UGEC-104 (N)
अर्थशास्त्रीय गणित

परामर्श–समिति

प्रोफेसर सत्यकाम	**कुलपति–अध्यक्ष**
प्रो. सत्यपाल तिवारी	निदेशक, मानविकी विद्याशाखा– कार्यक्रम संयोजक
श्री विनय कुमार	कुलसचिव–सचिव

विशेषज्ञ समिति

प्रो. सत्यपाल तिवारी	**अध्यक्ष**	उ.प्र. राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
डॉ अनिल कुमार यादव	**संयोजक**	उ.प्र. राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज
प्रो.किरन सिंह		इलाहाबाद केन्द्रीय विश्वविद्यालय, प्रयागराज
प्रो. एम.के. सिंह		एम.जे.पी. रूहेलखण्ड विश्वविद्यालय, बरेली
डॉ. विश्वनाथ कुमार		एस.बी. पी.जी. कालेज, बड़ागाँव, वाराणसी
डॉ. अनूप कुमार		इलाहाबाद केन्द्रीय विश्वविद्यालय, प्रयागराज

पाठ्यक्रम समन्वयक

डॉ. अनिल कुमार यादव — सहायक आचार्य, अर्थशास्त्र, उ.प्र. राजर्षि टण्डन मुक्त वि.वि., प्रयागराज

सम्पादक

प्रो0 (डॉ.) विश्वनाथ कुमार — प्रोफेसर, अर्थशास्त्र विभाग,एस.बी.पी.जी. कालेज, बड़ागाँव, वाराणसी

परिमापक

डॉ. अनिल कुमार यादव — सहायक आचार्य, अर्थशास्त्र, उ.प्र. राजर्षि टण्डन मुक्त वि.वि., प्रयागराज

लेखक मण्डल

लेखक

डॉ. अनिल कुमार यादव — **खण्ड–5** इकाई–01

सहायक आचार्य, अर्थशास्त्र, उ.प्र. राजर्षि टण्डन मुक्त वि.वि., प्रयागराज

डॉ. अमित जायसवाल, सहा0 आचार्य, (अर्थशास्त्र) राजकीय महिला स्नातकोत्तर महाविद्यालय, बिन्दकी, फतेहपुर

खण्ड–1 इकाई–01,02,03,04,05,06,07,
खण्ड–2 इकाई–01,02,03,04,05,06,07,08
खण्ड–3 इकाई–01,02,03,04,05
खण्ड–4 इकाई–01,02,03,04,05
खण्ड–5 इकाई–02

मुद्रित– (माह), (वर्ष)

© उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज – (वर्ष)

ISBN-

सर्वाधिक सुरक्षित। इस पाठ्य सामग्री का कोई भी अंश उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति के बिना, मिमियोग्राफ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज की ओर से श्री विनय कुमार, कुलसचिव द्वारा मुद्रित एवं प्रकाशित, (माह) (वर्ष), (मुद्रक का नाम व पता)

UGEC-104(N)
अर्थशास्त्रीय गणित

खण्ड 1 – गणितीय अर्थशास्त्र : परिचय एवं अवकलन

1. अवकलन : आंशिक अवकलन, साधारण अवकलन तथा पूर्ण अवकलन।
2. अवकलन प्रयोग, माँग की लोच, आंशिक लोच
3. समाकलन : अर्थ, प्रयोग : उपभोक्ता एवं उत्पादक की बचत
4. उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ
5. प्रथम और उच्च कोटि के अवकलन उच्चतम एवं न्यूनतम और आर्थिक अनुप्रयोग।
6. दो तथा दो से अधिक चरों से संबन्धित अवकलन
7. दो चरों से सम्बन्धित अवकलन के आर्थिक प्रयोग : उपभोक्ता एवं उत्पादक साम्य

खण्ड 2 – सारणिक अवधारणा एवं समंको का विश्लेषण

1. सारणिक आव्यूह, गुण– उपसारणिक एवं सहखण्ड
2. सारणिक के प्रयोग, क्रेमर के नियम
3. आव्यूह के प्रकार एवं गुण, आव्यूह गुणन
4. समंको का प्रस्तुतीकरण, आवृत्ति वितरण
5. केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें– माध्य, माध्यिका, बहुलक
6. अपकिरण की मापें, प्रमाप विचलन, प्रमाप विचलन का गुणांक
7. चतुर्थक विचलन, विषमता तथा उनका माप
8. लारेंज वक्र

खण्ड 3 – सहसम्बन्ध विश्लेषण

1. सहसम्बन्ध : अर्थ, महत्व, प्रकार, परिमाण
2. सहसम्बन्ध विश्लेषण, सरल बहुगुणी तथा आंशिक सहसम्बन्ध
3. सहसम्बन्ध गुणांक, कार्ल पियर्सन तथा स्पियरयरमैन का कोटि अन्तर गुणांक
4. प्रतिपगमन, अर्थ, उपयोग, सहसम्बन्ध से अन्तर
5. प्रतीपगमन विश्लेषण, प्रतीपगमन रेखाएं

खण्ड 4 – काल श्रेणी का विश्लेषण

1. काल श्रेणी का विश्लेषण, काल श्रेणी के अवयव
2. उपनति का निर्धारण, सामयिक परिवर्तन
3. सूचकांक मूल्य सापेक्ष तथा मात्रा सापेक्ष, लास्पेयर पाशे
4. फिशर का सूचकांक, आदर्श सूचकांक का परीक्षण
5. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक

खण्ड 5 – अर्थशास्त्र में गणित का महत्व एवं भूमिका

1. फलन, चर
2. समिकाएँ एवं समीकरण

खण्डः एक

गणितीय अर्थशास्त्र : परिचय एवं अवकलन
इकाईः 1 – अवकलनः आंशिक अवकलन, साधारण अवकलन तथा पूर्ण अवकलन
(Differentiation: Simple, Partial and Total Differentation)

इकाई संरचना (Unit Plan)

1.0 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप जानेंगे–

i. अवकलन की अवधारणा।
ii. अवकलन ज्ञात करने के सामान्य नियमों को।
iii. अवकलन के विभिन्न प्रकारों यथा सामान्य अवकलन, आंशिक अवकलन तथा पूर्ण अवकलन की अवधारणा।

1.2 प्रस्तावना (Introduction)

इस इकाई का उद्देश्य गणितीय अर्थशास्त्र की अत्यंत आधारभूत संकल्पना 'अवकलन' की व्याख्या करना है। **"किसी सतत फलनात्मक संबंध में स्वतंत्र चर के सूक्ष्मतम (लगभग शून्य) परिवर्तन के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तन को ही अवकलन कहते हैं"।**

अवकलन को समझने से पहले आपको चरों के विभिन्न प्रकारों जैसे स्वतंत्र चर तथा आश्रित चर एवं फलनात्मक संबंध (जो की स्वतंत्र चर तथा आश्रित चर के बीच के संबंध को बताते हैं) के बारे में आवश्यक जानकारी होनी चाहिए। सुविधा के लिए आप संक्षेप में स्वतंत्र चर, आश्रित चर तथा फलनात्मक संबंध को इस प्रकार समझ सकते हैं–

आर्थिक सिद्धांत प्रायः कारण परिणाम संबंधों के रूप में पाए जाते हैं। जैसे, मांग का नियम, जो यह कहता है कि किसी वस्तु की मांग उस वस्तु के मूल्य में परिवर्तन के कारण कम या ज़्यादा होती है, इस प्रकार मांग का कोई स्तर उस वस्तु के मूल्य का परिणाम होती है। निश्चय ही मांग एक परिणाम है जिसका कारण मूल्य होता है। कारण –परिणाम संबंध में परिणाम को ही फलन कहा जाता है जो विभिन्न कारणों पर निर्भर करता है। कारणों को स्वतंत्र चर भी कहते हैं और परिणाम को ही फलन भी कहते हैं, जो एक आश्रित चर होता है । कारण–परिणाम के संबंध को फलनात्मक संबंध कहते हैं। सतत्य एवं सीमा का परिचय हम अवकलन कि अवधारणा के साथ ही प्राप्त करेंगे।

1.3 अवकलनः परिचय (Differentiation: Introduction)

एक फलनात्मक संबंध में स्वतंत्र चर तथा आश्रित चर के बीच का संबंध स्पष्ट होता है। निश्चय ही स्वतंत्र चर में परिवर्तन के परिणामस्वरूप आश्रित चर में परिवर्तन होता है। परन्तु जब हम इन परिवर्तनों को परिमाणात्मक रूप से व्यक्त करते हैं तो यह ज्ञात करना आसान हो जाता है कि स्वतंत्र में एक इकाई परिवर्तन करने पर आश्रित चर में कितनी इकाई का परिवर्तन होगा, इस प्रकार स्वतंत्र चर में इकाई परिवर्तन के सापेक्ष आश्रित चर (फलन) में होने वाले परिवर्तन की माप को ही परिवर्तन की दर कहा जाता है। उदाहरण के लिए –

उदाहरण 1.1–यदि किसी वस्तु के विभिन्न मूल्यों के सापेक्ष मांग की विभिन्न मात्राएँ निम्नवत हों –

वस्तु की कीमत (रुपये में)	40	35	30	25	20
वस्तु कि मांग कि इकाइयाँ	23	25	27	29	31

तो इस उदाहरण के लिए मूल्य में परिवर्तन के सापेक्ष मांग में परिवर्तन की गणना निम्नवत होगी–

वस्तु की कीमत P (रुपये में)	वस्तु की मांग की इकाइयाँ (q)	वस्तु की कीमत में परिवर्तन	वस्तु की मांग में परिवर्तन	कीमत में परिवर्तन के सापेक्ष मांग में औसत परिवर्तन
40	23	–	–	–
35	25	(–5)	2	2 / (–5) = (–0.4)
30	27	(–5)	2	2 / (–5) = (–0.4)
25	29	(–5)	2	2 / (–5) = (–0.4)
20	31	(–5)	2	2 / (–5) = (–0.4)

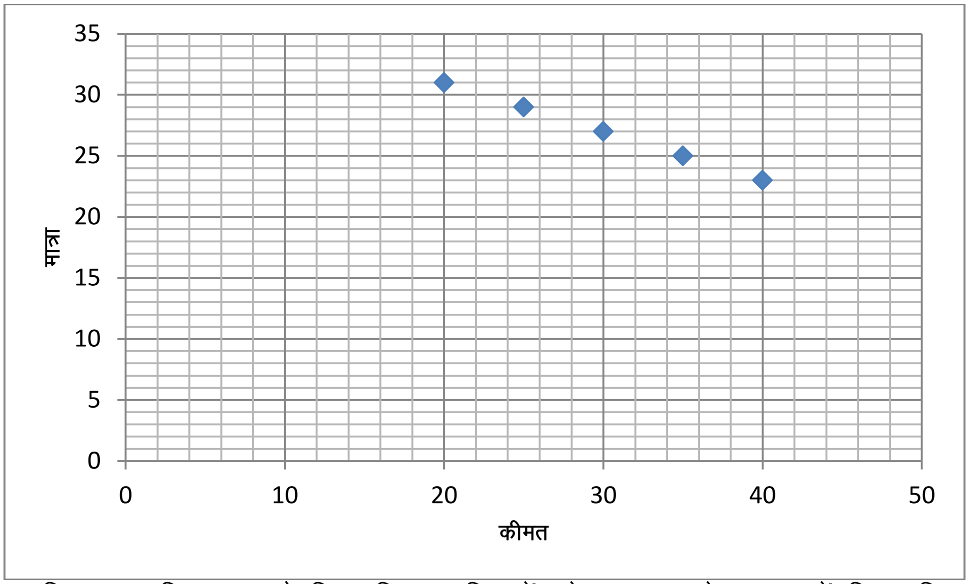
यहाँ उदाहरण में मूल्य के सभी स्तरों के लिए मूल्य में परिवर्तन के सापेक्ष मांग में परिवर्तन की दर $\frac{q_2-q_1}{p_2-p_1} = \frac{f(q_2)-f(q_1)}{p_2-p_1} = \frac{2}{-5}$ = (-0.4) है।

हालांकि यहाँ आपके समझने की सरलता के लिए ऐसा उदाहरण लिया गया है जिसमें परिवर्तन की यह दर स्थिर है, परंतु आवश्यक नहीं है कि ऐसा हमेशा हो। हम आगे उदाहरणों में देखेंगे की कीमत में परिवर्तन के सापेक्ष मांग की परिवर्तन की औसत दर सदैव परिवर्तित होती हुई भी मिल सकती है।

स्वतंत्र चर में परिवर्तन के सापेक्ष आश्रित चर में होने वाले परिवर्तन की **सीमांत दर** को ही फलन की ढाल कहते हैं। वस्तुतः अवकलन कि अवधारणा भी यहीं से निकली हुई है। जब स्वतंत्र तथा आश्रित चर सतत होते है (अर्थात जब फलनात्मक संबंध सतत (continuous) होते हैं) तब स्वतंत्र चर में अति सूक्ष्म परिवर्तन के सापेक्ष आश्रित चर में होने वाले परिवर्तन को ही अवकलज कहते हैं और फलन के अवकलज प्राप्त करने की प्रक्रिया ही अवकलन कहलाती है।

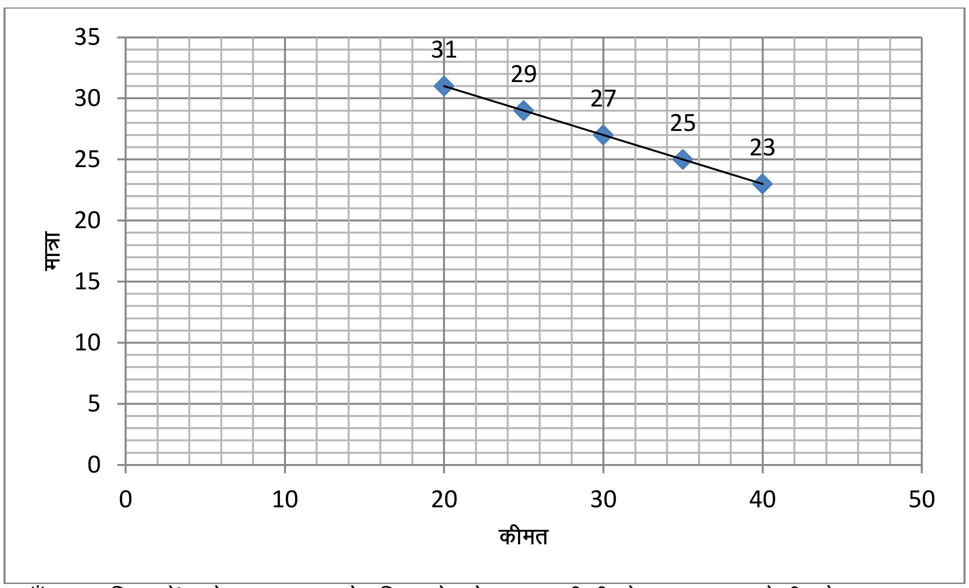
ऊपर लिए गए उदाहरण में कीमत एवं मांग के मान सतत ना होकर असतत है। फलनात्मक संबंध के असतत होने का तात्पर्य है कि जब ग्राफ पेपर पर इस फलनात्मक संबंध को दर्शाया जाएगा तो प्राप्त ग्राफ सतत नहीं होगा। अपितु निम्न मानचित्र प्राप्त होगा जिसमें विभिन्न बिंदु आपस में जुड़े हुए नहीं हैं ।

चित्र 1.1



जबकि स्पष्ट दिख रहा है कि यदि इन बिंदुओं को सुगमता से आपस में मिला दिया जाए तो एक सीधी रेखा कि आकृति बन जाएगी। जैसा कि चित्र 2 में दिखाया गया है –

चित्र 1.2



यहाँ इन बिंदुओं को सुगमता से मिलाने से एक सीधी रेखा प्राप्त होती है।

किसी सतत फलनात्मक संबंध में स्वतंत्र चर में सूक्ष्म से भी सूक्ष्म परिवर्तन के सापेक्ष आश्रित चर में होने वाले परिवर्तन को मापा जा सकता है। वस्तुतः स्वतंत्र चर में होने वाला परिवर्तन घटते–घटते जब शून्य की ओर उन्मुख होता है तो इस परिवर्तन के सापेक्ष फलन के मान में होने वाला परिवर्तन किसी विशेष मान की ओर अग्रसर होता दिखता है और यही विशेष मान उस स्वतंत्र चर के सापेक्ष फलन का अवकलज कहलाता है। यदि सूक्ष्म परिवर्तन को h से इंगित करें तो अवकलज जिसे $f'(x)$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है को निम्न रूप में लिखा जा सकता है।

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

निम्न उदाहरण के माध्यम से अवकलज प्राप्त करने कि प्रक्रिया स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 1.2– माना फलनात्मक संबंध $y = f(x)$ निम्न समीकरण द्वारा प्रदर्शित होता है–

$y = 3\,x^{2}$

और $x = 2$ पर उपरोक्त फलन का अवकलज प्राप्त करना हो तो इसके लिए $x = 2$ के मान में सूक्ष्म परिवर्तनों के सापेक्ष फलन के मान में परिवर्तन को मापना पड़ेगा।

प्रारंभ में $x = 2$ पर फलन का मान

$f\,(2) = 3\,(2)^2 = 3\,(4) = 12$

यदि सूक्ष्म परिवर्तन $\mathrm{h} = 0.5$ हो तो

$$\mathrm{f(x+h)} = f\,(2+0.5) = f\,(2.5) = 3(2.5)^2 = 3(6.75) = 18.75$$

और X के मान के 2 से 2.5 होने के कारण फलन के मान में परिवर्तन

$$\mathrm{f(x+h)-f(x)} = \mathrm{f}(2+0.5\,)-\mathrm{f}(2\,) = 18.75 - 12 = 6.75$$

X के मान में परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन कि दर

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{6.75}{0.5} = 13.5$$

परंतु क्या यहाँ $\mathrm{h} = 0.5$ इतना सूक्ष्म है कि इसको शून्य माना जा सके?

यदि $\mathrm{h} = 0.005$ लिया जाए तो ?

$$\mathrm{f(x+h)} = f\,(2+0.005) = f\,(2.005) = 3(2.005)^2 = 3(4.020025) = 12.060075$$

और X के मान के 2 से 2.005 होने के कारण फलन के मान में परिवर्तन

$$\mathrm{f(x+h)-f(x)} = \mathrm{f}(2+0.005\,)-\mathrm{f}(2\,) = 12.060075 - 12 = 0.060075$$

X के मान में परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन कि दर

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{0.060075}{0.005} = 12\,.015$$

इसी क्रम में यदि h को और सूक्ष्म कर के शून्य के करीब कर दिया जाए

यदि, $\mathrm{h} = 0.00005$ पर

$$\mathrm{f(x+h)} = f\,(2+0.00005) = f\,(2.00005) = 3(2.00005)^2 = 3(4.0002000025) = 12.0006000075$$

और X के मान के 2 से 2.00005 होने के कारण फलन के मान में परिवर्तन

$$\mathrm{f(x+h)-f(x)} = \mathrm{f}(2+0.005\,)-\mathrm{f}(2\,) = 12.0006000075 - 12 = 0.0006000075$$

X के मान में परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन की दर

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{0.0006000075}{0.00005} = 12\,.00015$$

स्पष्ट हो रहा है कि जैसे–जैसे X में होने वाला परिवर्तन (h) शून्योंमुखी होता है इस परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन की दर एक विशिष्ट मान "12" के बराबर होने लगती है।

यहाँ स्वतंत्र चर में परिवर्तन की दर "h" सदैव धनात्मक ली गई और देखा गया कि h के मान जैसे–जैसे शून्य के नजदीक जा रहे थे वैसे–वैसे फलन में परिवर्तन की दर $\{\mathrm{f(x+h)-f(x)}\}$ का मान 12 के करीब पहुँचने लगता है। अर्थात

$$x = 2 \text{ पर } \lim_{\mathrm{h}^+\to 0}\frac{\mathrm{f(x+h)-f(x)}}{\mathrm{h}} = 12 \ldots\ldots (1.1)$$

यह भी देखा जा सकता है कि ऐसा X में परिवर्तन h के धनात्मक मान के लिए ही नहीं अपितु ऋणात्मक मानों के लिए भी सत्य होगा। आइए h के कुछ ऋणात्मक मानों के लिए भी फलन में परिवर्तन की दर की जांच करते हैं ।

यदि स्वतंत्र चर में सूक्ष्म परिवर्तन $\mathrm{h} = -0.5$ हो तो

$f(x+h) = f\ (2+(-0.5)) = f\ (2-0.5) = 3(1.5)^2 = 3(2.25) = 6.75$
और X के मान के 2 से 1.5 होने के कारण फलन के मान में परिवर्तन
$f(x+h) - f(x) = f(1.5) - f(2) = 7.75 - 12 = -4.25$
X के मान में परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन की दर
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-4.75}{-0.5} = 9.5$
यदि $h = -0.005$ पर
$f(x+h) = f\ (2+(-0.005)) = f\ (1.995) = 3(1.995)^2 = 3(3.980025) = 11.940075$
और X के मान के 2 से 1.995 होने के कारण फलन के मान में परिवर्तन
$f(x+h) - f(x) = f(1.995) - f(2) = 11.940075 - 12 = -0.059925$
X के मान में परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन कि दर
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-0.059925}{-0.005} = 11.985$
इसी क्रम में यदि h को और सूक्ष्म कर के शून्योंमुखी कर दिया जाए
$h = -0.00005$ पर
$f(x+h) = f\ (2+(-0.00005) = f\ (1.99995) = 3(1.99995)^2 = 3(3.9998000025) = 11.9994000075$
और X के मान के 2 से 1.99995 होने के कारण फलन के मान में परिवर्तन
$f(x+h) - f(x) = f(1.99995) - f(2) = 11.9994000075 - 12 = -0.0005999925$
X के मान में परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन की दर
$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{-0.0005999925}{-0.00005} = 11.99985$
यहाँ स्वतंत्र चर में परिवर्तन की दर "h" सदैव ऋणात्मक ली गई और देखा गया कि h के मान जैसे–जैसे शून्य के नजदीक जा रहे थे वैसे–वैसे फलन में परिवर्तन की दर $\{f(x+h) - f(x)\}/h$ का मान 12 के करीब पहुँचने लगता है। अर्थात
$x = 2$ पर
$\lim_{h^- \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 12 \ldots\ldots (1.2)$
सामान्यतया, h के धनात्मक मानों के लिए फलन में परिवर्तन की दर जिस विशिष्ट मान की ओर अग्रसर होती है उसे परिवर्तन की दर की 'दायीं सीमा' (right limit) कहते हैं और h के ऋणात्मक मानों के लिए फलन में परिवर्तन की दर जिस विशिष्ट मान की ओर अग्रसर होती है उसे परिवर्तन की दर की 'बायीं सीमा' (left limit) कहते हैं। जब ये दोनों सीमाएँ आपस में बराबर होती हैं तो फलन 'अवकलनीय' (differentiable) कहलाता है और यही सीमा फलन का अवकलज कहलाती है। अर्थात, यदि
$\lim_{h^+ \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f^+(x) = \lim_{h^- \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f^-(x)$
हो और ये दोनों सीमाएँ (दायीं तथा बायीं सीमाएँ) आपस में बराबर हो, जिसे हम आगे से $f'(x)$ द्वारा निरूपित करेंगे
$f^+(x) = f^-(x) = f'(x)$ तो हम फलन f(x)को x के उस विशिष्ट मान पर अवकलनीय कहेंगे और $f'(x)$ को फलन का अवकलज कहेंगे।

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x)$$

जैसा कि ऊपर (1.1) तथा (1.2) द्वारा भी प्रदर्शित हुआ है कि उदाहरण में लिए गए फलन $y = 3\,x^2$ में $x = 2$ के मान में सूक्ष्म परिवर्तनों के सापेक्ष फलन के मान में परिवर्तन की दर की सीमाएँ (दायीं तथा बायीं सीमाएँ) 12 के बराबर हैं अतः x = 2 पर $y = 3\,x^2$ का अवकलज $f'(2) = 12$ होगा।

यहाँ x = 2 के लिए, $f'(2) = 12 = 6(2)$ भी लिख सकते हैं। अर्थात x = 2 पर फलन का अवकलज x के 6 गुणा है। अतः किसी भी x के लिए $y = 3\,x^2$ का अवकलज 6X होगा।

अवकलन करने की उपरोक्त विधि में सीमा (limit) का प्रयोग किया गया है जिसके द्वारा फलन का अवकलन प्राप्त करना काफी समय एवं ऊर्जा व्यय करनें वाला होता है। अवकलन ज्ञात करने के लिये हम सीधे सूत्रों का भी प्रयोग कर सकते है।

1.4 कुछ प्रमुख फलनों के अवकलज के सूत्र (Some Formula)

1- $\frac{d}{dx}x^n = \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$

2- $\frac{d}{dx}\,x = \frac{dx}{dx} = 1$

3- $\frac{d}{dx}\,a.x^n = a\,\frac{dx^n}{dx} = a.nx^{n-1}$ (जहां $a =$ अचर पद)

4- $\frac{d}{dx}\,a = \frac{da}{dx} = 0$ (जहां $a =$ अचर पद)

5- $\frac{d}{dx}e^x = \frac{d\,e^x}{dx} = e^x$

6- $\frac{d}{dx}e^{ax} = \frac{de^{ax}}{dx} = a.e^{ax}$

7- $\frac{d}{dx}\log x = \frac{d\log x}{dx} = \frac{1}{x}$

8- $\frac{d}{dx}\,a.\log x = a.\frac{d\log x}{dx} = \frac{a}{x}$

9- $\frac{d}{dx}a^x = \frac{da^x}{dx} = a^x\,\log a$

10- $\frac{d}{dx}\sin x = \frac{d\sin x}{dx} = \cos x$

11- $\frac{d}{dx}\cos x = \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x$

12- $\frac{d}{dx}\tan x = \frac{d\tan x}{dx} = \cot x$

जब अभिष्ट फलन जिसका अवकलन करना हो एक चरीय होता है तो चर में सूक्ष्म परिवर्तन के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तन को साधारण अवकलन कहते है।

1.5 आंशिक अवकलन (Partial Differentiation)

कई बार फलनात्मक सम्बन्ध बहुचरीय होते है। ऐसे में किसी एक स्वतन्त्र चर में परिवर्तन के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तन को आंशिक अवकलन कहते है। आंशिक अवकलन जिस चर के सापेक्ष करना होता है उसके अतिरिक्त सभी चरों को अचर मान लिया जाता है। तत्पश्चात साधारण अवकलन के सूत्रों के ही प्रयोग से आंशिक अवकलन ज्ञात हो जाते है। अर्थात फलन एक से अधिक स्वतन्त्र चरों पर निर्भर करता है।

उदाहरण 1.3: $Z = f : z = 2x + 3y$ एक बहुचरीय फलन का उदाहरण है। यदि इस फलन का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन ज्ञात करना हो तो इसे $\frac{\partial Z}{\partial x}$ द्वारा निरूपित करेंगे।

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(2x+3y)}{\partial 2} = \frac{\partial(2x)}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(3y) = \frac{2\partial x}{\partial x} + O = 2(1) = 2$$

इसी प्रकार $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(2x+3y)}{\partial y} = \frac{\partial(2x)}{\partial y} + \frac{\partial(3y)}{\partial y} = o + \frac{3\partial y}{\partial y} = 3$

1.6 सकल अवकलन (Total Differentiation)

जब किसी बहुचरीय फलनात्मक सम्बन्धों में स्वतन्त्र चर स्वयं किसी अन्य चर पर निर्भर करते हो। उदाहरण के लिए $z = f(x, y)$ एक बहुचरीय फलनात्मक सम्बन्ध है परन्तु इस फलनात्मक सम्बन्ध में स्वतंत्र चर x तथा y स्वयं किसी अन्य चर के फलन हो अर्थात $x = f(t)$ और $y = g(t)$ तो मूल फलन z का t के सापेक्ष अवकलन निकालनें की क्रिया को सकल अवकलन कहेंगे।

1.7 सकल अवकलन का नियम (Rule for Total Differentiation)

किसी बहु–चरीय फलनात्मक सम्बन्ध $z = f(x, y)$ के लिए जहाँ x तथा y $'t'$ के फलन हो, सकल अवकलन का सूत्र निम्नवत होता है–

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

उदाहरण 1.4: $z = f(x, y)$, $z = x^2 + 3y^3$ जहाँ $x = e^t$ तथा $y = 4t^2$

z का t के सापेक्ष सकल अवकलन निकालने के लिए z का x तथा y के सापेक्ष आंशिक अवकलन

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + 3y^3)}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial(3y^3)}{\partial x} = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x \quad \dots\dots\dots\dots (1.3)$$

