आकार से ही अपने अनुसंधान में सांख्यिकीय विभ्रम ज्ञात कर सकता है कि वह विभ्रम सार्थक है अथवा नहीं।

प्रतिचयन अनुसंधान प्रणाली के अवगुण व सीमाएँ (Demerits/Limitations)

1. **उच्च स्तर की शुद्धता के लिए अनुपयुक्त**— यह विधि वहाँ के लिए उपयुक्त नहीं होती है जहाँ बहुत उच्च स्तर की शुद्धता अपेक्षित हो।
2. **भ्रमात्मक परिणाम**— यदि न्यायदर्श लेने की अच्छी विधि न अपनायी जाए अथवा न्यायदर्श की मात्रा अप्र्याप्त हो, तो परिणाम बहुत भ्रामक हो सकते हैं। अर्थात् न्यायदर्श लेते समय अनुसंधानकर्ता का व्यवहार पक्षपात भाव हो तो परिणाम भ्रमात्मक हो सकते हैं।
3. **सजातीयता के अभाव में अनुपयुक्त**— जहाँ सजातीयता का पूर्ण अभाव हो अर्थात् प्रत्येक इकाई भिन्न प्रकार व प्रकृति की हो वहाँ यह प्रणाली नहीं अपनायी जा सकती।

प्रतिचयन अनुसंधान के लिए जरूरी दशाएँ

निदर्शन प्रणाली द्वारा अनुसंधान निम्न परिस्थितियों में उपयुक्त है:

1. **विस्तृत क्षेत्र**— जब अनुसंधान का क्षेत्र विस्तृत होता है, जैसे एक साबून निर्माता साबून की मांग व पसन्दगी जानना चाहता है तब वह प्रतिचयन विधि का ही चयन करेगा।
2. **नियमों का प्रतिपादन**— जब व्यापक दृष्टि से नियमों का प्रतिपादन करना होता है, तब इसी विधि का प्रयोग ज्यादा श्रेयस्कर होता है, क्योंकि नियमों की पुष्टि समग्र के कई न्यायदर्श के द्वारा की जा सकती है।
3. **समग्र में इकाइयों की संख्या अनन्त हो**— जब समग्र की इकाइयाँ अनन्त हों, तब इस विधि का प्रयोग करना उपयुक्त है, जैसे एक पेड़ की पत्तियों की गणना करना बहुत ही कठिन कार्य है ऐसे में पत्तियों के बारे में विशिष्ट जानकारी निदर्शन विधि से ही प्राप्त करना ज्यादा अच्छा होगा।
4. **समग्र की प्रकृति परिवर्तनशील**— जहाँ अनुसंधान से सम्बन्धित वस्तुएँ शीघ्र परिवर्तनशील हो और समग्र रीति अपनाने पर वस्तुओं के गुणों व प्रकृति में काफी परिवर्तन हो जाने की सम्भावना हो (समय अधिक लगने के कारण)
5. **अपर्याप्त साधन**— जहाँ पर्याप्त मात्रा में धन, समय व कर्मचारी उपलब्ध न हों।
6. **कम शुद्धता**— जहाँ बहुत उच्च स्तर की शुद्धता प्राप्त करना आवश्यक न हो।
7. **समग्र का समाप्त होना**— कुछ परिस्थितियों में यदि संगणना विधि अपनायी गई तो समग्र ही समाप्त हो जायेगा, जैसे, यदि मिठाई की दुकान पर रबड़ी के स्वाद की जांच करनी है, तो नमूना या प्रतिचयन विधि ही प्रयोग करेंगे अन्यथा चखने में रबड़ी की पूरी मात्रा ही समाप्त हो जायेगी।
8. **संगणना विधि का प्रयोग असम्भव**— अनुसंधान परिस्थितियाँ कुछ ऐसी हो सकती है जहाँ संगणना विधि का प्रयोग उपयुक्त ही नहीं वरन् असम्भव होता है। उदाहरण के लिए, यदि यह ज्ञात करना हो कि भारत की लौह अयस्क व कोयला खानों में कुल कितना और किस श्रेणी का कोयला है, तो उसके लिए निदर्शन पद्धति ही उपयुक्त होगी। क्योंकि संगणना विधि के द्वारा सभी कोयला या लौह अयस्क खानों को खोदकर ही यह पता लगाया जा सकता है जो न तो वांछनीय है और न तो सम्भव।
9. **सजातीयता**— समग्र की इकाइयों में सजातीयता होनी चाहिए, क्योंकि न्यायदर्श की इकाइयों में वहीं लक्षण होने चाहिए जो कि समग्र की इकाइयों में है। संक्षेप में, समग्र का सच्चा प्रतिनिधि होना चाहिए।

संगणना एवं प्रतिचयन अनुसंधानों में अन्तर

क्र.सं.	संगणना प्रणाली	क्र.सं.	प्रतिचयन प्रणाली
1.	समग्र की प्रत्येक इकाई का अध्ययन किया जाता है।	1.	समग्र की कुछ इकाइयों का अध्ययन किया जाता है।
2.	धन, श्रम एवं समय अधिक खर्च होता है।	2.	धन, श्रम व समय कम लगता है।
3.	अधिक प्रगणक होने के कारण उनको प्रशिक्षण देने में कठिनाई होती है जिससे आंकड़े विश्वसनीय नहीं होते।	3.	कम प्रगणक होने के कारण प्रशिक्षण आसान है व उनके द्वारा प्राप्त आंकड़ें अधिक विश्वसनीय हो सकते हैं।

4. विजातीय इकाईयों की दशा में उपयुक्त होते हैं।	4. सजातीय इकाईयों की दशा में उपयुक्त हैं।
5. यदि इकाईयां नष्ट होने का डर हो, तो यह विधि अनुपयुक्त है।	5. यदि इकाईयां नष्ट होने का डर हो, तो यह विधि उपयुक्त है।
6. यदि प्रत्येक इकाई के बारे में जानकारी करना अनिवार्य है, तो यह विधि आवश्यक है।	6. यदि प्रत्येक इकाई के बारे में जानकारी करनी है, तो यह विधि बेकार है।
7. विभ्रम का ज्ञान नहीं हो सकता।	7. विभ्रम का ज्ञान हो सकता है।
8. विस्तृत क्षेत्र के लिए अनुपयुक्त है।	8. विस्तृत क्षेत्र के लिए उपयुक्त है।
9. कम वैज्ञानिक विधि है।	9. अधिक वैज्ञानिक विधि है।
10. समग्र अनन्त न हो, तो यह विधि अपनायी जाती है।	10. समग्र अनन्त होने पर यह विधि अपनायी जाती है।

प्रतिचयन के लिए आवश्यक तत्व (Essentials of A Sample)

निष्पक्ष और यथार्थ निष्कर्ष निकालने के लिए न्यायदर्श में निम्नलिखित गुणों का होना आवश्यक है:

1. **प्रतिनिधित्व (Representativeness):** उचित निष्कर्ष प्राप्त करने हेतु न्यायदर्श ऐसा होना चाहिए जिसमें समग्र के सभी मौलिक गुण सम्मिलित हो। इसके लिए इकाईयों का चुनाव निष्पक्ष होना चाहिए।
2. **स्वतंत्रता (Independent):** किसी एक इकाई का प्रतिदर्श में सम्मिलित होना किसी दूसरी इकाई के न्यायदर्श में शामिल होने या न होने से स्वतंत्र होना चाहिए।
3. **समानता व सजातीयता (Similarity and Homogeneity):** समग्र तथा प्रतिदर्श की इकाईयों की प्रकृति व विशेषताओं में कोई विशेष प्रकार का आधारभूत परिवर्तन नहीं होना चाहिए। यदि एक समग्र से विभिन्न प्रतिदर्श लिए जाये तो उनसे प्राप्त निष्कर्षों में समानता होनी चाहिए।
4. **पर्याप्तता (Adequacy):** प्रतिदर्श में इकाईयों की संख्या पर्याप्त होनी चाहिए। समग्र की पर्याप्त आकार से ही सही निष्कर्ष की आशा की जा सकती है। विभिन्न परिस्थितियों पर विचार करके यह निश्चित किया जायेगा कि निदर्श का आकार क्या हो। ध्यान रहे कि कभी-कभी कोई प्रतिदर्श बड़ा होते हुए भी उपयोग नहीं हो सकता है।

प्रतिचयन या निदर्शन के उद्देश्य (Objective of Sampling)

प्रतिचयन अध्ययन का प्रमुख लक्ष्य, कम समय, कम परिश्रम तथा न्यूनतम व्यय से समग्र के इकाईयों की विभिन्न विशेषताओं का पता लगाया जा सके। प्रतिदर्श की मदद से पूरे समग्र के बारे में अधिक सूचनाएँ प्राप्त की जाती हैं।

“निदर्शन सिद्धान्त का सम्बन्ध प्रथम, प्रतिदर्श की सहायता से समग्र के लक्षणों का अनुमान लगाने तथा दूसरे, अनुमान की सूक्ष्मता का मूल्यांकन करने से है।”

—प्रो. वैदर बर्न (Weather Burn)

निदर्शन के निम्नलिखित उद्देश्य हैं—

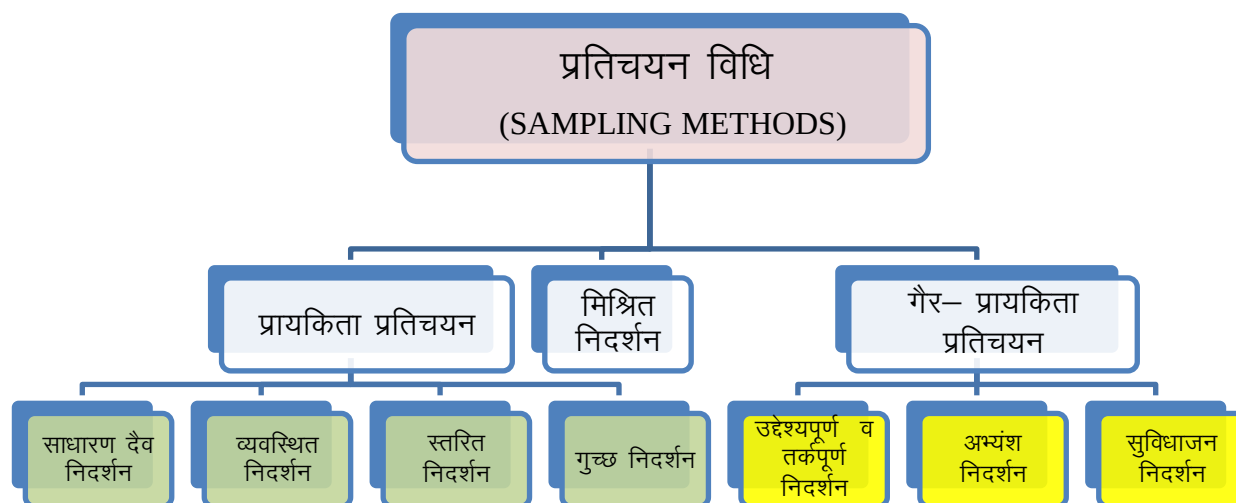
1. **संगणना अनुसन्धान की सत्यता की जांच—** संगणना अनुसन्धान विधि से प्राप्त परिणामों की सत्यता की जांच की जाती है। जनगणना परिणामों की सत्यता जांचने के लिए जनगणना के बाद में निदर्शन सर्वेक्षण किये जाते हैं।
2. **समग्र के प्राचलों (Parameters) का अनुमान लगाना—** प्रतिदर्श के सांख्यिकीय मापों, जैसे, माध्य, प्रमाप विचलन, सहसम्बन्ध, विषमता, कुकूदता आदि के आधार पर समग्र के मापों को ज्ञात किया जाता है। इस प्रकार निदर्शन अध्ययन का लक्ष्य प्राचलों के सर्वसम्भाव्य मानों को प्राप्त करना भी है। समग्र के माप प्राचल कहलाते हैं, जबकि निदर्शन के माप सांख्यिकीय अथवा प्रतिदर्शज (Statistic) कहलाते हैं। ये अनुमान दो प्रकार से लगाये जाते हैं:

(क) **बिन्दु अनुमान (Point Estimate)—** जब निदर्शन के प्रतिदर्शज से समग्र के प्राचल का एकमात्र अनुमान लगाया जाता है तो उसे बिन्दु अनुमान कहते हैं। उदाहरण के लिए, प्रतिदर्शज के आधार पर यह कहा

जा सकता है कि परास्नातक प्रथम सत्र के विद्यार्थियों का औसत उंचाई 167 सेंटीमीटर है तो यह बिन्दु अनुमान कहलायेगा। यह अनुमान अनभिन्न एवं विश्वसनीय नहीं होता है।

(ख) **अन्तराल अनुमान (Interval Estimate)**— समग्र के प्राचलों का ऐसा अनुमान जो एकमात्र न होकर दो सीमाओं के मध्य पाया जाता है अन्तराल अनुमान कहलाता है। उदाहरण के लिए, यदि कहा जाए कि प्राचल की औसत लम्बाई का अन्तराल $\mu \pm 3\delta = 160 \pm 3 \times 2$ (यहाँ प्रमाप विचलन = 2 माना) हैं तो यह अन्तराल अनुमान होगा क्योंकि प्राचल का माप इन दो सीमाओं 154 व 166 के मध्य पाया जायेगा।

3. **सार्थकता की जांच (Test of Significance)**— प्रतिदर्श कितना ही उपयुक्त क्यों न हो फिर भी उसके माप एवं समग्र के माप में अन्तर होता है। इतना ही नहीं, एक ही समग्र के विभिन्न निदर्श के मापों में भी अन्तर होता है। इन अन्तरों की सार्थकता की जांच करना ही निदर्शन का प्रमुख उद्देश्य है।
4. **परिकल्पना का परीक्षण (Testing of Hypothesis)**— प्रतिचयन के आधार पर समग्र के बारे में की गई परिकल्पना की अच्छी तरह से जांच किया जा सकता है और यह देखना कि वास्तविक प्रतिदर्शज एवं प्रमाणित प्राचल के मध्य कोई अन्तर तो नहीं है? यदि अन्तर है तो कितना एवं यह निदर्शन उच्चावचन के कारण है अथवा किसी अन्य कारण से है। *यदि अन्तर का कारण निदर्शन उच्चावचन है तो यह सार्थक (significant) नहीं माना जायेगा और परिकल्पना सही मानी जायेगी। यदि अन्तर का कारण कोई और है तो यह सार्थक माना जायेगा और इस प्रकार परिकल्पना गलत साबित होगी।* इस प्रकार की जांच प्रत्याशित एवं अवलोकित मूल्यों के अन्तर को देखकर की जाती है।
5. **महत्वपूर्ण लक्ष्य की पूर्ति एवं निरन्तर जानकारी हेतु**— विशेष उद्देश्य की पूर्ति के लिए प्रतिदर्श विधि अपनायी जाती है। सामाजिक, आर्थिक एवं व्यावहारिक सर्वेक्षण इसी के अन्तर्गत आते हैं। कुछ समग्रों की इकाईयों के व्यवहार के बारे में निरन्तर जानकारी की आवश्यकता पड़ती है। निदर्शन विधि द्वारा पूर्व प्राप्त परिणामों में संशोधन किये जाते रहते हैं जैसा कि चिकित्सा विज्ञान एवं गुण नियन्त्रण में होता है।



2.3.1 साधारण दैव प्रतिचयन विधि (Simple Random Sampling Method):

इस विधि को संभावना निदर्शन विधि भी कहा जाता है। इस विधि के अन्तर्गत समग्र की प्रत्येक इकाई को समान महत्व दिया जाता है। अर्थात् समग्र की प्रत्येक इकाई को निदर्श में शामिल होने का समान अवसर दिया जाता है। इस प्रकार इस पद्धति में किसी इकाई को निदर्श के अन्तर्गत सम्मिलित अथवा असम्मिलित करना अनुसन्धानकर्ता के हाथ में नहीं होता है बल्कि निदर्श इकाईयाँ चुनने की क्रिया पूर्ण रूप से संयोग पर छोड़ दिया जाता है। इसीलिए दैव निदर्शन को पक्षपातरहित निदर्शन कहा जाता है। *साधारण दैव निदर्शन वह विधि है जिसमें सभी इकाईयों का चयन इस प्रकार किया जाता है कि समग्र की प्रत्येक इकाई को निदर्श में शामिल होने का समान अवसर हो और समग्र के सभी सम्भावित संयोजन को सम्मिलित होने के भी समान अवसर होते हों। इस प्रणाली में यह अनुमान लगाया जाता है कि चयन की सभी इकाईयाँ समग्र का पूर्ण प्रतिनिधित्व करती हैं।* दैव निदर्शन में इकाईयों का चयन

अवसर के नियमों (Law of Chance) पर आधारित पर होता है जिसके लिए यह आवश्यक है कि प्रतिदर्श में सूक्ष्मता व सत्यता लायी जा सके। दैव निदर्शन रीति से प्रतिदर्श लेने के निम्न ढंग हैं:

1. **लॉटरी विधि (Lottery Method)**— इस विधि के अन्तर्गत अलग-अलग संख्या या कोड या नाम लिखकर किसी बक्सों में रखकर एक-एक करके हाथ या या किसी अन्य यन्त्र से घुमा या हिला कर बिना किसी सोच-बिचार के निकालते हैं। जिन पदों को यह संख्याएँ या चिन्ह प्रकट करते हैं उन्हें प्रतिदर्श में शामिल कर लिया जाता है। आजकल विकसित इलेक्ट्रॉनिक रीतियों द्वारा लॉटरी विधि और अधिक वैज्ञानिक व प्रभावशाली हो गई है जिसमें पक्षपात की कोई गुंजाईश नहीं होती है।
2. **आंख बन्द करके चुनना (Blindfold Selection Method)**— इस विधि में चयन करने वाले पदों को चिह्नित पर्चियों में से आंख बन्द करके कुछ को उठा लेते हैं और वे ही प्रतिदर्श में शामिल किये जाते हैं। यह विधि कहीं-कहीं दूसरे तरीके से भी प्रयोग में लाई जाती है।
3. **पदों को किसी खास क्रम में सजाकर (Arrangement of items in Some Order)**— इस रीति में पहले पदों को किसी विशेष क्रम जैसे भौगोलिक, वर्णात्मक या संख्यात्मक रूप में सजाकर या व्यवस्थित कर फिर उनमें से आकस्मिक ढंग से कुछ पदों की चुन लेते हैं। इस नियमानुसार दैव निदर्शन (Systematic Random Sampling) भी कहा जाता है।
4. **ढोल घुमाकर (By Rotating the Drum)**— यह विधि काफी प्रचलित है विशेषकर फिल्म या पारिवारिक खेल में भी इस्तेमाल किया जाता है। एक ढोल में समान आकर के लकड़ी, लोहे या अन्य किसी धातु के गोल टुकड़े, जिन पर समग्र के विभिन्न पदों के लिए संख्या या चिह्न अंकित करने के बाद उसे हाथ या बिजली से घुमाते हैं और फिर जितने पद प्रतिदर्श में लेने होते हैं, उतने टुकड़े कोई भी निष्पक्ष व्यक्ति निकाल लेता है। ये टुकड़े जिन पदों का प्रतिनिधित्व करते हैं उन्हें न्यायदर्श में शामिल कर लिया जाता है।
5. **टिप्पेट की संख्याओं अथवा दैव प्रतिचयन सारणियों द्वारा (By Means of Tippet's Random Numbers Tables)**— प्रसिद्ध सांख्यिकविद् टिप्पेट ने 41,600 अंकों के प्रयोग में 10,400 चार अंकों (Digits) की संख्याएँ बिना किसी क्रम के सारणी में दी हैं। इस प्रकार की सरणीयाँ अन्य सांख्यिकी विशेषज्ञों के द्वारा भी तैयार की गई हैं; जैसे, फिशर, यूल और केण्डाल तथा बॉडिंगटन। परन्तु, इनमें से टिप्पेट की संख्याएँ अधिक लोकप्रिय हैं। टिप्पेट द्वारा दी गई संख्याओं में से प्रथम पैंतिस संख्याएँ इस प्रकार हैं:

2952	6641	3992	9792	7969	5911	3170
5624	4167	9524	1545	1396	7203	5356
1300	2693	2370	7583	3408	2762	3562
1089	6913	7691	0560	5246	1112	6107
6008	8126	4233	8776	24754	9143	1405

टिप्पेट की सारणी के आधार पर यदि 6,000 विद्यार्थियों में से 20 विद्यार्थी छांटने हों, तो पहले 6,000 विद्यार्थियों को 1 से 6,000 तक क्रम संख्याओं में क्रमबद्ध किया जायेगा और फिर उपर्युक्त सारणी में से 20 संख्याएँ छांट ली जायेंगी जो 6,000 से अधिक न हों। ये 20 संख्याएँ निम्न होंगी:

2952	3992	5911	3170	5624
4167	1545	1396	5356	1300
2693	2370	3408	2762	3563
1089	0560	5246	1112	4233

इन क्रम संख्याओं वाले 20 विद्यार्थियों को प्रतिदर्श में शामिल किया जायेगा।

ध्यान देने की बात है कि समग्र की इकाईयाँ 100 से कम हों, तो चार अंकों वाले दैव अंक दो-दो अंकों में लिखे जाते हैं और ये दो-दो अंकों वाली संख्याएँ चुन ली जाती हैं।

बॉउले समिति (1933) ने दैव प्रतिचयन ढंग को भारत की आर्थिक स्थिति की जांच पड़ताल करने के लिए ठीक बताया था।

दैव प्रतिचयन के गुण (Merits of Simple Random Sampling)

1. **पक्षपात-रहित-** इस विधि से चुनाव करने में पक्षपात के लिए गुंजाईश नहीं रहती है। सभी पदों को चुनने का समान अवसर होता है।
2. **अवसर का नियम (Law of Chance)-** चुनाव करने वाल को कोई बुद्धि नहीं लगानी पड़ती है। अर्थात् पदों का चयन अवसर के नियम के आधार पर होता है।
3. **चुनाव के लिए योजना नहीं-** चुनाव के लिए कोई विस्तृत योजना नहीं बनानी पड़ती है।
4. **मितव्ययिता-** इस विधि में धन, समय व परिश्रम कम खर्च होता है।
5. **शुद्धता की जांच संभव-** इस विधि में प्रतिदर्श की शुद्धता की जांच भी दूसरे प्रतिदर्श से की जा सकती है। निदर्शन विभ्रमों की माप भी की जा सकती है।
6. **समग्र का वास्तविक प्रतिनित्व-** सांख्यिकीय नियमितता नियम और महा जड़ता नियम पर आधारित होने के कारण इसमें प्रतिदर्श इकाइयों द्वारा समग्र की वास्तविक विशेषताओं का प्रकटीकरण सम्भव होता है। वास्तव में, यह समग्र का एक छोटा रूप बन जाता है।

साधारण दैव प्रतिचयन के अवगुण (Demerits of Simple Random Sampling)

1. **अनुपयुक्तता-** यह पद्धति उस अनुसन्धान के लिए उपयुक्त नहीं है जहाँ कुछ इकाइयाँ इतनी महत्वपूर्ण हो कि उन्हें प्रतिदर्श में शामिल करना आवश्यक है।
2. **प्रतिनिधित्व की कमी-** यदि प्रतिदर्श बड़ा न हुआ तो सम्भव है वह समग्र का ठीक प्रकार प्रतिनिधित्व न कर सके।
3. **इकाइयों में स्वतंत्रता का अभाव-** समग्र की इकाइयों में परस्पर स्वतंत्रता के अभाव में यह रीति उपयुक्त नहीं है।

परिसीमाएँ (Limitations)

- यदि अनुसन्धान का क्षेत्र बहुत छोटा हो, तो परिणाम विश्वसनीय नहीं हो सकते।
- यदि सम्पूर्ण पद विजातीय हो अर्थात् प्रत्येक पद में भिन्नता हो, तो निदर्श प्रतिनिधिपूर्ण नहीं होगा।
- समग्र के प्रत्येक अंश के लिए आवश्यक है कि वह दूसरों से स्वतंत्र हो।
- चुनावकर्ता में यदि किंचित मात्र भी पक्षपात की भावना आयी तो फल विश्वसनीय नहीं होगा।

मिश्रित प्रतिचयन विधि (Mixed Sampling Method)

प्रतिचयन की वह विधि जिसमें एक शोधकर्ता शोध की आवश्यकता व विशेषता के अनुसार दैव व प्रायिकता निदर्शन और सविचार व गैर-प्रायिकता निदर्शन के संयोग का प्रयोग करता हो तब उसे मिश्रित प्रतिचयन विधि कहते हैं।

मिश्रित प्रतिचयन के गुण (Merit of Mixed Method Sampling)

इस विधि में चुनाव अधिक विश्वसनीय होता है क्योंकि समग्र के विभिन्न स्तरों का प्रतिनिधित्व (Representation) होता है। दैव निदर्शन में यद्यपि प्रत्येक इकाई के चुने जाने का समान अवसर रहता है परन्तु अवसर के कारण अनेक महत्वपूर्ण समूहों का प्रतिनिधित्व प्रतिदर्श में नहीं हो पाता है। मिश्रित निदर्शन में कोई ऐसा महत्वपूर्ण समूह नहीं रह जाता जिसका प्रतिनिधित्व प्रतिदर्श में न हो।

मिश्रित निदर्शन विधि के अवगुण

यदि सविचार विधि में त्रुटियाँ हो जाये तो इस प्रणाली द्वारा निकाले हुए फल संतोषजनक नहीं होते हैं।

2.3.2 स्तरित प्रतिचयन (Stratified Random Sampling)

इस विधि में सबसे पहले समग्र को किसी गुण विशेष के आधार पर कई भागों में वर्गीकृत कर लिया जाता है जिन्हें स्तर (Strata) कहा जाता है। फिर दैव निदर्शन विधि से प्रत्येक स्तर में से कुछ पदों को चुन लिया जाता है। यही कारण है कि इसे स्तरित दैव निदर्शन कहा जाता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी कक्षा में 40 विद्यार्थी हैं और इनमें से 8 का प्रतिदर्श लेना है, तो सबसे पहले सविचार निदर्शन द्वारा इन विद्यार्थियों को माना तीन श्रेणियों में विभक्त कर दिया; जैसे, प्रथम श्रेणी, द्वितीय श्रेणी व तृतीय श्रेणी। मान लिया कि प्रथम श्रेणी में 20, द्वितीय श्रेणी में 10 और तृतीय श्रेणी में 10 विद्यार्थी हैं।

अब दैव निदर्शन प्रणाली से प्रत्येक श्रेणी में से संख्या के अनुपात में विद्यार्थी चुन लिए जाये, अर्थात् प्रथम श्रेणी से 4, द्वितीय श्रेणी से 2 और तृतीय श्रेणी से 2 कक्षा का अधिकतम प्रतिनिधित्व करेंगे। क्रॉक्स्टन एवं कॉउडेन ने इस प्रणाली को अन्य प्रणालियों की तुलना में अधिक अच्छा बताया है।

स्तरित दैव प्रतिचयन के गुण (Merits of Stratified Random Sampling)

1. **उत्तम विधि**— स्तरित दैव प्रतिचयन में दोनों प्रमुख रीतियों (सविचार तथा निदर्शन) के गुण आ जाते हैं, अतः इसे सर्वश्रेष्ठ विधि माना जाता है। **हार्पर** के शब्दों में, “शुद्ध दैव प्रतिदर्श की अपेक्षा स्तरित प्रतिदर्श श्रेष्ठतर है क्योंकि इसमें एकागीपन की सम्भावना कम हो जाती है।” इसी कारण यह विधि आकजकल बहुत लोकप्रिय है।
2. **विश्वसनीय प्रतिदर्श**— इस रीति से चुना गया प्रतिदर्श अधिक विश्वसनीय होता है क्योंकि यह समग्र विभिन्न स्तरों का सही प्रतिनिधित्व करता है तथा किसी भी महत्वपूर्ण एवं विजातीय इकाई के छूटने का डर नहीं रहता है।
3. **उपयुक्तता**— विषम प्रकृति के समग्रों के लिए यह रीति अधिक उपयुक्त है।
4. **प्रतिस्थापन की सुविधा**— यदि किसी कारण चयनित प्रतिदर्श इकाई से सम्पर्क सम्भव नहीं है, तो स्तर का क्षेत्र कम हाने की वजह से उसी स्तर की दूसरी इकाई से प्रतिस्थापित किया जा सकता है जिससे धन व समय की बचत हो जाती है।
5. **सन्तुलन स्थापन—ग्रोहमैन** के अनुसार, “स्तरित दैव निदर्शन सविचार प्रतिचयन की अभिनति तथा दैव निदर्शन की अनिश्चितता के मध्य सन्तुलन स्थापित करता है।”
6. **धन, समय व श्रम की बचत**— स्तरों में से पदों का चयन इस प्रकार किया जा सकता है जिससे प्रतिदर्श के समस्त पद एक भौगोलिक क्षेत्र में ही केन्द्रित हों। इकाईयों के केन्द्रीकरण से अनुसन्धान में धन, समय व श्रम की बचत होती है।
7. **प्रशासनिक सुविधा**—प्रत्येक स्तर के लिए एक-एक व्यक्ति को जिम्मेदारी सौंपी जा सकती है जिससे प्रतिदर्श के चयन में तथा आंकड़ों के संकलन में नियन्त्रण रहता है और हमें प्रतिनिधित्व का अधिक विश्वास हो जाता है।

स्तरित दैव निदर्शन के अवगुण (Demerits of Stratified Random Sampling)

1. **अभिनति की सम्भावना**— यदि अनुचित या अनुपयुक्त वर्गीकरण किया जाता है, तो प्रतिदर्श में अभिनति (biase) की सम्भावना रहती है।
2. **स्तर बनाने में कठिनाई**— स्तर बनाने में कठिनाई का अनुभव किया जाता है। कभी-कभी यह निश्चय करना कठिन हो जाता है कि एक इकाई—विशेष को किस स्तर में रखा जाए।
3. **अनुपयुक्तता**— यदि समग्र तथा उसके स्तरों के बारे में जानकारी उपलब्ध न हो तो स्तरित दैव निदर्शन विधि नहीं अपनाई जा सकती है।

सावधानियाँ (Precautions)

- समग्र की विभिन्न विशेषताओं को ज्ञात करके उसे उनके आधार पर विभिन्न खण्डों अथवा स्तरों में बांटा जाए।
- प्रत्येक खण्ड अथवा स्तर का आकार इतना बड़ा अवश्य होना चाहिए जिसमें से प्रतिदर्श के लिए इकाईयों का चयन करना सम्भव हो।
- विभिन्न खण्डों अथवा स्तरों में पूर्ण रूप से सजातीयता हो।
- प्रतिदर्श के लिए विभिन्न खण्डों अथवा स्तरों में से इकाईयों का चयन उसी अनुपात में किया जाय जो अनुपात सम्बन्धित खण्ड अथवा स्तर तथा समग्र में है बशर्ते विचलन ढंग में विभिन्नता न हो।
- खण्ड अथवा स्तर ऐसे न हो जिनमें से एक ही इकाई का प्रवेश दो खण्डों व स्तरों में सम्भव हो सके।
- समग्र की प्रत्येक इकाई को किसी-न-किसी स्तर में अवश्य होना चाहिए।

2.3.3 व्यवस्थित प्रतिचयन (Systematic Sampling)

व्यवस्थित प्रतिचयन में समग्र को सर्वप्रथम संख्यात्मक, भौगोलिक अथवा वर्णात्मक (alphabetical) आधार पर एक क्रम में व्यवस्थित किया जाता है। प्रथम इकाई का चयन दैव निदर्शन विधि से किया जाता है। फिर प्रत्येक k वीं इकाई को प्रतिदर्श में चुन लिया जाता है। माना कि समग्र में इकाईयों की संख्या N है

और यह $n \times k$ गुणनफल के रूप में रखी जा सकती है (अर्थात् $N = nk$)। n आकार का प्रतिदर्श चयनित करने के लिए समग्र की इकाइयों को 1 से N तक की क्रम संख्याएँ प्रदान की जाती है।

$\frac{\text{Size of Population}}{\text{Number of Sample}} = \frac{N}{n} = k$ को निदर्शन अन्तराल (Sampling Interval) कहा जाता है। पहली इकाई को दैव रूप से चयन करने के लिए दैव संख्याओं की सारणी से कोई एक संख्या P (जो k से छोटी हो) का चयन करते हैं। इस प्रकार P क्रम संख्या वाली इकाई का चयन प्रतिदर्श में हो जाता है उसके बाद प्रत्येक k वीं इकाई स्तवः ही चयनित होती रहेगी। उदाहरण के लिए, यदि 4,000 इकाइयों में से 100 इकाइयों के प्रतिदर्श का चयन करना हो, तो प्रथम इकाई का चयन करने के लिए 1 से 40 के बीच में आने वाली किसी दैव संख्या का चयन दैव संख्याओं की तालिका से किया जायेगा। माना कि चयनित संख्या 25वीं है तब आगे की सभी $(n-1)$ इकाइयाँ क्रमशः $(25 + k)$ वीं, $(25 + 2k)$ वीं, ... $[25 + (n-1)k]$ वीं होगी जबकि $\frac{N}{n} = \frac{4,000}{100} = 40$ है।

व्यवस्थित प्रतिचयन के गुण (Merits of Systematic Sampling)

1. यह विधि सरल एवं सुबोध है।
2. इस विधि से समय, श्रम व धन की बचत होती है।
3. व्यवस्थित प्रतिदर्श समग्र का पूर्ण प्रतिनिधित्व करता है फलतः निष्कर्ष विश्वसनीय होते हैं।
4. यह विधि दैव निदर्शन पर एक सुधार है क्योंकि समग्र के प्रत्येक उपक्षेत्र को प्रतिनिधित्व प्रदान करती है।

व्यवस्थित प्रतिचयन के अवगुण (Demerits of Systematic Sampling)

1. यदि समग्र की समस्त पदों का ज्ञान नहीं है, तो यह विधि प्रयोग में नहीं ली जा सकती क्योंकि समग्र की सम्पूर्ण पदों को क्रमबद्ध करना आवश्यक है।
2. समग्र का आकार अनन्त होने की दशा में यह विधि अनुपयुक्त है।
3. निदर्शन की यह विधि पूर्णतः दैव निदर्शन विधि नहीं है क्योंकि एक बार प्रारम्भिक इकाई का चयन करने के बाद अन्य इकाइयों का चयन स्वतः ही एक अन्तराल के पश्चात् हो जाता है।
4. यदि समग्र में किसी विशेषता वाली इकाइयों की सावधिक पुनरावृत्ति (Periodic repetition) है, तो सम्भव हो सकता है कि उस विशेषता वाली इकाइयों को प्रतिदर्श में बिल्कुल ही स्थान न मिले या उन्हीं इकाइयों की प्रमुखता हो।

2.2.4 गुच्छ व समूह प्रतिचयन (Cluster of Group Sampling)

गुच्छ निदर्शन वह निदर्शन है जिसमें सजातीय समग्र के अवयवों को आन्तरिक तौर पर विजातीय समूह के आधार पर कई छोटे-छोटे समूह में वर्गीकृत करके निदर्शन किया जाता है। दूसरे शब्दों में, सर्वप्रथम समग्र को विभिन्न समूहों व गुच्छों में विभाजित करे लिया जाता है जिनका सजातीय होना आवश्यक नहीं और तत्पश्चात् प्रत्येक समूह में से कुछ इकाइयों का या सभी इकाइयों का चयन किया जाता है। इस विधि का सर्वाधिक प्रयोग औद्योगिक क्षेत्र में किया जाता है। उदाहरण के लिए, बोल्ट-नटों की जांच करने के लिए उनके 20-20 के गुच्छ व समूह बनाये जायें और फिर उन गुच्छों में से दैव निदर्शन विधि से ढेर चुनकर उनकी जांच की जाय तो यह समूह निदर्शन होगा।

यदि समग्र का विभाजन भौगोलिक आधार पर किया जाता है, तो इसे क्षेत्र निदर्शन (area sampling) कहा जाता है। यहाँ मानचित्र की सहायता से सर्वेक्षण किये जाने वाले क्षेत्र को उपक्षेत्रों में विभाजित किया जाता है। फिर उपक्षेत्रों में से दैव निदर्शन विधि द्वारा चयन करके प्रतिदर्श में सम्मिलित किया जाता है।

गुण (Merit)

1. एक सरल एवं आसान प्रतिचयन विधि है।
2. इस विधि के तहत बड़े समग्र के लिए ज्यादा उपयोगी है।
3. लागत के दृष्टि से एक मितव्ययी विधि है।
4. अन्तरवर्ग के बीच विचरणशीलता को भी कम कर सकता है।

अवगुण (Demerit)

1. उच्च निदर्शन विभ्रम की संभावना।

2. यह एक जटिल प्रक्रिया है।

2.3.5 बहुस्तरीय व बहुचरणी प्रतिचयन (Multi-Stage Sampling)

बहुतस्तरीय निदर्शन विधि का प्रयोग उस दशा में किया जाता है जब समग्र का विस्तर विशाल क्षेत्र में हो। इसके अन्तर्गत प्रतिदर्श चयन करने का कार्य अनेक स्तरों में किया जाता है। प्रत्येक स्तर पर प्रतिदर्श का चयन सविचार निदर्शन या दैव निदर्शन विधि के द्वारा किया जा सकता है। यदि प्रत्येक स्तर पर दैव निदर्शन विधि का प्रयोग किया जाता है तब इसे बहुस्तरीय दैव प्रतिचयन कहा जाता है। उदाहरण के लिए, (1) यदि भारत के कुछ नगरों का आर्थिक सर्वेक्षण करना हो, तो सर्वप्रथम राज्यों का चयन किया जाय, तत्पश्चात् दैव निदर्शन विधि से राज्यों में जिलों (जनपदों) का चुनाव किया जाय और अन्त में दैव प्रतिचयन विधि से ही जिलों में से नगरों का चुनाव किया जाय। इस विधि में प्रतिदर्श विभ्रम हर स्तर पर संग्रही होता चला जाता है।

(2) यदि किसी शहर की जनसंख्या के बारे में कोई ज्ञान प्राप्त करना हो, तो सर्वप्रथम उस नगर को कुछ क्षेत्रों में विभाजित कर दिया जात है। क्षेत्रों (Sections/Sectors) में बाँटते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि क्षेत्र इस प्रकार बनाये जायें ताकि एक क्षेत्र में लगभग एक ही प्रकार के व्यक्ति रहते हों। तत्पश्चात् इस प्रकार के प्रत्येक क्षेत्र से दैव निदर्शन विधि के अनुसार एक गृह को चुनकर उनकी जांच-समूह चुनना चाहिए। (इस प्रकार के प्रत्येक गृह-समूह से कुछ गृहों को चुनना चाहिए।) इन गृहों में से कुछ व्यक्तियों को चुनकर उनकी जांच करनी चाहिए। इस प्रकार यह स्पष्ट है कि बहुस्तरीय दैव निदर्शन विधि की दो प्रमुख विशेषताएँ हैं:

1. चयन कई स्तरों पर होता है।
2. प्रत्येक स्तर पर चयन करते समय दैव निदर्शन विधि का प्रयोग किया जाता है।

गुण (Merits)

1. एक बड़े शहर की क्षेत्रीय स्तर पर जनसंख्या ज्ञात करने के लिए यह प्रणाली अत्यन्त उपयुक्त है।
2. इसमें प्रत्येक इकाई के चुन जाने की समान सम्भावना रहती है, अतः फल सन्तोषजनक रहते हैं।
3. दैव निदर्शन प्रणाली के सभी लाभ प्राप्त होते हैं।

अवगुण (Demerit)

1. क्षेत्रीय स्तर पर विभाजन करने की एक शर्त यह है कि विभिन्न क्षेत्रों में एकरूपता हो। यह शर्त बहुत कम पूरी होती है। अतः क्षेत्रों का विभाजन जैसा इस विधि के अनुसार होना चाहिए वैसा नहीं हो पाता।
2. दैव निदर्शन के सभी दोष इसमें भी पाये जा सकते हैं।

2.3.6 सविचार प्रतिचयन व गैर-प्रायिकता प्रतिचयन (Purposive Sampling)

वह प्रतिचयन प्रणाली जिसमें अनुसन्धानकर्ता निदर्श का चुनाव समझ-बुझकर एवं अपनी इच्छानुसार करता है, सविचार वह उद्देश्यपूर्ण निदर्शन कहलाता है। इसके चयन करते समय य प्रयत्न करता है कि समग्र की सब विशेषताएँ प्रतिदर्श में आ जाए और इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए वह समग्र की प्रत्येक प्रकार की विशेषता को प्रकट करने वाले पदों का अपने प्रतिदर्श में समाहित करता है। सामान्यतया वह कोई प्रमाण जो उनकी आवश्यकता के अनुकूल हो निश्चित कर लेता है और उसी के आधार पर पदों को चुनता है। सविचार निदर्शन को गैर-प्रायिकता निदर्शन भी कहा जाता है।

सविचार प्रतिचयन के गुण (Merits of Purposive or Deliberate Sampling)

1. निदर्शन की यह पद्धति बहुत सरल व प्रचलित विधि है।
2. प्रतिदर्श का आकार निश्चित कर लेने पर योजना बना लेने से प्रतिदर्श का चुनाव ठीक होने की सम्भावना रहती है।
3. महत्वपूर्ण इकाईयों को प्रतिदर्श में शामिल किया जा सकता है।

सविचार प्रतिचयन के अवगुण (Demerits of Purposive Sampling)

1. चुनाव करने वाले की पूर्ण-धारणाओं का चुनाव पर बहुत गहरा प्रभाव पड़ता है जो निष्कर्ष को अशुद्ध बना देता है। यह प्रभाव प्रत्यक्ष या परोक्ष रूप से पड़ता है।

2. पदों के चयन में 'संभावना' (Possibility or Probability) के लिए कोई स्थान नहीं होता, अतः निदर्शन विभ्रम ज्ञात नहीं किया जा सकता है।
3. इस विधि से लिए गये निदर्शन अनुमानों की सत्यता की कोई गारन्टी नहीं होती है।
4. सविचार निदर्शन विधि के प्रतिदर्शों के परिणामों की तुलना अन्य निदर्शों के परिणामों से करना सम्भव नहीं है।
5. चुनाव पर चुनने वाले की प्रवृत्तियों और उसकी पक्षपात की भावना का भी प्रभाव पड़ता है और इसीलिए इस प्रकार से निकाले गये परिणाम वैज्ञानिक दृष्टि से अधिक विश्वसनीय नहीं होते हैं।

सविचार प्रतिचयन की उपयोगिता

- जब समग्र में इकाइयों की संख्या कम हो और महत्वपूर्ण विशेषताओं वाली इकाइयों के छूट जाने की सम्भावना हो।
- जब प्रतिदर्श का आकार छोटा रखना हो
- जब महत्वपूर्ण इकाइयों का गहन अध्ययन करना हो।
- अनुसन्धानकर्ता को सही प्रतिदर्श प्राप्त करने का ज्ञान व अनुभव हो।
- इस विधि का प्रयोग पायलट अनुसन्धान के लिए भी किया जाता सकता है।

2.3.7 अभ्यंश प्रतिचयन (Quota Sampling)

इस विधि के अन्तर्गत अनुसन्धानकर्ता समग्र को किसी गुण विशेष के आधार पर विभिन्न वर्गों में बांटता है। प्रत्येक वर्ग में से कितनी इकाइयों का चयन करना है यह प्रणकों के उपर निर्भर करता है। सामान्यतः जनमत का सर्वेक्षण करने में इस विधि का प्रयोग किया जाता है। प्रत्येक प्रणक या भेंटकर्ता को एक सामाजिक वर्ग के व्यक्तियों से भेंट करके जानकारी प्राप्त करने का अभ्यंश निश्चित कर दिया जाता है। उदाहरण के लिए, माना कि दूरदर्शन पर दिखाये जाने वाले विश्वविद्यालय अनुदान आयोग के प्रोग्राम के बारे में सर्वेक्षण करना है। ग्वालियर विश्वविद्यालय के छात्रों में जानकारी प्राप्त करने के लिए कुछ प्रणक प्रत्येक महाविद्यालय में भेजे जायेंगे जिनमें प्रत्येक को 50 छात्रों से सम्पर्क करके सूचना प्राप्त करनी पड़ेगी। यह 50 छात्र प्रत्येक प्रणक का कोटा हुआ। इस प्रकार प्रत्येक प्रणक अपने लिए निर्धारित महाविद्यालय में जाकर अपनी इच्छानुसार 50 छात्रों को चयन करके सूचनाएँ प्राप्त करेगा।

अभ्यंश प्रतिचयन के गुण (Merits of Quota Sampling)

1. इस विधि से समय, धन व श्रम की बचत होती है।
2. अभ्यंश निश्चित कर देने से यह आश्वासन मिल जाता है कि सभी वर्गों के व्यक्तियों से उचित अनुपात में जानकारी प्राप्त हो जायेगी।
3. प्रणक को अपनी योग्यता एवं निष्पक्षता से चयन करने की स्वतंत्रता होती है।

अवगुण (Demerit of Quota Sampling)

1. अभ्यंश पदों को दैव निदर्शन विधि से नहीं चुना जा सकता है, अतः अभिनति की सम्भावना रहती है।
2. प्रणक अपनी सुविधानुसार सूचकों का चयन कर सकता है जिससे प्रणक के विचारों के अनुकूल जानकारी प्राप्त हो सकती है।

2.3.8 सुविधाजनक प्रतिचयन (Convenience Sampling)

इस प्रणाली में अनुसन्धानकर्ता स्वयं अपनी सुविधा के अनुसार निदर्शन का चुनाव करता है। अनुसन्धानकर्ता अपने उद्देश्यों को ध्यान में रखकर अध्ययन के लिए सुविधाजनक इकाइयों में छाँट लेता है। यह विधि अवैज्ञानिक है क्योंकि इसमें पक्षपात व मिथ्या-झुकाव का किसी भी सीमा तक समावेश हो सकता है। प्रायः अनुसन्धानकर्ता इस विधि के प्रयोग से बचते हैं।

गुण (Merits)

1. यह सरल एवं आसान प्रतिचयन विधि है।
2. इसमें प्रणक को किसी विशेष ज्ञान की आवश्यकता नहीं होती है।
3. अनुसन्धानकर्ता इस विधि से आसानी और कम समय में समक संकलन कर सकता है।

अवगुण (Demerits)

1. यह एक अवैज्ञानिक विधि है।
2. इस विधि से संकलित समंक में त्रुटियों का ज्यादा समावेश हो सकता है।
3. इसमें पक्षपात व मिथ्या-झुकाव की प्रबल संभावना होती है।

2.3.9 विस्तृत व गहन प्रतिचयन (Extensive Sampling)

वह विधि जिसमें बहुत बड़ा प्रतिदर्श को विस्तृत व गहन रूप से अध्ययन करने हेतु निदर्शन की जाती है तब उसे विस्तृत व गहन निदर्शन कहते हैं। यहाँ समग्र की इकाइयों का बहुत बड़ा भाग प्रतिदर्श के लिए चयन किया जाता है और केवल कुछ ही इकाइयाँ छूट पाती हैं जिनके विषय में समंक एकत्र करना कठिन होता है। लगभग 80 से 90 प्रतिशत इकाइयाँ प्रतिदर्श में सम्मिलित कर ली जाती हैं। यह विधि संगणना विधि से काफी मिलती जूलती प्रतीत होती है।

विस्तृत प्रतिचयन के गुण (Merits of Extensive Sampling)

1. परिणाम में शुद्धता होती है।
2. परिणाम पर पक्षपात का बहुत कम प्रभाव पड़ता है।
3. जांच विस्तृत होती है।

विस्तृत प्रतिचयन के अवगुण (Demerit of Extensive Sampling)

1. धन, परिश्रम एवं श्रम बहुत ज्यादा खर्च होता है।
2. कभी-कभी समग्र के बड़े अंश के न उपलब्ध होने से यह रीति सम्भव नहीं होती है।

2.4 प्रतिचयन एवं गैर-प्रतिचयन विभ्रम (Sampling and Non-Sampling Error)

(क) प्रतिचयन विभ्रम (Sampling Error)— निदर्शन विधि के द्वारा समंक संकलन के दौरान होने वाली त्रुटियाँ या अभिनति को निदर्शन विभ्रम कहा जाता है। निदर्शन विभ्रम दो प्रकार के होते हैं।

1. अभिनत व पक्षपातपूर्ण प्रतिचयन विभ्रम (Biased Sampling Error)— वह निदर्शन विभ्रम जो एक ही दिशा में होते हैं उन्हें अभिनत या पक्षपातपूर्ण निदर्शन विभ्रम कहते हैं। सामान्यतः ये विभ्रम प्रतिदर्श आकार (Sample Size) के बढ़ाने पर कम नहीं होते क्योंकि इसमें निदर्शन कर्ता द्वारा जान बूझकर पक्षपात व्यवहार किया जाता है। इन विभ्रमों के उत्पन्न होने के निम्नलिखित मुख्य कारण हैं:

- (अ) सूचनाओं के संकलन की विधि का दोषपूर्ण होना।
- (ब) आंकड़ों के व्यवस्थीकरण का दोषपूर्ण होना।
- (स) आंकड़ों के विश्लेषण का दोषपूर्ण होना।

2. गैर-पक्षपातपूर्ण व अनभिन्न प्रतिचयन विभ्रम (Unbiased Sampling Error)—वे विभ्रम जो कि अवसर से सम्बन्धित होते हैं। अनभिन्न व गैर-पक्षपातपूर्ण विभ्रम कहलाते हैं। ये विभ्रम प्रतिदर्श में पदों की संख्या बढ़ाने व प्रतिदर्श आकार में वृद्धि करने के साथ-साथ कम होते हैं। अतः इन्हें असंचयी और क्षतिपूर्ण विभ्रम (Compensatory Errors) कहते हैं। सर्वेक्षण कार्य के उचित रूप से अपनाये जाने से ये विभ्रम न्यूनतम भी होते हैं।

(ख) गैर-प्रतिचयन विभ्रम (Non-Sampling Error)— संगणना के कारण होने वाले त्रुटियों को गैर-निदर्शन विभ्रम कहा जाता है। वास्तव में गैर-निदर्शन विभ्रम प्रायः सभी प्रकार के सर्वेक्षणों में पाये जाते हैं, चाहे वे संगणना विधि द्वारा हो या निदर्शन विधि द्वारा। ये विभ्रम अनुसन्धान के किसी भी स्तर पर उत्पन्न हो सकते हैं। ये विभ्रम समग्र की दोषपूर्ण परिभाषा, प्रश्नावली व अनुसूची में अपूर्णता, दोषपूर्ण आंकड़ों का संकलन, प्रस्तुतीकरण, दोषपूर्ण परिभाषाएँ, आदि के कारण होते हैं। गैर-निदर्शन विभ्रमों में अभिनति (bias) और त्रुटियाँ (mistake), दोनों सम्मिलित होती हैं। अभिनत विभ्रम इसलिए उत्पन्न होते हैं क्योंकि आंकड़ों में प्रायः एक ओर बढ़ने की प्रवृत्ति होती है। प्रतिदर्श के आकार में होने वाली वृद्धि तथा औसतों के प्रयोग से भी ये विभ्रम समाप्त नहीं होते हैं।

2.5 प्रतिचयन विधि का महत्व (Importance of Sample Method)

प्रतिदर्श विधि की उपयुक्तता, गुण-दोष तथा उद्देश्यों के विवेचन से स्पष्ट है कि यह विधि समंक संकलन के संगणना विधि से किसी भी प्रकार कम नहीं हैं बल्कि इससे बेहतर है।

“केवल कुछ पौण्ड कोयले की जांच के आधार पर एक गाड़ी कोयला अस्वीकृत या स्वीकृत कर दिया जाता है। केवल एक बूंद रक्त की जांच करके एक रोगी के रक्त के विषय में चिकित्सक निष्कर्ष निकालता है। निदर्शन ऐसी युक्तियाँ हैं। जिनके द्वारा केवल कुछ इकाइयों का निरीक्षण करके वृहद् मात्राओं या समग्र के बारे में जाना जाता है।”

—**प्रो. स्नेडेकॉर**

प्रतिदर्श लेने की प्रक्रिया (to take sample) को निदर्शन (Sampling) कहा जाता है। निदर्शन की विधि के नाम पर ही न्यायदर्श का नामकरण किया जाता है। जैसे, दैव निदर्शन विधि से लिया गया न्यायदर्श ‘दैव न्यायदर्श’ (Random Sample) कहलाता है।

2.5.1 संगणना अथवा प्रतिचयन विधि में पसन्द या चयन

शोधकर्ता को निश्चित रूप से यह तय करना चाहिए कि कब वह संगणना या प्रतिचयन विधि का प्रयोग करेंगे। जब इन दोनों में से किसी एक को चयन करनी हो तो निम्नलिखित बातों को ध्यान में आवश्यक रखना चाहिए:

6. समस्या के स्वभाव एवं कार्यक्षेत्र को जान लेना चाहिए।
7. वित्तीय संसाधनों की उपलब्धता।
8. समय की उपलब्धता।
9. वांछित शुद्धता की कोटि।
10. अन्वेषक की स्थिति अर्थात् व्यक्तिगत या निगम या सरकारी इत्यादि। संगणना विधि का चयन उन स्थितियों में किये जाने चाहिए जहाँ प्रतिचयन विधि विश्लेषण का आधार प्रदान नहीं करता हो। इसके विपरीत प्रतिचयन विधि का प्रयोग वहाँ करना चाहिए जहाँ संगणना विधि का प्रयोग करना संभव न हो।

2.6 इकाई का सारांश

सांख्यिकीय आंकड़े निम्नलिखित दो प्रकार के होते हैं:

3. प्राथमिक आंकड़े मूल आंकड़े होते हैं जिन्हें पहली बार किसी विशेष स्रोत से अनुसंधानकर्ता स्वयं एकत्रित करते हैं। प्राथमिक आंकड़े प्रत्यक्ष व्यक्ति अनुसंधान, अप्रत्यक्ष मौखिक अनुसंधान, संवाददाताओं द्वारा सूचनाएँ, प्रश्नावली विधि एवं अनुसूची के द्वारा सूचना के माध्यम से एकत्रित किया जा सकता है।
4. द्वितीय आंकड़े ज्यादातर सांख्यिकीय एवं शोध कार्य के गहन अध्ययन के लिए प्रयोग किया जाता है। द्वितीय आंकड़े मूलतः प्रयोगकर्ता द्वारा एकत्र नहीं किये जाते हैं। जब वर्तमान प्रयोगकर्ता आंकड़े किसी प्रकाशित या अप्रकाशित स्रोतों से लेते हैं तो ऐसे आंकड़े को द्वितीय आंकड़े कहते हैं।

द्वितीय आंकड़ों के बहुत से प्रकाशित एवं अप्रकाशित स्रोत हैं जैसे; रिपोर्ट, निष्कर्ष, सामाचारपत्र, पत्रिकाएँ, शोध पत्र, शोध किताबें आदि। द्वितीय आंकड़े अपेक्षकृत आसानी से प्राप्त किये जा सकते हैं एवं प्रयोग के लिए भी सस्ते होते हैं, लेकिन द्वितीय आंकड़े कई विसंगतियों एवं अनुचितता से ग्रसित होते हैं।

2.7 मुख्यशब्द

- **समग्र:** किसी समस्या से सम्बन्धित अध्ययन के समस्त इकाइयों के समूह को समग्र कहा जाता है।
- **संगणना विधि:** समंक संकलन की वह विधि जिसमें समग्र के प्रत्येक इकाइयों का गहन अध्ययन किया जाता है संगणना विधि कहलाता है।
- **अन्वेषक:** जो व्यक्ति सूचना एकत्र करने का कार्य करता है उन्हें अन्वेषक कहा जाता है।

2.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

30. न्यायदर्श को एक समग्र होना चाहिए।
31. प्रतिदर्श के मूल्यों से प्राप्त होने वाले मूल्य कहलाते हैं।
32. निदर्शन विधि सजातीय समग्र के लिए होती है।

33. जब समग्र अनन्त हो तो हमें विधि का प्रयोग करना चाहिए।
 34. संगणना विधि में समग्र के इकाई का अध्ययन किया जाता है।

2.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(क) 1. उपयुक्त, 2. समग्र, 3. प्रतिदर्शज, 4. अज्ञात पहलू, 5. प्रत्येक।

2.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

43. समग्र संकलन के विधियों की चर्चा करें
 44. संमंक संकलन हेतु संगणना विधि एवं निदर्शन विधि में कौन सा एक बेहतर है? तर्क प्रस्तुत करें।
 45. निदर्शन विधि के विभिन्न प्रकारों का संक्षिप्त वर्णन करें।
 46. अर्थशास्त्र में संमंक संकलन हेतु निदर्शन के महत्व को बताएं।

2.12 संदर्भ पुस्तकें

56. J.K. Thukral, “Business Statistics” Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
 57. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, “Fundamentals of Statistics”, Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
 58. S.P. Gupta, “Statistical Methods”, Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
 59. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
 60. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
 61. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
 62. अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण , भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
 63. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
 64. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
 65. Digambar Patri, “Business Statistics”, KaIyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, “Business Statistics”, Pearson publication, Delhi, India.
 66. R.P. Hooda, “Statistics for Business and Economics”, Mac Millan India Ltd., Delhi, India.

खण्ड—III

इकाई 03

आंकड़ों के प्रस्तुतीकरण की विधियाँ

सरचना:

- 3.1 प्रस्तावना
- 3.2 आवृत्ति वितरण के अर्थ
- 3.3 खण्डित आवृत्ति वितरण (या गैर-समूह आंकड़े)
 - 3.3.1 खण्डित आवृत्ति वितरण की निर्माण
- 3.4 सतत् आवृत्ति वितरण
 - 3.4.1 सतत् आवृत्ति वितरण का निर्माण
- 3.5 रेखाचित्र/चित्र
 - 3.5.1 रेखाचित्र/चित्र के प्रकार
- 3.6 आंकड़ों का चित्रमय प्रदर्शन
 - 3.6.1 आयत चित्र
 - 3.6.2 आवृत्ति बहुभुज
 - 3.6.3 तोरण
- 3.7 काल श्रेणी रेखाचित्र
- 3.8 इकाई का सारांश
- 3.9 कठिन शब्द
- 3.10 मुख्य शब्द
- 3.11 अपने प्रगति का मुल्यांकन (बहुविकल्पीय चयन/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 3.12 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 3.13 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न
- 3.14 संदर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

- आवृत्ति वितरण के अर्थ एवं निर्माण को समझना
- आवृत्ति वितरण से संबंधित शब्दों का वर्णन करना
- खण्डित एवं सतत् श्रेणी में अन्तर स्पष्ट करना
- विभिन्न विधियों के माध्यम से आवृत्ति वितरण का चित्रमय एवं रेखाचित्र प्रदर्शन

3.1 भूमिका (Introduction)

पूर्व के इकाई में, हम समकों के सकलन के बारे में जान चुके हैं। यहाँ हम जानेगें कि किस प्रकार से कच्चे आंकड़ों का प्रयोग आवृत्ति वितरण के निर्माण में किया जाता है। आवृत्ति वितरण सघन आंकड़ों को समूहीकरण करके सारणी में सूविधापूर्वक प्रस्तुत करने का तरीका है जिससे आंकड़े और अधिक आकर्षक दिखाई देते हैं। सांख्यिकी समकों को उचित एवं आकर्षक तरीके से प्रस्तुत करने का एक बेहतर तरीका है चित्र एवं रेखाचित्र या विन्दूरेखीय चित्र। इस अध्याय में, कुछ महत्वपूर्ण प्रकार के चित्र एवं विन्दूरेखीय चित्रों की व्याख्या करने की कोशिश की गई है जो प्रायः सांख्यिकीय समकों के प्रस्तुतीकरण में प्रयोग किये जाते हैं।

3.2 आवृत्ति वितरण का अर्थ (Meaning of Frequency Distribution)

आवृत्ति वितरण एक सुविधापूर्ण तरीका है जिसके द्वारा समकों का सामूहीकरण कर सघन एवं बड़े आंकड़ों को सारणी के रूप में प्रस्तुत किया जाता है।

आवृत्ति वितरण, दो प्रकार के होते हैं, खण्डित एवं सत्त।

3.3 खण्डित आवृत्ति वितरण या असमूहित आंकड़े (Discrete or Non-Grouped frequency Distribution Datas)

जब खण्डित चरों को आवृत्ति वितरण के रूप में प्रस्तुत करते हैं तब इसे खण्डित आवृत्ति वितरण कहते हैं। एक खण्डित आवृत्ति वितरण, खण्डित चरों के आंकड़ों के सभी संभावित मानों को, जो संगत आवृत्तियों के रूप में सूचीबद्ध करके, सारणी के रूप में प्रस्तुत करता है।

यदि x कोई खण्डित चर के विभिन्न मानों को अर्थात् $x_1, x_2, \dots, x_n$ तथा इनके संगत आवृत्तियों को $f_1, f_2, \dots, f_n$ द्वारा सूचित किया जाए तब खण्डित आवृत्ति निम्नरूप से प्रस्तुत किये जा सकते हैं:

(खण्डित चर) X	:	x_1	x_2		x_n
(संगत आवृत्ति) F	:	f_1	f_2		f_n

उदाहरण के लिए:

सारणी 3.1 खण्डित आवृत्ति वितरण को प्रदर्शित करता है।

सारणी 3.1: बच्चों की संख्या का आवृत्ति वितरण

बच्चों की संख्या	परिवारों की संख्या
0	16
1	40
2	30
3	10
4	4
कुल	100

3.3.1 खण्डित आवृत्ति विरण का निर्माण (Construction of Discrete Frequency Distribution)

तीन स्तंभों का प्रयोग करके एक खण्डित आवृत्ति वितरण का निर्माण किया जा सकता है। प्रथम स्तंभ में, हम सभी संभावित मानों को (अर्थात् वो लक्षण जिसका हमें मूल्यांकन या मापन करना है) छोटी संख्या या मानों से शुरूआत करते हुए उच्चतम संख्या को रख देते हैं। द्वितीय स्तंभ का शीर्षक 'मिलान चिह्न' देते हैं तथा प्रत्येक मान के लिए एक उचित जगह के साथ मिलान चिह्न संगत पंक्ति में रखते हैं। गणना की सुविधा के लिए हम प्रत्येक चार मिलान चिह्न के बाद पांचवें से तिर्यक बनाते हुए उन चारों मिलान चिह्न को काट दें जिसे 'गेट' भी कहते हैं। अन्त में तीसरे स्तंभ में, शीर्षक आवृत्ति अंकित करते हुए सभी संगत मानों के मिलान चिह्नों की गणना करते हुए चरों की आवृत्ति लिख देते हैं। आवृत्ति वाले स्तंभ में प्रत्येक मानों की संख्या उस चर के बारम्बारता या पुनरावृत्ति को प्रदर्शित करता है जिसे हम आवृत्ति के नाम से जानते हैं।

उदाहरण: दिये गये आंकड़े किसी कक्षा के 30 विद्यार्थियों के गणित विषय में प्राप्तांक हैं:

45 25 32 18 25 35 32 45 18 25
50 48 32 40 45 32 18 25 45 18
25 18 45 25 35 48 35 45 25 50

उपरोक्त आंकड़ों से आवृत्ति वितरण निम्न तरीके से बनाया जा सकता है।

सारणी 3.2: 30 विद्यार्थियों के प्राप्तांक का आवृत्ति वितरण

प्राप्तांक	आवृत्ति (विद्यार्थियों की संख्या)
18	5
25	7
32	4
35	3
40	1
45	6
48	2
50	2
कुल	30

3.4 सतत् आवृत्ति वितरण (Continuous Frequency Distribution)

सतत् चरों को प्रस्तुत करने वाले आवृत्ति वितरण को सतत् आवृत्ति वितरण कहते हैं। सतत् आवृत्ति वितरण, सतत् चरों के समकों के सामूहिकरण द्वारा विभिन्न वर्गों में पदों की संख्या के अनुसार प्रत्येक वर्गों में सारणिक रूप में प्रस्तुत करता है।

उदाहरण के लिए, सारणी 3.3 में 100 छात्रों की ऊंचाई जिसे सेन्टीमीटर में नापा गया है, सतत् आवृत्ति वितरण के द्वारा प्रस्तुत किया गया है:

सारणी 3.3: 100 छात्रों के ऊंचाई (से.मी. में) का सतत् आवृत्ति वितरण

ऊंचाई (सेन्टीमीटर में)	छात्रों की संख्या (आवृत्ति)
155–156	4
157–158	8
159–160	18
161–162	28
163–164	20
165–166	14
167–168	6
169–170	2
कुल	100

कुछ महत्वपूर्ण परिभाषाएँ

कुछ महत्वपूर्ण परिभाषाएँ जो सतत् आवृत्ति वितरण से संबंधित है जैसे कि सारणी 3.4 में दिखाया गया है अर्थात् किसी कक्षा के 60 छात्रों के एक समूह का वजन किलो ग्राम में अंकित किया गया है।

सारणी 3.4: 60 छात्रों के वजन का आवृत्ति वितरण

वजन (किलो ग्राम में)	छात्रों की संख्या (आवृत्ति)
30–34	3
35–39	5
40–44	12
45–49	18
50–54	14
55–59	6
60–64	2

वर्ग अन्तराल (Class Interval)

एक वर्ग जो किसी अन्तराल को परिभाषित करे, वर्ग अन्तराल कहलाता है (या सामान्य वर्ग)। प्रत्येक वर्ग अन्तराल उनके दिये गये वर्ग सीमा के आधार पर चिन्हित किये जाते हैं। उदाहरण के लिए, सारणी 3.4 में प्रथम वर्ग में मानों की सीमा 30 से 34 समावेशी वर्ग है; द्वितीय वर्ग की सीमा 35 से 39 एक समावेशी वर्ग है।

वर्ग सीमा (Class Limit)

किसी वर्ग अन्तराल की न्यूनतम एवं उच्चतम मानों को वर्ग की वर्ग सीमा कहते हैं। न्यूनतम संख्या वर्ग की निम्न सीमा तथा अधिकतम संख्या वर्ग की उच्च सीमा कहलाती है। उदाहरण के लिए, वर्ग अन्तराल 35–39 में, वर्ग सीमा 35 से 39 है, तथा छोटी संख्या 35, वर्ग की निम्न सीमा एवं बड़ी संख्या 39, वर्ग की उच्च सीमा है।

वर्ग अन्तराल के प्रकार (Types of Class Interval)

दो तरीके हैं जिसके आधार पर आंकड़ों को विभिन्न वर्गों में वर्गीकृत किया जा सकता है।

वे हैं— (1) समावेशी विधि एवं (2) अपवर्जी विधि।

- 1. समावेशी वर्ग अन्तराल अथवा श्रृंखला (Inclusive Class Interval):** समकों का विभिन्न वर्गों में इस प्रकार वर्गीकृत किये जाये कि प्रत्येक वर्ग की दोनों, निम्न एवं उच्च सीमा उसी वर्ग अन्तराल में ही सम्मिलित किये जायें तब वर्गीकरण की इस विधि को समावेशी विधि कहते हैं। यहाँ, आंकड़ों का वर्गीकरण इस प्रकार से किया जाता है कि किसी वर्ग की ऊपरी सीमा अगले वर्ग के निम्न सीमा के बराबर न हो। उदाहरण के लिए, एक कक्षा में छात्रों के प्राप्तांक को इस प्रकार वर्गीकृत किया गया है, 0–9, 10–19, 20–29, ... जहाँ, वर्ग अन्तराल 0–9, में 0 से 9 तक सभी मानों को (दोनों समावेशी) सम्मिलित करता है। वर्ग अन्तराल 10–19, में 10 से 19 तक के सभी मानों को सम्मिलित करता है, और इसी प्रकार अन्य भी किया जा सकता है। इस प्रकार, कुछ क्षण के लिए, यदि कोई छात्र 10 अंक अर्जित करता है, तब उसे 10–19 वाले वर्ग में सम्मिलित किया जायेगा।
- 2. अपवर्जी वर्ग-अन्तराल अथवा श्रृंखला (Exclusive Class Interval):** जब आंकड़ों का वर्गीकरण इस प्रकार से किया जाय कि किसी वर्ग की उपरी सीमा, अगले वर्ग की निम्न सीमा बन जाय तब इसे अपवर्जी विधि कहते हैं। यहाँ, यह समझ लेना चाहिए कि वर्ग की उच्च व ऊपरी सीमा उस वर्ग अन्तराल से निकाल व अपवर्जित करके दूसरे वर्ग में सम्मिलित कर दिया जाता है जिसका निम्न सीमा पहले के उच्च सीमा के बराबर है। उदाहरण के लिए, यदि किसी कक्षा के छात्रों के प्राप्तांक इस प्रकार हैं, 0–10, 10–20, 20–30, ... तब वर्ग अन्तराल 0–10, 0 या इसके बराबर तथा 10 से कम वाले सभी मानों को इस वर्ग अन्तराल में सम्मिलित किया जायेगा। वर्ग अन्तराल 10–20, सभी मानों को इसमें सम्मिलित करेंगे जो 10 के बराबर हो पर 20 से कम हो और इसी प्रकार अन्य में भी। इस प्रकार, यदि एक छात्र परीक्षा में 10 अंक अर्जित करता है तो उसे 10–20 वाले वर्ग अन्तराल में सम्मिलित किया जायेगा है।

वर्ग आकार या चौड़ाई (Class Size or width)

किसी वर्ग सीमा के वर्ग अन्तराल की उच्चतम एवं न्यूनतम वर्ग के बीच अन्तर को वर्ग आकार या चौड़ाई कहते हैं। उपरोक्त सारणी 3.4 में सभी वर्ग अन्तराल बराबर आकार के हैं। वास्तव में, वर्ग आकार 4 है।

वर्ग आवृत्ति (Class Frequency)

किसी वर्ग विशेष में आने वाली सभी अवलोकनों की संख्या को ही वर्ग आवृत्ति कहते हैं, जिसे अंग्रेजी के अक्षर 'f' से इंगित किया जाता है। वर्ग आवृत्ति को अंश या भाग, या कुल आवृत्ति के प्रतिशत के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है। ऐसे वर्ग आवृत्ति को हम सापेक्षिक वर्ग

आवृत्ति के नाम से जान सकते हैं। एक सापेक्षिक वर्ग आवृत्ति वितरण, आवृत्तियों को अंश या प्रतिशत में व्यक्त करता है। सापेक्षिक वर्ग आवृत्ति सारणी 3.5 में दिखलाया गया है।

सारणी 3.5: सापेक्षिक आवृत्ति वितरण

वर्ग अन्तराल	वर्ग सीमा	वर्ग चिन्ह (मध्य-बिन्दु)	आवृत्ति	सापेक्ष आवृत्ति
30-34	29.5-34.5	32	3	3/60
35-39	34.5-39.5	37	5	5/60
40-44	39.5-44.5	42	12	12/60
45-49	44.5-49.5	47	18	18/60
50-54	49.5-54.5	52	14	14/60
55-59	54.5-59.5	57	6	6/60
60-64	59.5-64.5	62	2	2/60

वर्ग चिन्ह (मध्य बिन्दु)

किसी वर्ग सीमा या वर्ग अन्तराल के मध्यम मान को ही मध्य बिन्दु कहते हैं।
इस प्रकार,

$$\text{मध्य बिन्दु} = \frac{\text{वर्ग की निम्न सीमा} + \text{वर्ग की उच्च सीमा}}{2}$$

सारणी 3.5 में दिये गये वर्गों के लिए क्रमशः 32, 37, 42, 47, 52, 57 एवं 62 वर्ग चिन्ह या मध्य बिन्दु है।

नोट

यह ध्यान देना चाहिए कि मध्य बिन्दु का प्रयोग वर्ग के प्रतिनिधित्व मान के रूप में किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए, सारणी 3.5 में, वर्ग अन्तराल 30-34 के लिए मध्य बिन्दु 32 है जो उस वर्ग के सभी संख्याओं का प्रतिनिधित्व करता है।

खुले सिरे वाले वर्ग अन्तराल

कोई भी वर्ग अन्तराल जिसका कोई निश्चित उच्च सीमा या निम्न सीमा नहीं दी गई हो, खुले सिरे वाले वर्ग अन्तराल कहलाते हैं।

उदाहरण के लिए, वर्ग जैसे 10,00 से कम वेतन, 65 वर्ष से अधिक आयु, 10 से कम प्राप्तांक इत्यादि, ये सभी खुले सिरे वाले वर्ग हैं जिनके वर्ग सीमा निर्धारित नहीं हैं।

संचयी आवृत्ति वितरण

संचयी आवृत्ति वितरण के दो प्रकार होते हैं (1) “से कम” संचयी आवृत्ति वितरण एवं

(2) “से अधिक” संचयी आवृत्ति वितरण

(1) “से कम” संचयी आवृत्ति: वैसे अवलोकन की संख्या जो उस वर्ग की उच्च सीमा से निर्धारित होती है, से कम संचयी आवृत्ति कहलाती है।

(2) “से अधिक” संचयी आवृत्तियाँ: जब अवलोकनों की संख्या वर्ग अन्तराल के निम्न सीमा से अधिक के रूप में जोड़े जाते हैं तो उसे “से अधिक” संचयी आवृत्ति कहते हैं।

ऐसे सारणी जिसमें संचयी आवृत्तियाँ सूचीबद्ध की जाती हैं, संचयी आवृत्ति वितरण सारणी कहलाती है। सारणी 3.4 में दिये गये संमकों को सारणी 3.6 में संचयी आवृत्ति वितरण के रूप में दिया गया है।

सारणी 3.6: संचयी आवृत्ति वितरण

वर्ग अन्तराल	वर्ग सीमा	मध्य बिन्दु	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति (से कम)	संचयी आवृत्ति (से अधिक)
30–34	29.5-34.5	32	3	3	60
35–39	34.5-39.5	37	5	3+5=8	60 – 3 = 57
40–44	39.5-44.5	42	12	8+12=20	57 – 5 = 52
45–49	44.5-49.5	47	18	20+18=38	52 – 12 =40
50–54	49.5-54.5	52	14	38+14=52	40 – 18 =22
55–59	54.5-59.5	57	6	52+6=58	22 – 14 =8
60–64	59.5-64.5	62	2	58+2=60	8 – 6 = 2

3.4.1 सतत् आवृत्ति वितरण का निर्माण

अब हम सतत् श्रेणी के निर्माण के प्रक्रियाओं की रूपरेखा तैयार करेंगे।

चरण 1. वर्ग संख्या का निर्धारण: सतत् आवृत्ति वितरण के निर्माण में पहला [कदम/चरण](#) होता है कि उन वर्गों की संख्या निर्धारित किया जाय जिनका हमें समूहीकरण करना है। वर्गों की संख्या कितनी होगी इसके बदले में कोई स्पष्ट नियम नहीं है लेकिन सामान्यतया, वर्गों की संख्या न्यूनतम 5 से अधिकतम 18 के बीच बदलते रहते हैं। वास्तव में, वर्गों की संख्या, समंक बिन्दु की संख्या एवं संकलित समंकों के विस्तार पर निर्भर करता है। कुछ सांख्यिकीविद् वर्गों की आवश्यक संख्या को निर्धारित करने के लिए ‘**Sturges’ Rule** या **स्टर्जज नियम**, का प्रयोग करते हैं।

$$K = 1 + 3.3 \log 10^n$$

जहाँ, K = आवश्यक वर्ग संख्या है।

n = दिये गये समंक श्रेणी में अवलोकनों की संख्या।

यह बताना भी आवश्यक होगा कि वर्गों का चयन इस प्रकार से हो ताकि निम्नलिखित नियमों का पालन हो सके।

(1) सभी छोटे से बड़े अवलोकनों को निम्न से उच्च वर्ग में सम्मिलित किया जाना चाहिए।

(2) प्रत्येक पद मूल्य के लिए केवल एक और एक ही वर्ग होना चाहिए।

चरण 2. प्रत्येक वर्ग के लिए अन्तराल या आकार निर्धारित करना: एक बार वर्गों की संख्या निर्धारित हो गई तो अगले चरण में हमें यह तय करना होता है कि वर्ग अन्तराल या चौड़ाई क्या होगी। व्यावहार में, यह वांछित होता है कि सभी वर्ग के लिए वर्ग की चौड़ाई या अन्तराल सामान्य व बराबर हो। यदि वर्ग असामान्य अथवा बराबर न हो एवं अन्तराल भी अलग हो, तब हमें इसके निर्वचन में एक सामान्य वर्ग अन्तराल वाले वर्ग के तुलना में ज्यादा कठिनाई का सामना करना पड़ेगा। सामान्यतया कहा जाता है कि यदि समंक माला के न्यूनतम पद मूल्य को उच्चतम पद मूल्य से घटा दिया जाये और उसे वर्गों की संख्या से विभाजित किया जाये तो लगभग प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई या वर्ग अन्तराल प्राप्त हो सकता है। अर्थात्,

$$\begin{aligned} \text{वर्ग अन्तराल} &= \frac{\text{अधिकतम पद मूल्य} - \text{न्यूनतम पद मूल्य}}{\text{वर्गों की कुल संख्या}} \\ &= \frac{\text{विस्तार}}{\text{वर्गों की कुल संख्या}} \end{aligned}$$

चरण 3. प्रत्येक वर्ग की आवृत्ति का निर्धारण: अन्त में, प्रत्येक वर्ग में आने वाले अवलोकनों की गिनती करे एवं उचित संख्या को आवृत्ति स्तंभ में लिपिबद्ध करें। प्रत्येक वर्ग के आवृत्ति को प्राप्त करने के लिए ‘**मिलान चिन्ह**’ के प्रयोग के लिए सुझाव दिया जा सकता है। ये तीन चरण हमें समंकों को सारणी एवं चित्रमय रूप से प्रस्तुत करने के बेहतर उपाय सुझाती है।

उदाहरण: निम्नलिखित आंकड़े 50 छात्रों के द्वारा किसी परीक्षा में अर्जित अंक को प्रदर्शित करता है।

29 28 16 23 22 10 8 15 16 23
 29 29 22 15 24 9 5 4 15 24
 21 24 16 14 21 13 6 2 23 22
 24 21 27 13 20 8 4 3 24 20
 22 18 23 23 17 7 6 1 16 17

उपरोक्त समंकों का प्रयोग करके आवृत्ति वितरण सारणी बनाएं।

हल: सबसे पहले हम वर्गों की संख्या तय करेंगे जिसमें ये आंकड़े व्यवस्थित करने हैं। माना कि हम 6 वर्ग अन्तराल रखते हैं। वर्ग अन्तराल व आकार को निर्धारित करने के लिए वर्गों की संख्या से (अधिकतम पद मूल्य 29 एवं न्यूनतम पद मूल्य 1) परासर व विस्तार को विभाजित करते हैं।

विस्तार = अधिकतम मूल्य— न्यूनतम मूल्य = 29-1= 28

वर्ग अन्तराल = $\frac{\text{विस्तार}}{\text{वर्गों की संख्या}}$

$$= \frac{28}{6} = 4.67 \text{ या दशमलव को लगभग 5 के बराबर।}$$

सारणी 3.7

वर्ग अन्तराल	आवृत्ति
1—5	6
6—10	7
11—15	7
16—20	8
21—25	17
26—30	5

इस प्रकार प्रत्येक वर्ग के लिए वर्ग आकार व अन्तराल 5 है। प्रथम वर्ग 1—5 के रूप में लेते हुए मिलान चिन्ह की मदद से आवृत्ति वितरण सारणी का निर्माण कर सकते हैं जैसा कि ऊपर सारणी 3.7 में दिखाया गया है।

3.5 चित्र/बिन्दुरेख

चित्र एवं बिन्दुरेख समंकों के प्रस्तुतीकरण के लिए एक बहुत ही रोचक, प्रभावी एवं आकर्षक विधि है। कोई उत्पादक एवं व्यवसायी क्यों अपने वस्तु एवं सेवा तथा उनके निष्पादन को दैनिक सामाचार पत्र, पत्रिकाएँ, जर्नल आदि में चित्र के माध्यम से प्रस्तुत करें। चित्र एवं बिन्दुरेख दृश्य प्रभाव डालते हैं। बिन्दुरेख समंक को रोचक रूप प्रदान करता है। वह पक्षियों के आंखों की तरह पूरे समस्या को एक ही नजर में देखकर समझने योग्य बनाता है। जब अंकों को लगातार देखने पर बोरिंग महसूस होता है। बिन्दुरेख चित्र इसे ज्यादा आकर्षक बना देता है। जैसे, किसी चलचित्र व सिनेमा की कहानी को पढ़ने के वजाए देखने में ज्यादा अनन्ददायक अनुभूति कराता है।

चित्र एवं बिन्दुरेख समंकों के तुलना के लिए काफी सहायक होते हैं।

3.5.1 बिन्दुरेख एवं चित्र के प्रकार

1. दण्ड चित्र/बिन्दुरेख
2. आयताकार एवं वर्गाकार चित्र/बिन्दुरेख
3. चित्र एवं मानचित्र
4. वृत्त चित्र

1. दण्ड चित्र

दण्ड चित्र एक बहुत ज्यादा उपयोग किया जाने वाला चित्र है। इन्हें दण्ड चित्र कहा जाता है क्योंकि इनकी रचना दण्ड या मोटे रेखाओं से किया जाता है। इनकी चौड़ाई सामान्य रूप से आकर्षित करती है। दण्ड चित्र में केवल लम्बाई या ऊंचाई के ही सांख्यिकीय मूल्य दिये जाते हैं।

दण्ड चित्र को ज्यादा पसन्द किया जाता है क्योंकि यह बनाने में बहुत सरल एवं आसान होता है। इसे सामान्य व्यक्ति भी आसानी से समझ सकते हैं। कभी-कभी दण्ड के जगह केवल रेखाएँ ही बना ली जाती है क्योंकि इससे कम स्थान में ज्यादा से ज्यादा आंकड़ों को चित्र में सम्मिलित किया जा सके।

दण्ड चित्र बनाते समय निम्नलिखित बातों पर विशेष ध्यान दिया जाना चाहिए:

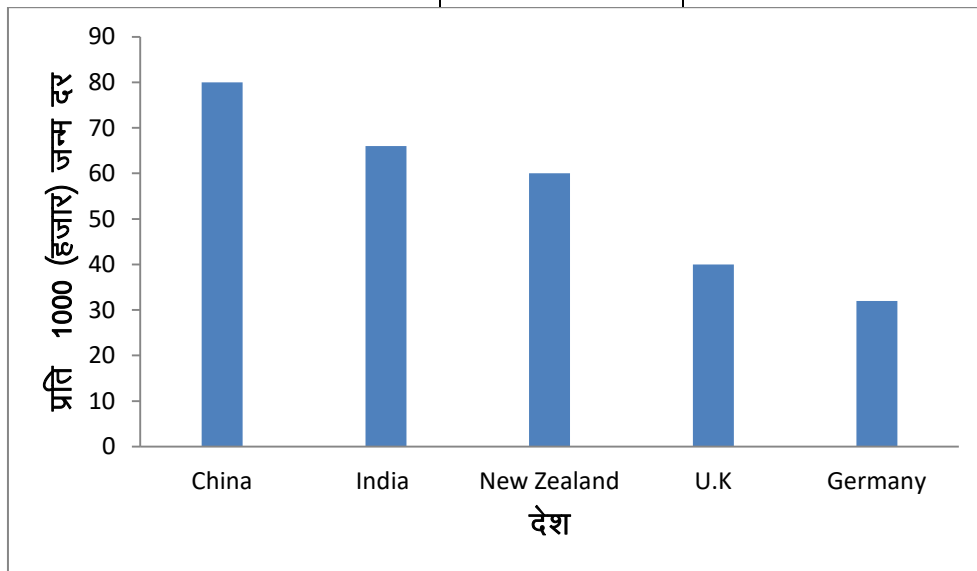
- (1) सभी दण्डों की चौड़ाई या मोटाई एक सामान होना चाहिए।
- (2) सभी दण्डों के बीच की दूरी बराबर रखनी चाहिए।
- (3) दण्ड रेखाएं क्षैतिज व ऊर्ध्वाधर किसी भी दिशा में हो सकते हैं परन्तु ऊर्ध्वाधर दण्ड चित्र को ज्यादा पसन्द किया जाता है।
- (4) सभी दण्डों को एक ही अक्ष या आधार रेखाओं में रखना चाहिए।
- (5) चित्र सदैव स्वच्छ एवं सुन्दर होना चाहिए।

विभिन्न प्रकार के दण्ड चित्रों के बारे में नीचे विस्तृत चर्चा की जा रही है।

(1) साधारण दण्ड/रेखा चित्र: साधारण दण्ड चित्र केवल एक चर को प्रदर्शित करता है। पूरे चित्र में दण्ड की चौड़ाई एक ही होती है केवल दण्ड की उंचाई या लम्बाई अवलोकनों के मूल्य या मान के अनुसार घटती या बढ़ती है। हम एक उदाहरण लेते हैं जिससे साधारण दण्ड चित्र का निर्माण करते हैं।

उदाहरण: विभिन्न देशों में प्रति हजार जन्म दर निम्नलिखित है।

देश	जन्म दर	देश	जन्म दर
चीन	80	यूनाईटेड किंगडम	40
भारत	66	जर्मनी	32
न्यूजीलैंड	60		



(2) बहु दण्ड चित्र: बहु दण्ड चित्र दो या दो से अधिक संबंधित चरों को निरूपित करने के लिए प्रयोग किया जाता है। अलग दण्ड, अलग विशेषताओं को प्रदर्शित करता है। विभिन्न प्रकार के छाया, रंग, रेखा, तीर्थक या चिन्हों का प्रयोग करके अलग विशेषताओं को निरूपित किया जा सकता है।

उदाहरण: निम्नलिखित सारणी 1981 से 2011 तक ग्रामीण-शहरी जनसंख्या अनुपात को प्रतिशत में दिया गया है।

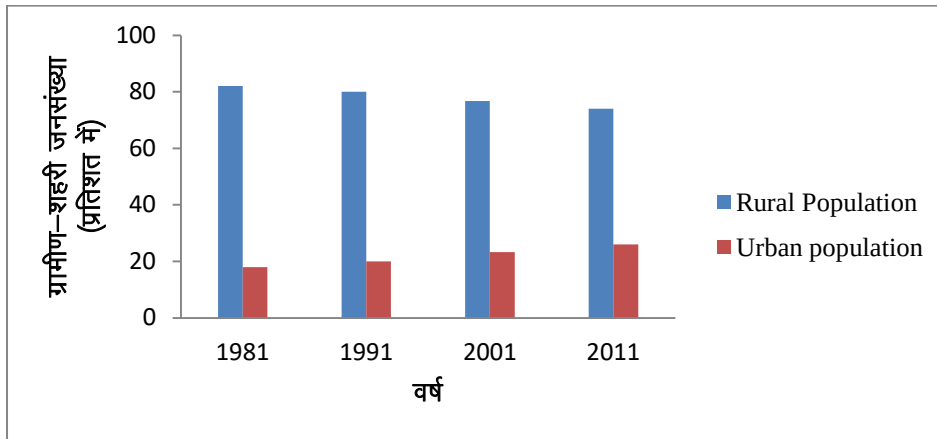
ग्रामीण-शहरी जनसंख्या (प्रतिशत में) 1981-2011

वर्ष	ग्रामीण जनसंख्या	शहरी जनसंख्या
1981	82.0	18.0
1991	80.0	20.0

2001
2011

76.7
74.0

23.3
26.0

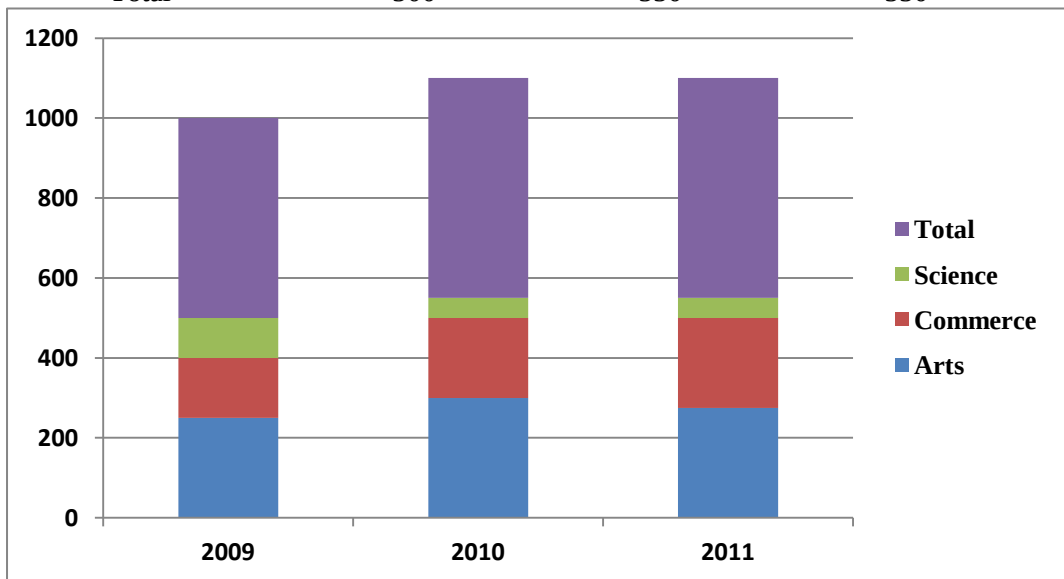


(3) **अन्तर-विभक्त दण्ड चित्र:** अन्तर-विभक्त दण्ड चित्र में, एक चर के मूल्य को एक दण्ड चित्र से दिखाया जाता है और बाद में चर के विभिन्न मदों के अनुपात में इसे विभक्त कर दिया जाता है। अन्तर-विभक्त दण्ड चित्र का प्रयोग सीमित है अर्थात् इसका प्रयोग वहाँ होता है जहाँ चरों की संख्या अपेक्षाकृत कम हो और उसके विभिन्न संघटकों को ही प्रदर्शित करना हो। यदि मदों की संख्या अधिक होगी तो दण्ड चित्र कई सूचनाओं से ज्यादा भारित होगी, और सूचनाओं के खींचड़ी से दण्ड चित्र बोझिल व दुखदायी प्रतीत होगी।

उदाहरण: निम्नलिखित सारणी एक महाविद्यालय के विभिन्न संकायों में वर्ष 2009, 2010 एवं 2011 की लिए छात्रों की संख्या दी हुई है। संमकों को अन्तर विभक्त दण्ड चित्र से प्रस्तुत करें।

संकाय अनुसार छात्रों का वितरण

Faculty	2009	2010	2011
Arts	250	300	275
Commerce	150	200	225
Science	100	50	50
Total	500	550	550

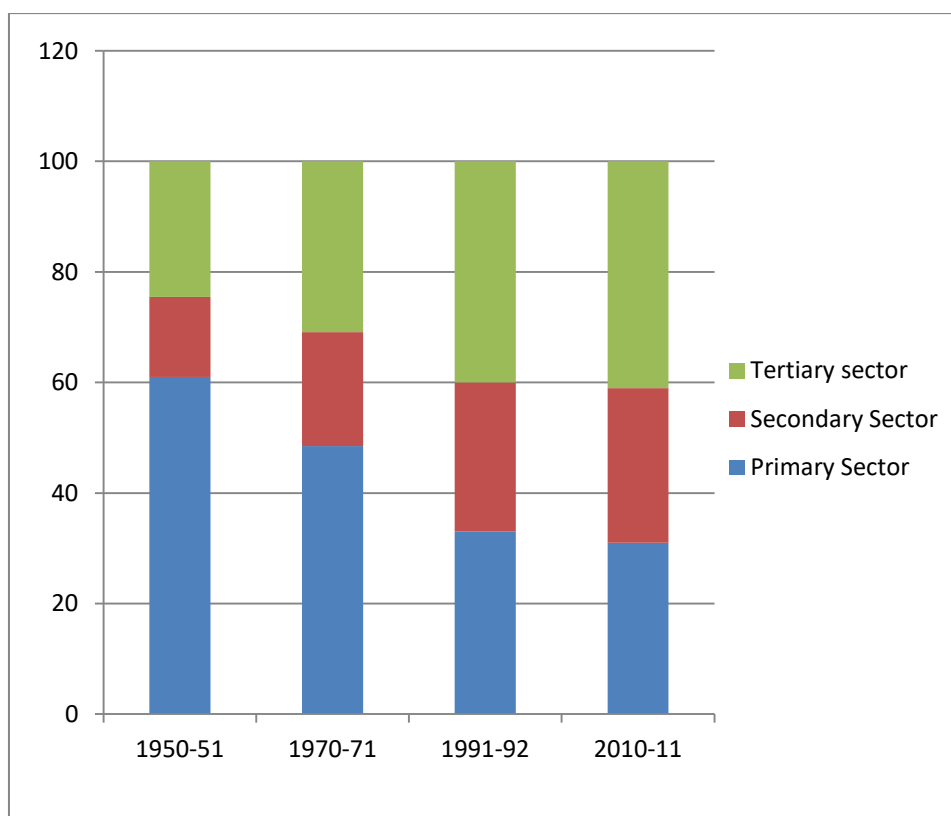


5. **प्रतिशत दण्ड चित्र:** प्रतिशत दण्ड चित्र तैयार करने के लिए दण्ड की लम्बाई को 100 के बराबर रखते हैं। तब विभिन्न मदों के प्रतिशत हिस्सों को विभिन्न उपखण्डों में प्रस्तुत किया जाता है। प्रतिशत दण्ड चित्र का प्रयोग उस स्थिति में ज्यादा उपयोगी होता है जहाँ विभिन्न संघटकों में बृहत विचलन

पाया जाता है। इस प्रकार के चित्रों की लम्बाई तय कर ली जाती है जो एक मानक स्तर तक हो सकती है अर्थात् 100 के बराबर होता है। यह चित्र समंकों के सापेक्षिक परिवर्तन को दिखाने के लिए उपयोगी होता है।

उदाहरण: निम्नलिखित सारणी 1950-51 से 2010-11 तक राष्ट्रीय आय में विभिन्न क्षेत्रों का योगदान को दिखलाया गया है। इन आंकड़ों को प्रतिशत दण्ड चित्र से प्रस्तुत कीजिए।

वर्ष	प्राथमिक क्षेत्र	द्वितीय क्षेत्र	तृतीय क्षेत्र
1950-51	61	14.5	24.5
1970-71	48.5	20.6	30.9
1991-92	33.0	27.0	40.0
2010-11	31.0	28.0	41.0



वृत्त चित्र (Pie Diagram)

वृत्त चित्र का प्रयोग गहनता से सरकार के वार्षिक बजट संबंधी मदों को प्रतिशत तथा कोणों (**angles**) में दिखाया जाता है, सरकार के विभिन्न व्ययों को, सरकार को प्राप्त होने वाले राजस्व के स्रोत, देश के आयात एवं निर्यात में विभिन्न मदों का हिस्सा आदि को दिखलाने के लिए वृत्त चित्र का प्रयोग किया जाता है।

वृत्त चित्र बनाने के लिए निम्नलिखित चरणों का पालन किया जाना चाहिए।

1. सभी संख्या या दिये गये पदों के योग ज्ञात करें।
2. समग्र के योग से प्रत्येक मद को हिस्से के अनुसार कोण में परिवर्तित करें।
3. वृत्त चित्र निर्माण करने के लिए निम्नलिखित विधि का प्रयोग करके समंक तैयार करें।

$$\text{विशिष्ट मद के लिए कोण} = \frac{\text{Particular Share} \times 360}{\text{Total}}$$

उदाहरण के लिए, माना कि एक संघटन का प्रतिशत हिस्सा 40% है, वृत्त में वृत्तखण्ड का क्षेत्र होगा,

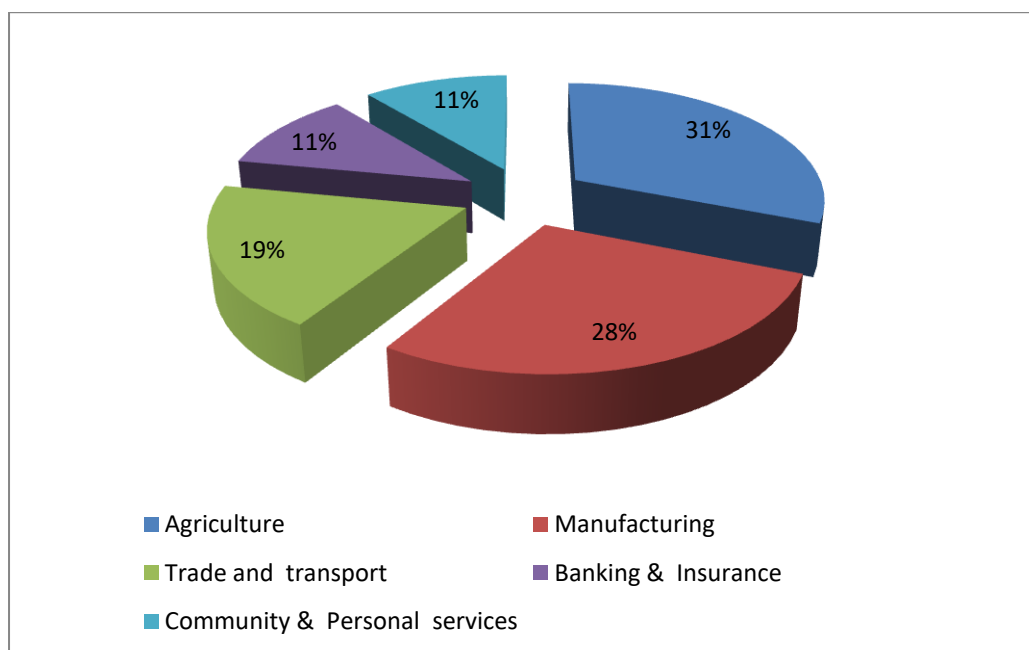
$$\text{कोण} = \frac{40 \times 360}{100} = 144^\circ$$

4. कम्पास के मदद से सामान्य आकार के एक वृत्त बनाएँ।
5. प्रोटेक्टर के सहायता से प्रत्येक संघटन व मद के लिए वांछित क्षेत्र को अंकित करें।

निम्नलिखित उदाहरण वृत्त चित्र की रचना को और स्पष्ट करती है।

उदाहरण: साधन लागत 1994-95 पर सकल घरेलू उत्पाद में विभिन्न क्षेत्रों के हिस्से का वितरण नीचे दिया गया है, इन समकों की सहायता से वृत्त चित्र की रचना करें।

क्षेत्र	प्रतिशत हिस्सा	वांछित कोण
कृषि	31	$31 \times 3.6 = 111.6$
निर्माण	28	$28 \times 3.6 = 100.8$
व्यापार एवं यातायात	19	$19 \times 3.6 = 68.4$
बैंकिंग एवं बीमा	11	$11 \times 3.6 = 39.6$
सामूदायिक एवं व्यक्तिगत सेवा	11	$11 \times 3.6 = 39.6$
कुल योग	100	360



वृत्त चित्र उस स्थिति में ज्यादा उपयोगी होता है जहाँ संघटकों या मदों की संख्या 5 से 6 या 7 से कम हो। यदि मदों की संख्या अधिक हो या वृत्त के भाग बहुत अधिक हो अर्थात् 10 या 12 या अधिक हो, तब वृत्त चित्र में कई छोटा छोटा भाग हो जायेगा। ऐसे में विभिन्न भागों को अलग करना लगभग कठिन हो जाता है। इस प्रकार वृत्त चित्र की सूनंदरता एवं इसके फायदे नहीं मिल पाते हैं।

पिक्चो ग्राफ या चित्रलेख

चित्रलेख, श्रेणी को उसके वास्तविक चित्र के रूप में सांकेतिक एवं व्यवस्थित तरीके से प्रस्तुत करती है। जैसा कि हम जानते हैं कि चित्र रोचक, आकर्षक एवं समझने में आसान होते हैं, वे आम व्यक्तियों के लिए समंकों को बहुत ही उपयोगी तरीके से प्रस्तुत करता है।

चित्रलेख बनाते समय निम्नलिखित बिन्दुओं पर अत्याधिक ध्यान दिया जाना चाहिए।

1. जो संकेत चित्रलेख के लिए प्रयोग किये जा रहें हैं वो समंक का प्रतिनिधित्व करता है। संकेत स्वयं व्याख्यात्मक होना चाहिए। उदाहरण के लिए, देश में बढ़ती हुई मोटर कार की संख्या को कार के चित्र से ही निरूपित किया जाना चाहिए।
2. संकेत निश्चित रूप से स्पष्ट, संक्षेप एवं आकर्षक होना चाहिए।
3. अलग-अलग संकेतों के द्वारा चित्रलेख को चिन्हित किया जाना चाहिए।
4. चित्रलेख सरल, स्वच्छ एवं अर्थपूर्ण होना चाहिए।
5. चित्रलेख एक उचित आकार का होना चाहिए।
6. समंक में वृद्धि या कमी पर संकेतों के संख्याओं में भी वृद्धि या कमी होना चाहिए।
7. समंक का पैमाना अर्थात् क्या और कितनी मात्रा में प्रस्तुत करनी है इसका वर्णन किया जाना चाहिए।