तथा

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + 3y^3)}{\partial y} = \frac{\partial x^2}{\partial y} + \frac{\partial(3y^3)}{\partial y} = 9y^2 \dots\dots\dots \quad (1.4)$$

x तथा y का t के सापेक्ष अवकलन

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d(e^t)}{dt} = e^t - (1.5)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d(4t^2)}{dt} = 8t \quad - (1.6)$$

$(1.3), (1.4), (1.5)$ तथा (1.6)का मान सकल अवकलन के सूत्र में रखने पर

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

में रखनें पर

$$\frac{dz}{dt} = (2x)(e^t) + (9y^2)(8t)$$

x तथा y को $'t'$ के रूप में लिखनें पर

$$\frac{dz}{dt} = 2e^t.e^t + 9(4t^2)^2.8t$$

$$= 2e^{2t} + 72(16)t^5$$

$$= 2e^{2t} + 1152t^5$$

1.8 उदाहरण/हल प्रश्न (Examples/Solved Questions)

i. यदि $y = x^5$ तो

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(x^5)}{dx} = 5 \cdot x^{5-1} = 5x^4$$ (सूत्र 1 के प्रयोग से)

ii. यदि $y = x + 5$

तो $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x+5) = \frac{d(x)}{dx} + \frac{d}{dx}(5)$

$= 1 + 0$ (सूत्र 2 तथा 4 के प्रयोग से)

iii. यदि $y = 5x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}5x^2 = 5\frac{d}{dx}(x^2) = 5.2\,(x^{2-1}) = 10x^1 = 10x$

iv. यदि $y = 5e^2 + 4x^2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5e^x + 4x^2) = \frac{d}{dx}(5ex) + \frac{d}{dx}(4x^2)$

$= 5 \cdot \frac{d(e^x)}{dx} + 4\frac{d}{dx}x^2 = 5e^x + 4\,(2 \cdot x^{2-1})$

$= 5e^x + 8x$ (सूत्र 5 तथा 3 के प्रयोग से)

v. यदि $y = 4e^{3x}$

तो $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(4e^{3x}) = \frac{4de^{3x}}{dx} = (3.e^{3x})$ (सूत्र 6 के प्रयोग से)

$= 12e^{3x}$

vi. यदि $y = x^2 + \log x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + \log x) = \frac{d}{dx}x^2 + \frac{d}{dx}\log x$

$= 2x + \frac{1}{x}$ (सूत्र 1 तथा 7 के प्रयोग से)

vii. यदि $y = 5^x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,5x = 5^x \log 5$ (सूत्र 9 के प्रयोग से)

viii. यदि $y = 2\cos x + 3\,\sin x$

$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\,(2\cos x + 3\sin x) = \frac{d}{dx}(2\cos x) + \frac{d}{dx}\,(3\sin x)$

$= 2 \cdot \frac{d}{dx}\,(\cos x) + 3\,\frac{d}{dx}\,(\sin x)$

$= 2\,(-\sin x) + 3(\cos x)$ (सूत्र 10 तथा 11 के प्रयोग से)

$= -2\sin x + 3\cos x = 3\cos x - 2\sin x$

1.9 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise)

1. निम्न फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए।

   i. $y = 25x$

   ii. $y = x^4$

   iii. $y = 3x^3 - \frac{1}{2}x^2$

2. निम्न फलनों के आंशिक अवकलज ज्ञात कीजिए।

   i. $z = 2x^2 - 3xy$

ii. $z = 6x^2y - y^2$
iii. $z = 3x + 7y - 2xy$

1.10 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Useful Books/Bibliography)

1. Agarwal, D.R. (2009): Mathematics for Economics, Vrinda Publications, Delhi.
2. Livernois, John., Rees, Ray., & Hoy, Michael (2012) : Mathematics for Economics , PHI Learning.
3. Agarwal, D.R. "Prarambhik Ganitiya Arthshastra (Hindi), Vrinda Publications, Delhi.
4. Allen,R.G.D (2008) : Mathematical Analysis for Economics , AITBS.
5. Bhardwaj,R.S (2006): Mathematics for Economics and Business, Excel Books.
6. Chiang,A.C & Wainwright, Kevin (2013) : Fundamental Methods of Mathematical Economics" McGraw Hill Publication.
7. Dowling, Edward.T (2005): Schaum's Easy Outline of Introduction to Mathematical Economics , Tata Mcgraw Hill Education.
8. Madnani, G M K : Mathematics for Economics. Sultan Chand & Sons
9. Mishra,J.P. "Ganiteeya Arthshastra", Pratiyogita Sahitya.
10. Rosser, Mike (2003) : Basic Mathematics for Economists , Routledge.
11. Seth, M. L.," Arthshastra mei Prarambhik Ganit", Laxmi Narayan Publications, Agra.
12. Sharma, J.K (2007): Business Mathematics, Ane Books Pvt. Ltd.
13. Yamane, Taro (2007) : Mathematics For Economists : An Elementary Survey , PHI Learning

इकाई– 2
अवकलन प्रयोग, मांग की लोच, आंशिक लोच
(Uses of Differentiation: Elasticity of Demand and Partial elasticity)

इकाई संरचना (Unit Plan)

2.1 उद्देश्य (Objectives)

उद्देश्य इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी :

1. वस्तु की कीमत के सापेक्ष मांग की लोच ज्ञात करना सीख जायेगें ।
2. किसी अन्य वस्तु की कीमत के सापेक्ष मांग की आड़ी लोच ज्ञात करना सीख जायेगें।
3. उपभोक्ता की आय में परिवर्तन के सापेक्ष वस्तु की मांग की आय लोच ज्ञात करना सीख जायेगें।

2.2 प्रस्तावना (Introduction)

अर्थशास्त्र में अवकलन का प्रयोग बहुधा होता है जैसे सीमान्त लागत, सीमान्त आगम, मांग की लोच इत्यादि ज्ञात करनें में। इसी प्रकार आंशिक अवकलन का भी अर्थशास्त्र में सीमान्त उपयोगिता, साधनों की सीमान्त उत्पादकता, आडी लोच इत्यादि ज्ञात करने में प्रयोग होता है। आइये सर्वप्रथम साधारण अवकलन के प्रयोग से मांग की लोच ज्ञात करते हैं।

2.3 मांग की लोच (Elasticity of Demand)

मांग का फलन हमें बताता है कि अन्य बाते समान रहने पर वस्तु की मांग वस्तु की कीमत पर निर्भर करती है एवं साधारण वस्तुओं के लिए वस्तु की मांग तथा मूल्य के बीच विपरित अथवा ऋणात्मक सम्बन्ध होता है। अर्थात जब वस्तु की कीमत बढेगी तो वस्तु की मांग में कमी आयेगी। इसके विपरित वस्तु की कीमत में कमी आने पर वस्तु की मांग बढ़ जायेगी। निश्चय ही वस्तु की मांग वस्तु की कीमत के सापेक्ष संवेदनशील (Sensitive) होती है। मांग की कीमत के सापेक्ष संवेदनशीलता को मापने के लिए मांग की लोच की गणना की जाती है।

2.4 मांग की लोच का सूत्र (Formula of Elasticity of Demand)

किसी वस्तु की कीमत में प्रतिशत परिवर्तन के सापेक्ष वस्तु की मांग में होने वाले प्रतिशत परिवर्तन ही मांग की लोच कहलाता है।

मांग की लोच = वस्तु की मांग में % परिवर्तन ÷ वस्तु की कीमत में % परिवर्तन

यदि किसी वस्तु की प्रारम्भिक कीमत P पर वस्तु की मांग q है तथा कीमत बढ़कर P' हो जाने पर वस्तु की मांग घटकर q' है तो

कीमत में प्रतिशत परिवर्तन = $\frac{P'-P}{p} \times 100$

$= \frac{\Delta P}{P} \times 100$

इसी प्रकार मांग में प्रतिशत परिवर्तन

$= \frac{q'-q}{q} \times 100$

$= \frac{\Delta q}{q} \times 100$

तथा मांग की लोच

$\frac{\frac{\Delta q}{q} \times 100}{\frac{\Delta P}{P} \times 100}$

$= \frac{\Delta q}{q} \times \frac{P}{\Delta P}$

$= \frac{\Delta q}{\Delta P} \times \frac{P}{q}$

सनद रहे कि सामान्य वस्तु के लिए मांग तथा कीमत के बीच ऋणात्मक सम्बन्ध होने के कारण उपरोक्त अनुपात ऋणात्मक प्राप्त होगा। तुलना की दृष्टि से उपयोगी बनाने हेतु हम इसमें '–' (ऋण) चिन्ह से गुणा करके इस ऋणात्मक प्रभाव को समाप्त कर देते है।

अतः मांग की लोच $= -(\frac{\Delta q}{\Delta P} \times \frac{P}{q})$

जब हमें मांग के फलन का सतत स्वरूप ज्ञात हो तो कीमत में अति सूक्ष्म परिवर्तनों के सापेक्ष मांग में होने वाले परिवर्तन की भी गणना की जा सकती है। ऐसी स्थिति में मांग की लोच के उपरोक्त सूत्र में निम्न परिवर्तन हो जाता है।

$e = -\frac{dq}{dP} \times \frac{P}{q}$

जहाँ $\frac{dq}{dp}$ मांग फलन का कीमत के सापेक्ष अवकलन है। ध्यान रहे कि यहाँ मांग फलन q कीमत P के रूप में व्यक्त हो रहा है।

उदाहरण 2.1 : किसी वस्तु का मांग फलन

$Q = 500 - 3P^2$ है जब वस्तु की कीमत 5 हो तो मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

$Q = 500 - 3P^2 = 500 - 3(5)^2 = 500 - 3(25) = 500 - 75 = 425$

$\frac{dQ}{dP} = \frac{d}{dP}(500 - 3p^2) = \frac{d}{dP}(500) - \frac{3d(P)^2}{dP}$

$= 0 - 3(2P) = 0 - 6P = -6P$

$P = 5$ पर

$\frac{dQ}{dP} = -6(5) = -30$

अतः मांग की लोच

$e = -\frac{dQ}{dP}.\frac{P}{Q}$

$= -(-30)(\frac{5}{425})$

$= \frac{150}{425} = \frac{6}{17}$

मांग की लोच को मांग की मूल्य/कीमत लोच भी कहते है।

बोध प्रश्न (Basic Question)

i. यदि किसी वस्तु की मांग फलन $P = 100 - \frac{Q}{2}$ हो तो $P = 5$ पर मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

2.5 आंशिक लोच (Partial Elasticity)

मांग फलन में अन्य बातों के सामान्य रहने की मान्यता मांग की मूल्य पर निर्भरता को बतलाता है परन्तु व्यवहार में मांग अन्य बातों जैसे अन्य वस्तुओं के मूल्य, उपभोक्ता की आय एवं उपभोक्ता की रूचि जैसे कारकों पर निर्भर करती है। अर्थात इन चरों में परिवर्तन होने पर भी मांग में प्रतिक्रिया (उतार–चढ़ाव) होती है।

''वस्तु के मूल्य के अलावा अन्य कारकों में परिवर्तन के सापेक्ष मांग की संवेदनशीलता की माप आंशिक लोच द्वारा की जाती है।''

2.5.1 मांग की आड़ी लोच (Cross Elasticity of Demand): जब अन्य/दूसरी वस्तुओं की कीमत में % परिवर्तन के सापेक्ष किसी वस्तु की मांग में % परिवर्तन की तुलना की जाये तो इसे मांग की आड़ी लोच कहते है।

मांग की आड़ी लोच = एक वस्तु की मांग में % परिवर्तन ÷ अन्य/दूसरी वस्तु के मूल्य में % परिवर्तन

$$E_{p0} = \frac{\partial Q_1}{\partial P_\circ} \times \frac{P_\circ}{Q_1}$$

जहाँ, $P_\circ =$ अन्य वस्तु की कीमत

(यहाँ, o = Other good)

तथा, $Q_{1=}$ पहले वस्तु की मांग है।

उदाहरण 2.2: मांग की फलन $Q = 100 - 2P^2 + 3P_o$ के लिए वस्तु के मूल्य $P = 6$ पर अन्य वस्तु के मूल्य $P_o = 4$ के सापेक्ष मांग की आड़ी लोच ज्ञात कीजिए।

हल : $P = 6$ तथा $P_o = 4$ पर वस्तु की मांग

$$Q = 100 - 2(6)^2 + 3(4)$$
$$= 100 - 72 + 12$$
$$= 40$$
$$\frac{\partial Q}{\partial P_o} = \frac{\partial}{\partial P_o}\ (100 - 2P^2 + 3P_o)$$
$$= \frac{\partial 100}{\partial P_o} - \frac{\partial (P^2)}{\partial P_o} + \frac{\partial (3P_0)}{\partial P_o}$$
$$= 0 - 0 + 3 = 3$$

मांग की आड़ी लोच के सूत्र से,

$E_{Po} = \left(\frac{\partial Q}{\partial P_o}\right)\left(\frac{QP_o}{Q}\right)$ में सभी मान रखने पर

$$= (3)\left(\frac{4}{40}\right) = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$$
$$E_{p0} = \frac{3}{10}$$

नोटः जब मांग की आड़ी लोच धनात्मक होता है तब दोनों वस्तुएँ आपस में प्रतियोगी होती हैं। इसके विपरित जब मांग की लोच ऋणात्मक होती है तब दोनों वस्तुएँ आपस में पूरक होती हैं।

2.5.2 मांग की आय लोच (Income Elasticity of Demand)**:** जब उपभोक्ता की आय में परिवर्तन के सापेक्ष वस्तु की मांग की संवेदनशीलता को मापना हो तो इसके लिए मांग की आय लोच की गणना की जाती है।

'' उपभोक्ता की आय में प्रतिशत परिवर्तन के सापेक्ष वस्तु की मांग में प्रतिशत परिवर्तन को मांग की आय लोच कहते है।

मांग की आय लोच = वस्तु की मांग में % परिवर्तन ÷ उपभोक्ता की आय में % परिवर्तन

$$E_I = \frac{\partial Q}{\partial I} \times \frac{I}{Q}$$

उदाहरण 2.3: मांग फलन $Q = 60 + 0.25I - 4P$ के लिए वस्तु के मूल्य $= 8$ पर आय $I = 100$ के लिए वस्तु की मांग की आय लोच ज्ञात कीजिए।

हल :

$P = 8$ तथा $I = 100$ पर वस्तु की मांग

$Q = 60 + 0.25(100) - 4(8)$

$= 60 + 25 - 32 \quad = 53$

$\frac{\partial Q}{\partial I} = \frac{\partial}{\partial I}(60 + 0.25I - 4P)$

$\frac{\partial}{\partial I}(60) + 0.25\,\frac{\partial I}{\partial I} - \frac{4\partial P}{\partial y}$

$= 0 + 0.25 - 0 = 0.25$

मांग की आय लोच के सूत्र से,

$E_I = \frac{\partial Q}{\partial I} \cdot \frac{I}{Q}$

में सभी मान रखनें पर

$E_I = (0.25)\left(\frac{100}{53}\right) = \frac{25}{53}$

बोध प्रश्न (Basic Questions):

ii. यदि कॉफी की मांग फलन का सूत्र $Q = 8000 - 8P + 20\,P_0$ हो जहाँ, Q कॉफी की मांगी गयी मात्रा, P कॉफी की कीमत तथा P_0 चाय की कीमत है। कॉफी का मूल्य 500 प्रति इकाई तथा चाय की कीमत 200 प्रति इकाई पर चाय की कीमत के सापेक्ष कॉफी की मांग की लोच ज्ञात कीजिए।

2.6 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to the Basic Questions):

i. यहाँ सर्वप्रथम मांग फलन को $Q = f(P)$ के रूप में प्रदर्शित कर लेने से आगे की गणना में सहायता होगी।

$\therefore P = 100 - \frac{Q}{2}$

- $\mathrm{P} = \frac{200-Q}{2}$
- $2P = 200 - Q$
- $Q = 200 - 2P$

$P = 5$ पर $Q = 200 - 2(5)$

$= 200 - 10 = 190$

$$\frac{dQ}{dP} = \frac{d}{dP}(200 - 2P) = \frac{d}{dP}(200) - \frac{d}{dP}(2P) = o - 2 = -2$$

मांग की लोच के सूत्र

$e = -(\frac{dQ}{dP} \times \frac{P}{Q})$ में सभी मान रखनें पर

$$e = -\left(-2 \times \frac{5}{190}\right) = -\left(\frac{-10}{190}\right) = \frac{10}{190} = \frac{1}{19}$$

ii. चाय की कीमत के सापेक्ष कॉफी की मांग की लोच का सूत्र निम्नवत होगा।

$E_o = \frac{\partial Q}{\partial P_\circ} \times \frac{P_\circ}{Q}$ जहाँ Q कॉफी की मात्रा तथा $P_\circ$ चाय की कीमत है।

दिया है $Q = 8000 - 8P + 20\,P_0$

$P_0 = 200$ तथा $P = 500$ पर

$$Q = 8000 - 8(500) + 20\,(200)$$
$$= 8000 - 4000 + 4000$$
$$= 8000$$

इसी प्रकार, $\frac{\partial Q}{\partial P_\circ} = \frac{\partial (8000 - 8P + 20\,P_0)}{\partial P_\circ} = 20$

अब $E_o = \frac{\partial Q}{\partial P_\circ} \times \frac{P_\circ}{Q} = 20\,\left(\frac{200}{8000}\right) = \frac{4000}{8000} = 0.5$

अतः चाय की कीमत के सापेक्ष कॉफी की मांग की लोच 0.5 होगी।

2.7 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise)

i. मांग फलन $Q = 700 - 30P$ के लिए कीमत स्तर 10 पर मांग की कीमत लोच ज्ञात कीजिए।

ii. मांग फलन $Q = 10 + I - 2P$ के लिए वस्तु के मूल्य $= 5$ तथा आय$= 100$ पर वस्तु की मांग की आय लोच ज्ञात कीजिए।

2.8 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliograhy and Useful Books)

Agarwal, D.R. (2009): Mathematics for Economics, Vrinda Publications, Delhi.

Livernois, John., Rees,Ray., & Hoy, Michael (2012) : Mathematics for Economics , PHI Learning.

Agarwal, D.R. “Prarambhik Ganitiya Arthshastra (Hindi), Vrinda Publications, Delhi.

Allen, R.G.D (2008) : Mathematical Analysis for Economics , AITBS.

Bhardwaj, R.S(2006): Mathematics for Economics and Business, Excel Books.

Chiang, A. C & Wainwright, Kevin (2013) : Fundamental Methods of Mathematical Economics” McGraw Hill Publication.

Dowling, Edward. T(2005): Schaum's Easy Outline of Introduction to Mathematical Economics , Tata Mcgraw Hill Education.
Madnani, G M K : Mathematics for Economics. Sultan Chand & Sons
Mishra,J.P. “Ganiteeya Arthshastra”, Pratiyogita Sahitya.
Rosser, Mike (2003) : Basic Mathematics for Economists, Routledge.
Seth,M.L.,“Arthshastra mei Prarambhik Ganit”, Laxmi Narayan Publications, Agra.
Sharma, J. K (2007): Business Mathematics, Ane Books Pvt. Ltd.
Yamane, Taro (2007) : Mathematics For Economists : An Elementary Survey , PHI Learning.

इकाई–3
समाकलन (Integration) : अर्थ, प्रयोग : उपभोक्ता एवं उत्पादक की बचत

इकाई संरचना (Unit Plan)

3.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी

1. समाकलन की अवधारणा को सीख जाएंगे
2. समाकलन तथा अवकलन के अंतरसंबंध को जानेंगे
3. समाकलन के सामान्य परंतु अर्थशास्त्रीय विश्लेषण की दृष्टि से महत्वपूर्ण नियमों को जान लेंगे

3.2 प्रस्तावना (Introduction)

समाकलन (Integration) एक अद्वितीय और महत्वपूर्ण गणितीय अभिगम (calculus) का हिस्सा है। समाकलन का मुख्य उद्देश्य एक फलन के अंश को निर्धारित करना है, अर्थात यदि हमें किसी फलन का किसी निश्चित अंतराल (रेंज) में योग का मान जानना है, तो हम समाकलन का उपयोग कर सकते हैं। गणित में समाकलन आमतौर पर दो प्रकार के होते हैं- प्रथम, नियत समाकलन (Definite integral) और दूसरा, अनियत समाकलन (Indefinite Integral)।

अवकलन करने की विपरीत क्रिया को ही समाकलन कहते हैं। हम जानते हैं कि यदि कोई फलन $Y = F(x)$, x का एक फलन है तो उसका अवकलन करने पर $\frac{dy}{dx} = \frac{d\,F(x)}{dx} = f(x)$ के रूप में अवकलज प्राप्त होता है. अर्थात मूल फलन $F(x)$ का अवकलज $f(x)$ है. समाकलन की प्रक्रिया तब की जाती है जब अवकलज $f(x)$ पूर्व से ही ज्ञात हो और मूल फलन $F(x)$ ज्ञात करना हो ।

अब सवाल ये है कि समाकलन करने की आवश्यकता कब पड़ती है? आर्थिक विश्लेषण में हम स्थैतिक चरों के अलावा ऐसे चरों का भी अध्ययन करते हैं जो गत्यात्मक होता है। अर्थात ऐसे चर जो समय के साथ परिवर्तनशील होते हैं। ऐसे चरों का समय पथ **(Time Path)** ज्ञात करके यह अनुमान लगाया जाता है कि क्या किसी दी हुई समयावधि में यह किसी निश्चित मान या (साम्य मूल्य) पर जाकर अभिकेंद्रित हो जाता है। गत्यात्मक चर भी दो प्रकार के होते हैं सतत एवं असतत ऐसे चर जो समय के साथ निरंतर परिवर्तित होते रहते हैं वह सतत कहलाते हैं तथा ऐसे चर जो किसी निश्चित समय अवधि के बाद ही

परिवर्तित होते हैं उन्हें असतत चर कहते हैं। सतत चर के समय पथ को ज्ञात करने के लिए अवकल समीकरण हल करने पड़ते हैं। जिन्हें समाकलन विधि की मदद से ही हल किया जाता है जबकि असतत चारों के समय पथ ज्ञात करने की विधि अंतर समीकरणों की होती है जिसका अध्ययन हम उच्च कक्षाओं में करेंगे.

3.3 समाकलन की अवधारणा (Concept of Integration)

साम्य की अवधारणा को समझाते हुए भी हमने स्थैतिक तथा गतिक साम्य की चर्चा की थी। स्थैतिक साम्य में हम आर्थिक मॉडल में शामिल चरों– जिन्हें आंतरिक चर (Endogenous variable) भी कहा जाता है– के उन मूल्यों या मान को ज्ञात करते हैं जो उस आर्थिक मॉडल की साम्य की दशाओं को पूरा करते हैं। गत्यात्मक विश्लेषण में किसी चर में परिवर्तन की दर का स्वरूप ज्ञात होता है और हमारी समस्या चर में परिवर्तन के इस ज्ञात स्वरूप के माध्यम से चर के उस समय पथ या मूल फलन को ज्ञात करना है जिससे यह परिवर्तन की दर संबंधित होती है। उदाहरण के लिए यदि आर्थिक समृद्धि में समय के सापेक्ष होने वाली परिवर्तन की दर (जैसे मई 2019 एवं मई 2020 के मध्य) $\frac{dG}{dt} = t^{3/2}$ हमें ज्ञात हो और हमें आर्थिक समृद्धि के उस समय पर $G(t)$ का पता लगाना हो जिससे आर्थिक समृद्धि की उपरोक्त दर $\frac{dG}{dt} = t^{3/2}$ प्राप्त हुई है तो इसके लिए समाकलन की विधि का प्रयोग किया जाएगा।

यदि हमें प्रारंभ में मूल फलन $G = G(t)$ ज्ञात हो तो इसका अवकलन $\frac{dG}{dt}$ करके अवकलज ज्ञात किया जा सकता है परंतु हमें मूल फलन से इसका अवकलज न उत्पन्न करके इसके विपरीत अवकलज से मूल फलन ज्ञात करना है इसके लिए अवकलन के विपरीत इसके ठीक उलट विधि अपनानी होगी इसी विधि को समाकलन कहते हैं

3.4 समाकलन की प्रक्रिया (Process of Integration)

समाकलन की प्रक्रिया को समझने से पूर्व मूल फलन तथा अवकलज के लिए प्रयोग किए गए प्रतीकों को स्पष्ट कर दिया जा रहा है, जिससे छात्र/पाठक भ्रमित ना हों।

स्पष्टीकरणः जब हमने अवकलन पढ़ा था तो मूल फलन को : $f(x)$ तथा इसके प्रथम अवकलज को $f'(x)$ से प्रदर्शित किया था. अधिक कोटी के अवकलजों को प्रदर्शित करने के लिए मूल फलन के ऊपर उतने ही **, (Coma)** लगा लेते थे जितनी कोटि का वह अवकलज होता था। अवकलन के अध्ययन में यह सुविधाजनक था परंतु समाकलन के अध्ययन में हम दिए गए अवकलज का मूल फलन ज्ञात करते हैं इसलिए यहाँ अवकलज के लिए $f(x)$ एवं इसके मूल फलन के लिए $F(x)$) का प्रयोग करेंगे। समाकलन को $\int f(x)dx$ से दर्शाया जाता है जहाँ S (अंग्रेजी का वर्ण s जो कि SUM अर्थात योग का परिचायक है) ही समाकलन का प्रतीक चिह्न है । $f(x)$ इंटीग्रांड या फलन जिसे समाकलित किया जाना है तथा dx अत्यंत सूक्ष्म परिवर्तन को दर्शाता है ।

जिस प्रकार हम मूल फलन $F(x)$ का अवकलन करके अवकलज $f(x)$ प्राप्त करते थे उसी प्रकार अवकलन की ठीक विपरीत प्रक्रिया समाकलन का प्रयोग करके हम अवकलज $f(x)$ से मूल फलन या समाकलन $F(x)$ भी प्राप्त कर सकते हैं। हालांकि अवकलज $f(x)$ का समाकलन करके मूल फलन का पूर्ण स्वरूप ज्ञात करने के लिए हमारे पास मूल फलन की प्रारंभिक दशा या सीमांकन दशा का होना आवश्यक होता है, इसे हम आगे और विस्तार से उदाहरण के माध्यम से समझेंगे–

जैसा कि ऊपर भी उल्लेख किया जा चुका है कि समाकलन की प्रक्रिया अवकलन के विपरीत होती है। किसी फलन $F(x)$ का अवकलज यदि $f(x)$ है, अर्थात $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$ तो इसके $f(x)$ का समाकलन $F(x)$ प्राप्त होना चाहिए, अर्थात $\int f(x)dx = F(x)$। किन्तु यहाँ एक कठिनाई उत्पन्न हो जाती है। यदि $F(x)$ को व्यक्त करने वाले बहुपद में कोई पद अचर है तो $F(x)$ का अवकलन करने पर प्राप्त अवकलज $f(x)$ को व्यक्त करने वाले अभिव्यंजन ($Expression$) में $F(x)$ में सम्मिलित अचर पद का कोई अवशेष निहित नहीं होगा। क्योंकि अचर पद का अवकलज शून्य होता है। ऐसी स्थिति में $f(x)$ का समाकलन

करने पर प्राप्त समाकलज मूल फलन से भिन्न हो सकता है, क्योंकि अचर पद को छोड़कर मूल फलन के अभिव्यंजन में निहित सभी पद अपने मूल रूप में प्राप्त हो जाएंगे, किंतु अचर पद प्राप्त नहीं होगा। ऐसी स्थिति में मूल फलन में सम्मिलित संभावित अचर पद को ध्यान में रखते हुए $f(x)$ का समाकलन करने पर प्राप्त अभिव्यंजन में एक अज्ञात अचर पद C को जोड़ दिया जाता है । इस अचर पद 'C' का मान मूल फलन के प्रारम्भिक दशाओं या सीमांकन दशाओं के आधार पर ज्ञात कर लिया जाता है।

अर्थात $\int f(x)dx = F(x) + C \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots..(1)$

जो कि $f(x)$ के सभी संभावित अवकलजों का एक उभयनिष्ठ अभिव्यंजन है। गणित की भाषा में इसे समाकलन परिवार भी कहते हैं। हमारा मूल फलन इस परिवार का कौन सा विशिष्ट सदस्य है, यह अचर पद C के विशिष्ट मान के निर्धारण से तय होगा.

उदाहरण–3.1 यदि $y = F(x): y = 3x + 15$ तो

$\frac{dy}{dx} = f(x) = \frac{d\,(3x+15)}{dx} = 3 + 0 = 3$

अब उलटा चलते हुये यदि इस अवकलज का समाकलन किया जाए–

$\int f(x)dx = \int 3\, dx = 3x + C$ प्राप्त होगा।

यह उन सभी सरल रेखाओं को दर्शाएगा जिनकी ढाल 3 है किंतु यदि मूल फलन के लिए हमें यह आरंभिक ज्ञान है कि मूल फलन के किसी बिंदु के निर्देशांक (2, 21) हैं, तो $Y = 21$ तथा $X = 2$ रखने पर–

$$21 = 3 \times 2 + C$$

या $C = 15$

इस प्रकार C का मान निर्धारित हो जाने से हमें मूल फलन $y = 3x + 15$ ज्ञात हो जाता है।

उदाहरण–3.2: यदि किसी फर्म का सीमांत आगम फलन $MR = 10 - 2Q$ हो तो इस फर्म का कुल आगम ज्ञात कीजिये।

हलः हम जानते हैं कि, कुल आगम का अवकलज ही सीमांत आगम होता है, अर्थात

$MR = \frac{d(TR)}{dQ}$

अतः $TR = \int MR\, dQ + C$

या, $TR = \int (10 - 2Q)dQ + C$

या, $TR = 10Q - Q^2 + C$

यदि $Q = 0$ हो तो

$TR = 10 \times 0.0^2 + C$

या $TR = C$

परन्तु, अर्थशास्त्र हमें यह बताता है कि शून्य इकाई का विक्रय होने पर आगम भी शून्य होता है अतः

$$TR = 0 = C$$

इस प्रकार मूल फलन आगम के संदर्भ में प्रारम्भिक दशाओं का यह ज्ञान कि विक्रय की शून्य इकाई पर आगम भी शून्य होता है, हमें अचर पद C का मान शून्य प्राप्त हो जाता है। और इस प्रकार अभीष्ट कुल आगम फलन होगा

$TR = 10Q - Q^2$

उदाहरण–3.3: यदि किसी फर्म का सीमांत लागत फलन $C = q^2 - 8q + 16$ हो और फर्म की स्थिर लागत 30 हो तो इस फर्म का कुल लागत ज्ञात कीजिये।

हलः हम जानते हैं कि $MC = \frac{dTC}{dq}$

अतः $TC = \int MC\, dq + C$

या $TC = \int (q^2 - 8q + 16)dq + C$

या $\quad TC = \frac{q^3}{3} - 4q^2 + 16q + C$

अब C का मान ज्ञात करने के लिए मूल लागत फलन की प्रारम्भिक जानकारी, कि फर्म की स्थिर लागत 30 है, का प्रयोग करेंगें। अर्थशास्त्र हमें बताता है कि स्थिर लागत ऐसी अल्पकालिक लागतें होती हैं जो उत्पादन के स्तर से स्वतंत्र होती हैं, अर्थात अल्पकाल में जब उत्पादन शून्य भी होगा तब भी ये लागत उत्पादक को वहन करनी ही पड़ेगी।

अर्थात जब $q = 0$ तब कुल लागत $TC = 30$, इस प्रारम्भिक दशा को TC के उपरोक्त अभिव्यंजन मे स्थापित करने पर

$TC = 30 = \frac{(0)^3}{3} - 4(0)^2 + 16(0) + C$

या, $q = 0$ पर $TC = 30 = C$

या, $C = 30$

इस प्रकार मूल फलन कुल लागत के संदर्भ में प्रारम्भिक दशाओं का यह ज्ञान कि फर्म की स्थिर लागत 30 है, का प्रयोग करके उत्पादन की शून्य इकाई पर हमें अचर पद **C** का मान 30 प्राप्त हो जाता है। और इस प्रकार अभीष्ट कुल लागत फलन होगा

$TC = \frac{q^3}{3} - 4q^2 + 16q + 30$

3.5 समाकलन के नियम (Rules for Imtegration):

जैसा कि शुरू से ही बार–बार स्पष्ट किया गया है कि अवकलन के विपरीत प्रक्रिया ही समाकलन है, अतः अवकलन के नियमों से समाकलन के नियमों को प्राप्त किया जा सकता है। उदाहरणार्थ

$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ से $\int nx^{n-1}\,dx = x^n + c$

और इसी से –

1. घात का नियम, $\int x^n\,dx = \frac{x^n}{n+1} + c$ जहाँ n कोई स्थिरांक है।

इसी नियम से –

$\int 1\,dx = \int x^0\,dx = x + c$

2. चर–घातांक का नियम

   $\int e^x\,dx = e^x + c$

3. लघुगुणक का नियम

   $\int \frac{1}{x}\,dx = \log_n x + c$ जहाँ $x > 0$

   यहाँ, n, Natural logarithm का सूचक है।

4. फलनों के योग के समाकलन का नियम

   $\int\{f(x) + g(x)\}dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

5. फलन में अचर के गुणांक के समाकलन का नियम

$\int K\,f(x)\,dx = K\int f(x)\,dx$ जहाँ K एक अचर है।

इसी नियम से –

$\int K\,dx = \int K.1\,dx = \int Kx^0\,dx = K\int x^0\,dx = Kx + c$

6. समाकलन में प्रतिस्थापन का नियम

$\int f(u)\,du = \int f(u)\frac{du}{dx}\,dx = F(u) + C$

उदाहरण–3.4: $\int e^{4x}\,dx = \int e^u \frac{du}{dx} dx = \int e^{4x}\frac{d4x}{dx}\,dx = 4e^{4x} + C$

यहाँ समाकलन के मात्र ऐसे नियमों का ही उल्लेख किया गया है जिनकी अर्थशास्त्र विषय के एक सामान्य छात्र को आवश्यकता होती है। गणित में समाकलन के अन्य कई नियम होते हैं, जिन्हें गणित की पुस्तकों से प्राप्त किया जा सकता है।

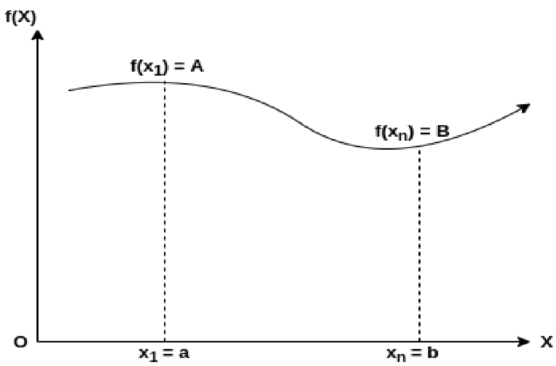
3.6 निश्चित समाकलन (Definite Integeration)

ऐसे समाकलन जिनके सीमांकन मान हमें ज्ञात होते हैं, जिनकी सहायता से मूल फलन का पूर्ण स्वरूप ज्ञात किया जा सकता है उन्हें निश्चित समाकलन कहते हैं।

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

यहाँ कोई ऐसा अचर पद लिखने कि बाध्यता समाप्त हो जाती है जिसका मान ज्ञात करने के लिए मूल फलन से संबन्धित प्रारम्भिक ज्ञान कि आवश्यकता होती है

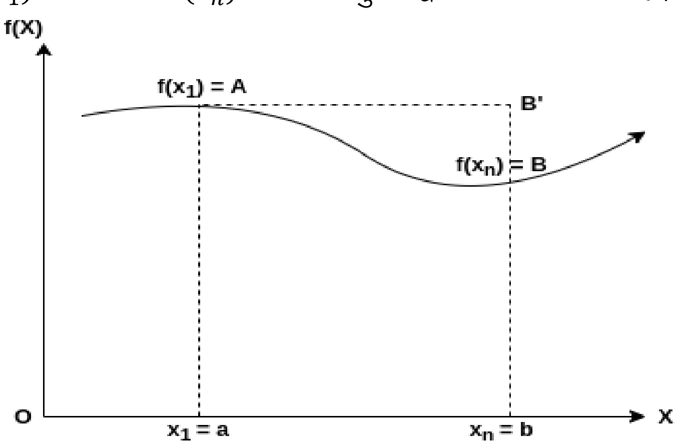
निश्चित समाकलन कि सहायता से किसी फलन की दो सीमाओं द्वारा आच्छादित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात किया जा सकता है।



किसी फलन $f(x)$ का रेखाचित्र निम्न चित्र द्वारा दर्शाया गया है।

चित्र 3.1 x के विभिन्न मानों के लिए फलन के मान

चित्र में स्वतंत्र चर X के किन्हीं दो मानों $x_1 = a$ तथा $x_n = b$ के लिए फलन के संगत मानों को क्रमशः $f(x_1) = A$ तथा $f(x_n) = B$ बिन्दुओं द्वारा दर्शाया गया है। फलन $f(x)$ के इन्हीं दोनों बिन्दुओं A तथा B से आच्छादित क्षेत्र $ABba$ का क्षेत्रफल निश्चित समाकलन द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। आइये इस प्रक्रिया को समझते हैं–

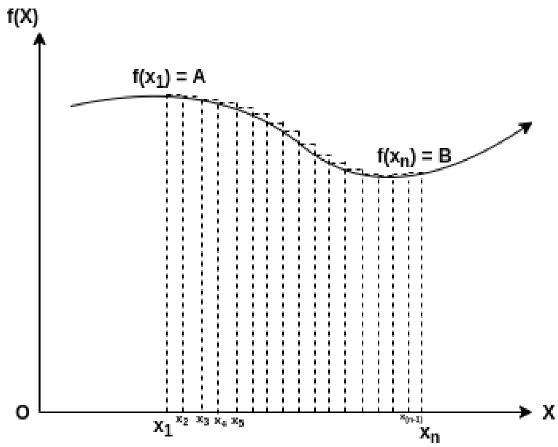


चित्र 3.2 x के विभिन्न मानों के लिए फलन के मान

बिन्दुओं A, B', b तथा a को यदि सीधी, एक दूसरे पर लम्ब डालती, रेखाओं द्वारा आपस में मिला दिया जाये तो प्राप्त चतुर्भुज $AB'ba$ हमारे अभीष्ट फलनात्मक क्षेत्र $ABba$ को समाहित करता हुआ एक चतुर्भुज बन जाता है। इस चतुर्भुज का क्षेत्रफल आयत के क्षेत्रफल के सूत्र लंबाई X चौड़ाई द्वारा ज्ञात किया जा सकता है। आयताकार चतुर्भुज $AB'ba$ का क्षेत्रफल = लम्बाई (aA) × चौड़ाई (AB')होगा।

परंतु स्पष्ट है कि आयताकार चतुर्भुज $AB'ba$ का क्षेत्रफल (जिसे हम A द्वारा प्रदर्शित करेंगें) हमारे अभीष्ट फलनात्मक क्षेत्र $ABba$ (जिसे हम A' द्वारा प्रदर्शित करेंगें) के क्षेत्रफल से अधिक होगा। अतः

निकटतम सटीकता के साथ फलनात्मक क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए इसे छोटे–छोटे आयतों में विभाजित करके किया जा सकता है जैसा कि निम्न चित्रा द्वारा दर्शाया गया है–
चित्र के अनुसार यदि फलनात्मक क्षेत्र को छोटे–छोटे आयताकार खण्डो में विभाजित कर दिया जाये तो इन आयतों के क्षेत्रफल का योगफल अभीष्ट फलनात्मक क्षेत्र का पहले की अपेक्षा अधिक सन्निकट क्षेत्रफल बताएगा।



चित्र के अनुसार यदि फलनात्मक क्षेत्र को छोटे–छोटे आयताकार खण्डो में विभाजित कर दिया जाये तो इन आयतों के क्षेत्रफल का योगफल अभीष्ट फलनात्मक क्षेत्र का पहले की अपेक्षा अधिक सन्निकट क्षेत्रफल बताएगा।

चित्र 3.3 फलन के दो बिंदुओं से प्राप्त चतुर्भुज का क्षेत्र

अर्थात क्षेत्रफल $\mathrm{A}' \cong$ क्षेत्रफल A

प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल उस आयत की लम्बाई तथा चौड़ाई के गुणनफल के बराबर होगा। उदाहरण के लिए प्रथम आयताकार खंड के लिए लम्बाई इस आयत के प्रारम्भिक बिन्दु (x_1) पर फलन के मान $f(x_1)$) के बराबर होगा तथा चौड़ाई X –अक्ष पर इस आयत खण्ड के अन्तिम बिन्दु (x_2) तथा प्रारम्भिक बिन्दु (x_1) के अंतर $(x_2 - x_1)$ के बराबर होगा। इसी भाँति समस्त आयताकार खंडों का क्षेत्रफल निकाला जाएगा।

अब $\mathrm{A}' = f(x_1)(x_2 - x_1) + f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_4 - x_3) + \cdots f(x_n)(x_{n+1} - x_n)$

अथवा $A' = f(x_1)(\triangle x_1) + f(x_2)(\triangle x_2) + f(x_3)(\triangle x_3) + \cdots f(x_n)(\triangle x_n)$

जहाँ $\triangle$ परिवर्तन को दर्शाता है।

उपरोक्त अभिव्यंजन को ऐसे भी व्यक्त कर सकते हैं

क्षेत्रफल $\mathrm{A}' = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\triangle x_i)$जहाँ $\sum$ योग को दर्शाता है।

किन्तु जैसा कि ऊपर भी स्पष्ट किया गया है, छोटे आयत खंडों में विभाजित क्षेत्रों का योगफल (A) हमारे अभीष्ट फलनात्मक क्षेत्र के क्षेत्रफल (A') के सन्निकट होगा, क्षेत्रफल $A' \cong$ क्षेत्रफल A, किन्तु बराबर नहीं। ऐसा इसलिए कि, जैसा की चित्र में भी स्पष्ट रूप से दिखाई दे रहा है कि, आयताकार खंडों का क्षेत्रफल हमारे फलन की सीमा रेखा से बाहर निकल रहा है। फलनात्मक क्षेत्र के क्षेत्रफल की सटीक गणना के लिए आवश्यक होगा कि $X -$ अक्ष पर बिन्दुओं के बीच की दूरी घटते हुये इतनी कम रखी जाये कि किन्ही भी दो बिन्दुओं के बीच कि दूरी शून्य की ओर उन्मुख हो जाये। ऐसा करने पर बिन्दुओं कि संख्या अनंत कि ओर उन्मुख होगी तथा बिन्दु सतत हो जाएंगें। ऐसे सतत होते बिन्दुओं के द्वारा अति सन्निकट आयतों का योग निम्न प्रकार से व्यक्त होगा

$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\triangle x_i)$

तथा इस प्रकार A' का क्षेत्रफल हमारे अभीष्ट फलनात्मक क्षेत्र के क्षेत्रफल के बराबर भी हो जाएगा।

अर्थात, $\lim_{n\to\infty} A' = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\triangle x_i) = A$ का क्षेत्रफल

अनंत अंतरालों के योग का अभिव्यंजन $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(\triangle x_i)$ निश्चित समाकलन के अभिव्यंजन $\int_a^b f(x)dx$ से मेल खाता हुआ स्पष्ट रूप से प्रतीत होता है । असतत चरों में अंतराल $(difference)$ को व्यक्त करने के लिए चिन्ह $\triangle$(डेल्टा) का प्रयोग होता है परंतु जब चरों मे सतता आ जाती है तो अंतराल को व्यक्त करने के लिए (d) चिन्ह का प्रयोग किया जाता है, इस प्रकार $\triangle x_i$ की जगह dx का प्रयोग किया गया है, तथा $f(x_i)(\triangle x_i)$ के स्थान पर $f(x)dx$ प्रयुक्त होगा। इसी प्रकार सतत योग के

लिए $\int$ समाकलन चिन्ह का प्रयोग $\sum$ के स्थान पर किया गया है तथा इसकी सीमा A तथा b (i = से 1 n के जैसे ही) होगी।
इस प्रकार हमने देखा कि निश्चित समाकलन कसी फलन के दो बिन्दुओं से आच्छादित क्षेत्र का क्षेत्रफल प्रदान करता है।

बोध प्रश्न (Basic Question):

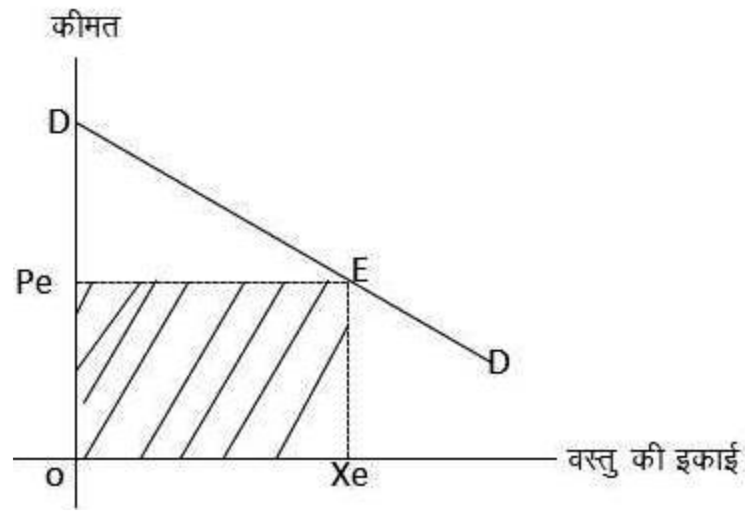
1. $\int_2^4 2x\, dx$ को हल कीजिये।

3.7 निश्चित समाकलन के अर्थशास्त्र में अनुप्रयोग (Uses of Definite Integration in Economics):

समाकलन का अर्थशास्त्र में प्रयोग उपभोक्ता तथा उत्पादक की बचत निकालने में होता है। इसके अतिरिक्त सीमान्त फलनों से कुल फलनों को प्राप्त करनें में भी समाकलन का प्रयोग होता है।
उदाहरणतः

कुल आगम (Total Revenue) $= \int_a^b \text{Marginal Revenue } d(x)$

कुल लागत (Total Cost) $= \int_a^b Marginal\ Cost\ d(x)$ इत्यादि।

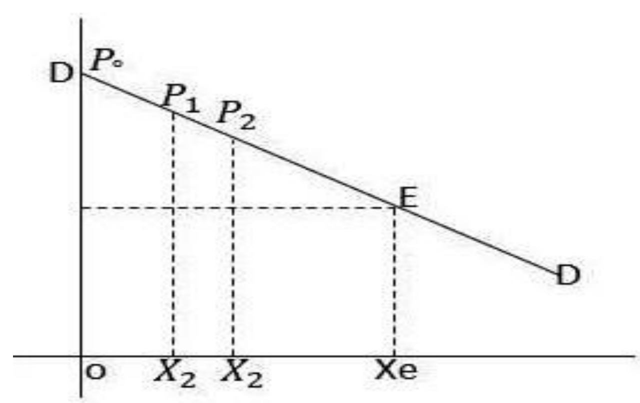


यहाँ हम समाकलन के प्रयोग द्वारा उपभोक्ता तथा उत्पादक की बचतों का अध्ययन करेंगें।

उपभोक्ता की बचत (Consumer's Surplus):

एक उपभोक्ता कम कीमत पर वस्तु की अधिक मात्रा तथा ज्यादा कीमत पर वस्तु की मक मात्रा क्रय करनें में रूचि दिखाता है। (मूल्य तथा वस्तु की मांग की मात्रा के बीच का यह सम्बन्ध मांग फलन के द्वारा प्रदर्शित होता है।) परन्तु बाजार में मांग तथा पूर्ति के साम्य पर कीमत का निर्धारण होता है और यही कीमत बाजार में प्रचलित भी होती है। इस प्रकार इस बाजार सन्तुलन कीमत स्तर (P_e) पर उपभोक्ता यदि वस्तु की X_e मात्रा क्रय करता है तो उपभोक्ता द्वारा वास्तव में खर्च की गई धनराशि मात्रा X_e तथा मूल्य P_e के गुणनफल के बराबर होती है।

उपभोक्ता द्वारा वस्तु के लिए चुकाया गया वास्तविक मूल्य $P_e \cdot X_e$ $\qquad -(1)$



हालांकि मांग फलन के अनुसार उपभोक्ता अत्यन्त ऊँचें मूल्य स्तर $P_\circ$ पर वस्तु की शून्य मात्रा क्रय करनें की इच्छा जताता और इस प्रकार घटते मूल्यों $P_1, P_2, \ldots, P_e$ पर क्रमषः वह $X_1, X_2, \ldots, X_e$ इकाइयां क्रय करना चाहता है।

इस प्रकार मांग वक्र के अनुसार वस्तु की X_e इकाइयाँ क्रय करनें के लिए उपभोक्ता कुल जितना मूल्य चुकाने की इच्छा रखता है वह इन सभी

इकाइयों के लिए अलग–अलग भुगतानों के योगफल के बराबर होगा।
उपभोक्ता वस्तुओं के लिए जो मूल्य चुकाना चहाता है।

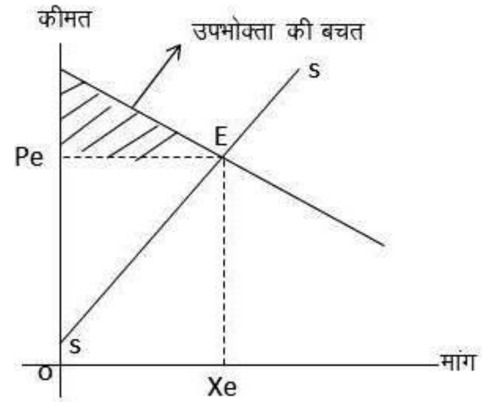
$$= P_{\circ}0 + P_1X_1 + P_2X_2 + \cdots P_eX_e \qquad -(2)$$

एक सतत मांग फलन के लिए वस्तु अत्यन्त सूक्ष्म इकाईयों के लिए भी मूल्य ज्ञात होगा और $0P_{\circ}EX_e$ के क्षेत्रफल के बराबर होगा जिसे मांग फलन $(P_d = f(x))$ के शून्य से X_eके बीच निश्चित समाकलन द्वार व्यक्त किया जा सकता है।

इस प्रकार,

उपभोक्ता जो मूल्य चुकाना चाहता है

$$= \int_o^{xe} f(x)dx \qquad -(3)$$

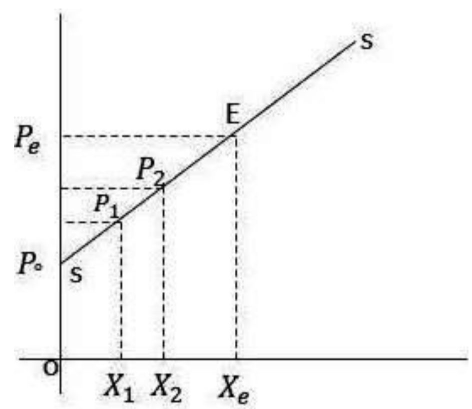


समी0 (3) से (1) का अन्तर ही उपभोक्ता की बचत होगी।

उपभोक्ता की बचत $= \int_o^{Xe} f(x)dx - P_eX_e$

इस प्रकार हम कह सकते है कि उपभोक्ता वस्तु की किसी इकाई के लिए जो मूल्य चुकाना चाहता है तथा वास्तव में वह जितना मूल्य चुकाता है इन दोनों का अन्तर ही उपभोक्ता की बचत कहलायेगी।

उत्पादक की बचत (roducer's Surplus):



एक उत्पादक अपनी वस्तु के लिए अधिक से अधिक कीमत प्राप्त करना चाहता है और इसलिए वह कम कीमत पर वस्तु की कम इकाईयाँ बेचना चाहेगा तथा बढ़ती कीमतों पर वस्तु की ज्यादा इकाइयों को बेचने को तत्पर रहेगा। वस्तु की विक्रय की इकाइयों तथा मूल्य के बीच यह सम्बन्ध पूर्ति वक्र ss द्वारा प्रदर्शित होता है। पूर्ति वक्र ss के अनुसार कीमत अत्यन्त निचले स्तर $P_{\circ}$ पर उत्पादक वस्तु की शून्य इकाई बेचने को तैयार होगा और कीमत बढ़ते स्तरों $P_{1,}P_2 \ldots P_e$पर वह क्रमशः बढ़ती हुई इकाइयाँ $X_{1,}X_2 \ldots X_e$ बेचना चाहेगा। इस प्रकार पूर्ति वक्र के अनुसार उत्पादक x_e इकाइयों के लिए जितना मूल्य प्राप्त करनें की आशा करता है वह इन सभी इकाइयों के लिए मूल्यों के बराबर होगा।

उत्पादक x_e वस्तुओं के लिए जो मूल्य प्राप्त करने की आशा करता है

$$= P_{\circ} + P_1X_1 + P_2X_2 + \cdots P_eX_e$$

एक सतत पूर्ति फलन के लिए वस्तु की अत्यन्त सूक्ष्म इकाइयों के मूल्य भी ज्ञात होंगे और इसलिए $OP_{\circ}EX_e$ के क्षेत्रफल के बराबर होगा जिस पूर्ति फलन के $P_s = g(X)$ के शून्य से X_e के बीच निश्चित समाकलन के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है।

इस प्रकार

उत्पादक जो मूल्य प्राप्त करने की आशा करता है–

$$= \int_0^{x} g(X)\ dx \qquad -(4)$$

जबकि वास्तव में उत्पादक बाजार में प्रचलित कीमत P_e पर वस्तु की X_e मात्रा बेचकर जो मूल्य प्राप्त करता है वह वस्तु की मात्र X_e तथा मूल्य P_e के गुणनफल के बराबर होगी।

उत्पादक द्वारा वस्तु की X_e इकाई के लिए प्राप्त किया गया वास्वतिक मूल्य $P_e \cdot X_e \qquad -(5)$
इस प्रकार हम कह सकते हैं कि उत्पादक किसी वस्तु की किसी इकाई के लिए वास्तव में जितना मूल्य प्राप्त करता है और जो मूल्य वह प्राप्त करने की आशा करता है इन दोनों का अन्तर {समीकरण (5) तथा समीकरण (4) का अन्तर} ही उत्पादक की बचत कहलायेगी।

उत्पादक की बचत $= P_e \cdot X_e - \int_0^x g(X)\ dx$

बोध प्रश्न (Basic Question):

2. मांग फलन $P_d = 18 - 2x - x^2$ और पूर्ति फलन $P_s = (2x - 3)$ के लिए उपभोक्ता तथा उत्पादक की बचत की गणना कीजिए।

3.8 बोध प्रश्नों का हल (Solution to Basic Questions):

1. $\int_2^4 2x\,dx = \frac{2x^2}{2} = x^2 = 4^2 - 2^2 = 16 - 4 = 12$

2. हम जानते है कि बाजार साम्य पर मांग = पूर्ति अथवा $P_d = P_s$

$$\Rightarrow 18 - 2x - x^2 = 2x - 3$$
$$\Rightarrow x^2 + 4x - 21 = 0$$
$$\Rightarrow (x-3)(x+7) = 0$$
$$\Rightarrow x = -7 \text{ या } x = 3$$

चूँकि वस्तु की इकाई ऋणात्मक नहीं होती है अतः सन्तुलन इकाई $x_e = 3$

इस सन्तुलन इकाई x_e पर सन्तुलन मूल्य $P_e = 18 - 2(3) - (3)^2 = 3$

उपभोक्ता की बचत

$$CS = \int_o^{xe} f(x)dx - X_e\,.P_e$$
$$= \int_0^3 (18 - 2x - x^2)dx - 3 \times 3$$
$$= \left[18x - \frac{2x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right] - 9$$
$$= 18(3) - (3)^2 - \left(\frac{3^3}{3}\right) - 9 = 27$$

उत्पादक की बचत $P.S = P_e \cdot X_e - \int_o^{xe} g(x)dx$

$$= 3 \times 3 - \int_0^3 (2x - 3)dx$$
$$= 9 - \left[\frac{2x^2}{2} - 3x\right]$$
$$= 9 - [3^2 - 3(3)]$$
$$= 9 - 9 + 9 = 9$$

3.9 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise):

1. यदि $f(x) = 3x$, तो $\int f(x)dx$ का मान क्या है?
2. यदि $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3$, तो $\int f(x)dx$ का मान क्या है?
3. $\int_0^2 (2x+1)dx$ का मान ज्ञात कीजिए?
4. $\int_1^3 (x^2 + 2x)dx$ का मान ज्ञात कीजिए?
5. मांग फलन $P_d = 106 - 2x$ और पूर्ति फलन $P_s = (4 + x)$ के लिए उपभोक्ता तथा उत्पादक की बचत की गणना कीजिए।

3.10 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography and Useful Books):

Agarwal, D.R. (2009): Mathematics for Economics, Vrinda Publications, Delhi.