2. मानचित्र (Carto -Grams)

मानचित्र भौगोलिक स्थिति पर आधारित समंकों को प्रस्तुत करते हैं। विभिन्न प्रकार के समंकों को मानचित्र में छाया, बिन्दू, चित्रलेख, रंग आदि के द्वारा भौगोलिक इकाई या क्षेत्र से संबंधित आंकड़े प्रस्तुत किये जाते हैं।

3.6 आंकड़ों का बिन्दूरेखीय प्रदर्शन

बिन्दूरेखीय विधि या ग्राफ समंकों को आकर्षक एवं प्रभावी तरीके से प्रस्तुत करने का बहुत ही प्रचलित माध्यम है। निम्नलिखित तरीके से समंक को प्रस्तुत किया जा सकता है:

1. आवृत्ति आयत चित्र
2. आवृत्ति बहुभुज
3. तोरण या ओजाईव वक्र या संचयी आवृत्ति वक्र
4. काल श्रेणी बिन्दूरेख

3.6.1 आवृत्ति आयत चित्र

बिन्दूरेख विधि समंक प्रस्तुत करने का सबसे प्रभावी एवं सामान्य तरीका है। आवृत्ति आयत चित्र का निर्माण सामान्यतया सतत् श्रेणी के समंकों के लिए करते हैं। यह उर्ध्वाधर दिशा में होती है। दण्ड चित्र से भिन्न, आयत आवृत्ति चित्र में दण्डों के बीच कोई स्थान खाली नहीं होता है अर्थात् सभी आयत एक दूसरे से सटे होते हैं। दण्ड का क्षेत्रफल आवृत्ति के अनुपात में होती है। सतत् श्रेणी के आंकड़ों के वर्ग अन्तराल को सदैव आधार रेखा (X-अक्ष) में तथा संबंधित आवृत्तियों को लम्ब अक्ष (Y-अक्ष) में रखते हैं।

यह ध्यान रखना चाहिए कि दण्ड चित्र से भिन्न, आवृत्ति आयत चित्र के लम्बाई एवं चौड़ाई दोनों को ही समान महत्व देते हैं।

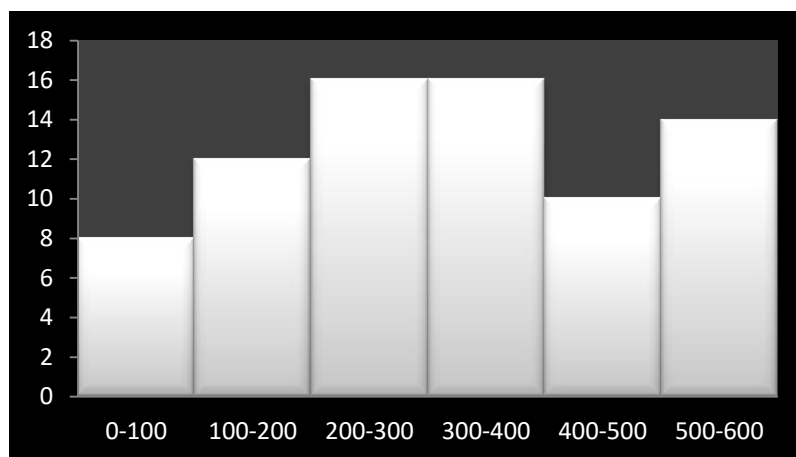
श्रेणी के प्रत्येक वर्ग के लिए, एक आयत की रचना की जाती है जिसकी चौड़ाई वर्ग अन्तराल एवं उंचाई आवृत्ति मूल्य के अनुसार होती है।

सामान वर्ग-अन्तराल के लिए आवृत्ति आयत चित्र

अर्थशास्त्र में प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
0-10	8
10-20	12
20-30	16
30-40	24

40-50
50-60

40
10

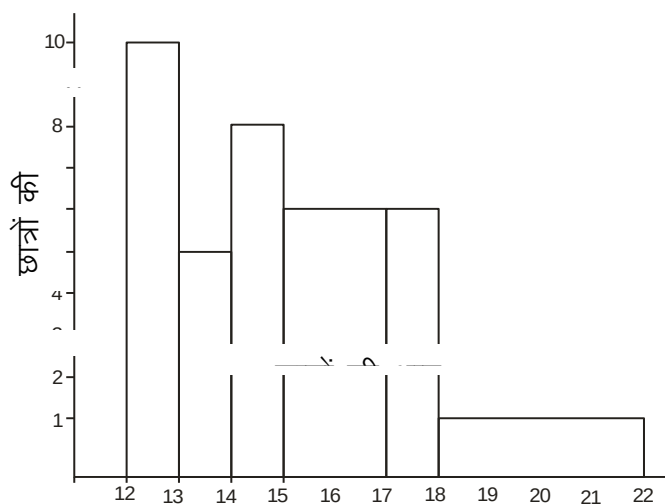


असमान वर्गान्तर के लिए आवृत्ति आयत चित्र: असमान वर्ग-अन्तराल के स्थिति में आवृत्तियों को सामायोजित किया जाता है। ऐसे वर्ग जिसका वर्ग अन्तराल न्यूनतम हो उसी को आधार मानकर आवृत्ति को सामायोजित करते हैं। सभी वर्ग के आवृत्तियों को न्यूनतम वर्ग अन्तराल के अनुसार सामायोजित किया जाना चाहिए।

निम्नलिखित विवरण असमान वर्ग अन्तराल से आवृत्ति आयत चित्र के निर्माण की प्रक्रिया को स्पष्ट करता है।

छात्रों के आयु (वर्षों में)	छात्रों की संख्या	सामायोजित आवृत्ति
12-13	10	10
13-14	5	5
14-15	8	8
15-17	12	6
17-18-	6	6
18-22	4	1

उपरोक्त स्थिति में, न्यूनतम वर्ग अन्तराल प्रथम वर्ग है। सभी वर्गों के आवृत्ति जिनका वर्ग अन्तराल एक से अधिक है उनको प्रथम वर्ग के अनुसार सामायोजित करें। चौथे वर्ग की वर्ग अन्तराल अर्थात् 15-17 का अन्तराल दो है, इसलिए इसके आवृत्ति को सामायोजित किया गया है। अन्तिम वर्ग के वर्ग-अन्तराल 18-22 में चार का अन्तर है इसलिए इसे भी सामायोजित करके एक कर दिया गया है।

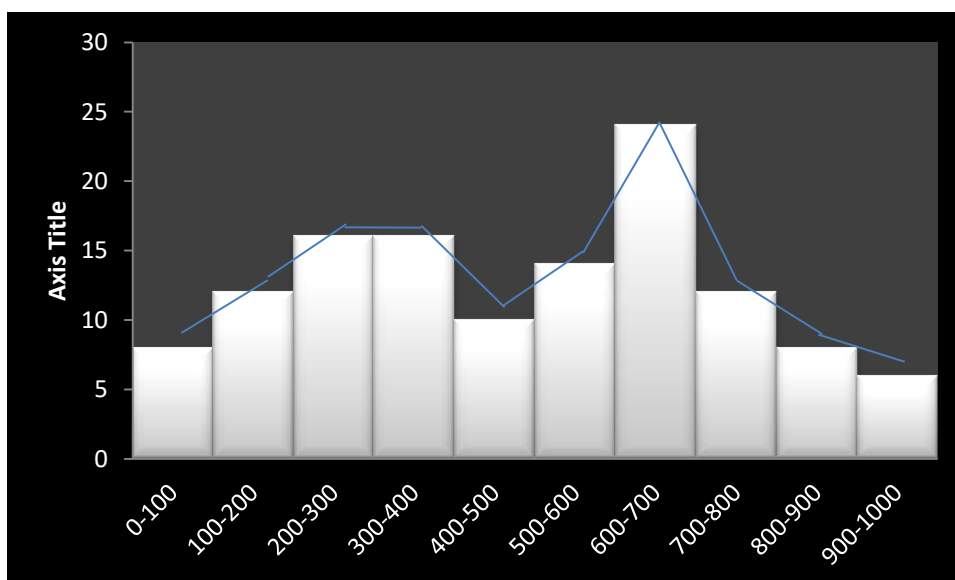


3.6.2 आवृत्ति बहुभुज

यह आवृत्ति वितरण को प्रस्तुत करने का दूसरा बिन्दुरेख विधि है। यह विभिन्न प्रकार के वितरणों के बीच तुलना करने के लिए उपयोगी तरीका है। आवृत्ति बहुभुज दो तरीकों से बनाये जा सकते हैं। एक तो सर्वप्रथम आयत चित्र का निर्माण करें फिर आयतों के मध्य बिन्दुओं को जोड़कर आवृत्ति बहुभुज का निर्माण कर सकते हैं। दूसरा, वर्ग अन्तराल के आवृत्ति की उंचाई के केवल मध्य बिन्दु को अंकित करके उसे मिलाने से प्राप्त चित्र ही आवृत्ति बहुभुज होगी।

उदाहरण: निम्नलिखित आंकड़ों से आवृत्ति बहुभुज की रचना करें।

म्जदूरी रुपये में	श्रमिकों की संख्या
0-100	8
100-200	12
200-300	16
300-400	16
400-500	10
500-600	14
600-700	24
700-800	12
800-900	8
900-1000	6



3.6.3 तोरण या संचयी आवृत्ति वक्र

ओजाईव या तोरण या संचयी आवृत्ति वक्र की रचना श्रेणी के सभी आवृत्तियों को जोड़कर की जा सकती है। जब श्रेणी के सभी आवृत्तियाँ जोड़ी जाती है तब इसे संचयी आवृत्ति कहते हैं। इन संचयी आवृत्तियों को ग्राफ पर अंकित करके तोरण वक्र की रचना की जा सकती है। तोरण वक्र की रचना निम्नलिखित विधियों से की जा सकती है:

1. 'से कम' संचयी आवृत्ति विधि
2. 'से अधिक' संचयी आवृत्ति विधि।

‘से कम’ विधि में, वर्ग की उच्च सीमा को लिखते हैं और उनके आवृत्तियों को जोड़ते हैं। ऐसा करने से हमें उपर उठती हुई ‘से कम’ संचयी आवृत्ति वक्र मिलेगी। ‘से अधिक’ विधि में वर्ग की निम्न सीमा लेते हैं। इस स्थिति में, हम कुल आवृत्ति से शुरू करके घटते हुए आवृत्ति की ओर बढ़ते हैं। इस प्रकार हम घटते हुए वक्र प्राप्त होता है।

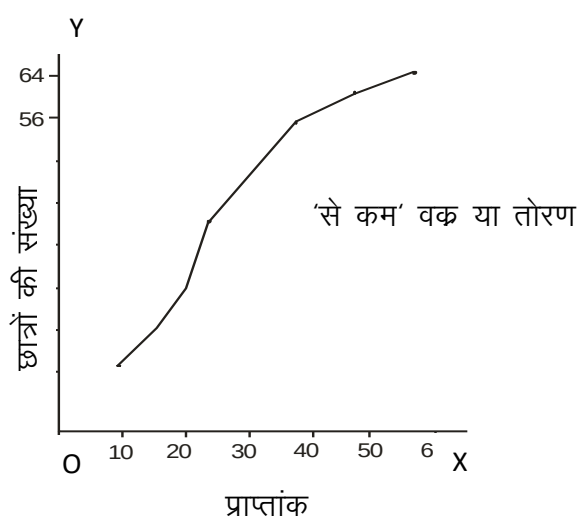
निम्नलिखित उदाहरण से तोरण वक्र की रचना को स्पष्ट किया जा सकता है।

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
0-10	10
10-20	14
20-30	16
30-40	12
40-50	8
50-60	4

सबसे पहले हम ‘से कम’ संचयी आवृत्ति वितरण तैयार करते हैं।

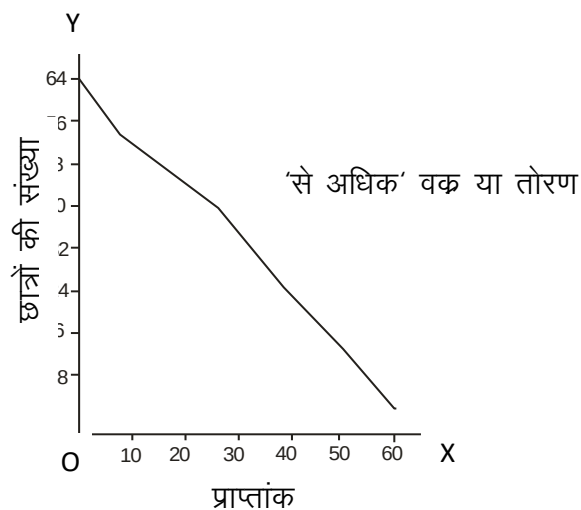
‘से कम’ संचयी आवृत्ति वितरण

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
10 से कम	10
20 से कम	24
30 से कम	40
40 से कम	52
50 से कम	60
60 से कम	64



‘से अधिक’ संचयी आवृत्ति वितरण

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
0 से अधिक	64
10 से अधिक	54
20 से अधिक	40
30 से अधिक	24
40 से अधिक	12
50 से अधिक	4



तोरण का प्रयोग (Uses of Ogive)

तोरण वक्र विशेष रूप से वहाँ ज्यादा उपयोगी सिद्ध होती हैं जब हम समंक के 'से कम' या 'से अधिक' प्रकार के चरों के संख्यात्मक या मात्रात्मक परिणाम को पसन्द करते हो। अर्थशास्त्र में ऐसे बहुत से उदाहरण हैं जहाँ हमें व्यक्तियों या मात्राओं के किसी दिये गये इकाई की सीमा 'से कम' या 'से अधिक' प्रकार की विशेषताओं की आवश्यकता होती है। जैसे कितने विद्यार्थी 60 से अधिक या कम अंक अर्जित किये हैं, कितने लोग निर्धनता रेखा से नीचे हैं इत्यादि का ग्राफ में अंकित करके तोरण वक्र बना सकते हैं।

किसी दिये गये मूल्य के लिए से कम या से अधिक बिन्दु को निर्धारित करने के लिए ओजार्इव वक्र का प्रयोग महत्वपूर्ण हैं।

दो या अधिक श्रेणीयों के आवृत्ति वितरणों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए यह ज्यादा उपयोगी है। तोरण वक्र कई स्थानिक मानों को बिन्दुरेख विधि से ज्ञात करने के लिए सहायक होते हैं। माध्यिका, चतुर्थक, दशमक एवं शतमक आदि का निर्धारण तोरण वक्र के माध्यम से किया जा सकता है।

3.7 काल श्रेणी विन्दुरेख

जब समंक किसी दिये गये समय विन्दू या समय अवधि के निश्चित अन्तराल में हो तो उसे काल श्रेणी विन्दुरेख कहते हैं। काल श्रेणी विन्दुरेख का प्रयोग चर मूल्यों में दिये गये समय अवधियों या अन्तराल में परिवर्तन की स्थिति को प्रदर्शित करने के लिए करते हैं। इस प्रकार के ग्राफ में काल श्रेणी व समय अन्तराल को सदैव आधार रेखा (X-अक्ष) तथा चर मूल्यों को उर्ध्वाधर रेखा (Y-अक्ष) पर अंकित किये जाते हैं। काल श्रेणी ग्राफ समझने एवं बनाने में बहुत आसान होता है। इसके बावजूद, इस पकर के ग्राफ का प्रयोग गलत तरीके से किया जा सकता है क्योंकि इसमें लोचशीलता व्याप्त होते हैं। समंक प्रस्तुतीकरण के अन्य विधियों की तुलना में इस विधि का प्रयोग करके, विभिन्न सामाजिक-आर्थिक चरों में परिवर्तनों को दैनिक सामाचार पत्र, पत्रिकाओं एवं अन्य मुद्रित माध्यम से सूचना प्रदान की जाती है।

काल श्रेणी ग्राफ की रचना दो पैमाने से किया जा सकता है।

1. प्राकृतिक पैमाना या गणीतीय पैमाने
2. लघुगणकीय पैमाने

इस अध्याय में जो ग्राफ प्रयोग किये गये हैं वा प्राकृतिक या गणीतीय पैमानों पर आधारित हैं क्योंकि लघुगणकीय काल श्रेणी इस पाठ्यचर्या का हिस्सा नहीं है।

काल श्रेणी ग्राफ बनाने के सामान्य नियम

काल श्रेणी के निर्माण के समय निम्नलिखित सामान्य नियमों का पालन अवश्य रूप से करनी चाहिए।

1. समय कारक को सदैव आधार रेखा (X-अक्ष) तथा चर मूल्यों को उर्ध्वाधर रेखा (Y-अक्ष) पर अंकित करना चाहिए।

2. उर्ध्वाधर रेखा (Y-अक्ष) के लिए उचित पैमाने का प्रयोग किया जाना चाहिए जो चरों से संबंधित पूर्ण सूचनाएं इंगित हो सके। उर्ध्वाधर रेखा (Y-अक्ष) पर लिए गये चरों के मान पूरे बिन्दुरेख में सामान्य दूरी पर अवस्थित होना चाहिए। दूसरे शब्दों में, पैमाने के प्रयोग में संगतता होनी चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि एक सेंटीमीटर के बराबर 100 चर मूल्य का पैमाना लिया गया हो तब पूरे ग्राफ के विश्लेषण में यह सामान्य होना चाहिए।
3. प्रत्येक समय बिन्दू के लिए संगत चर मूल्यों के लिए ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं को अंकित करके सीधी रेखा से केवल मिला देना चाहिए।
4. यदि एक ही ग्राफ के एक ही समय बिन्दू से संबंधित एक से अधिक चर मूल्यों को प्रदर्शित करना हो तब अलग-2 बनावट या रंग की रेखाओं का प्रयोग किया जाना चाहिए ताकि रेखाओं में आसानी से भेद किया जा सके। यदि अलग-अलग रंग के रेखाएं बनाने में कठिनाई हो तो रेखाओं के विभिन्न प्रकारों का प्रयोग किया जाना चाहिए। मोटे या पतले या छोटे बिन्दू वाले रेखाओं का प्रयोग करके ऐसे भिन्न रेखाएँ बनाई जा सकती हैं।
5. मापक की इकाईयाँ, दोनों ही समय कारक, साथ ही साथ चर मूल्य दोनों की इकाईयाँ स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाना चाहिए एवं इस पैमाने को एक तरफ लिख देना चाहिए। यथा संभव चरों के माप की इकाई जिसे प्रायः उर्ध्वाधर रेखा (Y-अक्ष) पर लिये जाते हैं, उन्हें क्षैतिज रूप में लिखना चाहिए।
6. यदि अधिकतम एवं न्यूनतम चर मूल्यों के बीच ज्यादा विचलन हो एवं शून्य से अधिक दूरी पर हो तब एक अभाषी आधार रेखा खींच लेना चाहिए।

आभाषी आधार रेखा

जैसा कि हमने काल श्रेणी बिन्दुरेख बनाने के सामान्य नियम में अध्ययन किया है कि उर्ध्वाधर रेखा (Y-अक्ष) शून्य से शुरू होता है। जबकि, यदि उर्ध्वाधर रेखा के चर मूल्य का न्यूनतम मूल्य बहुत अधिक या काफी उपर हो तब ऐसे में ग्राफ का आकार आसामान्य सा प्रतीत होता है। इसके कारण ग्राफ पेपर के बहुत से जगह बर्बाद होंगे।

3.8 इकाई का सारांश

बहुत से अधिक समकों को सारणी या समूह के रूप में सुविधापूर्ण प्रस्तुत करने का आवृत्ति वितरण एक बेहतर तरीका है। दो प्रकार के आवृत्ति वितरण होते हैं अर्थात् खण्डित एवं सतत आवृत्ति वितरण। चित्र के रूप में समकों को प्रस्तुत करने का सबसे बेहतर, आकर्षक एवं प्रभावी विधि है। यह एक रोचक रूप प्रदान करता है जिससे पाठक को पढ़ने में आनन्द एवं रुचि पैदा करती है। इसका विशेष दृश्य प्रभाव पड़ता है।

चित्रों के प्रकार

1. दण्ड चित्र
2. आयताकार एवं वर्ग चित्र
3. वृत्त चित्र
4. चित्रलेख एवं मानचित्र

बिन्दुरेख विधि से समंक को प्रस्तुत करना भी एक काफी चर्चित तरीका है जिसके माध्यम से सांख्यिकीय समंक को बहुत प्रभावी एवं आकर्षक तरीके से प्रस्तुत किया जा सकता है। आंकड़ों को बिन्दुरेख तरीके से प्रस्तुत करने के निम्नलिखित तरीके हैं:

1. आयत आवृत्ति चित्र
2. आवृत्ति बहुभुज
3. तोरण वक्र
4. काल श्रेणी

3.9 मुख्य शब्द

- **तोरण:** संचयी आवृत्ति वितरण की मदद से खींची गई रेखा को ही तोरण कहते हैं।

- **वृत्त चित्र:** जब एक वृत्त को श्रेणी में निहित आवृत्ति वितरण के अनुसार विभाजित किया जाय तब उसे वृत्त चित्र कहते हैं।
- **संचयी आवृत्ति वितरण:** एक समक्रमाला के समस्त वर्ग की आवृत्तियों का योग जो उच्चतम सीमा से कम हो संचयी आवृत्ति कहलाती है।

3.10 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(A) खाली स्थानों को भरें

1. विन्दूरेख सामान्यतया -----में खींचे जाते हैं जबकि चित्र का निर्माण सामान्यतया ----- में किया जाता है।
2. काल श्रेणी के विन्दूरेख को ----- कहते हैं जबकि, ग्राफ पेपर पर आवृत्ति वितरण को ----- कहते हैं।
3. आयत आवृत्ति चित्र एक ----- आवृत्ति ग्राफ है।

(B) बताएँ कौन गतल है और कौन सही

1. आवृत्ति वितरण समंक को संकेन्द्रीत करने में मदद करता है।
2. एक आवृत्ति वितरण एक से अधिक चर मूल्यों को सम्मिलित करता है।
3. एक आवृत्ति वितरण खण्डित के साथ ही साथ सतत् श्रेणी भी हो सकता है।

3.11 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

- (A) 1. ग्राफ पेपर, समतल पेपर, 2. आयत आवृत्ति चित्र, आयत चित्र, 3. असंचयी
(B) 1. सही, 2. गलत, 3. सही

3.12 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

1. आवृत्ति वितरण को पारिभाषित करें। सतत् आवृत्ति वितरण का निर्माण कैसे करते हैं?
2. चित्र एवं विन्दूरेख अन्तर स्वष्ट करें। विन्दूरेख के विभिन्न प्रकारों की विवेचना करें।

3.13 सन्दर्भ पुस्तकें

67. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
68. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
69. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
70. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
71. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
72. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
73. अवरस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
74. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
75. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
76. Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
77. R.P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India Ltd., Delhi, India.

खण्ड—III

इकाई 04

केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें (Measures of Central Tendency) औसत संरचना:

- 4.1 भूमिका
- 4.2 एक अच्छा औसत के अपेक्षित गुण
- 4.3 समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)
 - 4.3.1 व्यक्तिगत अवलोकनों से समान्तर माध्य का आकलन
 - 4.3.2 खण्डित अवलोकनों से समान्तर माध्य का आकलन
 - 4.3.3 सतत् अवलोकनों से समान्तर माध्य का आकलन
 - 4.3.4 समान्तर माध्य की विशेषताएँ
 - 4.3.5 समान्तर माध्य के गुण एवं सीमाएँ
 - 4.3.6 भारित सामानान्तर माध्य
- 4.4 माध्यिका (Median)
 - 4.4.1 व्यक्तिगत अवलोकन से माध्यिका की गणना
 - 4.4.2 खण्डित अवलोकन से माध्यिका की गणना
 - 4.4.3 सतत् अवलोकन से माध्यिका की गणना
 - 4.4.4 माध्यिका का चित्रमय स्थान
 - 4.4.5 माध्यिका के गुण एवं दोष
- 4.5 इकाई का सारांश
- 4.6 परिभाषिक शब्दावली
- 4.7 मुख्य शब्द
- 4.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 4.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 4.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 4.11 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप सक्षम होंगे:

- माध्य एवं माध्यिका शब्द के अर्थ को समझना
- एक आदर्श औसत के लिए जरूरी बातें
- विभिन्न विधियों की सहायता से सतत् एवं खण्डित श्रेणी में माध्य एवं माध्यिका की गणना
- माध्य एवं माध्यिका, दोनों के गुण एवं अवगुण का ज्ञान
- वास्तविक जगत के व्यवसायिक समस्याओं में माध्य एवं माध्यिका के प्रयोग को प्रोत्साहित करना

4.1 भूमिका

सारणी एवं चित्रमय प्रदर्शन समकों के बारे में सामान्य विवरण प्रस्तुत करता है। कुछ ऐसे सांख्यिकीय माप परिभाषित हैं, जो कुछ अर्थों में, ये आकड़ों के बिल्कुल में अवस्थित होते हैं इसलिए, इन्हें केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप कहते हैं। केन्द्रीय प्रवृत्ति के कुछ महत्वपूर्ण माप माध्य, माध्यिका, बहुलक, गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य आदि हैं।

औसत एक दिए गए आकड़ों के विस्तार के अधीन एकल मान अर्थात् यह समकों के श्रेणियों का प्रतिनिधित्व करता है। चूंकि, औसत किसी श्रेणी में समकों के मध्य में स्थित होता है, अतः इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप भी कहते हैं।

4.2 एक अच्छे औसत के आवश्यक शर्तें

चूंकि, औसत एकल मान राशि है जो पूरी श्रृंखला में अकेला होता है, ये वांछित है कि औसत निम्नलिखित विशेषताओं को आवश्यक रूप से पूरा करें:

1. **इसे सख्ती से परिभाषित किया जाना चाहिए:** एक औसत को सख्ती से परिभाषित किया जाना चाहिए ताकि इसका केवल एक ही निर्वचन किया जा सके।
2. **इसे समझने में आसानी एवं गणना करने में सामान्य होना चाहिए:** एक औसत को समझने में आसान तथा गणना में सरल होना चाहिए। हालांकि, यह अन्य लाभ की कीमत पर पूरा नहीं किया जाना चाहिए। उदाहरण, यदि अति शुद्ध परिणाम की जरूरत हो तो किसी अन्य कठिन औसत का प्रयोग किया जाना चाहिए।
3. **इसे सभी अवलोकनों पर आधारित होना चाहिए:** यह तार्किक है कि एक औसत, जिसके पूरे समूह के लिए एक मान हो, सभी अवलोकनों पर आधारित होना चाहिए।
4. **यह आगे बीजगणितीय व्यवहार करने योग्य होना चाहिए:** हमारे पास इस प्रकार औसत होना चाहिए कि उसकी उपयोगिता को बढ़ाने के लिए भविष्य में गणितीय व्यवहार किया जा सके। उदाहरण के लिए, यदि हमें एक औसत तथा संख्याओं के विभिन्न समूह दिये हों, तब हम उन समूह से संयुक्त औसत या माध्य निकाल सकें।
5. **इसे अनावश्यक रूप से चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होना चाहिए:** एक आदर्श औसत को श्रेणी में मौजूद किसी भी चरम विन्दुओं बहुत छोटी एवं बहुत बड़ी मूल्य से प्रभावित नहीं होना चाहिए।
6. **इनमें निदर्शन स्थिरता होनी चाहिए:** निदर्शन स्थिरता से तात्पर्य है कि यदि हम एक की आकार के विभिन्न दैव निदर्शन किसी समग्र से लें और औसत की गणना करें तब हमें लगभग वहीं औसत या उत्तर प्राप्त हो।

इसका अर्थ नहीं है कि, जैसे भी, पर अलग निदर्शन से प्राप्त औसत के मूल्य में अन्तर न हो।

4.3 समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य या साधारण औसत एक बहुचर्चित केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप है। इसी कारण से इसे सामान्य अर्थ में औसत या माध्य कहते हैं।

परिभाषा: अवलोकनों के समुच्च के समन्तर माध्य, सभी अवलोकनों के योग को अवलोकनों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त राशि के बराबर होता है।

उदाहरण के लिए, 5 अवलोकनों वाले समुच्च 14, 16, 19, 25 एवं 21 का समन्तर माध्य है,

$$\frac{14+16+19+25+21}{5} = \frac{95}{5} = 19$$

अतः अभीष्ट समन्तर माध्य 19 है।

4.3.1 व्यक्तिगत अवलोकनों या श्रेणी से समान्तर माध्य की गणना

N अवलोकनों के समुच्चय $X_1, X_2, \dots, X_n$ (जरूरी नहीं कि सभी अलग हों), के समान्तर माध्य को $\bar{X}$ से इंगित करते हैं।

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{N} = \frac{\sum X}{N}$$

समग्र का चिन्ह $\sum X$ को सामान्य चिन्ह $\sum_{i=1}^n X_i$ से लिया गया है। $\sum X$, छोटा रूप का प्रयोग उन समस्त अवलोकनों के योग के लिए करेंगे जिन्हें इसमें सम्मिलित किया गया है।

उदाहरण 1. दिये गये संख्याएँ 10 छात्रों के एक कक्षा में लिए गये जांच परीक्षा के प्राप्तांक हैं।

प्राप्तांक हैं : 12, 8, 17, 13, 15, 9, 18, 11, 6, 1, 11 समान्तर माध्य ज्ञात करें।

हल: समान्तर माध्य प्राप्त करने के लिए प्राप्तांकों के योग को छात्रों की संख्या से विभाजित किया जाए।

इस प्रकार,
$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{12+8+17+13+15+9+18+11+6+1}{11} = \frac{121}{11} = 11,$$

अतः अभीष्ट औसत प्राप्तांक 11 है।

लघु विधि: यदि दिये गये अवलोकन x का मान बहुत बड़ा हो, तब सामानान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए लघु विधि का प्रयोग करते हैं। लघु विधि से सामानान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित चरण होते हैं—

चरण 1. माना कि A कोई संख्या है, जिसे कल्पित माध्य कहते हैं। किसी भी एक संख्या को दिये गये श्रेणी में से कल्पित माध्य के रूप में चुना जा सकता है।

चरण 2. $d = x - A$, की गणना करें, जो X से A का विचलन है।

चरण 3. समान्तर माध्य का सूत्र इस प्रकार है,

$$\bar{X} = A + \frac{\sum d}{N}$$

उदाहरण 2. दिये गये समंक 7 छात्रों के उंचाई को सेन्टी मीटर में को दिखलाया गया है।

164, 159, 167, 169, 165, 170, 168

(क) प्रत्यक्ष विधि एवं (ख) लघु विधि से समान्तर माध्य ज्ञात करें।

हल:

समान्तर माध्य की गणना

क्रम संख्या	उंचाई (सेमी)	A=165 D=X-A
	X	
1	164	-1
2	159	-6
3	167	2
4	169	4

5	165	0
6	170	5
7	168	3
n=7	$\sum X = 1162$	$\sum d = 7$

(क) प्रत्यक्ष विधि: $\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{1162}{7} = 166cm.$

(ख) लघु विधि: $\bar{X} = A + \frac{\sum d}{N} = 165 + \frac{7}{7} = 165 + 1 = 166cm$

4.3.2 खण्डित श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना

खण्डित श्रेणी के अन्तर्गत, जहाँ चर X का मान $X_1, X_2, \dots, X_n$ है तथा इसके संगत आवृत्ति $f_1, f_2, \dots, f_n$ है। निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है।

(क) प्रत्यक्ष विधि, या
(ख) लघु विधि

प्रत्यक्ष विधि: इस विधि के अनुसार समान्तर माध्य इस प्रकार निकाले जा सकते हैं,

$$\bar{X} = \frac{f_1 X_1 + f_2 X_2 + \dots + f_n X_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{\sum fX}{N}$$

जहाँ, $N = \sum f =$ कुल आवृत्ति

लघु विधि: इस विधि के अनुसार सामान्तर माध्य इस प्रकार निकाले जा सकते हैं,

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

जहाँ, $A =$ कल्पित माध्य, $d = X - A$, एवं $N = \sum f$

उदाहरण 3. दिये गये खण्डित श्रेणी के समंकों से समान्तर माध्य ज्ञात करें।

X:	200,	300	400	500	600	700
F:	8	12	20	10	6	4

हल: समान्तर माध्य की गणना

$$\bar{X} = \frac{\sum fX}{\sum f} = \frac{24600}{60} = 410$$

X	f	fX
200	8	1600
300	12	3600
400	20	8000
500	10	5000
600	6	3600

700
कुल

$$N = \sum_{i=1}^4 f = 60$$

$$\sum fX = 24600$$

उदाहरण 4. नीचे दिये गये समंक एक उद्योग के 200 कर्मचारियों के दैनिक मजदूरी (रूपय में) है:

दैनिक मजदूरी (रूपय में): 100 140 170 200 250
कर्मचारियों की संख्या : 50 20 60 40 30
(क) प्रत्यक्ष विधि एवं (ख) लघु विधि से औसत दैनिक मजदूरी ज्ञात करें।

हल: समान्तर माध्य की गणना

दैनिक मजदूरी X	श्रमिकों की संख्या f	A=170 d=X-A	fd
100	50	-70	-3500
140	20	-30	-600
170	60	0	0
200	40	30	1200
250	30	80	2400
	$N = \sum f = 200$		- 500

(ख) लघु विधि: इस विधि के अनुसार दैनिक औसत मजदूरी है:

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{N} = 170 + \frac{-500}{200} = 170 - 2.5 = \text{Rs.} 167.50$$

अतः अभिष्ट औसत दैनिक मजदूरी 167.50 रुपये है।

4.3.3. सतत् श्रेणी में समान्तर माध्य की गणना

सतत् श्रेणी की स्थिति में, समान्तर माध्य ज्ञात करने के निम्नलिखित तरीकों का प्रयोग किया जा सकता है।

1. प्रत्यक्ष विधि
2. लघु विधि एवं
3. पद/चरण विचलन विधि

प्रत्यक्ष विधि: यदि $M_1, M_2, \dots, M_n$ श्रृंखला के मध्य-बिन्दु है, तथा $f_1, f_2, \dots, f_n$ संगत आवृत्तियाँ है तब इस विधि से समान्तर माध्य निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है,

$$\bar{X} = \frac{f_1 m_1 + f_2 m_2 + \dots + f_n m_n}{f_1 + f_2 + \dots + f_n} = \frac{\sum fm}{\sum f} = \frac{\sum fm}{N}$$

जहाँ, $N = \sum f$, आवृत्तियों के योग

$A =$ कल्पित माध्य, $d = m - A$, कल्पित माध्य का मध्य बिन्दु से विचलन,

लघु या अप्रत्यक्ष विधि: यदि $M_1, M_2, \dots, M_n$ श्रृंखला के मध्य-बिन्दु है, तथा $f_1, f_2, \dots, f_n$ संगत आवृत्तियाँ हैं एवं $A =$ कल्पित माध्य हो, तब इस विधि से समान्तर माध्य निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है,

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{N}$$

जहाँ, $N = \sum f$, आवृत्तियों के योग

A = कल्पित माध्य, $d = m - A$, कल्पित माध्य का मध्य बिन्दु से विचलन,

चरण विचलन विधि: सतत् आवृत्ति वितरण, जिसमें सभी वर्गों के वर्ग अन्तराल बराबर हो तब समान्तर माध्य निकालने के लिए एक सरलीकृत व्यंजक का प्रयोग कर सकते हैं,

$$d' = \frac{m - A}{C}$$

जहाँ, m मध्य बिन्दु, C वर्ग अन्तराल, A कल्पित माध्य है। इस विधि के अनुसार, समान्तर माध्य निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है,

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd'}{N} \times C$$

उदाहरण 5. निम्नलिखित समंको से समान्तर माध्य ज्ञात करें।

प्राप्तांक:	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	
	50-60					
छात्रों की संख्या:	5	7	8	14	10	6

हल: समान्तर माध्य की गणना

प्राप्तांक	मध्य बिन्दू x	छात्रों की संख्या f	xf
0-10	5	10	50
10-20	15	14	210
20-30	25	16	400
30-40	35	28	980
40-50	45	20	900
50-60	55	12	660
		$N = \sum f = 100$	$\sum xf = 3200$

प्रत्यक्ष विधि: समान्तर माध्य,

$$\bar{X} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{3200}{100} = 32$$

अतः अभीष्ट समान्तर माध्य 32 है।

अप्रत्यक्ष या लघु विधि से समान्तर माध्य की गणना

प्राप्तांक X	मध्य बिन्दू x	छात्रों की संख्या F	$A=35$ $(x-A)$ $= d'$	$C=10$ $d' = \frac{m-A}{C}$	fd	fd'
0-10	5	10	-30	-3	-300	-30
10-20	15	9	-20	-2	-180	-18
20-30	25	25	-10	-1	-250	-25
30-40	35	30	0	0	0	0
40-50	45	16	10	1	160	16
50-60	55	10	20	2	200	20
		$N = \sum f = 100$			$\sum fd = -370$	$\sum fd' = -37$

अप्रत्यक्ष या लघु विधि: समान्तर माध्य,

$$\bar{X} = A + \frac{\sum fd}{N} = 35 + \frac{-370}{100} = 35 - 3.70 = 31.30$$

पद या चरण विचलन विधि: समान्तर माध्य,

$$\begin{aligned}\bar{X} &= A + \frac{\sum fd'}{N} \times C = 35 + \frac{-37}{100} \times 10 \\ &= 35 - 3.70 = 31.30\end{aligned}$$

अतः प्रत्यक्ष, अप्रत्यक्ष या लघु विधि एवं पद या चरण विचलन विधि से प्राप्त समान्तर माध्य 31.30 है।

खुले सिरे वाले वर्ग अन्तराल में समान्तर माध्य की गणना

खुले सिरे वाले वर्ग अन्तराल में माध्य तब तक ज्ञात नहीं किया जा सकता जब तक कि वर्ग अन्तराल को निर्धारित नहीं किया जाये। इस स्थिति में खुल वर्ग के लिए उसके तुरंत पहले या बाद जो लागू हो उसके अनुसार ही मान्यता रख कर हल किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, निम्नलिखित वर्ग अन्तराल एवं संगत आवृत्ति वितरण में देख सकते हैं,

प्राप्तांक: 10 से कम 10-20 20-30 30-40 40-50 50 से अधिक
छात्रों की संख्या: 10 9 25 30 16 10

उपरोक्त स्थिति में, वर्ग अन्तराल सभी में बराबर है अर्थात् समान वर्ग हैं इसलिए प्रथम वर्ग की निम्न सीमा के लिए 0 एवं अन्तिम वर्ग के उपरी सीमा के लिए 60 रखना ज्यादा उचित होगा। अतः प्रथम वर्ग अन्तराल 0-10 तथा अन्तिम वर्ग अन्तराल 50-60 होगा।

एक दूसरा उदाहरण लेते हैं जिसमें दूसरा वर्ग अन्तराल 20, तीसरा 30, चौथा 40 है। दूसरे शब्दों में 10 अंक की वृद्धि प्रत्येक वर्ग अन्तराल में हो रही है।

प्राप्तांक : 10 से कम 10-30 30-60 60-100 100 से अधिक
छात्रों की संख्या: 10 15 25 30 20

यदि उपरोक्त स्थिति में प्रथम वर्ग की निम्न सीमा 0 तथा अन्तिम वर्ग की उच्च सीमा 150 रखें या मानें तब सही होगा अन्यथा हमारा परिणाम गलत हो सकता है। इस प्रकार, प्रथम वर्ग 0-10 एवं अन्तिम वर्ग 100-150 होगा।

यदि वर्ग अन्तराल में समानता नहीं होती है अर्थात् असमान रूप से परिवर्तित हो रहे हों तब इसके प्रथम वर्ग की निम्न सीमा तथा अन्तिम वर्ग की उच्च सीमा निर्धारित करने का प्रयास नहीं करना चाहिए। अतः यह कहा जा सकता है कि ऐसे खुले सिरे वाले श्रृंखलाओं में सामानान्तर माध्य नहीं ज्ञात करना चाहिए। ऐसी स्थिति में, केन्द्रीय प्रवृत्ति की अन्य माप जैसे माध्यिका या बहुलक का प्रयोग किया जाना चाहिए।

4.3.4 समान्तर माध्य की विशेषताएँ:

समान्तर माध्य की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं—

विशेषता 1. दिये गये अवलोकनों के समूह से प्राप्त समान्तर माध्य से यदि प्रत्येक अवलोकन से अन्तर या विचलनों का योग शून्य होगा। अर्थात् $\sum (X - \bar{X}) = 0$

उपरोक्त विशेषता का उल्लेख हम निम्नलिखित उदाहरण से देख सकते हैं

उदाहरण: निम्नलिखित आंकड़ों की मदद से विशेषता 1 को सिद्ध करें।

X : 2 3 4 5 6

हल: माध्य से पदों के विचलन

$$\bar{X} = \sum \frac{X}{n} = \frac{20}{5} = 4$$

X	X - $\bar{X}$
2	-2
3	-1

4	0
5	1
6	2
$\sum X = 20$	$\sum (X - \bar{X}) = 0$

इस प्रकार, माध्य से पदों के विचलन का योग 0 है।

विशेषता 2. माध्य से लिए गए विचलनों का वर्ग का योग न्यूनतम होता है।

$$\sum (X - \bar{X})^2 = \text{Least}$$

उपरोक्त विशेषता का वर्णन निम्नलिखित उदाहरण में दिये आंकड़ों से किया जा सकता है।

X: 2 4 6 8 10

हल: यहाँ समान्तर माध्य 6, कल्पित माध्य A=4, एवं कल्पित माध्य B = 8, लिया गया है।

X	$(X - \bar{X})^2$	$(X - 4)^2$	$(X - 8)^2$
2	16	4	36
4	4	0	16
6	0	4	4
8	4	16	0
10	16	36	4
$\sum X = 30$	$\sum (X - \bar{X})^2 = 40$	$\sum (X - 4)^2 = 60$	$\sum (X - 8)^2 = 60$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{30}{5} = 6$$

यहाँ, माध्य से लिए विचलनों के वर्ग का योग 40 है। जबकि, कल्पित माध्य A तथा B से लिए गये विचलनों के वर्गों का योग 60 है जो वास्तविक माध्य के विचलन से अधिक है।

विशेषता 3. यदि दिये गये प्रत्येक अवलोकनों में k, राशि वृद्धि या कमी हो तब नये समान्तर माध्य में भी k राशि के बराबर वृद्धि या कमी होगी।

अर्थात्, यदि $Y = X + k$, तब $\bar{Y} = \bar{X} + k$

इसे निम्नलिखित उदाहरण द्वारा वर्णन किया जा सकता है।

उदाहरण: दिये गये 5 अवलोकनों 5, 10, 15, 20 एवं 25 का समान्तर माध्य है,

$$\frac{5+10+15+20+25}{5} = \frac{75}{5} = 15$$

जबकि, यदि प्रत्येक पद में राशि 3 के बराबर वृद्धि या जोड़ दिया जाये तब, ये संख्याएँ होंगी 8, 13, 18, 23 एवं 28 और उनके योग = 8+13+18+23+28=90

$$\text{एवं समान्तर माध्य} = \frac{90}{5} = 18$$

इस प्रकार हमने देखा कि नई समान्तर माध्य जो 18 है पहले के माध्य 15 से 3 अधिक है जो विशेषता 3 को सिद्ध करती है।

विशेषता 4: यदि दिये गये सभी अवलोकनों को किसी स्थिर राशि k से गुणा किया जाये तो प्राप्त नई समान्तर माध्य भी k गुणा होगी।

इसे स्पष्ट करने के लिए हम निम्नलिखित उदाहरण का प्रयोग जा सकता है।

उदाहरण 6. एक समूह या समूच्य के 5 अवलोकनों, 2, 4, 6, 8, एवं 10 के समान्तर माध्य हैं,

$$\frac{2+4+6+8+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

यदि प्रत्येक पद या अवलोकन को स्थिर राशि 2 से गुणा किया जाय तो नये पद 4, 8, 12, 16, एवं 20 होंगे तथा इनके समान्तर माध्य हैं,

$$\frac{4+8+12+16+20}{5} = \frac{60}{5} = 12$$

इस प्रकार नई समान्तर माध्य का मूल्य 12 है जबकि, पहले का 6, अतः उपरोक्त विशेषता सिद्ध होती है।

विशेषता 5: $\sum X = N\bar{X}$ $\bar{X} = \frac{\sum X}{N}$

गलत माध्य को सही करना

सही माध्य को ज्ञात करने के लिए अन्तिम विशेषता बहुत महत्वपूर्ण है जब एक, दो या अधिक अवलोकनों के गलत मान अंकित हो गये हों। उदाहरण के लिए, माना कि n अवलोकनों के लिए माध्य $\bar{X}$ आकलित किये गये हैं और बाद में यह पता चलता है कि दो अवलोकनों X_1 एवं X_2 , को गलत अंकित किया गया था। अब, यह आवश्यक है कि त्रुटि रहित या सही माध्य ज्ञात करने के लिए इस त्रुटि का हटा कर सही अवलोकनों को शामिल किया जाय। विशेषता 5 का प्रयोग करते हुए सबसे पहले त्रुटियुक्त अवलोकनों के समग्र या योग $N\bar{X}$ ज्ञात कर लें। इसके बाद, त्रुटियुक्त समग्र में से दोनों गलत अवलोकनों X_1 एवं X_2 को घटाते हुए दोनों सही अवलोकनों X_1 एवं X_2 को, समग्र में जोड़कर n से भाग देने पर हमें अभिष्ट सही माध्य प्राप्त होंगे।

उदाहरण 7. 100 विद्यार्थियों के औसत प्राप्तांक 40 है। बाद में यह पता चलता है कि 53 के जगह 83 अंकित किया गया है। सही प्राप्तांक को जोड़कर सही औसत प्राप्तांक ज्ञात करें।

हल: हमें दिया गया है, $N = 100$ एवं $\bar{X} = 40$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N}, \therefore \sum X = N\bar{X} = 100 \times 40 = 4000$$

लेकिन, $\sum X$ ये सही नहीं हैं। वास्तव में,

$$\begin{aligned} \text{सही } \sum X &= 4000 - \text{गलत प्राप्तांक मूल्य} + \text{सही प्राप्तांक} \\ &= 4000 - 83 + 53 = 3970 \end{aligned}$$

$$\text{सही माध्य, } \bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{3970}{100} = 39.7$$

अतः सही माध्य 39.7 है।

संयुक्त माध्य (Combined Mean)

यदि दो या दो से अधिक समुच्च के संमकों के समान्तर माध्य पता हो तब हम इनका संयुक्त माध्य ज्ञात कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि N_1 एवं N_2 अवलोकनों की संख्या हो एवं $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$ इन अवलोकनों संगत माध्य को प्रदर्शित करते हैं, तब माध्य $\bar{X}$ या $\bar{X}_{12}$, संयुक्त अवलोकनों, $N_1 + N_2$ के संयुक्त माध्य निम्न प्रकार के हो सकते हैं—

$$\bar{X} = \bar{X}_{12} = \frac{N_1\bar{X}_1 + N_2\bar{X}_2}{N_1 + N_2}$$

संमकों के दो समुच्च के परिणाम को दो से अधिक समुच्च के लिए सामान्यीकरण किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, यदि $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_k$ विभिन्न समुच्च के माध्य हैं तथा $n_1, + n_2 + \dots + n_k$ प्रत्येक समुच्च के

अवलोकनों की संख्या हो, तब, $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ समुच्च के अवलोकनों के संयुक्त माध्य निम्नलिखित हो सकते हैं,

$$\bar{X} = \bar{X}_{1,2,\dots,k} = \frac{N_1 \bar{X}_1 + N_2 \bar{X}_2 + \dots + N_k \bar{X}_k}{N_1 + N_2 + \dots + N_k}$$

अब हम उपरोक्त सूत्र का प्रयोग निम्नलिखित उदाहरण की मदद से स्पष्ट कर सकते हैं।

उदाहरण 8. निम्नलिखित समकों से संयुक्त माध्य ज्ञात करें।

	श्रेणी X	श्रेणी Y
समान्तर माध्य	12	20
पदों की संख्या	80	60
हल: हमें दिया गया है,	$\bar{X}_1 = 12$	$\bar{X}_2 = 20$
	$n_1 = 80$	$n_2 = 60$

$$\begin{aligned} \therefore \text{संयुक्त माध्य } (\bar{X}) &= \frac{n_1 \bar{X}_1 + n_2 \bar{X}_2}{n_1 + n_2} \\ &= \frac{80 \times 12 + 60 \times 20}{80 + 60} = \frac{960 + 1200}{140} = \frac{2160}{140} = 15.43 \end{aligned}$$

उदाहरण 9. बी. कॉम तृतीय वर्ष के तीन खण्डों अ, ब, एवं स में संगत छात्रों की संख्या 50, 40, 60 है। इन तीन खण्डों के लिए संगत औसत प्राप्तांक 85, 60, एवं 65 ज्ञात किये गये हैं। जबकि, खण्ड अ के एक छात्र का प्राप्तांक शून्य के जगह 50 अंकित किया गया था। सभी समकों का संयुक्त समान्तर माध्य ज्ञात करें।

हल:

प्रश्न में दिये गये सूचना को निम्न रूप में व्यक्त किया जा सकता है:

छात्रों की संख्या	$N_1 = 50$	$N_2 = 40$	$N_3 = 60$
सामानान्तर माध्य	$\bar{X}_1 = 85$	$\bar{X}_2 = 60$	$\bar{X}_3 = 65$
	$\sum X_1 = 4250$	$\sum X_2 = 2400$	$\sum X_3 = 3900$

खण्ड अ के छात्र के एक छात्र के प्राप्तांक 0 के जगह पर 50 अंकित किया गया था। अतः $\sum X_1$ को सही करने की आवश्यकता है। वास्तव में,

$$\therefore \text{शुद्धतम } \sum X_1 = 4250 - 50 + 0 = 4200$$

$$\therefore \text{शुद्धतम } \bar{X}_1 = \frac{\text{Corrected } \sum X_1}{N_1} = \frac{4200}{50} = 84$$

तीनों खण्डों के संयुक्त माध्य इस प्रकार हैं,

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \frac{N_1 \bar{X}_1 + N_2 \bar{X}_2 + N_3 \bar{X}_3}{N_1 + N_2 + N_3} = \frac{50 \times 84 + 40 \times 60 + 60 \times 65}{50 + 40 + 60} \\ &= \frac{4200 + 2400 + 3900}{150} = \frac{10500}{150} = 70 \end{aligned}$$

4.3.5 समान्तर माध्य की सीमाएँ (Limitations of Arithmetic Mean)

समान्तर माध्य के निम्नलिखित कमियाँ हैं—

1. यह चरम मूल्यों से बहुत प्रभावित होता है।
2. खुले सिरे वाले वर्गों में वर्ग अन्तराल के आकार के बारे में बिना मान्यताओं के माध्य नहीं ज्ञात किया जा सकता है।

3. यह न तो अवलोकन न हीं रेखाचित्र के माध्यम से ज्ञात किया जा सकता है।
4. यह गुणात्मक या परिणात्मक समंक जैसे ईमानदारी, सुन्दरता, बुद्धिमता आदि के माध्य ज्ञात नहीं किया जा सकता है।
5. यह गलत निष्कर्ष दे सकता है यदि लिए गये आंकड़ों के विषय में विस्तृत सूचना प्राप्त न हों।

4.3.6 भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

यदि दिये गये समंकमाला में सभी पद सामान महत्व के नहीं होते हैं तब हम भारित समान्तर माध्य निकालते हैं, जहाँ पदों के मूल्य को महत्व दिये गये हों। उदाहरण के लिए, यदि किसी उद्योग में काम करने वाले श्रमिकों के औसत मजदूरी ज्ञात करनी हो तो साधारण समान्तर माध्य से औसत ज्ञात करना गलत होगा क्योंकि इसमें अधिक वेतन पर काम करने वाले श्रमिकों की संख्या कम तथा कम वेतन पर काम करने वाले कर्मचारियों की संख्या ज्यादा होगी। अतः यहाँ भारित समान्तर माध्य ज्ञात करना ज्यादा श्रेयस्कर होगा। इस स्थिति में साधारण समान्तर माध्य से प्राप्त औसत का मूल्य अधिक होगा जो अधिक वेतन का प्रतिनिधित्व करेगा। इस प्रकार, ऐसे स्थिति में वितरण के समंकमाला के संगत भार दिये होने चाहिए जो उनके उपयोगिता पर आधारित हों।

परिभाषा: यदि $w_1, w_2, \dots, w_n$ अवलोकन $X_1, X_2, \dots, X_n$ के संगत भारित सामानान्तर माध्य, $\bar{X}_w$ से इंगित किया जाता है। जो इस प्रकार है,

$$\bar{X}_w = \frac{w_1X_1 + w_2X_2 + \dots + w_nX_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} = \frac{\sum wX}{\sum w}$$

यदि सभी अवलोकनों के भार सामान व बराबर दिये हों तब n मदों के साधारण समान्तर माध्य ज्ञात किया जाता है।

उदाहरण 10. एक उम्मीदवार द्वारा अर्द्ध वार्षिक परीक्षा में विभिन्न विषयों में प्राप्तांक निम्नलिखित हैं। अंग्रेजी 46 प्रतिशत, सांख्यिकी 67 प्रतिशत, लागत लेखांकन 72 प्रतिशत, अर्थशास्त्र 58 प्रतिशत, आय कर 53 प्रतिशत। यह तय किया गया है कि अंग्रेजी एवं सांख्यिकी को अन्य विषयों की तुलना में दूगुना भार दिया जायेगा। साधारण समान्तर माध्य एवं भारित समान्तर माध्य क्या होंगे?

हल: माना कि X विभिन्न विषयों में प्राप्तांक को प्रतिशत में प्रदर्शित करने वाला चर है।

साधारण एवं भारित सामानान्तर माध्य की गणना

विषय	प्राप्तांक (%) (X)	भार (w)	wX
अंग्रेजी	46	2	92
सांख्यिकी	67	2	134
लागत लेखांकन	72	1	72
अर्थशास्त्र	58	1	58
आय कर	53	1	53
	$\sum X = 296$	$\sum w = 7$	$\sum wX = 409$

$$\text{साधारण सामानान्तर माध्य} = \bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{296}{5} = 59.2\%$$

$$\text{भारित सामानान्तर माध्य} = \bar{X}_w = \frac{\sum wX}{\sum w} = \frac{409}{7} = 58.43\%$$

4.5 इकाई का सारांश

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप या औसत वह सांख्यिकी तकनीक है जो श्रृंखला के किसी एक मूल्य को ज्ञात किया जाता है और पूरे समूह का प्रतिनिधित्व करता है।

एक अच्छे केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के गुण

एक बेहतर औसत को निश्चित रूप से समझने में आसान, गणना में सरल, कठोरता से परिभाषित, सभी अवलोकनों पर आधारित, निदर्शन उच्चावचन से न्यूनतम प्रभावित, चरम मूल्यों से अल्प प्रभावित एवं भविष्य के सांख्यिकी प्रयोग के लिए उचित होना चाहिए।

समान्तर माध्य

इसे सामान्यतया औसत या माध्य के रूप में जानते हैं। इसे श्रृंखला के पदों की संख्या से अवलोकनों के योग को विभाजित करके प्राप्त किया जा सकता है।

4.6 मुख्य शब्द

- **माध्य:** किसी समंक श्रेणी के सभी अवलोकनों के योग को, अवलोकनों की संख्या से विभाजित करके माध्य ज्ञात किया जा सकता है।
- **भार:** वितरण के अवलोकनों को उनके उपयोगिता के आधार पर महत्व देना।

4.7 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(ख) सही या गलत

1. सामानान्तर माध्य किसी भी प्रकार के श्रेणीयों में ज्यादा उपयुक्त होता है।
2. सामानान्तर माध्य, वितरण के चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होते हैं।
3. माध्य वितरण के प्रत्येक एवं सभी अवलोकनों पर आधारित होता है।

4.8 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(ख) 1. गलत, 2. गलत, 3. सत्य

4.9 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

1. एक अच्छे औसत के माप के कौन से आदर्श शर्त हैं?
2. माध्य एवं माध्यिका के माप के विभिन्न स्थितियों की चर्चा करें जिसका हम प्रयोग करते हैं।
3. निम्नलिखित सारणी के में दिये गये समकों से माध्यिका एवं माध्य की गणना करें।

प्राप्तांक (से अधिक)	छोत्रों की संख्या
70	7
60	18
50	40
40	40
30	63
20	66

उत्तर: माध्यिका = 53.41, माध्य = 50.85

4. माध्य एवं माध्यिका की विशेषताओं एवं सीमाओं की चर्चा करें।

4.11 संदर्भ पुस्तकें

78. J.K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
79. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
80. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
81. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
82. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।

83. सिंह, एस0 पी0, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस0 चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
84. अवस्थी, जी0 डी0 एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण , भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
85. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
86. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
87. Digambar Patri, “Business Statistics”, KaIyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, “Business Statistics”, Pearson publication, Delhi, India.
- 88^ए** R.P. Hooda, “Statistics for Business and Economics”, Mac Millan India ltd., Delhi, India.

खण्ड—III
इकाई 05
केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें—II
माधिका, चतुर्थक, दशमर्थक, शतमर्थक एवं बहुलक

संरचना:

- 5.1 भूमिका
- 5.2 माधिका का अर्थ
- 5.3 माधिका गणना की विधि
 - 5.3.1 व्यक्तिगत श्रृंखला में माधिका की गणना
 - 5.3.2 खण्डित श्रृंखला में माधिका की गणना
 - 5.3.3 सतत श्रृंखला में माधिका की गणना
 - 5.3.4 चित्रमय विधि से माधिका की गणना
 - 5.3.5 माधिका के गुण एवं सीमाएँ
- 5.4 बहुलक का अर्थ
 - 5.4.1 बहुलक की गणना विधि
 - 5.4.2 व्यक्तिगत श्रेणी में बहुलक की गणना
 - 5.4.3 खण्डित श्रेणी में बहुलक की गणना
 - 5.4.4 सतत श्रेणी में बहुलक की गणना
 - 5.4.5 विन्दुरेख विधि से बहुलक की गणना
 - 5.4.6 बहुलक के गुण एवं सीमाएँ
- 5.5 अन्य स्थानिक माध्य
 - 5.4.1 विभिन्न श्रृंखलाओं में चतुर्थक की गणना
 - 5.4.2 विभिन्न श्रृंखलाओं में दशमक
 - 5.4.3 विभिन्न श्रृंखलाओं में शतमक
- 5.6 इकाई का सारांश
- 5.7 मुख्य शब्द
- 5.8 अपनी प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 5.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 5.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 5.11 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप सक्षम होंगे:

- माधिका के अर्थ एवं उनकी गणना को जानना
- बहुलक एवं अन्य स्थानिक मापों के अर्थ को समझना
- बहुलक, चतुर्थक, दशमक एवं शतमक की गणना
- ऐसे स्थानिक मापों के विशेषताओं का ज्ञान एवं इनका व्यावहारिक जीवन में प्रयोग।

5.1 भूमिका (Introduction)

पिछले इकाई में माध्य की गणना करना सीखे हैं। यहाँ, इस इकाई में बहुलक एवं अन्य स्थानिक मापों की गणना करेंगे। जब दिये गये वितरण से अति परिशुद्ध एवं ठेठ स्थानिक मान की आवश्यकता हो, तब बहुलक का प्रयोग कर सकते हैं। यह विषमता या असमान वितरण की स्थिति में एक अर्थपूर्ण केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप है, जैसा कि यह अधिकतम बिन्दुओं के संकेन्द्रण की स्थिति सूचित या प्रदर्शित करता है। इस प्रकार, बहुलक एक बहुचर्चित पद है जहाँ किसी श्रेणी में एक बिन्दु के इर्द-गिर्द अधिकतम आवृत्तियों की सघनता हो।

5.2 माध्यिका का अर्थ (Meaning of Median)

माध्यिका एक स्थानिक मान है जिसका सांख्यिकीय विश्लेषण में वृहत प्रयोग किया जाता है। समंकमाला को बढ़ते एवं घटते क्रम में रखने व सजाने पर माध्यिका वितरण श्रेणी के मध्य में स्थित होता है। दूसरे शब्दों में, माध्यिका वह मूल्य होता है जो पूरे श्रेणी को दो बराबर भागों में विभाजित करता है। इस प्रकार माध्यिका की स्थिति में, माध्यिका मूल्य से कम पदों की संख्या एवं माध्यिका मूल्य से अधिक पद या अवलोकनों की संख्या बराबर होती है।

यदि पदों या अवलोकनों की संख्या विषम हो तब माध्यिका को ज्ञात करने में कोई समस्या नहीं होती है। यदि अवलोकनों की संख्या एक सम संख्या हो तब माध्यिका श्रेणी के बिल्कुल बीच में नहीं होगी। इस स्थिति में, माध्यिका का मूल्य कोई भी मान हो सकता है।

5.3. माध्यिका की गणना (Calculation of Median)

माध्यिका मूल्य सदैव श्रृंखला के मध्य में ही स्थित होती है। इसकी गणना सभी तीन श्रेणियों में अलग-अलग तरीके से की जाती है।

5.3.1 व्यक्तिगत श्रेणी में माध्यिका की गणना (Calculation of Median in Individual Series)

किसी दिये गये श्रृंखला में माध्यिका को ज्ञात करने के लिए, सबसे पहले पदों व अवलोकनों को बढ़ते क्रम या घटते क्रम में व्यवस्थित करें और फिर निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करना चाहिए:

$$\text{माध्यिका} = \left(\frac{N+1}{2} \right) \text{वां पद मूल्य}$$

$$\text{या, } M = \left(\frac{N+1}{2} \right) \text{वां पद मूल्य}$$

(a) विषम संख्या वाले श्रृंखला में माध्यिका (Median in case of Odd No. of Items)

यदि अवलोकनों की संख्या विषम हो तब, समंकमाला का मध्य मूल्य ही माध्यिका होगी जिसे पदों को उनके मूल्य के अनुसार बढ़ते एवं घटते क्रम में सजाने के बाद प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 1: निम्नलिखित समंकमाला के मूल्य से माध्यिका की गणना कीजिए।

X: 42 75 85 101 145 175 210 250 300

हल: सर्वप्रथम दिये गये उपरोक्त चार मूल्यों को बढ़ते या घटते क्रम में व्यवस्थित करें।

माध्यिका की गणना

X: 42 75 85 101 145 175 210 250 300

यहां, $N = 9$

इसलिए, माध्यिका या, $M = \left(\frac{N+1}{2} \right)$ वां पद मूल्य

$$\text{या, } M = \left(\frac{9+1}{2} \right) \text{ वां पद मूल्य}$$

$$= \left(\frac{10}{2} \right) \text{ वां पद मूल्य}$$

$$= 5 \text{ वां पद मूल्य अर्थात् } 145$$

अतः अभीष्ट माध्यिका श्रृंखला का 5वां पद 145 है।

(b) सम संख्या वाले समंकमाला (Case of Even No. item)

सम संख्या वाले समंकमाला की स्थिति में, माध्यिका मध्य अवलोकनों के माध्य ज्ञात करके गणना की जा सकती है जो अवलोकनों को बढ़ते या घटते क्रम में सजाने के बाद मध्य के दो अवलोकनों के मूल्यों के माध्य ज्ञात करके प्राप्त किया जा सकता है।

माध्यिका = दो मध्य अवलोकनों के माध्य का मूल्य। दिये गये समंक 5, 10, 15, 20, 25, 30 से
 माध्यिका = $\frac{(15+20)}{2}$ वां मूल्य=17.5।

उदाहरण: दिये गये समंकमाला के मूल्य से माध्यिका की गणना करें।

मजदूरी (Wages in Rs.) : 360 320 280 220 260 200 180 400

हल:

मूल्यों को बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें।

माध्यिका की गणना

मजदूरी (Wages in Rs.) : 180 200 220 260 280 320 360 400

यहां, $N = 8$

इसलिए, माध्यिका या, $M = \left(\frac{N+1}{2}\right)$ वां पद मूल्य

$$\begin{aligned}\text{या, } M &= \left(\frac{8+1}{2}\right) \text{ वां पद मूल्य} \\ &= \left(\frac{9}{2}\right) \text{ वां पद मूल्य} \\ &= 4.5 \text{ वां पद मूल्य}\end{aligned}$$

$$4.5 \text{ वां पद मूल्य} = \frac{4\text{th item} - 5\text{th item}}{2}$$

$$\text{इस प्रकार, माध्यिका} = \frac{260+280}{2} = \frac{540}{2} = 270 \text{ रुपये।}$$

5.3.2 खण्डित श्रेणी में माध्यिका की गणना (Calculation of Median in Discrete Series)

खण्डित श्रेणी में आवृत्तियाँ होती हैं, इसमें माध्यिका को ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक है कुल आवृत्तियों को दो बराबर भागों में बांटना।

चरण:

1. आंकड़ों को बढ़ते या घटते क्रम में सजायें।
2. संचयी आवृत्ति की गणना करें।
3. माध्यिका पद के मूल्य को ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करें।

$$\text{माध्यिका या, } M = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{ वां पद मूल्य}$$

4. कुल संचयी आवृत्ति वाले स्तम्भ में $\left(\frac{N+1}{2}\right)$ वां के बराबर या उससे अधिक संचयी आवृत्ति को ज्ञात करते हैं।

5. उस संचयी आवृत्ति के संगत चर व पद को चिन्हित करें, वहीं अभीष्ट माध्यिका होगी।

इसे एक उदाहरण के माध्यम से स्पष्ट किया जा सकता है।

उदाहरण: दिये गये समंकों के माध्यम से माध्यिका की गणना करें।

पद मूल्य:	105	110	115	120	125	130	135
आवृत्ति:	2	3	4	6	10	5	2

हल: माध्यिका की गणना

पद मूल्य: (X)	आवृत्तियां (f)	संचयी आवृत्ति (cf)
105	2	2
110	3	5
115	4	9
120	6	15
125	10	25
130	5	30
135	2	32
N=32		

माध्यिका या, $M = \left(\frac{N+1}{2} \right)$ वां पद मूल्य

या, $M = \left(\frac{32+1}{2} \right)$ वां पद मूल्य

$= \left(\frac{33}{2} \right)$ वां पद मूल्य

$M = 16.5$ वां पद मूल्य

संचयी आवृत्ति स्तंभ में देखने पर 16.5 वां पद का मूल्य 125 है जो एक अभीष्ट माध्यिका है।

5.3.3 सतत् श्रेणी में माध्यिका की गणना (Calculation of Median in Continuous Series)

सतत् श्रृंखला में, माध्यिका की गणना प्रत्यक्ष विधि से ज्ञात नहीं किया जा सकता है। इस स्थिति में, माध्यिका वर्ग अन्तराल के अन्तर्गत आती है अर्थात् एक वर्ग अन्तराल के उच्च सीमा एवं निम्न सीमा के बीच में आती है। वास्तविक मूल्य के लिए, माध्यिका की गणना एक सूत्र के माध्यम से ज्ञात करते हैं। इस स्थिति में, माध्य की भांति, हम यह कल्पना करते हैं कि पूरी समंकमाला सामान्य वर्ग अन्तराल में वितरित हैं।

चरण:

1. वर्ग अन्तराल को बढ़ते क्रम में व्यवस्थित करें।
2. माध्यिका के सूत्र का प्रयोग करके, $M = \left(\frac{N+1}{2} \right)$ वां पद ज्ञात करें।
3. माध्यिका पद वाले माध्यिका वर्ग को ज्ञात करें।
4. वर्ग अन्तराल निर्धारित होने के उपरान्त निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करें।

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - C_f}{f} \times i$$

जहां, M = माध्यिका, L = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा, C_f माध्यिका वर्ग से पूर्व वर्ग की संचयी आवृत्ति या वैसे सभी वर्गों के आवृत्तियों के योग जो माध्यिका के वर्ग के आवृत्ति से कम हैं।

f = माध्यिका वर्ग की साधारण आवृत्ति।

i = माध्यिका वर्ग का वर्ग अन्तराल।

उदाहरण: निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से माध्यिका की गणना कीजिए।

वर्ग अन्तराल (X)	0-50	50-100	100-150	150-200	200-250
आवृत्ति (X):	44	60	36	44	8
हल: माध्यिका की गणना					
X		f		Cf	

0-50	44	44
50-100	60	104
100-150	36	140
150-200	44	184
200-250	8	192

$$N=192$$

$$M = \left(\frac{N}{2}\right)^{th} \text{ पद का आकार} = \left(\frac{192}{2}\right)^{th} \text{ पद का आकार}$$

$M = 96^{\text{वाँ}}$ पद वाले समूह का आकार या वर्ग अन्तराल एवं $96^{\text{वाँ}}$ पद 50-100 वाले वर्ग अन्तराल व समूह में आता है।

माना कि हम अब मान का प्रक्षेपण करें,

यहाँ, $L = 50, cf = 44, f = 60, i = 50, N = 192$

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$$

$$M = 50 + \frac{\frac{192}{2} - 44}{60} \times 50$$

$$\text{मध्यिका, } M = 50 + 43.33$$

$$\text{अतः माध्यिका, } M = 93.33$$

समावेशी श्रृंखला (Inclusive Series)

उदाहरण: निम्नलिखित आंकड़ों से माध्यिका ज्ञात करें।

मजदूरी (रूपये में)	50-69	70-89	90-109	110-129	130-159
श्रमिकों की संख्या (f) :	18	75	21	10	41

हल: माध्यिका मजदूरी की गणना

मजदूरी (रूपये में)	श्रमिकों की संख्या (f)	Cf
50-69	18	18
70-89	75	93
90-109	21	114
110-129	10	125
130-159	41	165

$$N=165$$

$$M = \left(\frac{N}{2}\right)^{th} \text{ पद का आकार} = \left(\frac{165}{2}\right)^{th} \text{ पद का आकार} = 82.2^{\text{वाँ}} \text{ पद।}$$

$82.2^{\text{वाँ}}$ पद 70-89 वर्ग अन्तराल में आता है।

लेकिन, वास्तविक वर्ग सीमा 69.5-89.5 (समावेशी प्रकार की श्रेणी को पहले अपवर्जी श्रृंखला में परिवर्तित किया जाना चाहिए) है,

यहाँ, $L = 69.5, Cf = 18, f = 75, i = 20, N = 165$

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$$

$$M = 69.5 + \frac{\frac{165}{2} - 18}{75} \times 20$$

$$\text{मध्यिका, } M = 69.5 + 17.2$$

अतः अभीष्ट माध्यिका मजदूरी, $M = 86.7$ रुपये ।

खुले सिरे वाले वर्ग (Open End Classes)

उदाहरण: निम्नलिखित मजदूरी के वितरण से माध्यिका को चिन्हित करें।

मजदूरी (रु.)	Below 100	100-200	200-300	300-400	400-500	500-600	600-700	700-800	800-900	900-1000	1000 & above

श्रमिकों की संख्या	1	16	38	58	60	46	22	15	15	7	12

हल: माध्यिका मजदूरी की गणना,

$$M = \left(\frac{N}{2} \right)^{th} \text{ पद का आकार} = \left(\frac{290}{2} \right)^{th} \text{ पद का आकार} = 145^{\text{वां}} \text{ पद एवं}$$

145^{वां} पद 400-500 वर्ग अन्तराल में आता है।

मजदूरी (रु.) X	श्रमिकों की संख्या f	cf
1-100	1	1
100-200	16	17
200-300	38	55
300-400	58	113
400-500	60	173
500-600	46	219
600-700	22	241
700-800	15	256
800-900	15	271
900-1000	7	278
1000-1100	12	290

$N=290$

प्रक्षेपण के द्वारा निम्न व उच्च सीमा का निर्धारण,

यहाँ, $L = 400$, $cf = 113$, $f = 60$, $i = 100$, $N = 290$

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$$

$$M = 400 + \frac{\frac{290}{2} - 113}{60} \times 100$$

$$M = 400 + \frac{145 - 113}{60} \times 100$$

$$M = 400 + \frac{32}{60} \times 100$$

$$M = 400 + 53.33$$

अतः अभीष्ट माध्यिका मजदूरी, $M = 453.33$ रुपये ।

उदाहरण: सांख्यिकी पत्र में 65 छात्रों के प्राप्तांक का वितरण निम्नलिखित है, माध्यिका प्राप्तांक की गणना करें।

प्राप्तांक (से अधिक):	20	30	40	50	60	70
छात्रों की संख्या	65	63	40	40	18	7

हल: चूंकि आंकड़े संचयी आवृत्ति वितरण के रूप में दी हैं, इस आवृत्ति वितरण को निम्नलिखित रूप में व्यवस्थित किया जाना चाहिए:

माध्यिका की गणना

प्राप्तांक	आवृत्तियां (f)	Cf. (से कम)

20-30	65-63=2	2
30-40	63-40=23	25
40-50	40-40=0	25
50-60	40-18=22	47
60-70	18-7=11	58
70 and above	7	65

$$M = \left(\frac{N}{2}\right)^{th} \text{ पद का आकार} = \left(\frac{65}{2}\right)^{th} \text{ पद का आकार} = 32.5^{\text{वाँ}} \text{ पद}$$

32.5^{वाँ} पद 50-60 वाले वर्ग अन्तराल में आता है।

यहाँ, L = 50, Cf = 25, f = 60, i = 10, N = 65

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i$$

$$M = 50 + \frac{\frac{65}{2} - 25}{22} \times 10$$

$$M = 50 + \frac{7.5}{22} \times 10$$

$$M = 50 + 3.41$$

अतः अभीष्ट माध्यिका प्राप्तांक, M = 53.41 है।

5.3.4 माध्यिका का चित्रमय विधि से निर्धारण (Determination of Median by Graphical Method)

किसी श्रेणी की चित्रमय प्रदर्शन के अन्तर्गत तोरण रेखा खींचकर, माध्यिका मूल्य का निर्धारण किया जा सकता है। इसे निम्नलिखित दो विधियों से किया जा सकता है:

1. 'से कम' या 'से अधिक' तोरण वक्र की रचना द्वारा चित्रमय प्रदर्शन करके।
2. 'से कम' एवं 'से अधिक' तोरण वक्र के चित्रमय प्रदर्शन के द्वारा एक साथ रचना करके हम माध्यिका मूल्य को ज्ञात कर सकते हैं।

1. 'से कम' या 'से अधिक' तोरण वक्र से माध्यिका

इस विधि में, सर्वप्रथम दिये गये आवृत्ति वितरण को 'से कम' एवं 'से अधिक' संचयी आवृत्ति में परिवर्तित करते हैं और 'से कम' एवं 'से अधिक' तोरण वक्र की रचना चित्रमय प्रदर्शन के द्वारा किया जाता है। श्रेणी के $\frac{N}{2}$ वां पद का निर्धारण (रेखाचित्र के Y अक्ष) लम्ब डालते हुए संचयी आवृत्ति वक्र या तोरण वक्र से मिलाते हैं। माध्यिका मूल्य वह बिन्दु होगी जो Y-अक्ष एवं X-अक्ष के संगत X-अक्ष; आधार रेखा को काटती हो।

उदाहरण: निम्नलिखित श्रृंखला के लिए चित्रमय विधि द्वारा माध्यिका मूल्य ज्ञात करें।

मजदूरी (रु.)	0-	100-	200-	300-	400-	500-	600-	700-
	100	200	300	400	500	600	700	800
श्रमिकों की संख्या	4	6	10	10	25	22	18	5

हल: से कम तोरण का प्रयोग के द्वारा माध्यिका की गणना के लिए निम्नलिखित चरण हो सकते हैं।

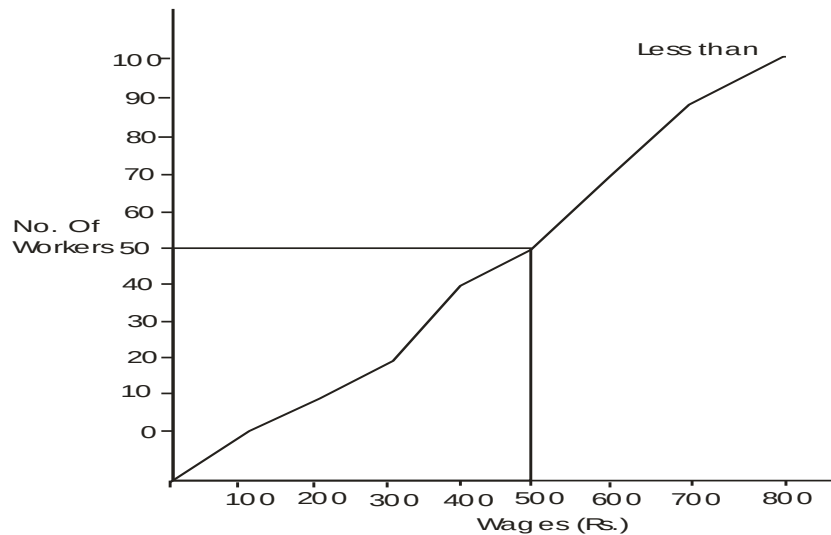
1. दिये गये श्रृंखला को 'से कम' संचयी आवृत्ति वितरण में परिवर्तित करके इसे ग्राफ पेपर पर अंकित करें।
2. $\frac{N}{2}$ वां पद ज्ञात करें एवं इसे Y-अक्ष पर अंकित तथा चिह्नित करें।
3. Y-अक्ष के अंकित बिन्दू से लम्ब खींचते हुए तोरण रेखा बिन्दू E से मिलाएं।

4. बिन्दु E से संगत मान का X-अक्ष में अध्ययन करें, प्राप्त मूल्य ही अभीष्ट माध्यिका मजदूरी होगी।

1. 'से कम' तोरण के माध्यम से माध्यिका निकालना

मजदूरी	संचयी आवृत्ति (श्रमिकों की संख्या)
से कम (रुपये में) 100	4
से कम (रुपये में) 200	10
से कम (रुपये में) 300	20
से कम (रुपये में) 400	30
से कम (रुपये में) 500	55
से कम (रुपये में) 600	77
से कम (रुपये में) 700	95
से कम (रुपये में) 800	100

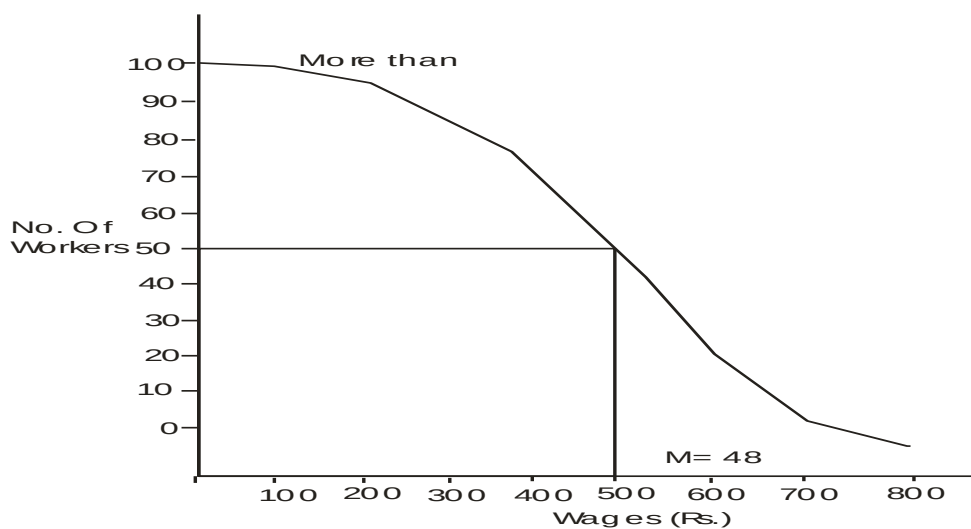
माध्यिका = 48



'से अधिक' तोरण के द्वारा माध्यिका

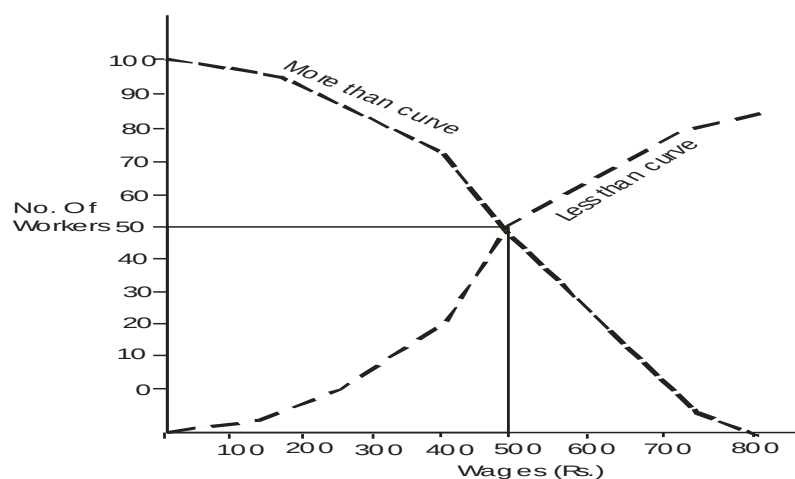
मजदूरी (रुपये में)	संचयी आवृत्ति (श्रमिकों की संख्या)
100 से अधिक	100
200 से अधिक	96
300 से अधिक	90
400 से अधिक	80
500 से अधिक	70
600 से अधिक	45
700 से अधिक	23
800 से अधिक	5
1000 से अधिक	0

माध्यिका = 48



1. दोनों तोरण का एक साथ प्रयोग करके माध्यिका का आंकलन
2. इस विधि में, दोनों तोरण की रचना एक साथ ग्राफ पर करते हैं और X- अक्ष तथा Y- अक्ष, दोनों के संगत मानों के मिलान बिन्दु से आधार रेखा पर लम्बा डालकर माध्यिका को ज्ञात कर सकते हैं जैसा कि नीचे दिखाया गया है।
3. माध्यिका के आकलन के लिए 'से कम एवं से अधिक' तोरण का प्रयोग एक साथ करते हैं।

मजदूरी (रूपये में)	आवृत्ति (श्रमिकों की संख्या)	‘से कम’ एवं ‘से अधिक’ संचयी आवृत्ति वितरण			
		से कम		से अधिक	
		मजदूरी (रूपये में)	संचयी आवृत्ति (श्रमिकों की संख्या)	मजदूरी (रूपये में)	संचयी आवृत्ति (श्रमिकों की संख्या)
0—100	4	100 से कम	4	100 से अधिक	100
100—200	6	200 से कम	10	200 से अधिक	96
200—300	10	300 से कम	20	300 से अधिक	90
300—400	10	400 से कम	30	400 से अधिक	80
400—500	25	500 से कम	55	500 से अधिक	70
500—600	22	600 से कम	77	600 से अधिक	45
600—700	81	700 से कम	95	700 से अधिक	23
700—800	5	800 से कम	100	800 से अधिक	5



5.3.5 माध्यिका के गुण एवं अवगुण

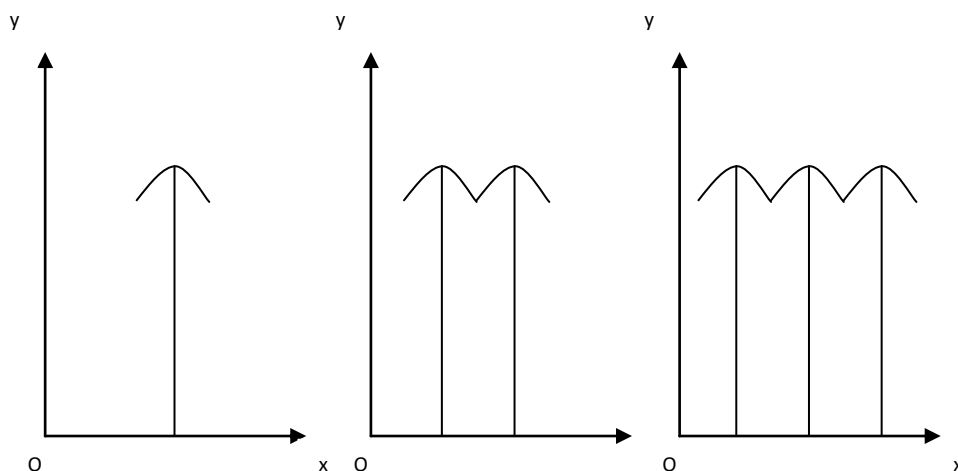
गुण: माधिका की निम्नलिखित विशेषताएँ हैं:

1. यह कठोरता से परिभाषित है।
2. यह गणना करने में आसान एवं समझने में सामान्य होता है।
3. यह खुले सिरे वाले वर्ग वितरण में भी आकलित किया जा सकता है।
4. स्थानिक माध्य होने के कारण, यह चरम मूल्यों से ज्यादा प्रभावित नहीं होता है। उदाहरण के लिए, दिये गये संमंक 10, 15, 20, 25 एवं 130 में माधिका मूल्य 20 है जबकि माध्य 40 है। अतः जब श्रृंखला में प्रायः चरम मूल्य दिये हों तो अन्य केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप में से माधिका का प्रयोग ज्यादा संतोषजनक परिणाम दे सकते हैं।
5. यह परिमाणात्मक या गुणात्मक आंकड़ों के संबंध में भी ज्यादा उपयोगी होता है।
6. यह कभी-2 सामान्य अवलोकन या रेखाचित्र के माध्यम से भी ज्ञात किया जा सकता है।

अवगुण: माधिका के निम्नलिखित अवगुण हैं:

1. स्थानिक माध्य या औसत हाने के कारण यह सभी अवलोकनों या पदों से संबंधित नहीं है।
2. यह आगे गणितीय संक्रियाओं के लिए उपर्युक्त नहीं होता है। अतः हम दो या दो से अधिक समूहों के लिए संयुक्त माधिका को ज्ञात नहीं कर सकते हैं।
3. ये समान्तर माध्य की तुलना में, निदर्शन उच्चावचन से ज्यादा प्रभावित होता है।
4. माधिका की गणना के लिए, यह आवश्यक होता है कि समकों को बढ़ते एवं घटते क्रम में व्यवस्थित किया जाय।

5.4 बहुलक का अर्थ (Meaning of Mode)



बहुलक माधिका की तरह एक स्थानिक मापक है। श्रृंखला में सर्वाधिक बार आने वाली आवृत्ति का पद ही बहुलक मूल्य है। इसका मतलब यह हुआ कि जो पद श्रृंखला में अधिकतम बार पाया जाये तो उसे ही श्रृंखला का बहुलक कहते हैं। मॉड शब्द की उत्पत्ति, फ्रेंच शब्द 'ला मॉड' से हुई है जिसका अर्थ है आधुनिक प्रणाली के अनुकूल या सुप्रसिद्ध परिघटनाएँ। बहुलक किसी भी चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है। यह गणना करने में आसान होता है बहुलक को उस मूल्य के रूप में जान सकते हैं जो प्रायः बारम्बार परिलक्षित होती है। समकों को हम किसी भी प्रारूप में रख सकते हैं। यदि कोई एक मूल्य अन्य मूल्यों के तुलना में अधिक बार श्रृंखला में परिलक्षित होती है उसे एक बहुलकीय श्रृंखला कहते हैं। श्रृंखला में दो अलग मूल्यों के बराबर होने एवं उनके अधिकतम आवृत्तियाँ होने के कारण इसे द्विबहुलक कहते हैं। इस प्रकार त्रिबहुलक या बहुभूषितिक वितरण को भी परिभाषित किया जा सकता है। यदि श्रृंखला के सभी

पद विशेष (व्यक्तिगत श्रेणी के स्थिति में) या अलग प्रतीत हों तब उस वितरण में बहुलक अनुपस्थित होगा या भूषिटक अज्ञात होगा।

5.4.1 बहुलक गणना की विधियाँ (Methods of Calculation of Mode)

बहुलक मूल्य को ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित महत्वपूर्ण विधियों का प्रयोग किया जाता है:

1. दिये गये श्रेणी में समूहीकरण विधि के माध्यम से अधिकतम आवृत्ति वाले मूल्यों की पहचान करके बहुलक का निर्धारण।
2. प्रक्षेपण विधि के माध्यम से बहुलक की गणना
3. बिन्दुरेखीय विधि से बहुलक की गणना
4. माध्य एवं माध्यिका से बहुलक का आकलन।

5.4.2 व्यक्तिगत श्रृंखला में बहुलक की गणना (Calculation of Mode in Individual Series)

यदि प्रत्येक पद श्रेणी में एक ही बार आए, तब उस श्रेणी में कोई बहुलक नहीं होंगे। श्रेणी में किसी एक पद का अधिक बार या अधिकतम आवृत्ति ही बहुलक होता है। यह सामान्यतया अवलोकन कर ज्ञात किया जा सकता है। यदि व्यक्तिगत श्रेणी में पदों की संख्या अधिक हो तो उसे खण्डित या सतत् श्रेणी में परिवर्तित करें, जहाँ से बहुलक ज्ञात किया जा सकता है। व्यक्तिगत श्रेणी की स्थिति में, बहुलक को अवलोकन के द्वारा या फिर खण्डित श्रेणी में परिवर्तित करके ज्ञात कर सकते हैं।

उदाहरण: निम्नलिखित छात्रों के प्राप्तांकों के आंकड़ों से बहुलक की गणना कीजिये।

कम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
प्राप्तांक	10	27	24	12	27	27	20	18	15	30

हल: यह अवलोकन से पात हैं कि प्राप्तांक 27 सबसे ज्यादा बार अर्थात् श्रृंखला में 3 बार आते हैं। अतः श्रेणी के लिए बहुलक मूल्य प्राप्तांक 27 है।

5.4.3 खण्डित श्रेणी में बहुलक की गणना (Calculation of Mode in Discrete Series)

खण्डित श्रेणी में, बहुलक, सामान्यतया अवलोकन या समूहीकरण विधि से ज्ञात किया जा सकता है। अवलोकन विधि से तात्पर्य है कि उस मूल्य को ध्यान से श्रेणी में ढूँढना या देखना, श्रृंखला में ज्यादा बार या बहुत सघन रूप से परिलक्षित होते हैं।

उदाहरण:

X:	100	110	120	130	140	150
f:	5	8	15	7	4	5

उपरोक्त श्रृंखला से, यह स्पष्ट होता है कि बहुलक आकार या मूल्य 120 है। यह मूल्य 120 अधिकतम बार श्रेणी में पाया जाता है अर्थात् 15 बार। लेकिन, त्रुटियाँ होने की भी संभावना है। जहाँ इस पद मूल्य के पहले या इसके बाद वाले पद मूल्य की आवृत्तियों में बहुत ज्यादा अन्तर तो नहीं है अर्थात् एक तरफ बहुत कम आवृत्ति तथा दूसरे तरफ बहुत सघन संकेन्द्रण तो नहीं है। ऐसे स्थिति में समूहीकरण विधि का प्रयोग ज्यादा वांछित होगा, जिसमें बहुलक को निर्धारित करने के लिए एक 'समूही सारणी' एवं एक 'विश्लेषण-सारणी' को तैयार करना होता है।

समूही सारणी: एक समूही सारणी के छः स्तंभ हो सकते हैं:

- स्तंभ 1.** मूल आवृत्तियों को इसमें लेते हैं एवं अधिकतम आवृत्ति को घेर दिया जाता है।
- स्तंभ 2.** आवृत्तियों को दो का जोड़ा बनाकर लिख लिया जाता है।
- स्तंभ 3.** प्रथम पद के आवृत्ति को छोड़कर, दो के आवृत्ति को जोड़ा बनाकर जोड़ लिया जाता है।
- स्तंभ 4.** तीन आवृत्तियों का गुच्छ बनाकर जोड़ लिया जाता है।

स्तंभ 5. प्रथम पद के आवृत्ति को छोड़कर, तीन आवृत्तियों के गुच्छ को जोड़कर लिख लिया जाता है।

स्तंभ 6. प्रथम दो संगत पदों के आवृत्ति को छोड़कर एवं तीन आवृत्तियों को जोड़ कर लिख लिया जाता है।

प्रत्येक स्थिति में अधिकतम योग के लें एवं इसे गोला करें या खाने में रखें या रेखांकन करें। एक बार जब समूहीकरण सारणी तैयार हो जाय, फिर उसी के आधार पर विश्लेषण सारणी का भी निर्माण करें। इन सभी छः स्थितियों के, अधिकतम आवृत्तियों को ले एवं संगत खानों में प्रविष्ट करें।

उपरोक्त की सभी प्रक्रियाएं निम्नलिखित उदाहरण के मदद से दिखलाया जा सकता है।

उदाहरण: निम्नलिखित समकों से बहुलक की गणना करें।

उंचाई (इंच में):	56	58	59	60	61	62	63	64	66	68
व्यक्तियों की संख्या:	3	7	6	9	20	22	24	5	3	1

हल: एक बार अवलोकन से यह प्रतीत होता है कि 63 श्रेणी का बहुलक है क्योंकि यह श्रेणी में अधिकतम बार आता है अर्थात् 24बार। जबकि, अधिकतम आवृत्ति एवं उसके तुरंत पूर्व के आवृत्ति के बीच अन्तर बहुत कम है, फलतः हमें एक समूही सारणी एवं विश्लेषण सारणी तैयार करना होगा जैसा कि नीचे दिखाया गया है।

उंचाई (इंच में):	समूही सारणी					
	स्तंभ 1	स्तंभ 2	स्तंभ 3	स्तंभ 4	स्तंभ 5	स्तंभ 6
56	3			16	22	
58		10	13			
59	7					35
60	6	15	29	51	66	51
61	9					
62	20		46	32		
63	22	42	8		9	
64	24					
66	5	29				
68	3					
	1	4				

विश्लेषण सारणी

स्तंभ संख्या	56	58	59	60	61	62	63	64	66	68
स्तंभ 1							1			
स्तंभ 2					1	1				
स्तंभ 3						1	1			
स्तंभ 4				1	1	1				
स्तंभ 5					1	1	1			
स्तंभ 6						1	1	1		
कुल				1	3	5	4	1		

चूंकि, मद 62 श्रेणी में अधिकतम बार आता है अर्थात् 5 बार। अतः दिये गये समंकमाला के लिए बहुलक मूल्य 62 या बहुलक उंचाई 62 इंच है।

5.5.3 सतत् श्रेणी में बहुलक की गणना (Calculation of Mode in Continuous Series)

सतत् आवृत्ति वितरण के स्थिति में, पहला कदम या चरण होता है बहुलक वर्ग का चयन या निर्धारण करना, अर्थात् वह वर्ग जिसकी संगत आवृत्ति अधिकतम हो। यह सामान्य अवलोकन या समूही विधि के अन्तर्गत समूही सारणी एवं विश्लेषण सारणी तैयार करके किया जा सकता है। बहुलक मूल्य को निम्नलिखित प्रक्षेपण सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है।

$$\text{बहुलक, } Z \text{ या } M_0 = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

जहां, L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा,

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति,

f_0 = बहुलक वर्ग से पूर्व वर्ग की आवृत्ति,

f_2 = बहुलक वर्ग से तुरंत बाद वाले वर्ग की आवृत्ति,

i = बहुलक वर्ग की वर्ग अन्तराल का आकार

बहुलक गणना के लिए उपरोक्त सूत्र को विभिन्न रूप में रख सकते हैं जैसा कि नीचे दिया गया है:

$$\text{बहुलक} = L + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

जहां, $\Delta_1 = f_1 - f_0$ = बहुलक वर्ग की आवृत्ति— बहुलक वर्ग से पूर्व वर्ग की आवृत्ति

$\Delta_2 = f_1 - f_2$ = बहुलक वर्ग की आवृत्ति— बहुलक वर्ग से तुरंत बाद वाले वर्ग की आवृत्ति

टिप्पणी: यह टिप्पणी की जा सकती है कि उपरोक्त सूत्र जो बहुलक मूल्य के गणना के लिए दी गई है निम्नलिखित मान्यताओं पर आधारित हैं:

1. आवृत्ति वितरण आवश्यक रूप से सतत् एवं अपवर्जी प्रकार का होना चाहिए। यदि दिये गये आंकड़े सतत् वर्ग के रूप में न हो, तब यह आवश्यक है कि उपरोक्त सूत्र का प्रयोग करने से पूर्व सतत् प्रकार के वर्ग अन्तराल में परिवर्तित किया जाना चाहिए।
2. दिये गये वर्ग अन्तराल पूरी श्रृंखला में एक समान होना चाहिए अर्थात्, सभी वर्गों के वर्ग अन्तराल एक ही होने चाहिए। यदि ये वर्ग असामान हों तब इस मान्यता को मानकर सभी वर्ग को सामान बनाना चाहिए।

उदाहरण: निम्नलिखित वितरण के लिए बहुलक की गणना कीजिए:

वर्ग अन्तराल:	0-80	80-160	160-240	240-320	320-400	400-480
आवृत्ति:	8	7	16	24	15	7

हल:

अधिकतम आवृत्ति 24 के संगत वर्ग अन्तराल 240–320 है। अतः बहुलक वर्ग 240–320 हैं।
बहुलक गणना के लिए प्रक्षेपण सूत्र का प्रयोग करें।

$$\text{बहुलक, या } Mo = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

जहां, L = बहुलक वर्ग की निम्न सीमा = 240

f_1 = बहुलक वर्ग की आवृत्ति = 24

f_0 = बहुलक वर्ग से पूर्व वर्ग की आवृत्ति = 16

f_2 = बहुलक वर्ग से तुरंत बाद वाले वर्ग की आवृत्ति = 15

i = बहुलक वर्ग की वर्ग अन्तराल का आकार = 80

$$\text{बहुलक} = 240 + \frac{24-16}{48-16-15} \times 80 = 240 + \frac{8}{17} \times 80 = 240 + 37.65 = 277.65$$

उदाहरण: निम्नलिखित आंकड़ों से बहुलक की गणन कीजिए:

X:	0-5	5-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
f:	128	150	520	464	398	324	178	44

हल: चूंकि वर्ग अन्तराल असामान है, हमें आवश्यक रूप से वर्ग एवं आवृत्तियों को सामायोजित करके एवं सामान वर्ग अन्तराल बनाना चाहिए। अवलोकन के द्वारा, हम पाते हैं कि बहुलक 10–20 वाले वर्ग में आता है।

X	f
0-10	278 = f_0
10-20	520 = f_1
20-30	464 = f_2
30-40	398
40-50	324
50-60	178
60-70	44

यहां,

$$L=10, f_0=278, f_2=464, i=10, f_1=520$$

अवलोकन के द्वारा: बहुलक 10–20 वाले वर्ग में होंगे।

$$\text{बहुलक, या } Mo = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$Mo = 10 + \frac{520 - 278}{1040 - 278 - 464} \times 10$$

$$Mo = 10 + \frac{242}{298} \times 10$$

$$Mo = 10 + \frac{2420}{298}$$

$$Mo = 10 + \frac{2420}{298}$$

$$Mo = 10 + 8.12$$

$$Mo = 18.12$$

द्वि-बहुलक वितरण

उदाहरण: निम्नलिखित आंकड़ों से बहुलक मूल्य को ज्ञात करें।

वनज (किग्रा):	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
व्यक्तियों की संख्या:	4	6	20	32	33	17	8	2

हल:

अवलोकन के द्वारा, यह पता नहीं चलता कि कौन सा वर्ग बहुलक वर्ग एवं बहुलक मूल्य है, अतः हमें समूही विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित सारणीयां बनायें।

		समूह सारणी					
वनज (किग्रा):	व्यक्तियों की संख्या: f	II	III	IV	V	VI	cf
10-20	4						4
20-30	6	10	26				10
30-40	20	52		30			30
40-50	32		65		58		62
50-60	33						95
60-70	17	50	25			85	112
70-80	8			82			120
80-90	2						122
		10			58		
						27	

		विश्लेषण सारणी						
स्तंभ संख्या	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90
I					x			
II			x	x				
III				x	x			
IV				x	x	x		
V		X	x	x	x	x	x	
VI			x	x	x			
कुल		1	3	5	5	2	1	

यह एक द्वि-बहुलक है। अतः बहुलक ज्ञात करने के लिए अप्रत्यक्ष सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है,

बहुलक = 3माध्यिका-2 माध्य,

$$\text{माध्यिका} = \left(\frac{N}{2} \right) \text{वां पद का आकार जो } 40-50 \text{ वर्ग में आता है}$$

$$= \left(\frac{122}{2} \right) \text{वां पद का आकार} = 61^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

$$\text{यहाँ, } L = 40, \frac{N}{2} = 61, cf = 30, f = 32, i = 10$$

$$M = L + \frac{\frac{N}{2} - cf}{f} \times i = 40 + \frac{\frac{122}{2} - 30}{32} \times 10$$

$$M = 40 + \frac{61-30}{32} \times 10 = 40 + \frac{310}{32} = 40 + 9.688 = 49.688$$

माध्य की गणना के लिए; माना कि कल्पित माध्य = 55; i.e. A=55

वजन x	f	मध्य-विन्दू m	$d' = \left[\frac{m-A}{C} \right]$	fd'
10-20	4	15	-4	-16
20-30	6	25	-3	-18
30-40	20	35	-2	-40
40-50	32	45	-1	-32
50-60	33	55	0	0
60-70	17	65	+1	17
70-80	8	75	+2	16
80-90	2	85	+3	6
N=122				$\Sigma fd' = -67$

$$\text{अब, } \bar{X} = A + \frac{\Sigma fd'}{N} \times C = 55 + \frac{-67}{122} \times 10 = 55 - \frac{670}{122} = 55 - 5.492 = 49.508$$

अतः माध्य, $\bar{X} = 49.508$

चूँकि, बहुलक = $3M - 2\bar{X}$ अथवा $3(49.688) - 2(49.508)$
 $= 149.064 - 99.016 = 50.048$.

अतः अभीष्ट बहुलक वजन 50.048 किलो ग्राम है।

5.4.5 चित्रमय विधि से बहुलक मूल्य की गणना

चित्रमय विधि से बहुलक मूल्य की गणना करने की प्रक्रिया को संक्षेप में निम्नलिखित रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है:

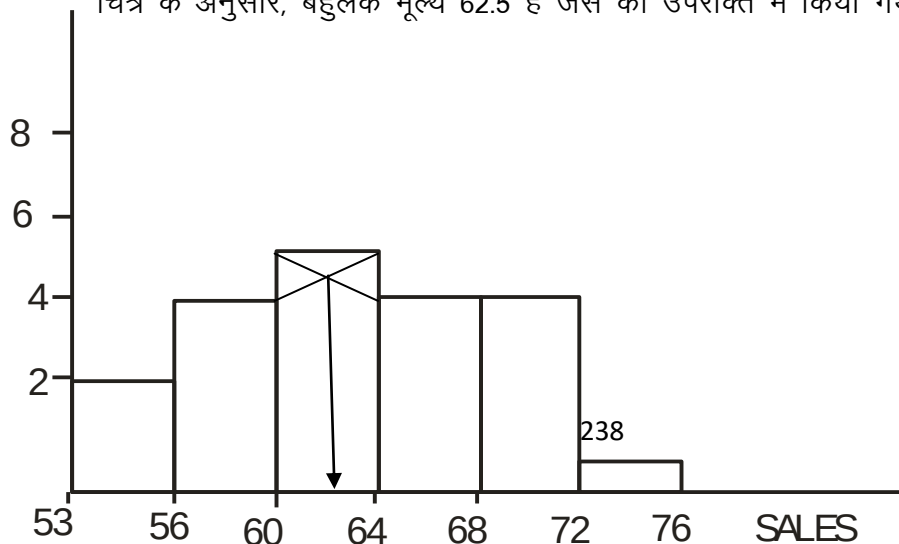
1. समंकों से आयात चित्र खींचें, सबसे लम्बी आयत हीं बहुलक वर्ग होगा।
2. सबसे उंची आयत चित्र के दाहिने कोने एवं बायें कोने से दो विकर्ण खींचें, बायें से खींचे गये विकर्ण को लम्बी आयत के सटे दाहिनी आयत के बायें कोने एवं लम्बी आयत से सटे बायें आयत के दाहिने कोने से मिला दें।
3. दोनो विकर्ण जिस विन्दू पर एक दूसरे को प्रतिच्छेदित करती है उस विन्दू से आधार रेखा X – अक्ष पर लम्ब डालते हैं। X – अक्ष के रेखा में चिह्नित मूल्य हीं वांछित बहुलक मूल्य होगा।

उदाहरण: निम्नलिखित आंकड़ों के वितरण के लिए विन्दूरेखीय विधि से बहुलक की गणना करें।

बिक्री (इकाई में):	53-56	57-60	61-64	65-68	69-72	73-76
दिनों की संख्या:	2	4	5	4	4	1

हल: नीचे दिये गये चित्र के अनुसार उपरोक्त आंकड़ों का प्रयोग करके आयत चित्र बनायें एवं अन्य रेखाएं भी बनायें जिससे बहुलक की गणना की जा सके।

चित्र के अनुसार, बहुलक मूल्य 62.5 है जैसे की उपरोक्त में किया गया है।



5.4.6 बहुलक के गुण एवं सीमाएँ

बहुलक के गुण:

1. बहुलक मूल्य को समझने एवं गणना करने में आसान होते हैं। बहुलक को अवलोकन के द्वारा भी चिन्हित किया जा सकता है।
2. बहुलक मूल्य वितरण के चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है। खुले-सिरे वाले आवृत्ति वितरण में भी बहुलक मूल्य की गणना की जा सकती है।
3. बहुलक का प्रयोग मात्रात्मक के साथ-साथ गुणात्मक आंकड़ों के वर्णन करने के लिए किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, इसका मूल्य का प्रयोग उपभोक्ताओं के विभिन्न प्रकार के उत्पादों के रुचि की तुलना करने के लिए किया जाता है, जैसे सिगरेट, साबून, टूथपेस्ट, या अन्य उत्पाद।

बहुलक की सीमाएँ:

1. बहुलक को एक कठोरतापूर्ण माप नहीं है जैसे इसके मूल्य को कई विधियों से प्राप्त किया जा सकता है।
2. इसे बहु-भूयिष्टक आवृत्ति वितरण में बहुलक वर्ग का पता लगाना कठिन हो जाता है।
3. बीजगणितीय संक्रियाओं के लिए बहुलक एक उचित मापक नहीं है।
4. यदि किसी समंकमाला में एक से अधिक बहुलक के स्थिति में, इसके मूल्य का निर्वचन एवं तुलना करने में कठिनाई होती है।

5.5 अन्य स्थानिक माध्य

माधिका वह मूल्य है जो श्रेणी को दो बराबर भागों में विभक्त करता है। हम उन स्थानिक मूल्यों को निकालना चाहते हैं जो श्रेणी को चार (चतुर्थक) या पांच (पंचमक) या छः (षष्ठमक) या आठ (अष्टमक) या दस (दशमक) या सौ (शतमक) या 11 बराबर भागों में विभाजित करता हो। ऐसे माप चतुर्थक, पंचमक, षष्ठमक, अष्टमक, दशमक, शतमक आदि कहलाते हैं। ये सभी मापक, माधिका के माप पर निर्भर करता है। चतुर्थक, दशमक एवं शतमक की गणना के लिए सभी क्रियाएँ वहीं हैं जो माधिका की गणना में प्रयोग की जाती है।

5.5.1 चतुर्थक

चतुर्थक एक श्रृंखला को चार बराबर भागों में विभाजित करता है। किसी भी श्रृंखला के लिए, तीन चतुर्थक हो सकते हैं। प्रथम एवं निम्न चतुर्थक (Q_1), किसी वितरण को इस प्रकार विभाजित करता है कि पूरे वितरण का एक-चौथाई भाग (25%), पद इससे कम एवं तीन चौथाई भाग पद (75%), इससे अधिक होते हैं।

व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी के लिए:

$$\text{-----} Q_1 \text{-----} Q_2 \text{-----} Q_3 \text{-----}$$

(Or M)

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4} \right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

खण्डित श्रेणी की स्थिति में N के लिए, संचयी आवृत्ति ज्ञात करते हैं फिर उपरोक्त सूत्र का प्रयोग करके प्रथम चतुर्थक की गणना कर लेते हैं।

सतत् श्रेणी के लिए,

$$Q_1 = \left(\frac{N}{4} \right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

यह वर्ग अन्तराल के आकार को स्पष्ट करता है, जहाँ Q_1 आता है, Q_1 मूल्य के प्रक्षेपण के लिए, हम सूत्र का प्रयोग करते हैं,

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times i$$

जहाँ, $Q_1 \rightarrow$ निम्न चतुर्थक या प्रथम चतुर्थक

$L \rightarrow$ वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा जिसमें Q_1 आता है।

$N \rightarrow$ अवलोकनों की संख्या

$cf \rightarrow$ चतुर्थक वर्ग से पूर्व की वर्ग की संचयी आवृत्ति

$f \rightarrow Q_1$ वर्ग की आवृत्ति

$i \rightarrow$ वर्ग अन्तराल

द्वितीय चतुर्थक (Q_2) वर्ग की माध्यिका के रूप में: इसके बारे में पहले ही चर्चा की जा चुकी है।

तीसरा या उच्च चतुर्थक (Q_3) = Q_3 दिये गये आवृत्ति को इस प्रकार विभाजित करता है कि कुल वितरण का तीन-चौथाई या 75% भाग इससे कम या नीचे होता है एवं कुल वितरण का केवल एक चौथाई या 25% भाग ही इससे अधिक होता है।

व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी

व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी में, तृतीय चतुर्थक निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग कर सकते हैं,

$$Q_3 = 3 \left(\frac{N+1}{4} \right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

खण्डित श्रेणी के स्थिति में, संचयी आवृत्ति ज्ञात करते हैं फिर जिस वर्ग में संचयी आवृत्ति आती है वही पद ही तृतीय चतुर्थक होगा।

सतत् श्रेणी के लिए

सतत् श्रेणी में, माध्यिका एवं प्रथम चतुर्थक की ही तरह, वास्तविक मूल्य का प्रक्षेपण वर्ग अन्तराल से करके निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$Q_3 = 3 \left(\frac{N}{4} \right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

यह उस वर्ग को निश्चित करता है जिसमें Q_3 आता है।

Q_3 के वास्तविक मूल्य को निर्धारित करने के लिए इसके प्रक्षेपण सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times i$$

जहाँ, $Q_3 \rightarrow$ निम्न चतुर्थक या प्रथम चतुर्थक

$L \rightarrow$ वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा जिसमें Q_3 आता है।

$N \rightarrow$ अवलोकनों की संख्या

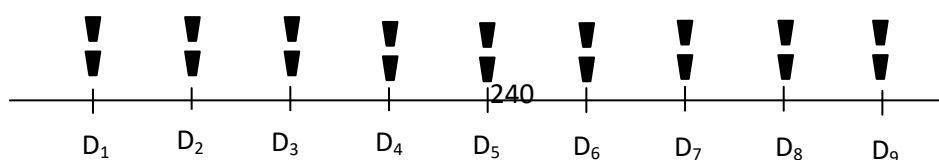
$cf \rightarrow$ चतुर्थक वर्ग से पूर्व की वर्ग की संचयी आवृत्ति

$f \rightarrow Q_3$ वर्ग की आवृत्ति

$i \rightarrow$ वर्ग अन्तराल

5.5.2 दशमक (Deciles)

दशमक, पूरे श्रृंखला को 10 बराबर भागों में विभाजित करता है। किसी दिये गये श्रेणी में कुल 9 दशमक हो सकते हैं, जैसे कि चतुर्थक में तीन चतुर्थक होते हैं। दशमक का विस्तार D_1 से D_9 तक होता है।



व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी में दशमक की गणना

$$D_1 = \left(\frac{N+1}{10} \right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

जहाँ, D_1 = प्रथम दशमक, N = पदों की संख्या

खण्डित श्रेणी में N अवलोकनों के दशमक ज्ञात करने के लिए, संचयी आवृत्ति की गणना करने उपरोक्त सूत्र से प्राप्त संगत पद को ही प्रथम दशमक रूप में चयन कर लेते हैं।

सतत् श्रेणी में दशमक की गणना

सतत् श्रेणी में दशमक को निर्धारित करने के लिए, केवल हम $\left(\frac{N}{10} \right)^{\text{वां}}$ पद की

गणना करते हैं।

इस प्रकार सतत् श्रेणी में, दशमक के मूल्य को प्रक्षेपण से पूर्व, हमें संबंधित वर्ग समूह को निर्धारित करते हैं जिसमें वे आते हैं।

दशमक 1 से दशमक 9 तक के निर्धारण के लिए निम्नलिखित क्रियाएँ करते हैं।

$$1. D_1 = \left(\frac{N}{10} \right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

$$2. D_4 = 4 \left(\frac{N}{10} \right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

$$3. D_7 = 7 \left(\frac{N}{10} \right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

$$4. D_9 = 9 \left(\frac{N}{10} \right)^{\text{वां}} \text{ पद का आकार}$$

ये सभी वर्ग समूह को निर्धारित करते हैं जिसमें यह आता है, इसके बाद वास्तविक दशमक मूल्य को प्रक्षेपित करते हैं उदाहरण के लिए, यदि हम D_7 को ज्ञात करना चाहते हैं तब,

$$D_7 = L + \frac{\frac{7N}{10} - cf}{f} \times i$$

जहाँ, $D_7 \rightarrow$ निम्न चतुर्थक या प्रथम चतुर्थक

$L \rightarrow$ वर्ग अन्तराल की निम्न सीमा जिसमें D_7 आता है।

$N \rightarrow$ अवलोकनों की संख्या

$cf \rightarrow$ दशमक वर्ग से पूर्व की वर्ग की संचयी आवृत्ति

$f \rightarrow D_7$ वर्ग की आवृत्ति

$i \rightarrow$ वर्ग अन्तराल

$$\text{इसी प्रकार, } D_9 = L + \frac{\frac{9N}{10} - cf}{f} \times i$$

5.5.3 शतमक (Percentile)

शतमक वह राशि होती है जो पूरे श्रृंखला को 100 बराबर भागों में विभाजित करते हैं। किसी भी समंकमाला या श्रेणी के लिए 99 शतमक हो सकते हैं जिसे P से निरूपित करते हैं। इसका विस्तार P_1 से P_{99} तक होते हैं। विभिन्न स्थानिक मापों के बीच संबंधों को नीचे उल्लेख किया गया है।

P_{25}	P_{50}	P_{75}
(Q_1)	(Q_2)	(Q_3)
$(D_{2.5})$	(M)	$(D_{7.5})$

व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी में श (D₅)
विभिन्न शतमक के लिए:

$$P_1 = \left(\frac{N+1}{100} \right) \text{वां पद का आकार,}$$

$$P_{50} = 50 \left(\frac{N+1}{100} \right) \text{वां पद का आकार,}$$

$$P_{80} = 80 \left(\frac{N+1}{100} \right) \text{वां पद का आकार}$$

$$P_{99} = 99 \left(\frac{N+1}{100} \right) \text{वां पद का आकार}$$

खण्डित श्रेणी में शतमक को निर्धारित करने के लिए संचयी आवृत्ति को ज्ञात करते हैं फिर उपरोक्त सूत्र का प्रयोग कर पद के आकार को संचयी आवृत्ति में देख लेते हैं।

सतत् श्रेणी में शतमक की गणना

सतत् श्रेणी में, शतमक को व्यक्तिगत एवं खण्डित श्रेणी की तरह निर्धारित नहीं किया जा सकता है। सतत् श्रेणी में, हमें शतमक के वास्तविक मूल्य को प्रक्षेपित निम्नलिखित सूत्र की मदद से करते हैं:

$$P_1 = \left(\frac{N}{100} \right) \text{वां पद का आकार}$$

शतमक 20 का निर्धारण जिस वर्ग में आता है:

$$P_{20} = \left(\frac{N}{100} \right) \text{वां पद का आकार}$$

यह उस समूह को निर्धारित करता है जिस वर्ग या समूह में वांछित शतमक आता है।

$$P_{20} = L + \frac{20 \left(\frac{N}{100} \right) - cf}{f} \times i$$

हम चतुर्थक, दशमक एवं शतमक कैसे ज्ञात करते हैं इसे उदाहरण के मदद से दिखला सकते हैं।

उदाहरण: नीचे दिये गये समंकों के लिए Q_1 , Q_3 , D_5 , P_{25} ज्ञात कीजिए।

सांख्यिकी विषय में प्राप्तांक: 15 21 26 30 40 45 50 54 60 65 70

हल

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4} \right) \text{वां पद का आकार}$$

$$= \left(\frac{11+1}{4} \right) \text{वां पद का आकार}$$

$$= \left(\frac{12}{4}\right)^{\text{वां पद का आकार या } 3^{\text{रा पद मूल्य}} = 26$$

$$Q_1 = 26$$

इस प्रकार,

$$Q_3 = 3 \left(\frac{N+1}{4}\right)^{\text{वां पद का आकार}}$$

$$= 9^{\text{वां पद का आकार}} = 60$$

अतः, तृतीय चतुर्थक का मूल्य $Q_3=60$ है।

$$D_5 = 5 \left(\frac{N+1}{10}\right)^{\text{वां पद का आकार}}$$

$$= 5 \left(\frac{11+1}{10}\right)^{\text{वां पद का आकार}} = 6^{\text{वां पद का आकार}} = 45$$

अतः पांचवे दशमक का मूल्य 45 अंक है।

$$P_{25} = 25 \left(\frac{11+1}{100}\right)^{\text{वां पद का आकार}}$$

$$= 25 \left(\frac{11+1}{100}\right)^{\text{वां पद का आकार}}$$

$$= 3^{\text{रा पद मूल्य का आकार}} = 26$$

$$P_{25}=26$$

अतः पच्चीसवें शतमक का मूल्य 26 है।

खण्डित श्रेणी में चतुर्थक, दशमक एवं शतमक की गणना:

उदाहरण: नीचे दिये गये समंकों से Q_1 , Q_3 , D_3 , एवं P_{70} की गणना करें।

X :	10	20	30	40	50	60	70
Y :	2	3	5	10	5	3	2

हल:

x	F	Cf
10	2	2
20	3	5
30	5	10
40	10	20
50	5	25
60	3	28
70	2	30

$$Q_1 = \left(\frac{N+1}{4}\right)^{\text{वां पद का आकार}}$$

$$= \left(\frac{30+1}{4}\right)^{\text{वां पद का आकार}}$$

$$= 7.75 \text{ पद}$$

इस प्रकार, जब संचयी आवृत्ति वाले स्तंभ में देखेंगे जिस संचयी आवृत्ति में 7.75 पद आता है अर्थात् 10 और इसके संगत पद 30 ही प्रथम चतुर्थक होगा।

अतः, $Q_1 = 30$

$$Q_3 = 3 \left(\frac{N+1}{4} \right) \text{ वां पद का आकार}$$

$$= 3 \left(\frac{30+1}{4} \right) \text{ वां पद का आकार} = \left(\frac{93}{4} \right) \text{ वां पद का आकार}$$

$$= 23.25 \text{ वां पद का आकार अर्थात् } 50$$

$$Q_3 = 50$$

$$D_3 = 3 \left(\frac{N+1}{10} \right) \text{ वां पद का आकार}$$

$$= 3 \left(\frac{30+1}{10} \right) \text{ वां पद का आकार}$$

$$= 9.3 \text{ वां पद का आकार} = 30$$

इस प्रकार, $D_3 = 30$

$$P_{70} = 70 \left(\frac{N+1}{100} \right) \text{ वां पद का आकार}$$

$$= 21.3 \text{ वां पद का आकार} = 50$$

सतत् श्रेणी में चतुर्थक, दशमक एवं शतमक की गणना

उदाहरण: निम्नलिखित समंकों से निम्न एवं उच्च चतुर्थक, तृतीय दशमक एवं 20^{वां} शतमक पद ज्ञात कीजिए।

मध्य विन्दू	2.5	7.5	12.5	17.5	22.5
आवृत्ति	7	18	25	30	20

हल: चूंकि हमें श्रेणी के मध्य विन्दू दिये गये हैं अतः हम सर्व प्रथम विभिन्न वर्गों की निम्न सीमा एवं उच्च सीमा ज्ञात करेंगे। इन सीमाओं को ज्ञात करने के लिए दो मध्य विन्दू के अन्तर को 2 से भाग देने के बाद भागफल से मध्य विन्दू को घटाने पर निम्न सीमा तथा जोड़ने पर उसी वर्ग की उच्च सीमा प्राप्त होगी।

$$\frac{7.5-2.5}{2} = \frac{5}{2} = 2.5 \quad | \text{ इस प्रकार, प्रथम वर्ग } 0-5, \text{ द्वितीय वर्ग } 5-10 \text{ आदि होंगे।}$$

Q_1, Q_2, D_3, P_{20} की गणना

वर्ग समूह	f	c.f
0-5	7	7
5-10	18	25
10-15	25	50
15-20	30	80
20-25	20	100

$N=100$

निम्न चतुर्थक, $Q_1 = \frac{N}{4}$ वां पद का आकार $= \frac{100}{4} = 25$ वां पद का आकार

Q_1 प्रथम चतुर्थक, 5-10 के अन्तर्गत आता है।

$$Q_1 = L + \frac{\frac{N}{4} - cf}{f} \times i$$

यहां, हमें दिया गया है, $L = 5, N/4 = 25, c.f. = 7, f = 18, I = 5$

$$Q_1 = 5 + \frac{25-7}{18} \times 5$$

$$Q_1 = 5 + 5 = 10$$

उच्च चतुर्थक, Q_3 , $\frac{3N}{4}$ पद का आकार = $\frac{3 \times 100}{4} = 75$ वां पद का आकार
 Q_3 पद 15-20 वाले वर्ग में आता है।

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3N}{4} - cf}{f} \times i$$

यहां, हमें दिया गया है, $L = 15$, $N/4 = 75$, c.f. = 50, $f = 30$, $i = 5$

$$Q_3 = 15 + \left(\frac{75 - 50}{30} \right) \times 5 = 15 + 4.17 = 19.17$$

तृतीय दशमक $D_3 = \frac{3N}{10}$ वां पद का आकार = $\frac{3 \times 100}{10} = 30$ वां पद

D_3 के लिए 30 वां पद 10-15 वाले वर्ग में आते हैं।

$$D_3 = L + \frac{\frac{3N}{10} - cf}{f} \times i$$

जहां, $L = 10$, $3N/10 = 30$, cf = 25, $f = 25$, $I = 5$

$$D_3 = 10 + \frac{30 - 25}{25} \times 5$$

$$D_3 = 10 + 1 = 11$$

अतः तृतीय दशमक का मूल्य 11 है।

बीसवीं शतमक:-

$$P_{20} = 20 \left(\frac{N}{100} \right) \text{ वां पद का आकार}$$

$$P_{20} = 20 \left(\frac{100}{100} \right) \text{ वां पद का आकार} = 20 \text{ वां पद}$$

$$P_{20} = L + \frac{\frac{20N}{100} - cf}{f} \times i$$

जहां, $L = 5$, $20N/100 = 20$, cf = 7, $f = 18$, $i = 5$

$$P_{20} = 5 + \frac{20 - 7}{18} \times 5$$

$$P_{20} = 5 + 3.61 = 8.61$$

अतः अभीष्ट बीसवीं शतमक का मूल्य 8.61 है।

5.6 इकाई का सारांश

- बहुलक:** बहुलक किसी अवलोकन के श्रेणी का वह मूल्य होता है जिसकी आवृत्ति अधिकतम होती है। दूसरे शब्दों में, बहुलक चर का वह मूल्य होता है जो श्रेणी में अधिकतम बार मौजूद होता है।
- चतुर्थक:** चतुर्थक वह मूल्य होता है जो श्रेणी या कुल आवृत्ति को चार बराबर भागों में विभक्त करता है।
- दशमक:** दशमक वह मूल्य होता है जो पूरे श्रेणी या कुल आवृत्ति को 10 बराबर भागों में विभाजित करता है।
- शतमक:** शतमक वह मूल्य है जो पूरे श्रेणी या कुल आवृत्ति को 100 बराबर भागों में बांटता है।

5.7 मुख्य शब्द

- द्वि-बहुलक वितरण: वितरण जिसमें दो बहुलक मूल्य हों।
- दशमक: आवृत्ति को 10 बराबर समूहों में विभाजित करता है।

5.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

- (i) बहुलक वह मूल्य होता है जो प्रायः श्रेणी के वितरण के मध्य में स्थित होता है।
- (ii) बहुलक, जूते के आकार को मापने का एक बेहतर औसत है।
- (iii) सतत् श्रेणी में बहुलक को गणना करने के लिए निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$\text{बहुलक, या } M_0 = L + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

- नीचे के सारणी से Q_1 , D_7 , P_{52} की गणना करें।

X	0-100	100-200	200-300	300-400	400-500
f	5	12	18	10	5

- निम्नलिखित वितरण से बहुलक की गणना करें।

प्राप्तांक	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70
छात्रों की संख्या	12	18	22	27	17	23	19	8

5.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

- (i) गलत, (ii) सत्य, (iii) सत्य
- $Q_1 = 162.5$, $D_7 = 300$, $P_{52} = 250$
- बहुलक = 46.6

5.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

- बहुलक के गुण एवं सीमाओं का उल्लेख करें।
- बहुलक क्या हैं? चित्रमय तरीके से इसे कैसे चिह्नित किया जाता है।

5.11 सन्दर्भ पुस्तकें

89. J. K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
90. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
91. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
92. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
93. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
94. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
95. अवरस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
96. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
97. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
98. Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.

99. R.P. Hooda, “Statistics for Business and Economics”, Mac Millan India ltd., Delhi, India.

खण्ड—III

इकाई— 06

अपकिरण की मापें—I: परिसर, माध्य एवं चतुर्थक विचलन

प्रारूप:

- 6.1 भूमिका
- 6.2 अपकिरण की माप का अर्थ
 - 6.2.1 एक अच्छे विचरण की माप की वांछित विशेषताएँ
- 6.3 विस्तार
- 6.4 चतुर्थक विचलन ; अर्द्ध—अन्तर चतुर्थक विस्तार
- 6.5 माध्य विचलन
- 6.6 माध्य विचलन की विशेषताएँ
- 6.7 इकाई का सारांश
- 6.8 मुख्यशब्द
- 6.9 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 6.10 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- दिये गये आवृत्ति वितरण के समुच्च का परास एवं चतुर्थक विस्तार को ज्ञात करना।
- दिये गये संमंक के माध्य विचलन एवं माध्य विचलन गुणांक को जानना।
- प्रमाप विचलन एवं उसके गुणांक से संबंधित प्रश्नों को हल करना।
- विचरण गुणांक का पता लगाना।

6.1 भूमिका (Introduction)

एक आवृत्ति वितरण में अधिकांश पद यद्यपि औसत के इर्द—गिर्द होते हैं फिर भी बहुत सारे पद औसत से दूर दूर तक बिखरे होते हैं। वितरण में पदों के औसत से बिखराव/विचलन को मापने के लिए कुछ मापों की गणनाएँ की जाती हैं उन्हें अपकिरण की मापें भी कहते हैं।

इस प्रकार विभिन्न आवृत्ति वितरण के विचलन की कोटि भी अलग होगी। विचलन की कोटि को विचलन के माप द्वारा निरूपित किया जाता है।

इस इकाई में विचलन, विस्तार, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन के बारे में अध्ययन करेंगे।

6.2 अपकिरण के माप विचलन (Measure of Dispersion)

विचलन (अपकिरण) वितरण के विभिन्न पद मूल्यों का औसत से औसत बिखराव की माप करता है। विचलन को मापने के लिए विभिन्न माप निम्नलिखित हैं—

1. विस्तार (Range)
2. चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)
3. माध्य विचलन (M.D.)
4. प्रमाप विचलन (S.D.)

उपरोक्त चार विचलनों में से, प्रमाप विचलन सबसे ज्यादा विश्वसनीय एवं प्रयोग किया जाने वाला माप है।

उपरोक्त विचलन के सभी मापों को विचलन के निरपेक्ष माप के नाम से जानते हैं। निरपेक्ष माप आवृत्ति वितरण में विचलन की कोटि को परिलक्षित करता है। जबकि, दो या दो से अधिक आवृत्ति वितरण में विचलन को तुलना करनी हो तो विचलन के सापेक्षिक माप को परिभाषित किया जाता है। सापेक्षिक माप जो उपरोक्त सभी विचलन के निरपेक्ष मापों से संबंधित है, वे निम्नलिखित हैं—

1. विस्तार का गुणांक

2. चतुर्थक विचलन का गुणांक
3. माध्य विचलन का गुणांक
4. प्रमाप विचलन गुणांक

सापेक्ष माप, मापक इकाई से स्वतंत्र होते हैं। और इसलिए, तुलना के लिए ज्यादा उपयोगी होता है।

6.2.1 अपकिरण के एक अच्छे माप की विशेषताएँ

विचलन के अच्छे माप के वांछित बातें निम्नलिखित हैं—

1. यह समझने में आसान होना चाहिए। इसकी गणना करने की पद्धति एकदम सरल होना चाहिए।
2. यह कठोरता पूर्वक परिभाषित किया जाना चाहिए।
3. इसे सभी मूल्यों व पदों पर आधारित होना चाहिए।
4. यह असामान्य चरम मूल्यों से अधिक स्तर तक प्रभावित नहीं होना चाहिए।
5. इसे आगे, बीजगणितीय संक्रियाओं लायक होना चाहिए।
6. इसे स्थाई होना चाहिए।

6.3 विस्तार (Range)

विस्तार श्रेणी के अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्य के अवलोकनों के बीच अन्तर होता है।

यदि H श्रेणी के अधिकतम मूल्य वाली अवलोकन हो तथा L श्रेणी का न्यूनतम मूल्य वाली अवलोकन हो तब विचलन का विस्तार, $R = H - L$

विचलन के सापेक्ष माप जिसका प्रयोग आवृत्ति वितरणों के बीच तुलना करने के लिए करते हैं, विस्तार का गुणांक कहते हैं। यह R का गुणांक है।

अर्थात्, विस्तार का गुणांक, $R = \frac{H-L}{H+L}$

विस्तार को समझना सरल है। इसे गणना करना आसान है। जब आंकड़ों के गहन अध्ययन या विश्लेषण की आवश्यकता न हो तब विस्तार का प्रयोग किया जा सकता है। वस्तु उद्योग जहाँ सांख्यिकीय गुणवत्ता नियंत्रण की आवश्यकता होती है, विस्तार का प्रयोग किया जाता है।

चूँकि, विस्तार चरम मूल्यों पर आधारित होते हैं, इसलिए इनमें उच्चावचन ज्यादा होता है। यह असामान्य चरम मूल्यों से बहुत ज्यादा प्रभावित होता है, फलतः इसे अध्ययन व शोध कार्य में लागू नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण 1

10 पूर्व विश्वविद्यालय छात्रों के आयु से संबंधित समंक से विस्तार एवं विस्तार के गुणांक ज्ञात करें।

आयु (वर्ष में): 16, 18, 18, 16, 18, 20, 17, 19, 16, 24

हल: श्रेणी के उच्चतम मूल्य एवं न्यूनतम मूल्य हैं, $H = 24$ वर्ष एवं $L = 16$ वर्ष।

अतः विस्तार, $R = H - L = 24 - 16 = 8$ वर्ष।

विस्तार का गुणांक -

$$R = \frac{H-L}{H+L} = \frac{24-16}{24+16} = 0.2$$

6.4 चतुर्थक विचलन (अर्द्ध-अन्तर चतुर्थक विस्तार)

विस्तार या परास की सबसे बड़ी कमजोरी है कि यह चरम मूल्यों पर आधारित है, फलतः असामान्य चरम मूल्यों से काफी हद तक प्रभावित होती है। इन त्रुटियों को चतुर्थक विचलन में शुद्ध किया जाता है। यह केवल न्यूनतम एवं उच्चतर चतुर्थक पर आधारित होते हैं, इस प्रकार चतुर्थक विचलन निम्न रूप से है—

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

जहाँ, Q. D. = चतुर्थक विचलन

Q_3 = तृतीय या उच्चतम चतुर्थक

Q_1 = प्रथम या न्यूनतम चतुर्थक

चतुर्थक पर आधारित विचलन के सापेक्ष माप को चतुर्थक विचलन का गुणांक कहते हैं। ये निम्नलिखित है—

$$\text{चतुर्थक विचलन गुणांक, (Coefficient of Q.D.)} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

चतुर्थक विचलन की गणना आसानी से की जा सकता है। यह श्रेणी के अवलोकनों के आसामान्य चरम मूल्यों से अधिक प्रभावित नहीं होते हैं। लेकिन, चतुर्थक विचलन श्रेणी के सभी मूल्यों पर आधारित नहीं होते हैं। साथ ही, गणितीय संक्रियाओं के लिए सुविधाजनक नहीं होता है।

उदाहरण 2: निम्नलिखित संमंकों के लिए, चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन के गुणांक की गणना कीजिए।

प्रत्येक टोकरी में फलों की संख्या: 36, 43, 30, 37, 38, 35, 29, 38, 35, 32, 35,

36

हल: चतुर्थक विचलन ज्ञात करने के लिए, हमें सर्वप्रथम निम्न चतुर्थक एवं उच्चतम चतुर्थक ज्ञात करना होगा।

स्तंभ: 29, 30, 32, 35, 35, 35, 36, 36, 37, 38, 38, 43

न्यूनतम चतुर्थक है,

$$Q_1 = \left[\frac{(n+1)}{4} \right]^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य}$$

$$Q_1 = (3.25)^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य}$$

$$Q_1 = 32 + 0.25 (35-32) = 32.75$$

उच्चतम चतुर्थक है,

$$Q_3 = \left[\frac{3(n+1)}{4} \right]^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य}$$

$$Q_3 = (9.75)^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य}$$

$$Q_3 = 32 + 0.75 (38-37) = 37.75$$

इस प्रकार चतुर्थक विश्लेषण,

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{37.75 - 32.75}{2}$$

$$= 2.5 \text{ फल/प्रति टोकरी।}$$

चतुर्थक विचलन के गुणांक,

$$\text{Coefft Q.D.} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{37.75 - 32.75}{37.75 + 32.75} = 0.0709$$

6.5 माध्य विचलन (Mean Deviation)

माध्य विचलन से तात्पर्य है कि केन्द्रीय माध्य से दिये गये श्रेणी के अवलोकनों का औसत विचलन जिसे केन्द्रीय माध्य से माध्य विचलन की निरपेक्ष माप कहा जाता है। इस प्रकार, अवलोकन $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ के सामानान्तर माध्य से विचलन निम्नलिखित है,

$$M.D. (\bar{x}) = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n}$$

सारणि आंकड़ों की स्थिति में, (खण्डित के साथ-साथ सतत् रेणी में भी), सामानान्तर माध्य से माध्य विचलन निम्न प्रकार से है,

$$M.D. (\bar{x}) = \frac{\sum f |x - \bar{x}|}{N}$$

किसी श्रेणी के माध्यिका 'M' से माध्य विचलन को निम्न रूप से इंगित किया जा सकता है,

$$M.D.(M) = \frac{\sum |x-M|}{n}$$

सारणिक आंकड़ों की स्थिति में, माध्यिका से माध्य के विचलन निम्न रूप से हो सकता है,

$$M.D.(M) = \frac{\sum f|x-M|}{N}$$

यहां, $|x_1 - \bar{x}|, |x_2 - \bar{x}|, |x_3 - \bar{x}|, \dots, |x_n - \bar{x}|$ आदि में गणितीय या ऋणात्मक चिन्हों को नकार दिया गया है। माध्य से लिए गये, विचलनों के चिन्हों को अनदेखा कर दिया जाता है क्योंकि चिन्हों को सम्मिलित करने पर इसके बीज गणितीय योग शून्य के बराबर होता है। माध्य विचलन को किसी भी केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप जैसे माध्य, माध्यिका, बहुलक आदि से विचलन निकालकर माध्य की गणना किया जा सकता है। लेकिन, माध्य विचलन न्यूनतम होता है यदि इसे माध्यिका (माध्यिका के न्यूनतम संबंधी गुण) से मापी गयी हो। इसी कारण से, सामान्यतया माध्य विचलन, माध्यिका से ज्यादा प्रयोग में लाया जाता है।

माध्य विचलन से संबंधित, माध्य विचलन के गुणांक को भी परिभाषित किया जा सकता है। माध्य एवं माध्यिका से लिये गये माध्य विचलन के गुणांक क्रमशः,

$$\text{Coefft. of } M.D. (\bar{x}) = \frac{M.D.(\bar{x})}{\bar{x}}$$

$$\text{Coefft. of } M.D. (M) = \frac{M.D.(M)}{M}$$

उदाहरण 3: माध्य से माध्य विचलन एवं माध्य से माध्य विचलन गुणांक की गणना करें।

प्लांट की उंचाई (सेन्टीमीटर में): 140, 147, 143, 146, 144।

हल:

$$\text{माध्य, } \bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

X	$ x - \bar{x} $
140	4
147	3
143	1
146	2
144	0
720	10

$$\text{माध्य} = \frac{720}{5} = 144 \text{ cms.}$$

माध्य से माध्य विचलन

$$M.D.(\bar{x}) = \frac{\sum |x - \bar{x}|}{n} = \frac{10}{5} = 2 \text{ cms.}$$

$$\text{Coefft. of } M.D. (\bar{x}) = \frac{M.D.(\bar{x})}{\bar{x}} = \frac{2}{144} = 0.0139$$

उदाहरण 4: माध्यिका से माध्य विचलन की गणना कीजिये।

बेचे गये टी. वी. सेट की संख्या: 18, 16, 16, 19, 12, 14, 20

हल:

Array (x)	$ x-M $
12	4
14	2
16	0
16	0
18	2
19	3
20	4
कुल	15

$$M = \left[\frac{(n+1)}{2} \right] \text{वां पद स्तंभ में}$$

माधिका से माध्य विचलन

$$M.D.(M) = \frac{\sum |x-M|}{n}$$

उदाहरण: माधिका से माध्य विचलन गुणांक ज्ञात करें।

प्राप्तांक	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
छात्रों की संख्या	2	10	20	15	10	3

हल:

वर्ग अन्तराल	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति c.f.	मध्य विन्दू x	$ x-M $	$f x-M $
0 – 10	2	2	5	24	48
10 – 20	10	12	15	14	140
20 – 30	20	32	25	4	80
30 – 40	15	47	35	6	90
40 – 50	10	57	45	16	160
50 – 60	3	60	55	26	78
कुल	60				596

$$\text{यहां, } \frac{N}{2} = 30.$$

अतः वर्ग 20–30 माधिका वर्ग का वर्ग अन्तराल है।

और इसलिए, $l = 20$, $c = 10$, $m = 12$ and $f = 20$

इसलिए माधिका,

$$M = l + \left[\frac{\left(\frac{N}{2} - m \right) \times c}{f} \right] = 20 + \left[\frac{(30-12) \times 10}{20} \right] = 29$$

माधिका से माध्य विचलन

$$M.D.(M) = \frac{\sum f|x-M|}{N} = \frac{596}{60} = 9.93$$

माधिका से माध्य विचलन गुणांक का मूल्य,

$$\text{Coefft. of } M.D.(M) = \frac{M.D.(M)}{M} = \frac{9.93}{29} = 0.3424$$

अतः माधिका से माध्य विचलन गुणांक का वांछित मूल्य 0.3424 है।

6.7 इकाई का सारंश

इस इकाई में हमने सांख्यिकी में विचरण की अवधारणा को विभिन्न संख्यात्मक उदाहरणों के माध्यम से अध्ययन किया। इसमें हमने परिसर/परास, चतुर्थक विचलन, प्रत्येक को उचित उदाहरण के मदद से अवधारणाओं की व्याख्या किया। इकाई के अन्त में, हमने माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन का भी अध्ययन किया। उचित उदाहरण की मदद से माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन गणना करने के चरण का भी वर्णन किया गया है।

आपने केन्द्रीय प्रवृत्ति का माप के अतिरिक्त किसी समंकमाला के अपकिरण या बिखराव के वांछित संख्यात्मक उदाहरण के साथ अध्ययन किया है। किसी समंकमाला के आंकड़ों के बीच बिखराव की माप को ही अपकिरण की माप कहते हैं।

श्रेणी का परिसर, अधिकतम एवं न्यूनतम चर मूल्यों के अन्तर को ही परिसर कहते हैं। यह स्पष्ट है कि परिसर एक प्रदर्शनात्मक माप है जो श्रृंखला के बिखराव को अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्य के अन्तर के रूप में व्यक्त करता है।

अब आप यह भी जान चुके हैं कि समंक के बिखराव के किसी मात्रा को मापने के लिए अपकिरण के माप का उपयोग किया जा सकता है। ऐसे कुछ अपकिरण के माप, परिसर, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन एवं प्रमाप विचलन आदि हैं। एक सांख्यिकीय अपकिरण की माप एक वास्तविक संख्या शून्य है अर्थात् सभी समंक एक प्रकार के हों एवं यह बिखराव बढ़े जैसे ही समंक में विविधता बढ़े। यह शून्य से कम नहीं हो सकता है। अपकिरण के माप के ज्यादातर माप की इकाईयाँ वहीं है जिसमें समंकों को मापा गया है। दूसरे शब्दों में, यदि किसी चर मूल्य का मापक इकाई, मीटर या सेकेण्ड हो तब अपकिरण के माप भी इसी इकाई में होता है।

6.8 मुख्य शब्द

- **विचरण (अपकिरण):** यह चर मूल्य के औसत से विचलन की विशेषता है।
- **परिसर:** यह समंकमाला के अधिकतम एवं न्यूनतम चर मूल्यों के अन्तर को दर्शाता है।
- **माध्य विचलन:** माध्य विचलन किसी समंकमाला के केन्द्रीय मूल्यों या औसत से निरपेक्ष विचलन को प्रदर्शित करता है।
- **प्रमाप विचलन:** प्रमाप विचलन किसी समंकमाला के सभी पदों का माध्य से विचलन के वर्गों के मूल औसत है।

6.9 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

1. एक वितरण का उच्चतम एवं न्यूनतम चतुर्थक क्रमशः 76 रुपये एवं 47 रुपये हैं। चतुर्थक विचलन एवं चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना करें।
2. एक आवृत्ति वितरण में दूल्हनों के आयू का न्यूनतम एवं उच्चतम चतुर्थक का योग 44 वर्ष तथा दोनों चतुर्थकों का अन्तर 6 वर्ष है। इनके आयू का चतुर्थक विचलन गुणांक की गणना करें।
3. एक सर्वेक्षण के 80 योजनागत एवं 60 गैर-योजनागत परिवारों के बच्चों के संख्या से संबंधित आंकड़े निम्नलिखित रूप से दिये गये हैं।

	Q_1	Q_2	Q_3
योजनागत परिवार	1	2	2
गैर-योजनागत परिवार	3	4	6

योजनागत एवं गैर-योजनागत परिवारों के बच्चों के संख्या में विचरण की तुलना कीजिए।

4. नीचे 65 महिलाओं के प्रथम बार गर्भावती होने के उम्र से संबंधित वितरण नीचे दिया गया है। माध्य विचलन की गणना करें।

आयु (वर्ष में)	स्त्री (f)	मध्य विन्दू -x	fx	$ x-\bar{x} $	$f x-\bar{x} $
18 – 22	20	20	400	4	80
22 – 26	30	24	720	0	0
26 – 30	11	28	308	4	44
30 – 34	3	32	96	8	24
34 – 38	1	36	36	12	12
कुल	65	-	1560		160

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{N} = \frac{1560}{65} = 24 \text{ years}$$

माध्य से माध्य विचलन,

$$M.D.(\bar{x}) = \frac{\sum f|x-\bar{x}|}{N} = \frac{160}{65} = 2.462 \text{ years}$$

अतः स्त्रियों के प्रथम गर्भावती के आयु का माध्य विचलन 2.462 है।

6.10 सन्दर्भ पुस्तकें

100. J. K. Thukral, “Business Statistics” Taxmann Publications (P.) ltd. New Delhi, India.
101. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, “Fundamentals of Statistics”, Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
102. S.P. Gupta, “Statistical Methods”, Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
103. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
104. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
105. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
106. अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण , भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
107. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
108. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
109. Digambar Patri, “Business Statistics”, KaIyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, “Business Statistics”, Pearson publication, Delhi, India.
110. R.P. Hooda, “Statistics for Business and Economics”, Mac Millan India ltd., Delhi, India.

खण्ड—III

इकाई 7

विचलन की मापें II: प्रमाप विचलन एवं विषमता की मापें

संरचना

- 7.1 भूमिका
- 7.2 प्रमाप विचलन
 - 7.2.1 मानक विचलन के लक्षण
 - 7.2.2 विचरण गुणांक
 - 7.2.3 प्रसरण एवं विचलन गुणांक
- 7.3 लॉरेंज वक्र
- 7.4 आघूर्ण या परिघात
- 7.5 विषमता
 - 7.5.1 विषमता की माप
- 7.6 पृथुशीर्षत्व
- 7.7 इकाई का सारांश
- 7.8 मुख्य शब्द
- 7.9 अपने प्रगति का मुल्यांकन (बहुविकल्पीय/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 7.10 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 7.11 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न
- 7.12 संदर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप इस योग्य होंगे कि:

- प्रसरण एवं विचलन के गुणांक की गणना
- 'लॉरेंज वक्र' का प्रयोग करके औसत से विचरण ज्ञात करना
- आघूर्ण की अवधारणा एवं उसके महत्व का वर्णन करना
- पता लगाना कि कोई आवृत्ति वितरण विषम हैं
- कार्ल पीर्यसनस् के विषमता की माप
- बॉवले एवं केली के विषमता के माप में अन्तर
- पृथुशीर्षत्व के बारे में चर्चा करना

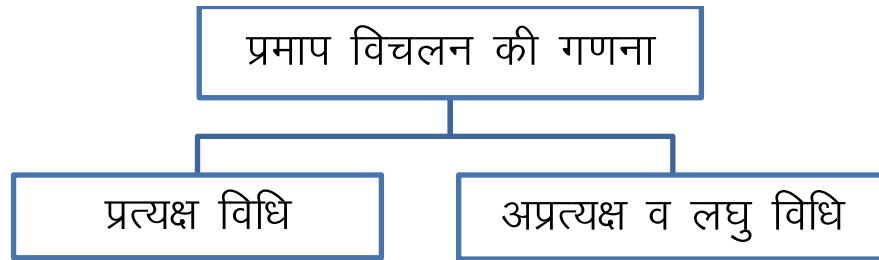
7.1 भूमिका

पिछले इकाई में, हमने अपकिरण की मापों का अध्ययन किया है। वर्तमान इकाई में प्रसरण, आघूर्ण, विषमता एवं पृथुशीर्षत्व एवं विचलन की माप के प्रयोगों के बारे में अध्ययन करेंगे। पूरी श्रृंखला के माप को ही आघूर्ण कहते हैं जिसकी विशेषता का निर्वचन जब करते हैं, तब यह वितरण के बनावट के बारे में सूचनाओं का अम्बार प्रदान करता है। विषमता एवं पृथुशीर्षत्व ऐसे शब्द हैं जो वितरण के स्वरूप एवं सममितता को प्रदर्शित करता है। विषम या 'स्क्यूड' शब्द का प्रयोग उस स्थिति के लिए किया जाता है कि वितरण के अधिकांश पद किसी एक तरफ ही संकेन्द्रीत होते हैं। पृथुशीर्षत्व समकमाला या वितरण के शीर्ष के बारे में बताता है।।

7.2 प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

परिसर या विस्तार केवल श्रेणी के अधिकतम एवं न्यूनतम पद मूल्य पर आधारित होती है। चतुर्थक विचलन केवल चतुर्थक पर आधारित होता है। लेकिन, ये माप श्रेणी के सभी पदों पर आधारित नहीं होते हैं। यद्यपि, माध्य विचलन श्रेणी के सभी अवलोकनों पर आधारित होते हैं, किन्तु यह गणितीय विवेचना के लिए सुविधाजनक नहीं होता है। और इसीलिए, हम प्रमाप विचलन की गणना करते हैं जो सभी अवलोकनों पर आधारित होता है। किसी श्रेणी के

अवलोकनों के वे धनात्मक वर्ग मूल जिसे सामानान्तर माध्य से विभिन्न पदों से लिए गये विचलनों के वर्ग से प्राप्त किया जाता है, प्रमाप विचलन कहलाता है। इसे ग्रीक अक्षर (σ) द्वारा निरूपित किया जाता है। मानक विचलन की गणना निम्न विधियाँ हैं—



प्रमाप विचलन गणना करने की विधियाँ (Methods of Calculation of Standard Deviation)

श्रेणी	प्रत्यक्ष विधि	अप्रत्यक्ष विधि
1. व्यक्तिगत श्रेणी	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \{X - \bar{X}\}^2}{N}}$ जहाँ, σ = मानक विचलन X = चर की इकाई $\bar{X}$ = श्रेणी का माध्य N = पदों की संख्या	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum d_x^2}{N} - \left\{ \frac{\sum dx}{N} \right\}^2}$ जहाँ, σ = मानक विचलन A = कल्पित माध्य $dx^2 = (X-A)^2$ एवं कल्पित माध्य $dx = (X-A)$ = माध्य से विचलन N = पदों की संख्या
2. खण्डित श्रेणी	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f \{X - \bar{X}\}^2}{N}}$ जहाँ, σ = मानक विचलन X = चर की इकाई f = पद की आवृत्ति $\bar{X}$ = श्रेणी का माध्य N = पदों की संख्या	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f d_x^2}{N} - \left\{ \frac{\sum f dx}{N} \right\}^2}$ जहाँ, σ = मानक विचलन $dx^2 = (X-A)^2$ $dx = (X-A)$ N = पदों की संख्या f = पद की आवृत्ति
3. सतत् श्रेणी	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f \{x - \bar{X}\}^2}{N}}$ जहाँ, σ = मानक विचलन x = चर की इकाई f = पद की आवृत्ति $\bar{X}$ = श्रेणी का माध्य N = पदों की संख्या	$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f d_x^2}{N} - \left\{ \frac{\sum f dx}{N} \right\}^2}$ जहाँ, σ = मानक विचलन A = कल्पित माध्य $dx = \frac{(X-A)}{h}$ और h = वर्ग अन्तराल N = पदों की संख्या f = पद की आवृत्ति

इस प्रकार, यदि $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ किसी श्रेणी के पद मूल्य हों तब, प्रमाप विचलन निम्न रूप से निरूपित किये जा सकते हैं,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

किसी सारणीकृत समंक (खण्डित के साथ-साथ सतत् श्रेणी) में हों तब श्रृंखला के लिए प्रमाप विचलन है,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f(x - \bar{x})^2}{n}}$$

प्रमाप विचलन के वर्ग को ही प्रसरण कहते हैं।

इस प्रकार, यदि $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ किसी श्रृंखला के चर मूल्य हों तब, प्रसरण को निम्न रूप से इंगित किया जा सकता है,

$$\text{Var}(x) = \sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$$

यह श्रेणी के समान्तर माध्य का विभिन्न पदों से लिए गये विचलनों के वर्ग का माध्य है।

प्रमाप विचलन की गणना करने के लिए निम्नलिखित गणितीय सूत्र का प्रयोग किया जा सकता है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2} \quad \text{व्यक्तिगत श्रेणी के लिए,}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2} \quad \text{वर्गीकृत समंक या खण्डित एवं सतत् श्रेणी के लिए}$$

यदि किसी श्रेणी के चर के मूल को a एवं पैमाने c से परिवर्तित किया जाय, अर्थात्, यदि $u = \frac{x-a}{c}$ तब इसे निम्न रूप से दिखाया जा सकता है,

$$S.D.(x) = c \times S.D.(u)$$

$$\text{एवं यह भी, } \text{Var}(x) = c^2 \times \text{Var}(u)$$

यह ध्यान देना चाहिए कि प्रसरण केन्द्रीय माध्य से विभिन्न पदों के लिए गये विचलनों के वर्ग का माध्य है। प्रसरण को सारणीयन वर्ग इकाई में किया जाता है। प्रमाप विचलन, इसी प्रसरण का वर्ग मूल होते हैं, अतः यह माध्य के इर्द-गिर्द अवलोकनों के फैलाव को, समंक के ही इकाई में मापा जाता है।

प्रमाप विचलन वह मूल्य होता है जिसे माध्य का चरों से लिए गये विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्ग मूल (RMS-Root Mean Square) होता है। उदाहरण के लिए, एक समग्र में 4, 8 पद हैं जिसका माध्य 6 है एवं माध्य से लिए गये विचलन -2, 2 हैं। इन विचलनों के वर्ग 4, 4 हैं एवं इन विचलनों के वर्ग का औसत या माध्य अर्थात् इनके (प्रसरण), 4 है। अतः प्रमाप विचलन का मूल्य 2 है।

प्रमाप विचलन सांख्यिकीय अपकरण का सबसे सामान्य माप है, जो यह मापने का प्रयास करता है कि किसी समंकों के चर मूल्य किस प्रकार वितरित व अवस्थित व फैले हुए हैं। यदि समंक बिन्दु या चर मूल्य विल्कुल माध्य के आस-पास हों तब प्रमाप विचलन न्यूनतम होंगे। साथ ही, यदि अधिक चर मूल्य माध्य से काफी दूर अवस्थित हो या फैले हों तब प्रमाप विचलन का मूल्य अधिकतम होंगे। यदि सभी चर मूल्य माध्य के बराबर हैं तब प्रमाप या मानक विचलन के मान शून्य होंगे।

एक बड़ा मानक विचलन इंगित करता है कि समंक मूल्य माध्य से काफी दूरी तक अवस्थित हैं जबकि, छोटा या न्यूनतम मानक विचलन, समंक विन्दु के माध्य के इर्द गिर्द संकेन्द्रण को प्रदर्शित करता है।

उदाहरण 1: निम्नलिखित 5 बच्चों की उंचाई को सेंटीमीटर में दिया गया है। प्रमाप विचलन की गणना करें।

उंचाई (सेमी): 130, 137, 136, 142, 135

हल: (प्रत्यक्ष विधि के द्वारा)

x	$x - \bar{x}$	$(x - \bar{x})^2$	$u = x - 135$	u^2
130	-6	36	-5	25
137	1	1	2	4
136	0	0	1	1
142	6	36	7	49
135	-1	1	0	0
680		74	5	79

श्रेणी के लिए सामानान्तर माध्य, $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{680}{5} = 136 \text{ cms.}$

श्रृंखला के लिए प्रमाप विचलन, $\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{74}{5}}$
 $= \sqrt{14.8} = 3.85 \text{ cms.}$

अप्रत्यक्ष विधि के द्वारा:

यहां, मूल चार के मान को सूविधाजनक चर मूल में परिवर्तित करते हैं।

इस प्रकार, माना कि $u = x - a = x - 135$. (यहां, $c = 1$)

तब, प्रमाप विचलन है, $\sigma_x = \sigma_u$

$$= \sqrt{\frac{\sum u^2}{n} - \left(\frac{\sum u}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{79}{5} - \left(\frac{5}{5}\right)^2}$$

$$= \sqrt{14.8} = 3.85 \text{ cms.}$$

उदाहरण 2: एक दूकान में प्रतिदिन प्रेसर कुकर के बिक्री से संबंधित समकों का प्रयोग करके मानक विचलन की गणना कीजिए।

कूकर की संख्या	12	13	14	15	16	17	18	19
दिनों की संख्या	1	0	4	12	20	15	6	2

हल: (प्रत्यक्ष विधि के द्वारा)

x	F	Fx	fx^2
12	1	12	144
13	0	0	0
14	4	56	784
15	12	180	2700
16	20	320	5120
17	15	255	4335
18	6	108	1944
19	2	38	722
कुल	60	969	15749

प्रमाप विचलन,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fx^2}{N} - \left(\frac{\sum fx}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{15749}{60} - \left(\frac{969}{60}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.6608} = 1.289 \text{ cookers}$$

अप्रत्यक्ष विधि के द्वारा:

X	F	u = x - 16	fu	fu ²
12	1	-4	-4	16
13	0	-3	0	0
14	4	-2	-8	16
15	12	-1	-12	12
16	20	0	0	0
17	15	1	15	15
18	6	2	12	24
19	2	3	6	18
कुल	60	-	9	101

मानक विचलन,

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} = \sqrt{\frac{101}{60} - \left(\frac{9}{60}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1.6608} = 1.289 \text{ cookers}$$

उदाहरण 3: नीचे व्यक्तियों के डायस्टोलिक रक्त चॉप के आवृत्ति वितरण दिये गये हैं, इन संमंकों का प्रयोग करके मानक विचलन एवं प्रसरण ज्ञात करें।

रक्त चॉप (मी.मी.)	78-80	80-82	82-84	84-86	86-88	88-90
व्यक्तियों की संख्या	3	15	26	23	9	4

हल:

अप्रत्यक्ष विधि से मानक विचलन की गणना

वर्ग अन्तराल	आवृत्ति (f)	मध्य बिन्दू (x)	$u = \frac{x-83}{2}$	fu	fu ²
78-80	3	79	-2	-6	12
80-82	15	81	-1	-15	15
82-84	26	83	0	0	0
84-86	23	85	1	23	23
86-88	9	87	2	18	36
88-90	4	89	3	12	36
Total	80	-		32	122

मानक विचलन,

$$\sigma = c \times \sqrt{\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N}\right)^2} = 2 \times \sqrt{\frac{122}{80} - \left(\frac{32}{80}\right)^2}$$

$$= 2 \times \sqrt{1.525 - 0.16} = 2 \times 1.168 = 2.336 \text{ mm}$$

प्रसरण,

$$\sigma^2 = c^2 \times \left[\frac{\sum fu^2}{N} - \left(\frac{\sum fu}{N} \right)^2 \right] = 4 \times \left[\frac{122}{80} - \left(\frac{32}{80} \right)^2 \right]$$

$$= 4 \times 1.325 = 5.46 \text{ (mm.)}^2$$

7.2.1 मानक विचलन के गुण व लक्षण

- मानक विचलन मूल के परिवर्तन से स्वतंत्र है पर पैमाने के परिवर्तन से चर मूल्य के निष्कर्ष में परिवर्तन हो सकता है।
- किसी भी समंकमाला व श्रृंखला के अवलोकनों के लिए, प्रमाप विचलन $\sigma \geq 0$.
- किसी श्रृंखला के लिए प्रमाप विचलन अन्य मूल-माध्य-वर्ग (RMS) से कम होता है।
- माना कि किसी श्रेणी के पदों की संख्या n_1 , माध्य $\bar{x}_1$ एवं मानक विचलन σ_1 साथ ही दूसरे श्रेणी के पदों की संख्या n_2 , माध्य $\bar{x}_2$ एवं प्रमाप विचलन σ_2 . तब, इन दो श्रेणियों n_1 एवं n_2 के संयुक्त मानक विचलन निम्नलिखित है—

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$$

जहां,

$$d_1 = \bar{x}_1 - \bar{x}, \quad d_2 = \bar{x}_2 - \bar{x},$$

$$\text{एवं} \quad \bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

उदाहरण 4: एक श्रेणी के 10 अवलोकनों के सामानान्तर माध्य 40 एवं उसका मानक विचलन 3 है। एक दूसरे श्रेणी के 5 अवलोकनों के सामानान्तर माध्य 46 एवं प्रमाप विचलन 2 है। उपरोक्त सूचनाओं का इस्तेमाल करके संयुक्त प्रमाप विचलन ज्ञात करें।

हल:

यहां, $n_1 = 10$, $n_2 = 5$, $\bar{x}_1 = 40$, $\bar{x}_2 = 46$, $\sigma_1 = 3$ एवं $\sigma_2 = 2$. मना कि $\bar{x}$ एवं σ संयुक्त माध्य तथा संयुक्त प्रमाप विचलन हो तब,

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2} = \frac{10 \times 40 + 5 \times 46}{10 + 5} = \frac{630}{15} = 42$$

$$d_1^2 = (\bar{x}_1 - \bar{x})^2 = (40 - 42)^2 = 4$$

$$d_2^2 = (\bar{x}_2 - \bar{x})^2 = (46 - 42)^2 = 16$$

दिये गये दोनों श्रेणियों के संयुक्त प्रमाप विचलन,

$$\sigma = \sqrt{\frac{n_1(\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}} = \sqrt{\frac{10(9 + 4) + 5(4 + 16)}{10 + 5}}$$

$$= \sqrt{15.33} = 3.92$$

7.2.2 विचरण के गुणांक (Coefficient of Variation)

विचरण के गुणांक, विचरण का एक सापेक्षिक माप है। इसका प्रयोग आवृत्ति वितरणों में विचरण का तुलना करने के लिए किये जाते हैं। यह एक प्रमाप विचलन को माध्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।

इस प्रकार,

$$\text{विचरण के गुणांक, } C.V. = \frac{\text{Standard deviation}}{\text{arithmetic mean}} \times 100$$

$$= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

विचरण के गुणांक मूल्य, किसी इकाई के माप से मुक्त होता है।

एक उच्चम विचरण गुणांक के मूल्य, इंगित करता है कि श्रेणी के अवलोकनों में विचरण की कोटि अधिकतम है एवं न्यूनतम विचरण गुणांक का मूल्य, श्रृंखला में अल्प विचलन को परिलक्षित करता है।

उदाहरण 5: उदाहरण 3 में दिये गये वितरण से विचरण के गुणांक की गणना कीजिए।

हल:

अभ्यास 3 में दिये गये वितरण का प्रमाप विचलन है, $\sigma = 2.336 \text{ mm}$.

$$\text{श्रेणी का सामानान्तर माध्य, } \bar{x} = a + \frac{c \sum fu}{N} = 83 + \frac{2 \times 32}{80} = 83.8 \text{ mm}.$$

$$\text{इस प्रकार, विचरण गुणांक, } C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{2.336 \times 100}{83.8} = 2.79\%$$

अतः दिये गये अभ्यास का अभीष्ट विचरण गुणांक 2.79 प्रतिशत है।

उदाहरण 6: किसी दो क्रिकेट खिलाड़ीयों द्वारा दस पारियों में बनाया गया रन निम्नलिखित हैं—

परियाँ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
खिलाड़ी A	31	48	13	51	38	43	50	36	47	82
खिलाड़ी B	51	5	12	83	37	112	42	18	79	20

1. दो खिलाड़ीयों में किस खिलाड़ी का औसत रन बेहतर है?
2. इनमें से किस खिलाड़ी के स्कोर में निरन्तरता या संगतता अधिक है।

हल:

यहां, दोनों खिलाड़ियों में से जिस खिलाड़ी के स्कोर का औसत या समान्तर माध्य अधिकतम होगा वहीं बेहतर खिलाड़ी होगा। जिसके स्कोर के विचरण गुणांक न्यूनतम हो उसी के खेल में स्थिरता होगी।

खिलाड़ी A एवं B के दौड़ का वितरण

खिलाड़ी A		खिलाड़ी B	
दौड़ (x)	x^2	दौड़ (x)	x^2
31	961	51	2601
48	2304	5	25
13	169	12	144
51	2601	83	6889
38	1444	37	1369
43	1849	112	12544
50	2500	42	1764
36	1296	18	324
47	2209	79	6241
82	6724	20	400
439	22057	459	32301

खिलाड़ी A

स्कोर का सामानान्तर माध्य, $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{439}{10} = 43.9$

$$\text{स्कोर का प्रमाप विचलन, } \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{22057}{10} - \left(\frac{439}{10}\right)^2} = 16.69$$

स्कोर का विचरण गुणांक,

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{16.69 \times 100}{43.9} = 38.02\%$$

खिलाड़ी B

स्कोर का सामानान्तर माध्य, $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{459}{10} = 45.9$

$$\text{खिलाड़ी बी के स्कोर का प्रमाप विचलन, } \sigma = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \left(\frac{\sum x}{n}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{32301}{10} - \left(\frac{459}{10}\right)^2} = 33.52$$

खिलाड़ी के स्कोर के विचरण गुणांक,

$$C.V. = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 = \frac{33.52 \times 100}{45.9} = 73.03\%$$

खिलाड़ी A एवं B के दौड़ के वितरण का सांख्यिकीय निर्वचन

सांख्यिकी उपकरण	खिलाड़ी A	खिलाड़ी B	टिप्पणियां
औसत स्कोर	43.9	45.9	माध्य (B) > माध्य (A) ∴ B ज्यादा बेहतर निष्पादन करता है
विचरण गुणांक	38.02%	73.03%	C.V. (A) < C.V. (B) ∴ खिलाड़ी A, बेहतर संगतता से निष्पादन करता है।

उदाहरण 7: निम्नलिखित सतत् श्रेणी के आवृत्ति वितरण से अप्रत्यक्ष विधि के द्वारा ज्ञात सामानान्तर माध्य एवं प्रमाप विचलन के मूल्य कमशः 135.3 एवं 9.6 है।

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	कूल
आवृत्ति (f)	2	5	8	18	22	13	8	4	80

वास्तविक वर्ग अन्तराल का निर्धारण करें।

हल: प्रमाप विचलन की गणना निम्नलिखित रूप से किया जा सकता है:

X	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	कुल
आवृत्ति (f)	2	5	8	18	22	13	8	4	80
fX	-8	-15	-16	-18	0	13	16	12	-16
fX ²	32	45	32	18	0	13	32	36	208

$$\text{प्रमाप विचलन} = \sigma = i \cdot \sqrt{\frac{\sum fdx^2}{N} - \left\{ \frac{\sum fdx}{N} \right\}^2}$$

उपरोक्त दिये गये मूल्यों को सूत्र में रखने पर,

$$9.6 = i \cdot \sqrt{\frac{208}{80} - \left(\frac{-16}{80} \right)^2} = i \cdot \sqrt{2.6 - 0.04}$$

$$9.6 = i \cdot \sqrt{2.56}$$

$$9.6 = i \cdot 1.6$$

$$i = 9.6/1.6 = 6$$

$$\text{सामानान्तर माध्य} = A + \frac{\sum fx}{n} \times i$$

प्रश्न में दिये गये मूल्य का प्रयोग करने पर,

$$135.3 = A + \frac{-16}{80} \cdot 6 = A - 1.2$$

$$A = 135.3 + 1.2 = 136.5$$

A या कल्पित माध्य का मध्य विन्दु X से संगत अन्तर 0 के बराबर है। जैसे कि अध्ययन की श्रेणी सतत् प्रकार की है जिसका वर्ग अन्तराल 6 है अतः X = 0 के लिए वर्ग अन्तराल होगा 136.5-3 से 136.5 + 3, अर्थात् 133.5-139.5। दूसरा इससे निम्न वर्ग अन्तराल 133.5-6 अर्थात् 127.5 से 133.5।

इसी प्रकार अन्य वर्ग अन्तराल की भी गणना की जा सकती है। इस प्रकार अन्य वर्ग अन्तराल निम्नलिखित हैं,

$$\begin{array}{cccc} 109.5-115.5 & 115.5-121.5 & 121.5-127.5 & 127.5-133.5 \\ 133.5-139.5 & 139.5-145.5 & 145.5-151.5 & 151.5-157.5 \end{array}$$

7.3 लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)

लॉरेंज वक्र औसत से विभिन्न चरमूल्यों के विचलनों को मापने की रेखाचित्र विधि है। इसका प्रयोग सर्वप्रथम डॉ. लॉरेंज द्वारा आय व सम्पत्ति में विषमता को मापने के लिए किया गया था। लेकिन, इसका प्रयोग इसी तरह के मापों में प्रयोग किया जा सकता है।

यह एक संचयी प्रतिशत वक्र होता है। इसमें दिये गये विभिन्न मदों को जोड़ते हुए संचयी आवृत्ति ज्ञात करके उसकी कुल संख्या के सापेक्ष संचयी प्रतिशत ज्ञात करते हैं फिर उन्हें ग्राफ पेपर पर अंकित करते हैं, ये मद सम्पत्ति, लाभ या कुल आय आदि से संबंधित हो सकते हैं।

लॉरेंज वक्र की रचना करने के लिए निम्नलिखित चरणों को आवश्यक रूप से पूरा किया जाना चाहिए:

1. प्रत्येक चरों के विभिन्न समूहों को प्रतिशत में परिवर्तित करें। इस प्रकार, यदि देश के लोगों के विभिन्न समूहों में आय के वितरण को जानना है तो सर्वप्रथम उन्हें कुल जनसंख्या के सापेक्ष प्रत्येक समूह को प्रतिशत में परिवर्तित किया जाना चाहिए; साथ ही संबंधित आय को भी इसी प्रकार प्रतिशत में परिवर्तित किया जाना चाहिए।
2. प्रथम चरण से प्राप्त दो समुच्चयों के प्रतिशत को संचयी प्रतिशत ज्ञात करने के लिए इनका संचयी योग निकालें।
3. उपरोक्त दो चरों के संचयी प्रतिशत को Y अक्ष एवं X अक्ष में प्लॉट या अंकित करें। Y अक्ष का पैमाना कटान विन्दू 0 से शुरू होकर उपर की ओर 100 तक तथा X अक्ष का पैमाना कटान विन्दू 100 से शुरू होकर अपनी दाहिनी ओर 0 मूल्य तक होगी। अर्थात् कटान विन्दू पर Y का मूल्य शून्य एवं X का मूल्य 100 के बराबर होंगे।
4. Y अक्ष के विन्दू 100 से एवं X अक्ष के विन्दू 0 को सीधी रेखा से मिलाने पर प्राप्त रेखा ही समान वितरण की रेखा कहा जाता है। यही रेखा बताती है कि दिये गये संमंकमाला के चरों में विचलन की मात्रा क्या है या उसमें असमानता का स्तर कितना है।
5. दिये गये संमंकमाला के प्रतिशत संचयी मूल्य को ग्राफ पेपर पर अंकित करके उस सामान्य रेखा से मिला देना चाहिए।

इस प्रकार, पांचवें चरण में प्राप्त की गई रेखा यदि सामान वितरण की रेखा से अधिक दूरी पर अवस्थित है तो वितरण में विचलन/असमानता अधिक होगा जो बृहत असमानता को प्रदर्शित करेंगे।

उदाहरण 8: निम्नलिखित सारणी में दो शहरों A एवं B के लोगों के आय को दिया गया है। संमकों को रेखाचित्र के द्वारा प्रदर्शित करें जिससे आय के वितरण में असमानता के स्तर ज्ञात हो सके।

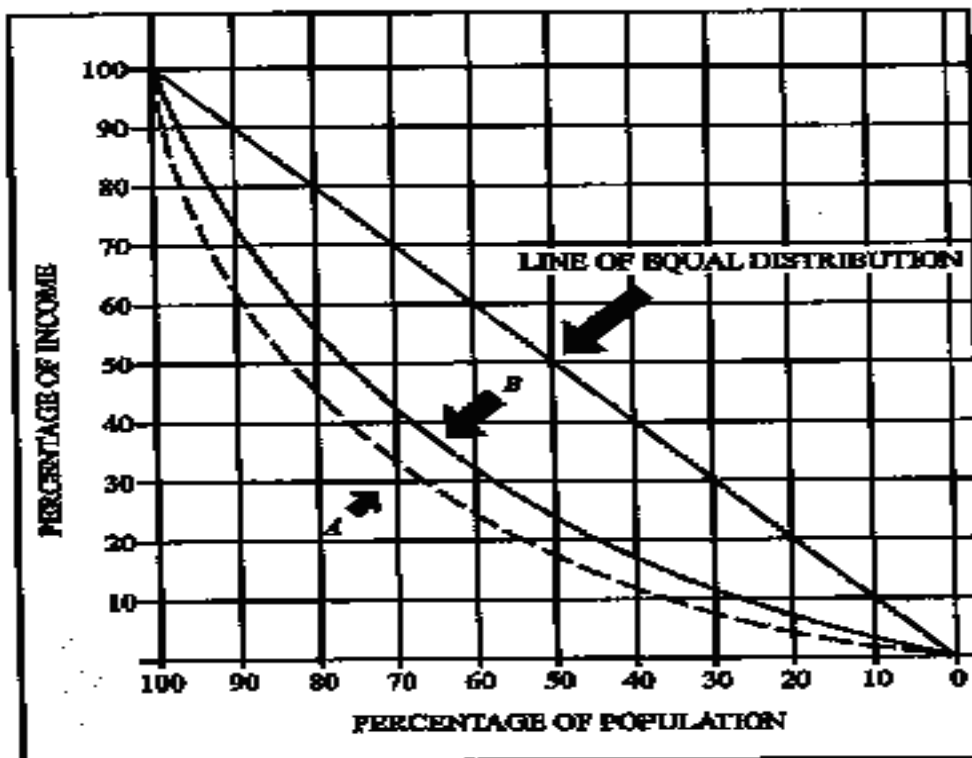
शहर A		शहर B	
व्यक्ति	मजदूरी (दैनिक)	व्यक्ति	मजदूरी (दैनिक)
100	75	50	80
100	100	70	120
100	150	30	60
100	225	25	140
100	325	100	200
100	375	45	200
100	450	30	140
100	600	80	460
100	850	20	120
100	1850	50	480
1000	5000	500	2000

हल: सर्वप्रथम हम संचयी प्रतिशत निम्नलिखित तरीके से करते हैं:

शहर A				शहर B			
व्यक्ति		मजदूरी (दैनिक)		व्यक्ति		मजदूरी (दैनिक)	
संचयी संख्या	संचयी प्रतिशत	संचयी संख्या	संचयी प्रतिशत	संचयी संख्या	संचयी प्रतिशत	संचयी संख्या	संचयी प्रतिशत
100	10	75	1.5	50	10	80	4
200	20	175	3.5	120	24	200	10
300	30	325	6.5	150	30	260	13
400	40	550	11	175	35	400	20
500	50	875	17.5	275	55	600	30
600	60	1250	25	320	64	800	40

700	70	1700	34	350	70	940	47
800	80	2300	46	430	86	1400	70
900	90	3150	63	450	90	1520	76
1000	100	500	100	500	100	2000	100

उपरोक्त समंक को निम्नलिखित तरीके से रेखाचित्र में अंकित करते हैं जो प्रतिदिन मजदूरी के वितरण में असामानता को प्रदर्शित करता है,



7.4 आघूर्ण (Moments)

आघूर्ण शब्द को यंत्र विद्या से लिया गया है, जहां 'बल के आघूर्ण' बताता है कि किसी बल के कारण लीवर के द्वारा केन्द्र बिन्दु पर घूमने की प्रवृत्ति या क्षमता कितनी है। बल F_1 का काउंटर दक्षिणावर्त पल F_1x_1 एवं बल F_2 का काउंटर दक्षिणावर्त पल F_2x_2 है।

एक आवृत्ति वितरण के लिए हम x को मूल विन्दू 0 से दूरी के रूप में कल्पना कर सकते हैं, एक बल जो आवृत्ति (f) के बराबर है क्रिया x से संबंधित है और इस प्रकार मूल विन्दू 0 के लिए आघूर्ण $\Sigma(x)$ के बराबर होंगे। यदि पूरे वितरण में सभी के योगदान को सम्मिलित किया जाये, तब आघूर्ण को $\Sigma f(x)$ से प्रदर्शित किया जाता है। यह किसी केन्द्र विन्दू पर लीवर के परिक्रमा को प्रदर्शित करेगा। इसमें शामिल पदों के योगदान को सही (चूंकि हम वितरण के आकार को निश्चित करना चाहते हैं) करने के लिए हम Σf से भाग देते हैं अर्थात् कुल पदों की संख्या से भाग देते हैं। इस प्रकार, प्रथम परिघात: शून्य के सापेक्ष, v_1' (nu one prime)

$$v_1' = \frac{\sum f(x)}{\sum f}$$

इसी प्रकार यंत्र विद्या की तरह, हम उच्च कोटि के आघूर्ण को भी उसके आवृत्ति f का गुणा x के घात से करके प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार,

$$v_2' = \frac{\sum fx^2}{\sum f},$$

$$v_3' = \frac{\sum fx^3}{\sum f}, \text{,,}$$

और अन्य आघूर्ण भी प्राप्त किया जा सकता है। इस प्रकार, आघूर्ण के लिए सामान्य सूत्र, $v_r' = \frac{\sum fx^r}{\sum f}$

आघूर्ण की गणना मूल विन्दू से गणना करने के बावजूद किसी अन्य विन्दू x_0 के सापेक्ष भी परिघात की गणना किया जा सकता है (उस बात के बारे में लीवर पट्टी को केन्द्र विन्दू के बराबर बनाकर कर सकते हैं). तब,

$$v_r = \frac{\sum f(x-x_0)^r}{\sum f} \text{ इस प्रकार, } v', v_r \text{ का एक विशेष स्थिति है, जहां, } x_0 = 0।$$

$$\mu = \frac{\sum f(x-\bar{x})^r}{\sum f}$$

माध्य के सापेक्ष आघूर्ण

आघूर्ण की श्रृंखला $\bar{X}$ के लिए अर्थात् माध्य के सापेक्ष आघूर्ण का विशेष महत्व है जिसे μ ('म्यू') से प्रदर्शित किया जाता है,

माध्य के सापेक्ष आवृत्ति वितरण के आघूर्ण का विशेष महत्व है। प्रथम केन्द्रीय आघूर्ण 0 (शून्य) एवं शून्यवां ($0^{\text{वां}}$) आघूर्ण, 1 के बराबर होता है। माध्य के सापेक्ष द्वितीय कन्द्रीय आघूर्ण, आवृत्ति का प्रसरण के बराबर अर्थात् प्रसरण होता है।

शून्यवां ($0^{\text{वां}}$) आघूर्ण μ_0 का निम्न रूप से व्यक्त किया जा सकता है,

$$\mu_0 = \frac{\sum f(x-\bar{x})^0}{\sum f}$$

लेकिन किसी भी संख्या या व्यंजक का घात शून्य होने पर उसका मान एक होता है, इससे यह बात स्पष्ट है कि,

$$\mu_0 = \frac{\sum f}{\sum f} = 1$$

सभी प्रकार के वितरण या श्रेणियों के लिये यह सत्य है।

$$\text{इसी प्रकार, } \mu_1 = \frac{\sum f(x-\bar{x})}{\sum f}$$

लेकिन, माध्य के परिभाषा के अनुसार, माध्य से विभिन्न पदों के विचलनों का योग शून्य के बराबर होता है अर्थात् $\sum f(x-\bar{x})$ का मान शून्य होगा और $\mu_1 = 0$ ।

यह सभी श्रेणियों के लिए सत्य है।

दूसरा, $\mu_2 = \sum f(x-\bar{x})^2 / \sum f$ जो प्रसरण के परिभाषा को प्रदर्शित करता है। इस प्रकार,

$$\mu_0 = 1$$

$$\mu_1 = 0$$

$$\mu_2 = \sigma^2$$

जो सभी प्रकार के श्रेणियों के लिए सत्य है।

यहाँ एक अन्य बात है जिसे आघूर्ण के संदर्भ में उद्धृत करना जरूरी है। हम यह देख चुके हैं कि माध्य से विचलन से कम राशियों का योग माध्य से विचलन के अधिक राशियों का योग बराबर होता है। यह ये प्रदर्शित करता है कि विचलनों के ऋणात्मक एवं धनात्मक चिन्ह निरस्त को जाते हैं। यह सभी वितरणों में होता है भले वो सममित या असममित प्रकार के श्रेणी हो, जिसके विचलनों के घात एक के बराबर हो।

यदि माध्यों से लिए गये विचलनों के घात एक सम संख्या हो, तब सभी विचलनों के मूल्य धनात्मक होंगे एवं इन्हें आगे रद करने की जरूरत नहीं है।

जब माध्यों से लिए गये विचलनों के घात कोई विषम संख्या एक को छोड़कर हो और ऋणात्मक विचलनों का योग धनात्मक विचलनों के योग के बराबर हो, तब श्रेणियाँ सममितीय कहलायेगी। इस प्रकार, सममितीय वितरण के लिए केवल,

$\mu_3 = 0$, $\mu_5 = 0$, $\mu_7 = 0$, इत्यादि।

इन्हीं कारणों से इन आघूर्णों को सममितता की माप कहा जाता है।

उदाहरण 9: निम्नलिखित संमकों से माध्य के सापेक्ष प्रथम चार आघूर्णों की गणना करें।

वर्ग अन्तराल:	0-10	10-20	20-30	30-40
आवृत्ति	1	3	4	2

हल: सर्वप्रथम हम आवृत्ति सारणी का निर्माण निम्नलिखित तरीके से करें।

वर्ग अन्तराल	X	F	$x = \frac{X-25}{10}$	Fx=	Fx ²	Fx ³	Fx ⁴
0-10	5	1	-2	-2	4	-8	+16
10-20	15	3	-1	-3	3	-3	+3
20-30	25	4	0	0	0	0	0
30-40	35	2	1	2	2	2	+2
				-3	9	-9	21

किसी माध्य के सापेक्ष आघूर्ण,

$$V_1 = \frac{-3 \times 10}{10} = -3,$$

$$V_2 = \frac{9}{10} \times 10^2 = 90,$$

$$V_3 = \frac{-9}{10} \times 10^3 = -900,$$

$$V_4 = \frac{21}{10} \times 10^4 = 21000$$

नोट: यहाँ, $x = \frac{X-25}{10}$ है।

7.5 विषमता (Skewness)

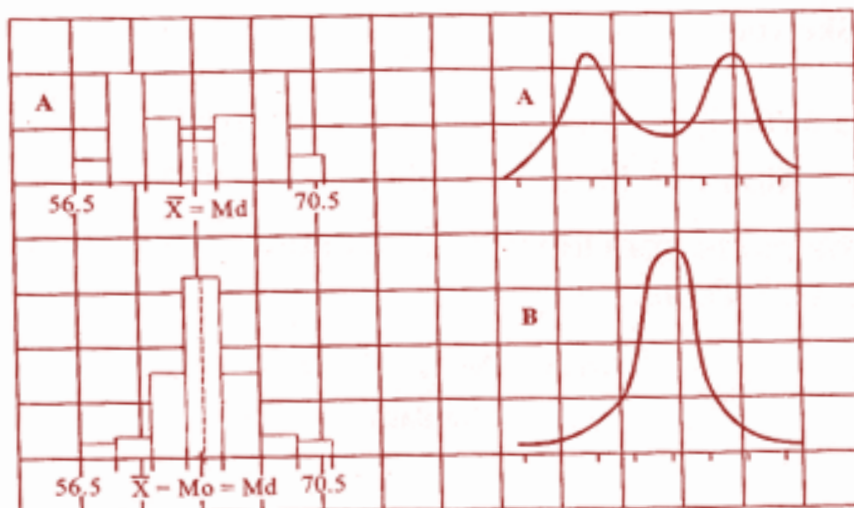
जब कोई आवृत्ति वितरण सममितीय नहीं है तो वैसे श्रेणी या श्रृंखला को ही असममितीय या विषम कहते हैं। सममितता के स्वभाव एवं असममितता के प्रकार को निम्नलिखित उदाहरण से व्याख्या किया जा सकता है।

निम्नलिखित सारणी एक महाविद्यालय के छात्रों के उंचाई को प्रदर्शित कर रहा है:

वर्ग अन्तराल	A (f)	B (f)	C (f)	D (f)
56.5-58.5	5	3	0	4
58.5-60.5	25	5	4	8
60.5-62.5	15	20	40	20
62.5-64.5	10	44	24	24
64.5-66.5	15	20	20	40
66.5-68.5	25	5	8	4
68.5-70.5	5	3	4	0
N	100	100	100	100
माध्य (me)	63.5	63.5	63.5	63.5

माधिका (Md)	63.5	63.5	63	64
बहुलक (Mo)	-	63.5	61.9	65.1

उपरोक्त आंकड़ों के आवृत्ति आयत चित्र एवं संगत आवृत्ति वक्र निम्नलिखित रूप से दिये गये हैं,



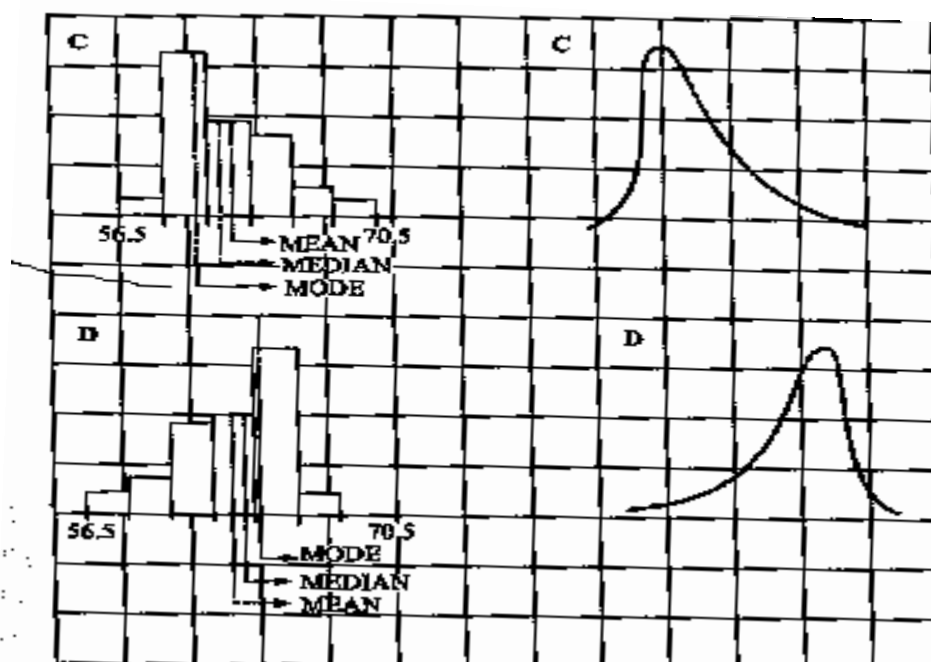
उपरोक्त दिये गये चार आवृत्ति वितरण एवं संगत चित्र का अवलोकन करने पर हमें निम्नलिखित रोचक बातें पता चलती हैं।

वक्र की बनावट, आवृत्ति आयत चित्र एवं दोनों श्रेणियों, A और B में पदों के बराबर दूरी पर वितरित व अवस्थित होना श्रेणी के सममितता को दर्शाता है। यदि इन वक्रों या आवृत्ति आयत वक्र के माध्य के बिन्दु से मोड़े तो दोनों ही हिस्सा एक दूसरे को पूरी तरह से ढक लेगी। शृंखला B में, केन्द्रीय प्रवृत्ति के सभी माप एक ही तरह या एक ही अर्थात् माध्य, माधिका एवं बहुलक का मूल्य 63.5 है। श्रेणी A में, जो एक द्विपद वितरण के स्वभाव को चरित्रार्थ करता है, के माध्य एवं माधिका के मूल्य एक अर्थात् 63.5 है।

शृंखलाएँ C एवं D असममितता वाले स्वभाव के हैं। यह आवृत्ति आयत चित्र एवं वक्र के बनावट से साक्ष्य मिलता है और माधिका के बराबर दूरी से पदों की संख्या बराबर नहीं है। इन वितरणों के तीनों केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों के मूल्य भिन्न-2 आकार के हैं।

वितरण C एवं D में असममितता के अन्तर वाले बिन्दुओं का ध्यान पूर्वक अध्ययन किया जाना चाहिए। वितरण C में, जहाँ माध्य का मूल्य 63.5, माधिका के मूल्य 63 से अधिक है और बहुलक का मूल्य 61.9 है, फलतः वक्र और दाहिने ओर खींची हुई प्रतीत होती है। आवृत्ति वितरण D में, बहुलक मूल्य 65.1, माधिका के मूल्य 64 एवं माध्य के मूल्य 63.5 से अधिक है। फलतः चित्र में वक्र बायें ओर ज्यादा खींचा हुआ प्रतीत होता है।

दूसरे शब्दों में, यदि श्रेणी में चरम विचलन उच्च मूल्य के तरफ हो तब वक्र की पूंछ दाहिनी ओर अधिक लंबी होगी जो रेखा को माधिका मूल्य के स्थान से माध्य को भी बहुलक की तरफ खींचती हुई प्रतीत होगी। यदि, न्यूनतम विचरण, न्यूनतम मूल्यों की ओर होगी तब पूंछ की लम्बाई बायीं ओर अधिक होगी और माधिका एवं माध्य, बहुलक से बायें तरफ ज्यादा खींची हुई अवस्थित होगी।



चित्र: वितरण C एवं D के लिए आवृत्ति आयत चित्र एवं वक्र

सममितीय आवृत्ति वितरण में न्यूनतम एवं उच्चतम चतुर्थक माध्यिका से बिल्कुल बराबर दूरी पर अवस्थित होते हैं, इसलिए दशमक एवं शतमक में भी यही लक्षण पाये जाते हैं। इसका मतलब यह हुआ कि असममिती प्रकार का हो तब उच्चतम एवं न्यूनतम चतुर्थक माध्यिका से असामान दूरी पर अवस्थित होती है।

उपरोक्त विवेचना से, हम विषमता की जांच के सारांश निम्न रूप से रेखांकित कर सकते हैं:

1. जब आवृत्ति वितरण के रेखाचित्र, सममितता वक्र को प्रदर्शित नहीं करता है।
2. जब केन्द्रीय प्रवृत्ति की तीनों मापों के मान एक दूसरे से भिन्न हों।
3. जब माध्यिका से धनात्मक विचलनों का योग एवं ऋणात्मक विचलनों के योग का मूल्य एक दूसरे के बराबर न हो।
4. जब माध्यिका से चतुर्थकों की दूरी असामान हो।
5. जब दशमक एवं शतमक के संगत जोड़े माध्यिका से बराबर दूरी पर अवस्थित नहीं हो।

7.5.1 विषमता के माप (Measure of Skewness)

उपरोक्त जांच के आधार पर निम्नलिखित विषमता के माप को विकसित किया गया है:

1. केन्द्रीय प्रवृत्ति के तीनों मापों के बीच संबंध— प्रायः इसे कार्ल पीयर्सन का विषमता माप के नाम से जानते हैं।
2. विषमता के चतुर्थक माप— इसे बॉवले का विषमता के माप के नाम से जानते हैं।
3. विषमता के शतमक माप— इस माप को केली के विषमता के माप के नाम से जानते हैं।
4. आघूर्णों पर आधारित विषमता के माप।

उपरोक्त सभी माप हमें विषमता के दोनों चीजें दिशा एवं हद को बताता है।

(अ) कार्ल पीयर्सन का विषमता माप (Karl Pearson's Measure of Dispersion)

यह पहले ही दिखाया गया है कि पूर्ण सममितीय वितरण के स्थिति में केन्द्रीय प्रवृत्ति की सभी माप जैसे, माध्य, माध्यिका एवं बहुलक सभी एक बिन्दु पर अवस्थित होते हैं। जैसे ही कोई वितरण सममितीता से दूर खींचती जाती है तो माध्य एवं बहुलक के बीच अन्तर बढ़ता जाता है। कार्ल पीयर्सन ने इनके बीच अन्तर को ही विषमता की माप के लिए सुझाव दिया है। अतः

विषमता के निरपेक्ष माप = माध्य-बहुलक। इस सूत्र के (+) या (-) चिन्ह ही सिद्ध करता है कि विषमता दिशा किस तरफ है। यदि इसका मूल्य धनात्मक हो, तब चरम विचलन वितरण के उच्च मूल्यों के तरफ होती हैं। यदि इसका मान ऋणात्मक है, तब यह प्रदर्शित करता है कि चरम विचरण न्यूनतम मूल्यों के ओर झुका हुआ होता है।

पीर्यसन का विषमता गुणांक

पिछले गद्यांश में माध्य एवं बहुलक में अन्तर को विषमता के निरपेक्ष माप के रूप में बताया गया है। एक निरपेक्ष विषमता के माप का प्रयोग दो या दो से अधिक वितरणों के तुलनात्मक अध्ययन के लिए प्रयोग नहीं किया जा सकता है इसके लिए निम्नलिखित कारण हैं:

1. दो श्रेणियों में, विषमता के माप के सामान आकार होने के बावजूद, उसके अलग-2 महत्व हो सकते हैं क्योंकि एक वितरण के अल्प विचरण एवं दूसरे वितरण जिसमें अधिक विचरण हो, दोनों भिन्न हैं।
2. दो विभिन्न श्रेणियों के मापने की इकाई एक ही हो सकती है।

विषमता के माप को उचित बनाने के लिए, यह आवश्यक है कि जो भी विचरण से संबंधित रूकावटें एवं माप की इकाई को दूर करना है। ऐसा हम माध्य एवं बहुलक के अन्तर को प्रमाप विचलन से भाग देकर किया जा सकता है। प्राप्त परिणाम या मान ही पीर्यसन का विषमता गुणांक कहलाता है। इस प्रकार, पीर्यसन का विषमता गुणांक का सूत्र है,

$$\text{विषमता का गुणांक} = \frac{\text{Mean-Mode}}{\text{Standard Deviation}}$$

चूंकि, हम देख चुके हैं कि मध्यम रूप से वितरित श्रेणी इस प्रकार है कि,

बहुलक = माध्य-3 (माध्य-माधिका)

उपरोक्त सूत्र में से हम बहुलक के मूल्य को हटा देंगे ता हमें निम्न सूत्र प्राप्त होंगे,

$$\text{विषमता का गुणांक} = \frac{\text{माध्य} - \text{माध्य} + 3 (\text{माध्य} - \text{माधिका})}{\text{प्रमाप विचलन}}$$

$$\text{प्रमाप विचलन} = \frac{3 (\text{माध्य} - \text{माधिका})}{\text{प्रमाप विचलन}}$$

सूत्र में बहुलक को हटा कर माधिका को रखना आवश्यक होता है क्योंकि कई बार इसे ज्ञात करना कठिन है और काफी हद तक समूहीकरण त्रुटि से प्रभावित होता है जो एक अवास्तविक उत्तर प्रस्तुत करता है।

उदाहरण 10: निम्नलिखित आंकड़ों से विषमता की गणना करें:

उंचाई (इंच में)	58	59	60	61	62	63	64	65
व्यक्तियों की संख्या	10	18	30	42	35	28	16	8

हल: उंचाई एक सतत् चर है अतः 58" के राशि को निश्चित रूप से वर्ग अन्तराल 57.5"-58.5" के रूप में एवं 59" को 58.5"-59.5" तथा अन्य को भी इसी प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है।

उंचाई (इंच में)	मध्य बिन्दु	व्यक्तियों की संख्या (f)	$x = (X - 61)$	fx	Fx^2	संचयी आवृत्ति
57.5 - 58.5	58	10	-3	-30	90	10
58.5 - 59.5	59	18	-2	-36	72	28
59.5 - 60.5	60	30	-1	-30	30	58
60.5 - 61.5	61	42	0	0	0	100
61.5 - 62.5	62	35	1	35	35	135

62.5 - 3.5	63	28	2	56	112	163
63.5 - 64.5	64	16	3	48	144	179
64.5 - 65.5	65	8	4	32	128	187
		187		75	611	

$$\text{माध्य} = \frac{61+75}{187} = 61.4.$$

$$\text{माध्यिका} = \frac{60.5 + 35}{65} = 61.4.$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{611}{187} - \left[\frac{75}{187}\right]^2} = \sqrt{3.27 - 0.16} = \sqrt{3.11} = 1.76$$

$$\text{विषमता} = 61.4 - 61.04 = 0.36 \text{ इंच।}$$

$$\text{विषमता के गुणांक} = \frac{0.36}{1.76} = 0.205$$

नोट: अलग अलग विधियों से ज्ञात विषमता के गुणांक का मूल्य अलग हो सकता है। इसका मुख्य कारण है कि बहुलक की गणना करने में निहित कठिनाई।

(ब) बाँउले के (चतुर्थक) विषमता माप (Bowley's Quartile Measure of Skewness)

उपरोक्त विषमता के माप के दोनों विधियों, का अध्ययन पूरे श्रृंखला के विश्लेषण में ध्यान रखना होगा। लेकिन, विषमता के निरपेक्ष के साथ-साथ सापेक्ष माप को भी श्रृंखला से ही प्राप्त किया जा सकता है। अतएव, न्यूनतम एवं उच्चतम चतुर्थक को ही इसकी माप के लिए सामान्यतया प्रयोग किया जाता है। सममित श्रृंखला में, दोनों ही चतुर्थक, न्यूनतम एवं उच्चतम चतुर्थक, माध्यिका मूल्य से बिल्कूल बराबर दूरी पर अवस्थित होती है, अर्थात्,

$$\text{माध्यिका} - Q_1 = Q_3 - \text{माध्यिका}$$

दूसरे शब्दों में, माध्यिका का मूल्य Q_1 एवं Q_3 के माध्य के मूल्य के बराबर होता है। विषम आवृत्ति वाले श्रेणियों में, चतुर्थक माध्यिका से सामान दूरी पर अवस्थित नहीं होती है बल्कि, पूरे असममितता वाले श्रृंखला में चरम सीमा के ओर अवस्थित होते हैं। बाँउले ने उपरोक्त तथ्यों के आधार पर विषमता के माप के निम्नलिखित सूत्रों का सूझाव दिया है,

$$\begin{aligned} \text{निरपेक्ष SK} &= (Q_3 - M) - (M - Q_1) \\ &= Q_3 + Q_1 - 2M \end{aligned}$$

यदि श्रेणी में चतुर्थक विचलन माध्यिका से बराबर या सामान दूरी पर अवस्थित होते हैं, अर्थात् $(Q_3 - M) = (M - Q_1)$, तब $SK = 0$ है। यदि Q_1 की माध्यिका से दूरी, Q_3 के माध्यिका से दूरी के तुलना में अधिक हो, तब ऋणात्मक विषमता पाई जाती है। यदि स्थिति इसके विपरीत हो, तब यह धनात्मक विषमता होगी।

यदि मापक इकाई किसी दूसरे इकाई में होती है तो इसे तुलना योग्य बनाने के लिए निरपेक्ष माप को सापेक्ष माप में परिवर्तित करना आवश्यक हो जाता है। हम अर्न्तचतुर्थक विस्तार को हर के रूप में व्यंजक में रखकर विषमता के गुणांक निम्न रूप से प्राप्त कर सकते हैं,

सापेक्षिक विषमता की माप/बाउले की विषमता गुणांक

$$\text{Coefficient of SK} = \frac{(Q_3 - M) - (M - Q_1)}{(Q_3 - M) + (M - Q_1)}$$

यदि श्रृंखला के माधिका एवं न्यूनतम चतुर्थक मूल्य एक दूसरे के बराबर हो, तब विषमता का मूल्य (+1) के बराबर है। यदि माधिका एवं उच्चतम चतुर्थक मूल्य एक दूसरे के बराबर हो, तब विषमता का मूल्य (-1) के बराबर है।

विषमता के इस माप को कठोरता से परिभाषित किया जाता है एवं आसानी से गणना योग्य होता है। आगे, ऐसे विषमता के माप का लाभ है कि इसका मूल्य (+1) से (-1) के बीच होता है जिसका परिणाम बहुत से आवश्यकताओं के पर्याप्त संवेदनशीलता को पूरा करता है। इस माप की आलोचना का मुख्य कारण है कि श्रृंखला के सभी पद मूल्यों को गणना में सम्मिलित नहीं किया जाता है जिसके कारण चरम भी वितरण को प्रभावित कर सकता है।

उदाहरण 11: उदाहरण 10 में दिये गये सारणी का प्रयोग करके चतुर्थक के मदद से विषमता का गुणांक की गणना करें।

हल: उदाहरण 10 के सारणी से हमें प्राप्त है,

$$Q_1 = \frac{N}{4}^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य का आकार} = \frac{187}{4} = 46.75^{\text{वां}} \text{ पद का मूल्य/आकार}$$

$$= 59.5 + \frac{18.75}{30}$$

$$= 59.5 + 0.63 = 60.13$$

$$Q_3 = \frac{3N}{4}^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य का आकार} = \frac{3 \times 187}{4} = 140.25^{\text{वां}} \text{ पद मूल्य का आकार}$$

$$= 62.5 + \frac{5.25}{28}$$

$$= 62.5 + 0.19 = 62.69$$

$$\text{विषमता} = 62.69 + 60.13 - 2(61.35) = 0.12 \quad (\text{चूँकि, } SK = Q_3 + Q_2 - 2M)$$

$$\text{विषमता के गुणांक} = \frac{0.12}{2.56} = 0.047$$

(स) केली का (शतमक) विषमता माप (Kelley's Percentile Measure of Skewness)

बॉउले के विषमता माप में मौजूद त्रुटि को दूर करने के लिए, जिसमें चरम मूल्य सम्मिलित नहीं होते हैं। इस माप को और बृहत करते हुए दो शतमक का प्रयोग करते हैं जो माधिका से सामान दूरी पर अवस्थित होते हैं। केली ने विषमता की माप के लिए निम्नलिखित सूत्र का सुझाव दिया है:

$$SK = P_{50} - \frac{P_{90} + P_{10}}{2}$$

$$\text{or } SK = D_5 - \frac{D_9 + D_1}{2}$$

यद्यपि, इस माप का व्यवहारिक प्रयोग तो है ही साथ-2 सैद्धान्तिक रूप से भी काफी महत्वपूर्ण प्रतीत होती है।