Agarwal, D.R. “Prarambhik Ganitiya Arthshastra (Hindi), Vrinda Publications, Delhi.
Allen,R.G.D (2008) : Mathematical Analysis for Economics , AITBS.
Chiang,A.C & Wainwright,Kevin (2013) : Fundamental Methods of Mathematical Economics” McGraw Hill Publication.
Madnani, G M K : Mathematics for Economics. Sultan Chand & Sons
Mishra,J.P. “Ganiteeya Arthshastra”, Pratiyogita Sahitya.
Seth,M.L.,“ Arthshastramei Prarambhik Ganit”,Laxmi Narayan Publications,Agra.
Yamane, Taro (2007) : Mathematics For Economists : An Elementary Survey , PHI Learning

इकाई–4
उच्चिष्ठ एवं निम्ननिष्ठ (Maximum and Minimum Value)

इकाई संरचना (Unit Plan)

4.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी

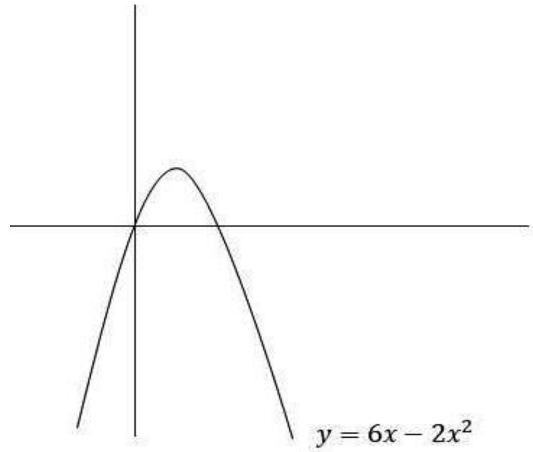
1. किसी फलन के चरम मान, जिन्हे अतिमान भी कहते हैं, की अवधारणा को समझ जाएंगें।
2. चरम मान ज्ञात करने की आवश्यक तथा पर्याप्त शर्तों से भलीभांति परिचित हो जाएंगे।
3. किसी दिए हुए फलन के चरम मान (उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ) मान ज्ञात करना सीख जाएंगे ।

4.2 प्रस्तावना (Introduction)

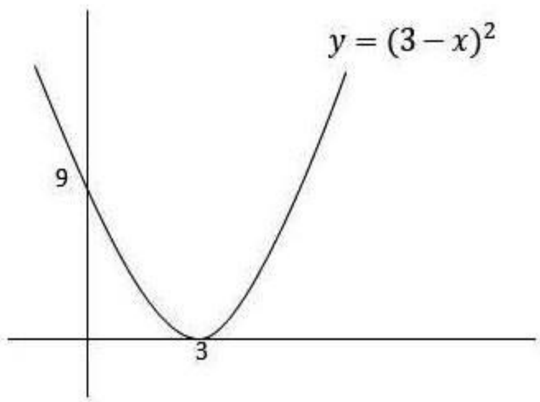
आर्थिक सिद्धान्तों में प्रायः अनुकूलतम आर्थिक दशाएँ फलनात्मक सम्बन्धों के उच्चतम अथवा निम्नतम बिन्दुओं पर प्राप्त होती हैं, जैसे– एक उत्पादक के लिए अनुकूलतम आर्थिक परिस्थिति तब होगी जब वह किसी निश्चित उत्पादन को लागत के निम्नतम स्तर पर प्राप्त कर सके या फिर किसी दी हुई लागत पर अधिकतम उत्पादन प्राप्त कर सके। इसी प्रकार एक फर्म के लिए अनुकूलतम आर्थिक परिस्थिति तब होगी जब वह लाभ के उच्चतम स्तर पर फर्म को संचालित करे। स्पष्ट है कि फलनों के उच्चतम तथा निम्नतम बिन्दुओं की जानकारी आर्थिक अध्ययन में सहायक होती है, अतः किसी दिये गये फलन के उच्चतम अथवा निम्नतम को ज्ञात करने की विधि का ज्ञान अर्थशास्त्र के एक सामान्य विद्यार्थी को होना ही चाहिए।

4.3 अतिमानों/उच्चिष्ठ एवं निम्निष्ठ (Maximum and Minimum) का परिचय

ऐसे फलन जो एकदिष्ट न हो, में आवश्यक रूप से न्यूनतम एक बार ढाल की दिशा का परिवर्तन अवश्य होगा। निम्न फलनों के उदाहरण देखियें।

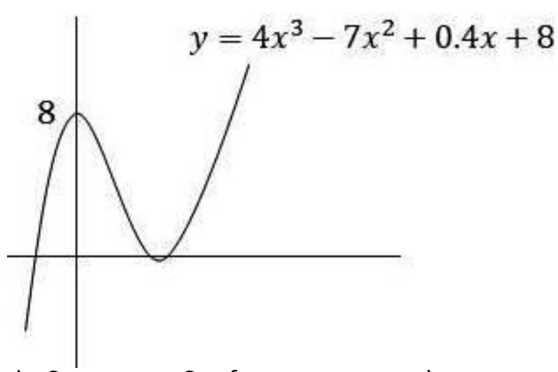


चित्र सं0 4.1: फलन $y = 6x - 2x^2$का रेखाचित्र



चित्र सं0 4.2 फलन $y = (3 - x)^2$का रेखाचित्र

चित्र सं0 4.3 फलन $y = 4x^3 - 7x^2 + 0.4x + 8$ का रेखाचित्र



इन सभी फलनों की ढाल में दिशा का परिवर्तन अवश्य हुआ है। एक बहुपदीय फलन की घात के अनुसार फलन में उतार चढ़ाव की संख्या बढ़ती हुई होती है। चित्र '4.1' तथा '4.2' द्वितीय घात के फलन है। जिनमें केवल एक ही बार ढाल बदलती है। जबकि चित्र '4.3' तृतीय घात का फलन है इसमें ढाल परिवर्तन दो बार होता है।

चित्र '4.2' $y = (3 - x)^2$ को दर्शाता है तथा x के मान में वृद्धि के सापेक्ष y के मान में शुरू में कमी आती है तथा एक निश्चित बिन्दु के पश्चात् x में वृद्धि के साथ y में वृद्धि होती है। अतः इस फलन में ढाल ऋणात्मक से धनात्मक में परिवर्तित हो जाती है।

चित्र '4.1' में दर्शाये गये फलन में x में वृद्धि के साथ y में प्रारम्भ में वृद्धि होती है परन्तु एक निश्चित बिन्दु के बाद y के मान में कमी होने लगती है। अर्थात् इस फलन में ढाल धनात्मक से ऋणात्मक हो जाती है।

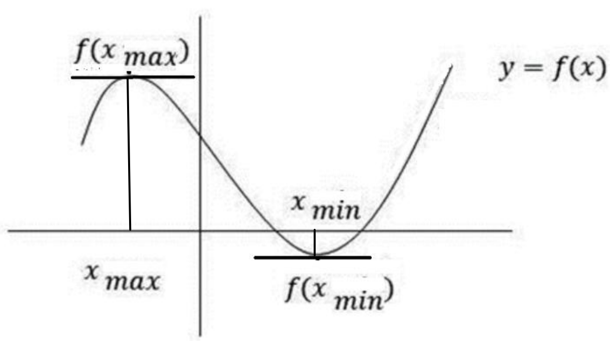
जबकि चित्र '4.3' में दर्शाये गये फलन में ढाल का परिवर्तन धनात्मक से ऋणात्मक होने के बाद पुनः धनात्मक हो जाती है।

वस्तुतः कोई बहुपदीय फलनात्मक सम्बन्ध जितनी घात का होगा उस घात में से एक कम संख्या के बराबर उस फलन की ढाल में पविर्तन होगा।

ढाल में परिवर्तन जिस बिन्दु पर होता है उस बिन्दु को अतिमान ($extreme$) कहते हैं अर्थात उस बिन्दु के एक निश्चित दायरे में फलन का मान सबसे बड़ा (उच्चतम) अथवा सबसे कम (निम्नतम) होगा। फलन के इन्हीं उच्चतम तथा निम्नतम मान को अतिमान कहते है।

4.4 फलन के अतिमान ज्ञात करने की आवश्यक शर्तें

फलन के इन अतिमानों, जहाँ पर फलन का उच्चतम अथवा न्यूनतम मान प्राप्त होता है, वहाँ पर फलन की ढाल शून्य होती है। निम्न चित्र के द्वारा इसे समझते हैं।



चित्र सं0 4.4: एक बहुपदीय फलन में उच्चतम तथा निम्नतम बिन्दुओं पर फलन की ढाल

यहाँ लिया गया चित्र 4.4 किसी बहुपद ($Polynomial$) को दर्शाता है। चित्र में x अक्ष पर उन बिन्दुओं को देखिये जिनके लिए फलन के अतिमान (उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ) प्राप्त होते है। x के x_{min} बिन्दु पर फलन का निम्नतम मान $f(x_{min})$ है तथा x के x_{max}बिन्दु पर फलन का उच्चतम मान $f\ (x_{max})$ है। इन अतिमानों पर फलन की स्पर्श रेखायें x अक्ष के समानान्तर हो जाती है अर्थात इन बिन्दुओं पर फलन की ढाल शून्य होती है।

अर्थात x_{min} पर $\frac{d}{dx}f(x\ min) = 0$ होगा।

इसी प्रकार x_{max} पर $\frac{d}{dx}\ f(x\ max) = 0$ होगा।

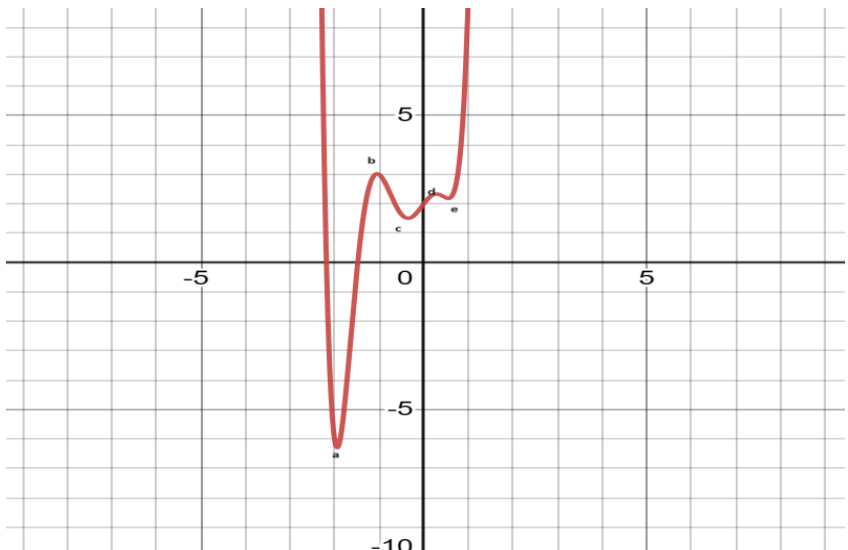
उपरोक्त से हम यह कह सकते हैं कि फलन के अतिमान बिन्दु ज्ञात करने की आवश्यक शर्त होगी कि उस बिन्दु पर फलन की ढाल शून्य हो।

उच्चिष्ठ या निम्निष्ठ मान के लिए आवश्यक शर्त

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

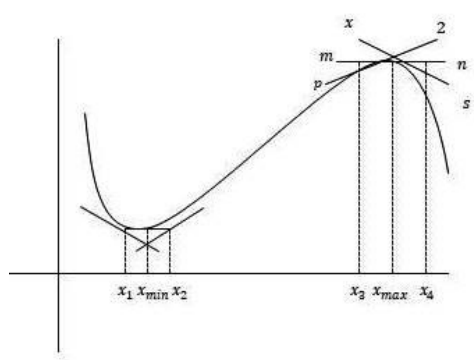
यहाँ यह तो स्पष्ट हो गया कि जब फलन की ढाल शून्य $\left(\frac{dy}{dx} = 0\right)$ होगी तो वह फलन का अतिमान प्राप्त होगा परन्तु यह मान उच्चतम भी हो सकता है और निम्नतम भी। इस प्रकार केवल आवश्यक शर्त की कसौटी पर हम निश्चित तौर पर नहीं कह सकते कि यह अतिमान उच्चिष्ठ है अथवा निम्निष्ठ है। यह निश्चित करने के लिए हमें आगे कुछ और विश्लेषण करने की भी जरूरत पड़ेगी। फलन के अतिमानों पर ढाल शून्य होती है परन्तु इन अतिमानों के आस पास फलन की ढाल के व्यवहार का विश्लेषण करने से हमें फलन के उच्चिष्ठ अथव निम्निष्ठ होने के बारे में ज्यादा सटीक जानकारी प्राप्त हो सकती है।

बोध प्रश्न 4-1: निम्न फलन के रेखाचित्र के किन बिंदुओं पर फलन के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान दर्शाये गए हैं ।



4.5 फलन के अतिमान ज्ञात करने की पूरक शर्त

फलन की ढाल का गहनता से विश्लेषण करने पर हम देख पाते हैं कि फलन के निम्निष्ठ मान के पहले फलन की ढाल ऋणात्मक होती है जो फलन निम्निष्ठ मान पर शून्य हो कर फलन के निम्निष्ठ मान के बाद धनात्मक हो जाती है; अर्थात् फलन की ढाल में होने वाला परिवर्तन फलन के निम्निष्ठ मान के पास बढ़ता हुआ (धनात्मक) होता है। इसी प्रकार फलन के उच्चिष्ठ मान के पहले तो फलन की ढाल धनात्मक होती है परन्तु फलन के उच्चिष्ठ मान पर यह ढाल शून्य होकर फलन के आगे के मानों के लिए फलन की ढाल ऋणात्मक हो जाती है। अर्थात् फलन उच्चिष्ठ मान के पास फलन की ढाल में होने वाला परिवर्तन घटता हुआ (ऋणात्मक) होता है।



चित्र सं0 4.5: फलन के अतिमानों के पास फलन की ढाल में परिवर्तन की दिशा

चित्र सं0 4.5 में दर्शाये गये फलन के उच्चतम बिन्दु $f(x_{max})$ पर फलन की ढाल स्पर्श रेखा $'m - n'$ द्वारा प्रदर्शित है। इस उच्चिष्ठ मान के नजदीक बायीं ओर बिन्दु x_3 पर फलन का मान $f(x_3)$ है।

$f(x_3)$ पर फलन की ढाल fx_3 की स्पर्श रेखा $'p-2'$ द्वारा प्रदर्शित है। इसी प्रकार x_{max} के दांयी ओर x_4 बिन्दु पर फलन का मान $f(x_4)$ पर है जिस पर फलन की ढाल $f(x_4)$ की स्पर्श रेखा $'x-s'$ द्वारा प्रदर्शित है।

x के बढ़ते मानों x_3, x_{max} तथा x_4 के लिए फलन की ढाल क्रमशः धनात्मक से शून्य तथा फिर ऋणात्मक हो जाती है। अर्थात उच्चिष्ठ मान पर फलन की ढाल में होने वाला परिवर्तन घटता हुआ होता है।

इस प्रकार फलन के उच्चिष्ठ मान पर फलन की ढाल में परिर्वतन की दर ऋणात्मक होती है तथा निम्निष्ठ मान पर फलन में परिवर्तन की दर धनात्मक होती है।

जिस प्रकार x में परिवर्तन के सापेक्ष फलन y में परिवर्तन की दर फलन की ढाल को बताता है और एक सतत फलन के लिए यह फलन के प्रथम घात के अवकलन के बराबर होता है।

x में परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन की दर = फलन (y)की ढाल = $\frac{dy}{dx}$

उसी प्रकार x में परिवर्तन के सापेक्ष फलन की ढाल में परिवर्तन की दर निकालने के लिए फलन की ढाल का एक बार पुनः x के सापेक्ष अवकलन करना पडता है।

x में परिवर्तन के सापेक्ष फलन की ढाल में परिवर्तन की दर = $\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$ (जिसे हम द्वितीय घात का अवकलन कहते है। विस्तृत आख्या के लिए इकाई प्रथम एवं उच्च कोटि का अवकलन देखें।)

इस प्रकार किसी फलन के उच्चिष्ठ होने की द्वितीय शर्त जिसे पूरक शर्त कहते है।

$$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$$

और फलन के निम्निष्ठ होने की द्वितीय अथवा पर्याप्त शर्त

$\frac{d^2y}{dx^2} > 0$ होगी।

संक्षेप में फलन के उच्चिष्ठ होने के लिए प्रथम अथवा आवश्यक शर्त = $\frac{dy}{dx} = 0$

तथा द्वितीय अथवा पर्याप्त शर्त= $\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

फलन के निम्निष्ठ होने के लिए प्रथम अथवा आवश्यक शर्त $\frac{dy}{dx} = 0$

तथा द्वितीय अथवा पर्याप्त शर्त $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

उदाहरण : 1 फलन $y = 4x^3 - 7x^2 + 0.4x + 8$ के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

हलः फलन के अतिमान (उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान) के लिए आवश्यक शर्त

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d}{dx}(4x^3 - 7x^2 + 0.4x + 8) = 0$$

$$\frac{d}{dx}(4x^3) - 7\frac{d(x^2)}{dx} + 0.4\,\frac{d(x)}{dx} + \frac{d(8)}{dx}$$

$$4(3x^2) - 7(2x) + 0.4(1) + 0$$

$$12x^2 - 14x + 0.4 = 0$$

समीकरण $12x^2 - 14x + 0.4$ का गुणनखण्ड अथवा श्रीधराचार्य विधि से हल किया जा सकता है। श्री धराचार्य विधि के लिए समीकरण की तुलना $ax^2 + bx + c$ करनें पर,

$$a = 12,\ b = -14,\ c = 0.4$$

ये मान श्रीधराचार्य विधि के सूत्र

$x = -b \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ में रखनें पर

$x = \frac{-(-14) \pm \sqrt{(14)^2 - 4(12)(0.4)}}{2(12)}$

$= \frac{14 \pm \sqrt{196-19.2}}{24}$

$= \frac{14 \pm \sqrt{176.8}}{24}$

$= \frac{14 \pm 13.29}{24}$

$x = \frac{14+13.29}{24}$ तथा $\frac{14-13.29}{24}$

$x = \frac{27.3}{24} = 1.13$ तथा $x = \frac{0.7}{24} = 0.03$

फलन के अतिमान की आवश्यक शर्त द्वारा x के दो मान प्राप्त हुए है $x = 0.766$ तथा $x = 0.03$ है। अब पर्याप्त शर्त द्वारा हम यह पता लगायेंगे कि x के कौन से मान पर फलन का उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ है।

$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(12x^2 - 14x + 0.4) = 24x - 14$

फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्नष्ठ मान के लिए पर्याप्त शर्त की जाँच x के दोनों मानों के लिए करते हैं।

$x = 1.13$ पर, $\frac{d^2y}{dx^2} = 24x - 14 = 24(1.13) - 14$

$= 27.12 - 14 = 13.12$ जो कि धनात्मक है।

अर्थात $x = 1.13$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

अतः $x = 0.1.13$ पर फलन का निम्निष्ठ मान प्राप्त होगा।

फलन का निम्निष्ठ मान =

$f(1.13) = 4(1.13)^3 - 7(1.13)^2 + 0.4(1.13) + 8$

$= 5.77 - 8.93 + 0.45 + 8$

$= 5.29$

इसी प्रकार $x = (0.03)$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 24(0.03) - 14$

$= 0.72 - 14$

$= -13.28$ जो कि ऋणात्मक है।

अर्थात

$x = 0.03$ पर

$\frac{d^2y}{dx^2} < 0$

अतः $x = 0.03$ पर फलन का उच्चिष्ठ मान प्राप्त होगा।

फलन का उच्चिष्ठ मान $= f(0.03)$

$= 4(0.03)^3 - 7(0.03)^2 + 0.4(0.03) + 8$

$= .0001 - 0.006 + 0.012 + 8$

$= 8.006$

अतः फलन का उच्चिष्ठ मान 8.006 तथा निम्निष्ठ मान 5.29 है।

बोध प्रश्न 4.2: फलन $y = x^3 - 3x + 2$ के किन मानों के लिए फलन के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान प्राप्त होंगे।

4.6 बोध प्रश्नों के उत्तर

1 दिए गए फलन के रेखाचित्र के बिंदुओं a, b, c, d तथा e पर फलन की ढाल शून्य होगी अतः इन सभी बिंदुओं पर फलन के अतिमान (उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ) मान प्राप्त होंगे।

2 **फलन** $y = x^3 - 3x + 2$ के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान के लिए आवश्यक शर्त

$\frac{dy}{dx} = 0$

$\Rightarrow \frac{d(x^3-3x+2)}{dx} = 0$

$\Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$

$\Rightarrow 3(x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow (x^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$

$\Rightarrow (x - 1) = 0$ या $(x + 1) = 0$

$\Rightarrow x = 1$ या $x = -1$

अर्थात $x = 1$ तथा $x = -1$ दोनों पर ही फलन की ढाल शून्य होगी

अब फलन के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मानों की स्पष्ट पहचान हेतु अतिमानों की पर्याप्त शर्त के अनुसार $\frac{d^2y}{dx^2}$ का परीक्षण करने पर

$\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

$x = 1$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(1) = 6$

$x = -1$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} = 6(-1) = -6$

स्पष्ट है कि $x = 1$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} > 0$

अतः $x = 1$ पर फलन का निम्निष्ठ मान प्राप्त होगा जो कि

$y = x^3 - 3x + 2 = 1 - 3 + 2 = 0$ होगा

तथा $x = -1$ पर $\frac{d^2y}{dx^2} = < 0$

अतः $x = -1$ पर फलन का उच्चिष्ठ मान प्राप्त होगा जो कि

$y = x^3 - 3x + 2 = -1 + 3 + 2 = 4$ होगा

4.7 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise)

4.7.1 **फलन** $y = 4x^3 + 12x^2 + 12x + 10$ के किन मानों के लिए फलन के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान प्राप्त होंगे।

4.7.2 **फलन** $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 10$ के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए ।

4.8 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliograpphy/Useful Books)

Agarwal, D.R. (2009): Mathematics for Economics, Vrinda Publications, Delhi.

Agarwal, D.R. "Prarambhik Ganitiya Arthshastra (Hindi), Vrinda Publications, Delhi.

Allen,R.G.D (2008) : Mathematical Analysis for Economics , AITBS.

Chiang,A.C & Wainwright,Kevin (2013) : Fundamental Methods of Mathematical Economics" McGraw Hill Publication.

Madnani, G M K : Mathematics for Economics. Sultan Chand & Sons
Mishra,J.P. “Ganiteeya Arthshastra”, Pratiyogita Sahitya.
Seth,M.L.,“ Arthshastramei Prarambhik Ganit”,Laxmi Narayan Publications,Agra.
Yamane,Taro (2007) : Mathematics For Economists : An Elementary Survey , PHI Learning

इकाई–5
प्रथम और उच्च कोटि के अवकलन, उच्चतम एवं न्यूनतम और आर्थिक अनुप्रयोग

इकाई संरचना (Unit Plan)

5.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी

1. विभिन्न कोटियों के अवकलजों से परिचित हो जाएंगे ।
2. एक से अधिक कोटी के अवकलज ज्ञात करना सीख जाएंगे
3. गणित की उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ तकनीकि का आर्थिक संबंधों में प्रयोग करना सीख जाएँगे।
4. आर्थिक नियमों में अनुकूलतम दशाओं को कैसे प्राप्त किया जाता है सीख जाएँगे।

5.2 प्रस्तावना (Introduction)

अर्थशास्त्र में आर्थिक संबंधों को दर्शाने वाले फलनों में परिवर्तन की दर अर्थात फलन के सीमांत मान के साथ ही इन सीमांत मानों में भी परिवर्तन की दरों को जानने की आवश्यकता पड़ती है। किसी फलन में परिवर्तन की दर को अवकलन के द्वारा ज्ञात करते हैं, यदि परिवर्तन की दर की भी परिवर्तन की दर निकालना हो तो मूल फलन के अवकलज का पुनः अवकलन करना पड़ेगा इसे द्वितीय कोटी का अवकलज कहेंगे। पिछली इकाई में हमने उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ ज्ञात करने कि विधि सीखी, उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ की गणितीय विधि किसी फलन मे उच्चतम तथा न्यूनतम मानों को प्राप्त करने में सहायक होती है। आर्थिक नियमों की अनुकूलतम दशाएँ भी प्रायः संबंधित फलन की उच्चतम या निम्नतम मान पर ही प्राप्त होती हैं, जैसे किसी दिए हुए उत्पादन को प्राप्त करने के लिए लागत का न्यूनतम होना उत्पादक के लिए आर्थिक रूप से अनुकूलतम होता है, एक निश्चित लागत पर उत्पादन अधिकतम करना भी उत्पादक के लिए अनुकूलतम दशा होती है, इसी प्रकार फर्म के लिए अनुकूलतम स्थिति होती है जहाँ लाभ अधिकतम हो। अनुकूलतमीकरण की स्थितियों का फलन के अतिमानों में प्राप्त होने के कारण उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ की गणितीय विधि का अर्थशास्त्र में बहुधा अनुप्रयोग संभव हो पाता है। इस इकाई में हम एक से अधिक कोटी के अवकलजों को ज्ञात करने की विधि का अध्ययन करेंगे। इसके साथ ही उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ के कुछ अनुप्रयोगों का अध्ययन करेंगे। अध्याय की पूर्णता की दृष्टि से यहाँ आर्थिक नियमों की विवेचना भी की गई है।

5.3 उच्च कोटि के अवकलन का परिचय (Higher Order Differentiation: Introduction)
एक फलनात्मक सम्बन्ध में स्वतन्त्र चर में परिवर्तन के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तन की माप फलन की ढाल कहलाती है, जब स्वतन्त्र चर में अति–सूक्ष्म परिवर्तन के सापेक्ष फलन में परिवर्तन को मापना हो तो इसे प्रथम कोटि का अवकलज कहते है। फलन के अवकलन के द्वारा प्राप्त अवकलज ही स्वतन्त्र चर के सापेक्ष उस फलन के लिए फलन की ढाल कहलाती है। अब यदि x में परिवर्तन के सापेक्ष ही ढाल में भी परिवर्तन की दर की माप की जाये तो इस द्वितीय कोटि का अवकलन कहेंगे।

5.4 उच्च कोटि के अवकलन की विधि (Method of Higher Order Differentiation)
किसी सतत फलन y के लिए x में सूक्ष्मतम परिवर्तन के सापेक्ष फलन y में परिवर्तन की दर

$= \frac{dy}{dx} \dots\dots\dots$ प्रथम कोटि का अवकलन अथवा ढाल है।

जब प्राप्त अवकलज $\frac{dy}{dx}$ (ढाल) में x में परिवर्तन के सापेक्ष परिवर्तन की दर की पुनः माप की जाये तो इसे द्वितीय घात का अवकलन कहा जायेगा। अर्थात x में सूक्ष्मतम परिवर्तन के सापेक्ष ढाल $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ में परिवर्तन की दर

$= \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) \dots\dots\dots$ द्वितीय कोटि का अवकलज अथवा ढाल में परिवर्तन की दर।

इसे $\frac{d^2y}{dx^2}$ द्वारा भी प्रदर्शित किया जाता है। इसी क्रम में तृतीय, चतुर्थ इत्यादि कोटि का अवकलन भी परिभाषित होगा।

तृतीय कोटि का अवकलन$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)\right) = \left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right)\right)$

इत्यादि।

उदाहरण 5.1: फलन $y = \frac{x^3}{3} - 2x^3 + 8x + 300$ को प्रथम कोटि का अवकलन करनें पर

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 8x + 300\right)$$
$$= \frac{1}{3}\frac{d}{dx}(x^3) - \frac{2d}{dx}(x^2) + 8\left(\frac{dx}{dx}\right) + \frac{d}{dx}(300)$$
$$= \frac{1}{\cancel{3}}(\cancel{3}x^2) - 2(2x) + 8(1) + 0$$
$$= x^2 - 4x + 8 \qquad -(\text{I})$$

प्राप्त अवकलज का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करनें पर

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4 + 8) \quad \text{समीकरण –1 से}$$
$$= \frac{d(x^2)}{dx} - 4\frac{d(x)}{dx} + \frac{d}{dx}(8)$$
$$= 2x - 4 + 0 = 2x - 4 \qquad -(\text{II})$$

इस द्वितीय कोटि के अवकलज का पुनः x के सापेक्ष अवकलन करनें से तृतीय कोटि का अवकलज प्राप्त हो जायेगा।

$$\frac{d^3}{dx^3}(y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$$
$$= \frac{d}{dx}(2x - 4)$$
$$= \frac{2d}{dx}(x) - \frac{d}{dx}(4)$$

$$= 2(1) - 0$$

$= 2$ जो कि अचर है।

इस तृतीय कोटि के अवकलज का पुनः अवकलन चतुर्थ कोटि का अवकलज कहलाएगा।

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(2) = 0$$

इस प्रकार मूल फलन जो कि तीन घातांकी बहुपद था का तीसरा अवकलन एक अचर राशि प्राप्त होती है तथा इसके आगे के सभी कोटि के अवकलज शून्य प्राप्त होते हैं। वस्तुतः बहुपद (polynomials) की घात के बराबर की कोटि वाला अवकलज सदैव अचर होगा तथा इसके बाद का अवकलज शून्य होगा।

परन्तु फलन के अन्य प्रकारों जैसे त्रिकोणमितीय लघुगुणकीय, चर, घातांकी इत्यादि फलनों में ऐसा नही होता है।

बोध प्रश्न

5.1 फलन $y = 2\,x^4 - \frac{x^3}{3} + 16$ का तृतीय कोटि का अवकलज क्या होगा ?