उदाहरण 12: निम्नलिखित समकों से कार्ल पीयर्सन के विषमता गुणांक की गणना कीजिए।

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या	प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
0 से अधिक	150	50 से अधिक	70
10	140	60	30
20	100	70	14
30	80	80	0
40	80		

हल: सर्व प्रथम हमे निम्नलिखित प्रकार से आवृत्ति सारणी का निर्माण करते हैं:

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या	मध्य विन्दू	$x = (X-A)/10$ (A=35)	Fx	Fx ²	संचययी आवृत्ति (cf)
0-10	10	5	-3	-30	90	10
10-20	40	15	-2	-80	160	50
20-30	20	25	-1	-20	20	70
				-130		
30-40	0	35	0	0	0	70
40-50	10	45	1	10	10	80
50-60	40	55	2	80	160	120
60-70	16	65	3	48	144	136
70-80	14	75	4	56	224	150
	150			194	808	
				+64		

उपरोक्त सारणी से हमे ज्ञात है, $\sum f = 150$, $\sum Fx = 64$ और $\sum Fx^2 = 808$

चूँकि, वितरण एक द्विपद प्रकार का है इसलिए कार्ल पीयर्सन के विषमता गुणांक ज्ञात करने के लिए हमें माध्य, माध्यिका एवं प्रमाप विचलन की गणना करना होगा।

$$\bar{X} = 35 + \frac{64}{150} \times 10 = 35 + 4.27 = 39.27$$

$$\text{माध्यिका} = \frac{150}{2}^{\text{वां.}} \text{ पद मूल्य का आकार}$$

$$= 40 + \frac{10 \times 5}{10} = 40$$

$$\begin{aligned} \text{प्रमाप विचलन, } (\sigma) &= i \times \sqrt{\frac{\sum f(x^2)}{N} - \left[\frac{\sum f(X)}{N} \right]^2} \\ &= 10 \times \sqrt{\frac{808}{150} - \left[\frac{64}{150} \right]^2} \\ &= 10 \times \sqrt{5.387 - 0.182} \\ &= 10 \times 2.28 = 22.8 \end{aligned}$$

$$\text{विषमता गुणांक की माप} = \frac{3(X - \text{माध्यिका})}{22.8} = \frac{3(39.27 - 45)}{22.8}$$

$$\sigma \quad 22.8 \quad 22.8$$

$$= \frac{3(-5.73)}{22.8} = \frac{-17.19}{22.8} = -0.75$$

उदाहरण 13: निम्नलिखित समकों से चतुर्थक विषमता एवं विषमता गुणांक की गणना कीजिए।

पद मूल्य का आकार	:	5-7	8-10	11-13	14-16	17-20
आवृत्ति	:	14	24	38	20	4

हल: सर्वप्रथम हमें निम्नलिखित आवृत्ति सारणी का निर्माण करना चाहिए:

वर्ग आकार	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
4.5-7.5	14	14
7.5-10.5	24	38
10.5-13.5	38	76
13.5-16.5	20	96
16.5-19.5	4	100

उपरोक्त सारणी से दिया है,

$$Q_1 = 7.5 + \frac{3 \times 37}{24} = 8.87$$

$$Q_3 = 10.5 + \frac{3 \times 37}{38} = 10.5 + \frac{111}{38} = 10.5 + 2.92 = 13.42$$

$$\text{माध्यिका} = 10.5 + \frac{3 \times 12}{38} = 10.5 + \frac{36}{38} = 10.5 + 0.947 = 11.447$$

$$\text{विषमता} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{13.42 - 8.87}{2} = \frac{4.55}{2} = 2.275$$

$$\begin{aligned} \text{विषमता गुणांक} &= \frac{Q_3 + Q_1 - 2Me}{Q_3 - Q_1} \\ &= \frac{13.42 + 8.87 - 22.89}{13.42 - 8.87} \\ &= \frac{-0.6}{4.55} = -0.13 \end{aligned}$$

उदाहरण 14: एक दिये गये आवृत्ति वितरण से निम्नलिखित परिणाम दिये गये हैं:

$$\text{माध्य} = 45.00; \quad \text{माध्यिका} = 48.00$$

$$\text{विषमता गुणांक} = -0.4$$

आपसे आग्रह है कि प्रमाप विचलन की गणना करें।

हल: प्रमाप विचलन की गणन निम्न रूप से किया जा सकता है,

$$\text{विषमता गुणांक} = \frac{3(\text{माध्य} - \text{माध्यिका})}{\sigma}$$

$$-0.4 = \frac{3(45 - 48)}{\sigma};$$

$$-0.4\sigma = -9; \quad \sigma = \frac{9}{0.4} = 22.5$$

उदाहरण 7.15 आपको एक उद्योग की औद्योगिक विवाद निपटारे की पूर्व एवं उपरान्त की स्थिति दी गई है। श्रमिकों एवं प्रबंधकों के दृष्टि से होने वाले लाभ एवं हानि की स्थिति पर टिप्पणी करें।

मर्दे	पूर्व	उपरान्त
श्रमिकों की संख्या	2400	2350
औसत मजदूरी	45.5	47.5
माधिका मजदूरी	49.0	45.0
प्रमाप विचलन	12	10

हल: उपरोक्त संमकों के आधार निम्नलिखित बातें सामने आते हैं:

- रोजगार:** चूंकि कार्य में लगे श्रमिकों की संख्या निपटारे के उपरान्त, पूर्व के तुलना में कम है जो यह इंगित करता है कि कुछ श्रमिक पहले के तुलना में बेरोजगार हो गये हैं। यह श्रमिकों के दृष्टि या हित के बिल्कूल ही विरुद्ध है।
- मजदूरी :** निपटारे के उपरान्त कुल मजदूरी में होने वाला व्यय $2350 \times 47.5 = 1,11,625.0$ रुपये है; विवाद निपटारे के पूर्व मजदूरी मद में होने वाला व्यय $2400 \times 45.5 = 1,09,200.0$ रुपये हैं।
इसका मतलब है कि श्रमिक गण पूरे समूह के दृष्टि से निपटारे के उपरान्त, पूर्व की स्थिति से बेहतर स्थिति में हैं और उधर श्रमिकों की उत्पादकता में कमी होने के कारण कुल उत्पादन कम हो गया है जो प्रबंधक के लिए गलत संकेत है।
- मजदूरी संरचना में सामानता:** निपटारे के पूर्व एवं उपरान्त श्रमिकों मजदूरी में सामानत के स्तर या रूप को जानने के लिए हमें दोनों अवधियों में औसत एवं मजदूरी प्रमाप विचलनों के विचलन गुणांक की तुलना करके पता लगा सकते हैं।

$$\text{निपटारे के पूर्व, विचरण गुणांक} = \frac{12 \times 100}{45.5} = 26.4 \%$$

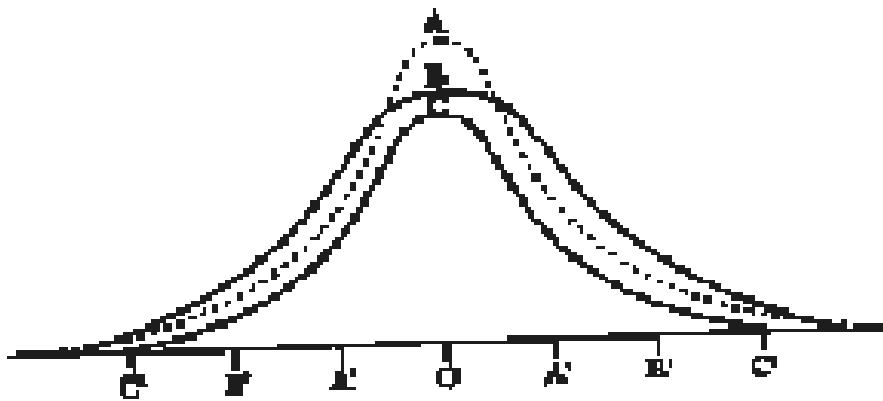
$$\text{निपटारे के उपरान्त, विचरण गुणांक} = \frac{10 \times 100}{47.5} = 21.05\%$$

उपरोक्त विचरण गुणांकों से स्पष्ट होता है कि तुलनात्मक दृष्टि से श्रमिकों को मिलने वाली में विषमता अल्प है। ऐसी स्थिति श्रमिकों एवं प्रबंधन दोनों के लिए लाभकारी एवं अच्छी है।

- वेतन संरचना का स्वरूप:** यदि औसत एवं माधिका मजदूरी की तुलना करें तो हम पाते हैं की पूर्व के स्थिति में 50 प्रतिशत श्रमिक औसत से अधिक मजदूरी पाते थे अर्थात् 45.5 रुपये। लेकिन विवाद निपटारे के बाद 50 प्रतिशत से अधिक श्रमिकों को औसत मजदूरी 45.5 रुपये से कम मजदूरी मिलता है। इसका मतलब यह हुआ कि विवादों का निपटारा सही तरीके से नहीं हुआ या फिर निपटारों से सभी श्रमिकों को लाभ नहीं मिल रहा है। केवल 50 प्रतिशत श्रमिक ही हैं जिन्हें बढ़े हुए मजदूरी राशि का लाभ मिल पा रहा है।

7.6 ककुदता (Kurtosis)

एक आवृत्ति वितरण को उसके केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप, परिवर्तनशीलता एवं असममितता के गुण के अनुसार परिभाषित या उसकी विशेषता को बताया गया है। ऐसा ही आवृत्ति वितरण की एक और गुण या विशेषता है जिसके द्वारा आवृत्ति के शीर्ष की विशेषता का ज्ञान होता है। नीचे दये गये चित्र को ध्यान से देखिये जिसमें तीन A, B और C सममितीय वक्र दिये गये हैं।



चित्र: A, B और C सममितीय वक्र

A = कूट ककुदी, B = मध्य ककुदी, C= चर्पट ककुदी

वर्ग की उतलपन गुण से तीनों ही वक्र में काफी विषमताएं हैं, वितरण के इस गुण को ही कार्ल पीयर्सन ने ककुदता या पृथुशीर्षत्व का नाम दिया है। ककुदता दिये गये वक्र में से सामान्य वितरण वाले वक्र की तुलना में कौन से वक्र की ऊपरी भाग नुकीला या चर्पट या मध्य नुकीला है, इसी की माप करता है। यदि एक वितरण में कोई वक्र प्रसामान्य वक्र के सापेक्ष, अपेक्षाकृत चपटा है तो इसे ही ककुदता कहते हैं। जब कोई वक्र या बहुभुज अपेक्षाकृत ज्यादा नुकीला हो तो उसे कुट ककुदी कहते हैं।

कोई विषम वक्र जिसका प्रसामान्य वक्र या उतल पन की कोटि सामान्य वक्र की तरह हो तो उसे कार्ल पीयर्सन ने मध्य ककुदी का नाम दिया है। उपरोक्त चित्र में वक्र B एक मध्य ककुदी वक्र है। यदि एक वितरण का माध्य से प्रमाप विचलन वक्र के केन्द्र की ओर तथा अन्य मूल्य उसके पूंछ के तरफ चलन करता हो तो सामान्यता यह एक नुकीला या कुट की भांति प्रतीत होती है, जिसे कुट ककुदी कहा जाता है। जैसा कि उपरोक्त चित्र में वक्र A कुट ककुदी को प्रदर्शित करता है। वहीं दूसरी तरफ यदि कुछ स्थितियों में श्रेणी के बहुलक के इर्द-गिर्द कुछ पद मूल्य हों और दोनो तरफ आधे भाग में शेष पद मूल्य वितरित हो तब ऐसे वक्र को चर्पट वक्र कहते हैं, जैसे कि उपरोक्त चित्र में वक्र C को प्रदर्शित किया गया है।

ककुदता की माप निम्न रूप से किया जा सकता है,

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

जहाँ, ककुदता गुणक है।

μ_2 द्वितीय केन्द्रीय आघूर्ण तथा μ_4 चतुर्थ केन्द्रीय आघूर्ण है।

सामान्य वक्र में, β_2 तीन के बराबर होते हैं। यदि β_2 का मान तीन से ज्यादा है तब वक्र का शीर्ष अधिक नुकीला होगी, यदि यह तीन से कम हो तब यह वक्र का शीर्ष ज्यादा चर्पट होगी।

उदाहरण 7.16 निम्नलिखित आवृत्ति वितरण से प्रथम चार आघूर्णों, β_1 एवं β_2 की गणना करें।

वर्ग आकार	10-14	15-19	20-24	25-29	30-34	35-39	40-44	45-49	50-54
आवृत्ति	1	4	8	19	35	20	7	5	1

हल: माना की कल्पित माध्य $A = 32$ है,

वर्ग आकार	Midd Point X	आवृत्ति F	$x = \frac{X-32}{5}$	Fx	Fx ²	Fx ³	Fx ⁴	संचयी आवृत्ति
10-14	12	1	-4	-4	16	-64	256	1
15-19	17	4	-3	-12	36	-108	324	5
20-24	22	8	-2	-16	32	-64	128	13
25-29	27	19	-1	-19	19	-19	19	32
30-34	32	35	0	0	0	0	0	67
35-39	37	20	1	20	20	20	20	87
40-44	42	7	2	14	28	56	112	94
45-49	47	5	3	15	45	135	405	99
50-54	52	1	4	4	16	64	256	100
कुल		Σf = 100		Σf(X ¹) = +2	ΣfX ² = +212	ΣfX ³ = +20	ΣfX ⁴ = +1520	

$$V_1 = \frac{\Sigma fX^1}{\Sigma f} = \frac{2 \times 5}{100} = 0.1$$

$$V_2 = \frac{\Sigma fX^2}{\Sigma f} = \frac{212 \times 5^2}{100} = 53$$

$$V_3 = \frac{\Sigma fX^3}{\Sigma f} = \frac{20 \times 5^3}{100} = 25$$

$$V_4 = \frac{\Sigma fX^4}{\Sigma f} = \frac{1520 \times 5^4}{100} = 9500$$

$$\mu_1 = V_1 - V_1 = 0$$

$$\mu_2 = V_2 - V_1^2 = 53 - (0.1)^2 = 53 - 0.1 = 52.99$$

$$\mu_3 = V_3 - 3V_2V_1 + V_1^3 = 25 - 3 \times 53 \times (0.1) + (0.1)^3 = 25 - 15.9 + 0.002 = 9.102$$

$$\mu_4 = V_4 - 4V_3V_1 + 6V_2V_1^2 - 3V_1^4 = 9500 - 4 \times 25 \times (0.1) + 6 \times 53 \times (0.1)^2 - 3(0.1)^4 = 9500 - 10 + 3.18 - 0.0003 = 9493.1797 \text{ or } 9493.18$$

Corrected $\mu_2 = \mu_2 - \frac{h^2}{12}$ (जहाँ, h वर्ग अन्तराल है)

$$= 52.99 - \frac{5^2}{12} = 52.99 - 2.083 = 50.91$$

$$\text{Corrected } \mu_3 = \mu_3 = 9.1$$

$$\begin{aligned} \text{Corrected } \mu_4 &= \mu_4 - \frac{h^2}{2} \mu_3 + \frac{7h^4}{240} \\ &= 9493.18 - \frac{25}{12} \times 52.99 + \frac{7 \times (5)^4}{240} \\ &= 9493.18 - 662.375 + 18.23 = 8849.03 \end{aligned}$$

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(9.1)^2}{(50.91)^3} = 0.000627$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{8849.03}{(50.91)^3} = 3.414$$

$$y_1 = \beta_1 = 0.000627 = 0.25$$

$$y_2 = \beta_2 - 3 = 3.414 - 3 = 0.414$$

7.7 इकाई का सारांश

इस इकाई में महत्वपूर्ण परिभाषाएं एवं अवधारणाएं जिनके बारे में अध्ययन किया है उसका पुनरावृत्त करेंगे। लॉरेंज वक्र औसत से पदों के विचलनों को मापने का रेखाचित्र विधि है। यह एक प्रतिशत संचयी आवृत्ति वक्र है। आघूर्ण शब्द को यंत्र विद्या से लिया गया है, जहां 'बल के आघूर्ण' बताता है कि किसी बल के कारण लीवर के द्वारा केन्द्र बिन्दु पर घूमने की प्रवृत्ति या क्षमता कितनी है। एक आवृत्ति वितरण में माध्य के सापेक्ष आघूर्ण का विशेष महत्व है। माध्य से लिए गये वितरण के प्रत्येक पद से विचलनों का बीजगणितीय योग 0 के बराबर होता है। 0 को छोड़कर अन्य सभी विषम आघूर्णों का प्रयोग असममितता के माप के लिए किया जा सकता है।

यदि कोई आवृत्ति वितरण सममितीय नहीं है, तब यह विषमता कहलाती है। विषमता की माप के लिए कार्ल पीयर्सन के विषमता माप, विषमता के चतुर्थक माप, विषमता के शतमक माप एवं परिघातों पर आधारित विषमता माप को सम्मिलित किया जाता है। किसी वितरण के माध्य एवं बहुलक के बीच अन्तर को विषमता का निरपेक्ष माप कहते हैं। कार्ल पीयर्सन विधि में, श्रृंखला के सभी पद मूल्यों को सम्मिलित किया जाता है जबकि, बॉउले के विधियों में चरम मूल्यों या पदों को नकार या सम्मिलित नहीं करते हैं। ककुदता की माप यह प्रदर्शित करता है कि किसी वितरण का वक्र सामान्य वक्र की अपेक्षा ऊपर कितना नुकीला या कितना चर्पट है।

7.8 मुख्य शब्द

- **प्रसरण:** प्रमाप विचलन के वर्ग को ही प्रसरण कहते हैं, इसे σ^2 के द्वारा प्रस्तुत किया जाता है, जिसकी विशेषता वही है जो प्रमाप विचलन की है।
- **लॉरेंज वक्र:** यह एक रेखाचित्र विधि है जो औसत से पदों के विचलनों के माप को प्रस्तुत करता है।
- **विषमता:** किसी आवृत्ति वितरण के असममितता को वास्तविक माप है।
- **ककुदता:** किसी वितरण के कुट या नुकीलापन की माप है।

7.9 अपने प्रगति का मूल्यांकन (बहुविकल्पीय/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(A) खाली स्थानों को भरें

1. _____ प्रमाप विचलन का वर्ग है।
2. _____ एक रेखाचित्र विधि है जो औसत से पदों के विचलनों के माप को प्रस्तुत करता है।
3. माध्य से लिए गये वितरण के प्रत्येक पद से विचलनों का बीजगणितीय योग _____ होता है।
4. जब माध्यों से लिए गये विचलनों के घात कोई _____ संख्या (एक को छोड़कर) हो और ऋणात्मक विचलनों का योग धनात्मक विचलनों के योग के बराबर हो, तब श्रेणियाँ सममितीय कहलायेगी।

(B) सत्य या असत्य।

1. प्रसरण एवं प्रमाप विचलन के विशेषताएं अलग-2 होती है।
2. लॉरेंज वक्र की रचना करने में, विभिन्न समूहों के चरों को प्रतिशत में परिवर्तित किया जाना चाहिए।
3. आघूर्ण शब्द को यंत्र विद्या से लिया गया है, जहाँ 'बल के आघूर्ण' बताता है कि किसी बल के कारण लीवर के द्वारा केन्द्र बिन्दु पर घूमने की प्रवृत्ति या क्षमता कितनी है।
4. विषम परिघातों (एक को छोड़कर) का प्रयोग सममितता के माप के लिये किया जा सकता है।

5. जब कोई आवृत्ति वितरण सममितीय हो, तब इसे विषमता कहा जाता है।
6. जैसे ही एक वितरण से सममितता प्रतिस्थापित होती है, वितरण का माध्य, माध्यिका एवं बहुलक भी प्रतिस्थापित होती है।

7.10 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी

- (A) 1. प्रसरण, 2. लॉरेंज वक्र, 3. 0, 4. विषम, 5. सामान दूरी, 6. ककुदता।
 (B) 1. असत्य, 2. सत्य, 3. सत्य, 4. असत्य, 5. असत्य, 6. सत्य।

7.11 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न

1. विचरण के गुणांक के महत्व को बताएं।
2. लॉरेंज वक्र के निर्माण में सम्मिलित चरणों के बताएं।
3. केन्द्र या मूल बिन्दु के सापेक्ष विभिन्न आघूर्णों को परिभाषित करें।
4. किसी वितरण में माध्य के सापेक्ष परिघातों का विशेष महत्व है। वर्णन कीजिए।
5. विषमता के विभिन्न मापों को सूचीबद्ध करें।
6. केली के विषमता माप का उल्लेख करें।
7. वर्णन करें कि ककुदता कैसे किसी वितरण के वक्र को मापता है।

7.12 संदर्भ पुस्तकें

111. J. K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
112. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
113. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
114. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
115. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
116. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी—सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
117. अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
118. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
119. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
120. Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
121. R.P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India Ltd., Delhi, India.

द्विचर समंकों का विश्लेषण : अवर्गीकृत समंक

सरचना:

- 4.1.1 भूमिका
- 4.1.2 सहसंबंध
 - 4.1.2.1 सहसंबंध के प्रकार
 - 4.1.2.2 सहसंबंध एवं कारण
 - 4.1.2.3 सहसंबंध के माप
 - 4.1.2.4 विक्षेप बिन्दु
 - 4.1.2.5 कार्ल पीयर्सन (गुणनफल आघूर्ण) का सहसंबंध गुणांक
 - 4.1.2.6 सहसंबंध गुणांक का निर्वचन
 - 4.1.2.7 सहसंबंध गुणांक की विशेषताएँ
- 4.1.3 स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध
- 4.1.4 आंशिक सहसंबंध
- 4.1.5 बहुगुणी सहसंबंध
- 4.1.6 इकाई का सारांश
- 4.1.7 मुख्य शब्द
- 4.1.8 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न
- 4.1.9 संदर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप इस योग्य होंगे:

- विभिन्न प्रकार के सहसंबंधों के बीच अन्तर स्पष्ट करना
- साधारण, आंशिक एवं बहुगुणी सहसंबंध तथा शोध में उनके प्रयोग का वर्णन

4.1.1 भूमिका

प्रायकिता सिद्धान्त एवं सांख्यिकी में, सहसंबंध को सहसंबंध गुणांक कहते हैं जो दो चरों के बीच रैखिक सहसंबंध की दिशा एवं क्षमता व शक्ति को प्रदर्शित करता है। सामान्य सांख्यिकी के प्रयोग में, सहसंबंध का अर्थ है कि दो चरों में एक साथ बदलते हैं। दोनों में परिवर्तन एक ही दिशा में अथवा विपरीत दिशा में हो सकता है।

4.1.2 सहसंबंध

जब आंकड़े दो या दो से अधिक चरों से संबंधित दिये हों, तब इन चरों से संबंधित विचलन का अध्ययन किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, एक महाविद्यालय के छात्रों के उंचाई या लम्बाई (X) एवं वजन (Y) से संबंधित समंकों से हम यह ज्ञात करते हैं कि कौन छात्र है जिसका लम्बाई और वजन दोनों ही अधिक हैं। साथ ही, ऐसे छात्र जिनकी लम्बाई एवं वजन दोनों ही कम हैं। चरों में पाये जाने वाले इस प्रकार के विचलन को ही सहसंबंध कहते हैं। सहसंबंध निम्न प्रकार के हो सकते हैं,

1. साधारण/प्रत्यक्ष सहसंबंध
2. बहुगुणी सहसंबंध
3. आंशिक सहसंबंध

साधारण/प्रत्यक्ष सहसंबंध दो चरों में होने वाले विचरणों से संबंधित है।

बहुगुणी सहसंबंध एवं आंशिक सहसंबंध तीन या तीन से अधिक चरों में होने वाले विचरणों से संबंधित है।

इस इकाई में, हम साधारण सहसंबंध के बारे में अध्ययन करेंगे, अर्थात् दो चरों के बीच प्रत्यक्ष सहसंबंध का अध्ययन करेंगे।

दो चरों को सहसंबंधित कहेंगे यदि उनमें परिवर्तन या विचलन इस प्रकार हो कि

1. एक चर का उच्च मूल्य दूसरे चर के उच्च मूल्य से संबंधित तथा एक चर के निम्न मूल्य दूसरे चर के निम्न मूल्य के साथ परिवर्तित होते हैं।
2. एक चर का उच्च मूल्य दूसरे चर के निम्न मूल्य से एवं एक चर के निम्न मूल्य से उच्च मूल्य के बीच संबंध को प्रदर्शित करता हो। सामान्यतया, यह देखा जा सकता है, जो लोग लम्बे होते हैं उनका वजन भी अधिक होता है जबकि छोटे लोगों के वजन भी कम होते हैं। इस प्रकार, किसी व्यक्ति की उंचाई या लम्बाई (X) एवं वजन (Y) में विचलन एक दूसरे से संबंधित होते हैं। और इसलिए, वे एक दूसरे से संबंधित हैं।

दूसरी तरफ, सब्जियों का उत्पादन (X) एवं कीमत (Y) दोनों के बीच विपरीत विचलन होते हैं। यहाँ, अधिक उत्पादन होने पर, सब्जियों की कीमत कम होगी।

4.1.2.1 सहसंबंध के प्रकार

सहसंबंध धनात्मक होंगे यदि चरों में विचलन एक ही दिशा में होते हैं, अर्थात् यदि दोनों चरों में वृद्धि या कमी एक साथ होते हों।

सहसंबंध ऋणात्मक (विपरीत) होंगे यदि चरों में परिवर्तन विपरीत दिशा में हों, यानि जब एक चर में वृद्धि होने पर, दूसरे चर में कमी हो तब इसे ऋणात्मक सहसंबंध कहते हैं।

सब्जियों के उत्पादन (X) एवं कीमत (Y), दोनों में ऋणात्मक सहसंबंध होते हैं।

यदि चरों में परिवर्तन या विचरण प्रदर्शित नहीं हो, दानो चरों में कोई सहसंबंध नहीं होगा। इस प्रकार, रुपये के मूल्य (X) एवं वायुमण्डलीय ताप (Y) के बीच कोई सहसंबंधन नहीं है।

यदि चरों में पूर्ण रैखिक संबंध प्रदर्शित हो, तब उन्हें पूर्ण सहसंबंध कहते हैं। पूर्ण सह संबंध धनात्मक या ऋणात्मक हो सकते हैं।

4.1.2.2 सहसंबंध और करणीय संबंध

दो चरों के बीच पाये जाने वाले 'कारण और प्रभाव' के संबंध को ही करणीय संबंध कहते हैं। इस प्रकार, विद्युतीय वस्तुओं के उत्पाद एवं उसकी कीमत के बीच करणीय संबंध परिलक्षित होता है। यहाँ, उत्पादन में वृद्धि के कारण उत्पादित वस्तु के बाजार कीमत में कमी आती है।

यहाँ तक कि जब चरों के बीच कोई करणीय संबंध न हो तब भी सहसंबंध हो सकता है। एक क्षण के लिए, भारत की जनसंख्या एवं चीन की जनसंख्या के बीच भी विचरणीय सहसंबंध परिलक्षित होता है। लेकिन, वे किसी प्रकार के करणीय संबंध प्रदर्शित नहीं करते हैं। ऐसे सहसंबंध जिनमें करणीय संबंध की अनुपस्थिति हो, उसे गैर-भावना या निरर्थक या नकली या अभासी सहसंबंध कहते हैं।

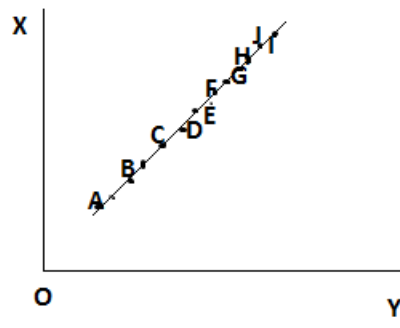
4.1.2.3 सहसंबंध का माप

दो चरों के बीच सहसंबंध की प्रकृत और प्रगाढ़ता को निम्नलिखित माप का प्रयोग करके ज्ञात कर सकते हैं—

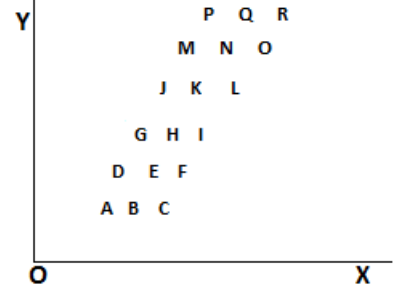
1. विक्षेप चित्र
2. कार्ल पीयर्सन (गुणनफल आघूर्ण) का सहसंबंध गुणांक
3. स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक

4.1.2.4 विक्षेप चित्र

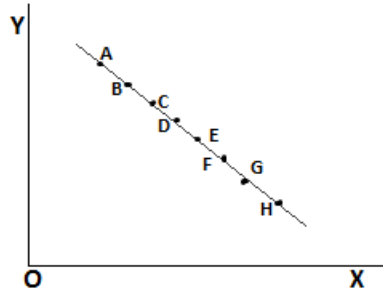
विक्षेप चित्र एक द्विपद आकड़ों को प्रस्तुत करने का विन्दूरेखीय विधि है। यहाँ, द्विपद समकों के n जोड़े मूल्यों को, n विन्दुओं के द्वारा xy -समतल पर प्रदर्शित किया जाता है। दोनों चरों के संगत जोड़े के बिन्दुओं को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित किया जाता है—



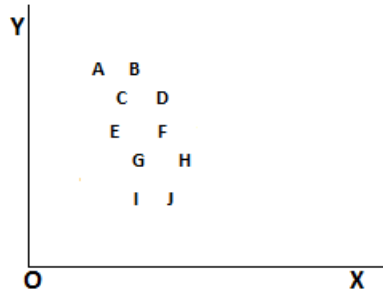
चित्र: 4.1.1. क: पूर्ण धनात्मक सह सम्बंध।



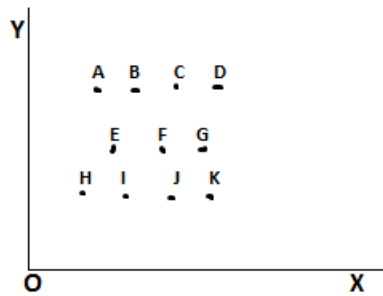
चित्र: 4.1.1. ख: धनात्मक सह सम्बंध।



चित्र: 4.1.1. ग: पूर्ण ऋणात्मक सह सम्बंध।



चित्र: 4.1.1. घ: ऋणात्मक सह सम्बंध।



चित्र: 4.1.1. ड: सह सम्बंध की अनुपस्थिति।

उपरोक्त विन्दूरेखीय चित्रों में विचलना के स्वरूपों का प्रयोग करके चरों के बीच सहसम्बंध की प्रकृति और श्रेणी का अनुमान लगाया जा सकता है।

विक्षेप चित्र में—

1. यदि ग्राफ पेपर या समतल पर बिन्दुओं को मिलाने से एक धनात्मक ढाल प्राप्त हो (उपर की ओर जाने वाली रेखा), तब चरों के बीच धनात्मक और पूर्ण सहसम्बंध कहलाते हैं।
2. यदि ग्राफ पेपर या समतल पर बिन्दुओं को मिलाने से एक ऋणात्मक ढाल प्राप्त हो (नीचे की ओर जाने वाली रेखा), तब चरों के बीच ऋणात्मक और पूर्ण सहसम्बंध कहलाते हैं।
3. यदि ग्राफ पेपर या समतल पर एक रेखा के आस पास बिन्दुओं का गुच्छ धनात्मक ढाल के रूप में हो, तब चरों के बीच धनात्मक सहसम्बंध पाये जाते हैं।
4. यदि ग्राफ पेपर या समतल पर एक रेखा के आस पास बिन्दुओं का गुच्छ ऋणात्मक ढाल के रूप में हो, तब चरों के बीच ऋणात्मक सहसम्बंध पाये जाते हैं।
5. यदि ग्राफ पेपर या समतल पर चर मूल्य के बिन्दु पूरे समतल में बिखरे हों, तब चरों के बीच कोई सहसम्बंध नहीं होगा।
6. जब समतल या ग्राफ पेपर पर बिखरे बिन्दुओं को मिलाने से कोई वक्र रेखा प्राप्त हो, तब चरों के बीच पाये जाने वाले संबंध को गैर-रेखीय सहसम्बंध कहते हैं।

4.1.2.5 कार्ल पीयर्सन (आधूर्ण गुणनफल) का सहसम्बंध गुणांक

यह दो चरों के बीच पाये जाने वाले रैखिक संबंध का माप है। यह दो चरों के बीच पाये जाने वाले सहसम्बंधों की कोटि को दर्शाते हैं। दो चरों x एवं y के सहसम्बंध गुणांक को ' r_{xy} ' या ' r ' से प्रदर्शित किया जाता है।

कार्ल पीयर्सन के दो चरों x एवं y के सहसम्बंध गुणांक का सूत्र निम्नलिखित है—

$$r_{xy} = \frac{\text{सहप्रसरण } (x, y)}{\sqrt{\text{प्रसरण } (x) \times \text{प्रसरण } (y)}} = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sigma_x \times \sigma_y}$$

$$= \frac{\frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})(y - \bar{y})}{\sqrt{\left[\frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})^2 \right] \times \left[\frac{1}{n} \sum (y - \bar{y})^2 \right]}}$$

गणना के लिए, उपरोक्त सूत्र का सरलीकृत रूप निम्नलिखित है,

$$r = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2] \times [n \sum y^2 - (\sum y)^2]}} \quad \{\text{व्यक्तिगत या गैर-समूही आंकड़े}\}$$

$$r = \frac{N \sum fxy - (\sum fx)(\sum fy)}{\sqrt{[N \sum fx^2 - (\sum fx)^2] \times [N \sum fy^2 - (\sum fy)^2]}} \quad \{\text{सतत् श्रेणी के लिए}\}$$

4.1.2.5 सहसम्बंध गुणांक का निर्वचन

1. ' r ' के धनात्मक मूल्य चरों के बीच धनात्मक सहसम्बंध को प्रदर्शित करता है।
2. ' r ' के ऋणात्मक मूल्य चरों के बीच ऋणात्मक सहसम्बंध को प्रदर्शित करता है।
3. $r = +1$ का अर्थ है कि चरों के बीच पूर्ण धनात्मक सहसम्बंध पाया जाता है।
4. $r = -1$ का अर्थ है कि चरों के बीच पूर्ण ऋणात्मक सहसम्बंध पाया जाता है।
5. $r = 0$ (या निम्न) का अर्थ है कि चरों के बीच कोई सहसम्बंध नहीं है।

4.1.2.5 सहसम्बंध गुणांक की विषेयताएँ

1. सहसंबंध गुणांक, चरों के किसी भी माप के इकाई से पूरा स्वतंत्र होता है।
2. सहसंबंध गुणांक चरों के मूल एवं पैमाने के परिवर्तन से स्वतंत्र होते हैं।
3. सहसंबंध गुणांक के मूल्य -1 एवं +1 के बीच होता है।

बहुत सारे लेखकों ने सहसंबंध गुणांक के निर्वचन के लिए दिशा निर्देश सुझाव दिया है। उदाहरण के लिए, कोहिन (1988) ने मनोविज्ञान शोध में सहसंबंध गुणांक के निर्वचन को निम्नलिखित सारणी के द्वारा दिया गया है,

सहसंबंध	ऋणात्मक	धनात्मक
शून्य या कोई सहसम्बन्ध नहीं	$r = 0$	$r = 0$
निम्न कोटि	-0.24 to -0.01	0.01 to 0.24
मध्यम कोटि	-0.74 to -0.25	+0.25 to 0.74
उच्च कोटि	-0.99 to -0.75	+0.75 to 0.99
पूर्ण सहसम्बन्ध	$r = -1$	$r = +1$

जैसा कि कोहिन ने स्वयं अवलोकन किया और पाया कि ऐसे सभी कुछ स्थितियों में पूरी कठोरता से लागु नहीं होती है। क्योंकि सहसंबंध के गुणांक का निर्वचन किस उद्देश्य एवं किस स्तर तक प्रयोग किया जाना है उन सभी बातों पर निर्भर करता है। सहसंबंध मूल्य 0.9 भी बहुत कम हो सकता है यदि इसका जांच कड़े भौतिक नियमों के साथ उच्च कोटि के औजारों का प्रयोग करके किया गया है। लेकिन यही जांच सामाजिक विज्ञान के लिए जहाँ बहुत सारे जटिल कारकों के योगदान का अध्ययन किया जाता है वहाँ उच्च कोटि के सहसंबंध हो सकते हैं।

उदाहरण 4.1.1 पांच छात्रों के सांख्यिकी एवं आदर भाव विषयों के बीच आघूर्ण गुणनफल सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

छात्र	1	2	3	4	5
सांख्यिकी	4	7	8	3	4
आदर भाव	5	8	6	3	5

हल : प्रत्यक्ष विधि से,

माना कि x सांख्यिकी तथा y आदर भाव का प्राप्तांक है एवं दोनों के बीच सहसंबंध निम्न प्रकार से है,

$$r = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{[n \sum x^2 - (\sum x)^2] \times [n \sum y^2 - (\sum y)^2]}}$$

x	y	x^2	y^2	xy
4	5	16	25	20
7	8	49	64	56
8	6	64	36	48
3	3	9	9	9
4	5	16	25	20
26	27	154	159	153

$$\begin{aligned}
 &= \frac{5 \times 153 - 26 \times 27}{\sqrt{[5 \times 154 - (26)^2] \times [5 \times 159 - (27)^2]}} \\
 &= \frac{765 - 702}{\sqrt{[770 - 676] \times [795 - 729]}} = \frac{63}{\sqrt{94 \times 66}} = 0.7988
 \end{aligned}$$

अतः छात्रों के दो विषयों सांख्यिकी एवं आदर भाव विषयों के प्राप्तांक में उच्च कोटि का धनात्मक सहसंबंध परिलक्षित होता है।

उदाहरण 4.1.2 नीचे 8 व्यक्तियों एवं उनकी पत्नियों की उंचाई दिया गया है। समकों का प्रयोग करके पति एवं पत्नियों की उंचाई के बीच सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

पति (cms.)	164	176	178	184	175	167	173	180
पत्नि (cms.)	158	164	165	171	163	156	163	169

हल: (लघु या अप्रत्यक्ष विधि)

माना कि X पतियों के उंचाई एवं Y पत्नियों के उंचाई को प्रदर्शित करते हैं। एवं माना कि $U = X - A = X - 170$ एवं $V = Y - B = Y - 160$ । यहां, $A = 170$ एवं $B = 160$ के लिए नई मूल बिन्दू है।

X	Y	U=X-170	V=Y-160	U ²	V ²	UV
164	158	-6	-2	36	4	12
176	164	6	4	36	16	24
178	165	8	5	64	25	40
184	171	14	11	196	121	154
175	163	5	3	25	9	15
167	156	-3	-4	9	16	12
173	163	3	3	9	9	9
180	169	10	9	100	81	90
कुल =		37	29	475	281	256

चूंकि सहसंबंध गुणांक मूल एवं पैमाने के परिवर्तन से बिल्कुल स्वतंत्र है। फलतः चर X एवं Y के लिए जो सहसंबंध होंगे उसी तरह U एवं V के बीच सहसंबंध निम्न रूप से ज्ञात किया जा सकता है।

$$r = \frac{n \sum uv - (\sum u)(\sum v)}{\sqrt{[n \sum u^2 - (\sum u)^2] \times [n \sum v^2 - (\sum v)^2]}}$$

$$= \frac{8 \times 256 - 37 \times 29}{\sqrt{[8 \times 475 - (37)^2] \times [8 \times 281 - (29)^2]}}$$

$$= \frac{1775}{\sqrt{2431 \times 1407}} = 0.9598$$

इस प्रकार पति एवं पत्नियों के उंचाई के बीच उच्च कोटि के सहसंबंध पाया जाता है।

उदाहरण 4.1.3 निम्नलिखित समकों के लिए कार्ल पीयर्सन का सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

वर्ष	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
उत्पादन का सूचकांक	100	102	104	107	105	112	103	99
कर्मचारियों की संख्या	15	12	13	11	12	12	19	26

हल:

कार्ल पीयर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना करें,

वर्ष	उत्पादन का सूचकांक X	$X - \bar{X}$ = x	x^2	कर्मचारियों की संख्या (Y)	$Y - \bar{Y}$ = y	y^2	xy
1985	100	-4	16	15	0	0	0
1986	102	-2	4	12	-3	9	+6
1987	104	0	0	13	-2	4	0
1988	107	+3	9	11	-4	16	-12
1989	105	+1	1	12	-3	9	-3

1990	112	+8	64	12	-3	9	-24
1991	103	-1	1	19	+4	16	-A
1992	99	-5	25	26	+11	121	-55
	$\Sigma X = 832$	$\Sigma x = 0$	$\Sigma x^2 = 120$	$\Sigma Y = 120$	$\Sigma y = 0$	$\Sigma y^2 = 184$	$\Sigma xy = -92$

$$\bar{X} = \Sigma X / N = 832/8 = 104$$

$$\bar{Y} = \Sigma Y / N = 120/8 = 15$$

उदाहरण 4.1.4: निम्नलिखित संमकों से सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

X	50	60	58	47	49	33	65	43	46	68
Y	48	65	50	48	55	58	63	48	50	70

हल:

कार्ल पीयर्सन के सहसंबंध गुणांक की गणना,

X	X - 50 =	dx ²	Y	Y - 55 =	dy ²	dx dy
50	0	0	48	-7	49	0
60	+10	100	65	+10	100	+100
58	+8	64	50	-5	25	-40
47	-3	9	48	-7	49	+21
49	-1	1	55	0	0	0
33	-17	289	58	3	9	-51
65	+15	225	63	8	64	+120
43	-7	49	48	-7	49	+49
46	-4	16	50	-5	25	+20
68	+18	324	70	15	225	+270
$\Sigma X = 519$	$\Sigma dx = +19$	$\Sigma dx^2 = 1077$	$\Sigma Y = 535$	$\Sigma dy = 5$	$\Sigma dy^2 = 595$	$\Sigma dxdy = 489$

सहसंबंध r को ज्ञात करने के लिए सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$r = \frac{N \Sigma dxdy - \Sigma dx \cdot \Sigma dy}{\sqrt{N \Sigma dx^2 - (\Sigma dx)^2} \cdot \sqrt{N \Sigma dy^2 - (\Sigma dy)^2}}$$

$$r = \frac{10 \times 489 - (19)(5)}{\sqrt{10 \times 1077 - 19 \times 19} \sqrt{10 \times 595 - 5 \times 5}}$$

$$r = 0.611$$

4.1.2 स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध

माना कि हम पांच विद्यार्थियों के सांख्यिकी एवं गणित में प्राप्तांक को जानते हैं। सांख्यिकी विषय में प्राप्तांक के अनुसार उनको क्रम देते हैं। साथ ही उनके प्राप्तांक के अनुसार गणित में भी क्रम या कोटि प्रदान करते हैं। तब, इन दो समुच्चयों के कोटि के बीच सहसंबंध को ही कोटि सहसंबंध कहते हैं। इस कोटि के लिए गणना की गई सहसंबंध गुणांक को ही स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक कहते हैं। द्विपद चरों में, यदि चरों के मूल्यों को बढ़ते या घटते क्रम में कोटि देते हैं, तो इनके कोटियों के बीच सहसंबंध को ही कोटि सहसंबंध कहते हैं। इन कोटियों के लिए गणना की गई सहसंबंध को ही स्पीयरमैन का कोटि सहसंबंध गुणांक कहते हैं। इसे ρ (रो) से इंगित किया जाता है। यदि R_1 एवं R_2

अध्ययन के अन्तर्गत कोटियों की दो श्रेणिया हैं और यदि $d = R_1 - R_2$ इन कोटियों का अन्तर है, तब कोटि सहसंबंध गुणांक निम्न रूप से निकाला जा सकता है,

$$\rho = 1 - \left(\frac{6 \sum d^2}{n^3 - n} \right)$$

चूँकि ρ कोटियों बीच एक सहसंबंध गुणांक है अतः इसका इसका मूल्य भी -1 से $+1$ के बीच होता है।

कार्ल पीर्यसन के सहसंबंध गुणांक की गणना तभी की जा सकती है अध्ययन के अन्तर्गत दिया गया राशि मात्रात्मक हो (उन्हें संख्या के रूप में व्यक्त किया जाना चाहिए)। लेकिन, स्पीर्यमैन के कोटि सहसंबंध की गणना गुणात्मक प्रकार के विशेषता वाले आंकड़ों के लिए भी की जा सकती हैं। यदि इनमें दो विशेषताओं के आधार पर इकाईयों को कोटि देना संभव हो तो कोटि सहसंबंध गुणांक करते हैं। इसकी गणना क्रमसूचक संख्या में भी किया जा सकता है।

सहसंबंध का 't' जांच

't' जांच का प्रयोग सहसंबंध गुणांक के जांच के लिए किया जाता है। छः व्यस्क व्यक्तियों की लम्बाई एवं वजन से संबंधित दैव न्यायदर्श दिये हुए हैं,

उंचाई	(cm)	170	175	176	178	183	185
वजन	(kg)	57	64	70	76	71	82

यह मानना बुद्धिमानी होगी कि दिये गये चर सामान्य वितरित हैं, इसलिए इन दानों चरो के बीच साहचर्य को देखने के लिए कार्ल पीर्यसन के सहसंबंध गुणांक के द्वारा ज्ञात किया जा गया है, $r = 0.875$ है।

कार्ल पीर्यसन के समग्र सहसंबंध गुणांक के लिए परिकल्पना जांच

शून्य परिकल्पना, $H_0: p = 0$; यह प्रदर्शित करता है कि समग्र में मौजूद चरों के बीच कोई सहसंबंध नहीं है।

वैकल्पिक परिकल्पना, $H_1: p > 0$; यह इंगित करता है कि समग्र के चरों के बीच धनात्मक सहसंबंध है (उंचाई में वृद्धि का सहचार्य वजन में वृद्धि के साथ है)।

सार्वतक का स्तर 5 प्रतिशत है,

$$\text{सांख्यिक 't' जांच} = r \frac{\sqrt{n-2}}{1-r^2} = 0.875 \frac{\sqrt{6-2}}{1-0.875^2} = 3.61$$

5 प्रतिशत सार्थकता स्तर एवं 4 स्वतंत्रता कोटि पर 't' जांच का सारणिक मूल्य 2.132 है। चूँकि आकलित मूल्य सारणिक मूल्य से अधिक हैं इसलिए शून्य परिकल्पना अस्वीकार होगी तथा वैकल्पिक परिकल्पना स्वीकार होगी। अर्थात् उंचाई एवं वजन, दोनों चरों के बीच धनात्मक सहसंबंध पाया जाता है।

उदाहरण 4.1.5 निम्नलिखित 8 छात्रों के खानपान प्रौद्योगिकी एवं कार्यालय प्रबंधन के प्राप्तांक दिये गये हैं। कोटि सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

खानपान प्रौद्योगिकी	25	43	27	35	54	61	37	45
कार्यालय प्रबंधन	35	47	20	37	63	54	28	40

हल: कोटि सहसंबंध को ज्ञात करने के लिए, सबसे पहले, छात्रों के दो विषयों में प्राप्तांक के कोटि को निम्नलिखित तरीके से ज्ञात करें।

प्राप्तांक		कोटि		$d = R_1 - R_2$	d^2
X	Y	R_1	R_2		
25	35	8	6	2	4
43	47	4	3	1	1

27	20	7	8	-1	1
35	37	6	5	1	1
54	63	2	1	1	1
61	54	1	2	-1	1
37	28	5	7	-2	4
45	40	3	4	-1	1
					$\sum d^2 = 14$

कोटि सहसंबंध गुणांक,

$$\rho = 1 - \left(\frac{6 \sum d^2}{n^3 - n} \right) = 1 - \left(\frac{6 \times 14}{8^3 - 8} \right) = 1 - \frac{84}{504}$$

$$= 1 - 0.1667 = 0.8333$$

इस प्रकार हम पाते हैं कि खानपान प्रौद्योगिकी एवं कार्यालय प्रबंधन विषयों में प्राप्तांक के बीच उच्च कोटि के सहसंबंध विद्यमान है।

4.1.3 आंशिक सहसंबंध

आंशिक सहसंबंध का प्रयोग उस स्थिति में करते हैं जहाँ चरों की संख्या तीन या अधिक हों। तीन चर जैसे, आय, उंचाई एवं वजन हो सकते हैं। ऐसी स्थिति में आंशिक सहसंबंध का प्रयोग किया जा सकता है। उंचाई एवं वजन में सहसंबंध, आयु को स्थिर रखते हुए ज्ञात किया जा सकता है। आयु एक महत्वपूर्ण कारक है जो उंचाई एवं वजन के बीच पाये जाने वाले सहसंबंध को और मजबूती प्रदान करते हैं। आंशिक सहसंबंध का प्रयोग आयु के प्रभाव को स्थिर के लिए किया जाता है। इसके अन्तर्गत एक चर के प्रभाव को अन्य दो चरों के बीच मौजूद सहसंबंध के सापेक्ष आंशिक रूप से अलग किया जाता है। इस सांख्यिकीय तकनीक को ही आंशिक सहसंबंध कहते हैं।

चर x एवं y के बीच सहसंबंध को r_{xy} से इंगित किया जाता है।

आंशिक सहसंबंध को $r_{12.3}$ से प्रदर्शित किया जाता है। यहां चर 1 एवं 2 के बीच सहसंबंध है जबकि तीसरा या 3^{रा} चर को स्थिर रखा गया है।

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13} \cdot r_{23}}{\sqrt{1 - r_{13}^2} \times \sqrt{1 - r_{23}^2}}$$

$r_{12.3}$ = 3^{रा} चर को स्थिर रखते हुए चर 1 एवं 2 के बीच सहसंबंध।

r_{12} = चर 1 एवं 2 के बीच सहसंबंध।

r_{13} = चर 1 एवं 3 के बीच सहसंबंध।

r_{23} = चर 2 एवं 3 के बीच सहसंबंध।

इसी तरह:

$$r_{13.2} = \frac{r_{13} - r_{12} \cdot r_{23}}{\sqrt{1 - r_{12}^2} \times \sqrt{1 - r_{23}^2}} \text{ और}$$

$$r_{23.1} = \frac{r_{23} - r_{12} \cdot r_{13}}{\sqrt{1 - r_{12}^2} \times \sqrt{1 - r_{13}^2}}$$

उदाहरण 4.1.6 निम्नलिखित संमंकों का प्रयोग करके तीसरे चर या 3^{रा} चर को स्थिर रखते हुए प्रथम एवं द्वितीय चर अथवा 1 एवं 2 के बीच सहसंबंध ज्ञात करें। यदि,

$$r_{12} = 0.7; \quad r_{13} = 0.6; \quad r_{23} = 0.4$$

$$\text{उत्तर: } r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13} \cdot r_{23}}{\sqrt{1-r_{13}^2} \times \sqrt{1-r_{23}^2}}$$

$$r_{12.3} = \frac{0.7 - (0.6)(0.4)}{\sqrt{1-(0.6)^2} \times \sqrt{1-(0.4)^2}}$$

$$r_{12.3} = 0.625$$

4.1.5 बहुगुणी सहसंबंध

बहुगुणी सहसंबंध में तीन या अधिक चर मौजूद हो सकते हैं। आश्रित चर को X_1 से इंगित करते हैं और अन्य चरों को X_2, X_3, X_4 इत्यादि से प्रदर्शित किया जाता है। गुप्ता एस. पी. ने स्पष्ट किया है, 'रैखिक बहुगुणी सहसंबंध के गुणांक को R_1 से प्रदर्शित करते हैं और इसमें मौजूद अन्य चरों को सबस्क्रिप्ट जोड़कर दिखाया जा सकता है। इस प्रकार, $R_{1.234}$ रैखिक सहसंबंध गुणांक को प्रस्तुत करता है जिसमें X_1 एक आश्रित चर है जिसका सहसंबंध X_2, X_3, X_4 के साथ है। आश्रित चर का सबस्क्रिप्ट सदैव बिन्दू के बायें ओर लिखा जाना चाहिए।'

बहुगुणी सहसंबंध के गुणांक को r_{12}, r_{13} , एवं r_{23} के आधार पर निम्नलिखित रूप से प्रस्तुत किया जा सकता है:

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{23}^2}}$$

$$R_{2.13} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{13}^2}}$$

$$R_{3.12} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{23}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{12}^2}}$$

जहाँ, $R_{1.23}$ बहुगुणी सहसंबंध गुणांक है।

बहुगुणी सहसंबंध गुणांक का मूल्य भी 0 से 1 के बीच होते हैं। यदि बहुगुणी सहसंबंध गुणांक का मूल्य 1 के बराबर हो तब इसका अर्थ है कि चरों के बीच पूर्ण सहसंबंध विद्यमान है। यदि यह 0 के बराबर है, तब यह प्रदर्शित करता है कि चरों के बीच कोई रैखिक सहसंबंध नहीं है। इस प्रकार बहुगुणी सहसंबंध के मूल्य सदैव धनात्मक होते हैं जिसका विस्तार +1 से 0 के बीच होता है।

बहुगुणी सहसंबंध गुणांक को हम $R_{1.23}$ का वर्ग निकालकर प्राप्त किया जा सकता है। अतः $R_{1.23}$ का वैकल्पिक सूत्र है:

$$R_{1.23} = \sqrt{r_{12}^2 + r_{13.2}^2 (1-r_{12}^2)} \text{ या}$$

$$R_{1.23}^2 = r_{12}^2 + r_{13.2}^2 (1-r_{12}^2)$$

इसी प्रकार, $R_{1.24}$ एवं $R_{1.34}$ के लिए भी वैकल्पिक सूत्र को प्राप्त किया जा सकता है। निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग बहुगुणी सहसंबंध ज्ञात करने के लिए किया जा सकता है जिसमें तीन स्वतंत्र चर हैं।

$$R_{1.234} = \sqrt{1 - (1 - r_{14}^2)(1 - r_{13.4}^2)(1 - r_{12.34}^2)}$$

बहुगुणी सहसंबंध विश्लेषण वह माप है जो दिये गये चरों के बीच सहसंबंध को स्थापित या पता लगाने का कार्य करता है। इस विश्लेषण में एक चर जो आश्रित है का अन्य स्वतंत्र चरों के बीच साहचर्य की कोटि को जानने के लिए उत्सुक रहते हैं।

उदाहरण 4.1.7 निम्नलिखित शून्य-क्रम के सहसंबंध गुणांक दिये गये हैं।

$$r_{12} = 0.98 ; r_{13} = 0.44 ; r_{23} = 0.54$$

प्रथम चर को आश्रित एवं अन्य दो चरों, द्वितीय एवं तृतीय को स्वतंत्र मानते हुए बहुगुणी सहसंबंध की गणना करें। (Source: Gupta S.P, Statistical Methods).

हल:

प्रथम चर एक आश्रित चर है।

द्वितीय एवं तृतीय चर स्वतंत्र हैं।

बहुगुणी सहसंबंध गुणांक $R_{1.23}$ के सूत्र का प्रयोग करने पर हम पाते हैं कि

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}}$$

$$R_{1.23} = \sqrt{\frac{(0.98)^2 + (0.44)^2 - 2(0.98)(0.44)(0.54)}{1 - (0.54)^2}}$$

$$R_{1.23} = 0.986$$

4.1.6 इकाई का सारांश

इस इकाई में हमने उदाहरणों के मदद से विभिन्न प्रकार के सहसंबंधों का विस्तृत अध्ययन किया है। दूसरा स्पीर्यमैन के कोटि सहसंबंध गुणांक का अध्ययन उचित उदाहरण के द्वारा किया गया है। चित्र की सहायता से विक्षेप रेखाचित्र के अवधारणा का अच्छे तरह से व्याख्या किया गया है। कार्ल पीर्यसन के सहसंबंध गुणांक की गणना विधि को उदाहरणों के माध्यम से स्पष्ट किया गया है। सांख्यिकी में, आश्रित होने का अर्थ है कि दो या दो से अधिक चरों या समंक समुच्चयों के बीच सांख्यिकीय संबंध का होना। सहसंबंध का मोटे तौर पर अर्थ है सांख्यिकी संबंधों में निर्भरता। निर्भरता से संबंधित एक प्रचलित भौतिक उदाहरण है कि पिता पुत्र के बीच संबंध का पाया जाना, और उत्पाद की मांग एवं उसके कीमत के बीच सहसंबंध का होना। सहसंबंध एक उपयोगी विधि है जिसका प्रयोग पूर्वानुमान को निर्देशित करने के लिये किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, विद्युत/ बिजली की मांग एवं मौसम के बीच सहसंबंध को पाया जाता है। इस उदाहरण में, एक कारणीय संबंध को प्रदर्शित करता है, क्योंकि चरम मौसम में अधिक गर्मी से ठण्डा एवं ठण्डे में गर्मी करने के लिए अधिक विद्युत की आवश्यकता होती है,

4.1.7 मुख्य शब्द

- **सहसंबंध:** दो चरों के बीच संबंध को ही सहसंबंध कहते हैं।
- **विक्षेप रेखाचित्र:** यह द्विपद समकों के बिन्दुरेखीय प्रदर्शन है।
- **बहुगुणी सहसंबंध:** यदि सहसंबंध में तीन या इससे अधिक चर मौजूद हों तब इसे बहुगुणी सहसंबंध कहते हैं।

4.1.8 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न

1. एक द्विपद समंक्रमाला में, x एवं y , $Var(x)=49, Var(y)=9$ तथा $Cov(x,y)=-17.5$ है। x एवं y के बीच सहसंबंध ज्ञात करें।

उत्तर: **-0.833**

2. एक द्विपद समंक्रमाला में, x एवं y के 10 अवलोकनों से संबंधित सूचनाएं दी गई हैं $\sum x=56, \sum y=138, \sum x^2=1357, \sum y^2=2136$ and $\sum xy=836$ । x एवं y के बीच सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

उत्तर: **0.1286**

3. चर x एवं y , दोनों पूर्ण ऋणात्मक सहसंबंध है। यह भी दिया है, $S.D.(x)=4.3$ और $S.D.(y)=0.47$ । तब, $Cov(x,y)$ चरों के बीच सहप्रसरण ज्ञात करें।

उत्तर: $Cov(x,y)=-2.021$

4. 6 होटलों के दो सप्ताह में बिक्री का विवरण निम्नलिखित रूप से दिया गया है। स्पीर्यमैन के कोटि सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

होटल	1	2	3	4	5	6
प्रथम सप्ताह की बिक्री	60	110	65	40	70	20
द्वितीय सप्ताह की बिक्री	90	100	80	30	70	20

उत्तर: **0.7714**

5. 8 छात्रों के दो विषयों अर्थशास्त्र एवं सांख्यिकी के प्रतिशत प्राप्तांकों कोटि सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

प्राप्तांक

अर्थशास्त्र:	50	60	65	70	75	40	70	80
सांख्यिकी:	80	71	60	75	90	82	70	50

उत्तर: **-0.3571**

6. आठ विद्यार्थियों के लेखांकन (X) एवं सांख्यिकी (Y) विषयों में प्राप्तांक नीचे दिये गये हैं। कोटि सहसंबंध ज्ञात करें।

X :	15	20	28	12	40	60	20	80
Y :	40	30	50	30	20	10	30	60

उत्तर: **0**

7. निम्नलिखित सारणी में 100 छात्रों के बुद्धिमता जांच के उपरान्त आयु की आवृत्तियाँ एवं संगत प्राप्तांक दिये गये हैं।

आयु वर्ष में → प्राप्तांक ↓	18	19	20	21	कुल
10 – 20	4	2	2	—	8
20 – 30	5	4	6	4	19
30 – 40	6	8	10	11	35
40 – 50	4	4	6	8	22
50 – 60	—	2	4	4	10
60 – 70	—	2	3	1	6
Total	19	22	31	28	100

आयु एवं प्राप्तांकों के बीच सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

उत्तर: 0.2566

8. निम्नलिखित संमंकमाला से कार्ल पीयर्सन के सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें, जहां कीमत श्रेणी के लिए कल्पित माध्य 20 एवं मांग श्रेणी के लिए कल्पित माध्य 70 का प्रयोग करें।

कीमत :	14	16	17	18	19	20	21	22	23
मांग :	87	78	70	75	66	67	62	58	60

उत्तर: $r = -0.954$

9. निम्नलिखित संमंकमाला कीमत एवं मांगी गई मात्रा से संबंधित हैं, कार्ल पीयर्सन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें, (43, 105), (54, 98) (85, 53) (91, 95) (59, 84) (95, 40), (68, 73) (29, 59) (73, 63) (72, 52)।

उत्तर: -0.959

10. सहसंबंध के विभिन्न प्रकारों का उल्लेख उचित उदाहरण के साथ करें।
 11. निम्नलिखित सारणी में 8 श्रमिकों को दैव निदर्शन से चयन करके उनका अभिक्षमता स्कोर एवं उत्पादकता सूचकांक अंकित किया गया है।

अभिक्षमता स्कोर :	57	58	59	59	60	61	62	64
उत्पादकता सूचकांक :	67	68	65	68	72	72	69	71

अभिक्षमता स्कोर एवं उत्पादकता सूचकांक के बीच कार्ल पीयर्सन का सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

उत्तर: 0.6030

12. नीचे दिये गये x-विज्ञापन व्यय एवं वस्तुओं के y-बिक्री से संबंधित संमंक दिये गये हैं, कार्ल पीयर्सन सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

x:	10	12	18	8	13	20	22	15	5	17
y:	88	90	94	86	87	92	96	94	88	85

उत्तर: 0.6370

4.1.9 संदर्भ पुस्तकें

1. J. K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
2. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
3. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
4. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
5. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
6. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
7. अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
8. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
9. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
10. Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
11. R.P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India Ltd., Delhi, India.

द्विचर समकों का विश्लेषण: वर्गीकृत समंक (Bivariate Analysis: Classified Data)

इकाई की योजना (Unit Plan)

4.2.1 परिचय (Introduction):

4.2.2 एकल चर विश्लेषण (Univariate Analysis):

4.2.3 द्वि-चरीय विश्लेषण (Univariate Analysis):

4.2.4 वर्गीकृत द्विचर समकों से सांख्यिकी गणनाएँ:

4.2.4.(a). वर्गीकृत द्विचरीय समकों से विचलन/प्रसरण गुणांक की गणना:

4.2.5. वर्गीकृत द्विचरीय समकों से सह-सम्बंध गुणांक की गणना:

4.2.6. वर्गीकृत द्विचर समकों से प्रतीपगमन रेखाओं का आकलन:

4.2.7 बहु-चरीय विश्लेषण (Multi-variate Analysis):

4.2.8 अभ्यास के प्रश्न (Questions for Exercise):

4.2.9 उपयोगी पुस्तकें (Usefull Books):

4.2.1 परिचय (Introduction):

सांख्यिकी में एकल चर विश्लेषण के अनन्तगत केवल एक चर का विश्लेषण किया जाता है। इनके साथ सांख्यिकी विश्लेषण के अन्तर्गत समकों को तालिका या वर्गों में व्यवस्थित करना, उनका चित्रमय प्रदर्शन करना, उनसे प्रतिनिधि मूल्यों (केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें, विचलन की मापें आदि) की गणना आदि क्रियाएँ की जाती हैं। जिसका मुख्य उद्देश्य समकों में छिपे हुए तथ्यों को उजागर करना है।

द्विचरीय सांख्यिकी विश्लेषणों में एक साथ दो चरों के व्यवहारों का अध्ययन किया जाता है। इसके अन्तर्गत एकल चर विश्लेषण वाली सारी क्रियाओं के साथ साथ उनके बीच सह-विचलन या सह-प्रसरण (Covariation), सह-सम्बंध (Correlation) तथा प्रतीपगमन विश्लेषण आदि किया जाता है।

बहु-चरीय सांख्यिकी विश्लेषणों में एकल चर विश्लेषण और द्वि-चरीय विश्लेषण की सारी क्रियाओं के साथ साथ बहुचरीय सह-सम्बंधों और आंशिक सह-सम्बंधों की गणना भी करते हैं।

4.2.2 एकल चर विश्लेषण (Univariate Analysis):

Uni का मतलब एक और Variate का मतलब चर होता है। एकल चर से सम्बंधित सांख्यिकी क्रियाएँ एकल चर विश्लेषण के रूप में जानी जाती हैं। सांख्यिकी की दृष्टि में एकल चर विश्लेषण के अन्तर्गत सबसे सरल क्रियाएँ सम्पन्न की जाती हैं। इसके अन्तर्गत समकों को सारणियों एवं वर्गों में व्यवस्थित किया जाता है, उनका चित्रमय प्रदर्शन किया जाता है, उनके प्रतिनिधि मूल्यों (केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें, विचलन की मापें) आदि की गणना की जाती है।

एकल चर के समंक भी दो प्रकार से व्यवस्थित किए जाते हैं:

(i). एकल चर व्यक्तिगत अथवा अवर्गीकृत समंक श्रेणी: व्यक्तिगत अथवा अवर्गीकृत समंक श्रेणियों में केवल चरों के विभिन्न मूल्य दिए रहते हैं। अलग से उनकी बारम्बारता नहीं दी जाती है।

एकल चर की व्यक्तिगत अथवा अवर्गीकृत समंक माला को निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया गया है—

उदाहरण 4.2.1: एक चीनी कारखाना/कम्पनी द्वारा विगत 10 वर्षों में किए गए उत्पादन की मात्रा निम्नलिखित तालिका में दी गयी है—

तालिका: 4.2.1: विगत 10 वर्षों में चीनी कम्पनी द्वारा उत्पादन की मात्रा।

वर्ष	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
मात्रा	20	22	23	25	24	28	30	28	32	35

(हजार टन में)

उपरोक्त तालिका में व्यवस्थित एकल चर, उत्पादन की मात्रा दिया गया है। उपरोक्त समंकों का अधिकतम (35) और न्यूनतम मान (20) ज्ञात करते हैं। औसत उत्पादन का मान 26.7 हजार टन है। इसी तरह से उपरोक्त समंकों से प्रसरण और प्रमाप विचलन आदि का मान ज्ञात कर सकते हैं। उपरोक्त समंकों का दंडचित्र भी बना सकते हैं।

(ii). एकल चर वर्गीकृत समंक श्रेणी: एकल चर से सम्बंधित वर्गीकृत समंक श्रेणी में पद मूल्यों के साथ साथ उनकी आवृत्तियाँ भी दी जाती है। वर्गीकृत समंक श्रेणियाँ दो तरह की होती है: वर्गीकृत खण्डित समंक माला और वर्गीकृत सतत समंक माला। जब चर खंडित प्रकृति के होते हैं तब समंक माला का खण्डित वर्गीकरण किया जाता है। परिवार में बच्चों की संख्या, मकान में कमरों/कक्षों की संख्या आदि खंडित चर के उदाहरण हैं। इसके विपरीत जब चर सतत प्रवृत्ति के होते हैं तब समंक माला का सतत वर्गीकरण किया जाता है। परीक्षार्थियों का प्राप्तांक, छात्रों की लम्बाई, उत्पादन की मात्रा तथा व्यक्ति की आय, तापमान आदि सतत चर के उदाहरण हैं।

एकल चर की वर्गीकृत समंक माला को निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया गया है—

तलिका: 4.2.2: एकल खंडित चर की वर्गीकृत समंक माला का उदाहरण।

परिवार में बच्चों की संख्या परिवारों की संख्या

0	6
1	24
2	35
3	20
4	18
5	12
6	6
7 एवं अधिक	4

तलिका: 4.2.3: एकल सतत चर की वर्गीकृत समंक माला का उदाहरण।

प्राप्तांक छात्रों की संख्या

0-10	8
10-20	7
20-30	10
30-40	15
40-50	10
50-60	12
60-70	28
70-80	11
80-90	9
90-100	3

उपरोक्त तालिका में एकल चर के वर्गीकृत समंकों को व्यवस्थित किया गया है। दिए गए समंक माला का विस्तार, केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें (माध्य, माध्यिका, बहुलक आदि), विचलन की मापें (विस्तार, माध्य विचलन, प्रमाप विचलन आदि) की गणना करते हैं। साथ ही दिए गए समंक माला का आयत चित्र, आवृत्ति बहुभुज, संचयी आवृत्ति वक्र आदि रेखा चित्र बनाते हैं।

4.2.3 द्वि-चरीय विश्लेषण (Bivariate Analysis): द्विचरीय विश्लेषण में एक साथ दो चरों की समंकमालाएँ दी रहती है। इसमें चरों के मान जोड़े (Paired data) के रूप में होते हैं। उदाहरण के लिए यदि X और Y दो चर हैं तो उनके समंक जोड़े $\{(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots (X_n, Y_n)\}$ के रूप में दिए जाते हैं। जहाँ n दोनों चरों के कुल समंक जोड़ों की संख्या है।

द्विचर समंकमाला भी दो तरह से व्यवस्थित किए जाते हैं: **अवर्गीकृत द्विचर समंकमाला तथा वर्गीकृत द्विचर समंकमाला**। दोनों तरह के द्विचर समंकमालाओं को निम्नलिखित उदाहरण के द्वारा स्पष्ट किया गया है—

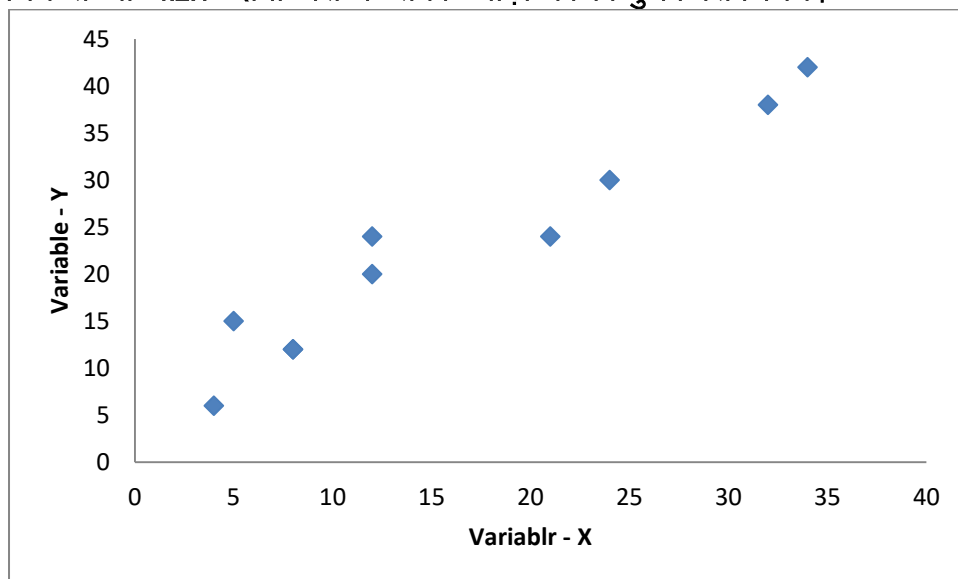
अवर्गीकृत द्विचर समंकमालाओं में केवल दोनों चरों के समंक जोड़ों के रूप में दिए होते हैं। इनकी कोई आवृत्ति वितरण नहीं होती है। अर्थात् दोनों चरों की अलग अलग व्यक्तिगत श्रेणियाँ होती है। अवर्गीकृत द्विचर समंकमालाओं का उदाहरण निम्नलिखित तालिका में दिया गया है—

तालिका: 4.2.4: अवर्गीकृत द्विचर समंकमाला

X	Y
4	6
8	12
5	15
8	12
12	20
21	24
34	42
32	38
12	24
24	30

उपरोक्त तालिका में दिए गए दानों चरों के समंक एक जोड़े के रूप में हैं। पहले जोड़े में X का मान जब 4 है तब Y का मान 12 है। दूसरे जोड़े में X का मान जब 5 है तब Y का मान 15 है। इसी तरह से दोनों चरों के 10 जोड़े दिए हैं। यहाँ दोनों चरों के कुल समंक जोड़ों की संख्या, N= 10 है। उपरोक्त दिए गए चरों के 10 जोड़े समंकों को बिन्दु विखराव चित्र (Scatter Diagram) के द्वारा प्रदर्शित करते हैं। इनके दिए गए समंकों से दोनों चरों के मध्य सह प्रसरण गुणक एवं सह-सम्बंध गुणांक की गणना की जा सकती है। साथ ही दो प्रतीपगमन रेखाएँ (Regression Lines) आकलित की जा सकती है।

चित्र संख्या: 4.2.1: दोनों चरों के समंक जोड़ों का बिन्दु विखराव चित्र।



वर्गीकृत द्विचर समंकमालाओं में दोनों चरों का संयुक्त रूप से वर्गीकरण किया जाता है। अर्थात् इनकी संयुक्त आवृत्ति वितरण होती है। वर्गीकृत द्विचर समंकमालाओं का उदाहरण निम्नलिखित तालिका में दिया गया है—

तालिका: 4.2.5: वर्गीकृत द्विचर समंकमाला:

		Economics Marks						
Statistics Marks		40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99	Total
	90-99				2	4	4	10
	80-89			1	4	6	5	16
	70-79			5	10	8	1	24
	60-69	1	4	9	5	2		21
	50-59	3	6	6	2			17
	40-49	3	5	4				12
	Total	7	15	25	23	20	10	100

उपरोक्त तालिका में दो चरों X (Marks of Statistics) और Y (Marks of Economics) के वर्गीकृत समकों को व्यवस्थित किया गया है। उपरोक्त तालिका से स्पष्ट है कि अर्थशास्त्र और सांख्यिकी दोनों में 40 से 49 तक अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या 3 है। इसी तरह दोनों विषयों में 50 से 59 तक अंक पाने वाले विद्यार्थियों की संख्या 6 है। अर्थशास्त्र विषय के 6 वर्ग हैं और सांख्यिकी के भी 6 वर्ग हैं। इस तरह से सभी विद्यार्थियों के प्राप्तांकों को 6 गुणा 6 बराबर 36 खानों (cell) में व्यवस्थित किया गया है। कुछ खाने (cell) खाली हैं अर्थात् उस खाने के सापेक्ष दोनों विषयों में किसी भी विद्यार्थी का प्राप्तांक नहीं है।

नोट: एकल चर की समंकमालाओं के समग्र के लिए माध्य और प्रमाप विचलन, प्रसरण निर्धारक (Parameters) होते हैं। जबकि द्विचर की समंकमालाओं के समग्र के लिए माध्य, प्रमाप विचलन या प्रसरण के साथ साथ दोनों चरों के बीच सह-प्रसरण भी निर्धारक (Parameters) होते हैं। इनके सांख्यिकी अध्ययनों में जब परिकल्पनाओं की जाँच करनी होती है तब इन्हीं निर्धारकों पर आधारित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है।

4.2.4 वर्गीकृत द्विचर समकों से सांख्यिकी गणनाएँ:

पूर्व के अध्यायों में अवर्गीकृत द्विचर समंकमालाओं से सह-सम्बंध गुणांक और प्रतीपगमन रेखाओं का आकलन किया गया है। वर्गीकृत द्विचर समकों से मुख्यतः सहसम्बंध गुणांक और प्रतीपगमन रेखाओं का आकलन किया जाता है। इस क्रम में दोनों चरों के प्रसरण और उनका सह प्रसरण भी ज्ञात किया जाता है।

4.2.4. क. वर्गीकृत द्विचरीय समकों से विचलन/प्रसरण एवं सह-प्रसरण गुणांक की गणना:

(a). वर्गीकृत द्विचर समकों से X श्रेणी का विचलन और प्रसरण ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है—

(i). प्रत्यक्ष रीति से,

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum F_x X^2}{N} - \left(\frac{F_x X}{N}\right)^2}$$

जहाँ, S_x = श्रेणी X का प्रमाप विचलन है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ हैं।

N, आवृत्तियों की कुल संख्या है।

(ii). विचलन रीति से,

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum F_x d_x^2}{N} - \left(\frac{F_x d_x}{N}\right)^2}$$

जहाँ, जहाँ, S_x = श्रेणी X का प्रमाप विचलन है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ हैं।

N, आवृत्तियों की कुल संख्या है।

$d_x = X - A$ तथा A कल्पित माध्य है।

(iii). पद विचलन रीति से,

$$S_x = c \times \sqrt{\frac{\sum F_x U_x^2}{N} - \left(\frac{F_x U_x}{N}\right)^2}$$

जहाँ, S_x = श्रेणी X का प्रमाप विचलन है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ हैं।

N, आवृत्तियों की कुल संख्या है।

$U_x = (X - A)/c$ तथा c श्रेणी का वर्गान्तर है।

(b). वर्गीकृत द्विचर समकों से Y श्रेणी का विचलन और प्रसरण ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्रों का प्रयोग किया जाता है—

(i). प्रत्यक्ष रीति से,

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum F_y Y^2}{N} - \left(\frac{F_y Y}{N}\right)^2}$$

जहाँ, S_y = श्रेणी Y का प्रमाप विचलन है।

N, आवृत्तियों की कुल संख्या है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ हैं।

(ii). विचलन रीति से,

$$y = \sqrt{\frac{\sum F_y d_y^2}{N} - \left(\frac{F_y d_y}{N}\right)^2}$$

जहाँ, S_y = श्रेणी Y का प्रमाप विचलन है।

N, आवृत्तियों की कुल संख्या है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ हैं।

$d_y = Y - B$ तथा B कल्पित माध्य है।

(iii). पद विचलन रीति से,

$$S_y = d \times \sqrt{\frac{\sum F_y U_y^2}{N} - \left(\frac{F_y U_y}{N}\right)^2}$$

जहाँ, S_y = श्रेणी Y का प्रमाप विचलन है।

N, आवृत्तियों की कुल संख्या है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ हैं।

$U_y = (Y - B)/d$ तथा d श्रेणी का वर्गान्तर है।

नोट: विचलन गुणांक का वर्ग ही प्रसरण गुणांक होता है।

(c). वर्गीकृत द्विचरीय समकों से सह-प्रसरण गुणांक की गणना: विचलन विधि

$$S_{xy} = \left[\frac{\sum f d_x d_y}{N} - \left\{ \frac{\sum F_x d_x}{N} \right\} \left\{ \frac{\sum F_y d_y}{N} \right\} \right]$$

जहाँ, S_{xy} = श्रेणी X तथा Y का सह-प्रसरण गुणांक है।

N, आवृत्तियों की कुल संख्या है।

F_x श्रेणी X की कुल आवृत्तियाँ हैं।

F_y श्रेणी Y की कुल आवृत्तियाँ हैं।

$d_x = X - A$ तथा A कल्पित माध्य है।

$d_y = X - B$ तथा B कल्पित माध्य है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ हैं।

माध्य से विचलन लेने पर उपरोक्त सूत्र निम्नलिखित रूप से संशोधित हो जाता है –

$$S_{xy} = \left[\frac{\sum fxy}{N} \right]$$

जहाँ, S_{xy} = श्रेणी X तथा Y का सह-प्रसरण गुणांक है।

N , आवृत्तियों की कुल संख्या है।

$x = X - \bar{X}$ तथा $\bar{X}$ श्रेणी का माध्य है।

$y = Y - \bar{Y}$ तथा $\bar{Y}$ श्रेणी का माध्य है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ हैं।

पद विचलन विधि

$$S_{xy} = c \times d \left[\frac{\sum f U_x U_y}{N} - \left\{ \frac{\sum F_x U_x}{N} \right\} \left\{ \frac{\sum F_y U_y}{N} \right\} \right]$$

जहाँ, S_{xy} = श्रेणी X तथा Y का सह-प्रसरण गुणांक है।

$U_x = (X - A)/c$ तथा c श्रेणी X का वर्गान्तर है।

$U_y = (Y - B)/d$ तथा d श्रेणी Y का वर्गान्तर है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ हैं।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ हैं।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ हैं।

N , आवृत्तियों की कुल संख्या है।

4.2.5 वर्गीकृत द्विचरीय समंकों से सह-सम्बंध गुणांक की गणना:

(i). प्रत्यक्ष रीति से

$$r_{xy} = \frac{N \sum fXY - (\sum F_x X)(\sum F_y Y)}{\sqrt{\{N \sum F_x X^2 - (\sum F_x X)^2\} \{N \sum F_y Y^2 - (\sum F_y Y)^2\}}}$$

जहाँ, f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ हैं।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ हैं।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ हैं।

N , आवृत्तियों की कुल संख्या है।

(ii). विचलन रीति से

$$r_{xy} = \frac{N \sum f d_x d_y - (\sum F_x d_x)(\sum F_y d_y)}{\sqrt{\{N \sum F_x d_x^2 - (\sum F_x d_x)^2\} \{N \sum F_y d_y^2 - (\sum F_y d_y)^2\}}}$$

जहाँ, $d_x = X - A$ तथा A कल्पित माध्य है।

$d_y = Y - B$ तथा B कल्पित माध्य है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ हैं।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ हैं।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ हैं।

N , आवृत्तियों की कुल संख्या है।

माध्य से विचलन की स्थिति में उपरोक्त सूत्र निम्नलिखित रूप से संशोधित हो जाता है—

$$r_{xy} = \frac{\sum fxy}{\sqrt{\{\sum F_x x^2\}\{\sum F_y y^2\}}}$$

जहाँ, $x = X - \bar{X}$ तथा $\bar{X}$ श्रेणी X का माध्य है।

$y = Y - \bar{Y}$ तथा $\bar{Y}$ श्रेणी Y का माध्य है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

N, आवृत्तियों की कुल संख्या है।

(iii). पद विचलन स्थिति में

$$r_{xy} = \frac{N \sum f U_x U_y - (\sum F_x U_x)(\sum F_y U_y)}{\sqrt{\{N \sum F_x U_x^2 - (\sum F_x U_x)^2\} \{N \sum F_y U_y^2 - (\sum F_y U_y)^2\}}}$$

जहाँ, $U_x = (X - A)/c$ तथा c श्रेणी X का वर्गान्तर है।

$U_y = (Y - B)/d$ तथा d श्रेणी Y का वर्गान्तर है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

N, आवृत्तियों की कुल संख्या है।

वर्गीकृत द्विचर समकों से सह-सम्बंध गुणांक की गणना को निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 4.2.1: उपरोक्त तालिका 4.2.5 में दिए गए समकों से सह-सम्बंध गुणांक की गणना करें।

हल:

पद विचलन रीति से निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं—

$$r_{xy} = \frac{N \sum f U_x U_y - (\sum F_x U_x)(\sum F_y U_y)}{\sqrt{\{N \sum F_x U_x^2 - (\sum F_x U_x)^2\} \{N \sum F_y U_y^2 - (\sum F_y U_y)^2\}}}$$

जहाँ, $U_x = (X - A)/c$ तथा c श्रेणी X का वर्गान्तर है।

$U_y = (Y - B)/d$ तथा d श्रेणी Y का वर्गान्तर है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

N, आवृत्तियों की कुल संख्या है।

उपरोक्त सूत्र के लिए आवश्यक गणनाएँ निम्नलिखित तालिका 4.2.6 में किया गया है।

तालिका 4.2.6

				Economics – Marks							F_y	$F_y U_y$	$F_y U_y^2$	$f U_x U_y$
					40-49	50-59	60-69	70-79	80-89	90-99				
				X	44.5	54.5	64.5	74.5	84.5	94.5				
Statistics – Marks		Y	$U_x \rightarrow$	-2	-1	0	1	2	3		10	20	40	44
			$U_y \downarrow$											
	90	94.5	2					2	4	4				

-99						(4)	(16)	(24)				
80-89	84.5	1			1 (0)	4 (4)	6 (12)	5 (15)	16	16	16	31
70-79	4.5	0			5 (0)	10 (0)	8 (0)	1 (0)	24	0	0	0
60-69	64.5	-1	1 (2)	4 (4)	9 (0)	5 (-5)	2 (-4)		21	-21	21	-3
50-59	54.5	-2	3 (12)	6 (12)	6 (0)	2 (-4)			17	-34	68	20
40-49	44.5	-3	3 (18)	5 (15)	4 (0)				12	-36	108	33
F_x			7	15	25	23	20	10	100	-55 $\sum F_y U_y$	253 $\sum F_y U_y^2$	125 $\sum f U_x U_y$
$F_x U_x$			-14	-15	0	23	40	30	64 $\sum F_x U_x$			
$F_x U_x^2$			28	15	0	23	80	90	236 $\sum F_x U_x^2$			
$f U_x U_y$			32	31	0	-1	24	39	125 $\sum f U_x U_y$			

नोट: $f \cdot U_x \cdot U_y$ के गुणनफल को संयुक्त आवृत्ति खानों में कोष्ठक में दिया गया है।

$$\begin{aligned}
 r_{xy} &= \frac{N \sum f U_x U_y - (\sum F_x U_x)(\sum F_y U_y)}{\sqrt{\{N \sum F_x U_x^2 - (\sum F_x U_x)^2\} \{N \sum F_y U_y^2 - (\sum F_y U_y)^2\}}} \\
 &= \frac{100 \times 125 - 64 \times (-55)}{\sqrt{\{100 \times 236 - 64^2\} \{100 \times 253 - (-55)^2\}}} \\
 &= \frac{12500 + 3520}{\sqrt{\{23600 - 4096\} \{25300 - 3025\}}} \\
 &= \frac{16020}{\sqrt{19504 \times 22275}} \\
 &= \frac{16020}{20843.5} \\
 &= 0.768
 \end{aligned}$$

4.2.6. वर्गीकृत द्विचर समंकों से प्रतीपगमन रेखाओं का आकलन:

अवर्गीकृत द्विचर समंकों की भांति वर्गीकृत द्विचर समंकों से भी दो रेखाओं का आकलन किया जा सकता है—

दिए गए समंकों से प्रतीपगमन रेखाओं का आकलन

(a). Y का X पर प्रतीपगमन रेखा (Y on X Regression Line):

$$Y = f(X)$$

समीकरण के रूप में,

$$Y = a + bX \dots\dots(1)$$

(i). प्रत्यक्ष विधि:

$$b = \frac{N \sum f XY - (\sum F_x X)(\sum F_y Y)}{N \sum F_x X^2 - (\sum F_x X)^2}$$

जहाँ, f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ हैं।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

(ii). विचलन विधि: कल्पित माध्य से विचलन

$$b = \frac{N \sum f d_x d_y - (\sum F_x d_x)(\sum F_y d_y)}{N \sum F_x d_x^2 - (\sum F_x d_x)^2}$$

जहाँ, $d_x = X - A$ तथा A श्रेणी X का कल्पित माध्य है।

$d_y = Y - B$ तथा B श्रेणी Y का कल्पित माध्य है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

विचलन विधि: वास्तविक माध्य से विचलन

$$b = \frac{\sum fxy}{\sum F_x x^2}$$

जहाँ, $x = X - \bar{X}$ तथा $\bar{X}$ श्रेणी X का माध्य है।

$y = Y - \bar{Y}$ तथा $\bar{Y}$ श्रेणी Y का माध्य है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

(iii). पद विचलन विधि:

$$b = \frac{N \sum f U_x U_y - (\sum F_x U_x)(\sum F_y U_y)}{N \sum F_x U_x^2 - (\sum F_x U_x)^2} \left(\frac{d}{c} \right)$$

जहाँ, $U_x = (X - A)/c$ तथा c श्रेणी X का वर्गान्तर है।

$U_y = (Y - B)/d$ तथा d श्रेणी Y का वर्गान्तर है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

नोट: चूँकि पद विचलन रीति में कल्पित माध्य से विचलन में स्थिरांक, प्रायः श्रेणी के वर्गान्तर से भाग दिया जाता है इसलिए सूत्र में उनका गुणा कर दिया जाता है।

(iv). प्रतीपगमन के अंतःखण्ड (Intercept) a का मान निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं—

$$a = \bar{Y} - b \bar{X}$$

(b). X का Y पर प्रतीपगमन रेखा (X on Y Regression Line):

$$X = f(Y)$$

समीकरण के रूप में,

$$X = c + dY \dots\dots(1)$$

(i). प्रत्यक्ष विधि:

$$d = \frac{N \sum fXY - (\sum F_x X)(\sum F_y Y)}{N \sum F_y Y^2 - (\sum F_y Y)^2}$$

जहाँ, f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

(ii). विचलन विधि: कल्पित माध्य से विचलन

$$d = \frac{N \sum f d_x d_y - (\sum F_x d_x)(\sum F_y d_y)}{N \sum F_y d_y^2 - (\sum F_y d_y)^2}$$

जहाँ, $d_x = X - A$ तथा A श्रेणी X का कल्पित माध्य है।

$d_y = Y - B$ तथा B श्रेणी Y का कल्पित माध्य है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

विचलन विधि: वास्तविक माध्य से विचलन

$$d = \frac{\sum fxy}{\sum F_y y^2}$$

जहाँ, $x = X - \bar{X}$ तथा $\bar{X}$ श्रेणी X का माध्य है।

$y = Y - \bar{Y}$ तथा $\bar{Y}$ श्रेणी Y का माध्य है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

(iii). पद विचलन विधि:

$$d = \frac{N \sum f U_x U_y - (\sum F_x U_x)(\sum F_y U_y)}{N \sum F_y U_y^2 - (\sum F_y U_y)^2} \left(\frac{c}{d} \right)$$

जहाँ, $U_x = (X - A)/c$ तथा c श्रेणी X का वर्गान्तर है।

$U_y = (Y - B)/d$ तथा d श्रेणी Y का वर्गान्तर है।

f दोनों चरों की संयुक्त/वर्गीकृत आवृत्तियाँ है।

F_x श्रेणी X की आवृत्तियाँ है।

F_y श्रेणी Y की आवृत्तियाँ है।

नोट: चूँकि पद विचलन रीति में कल्पित माध्य से विचलन में स्थिरांक, प्रायः श्रेणी के वर्गान्तर से भाग दिया जाता है इसलिए सूत्र में उनका गुणा कर दिया जाता है।

(iv). प्रतीपगमन के अंतःखण्ड (Intercept) a का मान निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं—

$$c = \bar{X} - d \bar{Y}$$

(c). सहसम्बंध गुणांक और प्रमाप विचलनों की सहायता से प्रतीपगमन रेखाओं का आकलन

(i). Y का X पर प्रतीपगमन रेखा (Y on X Regression Line):

$$Y = f(X)$$

समीकरण के रूप में,

$$Y = a + bX \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{जहाँ, } b = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

जहाँ, r_{xy} दोनों चरों के मध्य सह सम्बंध गुणांक का मान है।

σ_x श्रेणी X का प्रमाप विचलन है।

σ_y श्रेणी Y का प्रमाप विचलन है।

(ii). X का Y पर प्रतीपगमन रेखा (X on Y Regression Line):

$$X = f(Y)$$

समीकरण के रूप में,

$$X = c + dY \dots\dots\dots(2)$$

$$\text{जहाँ, } d = r_{xy} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

जहाँ, r_{xy} दोनों चरों के मध्य सह सम्बंध गुणांक का मान है।

σ_x श्रेणी X का प्रमाप विचलन है।

σ_y श्रेणी Y का प्रमाप विचलन है।

वर्गीकृत द्विचर समकों से प्रतीपगमन रेखाओं के आकलन विधि को निम्नलिखित उदाहरण द्वारा स्पष्ट किया गया है—

उदाहरण 4.2.2: तालिका 4.2.5 में दिए गए वर्गीकृत द्विचर समकों से दोनों प्रतीपगमन रेखाओं का आकलन करें।

हल: उपरोक्त तालिका 4.2.6 में की गयी गणनाओं का उपयोग करते हुए पद विचलन रीति से दोनों प्रतीपगमन रेखाओं का अकलन निम्नलिखित रूप से किया गया है—

(i). Y का X पर प्रतीपगमन रेखा (Y on X Regression Line):

$$Y = f(X)$$

समीकरण के रूप में,

$$Y = a + bX \dots\dots\dots(1)$$

पद विचलन विधि:

$$\begin{aligned} b &= \frac{N \sum f U_x U_y - (\sum F_x U_x)(\sum F_y U_y)}{N \sum F_x U_x^2 - (\sum F_x U_x)^2} \left(\frac{d}{c} \right) \\ &= \frac{100 \times 125 - 64(-55)}{100 \times 236 - (64)^2} \left(\frac{10}{10} \right) \\ &= \frac{12500 + 3520}{23600 - 4096} \\ &= \frac{16020}{19504} = 0.821 \end{aligned}$$

प्रतीपगमन के अंतःखण्ड (Intercept) a का मान निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं—

$$a = \bar{Y} - b \bar{X}$$

$$\bar{Y} = A + \frac{\sum F_y U_y}{N} \times d$$

$$= 74.5 + \frac{(-55)}{100} \times 10$$

$$74.5 - \frac{(550)}{100} = 74.5 - 5.5 = 69$$

$$\bar{X} = A + \frac{\sum F_x U_x}{N} \times c$$

$$= 64.5 + \frac{(64)}{100} \times 10$$

$$64.5 + \frac{(640)}{100} = 64.5 + 6.4 = 70.9$$

$$a = 69 - 0.821 \times 70.9$$

$$69 - 58.20 = 10.80$$

अवकलित प्रतीपगमन रेखा

$$Y = a + b X$$

$$\text{या, } Y = 10.0 + 0.821X$$

(ii). X का Y पर प्रतीपगमन रेखा (X on Y Regression Line):

$$X = f(Y)$$

समीकरण के रूप में,

$$X = c + dY \dots\dots\dots(1)$$

पद विचलन विधि:

$$\begin{aligned} d &= \frac{N \sum f U_x U_y - (\sum F_x U_x)(\sum F_y U_y)}{N \sum F_y U_y^2 - (\sum F_y U_y)^2} \left(\frac{c}{d} \right) \\ &= \frac{100 \times 125 - 64(-55)}{100 \times 253 - ((-55))^2} \left(\frac{10}{10} \right) \\ &= \frac{12500 + 3520}{25300 - 3025} \\ &= \frac{16020}{22275} = 0.719 \end{aligned}$$

प्रतीपगमन के अंतःखण्ड (Intercept) c का मान निम्नलिखित सूत्र द्वारा ज्ञात करते हैं—

$$c = \bar{X} - d \bar{Y}$$

$$\text{या, } c = 70.9 - 0.719 \times 69$$

$$= 70.9 - 49.61 = 12.29$$

आकलित प्रतीपगमन रेखा

$$X = c + d Y$$

$$\text{या, } X = 12.29 + 0.719Y$$

परिणाम की जाँच:

$$r_{xy}^2 = b \times d$$

$$\text{यहाँ, } b = 0.821, d = 0.719$$

$$b \times d = 0.821 \times 0.719 = 0.59$$

उदाहरण 4.5.1 से $r_{xy} = 0.768$

$$r_{xy}^2 = (0.768)^2 = 0.59$$

अतः दिए गए समकों से सहसम्बंध गुणांक और प्रतीपगमन गुणांकों की गणना सही है।

4.2.7 बहु-चरीय विश्लेषण (Multi-variate Analysis): बहुचरीय सांख्यिकी विश्लेषणों के अंतर्गत बहुगुणी सह-सम्बंध गुणांक, आंशिक सह-सम्बंध गुणांक, बहुगुणी प्रतीपगमन आदि की गणना की जाती है। खासकर प्रतीपगमन विश्लेषण और कारक विश्लेषण (Factor Analysis) आदि सांख्यिकी विधियों में बहु-चरीय समकों का प्रयोग किया जाता है।

4.2.8 अभ्यास के प्रश्न (Questions for Exercise)

1. अवर्गीकृत और वर्गीकृत समकों के अन्तर को स्पष्ट करें।
- 2- एकल चरीय और द्विचरीय समकों के अन्तर को सपष्ट करें।
- 3- नीचे दिए गए समकों से दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ तथा सह सम्बंध गुणांक की गणना करें।

Height in Inches (X)					
		Weight in kg (Y)			
		90-100	100-110	110-120	120-130
	50-55	4	7	5	2
	55-60	5	10	7	4
	60-65	6	12	10	7
	65-70	3	8	6	3

$$\text{उत्तर: (i). } Y = 100.04 + 15X$$

$$(ii). X = 55.98 + 0.04Y$$

$$(iii). r_{xy} = 0.774$$

- 4- नीचे दिए गए समकों से दोनों प्रतीपगमन रेखाएँ तथा सह सम्बंध गुणांक की गणना करें।

(X)	(Y)					
		20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
	1-2	4	-	4	-	-
	3-4	8	8	4	4	-
	5-6	4	12	16	-	-
	7-8	-	4	8	4	-
	9-10	-	-	12	-	-
	11-12	-	-	-	7	1

$$\text{उत्तर: } r_{xy} = 0.55$$

4.2.9 उपयोगी पुस्तकें (Useful Books):

- डॉ. बी. एन. गुप्ता (2002). "सांख्यिकी" साहित्य भवन पब्लिशर्स एण्ड डिस्ट्रीब्यूअर्स लि. आगरा।
- Anderson D. R., Sweeney D. J., Williams T. A. (2011). "Statistics for Business and Economics", Eleventh Edition, Cengage Learning.
- C. R. Kothari (2019). "Research Methodology: Methods and Techniques" Fourth Edition, New Age International Publishers.
- David J. Luck and Ronald S. Rubin (2004). "Marketing Research" Seventh Edition, Prentice-Hall of India Private Limited.
- Derek Rowntree (1981). "Statistics Without Tears: A Primer for Non-Mathematicians", Charles Scribner's Sons, New York.
- Francis A. (1998). "Business Mathematics and Statistics", Fifth Edition, Letts Educational Aldine Place London.
- Gupta S. P. And P. K. (2018). "Business Statistics and Business Mathematics", Sultan Chand and Sons Educational Publishers, New Delhi.
- Michael Jay Polonsky and David S. Waller (2008). "Designing and Managing a Research Project" Sage Publication, Inc.
- Murray A Spiegel and Larry J Stephens (2010). Fourth Edition (Special Indian Edition), "Statistics", Schaum's Outlines, Tata Mc Graw Hill Education Private Limited, New Delhi.
- Nadar E. Narayanan (2015) "Statistics", Second Edition, PHI Learning Private Limited, Delhi-110092.
- O. R. Krishnaswami and M. Ranganatham "Methodology of Research in Social Sciences" Second Edition, Himalya Publishing House, Mumbai- 400004.
- P. V. Young (2004). "Scientific Social Survey and Research" Fourth Edition, Prentice Hall of India Private Limited, New Delhi- 110001.
- Rafael J. Engel and Russell K. Schutt (2009). "The Practice of Research in Social Work", Second Edition, Sage Publications.
- Taro Yamane (1970). "Statistics An Introductory Analysis", Second Edition (A Harper International Edition), Jointly Published by- Harper and ROW, New York, Evanston and London and John Weather Hill, INC., Tokyo.

खण्ड—IV

इकाई 3

द्विचर समकों का विश्लेषण- III बहुगुणी प्रतीपगमन— दो स्वतंत्र चर

सरंचना:

4.3.1 भूमिका

4.3.2 प्रतीपगमन विश्लेषण

4.3.2.1 प्रतीपगमन विश्लेषण में मान्यताएँ

4.3.2.2 साधारण रैखिक प्रतीपगमन मॉडल

4.3.2.3 विक्षेप आरेख विधि

4.3.2.4 न्यूनतम वर्ग विधि

4.3.2.5 प्राक्कलन की प्रमाप त्रुटि

4.3.2.6 साधारण प्रतीपगमन से संबंधित कुछ अन्य विस्तृत बातें

4.3.3 बहुगुणी प्रतीपगमन

4.3.4 इकाई का सारांश

4.3.5 मुख्य शब्द

4.3.6 अपने प्रगति का मूल्यांकन (बहुविकल्पीय/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

4.3.7 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी

4.3.8 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न

4.3.9 संदर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप इस योग्य होंगे:

- प्रतीपगमन विश्लेषण का निर्वचन
- प्रतीपगमन विश्लेषण की मान्यताएँ
- साधारण रैखिक प्रतीपगमन मॉडल का वर्णन
- विक्षेप आरेख एवं न्यूनतम वर्ग विधि
- प्राक्कलित समीकरण की शुद्धता का आकलन करना
- प्राक्कलित प्रमाप त्रुटि की गणना एवं निर्वचन

4.3.1 भूमिका (Introduction)

वर्तमान इकाई में, प्रतीपगमन विश्लेषण के बारे में अध्ययन करेंगे। यह एक गणितीय प्रक्रिया है जिसमें अवलोकनों का प्रयोग करके बेहतर मेल वाली रेखा को प्राप्त करने के उद्देश्य से समकों के द्वारा चरों के व्यवहार के बारे में प्राक्कलन और पूर्वानुमान करते हैं। इस तकनीक का प्रयोग दो या दो से अधिक चरों के लिए किया जाता है। जब प्रतीपगमन तकनीक का प्रयोग किसी चर के पूर्वानुमान या भविष्यवाणी करते हैं, तब सदैव यह कल्पना करते हैं कि आश्रित एवं स्वतंत्र चरों के बीच वास्तविक और स्थायी संबंध पाया जाता है। वह चर जिसका अनुमान या भविष्यवाणी करनी है आश्रित तथा चर जिसके आधार पर भविष्यवाणी की जाती है स्वतंत्र चर कहलाती है।

विक्षेप आरेख, न्यूनतम वर्ग विधि एवं प्रमाप त्रुटि का प्राक्कलन के बारे में भी सीखेंगे। प्रमाप त्रुटि का प्राक्कलन का विकास सांख्यिकीविदों के द्वारा प्राक्कलित समीकरण की विश्वसनीयता को मापने के लिये किया गया है। प्रमाप त्रुटि का प्राक्कलन मूल्य का अधिक होना, दिये गये अवलोकनों का प्रतीपगमन रेखा के आस पास अधिक अपकिरण या विक्षेप का होना प्रदर्शित करता है। लेकिन, यदि प्राक्कलित प्रमाप विचलन मूल्य शून्य के बराबर हो तब प्राक्कलित समीकरण 'पूर्ण' प्राक्कलक होगी अर्थात् आश्रित चर के लिए शत प्रतिशत सत्य प्राक्कलन होगा।

4.3.2 प्रतीपगमन विश्लेषण (Regression Analysis)

‘प्रतीपगमन’ या ‘रेग्रेसन’ शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम, 1877 में सर फ्रांसिस गाल्टन ने किया था। उन्होंने पिताओं और पुत्रों की उंचाईयों का अध्ययन करते समय उन्त्यह देखा कि लम्बे पिताओं के पुत्र लम्बे एवं ढिगने पिताओं के पुत्र भी ढिगने होते हैं, परन्तु लम्बे पिताओं के पुत्रों की औसत उंचाई उनके पिताओं की औसत उंचाई से कम होती है तथा ढिगने पिताओं के पुत्रों की औसत उंचाई उनके पिताओं की औसत उंचाई से अधिक होती है। उन्होंने प्रतीपगमन शब्द को किसी एक चर के मदद से दूसरे चर के अनुमान लगाने की प्रक्रिया का नाम दिया। उन्होंने बहुगुणी प्रतीपगमन शब्द का भी प्रयोग किया जिसकी मदद से दो से अधिक चरों के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण किया जाता है।

इस प्रकार, जब चरों के बीच बहुत अच्छा संबंध हो तब यह संभव है कि एक चर मूल्य (ज्ञात चर/स्वतंत्र चर) का प्रयोग करके दूसरे चर (अज्ञात चर/आश्रित चर) का अनुमान या पूर्वानुमान लगाया जा सके। उदाहरण के लिए, एक बैंककर्मी बैंक में लोगों के जमाओं का अनुमान प्रति व्यक्ति आय के अनुसार लगा सकता है जहाँ बैंक अपना व्यवसाय करती है। एक बाजार प्रबंधक विज्ञापन व्यय को बढ़ाने का सुझाव, इसके फलस्वरूप बिक्री में होने वाले वृद्धि के उम्मीद या प्रत्याशा के आधार पर ही दे सकता है। इसी प्रकार, एक अस्पताल अधीक्षक रोगियों के लिए बिछावन की जरूरत का अनुमान उस क्षेत्र में निवास करने वाली जनसंख्या के अनुसार लगा सकता है। इस प्रकार के अनुमान के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग किया जा सकता है। एक अन्वेषक प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग उन सिद्धान्तों की जाँच के लिए कर सकता है जहाँ कारण एवं प्रभाव के बीच संबंध पाया जाता है। ये सभी स्थितियाँ व्याख्या करती हैं कि प्रतीपगमन विश्लेषण का प्रयोग एक सांख्यिकीय औजार के रूप किया जाता है विशेष रूप से व्यापार एवं उद्योगों में पूर्वानुमान की समस्या को निपटाने के लिए।

4.3.2.1 प्रतीपगमन विश्लेषण की मान्यताएँ (Assumptions of Regression Analysis)

जब हम प्रतीपगमन तकनीक का प्रयोग किसी प्रकार की भविष्यवाणी के लिए करें तब सदैव इन मान्यताओं को ध्यान में रखना चाहिए कि:

- स्वतंत्र एवं आश्रित चरों के बीच वास्तविक एवं स्थिर संबंध होना चाहिए।
- आश्रित चरों का मूल्य दैव हो लेकिन स्वतंत्र चरों के मूल्य एक स्थिर राशि होनी चाहिए, जिसे प्रयोगकर्ता द्वारा त्रुटिरहित एवं विशेष छान बीन के बात प्राप्त किया गया हो।
- चरों के बीच संबंध की दिशा स्पष्ट एवं सही होनी चाहिए। इसका मतलब है कि आश्रित चर, स्वतंत्र चर का फलन होना चाहिए।
- शर्तें जो स्वतंत्र एवं आश्रित चरों के बीच प्राक्कलित की गई हैं वह भी वही होना चाहिए जिसे प्रतीपगमन मॉडल के प्रयोग के उपरान्त प्राप्त हो। दूसरे शब्दों में, इसका अर्थ सामान्य है कि पूरे प्रतीपगमन समीकरण की गणना में चरों के बीच पाया जाने वाला संबंध यथावत रहे।
- विश्लेषण का प्रयोग जिस परिसर के लिए किया जा रहा है वह यथावत रहना चाहिए अर्थात् समय अवधि या विहित चरों की संख्या आदि में कोई परिवर्तन नहीं होना चाहिए।

4.3.2.2 साधारण रैखिक प्रतीपगमन मॉडल (Simple Linear Regression Model)

साधारण रैखिक प्रतीपगमन मॉडल की स्थिति में एक चर का प्रयोग एक ही अज्ञात चर के अनुमान के लिए रैखिक संबंध की मान्यता के आधार पर किया जाता है अर्थात् चरों के बीच संबंध का निम्न प्रकार का रूप हो सकता है, $Y = a + bX$.

वह चर जिसका अनुमान या भविष्यवाणी करनी है, आश्रित चर एवं वह चर जिसके आधार पर भविष्यवाणी करनी है, उसे स्वतंत्र चर कहते हैं।

साधारण रैखिक प्रतीपगमन मॉडल¹ या प्रतीपगमन रेखा का निम्न रूप से लिखा जा सकता है,

$$Y_i = a + bX_i + e_i$$

जहाँ, Y_i एक आश्रित चर है।

X_i एक स्वतंत्र चर है।

e_i एक अप्रत्याशित दैव चर है। (सामान्यतया इसे त्रुटि पद कहा जाता है)

- (a) ‘a’, Y-अवरोध/अंतःखण्ड (Intercept) को प्रस्तुत करता है, अर्थात् अवरोध यह आश्रित चर के मूल्य को बताता है, जब स्वतंत्र चर का मूल्य शून्य होता है। लेकिन इसका व्यवहारिक अर्थ तभी है जब स्वतंत्र चर का संभावित मूल्य शून्य हो।
- (b) ‘b’, एक अचर राशि है जो प्रतीपगमन रेखा की ढाल को बताता है। रेखा की ढाल स्वतंत्र चर के मूल्य में इकाई के बराबर परिवर्तन के फलस्वरूप, आश्रित चर के मूल्य में होने वाले परिवर्तन को बताता है।

यदि दो अचर राशि (जैसे a एवं b) ज्ञात या पता हो, तब Y का मूल्य X और e_i के मूल्य पर निर्भर करता है। यदि मॉडल में, e_i के सभी मान बहुत बड़े हो तब हमारा प्राक्कलन बहुत अच्छा नहीं होगा लेकिन जब इनके सापेक्षिक मूल्य छोटा हो, तब अनुमानित मूल्य ($\hat{Y}$), वास्तविक राशि के मूल्य (Y_i) के काफी करीब होगी।

प्रतीपगमन मॉडल के अवरोध/अंतःखण्ड (Intercept) एवं ढाल का प्राक्कलन या प्रतीपगमन मॉडल के समीकरण का प्राक्कलन

प्रतीपगमन मॉडल में दो अचर राशियाँ या प्राचल ' a ' एवं ' b ' > 0 , सामान्यतया पूरे समग्र में अज्ञात होते हैं और इनका प्राक्कलन दिये गये न्यायदर्श के सूचना के आधार पर किया जाता है। इसके प्राक्कलन के लिये निम्नलिखित दो विधियों का प्रयोग करते हैं:

- (a) विक्षेप आरेख विधि एवं
- (b) न्यूनतम वर्ग विधि

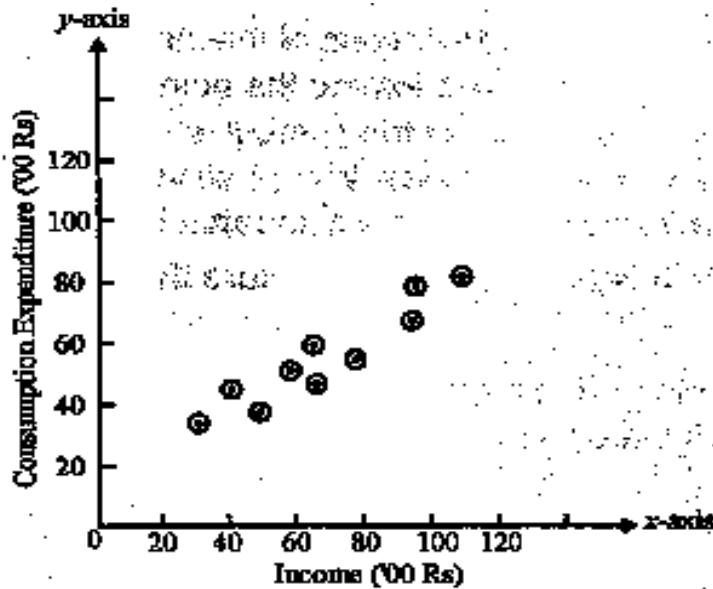
4.3.2.3 विक्षेप आरेख विधि (Scattered Graphic Method)

यह विधि विक्षेप आरेख के प्रयोग के बारे में बताती है जिसे विक्षेप बिन्दु भी कहा जाता है। *विक्षेप आरेख* एक विन्दुरेख प्रदर्शन है जिसमें दो श्रेणीयों के ज्ञात चरों को अंकित किया जाता है, अर्थात् ग्राफ पेपर में स्वतंत्र चर को X -अक्ष में अंकित करते हैं और वह चर जिसका हमें प्राक्कलन करनी है अर्थात् आश्रित चर राशि को Y -अक्ष में अंकित किया जाता है। उदाहरण के लिए, विन्दुरेख चित्र बनाने के लिए निम्नलिखित दिये गये सूचनाओं का प्रयोग किया गया है:

आय (X) (सौ रुपये में)	उपभोग व्यय (Y) (सौ रुपये में)
41	44
65	60
50	39
57	51
96	80
94	68
110	84
30	34
79	55
65	48

विक्षेप आरेख स्वयं, आश्रित चर के भविष्यवाणी के लिए उपयुक्त नहीं होता है। भविष्यवाणी करने या अनुमान करने के लिए दो चरों के बीच औपचारिक संबंध को भी जानना आवश्यक होता है। इस उद्देश्य के लिए, विक्षेप आरेख में हम मापक या पटरी लें और उस बिन्दु से एक सीधी रेखा खींच लें और इस प्रकार कथित रेखा के लिए अवरोध बिन्दु एवं ढाल प्राप्त किया जा सकता है। इस रेखा को निम्न रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है, $Y_i = a + bX_i$ । इस समीकरण की सहायता से दिये गये X के मूल्य से Y का मूल्य ज्ञात किया जा सकता है।

इस विधि की कुछ कमियाँ हैं। उदाहरण के लिए, यदि पांच व्यक्ति अलग-अलग सीधी रेखाएँ एक ही विक्षेप रेखा में खींचेंगे तो, यह संभव है कि दोनों प्राचलों ' a ' एवं ' b ' के लिए अलग-2 मान प्राप्त हो, विशेष रूप से जब एक ही विक्षेप आरेख में विन्दू बिखरे हों। अतः केवल इसी विधि का प्राक्कलन करने में प्रयोग नहीं किया जा सकता है। एक अधिक सुव्यवस्थित एवं सांख्यिकीय विधि की आवश्यकता है जो अनुमान समीकरण के अचर राशियों का प्राक्कलन कर सके। एक सबसे अच्छा फिट वाली रेखा की रचना न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करके किया जा सकता है।



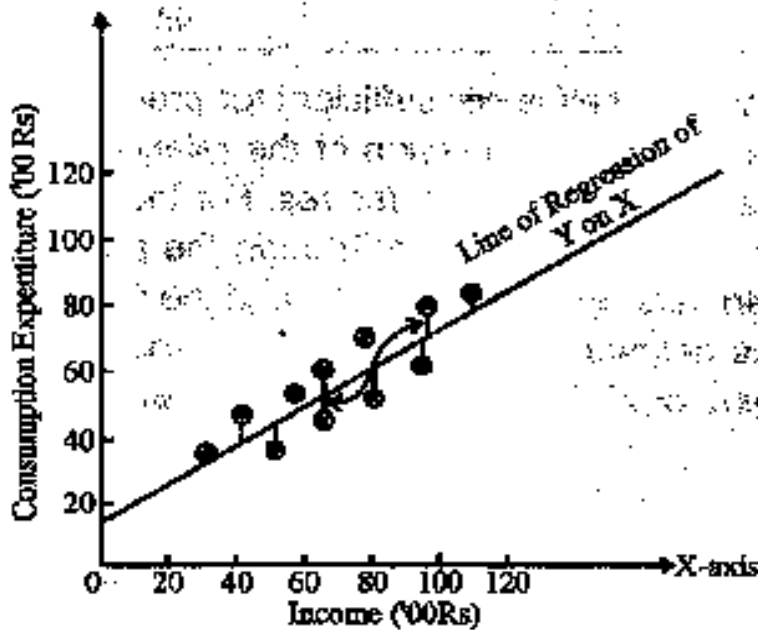
चित्र 4.3.1 विक्षेप आरेख

4.3.2.4 न्यूनतम वर्ग विधि

न्यूनतम वर्ग विधि वह विधि है जो आकलित रेखा से चरों के उर्ध्वाधर विचलनों के वर्ग को न्यूनतम करता है। दूसरे शब्दों में, आकलित रेखा विक्षेप आरेख के बिन्दुओं से इस प्रकार गुजरती है कि उन उर्ध्वाधर बिन्दुओं से लिया गया विचलनों का वर्ग न्यूनतम होगा।

न्यूनतम वर्ग मापदंड को निम्नलिखित चित्र का संदर्भ लेकर आसानी से समझा जा सकता है, जहाँ पूर्व के विक्षेप चित्र का ही पुनः निर्माण, एक रेखा के साथ किया गया है।

नीचे चित्र में विभिन्न उर्ध्वाधर बिन्दुओं का आकलित रेखा से विचलन के न्यूनतम वर्ग को छोटी रेखा से जोड़ते हुए दिखाया गया है। इन विचलनों को 'e' के प्रतीक से इंगित किया जायेगा। 'e' का मूल्य प्रत्येक बिन्दुओं के साथ परिवर्तित या बदलते जायेंगे।



चित्र 4.3.2: विक्षेप आरेख प्रतीपगमन रेखा एवं 'e' को इंगित करने वाली छोटी रेखा

कुछ स्थितियों में यह धनात्मक होंगे, जबकि अन्य स्थितियों में यह ऋणात्मक भी हो सकती है। यदि बनाये गये रेखा न्यूनतम वर्ग रेखा है, तब $\sum e_i^2$ का मूल्य यथासंभव न्यूनतम होंगे। क्योंकि ये इसका लक्षण है इसलिए इस विधि को न्यूनतम वर्ग विधि कहते हैं।

चूंकि हम उर्ध्वाधर विन्दू से रेखा के विचलनों के वर्ग को न्यूनतम होने की बात करते हैं यह एक प्रश्न है जिसका वर्णन करना आवश्यक है। यदि हम वास्तविक मूल्य को Y से तथा प्राक्कलित मूल्य को $\hat{Y}$ से तथा विचलन को $(Y-\hat{Y})$ या e के रूप में निरूपित करें तब यह कहना तार्किक होगा कि $\sum e_i^2$ का सबसे छोटा मूल्य प्राप्त होगा। जबकि, केवल $\sum (Y-\hat{Y})$ or $\sum_{i=1}^n e_i$ या की ही जांच गलत हो सकते हैं, क्योंकि, e के कुछ मान ऋणात्मक तथा कुछ मान धनात्मक हो सकते हैं। इस प्रकार, बड़े धनात्मक एवं ऋणात्मक मान एक दूसरे को निरस्त कर सकते हैं। यहाँ तक कि यदि $\sum_{i=1}^n |e_i|$ के समस्त चिन्हों को त्याग दे तो भी समस्या बनी रहेगी। अतः मानक प्रक्रिया या विधि यह है कि विचलन के सभी अवलोकनों के पदों का वर्ग करके उसके चिन्ह को धनात्मक बना लेते हैं। पदों का वर्ग करने के दो उद्देश्य हो सकते हैं, जैसे:

- यह बड़ी त्रुटि को खत्म (या दण्डित) करती है और
- यह धनात्मक एवं ऋणात्मक मूल्य के प्रभाव को समाप्त कर सकती है (चूंकि वर्ग करने पर ऋणात्मक त्रुटियाँ भी धनात्मक हो जाती हैं)।

‘a’ एवं ‘b’ को जिसे रेखा का अवरोध एवं ढाल के नाम से जानते हैं के आकलन के लिए निम्नलिखित प्रक्रिया अपनायी जाती है—

उस प्रक्रिया में दो सामान्य समीकरण प्राप्त होते हैं—

$$\sum Y = na + b \sum X \quad \text{.....(1)}$$

$$\sum XY = a \sum X + b \sum X^2 \quad \text{.....(2)}$$

उपरोक्त दोनों समीकरणों में, ‘a’ एवं ‘b’ दो अज्ञात चर राशि हैं और अन्य सभी मूल्य जैसे; $\sum X, \sum Y, \sum X^2, \sum XY$ आदि न्यायदर्श के आंकड़ों से लिया गया गुणनफलों का योग एवं तिर्यक गुणनफलों का योग है।

निम्नलिखित उदाहरण के द्वारा न्यूनतम वर्ग विधि की व्याख्या किया जा सकता है।

उदाहरण 4.3.1 निम्नलिखित दिये गये सूचनाओं से न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करके प्रतीपगमन रेखा $\hat{Y} = a + bX_i$ को फिट करें।

टवलोकन	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आय (X)('00 रु.)	41	65	50	57	96	94	110	30	79	65
उपभोग व्यय (Y)('00 रु.)	44	60	36	51	80	68	84	34	55	48

हल: दिये गये संमकों को न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग करके प्रतीपगमन रेखा $\hat{Y} = a + bX$ के साथ फिट करना है। उपरोक्त दिये गये सामान्य समीकरणों के विभिन्न व्यंजकों का प्रयोग करके के ‘a’ एवं ‘b’ दो अज्ञात चर राशि के मान को ज्ञात किया जा सकता है। दिये गये सारणी से हमें $\sum X, \sum Y, \sum X^2, \sum XY$ को पहले ज्ञात करना होगा।

प्रतीपगमन समीकरण के लिए समग्र की गणना

अवलोकन	आय (X) (‘00 रु.)	उपभोग व्यय (Y) (‘00 रु.)	XY	X ²	Y ²
1	41	44	1804	1681	1936
2	65	60	3900	4225	1600
3	50	39	1950	2500	1521
4	57	51	2907	3249	2601
5	96	80	7680	9216	6400
6	94	68	6392	8836	4624
7	110	84	9240	12100	7056
8	30	34	1020	900	1156
9	79	55	4345	6241	3025
10	63	48	3120	4255	2304
N=10	$\sum X = 687$	$\sum Y = 563$	$\sum XY = 42358$	$\sum X^2 = 53173$	$\sum Y^2 = 34223$

प्रतीपगमन रेखा के लिए दिये गये सामान्य समीकरण में उपरोक्त समग्रों का मान रखने पर हमें प्राप्त होंगे,

$$563 = 10a + 687b$$

$$42358 = 687a + 53173b$$

इन दोनों समीकरणों का हल ‘a’ एवं ‘b’ के लिए करने पर हमें प्राप्त होंगे

$$a = 14.000 \text{ and } b = 0.616$$

अतः, प्रतीपगमन के लिए आवश्यक समीकरण है,

$$\hat{Y} = a + bX$$

$$\text{या, } \hat{Y} = 14.000 + 0.616X$$

इस समीकरण को प्रतीपगमन रेखा Y का X पर कहेंगे जिसमें Y के मान को X के चर मूल्यों का प्रयोग करके प्राप्त किया जा सकता है।

अनुमान की समस्या

जब हम अनुमान या प्राक्कलन के बारे में बात करते हैं, यह सामान्यतया इंगित करता है कि यदि संबंध $Y = a + bX + e$ पाया जाता है तब प्रतीपगमन समीकरण, $\hat{Y} = a + bX$ के Y चर मूल्य को प्राक्कलित करने के लिए X के विशेष मूल्य का प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण 4.3.1 में, हम प्रतीपगमन समीकरण का प्रयोग आय एवं व्यय के आंकड़ों को लेते हैं,

$$\hat{Y} = 14.000 + 0.616X;$$

इस समीकरण के आधार पर हम Y का X के लिए किसी भी दिये गये चर मूल्य का प्रयोग करके बिन्दुओं का आकलन किया जा सकता है। माना कि हम किसी व्यक्ति की आय 10,000 रुपये है और उसका उपभोग व्यय को ज्ञात करना चाहते हैं। हम उपरोक्त प्रतीपगमन समीकरण में, उपभोग व्यय को ज्ञात करने के लिए आय की मात्रा अर्थात् $X = 100$, को रखते हैं, तब

$$\hat{Y} = 14.000 + 0.616(100) = 75.60$$

इस प्रकार, प्रतीपगमन संबंध प्रदर्शित करता है कि एक व्यक्ति की आय यदि 10000 रुपये है तब उसका अनुमानित व्यय लगभग 7560 रुपये के बराबर होगा। लेकिन, यह एक प्राक्कलित या अनुमानित मूल्य है और यह संभव है कि उसी दिये गये आय के लिए वास्तविक व्यय अनुमानित या प्राक्कलित राशि से विचरित या विचलित हो सकती है। यदि वास्तव में ऐसा है तो हमारा अनुमान या प्राक्कलन गलत हो सकता है, यह संभावना है कि इसका प्रयोग किया जाय तो किसी व्यक्ति के लिए और अधिक हो सकता है। ऐसे स्थिति में अन्तराल आकलन का प्रयोग ज्यादा श्रेयस्कर होगा जो अनुमानित उपभोग व्यय के अन्तराल को बताता है। याद रखें अन्तराल जितना अधिक होगा विश्वसनीयता का स्तर उतना ही अधिक होगा, लेकिन अन्तराल का आकार या चौड़ाई (या जिसे तकनीकी रूप से इसे प्राक्कलन की सुस्पष्टता कहते हैं) तय विश्वसनीयता स्तर से संबंधित है और ये न्यायदर्श में विचरणशीलता (इस

उदाहरण में उपभोग व्यय) के स्तर पर निर्भर करता है। इस विचरणशीलता का मापन त्रुटि पद 'e' के प्रमाप विचलन से किया जाता है, जो मानक त्रुटि के नाम से प्रचलित है।

4.3.2.5 अनुमान के मानक त्रुटि

अनुमान के मानक त्रुटि का विकास सांख्यिकविदों ने प्राक्कलनों के समीकरण की विश्वसनीयता को मापने के लिए किया है। प्रमाप विचलन की ही तरह, $\hat{Y}$ का मानक त्रुटि (S.E.) माप, प्रतीपगमन रेखा के इर्द-गिर्द, Y के प्रेक्षण मूल्यों के विक्षेप या विचरणशीलता को मापता है। अनुमान के मानक त्रुटि (S.E. of $\hat{Y}$) का प्रयोग निम्न प्रकार से किया जा सकता है,

$$\text{S.E. of } \hat{Y} \text{ (or } S_e) = \sqrt{\frac{\sum (Y - \hat{Y})^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{\sum e^2}{n-2}}$$

S.E. of $\hat{Y}$ (or S_e) = अनुमान के मानक त्रुटि

$Y = Y$ का अवलोकित मूल्य

$\hat{Y} = Y$ का आकलित मूल्य

$e = \text{त्रुटि पद} = (Y - \hat{Y})$

$n =$ न्यायदर्श में उपलब्ध अलोकनों की संख्या।

नोट: उपरोक्त सूत्र में, $n-2$, n के स्थान पर प्रयोग करते हैं क्योंकि न्यायदर्श में अवलोकनों का दो अचर राशि के लिए विचरणशीलता के आकलन में स्वतंत्रता की कोटि में खो जाती है। जैसा कि उपरोक्त स्थिति में 'a' एवं 'b' जिसके स्थान को उसी न्यायदर्श के अवलोकनों से ज्ञात किया जा सकता है।

विश्वसनीयता के आधारभूत माप के लिए S_e^2 को ही त्रुटि का प्रसरण के नाम से जानते हैं। प्रसरण मूल्य के अधिक होने पर, e के राशि का विशेष महत्व है और अनुमानित संमंक के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण की विश्वसनीयता भी कम होगी।

आकलन के मानक त्रुटि का निर्वचन और छोटे एवं बड़े न्यायदर्शों के लिए विश्वास की सीमा के आकलन को ज्ञात करना

आकलन के मानक त्रुटि मूल्य के अधिक होने से तात्पर्य है कि अवलोकनों का प्रतीपगमन रेखा के इर्द-गिर्द अधिक विक्षेपित या अपकिरण होना। यदि आकलन के मानक त्रुटि शून्य के बराबर हो तब आकलित समीकरण आश्रित चरों के लिए एक 'पूर्ण' अनुमानक (अर्थात् शत प्रतिशत सत्य अनुमानक) होगी।

बड़े न्यायदर्श की स्थिति में, अर्थात् जहाँ, $n > 30$ एक न्यायदर्श में यह कल्पना की जाती है कि प्रेक्षण बिन्दु प्रायः प्रतीपगमन रेखा के इर्द-गिर्द सामान्य रूप से वितरित है तब हमें यह प्राप्त हो सकता है,

सभी बिन्दु 68% के अन्तर्गत आते हैं, $\hat{Y} \pm 1$ प्रमाप त्रुटि की सीमा

सभी बिन्दु 95.5% के अन्तर्गत आते हैं, $\hat{Y} \pm 2$ प्रमाप त्रुटि की सीमा

सभी बिन्दु 99.7% के अन्तर्गत आते हैं $\hat{Y} \pm 3$ प्रमाप त्रुटि की सीमा

इसे निम्न रूप से कहा जा सकता है,

छोटे न्यायदर्श के स्थिति में, अर्थात् जहाँ, $n < 30$ हो, न्यायदर्श में वितरण के सिद्धान्त का प्रयोग करके उपर्युक्त सीमा को ज्ञात करते हैं जो निम्न रूप से किया जा सकता है:

उपरी सीमा = $\hat{Y} + t'(SE_e)$

निम्न सीमा = $\hat{Y} - t'(SE_e)$

जहाँ, $\hat{Y} = X$ के ज्ञात मूल्य से, Y का प्राक्कलित मूल्य,

$SE_e =$ प्राक्कलन का मानक त्रुटि

't' = निर्धारित विश्वास के स्तर पर दिये गये स्वतंत्रता की कोटि में 't' का सारणी मान।

4.3.2.6 साधारण प्रतीपगमन से संबंधित कुछ अन्य विस्तृत बातें (Some Other things of Simple Regression Model)

कभी-कभी हम Y के प्राक्कलन समीकरण को भी Y का X पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण के रूप में जानते हैं, इसे निम्न रूप से लिख सकते हैं,

$$(\hat{Y} - \bar{Y}) = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X_i - \bar{X})$$

$$\hat{Y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X_i - \bar{X}) + \bar{Y}$$

जहाँ,
 σ_y = Y श्रेणी का प्रमाप विचलन
 σ_x = X श्रेणी का प्रमाप विचलन
 $\bar{X}$ = X का माध्य
 $\bar{Y}$ = Y का माध्य
 $\hat{Y}$ = Y के लिए प्राक्कलन

X_i = किसी दिये गये X के मूल्य जिससे Y का प्राक्कलन किया जाना है।

यह निम्न सूत्र पर आधारित है अर्थात्,

$$\hat{Y} = a + bX_i$$

X_i के गुणांक को निम्न रूप में परिभाषित किया जा सकता है,

$$X_i \text{ का गुणांक} = b = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}$$

इसे Y का X पर आश्रित प्रतीपगमन गुणांक के नाम से भी जानते हैं,

Y का X पर आश्रित रेखा या,

$$b_{yx} = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum X^2 - n\bar{X}^2}$$

$$\text{और, } a = -r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \bar{X} + \bar{Y}$$

इसी प्रकार, X के प्राक्कलन समीकरण को भी X का Y पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण के रूप में जानते हैं, इसे निम्न रूप से लिख सकते हैं,

$$(\hat{X} - \bar{X}) = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y})$$

$$\text{या, } \hat{X} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y}) + \bar{X}$$

और,

$$X \text{ का } Y \text{ पर आश्रित प्रतीपगमन गुणांक (or } b_{xy}) = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum XY - n\bar{X}\bar{Y}}{\sum Y^2 - n\bar{Y}^2}$$

यदि हमें दो प्रतीपगमन समीकरण हल के लिए दिये हों जैसे कि उपर बताया गया है, तब दो अचर राशि 'a' एवं 'b' के मदद से X एवं Y, के मूल्य को ज्ञात करेंगे फिर उसके बाद Y एवं X के मूल्य, तब हमें X का माध्य (अर्थात् $\bar{X}$) और Y का माध्य मूल्य (अर्थात् $\bar{Y}$) प्राप्त होता है।

यदि हमें दो प्रतीपगमन गुणांक (अर्थात्; b_{xy} और b_{yx}) दिये हों, तब इनके मूल्यों का प्रयोग करके सहसंबंध गुणांक, दोनों पदों या प्रतीपगमन गुणांकों के गुणनफल का वर्गमूल निकाल कर ज्ञात कर सकते हैं जैसे कि नीचे दिया गया है,

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{b_{yx}b_{xy}} \\ &= \sqrt{r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \cdot r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}} \\ &= \sqrt{r \cdot r} = r \end{aligned}$$

सहसंबंध गुणांक r , के चिन्हों ($\pm$) का निर्धारण दिये गये प्रतीपगमन गुणांकों के चिन्हों के आधार पर किया जा सकता है। यदि प्रतीपगमन गुणांक का चिन्ह ऋणात्मक होगा तब सहसंबंध गुणांक r , के चिन्ह भी (-) ऋणात्मक होंगे और यदि प्रतीपगमन गुणांक के चिन्ह धनात्मक होंगे तो सहसंबंध गुणांक r , के चिन्ह भी (+) धनात्मक होंगे। यहाँ याद रखना आवश्यक है कि दोनों प्रतीपगमन गुणांक के चिन्ह सामान होना चाहिए भले ही वह ऋणात्मक या धनात्मक हो, क्योंकि इसी के चिन्ह से ही सहसंबंध के चिन्ह भी निर्धारित होते हैं।

उदाहरण 4.3.2 निम्नलिखित सूचनाएं दी गई हैं:

	X	Y
माध्य	39.5	47.5
प्रमाप विचलन	10.8	17.8

X और Y के बीच साधारण सहसंबंध गुणांक = + 0.42
X और Y के प्राक्कलन समीकरण को ज्ञात करें।

हल: Y के प्राक्कलन समीकरण को निम्न रूप से प्राप्त किया जा सकता है,

$$\begin{aligned} (\hat{Y} - \bar{Y}) &= r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \bar{X}) \\ \hat{Y} &= r \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (X - \bar{X}) + \bar{Y} \\ &= 0.42 \frac{17.8}{10.8} (X - 39.5) + 47.5 \\ &= 0.69X + 20.25 \end{aligned}$$

X के प्राक्कलन समीकरण को निम्न रूप से प्राप्त किया जा सकता है

$$\begin{aligned} (\hat{X} - \bar{X}) &= r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y}) \\ \text{या, } \hat{X} &= r \frac{\sigma_x}{\sigma_y} (Y - \bar{Y}) + \bar{X} \\ \text{या, } &= 0.42 \frac{10.8}{17.8} (Y - 47.5) + 39.5 \end{aligned}$$

$$= 0.26Y - 12.25 + 39.5$$

$$= 0.26Y + 27.25$$

उदाहरण 4.3.3: निम्नलिखित आंकड़े दिये गये हैं:

X का प्रसरण = 9

प्रतीपगमन समीकरण:

$$4X - 5Y + 33 = 0$$

$$20X - 9Y - 107 = 0$$

ज्ञात करें कि:

1. X और Y का माध्य मूल्य।
2. X और Y के बीच सहसंबंध गुणांक।
3. Y का प्रमाप विचलन।

हल: 1. दो चरों X और Y के माध्य मूल्य को ज्ञात करने के लिए हमे दोनो प्रतीपगमन समीकरणों को निम्न रूप से हल करना होगा:

$$4X - 5Y + 33 = 0 \text{ -----(1)}$$

$$20X - 9Y - 107 = 0 \text{ -----(2)}$$

यदि समीकरण (1) को 5 से गुणा करते हैं तब हमे निम्नलिखित समीकरण प्राप्त होता है:

$$20X - 5Y + 33 = 0 \text{ -----(3)}$$

$$20X - 9Y - 107 = 0 \text{ -----(2)}$$

$$\begin{array}{r} - \\ + \\ \hline \end{array}$$

$$-16Y = -272 \quad \text{समीकरण (2) को समीकरण (3) से घटाने पर}$$

$$\text{या } Y = 17$$

समीकरण (1) में Y का मान रखने पर हम पाते हैं,

$$4X = -33 + 5(17)$$

$$X = \frac{-33+85}{4} = \frac{52}{4} = 13 \quad \text{अतः, } \bar{X} = 13 \quad \text{एवं } \bar{Y} = 17$$

2. सहसंबंध गुणांक को ज्ञात करने के लिए

सबसे पहले हम दो प्रतीपगमन समीकरणों में से एक प्रतीपगमन समीकरण को X के लिए प्राक्कलन समीकरण मान लिया जाय,

माना कि, $20X - 5Y + 33 = 0$, X का प्राक्कलन समीकरण है तब,

$$X = \frac{5Y}{4} - \frac{33}{4}$$

और, उपरोक्त समीकरण से हम प्रतीपगमन समीकरण से प्रतीपगमन गुणांक $b_{XY} = \frac{5}{4}$

अब दूसरे समीकरण को Y के लिए प्राक्कलन समीकरण मानते हुए निम्न क्रियाकलाप करते हैं,

$$20X - 9Y - 107 = 0$$

$$\text{या, } Y = \frac{20X}{9} - \frac{107}{9}$$

और, उपरोक्त समीकरण से हम प्रतीपगमन समीकरण से प्रतीपगमन गुणांक $b_{YX} = \frac{20}{9}$

यदि उपरोक्त समीकरण सही हैं तब सहसंबंध गुणांक निश्चित रूप से r के बराबर होगा,

$$r = \sqrt{5/4 \times 20/9} = \sqrt{25/9} = 5/3 = 1.6$$

जो असंभव है, क्योंकि किसी भी स्थिति में r का मूल्य 1 से अधिक नहीं हो सकता है। अतः हमें प्राक्कलन समीकरण बारे की गई परिकल्पना को बदलते हुए एवं इसे अदला-बदली करके, पुनः लिखने पर निम्नलिखित दो प्राक्कलन समीकरण प्राप्त होंगे:

$$X = \frac{9Y}{20} + \frac{107}{20}$$

$$\text{एवं, } Y = \frac{4X}{5} + \frac{33}{5}$$

$$\text{अतः } r = \sqrt{9/20 \times 4/5}$$

$$= \sqrt{9/25}$$

$$= 3/5$$

$$= 0.6$$

चूंकि, प्रतीपगमन गुणांक के धनात्मक चिन्ह है, इसलिए हम $r = +0.6$ लेते हैं।

3. प्रमाप विचलन की गणना निम्न प्रकार से की जा सकती है:

X का प्रसरण = 9 अतः X का प्रमाप विचलन = 3

$$b_{XY} = r \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$$

$$\text{या, } \frac{9}{20} = 0.6 \frac{3}{\sigma_y}$$

$$\text{या, } \sigma_y = 0.6 \frac{3}{9} \times 20 = 4$$

$$\text{अतः } \sigma_y = 4$$

उदाहरण 4.3.4: Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन रेखा ज्ञात करें।

X	:	1	2	3	4	5	8	10
Y	:	9	8	10	12	14	16	15

हल:

X	Y	X^2	XY
1	9	1	9
2	8	4	16
3	10	9	30
4	12	16	48
5	14	25	70
8	16	64	128

10	15	100	150
33	84	219	451

$$N = 7 \quad \bar{x} = \frac{33}{7} = 4.7143; \quad \bar{y} = \frac{84}{7} = 12$$

$$\begin{aligned}
 b_{yx} &= \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \\
 &= \frac{7 \times 451 - 33 \times 84}{7 \times 219 - 33^2} \\
 &= \frac{3157 - 2772}{1533 - 1089} \\
 &= \frac{385}{444} = 0.8671
 \end{aligned}$$

Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन रेखा,

$$\begin{aligned}
 y - \bar{y} &= b_{yx} (x - \bar{x}) \\
 y - 12 &= 0.8671 (x - 4.7143) \\
 y &= 0.8671 x + 7.9122
 \end{aligned}$$

उदाहरण 4.3.5: उचित प्रतीपगमन रेखा के मदद से निम्नलिखित संमकों का प्रयोग कर Y का मान ज्ञात करें जब X = 64 हो।

X : 65 66 67 67 69 71 72 70 65

Y : 67 68 69 68 70 70 69 70 70

हल:

x	Y	Dx	dy	dx ²	Dxdy
65	67	-3	-2	9	6
66	68	-2	-1	4	2
67	69	-1	0	1	0
67	68	-1	-1	1	1
69	70	1	1	1	1
71	70	3	1	9	3
72	69	4	0	16	0
70	70	2	1	4	2
65	70	-3	1	9	-3
612	602	0	0	54	12

$$\bar{X} = \frac{\sum x}{n} = \frac{612}{9} = 68 \quad \bar{Y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{602}{9} = 66.8889$$

$$dx = x - 68 \quad dy = y - 69$$

$$b_{yx} = \frac{N \sum dx dy - \sum dx \sum dy}{N \sum dx^2 - (\sum dx)^2}$$

$$= \frac{9 \times 12 - 0}{9 \times 54} = 0.2222$$

Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन रेखा

$$y - \bar{y} = b_{yx} (x - \bar{x})$$

$$y - 69 = 0.222 (x - 68) \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$y = 0.222 x + 53.904$$

जब, $x = 64$ { समीकरण (1) से }

$$y - 69 = - 0.8888$$

अतः $y = 68.112$ है ।

उदाहरण 4.3.6 निम्नलिखित संमंकों से दो प्रतीपगमन रेखाओं की गणना करें ।

x : 10 12 13 12 16 15

y : 40 38 43 45 37 43

X को भी प्राक्कलित करें जब Y = 20 दी गई हो ।

हल:

X	Y	XY	X ²	Y ²
10	40	400	100	1600
12	38	456	144	1444
13	43	559	169	1849
12	45	540	144	2025
16	37	592	256	1369
15	43	645	225	1849
78	246	3192	1038	10136

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{78}{6} = 13.00$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{246}{6} = 41.00$$

$$b_{xy} = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$= \frac{6 \times 3192 - 78 \times 246}{6 \times 10136 - (246)^2}$$

$$= \frac{19152 - 19188}{60816 - 60516}$$

$$= \frac{-36}{300} = - 0.1200$$

$$b_{yx} = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum y^2 - (\sum y)^2}$$

$$= \frac{-36}{6 \times 1038 - (78)^2} \text{ from } b_{xy}$$

$$= \frac{-36}{6228 - 6084} = \frac{-36}{144} = -0.2500$$

Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन रेखा

$$y - \bar{y} = b_{yx} (x - \bar{x})$$

$$y - 41 = -0.25 (x - 13)$$

$$y - 41 = -0.2500 x + 3.25$$

$$y = 44.25 - 0.25 x$$

$$y = 44.25 - 0.25 x$$

X के Y पर आश्रित प्रतीपगमन रेखा

$$x - \bar{x} = b_{xy} (y - \bar{y})$$

$$= -0.1200 (y - 41)$$

जब Y = 20, तब X के मूल्य को प्राक्कलित करें

$$x - 13 = -0.1200 y + 4.92$$

$$x = 17.92 - 0.12 \times 20 \quad \{\text{चूंकि, } Y = 20 \text{ दिया गया है}\}$$

$$x = 17.92 - 2.400$$

$$x = 15.52$$

उदाहरण 4.3.7: नीचे दिये गये संमकों से निम्नलिखित को ज्ञात करें।

(a) दो प्रतीपगमन समीकरण

(b) दो विषयों गणित एवं सांख्यिकी के बीच प्राप्तांक में सहसंबंध गुणांक

(c) वह सांख्यिकी में वह सर्वोत्तम संभावित प्राप्तांक जब गणित विषय में प्राप्तांक 30 है।

गणित में प्राप्तांक (x): 25 28 35 32 31 36 29 38 34 32

सांख्यिकी में प्राप्तांक (y): 43 46 49 41 36 32 31 30 33 39

हल:

x	y	$x - \bar{x}$ $\bar{x} = 32$	$y - \bar{y}$ $\bar{y} = 38$	xy	x^2	y^2
25	43	-7	5	-35	49	25
28	46	-4	8	-32	16	64
35	49	3	11	33	9	121
32	41	0	3	0	0	9
31	36	-1	-2	2	1	4
36	32	4	-6	-24	16	36
29	31	-3	-7	21	9	49
38	30	6	-8	-48	36	64
34	33	2	-5	-10	4	25

32	39	0	1	0	0	1
320	380	0	0	-93	140	398

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{320}{10} = 32 \quad \bar{y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{380}{10} = 38.00$$

$$b_{xy} = \frac{\sum xy}{\sum y^2} = \frac{-93}{398} = -0.2337$$

$$b_{yx} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = \frac{-93}{140} = -0.6643$$

(a) Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण,

$$\begin{aligned} y - \bar{y} &= b_{yx} (x - \bar{x}) \\ &= -0.6643 (x - 32) \\ &= -0.6643 x + 21.26 \\ y &= 59.26 - 0.6643 x \end{aligned}$$

(b) X के Y पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण,

$$\begin{aligned} x - \bar{x} &= b_{xy} (y - \bar{y}) \\ &= -0.2337 (y - 38) \\ x - 32 &= -0.2337 y + 8.88 \\ x &= 40.88 - 0.2337 y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r &= \pm \sqrt{b_{xy} \cdot b_{yx}} \\ &= -\sqrt{-0.2337 \times -0.6643} \\ &= -0.3940 \end{aligned}$$

(c) X = 30 के दिये होने पर Y का मान ज्ञात करने के लिए, Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण में, X = 30 का मान रखने पर,

$$\begin{aligned} y &= 59.26 - 0.6643 \times 30 \\ &= 59.26 - 19.93 \\ &= 39.33 \\ y &\approx 39 \end{aligned}$$

अर्थात् सांख्यिकी विषय में, 39 सबसे संभावित प्राप्तांक है जो गणित विषय के प्राप्तांक 30 होने पर प्राप्त किया जा सकता है।

उदाहरण 3.8: नीचे दो चरों Y एवं X के लिए दिये गये सूचनाओं के आधार पर दो प्रतीपगमन रेखाएं एवं सहसंबंध गुणांक ज्ञात करें।

$$N = 10 \quad \sum x = 20 \quad \sum y = 40; \quad \sum x^2 = 240; \quad \sum y^2 = 410; \quad \sum xy = 200$$

हल:

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{20}{10} = 2.00$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{N} = \frac{40}{10} = 4.00$$

$$b_{xy} = \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum y^2 - (\sum y)^2}, \text{ जैसे कि दिया है } \sum x \neq 0 \text{ एवं } \sum y \neq 0.$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{10 \times 200 - 20 \times 40}{10 \times 410 - (40)^2} \\
&= \frac{2000 - 800}{4100 - 1600} \\
&= \frac{1200}{2500} = 0.4800 \\
b_{yx} &= \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \\
&= \frac{1200}{10 \times 240 - (20)^2} \\
&= \frac{1200}{2000} = 0.6000
\end{aligned}$$

Y के X पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण,

$$\begin{aligned}
y - \bar{y} &= b_{yx} (x - \bar{x}) \\
&= 0.60 (x - 2) \\
y - 4 &= 0.60 x - 1.20 \\
y &= 2.80 + 0.6000 x
\end{aligned}$$

X के Y पर आश्रित प्रतीपगमन समीकरण,

$$\begin{aligned}
x - \bar{x} &= b_{xy} (y - \bar{y}) \\
&= 0.480 (y - y) \\
x - 2 &= 0.480 y - 1.92 \\
x &= 0.08 + 0.4800 y
\end{aligned}$$

चरों के बीच सहसंबंध गुणांक,

$$\begin{aligned}
r &= \frac{N \sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{N \sum x^2 - (\sum x)^2} \sqrt{N \sum y^2 - (\sum y)^2}} \\
&= \frac{1200}{\sqrt{2000} \sqrt{2500}} = 0.5367 \\
&\quad \text{(or)} \\
r &= \pm \sqrt{b_{xy} \cdot b_{yx}} \\
&= \pm \sqrt{0.4800 \times 0.6000} \\
&= \sqrt{0.288} \\
&= 0.5367
\end{aligned}$$

4.3.3 बहुगुणी प्रतीपगमन (Multiple Regression)

बहुगुणी प्रतीपगमन सरल रेखीय प्रतीपगमन का ही विस्तृत रूप है। इसका प्रयोग दो या अधिक स्वतंत्र चर मूल्यों के आधार पर आश्रित चर मूल्य का सर्वोपयुक्त अनुमान लगाने के लिए किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि 30 विद्यार्थियों की आयु (x_1), उसकी लम्बाई (x_2) तथा भार (x_3) दिया हुआ हो तो बहुगुणी प्रतीपगमन रीति द्वारा इस बात का अनुमान लगाया जा सकता है, निश्चित आयु तथा लम्बाई के विद्यार्थी का वजन कितना होगा?

बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरण

सरल रेखीय प्रतीपगमन समीकरण का विस्तार करके ही बहुगुणी प्रतीपगमन समीकरण प्राप्त किया जाता है। इस प्रकार के प्रतीपगमन के लिए निम्न समीकरणों का प्रयोग किया जाता है—

X_1 का X_2 व X_3 पर प्रतीपगमन समीकरण,

$$X_{1.23} = a_{1.23} + b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3, \quad \text{----- (1)}$$

इस सूत्र में,

$X_{1.23}$ का अर्थ है X_2 व X_3 के दिये हुए मूल्य पर X_1 का सर्वोपयुक्त अनुमान।

$a_{1.23}$ स्थिरांक है जिसका परिगणन निम्न ढंग से किया जाता है—

$$a_{1.23} = \bar{X}_1 - b_{12.3}\bar{X}_2 - b_{13.2}\bar{X}_3 \quad \text{----- (2)}$$

यहाँ, $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ व $\bar{X}_3$ क्रमशः तीनों चर मूल्यों के समान्तर माध्य हैं।

उपरोक्त समीकरण (1) को विचलन के रूप में लिखने पर,

$$X_{1.23} = b_{12.3}X_2 + b_{13.2}X_3, \quad \text{----- (3)}$$

यहाँ, $b_{12.3}$ व $b_{13.2}$ आंशिक प्रतीपगमन गुणांक हैं जिनकी गणना निम्न प्रकार से की जाती है—

$$b_{12.3} = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \times \frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{1-r_{23}^2} \quad \text{----- (4)}$$

$$b_{13.2} = \frac{\sigma_1}{\sigma_3} \times \frac{r_{13}-r_{12}r_{23}}{1-r_{23}^2} \quad \text{----- (5)}$$

तीन चर—मूल्य दिये होने पर उपरोक्त समीकरण के अलावा दो अन्य समीकरणों का भी निर्धारण किया जा सकता है। एक समीकरण X_1 व X_3 को स्वतंत्र मानते हुए X_2 का अनुमान लगाने के लिए, और दूसरा X_1 व X_2 को स्वतंत्र मानते हुए X_3 का अनुमान लगाने के लिए।

X_2 का X_1 व X_3 पर प्रतीपगमन समीकरण,

$$X_{2.13} = a_{2.13} + b_{21.3}X_1 + b_{23.1}X_3, \quad \text{----- (6)}$$

इस सूत्र में,

$X_{2.13}$ का अर्थ है X_1 व X_3 के दिये हुए मूल्य पर X_2 का सर्वोपयुक्त अनुमान।

$a_{2.13}$ स्थिरांक है जिसका परिगणन निम्न ढंग से किया जाता है—

$$a_{2.13} = \bar{X}_2 - b_{21.3}\bar{X}_1 - b_{23.1}\bar{X}_3 \quad \text{----- (7)}$$

यहाँ, $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ व $\bar{X}_3$ क्रमशः तीनों चर मूल्यों के समान्तर माध्य हैं।

उपरोक्त समीकरण (6) को विचलन के रूप में लिखने पर,

$$X_{2.13} = b_{21.3}X_1 + b_{23.1}X_3, \quad \text{----- (8)}$$

यहाँ, $b_{21.3}$ व $b_{23.1}$ आंशिक प्रतीपगमन गुणांक हैं जिनकी गणना निम्न प्रकार से की जाती है—

$$b_{21.3} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \times \frac{r_{12}-r_{13}r_{23}}{1-r_{23}^2} \quad \text{----- (9)}$$

$$b_{23.1} = \frac{\sigma_2}{\sigma_3} \times \frac{r_{23}-r_{12}r_{13}}{1-r_{23}^2} \quad \text{----- (10)}$$

X_3 का X_2 व X_1 पर प्रतीपगमन समीकरण,

$$X_{3.12} = a_{3.12} + b_{31.2}X_1 + b_{32.1}X_2, \quad \text{----- (11)}$$

$X_{3.12}$ का अर्थ है X_1 व X_2 के दिये हुए मूल्य पर X_3 का सर्वोपयुक्त अनुमान।

$a_{3.12}$ स्थिरांक है जिसका परिगणन निम्न ढंग से किया जाता है—

$$a_{3.12} = \bar{X}_3 - b_{31.2}\bar{X}_1 - b_{32.1}\bar{X}_2 \quad \text{----- (12)}$$

यहाँ, $\bar{X}_1, \bar{X}_2$ व $\bar{X}_3$ क्रमशः तीनों चर मूल्यों के समान्तर माध्य हैं।

उपरोक्त समीकरण (11) को विचलन के रूप में लिखने पर,

$$X_{3.12} = b_{31.2}X_1 + b_{32.1}X_2, \text{ ----- (13)}$$

यहाँ $b_{31.2}$ व $b_{32.1}$ आंशिक प्रतीपगमन गुणांक हैं जिनकी गणना निम्न प्रकार से की जाती है—

$$b_{31.2} = \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \times \frac{r_{13}-r_{12}r_{23}}{1-r_{12}^2} \text{ ----- (14)}$$

$$b_{23.1} = \frac{\sigma_3}{\sigma_2} \times \frac{r_{23}-r_{13}r_{12}}{1-r_{12}^2} \text{((15)}$$

उदाहरण 4.3.8 — 450 विद्यार्थियों के तीन गुणों X_1 , X_2 तथा X_3 से सम्बन्धित सूचनाएं निम्नवत् हैं—

$$\mu_1 = 18.5 \quad \sigma_1 = 11.2 \quad r_{12} = 0.60$$

$$\mu_2 = 100.6 \quad \sigma_2 = 15.8 \quad r_{13} = 0.32$$

$$\mu_3 = 24 \quad \sigma_3 = 6.0 \quad r_{23} = 0.35$$

ज्ञात कीजिए (क) X_1 का X_2 व X_3 पर प्रतीपगमन समीकरण

(ख) X_1 का अनुमानित मूल्य यदि $X_2 = 100$ तथा $X_3 = 50$

(ग) आंशिक सहसम्बन्ध गुणांक $r_{13.2}$

हल: (क) X_1 का X_2 व X_3 पर प्रतीपगमन समीकरण

4.3.4 इकाई का सारांश

अब हम इकाई में वर्णन किये गये महत्वपूर्ण अवधारणाओं की पुनरावृत्ति करते हैं।

प्रतीपगमन उस प्रक्रिया का नाम है जिसके द्वारा एक चर के मदद से दूसरे चर का अनुमान या भविष्यवाणी किया जाता है। जब प्रतीपगमन तकनीक का प्रयोग किया जाता है तब यह मान लिया जाता है कि स्वतंत्र एवं आश्रित चरों के बीच वास्तविक संबंध विद्यमान है। आश्रित चर के मूल्य दैव प्रकार के होंगे लेकिन स्वतंत्र चर के मूल्य बिना किसी त्रुटि एवं प्रयोगकर्ता द्वारा चयन किया जाता है। यद्यपि, आश्रित चर स्वतंत्र का फलन होता है, और यह संबंध विश्लेषण दिये गये समय अन्तर्गत या परासर के संपूर्ण प्रक्रिया तक स्थिर रहता है।

सामान्य रैखिक प्रतीपगमन विश्लेषण में अनुमान या भविष्यवाणी के लिए एक ही स्वतंत्र चर का प्रयोग, दोनो चरों के बीच रैखिक संबंध मानते हुए किया जाता है। प्रतीपगमन रेखा के अवरोध या इंटरसेप्ट एवं ढाल को ज्ञात करने के लिए दो विधियों विक्षेप आरेख एवं न्यूनतम वर्ग का प्रयोग किया जाता है। विक्षेप आरेख के अन्तर्गत दो श्रेणियों के ज्ञात चरों को ग्राफ पेपर अर्थात् स्वतंत्र चर को X -अक्ष एवं आश्रित चर को Y -अक्ष में अंकित किया जाता है। रेखा फिट करने की न्यूनतम वर्ग विधि (सर्वोपयुक्त रेखा या प्रतीपगमन रेखा) के अन्तर्गत विक्षेप आरेख वह विधि है जो उर्ध्वाधर विचलनों के वर्गों के योग को न्यूनतम करता है। जैसा कि उपर वर्णित प्रतीपगमन रेखा को ज्ञात करने के उपरान्त, उसकी सत्यता की जांच भी किया जा सकता है। इस उद्देश्य को पूरा करने के लिए, न्यूनतम वर्ग विधि के रेखा फिटिंग के गणितीय विशेषता का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, ऋणात्मक एवं धनात्मक चरों के अलग-2 योग का अंतर शून्य के बराबर होता है। मानक त्रुटि का विकास सांख्यिकीविदों ने प्राक्कलन समीकरण के विश्वसनीयता को मापने के लिए किया है। प्रमाप विचलन के ही तरह, मानक त्रुटि भी Y चर में विचरणशीलता को मापता है अथवा प्रतीपगमन रेखा के इर्द-गिर्द Y के अवलोकिता मूल्य के विक्षेप को मापता व प्रदर्शित करता है। मानक त्रुटि के अधिक होने अर्थ है कि श्रेणी में अपकिरण का ज्यादा होना या दिये गये अवलोकनों का प्रतीपगमन रेखा के आस-पास बिखरा होना। लेकिन यदि प्राक्कलन की मानक त्रुटि शून्य के बराबर हो जाये तब प्राक्कलन समीकरण आश्रित चर के लिए एक संपूर्ण प्राक्कलक (शत प्रतिशत सत्य अनुमानक) कहलायेगी।

4.3.5 मुख्य शब्द

- **प्रतीपगमन विश्लेषण:** वैसा संबंध जिसका प्रयोग एक चर (वह अज्ञात चर आश्रित चर कहलाता है) के बारे में अनुमान एवं भविष्यवाणी किसी दूसरे चर या चरों (वह ज्ञात चर स्वतंत्र चर कहलाता है) के आधार पर किया जाता है।

- **विक्षेप आरेख:** वह आरेख जिसका प्रयोग दो ज्ञात श्रेणियों के चरों, अर्थात् स्वतंत्र चर को दिये गये सूचना के अनुसार, ग्राफ पेपर पर X-अक्ष एवं वह चर जिसका अनुमान करना है, अर्थात् आश्रित चर को Y-अक्ष में अंकित किया जाता है।
- **अनुमान के मानक त्रुटि:** मानक त्रुटि का विकास सांख्यिकीविदों ने प्राक्कलन समीकरण के विश्वसनीयता को मापने के लिए किया है।

4.3.6 अपने प्रगति का मुल्यांकन (बहुविकल्पीय/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(A) खाली स्थानों को भरें।

- i. 'प्रतीपगमन' शब्द का प्रयोग सर्वप्रथम 1877 में _____ के द्वारा किया गया था।
- ii. प्रतीपगमन विश्लेषण में, यह माना जाता है कि _____ चरों एवं स्वतंत्रता चरों के बीच वास्तविक संबंध विद्यमान है।
- iii. रेखा फिट करने की न्यूनतम वर्ग विधि (सर्वोपयुक्त रेखा या प्रतीपगमन रेखा) के अन्तर्गत विक्षेप आरेख वह विधि है जो उर्ध्वाधर विचलनों के वर्गों के योग को _____ करता है।
- iv. अन्तराल आंकलन विधि में, अन्तराल जितना अधिक होंगे हमें विश्वसनीयता का स्तर भी _____ हो सकते हैं।
- v. मानक त्रुटि के _____ प्रसरण के नाम से भी जानते हैं जो त्रुटि पद के विश्वसनीयता के आधारभूत माप है।
- vi. मानक त्रुटि के अधिक होने अर्थ है कि श्रेणी में अपकिरण का _____ होना या दिये गये अवलोकनों का प्रतीपगमन रेखा के आस-पास बिखरा होना।

(B) बतायें कि कौन सा कथन सत्य एवं कौन-सा कथन असत्य है।

- i. आश्रित चर के मूल्य दैव प्रकार के होंगे लेकिन स्वतंत्र चर के मूल्य बिना किसी त्रुटि एवं प्रयोगकर्ता द्वारा चयन किया जाता है।
- ii. सामान्य रैखिक प्रतीपगमन विश्लेषण में अनुमान या भविष्याणी के लिए एक ही स्वतंत्र चर का प्रयोग, दोनो चरों के बीच द्विघातीय संबंध मानते हुए किया जाता है।
- iii. विक्षेप आरेख के अन्तर्गत दो श्रेणियों के ज्ञात चरों को ग्राफ पेपर अर्थात् स्वतंत्र चर को X-अक्ष एवं आश्रित चर को Y-अक्ष में अंकित किया जाता है।
- iv. कुछ बड़े त्रुटियों के समग्रों के वर्ग को न्यूनतम करने से अच्छा है कि प्रत्येक विचलनों के वास्तविक पदों के वर्गों के समग्र को न्यूनतम का चयन किया जाय।
- v. मानक त्रुटि का विकास सांख्यिकीविदों ने प्राक्कलन समीकरण के विश्वसनीयता को मापने के लिए किया है।
- vi. यदि प्राक्कलन की मानक त्रुटि शून्य के बराबर हो जाये तब प्राक्कलन समीकरण आश्रित चर के लिए एक संपूर्ण प्राक्कलक (शत प्रतिशत सत्य अनुमानक) कहलायेगी।

4.3.7 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी

- (A) i. सर फ्रांसिस गॉल्टन, ii. आश्रित, iii. न्यूनतम, iv. अधिकतम,
v. वर्ग, vi. अधिकतम
- (B) i. सत्य, ii. असत्य, iii. असत्य, iv. सत्य, v. सत्य,
vi. असत्य,

4.3.8 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न

1. प्रतीपगमन तकनीक के प्रयोग के लिए कौन सी महत्वपूर्ण मान्यताएं हैं?
2. विक्षेप आरेख विधि का वर्णन करें।
3. प्रतीपगमन मॉडल में अवरोध एवं ढाल के प्राक्कलन के लिए किस प्रकार न्यूनतम वर्ग विधि का प्रयोग किया जाता है?
4. प्राक्कलन के मानक त्रुटि के माप क्या है?
5. एक प्राक्कलन के मानक त्रुटि का निर्वचन करें।

4.3.9 संदर्भ पुस्तकें

1. J. K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
2. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
3. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
4. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
5. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
6. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी—सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
7. अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
8. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
9. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
10. Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
11. R.P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India Ltd., Delhi, India.

खण्ड—IV
इकाई 04
प्रतिचयन विभ्रम एवं सार्थकता परीक्षण

प्रारूप:

- 4.4.1 परिचय
- 4.4.2 प्रतिचयन विभ्रम का अर्थ एवं उनके प्रकार
 - 4.4.2.1 पक्षपात प्रतिचयन विभ्रम
 - 4.4.2.2 गैर-पक्षपात प्रतिचयन विभ्रम
- 4.4.3 प्राचल एवं प्रतिदर्शज
 - 4.4.3.1 निदर्शन वितरण
 - 4.4.3.2 निदर्शन वितरण का महत्त्व
- 4.4.4 प्रमाप विभ्रम
 - 4.4.4.1 प्रमाप विचलन एवं प्रमाप विभ्रम में अन्तर
 - 4.4.4.2 केन्द्रीय सीमा प्रमेय
 - 4.4.4.3 परिकल्पना परीक्षण
- 4.4.5 सार्थकता परीक्षण
 - 4.4.5.3 सार्थकता परीक्षण का महत्त्व
- 4.4.6 इकाई का सारांश
- 4.4. मुख्यशब्द
- 4.4.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न / वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 4.4.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 4.4.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न
- 4.4.11 सन्दर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त आप समझ सकेंगे:

- सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए विभिन्न तरह के आंकड़ों की जरूरत
- प्राथमिक एवं द्वितीय आंकड़ों के अर्थ को समझना
- प्राथमिक एवं द्वितीय आंकड़ों से संबंधित विधियां और उनके स्रोत
- किसी समस्या के अध्ययन हेतु प्राथमिक एवं द्वितीय आंकड़ों का चुनाव

4.4.1 परिचय

सामान्यतः सांख्यिकीय अध्ययन के अन्तर्गत प्रतिचयन एक प्रारम्भिक एवं अत्यन्त ही महत्वपूर्ण सोपान है जिसके बिना कुशल एवं शुद्ध आंकड़े संकलित करना एक कठिन कार्य होता है। प्रत्येक व्यावसायिक उपक्रम के अन्तर्गत प्रबन्धकों द्वारा समय-समय पर अनेक व्यावसायिक निर्णय लेने होते हैं जिसके लिए उन्हें अनुसंधान कार्य की आवश्यकता पड़ती है। इन परिस्थितियों में बिना सांख्यिकीय आंकड़ों के संकलन एवं विश्लेषण के उचित निर्णय नहीं लिये जा सकते हैं। लेकिन अच्छे एवं विश्वसनीय समंक संकलन हेतु बेहतर प्रतिचयन एवं प्रतिचयन विधि का चुनाव भी एक अहम मुद्दा होता है।

4.4.2 प्रतिचयन एवं गैर-प्रतिचयन विभ्रम (Sampling and Non-Sampling Error)

(क) **प्रतिचयन विभ्रम (Sampling Error)**— निदर्शन विधि के द्वारा समंक संकलन के दौरान होने वाली त्रुटियाँ या अभिनति को निदर्शन विभ्रम कहा जाता है। निदर्शन विभ्रम दो प्रकार के होते हैं।

अभिनत व पक्षपातपूर्ण प्रतिचयन विभ्रम (Biased Sampling Error)

वह निदर्शन विभ्रम जो एक ही दिशा में होते हैं उन्हें अभिनत या पक्षपातपूर्ण निदर्शन विभ्रम कहते हैं। सामान्यतः ये विभ्रम प्रतिदर्श आकार (Sample Size) के बढ़ाने पर कम नहीं होते क्योंकि इसमें निदर्शन कर्ता द्वारा जान बूझकर पक्षपात व्यवहार किया जाता है। इन विभ्रमों के उत्पन्न होने के निम्नलिखित मुख्य कारण हैं:

- (अ) सूचनाओं के संकलन की विधि का दोषपूर्ण होना।
- (ब) आंकड़ों के व्यवस्थीकरण का दोषपूर्ण होना।
- (स) आंकड़ों के विश्लेषण का दोषपूर्ण होना।

4.4.2.1 गैर-पक्षपातपूर्ण व अनभिनत प्रतिचयन विभ्रम (Unbiased Sampling Error)

वे विभ्रम जो कि अवसर से सम्बन्धित होते हैं अनभिनत व गैर-पक्षपातपूर्ण विभ्रम कहलाते हैं। ये विभ्रम प्रतिदर्श में मदों की संख्या बढ़ाने व प्रतिदर्श आकार में वृद्धि करने के साथ-साथ कम होते हैं। अतः इन्हें असंचयी और क्षतिपूर्ण विभ्रम (Compensatory Errors) कहते हैं। सर्वेक्षण कार्य के उचित रूप से अपनाये जाने से ये विभ्रम न्यूनतम भी होते हैं।

(ख). गैर-प्रतिचयन विभ्रम (Non-Sampling Error)— संगणना के कारण हाने वाली त्रुटियों को गैर-निदर्शन विभ्रम कहा जाता है। वास्तव में गैर-निदर्शन विभ्रम प्रायः सभी प्रकार के सर्वेक्षणों में पाये जाते हैं, चाहे वे संगणना विधि द्वारा हो या निदर्शन विधि द्वारा। ये विभ्रम अनुसन्धान के किसी भी स्तर पर उत्पन्न हो सकते हैं। ये विभ्रम समग्र की दोषपूर्ण परिभाषा, प्रश्नावली व अनुसूची में अपूर्णता, दोषपूर्ण आंकड़ों का संकलन, प्रस्तुतीकरण, दोषपूर्ण परिभाषाएँ, आदि के कारण होते हैं। गैर-निदर्शन विभ्रमों में अभिनति (bias) और त्रुटियाँ (mistake), दोनों की सम्मिलित होती हैं। अभिनत विभ्रम इसलिए उत्पन्न होते हैं क्योंकि आंकड़ों में प्रायः एक ओर बढ़ने की प्रवृत्ति होती है। प्रतिदर्श के आकार में होने वाली वृद्धि तथा औसतों के प्रयोग से भी ये विभ्रम समाप्त नहीं होते हैं।

4.4.3 प्राचल एवं प्रतिदर्शज (Parameters and Statistics)

“समग्र की सांख्यिकीय मापों यथा माध्य, प्रमाप विचलन, सहसम्बन्ध गुणांक, आदि को ‘प्राचल’ (Parameters) या स्थिर माप तथा न्यादर्श की इकाईयों से निकाले गये सांख्यिकी मापों को ‘प्रतिदर्शज’ (Statistic) कहा जाता है।” उदाहरण के लिए, एक मिल के सभी 10000 मजदूरों की मजदूरी का औसत अथवा प्रमाप विचलन या अन्य कोई माप निकाले जाएँ तो ये माप ‘प्राचल’ कहे जाते हैं। किन्तु यदि 10000 मजदूरों में से 1000 मजदूरों का चुनकर उनकी औसत मजदूरी, प्रमाप विचलन अथवा कोई अन्य माप ज्ञात किये जाएँ तो वे ‘प्रतिदर्शज’ कहलाते हैं।

—प्रो. आर. फिशर।

निदर्शन सिद्धान्त की आधारभूत समस्या समग्र के प्राचलों एवं न्यादर्शों के प्रतिदर्शजों के मध्य पारस्परिक सम्बन्धों की विवेचना करना है। दूसरे शब्दों में, निदर्शन सिद्धान्त का सम्बन्ध इस प्रकार के विशिष्ट प्रश्नों से है कि न्यादर्श के ज्ञात माध्य, प्रमाप विचलन, आदि समग्र के माध्य, प्रमाप विचलन, आदि के रूप में किस स्तर तक विश्वसनीय हैं? दो न्यादर्शों के सांख्यिकीय मापों में महत्वपूर्ण अन्तर क्या है? क्या यह अन्तर अवसर (By Chance or Random) के परिणामस्वरूप है, अथवा इसके लिए अन्य कारण उत्तरदायी है।

4.4.3.1 निदर्शन वितरण (Sampling Distribution)

जब एक समग्र में से निश्चित आकार के स्वतंत्र एवं दैव न्यादर्श चयन किये जाएँ और फिर उनके पृथक-पृथक न्यादर्श प्रतिदर्शज (माध्य, प्रमाप विचलन, आदि) ज्ञात करके उन्हें आवृत्ति वितरण के रूप में प्रस्तुत किया जाए तो यह निदर्शन वितरण कहलाता है। उदाहरण के लिए, एक विश्वविद्यालय के 20,000 छात्रों में से 100—100 छात्रों के 20 न्यादर्श दैव आधार पर चयन करके प्रत्येक न्यादर्श के माध्य ज्ञात किये जाएँ तो इस प्रकार 20 माध्य प्राप्त होंगे। इन 20 न्यादर्श प्रतिदर्शज (माध्य) का आवृत्ति वितरण माध्य का निदर्शन वितरण (Sampling Distribution of the Mean) कहलाता है। इन न्यादर्श के प्रतिदर्शजों में कुछ अन्तर होता है। निदर्शन वितरण में यह जानना आवश्यक होता है कि निदर्शन वितरण प्रसामान्य वितरण के लगभग समान है तथा इसका माध्य समग्र के माध्य के समान है। निदर्शन वितरण के समान्तर माध्य ($\bar{X}$) एवं समग्र के समान्तर माध्य को ग्रीक अक्षर μ (म्यू) द्वारा प्रकट किया जाता है।

4.4.3.2 निदर्शन वितरण का महत्त्व (Importance of Sampling Distribution)

निदर्शन वितरण में निम्नलिखित दो विशेषताएँ होने के कारण, सांख्यिकीय निगमन (Statistical Inference) में इसका अपना विशेष महत्त्व है—

(अ) निदर्शन वितरण की पहली विशेषता यह है कि विशाल आकार के समग्र में से बड़े आकार (30 इकाईयों से अधिक) के अनेक स्वतंत्र दैव न्यादर्शों के प्रतिदर्शजों का निदर्शन वितरण या तो प्रसामान्य (Normal) अथवा प्रसामान्य के बहुत ही नतदीक होगा। यह आवश्यक नहीं है कि समग्र पूर्ण रूप से प्रसामान्य हों। यह लगभग प्रसामान्य अथवा अल्प असममितीय हो सकता है। निदर्शन वितरण की यह विशेषता ‘केन्द्रीय सीमा प्रमेय’ पर आधारित है जिसे गणितीय रीति से सिद्ध किया जाता है।

(ब) ‘केन्द्रीय सीमा प्रमेय’ के अनुसार अगर एक समग्र में से जो चाहे प्रसामान्य वितरण प्रकार को हो या नहीं जिसका समान्तर माध्य μ और प्रमाप विचलन σ है, में से N आकार के कई न्यादर्श (निदर्शन

विधि द्वारा) लिए जाएँ (N बड़ी संख्या हो अर्थात् 30 या इससे अधिक) तो उस आकार के न्यादर्शों के समान्तर माध्यों का वितरण प्रसामान्य वितरण के निकटतम होगा और उसका μ माध्य तथा प्रमाप विचलन $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ होगा।

प्रसामान्य समग्र में से लिये गये न्यादर्शों का बड़ा होना आवश्यक नहीं है अर्थात् उनके छोटा होने पर भी निदर्शन वितरण सदैव प्रसामान्य प्रकार का होता है। इसके विपरीत यदि समग्र प्रसामान्य नहीं है तो भी निदर्शन वितरण सदैव प्रसामान्य प्रकार का होता है। इसके विपरीत यदि समग्र प्रसामान्य नहीं है तो भी निदर्शन वितरण प्रसामान्यता के समीप हो जायेंगे जैसे-जैसे आकार बढ़ता जायेगा।

(स) निदर्शन वितरण की दूसरी विशेषता यह है कि इसका माध्य और समग्र का माध्य दोनों ही समान होते हैं। इस विशेषता के आधार पर ही न्यादर्शों के समान्तर माध्यों की सहायता से समग्र के माध्य मूल्य (Mean Value of Universe) का सबसे अच्छा अनुमान लगाया जा सकता है।

4.4.4 प्रमाप विभ्रम (Standard Error)

किसी भी न्यादर्श की सांख्यिकीय माप का प्रमाप विभ्रम उस माप के निदर्शन वितरण का प्रमाप विचलन होता है। दूसरे शब्दों में, किसी प्रतिदर्शज (Statistic) के प्रमाप विचलन को प्रमाप विभ्रम कहा जाता है अथवा किसी प्रतिदर्शज के निदर्शन वितरण (Sampling Distribution) के प्रमाप विचलन को प्रमाप विभ्रम या प्रमाप त्रुटि (Standard Error) कहा जाता है।

हम जानते हैं कि प्रमाप विचलन समान्तर माध्य के विचलनों को मापता है। अतः निदर्शन वितरण में प्रमाप विचलन (जैसे प्रमाप विभ्रम की संज्ञा दी जाती है) सभी न्यादर्शों के समान्तर माध्यों का समग्र के समान्तर माध्य की तुलना में विचलनों को मापने का कार्य करता है। इस प्रकार प्रमाप विभ्रम समग्र के समान्तर माध्य के अनुमान में निदर्शन विभ्रमों के माध्य का माप है।

माना कि प्रसामान्य वितरण जिसका माध्य μ तथा प्रसरण σ^2 है, से n माप के यादृच्छिक प्रतिदर्श लिए जाते हैं तब प्रतिदर्श माध्य के निदर्शन वितरण का माध्य $= \mu$ तथा प्रसरण $= \frac{\sigma^2}{n}$ होता है। अर्थात् माध्य

की प्रमाप त्रुटि $= \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है। इससे ज्ञात होता है कि समग्र का माध्य और निदर्शन वितरण का माध्य समान होते हैं तथा प्रमाप विभ्रम विचलन को n से भाग देने पर प्राप्त भागफल (Quotient) है।

अर्थात् यदि समग्र का वितरण प्रसामान्य (माध्य $= \mu$, प्रमाप $= \sigma$) हो तो माध्य, $\bar{X}$ का निदर्शन वितरण भी प्रसामान्य (माध्य, $\mu_{\bar{x}} = \mu$, प्रमाप विभ्रम $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$) होगा जहाँ n प्रतिदर्श का आकार है।

4.4.4.1 प्रमाप विचलन एवं प्रमाप विभ्रम में अन्तर (Difference between Standard Deviation and Standard Error)

निदर्शन वितरण का प्रमाप विचलन ही प्रमाप विभ्रम कहलाता है किन्तु, व्यवहार में प्रमाप विचलन एवं प्रमाप विभ्रम शब्दों का प्रयोग समान अर्थ में किया जाता है, परन्तु वास्तव में इन दोनों में अन्तर है।

प्रमाप विचलन (Standard Deviation)	प्रमाप विभ्रम (Standard Error)
प्रमाप विचलन समग्र की मूल इकाईयों के समान्तर माध्य के दोनों ओर के विचरणों का माप होता है। उदाहरणार्थ, 1000 विद्यार्थियों के प्राप्तांकों के समान्तर माध्य से विचलन लिये जायें तो इन विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल प्रमाप विचलन होगा। प्रमाप विचलन को संकेताक्षर σ से निरूपित किया जाता है।	प्रमाप विभ्रम समग्र के माप से विभिन्न न्यायदर्श मापों/प्रतिदर्शजों की विचरणशीलता की माप होता है। परन्तु, यदि 50-50 के 20 न्यादर्श लेकर उनके माध्य ज्ञात किये जाएँ और इन माध्यों का समग्र के माध्य से निकाला गया प्रमाप विचलन माध्य का प्रमाप विभ्रम (Standard Error of the Mean) होगा। प्रमाप विभ्रम को भी संकेताक्षर σ के द्वारा निरूपित किया जाता है लेकिन साथ में प्रतिदर्शज के संकेत को लिखा जाता है, जिससे पता लगाना आसान हो सके कि प्रमाप विभ्रम है। उदाहरणार्थ, समान्तर माध्य के प्रमाप विभ्र के लिए संकेताक्षर $\sigma_{\bar{x}}$, प्रमाप विचलन के प्रमाप विभ्रम हेतु σ_o तथा सहसम्बन्ध गुणांक के प्रमाप विभ्रम के लिए σ_r का प्रयोग होता है।

4.4.4.2 केन्द्रीय सीमा प्रमेय (Central Limit Theorem)

यदि समग्र बहुत बड़ा या सतत है तो हम इसमें से अनेक प्रतिदर्श ले सकते हैं। प्रत्येक प्रतिदर्श से एक प्रतिदर्शज (माना $\bar{X}$, माध्य) ज्ञात कर सकते हैं। जहाँ, $\bar{X}$ प्रत्येक प्रतिदर्श के लिए अलग-अलग हो सकता है।

समग्र का माध्य μ तथा प्रमाप विचलन σ है। तब मानक विचरण (Standard Variate), $Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ को

वितरण का मानक प्रसामान्य वितरण (Standard Normal Distribution) कहते हैं अर्थात् Z -प्रसामान्य (माध्य = 0, प्रमाप विभ्रम = 1) जबकि प्रतिदर्श का आकार अनन्त की ओर अग्रसर होता है ($n \rightarrow \infty$)। इससे स्पष्ट है कि $\bar{X}$ का वितरण प्रसामान्य होगा जिसका माध्य $\mu_{\bar{X}} = \mu$ तथा प्रमाप त्रुटि $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ है। निदर्शन वितरण तथा समग्र वितरण के सम्बन्ध को दर्शाने वाले इस प्रमेय को केन्द्रीय सीमा प्रमेय (Central Limit Theorem) कहते हैं। यह प्रमेय बताता है कि—

(क) माध्य के निदर्शन वितरण का माध्य समग्र के माध्य के बराबर होगा भले ही समग्र का वितरण प्रसामान्य न हो।

(ख) माध्य के निदर्शन वितरण का वितरण प्रसामान्य की ओर अग्रसर होगा चाहे समग्र का वितरण कोई भी हो।

(ग) माध्य का निदर्शन वितरण (Sampling Distribution of Mean) प्रसामान्य वितरण की ओर अग्रसर होता है यदि प्रतिदर्श आकार में वृद्धि हो ($n \rightarrow \infty$)।

नोट: कुछ सैद्धान्तिक परिस्थितियों में केन्द्रीय सीमा प्रमेय लागू नहीं होता है। केन्द्रीय प्रमेय का महत्व यह है कि समग्र के वितरण के प्रकार की जानकारी के बिना प्राचलों के अनुमान ज्ञात किए जा सकते हैं।

आकलन (Estimation): न्यादर्श के प्रतिदर्शजों की सहायता से समग्र के प्राचलों के आकलन (Estimation) किया जाता है। आकलन या अनुमान सामान्यतया दो प्रकार से किये जाते हैं:

1. बिन्दु आकलन (Point Estimation) तथा
2. अन्तराल आकलन (Interval Estimation)

1. बिन्दु आकलन (Point Estimation)

जब न्यादर्श के प्रतिदर्शज से समग्र के प्राचल का केवल एक अनुमान/आकलक ज्ञात किया जाता है तो इस आकलक को बिन्दु आकलक कहा जाता है तथा इस प्रक्रिया को बिन्दु आकलन कहा जाता है। उदाहरण के लिए,

(क) माना माध्य μ तथा प्रसरण σ^2 (या प्रमाप विचलन, σ) के समग्र में $x_1, x_2, \dots, x_n$ एक यादृच्छिक प्रतिदर्श है। यदि प्रतिदर्श/न्यादर्श के माध्य $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ को समग्र के स्थान पर प्रयोग किया जाता है तो को समग्र के अज्ञात (Unknown) माध्य μ का आकलक कहते हैं। दूसरे शब्दों में, **समग्र के माध्य का बिन्दु आकलक (Point Estimate of Population Mean) = प्रतिदर्श का माध्य (Sample Mean)**।

(ख) माना किसी गुण के आधार पर समष्टि में उस गुण को रखने वाले अवयवों का अनुपात P है। इसमें से n अवयवों का एक न्यादर्श लिया जाता है जिसमें उस गुण को रखने वाले अवयवों का अनुपात p है। यदि P अज्ञात हो तो इसको p से अनुमानित किया जाता है। समीकरण के रूप में, **समग्र के अनुपात का बिन्दु आकलक (Point Estimate of Population Proportion) = प्रतिदर्श का अनुपात (Sample Proportion)**।

(ग) उपर्युक्त उदाहरण (क) में यदि समग्र के प्रसरण σ^2 को प्रतिदर्श के प्रसरण

$S^2 = \frac{1}{n} \sum (x - \bar{x})^2$ से आकलन किया जाए तो S^2 , समग्र के प्रसरण का बिन्दु आकलक (Point Estimate) है।

2. अन्तराल आकलन (Interval Estimation)

समग्र के प्राचलों का ऐसा अनुमान जो दो सीमाओं के मध्य हो अन्तराल आकलन कहा जाता है। जब बिन्दु आकलक के आधार पर समग्र प्राचल के लिए एक अन्तराल ($a \leq \mu \leq b$) निर्धारित किया जात है तथा यह माना जाता है कि एक निश्चित प्रायिकता/विश्वसनीयता के साथ प्राचल μ का मान विद्यमान हो। सीमाओं a और b को अन्तराल सीमाएँ, अन्तराल ($a \leq \mu \leq b$) को **विश्वसनीयता अन्तराल (Confidence Interval)** कहते हैं। सीमाओं a और b को **विश्वसनीयता सीमाएँ (Confidence Limits)**

कहा जाता है। विश्वसनीयता अन्तराल के साथ सम्बद्ध प्रायिकता को विश्वसनीयता स्तर (Confidence Level) कहा जाता है। विश्वसनीयता स्तर का 1 में से घटाने के बाद प्राप्त राशि को सार्थकता स्तर (Level of Significance) कहा जाता है। सूत्र रूप में,

(क) समग्र माध्य के लिए 10% सार्थकता स्तर (α) पर विश्वसनीयता अन्तराल

$$\text{Prob. } \left[\bar{x} - 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + 1.64 \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right] = 1 - 0.10 = 0.90$$

(ख) समग्र अनुपात के लिए 5% सार्थकता स्तर पर विश्वसनीयता अन्तराल

$$\text{Prob. } \left[p - 1.96 \sqrt{\frac{pq}{n}} \leq \mu < P \leq p + 1.96 \sqrt{\frac{pq}{n}} \right] = 1 - 0.05 = 0.95$$

(ग) समग्र प्रसरण के लिए 5% सार्थकता स्तर (α) पर विश्वसनीयता अन्तराल

$$\text{Prob. } \left[S^2 - 1.96 \sqrt{\frac{S^2}{n}} \leq \sigma^2 \leq S^2 + 1.96 \sqrt{\frac{S^2}{n}} \right] = 1 - 0.05 = 0.95$$

नोट: समग्र के माध्य, अनुपात, प्रसरण आदि के विश्वसनीयता अन्तराल की अधिक जानकारी सार्थकता परीक्षण के अध्ययन के साथ समझी जा सकती है।

किसी भी उचित प्रतिदर्शज (Statistic) को समग्र के प्राचल का बिन्दु आकलन लिया जा सकता है। एक अच्छे आकलन में चार विशेषताएँ होनी चाहिए:

(अ) अनभिनतता (Unbiasedness)

(ब) दक्षता (Efficiency)

(स) संगति (Consistency)

(द) पर्याप्तता (Sufficiency)

4.4.4.3 परिकल्पना परीक्षण (Testing of Hypothesis)

किसी समग्र से सम्बन्धित कोई कथन सांख्यिकीय परिकल्पना कहलाता है। जैसे समग्र का माध्य $\mu = 100$ है। इस परिकल्पना की जाँच करना कि यह सत्य है या नहीं? यह परिकल्पना परीक्षण कहा जाता है। जाँच एक प्रतिदर्श के आधार पर किया जाता है। सांख्यिकीय परिकल्पना जिसको सत्य मानकर परीक्षण प्रारम्भ किया जाता है शून्य परिकल्पना (Null Hypothesis) कहलाती है। शून्य परिकल्पना को स्वीकार (या अस्वीकार) करने का तात्पर्य है कि किसी अन्य परिकल्पना का अस्वीकार (या स्वीकार) होना। इस अन्य परिकल्पना को वैकल्पिक परिकल्पना (Alternative Hypothesis) कहा जाता है।

प्रतिदर्श के आधार पर सांख्यिकीय परिकल्पना का परीक्षण करना **परिकल्पना परीक्षण** कहलाता है। किसी परिकल्पना परीक्षण में दो प्रकार की त्रुटियाँ हो सकती हैं:

(अ) परिकल्पना अस्वीकार हो जाय, जबकि वह सत्य हो, इसे **प्रथम प्रकार की त्रुटि** (Error of type I) कहते हैं।

(ब) परिकल्पना स्वीकार हो जाय, जबकि वह असत्य हो, इसे **द्वितीय प्रकार की त्रुटि** (Error of type II) कहते हैं।

इन विभ्रम को निम्न तालिका से प्रदर्शित किया जा सकता है:

सही स्थिति	निर्णय (Decision)	
	(H_0) स्वीकृत	(H_0) अस्वीकृत
सत्य (H_0)	सही निर्णय	प्रथम प्रकार का विभ्रम
असत्य (H_0)	द्वितीय प्रकार का विभ्रम	सही निर्णय

जब किसी विशेष सार्थकता स्तर को चुनते हैं, जैसे 5%, तो वहाँ हमारा अभिप्राय यह होता है कि हम 95% परिकल्पना को स्वीकार कर रहे हैं और 5% प्रथम प्रकार का विभ्रम हो सकता है जिससे परिकल्पना (Hypotheses) को असत्य माना जाय। इससे यह बात स्पष्ट होती है कि जैसे-जैसे सार्थकता का स्तर घटाते जाते हैं वैसे प्रथम प्रकार का विभ्रम कम होता जाता है। परन्तु यह ध्यान रहे ऐसा करने पर दूसरे प्रकार के विभ्रम के बढ़ने की सम्भावना रहेगी। इस प्रकार, दोनों प्रकार के विभ्रमों को एक साथ कम नहीं किया जा सकता वरन् उनमें तो यथोचित सन्तुलन रखा जाता है।

4.4.5 सार्थकता परीक्षण (Test of Significance)

समग्र तथा प्रतिदर्श के प्राचलों तथा प्रतिदर्शजों का अन्तर सार्थक है या महज संयोग है, सार्थकता की इसी परीक्षण को ही सार्थकता परीक्षण कहते हैं। सामान्यतया, परिकल्पना परीक्षण एवं सार्थकता परीक्षण

कुछ अर्थों में पर्यायवाची होते हैं। बस उनकी शब्दावली में थोड़ा अन्तर है। न्यादर्श के आधार पर समग्र के प्राचल के बारे में की गई शून्य परिकल्पना यदि अस्वीकार होती है तो हम कहते हैं कि प्रतिदर्शज तथा प्राचल का अन्तर **सार्थक (Significant)** है। यदि परिकल्पना स्वीकार होती है तो हम कहते हैं कि अन्तर सार्थक नहीं (non-significant) है। यदि अन्तर प्रतीत होता है तो यह **निदर्शन उच्चावचन (Sampling Fluctuations)** के कारण है। सार्थकता की जाँच के लिए परीक्षणों की दो विधियाँ हैं:

(क) सार्थकता परीक्षण (Test of Significance)

(ख) विश्वसनीयता अन्तराल (Non-Significant)

प्रमाप विभ्रम की अवधारणा की सार्थकता परीक्षण में उपयोगिता (Use of Concepts of Standard Error in Test of Significance)

(1) **विश्वसनीयता सीमाओं का निर्धारण (Determination of Confidence Limits):** न्यादर्शन वितरण के सार्थकता परीक्षण में प्रमाप विभ्रम वही उद्देश्य पूरे करता है जो प्रसामान्य वितरण में प्रमाप विचलन द्वारा पूरे किये जाते हैं। अन्य शब्दों में, प्रमाप विभ्रम उन विश्वसनीय सीमाओं को निर्धारित करता है जिनके मध्य प्राचल (Parameter) या अन्य सम्बन्धित प्रतिदर्शज (Statistic) के पाये जाने की सम्भावना होती है। प्रसामान्य वितरण की कुछ प्रचलित विश्वसनीय सीमाएँ, उनके अन्तराल (Interval) एवं स्तर (Level) को निम्न तालिका द्वारा प्रदर्शित किया गया है:

विश्वसनीयता सीमाएँ (Confidence Limits)	विश्वसनीयता अन्तराल (Confidence Interval)		विश्वसनीय स्तर (Confidence Level)
	न्यूनतम (Minimum)	अधिकतम (Maximum)	
$\mu \pm \sigma\bar{x}$	$\mu - \sigma\bar{x}$	$\mu + \sigma\bar{x}$	68.27%
$\mu \pm 2\sigma\bar{x}$	$\mu - 2\sigma\bar{x}$	$\mu + 2\sigma\bar{x}$	95.45%
$\mu \pm 3\sigma\bar{x}$	$\mu - 3\sigma\bar{x}$	$\mu + 3\sigma\bar{x}$	99.73%
$\mu \pm 1.96\sigma\bar{x}$	$\mu - 1.96\sigma\bar{x}$	$\mu + 1.96\sigma\bar{x}$	95.00%
$\mu \pm 2.58\sigma\bar{x}$	$\mu - 2.58\sigma\bar{x}$	$\mu + 2.58\sigma\bar{x}$	99.00%

(2) **सार्थकता परीक्षण (Test of Significance):** सार्थकता की जाँच करना प्रमाप विभ्रम का दूसरा महत्वपूर्ण कार्य है। इसी के द्वारा किसी निर्धारित शून्य परिकल्पना की जाँच की जा सकती है। सार्थकता परीक्षण हेतु अवलोकित एवं प्रत्याशित मान के अन्तर को प्रमाप विभ्रम के निर्धारित क्रान्तिक मान (Critical Value) के सन्दर्भ में देखा जाता है। विभिन्न सार्थकता स्तरों के लिए अलग-अलग प्रमाप विभ्रम के क्रान्तिक मान होते हैं। प्रमाप विभ्रम एवं क्रान्तिक मान का गुणा करने पर निदर्शन विभ्रम ज्ञात हो जाता है, अर्थात् **प्रतिदर्श त्रुटि = प्रमाप विभ्रम × क्रान्तिक मान**।

उदाहरणार्थ, प्रत्याशित मान (प्राचल) और अवलोकित मान (प्रतिदर्शज) का अन्तर प्रमाप विभ्रम के 1.96 गुने से अधिक है, तो यह अन्तर 5 प्रतिशत सार्थकता स्तर पर सार्थक माना जायेगा। दूसरे शब्दों में, 95 प्रतिशत विश्वास के साथ यह कहा जा सकता है कि अन्तर निदर्शन उच्चावचन के कारण न होकर किसी अन्य कारण से है। यदि अन्तर प्रमाप विभ्रम के 1.96 गुने से कम है तो अन्तर सार्थक नहीं माना जायेगा। दूसरे शब्दों में, यह माना जायेगा कि यह अन्तर निदर्शन के उच्चावचन के कारण है।

विभिन्न स्तरों पर सार्थकता की परीक्षण

सार्थकता स्तर (Significance Levels in %)	विश्वसनीयता गुणांक (Confidence Coefficient %)	क्रान्तिक मूल्य (Critical Value)	प्रतिफल त्रुटि (Sampling Error)	विश्वसनीय सीमाएँ (Confidence Limits)	अन्तर (Difference)	
					सार्थक (Significant)	सार्थक नहीं (Not Significant)
5	95	1.96	1.96σ	±1.96σ	>1.96σ	≤1.96σ
1	99	2.58	2.58σ	±2.58σ	>2.58σ	≤2.58σ
0.27	99.73	3	3σ	±3σ	>3σ	≤3σ
4.25	95.45	2	2σ	±2σ	>2σ	≤2σ

(3) **न्यादर्श की विश्वसनीयता की जाँच (Test of Confidence of Sample):** समग्र से लिए गये न्यादर्श की विश्वसनीयता की जाँच करना, प्रमाप विभ्रम का तीसरा कार्य है। प्रमाप विभ्रम का अधिक होना इस बात का संकेत है कि अवलोकित या वास्तविक तथा प्रत्याशित मूल्यों में अन्तर है तथा ऐसी स्थिति में न्यादर्श विश्वसनीय नहीं माना जाता है। इसके विपरीत प्रमाप विभ्रम में कमी न्यादर्श की विश्वसनीयता की परिचायक है।

4.5.2 सार्थकता परीक्षण का महत्व

एक बड़े समग्र से लिए गये स्वतंत्र दैव न्यादर्शों के प्रतिदर्शज (माध्य या प्रमाप विचलन आदि) आपस में भिन्नता लिए हुए होते हैं। इतना ही नहीं न्यादर्श के प्रतिदर्शज एवं समग्र के प्राचल में अन्तर होता है। देखना यह होता है कि यह अन्तर महत्वपूर्ण या सार्थक है अथवा नहीं। यदि यह अन्तर निदर्शन के उच्चावचन (fluctuation) के कारण उत्पन्न हुआ है तो यह महत्वपूर्ण नहीं होगा, दूसरे शब्दों में यह अन्तर 'अर्थहीन' माना जाता है। परन्तु यदि यह अन्तर निदर्शन के कारण न होकर किसी अन्य कारण या कारणों से है तो अन्तर महत्वपूर्ण होगा और सांख्यिकीय दृष्टि से इसे 'सार्थक' माना जायेगा। अन्तर की सार्थकता को जांच हेतु यह आवश्यक है कि निदर्शन सरल एवं दैव स्वभाव का हो।

4.4.6 इकाई का सारांश

जब एक समग्र में से निश्चित आकार के कई स्वतंत्र एवं दैव न्यादर्श चयन किये जाएँ और फिर उनके पृथक-पृथक न्यादर्श प्रतिदर्शज (माध्य, प्रमाप विचलन, आदि) ज्ञात करके उन्हें आवृत्ति वितरण के रूप में प्रस्तुत किया जाए तो यह प्रतिदर्शज का निदर्शन वितरण कहलाता है। उदाहरण के लिए, एक विश्वविद्यालय के 20,000 छात्रों में से 100-100 छात्रों के 20 न्यादर्श दैव आधार पर चयन करके प्रत्येक न्यादर्श के माध्य ज्ञात किये जाएँ तो इस प्रकार 20 माध्य प्राप्त होंगे। इन 20 न्यादर्श प्रतिदर्शज (माध्य) का आवृत्ति वितरण माध्य का निदर्शन वितरण (Sampling Distribution of the Mean) कहलाता है। इन न्यादर्श के प्रतिदर्शज में कुछ अन्तर होता है। निदर्शन वितरण में यह जानना आवश्यक होता है कि निदर्शन वितरण प्रसामान्य वितरण के लगभग समान हैं तथा इसका माध्य समग्र के माध्य के समान है। निदर्शन वितरण के समान्तर माध्य ($\bar{X}$) एवं समग्र के समान्तर माध्य को ग्रीक अक्षर μ (म्यू) द्वारा प्रकट किया जाता है।

4.4.7 मुख्य शब्द

विश्वसनीयता सीमाओं का निर्धारण (Determination of Confidence Limits): न्यादर्शन वितरण के सार्थकता परीक्षण में प्रमाप विभ्रम वही उद्देश्य पूरे करता है जो प्रसामान्य वितरण में प्रमाप विचलन द्वारा पूरे किये जाते हैं। अन्य शब्दों में, प्रमाप विभ्रम उन विश्वसनीय सीमाओं को निर्धारित करता है जिनके मध्य प्राचल (Parameter) या अन्य सम्बन्धित प्रतिदर्शज (Statistic) के पाये जाने की सम्भावना होती है।

संगणना विधि: समंक संकलन की वह विधि जिसमें समग्र के प्रत्येक इकाइयों का गहन अध्ययन किया जाता है है संगणना/समग्र अध्ययन विधि कहलाता है।

सार्थकता परीक्षण (Test of Significance): सार्थकता की जांच करना प्रमाप विभ्रम का दूसरा महत्वपूर्ण कार्य है। इसी के द्वारा किसी निर्धारित शून्य परिकल्पना की जांच की जा सकती है। सार्थकता परीक्षण हेतु अवलोकित एवं प्रत्याशित मान के अन्तर को प्रमाप विभ्रम के निर्धारित क्रान्तिक मान (Critical Value) के सन्दर्भ में देखा जाता है। विभिन्न सार्थकता स्तरों के लिए अलग-अलग प्रमाप विभ्रम के क्रान्तिक मान होते हैं। प्रमाप विभ्रम एवं क्रान्तिक मान का गुणा करने पर निदर्शन विभ्रम ज्ञात हो जाता है, अर्थात् प्रतिदर्श त्रुटि = प्रमाप विभ्रम $\times$ क्रान्तिक मान।

4.4.8 अपने प्रगति की जांच (बहुविकल्पीय प्रकार के प्रश्न/ वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(क) रिक्त स्थानों को पूरा करें

35. न्यादर्श को एक समग्र होना चाहिए।
36. प्रतिदर्श के मूल्यों से प्राप्त कहोने वाले मूल्य कहलाते हैं।
37. निदर्शन विधि सजातीय समग्र के लिए होती है।
38. जब समग्र अनन्त हो तो हमें विधि का प्रयोग करना चाहिए।
39. संगणना विधि में समग्र के इकाई का अध्ययन किया जाता है।

4.4.9 अपने उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(क) 1. उपयुक्त, 2. समग्र, 3. प्रतिदर्शज, 4. अज्ञात पहलू, 5. प्रत्येक।

4.4.10 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

47. न्यादर्श वितरण से आप क्या समझते हैं ?
48. आकलन किसे कहते हैं ? एक अच्छे आंकलन के प्रमुख विशेषताओं का वर्णन कीजिए।
49. परिकल्पना परीक्षण के प्रविधि का वर्णन कीजिए
50. सार्थकता परीक्षण के अर्थ को समझाईए।

51. अर्थशास्त्र में संमंक निर्वचन हेतु निदर्शन वितरण के महत्व को बताएं।

4.4.11 संदर्भ पुस्तक

12. J. K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
13. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
14. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
15. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
16. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
17. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
18. अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
19. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
20. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
21. Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
22. R.P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India Ltd., Delhi, India.