उदाहरण 5.2: $y = e^x$ के लिए विभिन्न क्रम का अवकलन करें।

प्रथम कोटि का अवकलन $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$

द्वितीय कोटि का अवकलन $\frac{d^2y}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(e^x)\right) = \frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ इत्यादि।

उदाहरण 5.3: $y = e^{ax}$ के लिए

प्रथम कोटि का अवकलन $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{ax}) = a.e^{ax}$

द्वितीय कोटि का अवकलन $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(ae^{ax}) = a.ae^{ax} = a^2e^{ax}$

तृतीय कोटि का अवकलन $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}(a^2e^{ax}) = a^3e^{ax}$ इत्यादि।

उदाहरण 5.4: $y = \log x$ के लिए

प्रथम कोटि का अवकलन $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\log x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$

द्वितीय कोटि का अवकलन $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(x^{-1}) = -x^{-1-1} = -x^{-2}$

$$= -\frac{1}{x^2}$$

तृतीय कोटि का अवकलन $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}(-x^{-2}) = -(-2)x^{-3}$

$$= 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

चतुर्थ कोटि का अवकलन $\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}(2x^{-3})$

$= 2.(-3)x^{-3-1} = -6x^{-4} = \frac{-6}{x^4}$ इत्यादि।

उदाहरण 5.5: $y = \sin x$ के लिए

प्रथम कोटि का अवकलन $\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$

द्वितीय कोटि का अवकलन $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$

तृतीय कोटि का अवकलन $\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d}{dx}(-\sin x)$

$$= -\frac{d}{dx}(\sin x) = -\cos x$$

चतुर्थ कोटि का अवकलन $$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right) = \frac{d}{dx}(-\cos x)$$

$$= -\frac{d}{dx}(\cos x) = -(-\sin x) = \sin x$$

बोध प्रश्न—2. फलन $y = 2\,x^2 + 16$ के किस कोटि का अवकलज शून्य हो जाएगा ?

5.5 अनुकूलतम आर्थिक दशाओं के कुछ उदाहरण तथा उच्चिष्ठ निम्निष्ठ के अनुप्रयोग

अर्थशास्त्र में फलन के उच्चतम (उच्चिष्ठ) तथा न्यूनतम (निम्निष्ठ) मानों का बहुधा प्रयोग होता है। एक चरीय फलनात्मक सम्बन्धों में (1) सीमान्त लागत के न्यूनतम बिन्दु पर उत्पादन का स्तर तथा सीमान्त लागत एवं औसत लागत के संबंध तथा (2) फर्म के लाभ का अधिकतमीकरण इत्यादि ऐसे उदाहरण हैं जहां उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ का प्रयोग होता है। आइये इनका विस्तार से अध्ययन करते है।

5.5.1 सीमान्त लागत एवं औसत लागत के संबंध

एक अतिरिक्त इकाई के उत्पादन हेतु कुल लागत में होने वाली वृद्धि को ही सीमान्त लागत कहते है। उदाहरण के लिएः उत्पादन की विभिन्न इकाइयों के लिए कुल लागत की सारणी निम्नवत् है।

उत्पादन स्तर (X)	कुल लागत (TC) रूपया में	सीमान्त लागत (MC) रूपया में
1	20	—
2	38	$\frac{38-20}{1} = 18$
3	51	$\frac{51-38}{1} = 13$
4	65	$\frac{(65-51)}{2} = 14$
5	90	$\frac{(90-65)}{1} = 25$

दी गयी सारणी में उत्पादन स्तर में 1 इकाई की वृद्धि होने पर दूसरी तथा तीसरी इकाई के लिए कुल लागत में क्रमशः 18 तथा 17 रूपये की वृद्धि होती है। अतः दूसरी इकाई के लिए सीमान्त लागत 18 तथा तीसरी इकाई के लिए सीमान्त लागत 17 रूपया है। अतः जब उत्पादन में 1 इकाई की वृद्धि हो तो सीमान्त लागत निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात की जा सकती है।

$MC_n = TC_n - TC_{n-1}$

जहाँ n—वस्तु की इकाई जिसके लिए लागत की गणना की जा रही है।

$n - 1$ जहाँ वस्तु की पिछली इकाई

MC— सीमान्त लागत

TC— कुल लागत

जब उत्पादन में वृद्धि 1 इकाई से अधिक हो तो सीमान्त लागत निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाना चाहिए।

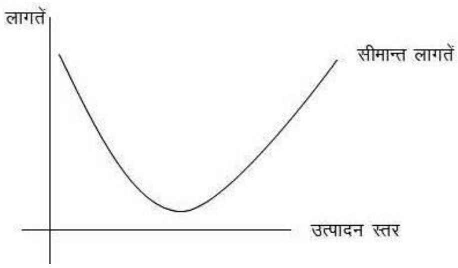
सीमान्त लागत = कुल लागत में वृद्धि /उत्पादन में वृद्धि

$MC = \frac{\Delta TC}{\Delta x}$

एक सतत लागत फलन के लिए उत्पादन के सूक्ष्तम बिन्दुओं पर भी लागत ज्ञात होती है तथा अवकलनीय सतत लागत फलन के लिए

$$MC = \frac{d(TC)}{dx}$$

सीमान्त लागत फलन का अध्ययन करने पर हमें ज्ञात है कि सीमान्त लागतें उत्पादन में वृद्धि के साथ प्रारम्भ में घटती हैं तथा एक बिन्दु पर उत्पादन के लिए सीमान्त लागत न्यूनतम होती है। इसके पश्चात उत्पादन में वृद्धि के साथ सीमान्त लागत में भी वृद्धि परिलक्षित होती है। इस प्रकार यदि उत्पादन के साथ लागतों का वक्र देखा जाये तो सीमान्त लागत वक्र U (अंगेजी के वर्ण यू) के आकार जैसा दिखायी देगा।

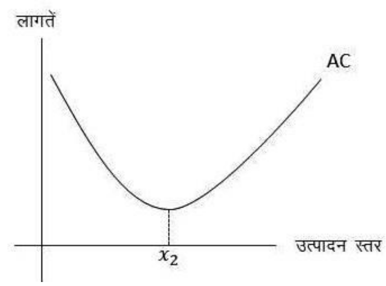


चित्र संख्या (5.1): सीमांत लागत वक्र का आकार

इसी प्रकार औसत लागत, जो कि कुल उत्पादन लागत का उत्पादन की इकाइयों से अनुपात होता है, एक अन्य इकाई लागत होती है।

औसत लागत = कुल लागत / कुल उत्पादन

सीमान्त लागत वक्र की भांति औसत लागत वक्र का स्वरूप भी अंगेजी के वर्ण यू (U) को आकार का होता है। जो यह बताता है कि उत्पादन के बढ़ते हुए स्तर के साथ प्रारम्भ में औसत लागत मे गिरावट होती है। लेकिन एक निश्चित उत्पादन स्तर के बाद उत्पाद बढ़ने पर औसत लागत भी बढ़ने लगती है।

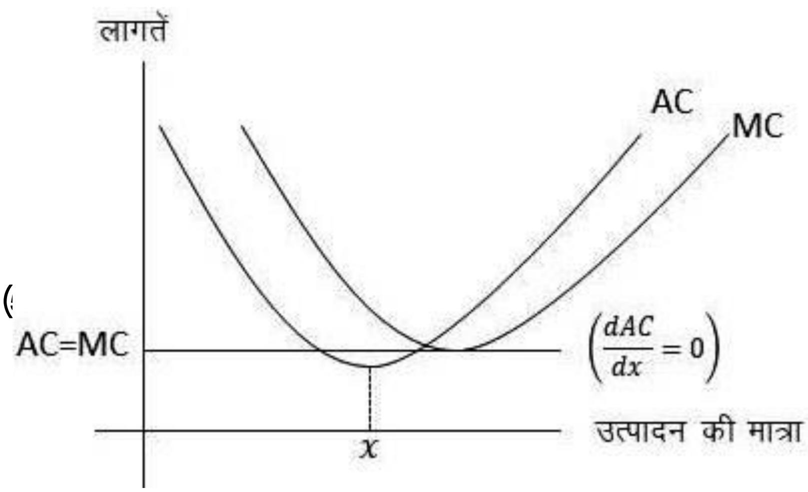


चित्र संख्या (5.2): औसत लागत वक्र का आकार

सीमान्त तथा औसत लागतों का मात्र स्वरूप ही यू (U) आकार का नही होता वरन इन दोनो के मध्य एक विशिष्ट संबंध भी होता हैं। जो इस प्रकार हैं–

सीमान्त लागत तथा औसत लागत दोनो ही प्रारम्भ मे गिरती है परन्तु सीमान्त लागत में गिरने की दर औसत लागत में गिरावट की दर से अधिक होती है तथा सीमान्त लागत जब तेजी से गिर कर अपने न्यूनतम बिन्दु पर पहुंच जाती है तो भी औसत लागत मे गिरावट जारी रहती है। औसत लागत की गिरावट जहाँ शून्य होती है। $\left(\frac{dAC}{dx} = 0\right)$ अर्थात औसत लागत के न्यूनतम बिन्दु पर औसत लागत का मान सीमान्त लागत के बराबर होती हैं

चित्र संख्या (



इस प्रकार औसत लागत के न्यूनतम बिन्दु को ज्ञात करने के लिए अवकलन की विधि का प्रयोग करते हैं तथा औसत लागत के अवकलन का मान शून्य के बराबर स्थापित करके हम उत्पादन के उस स्तर को ज्ञात कर लेते है जिसके लिए औसत लागत का मान न्यूनतम होगा। हम देखेंगे कि उत्पादन के इस स्तर पर औसत तथा सीमान्त लागत दोनों बराबर होंगे।

बोध प्रश्न

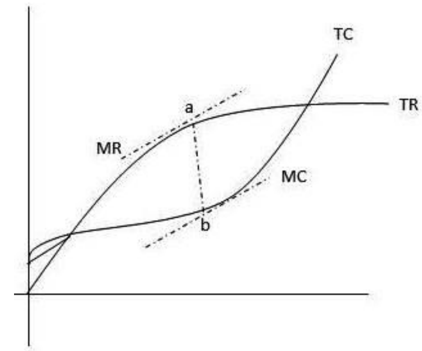
3 एक उत्पादक की कुल लागत का फलन $TC = \frac{x^3}{3} - 12x^2 + 150x$ है। दर्शाइये कि फर्म की औसत लागत के न्यूनतम स्तर पर औसत तथा सीमान्त लागत बराबर होती है।

5.5.2 लाभ अधिकतमीकरण (Profit maximisation)

फर्म का लाभ फर्म की कुल आगम तथा कुल लागत के अन्तर के बराबर होता है।

यदि फर्म की कुल लागत फलन TC द्वारा कुल आगम फलन TR हो तो लाभ

$\pi = TR - TC$-----(A)



चित्र संख्या (5.4): कुल लागत वक्र तथा कुल आय वक्र का आकार

यह लाभ (π) उत्पादन के किस स्तर पर अधिकतम होगा इसके लिए प्रथम या आवश्यक शर्त होगी कि वस्तु स्तर के सापेक्ष लाभ फलन का प्रथम घात अवकलज शून्य हो

अर्थात, $\frac{d\pi}{dx} = 0$ -----------(B)

या, $\frac{d}{dx}(TR - TC) = 0$

या, $\frac{d}{dx}(TR) - \frac{d}{dx}(TC) = 0$

या, $\frac{d}{dx}(TR) = \frac{d}{dx}(TC)$

या $MR = MC$ (चूंकि कुल का प्रथम घात अवकलन सीमान्त होता है।)

ऊपर दिये गये चित्र से हम देख सकते है कि लाभ का अधिकतम वहीं होगा जहां TR तथा TC का अन्तर सबसे ज्यादा हो। यह अन्तर ab रेखा द्वारा दर्शाया गया है। इस रेखा का बिन्दु a कुल आगम वक्र TR पर है तथा बिन्दु b कुल लागत वक्र TC पर है। अब यदि बिन्दु a पर कुल आगम वक्र की स्पर्श रेखा (MR) खींची जाये तथा बिन्दु b पर कुल लागत वक्र की स्पर्श रेखा (MC) खींची जाये तो हम देखते है कि इन रेखाओं की ढाल समानान्तर होती हैं अर्थात $MR = MC$

अब लाभ अधिकतम होने के लिए द्वितीय अथवा पर्याप्त शर्त के अनुसार लाभ फलन का वस्तु की इकाई के सापेक्ष द्वितीय घात का अवकलन ऋणात्मक होना चाहिए।

अर्थात, $\frac{d^2(\pi)}{dx^2} < 0$

या, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\pi\right) < 0$

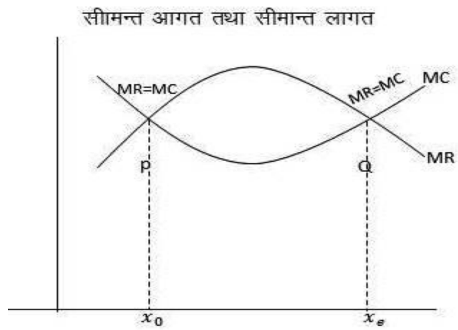
या, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(TR - TC)\right) < 0$

या, $\frac{d}{dx}\left(\frac{d(TR)}{dx} - \frac{d(TC)}{dx}\right) < 0$

या, $\frac{d(MR)}{dx} - \frac{d(MC)}{dx} < 0$

या, $\frac{d(MR)}{dx} < \frac{d(MC)}{dx}$

अर्थात लाभ अधिकतमीकरण हेतु पर्याप्त शर्त होगी कि सीमान्त आगम की ढाल सीमान्त लागत की ढाल से कम हो।
जैसा कि संलग्न चित्र में भी दर्शाया गया है कि यदि वस्तु की इकाइयों के सापेक्ष सीमान्त आगत तथा सीामान्त लागतों को रेखांकित किया जाये तो उत्पादन स्तर x_0 तथा x_e दोनो के सापेक्ष क्रमशः बिन्दु P तथा Q दोनो पर ही सीमान्त आगम तथा सीमान्त लागत एक दूसरे के बराबर होते है।



चित्र संख्या (5.5): सीमांत लागत वक्र तथा सीमांत आय वक्र

अतः केवल आवश्यक शर्त $(MR = MC)$ से लाभ अधिकतमीकरण का स्तर नहीं ज्ञात किया जा सकता। संलग्नक चित्र का और अधिक विश्लेषण करने पर स्पष्ट होता है कि वस्तु को x_0 स्तर के बाद सीमान्त लागत घट रही है जबकि सीमान्त आगम बढ़ रही है; इसी से यह स्पष्ट हो जाता है कि वस्तु के x_0 स्तर पर लाभ अधिकतम नही हो सकता। क्योंकि इस स्तर के बाद सीमान्त लागत के सीमान्त आगम से कम होने से प्रति इकाई लाभ और बढ़ेगा ही इसलिए x_0 पर $MR = MC$ होने के बावजूद हम यह नही कहेंगे कि लाभ अधिकतम हुआ।
इसके विपरीत वस्तु के x_e स्तर के पश्चात सीमान्त आगम से सीमान्त लागत बढ़ जाती है अर्थात प्रति इकाई लाभ में कमी आने लगेगी। अतः वस्तु के इस स्तर पर ही रूक जाने पर लाभ के अधिकतम होने की गुंजाइश रहती है। अतः स्पष्ट है कि लाभ अधिकतम होने के लिए सीमान्त आगम की ढाल $<$ सीमान्त लागत की ढाल भी होने चाहिए जो कि अधिकतमीकरण की पर्याप्त शर्त भी है।

बोध प्रश्न

4. यदि फर्म का कुल अल्पकालीन लागत फलन $TC = \frac{x^3}{3} - 12x^2 + 150x$ तथा वस्तु की मांग का फलन $P = 167 - 4x$ है। वस्तु की किस इकाई के लिए लाभ अधिकतम होगा तथा लाभ अधिकतमीकरण मूल्य तथा लाभ की मात्रा बताइये।

5.5 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. फलन $y = 2\,x^4 - \frac{x^3}{3} + 16$ का तृतीय कोटि का अवकलज

$$= \frac{d^3 y}{d\,x^3} = \frac{d^3\left(2\,x^4 - \frac{x^3}{3} + 16\right)}{d\,x^3}$$
$$= \frac{d^2\left(8\,x^3 - x^2\right)}{d\,x^2}$$
$$= \frac{d\,(24\,x^2 - 2\,x)}{d\,x}$$
$$= 48\,x - 2$$

2. फलन $y = 2\,x^2 + 16$ एक द्वितीय घात का फलन है अतः इसका द्वितीय कोटि का अवकलज एक अचर तथा तृतीय कोटि का अवकलज शून्य होगा।

3. दिया है उत्पादक का कुल लागत फलन

$$TC = \frac{x^3}{3} - 12x^2 + 150x$$

फलन का औसत लागत फलन

$$AC = \frac{TC}{x} = \left(\frac{\frac{x^3}{3} - 12x^2 + 150x}{x}\right)$$

$= \frac{x^2}{3} - 12x + 150$
तथा सीमान्त लागत फलन
$MC = \frac{dTC}{dx} = x^2 - 24x + 150$
$= x^2 - 24x + 150$ होगी।
अब औसत लागत उत्पादन के किस स्तर पर न्यूनतम होगी यह जानने के लिए औसत लागत के समीकरण का उत्पादन x के सापेक्ष अवकलन करना होगा जो इस प्रकार है–
$\frac{dAc}{dx} = \frac{d}{dx}\left\{\frac{x^2}{3} - 12x + 150\right\}$
$= \frac{2x}{3} - 12 + 0$
औसत लागत फलन के न्यूनतम मान के लिए आवश्यक शर्त $\frac{d}{dx}AC = 0$
$\frac{2x}{3} - 12 = 0$
$\frac{2x}{3} = 12$
$2x = 36$
$x = 18$
औसत लागत के न्यूनतम होने के लिए पर्याप्त शर्त
$\frac{d^2}{dx^2}(AC) > 0$
अब $\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}AC\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2x}{3} - 12\right)$
या $\frac{2}{3}\frac{dx}{dx} - \frac{d}{dx}(12)$
$= \frac{2}{3}(1) - 0$
$= \frac{2}{3}$ जो कि शून्य से बड़ा है।
अर्थात $\frac{d^2}{dx^2}(AC) > 0$
अतः हम कह सकते है कि $x = 18$ पर औसत लागत न्यूनतम होगी।
$x = 18$ पर औसत लागत निकालने के लिए $AC = \frac{x^2}{3} - 12x + 150$ में x का मान प्रतिस्थापित करनें पर
$AC = \frac{(18)^2}{3} - 12(18) + 150$
$= 108 - 216 + 150$
$= 258 - 216$
$= 42$
अर्थात उत्पादन स्तर x के 18 होने पर औसत लागत न्यूनतम स्तर 42 पर रहेगी।
अब इसी उत्पादन स्तर पर सीमान्त लागत का मान
$MC = 2x^2 - 24x + 150$
$= 2(18)^2 - 24(18) + 150$
$= 324 - 432 + 150$

$= 474 - 432$
$= 42$
अतः यह सिद्ध हुआ कि जिस उत्पादन स्तर पर औसत लागत न्यूनतम होती है उसी उत्पादन स्तर पर औसत लागत तथा सीमान्त लागत बराबर भी होती हैं।

4. दिया है कि फर्म की कुल अल्पकालीन लागत फलन $TC = \frac{x^3}{3} - 12x^2 + 150x$ तथा वस्तु की कीमत $P = 167 - 4x$ है। चूंकि वस्तु की कीमत = औसत आगम
अतः $AR = 167 - 4x$
या कुल आगम $TR = AR.x$
$= (167 - 4x)x$
$= 167x - 4x^2$
फर्म का लाभ $\pi = TR - TC$
$= (167x - 4x^2) - (\frac{x^3}{3} - 12x^2 + 150x)$
$= \frac{-x^3}{3} + 8x^2 + 17x$
लाभ अधिकतमीकरण हेतु आवश्यक शर्त
$\frac{d\pi}{dx} = 0 \rightarrow \frac{-3x^2}{3} + 16x + 17 = 0$
या $-x^2 + 16x + 17 = 0$
या $x^2 - 16x - 17 = 0$
या $x^2 - 17x + x - 17 = 0$
या $x(x - 17) + 1(x - 17)$
या $(x + 1)(x - 17) = 0$
$x = -1$ या $x = 17$
चूंकि x वस्तु की मात्रा को दर्शाता है इसलिए x ऋणात्मक नही हो सकता, अतः $x = 17$ पर लाभ के अधिकतम होने की संभावना हैं।
लाभ अधिकतमीकरण की दूसरी या पर्याप्त शर्त
$\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$
$\frac{d^2\pi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\pi}{dx}\right) = \frac{d}{dx}(-x^2 + 16x + 17)$
$= -2x + 16$
$x = -1$ पर $\frac{d^2\pi}{dx^2} = -2(-1) + 16$
$= -2 + 16$
$= 14 > 0$
अतः $x = -1$ पर $\frac{d^2\pi}{dx} > 0$ है जो लाभ के अधिकतमीकरण की पर्याप्त शर्त के विपरीत है।
$x = 17$ पर $\frac{d^2\pi}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\pi}{dx}\right)$
$= \frac{d}{dx}(-x^2 + 16x + 17)$
$= -2(17) + 16$

$= -34 + 16$
$= -18 < 0$
अतः $x = 17$ पर $\frac{d^2\pi}{dx^2} < 0$ है जो कि लाभ अधिकतमीकरण की पर्याप्त शर्त के लिए अनुकूल है, अतः वस्तु की 17 इकाइयों के लिए लाभ अधिकतम होगा।
अधिकतम लाभ की मात्रा
$\pi = \frac{-x^3}{3} + 8x^2 + 17x$ में x का मान 17 रखने पर ज्ञात हो जायेगी।

$$\pi_{max} = \frac{-17^3}{3} + 8(17^2) + 17(17)$$
$$= \frac{-4917}{3} + 2312 + 289$$
$$= 2601 - \frac{4913}{3} = \frac{7803 - 4913}{3} = \frac{2890}{3}$$
$$= 963.33$$

अतः फर्म का अधिकतम लाभ 963.33 रूपया होगा।
लाभ के अधिकतमीकरण वाला मूल्य ज्ञात करने हेतु (अथवा AR) के समीकरण में x का मान 17 रखकर लाभ अधिकतमीकरण मूल्य ज्ञात हो जायेगा।
$P = 167 - 4(17)$
$= 167 - 68 = 99$
अतः लाभ अधिकतमीकरण मूल्य $= 99$ रूपया है।

5.6 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise)

1 फलन $y = x^4 - \frac{x^3}{3} + 15x$ का तृतीय कोटि का अवकलज क्या होगा ?
2 फलन $y = x^2 - 15x$ का तृतीय कोटि का अवकलज क्या होगा ?
3 फलन $y = 5x^4 - 15x$ का चतुर्थ कोटि का अवकलज क्या होगा ?
4 फलन $y = e^x$ तथा फलन $y = 4x^3$ चतुर्थ कोटि के चतुर्थ कोटी के अवकलजों का अंतर लिखिए?

5.7 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography/useful Books)

Agarwal, D.R. (2009): Mathematics for Economics, Vrinda Publications, Delhi.
Agarwal, D.R. “Prarambhik Ganitiya Arthshastra (Hindi), Vrinda Publications, Delhi.
Allen,R.G.D (2008) : Mathematical Analysis for Economics , AITBS.
Chiang,A.C & Wainwright,Kevin (2013) : Fundamental Methods of Mathematical Economics” McGraw Hill Publication.
Madnani, G M K : Mathematics for Economics. Sultan Chand & Sons
Mishra,J.P. “Ganiteeya Arthshastra”, Pratiyogita Sahitya.
Seth,M.L.,“ Arthshastramei Prarambhik Ganit”,Laxmi Narayan Publications,Agra.
Yamane,Taro (2007) : Mathematics For Economists : An Elementary Survey , PHI Learning

इकाई–6

दो तथा दो से अधिक चरों से सम्बन्धित अवकलन (Differentiation of More than Two Variables)

इकाई संरचना

6.1 उद्देश्य (Objectives)

6.2 प्रस्तावना (Introduction)

6.3 दो तथा दो से अधिक चरो से सम्बन्धित फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान का परिचय (Maximum and Minimum Values in the more than Two Variables Functions)

6.4 दो तथा दो से अधिक चरो से सम्बन्धित फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात करनें के लिए आवश्यक शर्त (Necessary Condition for Maximum and Minimum Values in the more than Two Variables Functions)

6.5 दो तथा दो से अधिक चरो से सम्बन्धित फलनों के द्वितीय घात के आंशिक अवकलज (Partial Differentiation and Hessian Matrix)

6.6 दो तथा दो से अधिक चरो से सम्बन्धित फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात करने के लिए पर्याप्त शर्त (Sufficient Condition for Maximum and Minimum Values in the more than Two Variables Functions)

6.7 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to the Basic Questions)

6.8 अभ्यास प्रश्न (Question for Exercise)

6.8 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography and Usefull Books)

6.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी

1. एक से अधिक चर वाले फलनात्मक संबंध के अवकलन की आवश्यकता से भलीभांति परिचित हो जाएँगे।
2. एक से आधिक चर वाले फलनात्मक संबंध के अवकलन की विधि सीख जाएँगे।
3. एक से अधिक चर वाले फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात करने कि विधि सीख जाएँगे।

6.2 प्रस्तावना (Introduction)

आर्थिक संबंध बहुधा बहुचरीय ही होते हैं, ऐसे में इन आर्थिक संबंधों को व्यक्त करने वाले फलन बहुआयामी होंगे। ऐसे जटिल फलनात्मक संबंधों में किसी एक चर में परिवर्तन का फलन पर पड़ने वाला प्रभाव देखना अध्ययन की दृष्टि से महत्वपूर्ण होता है। आंशिक अवकलन ऐसी ही एक गणितीय विधि होती है जिसमें एक से अधिक स्वतंत्र चर वाले फलनात्मक संबंध में किसी एक ही चर में परिवर्तन के सापेक्ष फलन में होने वाले परिवर्तन की माप की जाती है। दो या दो अधिक चरों से सम्बन्धित अवकलन आंशिक अवकलन विधि से

किया जाता है जिसका परिचर इकाई–1 में दिया जा चुका है। इस इकाई में हम दो या दो से अधिक चरों के साथ फलन के उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात करनें की विधि का अध्ययन करेंगे।

6.3 दो तथा दो से अधिक चरो से सम्बन्धित फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान का परिचय

जिस प्रकार एक चरीय फलन $y = f(x)$ के लिए अतिमान ज्ञात करने के लिए आवश्यक रूप से x के एक विशिष्ट मान (मान लिजिए $x = a$) को ज्ञात किया जाता है जिस पर फलन का प्रथम घात अवकलज शून्य $\{f'(a) = 0\}$ हो तो a बिन्दु पर फलन के अतिमान होने की निश्चितता सिद्ध हो जाती है तथा इस अतिमान के निम्नतम होने के लिए $f''(a) > 0$ होना तथा उच्चतम होने के लिए $f''(a) < 0$ होना पर्याप्त शर्त होते है, उसी प्रकार बहुचरीय फलन के अतिमान भी परिभाषित होते हैं।

6.4 **दो तथा दो से अधिक चरो से सम्बन्धित फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात करने के लिए आवश्यक शर्त**