सूचकांक (Index Number)

सरंचना:

- 4.5.1 भूमिका
- 4.5.2 सूचकांक—परिभाषा
 - 4.5.2.1 सापेक्षिक
 - 4.5.2.2 सूचकांक का वर्गीकरण
 - 4.5.2.3 आधार वर्ष एवं चालू वर्ष
 - 4.5.2.4 सूचकांक की मुख्य विशेषताएँ
 - 4.5.2.5 सूचकांक निर्माण के मुख्य चरण
- 4.5.3 सूचकांक की गणना करने की विधियाँ
 - 4.5.3.1 अभारांकित सूचकांक
 - 4.5.3.2 भारांकित सूचकांक
 - 4.5.3.3 मात्रात्मक सूचकांक
 - 4.5.4.4 मूल्य सूचकांक
- 4.5.4 जीवन लागत सूचकांक या उपभोक्ता मूल्य सूचकांक
- 4.5.5 सूचकांक की सीमाएँ
- 4.5.6 सूचकांक की उपयोगिता एवं महत्व
- 4.5.7 इकाई का सारांश
- 4.5.8 मुख्य शब्द
- 4.5.9 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न
- 4.5.10 संदर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप इस योग्य होंगे कि:

- समयानुसार आर्थिक चरों में किस प्रकार परिवर्तन होता है इसका वर्णन।
- निर्देशांकों के तीन महत्वपूर्ण प्रकारों से परिचित होना: कीमत सूचकांक, मूल्य सूचकांक एवं मात्रा सूचकांक।
- सूचकांक के गलत प्रयोग से होने वाली समस्याओं से बचना।
- विभिन्न प्रकार के सूचकांकों की गणना करना।

4.5.1 भूमिका (Introduction)

सूचकांक एक सांख्यिकीय माप है जो चरों या चरों से संबंधित समूह में परिवर्तन या अंतर को सामान्य रूप से प्रतिशत में व्यक्त करता है। यह अंतर वस्तु की भौतिक मात्रा, वस्तुओं की कीमत या ऐसे अवधारणाएँ जिन्हें 'क्षमता', "बुद्धिमता" या सुन्दरता के रूप में हो सकता है। इनमें तुलना समय अवधियों के बीच, स्थानों के बीच, विषयवस्तु के बीच आदि में की जा सकती है। विभिन्न समयों या विभिन्न स्थानों या देशों के तुलनात्मक जीवन निर्वाह लागत सूचकांक, विभिन्न वर्षों में उत्पादन की भौतिक मात्रा या विभिन्न सरकारी कार्यालय की क्षमता से संबंधित सूचकांकों आदि हो सकते हैं।

4.5.2 सूचकांक का अर्थ (Meaning of Index Number)

सूचकांक वह संख्या होता है जिसका प्रयोग किसी विशिष्ट परिघटना के स्तर उसी प्रकार के घटनाओं से कुछ मानक अवधि के सापेक्ष अध्ययन किया जाता है। दूसरे शब्दों में, सूचकांक वह संख्या है जिसका प्रयोग एक यंत्र की तरह वस्तुओं के किसी समूह के मूल्य, मात्रा, कीमत आदि के बीच, विभिन्न परिस्थितियों में तुलना करने के लिए किया जाता है, उदाहरण के लिए, किसी निश्चित स्थान या समय अवधि और किसी दूसरे स्थान या समय अवधि। जब तुलना किसी वस्तु के कीमत के संदर्भ में हो तब

उसे कीमत सूचकांक कहते हैं, जब तुलना किसी वस्तु की भौतिक मात्रा से संबंधित की जाये तब इसे मात्रात्मक सूचकांक कहते हैं। अन्य सूचकांकों को भी इसी तरह से परिभाषित किया जाता है। सूचकांक विभिन्न स्थितियों में उत्पन्न होने वाले विचलनों के तुलना का माध्य या औसत है, उदाहरण के लिए समय में परिवर्तन या स्थान में परिवर्तन होना।

4.5.2.1 सापेक्ष माप (Relative Measures)

चरों के दिये गये वर्ष या स्थान के मूल्य को किसी निश्चित वर्ष या स्थान के मूल्य से भाग देते हैं तब इसे सापेक्षिक माप कहते हैं और इसे सामान्यतः प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है।

1. **कीमत सापेक्ष:** जब किसी दिये हुए वर्ष में वस्तु के कीमत को, किसी निश्चित वर्ष के आधार पर प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है तब इसे ही सापेक्ष कीमत कहा जाता है। माना कि एक वस्तु की कीमत भारत में वर्ष 2001 के लिए 95 रुपये प्रति किलोग्राम था और 2000 में इसका कीमत 80 रुपये प्रति किलोग्राम था।

तब वर्ष 2001 के लिए सापेक्ष कीमत (वर्ष 2000 का प्रयोग आधार मानते हुए) है:

$$\frac{P_1}{P_0} \times 100 = \frac{95}{80} \times 100 = 118.75\%$$

अतः कीमत सापेक्ष 118.75 प्रतिशत है।

1. **उत्पादन सापेक्ष:** यदि भारत में गेहूँ का उत्पादन 2002 में 5,82,000 मेट्रिक टन एवं 2004 यह 6,96,000 मेट्रिक टन था, तब वर्ष 2002 गेहूँ के उत्पादन को 100 मानते हुए, वर्ष 2004 के लिए सापेक्ष उत्पादन है:

$$\frac{696000}{582000} \times 100 = 119.6\%$$

अतः सापेक्ष उत्पादन 119.6 प्रतिशत है।

2. **मात्रा सापेक्ष:** एक वस्तु (q_1) का उपभोग दिये गये वर्ष को, किसी निश्चित वर्ष में उसी वस्तु (q_0) के उपभोग को प्रतिशत में व्यक्त करते हैं तब इसे मात्रा सापेक्ष कहते हैं।

$$\text{इस प्रकार सापेक्ष मात्रा} = \frac{q_1}{q_0} \times 100$$

3. **मूल्य सापेक्ष:** यदि p_1 एवं q_1 क्रमशः किसी वस्तु की कीमत एवं मात्रा दिये हों, तथा p_0 एवं q_0 उसी वस्तु के क्रमशः कीमत एवं मात्रा किसी निश्चित वर्ष के लिए दिये गये हो तब $V_1 = p_1 q_1$ दिये या चालू वर्ष का मूल्य तथा $V_0 = p_0 q_0$ दिये या आधार या निश्चित वर्ष के मूल्य होंगे।

दिये गये या चालू वर्ष के मूल्य का अनुपात निश्चित या आधार वर्ष के अनुपात

$$\frac{V_1 p_1 q_1}{V_0 p_0 q_0} \times 100 \text{ को सापेक्ष मूल्य कहते हैं।}$$

उपरोक्त कीमत, उत्पादन, मात्रा या मूल्य आदि में समस्त परिवर्तन के प्रस्तुत सार को ही तकनीक भाषा में सापेक्ष कहा जाता है।

4.5.2.2 सूचकांक का वर्गीकरण (Classification of Index Number)

सूचकांक के वर्गीकरण के विभिन्न अवधारणाएँ हैं:

1. **चरों के आधार पर**
 - (a) **कीमत सूचकांक:** जब दिये गये चर कीमत है।
 - (b) **मात्रात्मक सूचकांक:** जब दिये गये चर मात्रा हो।
 - (c) **मूल्य सूचकांक:** जब चर मूल्य में दिये गये हो।
 - (d) **उत्पादन सूचकांक:** जब दिये गये चर उत्पादन को प्रस्तुत करता हो।
2. **खुदरा एवं थोक मूल्य सूचकांक के आधार पर**
 - (a) **जीवन लागत सूचकांक:** जहाँ हम खुदरा कीमत का प्रयोग करते हैं।
 - (b) **थोक मूल्य सूचकांक:** जहाँ हम थोक कीमत का प्रयोग करते हैं।
3. **भार पर आधारित या भार के आधार पर**
 - (a) **साधारण या अभारित सूचकांक**

(b) भारित सूचकांक

4. जब मदों या वस्तुओं की संख्या एक से अधिक हो, तब हम एक ही सूचकांक (संयुक्त सूचकांक) ज्ञात करते हैं। इसे निम्नलिखित चार तरीकों से कर सकते हैं:

- (a) सापेक्ष का साधारण औसत ज्ञात करके।
- (b) सापेक्ष का भारित औसत ज्ञात करके।
- (c) साधारण समूहीकरण विधि से।
- (d) भारित समूहीकरण विधि से।

4.5.2.3 आधार वर्ष एवं चालू वर्ष (Base Year and Current Year)

सूचकांक की गणना के लिए हमें दो वर्ष या स्थानों की आवश्यकता होती है। वह वर्ष जिसके मूल्य का हमें तुलना करनी है उसे चालू वर्ष या चालू अवधि कहते हैं और वह निश्चित वर्ष जिससे तुलना मानक या 100 मानकर किया जाता है उसे आधार वर्ष या आधार अवधि कहते हैं। उदाहरण के लिए, यदि 2005 के कीमत की तुलना वर्ष 2004 के कीमत से किया जाए तब 2005, चालू वर्ष तथा 2004 आधार वर्ष कहलायेंगे।

वर्ष 2005 के सूचकांक जो वर्ष 2004 पर आधारित है उसे सामान्यतया I_{01} या P_{01} से इंगित किया जाता है जहाँ 0 आधार वर्ष 2004 एवं 1 चालू वर्ष 2005 को सूचित करते हैं।

4.5.2.4 सूचकांक के मुख्य लक्षण (Main Features of Index Number)

- 1. **संख्या में व्यक्त:** सूचकांक सापेक्ष परिवर्तन को संख्या में व्यक्त करते हैं। जैसे परिवर्तन के उदाहरण इस प्रकार हो सकते हैं उत्पादन में वृद्धि, कीमत में कमी आदि।
- 2. **प्रतिशत में व्यक्त:** सूचकांक को प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है इसलिए इसके परिवर्तन की मात्रा या सापेक्ष को 100 का आधार मानकर ज्ञात करते हैं पर प्रतिशत में परिवर्तन को (%) से इंगित किया जाता है।
- 3. **सापेक्ष माप:** सूचकांक चरों में परिवर्तन को सापेक्ष रूप से मापता है।
- 4. **विशिष्ट औसत:** सूचकांक औसत के विशिष्ट स्थिति को प्रस्तुत करता है, अर्थात् सामान्य या भारित औसत। यह एक विशिष्ट प्रकार का औसत है, क्योंकि औसत चर के मापन इकाई अलग-अलग होते हैं। जबकि साधारण औसत वहाँ संभव होता है जहाँ चरों के मापन इकाईयाँ एक प्रकार का है।
- 5. **तुलना का आधार:** सूचकांक स्वभाव से तुलना योग्य होते हैं। इनका समयान्तराल या जगहों के बीच आदि की तुलना के लिए प्रयोग किया जा सकता है।

4.5.2.5 सूचकांक निर्माण करने के मुख्य चरण (Main Steps of Construction of Index Number)

सूचकांक का निर्माण करने के लिए विभिन्न चरणों में व्याप्त कई समस्याओं का सामना करना पड़ता है जिसका सावधानी पूर्वक परीक्षण करना चाहिए।

- 1. **सूचकांक के उद्देश्य:** सूचकांक के निर्माण में कौन से चरण को लेना है वह सामान्यतया इसके उद्देश्य पर निर्भर करता है। अतः सूचकांक का उद्देश्य स्पष्ट एवं संक्षेप में परिभाषित किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए थोक मूल्य सूचकांक अथवा उपभोक्ता मूल्य सूचकांक।
- 2. **आधार वर्ष का चयन:** आधार वर्ष वह समय अवधि होती है जिसके सापेक्ष वर्तमान वर्ष के मूल्य की तुलना की जाती है। निम्नलिखित तीन प्रकार के आधार वर्ष होते हैं:
 - (a) स्थिर आधार वर्ष (एकल अवधि)
 - (b) स्थिर आधार वर्ष (चयनित अवधि के लिए औसत)
 - (c) श्रृंखला आधारजब आधार का चयन हो तब यह निश्चित होना चाहिए कि वह आधार स्थिर है या फिर श्रृंखला आधार है, एक स्थिर आधार के अन्तर्गत एक ही अवधि होती है।
- (d) आधार अवधि एक सामान्य अवधि होनी चाहिए। सामान्य अवधि से हमारा अभिप्राय है कि वह अवधि जो सभी प्रकार के असामान्य या दैव कारणों जैसे वित्तीय आपात, बाढ़, आकाल, भूकंप, श्रमिकों के हड़ताल, यूद्ध, आदि से मुक्त होना चाहिए।
- (e) आधार अवधि वैसा होना चाहिए जिस अवधि के लिए विश्वसनीय संख्यात्मक समंक उपलब्ध होना चाहिए।

- (f) चालू एवं आधार वर्ष के बीच बहुत अन्तर नहीं होना चाहिए अर्थात् आधार वर्ष को बहुत दूर का नहीं होना चाहिए।
यदि किसी एक समय अवधि को सामान्य समय अवधि के रूप में चयन करने में समस्या हो तब अच्छा होगा दिये गये समय अवधियों का औसत ज्ञात किया जाय।
यदि तुलना की आवश्यकता वर्ष से वर्ष के बीच में हो तब हमें श्रृंखला आधार का चयन किया जाना चाहिए।

3. वस्तुओं या मदों का चयन (Selection of Commodities or item)

- (a) पहली समस्या है कि वस्तुओं का चयन क्योंकि यह संभव नहीं है कि सभी मदों या वस्तुओं को विश्लेषण में सम्मिलित किया जा सके। सूचकांक का उद्देश्य होता है कि वस्तुओं के चयन के निर्णय में सहायता प्रदान करना।
(b) कौन सी वस्तुओं को जोड़ा जाय? एक सावधानी पूर्वक वस्तुओं का चयन निम्न प्रकार से किया जा सकता है:
- यह लोगों के वास्तविक रुचि, आदत एवं रीति रिवाज को प्रस्तुत करता है।
 - यह मानक गुणवत्ता वाली होनी चाहिए और इनके गुणवत्ता में कोई विशेष विचलन नहीं होना चाहिए।
 - इसे आसानी से पहचाना एवं वर्गीकृत किया जाना चाहिए।
 - यह अदृश्य या अस्पर्श योग्य वस्तु नहीं होना चाहिए।

4. प्रतिनिधित्व कीमत का चयन: कीमत उद्धरण को संग्रह करते समय निम्नलिखित बातों पर ध्यान दिया जाना चाहिए:

- (a) वस्तुओं की कीमतों को उद्धृत करने की विधि।
(b) कीमत उद्धरण के प्रकार, यह थोक मूल्य है या खुदरा मूल्य है।
(c) उस स्थान का भी ध्यान दिया जाना चाहिए कि कहाँ से कीमत को उद्धृत किया गया है।
- 5. भारांकन की व्यवस्था:** 'भार' शब्द से तात्पर्य है कि सूचकांक के निर्माण में वस्तुओं को सम्मिलित करने हेतु सापेक्षिक महत्व को अंकित करना। भार देने की दो विधियाँ हो सकती हैं:

- (a) **अस्पष्ट विधि:** इस विधि में, वस्तु के कुछ प्रकार की कई किस्मों का अध्ययन में प्रयोग किया जाता है। ऐसे भार को ही अस्पष्ट भार कहते हैं।
(b) **मुखर विधि:** इस विधि में, वनज/भार वस्तुओं के एक प्रत्यक्ष सबूत के आधार पर निर्धारित किये जाते हैं। एक उचित भार के चयन में ऐसे सबूत का चुनाव एक बृहत् समस्या होती है। भार निर्धारण से संबंधित दूसरी समस्या है कि यह भार स्थिर हो या अस्थिर है।

6. औसत का चुनाव: संयुक्त सूचकांक के लिए किसी भी औसत का चुनाव किया जा सकता है जैसे समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य, माध्यिक एवं बहुलक आदि। औसत का प्रयोग उनके विभिन्न सापेक्षिक गुण एवं दोष पर निर्भर करता है। औसत भारांकित या अभारांकित हो सकते हैं।

7. उचित सूत्र का चुनाव: यद्यपि सूचकांक गणना करने के विभिन्न सूत्र हैं पर उचित सूत्र का चुनाव भी एक विकट समस्या होती है। एक विशिष्ट सूत्र का प्रयोग विशिष्ट प्रकार के सूचकांक व स्थिति के लिए प्रयोग किया जा सकता है।

4.5.3 सूचकांक गणना करने की विधियाँ (Methods of Computation of Index Number)

सूचकांक निर्माण करने की विभिन्न विधियों का वर्गीकरण दो समूहों में किया जा सकता है:

- (a) अभारित सूचकांक
(b) भारित सूचकांक
- अभारित सूचकांक में सभी पदों के लिए समान भार मानते हैं लेकिन भारित सूचकांक में पदों को उनके सापेक्षिक महत्व के आधार पर भार दिया जाता है।
अभारित सूचकांक को पुनः आगे दो विषयवस्तु में वर्गीकृत किया जाता है:
- साधारण समूहीकरण विधि
 - सापेक्षिक विधि के साधारण औसत
- भारित सूचकांक को पुनः आगे दो विषयवस्तु में वर्गीकृत किया जाता है:

- (i) भारित समूहीकरण विधि
- (ii) सापेक्षिक विधि के भारित औसत

4.5.3.1 अभांरित सूचकांक (Unweighted Index Number)

1. **साधारण समूहीकरण विधि:** साधारण समूहीकरण विधि से सूचकांक निर्माण करने के लिए निम्न रूप से आगे बढ़ सकते हैं:
 - (i) प्रचलित वर्ष की वस्तु की कीमत का योग ज्ञात करते हैं, अर्थात् Σp_1 ज्ञात करें।
 - (ii) आधार वर्ष के वस्तु के कीमत का योग की गणना करें, अर्थात् Σp_0 ज्ञात करें।
 - (iii) आधार वर्ष के कीमत योग से प्रचलित वर्ष के कीमत योग को भाग दें हैं और उन्हें 100 से गुणा करें अर्थात्

$$I_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100$$

यहाँ, I_{01} साधारण समूहीकरण सूचकांक है जहाँ (1) प्रचलित वर्ष एवं (0) आधार वर्ष को इंगित करता है।

गुण: यह सूचकांक निर्माण करने की सरलतम विधि है क्योंकि इसे समझना आसान है और गणना में भी सरल है।

अवगुण:

- (i) यह अनुपयुक्त परिणाम देते हैं जब विभिन्न वस्तुओं की कीमतें अलग-अलग इकाईयों में दिया गया हो।
- (ii) चूंकि इस विधि में भार का प्रयोग नहीं करते हैं, फलतः किसी वस्तु को उनके सापेक्षिक महत्व को ध्यान नहीं दिया जाता है।
- (iii) इस विधि से गणना की गई सूचकांक बिना किसी वजह से ही छोटी एवं बड़ी मूल्यों से प्रभावित होती है।

उदाहरण 1:

साधारण समूहीकरण विधि का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित संमकों से कीमत सूचकांक ज्ञात करें।

वस्तुएं	इकाई	प्रति इकाई कीमत रुपये में	
		2000	2004
A	एक किलोग्राम	10	15
B	एक किलोग्राम	40	30
C	एक दर्जन	10	12
D	एक लिटर	5	13

हल:

प्रचलित वर्ष 2004 के लिए आधार वर्ष 2000 के सापेक्ष कीमत सूचकांक, सूत्र का प्रयोग करने पर,

$$I_{01} = \frac{\Sigma p_1}{\Sigma p_0} \times 100$$

जहाँ,

$$\Sigma P_1 = 2004 \text{ में कुल कीमत} = 70$$

$$\Sigma P_0 = 2000 \text{ में कुल कीमत} = 65$$

अतः

$$L_{01} = \frac{70}{65} \times 100 = 107.7$$

यह प्रदर्शित करता है कि आधार 2000 के तुलना प्रचलित वर्ष 2004 में कीमत वृद्धि 7.7% की हुई है।

2. साधारण औसत की सापेक्ष विधि: इस विधि से सूचकांक के निर्माण के लिए निम्नलिखित तरीके से किया जा सकता है:

(a) प्रत्येक वस्तु के लिए सापेक्ष कीमत ज्ञात करते हैं

$$\text{प्रचलित वर्ष के लिए सापेक्ष कीमत} = \frac{\text{प्रचलित वर्ष के लिए कीमत}}{\text{आधार वर्ष के लिए कीमत}} \times 100$$

$$R = \frac{P_1}{P_0} \times 100$$

(b) समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य की गणना करें अर्थात्, प्रथम विधि के (i), सापेक्षिक कीमत को ज्ञात करे और इसे L_{01} से इंगित करते हैं।

(a) जब समान्तर माध्य का प्रयोग करें:

$$L_{01} = \frac{\sum R}{N} = \frac{\sum \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100 \right)}{N}$$

(b) जब गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हैं:

$$L_{01} = \text{Antilog} \left(\frac{\sum \log R}{N} \right)$$

गुण/फायदे

- (i) यह वस्तुओं की इकाइयों से प्रभावित नहीं होती है।
- (ii) यह निरपेक्ष मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है क्योंकि इसमें कीमतों को सापेक्ष कीमत में परिवर्तित किया जाता है।
- (iii) इसमें सभी पदों को बराबर महत्व दिया जाता है और बिना वजह चरम मूल्यों से प्रभावित नहीं होता है।
- (iv) इस विधि से गणना की गई सूचकांक इकाई जांच को संतुष्ट करता है।

अवगुण/सीमाएँ

- (i) जैसा कि यह एक अभारित औसत है फलत सभी मदों को समान महत्व दिया जाता है।
- (ii) इस विधि से गणना की गई सूचकांक, आदर्श सूचकांक के शर्तों को पूरा नहीं करता है।
- (iii) इस विधि में समान्तर माध्य को प्रयोग करने के कारण उच्च एवं निम्न कीमतों से प्रभावित होते हैं।
- (iv) इस विधि गुणोत्तर माध्य के प्रयोग करने पर अधिक श्रम की आवश्यकता होती है।

4.5.3.2 भारित सूचकांक (Weighted Index Number)

साधारण अथवा अभारित सूचकांक में व्याप्त त्रुटियों को दूर करने के लिए, हम प्रत्येक वस्तुओं की कीमतों को उचित तत्व का प्रयोग करते हुए मात्रा या फिर राशि के रूप में भार देते हैं जिन्हें आधार वर्ष में बेची गई हो। दूसरे शब्दों में, इस विधि में विभिन्न वस्तुओं को उनके समूह में महत्व के आधार पर भार दिया जाता है। ये भार उत्पादन के आंकड़े, उपभोग के आंकड़े या वितरण के आंकड़े के रूप में हो

सकते हैं। सूचकांक के निर्माण में मात्रात्मक भार को लिया जाता है। यदि w संबंधित वस्तु का भार है तब कीमत सूचकांक निम्न रूप में दिया जा सकता है,

$$\text{कीमत सूचकांक, } P_{01} = \frac{\sum P_1 \times w}{\sum P_0 \times w} \times 100$$

भारांकित सूचकांक को निम्नलिखित दो वर्गों में वर्गीकृत कर सकते हैं:

(i) भारित सामूहिक सूचकांक

(ii) भारित औसत का कीमत सूचकांक

(i) भारित सामूहिक सूचकांक: भारित सामूहिक सूचकांक में विभिन्न वस्तुओं को उनके समूह में महत्व के आधार पर भार देते हैं और इन भारित राशियों का योग करके भारित समग्र ज्ञात किया जाता है। सूचकांक के निर्माण के लिए, वस्तुओं को भार भिन्न-भिन्न तरीके से दिया जाता है तथा उनका योग भी अलग तरीके से ज्ञात किया जाता है। इनमें से कुछ महत्वपूर्ण भारित समूहित सूचकांक निम्नलिखित दिये गये हैं:

लास्परी के कीमत सूचकांक: लास्परी का कीमत सूचकांक स्थिर आधार वर्ष वाले भार पर आधारित हैं। आधार वर्ष की मात्रा को भार के रूप में प्रयोग किया जाता है। लास्परी का सूत्र निम्न रूप से दिया गया है:

$$\text{लास्परी के कीमत सूचकांक : } LP_{01} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$$

जहाँ, P_1 = प्रचलित वर्ष का कीमत।

P_0 = आधार वर्ष का कीमत।

Q_0 = भार के रूप में प्रयोग की गई आधार वर्ष की मात्रा।

इस सूचकांक में उपर की ओर पक्षपात प्रतीत होती है अर्थात् जब कीमत में वृद्धि हो तब उच्च कीमत वाले वस्तुओं के उपभोग में कमी की प्रवृत्ति परिलक्षित होती है। इस सूचकांक का व्यवहारिक कार्य में बृहत रूप से प्रयोग किया जाता है।

लास्परी का मात्रात्मक सूचकांक सूत्र निम्नलिखित है,

$$Q_{01} = \frac{\sum Q_1 P_0}{\sum Q_0 P_0} \times 100.$$

पाशे का सूचकांक: पाशे का सूचकांक निर्माण की विधि प्रचलित वर्ष की मात्रा पर आधारित है। प्रचलित वर्ष की मात्रा को इस विधि में भार के रूप में प्रयोग किया जाता है। पाशे के सूत्र को निम्न रूप से व्यक्त किया जा सकता है:

$$\text{पाशे का सूचकांक, } P_{01} = \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \times 100$$

जहाँ, P_1 = प्रचलित वर्ष की कीमत।

P_0 = आधार वर्ष की कीमत।

Q_1 = भार के रूप में प्रयोग की गई प्रचलित वर्ष की मात्रा।

यह सूचकांक नीचे की ओर पूर्वाग्रह से प्रभावित होती है। जहाँ वस्तुओं की संख्या अधिक होती है वहाँ इस विधि के सूत्र का बराबर व्यवहार में नहीं लाया जाता है।

पाशे के मात्रा पर आधारित सूचकांक को निम्न रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है,

$$PQ_{01} = \frac{\sum Q_1 P_1}{\sum Q_0 P_1} \times 100$$

डॉरबिश एवं बॉउले विधि: यह विधि लास्परी एवं पाशे विधि का संयुक्त है। यदि लास्परी एवं पाशे के विधि का समान्तर माध्य ज्ञात किया जाये तो वह डॉरबिश एवं बॉउले के सूझाये गये सूचकांक प्राप्त होगा है। यह सूचकांक दोनों, आधार वर्ष एवं प्रचलित वर्ष को भार के रूप में गणना अन्तर्गत सम्मिलित करता है।

$$\begin{aligned}\text{डॉरबिश एवं बॉउले कीमत सूचकांक, } DP_{01} &= \frac{LP_{01} + PP_{01}}{2} \times 100 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} + \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \right] \times 100\end{aligned}$$

फिशर का आदर्श कीमत सूचकांक: फिशर के आदर्श सूचकांक लास्परी एवं पाशे के सूचकांक का गुणोत्तर माध्य होता है। फिशर ने लगभग 100 सूचकांक के सूत्रों का परीक्षण किये और इस सूत्र को व्युत्पन्न किया जिन्हें आदर्श सूचकांक नाम दिया है।

फिशर का आदर्श कीमत सूचकांक,

$$\begin{aligned}FP_{01} &= \sqrt{LP_{01} \times PP_{01}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_1} \right)} \times 100\end{aligned}$$

गुण:

1. यह विधि नीचे एवं उपरी पूर्वाग्रह से मुक्त होता है।
2. इस विधि के अन्तर्गत आधार वर्ष एवं प्रचलित वर्ष दोनों को सम्मिलित किया जाता है।
3. यह सूचकांक समय व्युत्क्रमण परीक्षण एवं तत्व व्युत्क्रमण परीक्षण दोनों को संतुष्ट करता है।

अवगुण:

1. यह सूत्र निर्वचन के लिए कठिन होता है।
2. यह सूचकांक गणना के लिए व्यवहारित सूत्र नहीं है क्योंकि अत्यधिक श्रम खपत करने वाली विधि है।
3. इस विधि में सूचकांक की गणना के कीमत एवं मात्रा दोनों वर्षों के दिये होने चाहिए।

4.5.3.3 मात्रा सूचकांक (Quantity Index Number)

मात्रा सूचकांक उत्पादित या बेची गई वस्तु की भौतिक मात्रा को तुलनात्मक अध्ययन के योग्य बनाता है। ये सूचकांक भी साधारण या भारित होते हैं। भारित सूचकांक में मात्रा कीमत सूचकांक ज्ञात करते हैं। अतः मात्रा सूचकांक की गणना, उपरोक्त सूत्रों में 'P' के जगह 'Q' को परिवर्तित करके आसानी से ज्ञात किया जाता है।

4.5.3.4 मूल्य या मान सूचकांक (Value Price Index)

मूल्य सूचकांक गणना में बहुत आसान है। मूल्य वस्तु की कीमत एवं मात्रा का गुणनफल होता है। एक साधारण मूल्य सूचकांक, प्रचलित वर्ष के मूल्य को आधार वर्ष के मूल्य से विभाजित करने से प्राप्त राशि के बराबर होता है। यदि मूल्य को 100 से गुणा करते हैं तब हमें मूल्य सूचकांक प्राप्त होता है। मूल्य सूचकांक की वांछित सूत्र निम्नलिखित हैं:

$$\begin{aligned}\text{मूल्य सूचकांक, } V &= \frac{\sum P_1 Q_1}{\sum P_0 Q_0} \times 100 \\ \text{साधारण मूल्य सूचकांक, } V &= \frac{\sum V_1}{\sum V_0} \times 100\end{aligned}$$

जहां,

V_1 = प्रचलित वर्ष के मूल्य एवं

V_0 = आधार वर्ष के मूल्य

ऐसे सूचकांकों के भारित सूचकांक नहीं होते हैं क्योंकि यह कीमत या मात्रा में से किसी एक पर ही केन्द्रीत नहीं होते हैं। ये सूचकांक बहुत प्रचलित नहीं हैं क्योंकि कीमत एवं मात्रा दोनों ही स्पष्ट रूप से प्रकट नहीं होता है।

4.5.5 सूचकांक की सीमाएँ (Limitations of Index Number)

इसमें कोई संदेह नहीं कि सूचकांक की तकनीक बहुती उपयोगी यंत्र है। लेकिन इनकी कुछ सीमाएँ भी हैं जिन्हें निर्माणकर्ता को अवश्य ही अपने दिमाग में रखना चाहिए।

मुख्य सीमाएँ निम्नलिखित हैं:

- (i) **अपूर्ण:** सूचकांक एक अनुमान या लगभग संकेत मात्र है जो परिघटनाओं के सापेक्षिक स्तर को इंगित करता है। केवल कीमतों या समकों के सग्रहण में ही त्रुटियाँ नहीं हो सकती हैं अपितु, आधार वर्ष का चयन, प्रतिनिधि वस्तुओं का चयन एवं उपर्युक्त भार का चुनाव आदि में भी विसंगतियाँ हो सकती हैं।
 - (ii) **सूचकांक के निर्माण में समस्याएँ:** सूचकांकों के निर्माण में निम्नलिखित कठिनाईयाँ हैं जैसे:- आधार वर्ष का चयन, पदों या मदों का चयन, रुचि में परिवर्तन, फैशन में बदलाव, एक उचित औसत का चयन आदि।
 - (iii) **निदर्शन त्रुटि:** यह संभव नहीं है कि अध्ययन में हम सभी मदों को सम्मिलित कर सकें फलतः निदर्शन में त्रुटि का होना सामान्य बात है। निदर्शन की कमियाँ सूचकांक के निर्माण में स्पष्ट रूप से झलकती हैं।
 - (iv) **सूचकांक में भी हेर-फेर किया जा सकता है:** किसी अन्य सांख्यिकीय यंत्रों की तरह ही सूचकांक का भी वांछित निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए हेर-फेर किया जा सकता है। आधार वर्ष का चुनाव, विशिष्ट स्रोत से विशेष वस्तुओं एवं उनकी कीमतों के चयन में व्यक्ति अपने विचार अनुसार सूचकांक बना सकता है।
 - (v) **सीमित प्रयोग:** एक उद्देश्य के लिए बना सूचकांक किसी अन्य उद्देश्य या स्थान के लिए प्रयोग में लाया नहीं जा सकता है क्योंकि ऐसे में गलत निष्कर्ष प्राप्त हो सकते हैं।
 - (vi) **उपयुक्त एवं सही आंकड़ों का अभाव:** सूचकांक समकों पर आधारित होते हैं। उपयुक्त एवं सही समंक निश्चित रूप से उपलब्ध नहीं होते हैं। अधिकतर स्थिति में, सूचकांक का निर्माण द्वितीय समकों के आधार पर ज्ञात किया जाता है। इन्हीं कारणों के चलते सूचकांक कई कमियों के शिकार होते हैं एवं विश्वसनीयता की मात्रा कुछ ही स्तर तक होते हैं।
- इन सीमाओं एवं कमियों के बावजूद, आर्थिक एवं व्यवसाय के विभिन्न क्षेत्रों के क्रियाकलापों एवं विश्लेषण में इसका प्रयोग निश्चित रूप से बढ़ता ही जा रहा है।

उदाहरण 2

निम्नलिखित समकों से गणना करें—

1. अभांरित समान्तर माध्य सूचकांक
2. अभांरित गुणोत्तर माध्य सूचकांक
3. प्रचलित वर्ष 2004 के लिए 1990 को आधार वर्ष मानते हुए अभांरित समूहित कीमत सूचकांक।

वस्तुएँ	प्रति विंटल कीमत रुपये में	
	1990	2004
चावल	600	1350
गेहूँ	320	992
चीनी	1040	1560
छाल	540	3240

हल:

आधार वर्ष 1990, की कीमत को (P_0) से एवं प्रचलित वर्ष 2004 के कीमत को (P_1) से इंगित करते हुए गणना सारणी निम्नलिखित हैं:

वस्तुएँ	आधार वर्ष की कीमत (P_0)	प्रचलित वर्ष की कीमत (P_1)	सापेक्षिक कीमत	लघुगणक P

			$P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	
चवल	600	1350	225	2.3522
गेहूं	320	992	310	2.4914
चीनी	1040	1560	150	2.1761
छाल	540	3240	600	2.7282
कुल	$\Sigma P_0 = 2500$	$\Sigma P_1 = 7142$	$\Sigma P = 1285$	$\Sigma \log P = 9.7979$

1. अभांरत समान्तर माध्य सूचकांक

$$P_{01} = \frac{\sum P}{n} = \frac{1285}{4} = 321.3$$

2. अभांरत गुणोतर माध्य सूचकांक –

$$P_{01} = \text{antilog} \left[\frac{\sum \log P}{n} \right] = \text{antilog} \left[\frac{9.7979}{4} \right]$$

$$= \text{antilog} 2.4495 = 281.5$$

3. अभांरत समूहित कीमत सूचकांक –

$$P_{01} = \frac{\sum P_1}{\sum P_0} \times 100 = \frac{7142}{2500} \times 100 = 285.69$$

उदाहरण 3

निम्नलिखित संमकों से भारित समान्तर माध्य सूचकांक एवं भारित गुणोतर माध्य सूचकांक की गणना कीजिए।

वस्तुएँ	प्रति इकाई कीमत रुपये में		भार
	आधार वर्ष	आधार वर्ष	
A	2	3	10
B	4	5	4
C	10	10	5
D	12	9	1

हल:

वस्तुएँ	P_0	P_1	w	$P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	w P	$\log P$	w log P
A	2	3	10	150	1500	2.1761	21.7610
B	4	5	4	125	500	2.0969	9.3876
C	10	10	5	100	500	2.0000	10.0000
D	12	9	1	75	75	1.8751	1.8751
कुल			20		2575		42.0237

भारित समान्तर माध्य सूचकांक –

$$P_{01} = \frac{\sum w P}{\sum w} = \frac{2575}{20} = 128.75$$

भारित गुणोतर माध्य के सूचकांक –

$$P_{01} = \text{antilog} \left[\frac{\sum w \log P}{\sum w} \right] = \text{antilog} \left[\frac{42.0237}{20} \right]$$

$$= \text{antilog } 2.1012 = 126.24$$

उदाहरण 4:

निम्नलिखित समकों का प्रयोग करके भारित सूचकांक की गणना करें।

वस्तुएँ	भार	प्रति इकाई कीमत रुपये में	
		आधार वर्ष	चालू वर्ष
A	5	2.00	4.50
B	7	2.50	3.20
C	6	3.00	4.50
D	2	1.00	1.80

हल:

वस्तुएँ	w	P_0	P_1	$P = \frac{P_1}{P_0} \times 100$	w P
A	5	2.00	4.50	225	1125
B	7	2.50	3.20	128	896
C	6	3.00	4.50	150	900
D	2	1.00	1.80	180	360
कुल	20				3281

भारित समान्तर माध्य सूचकांक –

$$P_{01} = \frac{\sum w P}{\sum w} = \frac{3281}{20} = 164.05$$

उदाहरण 5:

निम्नलिखित गणना करें।

- लास्पेय का कीमत सूचकांक
- पाशे का कीमत सूचकांक
- मार्शल-इजवर्थ कीमत सूचकांक
- डॉरबिश-बॉउले कीमत सूचकांक
- फिशर का कीमत सूचकांक
- लास्पेय का मात्रा सूचकांक
- पाशे का मात्रा सूचकांक
- मार्शल-इजवर्थ मात्रा सूचकांक
- डॉरबिश-बॉउले मात्रा सूचकांक
- फिशर का मात्रा सूचकांक

मदें	कीमत (प्रति क्विंटल रुपये में)		बेची गई मात्रा (क्विंटल में)	
	आधार वर्ष	प्रचलित वर्ष	आधार वर्ष	प्रचलित वर्ष
चावल	400	850	100	120
गेहूं	320	690	20	60
चीनी	720	1600	10	10
दाल	720	2100	10	20

हल:

मर्दे	p ₀	p ₁	q ₀	q ₁	p ₀ q ₀	p ₀ q ₁	p ₁ q ₀	p ₁ q ₁
चवल	400	850	100	120	40000	48000	85000	102000
गेहूँ	320	690	20	60	6400	19200	13800	41400
चीनी	720	1600	10	10	7200	7200	16000	16000
दाल	720	2100	10	20	7200	14400	21000	42000
कुल					60800 ($\sum p_0 q_0$)	88800 ($\sum p_0 q_1$)	135800 ($\sum p_1 q_0$)	201400 ($\sum p_1 q_1$)

लास्परीय का कीमत सूचकांक –

$$P_{01} = \frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times 100 = \frac{135800}{60800} \times 100 = 223.36$$

पाशे का कीमत सूचकांक

$$P_{01} = \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \times 100 = \frac{201400}{88800} \times 100 = 226.80$$

मार्शल-इजवर्थ कीमत सूचकांक

$$P_{01} = \frac{\sum p_1 q_0 + \sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_0 + \sum p_0 q_1} \times 100 = \frac{135800 + 201400}{60800 + 88800} \times 100 = 225.40$$

डॉरबिश-बॉउले कीमत सूचकांक

$$\begin{aligned}
 P_{01} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} + \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1} \right] \times 100 \\
 &= \frac{1}{2} \left[\frac{135800}{60800} + \frac{201400}{88800} \right] \times 100 \\
 &= \frac{1}{2} [2.2336 + 2.2680] \times 100 = 225.08
 \end{aligned}$$

फिशर का कीमत सूचकांक

$$\begin{aligned}
 P_{01} &= \left[\sqrt{\frac{\sum p_1 q_0}{\sum p_0 q_0} \times \frac{\sum p_1 q_1}{\sum p_0 q_1}} \right] \times 100 \\
 &= \left[\sqrt{\frac{135800}{60800} \times \frac{201400}{88800}} \right] \times 100 = 225.07
 \end{aligned}$$

लास्परीय का मात्रा सूचकांक

$$Q_{01} = \frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times 100 = \frac{88800}{60800} \times 100 = 146.05$$

पाशे का मात्रा सूचकांक

$$Q_{01} = \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \times 100 = \frac{201400}{135800} \times 100 = 148.31$$

मार्शल— इजवर्थ मात्रा सूचकांक

$$Q_{01} = \frac{\sum q_1 p_0 + \sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_0 + \sum q_0 p_1} \times 100 = \frac{88800 + 201400}{60800 + 135800} \times 100 = 147.61$$

डॉरबिश—बॉउले मात्रा सूचकांक

$$\begin{aligned} Q_{01} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} + \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1} \right] \times 100 \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{88800}{60800} + \frac{201400}{135800} \right] \times 100 \\ &= \frac{1}{2} [1.4605 + 1.4831] \times 100 = 147.18 \end{aligned}$$

फिशर का मात्रा सूचकांक

$$\begin{aligned} Q_{01} &= \left[\sqrt{\frac{\sum q_1 p_0}{\sum q_0 p_0} \times \frac{\sum q_1 p_1}{\sum q_0 p_1}} \right] \times 100 \\ &= \left[\sqrt{\frac{88800}{60800} \times \frac{201400}{135800}} \right] \times 100 = 147.18 \end{aligned}$$

4.5.6. सूचकांक की उपयोगिता एवं महत्व

सूचकांक का प्राथमिक लक्ष्य है कि चरों के बीच या चर समूहों में सापेक्षिक माप या तिर्यक परिवर्तन की माप किया जा सके जिसे प्रत्यक्ष विधि के द्वारा मापा नहीं जा सके। सूचकांक का प्रमुख लक्ष्य है कि कीमत एवं मुद्रा की क्रय शक्ति का माप करना है जिससे अर्थशास्त्री विभिन्न वर्ष के बारे में गहन ध्यान प्राप्त करते हैं।

आज के दौर में सूचकांक का प्रयोग केवल कीमत में परिवर्तन को मापने के लिए ही नहीं किया जाता है। आर्थिक तत्व जैसे मजदूरी, रोजगार, उत्पादन, व्यापार, मांग, पूर्ति, व्यवसाय की शर्तें, औद्योगिक क्रियाकलाप, वित्तीय समस्याएँ आदि का अध्ययन सांख्यिकीय यंत्रों के द्वारा किया जाता है।

जैसे कि वायुदाब मापी वातावरण में वायु या गैस के दाब को मापती है उसी प्रकार सूचकांक भी आर्थिक दाब को मापता है अर्थात् सूचकांक आर्थिक व्यवहार को मापता है फलतः इसे आर्थिक वायुदाब मापी कहते हैं।

संक्षेप में सूचकांक के मुख्य उपयोग निम्नलिखित हैं:

तुलनात्मक अध्ययन: सूचकांक में किये गये माप के आधार पर विभिन्न समय बिन्दु या जगहों के बीच सापेक्ष परिवर्तन को मापने के लिए इसका प्रयोग किया जाता है। ये अलग-अलग स्वभाव को एक इकाई में जोड़ते हुए सार्थक मूल्य के रूप में व्यक्त करता है।

संमंक का सरलीकरण: सूचकांक आंकड़ों के जटिल माप को सरल माप में परिवर्तित करता है जिससे चरों में परिवर्तन को आसानी से समझा जा सके।

आर्थिक नीति एवं निष्कर्ष निरूपण के लिए दिशा निर्देश प्रदान करता है: सूचकांक का प्रयोग कर्मचारियों के बढ़े हुए लागत सूचकांक के भार को कम करने के लिए, महंगाई भत्ता, बोनस आदि के निर्धारण में प्रयोग किया जाता है। उत्पादन एवं बिक्री आदि के सूचकांक का प्रयोग विभिन्न वस्तुओं से संबंधित देश के सामान्य औद्योगिकीकरण की प्रगति को जानने के लिए किया जाता है। निवेश सूचकांक का प्रयोग कर स्टॉक बाजार के धारणा के विषय में जानकारी प्राप्त किया जा सकता है।

मुद्रा की क्रयशक्ति की माप: सूचकांक मुद्रा की क्रय शक्ति की माप है। मुद्रा कि क्रय शक्ति ही देश की अर्थव्यवस्था की आधारभूत दशा को स्पष्ट करता है।

जीवन लागत सूचकांक परिवर्तन की माप: सूचकांक, विभिन्न समूहों के लोगों के जीवन लागत के परिवर्तन को मापता है।

राष्ट्रीय आय: व्यवसाय स्थिति का सूचकांक एक देश के सामान्य आर्थिक गतिविधियों में परिवर्तन की माप एवं वास्तविक राष्ट्रीय आय के उच्चावचन के बारे में बताता है।

सरकार द्वारा जरूरी नियंत्रण: सूचकांक के आधार पर, सरकार कीमत आदि में नियंत्रण कर सकती है। निवेश, आय, रोजगार, व्यापार, उपभोग आदि से संबंधित निर्णय लेने में सूचकांक महत्वपूर्ण सहायता प्रदान करता है।

प्रकृति एवं प्रवृत्तियों को प्रकट करना: सूचकांक प्रकृति एवं प्रवृत्तियों को प्रकट करता है और भविष्य में आर्थिक प्रवृत्तियों के पूर्वानुमान में सहायक होते हैं।

अपस्फीति में सहायक: अपस्फीति की स्थिति में सूचकांक बहुत सहायक होता है अर्थात् सूचकांक लोगों के वास्तविक आय का पता लगाने में सहायक होता है।

तुलनात्मक अध्ययन को संभव बनाना: सूचकांक का प्रयोग विभिन्न वस्तुओं की कीमतों में कुल विचलनों का तुलनात्मक अध्ययन के लिए किया जाता है जो विभिन्न इकाइयों में माप दिये होते हैं।

सार्वभौमिक उपयोगिता: सूचकांकों का प्रयोग विभिन्न क्षेत्रों में किया जाता है, उदाहरण के लिए, समाजशास्त्र, वाणिज्य, चिकित्सा, विज्ञान, अर्थशास्त्र, मनोविज्ञान, शैक्षणिक शोध संगठन, जीवन बीमा निगम आदि।

सूचकांक की कुछ महत्वपूर्ण विशेषताएँ निम्नलिखित हैं:

- सूचकांक को सापेक्ष परिवर्तन को प्रदर्शित करने के लिए प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है।
- सूचकांक सापेक्ष परिवर्तन को मापता है। वे चरों या चरों के समूह के मूल्य से संबंधित किसी समय अवधियों या स्थानों के बीच सापेक्ष परिवर्तन को मापता है।
- सूचकांक उन परिवर्तनों को मापता है जिन्हें प्रत्यक्ष रूप से मापा नहीं जा सकता है।
- जीवन लागत, व्यवसाय गतिविधियों से संबंधित परिवर्तनों का प्रत्यक्ष माप नहीं हो सकता है। लेकिन, यह संभव है कि इन गतिविधियों में सापेक्ष परिवर्तन को चरों के मूल्य या तत्व जो इनको प्रभावित करता है।

4.5.7. इकाई का सारांश

इस इकाई में हमने सूचकांक की अवधारणा के बारे में अध्ययन किया है, यहाँ सूचकांक के विभिन्न प्रकार के वर्गीकरण के बारे में भी अध्ययन किया है। सूचकांक की उपयोगिता एवं महत्व के बारे में बहुत सरल तरीके से वर्णन किया गया है।

सूचकांक किसी संख्यात्मक आर्थिक आंकड़ों की कीमत या मात्रा का, किसी मानक या आधार मूल्य से तुलना को प्रदर्शित करता है। आधार को सामान्यतया 100 के बराबर मानते हैं और सूचकांक को आधार मूल्य के 100 गुणा अनुपात में व्यक्त किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी वस्तु की कीमत या लागत, प्रचलित वर्ष 1970 में आधार वर्ष 1960 के सापेक्ष दूगुना है तब इसका अर्थ है, इसका सूचकांक 1960 में सापेक्ष 200 है। सूचकांक का प्रयोग विशेष रूप से व्यवसाय गतिविधियों, जीवन लागत एवं

रोजगार का तुलना करने के लिये किया जाता है। वे अर्थशास्त्रीयों को व्यवसाय से संबंधित अवांछित आंकड़ों के प्रभाव को कम करके आसानी से समझने योग्य बनाती है।

अर्थशास्त्र में सूचकांक सामान्यतया काल श्रेणी के सरांशित समूहों से संबंधित चरों को प्रदर्शित करते हैं। कुछ अर्थ में, जबकि, सूचकांक का प्रयोग किसी समय बिन्दु में भौगोलिक क्षेत्रों का तुलनात्मक अध्ययन करते हैं। उदाहरण के लिए देश की क्रय शक्ति समता। सबसे अधिक चर्चित सूचकांक, उपभोक्ता कीमत सूचकांक है जो उपभोक्ताओं के खुदरा कीमत भुगतान के परिवर्तन के माप को प्रस्तुत करता है। इसके अतिरिक्त, जीवन लागत सूचकांक वह सूचकांक है जो समय अवधियों में सापेक्ष जीवन लागत में परिवर्तन की माप है। यदि जीवन लागत सूचकांक से भिन्न सोचें तो हम कहेंगे कि बेहतर सूचकांक वह है जो अज्ञात उपयोगिता फलन से आसानी पूर्वक सूचकांक ज्ञात किया जा सकता है। इस प्रकार बेहतर सूचकांक वह है जो जीवन लागत सूचकांक के लिए दिये गये परिस्थिति के सीमा में लगभग सटीक उतर या अनुमान प्रदान करते हैं।

सूचकांक समस्या से तात्पर्य है कि एक उचित सूचकांक के निर्माण में समय उपरान्त कीमत एवं मात्रा दोनों में होने वाले परिवर्तनों को मापने में आने वाली कठिनाईयों से है। एक क्षण के लिए, मुद्रा स्फीति के लिए कीमत सूचकांक के निर्माण में, अर्थव्यवस्था के वस्तु के कीमत के साथ-साथ उसके स्वभाव से संबंधित समस्या से है। वर्ष 1950 में बनाई गई सूचकांक, 1950 के ही मानक वस्तुओं की टोकरी, वर्ष 2000 के लिए उचित नहीं होगा, क्योंकि इतने लम्बे अन्तराल के कारण ऐसी बहुत सी नई वस्तुओं उपभोग टोकरी में सम्मिलित या कुछ पुरानी वस्तुएँ उपभोक्ता के समूह से हट गई होगी। इसकी मात्रा एवं गुणवत्ता में भी परिवर्तन हो सकते हैं।

इस तरह के समस्याओं का कोई आदर्श हल नहीं है। व्यवहार में खुदरा कीमत सूचकांक, उपभोक्ताओं के “वस्तु की टोकरी” में लगातार कुछ वर्षों में परिवर्तन होते रहना चाहिए। फिर भी, वास्तव में बहुत से आर्थिक सूचकांक बड़े लम्बे अवधियों के लिए लिया जाता है जो सच में तुलना के लिए उपयुक्त नहीं रहता है और यह एक गम्भीर समस्या है जिसे शोधार्थी को आर्थिक इतिहास में अवश्य ध्यान रखना चाहिए।

4.5.8. मुख्य शब्द

- **सापेक्ष कीमत:** जब किसी दिये हुए वर्ष में वस्तु की कीमत को, किसी निश्चित वर्ष के आधार पर प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है तब इसे ही सापेक्ष कीमत कहा जाता है।
- **आधार अवधि:** वह निश्चित वर्ष जिससे तुलना मानक या 100 मानकर किया जाता है, उसे आधार वर्ष या आधार अवधि कहते हैं।
- वह वर्ष जिसके मूल्य का हमें तुलना करनी है उसे चालू वर्ष या चालू अवधि कहते हैं।

4.5.9. सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न

1. साधारण समूही विधि के प्रयोग करके निम्नलिखित संमंकों से साधारण सूचकांक ज्ञात करें:

वस्तुएं	कीमत प्रति क्विंटल रुपये	
	आधार वर्ष, 2001	प्रचलित वर्ष, 2002
गेहूं	80	100
चावल	120	250
तेल	100	150
दाल	200	300

उत्तर: $L_{01} = 160$

2. एक शहरी उद्योग के श्रमिकों से संबंधित सूचनाओं के मदद से उपभोक्ता कीमत सूचकांक की गणना करें।

उपभोग की मर्दे	कीमत सूचकांक P	प्रतिषत व्यय
खाद्य पदार्थ	200	50
कपड़ा	175	10
ईधन एवं बिजली	160	12
आवास	225	15
विविध	150	13

उतर: = 189.95

3. निम्नलिखित सूचकांक के आधार वर्ष को 1990 के लिए परिवर्तित करें।

वर्ष : 1982 1986 1990 1994 1998
सूचकांक (आधार वर्ष 1982) : 100 140 200 260 320

उतर:

$$\text{नई सूचकांक} = \frac{\text{Old index} \times 100}{200}$$

वर्ष	1982	1986	1990	1994	1998
पूरानी सूचकांक (आधार 1982)	100	140	200	260	320
नई सूचकांक	$\frac{100 \times 100}{200} = 50$	$\frac{140 \times 100}{200} = 70$	100	130	160

- सूचकांक का क्या अर्थ है?
- सूचकांक के निर्माण में आने वाली समस्याओं जैसे (i) आधार वर्ष का चयन, और (ii) भार के चुनाव, का उल्लेख करें।
- सूचकांक क्या है? इसकी उपयोगिता को बताएँ?
- सूचकांक क्या है? सूचकांक की क्या विशेषताएँ हैं?

4.5.10 संदर्भ पुस्तकें

- J. K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
- D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
- S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
- एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
- बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
- सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
- अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
- नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
- Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
- Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
- R.P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India Ltd., Delhi, India

खण्ड—IV
इकाई 06
उपभोक्ता मूल्य सूचकांक

सरचना:

- 4.6.1 भूमिका
- 4.6.2 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक
 - 4.6.2.1 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की मान्यताएं
- 4.6.2.2 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के निर्माण के मुख्य सोपान
- 4.6.3 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक निर्माण करने की विधियाँ
 - 4.6.3.1 समग्र व्यय विधि
 - 4.6.3.2 परिवारिक बजट विधि
 - 4.6.3.3 सापेक्षिक कीमत का भारांकित औसत
- 4.6.4 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की उपयोगिता एवं महत्व
- 4.6.4 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की सीमाएँ
- 4.6.6 इकाई का सारांश
- 4.6.7 परिभाषिक शब्दावली
- 4.6.8 मुख्य शब्द
- 4.6.9 अपने प्रगति का मूल्यांकन (बहुविकल्पीय/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 4.6.10 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 4.6.11 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न
- 4.6.12 संदर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप इस योग्य होंगे:

- समयानुसार आर्थिक चरों में किस प्रकार परिवर्तन होता है इसका वर्णन।
- निर्देशांकों के तीन महत्वपूर्ण प्रकारों से परिचित होना: कीमत सूचकांक, मूल्य सूचकांक एवं मात्रा सूचकांक।
- सूचकांक के गलत प्रयोग से होने वाली समस्याओं से बचना।
- विभिन्न प्रकार के सूचकांकों की गणना करना।

4.6.1 भूमिका

सूचकांक एक सांख्यिकीय माप है जो चरों या चरों से संबंधित समूह में परिवर्तन या अंतर को सामान्य रूप से प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है। यह अंतर वस्तु की भौतिक मात्राओं, वस्तुओं की कीमतों या ऐसे अवधारणाएँ जिन्हें 'क्षमता', "बुद्धिमता" या सुन्दरता के रूप में हो सकते हैं। इनमें तुलना समय अवधियों के बीच, स्थानों के बीच, विषयवस्तु के बीच आदि में की जा सकती है। विभिन्न समयों या विभिन्न स्थानों या देशों के तुलनात्मक जीवन निर्वाह लागत सूचकांक, विभिन्न वर्षों में उत्पादन की भौतिक मात्रा या विभिन्न सरकारी कार्यालय की क्षमता से संबंधित सूचकांक हो सकते हैं।

4.6.2 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index)

सूचकांक वह संख्या होता है जिसका प्रयोग किसी विशिष्ट परिघटना के स्तर का उसी प्रकार के घटनाओं से कुछ मानक अवधि के सापेक्ष अध्ययन किया जाता है। दूसरे शब्दों में, सूचकांक वह संख्या है जिसका प्रयोग एक यंत्र की तरह वस्तुओं के किसी समूह के मूल्य, मात्रा, कीमत आदि के बीच, विभिन्न परिस्थितियों में तुलना करने के लिए किया जाता है, उदाहरण के लिए, किसी निश्चित स्थान या समय अवधि और किसी दूसरे स्थान या समय अवधि के लिए। जब तुलना किसी वस्तु के कीमत के संदर्भ में हो तब उसे कीमत सूचकांक कहते हैं, जब तुलना किसी वस्तु की भौतिक मात्रा से संबंधित की जाये तब इसे मात्रात्मक सूचकांक कहते हैं। अन्य सूचकांकों को भी इसी तरह से परिभाषित किया जाता

है। सूचकांक विभिन्न स्थितियों में उत्पन्न होने वाले विचलनों की तुलना का माध्य या औसत है, उदाहरण के लिए समय में परिवर्तन या स्थान में परिवर्तन होना।

‘जीवन लागत सूचकांक’ को ‘उपभोक्ता मूल्य सूचकांक’ के नाम से जानते हैं। जीवन लागत सूचकांक ही देश में उपभोक्ता वस्तुओं की कीमतों में परिवर्तन को मापता है। यह दिये गये समय अवधि में, किसी विशेष उपभोक्ता वस्तुओं एवं सेवाओं के टोकरी के लिए भुगतान की जाने वाली औसत कीमत की माप है।

उपभोक्ता सूचकांक को इस प्रकार बनाई जाती है कि एक समय अवधि में किसी वस्तु एवं सेवाओं के विशेष मात्रा के कीमत में परिवर्तन के कारण अन्ततः उपभोक्ता के द्वारा की गई भुगतान का औसत माप है।

अलग-अलग व्यक्ति भिन्न-भिन्न वस्तुओं का उपभोग तो करता ही है और एक ही वस्तु के अलग-अलग अनुपात में भी उपभोग करते हैं। उपभोक्ता मूल्य सूचकांक हमें विभिन्न क्षेत्रों में रहने वाले विभिन्न वर्ग के लोगों के जीवन स्तर पर वस्तु की मात्रा एवं कीमत में कमी के प्रभाव निर्धारित करने में सहायक होता है। उपभोक्ता कीमत सूचकांक एक महत्वपूर्ण माप है क्योंकि उच्च मजदूरी की मांग जीवन लागत सूचकांक पर आधारित होती है और बहुत से देशों में वेतन का निर्धारण उपभोक्ता मूल्य या जीवन लागत सूचकांक के अनुसार ही करते हैं। जीवन लागत सूचकांक न तो व्यक्ति के जीवन निर्वाह स्तर को मापता है न ही कीमत के अतिरिक्त अन्य कारणों से जीवन लागत में उच्चावचन को बताता है लेकिन, इसका मुख्य लक्ष्य होता है कि कीमत में परिवर्तन के फलस्वरूप देश के किसी विशेष वर्ग के द्वारा किसी निश्चित वस्तु एवं सेवाओं के मात्रा के लिए कितना भुगतान करता है, उसका पता लगाना है।

4.6.2.1 मान्यताएँ: जीवन लागत सूचकांक कुछ मान्यताओं पर आधारित है, जो निम्नलिखित हैं:

- (i) **समान आवश्यकता:** जिन व्यक्तियों के लिए इस सूचकांक का निर्माण किया जा रहा है उनकी आवश्यकताएँ समान होनी चाहिए।
- (ii) **एक ही वस्तु:** आधार वर्ष एवं प्रचलित वर्ष में उपभोग की जाने वाली वस्तुएँ एक ही होनी चाहिए।
- (iii) **वस्तु की मात्रा में कोई परिवर्तन नहीं:** आधार वर्ष एवं प्रचलित वर्ष में उपभोग की जाने वाली वस्तुओं एवं सेवाओं की मात्राओं में कोई परिवर्तन नहीं होना चाहिए।
- (iv) **एक ही कीमत उद्धरण:** यह माना जाता है कि वस्तुओं की कीमत विभिन्न स्थानों में एक ही हो और इनमें अक्सर परिवर्तन नहीं होना चाहिए।
- (v) **औसत में सत्यता:** जीवन लागत सूचकांक औसत रूप में सत्य होना चाहिए।
- (vi) **प्रतिनिधि वस्तुएँ:** जीवन लागत सूचकांक में सम्मिलित वस्तुएँ एवं सेवाएँ किसी वर्ग विशेष के उपभोग का प्रतिनिधित्व करती हो।

4.6.2.2 जीवन लागत/निर्वाह सूचकांक के निर्माण के विभिन्न सोपान:

- (i) **व्यक्तियों के समूह का चयन:** व्यक्तियों के उस समूह का चयन करना आवश्यक होता है जिसके लिए यह निर्देशांक बनाया जाना है अर्थात् निर्धन या धनी, औद्योगिक श्रमिक, शिक्षक आदि और वह क्षेत्र जिसके बारे में सूचकांक बनाई जा रही है।
- (ii) **सूचकांक का लक्ष्य:** सूचकांक के लक्ष्य स्पष्ट रूप से परिभाषित किया जाना चाहिए। उदाहरण के लिए, जब हम शिक्षक की बात करें, तब हमें स्पष्ट करना चाहिए कि वे महाविद्यालय शिक्षक हैं, विद्यालय शिक्षक या सभी वर्ग के शिक्षक।
- (iii) **पारिवारिक बजट के परीक्षण का आयोजन:** अगला सोपान पारिवारिक बजट के परीक्षण के द्वारा उन वस्तुओं एवं सेवाओं का निर्धारण जिनको इस सूचकांक में सम्मिलित करना है और उपभोग की वस्तुओं की कीमत तथा उसकी मात्रा को भी पता लगाना है। इस प्रकार हम उपभोग की संरचना ज्ञात कर सकते हैं। विभिन्न मदों में किये जाने वाले व्यय को पांच वर्गों में वर्गीकृत किया जाता है, जिन्हें आगे पुनः उपवर्गों या उपसमूहों में विभाजित करते हैं। वे इस प्रकार हैं: 1. भोजन, 2. कपड़ा, 3. ईंधन एवं प्रकाश, 4. आवास और 5 अन्य मदें।
- (iv) **कीमत उद्धरण की प्राप्ति:** कीमत उद्धरण का एक अत्यन्त ही महत्वपूर्ण एवं कठिन कार्य है क्योंकि कीमते जगह-जगह पर, एक दूकान से दूसरे दूकान एवं अलग-अलग व्यक्तियों के बीच बदलती है। कीमत उद्धरण के संग्रहण के समय निम्नलिखित बातों पर ध्यान दिया जाना चाहिए:
 - (a) कीमत उद्धरण वहाँ से संग्रहित करें जहाँ से उपभोक्ता वस्तुओं एवं सेवाओं को सामान्यतया खरीदते हैं।

- (b) खुदरा कीमत किसी निश्चित सूचीबद्ध वस्तुओं के स्थिर विशेष मात्रा के लिए ही होनी चाहिए।
 (c) दानों, केन्द्रीय एवं खुले बाजार की कीमतों को गणना में सम्मिलित किया जाना चाहिए।
 (d) यदि उपभोक्ता को किसी प्रकार की कीमत एवं मात्रा में छूट मिल रही हो तो उसका भी जिक्र किया जाना चाहिए।
- (v) **व्यक्तियों की सूची या बनावट तैयार करना:** एक बार जब वस्तु निर्धारित हो जाय तब अगला सोपान उन व्यक्तियों की सूची या वनावट तैयार करना है जिन्हें न्यायदर्श में सम्मिलित करना है। सामान्यतः, जब पारिवारिक बजट का परीक्षण आयोजन करते हैं तब साधारण दैव निदर्शन का ही प्रयोग करते हैं।

4.6.3 उपभोक्ता सूचकांक निर्माण करने की विधियाँ (Methods of Construction of Consumer Price Index Number)

उपभोक्ता सूचकांक निर्माण करने की तीन विधियाँ हैं:

4.6.3.1 समग्र व्यय विधि: [यह विधि लासप्य के सूचकांक पर आधारित है, अर्थात् आधार वर्ष की मात्रा को भार के रूप में सम्मिलित किया जाता है। अर्थात् ($w = Q_0$)]

$$P_{01} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$$

$$\frac{\sum P_1 w}{\sum P_0 w} \times 100$$

- i.
- 4.6.3.2 पारिवारिक बजट विधि:** [यहां सापेक्षिक भार विधि का प्रयोग किया जाता है जहाँ भार आधार वर्ष का मूल्य ($P_0 Q_0$) होता है जिसे V से इंगित करते हैं।]

$$P_{01} = \frac{\sum RV}{\sum V} \times 100 = \frac{\sum \left[\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100 \right) \times (P_0 Q_0) \right]}{\sum P_0 Q_0}$$

$$P_{01} = \frac{\sum P_1 Q_0}{\sum P_0 Q_0} \times 100$$

4.6.3.3 सापेक्षिक कीमत का भारांकित औसत (Average Weightage of Relative Price)

माना कि, I = समूह सूचकांक और W = भार

$$\text{तब, } P_{01} = \frac{\sum IW}{\sum W}$$

6.4 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की उपयोगिता (Usefulness of Consumer Price Index Number)

- यह मूद्रा की कयशक्ति, वास्तविक आय आदि में परिवर्तन को मापने में उपयोगी है।
- ये सरकार को मजदूरी नीति, कीमत नीति, करारोपण नीति एवं सामान्य आर्थिक नीति बनाने में सहायता पहुंचाते हैं।
- किसी विशेष प्रकार के वस्तु एवं सेवाओं के बाजार कीमत का विश्लेषण उपभोक्ता सूचकांक के मदद से किया जा सकता है।
- देश में कर्मचारियों के वेतन एवं श्रमिकों के मजदूरी का निर्धारण उपभोक्ता कीमत सूचकांक के आधार पर किया जाता है। इसलिए, यह मजदूरी संशोधन या महंगाई भता निर्धारित करने के लिए यह बहुत सहायक है।

6.5 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की सीमाएँ (Limitations of Consumer's Price Index Number)

इसमें कोई संदेह नहीं कि सूचकांक के तकनीक बहुती उपयोगी यंत्र है। लेकिन इनकी कुछ सीमाएं भी हैं जिन्हें निर्माण कर्ता को अवश्य ही अपने दिमाग में रखना चाहिए।

मुख्य सीमाएं हैं:

- (vii) **अपूर्ण:** सूचकांक एक अनुमान या लगभग संकेत मात्र है जो परिघटनाओं के सापेक्षिक स्तर को इंगित करता है। केवल कीमतों या समकों के सग्रहण में ही त्रुटियां नहीं हो सकती हैं अपितु, आधार वर्ष का चयन, प्रतिनिधि वस्तुओं का चयन एवं उपर्युक्त भार का चुनाव आदि में भी विसंगतियां हो सकती हैं।
- (viii) **सूचकांक के निर्माण में समस्याएं:** सूचकांकों के निर्माण में निम्नलिखित कठिनाईयां हैं जैसे:— आधार वर्ष का चयन, पदों या मदों का चयन, रूचि में परिवर्तन, फैशन में बदलाव, एक उचित औसत का चयन आदि।
- (ix) **निर्दर्शन त्रुटि:** यह संभव नहीं है कि अध्ययन में हम सभी मदों को सम्मिलित कर सकें फलतः निर्दर्शन में त्रुटि का होना लाजमी सा है। निर्दर्शन की कमियां सूचकांक के निर्माण में स्पष्ट रूप से झलकती हैं।
- (x) **सूचकांक में भी हेर-फेर किया जा सकता है:** किसी अन्य सांख्यिकीय यंत्र के तरह ही सूचकांक का भी वांछित निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए हेर-फेर किया जा सकता है। आधार वर्ष का चुनाव, विशिष्ट स्त्रोत से विशेष वस्तुओं एवं उनके कीमतों के चयन में व्यक्ति अपने विचार अनुसार सूचकांक बना सकता है।
- (xi) **सीमित प्रयोग:** एक उद्देश्य के लिए बना सूचकांक किसी अन्य उद्देश्य या स्थान के लिए प्रयोग में लाया नहीं जा सकता है क्योंकि ऐसे में गलत निष्कर्ष प्राप्त हो सकते हैं।
- (xii) **उपयुक्त एवं सही आंकड़ों का अभाव:** सूचकांक समकों पर आधारित होते हैं। उपयुक्त एवं सही समकों का निश्चित रूप से उपलब्ध नहीं होते हैं। अधिकतर स्थिति में, सूचकांक का निर्माण द्वितीय समकों के आधार पर ज्ञात किया जाता है। इन्हीं कारकों के चलते सूचकांक कई कमियों के शिकार होते हैं एवं विश्वसनीयता की मात्रा कुछ ही स्तर तक होते हैं।
- (xiii) **उपभोक्ता मूल्य सूचकांक केवल परिघटना के सापेक्ष स्तर के सादृश्य संकेत मात्र है।**
- (xiv) **व्यक्ति के उपभोग स्वरूप में परिवर्तन को समायोजन का कोई लक्ष्य नहीं होता है।**
- (xv) **किसी समय विन्दू पर एक विशेष भौगोलिक क्षेत्र एवं व्यक्तियों के किसी निश्चित वर्ग में केवल आर्थिक परिवर्तन का संकेतक है।**
- (xvi) **वस्तुओं के चयन, कीमतों के चयन आदि में त्रुटि एवं पक्षपात की संभावना अधिक होती है।**
इन सीमाओं एवं कमियों के बावजूद, आर्थिक एवं व्यवसाय के विभिन्न क्षेत्रों के क्रियाकलापों एवं विश्लेषण में इसका प्रयोग निश्चित अनुपात में बढ़ता ही जा रहा है।

6.6 इकाई का सारांश

इस इकाई में आपने सूचकांक के अवधारणा के बारे में अध्ययन किया है, यहां सूचकांक के विभिन्न प्रकार के वर्गीकरण के बारे में भी अध्ययन किया है। सूचकांक की उपयोगिता एवं महत्व के बारे में बहुत सरल तरीके से वर्णन किया गया है।

सूचकांक किसी संख्यात्मक आर्थिक आंकड़ों के कीमत या मात्रा का, किसी मानक या आधार मूल्य से तुलना को प्रदर्शित करता है। आधार को सामान्यतया 100 के बराबर मानते हैं और सूचकांक को आधार मूल्य के 100 गुणा अनुपात में व्यक्त किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि किसी वस्तु की कीमत या लागत, प्रचलित वर्ष 1970 में आधार वर्ष 1960 के सापेक्ष दूगुना है तब इसका अर्थ है, इसका सूचकांक 1960 में सापेक्ष 200 है। सूचकांक का प्रयोग विशेष रूप से व्यवसाय गतिविधियों, जीवन लागत एवं रोजगार का तुलना करने के लिये किया जाता है। वे अर्थशास्त्रीयों को व्यवसाय से संबंधित अवांछित आंकड़ों के प्रभाव को कम करके असानी से समझने योग्य बनाती हैं।

अर्थशास्त्र में सूचकांक सामान्यतया काल श्रेणी के सरांशित समूहों से संबंधित चरों को प्रदर्शित करते हैं। कुछ अर्थ में, जबकि, सूचकांक का प्रयोग किसी समय विन्दू में भौगोलिक क्षेत्रों का तुलनात्मक अध्ययन करते हैं। उदाहरण के लिए देश की कय शक्ति समता। सबसे अधिक चर्चित सूचकांक, उपभोक्ता कीमत सूचकांक है जो उपभोक्ताओं के खुदरा कीमत भुगतान के परिवर्तन के माप को प्रस्तुत करता है। इसके अतिरिक्त, जीवन लागत सूचकांक वह सूचकांक है जो समय अवधियों में सापेक्ष जीवन लागत में परिवर्तन की माप है। यदि जीवन लागत सूचकांक से भिन्न सोचें तो हम कहेंगे कि बेहतर सूचकांक वह है जो अज्ञात उपयोगिता फलन से आसानी पूर्वक सूचकांक ज्ञात किया जा सकता है। इस

प्रकार बेहतर सूचकांक वह है जो जीवन लागत सूचकांक के लिए दिये गये परिस्थिति के सीमा में लगभग सटीक उतर या अनुमान प्रदान करते हैं।

सूचकांक समस्या से तात्पर्य है कि एक उचित सूचकांक के निर्माण में समय उपरान्त कीमत एवं मात्रा दोनों में होने वाले परिवर्तनों को मापने में आने वाली कठिनाईयों से है। एक क्षण के लिए, मुद्रा स्फीति के लिए कीमत सूचकांक के निर्माण में, अर्थव्यवस्था के वस्तु के कीमत के साथ-साथ उसके स्वभाव से संबंधित समस्या से है। वर्ष 1950 में बनाई गई सूचकांक, 1950 के ही मानक वस्तुओं की टोकरी, वर्ष 2000 के लिए उचित नहीं होगा, क्योंकि इतने लम्बे अन्तराल के कारण ऐसी बहुत सी नई वस्तुओं उपभोग टोकरी में सम्मिलित या कुछ पुरानी वस्तुएं उपभोक्ता के समूह से हट गई होगी। इसके मात्रा एवं गुणवत्ता में भी परिवर्तन हो सकते हैं।

इस तरह के समस्याओं का कोई आदर्श हल नहीं है। व्यवहार में खुदरा कीमत सूचकांक, उपभोक्तों के "वस्तु की टोकरी" में लगातार कुछ वर्षों में परिवर्तन होते रहना चाहिए। फिर भी, वास्तव में बहुत से आर्थिक सूचकांक बड़े लम्बे अवधियों के लिए लिया जाता है जो सच में तुलना के लिए उपयुक्त नहीं रहता है और यह एक गम्भीर समस्या है जिसे शोधार्थी को आर्थिक इतिहास में अवश्य ध्यान रखना चाहिए।

6.7 मुख्य शब्द

- **सापेक्ष कीमत:** जब किसी दिये हुए वर्ष में वस्तु के कीमत को, किसी निश्चित वर्ष के आधार पर प्रतिशत में व्यक्त किया जाता है तब इसे ही सापेक्ष कीमत कहा जाता है।
- **आधार अवधि:** वह निश्चित वर्ष जिससे तुलना मानक या 100 मानकर किया जाता है, उसे आधार वर्ष या आधार अवधि कहते हैं।
- वह वर्ष जिसके मूल्य का हमें तुलना करनी है उसे चालू वर्ष या चालू अवधि कहते हैं।

6.8 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न

8. साधारण समूही विधि के प्रयोग करके निम्नलिखित संमकों से साधारण सूचकांक ज्ञात करें:

वस्तुएं	कीमत प्रति क्विंटल रूपये	
	आधार वर्ष, 2001	प्रचलित वर्ष, 2002
गेहूं	80	100
चावल	120	250
ग्राम	100	150
दाल	200	300

उत्तर: 160

9. एक शहरी उद्योग के श्रमिकों से संबंधित सूचनाओं के मदद से उपभोक्ता कीमत सूचकांक की गणना करें।

उपभोग की मदें	कीमत सूचकांक P	प्रतिशत व्यय
खाद्य पदार्थ	200	50
कपड़ा	175	10
ईंधन एवं बिजली	160	12
टावास	225	15
विविध	150	13

उत्तर: = 189.95

10. निम्नलिखित सूचकांक के आधार वर्ष को 1990 के लिए परिवर्तित करें।

वर्ष :	1982	1986	1990	1994	1998
सूचकांक (आधार वर्ष 1982) :	100	140	200	260	320

$$\text{उत्तर: नई सूचकांक} = \frac{\text{Old index} \times 100}{200}$$

- उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का क्या अर्थ है?
- उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के निर्माण में आने वाली समस्याओं जैसे (i) आधार वर्ष का चयन, और (ii) भार के चुनाव, का उल्लेख करें।
- उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की उपयोगिता को बताएं?
- उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की क्या विशेषताएं हैं?

6.9 संदर्भ पुस्तकें

- J. K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
- D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
- S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
- एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, शिव पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
- बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
- सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
- अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
- नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
- Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
- Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
- R.P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India Ltd., Delhi, India.

खण्ड—IV

इकाई—07

काल श्रेणी विश्लेषण

सरचना:

- 4.7.1 भूमिका
- 4.7.2 व्यवसाय पूर्वानुमान
 - 4.7.2.1 व्यापार में भविष्यवाणी का उद्देश्य
 - 4.7.2.2 भविष्यवाणी, प्रक्षेपण और पूर्वानुमान
 - 4.7.2.3 व्यापार पूर्वानुमान की विशेषताएँ
 - 4.7.2.4 पूर्वानुमान के सोपान
 - 4.7.2.5 व्यापार पूर्वानुमान की विधियाँ
- 4.7.3 काल श्रेणी
 - 4.7.3.1 काल श्रेणी की उपयोगिता
 - 4.7.3.2 काल श्रेणी के घटक
 - 4.7.3.3 प्रवृत्ति के माप की विधियाँ
- 4.7.3.4 काल श्रेणी का संपदान
- 4.7.3.5 मौसमी परिवर्तन की माप
 - 4.7.3.6. पूर्वानुमान विधियों में काल श्रेणी का प्रयोग
- 4.7.4 इकाई का सारांश
- 4.7.5 मुख्य शब्द
- 4.7.6 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न
- 4.7.7 संदर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त हम इस स्थिति में होंगे:

- व्यापार पूर्वानुमान का वर्णन
- काल श्रेणी की व्याख्या
- काल श्रेणी के घटक
- प्रवृत्तियों का माप
- प्रवृत्ति मापने की विधियों का उल्लेख करना।

4.7.1 परिचय

मांग की परिस्थितियों एवं प्रवृत्ति में परिवर्तन प्रतियोगिता को और तीव्र करती है। भविष्य हमारे लिए अज्ञात होते हैं। यहां तक कि प्रत्येक दिन हम आने वाले कल एवं अनिश्चितता के साथ निर्णय लेने होते हैं। ऐसे व्यासाय मामलों में बड़े जोखिम होते हैं। सभी व्यवसायी, व्यापार गतिविधियों के संदर्भ में भविष्यवाणी करने के लिए मजबूर होते हैं।

आजकल व्यापारियों एवं अर्थशास्त्रियों के द्वारा किसी भी भविष्यवाणी से पूर्व उनसे संबंधित भविष्य के बारे में अनुमान या आकलन करना होता है। उदाहरण के लिए, व्यवसायी यह जानने में रुचि रखते हैं कि अगले वर्ष या अगले पांच या दस वर्ष में उत्पादित वस्तुओं की मांग क्या हो सकती है जिससे अल्प या अधिक उत्पादन की समस्या से बचा जा सके। इसी प्रकार, अर्थशास्त्री यह अनुमान लगाने में रुचि रखते हैं कि आने वाले वर्षों में बढ़ी हुई जनसंख्या से संबंधित समस्या के निदान हेतु उचित योजना बनाया जा सके, जैसे लोगों के लिए रोजगार, खाद्य आपूर्ति आदि। भविष्य के लिए अनुमान करने में पहला सोपान है बीते हुए समय या पूर्व की सूचनाओं को एकत्र करना, जिससे भविष्य के बारे में अनुमान किया जा सके। इस संदर्भ में हम सामान्यतया सांख्यिकीय आंकड़ों का प्रयोग करते हैं जो

विभिन्न समय अन्तरालों में संग्रहित, अवलोकित या दर्ज की जाती है। इस प्रकार के समकों को सामान्य रूप से काल श्रेणी कहते हैं। इस प्रकार, जब हम संख्यात्मक आंकड़ों का अवलोकन विभिन्न समय बिन्दुओं के अनुसार करते हैं तब इसे काल श्रेणी के नाम से जानते हैं।

4.7.2 व्यवसायिक भविष्यवाणी (Business Forecasting)

व्यापारिक भविष्यवाणी से तात्पर्य है कि पूर्व एवं वर्तमान आर्थिक शर्तों के विश्लेषण से प्राप्त निष्कर्ष के आधार पर भविष्य में होने वाले व्यापार शर्तों में परिवर्तन की अति निकट संभावनाएँ क्या हैं? भविष्यवाणी से तात्पर्य भविष्य में किसी घटना के घटने की स्थिति का निश्चित आकलन करने की प्रक्रिया से है और इस प्रक्रिया से प्राप्त कथन व संख्यात्मक तथ्य को ही भविष्यवाणी के नाम से जानते हैं। भविष्य में होने वाली घटनाओं का पता शायद ही लग पाती हैं। किसी घटित होने वाली घटना को आश्वस्त करने के लिए एक व्यवस्थित भविष्यवाणी व्यवस्था काफी सहायक होती है। वैज्ञानिक व्यापार भविष्यवाणी के दो पक्ष होते हैं:

(i). **पूर्व की आर्थिक शर्तों का विश्लेषण:** इस उद्देश्य के लिए, श्रेणी के क्रियाशील घटकों का अध्ययन किया जाता है। निरपेक्ष प्रवृत्ति यह प्रदर्शित करेगी कि किस प्रकार श्रेणी पूर्व परिवर्तित होती थी और भविष्य में लम्बी अवधि में क्या होने की संभावना है? चक्रीय उच्चावचन यह प्रदर्शित करता है कि व्यापार क्रियाओं में तेजी या मन्दी की स्थिति किस प्रकार की होगी? मौसमी उच्चावचन यह इंगित करता है कि व्यापार गतिविधियों में किस प्रकार का मौसमी परिवर्तन होता है।

(ii). **वर्तमान आर्थिक स्थिति का विश्लेषण:** वर्तमान आर्थिक स्थिति के विश्लेषण का मुख्य उद्देश्य उन कारकों का अध्ययन करना है जो पूर्व की गतिविधियों के अनुसार क्रमवार रूप से वर्तमान को प्रभावित करता है। ये कारक, नवप्रवर्तन, फैशन में परिवर्तन, आर्थिक एवं राजनैतिक क्षेत्र में परिवर्तन, सरकार की आर्थिक एवं मौद्रिक नीतियाँ, युद्ध आदि हैं। ये कारक व्यापार चक्र को प्रभावित और उसकी अवधि में परिवर्तन कर सकते हैं। अतः यह आवश्यक है कि भविष्य की संभावित प्रवृत्तियों के अध्ययन के लिए वर्तमान की आर्थिक परिदृश्य को ध्यान में रखा जाय जो भविष्य को कई तरीके से प्रभावित कर सकती है।

4.7.2.1 व्यापार में पूर्वानुमान के उद्देश्य (Objective of forecasting in Business)

पूर्वानुमान, मानवीय व्यवहार का अभिन्न लक्षण है। व्यवसायी भी भविष्य के बारे में सोचता एवं अनुमान करता है। व्यवसाय में सफलता उचित व सही पूर्वानुमान पर निर्भर करता है। वास्तव में, जब व्यवसायी व्यापार में प्रवेश करता है तभी यह भविष्य के लिए पूर्वानुमान करने का प्रयास एवं अधिकाधिक मात्रा तक सफलता एवं विफलता का उत्तरदायित्व लेता है। भविष्य में कई घटनाओं की पूर्व के भांति पूर्णवृत्ति होती है। यह एक अच्छी चीज है। क्योंकि, पूर्व, वर्तमान एवं भविष्य में समान तत्वों के अनुसार सततता ही पूर्वानुमान की सफलता की संभावना को प्रदर्शित करती है। लेकिन, इतिहास सदैव पुनरावृत्ति नहीं होती ठीक उसी प्रकार शायद ही आर्थिक गतिविधियाँ भी अगली साल या आने वाले दस सालों में वही व्यवहार करे जैसा की अनुमान या संभावना व्यक्त किया गया हो। ये सत्य है कि पूर्व की गतिविधियाँ प्रयाप्त मात्रा में भविष्य के पूर्वानुमान करने में सहायता प्रदान करती हैं।

एक व्यवसायी केवल अनुमान के अनुसार निर्णय नहीं ले सकता है। पूर्वानुमान, व्यवसायी को लागत, बिक्री, उत्पादन, लाभ, पूंजी निवेश, कीमत निर्धारण, उत्पादन में विस्तार, साख में प्रसार, बाजार का विकास, स्टॉक में वृद्धि और ऋण में कटौती से संबंधित प्रबंधकीय निर्णय लेने में मदद करते हैं जो कई तरह के अनिश्चितताओं से घिरे होते हैं। इस तरह के निर्णय हाथों-हाथ नहीं लिये जा सकते हैं। ये निश्चित रूप से भविष्य की परिस्थितियों एवं वर्तमान के निहितार्थ पर आधारित होना चाहिए।

जब पूर्वानुमान करते हैं तब हमें यह जानना चाहिए कि भविष्य का सटीक पूर्वानुमान संभव नहीं है। सांख्यिकीय पूर्वानुमान वह यंत्र है जिसमें प्रायिकता के गणितीय सिद्धान्त का प्रयोग करके पूर्वानुमान में त्रुटियों के जोखिम को कम किया जा सकता है।

4.7.2.2 भविष्यवाणी, प्रक्षेपण और पूर्वानुमान

भविष्यवाणी, प्रक्षेपण एवं पूर्वानुमान शब्दों के प्रयोग में काफी भ्रम सा प्रतीत होता है। पूर्वानुमान पूरी तरह से अनुसंधान प्रक्रिया में पूर्व के समंक श्रेणी पर आधारित होते हैं। यह एक शुद्ध यांत्रिक बहिर्वेशन है। प्रक्षेपण एक भविष्यवाणी है जहाँ बहिर्वेश मूल्य किसी निश्चित संख्यात्मक मान्यताओं पर आधारित होते हैं। पूर्वानुमान एक आकलन है जो श्रृंखला से जोड़ती है जिसमें हम बहिर्जात कारकों में रुचि रखते हैं। पूर्वानुमान, बाहिर्जात कारकों के भविष्य मूल्यों का प्रयोग करके प्रक्षेपण या भविष्यवाणी के माध्यम से किया जाता है और इनकी गणना आश्रित चरों की मदद से की जाती है।

4.7.2.3 व्यवसाय पूर्वानुमान की विशेषताएँ

1. **पूर्व एवं वर्तमान की शर्तों पर आधारित:** व्यापार पूर्वानुमान, व्यवसाय के पूर्व एवं वर्तमान आर्थिक स्थितियों पर आधारित होते हैं। भविष्य के पूर्वानुमान के लिए, व्यवसाय के पूर्व एवं वर्तमान आर्थिक स्थितियों से संबंधित विभिन्न समंक, सूचनाएँ, तथ्यों आदि का विश्लेषण किया जाता है।
2. **गणितीय एवं सांख्यिकीय विधियों पर आधारित:** पूर्वानुमान की प्रक्रिया में गणितीय एवं सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग को सम्मिलित किया जाता है। इन विधियों का प्रयोग करके उन प्रवृत्तियों का पूर्वानुमान किया जा सकता है जो भविष्य में हो सकती हैं।
3. **अवधि:** पूर्वानुमान दीर्घ अवधि, लघु अवधि, मध्यम अवधि या किसी विशेष अवधि के लिए किया जा सकता है।
4. **भविष्य का आकलन:** व्यापार पूर्वानुमान, भविष्य में होने वाले संभावित आर्थिक स्थितियों के बारे में पूर्वानुमान करता है।
5. **क्षेत्र:** पूर्वानुमान भौतिक के साथ-साथ वित्तीय भी हो सकते हैं।

4.7.2.4 पूर्वानुमान के सोपान या चरण

व्यापार उच्चावचनों के पूर्वानुमान के अधीन निम्नलिखित सोपान सम्मिलित किये जाते हैं:

(a). पूर्व में क्यों परिवर्तन होते हैं इसे समझना: एक अनुमानकर्ता के लिए सांख्यिकीय पूर्वानुमान के अन्तर्गत यह आधारभूत सिद्धान्त है कि पूर्व में निष्पादन से संबंधित समंकों का प्रयोग किया जाय। वर्तमान दर एवं दर में परिवर्तन ही पूर्वानुमान के लिए आधार तैयार करता है। यदि एक बार यह ज्ञात हो जाय तो विभिन्न गणितीय तकनीकों का विकास करके आसानी से उनका प्रक्षेपण किया जा सकता है। यदि बिना पूर्व के परिवर्तन के कारणों को जाने बिना ही व्यापार उच्चावचन का पूर्वानुमान किया जाय तो वह पूर्ण रूप से कृत्रिम होगा और पूरा परिणाम गणितीय सूत्र के प्रयोग पर आधारित होगी और श्रेणी में विसंगतियाँ भी होंगी।

(b). उस अवस्था को निर्धारित करना जिससे व्यवसाय गतिविधियों को आसानी से मापा जा सके: व्यापार में उच्चावचन के परिवर्तन के कारण को जानने के उपरान्त, यह आवश्यक है कि व्यवसायिक गतिविधि की उस अवस्था को निर्धारित किया जाय जिसका हमें पूर्वानुमान करना है वह वर्तमान गतिविधि के स्तर को किस हद तक प्रभावित करता है।

(c). संग्रहित एवं व्यवस्थित आंकड़े मापन यंत्र के रूप में प्रयोग: सांख्यिकीय आंकड़ों के चयन एवं व्यवसाय उच्चावचन के कारणों के निर्धारण के बीच स्वतंत्र संबंध हैं। सांख्यिकीय आंकड़े तब तक विवेकशील या शुद्ध तरीके से एकत्रित एवं विश्लेषित नहीं किये जा सकते हैं जब तक कि व्यवसाय उच्चावचन को अच्छी तरह से समझा न जाय। यह महत्वपूर्ण है कि व्यवसाय उच्चावचन को इस प्रकार से बताया जाए कि जिस कारण के लिए आंकड़े एकत्र किये जा रहे हों वह सुरक्षित रहे।

(d). समंकों का विश्लेषण: अन्त में, आंकड़ों के विश्लेषण द्वारा परिवर्तन के कारकों को चिन्हित किया जाता है। उदाहरण के लिए, यदि यह महसूस किया जाता है कि दो आर्थिक शक्तियों के संयोग से परिवर्तन संभव है तब सांख्यिकीय आंकड़ों के विश्लेषण के द्वारा पूर्वानुमान किया जा सकता है कि भविष्य में परिवर्तन का स्वभाव क्या रहेगा? निष्कर्ष निकालने की इस विधि को पूर्वानुमान तकनीक कहा जाता है।

4.7.2.5 व्यवसाय पूर्वानुमान की विधियाँ

यद्यपि सभी व्यवसायी अपने व्यापार की स्थितियों के संबंध में पूर्वानुमान करते हैं। इधर कुछ वर्षों में पूर्वानुमान की वैज्ञानिक विधियाँ विकसित की गयी हैं। वैज्ञानिक पूर्वानुमान, सांख्यिकी पर आधारित है। प्रबंधकीय पूर्वानुमान की समस्या में बढ़ते हुए विविधता को नियंत्रण करने के लिए हाल के वर्षों में विभिन्न पूर्वानुमान तकनीकों का विकास हुआ है। पूर्वानुमान तकनीक में विविधता सामान्य विशेषज्ञों के अनुमान से सघन समंक के जटिल विश्लेषण में पाया जाता है। प्रत्येक तकनीक का विशेष उपयोग है

और किसी विशेष परिस्थिति के लिए उचित तकनीक के चयन में सावधानी होनी चाहिए। पूर्वानुमान की विधियों का प्रयोग करने से पहले निम्नलिखित प्रश्नों का उत्तर दिया जाना चाहिए:

1. पूर्वानुमान का उद्देश्य क्या है और किस प्रकार इसका प्रयोग करना है?
2. जिस उद्देश्य के लिए पूर्वानुमान होगा उस व्यवस्था की गतिशीलता और घटक क्या है?
3. पूर्व की सूचनायें भविष्य के पूर्वानुमान के लिए कितना महत्वपूर्ण है?