यदि उच्च आयामी पटल (एक से अधिक स्वतंत्र चर) पर कोई फलन परिभाषित है तो इस फलन के किसी विशिष्ट निर्देशांक बिन्दु के अतिमान होने के लिए आवश्यक शर्त एक चरीय फलन की ही भांति फलन के प्रथम कोटि के आंशिक अवकलन का मान शून्य होता है। चूंकि बहुचरीय फलन के अवकलज आंशिक अवकलन विधि से ज्ञात करते है तथा बहुचरीय फलन के प्रथम घात के कुल उतने ही आंशिक अवकलज प्राप्त होंगे जितने कि उस बहुचरीय फलन में स्वतन्त्र चर होंगे अतः किसी बिन्दु के अतिमान होने के लिए आवश्यक शर्त इन सभी आंशिक अवकलजों का शून्य होना होता हैं।

यदि एक बहुचरीय फलन z के सभी आंशिक अवकलज को एक आव्यूह z' द्वारा प्रदर्शित किया जाये तो इस फलन के अतिमान ज्ञात करने की आवश्यक शर्त $z' = 0$ होगी।

अध्ययन की सुगमता की दृष्टि से एक द्विचरीय फलन के द्वारा इसे समझते हैं–

एक द्विचरीय फलनात्मक सम्बन्ध में स्वतन्त्र चरों की कुल संख्या दो होगी। यदि z एक द्विचरीय फलनात्मक सम्बन्ध हो जिसमें स्वतन्त्र चर x तथा y हो तो इसे $z = f(x, y)$ से प्रदर्शित किया जायेगा।

इस द्विचरीय फलनात्मक सम्बन्ध के प्रथम घात के आंशिक अवकलन इस प्रकार होंगे।

(i) z का x के सापेक्ष आंशिक अवकलन (y को अचर मानते हुए x के सापेक्ष आंशिक अवकलन)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = z_x$$

(ii) z का y के सापेक्ष आंशिक अवकलन (x को अचर मानते हुए y के सापेक्ष आंशिक अवकलन)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = z_y$$

उदाहरण–6.1: $z = f(x, y)$ एक द्विचरीय फलनात्मक संबंध है जो $z = 3x^3 + 6x^2y^2 + 4y^3$ द्वारा निरूपित है तो इस फलन के आंशिक अवकलन इस प्रकार होंगे।

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^3 + 6x^2y^2 + 4y^3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}3x^3 + 6y^2\frac{\partial x^2}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(4y^3)$$

$$= 9x^2 + 6.2.y^2x + 0$$

$$= 9x^2 + 12y^2x \qquad \ldots\ldots\ldots.\ 6.1$$

$$Z_x = 9x^2 + 12y^2x$$

इसी प्रकार,

$$Z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^3 + 6x^2y^2 + 4y^3)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}3x^3 + \frac{\partial}{\partial y}6x^2y^2 + \frac{\partial}{\partial y}4y^3$$

$$= 0 + 6x^2(2.y) + 4(3y^2)$$

$= 12x^2y + 12y^2$ ……………….. 6.2

इस प्रकार एक द्विचरीय फलनात्मक सम्बन्ध के दो आंशिक अवकलन होते है। गणितीय परम्परा में हम इसे एक आरेख (Vector) के रूप में लिखतें है जो इस प्रकार होता हैं। f'या $z' = \left[\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right]$

उपरोक्त उदाहरण में $z' = [9x^2 + 12xy^2, 12x^2y + 12y^2]$

इस द्विधातीय फलन के अतिमान उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ ज्ञात करने के लिए आवश्यक शर्त $z' = 0$ के द्वारा

$z' = [9x^2 + 12xy^2,\ 12xy + 12y^2] = [0,0]$

रखनें पर

$9x^2 + 12xy^2 = 0$ ……6.3

तथा

$12xy + 12y^2 = 0$ ……6.4

6.3 को और हल करने पर

$9x^2 = -12xy^2$

$3x^2 = -4xy^2$

या

$3x = -4y^2$

या

$x = -\frac{4}{3}y^2$ ……6.5

6.5 का मान समीकरण 6.4 में रखनें पर

$12\left(-\frac{4}{3}y^2\right)y = -12y^2$

या, $-\frac{4}{3}y^3 = -y^2$

या, $y = \frac{3}{4}$ ……6.6

6.6 से $y = \frac{3}{4}$ को 6.4 में रखनें पर

$x = \frac{-4}{3}(y^2)$

या

$x = \frac{-4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2$

$x = \frac{-4}{3}x\frac{3}{4}x\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$

$x = \frac{-3}{4}$

इस प्रकार $a = \left(\frac{-3}{4}, \frac{4}{3}\right)$ एक क्रांतिक बिन्दु है जिस पर फलन के अतिमान प्राप्त होंगे।

किसी फलन के किसी बिन्दु $'a'$ पर यदि फलन का अवकलज ज्ञात करना सम्भव न हो या फिर अवकलज का मान शून्य हो तो ऐसे बिन्दु को फलन का क्रांतिक बिन्दु कहते है। हमने पूर्व की इकाई में यह भी देखा कि ऐसे बिन्दु जहाँ फलन के प्रथम घात का अवकलज शून्य $f(a) = 0$ होता है उस पर ही फलन के अतिमान (उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ) भी प्राप्त होते है। इस प्रकार किसी फलन के अतिमान भी क्रांतिक मान होंगे हालांकि सभी क्रांतिक मान अतिमान नहीं होगें।

यह अतिमान किस प्रकार के (उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ अथवा Saddle Point **) होंगे यह फलन के द्वितीय धात के आंशिक अवकलजों से बने हेसियन आव्यूह (Heisian Matrix) के टेस्ट से ही ज्ञात होंगे। जिसका वर्णन हम आगे कर रहें है।

** ऐसे बिन्दु जो क्रांतिक बिन्दु तो हों परन्तु अतिमान न हों उन्हें सैडल प्वांइट (Saddle Point) कहते है।

6.5 दो तथा दो से अधिक चरो से सम्बन्धित फलनों के द्वितीय घात के आंशिक अवकलज तथा Hessian Matrix

किसी बहुचरीय फलन का द्वितीय घात के आंशिक फलन से आशय है कि फलन के प्रथम घात के अवकलजों का विभिन्न चरों के सापेक्ष पुनः अवकलित करना। उदाहरण के लिए यदि $z = f(x, y)$ एक द्विचरीय फलन है।

और $z' = [z_x, z_y]$ इसका प्रथम घात का अवकलज आरेख है तो इस फलन z के द्वितीय घात के अवकलज निम्नवत होंगे।

$$z_{xx} = \frac{\partial(Zx)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$z_{xy} = \frac{\partial(Zx)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$z_{yx} = \frac{\partial(Zy)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$z_{yy} = \frac{\partial(Zy)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

इस प्रकार एक द्विचरीय फलन के कुल 4 आंशिक अवकलज प्राप्त होगे। गणितीय परम्परा में द्वितीय घात के आंशिक अवकलजों के एक आव्यूह (Matrix) के रूप में रखने की परम्परा है। जिसे Hesian Matrix कहते हैं।

एक द्विचरीय फलन z के आंशिक अवकलजों का Heysian Matrix निम्नवत होगी–

$$H = \begin{vmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{vmatrix}$$

उपरोक्त लिए गये उदाहरण के लिए द्वितीय घात के आशिंक अवकलज

$$Zxx = \frac{\partial Zx}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(9x^2 + 12xy^2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(9x^2) + \frac{\partial}{\partial x}(12xy^2)$$

$$= 18x + 12y^2$$

$$Zxy = \frac{\partial Zx}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(9x^2 + 12xy^2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}(9x^2) + \frac{\partial}{\partial y}(12xy^2)$$

$$= 0 + 12x(2y) = 24xy$$

* नोटः आव्यूह के सम्बन्ध में अधिक जानकारी के लिए खण्ड दो की इकाई 1 का अध्ययन करें।

$$Zyx = \frac{\partial}{\partial x}(Zy)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y + 12y^2)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y) + \frac{\partial}{\partial x}(12y^2)$$

$$= 12(2x)y + 0$$

$$= 24xy$$

$$Zyy = \frac{\partial}{\partial y}(Zy) = \frac{\partial}{\partial y}(12x^2y + 12y^2)$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}(12x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(12y^2)$$
$$= 12x^2 + 24y$$

इस प्रकार z के द्वितीय घात अवकलजों की Heyssian Matrix

$$H = \begin{vmatrix} 18x + 12y^2 & 24xy \\ 24xy & 12x^2 + 24y \end{vmatrix}$$ होगी

नोट : यहाँ Zxy तथा Zyx के मान बराबर है।

इसी प्रकार एक त्रिस्तरीय फलन $u = f(x, y, z)$ Heysian Matrix

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial z}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial zx}, \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y}, \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

होगा।

ध्यान रहे कि Hessian Matrix सदैव एक वर्ग–आव्यूह होगी तथा इसका आकार फलनात्मक सम्बन्ध के चरों की संख्या पर निर्भर करेगा। जैसे द्विचरीय फलन की Hessian Matrix 2×2 की तथा त्री–चरीय फलन की Hessian Matrix 3×3 की होगी।

एक बहुचरीय फलनात्मक सम्बन्ध के अति–मान (उच्चिष्ठ निम्निष्ठ या Saddle Points) ज्ञात करने में इसे हेसियन आव्यूह (Hessian Matrix) का उपयोग किया जाता है।

* नोट : वर्ग–आव्यूह तथा आव्यूहों के अन्य भेदों की अधिक जानकारी के लिए खण्ड दो की इकाई का अध्ययन करें।

* नोट : सारणिक का अधिक अध्ययन करने हेतु खण्ड 2 की इकाई 1 देखें।

अर्थशास्त्र में आंशिक अवकलन के अनुप्रयोग की दृष्टि से द्विचरीय फलनात्मक सम्बन्धों की दृष्टि से द्विचरीय फलनात्मक सम्बन्धों का अध्ययन पर्याप्त है। एक द्विचरीय फलनात्मक सम्बन्ध की Hessian Matrix का सारणिक

$|H| = z_{xx} . z_{yy} - z_{xy} . z_{yx}$ होगा। चूंकि z_{xy} तथा z_{yx} के मान आपस बराबर होते है अतः हम इसे $|H| = z_{xx} . z_{yy} - (z_{xy})^2$ भी लिख सकते है।

6.6 दो तथा दो से अधिक चरो से सम्बन्धित फलनों के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मान ज्ञात करनें के लिए पर्याप्त शर्त

किसी क्रांतिक निर्देशांक बिन्दु $'a'$ पर एक द्विचरीय फलनात्मक सम्बन्ध के अतिमान की प्रकृति की जांच हेसियन आव्यूह (Hessian Matrix) की निम्नवत जांच से सम्भव होगी।

(i) यदि $z_{xx}(a) > 0$ तथा $z_{xx}z_{yy} - {z_{xy}}^2(a) > 0$ तो a एक निम्निष्ठ बिन्दु को दर्शाएगा।

(ii) यदि $z_{xx}(a) < 0$ तथा $z_{xx}z_{yy} - {z_{xy}}^2(a) > 0$ तो a एक उच्चिष्ठ बिन्दु को दर्शाएगा।

(iii) यदि $z_{xx} . z_{yy} - {z_{xy}}^2 < 0$ तो a एक Saddle Point होगा।

(iv) यदि $z_{xx}z_{yy} - {z_{xy}}^2 = 0$ तो Hessian Test अनिधार्य हो जायेगा।

ऊपर लिये गये हमारे उदाहरण में फलन $z = 3x^3 + 6x^2y^2 + 4y^3$ के लिए Hessian Matrix

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(9x^2 + 12xy^2), & \frac{\partial}{\partial y} \quad (9x^2 + 12xy^2) \\ \frac{\partial}{\partial x}(12x^2y + 12y^2), & \frac{\partial}{\partial y} \quad (12x^2y + 12y^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18x + 12y^2 & 24xy \\ 24xy & 12x^2 + 24y \end{bmatrix}$$

में आवश्यक शर्त से प्राप्त $x, y = \left[-\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$ रखनें पर

$$H = \begin{bmatrix} 18\left(-\frac{3}{4}\right) + 12\left(\frac{4}{3}\right)^2, & 24\left(-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) \\ 24\left(\frac{-3}{4}\right)\left(\frac{4}{3}\right) & 12\left(-\frac{3}{4}\right)^2 + 24\left(\frac{4}{3}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{27}{2} + \frac{64}{3} & -24 \\ -24 & \frac{27}{4} + 32 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{-81+128}{6} & -24 \\ -24 & \frac{155}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{47}{6} & -24 \\ -24 & \frac{155}{4} \end{bmatrix}$$

Hessian Matrix $H = \begin{bmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{bmatrix}$ से तुलना करनें पर

$z_{xx} = \frac{47}{6}, z_{xy} = -24, z_{yx} = -24, z_{yx} = \frac{155}{4}$

अब हेसियन टेस्ट के अनुसार

$z_{xx} = \frac{47}{6}$ जो कि शून्य से बड़ा (> 0) है।

तथा $|H| = z_{xx}.z_{yy} - (zxy)^2$

$= \frac{47}{6} \times \frac{155}{4} - (-24)^2$

$= 303.54 - 576 = -272.46$ जो कि शून्य से छोटा (< 0) है।

अतः $a = \left[-\frac{3}{4}, \frac{4}{3}\right]$ पर फलन का Saddle Point होगा।

इकाई–7
दो चारों से संबंधित अवकलन के आर्थिक प्रयोग: उपभोक्ता एवं उत्पादक साम्य

इकाई संरचना (Unit Plan)

7.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी

1. दो चरों वाले फलन के आर्थिक प्रयोग को भलीभांति समझ जाएँगे।
2. उपभोक्ता के साम्य की दशाओं को निर्धारित करते हुए दिए हुए बजट की सीमा में उपभोग की उन इकाइयों को ज्ञात करना सीख जाएंगे जिनके लिए उपयोगिता फलन अधिकतम संतुष्टि प्रदान करे।
3. उत्पादक के साम्य की दशाओं को निर्धारित करते हुए दी हुई लागत पर उत्पादन की उन इकाइयों को ज्ञात करना सीख जाएंगे जिनके लिए उत्पादन फलन अधिकतम संतुष्टि प्रदान करे।

7.2 प्रस्तावना (Introduction)

अर्थशास्त्र के सामान्य विद्यार्थी को अध्ययन के प्रारम्भिक पाठ्यक्रम से ही ऐसे आर्थिक संबंधों को पढ़ना पड़ता है जो दो या दो से अधिक चरों द्वारा प्रदर्शित होते हैं, जैसे उपयोगिता फलन, उत्पादन फलन, लागत फलन इत्यादि। उपभोक्ता तथा उत्पादक के साम्य के अध्ययन में दो चरों से संबंधित अवकलन का अनुप्रयोग भलीभांति हो जाता है। अतः इस इकाई में उपभोक्ता तथा उत्पादक के साम्य के अध्ययन के माध्यम से हम दो चरों से संबंधित अवकलन का प्रयोग करना जानेंगे।

7.3 लैगरेंजियन फलन (Lagrangian Function)

उपभोक्ता तथा उत्पादक के साम्य निश्चित प्रतिबंधों से आच्छादित होते हैं। उपभोक्ता का उद्देश्य अपनी उपयोगिता को अधिकतम करना होता है, परंतु उपयोगिता को अधिकतम करने में उपभोक्ता की आय एक बाधा उत्पन्न करती है अतः उपभोक्ता अपनी निश्चित आय के अन्तर्गत ही अपनी उपयोगिता को अधिकतम कर सकेगा। इसी प्रकार उत्पादक का उद्देश्य अपने उत्पादन को अधिकतम करना होता है परंतु उत्पादन बढ़ने के साथ साथ यदि लागत भी बढ़ने दी जाए तो यह अनुकूलतमीकरण नहीं होगा अतः एक निश्चित लागत के अंतर्गत ही उत्पादन अधिकतम करना उत्पादक का उद्देश्य होता है। निश्चय ही उत्पादन अधिकतमीकरण में लागत एक बाधा का कार्य करती है।

इस प्रकार उपभोक्ता तथा उत्पादक के साम्य में क्रमशः उपभोग तथा उत्पादन फलन का अधिकतमीकरण क्रमशः बजट रेखा तथा सम–लागत रेखा के प्रतिबंध से आच्छादित रहता है । प्रतिबंध के साथ किसी फलन के अनुकूलतमीकरण के लिए लैगरेंजियन समीकरणों का उपयोग किया जाता है।

यदि $z = f(x, y)$ दिया हुआ फलन है जिसका अनुकूलतमीकरण (उच्चतमीकरण अथवा न्यूनतमीकरण) करना है, तथा $c = g(x, y)$ इसके प्रतिबंध का समीकरण हो तो लैगरेंजियन समीकरण निम्न प्रकार से परिभाषित है

$L = f(x, y) + \lambda\big(c - g(x, y)\big)$ जहाँ λ लैगरंजियन गुणांक कहलाता है। इस लैगरंजियन समीकरण का क्रमशः x , y तथा λ के सापेक्ष आंशिक अवकलन करके प्राप्त अवकलजो को शून्य के बराबर करके इनको हल करने से अभीष्ट फलन के अनुकूलतमीकरण करने वाले x तथा y की गणना प्राप्त हो जाती है। अर्थात $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$ तथा $\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$ से प्राप्त समीकरणों को हल करने से प्राप्त x तथा y के मान अभीष्ट फलन को अनुकलतम करेंगे।

7.4 उपभोक्ता साम्य (Consumer's Equilibrium)

यदि उपभोक्ता का उपयोगिता फलन $U = f(X_1, X_2)$ हो तथा बजट रेखा $M = P_1X_1 + P_2X_2$ हो तो उपभोक्ता के साम्य के लिए दी हुई बजट रेखा पर उपयोगिता के अधिकतमीकरण का लैगरेंजियन समीकरण होगा ,

$$L = f(X_1, X_2) + \lambda(M - P_1X_1 - P_2X_2)$$

इस लैगरेंजियन समीकरण का क्रमशः X_1, X_2 तथा λ के सापेक्ष आंशिक अवकलन प्राप्त करके अवकलजो को शून्य के बराबर करने पर

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\big(f(X_1, X_2) + \lambda(M - P_1X_1 - P_2X_2)\big)}{\partial X_1} = 0$$

$$\Longrightarrow MU_{X_1} - \lambda P_1 = 0$$

$$\Longrightarrow MU_{X_1} = \lambda P_1$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{MU_{X_1}}{P_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 7.1$$

इसी प्रकार

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\big(f(X_1, X_2) + \lambda(M - P_1X_1 - P_2X_2)\big)}{\partial X_2} = 0$$

$$\Longrightarrow MU_{X_2} - \lambda P_2 = 0$$

$$\Longrightarrow MU_{X_2} = \lambda P_2$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{MU_{X_2}}{P_2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 7.2$$

तथा

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\big(f(X_1, X_2) + \lambda(M - P_1X_1 - P_2X_2)\big)}{\partial \lambda} = 0$$

$$\Longrightarrow (M - P_1X_1 - P_2X_2) = 0$$

$$\Longrightarrow M = P_1X_1 + P_2X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; 7.3$$

स्मीकरण 7.1 तथा 7.2 से,

$$\lambda = \frac{MU_{X_1}}{P_1} = \frac{MU_{X_2}}{P_2}$$

समीकरण 7.1, 7.2 तथा 7.3 को हल करके वस्तु X_1 तथा वस्तु X_2 की वांछित इकाइयाँ प्राप्त हो जाएंगी जिनसे दिए हुए बजट में उपभोक्ता की संतुष्टि अधिकतम होगी।

बोध प्रश्नः

1 यदि किसी उपभोक्ता का उपयोगिता फलन $U = 2X_1^2X_2^3$ हो तो वस्तु X_1की 3 तथा वस्तु X_2 की 5 इकाइयों पर उपभोक्ता की सीमांत उपयोगिताएँ क्या होंगी?

उदाहरण–7.1: यदि किसी उपभोक्ता का उपयोगिता फलन $C = X_1X_2$ हो तथा वस्तु X_1 का मूल्य 5 और वस्तु X_2 का मूल्य 7 रुपये एवं उपभोक्ता की आय 350 रुपये हो तो उपभोक्ता द्वारा वस्तुओं की कितनी इकाइयों के उपभोग पर उपभोक्ता की उपयोगिता अधिकतम होगी?

हलः

दिया है,

उपयोगिता फलन $C = X_1X_2$

वस्तु X_1 का मूल्य $P_1 = 5$

वस्तु X_2 का मूल्य $P_2 = 7$

अतः दिए हुए बजट 350 में उपभोक्ता के अधिकतम उपभोग की सीमा $5X_1 + 7X_2 = 350$

इस बजट की सीमा के अंतर्गत उपयोगिता के अधिकतमीकरण हेतु लैगरेंजियन समीकरण

$$L = X_1X_2 + \lambda(350 - 5X_1 - 7X_2)$$

इस लगरंजियन समीकरण का क्रमशः X_1, X_2 तथा λ के सापेक्ष आंशिक अवकलन प्राप्त करके अवकलजो को शून्य के बराबर करने पर

$$\frac{\partial L}{\partial X_1} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial(X_1X_2 + \lambda(350 - 5X_1 - 7X_2))}{\partial X_1} = 0$$

$$\Longrightarrow X_2 - 5\lambda = 0$$

$$\Longrightarrow X_2 = 5\lambda$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{X_2}{5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; i$$

इसी प्रकार

$$\frac{\partial L}{\partial X_2} = 0$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial(X_1X_2 + \lambda(350 - 5X_1 - 7X_2))}{\partial X_2} = 0$$

$$\Longrightarrow X_1 - 7\lambda = 0$$

$$\Longrightarrow X_1 = 7\lambda$$

$$\Longrightarrow \lambda = \frac{X_1}{7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; ii$$

स्मीकरण i तथा ii से

$$\lambda = \frac{X_1}{7} = \frac{X_2}{5}$$

$$\Longrightarrow 5\,X_1 = 7\,X_2$$

$$\Longrightarrow X_1 = \frac{7}{5}X_2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; iii$$

तथा

$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$

$\Longrightarrow \frac{\partial(X_1X_2 + \lambda(350 - 5X_1 - 7X_2))}{\partial \lambda} = 0$

$\Longrightarrow 350 - 5X_1 - 7X_2 = 0$

$\Longrightarrow 350 = 5X_1 + 7X_2$...$iv$

iii से X_1 का मान iv में रखने पर

$5(\frac{7}{5}X_2) + 7X_2 = 350$

$\Longrightarrow 14\, X_2 = 350$

$\Longrightarrow X_2 = \frac{350}{14} = 25$

X_2 का मान iii में रखने पर

$X_1 = \frac{7}{5}(25)$

$X_1 = 35$

अतःउपभोक्ता द्वारा वस्तु X_1 की 35 तथा वस्तु X_2 की 25 इकाइयों के उपभोग पर उपभोक्ता की उपयोगिता अधिकतम होगी।

7.5 उत्पादक साम्य

यदि उत्पादक का उत्पादनफलन $O = f(L, K)$ हो तथा समलागत रेखा $C = P_L L + P_K K$ हो तो उत्पादक के साम्य के लिए दी हुई लागत रेखा पर उत्पादन के अधिकतमीकरण का लैगरेंजियन समीकरण होगा ,

$Lg = f(L, K) + \lambda(C - P_L L - P_K K)$

इस लगेंजियन समीकरण का क्रमशः L, K तथा λ के सापेक्ष आंशिक अवकलन प्राप्त करके अवकलजों को शून्य के बराबर करने पर

$\frac{\partial Lg}{\partial L} = 0$

$\Longrightarrow \frac{\partial(f(L,K) + \lambda(C - P_L L - P_K K))}{\partial L} = 0$

$\Longrightarrow MP_L - \lambda P_L = 0$

$\Longrightarrow MP_L = \lambda P_L$

$\Longrightarrow \lambda = \frac{MP_L}{P_L}$ 7.4

इसी प्रकार

$\frac{\partial Lg}{\partial K} = 0$

$\Longrightarrow \frac{\partial(f(L,K) + \lambda(C - P_L L - P_K K))}{\partial K} = 0$

$\Longrightarrow MP_K - \lambda P_K = 0$

$\Longrightarrow MP_K = \lambda P_K$

$\Longrightarrow \lambda = \frac{MP_K}{P_K}$.. 7.5

तथा

$\frac{\partial Lg}{\partial \lambda} = 0$

$\Longrightarrow \frac{\partial(f(L,K)+\lambda(C-P_L L-P_K K))}{\partial\lambda} = 0$

$\Longrightarrow (C - P_L L - P_K K) = 0$

$\Longrightarrow \quad C = P_L L + P_K K$.. 7.6

समीकरण 7.4, 7.5 तथा 7.6 को हल करके साधन L एवं K की वांछित इकाइयाँ प्राप्त हो जाएंगी जिनसे दी हुई लागत में उत्पादक का उत्पादन अधिकतम होगा।

बोध प्रश्नः

2. किसी उत्पादक का उत्पादनफलन $O = \ 0.5L^{0.2}K^{0.8}$ हो तो दोनों साधनों के लिए सीमांत उत्पादकता क्या होगी?

उदाहरण–7.2: यदि किसी उत्पादक का उत्पादन फलन $O = \ 0.8L^{0.5}K^{0.5}$ हो तथा साधन L का मूल्य 50 और साधन K का मूल्य 120 रुपये एवं उत्पादक की दी हुई लागत 600 रुपये हो तो दी हुई लागत में उत्पादक का उत्पादन अधिकतम करने वाले साधनों की मात्रा कितनी होगी।

हल 7.2

दिया है

उत्पादन फलन $O = \ 0.8L^{0.5}K^{0.5}$

साधन L का मूल्य 50 $P_L = 50$

साधन Kका मूल्य $P_K = 120$

अतः दिए हुए बजट 600 में उत्पादक का उत्पादन अधिकतम करने वाले साधनों की मात्रा की सीमा

$50L + 120K = 600$

इस बजट की सीमा के अंतर्गत उपयोगिता के अधिकतमीकरण हेतु लैगरंजियन समीकरण

$Lg = \ 0.8L^{0.5}K^{0.5} + \ \lambda(600 - 50L - 120K)$

इस लगरंजियन समीकरण का क्रमशः L, K तथा λ के सापेक्ष आंशिक अवकलन प्राप्त करके अवकलजों को शून्य के बराबर करने पर

$\frac{\partial Lg}{\partial L} = 0$

$\Longrightarrow \frac{\partial\left(0.8L^{0.5}K^{0.5}+\lambda(600-50L-120K)\right)}{\partial L} = 0$

$\Longrightarrow \frac{0.4K^{0.5}}{L^{0.5}} - 50\lambda = \ 0$

$\Longrightarrow \quad 50\lambda = \frac{0.4K^{0.5}}{L^{0.5}}$

$\Longrightarrow \quad \lambda = \frac{0.4K^{0.5}}{50L^{0.5}}$.. v

इसी प्रकार

$\frac{\partial Lg}{\partial K} = 0$

$\Longrightarrow \frac{\partial\left(0.8L^{0.5}K^{0.5}+\lambda(600-50L-120K)\right)}{\partial K} = 0$

$\Longrightarrow \frac{0.4L^{0.5}}{K^{0.5}} - 120\lambda = \ 0$

$\Longrightarrow 120\lambda = \frac{0.4L^{0.5}}{K^{0.5}}$

$\Longrightarrow \quad \lambda = \frac{0.4L^{0.5}}{120K^{0.5}}$.. vi

स्मीकरण i तथा ii से

$\lambda = \frac{0.4L^{0.5}}{120K^{0.5}} = \frac{0.4K^{0.5}}{50L^{0.5}}$
$\Longrightarrow\ 50L = 120K$
$\Longrightarrow L = \frac{12K}{5}$.. vii
तथा
$\frac{\partial Lg}{\partial \lambda} = 0$
$\Longrightarrow \frac{\partial\left(0.8L^{0.5}K^{0.5} + \lambda(600-50L-120K)\right)}{\partial \lambda} = 0$
$\Longrightarrow 600 - 50L - 120K = 0$
$\Longrightarrow\ 600 = 50L + 120K$..$viii$
vii से Lका मान $viii$ में रखने पर
$50\left(\frac{12\,K}{5}\right) + 120K = 600$
$\Longrightarrow 240K = 600$
$\Longrightarrow K = 2.5$
Kका मानviiमें रखने पर
$L = \frac{12}{5}(2.5)$
$L = 6$
अतः उत्पादक का उत्पादन अधिकतम करने वाले साधनों की मात्रा K की 2.5 तथा L की 6 इकाइयाँ होंगी।

बोध प्रश्नों के उत्तरः

1. दिया है
   किसी उपभोक्ता का उपयोगिता फलन $U = 2X_1^2X_2^3$
   वस्तु X_1के लिए उपभोक्ता की सीमांत उपयोगिता $MU_{X_1} = \frac{\partial U}{\partial X_1} = \frac{\partial 2X_1^2X_2^3}{\partial X_1} = 4\,X_1X_2^3$
   वस्तु X_1की 3 तथा वस्तु X_2 की 5 इकाइयों पर $MU_{X_1} = 4(3)(5^{\,3}) = 12(125) = 1500$

   वस्तु X_2 के लिए उपभोक्ता की सीमांत उपयोगिता $MU_{X_2} = \frac{\partial U}{\partial X_2} = \frac{\partial 2X_1^2X_2^3}{\partial X_2} = 6\,X_1^2X_2^2$

   वस्तु X_1की 3 तथा वस्तु X_2 की 5 इकाइयोंपर $MU_{X_2} = 6(3^{\,2})(5^{\,2}) = 54(25) = 1350$

2 किसी उत्पादक का उत्पादनफलन $O = 0.5L^{0.2}K^{0.8}$
साधन L के लिए सीमांत उत्पादकता $MP_L = \frac{\partial O}{\partial L} = \frac{\partial(0.5L^{0.2}K^{0.8})}{\partial L}$
$= 0.5K^{0.8}\frac{\partial L^{0.2}}{\partial L}$
$= \frac{0.1K^{0.8}}{L^{0.8}}$

साधन K के लिए सीमांत उत्पादकता $MP_K = \frac{\partial O}{\partial K} = \frac{\partial (0.5L^{0.2}K^{0.8})}{\partial K}$

$= 0.5L^{0.2}\frac{\partial K^{0.8}}{\partial K}$

$= \frac{0.4L^{0.2}}{K^{0.2}}$

7.7 अभ्यास प्रश्न (Questiions for Exercise)

1. यदि किसी उत्पादक का उत्पादन फलन $O = 2L^{0.75}K^{0.25}$ हो तथा साधन L का मूल्य 10 और साधन Kका मूल्य 12 रुपये एवं उत्पादक दी हुई लागत 200 रुपये हो तो दी हुई लागत में उत्पादक का उत्पादन अधिकतम करने वाले साधनों की मात्रा कितनी होगी।

2. यदि किसी उपभोक्ता के उपयोगिता फलन $C = X_1^2X_2$ हो तथा वस्तु X_1 का मूल्य 4 और वस्तु X_2 का मूल्य 5 रुपये एवं उपभोक्ता की आय 50 रुपये हो तो उपभोक्ता द्वारा वस्तुओं की कितनी इकाइयों के उपभोग पर उपभोक्ता की उपयोगिता अधिकतम होगी?