4.7.3 काल श्रेणी विश्लेषण

काल श्रेणी एक संख्यात्मक मूल्यों का समुच्च है जो दिये गये चरों के लगातार समय अवधियों को प्रदर्शित करता है। अर्थात् चरों के सापेक्ष दिये गये आंकड़ों को काल क्रम में रखते हैं। सामान्यतया समय अन्तराल समान लिया जाता है। उदाहरण के लिए, देश में गेहूँ का वार्षिक उत्पादन, शहर के प्रति घंटा तापमान, मासिक बिजली बिल आदि। सभी आंकड़े जैसे, औद्योगिक उत्पादन, कृषि उत्पादन, निर्यात, आयात, दूध उत्पादन आदि को समयानुसार क्रम में सजा कर लिखा जा सकता है।

एक दिये गये काल श्रेणी में यह उम्मीद किया जाता है कि:

- (a). काल श्रेणी में विचलन या विचरण लाने वाले शक्तिओं का अध्ययन किया जाना चाहिए, और
- (b). दिये गये समय अवधि में परिघटनाओं के व्यवहार के बारे में अध्ययन किया जाना चाहिए।

उदाहरण के लिए, एक दूर दर्शन उत्पादन कम्पनी की बिक्री को हजार के इकाई में निम्न रूप से प्रदर्शित किया जा सकता है,

वर्ष	2005	2006	2007	2008	2009	2010
बिक्री संख्या (हजार में)	12	14	16	12	10	18

उपरोक्त आंकड़ों का जब विश्लेषण करते हैं तब हमें बिक्री से संबंधित कुछ प्रवृत्तियाँ ज्ञात होती हैं। उदाहरण के लिए, कम्पनी यह जानना चाहेगी कि क्यों वर्ष 2008 एवं 2009 में दूरदर्शन के बिक्री में कमी आई और 2010 में पुनः बढ़ जाती है। अर्थात् कम्पनी उन विभिन्न शक्तियों को जानना चाहेगी जो बिक्री को प्रभावित करती है।

चयनित चरों के मूल्यों में परिवर्तन विभिन्न समय बिन्दुओं में कई शक्तियों के प्रभाव के कारण होता है। चरों के मूल्यों में होने वाले समस्त शक्तियों के विश्लेषण को सामान्यतया काल श्रेणी विश्लेषण के नाम से जानते हैं। मोटे तौर पर चरों के मूल्यों में परिवर्तन को चार प्रकारों में विभाजित किया जाता है:

- (a) परिवर्तन जो सामान्यतया चरों के मूल्यों या आंकड़ों में सामान्य प्रवृत्ति से बढ़ती या घटती है।
- (b) वैसा परिवर्तन जो जलवायु, मौसम की स्थिति, त्योहार आदि में परिवर्तन के कारण से होती है।
- (c) परिवर्तन जो आर्थिक मन्दी और तेजी के कारण होती हैं।
- (d) परिवर्तन जो कुछ अप्रत्याशित शक्तियों जैसे बाढ़, संक्रमण, भूकम्प आदि के कारण होता है।

4.7.3.1 काल श्रेणी की उपयोगिता

काल श्रेणी के संभावित उपयोग निम्नलिखित हैं:

1. विभिन्न समय अवधियों में चरों में परिवर्तन का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है। ये चर निर्यात से संबंधित आंकड़े, औद्योगिक उत्पादन की मात्रा आदि हो सकते हैं।
2. काल श्रेणी का प्रयोग करके पूर्वानुमान किया जा सकता है। प्रयाप्त दीर्घकालीन अवधि में चरों में होने वाले विचलन एवं व्यवहार का अध्ययन किया जा सकता है, यह चरों के भविष्य में व्यवहार को जानने में भी मदद कर सकता है। जबकि, ऐसे पूर्वानुमान सार्थक तभी होते हैं जब पूर्वानुमान की अवधि एक सामान्य अवधि हो। उदाहरण के लिए, भारत सरकार पंचवर्षीय योजनाओं का निर्माण काल श्रेणी का अध्ययन एवं पूर्वानुमान करके ही करती है।
3. काल श्रेणी का अध्ययन हमें चरों के उत्तरार्द्ध व्यवहार के विश्लेषण में भी सहायक होते हैं। ये उन शक्तियों के पहचान में भी मदद करती है जो इसके व्यवहार को प्रभावित करते हैं।

4.7.3.2 काल श्रेणी के घटक

किसी समय अवधि के व्यवहार को ही काल श्रेणी अवधि की गति या चाल के नाम से जानते हैं। काल श्रेणी को निम्नलिखित चार घटकों में वर्गीकृत करते हैं।

4.7.3.2.1 दीर्घकालीन प्रवृत्ति या निरपेक्ष प्रवृत्ति

यह श्रेणी के सीधी या लगातार दीर्घकालीन वृद्धि या कमी को प्रदर्शित करती है। इस गति को प्रवृत्ति वक्र के द्वारा समूहित किया जा सकता है। यदि यह वक्र एक सीधी रेखा है, तब इसे प्रवृत्ति रेखा कहते हैं। यदि चरों में वृद्धि एक समय के दीर्घकालीन अवधि में हो तब इसे ऊपर की ओर प्रवृत्ति कहते हैं। यदि चरों में कमी एक समय के दीर्घकालीन अवधि में हो, तब इसे नीचे की ओर प्रवृत्ति कहते हैं। यदि चरों में परिवर्तन की गति सीधी रेखा के सापेक्ष उपर या नीचे की ओर घूमती रहे तब इसे रैखिक प्रवृत्ति कहते हैं, अन्यथा इसे गैर रेखीय प्रवृत्ति कहते हैं।

4.7.3.2.2 मौसमी परिवर्तन

जब काल श्रेणी समकों में एक वर्ष के लघु अवधि के समय में अवधिक स्वभाव एवं लगातार परिवर्तन या विचलन हो तब इन्हें मौसमी विचलन कहते हैं। परिभाषा के अनुसार, इस प्रकार के विचलनों को सटीक और पूर्वानुमान किया जा सकता है।

उदाहरण:

- प्रत्येक वर्ष, वर्षा ऋतु के उपरान्त या शरद ऋतु में सब्जियों के कीमत में कमी तथा जैसे ही गर्मी आती है इनके कीमत में वृद्धि हो जाती है।
- तेलीय फसलों के कटने के उपरान्त खाद्य तैल के बीज के कीमत में कमी आती है जबकि कुछ समय के उपरान्त इनके कीमत में वृद्धि हो जाती है।

4.7.3.2.3 चक्रीय विचलन

जब चरों के मूल्यों में कमी या वृद्धि लम्बे समय से दोलन की संगतता को प्रदर्शित करती है तब इसे चक्रीय विचलन कहते हैं। चूंकि इसमें दोलन दीर्घकालीन समय अवधि में होते हैं इसलिए काल श्रेणी के आंकड़े एक वर्ष से ज्यादा अवधि के होते हैं। यह दोलन प्रवृत्ति वक्र या प्रवृत्ति रेखा के सापेक्ष होता है। एक चक्रीय अवधि, दो क्रमागत चोटियों या उंचाई या दो क्रमागत नाद के बीच के समय दूरी को इंगित करता है।

4.7.3.2.4 दैव विचलन

इसे अनियमित चलन या गति कहते हैं। वह गति जो सामान्यतया संक्षिप्त समय अवधि, बिना किसी क्रम और स्वभाव से अप्रत्याशित हो, अनियमित गति कहलाती है। इस प्रकार की गति के लिए किसी निश्चित समय अवधि या क्रम के होने की निश्चितता नहीं होती है। उदाहरण के लिए राष्ट्रीय हड़ताल का खाद्य सामग्री, भूकंप का खाद्य पदार्थ पर प्रभाव आदि। इस प्रकार के काल श्रेणी के व्यवहार का अध्ययन करना बहुत कठिन कार्य होता है।

4.7.3.3 प्रवृत्ति को मापने की विधियाँ

काल श्रेणी के प्रवृत्ति को मापने के लिए निम्नलिखित विधियों का हम अध्ययन करेंगे।

- हस्तमुक्त या रेखीय विधि
- अर्ध औसत विधि
- गतिमान औसत विधि
- न्यूनतम वर्ग विधि।

4.7.3.3.1 मुक्तहस्त या रेखीय विधि

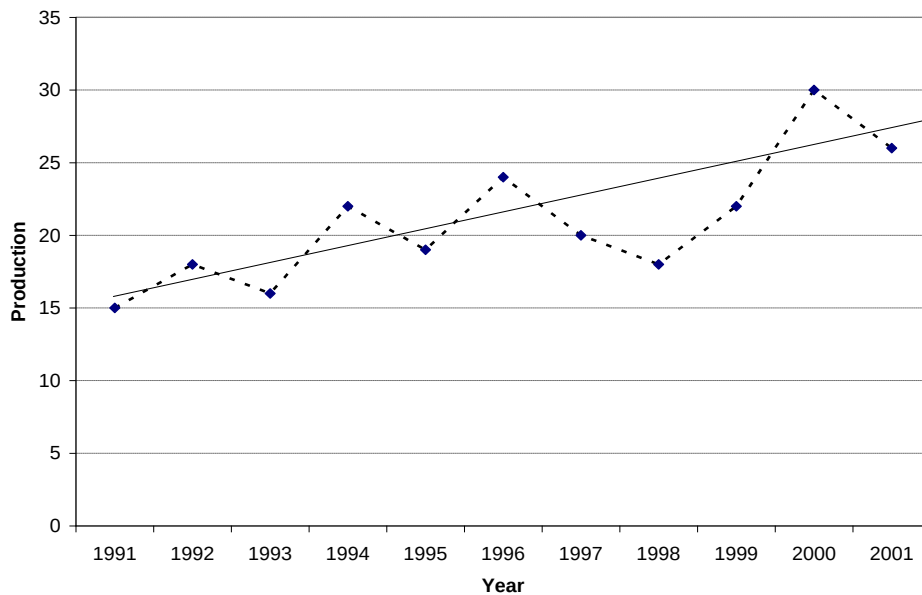
यह प्रवृत्ति वक्र खींचने की सबसे आसान व सरल विधि है। दिये गये चरों के मूल्यों को समय के सापेक्ष ग्राफ पेपर पर बिन्दुओं को प्लॉट करके उन्हें मिलाते हैं। काल श्रेणी के ग्राफ पर अवलोकन के द्वारा प्रवृत्ति रेखा को फिट करते हैं। इस विधि से प्रवृत्ति रेखा को मनमाने ढंग से फिटिंग किया जाता है। प्रवृत्ति रेखा सामान्यतया इस तरह से खींची जाती है कि दोनों तरफ उच्चावचनों की संख्या लगभग बराबर होना चाहिए। प्रवृत्ति रेखा एक चिकनी या स्वच्छ रेखा होनी चाहिए। हस्तमुक्त या रेखीय विधि कि कुछ सीमाएँ हैं। वे इस प्रकार हैं:

- यह व्यक्तिगत न्याय अथवा विचार पर निर्भर करता है।
- चूंकि प्रवृत्ति वक्र मनमाने ढंग से खींचे जाते हैं फलतः इसका प्रयोग किसी भी प्रकार के पूर्वानुमान के लिए नहीं किया जा सकता है।

उदाहरण: नीचे दिये गये समकों से मुक्तहस्त विधि से प्रवृत्ति रेखा ज्ञात करें।

वर्ष	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000	2001

हल:



चित्र संख्या: 4.7.1

4.7.3.3.2 अर्द्ध-औसत विधि

अर्द्ध औसत विधि के मदद से रैखिक प्रवृत्ति की फिटिंग निम्नलिखित रूप से किया जाता है:

- जब वर्षों की संख्या सम होते हैं: काल श्रेणी के आंकड़ों को दो बराबर भागों में विभक्त किया जाता है। प्रत्येक भागों के मदों या पदों का योग ज्ञात करके उसे पदों की संख्या से भाग देते हैं जिससे हमें दो सामान्तर माध्य ज्ञात होते हैं। प्रत्येक औसत को लिये गये समय अवधि के मध्य व केन्द्र में अंकित करते हैं जिससे इसे ज्ञात किया गया है और इसे ग्राफ पेपर में चिन्हित किया जाता है। इन बिन्दुओं को छूते हुए एक सीधी रेखा खींची जाती है। यह वांछित प्रवृत्ति रेखा है।
- वर्षों की संख्या विषम: जब वर्षों की संख्या विषम हो तब बीच के वर्ष को श्रेणी से विलुप्त कर दिया जाता है ताकि दो बराबर भागों में विभाजित किया जा सके। इसके उपरान्त प्रथम चरण के क्रियाओं की पुनरावृत्ति की जाती है।
किसी भविष्य वर्ष के लिए प्रवृत्ति मूल्य के पूर्वानुमान, अवधिक वृद्धि को वर्षों की संख्या से गुणा करके एवं दिये गये श्रृंखला के प्रवृत्ति मूल्य को ज्ञात किया जा सकता है।

गुण:

- यह एक सरल विधि है।
- पूर्व एवं भविष्य के वर्ष के आकलन के लिए प्रवृत्ति रेखा को दोनों तरफ फैलाया जा सकता है।
- यह एक उद्देश्य या व्यक्तिपरक विधि है, जिसे कोई भी व्यक्ति लागू करके एक ही परिणाम प्राप्त कर सकता है।

अवगुण:

- अर्द्ध औसत विधि, प्लॉटेड बिन्दुओं के बीच सीधी रेखा के सम्बन्ध पर आधारित है जबकि वास्तव में ऐसा हो भी सकता है और नहीं भी हो सकता है।
- यह विधि सामान्तर माध्य की सीमा से बनी है। यह विधि उस समय उपयुक्त नहीं होगी जहाँ श्रेणी के चरम चर मूल्य काफी छोटा या काफी बड़ा हो।
- यह आश्वासन नहीं देता है कि चक्रीय विचलन के प्रभाव को विमुक्त किया गया है।

4.7.3.3.3 चलायमान औसत की विधि

इस विधि का प्रयोग काल श्रेणी को स्वच्छ अथवा चिकना बनाने के लिए किया जाता है। अर्थात्, चलायमान औसत की विधि से प्राप्त परिणाम, आंकड़ों में विचलन व उच्चावचन को अल्प या कम बना देना है।

(a) **जब चलायमान औसत की अवधि विषम हो:** इस विधि से प्रवृत्ति को ज्ञात करने के लिए, हम निम्नलिखित तरीकों का प्रयोग करते हैं:

- (i) काल श्रेणी को प्राप्त करते हैं।
- (ii) 3 वर्षों या 5 वर्षों आदि, जैसे चलायमान औसत का चयन करते हैं।
- (iii) दिये गये समय अवधि के लिए चलायमान औसत की गणना करें।

यदि चलायमान औसत की चौड़ाई 3 वर्ष है अर्थात् 3 वर्षीय चलायमान औसत की गणना करते हुए, कुल चलायमान की गणना निम्न रूप से किया जाता है:

$$a+b+c, b+c+d, c+d+e, d+e+f, \dots$$

5-वर्षीय चलायमान औसत के लिए, कुल चलायमान की गणना निम्न रूप से की जाती है:

$$a+b+c+d+e, b+c+d+e+f, c+d+e+f+g, \dots$$

जिस अवधि के लिए चलायमान औसत की गणना की जाती है उस स्पैन के केन्द्र में इसे लिखा जाता है।

- (iv) चलायमान औसत की गणना, चलायमान कुल के द्वारा चलायमान औसत के अवधि की चौड़ाई एवं इनसे गणना की गई कुल चलायमान को अवधि के फैलाव के केन्द्र में अंकित किया जाता है। इन चलायमान औसतों को प्रवृत्ति मूल्य भी कहते हैं।

इन प्रवृत्ति मूल्यों को प्लॉट करे (यदि इच्छा हो) तो वो प्रवृत्ति वक्र ज्ञात किया जा सकता है जिसके मदद से प्रवृत्ति की बढ़ती या घटती हुई स्वभाव को निर्धारित किया जा सकता है।

यदि आवश्यकता हो तो लघु-अवधि की उच्चावचन की गणना प्रवृत्ति मूल्यों को वास्तविक मूल्यों से घटा कर प्राप्त की जा सकती है।

व्याख्यात्मक उदाहरण:

तीन वर्षीय चलायमान औसत का प्रयोग करते हुए, प्रवृत्ति मूल्य एवं लघु अवधि उच्चावचन की गणना निम्नलिखित समकों के लिए करें।

वर्ष	उत्पादन (हजार टन में) Y
1988	21
1989	22
1990	23
1991	25
1992	24
1993	22
1994	25
1995	27
1996	26

हल: प्रवृत्ति मूल्यों की गणना

वर्ष	उत्पादन (हजार टन में) Y	3-वर्षीय चलायमान समग्र	3- वर्षीय चलायमान औसत Y_e	लघु-कालिक उच्चावचन ($Y-Y_e$)

1988	21	—	—	—
1989	22	66	22.00	0
1990	23	70	23.33	- 0.33
1991	25	72	24.00	1.00
1992	24	71	23.67	0.33
1993	22	71	23.67	- 1.67
1994	25	73	24.33	0.67
1995	27	79	26.33	0.67
1996	26	—	—	—

(b) जब चलायमान औसत अवधि सम है: जब चलायमान औसत की अवधि सम हो (4-वर्ष आदि), तब हम चलायमान औसत की गणना निम्नलिखित चरणों से प्राप्त कर सकते हैं:

- काल श्रेणी को ज्ञात करें।
- चलायमान औसत के अवधि के चौड़ाई को ज्ञात करें। माना की यहा चलायमान औसत की अवधि 4-वर्ष है।
- 4-वर्षीय चलायमान समग्र की गणना करें और उनके फैलाव के बीचोबीच अंकित करें। चार वर्षीय चलायमान समग्र की गणना निम्न प्रकार से की जा सकती है:

$$a + b + c + d, b + c + d + e, c + d + e + f, \dots$$

- 4-वर्षीय चलायमान औसत की गणना करें और उन्हें समय फैलाव के केन्द्र में अंकित करें। यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि केन्द्र में अंकित करना असुविधाजनक होगा, क्योंकि चलायमान औसत इस तरह से रखे गये हैं कि वह मूल्य वास्तविक काल अवधि से सुमेलित नहीं होंगे।
- दो-अवधि चलायमान औसत की गणना करें एवं उन्हें मध्य अवधि पर अंकित करें। इस प्रक्रिया को चलायमान औसत का केन्द्रीकरण कहते हैं।

चलायमान औसत की विधि के गुण

- यह एक सरल विधि है।
- यह विधि वस्तुपरक अर्थ में है जिससे कोई भी व्यक्ति समस्या के हल करने पर एक ही उत्तर प्राप्त होगा।
- इस विधि का प्रयोग करके निरपेक्ष प्रवृत्ति के अतिरिक्त मौसमी विचलन, चक्रीय विचलन एवं अनियमित विचलन का भी निर्धारण किया जा सकता है।
- इस विधि में लोचशीलता का समावेश होता है अर्थात् कुछ अंकों को संमंकों में जोड़ा जा सकता है क्योंकि पूरी गणना में कोई परिवर्तन नहीं होते हैं।
- यदि चलायमान औसत की अवधि, चक्रीय उच्चावचन की अवधि के साथ दिये गये आंकड़े सुमेलित हो तब ऐसे उच्चावचन स्वतः ही विमुक्त हो जाते हैं।

सीमाएँ:

- चर मूल्यों एवं काल या समय के बीच कोई फलनात्मक संबंध नहीं होते हैं। इस प्रकार, यह विधि समय के आधार पर चर मूल्यों के पूर्वानुमान एवं भविष्यवाणी में सहायक नहीं होते हैं।
- इस विधि के अन्तर्गत कुछ वर्षों के शुरुआती एवं कुछ वर्षों के अन्तिम में चर मूल्यों के प्रवृत्ति नहीं प्रलक्षित होते हैं। उदाहरण के लिए, 5-वर्षीय चलायमान औसत में प्रथम दो वर्ष एवं अन्तिम दो वर्षों के लिए चरों के प्रवृत्ति नहीं होंगे।

- (c) गैर-रेखीय प्रवृत्ति के स्थिति में, इस विधि से ज्ञात की गई चर मूल्य एक अथवा अन्य दिशा में पक्षपात हो सकती है।
- (d) चलायमान औसत की अवधि का चयन एक जटिल समस्या है। अतः अवधि के चयन करते समय विशेष ध्यान करना चाहिए, विशेष रूप से, जब उस अवधि में किसी प्रकार के व्यवसायिक चक्र नहीं होता हो।

4.7.3.3.4 न्यूनतम वर्ग की विधि

इस विधि के अन्तर्गत प्रवृत्ति वक्र का निर्धारण गणितीय समीकरण के द्वारा बिठाया जाता है। यह विधि अधिक उचित एवं सटीक और इसका प्रयोग प्रायः पूर्वानुमान के लिए भी किया जा सकता है। दिये गये समंक माला का प्रयोग करके इस विधि से या तो सीधी रेखा या परवलय वक्र ज्ञात किया जा सकता है। माना कि y , Y का वास्तविक मूल्य है और y_c , Y का आकलित मूल्य है जिसे दिये गये समय चर मूल्य X के द्वारा ज्ञात किया जाता है।

माना कि $y = a + bx$ एक सीधी रेखा है जिससे प्रवृत्ति को ज्ञात करना है। a और b के मूल्यों को इस प्रकार ज्ञात किया जाये कि Y के वास्तविक एवं आकलित मूल्यों के बीच अन्तर न्यूनतम हो अर्थात् $\sum (y - y_c)^2$ न्यूनतम है, जहाँ $\sum (y - y_c) = 0$, की शर्त संतुष्ट होती हो, को ही न्यूनतम वर्ग विधि के नाम से जानते हैं। इस विधि से प्राप्त रेखा को 'सर्वोपयुक्त रेखा' कहते हैं।

किसी दिये गये काल श्रेणी समंक के लिए, प्रवृत्ति रेखा ज्ञात करने हेतु, निम्नलिखित सामान्य समीकरणों के मदद से a और b के मूल्यों को निकाला जाता है:

$$\sum y = Na + b\sum x$$

$$\sum xy = a\sum x + b\sum x^2$$

जहाँ, N दिये गये काल श्रेणी के समंकमाला के जोड़ों की संख्या है।

यहाँ, Y -अक्ष पर a , रेखा का अवरोधन या इंटरसेप्ट है और b रेखा के ढाल है, (यदि $b > 0$) हो तब, b को वृद्धि दर या (यदि $b < 0$) हो तो b घटते दर के नाम से भी जानते हैं। b , X के मूल्य में प्रति इकाई परिवर्तन के फलस्वरूप Y के मूल्यों में होने वाले परिवर्तन को इंगित करता है।

प्रत्यक्ष विधि

- (a) दिये गये वर्षों को प्राकृत संख्या (1, 2, 3,...) में परिवर्तित करें एवं इन्हें x से इंगित करें तथा $\sum x$ ज्ञात करें।
- (b) x के मूल्य के वर्ग को ज्ञात करें और $\sum x^2$ की गणना करें।
- (c) x के संगत मूल्यों को y के मूल्यों से गुणा करें एवं $\sum xy$ को ज्ञात करें।
- (d) y के मूल्यों को जोड़े और $\sum y$ को ज्ञात करें।
- (e) इन मूल्यों को दोनों सामान्य समीकरणों में रखें और a और b के मूल्य के लिए हल करें।
- (f) a और b के मूल्यों को $y = a + bx$ में रखें और तब x के विभिन्न मूल्यों के लिए प्रवृत्ति मूल्यों ज्ञात करें।

लघु विधि

किसी दिये गये समय बिन्दु को मूल मानते हुए प्रथम वर्ष से x चर की माप करें; लेकिन समय को मूल बिन्दु के रूप में मध्य बिन्दु से गणना करें ताकि $\sum x = 0$, जब $\sum x = 0$, तब सामान्य समीकरण निम्न रूप से हो सकते हैं:

$$\sum y = Na \text{ अतः, } a = \frac{\sum y}{N} \text{ और}$$

$$\sum xy = b\sum x^2 \text{ अतः, } b = \frac{\sum xy}{\sum x^2}$$

गुणः

- यह एक पूर्णतः वस्तुपरक विधि है।
- यह विधि पूरी समय अवधि के लिए प्रवृत्ति मूल्य प्रदान करती है।

3. इस विधि का प्रयोग भविष्य के प्रवृत्ति पूर्वानुमान के लिए किया जाता है क्योंकि प्रवृत्ति रेखा मूल्यों एवं समय के बीच फलनात्मक संबंध को स्थापित करते हैं।

अवगुणः

1. इसमें बहुत सारे गणना की आवश्यकता होती है और एक जटिल एवं कठिन विधि प्रतीत होती है।
2. यहाँ तक एक भी पद मूल्य को जोड़ने के लिए नये समीकरण का निर्माण करना पड़ता है।
3. इस विधि के द्वारा भविष्य के पूर्वानुमान प्रवृत्ति मूल्य, मौसमी, चक्रीय या अनियमित विचलन आदि पर आधारित पूर्वानुमान को नजर अंदाज करता है।

गैर-रेखीय प्रवृत्ति

न्यूनतम वर्ग की विधि द्वारा एक अणुवृत्त आकार का वक्र या गैर-रेखीय वक्र फिटिंग

जब काल श्रेणी के आंकड़े रेखीय प्रवृत्ति के अनुरूप नहीं हो तब हम गैर-रेखीय प्रवृत्ति ज्ञात करते हैं। इसके लिए हम समीकरण निम्न रूप प्रयोग करते हैं,

$$y = a + bx + cx^2 + dx^3 + \dots + kx^n, \text{ जिन्हें } x \text{ चर में } n \text{ कोटि के बहुपद कहते हैं, जहां } x \neq 0 \text{ है।}$$

माना कि अणुवृत्त आकार के वक्र

$$y = a + bx + cx^2,$$

जिसमें हमेशा की तरह सामान्य संकेत पद्धति मौजूद है।

a, b और c के मूल्यों का निर्धारण निम्नलिखित सामान्य समीकरण से ज्ञात किया जा सकता है।

$$\Sigma y = Na + b\Sigma x + c\Sigma x^2$$

$$\Sigma xy = a\Sigma x + b\Sigma x^2 + c\Sigma x^3$$

$$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + b\Sigma x^3 + c\Sigma x^4$$

यदि मूल विन्दू को एक उपयुक्त या उचित विन्दू से हम परिवर्तित करें जैसे कि $\Sigma x = 0$, तब सामान्य समीकरण के विघटित रूप निम्न प्रकार हो सकते हैं:

$$\Sigma y = Na + c\Sigma x^2$$

$$\Sigma xy = b\Sigma x^2$$

$$\Sigma x^2 y = a\Sigma x^2 + c\Sigma x^4$$

4.7.3.3.5 काल श्रेणी के लिए गणितीय मॉडल

सामान्यतया दो मॉडलों का प्रयोग इसके घटकों में एक समय श्रृंखला का अपघटन किया जाता है।

1. **योगात्मक मॉडल:** यह मॉडल इस मान्यता पर आधारित है कि अवलोकित मूल्य, काल श्रेणी के सभी चार घटकों का योग है, अर्थात्

$$Y = T + S + C + I,$$

जहाँ, Y = वास्तविक आंकड़े, T = प्रवृत्ति मूल्य, S = मौसमी घटक, C = चक्रीय घटक, I = अनियमित घटक। काल श्रेणी के अपघटन के लिए एडिटिव मॉडल यह मानता है कि सभी चार घटक एक दूसरे से स्वतंत्र होकर कार्य करते हैं। यह भी मानता है कि सभी चार घटकों में जुड़ने का चरित्र हो। यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि प्रवृत्ति मूल्य के केवल निरपेक्ष मूल्य ही जोड़कर या घटाकर अवलोकित मूल्य तक पहुँचा जा सकता है।

2. **गुणात्मक मॉडल:** यह मॉडल मानता है कि अवलोकित मूल्य को काल श्रेणी के अन्य तीन घटकों के परिवर्तन की दर से प्रवृत्ति (T) को गुणा करके ज्ञात किया जा सकता है, अर्थात्

$$Y = t \times S \times C \times I.$$

गुणा योग्य मॉडल इस मान्यता पर आधारित है कि सभी घटक एक दूसरे से स्वतंत्र हो यह आवश्यक नहीं है क्योंकि कई ऐसे कारक व कारण होते हैं जिसके चलते एक दूसरे को ये सभी प्रभावित करते

हैं। यह भी मानता है कि सभी घटकों में गुणा करने का स्वभाव विद्यमान होते हैं। *यह ध्यान दिया जा सकता है कि उपरोक्त मॉडल में प्रवृत्ति के मूल्य को छोड़कर सभी घटक जो दाहिनी पक्ष में दिये गये हैं, परिवर्तन की दर या सूचकांक को प्रदर्शित करते हैं।*

काल श्रेणी से संबंधित अधिकतर आर्थिक एवं व्यवसायिक परिघटनाएँ गुणोत्तर मॉडल को पालन करता हैं। सामान्यतया, एडिटिव मॉडल का प्रयोग बिरले ही किया जाता है।

4.7.3.4 एक काल श्रेणी का संपादन

उपलब्ध समकों को उपयोगी बनाने के लिए इसमें आवश्यक समायोजन किया जाता है। कुछ महत्वपूर्ण समायोजन निम्नलिखित हैं:

1. **काल विचरण:** यदि आंकड़े मासिक आधार पर दिये गये हो, तब समय विचरण के प्रभाव को जानने के लिए इसे समायोजन करना आवश्यक है क्योंकि वर्ष के प्रत्येक माह में दिनों की संख्या बराबर नहीं होती है। इस प्रकार के काल श्रेणी के समायोजन के लिए दिनों की संख्या को महीनों की संख्या से विभाजित करके $\frac{365}{12}$ से गुणा करते हैं, जो माह में औसत दिनों व दिवसों की संख्या को प्रदर्शित करेंगे।
2. **जनसंख्या परिवर्तन:** जनसंख्या परिवर्तन में समायोजन करना तब ज्यादा आवश्यक हो जाता है जब चर, जनसंख्या परिवर्तन से प्रभावित होते हैं। यदि हम राष्ट्रीय आय से संबंधित आंकड़ों का अध्ययन करते हैं तब इस प्रकार के समायोजन आवश्यक हो जाता है। इस स्थिति में, समायोजन, आय को संबंधित व्यक्तियों से भाग देकर किया जा सकता है। तब हम प्रतिव्यक्ति आय ज्ञात कर सकते हैं।
3. **कीमत परिवर्तन:** कीमत परिवर्तन के लिए समायोजन आवश्यक होता है जब कभी हमारे पास वास्तविक मूल्य में परिवर्तन हो।

4.7.3.5 आवर्त विचरण या मौसमी परिवर्तन का मापन

मौसमी विचरण को अलग एवं पहचानने के कम में, हम सबसे पहले काल श्रेणी में मौजूद प्रवृत्ति, चक्रीय विचरण तथा अनियमित उच्चावचन आदि के प्रभाव को यथा संभव विमूक्त करते हैं। मौसमी विचरण को मापने की कुछ महत्वपूर्ण विधियाँ निम्नलिखित हैं:

1. आवर्त विचरण निर्देशांक या आवर्त माध्य/औसत रीति
2. चल माध्य द्वारा आवर्त विचरण
3. श्रृंखला मूल्यानुपात रीति
4. प्रवृत्ति अनुपात रीति
5. चल माध्य अनुपात विधि

अब हम इनका अलग-2 चर्चा करेंगे।

4.7.3.5.1 आवर्त माध्य रीति

इस विधि में हम निम्नलिखित सोपानों का प्रयोग करेंगे:

- (a) काल श्रेणी के आंकड़ों को वर्ष, माह या त्रैमासिक के अनुसार क्रम में रखते हैं।
- (b) प्रत्येक वर्ष के लिए मासिक या त्रैमासिक का समग्र ज्ञात करते हैं।
- (c) प्रत्येक माह या त्रैमासिक के लिए औसत ज्ञात करते हैं। ये औसत माध्य एवं माध्यिका हो सकते हैं। सामान्यतया यदि कोई विशेष माध्य के लिए चिन्हित नहीं किया गया हो तब साधारण माध्य लेते हैं।
- (d) माह या त्रैमासिक को औसत 100 के बराबर लेते हैं, माह या त्रैमासिक आवर्त निर्देशांक की गणना निम्नलिखित सूत्र के द्वारा की जा सकती है:

मासिक या त्रैमासिक आवर्त विचरण निर्देशांक =

$$\frac{\text{Monthly(or quarterly) Average for the month(or quarter)}}{\text{Averageor monthly(or quarterly)averages}}$$

सांकेतिक रूप में,

प्रथम अवधि के लिए आवर्त निर्देशांक,

$$I_1 = \frac{\bar{S}_1}{\bar{S}} \times 100$$

जहाँ, S_1 = प्रथम अवधि का औसत

$S =$ सभी अवधियों का औसत $\frac{\sum S_j}{k}$

$j = 1, 2, 3, 4, \dots, k$

$k = 12$ माह के लिए आंकड़े

$= 4$ त्रैमासिक के लिए आंकड़े

गुण:

1. यह एक अति सरल विधि है।
2. यह विधि वहाँ ज्यादा उपयोगी है जहाँ काल श्रेणी में कोई निश्चित, प्रवृत्ति नहीं पाया जाता है।

अवगुण/सीमाएँ:

1. अधिकतर आर्थिक काल श्रेणियाँ प्रवृत्ति वाली होती हैं और इसलिए, मौसमी या आवर्त निर्देशांक की गणना इस विधि द्वारा की गई सूचकांक प्रवृत्ति एवं आवर्त सूचकांक होती है।
2. काल श्रेणी में मौसमी विचरण के अलग करने वाली साधारण औसत रीति इस मान्यता पर आधारित है कि श्रेणियाँ केवल मौसमी एवं अनियमित उच्चावचन से संबंधित है।
3. यह विधि सामान्य मौसमी विचरण को चित्रित नहीं करती हैं क्योंकि इसे मूल व वास्तविक आंकड़ों से प्राप्त किया जाता है जो केवल मौसमी विचरण से ही नहीं अपितु बाकि अन्य तीन घटकों से भी प्रभावित होती है।
4. मूल आंकड़ों की श्रेणी में से चक्रीय विचरण के प्रभाव को औसत या माध्य प्रक्रिया से विमुक्त नहीं किया जा सकता है।

4.7.3.5.2 चल माध्य के द्वारा मौसमी विचरण

यह विधि *चल माध्य की प्रतिशत रीति* के नाम से भी जानी जाती है। इस विधि से आवर्त निर्देशांक की गणना करने की निम्नलिखित चरण हैं:

- (i) आंकड़ों के चल माध्य की गणना की जाती है। यदि आंकड़े मासिक हों तब 12—मास चल माध्य, यदि वे त्रैमासिक हो, तब 4—त्रैमासिक चल माध्य की गणना की जायेगी। दोनों ही स्थितियों में चल माध्य की समय अवधि सम संख्या होती है, अतः ये चल माध्य केन्द्र में अवस्थित होते हैं।
- (ii) योगात्मक मॉडल में, प्रत्येक मूल या वास्तविक मूल्य से, लघु कालिक उच्चावचन को ज्ञात करने के लिए संगत चलायमान औसत को घटाया जाता है:
- (iii) $Y - T = S + C + I$
- (iv) अलग सारणी बनाकर, मासिक या त्रैमासिक जैसे लघु कालिक उच्चावचन को पूरे वर्ष प्रत्येक माह या त्रैमासिक से जोड़कर और उनके औसत को प्राप्त किया जाता है। इन औसतों को प्रत्येक माह या त्रैमासिक के लिए आवर्त विचरण के नाम से जानते हैं।
- (v) यदि हम अनियमित विचरण को पृथक् मापना चाहते हैं तब अल्प-कालिक उच्चावचनों में से संगत मासिक या त्रैमासिक माध्य को घटाते हैं।

गुण एवं सीमाएँ:

यह आवर्त विचरण के अध्ययन के लिए वृहत रूप से प्रयोग किया जाने वाली विधि है। यह विधि प्रवृत्ति एवं चक्रीय विचरण को श्रेणी से विमुक्त करता है। यदि चक्र नियमित न हो तब उस स्थिति में यह विधि कुछ चक्रीय विचरण से प्रभावित होते हैं।

इस विधि की सबसे बड़ी कमजोरी है कि आवर्त निर्देशांक न तो श्रेणी के शुरुआत में होते हैं और न ही अन्त में होते हैं फलतः सही निष्कर्ष प्राप्त नहीं हो पाता है।

4.7.3.5.3 श्रृंखला मूल्य अनुपात रीति

इस रीति के निम्नलिखित चरण हैं:

- (i) प्रत्येक त्रैमासिक या मासिक मूल्य को उसके तुरंत पूर्ववर्ती त्रैमासिक या मासिक मूल्य से भाग देते हैं और परिणाम को 100 से गुणा किया जाता है। इन प्रतिशतों को ही श्रृंखला मूल्य अनुपात रीति कहते हैं। इस प्रकार;

$$\text{LinkRelative} = \frac{\text{Current's Season Value}}{\text{Previous Season Value}} \times 100$$

प्रथम पद के साथ कोई संगत श्रृंखला अनुपात नहीं होगी।

- (iii) पूरे वर्ष का प्रत्येक मौसम के लिए औसत श्रृंखला अनुपात की गणना की जाती है। औसत श्रृंखला अनुपात के अलावा भी माध्यिका की गणना की जा सकती है।
- (iii) इन औसत श्रृंखला, अनुपात को श्रृंखला मूल्य अनुपात में परिवर्तित किया जाता है। प्रथम श्रृंखला अनुपात के रूप में 100 को लिया जाता है।
 प्रचलित श्रृंखला अनुपात = (औसत प्रचलित श्रृंखला अनुपात × पूर्ववर्ति वर्ष की श्रृंखला अनुपात)/100
- (iv) प्रथम का द्वितीय श्रृंखला अनुपात की गणना अन्तिम के श्रृंखला अनुपात के आधार पर की जाती है:
 प्रथम त्रैमासिक की श्रृंखला मूल्यानुपात = (प्रथम का औसत श्रृंखला मूल्यानुपात × अन्तिम का श्रृंखला अनुपात) / 100.
- यह श्रृंखला मूल्यानुपात 100 के बराबर हो भी सकता है और नहीं भी। यह निरपेक्ष प्रवृत्ति के कारण 100 के बराबर नहीं हो सकते हैं। यदि यह 100 के बराबर होता है तो चरण छः का पालन करें, यदि 100 के बराबर नहीं है तब चरण पांच फिर चरण चतुर्थ का पालन करें।
- (v) चरण चतुर्थ में ज्ञात प्रथम पद के नये श्रृंखला मूल्यानुपात एवं 100 के मान्यता पर श्रृंखला मूल्यानुपात के बीच अन्तर की गणना करें। d को मौसमों की संख्या से भाग देने एवं परिणाम को 1, 2, 3 से गुणा करने तथा गुणफल को संगत 2^{रा}, 3^{रा} एवं 4^{था} त्रैमासिक श्रृंखला से क्रमशः घटाते हैं। इन्हें शुद्ध या सत्य मूल्यानुपात कहते हैं।
- (vi) चतुर्थ चरण में ज्ञात श्रृंखला मूल्यानुपात, यदि इसे शुद्ध श्रृंखला मूल्यानुपात के लिए सही करने की आवश्यकता नहीं है तब इन्हें समायोजित श्रृंखला मूल्यानुपात को औसत प्रतिशत के रूप में व्यक्त करते हैं।

इस प्रकार प्राप्त निर्देशांक ही वांछित आवर्त निर्देशांक है।

4.7.3.5.4 प्रवृत्ति अनुपात रीति

इस विधि से आवर्त निर्देशांक ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सोपानों का पालन किया जाना चाहिए:

- न्यूनतम वर्ग विधि के द्वारा प्रवृत्ति मूल्य को निर्धारित करें।
- प्रवृत्ति का अनुपात ज्ञात करने के लिए, मूल आंकड़ों को संगत प्रवृत्ति मूल्य से विभाजित करें और इन अनुपातों को 100 से गुणा करें, अर्थात्,

$$\text{प्रवृत्ति के अनुपात} = \left(\frac{\text{Original Data}}{\text{Trend value}} \right) \times 100$$

- द्वितीय चरण में ज्ञात की गई प्रवृत्ति के अनुपात से समानान्तर माध्य की गणना करें।
- अन्त में सभी प्रवृत्ति अनुपात को आवर्त निर्देशांकों में परिवर्तित करेंगे। इसके लिए तृतीय चरण में ज्ञात सभी औसतों को जोड़ते हैं और उनका सामान्य औसत करते हैं। आवर्त निर्देशांक की गणना निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जा सकता है:

$$\text{आवर्त निर्देशांक} = \left(\frac{\text{Quarterly Averages}}{\text{General Average}} \right) \times 100$$

4.7.3.6 काल श्रेणी का भविष्यवाणी विधि में प्रयोग

पांच प्रमुख विधियां हैं जिनमें काल श्रेणी का प्रयोग किया जाता है:

- माध्य भविष्यवाणी:** यह भविष्यवाणी का सबसे सरल विधि है जिसमें t समय अवधि के लिए, हम श्रेणी के उस मूल्य का भविष्यवाणी करते हैं जो श्रेणी के माध्य के बराबर होता है अर्थात्,

$$\hat{Y}_t = \bar{Y}$$

इस विधि में प्रवृत्ति एवं चक्रीय प्रभाव को गणना में सम्मिलित नहीं किया जाता है।

- सापेक्ष पूर्वानुमान:** इस विधि में हम जिस समय अवधि t के लिए मूल्य का पूर्वानुमान करते हैं, वह पूर्व अवधि में वास्तविक या मूल अवलोकित मूल्य के बराबर होती है, अर्थात्, समय अवधि (t_{-1}) के लिए किया जाता है। यह निम्न परिणाम देते हैं,

$$Y_t = \hat{Y}_{t-v}$$

3. **रैखिक प्रवृत्ति पूर्वानुमान:** इसे निम्न रूप से प्रदर्शित करते हैं $y_t = a + bx_t$, जहाँ x को t के मूल्य से ज्ञात किया जाता है; a और b स्थिर राशि हैं। यह विधि न्यूनतम वर्ग रीति पर आधारित है जहाँ समय एवं प्रतिक्रिया मूल्य x के बीच फलनात्मक रैखिक संबंध मानते हुए उपरोक्त सूत्र से ज्ञात किया जाता है।
4. **गैर-रेखीय प्रवृत्ति पूर्वानुमान:** इस विधि में न्यूनतम वर्ग रीति के द्वारा समय एवं प्रतिक्रिया मूल्य के बीच गैर-रेखीय संबंध पता चलता है। पूर्वानुमान मूल्य y_t की गणना दिये गये समय अवधि t से गैर-रेखीय संबंध वाले सूत्र का प्रयोग करके ज्ञात किया जाता है।

$$y_t = a + bx_t + cx_t^2$$

जहाँ x —मूल्य की गणना t के मूल्य से की जाती है और a, b, c स्थिरांक को सामान्य समीकरण से आंकलन कर सकते हैं।

4.7.4 इकाई का सारांश

इस इकाई में व्यवसाय पूर्वानुमान के बारे में अध्ययन किया है। पूर्वानुमान में पालन किये जाने वाले विभिन्न सोपानों का सरलता से व्याख्या की गई है। भविष्य के लिए पूर्वानुमान के आकलन का प्रथम चरण पूर्व के समय अवधियों से सूचनाओं को एकत्र करना होता है। इस क्रम में सामान्यतया सांख्यिकीय आंकड़ों से ही संबंध होता है जिसमें क्रमागत समय अन्तरालों में सूचनाएँ एकत्र करना, अवलोकित या अंकित करना आदि हो सकते हैं। इस प्रकार, जब हम संख्यात्मक आंकड़ों का अवलोकन विभिन्न समय बिन्दुओं में करते हैं तब अवलोकनों के ऐसे समुच्च को ही काल श्रेणी के नाम से जानते हैं। वाह्य गणन व्यवसाय पूर्वानुमान का सबसे सरल विधि है। वाह्य गणन के द्वारा एक व्यवसायी उनके द्वारा उत्पादित वस्तुओं एवं सेवाओं की मांग तथा भविष्य की कीमत प्रवृत्ति के बारे में पूर्वानुमान करते हैं। काल श्रेणी की प्रवृत्तियों को मापने की विभिन्न विधियों जैसे हस्तमुक्त या रेखीय विधि, अर्द्ध औसत विधि, चल औसत विधि, न्यूनतम वर्ग रीति आदि के बारे में अध्ययन किया है। चल औसत की रीति का प्रयोग काल श्रेणी में उच्चावचनों को समाप्त करने के लिए किया जाता है। इकाई के अन्त में न्यूनतम वर्ग रीति के विभिन्न विधियों के गुणों एवं अवगुणों की भी चर्चा विस्तार से की गई है।

4.7.5 मुख्य शब्द

- **व्यवसाय पूर्वानुमान:** इससे तात्पर्य है कि पूर्व एवं वर्तमान के आर्थिक स्थितियों का भविष्य में होने वाले संभावित व्यवसायिक स्थितियों के बारे में पूर्वानुमान करने के उद्देश्य से की गई सांख्यिकीय विश्लेषण है।
- **काल श्रेणी:** यह दिये गये क्रमिक समय अन्तरालों में, एक संख्यात्मक मानों का समुच्च होता है।
- **निरपेक्ष प्रवृत्ति:** इसका अर्थ है कि दिये गये श्रेणी में वृद्धिमान व कमी को दीर्घ अवधि में विशुद्धता एवं एकरूपता प्रदान करना।
- **आवर्त विचरण:** काल श्रेणी में ऐसा विचरण जो एक वर्ष या लघु अवधि में लगातार होते हैं मौसमी विचरण कहलाते हैं।

4.7.6 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न

1. काल श्रेणी में प्रयोग किय जाने वाले पूर्वानुमान विधियों का उल्लेख करें।
2. काल श्रेणी के लिए गणितीय मॉडल का व्याख्या करें।
3. चलायमान औसत रीति की वर्णन करें।
4. व्यवसाय पूर्वानुमान के सिद्धान्तों की चर्चा करें।
5. व्यवसाय पूर्वानुमान के महत्व की व्याख्या करें।
6. काल श्रेणी के विभिन्न घटकों की चर्चा करें।
7. प्रवृत्ति माप की रीतियों का वर्णन करें।

4.7.7 संदर्भ पुस्तकें

1. J. K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
2. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
3. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.

4. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक विश्लेषण, विभव पब्लिशिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
5. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
6. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
7. अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण, भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
8. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
9. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
10. Digambar Patri, “Business Statistics”, Kalyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, “Business Statistics”, Pearson publication, Delhi, India.
11. R.P. Hooda, “Statistics for Business and Economics”, Mac Millan India Ltd., Delhi, India.

खण्ड— 5

इकाई 01

समष्टि आंकड़ों की प्रकृति एवं स्रोत: राष्ट्रीय आय

सरचना:

- 5.1.1 भूमिका
- 5.1.2 राष्ट्रीय आय का अर्थ एवं परम्परागत परिभाषाएँ
- 5.1.3 राष्ट्रीय आय की कीन्स की अवधारणा
- 5.1.4 राष्ट्रीय आय के आधुनिक दृष्टिकोण
 - 5.1.4.1 राष्ट्रीय आय की अवधारणा के सामान्य लक्षण
- 5.1.5 राष्ट्रीय आय के विभिन्न अवधारणाएँ
 - 5.1.5.1 बाजार कीमत एवं साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद के बीच संबंध
 - 5.1.5.2 राष्ट्रीय आय की विभिन्न अवधारणाओं के बीच संबंध
- 5.1.6 राष्ट्रीय आय का मापन
 - 5.1.6.1 उत्पाद विधि
 - 5.1.6.2 आय विधि
 - 5.1.6.3 व्यय विधि
 - 5.1.6.4 तीनों विधियों में समन्वय
- 5.1.7 राष्ट्रीय आय की गणना में कठिनाईयाँ
- 5.1.8 राष्ट्रीय आय के अध्ययन का महत्व
- 5.1.9 इकाई का सारांश
- 5.1.10 परिभाषिक शब्दावली
- 5.1.11 मुख्य शब्द
- 5.1.12 अपने प्रगति का मूल्यांकन (बहुविकल्पीय / वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 5.1.13 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 5.1.14 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न
- 5.1.15 संदर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के उपरान्त हम इस स्थिति में होंगे:

- राष्ट्रीय आय का वर्णन
- राष्ट्रीय आय के विभिन्न अवधारणाओं की व्याख्या
- राष्ट्रीय आय के सामान्य लक्षणों का वर्णन
- राष्ट्रीय आय के मापन की व्याख्या

5.1.1 भूमिका

राष्ट्रीय आय को किसी राष्ट्र द्वारा उत्पादित समग्र शुद्ध आर्थिक वस्तुओं एवं सेवाओं के मूल्य के रूप में परिभाषित किया जा सकता है। राष्ट्रीय आय की माप तीन अलग-अलग विधियों द्वारा किया जा सकता है: 1. आय प्रवाह के रूप में; 2. वस्तुओं एवं सेवाओं के प्रवाह के रूप में और 3. व्यय के प्रवाह के रूप में। राष्ट्रीय आय के मापन की ये तीन अलग-अलग विधियाँ राष्ट्रीय आय के सम्बन्ध में तीन भिन्न माप प्रस्तुत करते हैं, जैसे; समग्र राष्ट्रीय आय, समग्र राष्ट्रीय उत्पाद और समग्र राष्ट्रीय व्यय। किसी अर्थव्यवस्था के सम्बन्ध में तीन मापदण्डों से समान मूल्य ही प्राप्त होंगे। उत्पाद गणना विधि या मूल्य वर्धन विधि से राष्ट्रीय आय की गणना करने में अर्थव्यवस्था के आय उत्पादक क्षेत्रों को कई भागों में बांट दिया जाता है। उत्पाद गणना विधि के माध्यम से राष्ट्रीय आय के सही आकलन के लिए 'शुद्ध मूल्य वर्धन' की अवधारणा सर्वाधिक उपयोगी है। इस अवधारणा से उत्पादों की दोहरी गणना के दोष से बचा जा सकता है। राष्ट्रीय आय के आकलन के अंतिम व्यय तकनीक को 'उपभोग' और निवेश'

प्रणाली के रूप में भी जाना जाता है। इस तकनीक के लिए हमें अर्थव्यवस्था के अंतिम उपभोग और निवेश से सम्बंधित आंकड़ों को एकत्रित करना होता है। इस अध्याय में राष्ट्रीय आय की विभिन्न अवधारणाओं का अध्ययन करेंगे। कीन्स के राष्ट्रीय आय से सम्बंधित विचारों के साथ राष्ट्रीय आय के आधुनिक दृष्टिकोण तथा उसके मापन के विभिन्न विधियों का भी अध्ययन करेंगे।

5.1.2 राष्ट्रीय आय का अर्थ एवं परम्परागत परिभाषाएं

राष्ट्रीय आय से तात्पर्य किसी विशेष समयावधि में राष्ट्र की समग्र आय से है। राष्ट्रीय आय सम्बन्धी आंकड़े किसी देश के आर्थिक क्रियाकलापों का समग्र प्रदर्शन करते हैं। राष्ट्रीय आय कुल प्राप्तियों, कुल खर्च तथा कुल उत्पादन के मूल्य का प्रदर्शन है। चूंकि एक व्यक्ति की आय दूसरे व्यक्ति का खर्च है और प्रत्येक वस्तु अपनी बाजार कीमत पर खरीदी और बेची जाती है। अतः राष्ट्रीय आय लेखांकन की तीन अवधारणाएँ (क) समग्र प्राप्तियाँ, (ख) समग्र खर्च, तथा (ग) वस्तुओं एवं सेवाओं के विनिमय मूल्य आपस में बराबर होते हैं। इस प्रकार समष्टि स्तर पर हम निम्न सम्बंध प्राप्त करते हैं:

$$\text{राष्ट्रीय आय} = \text{राष्ट्रीय खर्च} = \text{राष्ट्रीय उत्पाद}$$

परम्परागत परिभाषाएँ

राष्ट्रीय आय की परम्परागत परिभाषाएँ प्रो. मार्शल, प्रो. पीगू और प्रो. फिशर द्वारा दी गई हैं।

1. **मार्शल की परिभाषा:** मार्शल के अनुसार, “किसी देश का श्रम और पूंजी उसके प्राकृतिक संसाधनों पर कार्य करते हुए प्रत्येक वर्ष भौतिक तथा अभौतिक वस्तुओं जिसमें सेवाएँ भी शामिल हैं, की निश्चित निवल मात्रा के उत्पादन करते हैं..... तथा इसमें विदेशों से प्राप्त हाने वाली निवल आय भी जोड़ देनी चाहिए। यही उस देश की प्रतिवर्ष वास्तविक राष्ट्रीय आय या राष्ट्रीय लाभांश है।”
2. **पीगू की परिभाषा:** पीगू राष्ट्रीय आय में उस आय को शामिल करते हैं जिसे मुद्रा में मापा जा सकता है। पीगू के अनुसार, “राष्ट्रीय आय किसी देश या समुदाय की बाह्य आय का वह भाग है जिसमें विदेशों से प्राप्त होने वाली आय भी शामिल है तथा जिसे मुद्रा के रूप में मापा जा सकता है।”
3. **फिशर की परिभाषा:** प्रो. फिशर राष्ट्रीय आय के आधार के रूप में उत्पादन के स्थान पर उपभोग का चुनाव करते हैं। फिशर के अनुसार “राष्ट्रीय लाभांश अथवा आय में वहीं सेवायें सम्मिलित की जाती हैं जो कि उपभोक्ताओं को अपने भौतिक अथवा मानवीय वातावरण द्वारा प्राप्त होती हैं। इस प्रकार एक पियानों अथवा ओवरकोट जो कि मेरे लिए इस वर्ष बनाया गया है, इस वर्ष की आय का भाग नहीं है बल्कि पूंजी में वृद्धि है। केवल वही सेवाएँ जो कि इनके प्रयोग से इस वर्ष मुझे प्राप्त होंगी, वहीं आय होंगी।” फिशर की परिभाषा मार्शल अथवा पीगू की परिभाषा से अधिक उत्तम मानी जाती है क्योंकि यह आर्थिक कल्याण की अवधारणा के अधिक करीब है। आर्थिक कल्याण किसी दिये गये समय में वस्तुओं तथा सेवाओं की उन मात्राओं पर निर्भर करता है जो उस समय में लोगों को प्राप्त होती हैं।

5.1.3 राष्ट्रीय आय के कीन्स अवधारणा

कीन्स राष्ट्रीय आय के सन्दर्भ में तीन दृष्टिकोण प्रस्तुत करते हैं:

1. **व्यय उपागम:** इस दृष्टिकोण के अनुसार, राष्ट्रीय आय कुल उपभोग व्यय तथा कुल निवेश व्यय के योग के बराबर होती है। प्रतीकात्मक रूप में, $Y = C + I$, जहाँ, Y राष्ट्रीय आय, C कुल उपभोग व्यय और I कुल निवेश व्यय को प्रदर्शित करते हैं।
2. **साधन आय उपागम:** इस दृष्टिकोण के अनुसार उत्पादन के सभी साधनों को मिलने वाली आय का कुल योग ही राष्ट्रीय आय है। प्रतीकात्मक रूप में, $Y = F + E_p$, जहाँ, Y राष्ट्रीय आय, F भूमिपतियों को प्राप्त होने वाली आय के साथ श्रम और पूंजी को प्राप्त प्रतिफल हैं और E_p साहसी को प्राप्त होने वाले लाभ को प्रदर्शित करता है।

3. **बिक्रय-लागत उपागम:** इस दृष्टिकोण के अनुसार, राष्ट्रीय ज्ञात करने के लिए कुल बिक्रय आय में से प्रायोगिक लागत को घटा देना चाहिए। प्रतीकात्मक रूप में, $Y = A - U$ जहाँ, राष्ट्रीय आय, A सकल राष्ट्रीय उत्पाद तथा U समग्र प्रायोगिक लागत को प्रदर्शित करता है।

5.1.4 राष्ट्रीय आय के आधुनिक दृष्टिकोण

कीन्स का अनुकरण करते हुए आधुनिक अर्थशास्त्री राष्ट्रीय के तीन पहलुओं पर विचार करते हैं और उनके बीच आधारभूत समरूपता पर जोर देते हैं। ये तीन पहलु हैं: (क) उत्पाद पक्ष, (ख) आय पक्ष एवं (ग) व्यय पक्ष। संयुक्त राष्ट्र संघ की एक रिपोर्ट में राष्ट्रीय आय को तीन भिन्न-भिन्न विधियों से परिभाषित किया गया है:

- (i) शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद, अर्थात् जिसके अन्तर्गत एक निश्चित अवधि में सभी आर्थिक क्षेत्रों द्वारा आर्थिक क्रियाओं का शुद्ध मूल्य वर्धन और विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय है।
- (ii) वितरणात्मक भागों का कुल योग, अर्थात् उत्पादन के साधनों को नियत समय में मजदूरी, लाभ, ब्याज तथा लगान के रूप में प्राप्त होने वाली आय का समग्र योग है।
- (iii) शुद्ध राष्ट्रीय व्यय अर्थात् अंतिम उपभोग वस्तुओं और सेवाओं पर किया गया व्यय तथा समग्र योग तथा घरेलू और विदेशी निवेश।

आधुनिक अर्थशास्त्री राष्ट्रीय आय को उत्पादन, आय तथा व्यय के प्रवाह के रूप में देखते हैं। जब वस्तुएँ किसी फर्म के द्वारा उत्पादित की जाती हैं तो उत्पादन के साधनों को मजदूरी, लाभ, ब्याज तथा लगान के रूप में आय प्राप्त होती है। घरेलू क्षेत्र को प्राप्त होने वाली इस आय का एक भाग उपभोग वस्तुओं पर खर्च कर दिया जाता है तथा दूसरा भाग बचा लिया जाता है। बचतों का इस्तेमाल उत्पादकों द्वारा निवेश व्यय के लिए किया जाता है। इस प्रकार उत्पादन, आय तथा व्यय का एक चक्रीय प्रवाह होता है। इसे (क) उत्पादन के प्रवाह, (ख) आय के प्रवाह एवं (ग) व्यय के प्रवाह के रूप में देखा जा सकता है। इस प्रकार तीन समनताएँ होगी:

कुल उत्पाद = कुल आय = कुल व्यय

5.1.4.1 राष्ट्रीय आय के अवधारणा के सामान्य लक्षण

राष्ट्रीय आय की प्रमुख विशेषताएँ हैं:

वास्तव में, राष्ट्रीय आय एक विशेष समय में उत्पादित वस्तुओं एवं सेवाओं का प्रवाह है।

- (i) मुद्रा के रूप में, राष्ट्रीय आय किसी विशेष समय में राष्ट्र को उपलब्ध समग्र वस्तुओं तथा सेवाओं का मौद्रिक मूल्य है।
- (ii) राष्ट्रीय आय सामान्यतः एक वर्ष के सन्दर्भ में व्यक्त की जाती है।
- (iii) राष्ट्रीय आय लेखांकन में राष्ट्रीय आय को तीन रूपों में व्यक्त किया जाता है।
- (क) राष्ट्रीय उत्पाद के प्रवाह के रूप में, (ख) राष्ट्रीय आय के प्रवाह के रूप में, एवं (ग) व्यय के प्रवाह के रूप में।

(iv) राष्ट्रीय आय में तिहरी समानताएँ हैं: राष्ट्रीय उत्पाद = राष्ट्रीय आय = राष्ट्रीय व्यय।

5.1.5 राष्ट्रीय आय के विभिन्न अवधारणाएँ

वर्तमान समय में राष्ट्रीय आय तथा सामाजिक लेखांकन से संबंधित कई अवधारणाओं का विकास हुआ है। इन अवधारणाओं ने राष्ट्रीय आय के अध्ययन को अधिक विस्तृत तथा व्यापकता प्रदान की है। राष्ट्रीय आय की प्रमुख अवधारणाओं की व्याख्या निम्नलिखित है:

1. **बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद (GDP at MP):** बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद किसी एक वर्ष में किसी देश की घरेलू सीमा के भीतर उत्पादित अंतिम उपभोग वस्तुओं तथा सेवाओं के मूल्य से है। हैन्सन के अनुसार, "सकल घरेलू उत्पाद से हमारा आशय किसी समय अवधि में सामान्यतः, एक वर्ष में किसी देश की घरेलू सीमा के भीतर उत्पादित अंतिम उपभोग

वस्तुओं और सेवाओं के मूल्य से है।" सकल घरेलू उत्पाद की गणना करने के लिए सभी उत्पादित वस्तुओं और सेवाओं को उनके मूल्य से गुणा कर दिया जाता है। प्रतीकात्मक रूप में,
 $GDP \text{ at MP} = \sum PQ$

जहाँ, GDP at MP बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद है, P उत्पाद का बाजार मूल्य तथा Q अंतिम वस्तुओं एवं सेवाओं की मात्रा है। सकल घरेलू उत्पाद में तीन प्रकार की अंतिम वस्तुएँ और सेवाएँ शामिल हैं:

- (क) लोगों की तात्कालिक जरूरतों को पूरा करने वाली उपभोक्ता वस्तुएँ और सेवाएँ;
- (ख) पूंजीगत वस्तुएँ, जिसमें स्थिर पूंजी निर्माण, आवासीय निर्माण तथा अंतिम और मध्यवर्ती वस्तुओं का न बिका हुआ स्टॉक और,
- (ख) सरकार द्वारा उत्पादित वस्तुएँ एवं सेवाएँ शामिल हैं।

2. **बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद (GNP at MP)** : बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद वार्षिक रूप में किसी देश में उत्पादित समस्त अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं का मौद्रिक मूल्य एवं विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय का योग है। सकल घरेलू उत्पाद के तुलना सकल राष्ट्रीय उत्पाद की अवधारणा व्यापक है। सकल राष्ट्रीय उत्पाद में सकल घरेलू उत्पाद के अतिरिक्त विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय को भी शामिल किया जाता है। विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय, हमारे देश के निवासियों द्वारा विदेशों में अर्जित की जाने वाली आय तथा विदेशियों द्वारा हमारे देश के भीतर अर्जित की जाने वाली आय के बीच का अन्तर है।

बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद = बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद + विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

अथवा

बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय आय = बाजार कीमत पर सकल घरेलू आय + विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

3. **बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद (NNP at MP)**: बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद में से मूल्य-ह्रास को घटाने पर बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद प्राप्त होता है। उत्पादन प्रक्रिया में किसी निश्चित मात्रा में स्थिर पूंजी का प्रयोग किया जाता है। एक लेखा वर्ष के सकल राष्ट्रीय उत्पाद के मूल्य में से मूल्य-ह्रास का मान घटाने पर हमें शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद का मूल्य प्राप्त होता है। 'शुद्ध' शब्द से तात्पर्य ही सकल में से या समग्र से ह्रास को अलग करना है।

बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद =

बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद – मूल्य ह्रास या घिसावट व्यय।

4. **बाजार मूल्य पर शुद्ध घरेलू उत्पाद**: बाजार कीमत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद, शुद्ध राष्ट्रीय आय एवं विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय के बीच अन्तर है।

बाजार कीमत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद =

बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद – विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।

5. **साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद (NNP at FC)**: साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद अथवा घरेलू आय देश की क्षेत्रीय सीमाओं के भीतर उत्पादन के साधनों के द्वारा मजदूरी, लाभ, ब्याज तथा लगान के रूप अर्जित आय है। घरेलू आय में निम्नलिखित शामिल होते हैं, 1. लगान, जिसमें आकलित लगान भी हैं, 2. मजदूरी, वेतन तथा रोजगार क्षतिपूर्ति, 3. ब्याज, 4. अंश धारकों को प्राप्त लाभांश या वितरित लाभ, 5. फर्मों की आरक्षित निधियाँ या निगमों की बचत, 6. निगम कर तथा अन्य प्रत्यक्ष कर, 7. स्वरोजगार में लगे व्यक्तियों की आय, 8. सरकारी निगमों के प्राप्त लाभ, 9. सरकारी परिसम्पत्तियों से प्राप्त आय और 10. गैर-विभागीय उद्यमों की बचतें।

6. **व्यक्तिगत आय:** व्यक्तिगत आय किसी देश के घरेलू क्षेत्र द्वारा सभी स्रोतों से प्राप्त कुल आय है जिसमें प्रत्यक्ष कर शामिल नहीं है। निजी आय तथा व्यक्तिगत आय के बीच प्रमुख अन्तर यह है कि निजी आय में अवितरित लाभ शामिल होता है जबकि, व्यक्तिगत आय में अवितरित लाभ शामिल नहीं होता है।

व्यक्तिगत आय = निजी आय – अवितरित लाभ (जैसे: निगमों के लाभ पर कर + निगम बचतें)
– विदेशी कम्पनियों की आय + हस्तांतरित आय

7. **व्यय योग्य आय (Personal Disposable Income):** व्यय योग्य आय, व्यक्तिगत आय का वह भाग है जो घरेलू क्षेत्र अपने अनुसार खर्च करता है। यह घरेलू क्षेत्र या परिवार क्षेत्र के क्रय शक्ति को व्यक्त करता है।

व्यय योग्य आय = व्यक्तिगत आय – प्रत्यक्ष कर।

व्यय योग्य आय का पूरा भाग उपभोग पर खर्च नहीं होता है बल्कि इसका कुछ हिस्सा बचा लिया जाता है। इस प्रकार व्यय योग्य आय = उपभोक्ता व्यय + बचत।

अथवा,

Personal Disposable Income = Consumption Expenditure + Saving

1.5.1 बाजार कीमत एवं साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद के बीच संबंध:

बाजार कीमत पर राष्ट्रीय उत्पाद एक वर्ष में उत्पादित कुल अंतिम वस्तुओं एवं सेवाओं के बाजार मूल्य को व्यक्त करता है। जबकि, साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद, उत्पादन के साधनों को प्राप्त आय को व्यक्त करता है जो कि मजदूरी, लाभ, लगान और ब्याज के रूप में होती है। इन दोनों अवधारणाओं के बीच अन्तर है। अतः इनसे प्राप्त राष्ट्रीय आय के मूल्य के बीच भी अन्तर होगा। साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद की गणना करने के लिए हमें बाजार मूल्य पर राष्ट्रीय उत्पाद से शुद्ध अप्रत्यक्ष कर घटाना होता है। या बाजार मूल्य पर राष्ट्रीय उत्पाद में अप्रत्यक्ष कर घटाकर आर्थिक सहायता या अनुदान जोड़ देना होता है।

1. **अप्रत्यक्ष कर:** अप्रत्यक्ष कर (जैसे: बिक्री कर, उत्पाद कर, सेवा कर आदि) वस्तुओं पर लगाये जाते हैं। वे वस्तु के बाजार मूल्य में शामिल होते हैं परन्तु, सरकार को प्राप्त होते हैं। इस प्रकार से बाजार मूल्य पर राष्ट्रीय उत्पाद, साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद से अप्रत्यक्ष कर की राशि के बराबर अधिक होता है। इसलिए, साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद को प्राप्त करने के लिए हमें बाजार मूल्य पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद में से अप्रत्यक्ष करों को घटाना होता है।
2. **आर्थिक सहायता या अनुदान:** आर्थिक सहायता, अप्रत्यक्ष करों के विपरीत है। ये उत्पादकों को दिया जाने वाली मौद्रिक सहायता हैं जिसका उद्देश्य कुछ विशेष वस्तुओं का बाजार मूल्य कम करना होता है। आर्थिक सहायता के कारण बाजार मूल्य साधन लागत से कम हो जाता है। इस प्रकार, साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद ज्ञात करने के लिए आर्थिक सहायता के बाजार मूल्य पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद में जोड़ दिया जाता है।
3. **शुद्ध अप्रत्यक्ष कर:** अप्रत्यक्ष करों और आर्थिक सहायता के बीच के अन्तर को शुद्ध अप्रत्यक्ष कर कहा जाता है। इस प्रकार, साधन लागत पर राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय की गणना करते समय बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद से शुद्ध अप्रत्यक्ष करों को घटा दिया जाता है।

साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद = बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद – शुद्ध अप्रत्यक्ष कर।

अथवा, $NNP \text{ at FC} = NNP \text{ at MP} - \text{Net Indirect Tax (NIT)}$

$= NNP \text{ at MP} - \text{Indirect Tax} + \text{Subsidy}$

इन दोनों दृष्टिकोणों के तुलनात्मक महत्व पर जे. आर. हिक्स ने कहा है, “जब किसी राष्ट्र का आर्थिक कल्याण मापना हो तो बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद की अवधारणा का प्रयोग

अधिक उपयोगी और जब किसी अर्थव्यवस्था की उत्पादकता की माप करनी हो तो साधन लागत पर निबल राष्ट्रीय उत्पाद की अवधारणा अधिक उपयोगी होगी।

5.1.6 राष्ट्रीय आय का मापन:

वस्तुओं और सेवाओं के उत्पादन से आय प्राप्त होती है, आय से वस्तुओं की मांग उत्पन्न होती है, मांग से व्यय होता है और व्यय पुनः उत्पादन को बढ़ाता है। इस प्रकार से उत्पादन, आय और व्यय का चक्रीय प्रवाह होता है। इन आधारभूत प्रवाह चरों के आधार पर राष्ट्रीय आय को भी निम्नलिखित तीन रूपों में देखा जा सकता है;

1. वस्तुओं और सेवाओं के प्रवाह के रूप में,
2. आय प्रवाह के रूप में,
3. वस्तुओं और सेवाओं पर व्यय के प्रवाह के रूप में।

इस प्रकार आय के इस चक्रीय प्रवाह के तीन चरण हैं, पहला उत्पादन, दूसरा वितरण या आय और तीसरा व्यय। इस प्रकार राष्ट्रीय आय की गणना किसी भी एक चरण में की जा सकती है।

इसी पर आधारित राष्ट्रीय आय के मापन की तीन विधियाँ हैं।

- (i) उत्पाद विधि: राष्ट्रीय आय की गणना उत्पादन के चरण में की जाती है।
- (ii) आय विधि: राष्ट्रीय आय का मापन, वितरण के स्तर पर या आय के रूप की जाती है।
- (iii) व्यय विधि: राष्ट्रीय आय का मापन व्यय के चरण में की जाती है।

5.1.6.1 उत्पाद विधि

उत्पाद विधि द्वारा राष्ट्रीय आय की गणना उत्पादन के चरण में की जाती है। इस विधि को मूल्य वर्धन विधि भी कहते हैं। इस विधि द्वारा राष्ट्रीय आय की गणना के दो दृष्टिकोण हैं; 1. अंतिम उत्पाद विधि और 2. मूल्य वर्धन विधि।

1. अंतिम उत्पाद विधि या दृष्टिकोण: इस विधि में, किसी दिये हुए वर्ष में किसी अर्थव्यवस्था में उत्पादित अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं के बाजार मूल्य के योग को ज्ञात करके राष्ट्रीय आय की गणना जाती है। उत्पाद विधि से राष्ट्रीय आय की गणना के विभिन्न चरण इस प्रकार हैं:

- (i) किसी देश की सीमाओं के भीतर उत्पादित समस्त अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं के मूल्य को, बाजार मूल्य पर योग करने से सकल घरेलू उत्पाद प्राप्त होता है।
- (ii) बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद में विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय को जाड़कर हम सकल राष्ट्रीय उत्पाद प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार,

$$\text{GNP at MP} = \text{GDP at MP} + \text{विदेशों से शुद्ध साधन आय।}$$

- (iii) बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद ज्ञात करने के लिए बाजार मूल्य पर व्यक्त या ज्ञात सकल राष्ट्रीय उत्पाद में से मूल्य ह्रास घटा दिया जाता है। इस प्रकार,

$$\text{NNP at MP} = \text{GNP at MP} - \text{मूल्य ह्रास।}$$

- (iv) शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद जो कि बाजार मूल्य पर है, में से अप्रत्यक्ष कर घटाने तथा सब्सिडी जोड़ने पर साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय प्राप्त कर सकते हैं। इस प्रकार,

$$\text{NNP at FC or National Income} = \text{NNP at MP} - \text{शुद्ध अप्रत्यक्ष कर।}$$

दोहरी गणना की समस्या

उत्पाद विधि से राष्ट्रीय आय की गणना करते समय केवल अंतिम वस्तुओं एवं सेवाओं के बाजार मूल्य को शामिल किया जाता है। मध्यवर्ती वस्तुओं के मूल्य को गणना में शामिल नहीं किया जाता है। यदि मध्यवर्ती वस्तुओं के मूल्य को भी शामिल किया गया हो तो इससे दोहरी गणना की समस्या पैदा हो जाती है। दोहरी गणना का अर्थ है कि उन निश्चित वस्तुओं को राष्ट्रीय आय की गणना करते समय

एक से अधिक बार गिन लिया जाता है। इससे राष्ट्रीय आय का अनुमान अधिक हो जाता है। इस कारण से दोहरी गणना की समस्या से बचने के लिए केवल अंतिम वस्तुओं के मूल्य को ही गणना में शामिल किया जाता है, मध्यवर्ती वस्तुओं को नहीं। उदाहरण के लिए, ब्रेड अंतिम वस्तु है जिसमें गेहूं और आटे का मूल्य शामिल होता है क्योंकि उत्पादन प्रक्रिया में इन लागतों का भुगतान किया जा चुका होता है। इस प्रकार राष्ट्रीय आय की गणना करते समय ब्रेड के साथ ही आटे और गेहूं का मूल्य भी शामिल करने से दोहरी गणना की समस्या उत्पन्न होगी जिससे बचा जाना चाहिए।

2. मूल्य वर्धन विधि: इस विधि से राष्ट्रीय आय की गणना करने के लिए सभी अंतिम वस्तुओं के बाजार मूल्य पर, उत्पादन के विभिन्न चरण या स्तर पर सृजित मूल्य को शामिल किया जाता है। इस प्रकार, इस विधि के अनुसार, उत्पादन प्रक्रिया में विभिन्न उत्पादक इकाइयों के द्वारा सृजित या वर्धित मूल्य का योग ही राष्ट्रीय आय होगी। मूल्य वर्धन का अर्थ कच्चे माल या आगतों के मूल्य में सृजन या वृद्धि है। वास्तव में, मूल्य वर्धन से आशय उत्पादक इकाई का उत्पादन के मूल्य में योगदान है। किसी विशेष चरण पर मूल्य वर्धन की गणना करने के लिए उत्पादन के कुल मूल्य से मध्यवर्ती वस्तुओं की लागत घटा दी जाती है। इस प्रकार,

$$\text{मूल्य वर्धन} = \text{उत्पादन का मूल्य} - \text{मध्यवर्ती वस्तुओं की लागत}।$$

सारणी 5.1.1: मूल्य वर्धन की गणना या आकलन

मूल्य रुपये में				
उत्पादक	उत्पादन का स्तर	निर्गत का मूल्य	मध्यवर्ती वस्तुओं की लागत	सकल मूल्य वर्धन
किसान	गेहूं	500	—	500
मिलर	आटा	700	500	200
बेकर	ब्रेड	1000	700	300
	कुल	2200	1200	1000

सारणी 5.1.1 में एक उदाहरण के माध्यम से मूल्य वर्धन की गणना प्रस्तुत की गई है। इस उदाहरण में तीन उत्पादक इकाई किसान, मिलर, और बेकर हैं। किसान बिना खर्च उठाये गेहूं का उत्पादन करता है जिसे वह 500 रुपये में मिलर को बेचता है। इस प्रकार किसान द्वारा मूल्य संवर्धन 500 रुपये का है। मिलर गेहूं से आटा बना कर इसे 700 रुपये में बेकर को बेचता है। इस प्रकार मिलर के द्वारा वर्धित मूल्य $700 - 500 = 200$ रुपये हुआ। बेकर आटे से ब्रेड बनाकर इसे उपभोक्ताओं को 1000 रुपये में बेचता है। इस प्रकार बेकर के द्वारा मूल्य संवर्धन $1000 - 700 = 300$ रुपये का हुआ। इस प्रकार से कुल मूल्य संवर्धन को निम्न रूप से देखा जा सकता है,

$$\text{किसान के द्वारा} = 500 - 0 = 500 \text{ रुपये।}$$

$$\text{मिलर के द्वारा} = 700 - 500 = 200 \text{ रुपये।}$$

$$\text{बेकर के द्वारा} = 1000 - 700 = 300 \text{ रुपये।}$$

$$\text{कुल मूल्य संवर्धन} = 2200 - 1200 = 1000 \text{ रुपये।}$$

मूल्य संवर्धन विधि से दोहरी गणना की समस्या से बचा जा सकता है। उपरोक्त तीनों उत्पादकों के निर्गत का कुल मूल्य 2200 रुपये का है जिसमें गेहूं और आटे की दोहरी गणना शामिल है। इस समस्या से बचने के लिए मूल्य वर्धन विधि का प्रयोग किया गया है जो उत्पादन के प्रत्येक चरण पर मध्यवर्ती वस्तुओं के मूल्य को अलग कर देता है।

5.1.6.2 आय विधि

आय विधि साधन आय पक्ष से राष्ट्रीय आय की गणना करती है। आय विधि को साधन आय विधि तथा वितरण योग्य भाग के नाम से भी जाना जाता है। इस विधि के अनुसार किसी देश के निवासियों द्वारा किसी एक वर्ष में उनके उत्पादक कार्यों हेतु प्राप्त भुगतान या आय को जोड़कर राष्ट्रीय आय ज्ञात की जा सकती है। इस प्रकार, आय विधि उत्पादन के साधनों द्वारा मजदूरी, लाभ, लगान तथा ब्याज के रूप में प्राप्त आय का योग ही राष्ट्रीय आय है।

यह उल्लेखनीय है कि प्रत्येक उत्पादक इकाई द्वारा शुद्ध मूल्य वर्धन ही उस इकाई द्वारा सृजित आय होगी। और घरेलू स्तर पर साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद, घरेलू साधन आय के बराबर होगा। इस प्रकार, आय विधि से वहीं अनुमान प्राप्त होना चाहिए, जो मूल्य वर्धन विधि से प्राप्त होता है, बशर्ते कि कोई त्रुटि न हो या आकलन में आंकड़ों की असंगतता या कमियाँ न हो।

आय विधि के चरण: आय विधि से राष्ट्रीय आय की गणना में निम्नलिखित चरण हैं:

- (i) सभी उत्पादक इकाईयाँ प्राथमिक, द्वितीयक तथा तृतीयक क्षेत्रों में विभाजित है।
- (ii) उत्पादक इकाईयों द्वारा साधनों को दी जाने वाली आय निम्न प्रकार विभाजित की जाती है:
 - a) लगान, जिसमें आरोपित लगान भी है।
 - b) मजदूरी, वेतन और रोजगार क्षतिपूर्ति।
 - c) ब्याज
 - d) लाभ, जिसमें;
 1. लाभांश या वितरित लाभ
 2. निगम कर
 3. अवितरित लाभ
 4. निगम बचतें या आरक्षित निधि
 - e) स्वनियोजितों की मिश्रित आय
 - f) सरकारी क्षेत्र से आय, जिसमें
 1. सरकारी उद्यमों का लाभ
 2. सरकारी सम्पत्ति से आय
 3. गैर-विभागीय उद्यमों की बचतें जैसे एयर इंडिया।
- (iii) मजदूरी आय तथा परिसम्पत्ति आय जैसे— लगान, ब्याज, लाभ, मिश्रित आय आदि के रूप में अर्जित आय का योग जो देश के क्षेत्रीय या घरेलू सीमा के भीतर है साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद होगा। इस प्रकार,

साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद = लगान अर्थात् आरोपित लगान सहित

 - + मजदूरी, वेतन, कर्मचारियों की क्षतिपूर्ति
 - + ब्याज
 - + अंश धारकों के लाभांश
 - + निगम कर तथा अन्य प्रत्यक्ष कर
 - + फर्मों की आरक्षित निधियां तथा निगम बचतें
 - + स्वरोजगार से मिश्रित आय
 - + सम्पत्ति तथा उद्यम से प्राप्त सरकारी आय
 - + गैर-विभागीय उपक्रमों की बचतें।
- (iv) शुद्ध साधन आय ही शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद है।

$NNP \text{ at FC or NI} = NDP \text{ at FC} + \text{विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।}$

- (v) इस शुद्ध साधन आय ज्ञात करने के लिए यह ध्यान दिया जाना चाहिए कि केवल उत्पादक तथा वैधानिक स्रोतों से प्राप्त आय को ही राष्ट्रीय आय में शामिल किया जाना चाहिए। साधन आय की गणना में निम्नलिखित सावधानियाँ रखनी चाहिए।
 - (a) हस्तांतरण आय को राष्ट्रीय आय में सम्मिलित नहीं किया जाना चाहिए, क्योंकि उससे सम्बन्धित किसी वस्तु या सेवा का उत्पादन या सृजन नहीं होता है।
 - (b) आरोपित लगान को शामिल किया जाना चाहिए।
 - (c) अवैध आय को शामिल नहीं किया जाना चाहिए।
 - (d) अप्रत्याशित लाभ जैसे— लॉटरी आदि को भी शामिल नहीं किया जाना चाहिए।
 - (e) निगम कर आय का हिस्सा है और इसलिए शामिल किया जाना चाहिए।
 - (f) उपहार कर, सम्पत्ति पर कर और अप्रत्याशित लाभ पर कर को शामिल नहीं किया जाना चाहिए क्योंकि वे चालू आय से भुगतान नहीं किये जाते हैं।
 - (g) पुरानी वस्तु का पुर्नबिक्रय से प्राप्त आय को भी शामिल नहीं करना चाहिए क्योंकि उससे सम्बन्धित उत्पादन नहीं किया गया होता है।

- (h) राष्ट्रीय ऋण पर ब्याज भी हस्तान्तरण आय है इसलिए इसे भी शामिल नहीं किया जाना चाहिए।

5.1.6.3 व्यय विधि

व्यय विधि के द्वारा किसी अर्थव्यवस्था में एक वर्ष में सकल घरेलू उत्पाद पर किये गये अंतिम व्यय के समग्र योग के रूप में राष्ट्रीय आय का मापन किया जाता है। दूसरे शब्दों में, व्यय विधि सकल घरेलू व्यय का मापन करती है। इससे “उपभोग और निवेश विधि” तथा “आय-व्यय विधि” के नमा से भी जाना जाता है। अंतिम व्यय का अर्थ, अंतिम वस्तुओं पर किया गया व्यय है। किसी अर्थव्यवस्था की कुल आय (Y) या तो उपभोग वस्तुओं (C) पर खर्च की जाती है या निवेश वस्तुओं (I) पर। प्रतीकात्मक रूप में,

$$Y = C + I$$

अंतिम उपभोग व्यय में निम्नलिखित शामिल है:

- (a) घरेलू क्षेत्र का उपभोग व्यय।
- (b) सरकारी अंतिम व्यय।

इसी प्रकार, अंतिम निवेश व्यय में (a) सकल अंतिम निवेश या सकल स्थिर पूंजी निवेश, (b) न बिके हुए स्टॉक में परिवर्तन: (c) विदेशों में शुद्ध निवेश या वस्तुओं तथा सेवाओं का शुद्ध निर्यात शामिल है।

व्यय विधि के चरण: व्यय विधि राष्ट्रीय आय की गणना में निम्नलिखित चरण शामिल होते हैं:

- (i) GDP at MP = सकल राष्ट्रीय व्यय = निजी अंतिम उपभोग व्यय (C)
 - + अंतिम सरकारी उपभोग व्यय (G)
 - + सकल घरेलू निजी निवेश (I) ; जिसमें सकल स्थिर पूंजी निर्माण तथा स्टॉक में परिवर्तन है।
 - + शुद्ध निर्यात या (X-M)

$$\text{या, GDP at MP} = \text{GNE} = C + I + G + (X-M)$$

- (ii) बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद में विदेशों से शुद्ध साधन आय को जोड़कर हम बाजार मूल्य पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद को ज्ञात कर लेते हैं। इस प्रकार,

$$\text{GNP at MP} = \text{GDP at MP} + \text{विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय।}$$

- (i) बाजार मूल्य पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद में से निवल अप्रत्यक्ष करों को घटा कर हम साधन लागत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद ज्ञात कर लेते हैं। इस प्रकार,

$$\text{GNP at FC} = \text{GNP at MP} - \text{शुद्ध अप्रत्यक्ष कर।}$$

- (ii) साधन लागत पर सकल राष्ट्रीय उत्पाद में से ह्रास को घटा कर हम राष्ट्रीय आय या साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद ज्ञात कर लेते हैं। इस प्रकार,

$$\text{NNP at MP} = \text{GNP at FC} - \text{ह्रास (D)।}$$

व्यय विधि में सावधानियां:-

- (i) पुरानी या दूबारा बेंची जाने वाली वस्तुओं पर किया गया व्यय शामिल नहीं किया जाना चाहिए।
- (ii) बॉण्ड तथा शेयरों पर किया गया व्यय भी शामिल नहीं किया जाना चाहिए क्योंकि इसके लिए लिया गया भुगतान वस्तु अथवा सेवा के लिए नहीं किया जाता है।
- (iii) हस्तान्तरण के रूप में सरकारी व्यय भी शामिल नहीं किया जाना चाहिए, क्योंकि इससे कोई वस्तु या सेवा के रूप योगदान नहीं किया जाता है।

- (iii) मध्यवर्ती वस्तुओं पर किये गये व्यय को भी शामिल नहीं किया जाना चाहिए, क्योंकि इससे दोहरी गणना की समस्या खड़ी हो जायेगी।

5.1.6.4 तीनों विधियों का समन्वय

चूँकि उपरोक्त तीनों विधियों से भौतिक उत्पादन का मापन तीन स्तरों पर किया जाता है जो कि उत्पादन, वितरण और व्यय के स्तर या चरण है। इसलिए उनसे राष्ट्रीय आय का एक ही मान प्राप्त होता है। निम्न चार्ट से उपरोक्त तीनों विधियों का समन्वय स्पष्ट हो जाता है जो कि बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद की गणना करता है:

चार्ट 1: तीनों विधियों से बाजार मूल्य पर सकल घरेलू उत्पाद

उत्पाद विधि	आय विधि	व्यय विधि
➤ साधन लागत पर प्राथमिक क्षेत्र में निवल मूल्य वर्धन +	● रोजगार क्षतिपूर्ति +	❖ निजी अंतिम उपभोग व्यय +
➤ साधन लागत पर द्वितीयक क्षेत्र में निवल मूल्य वर्धन +	● लगान + ब्याज +	❖ सरकारी क्षेत्र का अंतिम उपभोग व्यय +
➤ साधन लागत पर तृतीयक क्षेत्र में निवल मूल्य वर्धन +	● स्वरोजगार से मिश्रित आय +	❖ सकल पूंजी निर्माण + वस्तुएं तथा सेवाएं
➤ ह्रास या स्थिर पूंजी का उपभोग +	● ह्रास या स्थिर पूंजी का उपभोग +	
➤ शुद्ध अप्रत्यक्ष कर	● शुद्ध अप्रत्यक्ष कर	
= बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद	= बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद	= बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद

संख्यात्मक या गणितीय उदाहरण: निम्नलिखित उदाहरण से तीनों विधियों के द्वारा प्राप्त राष्ट्रीय की समानता स्पष्ट होती है।

A. उत्पादन या मूल्य वर्धन विधि	
	करोड़ रुपये में
1. साधन लागत पर प्राथमिक क्षेत्र में शुद्ध मूल्य वर्धन	2000
2. साधन लागत पर द्वितीयक क्षेत्र में शुद्ध मूल्य वर्धन	1100
3. साधन लागत पर तृतीयक क्षेत्र में शुद्ध मूल्य वर्धन	1000
4. स्थिर पूंजी प्रयोग	500
5. अप्रत्यक्ष कर	850
6. '—' आर्थिक सहायता	—150
7. साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद	5300
8. '—' शुद्ध अप्रत्यक्ष कर अर्थात् अप्रत्यक्ष कर — आर्थिक सहायता	700
9. साधन लागत पर निवल घरेलू उत्पाद	4600
10. '—' स्थिर पूंजी उपभोग	500
11. साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद	4100
12. विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय	100
13. साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय	4200
B. आय विधि	
	करोड़ रुपये में
1. रोजगार क्षतिपूर्ति	1500

2. ब्याज, लगान, और लाभ	600
3. स्वरोजगार से मिश्रित आय	2000
4. अप्रत्यक्ष कर	850
5. '—' आर्थिक सहायता	150
6. स्थिर पूंजी का उपभोग	500
7. साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद	5300
8. '—' निवल अप्रत्यक्ष कर	— 700
9. साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद	4600
10. '—' स्थिर पूंजी का उपभोग	500
11. साधन लागत पर शुद्ध घरेलू आय	4100
12. विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय	100
13. साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय आय या राष्ट्रीय आय	4200
C. व्यय विधि	
	करोड़ रुपये में
1. निजी अंतिम उपभोग व्यय	3500
2. सरकारी अंतिम उपभोग व्यय	600
3. स्थिर वस्तुओं तथा सेवाओं का मूल्य	1000
4. स्टॉक में परिवर्तन	300
5. वस्तुओं तथा सेवाओं का निर्यात	400
6. '—' वस्तुओं तथा सेवाओं का आयात	—550
7. बाजार कीमत पर सकल घरेलू उत्पाद	5300
8. '—' शुद्ध अप्रत्यक्ष कर अर्थात् 850—150	700
9. साधन लागत पर सकल घरेलू उत्पाद	4600
10. '—' स्थिर पूंजी का उपभोग	—500
11. साधन लागत पर शुद्ध घरेलू उत्पाद	4100
12. विदेशों से प्राप्त शुद्ध साधन आय	100
13. साधन लागत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद या राष्ट्रीय आय	4200

5.1.7 राष्ट्रीय आय के आंकलन में कठिनाईयाँ

राष्ट्रीय आय के आंकलन में कई धारणात्मक तथा सांख्यिकीय कठिनाईयाँ सामने आती हैं। उनमें से कुछ महत्वपूर्ण निम्नलिखित हैं:

1. **राष्ट्र या देश के घरेलू सीमा की परिभाषा:** सबसे महत्वपूर्ण 'राष्ट्र' शब्द को परिभाषित करने की समस्या है। राष्ट्रीय आय की गणना में राष्ट्र की अवधारणा राजनीतिक सीमाओं से परे है। राष्ट्रीय आय में न केवल देश की भौगोलिक सीमा के भीतर उत्पादित आय शामिल की जाती है बल्कि राष्ट्र के साधनों द्वारा विदेशों में अर्जित आय भी शामिल होती है।
2. **वस्तुओं के चुनाव की समस्या:** वस्तुओं तथा सेवाओं के चुनाव की समस्या होती है। सामान्यतः जो वस्तुएं तथा सेवाएं मुद्रा से होकर गुजरती हैं उन्हें ही शामिल किया जाता है लेकिन कुछ वस्तुएं और सेवाएं मुद्रा से होकर नहीं गुजरती हैं। प्रेम तथा दया से की गई सेवाएं का मूल्य तो होता है परन्तु उनका मौद्रिक मूल्य नहीं अदा किया जाता है। समस्या यह है कि इस प्रकार की वस्तुओं को शामिल किया जाय या नहीं, यदि हां तो इनका मौद्रिक मूल्य कैसे मापा जाये।
3. **गणना के विधि का चुनाव:** विभिन्न विधियों के बीच चुनाव की भी समस्या होती है। इस सम्बन्ध में सामान्य विचार है कि आंकड़ों की उपलब्धता के आधार पर सभी तीनों विधियों को एक साथ प्रयोग करना चाहिए।

4. **आर्थिक क्रियाकलापों का स्तर:** एक अन्य समस्या यह है कि आर्थिक क्रियाओं के किस चरण में राष्ट्रीय आय की माप की जाय। सर्वमान्य विचार यह है कि उत्पादन, वितरण तथा व्यय में से किसी भी एक चरण को अपने उद्देश्य के अनुसार चुना जा सकता है। यदि उद्देश्य अर्थव्यवस्था की क्षमता तथा आर्थिक संवृद्धि प्रदर्शित करना हो तो उत्पादन का चरण अधिक अनुकूल होगा।
5. **दोहरी गणना:** दोहरी गणना राष्ट्रीय आय आंकलन की प्रमुख समस्या है। इसका तात्पर्य किसी वस्तु की दो बार गणना करना है। इस से बचने के लिए केवल अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं को, गणना में शामिल किया जाना चाहिए।
6. **हस्तान्तरण भुगतान:** हस्तान्तरण भुगतान भी एक समस्या है क्योंकि पेंशन, बेरोजगारी भत्ता, व्याज, आदि के रूप में प्राप्त आय को राष्ट्रीय आय में शामिल किया जाये या नहीं इस संबंध में कठिनाईयाँ हैं। ये भुगतान निजी या सरकारी हो सकते हैं। इस समस्या के निदान के लिए केवल व्यय योग्य आय पर विचार किया जाना चाहिए।
7. **अवैधानिक आय:** गैर-कानूनी तरीके से अर्जित आय को राष्ट्रीय आय में शामिल नहीं किया जाता है। इस लिए इस प्रकार की आय को अलग रखना चाहिए।
8. **आंकड़ों की अनुपलब्धता:** राष्ट्रीय आय अनुमान में सांख्यिकीय आंकड़ों की उपलब्धता की भी समस्या है। पर्याप्त तथा विश्वसनीय आंकड़ों की समस्या न केवल विकासशील देशों में है बल्कि विकसित देशों में भी है।
9. **गैर-मौद्रिक क्षेत्र:** राष्ट्रीय आय की गणना में गैर मौद्रिक क्षेत्र की कठिनाईयाँ भी हैं। ये समस्या प्रमुखतया अल्पविकसित देशों से संबंधित हैं। जहाँ, कुल उत्पादन का एक बड़ा भाग बाजार में बिकने नहीं आता है। एक बड़ा हिस्सा या तो स्व-उपभोग के लिए रख लिया जाता है या अन्य वस्तुओं से बदल लिया जाता है।
10. **ह्रास का मूल्यांकन:** सकल राष्ट्रीय उत्पाद से शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद की गणना के लिए ह्रास को सकल घरेलू उत्पाद से घटाना पड़ता है परन्तु, ह्रास का मूल्यांकन सांख्यिकीय समस्या उत्पन्न करता है जैसे पूंजी स्टॉक की आयु, पूंजीगत वस्तु के मूल्य में वर्ष-दर-वर्ष परिवर्तन आदि।
11. **कीमत स्तर में परिवर्तन:** राष्ट्रीय आय मुद्रा के रूप में व्यक्त की जाती है। परन्तु, कीमत स्तर में परिवर्तन होने के कारण मौद्रिक पैमाना स्थिर नहीं रहता है। इसका अर्थ है कि उत्पादन में परिवर्तन न होने पर भी राष्ट्रीय आय का मौद्रिक मान परिवर्तित हो सकता है। इस समस्या के हल के लिए वास्तविक राष्ट्रीय आय की अवधारणा का विकास हुआ है जिसका मूल्यांकन आधार वर्ष की कीमत पर किया जाता है। परन्तु तब कीमत सूचकांक के निर्माण की समस्या उत्पन्न होती है।
12. **विकासशील देशों की समस्याएँ:** भारत जैसे विकासशील देशों में धारणात्मक तथा सांख्यिकीय समस्याएँ अधिक जटिल हो जाती हैं। प्रमुख कठिनाईयाँ निम्नलिखित हैं:
 - (i) उत्पादन का बड़ा भाग मुख्यतः कृषि क्षेत्र से बाजार में बिक्रय हेतु नहीं लाया जाता है। यह या तो उत्पादक द्वारा स्वयं उपभोग किया जाता है अथवा वस्तु से विनिमय कर लिया जाता है।
 - (ii) लोग पिछड़े हुए तथा अन्धविश्वासी हैं और वे सही-सही अपनी आय की जानकारी नहीं देते हैं।
 - (iii) निरक्षरता के कारण कई उत्पादक अपने बही-खाते का हिसाब-किताब नहीं रखते हैं।

- (iv) औद्योगिक क्षेत्र की आय की गणना करना कठिन होता है क्योंकि इन देशों में विशेषीकरण बहुत कम होता है और लोग एक ही समय कई आर्थिक क्रियाकलापों में लगे होते हैं।
- (v) पर्याप्त आर्थिक आंकड़े उपलब्ध नहीं होते यदि हैं भी तो विश्वसनीय नहीं होते हैं।
- (vi) प्रशिक्षित सांख्यिकीय अधिकारियों की कमी होती है।
- (vii) क्षेत्रीय भिन्नताओं तथा प्रथाओं के कारण भी राष्ट्रीय आय की गणना में कठिनाईयां उत्पन्न होती हैं।
- (viii) अधिकांशतः लोग राष्ट्रीय आय लेखांकन में सहयोग नहीं करते हैं तथा तटस्थता प्रदर्शित करते हैं।

5.1.8 राष्ट्रीय आय अध्ययन का महत्व

राष्ट्रीय आय की गणना अर्थव्यवस्था की वास्तविक उपलब्धियों तथा भविष्य की योजनाओं के निर्माण हेतु अत्यधिक महत्वपूर्ण है। राष्ट्रीय आय आकलन का बढ़ता हुआ महत्व निम्नलिखित कारणों से है:

1. **आर्थिक संरचना का सूचक:** राष्ट्रीय आय अनुमान अर्थव्यवस्था की संरचना का एक महत्वपूर्ण सूचक है। इससे हमें यह पता चलता है कि देश में आय का अर्जन तथा व्यय कैसा है। अर्थव्यवस्था के विभिन्न क्षेत्रों तथा राष्ट्रीय आय में उनके योगदान का ज्ञान प्रदान करते हैं।
2. **आर्थिक कल्याण का सूचक:** राष्ट्रीय आय देश के निवासियों के आर्थिक कल्याण का सूचक है। इन आंकड़ों के आधार पर विभिन्न देशों के निवासियों के जीवन स्तर की तुलना की जा सकती है तथा उसी देश के लोगों की विभिन्न समय पर जीवन स्तर की तुलना की जा सकती है।
3. **आर्थिक नीतियों में सहायक:** राष्ट्रीय आय संबंधी आंकड़े समग्र अर्थव्यवस्था के आर्थिक क्रिया कलापों पर प्रकाश डालते हैं। वे आर्थिक विकास हेतु आर्थिक नीतियों की उपलब्धियों की समीक्षा करते हैं।
4. **आर्थिक आयोजन में सहायक:** राष्ट्रीय आय के आंकड़े आर्थिक आयोजन के महत्वपूर्ण यंत्र हैं। किसी योजना का निर्माण करते समय पूर्व में राष्ट्रीय आय की प्रवृत्तियों का ज्ञान आवश्यक होता है।
5. **मुद्रा स्फीति एवं अवस्फीतिक अंतराल:** राष्ट्रीय आय के आंकड़े किसी अर्थव्यवस्था के स्फीतिक अंतराल तथा अवस्फीतिक अंतराल की सूचना प्रदान करते हैं। इस प्रकार वे स्फीति तथा अवस्फीति के विरोधी आर्थिक नीतियों के निर्माण में सहायता करते हैं।
6. **अंतराष्ट्रीय परिप्रेक्ष्य में महत्व:** अंतराष्ट्रीय पृष्ठभूमि में भी राष्ट्रीय आय के आंकड़े महत्वपूर्ण हैं;
 - a) वे अंतराष्ट्रीय भुगतान दायित्व के आवंटन में मदद करते हैं,
 - b) इसके माध्यम से विभिन्न अंतराष्ट्रीय संस्थाओं में जैसे, अंतराष्ट्रीय मुद्रा कोष, संयुक्त राष्ट्र संघ, आई.बी.आर.डी. में विभिन्न देशों का कोटा निर्धारित किया जाता है।
7. **सहायता अनुदान का निर्धारण:** राष्ट्रीय आय के माध्यम से संघ सरकार राज्यों को दिये जाने वाले अनुदान का निर्धारण करती है।

8. **बजट नीति का आधार:** अब सरकारें राष्ट्रीय आय की सांख्यिकीय आंकड़ों के आधार पर बजट बनाती है तथा कर एवं ऋण नीतियों में बदलाव करती है ताकि राष्ट्रीय आय के उच्चावचल को रोका जा सके।
9. **संरक्षा तथा विकासात्मक महत्व:** राष्ट्रीय आय लेखांकन हमें अर्थव्यवस्था में सुरक्षा तथा विकासात्मक व्यय आबंटन में मदद करता है। यह हमें बताता है कि राष्ट्रीय आय का कितना भाग रक्षा पर व्यय किया जा सकता है।
10. **ह्रास की पूर्ति:** राष्ट्रीय आय में यह स्पष्ट किया जाता है कि कैसे राष्ट्रीय आय का बंटवारा उपभोग व्यय तथा निवेश व्यय में किया जाता है। आगे यह हमें ह्रास के माध्यम से पूंजी स्टॉक को बनाये रखने के लिए आवश्यक निवेश की मात्रा बताता है। ह्रास से कम निवेश का अर्थ पूंजी स्टॉक में कमी तथा ह्रास से अधिक निवेश का अर्थ उपभोग में अनावश्यक कमी करना होगा।
11. **सार्वजनिक क्षेत्र का महत्व:** राष्ट्रीय आय के आंकलन से अर्थव्यवस्था में निजी तथा सार्वजनिक क्षेत्र के योगदान पर प्रकाश डाला जाता है। इन अनुमानों के आधार पर सरकार सार्वजनिक क्षेत्र के लिए भविष्य भविष्य में व्यय का निर्धारण करती है।
12. **विकासशील देशों में महत्व:** राष्ट्रीय आय के आंकड़े अल्पविकसित तथा विकासशील देशों जैसे— भारत में विशेष रूप से महत्वपूर्ण हैं। वे इन देशों में पिछड़े हुए क्षेत्रों पर प्रकाश डालते हैं और समुचित आर्थिक नीति के निर्माण में सहायता प्रदान करते हैं।
13. **सामाजिक लेखांकन का आधार:** राष्ट्रीय आय संबंधी आंकड़े सामाजिक लेखांकन या राष्ट्रीय आय लेखांकन का आधार है। सामाजिक लेखांकन राष्ट्रीय आय के आंकड़ों का व्यवस्थित लेखा—जोखा तथा उनका प्रस्तुतीकरण है। सामाजिक लेखांकन का उद्देश्य राष्ट्रीय आय आंकड़ों का विभिन्न क्षेत्रों के बीच अन्तर्संबंधों पर प्रकाश डालना है।
14. **आर्थिक विश्लेषण में महत्व:** राष्ट्रीय आय अनुमान हमें अर्थव्यवस्था की संरचना, वृद्धि तथा कार्य—कारण का विश्लेषण करने में सहायक होता है। वे आर्थिक संवृद्धि के अध्ययन में महत्वपूर्ण है। विभिन्न क्षेत्रों की प्रवृत्तियों, अर्थव्यवस्था में उनका योगदान तथा समग्र आर्थिक चरों जैसे— समग्र उपभोग, समग्र निवेश, समग्र बचत आदि के विश्लेषण में सहायक होते हैं।

निष्कर्षतः सैमुएलन के शब्दों में “राष्ट्रीय आय के आंकड़ों के द्वारा हम देश को मंदी से संवृद्धि की ओर, इसके दीर्घकालीन स्थिर विकास दर, और अंतिम रूप से अन्य देशों की तुलना में जीवन स्तर के भौतिक स्वरूप का चित्रांकन कर सकते हैं।”

5.1.9 इकाई का सारांश

राष्ट्रीय आय आंकलन हमें यह बताता है कि कैसे आय का वितरण मजदूरी, ब्याज, लाभ तथा लगान में होता है। राष्ट्रीय आय को किसी राष्ट्र के आर्थिक क्रियाकलापों का सूचकांक माना जाता है। यदि राष्ट्रीय आय घटती है तो सरकार करों में कटौती करती है ताकि लोगों के पास खर्च के लिए अधिक आय रहे। सकल राष्ट्रीय उत्पाद, किसी देश द्वारा एक वर्ष में उत्पादित अंतिम वस्तुओं तथा सेवाओं का मौद्रिक मूल्य तथा विदेशों से प्राप्त शुद्ध आय का योग है। राष्ट्रीय आय के प्रमुख अवधारणायें, जी.एन.पी., जी.डी.पी., एन.एन.पी., व्यक्तिगत आय और व्यय योग्य आय है। वास्तविक आय, वर्तमान राष्ट्रीय आय का किसी आधार वर्ष के मूल्य निर्देशांक के आधार पर प्रस्तुतीकरण है।

5.1.10 मुख्य शब्द

- राष्ट्रीय आय: किसी दिये गये निश्चित समय अवधि में राष्ट्र के समस्त सृजित आय के योग को ही राष्ट्रीय आय कहते हैं।
- घरेलू आय या उत्पाद आय: देश के समस्त उत्पादन इकाइयों द्वारा अपने संसाधनों का प्रयोग करके उत्पादन को सृजित करना ही घरेलू उत्पाद कहलाता है।
- मूल्य वर्धन विधि: प्रचलित कीमत पर एक वर्ष के दौरान उत्पादित वस्तुओं एवं सेवाओं के मौद्रिक मूल्य को ही आकलित किया जाता है।

5.1.11 अपने प्रगति का मुल्यांकन (बहुविकल्पीय/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(A) खाली स्थानों को भरें

- (j) _____ से तात्पर्य किसी दिये गये निश्चित समय अवधि में राष्ट्र के अर्न्तगत कुल आय के योग से हैं।
- (k) किसी देश के घरेलू सीमा में एक निश्चित समय अवधि में उत्पादित समस्त वस्तुओं एवं सेवाओं के अंतिम मूल्य को ही बाजार कीमत पर _____ उत्पाद कहते हैं।
- (l) बाजार कीमत पर सकल राष्ट्रीय आय से घिसावट को घटाने पर _____ प्राप्त होता है।
- (m) _____, किसी देश के घरेलू क्षेत्र द्वारा सभी स्रोतों से प्राप्त कुल आय है जिसमें प्रत्यक्ष कर शामिल नहीं है।

5.1.12 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी

- (A) (i) राष्ट्रीय आय, (ii) सकल घरेलू उत्पाद, (iii) बाजार कीमत पर शुद्ध राष्ट्रीय उत्पाद, (iv) व्यक्तिगत आय।

5.1.13 सावधिक एवं मॉडल प्रश्न

1. “राष्ट्रीय आय” से आप क्या समझते हैं? एक देश के राष्ट्रीय आय का आंकलन आप किस तरह से करेंगे?
2. “राष्ट्रीय आय के चक्रीय प्रवाह” से आप क्या समझते हैं? मुक्त निजी अर्थव्यवस्था में आय के प्रवाह का वर्णन करें।
3. राष्ट्रीय आय के आंकलन में होने वाली विभिन्न कठिनाइयां क्या हैं?
4. निम्नलिखित पर लघु टिप्पणी लिखें:
 - (a) आय विधि
 - (b) व्यय विधि
 - (c) उत्पाद विधि
5. आय वितरण विधि से राष्ट्रीय आय आंकलन के लिए प्रयोग किये जाने वाले सोपानों का उल्लेख करें।
6. व्यय विधि से राष्ट्रीय आय के आंकलन के प्रमुख चरणों क्या हैं?
7. एक अर्थव्यवस्था में समग्र अंतिम व्यय और समग्र साधन भुगतान क्यों बराबर होंगे? वर्णन करें।
8. किस प्रकार आय वितरण विधि से संग्रहित राष्ट्रीय आय के संमंकों का प्रयोग एक अर्थव्यवस्था के बारे में निर्णय लेने के लिए उपयोगी हैं, वर्णन करें।
9. राष्ट्रीय आय को परिभाषित करें। राष्ट्रीय आय के उत्पाद, आय एवं व्यय, समताओं के बीच संबंध का वर्णन करें।
10. राष्ट्रीय आय के मूल्य वर्धन विधि की चर्चा करें।
11. राष्ट्रीय आय का महत्व आर्थिक विश्लेषण के अध्ययन एवं आर्थिक नीतियों के निर्माण के संदर्भ में करें।

5.1.14 संदर्भ पुस्तकें

12. J. K. Thukral, "Business Statistics" Taxmann Publications (P.) Ltd. New Delhi, India.
13. D.N. Elhance, Veena Elhance and B.M. Aggarwal, "Fundamentals of Statistics", Kitab Mahal Agencies, Sarojini Naidu Marg, Allahabad, India.
14. S.P. Gupta, "Statistical Methods", Sultan Chand and Sons Educational Publisher, New Delhi, India.
15. एस. एन. लाल व एस. के. चौधरी (2010), परिमाणात्मक वि"लेषण, री"व पब्लिसिंग हाउस, प्रयागराज (इलाहाबाद)।
16. बंसल, डॉ० एस० एन०, एवं अग्रवाल, डॉ० डी० आर०, (1978) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, शिवलाल अग्रवाल एण्ड कम्पनी, आगरा।
17. सिंह, एस० पी०, (1997) सांख्यिकी-सिद्धान्त एवं व्यवहार, एस० चन्द एण्ड कम्पनी लिमिटेड, नई दिल्ली।
18. अवस्थी, जी० डी० एवं निगम, सुधीर कुमार, (2007) सांख्यिकीय विश्लेषण , भारत बुक सेन्टर, लखनऊ।
19. नागर, कैलाश नाथ, (2005) सांख्यिकी के मूल तत्त्व, मिनाक्षी प्रकाशन, मेरठ।
20. Goon, Gupta and Dasgupta, *A Fundamental of Statistics*, Volume – I, The World Press Private Limited.
21. Digambar Patri, "Business Statistics", Kalyani Publishers, Ludhiyana, India. Naval Bajpai, "Business Statistics", Pearson publication, Delhi, India.
22. R.P. Hooda, "Statistics for Business and Economics", Mac Millan India Ltd., Delhi, India.

.....