7.8 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

1. Agarwal, D.R. (2009): Mathematics for Economics, Vrinda Publications, Delhi.
2. Agarwal, D.R. “Prarambhik Ganitiya Arthshastra (Hindi), Vrinda Publications, Delhi.
3. Allen,R.G.D (2008) : Mathematical Analysis for Economics , AITBS.
4. Chiang,A.C & Wainwright,Kevin (2013) : Fundamental Methods of Mathematical Economics” McGraw Hill Publication.
5. Madnani, G M K : Mathematics for Economics. Sultan Chand & Sons
6. Mishra,J.P. “Ganiteeya Arthshastra”, Pratiyogita Sahitya.
7. Seth,M.L.,“ Arthshastramei Prarambhik Ganit”,Laxmi Narayan Publications,Agra.
8. Yamane,Taro (2007) : Mathematics For Economists : An Elementary Survey , PHI Learning

खण्ड– 2
सारणिक अवधारणा एवं समंको का विश्लेषण
(Concepts of Determinants and Data Analysis)
इकाई–1
सारणिक, आव्यूह, गुण– उपसारणिक एवं सहखण्ड
(Matrix and Determinants: Minors and Cofactors)

इकाई संरचना (Unit Plan)

1.1 उद्देश्यः (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थीः

1. आव्यूह, सारणिक उपसारणिक तथा सहखंडों को परिभाषित करना सीख जाएंगे।
2. किसी दिए हुए वर्ग आव्यूह से सारणिक की गणना करना सीख जाएंगे

1.2 प्रस्तावना (Introduction)

आर्थिक क्रियाकलापों में अनेक ऐसे समायोजन होते हैं जिनको गणितीय रूप से व्यक्त करने हेतु रैखिक समीकरणों की प्रणाली का सहारा लेना पड़ता है। आगे की कक्षाओं में हम अर्थव्यवस्था के सामान्य साम्य तथा आगत–निर्गत विश्लेषण में इसको भलीभांति समझ पायेंगे। एक रैखिक समीकरण प्रणाली को हल करने हेतु आव्यूह तथा सारणिक का ज्ञान आवश्यक है। इस इकाई में हम इन्हीं गणितीय विधियों में दक्षता प्राप्त करने का लक्ष्य लेकर चलेंगे।

1.3 आव्यूह (Matrix):
जब आंकडों को एक टेबल/सारणी में (पंक्ति एवं स्तम्भ, row and column) में व्यवस्थित किया जाता है तो हमें संख्याओं के पंक्ति एवं स्तम्भ में व्यवस्थित आयताकार आरेख प्राप्त होते हैं जिनको आव्यूह (Matrix) कहते है। जैसे $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ एक 2 पंक्ति एवं 3 स्तम्भ वाला एक आव्यूह है।
इस प्रकार एक $m \times n$ आव्यूह में m पंक्ति एवं n स्तम्भ होगें। एक आव्यूह का ijth पद (a_{ij}) वह सदस्य/तत्व होगा जो पंक्ति क्रमांक i तथा स्तम्भ क्रमांक j पर पडता हों।
ऊपर के उदाहरण में–

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

से तुलना करें तों
$$a_{11} = 1, \quad a_{12} = 2, \quad a_{13} = 3$$
$$a_{21} = 2, \quad a_{22} = 3, \quad a_{23} = 4$$

अर्थात दूसरे पंक्ति एवं तीसरे स्तम्भ का मान a_{23} होगा जो आव्यूह A में 4 है।

1.4 वर्ग आव्यूहः
जब किसी आव्यूह के पंक्ति एवं स्तभ बराबर होते है तो ऐसे आव्यूह को वर्ग आव्यूह कहते है। जैसे–$B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ एक वर्ग आव्यूह है जिसमें 3 पंक्ति तथा 3 स्तम्भ है।
इस प्रकार हम B को क्रमांक 3 का वर्ग आव्यूह कहेंगे। B को 3×3 का आव्यूह कहेंगे।

1.5 सारणिक (Determinants)
प्रत्येक वर्ग आव्यूह से एक संख्यात्मक मान प्राप्त होता है जिसें हम सारणिक कहते है।
जैसे ऊपर लिये गये वर्ग आव्यूह $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \\ 6 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ से आबद्ध सारणिक $|B|$ होगाा। $|B|$ एक संख्यात्मक मान होगा।

किसी वर्ग आव्यूह के सारणिक का मान ज्ञात करने की विधि :

(i) यदि वर्ग आव्यूह का क्रमांक 1 हो अर्थात यदि $A = [a]$ तो A का सारणिक $|A| = a$ होगा।

(ii) यदि वर्ग आव्यूह का क्रमांक 2 हो अर्थात $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, 2 \times 2$ का आव्यूह हो तो सारणिक $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \times d) - (b \times c)$ होगा।

(iii) यदि वर्ग आव्यूह का क्रमांक 3 हो अर्थात $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, 3 \times 3$ का आव्यूह हो तो A का सारणिक

$$|A| = a_{11}(a_{22} \times a_{33} - a_{23} \times a_{32}) - a_{12}(a_{21} \times a_{33} - a_{23} \times a_{31}) + a_{13}(a_{21} \times a_{32} - a_{22} \times a_{31})$$

$= a_{11} \times a_{22} \times a_{33} - a_{11} \times a_{23} \times a_{32} - a_{12} \times a_{21} \times a_{33} + a_{12} \times a_{23} x a_{31} + a_{13} \times a_{21} \times a_{32} - a_{13} \times a_{22} \times a_{31}$ होगा।

बोध प्रश्न 1.
निम्न वर्ग आव्यूहों के सारणिक ज्ञात कीजिए।

(i) $A = [5]$ (ii) $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (iii) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$

किसी वर्ग आव्यूह के सारणिक का मान ज्ञात करते समय हमने देखा कि जैसे–जैसे वर्ग आव्यूह का क्रमांक (order) बढ़ता जाता है वैसे–वैसे वर्ग–आव्यूह के सारणिक ज्ञात करने का सूत्र जटिल होता जाता है। इसलिए 3 या 3 से बडे वर्ग आव्यूहो के सारणिक का मान ज्ञात करने के लिए सह–खण्डों (Sub-matrix) तथा उप–सारणिक (Minors) का प्रयोग किया जाता है।

1.6 उप–सारणिक (Minor):

यदि A एक $m \times n$ क्रमांक का आव्यूह हो तो A के पंक्ति संख्या i एवं स्तम्भ संख्या j वाली प्रवष्टि या संख्या का उप सारणिक मूल आव्यूह की पंक्ति संख्या i तथा स्तम्भ संख्या j को हटा देने से प्राप्त होने वाला छोटे क्रम के आव्यूह का सारणिक होगा।
उदाहरणतः यदि A एक 3×3 क्रमांक का आव्यूह है–

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ तो A के पहली पंक्ति $(i = 1)$ तथा पहले स्तम्भ $(j = 1)$ वाली प्रविष्टि a_{11} का उप सारणिक m_{11} मूल आव्यूह A के प्रथम पंक्ति तथा प्रथम स्तम्भ की सभी प्रविष्टियों को हटा देने से प्राप्त होने वाले आव्यूह का सारणिक होगा।

अर्थात $m_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

इसी प्रकार दूसरी पंक्ति तथा पहले स्तम्भ वाली प्रविष्टि a_{21} का उप सारणिक

$M_{21} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12} \times a_{33} - a_{13} \times a_{32}$ होगा जो कि मूल आव्यूह की दूसरी पंक्ति एवं पहले स्तम्भ की प्रविष्टियों को हटा कर प्राप्त आव्यूह का सारणिक है।

इसी प्रकार प्रविष्टि a_{13} का उपसारणिक

$$M_{13} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{21} \times a_{32} - a_{22} \times a_{31}$$

इसी प्रकार अन्य उप सारणिक भी प्राप्त किये जा सकते है। वस्तुतः किसी वर्ग आव्यूह मे जितनी प्रविष्टियाँ होती है उसके उतने ही उप–सारणिक होंगे।

1.7 सह खण्ड (cofactor):

एक वर्ग आव्यूह A के किसी प्रविष्ट a_{ij} का सह खण्ड c_{ij} उसके उपसारणिक m_{ij} में $(-1)^{i+j}$ से गुणा करके प्राप्त होता है।

वर्ग आव्यूह $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ $\mathbf{2 \times 2}$ के उपसारणिक

$M_{11} = |a_{22}| = a_{22}$

$M_{12} = |a_{21}| = a_{21}$
$M_{21} = |a_{12}| = a_{12}$
$M_{22} = |a_{11}| = a_{11}$
तथा सह–खण्ड
$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2 a_{22} = a_{22}$
$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3 a_{21} = -a_{21}$
$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3 a_{12} = -a_{12}$
$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (-1)^4 a_{11} = a_{11}$ होगें।

बोध प्रश्न 2. वर्ग आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ के उप सारणिक तथा सह खण्ड ज्ञात कीजिए।

बोध प्रश्न 3. वर्ग आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ उप–सारणिक तथा सहखण्ड ज्ञात कीजिए।

उपसारणिक एवं सह–खण्ड द्वारा सारणिक की गणना जैसा कि ऊपर भी चर्चा की गयी थी कि बडे क्रम वर्ग आव्यूहों की सारणिक का सूत्र जटिल होता जाता है, परन्तु उपसारणिक तथा सहखण्डों का प्रयोग करते हुए 2 या 2 से बड़े क्रमांक के आव्यूहों के सारणिक की गणना निम्न सूत्र के माध्यम से की जा सकती है।

वर्ग आव्यूह A का सारणिक
$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\ a_{ij} M_{ij}$
उपसारणिक के प्रयोग से
$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\ C_{ij}$$
सहखण्ड के प्रयोग से

1.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

(i). $A = [5]$ चूंकि यह $|X|$ क्रम का आव्यूह है अतः इस आव्यूह का सारणिक $|A| = 5$ होगा।

(ii). $B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$,एक 2×2 का वर्ग आव्यूह है

B का सारणिक, $|B| = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
$= (4 \times 2) - (-1) \times 3)$
$= 8 - (-3)$
$= 8 + 3 = 11$

(i) $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ एक 3×3 का वर्ग आव्यूह है

C का सारणिक
$|C| = 1(3 \times 5 - 4 \times 4) - 2(2 \times 5 - 4 \times 3) + 3(2 \times 4 - 3 \times 3)$
$= 1(15 - 16) - 2(10 - 12) + 3(8 - 9)$

$= 1(-1) - 2(-2) + 3(-1)$
$= -1 + 4 - 3$
$= -4 + 4 = 0$

(iv). दिया हुआ आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 2×2 क्रमांक का है, इसके उप–सारणिक

$M_{11} = |3| = 3$ $\quad\quad$ $M_{21} = |-1| = -1$
$M_{12} = |1| = 1$ $\quad\quad$ $M_{22} = |2| = 2$ होंगे।

इस प्रकार आव्यूह A के सहखण्ड निम्न होंगे।
$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2 \times 3 = 3$
$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^{1+2} 1 = (-1) \times (1) = -1$
$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^{2+1}(-1) = (-1)(-1) = 1$
$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4 (2) = 2$

(v). हल : $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ के उप–सारणिक

$M_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - (-1) = 1$
$M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 3 = -3$
$M_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$
$M_{21} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$
$M_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3$
$M_{23} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -4 - 3 = -7$
$M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{vmatrix} = 1 - 0 = 1$
$M_{32} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$
$M_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-1) = 1$

इसी प्रकार A के सह खण्ड
$C_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = (-1)^2(1) = 1$
$C_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = (-1)^3(-1) = (-1)(-3) = 3$
$C_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4(1) = 1$
$C_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = (-1)^3(0) = 0$
$C_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = (-1)^4(0) = 0$
$C_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = (-1)^5(-7) = (-1)(-7) = 7$
$C_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = (-1)^4(1) = 1$
$C_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5(1) = -1$

$C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^6(1) = 1$

1.9 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise)

1. यदि आव्यूह के किसी तत्व को a_{ij}द्वारा प्रदर्शित किया जा सकता है जहाँ i आव्यूह की पंक्ति का क्रमांक हो तथा jआव्यूह के स्तम्भ का क्रमांक हो तो आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ के लिए निम्न तत्वों को पहचान कर लिखिए।

$a.\ a_{22}$ $\quad b.\ a_{13}$ $\quad c.\ a_{31}$ $\quad d.\ a_{32}$ $\quad e.\ a_{21}$

2. उपरोक्त अभ्यास प्रश्न 1 में दिए गए आव्यूह के निम्न सहखंडों को लिखिए।

$a.\ C_{22}$ $\quad b.\ C_{13}$ $\quad c.\ C_{31}$ $\quad C.\ a_{32}$ $\quad C.\ a_{21}$

3.आव्यूह$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ के सारणिक की गणना कीजिए।

1.9 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography and useful Books)

Agarwal, D.R. (2009): Mathematics for Economics, Vrinda Publications, Delhi.

Agarwal, D.R. “Prarambhik Ganitiya Arthshastra (Hindi), Vrinda Publications, Delhi.

Allen,R.G.D (2008) : Mathematical Analysis for Economics , AITBS.

Chiang,A.C & Wainwright,Kevin (2013) : Fundamental Methods of Mathematical Economics” McGraw Hill Publication.

Madnani, G M K : Mathematics for Economics. Sultan Chand & Sons

Mishra,J.P. “Ganiteeya Arthshastra”, Pratiyogita Sahitya.

Seth,M.L.,“ Arthshastramei Prarambhik Ganit”,Laxmi Narayan Publications,Agra.

Yamane,Taro (2007) : Mathematics For Economists : An Elementary Survey , PHI Learning

इकाई–2

सारणिक के प्रयोग, क्रेमर का नियम (Uses of Determinants and Cramer's Rule)

इकाई संरचना (Unit Plan)

2.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थीः

1. रैखिक समीकरण प्रणाली को आव्यूह में व्यक्त करना सीख जाएंगे।
2. रैखिक समीकरण प्रणाली को हल करने की आव्यूह विधि तथा सारणिक विधि में अंतर समझ जाएंगे।
3. रैखिक समीकरण प्रणाली को हल करने की सारणिक विधि, जिसे क्रेमर का नियम भी कहते हैं, सीख जाएंगे।

2.2 प्रस्तावना (Introduction)

गणितीय अर्थशास्त्र में बहुधा ऐसी परिस्थितियाँ आती हैं जब हमें रैखिक समीकरणों की प्रणाली को हल करके महत्वपूर्ण आर्थिक चरों के मान ज्ञात करने पड़ते हैं। आव्यूहों के माध्यम से रैखिक समीकरणों की प्रणाली का हल हमने पिछली इकाई में समझा। आव्यूहों के अलावा मात्र सारणिकों के प्रयोग से रैखिक समीकरण की प्रणाली को जिस विधि से हल करते हैं उसे क्रेमर का नियम कहते हैं। इस इकाई में हम रैखिक समीकरण प्रणाली को हल करने की इसी विधि को समझेंगे ।

2.3 रैखिक समीकरण तथा रैखिक समीकरण प्रणाली (Linear Equation and Linear Equation System)

2.3.1 रैखिक समीकरण (Linear Equation)

एक रैखिक समीकरण निम्न स्वरूप का समीकरण होता है–

$$a_1x_1 + a_2\,x_2 + \ \dots\dots\dots + a_nx_n = b$$

जहाँ x_1 , $x_2 , \dots\dots\dots\dots\dots , x_n$ चर होते है जिनके मान अज्ञात होते है तथा $a_1,\ a_2 \dots\dots\dots\dots a_n$ इन चरों के गुणांक होते है। b भी एक वास्तविक संख्या होती है।

उदाहरण के लिए –

$$3x + 7y + 4z = 12$$

एक रैखिक समीकरण है जो ऊपर दिये गये स्वरूप का है। इस रैखिक समीकरण में x, y, z अज्ञात चर हैं तथा $3, 7, 4$ इनके गुणांक है।

2.3.2 रैखिक समीकरण प्रणाली (Linear Equation Systems):

अज्ञात चरों के समान समूह से बने हुए एक या एक से अधिक समीकरणों के समूह के रैखिक समीकरण प्रणाली कहते है।

उदाहरण के लिए –

$$x + 2y + 7z = 21$$
$$2x + 5y + z = 19$$
$$4x + y - 2z = 1$$

एक रैखिक समीकरण प्रणाली है जहाँ तीन समीकरणों को लिया गया है और प्रत्येक समीकरण में शामिल चर समान है। वस्तुतः एक रैखिक समीकरण प्रणाली को आव्यूहों के रूप में भी प्रस्तुत किया जा सकता है। जैसे ऊपर उदाहरण में लिये गये रैखिक समीकरण की प्रणाली का निम्न आव्यूहों की समीकरण के रूप में लिखा जायेगा–

$$AX = B \qquad -(1)$$

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 21 \\ 19 \\ 1 \end{bmatrix}$

रैखिक समीकरण की प्रणाली का हल अज्ञात चरों X या $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ के मान ज्ञात करके होगा।

समीकरण 1 से

$$AX = B$$

या $X = A^{-1}B$

अर्थात X का मान आव्यूह A के व्यूत्क्रम (A^{-1}) तथा आव्यूह B के गुणनफल से ज्ञात हो जायेगा।

2.4 क्रैमर का नियम (Cramer's Rule)

रैखिक समीकरण प्रणाली को हल करने की एक वैकल्पिक विधि भी है जिसे क्रैमर नियम कहते है।

2.4.1 द्विचरीय रैखिक समीकरण प्रणाली का क्रैमर के नियम द्वारा हल

यदि रैखिक समीकरण प्रणाली निम्न प्रकार की है–

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$$
$$a_{12}x_2 + a_{22}x_2 = b_2$$

तो इसे द्विचरीय रेखीय प्रणाली कहेंगे।

इसे आव्यूह के रूप में $AX = B$ से प्रदर्शित करेंगे जहाँ

$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ जो 2×2 का आव्यूह है।

तथा $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ और $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

क्रैमर विधि से इसको हल करने लिए हम A_{x1} तथा A_{x2} को निम्न आव्यूह के रूप में परिभाषित करेंगे।

$A_{x1} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{bmatrix}$ तथा $A_{x2} \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{bmatrix}$

अर्थात X चर से सम्बन्धित आव्यूह A_{x1} में X_1 चर के स्तम्भ (प्रथम स्तम्भ) को आव्यूह B से प्रतिस्थापित करे देंगे। इसी प्रकार X_2 चर से सम्बन्धित आव्यूह A_{x2} में X_2 चर के स्तम्भ (द्वितीय स्तम्भ) को आव्यूह B से प्रतिस्थापित करेंगे।

अब रेखीय समीकरण प्रणाली का हल निम्नवत् होगा–

$$X_1 = \frac{\det(A_{x1})}{\det(A)} = \frac{|A_{x1}|}{|A|} = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

तथा

$$X_2 = \frac{\det(A_{x2})}{\det(A)} = \frac{|A_{x2}|}{|A|} = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

उदाहण1 : रेखीय समीकरण प्रणाली

$$2X_1 + 5X_2 = 16$$
$$3X_1 + 2X_2 = 5$$

का हल ज्ञात करने के लिए

$AX = B$ से तुलना करने पर

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 16 \\ 5 \end{bmatrix}$$

यहाँ $|A| = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = -4 - 15 = -19 \neq 0$

अर्थात A एक व्युत्क्रम योग्य आव्यूह है,

अब हम A_{x1} तथा A_{x2} को निम्नवत् परिभाषित करेंगे।

$A_{x1} = \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ तथा $A_{x2} = \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

$$X_1 = \frac{|A_{x1}|}{|A|} = \frac{-32-25}{-19} = \frac{-57}{-19} = 3$$

$$X_2 = \frac{|A_{x2}|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{-19} = \frac{0-48}{-19} = \frac{-38}{-19} = 2$$

अतः उपरोक्त रेखीय समीकरण प्रणाली का हल $X_1 = 3$ तथा $X_2 = 2$ होगा।

2.4.2 त्रिचरीय रैखिक प्रणाली का क्रैमर विधि से हल

यदि रैखिक समीकरण प्रणाली निम्न प्रकार की है

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 = b_2$$
$$a_{31}X_1 + a_{32}X_2 + a_{33}X_3 = b_3$$

तो इसे त्रिचरीय रेखीय प्रणाली कहेंगे। जिसको आव्यूह के रूप में $AX = B$ प्रदर्शित करेंगे

जहाँ $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

तथा आव्यूह A व्युत्क्रम योग्य है अर्थात आव्यूह A का सारणिक $|A|$ शून्य नहीं है, $i, e\ |A| \neq 0$ तो क्रैमर विधि से इसी रैखिक समीकरण प्रणाली का हल ज्ञात करने के लिए हम निम्न आव्यूह परिभाषित करेंगे–

$$A_{x1} = \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{12} & b_2 & a_{23} \\ a_{13} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$A_{x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix}$$

अब त्रिचरीय रेखीय प्रणाली का हल निम्नवत् होगा–

$$X_1 = \frac{\det(A_{x1})}{\det(A)} \ , \quad X_2 = \frac{\det(A_{x2})}{\det(A)} \ , \quad X_3 = \quad X_3 = \frac{\det(A_{x3})}{\det(A)}$$

बोध प्रश्नः1

रेखीय समीकरण प्रणाली

$$x + 2y + 7z = 21$$
$$2x + 5y + z = 19$$
$$4x + y - 2z = 3$$

को क्रेमर के नियम से हल कीजिए।

इसी प्रकार किसी n चरीय रेखीय प्रणाली का हल भी ज्ञात किया जाता है।

मान लिजिए एक n चरीय रेखीय प्रणाली $AX = B$ जहां A एक $n \times n$ का आव्यूह है तथा b एक स्तम्भ आव्यूह है जिसमें n अवयव है

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12\ldots\ldots} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots\ldots & a_{nn} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} b_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

तो इस रेखीय प्रणाली के हल के लिए हम ऐसे n नये आव्यूह A_{xi} परिभाषित करेंगे जो आव्यूह A के i –वे स्तम्भ में B के अवयवों को स्थापित करके बनते है। क्रैमर के नियम के अनुसार इस रेखीय प्रणाली का हल

$X_i = \frac{det(A_{xi})}{\det(A)}$ होगा।

2.5 बोध प्रश्नों के उत्तर

1 प्रश्न में दिए हुए रेखीय समीकरण प्रणाली का आव्यूह के रूप में $AX = B$ में रूपांतरण

जहां $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 21 \\ 19 \\ 3 \end{bmatrix}$

यहाँ $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$

$= 1(-10 - 1) - 2(-4 - 4) + 7(2 - 20)$

$= -11 + 16 - 126$

$= -121 \neq 0$

अर्थात A एक व्युत्क्रम योग्य आव्यूह है,

अब हम $A_{x1}A_{x2}$ तथा A_{x3} को निम्नवत् परिभाषित करेंगे।

$$A_{x1} = \begin{bmatrix} 21 & 2 & 7 \\ 19 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix}, A_{x2} = \begin{bmatrix} 1 & 21 & 7 \\ 2 & 19 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ तथा } A_{x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 21 \\ 2 & 5 & 19 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

अब त्रिचरीय रेखीय प्रणाली का हल निम्नवत् होगा–

$x = \frac{\det(A_{x1})}{\det(A)}$, $y = \frac{\det(A_{x2})}{\det(A)}$, $z = \frac{\det(A_{x3})}{\det(A)}$

$\det(A_{x1}) = |A_{x1}|$

$= \begin{vmatrix} 21 & 2 & 7 \\ 19 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$

$= 21\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 19 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 19 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

$= 21(-10 - 1) - 2(-38 - 3) + 7(19 - 15)$

$= -231 + 82 + 28$

$= -121$

$\det(A_{x2}) = |A_{x2}|$

$= \begin{vmatrix} 1 & 21 & 7 \\ 2 & 19 & 1 \\ 4 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

$= 1\begin{vmatrix} 19 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} - 21\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}$

$= 1(-38 - 3) - 21(-4 - 4) + 7(6 - 76)$

$= -41 + 168 - 490$

$= -363$

$\det(A_{x3}) = |A_{x3}|$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 21 \\ 2 & 5 & 19 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 21\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 1(15 - 19) - 2(6 - 76) + 21(2 - 20)$$

$$= -4 + 140 - 378$$

$$= -242$$

अब

$$x = \frac{\det(A_{x1})}{\det(A)} = -\frac{121}{-121} = 1$$

$$y = \frac{\det(A_{x2})}{\det(A)} = -\frac{362}{-121} = 3$$

$$z = \frac{\det\,(A_{x3})}{\det(A)} = \frac{242}{2} = 2$$

2.6 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise)

1रेखीय समीकरण प्रणाली

$$2x + 2y + z = 15$$

$$x + 5y - 2z = 3$$

$$5x - 4y - 2z = -3$$

को क्रेमर के नियम से हल कीजिए।

2रेखीय समीकरण प्रणाली

$$2x - y = 9$$

$$x + 5y = 43$$

को क्रेमर के नियम से हल कीजिए।

2.7 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography?Usefull Books)

Agarwal, D.R. (2009): Mathematics for Economics, Vrinda Publications, Delhi.
Agarwal, D.R. “Prarambhik Ganitiya Arthshastra (Hindi), Vrinda Publications, Delhi.
Allen,R.G.D (2008) : Mathematical Analysis for Economics , AITBS.
Chiang,A.C & Wainwright,Kevin (2013) : Fundamental Methods of Mathematical Economics” McGraw Hill Publication.
Madnani, G M K : Mathematics for Economics. Sultan Chand & Sons
Mishra,J.P. “Ganiteeya Arthshastra”, Pratiyogita Sahitya.
Seth,M.L.,“ Arthshastramei Prarambhik Ganit”,Laxmi Narayan Publications,Agra.
Yamane,Taro (2007) : Mathematics For Economists : An Elementary Survey , PHI Learning

इकाई–3
आव्यूह के प्रकार एवं गुण, आव्यूह गुणन
(Types of matrix, Characteristics and Multiplication)

इकाई संरचना (Unit Plan)