खण्ड-5

इकाई-02

समष्टि आंकड़ों की प्रकृति एवं स्रोत: मूल्य स्तर एवं मुद्रा की पूर्ति

संरचना:

- 5.2.1 परिचय
- 5.2.2 मूल्य स्तर का अर्थ
- 5.2.3 मुद्रा का मात्रात्मक सिद्धान्त
- 5.2.4 इकाई का सरांश
- 5.2.5 मुख्य शब्द
- 5.2.6 अपने प्रगति का मूल्यांकन (बहुविकल्पीय चयन/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 5.2.7 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 5.2.8 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न
- 5.2.9 संदर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन के उपरान्त हम इस स्थिति में होंगे:

- भारतीय सांख्यिकी के विकास का वर्णन
- सांख्यिकी के संकलन में आने वाली कठिनाईयों का वर्णन
- कुल क्षेत्र एवं वर्गीकृत क्षेत्र का वर्णन
- भारत में कृषि जनगणना का वर्णन

5.2.1 परिचय

मूल्य स्तर एक अर्थव्यवस्था में उत्पादित वस्तुओं और सेवाओं के पूरे मात्राओं में मौजूदा मूल्य स्तर एक औसत है। सरल शब्दों में, मूल्य स्तर अर्थव्यवस्था में किसी वस्तु, सेवा या सुरक्षा की कीमत या लागत को प्रदर्शित करता है। मूल्य स्तरों को छोटी श्रेणियों में व्यक्त किया जा सकता है, जैसे प्रतिभूतियों की कीमतों के साथ रुपये या डॉलर के आंकड़ें जैसे असतत मूल्य के रूप में प्रस्तुत किया गया। अर्थशास्त्र में, मूल्य स्तर एक प्रमुख संकेतक हैं और अर्थशास्त्रियों द्वारा गहनता से देखे जाते हैं। वे उपभोक्ताओं की क्रय शक्ति के साथ-साथ वस्तुओं और सेवाओं की बिक्री में महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं। यह आपूर्ति मांग श्रृंखला में भी महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

यदि वस्तुओं और सेवाओं की कीमतें बहुत तेजी से बढ़ती हैं तब अर्थव्यवस्था मुद्रास्फीति का अनुभव करती है, ऐसे में देश के केन्द्रीय बैंक मुद्रा पूर्ति की मात्रा को नियंत्रित करने हेतु अपनी मौद्रिक नीति में परिवर्तन करते हुए ब्याज दरों को बढ़ाता है, जिससे अर्थव्यवस्था में मुद्रा पूर्ति की मात्रा कम हो जाती है और मुद्रा स्फीति में गिरावट होने लगती है। जब मुद्रा के अभाव में वस्तुओं एवं सेवाओं की मांग घटने लगती है, जिससे कीमत स्तर में भी कमी होती है। यदि कीमतें बहुत तेजी से घटने लगती हैं, तो केन्द्रीय बैंक इसके विपरीत कार्य करती है अर्थात् मुद्रा पूर्ति में वृद्धि करते हुए मौद्रिक नीति में परिवर्तन करते हुए ब्याज दर को कम करके साख सृजन को प्रोत्साहित करती है। इसके फलस्वरूप, मुद्रा पूर्ति में वृद्धि होती है और कीमत स्तर पहले के तुलना में और अधिक बढ़ जाता है।

यद्यपि मूल्य स्तर का दूसरा अर्थ बाजार में कारोबार की गई संपत्ति जैसे स्टॉक या बॉण्ड कीमत को भी संदर्भित करता है, जिसे अक्सर समर्थन एवं प्रतिरोध के रूप में भी समझा जा सकता है। जैसे अर्थव्यवस्था में मूल्य की परिभाषा के मामले में होती है, किसी प्रतिभूति की कीमत घटने पर उसकी मांग बढ़ जाती है यह सपोर्ट लाइन बनाता है। जब कीमत बढ़ती है, तो बिकवाली होती है, मांग में कटौती होती है। यहीं पर प्रतिरोध क्षेत्र स्थित है।

अर्थशास्त्र में, कीमत स्तर पैसे या मुद्रास्फीति की क्रय शक्ति को संदर्भित करता है। दूसरे शब्दों में, अर्थशास्त्री यह देखते हुए अर्थव्यवस्था की स्थिति का वर्णन करते हैं कि एक डॉलर की मुद्रा से लोग किसी वस्तु एवं सेवा विशेष की कीमत इकाई खरीद सकते हैं। इसके माप के लिए आम तौर पर कीमत सूचकांक मुख्य रूप से उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का प्रयोग किया जाता है।

5.2.2 मूल्य स्तर का अर्थ

- वास्तव में मूल्य स्तर अर्थव्यवस्था में उत्पादित वस्तुओं और सेवाओं की वर्तमान कीमत का औसत है।
- मूल्य स्तर छोटी श्रेणियों में या असतत मूल्यों जैसे डॉलर के आंकड़ों के रूप में व्यक्त किये जाते हैं।
- कीमत स्तर अर्थव्यवस्था में अग्रणी संकेतक हैं, जो कीमतों में वृद्धि होने पर मुद्रास्फीति की ओर ले जाने वाली अत्यधिक मांग का संकेत देती है जबकि कीमतों में गिरावट कम मांग या अपस्फीति का संकेत देती है।
- निवेश की दुनिया में, मूल्य स्तर का समर्थन और प्रतिरोध के रूप में संदर्भित किया जाता है, जो प्रवेश और निकास बिन्दुओं को परिभाषित करने में मदद करता है।

2.2.1 मुद्रा की पूर्ति

आधुनिक अर्थव्यवस्था में, मुद्रा के अन्तर्गत नकदी एवं बैंक जमाएँ आती हैं। किस प्रकार की बैंक जमाओं को सम्मिलित किया जाता है।, इस आधार पर मुद्रा के अनेक माप हैं। एक व्यवस्था में, यह तीन प्रकार की संस्थाओं द्वारा निर्मित किए जाते हैं— देश की केन्द्रीय बैंक, देश की सरकार एवं व्यवसायिक बैंकिंग व्यवस्था।

केन्द्रीय बैंक: आधुनिक अर्थव्यवस्था में, केन्द्रीय बैंक एक अति महत्वपूर्ण संस्था है। लगभग प्रत्येक देश का अपना केन्द्रीय बैंक है। भारत को अपना केन्द्रीय बैंक सन् 1935 ई. में मिला। इसका नाम 'रिजर्व बैंक ऑफ इण्डिया' है। केन्द्रीय बैंक के अनेक महत्वपूर्ण कार्य हैं। यह देश की मुद्रा का निर्गमन करता है। यह अनेक उपायों द्वारा जैसे बैंक दर, खुले बाजार की क्रियाएँ, कोष अनुपातों में परिवर्तन द्वारा देश में मुद्रा पूर्ति को नियंत्रित करत है। यह सरकार एवं बैंकों के बैंकर के रूप में कार्य करता है। यह अर्थव्यवस्था के विदेशी कोषों का संरक्षक है। यह बैंकिंग व्यवस्था के लिए बैंक की भाँति कार्य करता है जिसकी आगे विस्तृत रूप में चर्चा की गई है।

मुद्रा की पूर्ति के दृष्टिकोण से, हमें इसके करेंसी निर्गमन कार्य पर विशेष ध्यान अंकित करना है। भारतीय अर्थव्यवस्था में दो रुपये से दस हजार तक की पत्र मुद्राएँ केन्द्रीय बैंक के द्वारा निर्गमित किये जा सकते हैं किन्तु अभी दो रुपये से लेकर पाँच सौ रुपये तक की ही मुद्राएँ निर्गत की जाती हैं। केन्द्रीय बैंक द्वारा निर्गमित मुद्राएँ, जनता के पास हो सकती हैं अथवा व्यावसायिक बैंकों के पास, इसे 'उच्च शक्ति द्रव्य' कहा जाता है अथवा 'रिजर्व द्रव्य' अथवा 'मौद्रिक आधार' क्योंकि यह साख निर्माण के आधार के रूप में कार्य करता है।

केन्द्रीय सरकार: भारतीय अर्थव्यवस्था में केन्द्रीय सरकार एक रुपये एवं सिक्कों का निर्गमन करती है। एक रुपये के पत्र मुद्रा में वित्तीय सचिव का हस्ताक्षर होता है।

व्यावसायिक बैंक: व्यापारिक बैंक, तीसरे प्रकार की संस्थाएँ हैं जो द्रव्य निर्माण अर्थव्यवस्था का एक भाग हैं। यह जनता से जमा स्वीकार करते हैं, और इस कोष का कुछ भाग उन लोगों को देते हैं जो ऋण लेना चाहते हैं। बैंकों द्वारा केन्द्रीय बैंकों को दिया जाने वाला व्याज दर लोगों को दिये जाने वाले ऋण पर ब्याज दर से कम होता है। इन दो प्रकार की ब्याज दरों का अन्तर, जिसे 'स्प्रेड' कहते हैं, बैंक का लाभ होता है।

मुद्रा पूर्ति के नियंत्रण के नीतिगत उपकरण

रिजर्व बैंक एक मात्र संस्था है जो मुद्रा निर्गमित कर सकती है। अधिक साख सृजन के लिए व्यापारिक बैंकों को अधिक कोषों की आवश्यकता होती है।

5.2.3 मुद्रा का परिमाण सिद्धान्त

यह सिद्धान्त बताता है कि मुद्रा का परिमाण ही कीमत-स्तर अथवा मुद्रा के मूल्य का मुख्य निर्धारक है। यदि मुद्रा के परिमाण में परिवर्तन होगा तो वह ठीक उसी अनुपात में कीमत स्तर में परिवर्तन लायेगा। फिशर के शब्दों में, “यदि अन्य चीजें अपरिवर्तित रहें तो, ज्यों-ज्यों मुद्रा चलन की मात्रा बढ़ती है, त्यों-त्यों कीमत स्तर भी प्रत्यक्ष अनुपात में बढ़ता है और मुद्रा का मूल्य घटता जाता है और विलोमशः भी।” यदि मुद्रा की मात्रा दुगुनी कर दी जाए तो कीमत स्तर भी दुगुनी हो जाएगी और मुद्रा का मूल्य आधा रह जाएगा। दूसरी ओर, मुद्रा की मात्रा घटाकर आधी कर दी जाए, तो कीमत स्तर भी गिर का आधा रह जाएगा और मुद्रा का मूल्य दुगुना हो जाएगा।

फिशर ने “विनिमय के समीकरण” की शब्दावली में अपना सिद्धान्त इस तरह स्पष्ट किया है:

$$TP = MV + M'V'$$

$$P = \frac{MV + M'V'}{T}$$

जहाँ,

P	=	कीमत स्तर अथवा मुद्रा का मूल्य
M	=	वैधानिक मुद्रा की कुल मात्रा (मुद्रा की पूर्ति)
V	=	(Velocity of Circulation) मुद्रा का चलन गति
M'	=	साख मुद्रा की कुल मात्रा
V'	=	साख मुद्रा की चलन गति

T = मुद्रा के विनिमय में प्राप्त वस्तुओं तथा सेवाओं की कुल मात्रा।

उदाहरण: यदि वैधानिक मुद्रा की कुल मात्रा या मुद्रा की पूर्ति 1000 रुपये है, मुद्रा की चलन गति 5 इकाई है, साख मुद्रा की कुल मात्रा 2000 रुपये है, साख मुद्रा की चलन गति 10 इकाई है और मुद्रा के विनिमय में प्राप्त वस्तुओं तथा सेवाओं की कुल मात्रा 5000 इकाई है तब कीमत स्तर क्या होगा?

हल: हम जानते हैं कि कीमत स्तर,

$$P = \frac{MV + M'V'}{T}$$

इसीलिए,

$$P = \frac{1000 \times 5 + 2000 \times 10}{5000}$$

$$P = \frac{5000 + 20000}{5000}$$

$$P = \frac{25000}{5000} = 5 \text{ रुपये प्रति इकाई।}$$

अर्थात् कीमत स्तर एवं मुद्रा की पूर्ति में सार्थक व प्रत्यक्ष सम्बन्ध है और जैसे मुद्रा की पूर्ति बढ़ेगी अर्थव्यवस्था में कीमत स्तर भी बढ़ेगा साथ ही मुद्रा स्फीति भी बढ़ेगी। ऐसी स्थिति में मुद्रा का मूल्य घटेगा जिसे किसी भी अर्थव्यवस्था के लिए अच्छा नहीं कहा जा सकता है।

5.2.4 इकाई का सारांश

आर्थिक नियोजन के में सांख्यिकी का महत्व है। आर्थिक नियोजन के द्वारा तीव्र आर्थिक प्रगति का होना महज चमत्कार नहीं है जिसे देश केवल एक रात में प्राप्त कर सकता है। एक बेहतर अर्थव्यवस्था बनाने या तैयार करने में समय लगता है। एक नियोजित आर्थिक प्रगति के लिए सांख्यिकी का होना आवश्यक है जिससे इसे तैयार एवं जांचा परखा जा सके। बिना उचित या प्रयाप्त आंकड़ों के अच्छी आर्थिक प्रगति का नियोजन नहीं किया जा सकता है और एक बेहतर नियोजन या योजना बिना प्रयाप्त समंक संकलन विधि के नहीं किया जा सकता है।

5.2.5 मुख्य शब्द

- **सांख्यिकी:** सांख्यिकी समंकों के संकलन, संगठन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण एवं निर्वचन का अध्ययन है।

➤ निर्देशांक: एक अर्थव्यवस्था या सेक्यूरिटी बाजार में होने वाले परिवर्तनों का सांख्यिकीय माप है।

5.2.6 अपने प्रगति का मुल्यांकन (बहुविकल्पीय चयन/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(A) खाली स्थानों को भरें:

- (i) राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (NSS) का सृजन _____ में किया गया था।
- (ii) _____ को माननीय सांख्यिकीय सलाहाकार के रूप में कैबिनेट ने 1949 में नियुक्त किया गया था।
- (iii) भूमि उपयोगिता सांख्यिकी का प्रकाशन _____ में किया गया था।
- (iv) _____ अपने निरंतर सर्वेक्षण के दौरान मुख्या खाद्यान्न फसलों के पैदावार से संबंधित आंकड़ों को संकलित करते हैं।

5.2.7 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(A) (i) 1950, (ii) प्रो. पी. सी. महालानोबिस, (iii) भारत का कृषि सांख्यिकी, (iv) NSSO

5.2.8 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न

- 1. भारत में सांख्यिकी व्यवस्था पर एक आलोचनात्मक निबंध लिखें।
- 2. कृषि सांख्यिकी के भूमिका की चर्चा करें।
- 3. भारतीय अर्थव्यवस्था में कृषि क्षेत्र का क्या महत्व है?
- 4. भारत में कृषि उत्पादकता के निम्न होने के क्या कारण हैं?

5.2.9 संदर्भ पुस्तकें

1. Fundamentals of Statistics	: D.N. Elhance
2. Fundamentals of Statistics	: Veena Elhance
3. Fundamentals of Statistics	: B.M. Aggarwal
4. Fundamentals of Statistics	: D.C. Sancheti
5. Fundamentals of Statistics	: V.K. Kapoor
6. Statistics (Theory Methods & Applications)	: S.L. Gupta
7. Fundamental of Statistics	: B.N. Gupta

खण्ड—05

इकाई—03

जनसंख्या सर्वेक्षण

सरंचना:

- 5.3.1 भूमिका
- 5.3.2 जनसंख्या सर्वेक्षण: अर्थ एवं विशेषताएँ
 - 5.3.2.1 जनगणना की उपयोगिता
- 5.3.3 जनसंख्या सर्वेक्षण आयोजित करने की विधियाँ
 - 5.3.3.1 इन विधियों की गुण एवं सीमाएँ
- 5.3.4 गणना की विधियाँ
- 5.3.5 भारत में जनसंख्या सर्वेक्षण
 - 5.3.5.1 सारणी: जनसंख्या 1901—2011
 - 5.3.5.2 सारणी: जनसंख्या आकार के अनुसार राज्य एवं केन्द्रशासित राज्य
 - 5.3.5.3 सारणी: जनसंख्या घनत्व के अनुसार राज्य एवं केन्द्रशासित राज्य
 - 5.3.5.4 सारणी: लिंगानुपात
 - 5.3.5.5 साक्षरता दर: 1951—2011
- 5.3.6 भारतीय जनसंख्या सांख्यिकी की कमियाँ
- 5.3.7 सुधार के लिए सुझाव
- 5.3.8 इकाई का सारांश
- 5.3.9 परिभाषिक शब्दावली
- 5.3.10 मुख्य शब्द
- 5.3.11 अपने प्रगति का मुल्यांकन (बहुविकल्पीय चयन/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)
- 5.3.12 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी
- 5.3.13 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न
- 5.3.14 संदर्भ पुस्तकें

उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन के उपरान्त हम इस स्थिति में होंगे:

- जनगणना की व्याख्या करना
- जनगणना आयोजन करने की विधियों का वर्णन करना
- जनगणना आयोजन करने की विधियों के गुण एवं विशेषताओं को परिभाषित करना
- जनगणना के लिए गणना की विधियों का वर्णन करना

5.3.1 भूमिका

किसी देश के समस्त लोगों के जनसांख्यिकीय, सामाजिक, सांस्कृतिक एवं आर्थिक स्थिति से संबंधित आंकड़ों के सकलन, व्यवस्थीकरण, विश्लेषण एवं प्रसार करने की प्रक्रिया को ही जनगणना कहते हैं। इसे दस वर्ष के बाद किसी एक समय बिन्दु में किया जाता है। भारत जैसे भौतिक लक्षण के विविधता वाले बड़े देशों में शांतिपूर्वक, समय से जनगणना का काम करवाना, प्रशासन के लिए बहुत बड़ा अभ्यास होता है। तत्कालिन जनगणना आयुक्त डब्लू. सी. पाउडेन के द्वारा 17 फरवरी 1881 में बड़ा कदम लेते हुए पहली बार वर्तमान जनगणना के स्वरूप की नींव रखी। इसके उपरान्त ही प्रत्येक दस वर्षों के अन्तराल में यह जनगणना बिना किसी व्यवधान के कराई जाती है। स्वतंत्र भारत में पहली जनगणना

1951 में हुई जो जनगणना श्रृंखला की सातवीं जनगणना थी। इस जनगणना का गणन अवधि 9 फरवरी से 28 फरवरी 1951 था। भारतीय जनगणना की योजना एवं क्रियान्वयन दोनों ही बड़ा चुनौतीपूर्ण एवं दिलचस्प रहा है। इस इकाई में आप जनगणना के उपागम, जनगणना की विधियाँ एवं जनगणना की गणना करने की विधियों के बारे में भी सीखेंगे।

5.3.2 जनगणना: अर्थ एवं विशेषताएँ

जनगणना को परिभाषित इस रूप में किया जा सकता है, “देश या सीमांकित शासित राज्य के सभी व्यक्तियों से संबंधित आर्थिक एवं सामाजिक, जनसांख्यिकीय आदि सूचनाओं का संकलन व्यवस्थीकरण एवं प्रकाशन तक की सभी प्रक्रियाएँ जो एक निर्धारित समय बिन्दु या अवधि में सम्पादित होती है।” (राष्ट्रीय जनसंख्या जनगणना के सिद्धान्त एवं सुझाव – यू. एन.)। जनगणना के दो प्रमुख उद्देश्य हैं, एक स्थैतिक एवं दूसरा प्रवैगिक। स्थैतिक अर्थ में, यह सामुदाय के चित्र को प्रस्तुत करता है और किसी समय बिन्दु के लिए यह निश्चित होता है। प्रवैगिक अर्थ में, यह ऐसा पद है जो क्रमागत श्रृंखला को इस प्रकार प्रस्तुत करता है कि जनसंख्या के गतिमान बिन्दुओं की जा जा सके जिससे जनसंख्या के आकार एवं जनसांख्यिकीय प्रवृत्ति की दिशा भी पता चल जाता है।

मुख्य विशेषताएँ

उपरोक्त दिये गये परिभाषा के अनुसार, जनगणना की विशेषताएँ निम्नलिखित हैं:

1. **सर्वभौमिकता:** एक जनगणना को सर्वभौमिक होना चाहिए। देश के सभी नागरिकों को जनगणना में निश्चित रूप से जोड़ा जाना चाहिए। इसका पूरा ध्यान रखा जाना चाहिए कि कोई भी व्यक्ति छोटे नहीं।
2. **यूगमपत गणना:** जनगणना के इस विशेषता का विशेष महत्व है। जहाँ तक संभव हो जनगणना के सभी समुच्च एक ही समय बिन्दु में किया जाना चाहिए।
3. **क्षेत्र का संक्षेप में परिभाषा:** जनगणना स्पष्ट रूप से परिभाषित भौगोलिक एवं राजनैतिक क्षेत्र के अनुसार होना चाहिए। किसी क्रमागत जनगणना में होने वाले क्षेत्र में परिवर्तन का उल्लेख स्पष्ट रूप से किया जाना चाहिए।
4. **नियमितता:** यदि जनगणना एक निश्चित अन्तराल में न हो तब, आंकड़ों के बहुत सारे मान विलुप्त हो सकते हैं। जनसांख्यिकी संबंधी प्रवृत्ति के अध्ययन के क्रम में, यह आवश्यक होता है कि जनगणना नियमित रूप से हो। इसके अलावा, सभी देशों में नियमित रूप से जनगणना कराने पर, अन्तराष्ट्रीय स्तर पर जनसंख्या संबंधी अध्ययन के लिए ज्यादा उपयुक्त होगा।
5. **निजी एवं व्यक्तिगत समंक का संकलन:** जनगणना में तथ्यों का संकलन निजी व्यक्तियों के बारे में किया जाता है। प्रत्येक व्यक्ति स्वयं एवं अपने परिवार के बारे में सूचना देता है। विहित जनगणना में प्रश्नों के उद्देश्य एवं क्षेत्र सांस्कृतिक स्तर पर निर्भर करता है।
6. **सरकार प्रायोजित:** चूंकि जनगणना कराने के लिए वृहत संगठन एवं पूंजी की आवश्यकता होती है, जनगणना प्रक्रिया की देख रेख सरकार के द्वारा अच्छी तरह से होती है और वह लोगों को सही सूचना देने के लिए बाध्य कर सकती है।

5.3.2.1 जनगणना की उपयोगिता

प्राथमिक रूप से जनगणना प्रशासन के उद्देश्य से अर्थशास्त्री, सामाजशास्त्री एवं व्यवसायियों को जनसंख्या से संबंधित बहुत ही महत्वपूर्ण सूचनाएं प्रदान करती है:

1. जनगणना के आधार पर दिये गये संख्यात्मक सूचना से अर्थशास्त्री देश की जनसंख्या की प्रवृत्ति का अध्ययन कर सकते हैं, इनका व्यवसायिक संरचना, शहरीकरण की प्रवृत्ति, इत्यादि। अन्य आंकड़ों की मदद से वह जनसंख्या वृद्धि एवं खाद्यान पूर्ति, व्यावसायिक परिवर्तन एवं औद्योगिक सुरक्षा प्रदान करने के प्रभाव के आदि का अध्ययन कर सकते हैं। ऐसे आंकड़े देश के बहुत सारे सामाजिक आर्थिक समस्याओं की ओर ध्यान आकृष्ट करते हैं एवं सरकार को नीतियाँ बनाने में सहायता प्रदान करते हैं। यह राष्ट्र के कार्य शक्ति के

अनुमान, बेरोजगारी की मात्रा एवं उसके लिए शिक्षा तथा श्रमशक्ति योजना और आवास के निर्माण के लिए योजना बनाने; शहरी एवं क्षेत्रीय विकास आदि में मदद करता है। योजनागत आर्थिक वृद्धि, के लिए ऐसे सांख्यिकी बहुत महत्वपूर्ण होते हैं क्योंकि वे जनसंख्या से संबंधित सामाजिक आर्थिक तथ्यों के बारे में विस्तृत सूचनाएँ प्रदान करते हैं।

2. समाजशास्त्री उन संभावनाओं का अध्ययन कर सकते हैं जो शादी के उम्र या जो शिशु मृत्यु दर आदि को कम करने जैसे सुधारों के लिए प्रभावी हों। विभिन्न प्रश्नों जैसे , बेरोजगारी, रक्षा, प्रवास, परिवार नियोजन आदि को जनगणना के आंकड़ों के मदद से अच्छे तरीके से अध्ययन किया जा सकता है। सामाजिक बीमा योजना या ग्रामीण कल्याण योजना जनगणना के तथ्यों पर आधारित होते हैं।
3. भारत में आंतरिक व्यापार का एक बड़ा हिस्सा है और जनगणना में दर्ज प्रत्येक मानव एक ग्राहक है। अपने उपभोक्ताओं के व्यावसायिक ज्ञान और उनके अवस्थिति का ज्ञान बहुत उपयोगी है। ऐसे क्षेत्रों का अनुमान, जहाँ बाजारों के विकास की संभावना है, विभिन्न क्षेत्रों की आबादी के जन घनत्व के ज्ञान के साथ बनाया जा सकता है। व्यावसायिक आंकड़ों के आधार पर, जिन वर्गों के लिए उनके सामान की विशेष जरूरत है जैसे:- शिशुओं, महिलाओं, सैनिकों के लिए एक व्यापार से जोड़ा जा सकता है। वह वर्तमान व भविष्य के श्रम की आपूर्ति का अनुमान लगा सकता है और उत्पादन योजनाओं में समायोजन कर सकता है।
4. जनसंख्या रिपोर्ट एक परिवहन एजेंसी जैसे, रेलवे को कई महत्वपूर्ण सूचनाएँ प्रदान करती है। यदि परिवहन के साधनों में सुधार या नये साधन को प्रस्तुत करना हो तो जनसंख्या रिपोर्ट पर परिवहन प्राधिकरण को ध्यान देना चाहिए। विज्ञापन एजेंसियों के लिए ऐसे क्षेत्रों में अपने विज्ञापन को बढ़ावा देना अच्छा होगा। यदि किसी शहर की आबादी गिरती है तो उस क्षेत्र की मांग गिरती रहेगी, जब तक कि मौजूदा आबादी की मांग नहीं बढ़ जायेगी। इसी प्रकार आयु संरचना, लिंगानुपात, व्यावसायिक ढांचा में बदलाव भी वस्तु की मांग को उसी तरह प्रभावित करेगी। जीवन बीमा कम्पनियाँ, जनगणना रिपोर्ट में प्रकाशित लोगों के जीवन प्रत्याशा का अनुमान लगा सकती है। जनगणना लोगों और राज्य दोनों के लिए बहुत उपयोगी है। चुनावी क्षेत्रों का पुनर्निर्धारण जनगणना के आधार पर ही किये जाते हैं।

5.3.4 जनगणना आयोजित करने की विधियाँ

सामान्यतया जनगणना आयोजित करने की दो विधियाँ हैं। ये विधियाँ निम्नलिखित हैं:

1. वास्तविक विधि (De-Facto Method) and
 2. वैधानिक विधि (De-Jure Method)
1. **वास्तविक विधि:** इस विधि के अन्तर्गत जनगणना करते समय उन सभी व्यक्तियों का, जो उस देश के क्षेत्रीय अधिकार क्षेत्र में दिन या रात को उपस्थित हैं, जनगणना आंकड़ों में गिना या सम्मिलित किया जाता है। देश में रहने वाले सभी व्यक्तियों को एक साथ गिना जाता है जहाँ वे जनगणना रात में किये जाते हों। इसे गिनने की क्रिया एक साथ, एक रात या एक विशेष तिथि को किया जाना चाहिए; इसीलिए इस विधि को 'एक रात गणना पद्धति' या साधारणतया 'एक तिथि प्रणाली' कहा जाता है।
 2. **वैधानिक विधि:** जनगणना की इस पद्धति के तहत सभी को उनके आवास के आधार पर गिना जाता है कि जहाँ वे जनगणना के समय होते हैं। इस विधि को गणना की 'आवधिक प्रणाली' के रूप में भी जाना जाता है।

5.3.3.1 इन विधियों के गुण एवं अवगुण

गुण	
वास्तविक विधि	वैधानिक विधि
(a) यह विधि बहुत साधारण है। गणनाकर्ताओं को उन सभी व्यक्तियों को सूचित करने के निर्देश दिये जा सकते हैं जो किसी निर्दिष्ट समय पर प्रत्येक घर या किसी अन्य स्थान पर मौजूद हैं। साथ में या बाहर रहने वाले व्यक्तियों जो अलग-2 परिस्थितियों या अलग-2 कारणों से अपने घर से दूर रहते हैं, का विस्तृत और विवरण देने की कोई जरूरत नहीं है।	(i) यह विधि स्थाई आबादी को प्रदर्शित करती है और यही आवश्यक है।
(b) वास्तविक विधि की परिभाषा बहुत वस्तुनिष्ठ है। गणना करने वाले व्यक्ति को व्यक्तिगत फैसले के आधार पर किसी व्यक्ति को शामिल करने या निकालने के मामले की कोई सीमा रेखा नहीं हो सकती है।	(ii) यह विधि वास्तविक विधि के अपेक्षाकृत अधिक सटीक परिणाम देती है, अगर गिनती अधिक आबादी के समय तक चलती है। जहाँ तक घुमन्तु या खानाबदोश आबादी का संबंध है, अगर गणना की अवधि बढ़ा दी गयी है तो वहाँ दोहरी गिनती या चूक का खतरा होता है। डी फैक्टो काउन्ट में एक बहुत गतिशील जनसंख्या के लिए गिनने की प्रक्रिया में गंभीर समस्या/गलती हो सकती है यदि गणना लम्बी अवधि तक चले। हलांकि ऐसी स्थिति में वैधानिक गणना के भी गलत होने की संभावना है, फिर भी यदि लोगों की जनगणना के दौरान गतिशील अधिकांश लोग सामान्य आवास के एक स्थिर स्थान को बरकरार रखते हैं, तो त्रुटि भी कम हो सकती है।
(c) जनगणना गणना का वास्तविक तरीका अंतर्राष्ट्रीय तुलनात्मकता के लिए विशेष रूप से लाभप्रद है, क्योंकि यह एक स्पष्ट मानक है जिसे स्थानिक स्थितियों में अंतर के बावजूद सार्वभौमिक रूप से लागू किया जा सकता है। अंतर्राष्ट्रीय एजेंसी के सिफारिश के अनुसार “अंतर्राष्ट्रीय तुलनात्मकता के उद्देश्य के लिए यह अपेक्षित है कि वास्तविक गणना की जा सकती है अर्थात् गणना के समय देश में मौजूद सभी व्यक्तियों की संख्या।” एक वैद्य आधार पर कोई भी आंकड़े जो वांछित हो सकता है, वास्तविक आंकड़ों के अलावा प्राप्त किया जाना चाहिए।	(iii) कुछ कानूनी या संवैधानिक आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए जरूरी जनसंख्या की गणना आवश्यक होती है, जैसे संसद या विधानसभा चुनाव के लिए, सीमांकित घटक, या कुछ विशेष अनुदान या सुविधाएँ। कुछ देशों में जनसंख्या की गणना कानूनी रूप से आवश्यक होते हैं।

(d) वास्तविक आंकड़े पुलिस अधिकारियों, चिकित्सा देखभाल, सार्वजनिक उपयोगिताओं, परिवहन आदि की जरूरतों के आंकलन के लिए स्थानीय अधिकारियों के लिए उपयोगी होंगी और व्यावसायी जो निवासियों और आंगतुकों द्वारा उत्पाद या सेवाओं की मांग को पूरा करते हैं।	(iv) सीखने एवं कुछ समुदाय के प्रशासन के लिए आवास, शिक्षा आदि, वैधानिक विधि द्वारा एकत्र आबादी के आंकड़े वास्तविक आंकड़ों के मुकाबले ज्यादा उपयुक्त हैं। जन्म और मृत्यु दर की गणना के लिए, वैधानिक विधि द्वारा एकत्रित आबादी के आंकड़े अधिक उचित होते हैं।

सीमाएँ	
वास्तविक विधि	वैधानिक विधि
1. जनगणना एक रात में पूरी नहीं हो सकती है। वास्तविक विधि से जनगणना के लिए भारी संख्या में व्यक्तियों को नौकरी पर सिर्फ एक रात के लिए रखना होगा और यह काफी खर्चीला होगा। यदि जनगणना कार्य कई दिनों तक चलता रहे तो परिणाम में दोहरी गणना की समस्या उत्पन्न होगी, इस प्रकार जनसंख्या की वास्तविक विधि दोषपूर्ण परिणाम उत्पन्न कर सकती है। इस कमी से छूटकारा पाने के लिए आमतौर पर ये किया जाता है कि निर्दिष्ट दिन या रात के रिकार्ड की जांच की जाती है। अगर कोई यहाँ नहीं है तो उसकी प्रविष्टि हटा दी जाती है और नये लोगों की प्रविष्टि की जाती है। 2. हालांकि यह विधि सरल है, फिर भी यह सैन्य व कूटनीतिक कर्मियों के लिए अपवादों से जूझ रहा है। आबादी की इस पद्धति के तहत उन लोगों की भी गिनती की जाती है जो वास्तव में हमारे देश से संबंधित नहीं है लेकिन इस देश में ही रह रहे हैं और वे लोग जो देश से संबंधित है लेकिन विदेशों में ड्यूटी कर रहे हैं, को बाहर रखा गया है। इस प्रकार आबादी के आंकड़े विकृत हो जाते हैं। हम उन लोगों के बारे में आंकड़े एकत्र करते हैं, जिनके बारे में हमें कोई रुचि नहीं है, लेकिन उनके बारे में जानकारी नहीं मिलती, जिनके बारे में हम चिंतित हैं। 3. इस विधि के साथ एक और समस्या भी है। यह उन निर्दिष्ट दिन या रात को यात्रा कर रहे हैं—उन्हें कैसे गिना जाना चाहिए? उस स्थान पर जहाँ रेलगाड़ी है या वहाँ, जहाँ वो व्यक्ति जा रहे हैं या वहाँ, जहाँ से वे आ रहे हैं।	1. जनसंख्या की गणना की वैधानिक विधि के अनुसार, संपूर्ण एवं सुसंगत रिपोर्टिंग सुनिश्चित करने के लिए अधिक दृढ़ परिभाषाएँ और विशिष्ट निर्देश आवश्यक हैं। सामान्यतया, गिनती की इस पद्धति का उद्देश्य प्रत्येक व्यक्ति को रिकार्ड करना है, हालांकि इसमें कई व्यावहारिक कठिनाईयाँ हैं। यहाँ ऐसे व्यक्तियों की संख्या हो सकती है जिनके पास 'निश्चित आवास का स्थान' नहीं है। 2. त्रुटि एवं चूक की संभावना एवं दोहराव की संभावना इस विधि में अधिक है, उदाहरण के लिए स्कूल में बच्चे, शहर में या बाहर, व्यक्तिगत या परिवार जो अनिश्चित लम्बे समय के लिए काम करने के लिए घर छोड़ते हैं, गतिशील जनसंख्या, ऐसे परिवार जिनके पास एक से अधिक आवास हो, आदि। हालांकि विस्तृत निर्देश जारी कर ऐसे व्यक्तियों की गिनती के लिए एक समान आधार सुनिश्चित कर एक से अधिक बार गिनती किये जाने वाले लोगों को बाहर रखा जा सकता है। यहाँ तक कि उन लोगों के जिनके निवास स्थान की जगह निश्चित है लेकिन जनगणना के समय अनुपस्थित है, अगर उनके लिए रिपोर्टिंग करने वाले व्यक्तियों को उनके बारे में अच्छी जानकारी नहीं है तो उन्हें एक से अधिक बार गिनती कर सकते हैं।

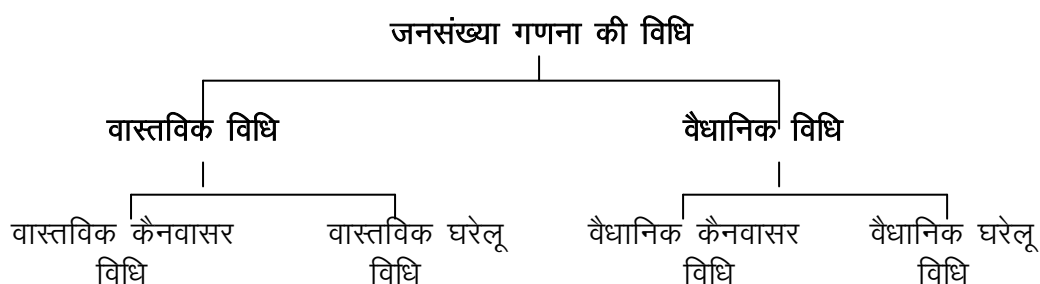
5.3.4 गणना के तरीकें

सामान्यतया गणना के दो तरीकें होते हैं।

1. **कैनवासर विधि या नियुक्त द्वारा गणना:** इस विधि के अन्तर्गत सूचना एक व्यक्ति के साक्षात्कार द्वारा प्राप्त की जाती है और आधिकारिक तौर पर नियुक्त गणक द्वारा निर्धारित समय पर दर्ज किया जाता है।
2. **घरेलू विधि या आत्मगणन:** इस विधि के तहत अनुसूची पहले से ही फॉर्म भरने के निर्देशों के साथ घरों में वितरित कर दिये जाते हैं। जानकारी दर्ज करने के लिए घर के मुखिया को जिम्मेदारी दी जाती है। यह सूची बाद में अधिकारियों द्वारा एकत्रित किये जाते हैं।

कभी-कभी इन दोनों तरीकों के संयोग का प्रयोग एक साथ किया जाता है, गणनाकर्ताओं द्वारा सूचनाओं के भाग और जवाब को भरा जाता है।

निम्नलिखित चित्र जनसंख्या गणना के विधि को प्रदर्शित करता है।



3.5 भारत में जनगणना

भारत को 1981 में दूनिया की सबसे बड़ी जनगणना करने का अनूठा अनुभव प्राप्त हुआ और सैकड़ों वर्षों के दशकीय जनगणनाओं का एक अखण्डित रिकार्ड भी है। भारतीय जनगणना को हमारे देश व लोगों के बारे में जानकारी का सबसे प्रामाणिक और व्यापक व विस्तृत स्रोत माना जाता है। भारतीय जनगणना का इतिहास वर्ष 1872 की तारीख है जब जनसंख्या के आंकड़ों को दर्ज करने के लिए एक सुव्यवस्थित प्रयास किया गया। 1801 ई. में ग्रेट ब्रिटेन में ब्रिटिश जनगणना श्रृंखला शुरू हुई थी लेकिन भारतीय जनगणना एक संपूर्ण रूप में 1851-52 में मद्रास प्रांत में शुरू हुई। 1852 ई. में उत्तर-पश्चिम सीमान्त प्रांत की जनगणना के बाद तथाकथित सिपाही विद्रोह (पहला स्वतंत्रता संग्राम-1857 ई.) में हस्तक्षेप किया गया। लेकिन आबादी के आंकड़ों का आधार 23 जुलाई, 1856 के सांख्यिकीय डिस्पैच संख्या-2 द्वारा निर्धारित किया गया था, जिसमें बताया गया है कि “भारत सरकार ने उन साधनों पर विचार किया था, जिनके द्वारा भारत की जनसंख्या की सामान्य जनगणना 1861 में किया जायेगा।” पहली जनगणना उत्तर-पश्चिमी सीमांत प्रांत में 10 जनवरी 1865 को डब्लू. सी. पॉउडेन द्वारा आयोजित की गई थी, “इस सिद्धान्त पर कि आबादी को एक वास्तविक घर से गणना करके उसी दिन निर्धारित किया जाना चाहिए। लिंग का विभेद, दोनों महान धर्म व लोगों को वर्गीकृत करना—कृषि या गैर—कृषि व्यवसायों के अनुसार, विभिन्न व्यवसायों से, लोगों के रुझानों और उनकी विभिन्न जातियों के आधार पर।” 1869 में हंटर डाइरेक्टर जनरल ऑफ स्टैटिस्टिकल सर्वे के रूप में नियुक्त किये गये, जो कि बाद में अपने प्रसिद्ध गजट के द्वारा सुसज्जित किये थे। उन्होंने भारत की जनगणना के लिए 1869 से 1872 तक व्याख्यात्मक सर्वेक्षण किये और उसके बाद इस साल की एक परिपक्व जनगणना कराने की सलाह दी जो कभी भी बिना रुकावट के जारी रहे। 1872 की जनगणना न तो यूनिफॉर्म थी और न ही पूरे देश में विस्तारित किया गया था। 1872 के बाद अगली जनगणना 1881 में की गई थी और तभी से यह नियमित रूप से प्रत्येक दस साल के अन्तराल के साथ चल रही है। नवीनतम जनसंख्या गणना

2011 में पूरा हुआ था। देश के जनसंख्या जनगणना के हमारे अध्ययन के लिए इस विभिन्न जनगणनाओं में बांट लेते हैं, जो कि निम्न प्रकार से हैं।

1. 1941 तक की जनगणना,
2. 1951 की जनगणना,
3. 1961 की जनगणना,
4. 1971 की जनगणना,
5. 1981 की जनगणना,
6. 1991 की जनगणना,
7. 2001 की जनगणना,
8. 2011 की जनगणना।

5.3.5.1 2011 की जनगणना

यह जनगणना इक्कीसवीं शताब्दी की दूसरी जनगणना तथा तीसरी सहस्राब्दी के रूप में एक ऐतिहासिक जनगणना है। यह देश में उपलब्ध प्रचुर मात्रा में मानव संसाधनों की स्थिति, उसकी जनसांख्यिकी, संस्कृति और आर्थिक संरचना जो एक शताब्दी से सौ साल के संक्रमण को प्रदर्शित करता है, के मापदण्ड एवं आंकड़ों को बतलाती है।

जनसंख्या

2011 की जनगणना के आधार पर भारत की जनगणना 1,210 मिलियन (623.1 मिलियन पुरुष एवं 587.4 मिलियन महिला) हैं। भारत का क्षेत्रफल विश्व के कुल सतही क्षेत्रफल का मात्र 2.4 प्रतिशत ही है जबकि, यह विश्व की 16.7 प्रतिशत जनसंख्या का भारी हिस्सा लिए हुए है। भारत की जनसंख्या जो कि 20वीं शताब्दी के समय लगभग 238.4 मिलियन थी वह अब 1,210 मिलियन तक पहुंच चुकी है। 1911-21 की जनगणना को छोड़कर 1901 से लेकर अभी तक प्रत्येक जनगणना में जनसंख्या में वृद्धि दर्ज की गई है।

जनसंख्या घनत्व

जनसंख्या सघनता का एक महत्वपूर्ण सूचकांक जनसंख्या घनत्व है। यह प्रति वर्ग किलोमीटर व्यक्तियों की संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है। 2011 में भारत की जनसंख्या घनत्व 382 प्रति वर्ग किलोमीटर था। जनसंख्या घनत्व 1991 से 2011 के मध्य सभी राज्यों और संघशासित प्रदेशों में बढ़ी है। प्रमुख राज्यों में दिल्ली 2011 में 11,320 के जनघनत्व के साथ सबसे ज्यादा घनी आबादी वाला राज्य है चंडीगढ़ दूसरे तथा पंडुचेरी का तीसरा स्थान है।

लिंगानुपात

लिंगानुपात प्रति हजार पुरुषों पर स्त्रियों की संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है यह एक महत्वपूर्ण सामाजिक सूचक है, जो दिये गये अवधि में समाज में स्त्री और पुरुष के बीच समानता मापने के लिए प्रयोग किया जाता है। 2011 में भारत में लिंगानुपात 943 था। 20वीं शताब्दी के शुरुआत में यह 972 था और 1941 तक नियमित रूप से गिरावट प्रदर्शित किया है।

साक्षरता

2011 की जनगणना के प्रयोजन के लिए आठ और उससे अधिक आयु वाले व्यक्ति, जो किसी भी भाषा को समझने के साथ, पढ़ और लिख सकते हैं, उन्हें साक्षर माना जाता है। एक व्यक्ति जो केवल पढ़ सकता है लेकिन लिख नहीं सकता है, साक्षर नहीं है। 1991 से पहले के आंकड़ों में पांच साल से कम उम्र के बच्चों को निरक्षर माना जाता था। 2011 की जनगणना के परिणाम बताते हैं कि देश के साक्षरता दर में वृद्धि हुई है। देश की साक्षरता दर 73 प्रतिशत है जिनमें पुरुष की साक्षरता दर 80.90

प्रतिशत तथा महिलाओं की 64.60 प्रतिशत है। 94.0 प्रतिशत की साक्षरता दर के साथ केरल राज्य पहले स्थान पर बरकरार है, जबकि 91.84 प्रतिशत के साथ लक्षद्वीप दूसरे और 91.33 प्रतिशत के साथ मिजोरम तीसरे स्थान पर है। 61.80 प्रतिशत की साक्षरता दर के साथ इस सूची में बिहार अन्तिम पायदान पर है, जबकि 65.38 प्रतिशत अरुणाचल प्रदेश व 66.11 प्रतिशत के साथ राजस्थान कमशः हैं। केरला 96.11 प्रतिशत की पुरुष साक्षरता व 92.07 प्रतिशत की महिला साक्षरता दर के साथ दोनों में सर्वोच्च स्थान बनाये हुए है। जबकि, बिहार पुरुष (71.20 प्रतिशत) व महिला (51.50 प्रतिशत), दोनों में साक्षरता दर के अन्तिम पायदान पर स्थित है।

सारणी: जनसंख्या 1901–2011

जनगणना	जनसंख्या	दशकीय वृद्धि		दशकीय वृद्धि में परिवर्तन		औसत वार्षिक चरघातीय वृद्धि दर (%)	1901 के आधार पर प्रगतिशील वृद्धि दर (%)
		निरपेक्ष	वर्षिक	निरपेक्ष	वर्षिक		
1	2	3	4	5	6	7	8
1901	23,83,96,327	-	-	-	-	-	-
1911	25,20,93,390	1,36,97,063	5.75	-	-	0.56	5.75
1921	25,13,21,213	-7,72,177	-0.31	-1,44,69,240	-6.05	-0.03	5.42
1931	27,89,70,238	2,76,56,025	11.00	2,84,28,202	11.31	1.04	17.02
1941	31,86,60,580	3,96,83,342	14.22	1,20,27,317	3.22	1.33	33.67
1951	36,10,88,090	4,24,27,510	13.31	27,44,168	-0.91	1.25	51.47
1961	43,92,34,771	7,81,46,681	21.64	3,57,19,171	8.33	1.96	84.25
1971	54,81,59,652	10,89,24,881	24.80	3,07,78,200	3.16	2.22	129.94
1981	68,33,29,097	13,51,69,445	24.66	2,62,44,564	-0.14	2.20	186.64
1991	84,64,21,039	16,30,91,942	23.87	2,79,22,497	-0.79	2.14	255.05
2001	1,02,87,37,436	18,23,16,397	21.54	1,92,24,455	-2.33	1.95	331.47
2011	1,210,854,977	18,21,17,541	17.70	-860411	-0.47	1.64	407.64

स्रोत: जनगणना 2011

नोट:

1. देश के 1941–51 तथा 1951–61 की 'दशकीय वृद्धि' तथा 'दशकीय प्रतिशत वृद्धि' की गणना में, टूनसांग जिले की जनसंख्या 1951 (7,025) और 1961 की जनसंख्या (83,501) तथा मॉन जिले की 1961 की जनसंख्या (5,774), जो कि नागालैंड के जनगणनामें शामिल नहीं किये गये हैं, क्योंकि इस क्षेत्र को 1951 में पहली बार गणना में शामिल किये गये, इस कारण तुलनीय नहीं है।
2. असामान्य परिस्थितियों की वजह से 1981 की जनगणना असम में नहीं हो पाई थी, इसलिए 1981 में असम की जनगणना 'प्रक्षेपण' द्वारा तैयार किया गया।
3. 1991 की जनगणना जम्मू और काश्मीर में, असामान्य स्थितियों के कारण नहीं की जा सकी। इसलिए, यहाँ की 1991 की जनगणना के लिए आबादी का आंकड़ा 'प्रक्षेपण' द्वारा तैयार किया गया।
4. 2001 की जनगणना में मणिपुर राज्य के सेनापति जिले के पाओमाता, माओ-मरम और पुरुल उपखण्डों की अनुमानित संख्या शामिल थी।

5.3.5.2 जनसंख्या आकार के अनुसार राज्य एवं संघ शासित राज्य

2011 में कोटि या क्रम	राज्य/ केन्द्र शासित राज्य	2011 में जनसंख्या	2001 में जनसंख्या	भारत की कुल जनसंख्या का प्रतिशत		2001 में कोटि या क्रम
				2011	2001	
1	2	3	4	5	6	7
1	उत्तर प्रदेश	199,812,341	166,197,921	16.51	16.16	1
2	महाराष्ट्र	112,374,333	96,878,627	9.28	9.42	2
3	बिहार	104,099,452	82,998,509	8.60	8.07	3
4	पं. बंगाल	91,276,115	80,176,197	7.54	7.79	4
5	आंध्र प्रदेश	84,580,777	76,210,007	6.99	7.41	5
7	मध्य प्रदेश	72,147,030	62,405,679	5.96	6.07	6
6	तमिलनाडु	72,626,809	60,348,023	6.00	5.87	7
8	राजस्थान	68,548,437	56,507,188	5.66	5.49	8
9	कर्नाटक	61,095,297	52,850,562	5.05	5.14	9
10	गुजरात	60,439,692	50,671,017	4.99	4.93	10
11	उड़ीसा	41,974,218	36,804,660	3.47	3.58	11
12	केरल	33,406,061	31,841,374	2.76	3.10	12
13	झारखण्ड	32,988,134	26,945,829	2.73	2.62	13
14	असम	31,205,576	26,655,528	2.58	2.59	14
15	पंजाब	27,743,338	24,358,999	2.29	2.37	15
17	हरियाणा	25,351,462	21,144,564	2.09	2.06	16
16	छत्तीसगढ़	25,545,198	20,833,803	2.11	2.03	17
18	दिल्ली	16,787,941	13,850,507	1.39	1.35	18
19	जम्मू और काश्मीर	12,541,302	10,143,700	1.04	0.99	19
20	उत्तराखण्ड	10,086,292	8,489,349	0.83	0.83	20
21	हिमाचल प्रदेश	6,864,602	6,077,900	0.57	0.59	21
22	त्रिपुरा	3,673,917	3,199,203	0.30	0.31	22
23	मेघालय	2,966,889	2,318,822	0.25	0.23	23
25	मणिपुर	1,855,794	2,93,896	0.15	0.22	24
24	नागालैंड	1,978,502	1,990,036	0.16	0.19	25
26	गोवा	1,458,545	1,347,668	0.12	0.13	26
27	अरुणाचल प्रदेश	1,383,727	1,097,968	0.11	0.11	27
28	पुडुचेरी	1,247,953	974,345	0.10	0.09	28
29	मिजोरम	1,097,206	888,573	0.09	0.09	30
30	चण्डीगढ़	1,055,540	900,635	0.09	0.09	29
31	सिक्किम	610,577	540,851	0.05	0.05	31
32	अंडमान निकोबार	380,581	356,152	0.03	0.03	32
33	दादर और नगर हवेली	343,709	220,490	0.03	0.02	33
34	दमन और दीव	243,247	158,204	0.02	0.02	34
35	लक्षद्वीप	64,473	60,650	0.01	0.01	35

नोट:

1. मणिपुर के सेनापति जिले के उन तीन उपखण्डों, माओ मारम, पाओ माता व पुरूल को 2001 की जनगणना में तकनीकी व प्रशासनिक कारणों से हटा दिया गया था, इनके अनुमानित आंकड़े मणिपुर व भारत की जनसंख्या में शामिल किये गये हैं।
2. 1991 की जनगणना में असामान्य परिस्थितियों में राज्य जम्मू एवं काश्मीर की जनगणना न होने के कारण प्रक्षेपण विधि से जनसंख्या की गणना की गई थी।

5.3.5.3 जन घनत्व के आधार पर राज्य एवं केन्द्रशासित राज्य

2011 में कोटि या स्थान	राज्य/ केन्द्र शासित राज्य	जनसंख्या घनत्व		20001 में कोटि या स्थान
		2011	2001	
1	दिल्ली	11,297	9,340	1
2	चण्डीगढ़	9,252	7,900	2
3	पुडुचेरी	2,598	2,034	3
4	दमन व दीव	2,169	1,413	5
5	लक्षद्वीप	2,013	1,895	4
6	बिहार	1,102	881	7
7	पं. बंगाल	1,029	903	6
8	केरल	859	819	8
9	उत्तर प्रदेश	828	690	9
10	दादर व नगर हवेली	698	449	13
11	हरियाणा	573	478	12
12	तमिलनाडु	555	480	11
13	पंजाब	550	484	10
14	झारखण्ड	414	338	16
15	असम	397	340	15
16	गेवा	394	364	14
17	महाराष्ट्र	365	315	17
18	त्रिपुरा	350	305	18
19	कर्नाटक	319	276	20
20	आंध्र प्रदेश	308	277	19
21	गुजरात	308	258	21
22	उड़ीसा	269	236	22
23	मध्य प्रदेश	236	196	23
24	राजस्थान	201	165	24
25	उत्तराखण्ड	189	159	25
26	छत्तीसगढ़	189	154	26
27	मेघालय	132	103	29
28	जम्मू और काश्मीर	124	100	31
29	हिमाचल प्रदेश	123	109	28
30	मणिपुर	122	103	30
31	नागालैंड	119	120	27
32	सिक्किम	86	76	32
33	मिजोरम	52	42	34
34	अंडमान और निकोबार	46	43	33
35	अरुणाचल प्रदेश	17	13	35

नोट:

2001 में तकनीकी व प्रशासनिक कारणों से मणिपुर के सेनापति जिले के माओ मरम, पाओमाटा व पुरूल उपखण्डों के अनुमानित आंकड़ों को शामिल किया गया है।

5.3.5.4 लिंगानुपात: 1901–2011

जनगणना वर्ष	लिंगानुपात (प्रति 1,000 पुरुष महिलाओं की संख्या)
1901	972
1911	964
1921	955
1931	950
1941	945
1951	946
1961	941
1971	930
1981	934
1991	926
2001	933
2011	943

नोट:

1. 1981 के लिए असम के प्रक्षेपित आंकड़ों का प्रयोग किया गया है।
2. 1991 के लिए जम्मू एवं काश्मीर के प्रक्षेपित आंकड़ों 2001 की जनगणना के आधार पर किया गया है।
3. 2001 की जनगणना में मणिपूर के सेनापति जिले के तीनों उपखण्डों, माओमरम, पाओमाटा व पुरुल में तकनीकी व प्रशासनिक कारणों से जनगणना न हो पाने के कारण इन्हें बाहर रखा गया है।

5.3.5.5 साक्षरता दर: 1951–2011

वर्ष	व्यक्ति	पुरुष	महिला
1	2	3	4
1951	21.82	30.32	12.87
1961	31.47	42.49	19.74
1971	36.95	47.60	25.56
1981	44.92	55.95	33.20
1991	61.29	73.13	48.64
2001	69.14	79.66	57.80
2011	79.31	87.23	70.73

नोट:

1951, 1961 एवं 1971 की साक्षरता दर पांच वर्ष की आयु से उपर तक के हैं। 1981 से 2011 तक की साक्षरता दर 7 वर्ष की आयु से उपर से संबन्धित है।

5.3.6 भारतीय जनसंख्या आंकड़ों की कमियाँ

सरकार व अन्य कई एजेन्सियों द्वारा गंभीर प्रयासों के बावजूद देश में आबादी के आंकड़े विभिन्न क्वार्टरस में विवाद का मुद्दा बना हुआ है। जिसमें से कुछ कमियाँ निम्न हैं:

1. **भौगोलिक विस्तार:** आमतौर पर राजनीतिक क्षेत्र में एक जनगणना से दूसरे में बदलाव आया है। स्वतंत्रता से पहले वर्मा, पाकिस्तान, बांग्लादेश भारतीय जनसंख्या गणना के एक हिस्सा थे। 1951 में भारतीय संघ में विलय के चलते रियासतों को भी सम्मिलित किया गया था। इस जनगणना में जम्मू और काश्मीर जो कि देश का एक अभिन्न हिस्सा है, को शामिल नहीं किया गया था। यह केवल 1961 की जनगणना में जब जम्मू और काश्मीर भारत का अभिन्न हिस्सा था तब जनगणना में शामिल किया गया है। इसके अलावा देश के विशाल भौगोलिक क्षेत्र की वजह से अधिकांश दूर के क्षेत्र, जहाँ पहुँच संभव नहीं था, उन्हें छोड़ दिया गया। ऐसे क्षेत्रों को

1961 की जनगणना में सम्मिलित करने का प्रयास किया गया था। इन परिस्थितियों में जनसंख्या के आंकड़े एक अवधि से दूसरे अवधि तक पूरी तरह से तुलना नहीं हो पाता है।

2. **उम्र की परिभाषा:** अलग-अलग जनगणना में उम्र को काफी भिन्न रूप से परिभाषित किया गया है। 1921 तक वर्ष पूरा होने के अनुसार आयु की गणना की गई थी। 1931 से निकटतम जन्मदिन को उम्र के रूप में दर्ज किया गया था। 1951 में इसे निकटतम जन्मदिन के उम्र में बदल दिया गया। इसके बाद यही प्रक्रिया अपनाई गयी। इस संदर्भ में, इस उदाहरण के अलावा पूर्व में बच्चे की आयु हमेशा 5 के गुणज के रूप में व्यक्त किया गया। यहाँ तक की शादी के प्रयोजनों के लिए वास्तविक उम्र छुपाया गया था। यहाँ तक की वृद्ध लोग भी इस प्रगतिशील संसार में अपने वास्तविक उम्र के प्रति जागरूक नहीं हैं। यह एक आश्चर्यजनक तथ्य है कि अधिकांश वृद्ध लोग अपनी वास्तविक जन्मदिन नहीं जानते हैं। वे सामान्यतया अपने जन्मदिन का अनुमान कुछ घटनाओं जैसे, युद्ध, भूकंप, आकाल आदि से करते हैं। महिलाएँ भी अपनी वास्तविक उम्र से कम दिखने के लिए उम्र छुपाती हैं।
3. **पक्षपात पूर्ण जानकारी:** कई सारे अवसरों पर यह अनुभव किया गया कि जो सूचनाएं रिकार्डिंग कर्मियों को दर्ज कराई जाती है, वह पूर्वाग्रह से ग्रसित होकर की जाती है। सामान्यतया, पागलपन, गूंगा, बहरा होने की सूचनाएं छूपा ली जाती है।

5.3.7 सुधार हेतु सुझाव

- आबादी जनगणना की तुलना के लिए, राज्य के सभी क्षेत्रों को प्रासंगिक जनगणना में शामिल होना चाहिए। यह प्रक्रिया जनगणना के तुलनात्मक अध्ययन के लिए आधार प्रदान कर सकती है, जो नीति-निर्माताओं को अनुमान व नीतियाँ बनाने में सहायता प्रदान कर सकती है।
- जांचकर्ताओं या गुणकों के सही सूचना एकत्र करने के लिए उचित प्रशिक्षण प्रदान किया जाय।
- उत्तरदाताओं से वास्तविक उम्र प्राप्त करने के लिए, विशेष जागरूकता कार्यक्रम चलाया जाना चाहिए, जिससे प्रयोज्य अपनी वास्तविक उम्र को बतायें।

5.3.8 इकाई का सरांश

देश में सभी व्यक्तियों से संबंधित जनसांख्यिकीय, सामाजिक, सांस्कृतिक और आर्थिक आंकड़ों को इकट्ठा करने, संकलन, विश्लेषण और प्रसार करने की प्रक्रिया को आबादी जनगणना के रूप में जाना जाता है। जनसंख्या रिपोर्ट रेलवे जैसी परिवहन एजेंसियों को कई उपयोगी जानकारी प्रदान करती है। मोटे तौर पर जनगणना करने के दो तरीके होते हैं:

1. वास्तविक विधि और
2. वैधानिक विधि।

5.3.9 मुख्य शब्दावली

- **जनगणना:** दी गई आबादी के सदस्यों के बारे में व्यवस्थित रूप से सूचनाओं को प्राप्त व दर्ज करने की प्रक्रिया।
- **घनत्व:** दिये गये क्षेत्र या जगह पर लोगों या वस्तुओं की मात्रा।
- **गणना:** उन वस्तुओं का संग्रह, जो कि संग्रह में सभी वस्तुओं की एक पूर्ण, आदेशित सूची है।

5.3.10 अपने प्रगति का मुल्यांकन (बहुविकल्पीय चयन/वस्तुनिष्ठ प्रश्न)

(A) रिक्त स्थानों को भरें

1. स्वतंत्र भारत की पहली जनगणना वर्ष _____ में की गई थी।
2. _____ विधि के अन्तर्गत जनगणना करते समय उन सभी व्यक्तियों का, जो उस देश में क्षेत्रीय अधिकार क्षेत्र में दिन या रात को उपस्थित हैं, जनगणना आंकड़ों में गिना या सम्मिलित किया जाता है।
3. _____ विधि के अन्तर्गत अनुसूचियों को सभी घरों में स्वयं लोगों को भरने हेतु निर्देशों के साथ वितरित कर दिया जाता है।

- 4- ----- को प्रति वर्ग किलोमीटर रहने वाले लोगों की संख्या के रूप में परिभाषित किया जाता है।

5.3.11 आपके उत्तर की जांच के लिए कुंजी

(A) 1. 1951, 2. वास्तविक, 3. घरेलू विधि या स्वयं गणना विधि, 4. जनसंख्या घनत्व

5.3.12 सावधिक एवं प्रारूप प्रश्न

1. जन्म दर क्या है? 1951 से अब तक जन्म दर की प्रवृत्ति का वर्णन करें।
2. भारत में तीव्र जनसंख्या वृद्धि दर को नियंत्रित करने की आवश्यकता की व्याख्या करें। भारत में उच्च जनसंख्या वृद्धि दर से होने वाले समस्याओं के समाधान के लिए सुझाव बताएँ।
3. जनसंख्या जनगणना करने की विभिन्न विधियों का वर्णन करें।
4. आर्थिक वृद्धि, जनसंख्या वृद्धि दर को किस प्रकार प्रभावित करती हैं वर्णन करें।
5. भारत में पूंजी निर्माण पर तीव्र जनसंख्या वृद्धि दर से होने वाले प्रभाव का उल्लेख करें।
6. भारतीय जनसंख्या सांख्यिकी की कमियों की चर्चा करें

5.3.13 संदर्भ पुस्तकें

1. Fundamentals of Statistics	: D.N. Elhance
2. Fundamentals of Statistics	: Veena Elhance
3. Fundamentals of Statistics	: B.M. Aggarwal
4. Fundamentals of Statistics	: D.C. Sancheti
5. Fundamentals of Statistics	: V.K. Kapoor
6. Statistics (Theory Methods & Applications)	: S.L. Gupta
7. Fundamental of Statistics	: B.N. Gupta

MAEC-102
राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण
खण्ड—05 इकाई—04

इकाई की रूपरेखा

- 1.0 उद्देश्य
- 1.1 प्रस्तावना
- 1.2 एनएसएसओ के उद्देश्य
- 1.3 एनएसएसओ की जिम्मेदारी
- 1.4 एनएसएसओ डेटा उपयोग करने में चुनौतियाँ
- 1.5 एनएसएसओ के प्रभाव
- 1.6 एनएसएसओ का 76वां दौर
- 1.7 एनएसएसओ का सीएसओ में विलय,
- 1.8 पिछले सर्वेक्षण की तुलना में प्रक्रिया में महत्वपूर्ण परिवर्तन
- 1.9 निष्कर्ष
- 1.10 संदर्भ ग्रन्थ सूची
- 1.11 बोध प्रश्नों के उत्तर
- 1.12 अभ्यासार्थ प्रश्न

1.0 उद्देश्य (Objectives)

इकाई के अध्ययन के बाद आप समझ सकेंगे कि—

- केन्द्र और राज्य दोनों स्तरों पर विभिन्न सरकारी संगठनों द्वारा अनुरोधित राष्ट्रीय अर्थव्यवस्था के कई क्षेत्रों पर डेटा कैसे तैयार किया जाता है, का ज्ञान होगा।
- राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण डेटा क्यों इकट्ठा करता है।
- एनएसएसओ डेटा उपयोग करने में आने वाली चुनौतियों की जानकारी होगी।
- एनएसएसओ के प्रभाग के विषय में जानकारी होगी।
- राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय के कार्यों को समझ सकेंगे।
- श्रम शक्ति को कुशल कैसे कर सकते हैं।

1.1 प्रस्तावना (Introduction)–

राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण (एनएसएस) की स्थापना 1950 में एक व्यापक और गतिशील नियमित सर्वेक्षण कार्यक्रम के रूप में की गई थी। इसका प्राथमिक उद्देश्य केंद्र और राज्य दोनों स्तरों पर विभिन्न सरकारी संगठनों द्वारा अनुरोधित राष्ट्रीय अर्थव्यवस्था के कई क्षेत्रों पर डेटा इकट्ठा करना है। राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण (एनएसएस) भारत में एक लंबे समय से चला आ रहा नमूना सर्वेक्षण है जो कई समयावधियों में लगातार किया जाता रहा है। पहला राष्ट्रव्यापी नमूना सर्वेक्षण 1950-1951 की अवधि के दौरान किया गया था, जिसका उद्देश्य

भूमि उपयोग नियमित और अनियमित दोनों श्रमिकों द्वारा अर्जित दैनिक वेतन जैसे विभिन्न पहलुओं का दस्तावेजीकरण करना था। भूमि या संपत्ति के स्वामित्व, कृषि पद्धतियों के साथ-साथ विभिन्न वस्तुओं की साप्ताहिक और मासिक खपत से संबंधित घरेलू स्तर पर डेटा एकत्र किया गया था। राष्ट्रीय सर्वेक्षण का प्राथमिक उद्देश्य सांख्यिकीय डेटा एकत्र करना और सांख्यिकीय पद्धतियों का उपयोग करना है जिसका उपयोग डेटा के विश्लेषण और व्याख्या के साथ-साथ आर्थिक पहलुओं और अन्य जनसांख्यिकीय विशेषताओं से संबंधित जानकारी के प्रावधान के लिए किया जा सकता है।

1972 से, राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण संगठन (एनएसएसओ), एक भारतीय डेटा एकत्र करने वाला संगठन, भारत सरकार के सांख्यिकी मंत्रालय (एमओएस) और कार्यक्रम कार्यान्वयन (जीओआई) के तहत काम कर रहा है। यह सर्वेक्षण भारत की आर्थिक प्रगति को सुविधाजनक बनाने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। स्वतंत्रता प्राप्ति के बाद, राष्ट्र के सामने कृषि, परिवहन, खाद्य सुरक्षा, स्वास्थ्य देखभाल और शिक्षा जैसे कई क्षेत्रों सहित कई चुनौतियाँ थीं। व्यक्तियों के जीवन, उत्पाद उपयोग के माध्यम, वित्तीय परिस्थितियों और अन्य प्रासंगिक कारकों के बारे में जानकारी प्राप्त करने के लिए इस प्रकार के सर्वेक्षण नगरपालिका और राज्य दोनों स्तरों पर किए जाते हैं।

राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) सांख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय का एक विभाग है, जिसकी देखरेख एक महानिदेशक द्वारा की जाती है। इसकी प्राथमिक जिम्मेदारी कई माध्यमों में राष्ट्रव्यापी पैमाने पर व्यापक नमूना सर्वेक्षण करना है। राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण संगठन (एनएसएसओ) समय-समय पर साक्षरता दर, शैक्षिक सुविधाओं का उपयोग, बेरोजगारी दर, स्कूल नामांकन आंकड़े, रोजगार आंकड़े, विनिर्माण और सेवा क्षेत्र फर्म, बाल देखभाल और मातृत्व जैसे विभिन्न संकेतकों पर अनुमान पेश करता है। अपने प्राथमिक उद्देश्यों के अलावा, राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) अपने संचालन के हिस्से के रूप में क्षेत्रीय कार्य भी करता है। इस प्रक्रिया में विभिन्न व्यवसायों के भीतर वार्षिक सर्वेक्षणों का कार्यान्वयन, कृषि उत्पादन के लिए सर्वेक्षणों का अनुमान लगाना और ग्रामीण व शहरी दोनों क्षेत्रों में खुदरा कीमतों को इकट्ठा करना शामिल है। फिर इन आंकड़ों का उपयोग उपभोक्ता मूल्य सूचकांक आंकड़े बनाने के लिए किया जाता है। डेटा संग्रह मुख्य रूप से राष्ट्रव्यापी घरेलू सर्वेक्षणों के माध्यम से किया जाता है जो कई सामाजिक-आर्थिक विषयों के साथ-साथ अन्य तरीकों के साथ-साथ उद्योगों के वार्षिक सर्वेक्षण (एसआई) को भी लिया जाता है। सर्वेक्षण करने के अलावा, राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) ग्रामीण व शहरी मूल्य निर्धारण पर डेटा भी एकत्र करता है। इसके अलावा, यह राज्य एजेंसियों द्वारा किए गए क्षेत्र गणना और फसल आकलन सर्वेक्षणों की देखरेख करके कृषि सांख्यिकी को बढ़ाने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। इसके अतिरिक्त, यह शहरी क्षेत्र इकाइयों के एक ढांचे को बनाए रखता है जिसका उपयोग शहरी क्षेत्रों के अंदर किए गए नमूना सर्वेक्षणों में किया जा सकता है।



चित्र.1 एनएसएसओ के प्रभाग

राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) में चार अलग-अलग प्रभाग शामिल हैं:

- सर्वेक्षण संरचना एवं अनुसंधान प्रभाग (एसडीआरडी) कोलकाता में स्थित एक विभाग है जिसे सर्वेक्षण तैयारी के तकनीकी पहलुओं का कार्य सौंपा गया है। इसमें विचारों व परिभाषाओं को विकसित करना, नमूनाकरण विधियों की स्थापना करना, पूछताछ कार्यक्रम बनाना, सारणीबद्ध योजनाएं तैयार करना और सर्वेक्षण निष्कर्षों का विश्लेषण और प्रस्तुत करना शामिल है।
- फील्ड ऑपरेशंस डिवीजन (एफओडी) को राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) द्वारा किए गए सर्वेक्षणों के लिए प्राथमिक डेटा एकत्र करने का काम सौंपा गया है। एफओडी का मुख्यालय दिल्ली/फरीदाबाद में है और यह देश भर में छह क्षेत्रीय कार्यालयों, 49 क्षेत्रीय कार्यालयों और 118 उप-क्षेत्रीय कार्यालयों के नेटवर्क के माध्यम से संचालित होता है।
- डेटा प्रोसेसिंग डिवीजन (डीपीडी) सर्वेक्षणों के माध्यम से प्राप्त डेटा के संग्रह और विश्लेषण से संबंधित कई कार्यों के लिए जवाबदेह है। कोलकाता में मुख्यालय, यह प्रभाग विभिन्न क्षेत्रों में स्थित छह अन्य डेटा प्रोसेसिंग केंद्र संचालित करता है। इसकी जिम्मेदारियों में नमूना चयन, सॉफ्टवेयर विकास, डेटा प्रोसेसिंग, सत्यापन और सारणीकरण शामिल हैं।

- नई दिल्ली में स्थित समन्वय एवं प्रकाशन प्रभाग (सीपीडी), राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) के तहत कई प्रभागों द्वारा संचालित विभिन्न कार्यों की देखरेख एवं समन्वयीकरण हेतु जिम्मेदार है। इसके अलावा, संगठन "सर्वेक्षण" नामक एक द्वि-वार्षिक शैक्षणिक पत्रिका भी प्रकाशित करता है और राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) द्वारा किए गए कई सामाजिक-आर्थिक सर्वेक्षणों के निष्कर्षों पर केंद्रित राष्ट्रीय सेमिनार आयोजित करता है।

बोध प्रश्न1: राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण की स्थापना एवं कार्य के विषय में बताइये।

.....

राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण संगठन (NSSO) का 76वां दौर

एक महत्वपूर्ण अन्वेषण के आसपास अंतर्निहित बाधाओं को स्वीकार करते हुए, राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण (एनएसएस) रिपोर्ट में स्पष्ट रूप से एक अस्वीकरण शामिल है जिसमें कहा गया है कि सर्वेक्षण का 76 वां दौर पीने के पानी, स्वच्छता, आवास, बिजली और एलपीजी कनेक्शन जैसे कई पहलुओं पर केंद्रित है। पहली बार, सुविधाओं से संबंधित सरकारी कार्यों के अन्तर्गत परिवारों को मिलने वाले लाभों से संबंधित विविध जानकारी का संकलन किया गया। प्रतिभागियों द्वारा उन सुविधाओं के उपयोग के बारे में पूछताछ करने से पहले सर्वेक्षण किया गया था। प्रतिभागियों की प्रतिक्रियाएँ नकारात्मक रुख व्यक्त करने की प्रवृत्ति का संकेत देती हैं, शायद यह इस विश्वास से प्रेरित है कि सरकारी सेवाओं की अनुपलब्धता या सीमित पहुंच की रिपोर्ट करने से संभावित रूप से सरकारी कार्यक्रमों के माध्यम से अधिक लाभ प्राप्त होंगे। विभिन्न सरकारी सेवाओं के माध्यम से व्यक्तियों द्वारा प्राप्त लाभों एवं संबंधित सेवाओं का उपयोग करने की उनकी क्षमता से संबंधित परिणामों का विश्लेषण करते समय उपरोक्त विचारों को ध्यान में रखा जाएगा। पेयजल व स्वच्छता विभाग, सांख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय और जल शक्ति मंत्रालय इस बात पर जोर देते हैं।

एनएसएसओ के उद्देश्य

- कार्य में रणनीतिक योजनाओं के विकास और नीति सिफारिशों के निर्माण की सुविधा के लिए सांख्यिकीय डेटा का संकलन और विश्लेषण शामिल है।
- डेटा के विश्लेषण और व्याख्या के लिए उपयुक्त सांख्यिकीय पद्धतियाँ विकसित करना।
- आगामी रुझानों के सम्बन्ध में अनुमान लगाने हेतु।
- सामाजिक-आर्थिक सूचकांकों और जनसांख्यिकीय कारकों से संबंधित डेटा का प्रसार।
- सामाजिक-आर्थिक अनुसंधान प्रयासों में शामिल लोगों के लिए ऐसे विश्लेषणों तक पहुंच प्रदान करना

एनएसओ की जिम्मेदारियां इस प्रकार हैं: -

- राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय (एनएसओ) सांख्यिकी के क्षेत्र में एक महत्वपूर्ण संगठन के रूप में कार्य करता है, जो स्थापित मानदंडों एवं मानकों को बनाए रखने के लिए जिम्मेदार है।
- राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय (एनएसओ) देश के भीतर सांख्यिकीय प्रणाली की रणनीतिक दिशा को आकार देने में महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। इसकी प्राथमिक जिम्मेदारियों में डेटा के प्रसंस्करण की निगरानी करना और सांख्यिकीय निष्कर्षों का प्रभावी वितरण सुनिश्चित करना शामिल है।
- राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय (एनएसओ) भारत सरकार के भीतर राज्य सांख्यिकी ब्यूरो (एसएसबी) और अन्य सरकारी एजेंसियों के बीच सांख्यिकीय गतिविधियों के सामंजस्य को सुविधाजनक बनाने का अधिकार प्राप्त है।
- राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय (एनएसओ) भारत सरकार के मंत्रालयों और विभागों को डेटा और सांख्यिकीय तकनीक के सांख्यिकीय विश्लेषण से संबंधित निर्देश प्रदान करता है।
- राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय (एनएसओ) कई कार्यक्षेत्रों पर प्रकाशनों की एक श्रृंखला के माध्यम से सांख्यिकीय डेटा का प्रसार करता है जो सरकारी संस्थाओं, अर्ध-सरकारी संगठनों एवं वाणिज्यिक डेटा उपयोगकर्ताओं/एजेंसियों को आपूर्ति की जाती है।
- राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय (एनएसओ) कई संयुक्त राष्ट्र संगठनों को आंकड़े वितरित करने के लिए जिम्मेदार है, जिसमें संयुक्त राष्ट्र सांख्यिकी प्रभाग (यूएनएसडी), संयुक्त राष्ट्र आर्थिक एवं सामाजिक आयोग (ईएससीएपी), का विस्तारित क्षेत्र है।

बोध प्रश्न2: एनएसएसओ के उद्देश्य एवं जिम्मेदारियां बताइये।

.....

एनएसएसओ आँकड़ों का उपयोग करने में चुनौतियाँ

राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) महत्वपूर्ण सामाजिक मुद्दों को संबोधित करने वाले अनुसंधान को बढ़ावा देने और सुविधा प्रदान करने के लिए समर्पित है। सार्वजनिक रूप से उपलब्ध वेबसाइटों के माध्यम से आसानी से पहुंचा जा सकता है। हालाँकि, राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण (एनएसएस) डेटा और कार्यप्रणाली के उपयोग में कई बाधाएँ पैदा होती हैं। राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) द्वारा उपयोग की जाने वाली नमूना प्रक्रियाओं को सटीक रूप से पुनः पेश करने के लिए, एनएसएसओ द्वारा चित्रित शहरी ब्लॉकों का उपयोग करना आवश्यक है। यह दृष्टिकोण नमूने की प्रतिनिधित्वशीलता को सुनिश्चित करने और तुलनात्मकता स्थापित करने के लिए महत्वपूर्ण है, खासकर जब आधार रेखा के रूप में एनएसएस आँकड़ों का उपयोग किया जाता है। इसके

अलावा, यह ध्यान देने योग्य है कि लगातार अपडेट के बावजूद, शहरी ब्लॉकों का सटीक मानचित्रण करने का प्रयास शहरीकरण की बढ़ती दर को ध्यान में रखते हुए चुनौतियों का सामना कर सकता है। नतीजतन, भौगोलिक क्षेत्र समसामयिक मानचित्रण निरूपण से विचलित हो जाएंगे, जिससे सर्वेक्षणकर्ता के लिए एक विकट बाधा उत्पन्न होगी। इन बाधाओं के बावजूद, एनएसएस शहरी ब्लॉक शहरी क्षेत्रों में अनुसंधान करने के लिए सबसे इष्टतम संसाधन बने हुए हैं, क्योंकि जनगणना वार्ड संभावित रूप से और भी अधिक प्राचीन हो सकते हैं। सभी मानचित्रों के लिए एक केंद्रीकृत भंडार की कमी एक व्यावहारिक चुनौती है, क्योंकि विश्लेषणकर्ताओं को संबंधित क्षेत्रीय एनएसएसओ कार्यालयों से मानचित्र प्राप्त करने होंगे जो उनके अध्ययन के विशिष्ट भौगोलिक क्षेत्र के अनुरूप हों। यह कठिनाई एक ऐसे स्थान के अभाव के कारण उत्पन्न होती है जहाँ सभी मानचित्र संग्रहीत किये जाते हैं। इन चिंताओं के जवाब में, राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) ने निकट भविष्य में शिक्षाविदों के लिए पहुंच बढ़ाने के उद्देश्य से अपने हाल ही में अद्यतन मानचित्रों का डिजिटलीकरण किया है। राष्ट्रीय सांख्यिकी प्रणाली (एनएसएस) को कुछ राष्ट्रीय लक्ष्यों को लक्षित करने हेतु संरचनात्मक आधार बनाया गया है, और आंकड़े एकत्र करने की प्रक्रिया इन उद्देश्यों की प्राप्ति तक ही सीमित है। राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण (एनएसएस) भारत में विभिन्न जनसांख्यिकीय कारकों पर जानकारी प्राप्त करने के लिए एक महत्वपूर्ण और विश्वसनीय डेटा संसाधन के रूप में कार्य करता है। ये सर्वेक्षण नीति निर्माताओं एवं विश्लेषणकर्ताओं के लिए सूचित निर्णय लेने और व्यापक अध्ययन करने के लिए अत्यधिक महत्व रखते हैं। हालाँकि यह स्वीकार किया गया है कि उनकी कुछ सीमाएँ निर्धारित हो सकती हैं एवं स्रोत आबादी की समग्र स्वास्थ्य स्थिति और देश भर में देखे जाने वाले आधार को समझने के संदर्भ में महत्वपूर्ण योगदान प्रदान करते हैं। जब राष्ट्रीय छात्र सर्वेक्षण (एनएसएस) आँकड़े उचित रूप से निकाले जाते हैं और सारणीबद्ध प्रारूप में व्यवस्थित किया जाता है। इसके अलावा, ये उपकरण राष्ट्रीय व अंतर्राष्ट्रीय दोनों स्तरों पर सामाजिक-आर्थिक एवं जनसांख्यिकीय विशेषताओं के विश्लेषण व तुलना की सुविधा प्रदान करने में एक मूल्यवान उद्देश्य प्रदान करते हैं। इसलिए, उनके पास उन नीतियों और कार्यों पर महत्वपूर्ण प्रभाव डालने की क्षमता है जो आबादी के स्वास्थ्य और समग्र कल्याण को बढ़ाने हेतु संरचित किया गया है।

बोध प्रश्न3: एनएसएसओ का डेटा उपयोग करने में चुनौतियाँ बताइये।

.....

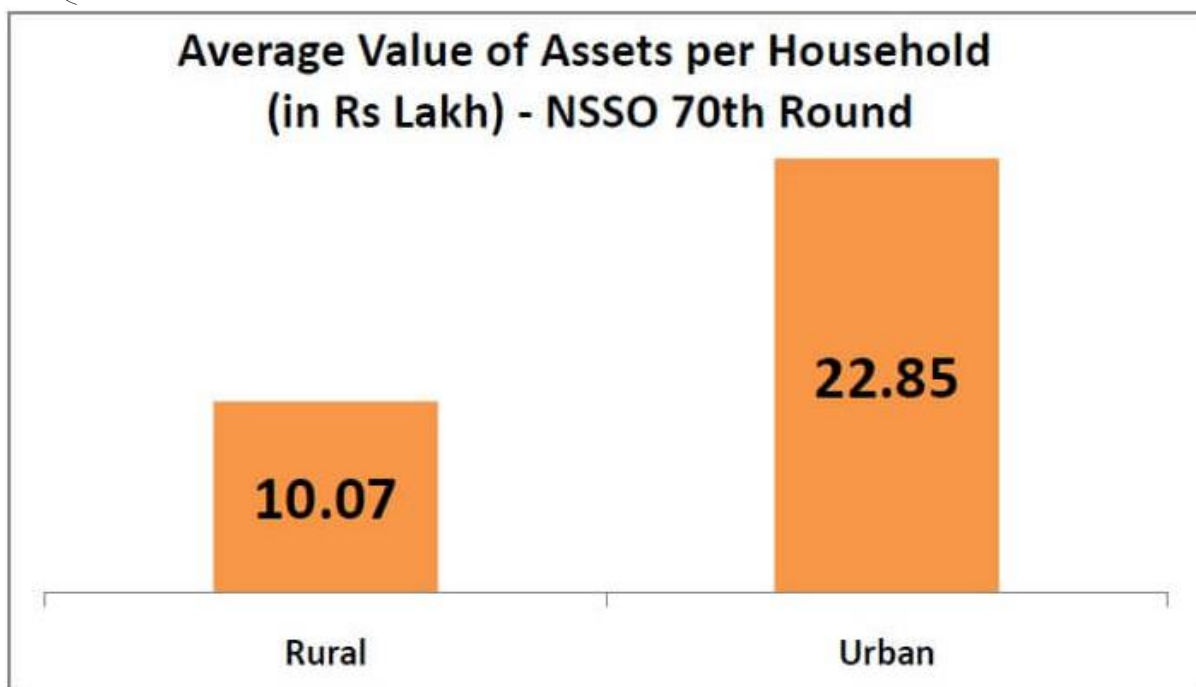
पिछले सर्वेक्षण की तुलना में प्रक्रिया में महत्वपूर्ण परिवर्तन

राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) ने 2003 में आयोजित अंतिम पुनरावृत्ति की तुलना में इस सर्वेक्षण की पद्धति में पर्याप्त संशोधन लागू किए। एनएसएसओ के अनुसार, इन संशोधनों को देश में बदली हुई परिस्थितियों का सटीक प्रतिनिधित्व करने के लिए लागू किया गया था। कई प्रक्रियात्मक संशोधन किये गये हैं, जिसमें वर्तमान दौर में भूमि और भवनों का मूल्यांकन दिशानिर्देश मूल्यों का उपयोग करके निर्धारित किया गया

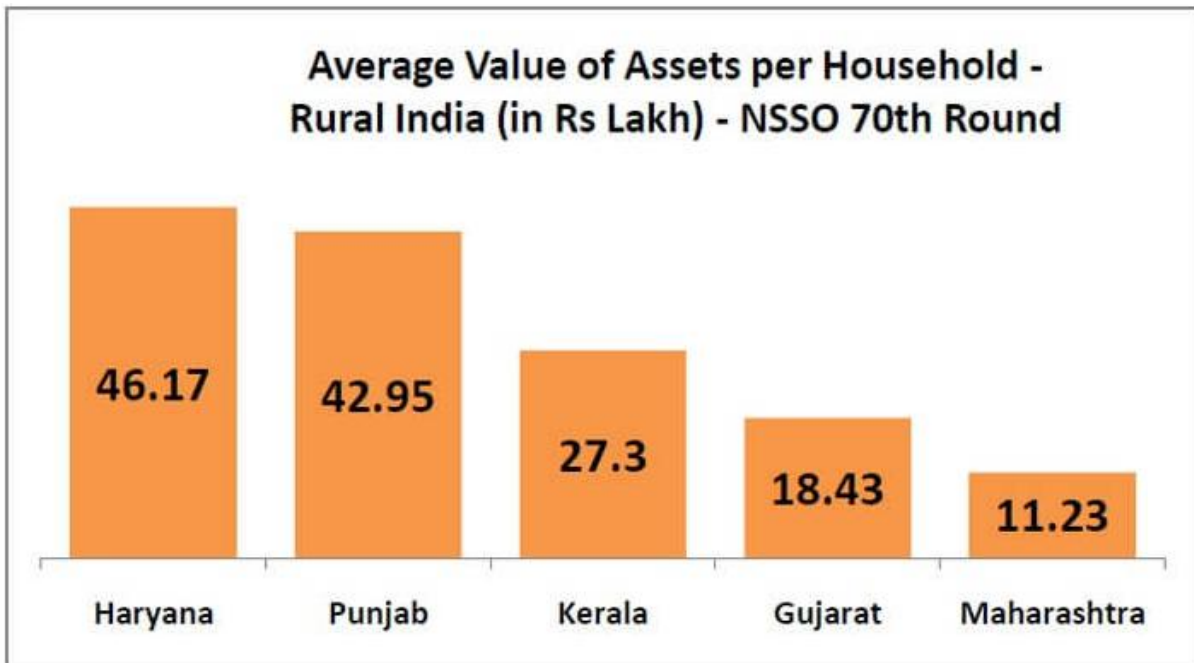
था, जबकि 2003 के सर्वेक्षण में मूल्यांकन मुखबिरों द्वारा प्रदान किए गए मूल्यों पर आधारित था। इस दौर में घरेलू टिकाऊ वस्तुएं जैसे सोना और आभूषणों को संपत्ति की सूची से बाहर रखा गया था। राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) को टिकाऊ वस्तुओं के मूल्य का सटीक आकलन प्राप्त करना चुनौतीपूर्ण लगा। पिछले दौर में, सोने और आभूषणों सहित घरों में पाए जाने वाले सभी घरेलू सामान को संपत्ति मूल्य की गणना में शामिल किया गया था। इस दौर में परिसंपत्तियों का प्रमुख मूल्य भूमि और संरचनाओं से प्राप्त किया जाना निर्धारित किया गया था।

भारत में संपत्ति का औसत मूल्य शहरी-ग्रामीण मूल्यांकन

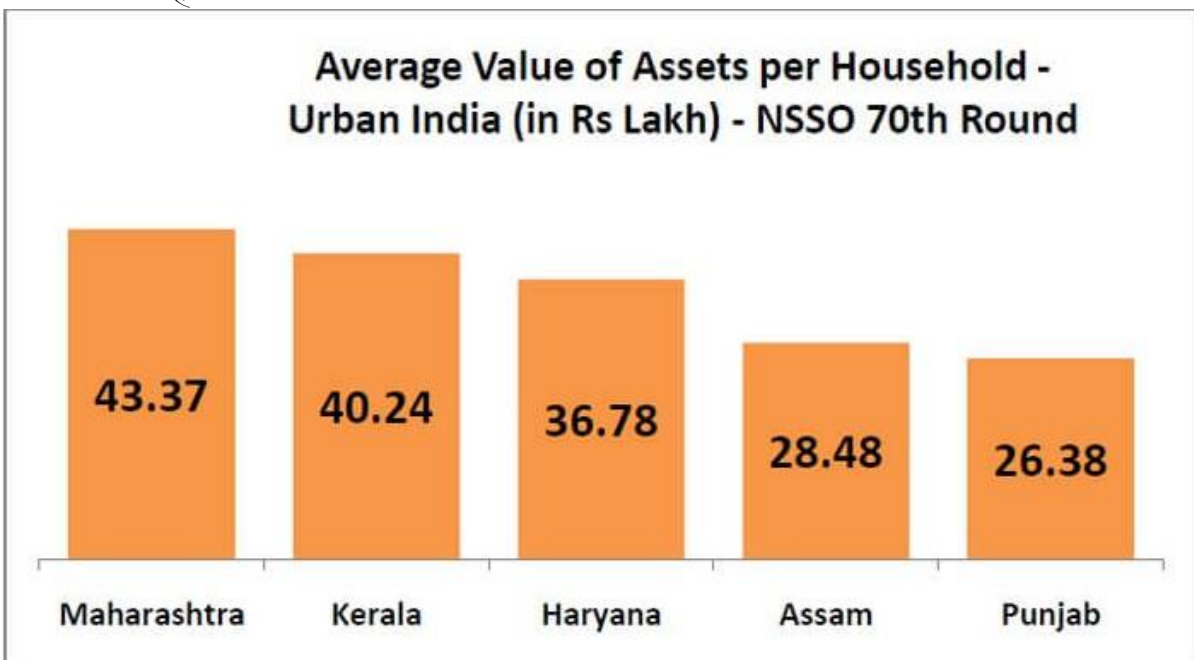
सर्वेक्षण के अन्तर्गत शहरी भारत में 93.5% परिवारों के पास संपत्ति है, जबकि ग्रामीण भारत में तुलनीय संख्या 98.3% है। मौजूदा प्रतिशत पिछले दौर के समतुल्य प्रतिशत की तुलना में बहुत कम है, शायद सोने और अन्य टिकाऊ वस्तुओं में कमी एक कारण है। ग्रामीण भारत में औसत घरेलू संपत्ति 10.07 लाख रुपये थी, जबकि शहरी भारत में यह 22.85 लाख रुपये थी।



ग्रामीण भारत में औसत घरेलू संपत्ति का मूल्य हरियाणा में सबसे अधिक है, जो कि 46.17 लाख रुपये है, इसके बाद पंजाब में 42.95 लाख रुपये है। अध्ययन किए गए अठारह राज्यों में से केवल दो में संपत्ति का औसत मूल्य राष्ट्रीय औसत से चार गुना अधिक था। शीर्ष पांच में अन्य राज्य 27.3 लाख की आबादी के साथ केरल, 18.43 लाख की आबादी के साथ गुजरात और 11.23 लाख की आबादी के साथ महाराष्ट्र हैं। अध्ययन किए गए अठारह राज्यों में से, सात राज्यों में संपत्ति का औसत मूल्य राष्ट्रीय औसत से अधिक हो गया, जबकि अन्य ग्यारह राज्यों में यह राष्ट्रीय औसत से नीचे गिर गया।



शहरी भारत में औसत घरेलू संपत्ति का मूल्य महाराष्ट्र में सबसे अधिक है, जो कि 43.37 लाख रुपये है, इसके बाद केरल में 40.24 लाख रुपये है। शीर्ष पांच में शेष राज्य 36.78 लाख की आबादी के साथ हरियाणा, 28.48 लाख के साथ असम और 26.38 लाख के साथ पंजाब हैं। अध्ययन किए गए अठारह राज्यों में से, छह राज्यों में संपत्ति का औसत मूल्य राष्ट्रीय औसत से अधिक हो गया, जबकि शेष बारह राज्यों में यह राष्ट्रीय औसत से नीचे गिर गया। चार राज्य महाराष्ट्र, केरल, हरियाणा और पंजाब शहरी और ग्रामीण दोनों क्षेत्रों में शीर्ष पांच में हैं।



<https://factly.in/latest-nss-household-survey-reveals-the-stark-inequality-in-india/>

ग्रामीण क्षेत्रों में, सबसे गरीब 10% के लिए संपत्ति का औसत मूल्य 25071 रुपये है, जबकि शीर्ष 10% के लिए तुलनीय मूल्य 56.89 लाख रुपये है। शीर्ष 10% की औसत संपत्ति हिस्सेदारी निचले 10% की औसत संपत्ति हिस्सेदारी का लगभग 228 गुना है। यह असमानता शहरी क्षेत्रों में काफी अधिक स्पष्ट है। सबसे कम 10% के पास संपत्ति का औसत मूल्य लगभग 291 रुपये है, जबकि उच्चतम 10% के लिए समतुल्य मूल्य 1.45 करोड़ रुपये है। सबसे अमीर 10% के पास सबसे गरीब 10% की तुलना में 50000 गुना अधिक संपत्ति है। इस घटना को उन गरीब व्यक्तियों की महत्वपूर्ण आमद के लिए जिम्मेदार ठहराया जा सकता है जो किसी भी प्रकार के धन या संसाधनों के बिना महानगरीय क्षेत्रों में स्थानांतरित हो जाते हैं।

राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय- एनएसएसओ का सीएसओ के साथ विलय

भारत सरकार द्वारा 23 मई 2019 में राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण संगठन का केंद्रीय सांख्यिकी कार्यालय में समावेश किया गया जिसके अन्तर्गत राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय का गठन किया गया। राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय का विनियमन सांख्यिकी कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय (एमओएसपीआई) द्वारा किया जाता है। राष्ट्रीय सांख्यिकी कार्यालय एक सांख्यिकीय संगठन के रूप में समावेशित है। इसका नेतृत्व सचिव सांख्यिकी एवं कार्यक्रम कार्यान्वयन द्वारा किया जाता है। महानिदेशक (डीजी) एनएसओ के विभिन्न प्रभागों को सचिव को रिपोर्ट करने में मदद करते हैं। एनएसओ के कुछ आवश्यक कार्य हैं, वे हैं-

- यह प्रकाशनों के वितरण के माध्यम से सरकारी और अर्ध-सरकारी निकायों तक सांख्यिकी संबंधी जानकारी प्रसारित करता है।
- एनएसओ राज्य सांख्यिकी ब्यूरो (एसएसबी) के सांख्यिकीय प्रयासों को समेकित करता है।
- एनएसओ संयुक्त राष्ट्र की एजेंसियों को आँकड़े वितरित करता है।
- एनएसओ देश में सांख्यिकी प्रणाली के विकास को संरचित करने एवं लागू करने के लिए जिम्मेदार है।
- यह सांख्यिकी के क्षेत्र में एक केंद्रीय एजेंसी के रूप में कार्य करती है, जो मानदंडों और मानकों के रखरखाव को सुनिश्चित करती है।
- एनएसओ भारत सरकार को आँकड़े और सांख्यिकीय विश्लेषण सम्बन्धित सिफारिशें प्रदान करता है।

निष्कर्ष

राष्ट्रीय प्रतिदर्श सर्वेक्षण प्रत्येक राष्ट्र के लिए एक महत्वपूर्ण उपकरण है क्योंकि यह कई क्षेत्रों में देश की प्रगति के बारे में मूल्यवान अंतर्दृष्टि प्रदान करता है, साथ ही कुछ जनसांख्यिकीय समूहों पर भी प्रकाश डालता है जिन्हें लक्षित संसाधनों की आवश्यकता होती है। 1950 में राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण संगठन की स्थापना का उद्देश्य पूरे भारत में सर्वेक्षणों के व्यापक कार्यान्वयन को सुविधाजनक बनाना था। राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय (एनएसएसओ) के कार्यबल में शामिल कर्मियों को संघ लोक सेवा आयोग (यूपीएससी) द्वारा आयोजित अपेक्षित अनुमोदन प्रक्रिया के माध्यम से भारतीय सांख्यिकी सेवा विभाग से भर्ती किया जाता है। राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण (एनएसएस) को विकासशील दुनिया में सबसे लंबे समय तक चलने वाले सर्वेक्षणों में से एक माना जाता है। भारत में राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण (एनएसएस) में चार प्रभाग या विभाग शामिल हैं, जिनमें से दो कोलकाता में और दो दिल्ली में स्थित हैं।

सन्दर्भ ग्रन्थ सूची

- <https://in.linkedin.com/company/national-sample-survey-office>
- <https://unacademy.com/content/railway-exam/study-material/general-awareness/national-sample-survey/>
- <https://testbook.com/ias-preparation/national-sample-survey-office-nssso?language=hindi>
- भारत सरकार. 1994. एनएसएसओ, 50वां दौर: नमूना डिजाइन और अनुमान प्रक्रिया पर नोट। कोलकाता, भारत: सांख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय, सर्वेक्षण डिजाइन और अनुसंधान प्रभाग।
- भारत सरकार. 2000. राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण: राष्ट्र की सेवा में पचास वर्ष (1950-2000)। नई दिल्ली, भारत: सांख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय, राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण संगठन।
- सेन, अभिजीत। 2000. उपभोक्ता व्यय और उसके वितरण का अनुमान। इकोनॉमिक एंड पॉलिटिकल वीकली, दिसंबर 16: 4499-4518।
- सुब्रमण्यम, शंकर, और एंगस डीटन। 1996. भोजन और कैलोरी की मांग। जर्नल ऑफ पॉलिटिकल इकोनॉमी 104 (1): 133-162।
- सुंदरम, कृष्णमूर्ति। 2001a. 1990 के दशक में भारत में रोजगार-बेरोजगारी की स्थिति: एनएसएस 55वें दौर के सर्वेक्षण से कुछ परिणाम। इकोनॉमिक एंड पॉलिटिकल वीकली, मार्च 17: 931-940।

- सुंदरम, कृष्णमूर्ति। 2001बी. 1990 के दशक में रोजगार और गरीबी: एनएसएस 55वें दौर के रोजगार-बेरोजगारी सर्वेक्षण, 1999-2000 से आगे के परिणाम। इकोनॉमिक एंड पॉलिटिकल वीकली, 11 अगस्त: 3039-3049।
- भट्टाचार्य, एन., पी.डी. जोशी, और ए.बी. रॉयचौधरी. 1980. एनएसएस 25वें दौर के उपभोक्ता व्यय डेटा पर आधारित क्षेत्रीय मूल्य सूचकांक। सर्वेक्षण 3 (4): 107-121.
- राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण संगठन (एनएसएसओ) (भारत सरकार) (2006) रुग्णता, स्वास्थ्य देखभाल और वृद्धों की स्थिति। रिपोर्ट संख्या 507, राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण संगठन, सांख्यिकी और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय, नई दिल्ली।

बोध प्रश्नों के उत्तर—1

1. एनएसएसओ की स्थापना 1950 में एक व्यापक और चालू नमूना सर्वेक्षण कार्यक्रम के रूप में की गयी थी।
2. यह भारत सरकार के सांख्यिकी मंत्रालय और कार्यक्रम कार्यान्वयन मंत्रालय के तहत काम कर रहा है।
3. इसका प्रमुख कार्य केन्द्र और राज्य दोनों स्तरों पर विभिन्न सरकारी संगठनों द्वारा अनुरोधित राष्ट्रीय अर्थव्यवस्था के कई क्षेत्रों पर डेटा इकट्ठा करना है।
4. सर्वेक्षण के अलावा, राष्ट्रीय नमूना सर्वेक्षण कार्यालय ग्रामीण और शहरी मूल्य निर्धारण पर डेटा भी एकत्र करता है।

उत्तर बोध प्रश्न—2

1. एनएसएसओ के कार्य में सांख्यिकीय डेटा का संकलन और विश्लेषण शामिल है।
2. डेटा के विश्लेषण और व्याख्या के लिए उपयुक्त सांख्यिकीय पद्धतियां विकसित करना।
3. आगामी रुझानों के संबंध में अनुमान लगाने हेतु।
4. सामाजिक—आर्थिक सूचकांकों और जनसांख्यिकीय कारकों से संबंधित डेटा का प्रसार।
5. राष्ट्रीय सांख्यिकीय कार्यालय भारत सरकार के मंत्रालयों और विभागों को डेटा और सांख्यिकीय तकनीक के सांख्यिकीय विश्लेषण से संबंधित निर्देश प्रदान करता है।

उत्तर बोध प्रश्न-3

1. एनएसएसओ द्वारा उपयोग की जाने वाली नमूना प्रक्रियाओं को सटीक रूप से पुनः पेश करने के लिए एनएसएसओ के द्वारा चित्रित शहरी ब्लकों का उपयोग करना आवश्यक है जो कि एक चुनौतीपूर्ण कार्य है।
2. सभी मानचित्रों के लिए एक केन्द्रीकृत भण्डार की कमी एक व्यवहारिक चुनौती है।
3. शिक्षाविदों के लिए पहुँच बढ़ाने के उद्देश्य से अपने हाल ही में अद्यतन मानचित्रों का डिजिटलीकरण एक चुनौती है।
4. देश की प्रगति के बारे में मूल्यांकन अंतर्दृष्टि प्रदान करना एक चुनौती है।

अभ्यासार्थ प्रश्न (Unit-end Questions)

1. एनएसएसओ की स्थापना क्यों हुई?
2. एनएसएसओ से सांख्यिकीयविदों को कैसे लाभ मिलता है?
3. एनएसएसओ किसके अन्तर्गत कार्य करता है?
4. एनएसएसओ में कितने विभाग हैं?
5. एनएसएसओ के 76वीं दौर में प्रमुख निष्कर्ष बताइये।
6. एनएसएसओ के उद्देश्य बताइये।
7. एनएसएसओ डेटा उपयोग में चुनौतियाँ बताइये।
8. एनएसएसओ डेटा किस प्रकार इकट्ठा करता था।