3.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी:

1. आव्यूह के विभिन्न प्रकारों से भलीभांति परिचित हो जाएंगे।
2. आव्यूह के विभिन्न गुणों से भलीभांति परिचित हो जाएंगे।
3. दो वर्ग आव्यूहों के गुणन की विधि सीख जाएंगे ।

3.2 प्रस्तावना (Introduction)

आर्थिक क्रियाकलापों में अनेक ऐसे समायोजन होते हैं जिनको गणितीय रूप से व्यक्त करने हेतु रैखिक समीकरणों की प्रणाली का सहारा लेना पड़ता है। आगे की कक्षाओं में हम अर्थव्यवस्था के सामान्य साम्य तथा आगत–निर्गत विश्लेषण में इसको भलीभांति समझ पाएंगे। एक रैखिक समीकरण प्रणाली को हल करने हेतु आव्यूह तथा सारणिक का ज्ञान आवश्यक है। इस इकाई में हम इन्ही गणितीय विधियों में दक्षता प्राप्त करने का लक्ष्य लेकर चलेंगे।

3.3 आव्यूह के प्रकार :

हम जानते हैं कि संख्याओं का स्तम्भबद्ध तथा पंक्तिबद्ध आयताकार संयोजन ही आव्यूह होता है जैसे $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ एक आव्यूह है। जिसमें दो पंक्तियाँ तथा 3 स्तम्भ हैं। इसे 2×3 आव्यूह कहा जायेगा। आव्यूह के पंक्ति तथा स्तम्भ की संख्या तथा संख्याओं के विभिन्न संयोजनों के आधार पर आव्यूह के कुछ प्रकार निम्नलिखित है–

3.3.1 वर्ग आव्यूह (Square Matrix): ऐसा आव्यूह जिसमें स्तम्भ तथा पंक्ति की संख्या बराबर होती है। उसे वर्ग आव्यूह कहते है। जैसे–

$$\begin{bmatrix} 0.5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0.8 & 0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

एक 3×3 का वर्ग आव्यूह है जिसमें 3 पंक्ति तथा 3 स्तम्भ है। वर्ग आव्यूह में विकर्ण प्रविष्टयाँ होती है। वर्ग आव्यूह की iवीं विकर्ण प्रविष्टी वर्ग आव्यूह की (i, i)वीं प्रविष्टी होती है।

3.3.2 विकर्ण आव्यूह (Diagonal Matrix): ऐसा वर्ग आव्यूह जिसकी विकर्ण प्रविष्टयों के अतिरिक्त सभी प्रविष्टियां शून्य (0) होती हैं उसे विकर्ण आव्यूह कहते है।

जैसे– $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

2.3.3 **अदिश आव्यूह (Scalar Matrix):** ऐसे विकर्ण आव्यूह जिसकी सभी विकर्ण प्रविष्टियाँ समान होती है। उसे अदिश आव्यूह कहते है।

जैसे– $S = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$एक अदिश आव्यूह है।

2.3.4 **तत्समक/इकाई आव्यूह (Identity Matrix)**: ऐसे अदिश आव्यूह जिसकी सभी विकर्ण प्रविष्टियां $'1'$ हो

जैसे– $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

2.3.5 **शून्य आव्यूह (Zero Matrix)**: ऐसा आव्यूह जिसके सभी अवयव शून्य हों।

जैसे– $0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

3.4 आव्यूह का स्थानान्तरण (Transpose of a Matrix) :

किसी $m \times n$ आकार के आव्यूह A में m पंक्तियाँ तथा n स्तम्भ होगें । इस आव्यूह का स्थानान्तरण आव्यूह A^T ज्ञात करने के लिए आव्यूह की पंक्तियों और स्तम्भों को आपस में रूपान्तरित कर दिया जाता है; और इस प्रकार प्राप्त स्थानान्तरण आव्यूह A^T में पंक्तियों की संख्या n तथा स्तम्भों की संख्या m होगी।

अर्थात यदि

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix} m \times n$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21}\ldots\ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{mn} \end{bmatrix} n \times m$$

बोध प्रश्नः 1 आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ का स्थानांतरण आव्यूह ज्ञात कीजिए ।

3.4 अव्युत्क्रमणीय आव्यूह (Singular Matrix) :

यदि किसी आव्यूह का सारणिक शून्य हो तो ऐसे आव्यूह व्युत्क्रम योग्य नही होते और इन्हें अव्युत्क्रमणी (Singular) आव्यूह कहते हैं। अर्थात यदि $|A| = 0$ तो A को अव्युत्क्रमणी आव्यूह कहते हैं।

बोध प्रश्नः 2– आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ -10 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ की व्युत्क्रमणीयता की जांच कीजिए।

3.5 सममित आव्यूह (Symmetric Matrix) :

यदि किसी आव्यूह A का स्थानान्तरण आव्यूह A^T मूल आव्यूह के बराबर हो तो उसे सममित आव्यूह कहते है। अर्थात यदि $A^T = A$ हो तो A एक सममित आव्यूह होगा।

बोध प्रश्नः 3– क्या आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ सममित आव्यूह है?

3.6 आव्यूह का व्युत्क्रम (Inverse of a Matrix)

सबसे पहले तो यह स्पष्ट होना चाहिए कि सिर्फ वर्ग–आव्यूह (जिनमें पंक्ति तथा स्तम्भ की संख्या बराबर होती है।) के ही व्युत्क्रम ज्ञात किये जा सकते है। यदि A आव्यूह $n \times n$ का वर्ग आव्यूह हो तो A का व्युत्क्रम (A^{-1}) निम्न सूत्र से परिभाषित होता है।

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$$

जहाँ A का सारणिक $|A| \neq 0$ (शून्य नही होना चाहिए)

इस प्रकार वर्ग आव्यूह A का व्युत्क्रम (A^{-1}) ज्ञात करने के लिए आव्यूह A का adjugate आव्यूह एवं A का सारणिक ज्ञात करना पड़ेगा। A का adjugate आव्यूह, A के सहखण्डों द्वारा प्राप्त प्रविष्टियों से बने सहखण्ड आव्यूह (C) का स्थानान्तरण आव्यूह (Transpose Matrix) होता है। अर्थात $adj(A) = C^T$ जहाँ आव्यूह C का प्रत्येक अवयव या प्रविष्टि $C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ अर्थात आव्यूह A के सहखण्ड होंगे।

किसी आव्यूह A के स्थानान्तरण आव्यूह A^T में बदलनें के लिए आव्यूह A की सभी पंक्तियों को स्तम्भ–बद्ध अथवा आव्यूह A के सभी स्तम्भों को पंक्तिबद्ध कर देते है।

3.8 रैखिक समीकरण एवं आव्यूहः

रेखीय समीकरण के समूह को आव्यूह के रूप में प्रदर्षित किया जा सकता है। उदाहरण स्वरूप–

$4x + 3y = 10$

$8x - y = -1$

आव्यूह के रूप में

$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$ से प्रदर्शित करेंगे।

किसी रैखिक समीकरण प्रणाली को आव्यूहों के प्रयोग द्वारा कैसे हल किया जाता है आइए इसको एक उदाहरण से समझते हैं।

दिया है–रेखीय समीकरण प्रणाली

$x + 2y + 7z = 21$

$2x + 5y + z = 19$

$4x + y - 2z = 3$

जिसका आव्यूह के रूप में परिवर्तन निम्न होगा।

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 19 \\ 3 \end{bmatrix}$$

संक्षेप में

$AX = B$

जहाँ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 21 \\ 19 \\ 3 \end{bmatrix}$

$AX = B$ को X के लिए हल करनें पर

$X = A^{-1}B$

$A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}$ जहाँ $|A| \neq 0$

सर्वप्रथम हम आव्यूह A का सारणिक $|A|$ ज्ञात करके देखेगें कि इसका मान शून्य तो नही है, $|A| \neq 0$ अब

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 1\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} + 7\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$= 1(-10 - 1) - 2(-4 - 4) + 7(2 - 20)$

$= -11 + 16 - 126$

$= -121 \neq 0$ जो कि शून्य नहीं है।

अतः A का व्यूत्क्रम A^{-1} ज्ञात किया जा सकता है। $adj = C^T$

जहाँ C आव्यूह A के सहखण्डों से बना आव्यूह है।

$C_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = (-1)^2.(-10-1) = -11$
$C_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = (-1)^3(-4-4) = 8$
$C_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = (-1)^4.(2-20) = -18$
$C_{21} = (-1)^{2+1}M_{21} = (-1)^3.(-4-7) = 11$
$C_{22} = (-1)^{2+2}M_{22} = (-1)^4.(-2-28) = -30$
$C_{23} = (-1)^{2+3}M_{23} = (-1)^5.(1-8) = 7$
$C_{31} = (-1)^{3+1}M_{31} = (-1)^4(2-35) = -33$
$C_{32} = (-1)^{3+2}M_{32} = (-1)^5(1-14) = 1$
$C_{33} = (-1)^{3+3}M_{33} = (-1)^6(5-4) = 1$

इस प्रकार

$$C = \begin{bmatrix} -11 & 8 & -18 \\ 11 & -30 & 7 \\ -33 & 13 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C^T = \begin{bmatrix} -11 & 11 & -33 \\ 8 & -30 & 13 \\ -18 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{C^T}{|A|} = \frac{1}{-121}\begin{bmatrix} -11 & 11 & -33 \\ 8 & -30 & 13 \\ -18 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{121} & \frac{-11}{121} & \frac{33}{121} \\ \frac{-8}{121} & \frac{30}{121} & \frac{-13}{121} \\ \frac{18}{121} & \frac{-7}{121} & \frac{-1}{121} \end{bmatrix}$$

$X = A^{-1}B$ में स्थापित करनें पर

$$X = \begin{bmatrix} \frac{11}{121} & \frac{-11}{121} & \frac{33}{121} \\ \frac{-8}{121} & \frac{30}{121} & \frac{-13}{121} \\ \frac{18}{121} & \frac{-7}{121} & \frac{-1}{121} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 19 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{11}{121}x21 & \frac{-11}{121}x19 + & \frac{33}{121}x\ 3 \\ \frac{-8}{121}x21 + & \frac{30}{121}x19\ - & \frac{13}{121}x\ 3 \\ \frac{18}{121}x21 - & \frac{7}{121}x19\ - & \frac{1}{121}x\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{231-209+99}{121} \\ \frac{-168+570-39}{121} \\ \frac{378-133-3}{121} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{121}{121} \\ \frac{363}{121} \\ \frac{242}{121} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

अर्थात $X = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$

या $x = 1,\ y = 3,\ z = 2$

3.9 आव्यूहों पर गणितीय संक्रियाएँ एवं उनके गुण

1. आव्यूहो का योग (Addition of Matrices): $m \times n$ आकार के दो आव्यूहों A तथा B का योग इन आव्यहों की संगत प्रविष्टियों के योग से प्राप्त संख्याओं का आव्यूह होगा। अर्थात $A + B$ आव्यूह $(ij)^{th}$ प्रविष्टी आव्यूह A तथा आव्यूह B की $(ij)^{th}$ प्रविष्टियों का योग होगी।

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

उदाहरण :

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ तथा $B = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}$

$A + B = \begin{bmatrix} 2+5 & 3+1 & 4+7 \\ 0+0 & 1+2 & 7+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 11 \\ 0 & 3 & 16 \end{bmatrix}$

3.10 आव्यूहों का अदिश गुणन (Scaler Multiplication of Matrics) :

आव्यूहों का अदिश गुणन से तात्पर्य है कि किसी संख्या से किसी आव्यूह को गुणा करना। यदि $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_m & a_{m2} \ldots\ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$ एक $m \times n$ का आव्यूह है तथा किसी संख्या C से इस आव्यूह में गुणा करना हो तो इसे CA द्वारा दर्शायेंगे और CA की $(ij)^{th}$ प्रविष्टी आव्यूह A की $(ij)^{th}$ प्रविष्टी में C के गुणन के बराबर होगी। अर्थात आव्यूह A के प्रत्येक अवयव को C से गुणा करनें से प्राप्त संख्याओं से बना आव्यूह ही CA होगा।

$(CA)_{ij} = C(A_{ij})$

उदाहरण : आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ में संख्या 5 से गुणा करनें पर

$$5A = 5\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 15 & 20 \end{bmatrix}$$

3.11 आव्यूहों का गुणन (दो आव्यूहों का गुणा) Matrix Multiplication (Multiplying two Matrices) :

दो आव्यूहों के गुणन में आव्यूहों के क्रम का बहुत महत्व है। यदि दो आव्यूह A तथा B का गुणा करना है तो पहले आव्यूह A में स्तम्भों की संख्या को दूसरे आव्यूह B के पंक्तियों की संख्या के बराबर होना चाहिये, अन्यथा आव्यूहों का गुणन सम्भव नही होगा। अर्थात यदि आव्यूह $A, m \times n$ क्रमांक का है। जिसमें पंक्तियों की संख्या m तथा स्तम्भों की संख्या n है तो B में पंक्तियों की संख्या n होना आवश्यक है, B में स्तम्भ चाहें जितनें हो।

आव्यूहों के गुणन से प्राप्त आव्यूह में पंक्तियों की संख्या पहले आव्यूह A की पंक्तियों की संख्या के बराबर तथा स्तम्भों की संख्या दूसरें आव्यूह B के स्तम्भों की संख्या के बराबर होगी।

अर्थात यदि $A\, m \times n$ तथा $B\, n \times p$ है तो इनका गुणन आव्यूह $(AB) m \times p$ होगा।

$$A_{m \times n} \times B_{n \times p} = (AB)_{m \times p}$$

आव्यूह AB की $(ij)^{th}$ प्रविष्टी निम्न होगी

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}\, B_{kj}$$

उदाहरण : यदि

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \text{ तथा } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

यहाँ A में स्तम्भ (3) तथा B में पंक्तिया बराबर है। अतः A तथा B में गुणन सम्भव है। तथा गुणन के फलस्वरूप प्राप्त आव्यूह AB में 2 पंक्तियां तथा 3 स्तम्भ होगें।

$$A \times B = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times (-1) + 4 \times 0 + 1 \times 1 & 5 \times 2 + 4 \times 1 + 1 \times 0 & 5 \times 0 + 4 \times 1 + 1 \times 1 \\ 3 \times (-1) + (-1)(0) + 0 \times 1 & 3 \times 2 + (-1)(1) + (0) \times (0) & 3 \times 0 + (-1) \times (1) + 0 \times 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -5 + 0 + 1 & 10 + 4 + 0 & 0 + 4 + 1 \\ -3 + 0 + 0 & 6 - 1 + 0 & 0 - 1 + 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -4 & 14 & 5 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}_{2x3}$$

नोटः सामान्यतः A का B में गुणन तथा B का A में गुणन बराबर नही होता

$$AB \neq BA$$

3.12 आव्यूहों के योग तथा गुणन के गुण :

1. $(A + B) + C = A + (B + C)$ अर्थात आव्यूहों पर योग का साहचर्य नियम (Associtivity of addition) लागू होता है।
2. $(AB)C = A(BC)$ अर्थात आव्यूहों पर गुणन का साहचर्य नियम लागू होता है।
3. $(A + B) = (B + A)$ अर्थात आव्यूहों में योग का विनिमेंय गुण विद्यमान होता है।

4. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$ अर्थात अदिश (α)का गुणन आव्यूहों के योग पर वितरित होता है।
5. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$ अर्थात अदिषों (α तथा β) योग पर आव्यूह का गुणन वितरित होता है।
6. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$
7. $A(B+C)=AB+AC$आव्यूह गुणन पर वितरण नियम लागू होता है।
8. $(A+B)C=AC+BC$
9. $(A^T)^T=A$ अर्थात आव्यूह के स्थानान्तरण का स्थानान्तरण मूल आव्यूह होता है।
10. $(KA)^T=KA^T$ अर्थात किसी अदिश राशि और आव्यूह के गुणन स्थानान्तरण आव्यूह अदिश राशि एवं मूल आव्यूह स्थानान्तरण आव्यूह के गुणन के बराबर होता है।
11. $(A+B)^T=A^T+B^T$ दो आव्यूहों के योग का स्थानान्तरण व्यक्तिगत आव्यूहों के स्थानान्तरण के योग के बराबर होता है।
12. $(AB)^T=B^TA^T$ दो आव्यूहों के गुणनफल का स्थानान्तरण दूसरें आव्यूह के स्थानान्तरण और पहलें आव्यूह के स्थानान्तरण के गुणनफल के बराबर होता है।
13. $AI=IA=A$ अर्थात तत्समक आव्यूह (Identity Matrix) का किसी आव्यूह (A) से गुणन करनें पर वही आव्यूह A प्राप्त हो जाता है।
14. यदि A एक $m\times n$ का आव्यूह है और o इसी आकार का शून्य आव्यूह (Zull or Zero Matrix) है तो $A+0+0+A=A$ होगा 0 एक योग तत्समक होता है।
15. $A+(-A)=(-A)+A=0$ अर्थात $-A$ आव्यूह A का योगात्मक व्युत्क्रम होगा एवं आव्यूह A आव्यूह $-A$ का योगात्मक व्युत्क्रम होगा।
16. किसी वर्ग आव्यूह A को इसी आकार के तत्समक आव्यूह से गुणा करनें पर मूल आव्यूह A ही प्राप्त होगा। $A_{n\times n}\times I_{n\times n}=I_{n\times n}\times A_{n\times n}=A_{n\times n}$
17. किसी व्युत्क्रम योग्य आव्यूह A का व्युत्क्रम अप्रतिम (unique) होता है। $AA^{-1}-A^{-1}A=I$
18. किसी आव्यूह A के व्युत्क्रम का व्युत्क्रम वही आव्यूह A होगा। $(A^{-1})^{-1}=A$
19. यदि A तथा B दो व्युत्क्रम योग्य आव्यूह हैं तो इनके गुणनफल का व्युत्क्रम आव्यूहों का व्युत्क्रम के गुणनफल के बराबर होगा। $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$
20. $A+A^T$एक सममित आव्यूह होगा।

3.13 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers of Basic Questions)

1. आव्यूह $A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ 2 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{bmatrix}$ का स्थानांतरण आव्यूह $A^T=\begin{bmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 0.2 & 0\\ 1 & 0 & -3\end{bmatrix}$
2. दिया है आव्यूह $A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 1\\ -10 & 3 & 0\\ 0 & 3 & 2\end{bmatrix}$

   यह व्युत्क्रमणीय होगा यदि$|A|\neq 0$

$|A|=5\begin{bmatrix}3 & 0\\ 3 & 2\end{bmatrix}-0\begin{bmatrix}-10 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}+1\begin{bmatrix}-10 & 3\\ 0 & 3\end{bmatrix}$
$=5(6-0)-0(-20-0)+(-30-0)$
$=30-0-30$
$=0$
चूंकि $|A|=0$ अतः आव्यूह A व्युत्क्रमणीय नहीं है।

3. दिया है आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ यदि $A^T = A$तो इसे सममित आव्यूह कहेंगे।

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

चूंकि $A^T = A$ अतः आव्यूह Aसममित आव्यूह है।

3.14 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise)

1. रेखीय समीकरण प्रणाली

$$2x + 2y + z = 15$$
$$x + 5y - 2z = 3$$
$$5x - 4y - 2z = -3$$

को आव्यूहों के प्रयोग द्वारा हलकीजिए

2. आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 6 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ की व्युत्क्रमणीयता की जांच कीजिए।

3.15 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography /Usefull Books)

Agarwal, D.R. (2009): Mathematics for Economics, Vrinda Publications, Delhi.

Agarwal, D.R. “Prarambhik Ganitiya Arthshastra (Hindi), Vrinda Publications, Delhi.

Allen,R.G.D (2008) : Mathematical Analysis for Economics , AITBS.

Chiang,A.C & Wainwright,Kevin (2013) : Fundamental Methods of Mathematical Economics” McGraw Hill Publication.

Madnani, G M K : Mathematics for Economics. Sultan Chand & Sons

Mishra,J.P. “Ganiteeya Arthshastra”, Pratiyogita Sahitya.

Seth,M.L.,“ Arthshastramei Prarambhik Ganit”,Laxmi Narayan Publications,Agra.

Yamane,Taro (2007) : Mathematics For Economists : An Elementary Survey , PHI Learning

इकाई–4
संमको का प्रस्तुतीकरण, आवृत्ति वितरण
(Presentation of Data and Frequency Distribution)

इकाई संरचना (Unit Plan)

4.1 उद्देश्य **(Objectives)**
4.2 प्रस्तावना **(Introduction)**
4.3 संमकः परिचय **(Data)**
4.4 समंको के प्रकार **(Types of data)**
- 4.4.1 गैर–संख्यात्मक (**Categonical data**) या गुणात्मक आँकड़े **(Quantitative data)**
- 4.4.2 संख्यात्मक आँकड़े (**Numerical data**)

4.5 मापनीयता के पैमाने के आधार समंक का वर्गीकरण **(Classification of Data on the basis of scale of measurement)**
- 4.5.1 सांकेतिक पैमाने पर मापनीय समंक (**Nominal Scale**)
- 4.5.2 क्रमागत पैमाने पर मापनीय समक (**Ordinal Scale**)
- 4.5.3 अन्तराल पैमाने पर मापनीय समंक (**Interval Scale**)
- 4.5.4 आनुपातिक पैमाने पर मापनीय संमक (**Ratio Scale**)

4.6 सतत एवं असतत समंक **(Continuous and Non coutinuous Data)**
4.7 समंको का प्रस्तुतिकरण **(Presentation of Data)**
- 4.7.1 सारणी के रूप में समंको का प्रस्तुतिकरण **(Tabulation)**
  - 4.7.1.1 आवृत्ति वितरण **(Frequency Distribution)**
  - 4.7.1.2 वर्ग अन्तराल **(Class Interval)**
  - 4.7.1.3 वर्गों की संख्या का निर्धारण **(Determination of Classes)**
  - 4.7.1.4 वर्ग अन्तराल का निर्धारण **(Determination of Class Interval)**
- 4.7.2 ग्राफ के रूप में समंको का प्रस्तुतिकरण **(Grapphs)**
  - 4.7.2.1 दंड आरेख (**Bar Chart**)
  - 4.7.2.2 आयत चित्र **(Histogram)**
  - 4.7.2.3 बहु–दण्ड चित्र **(Multiple Bar Diagram)**
  - 4.7.2.4 संधटक भाग दण्ड चित्र **(Partitioned bar Diagram)**
  - 4.7.2.5 पाई चित्र **(Pie-Chart)**
  - 4.7.2.6 रेखीय रेखा चित्र **(Linear Graph)**
  - 4.7.2.7 स्कैटर डाइग्राम **(Scatter Diagram)**

4.8 बोध प्रश्नों के उत्तर **(Answer to the Basic Questions)**
4.9 अभ्यास प्रश्न **(Questions for Exercise)**
4.10 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें **(Bibliography/Usefull Books)**

4.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी

1- समंकों के विभिन्न प्रकारों तथा वर्गीकरणों से भलीभांति परिचित हो जायेंगें ।

2- समंकों का आवृत्ति वितरण करना तथा उन्हे सारणीबद्ध करना सीख जायेंगें।

4.2 प्रस्तावना (Introduction)

आर्थिक सिद्धांतों को जब हम व्यावहारिक जगत की कसौटी पर कसना चाहते हैं तो जिस चीज से हमारा सामना सबसे पहले होता है वह है समंक। वस्तुतः समंको के प्रयोग के बगैर अर्थशास्त्रीय शोध की परिकल्पना ही नहीं की जा सकती। अतः गणितीय अर्थशास्त्र में समंको के विश्लेषण का महत्वपूर्ण स्थान है। अतः विद्यार्थियों का समंको से परिचय होना समीचीन होगा।

4.3 समंक (Data) : परिचय

समंक का तात्पर्य उन जानकारियों से है जो किसी शोध/जिज्ञासा वश पूछे गये प्रश्नों के उत्तर के रूप में प्राप्त होते हैं। जैसे– हम यह जानने में उत्सुक हो सकते हैं कि किसी परिवार की मासिक आय कितनी है, विश्वविद्यालय विद्यार्थियों का पंसदीदा पाठ्यक्रम क्या है या कक्षा में छात्र–छात्राओं का पसन्दीदा रंग कौन सा है इत्यादि। इन सभी प्रश्नों में पूछे गये प्रश्न मासिक आय, पसन्दीदा पाठ्यक्रम पसन्दीदा रंग इत्यादि के सम्भावित उत्तर क्रमशः रू0 20000, बी0बी0ए0, पीला इत्यादि हो सकते है। इन उत्तरों को ही समंक कहते है। प्रत्येक ऊपर पूछे गये प्रश्न के सन्दर्भ में एक जानकारी लिए हुए है। जब प्रश्न का उत्तर किसी एक इकाई से ही लिया गया हो तो यह इकलौता समंक या आँकडा अंग्रेजी में ''datum'' कहलाता है। परन्तु जब प्रश्न का उत्तर एक से अधिक प्रतिभागियों से प्राप्त करते है तो ये समंक या आँकड़े या अंग्रेजी में ''data'' कहलाते है।

स्पष्ट है कि समंक संख्यात्मक भी हो सकते है जैसै रू0 20000 या गैर संख्यात्मक भी जैसे बी0बी0ए0 या पीला। विभिन्न प्रकार के समंको की उपयोगिता तथा उनके विष्लेषण का तरीका भिन्न–भिन्न होता है।

4.4 समंको के प्रकार (Types of Data):

आज के समय में समंको का दायरा अत्यन्त विस्तृत हो गया है। कम्प्यूटर द्वारा बड़े एवं जटिल प्रकार के विश्लेषण की तकनीकि तथा सॉफ्टवेयर विकसित हो जाने के कारण आज फोटोग्राफ, विडियो, साउंड, टेक्सट इत्यादि को भी डेटा–इनपुट के रूप में प्रयोग करते हुए सभी सांख्यिकी विश्लेषण, निष्कर्ष एवं पूर्वानुमान प्राप्त किये जा रहे है। हालांकि इस प्रकार के डेटा को भी पहले प्रसंस्कृत करके संख्यात्मक रूप में रूपान्तरित कर लिया जाता है। इस प्रकार यदि समंको का वर्गीकरण किया जाये तो आँकड़े मुख्यतः दो प्रकार के हो सकते है।

(i) गैर–संख्यात्मक (Categonical data) या वर्गात्मक आँकड़े

(ii) संख्यात्मक आँकड़े (Numerical data)

समंको के वर्गीकरण को समझने के लिए निम्न उदाहरण को देखते है।

उदाहरणः मान लिजिए हम 10 बच्चों की किसी कक्षा के छात्र–छात्राओं के स्वास्थ्य संबंधी अध्ययन हेतु निम्न जानकारियाँ जुटाते हैं–

क्र0सं0	नाम	कक्षा	थ्लंग	पहचान पत्र संख्या	ब्लड ग्रुप	पारिवारिक आय औसत मासिक	वजन
1	नेहा	11	महिला	35	O^+	25	48
2	पूजा	11	महिला	09	O^+	135	46
3	निखिल	11	पुरूष	23	B^+	70	48
4	स्वाती	11	महिला	87	AB^+	60	54
5	पूनम	11	महिला	45	A^+	75	50
6	मेहित	11	पुरूष	13	AB^-	40	52
7	अक्षत	11	पुरूष	21	O^+	35	46
8	सामर्थ्य	11	पुरूष	29	O^+	67	51
9	रत्नेश	11	पुरूष	93	O^+	77	49
10	धर्मेन्द्र	11	पुरूष	32	AB^+	43	46

उदाहरण में छात्र–छात्राओं से नाम, कक्षा, पहचान–पत्र संख्या, ब्लड ग्रुप, पारिवारिक औसत मासिक आय तथा वजन जैसे अभिलक्षणों (Characterstice) को जानने हेतु प्रश्न पूछे गये जिनके उत्तर स्वरूप प्राप्त मानों को प्रत्येक छात्र हेतु संकलित करके एक सारणी के रूप में ऊपर लिखा गया है। इन अभिलक्षणों में कक्षा के रूप में प्राप्त उत्तर का मान सभी छात्र–छात्रा हेतु समान (11) है। ऐसा इसलिए है क्योंकि हमारे सर्वे के लिए चुना गया समूह सिर्फ एक ही कक्षा (11) का है। इस प्रकार यदि किसी अध्ययन में चुने गये अभिलक्षणों का उत्तर या मान परिवर्तित न होता हो अर्थात स्थिर या समान हो तो ऐसे अभिलक्षण को 'अचर' की संज्ञा दी जाती है। इसके विपरित जब ऐसे अभिलक्षण जिनके उत्तर (या मान) परिवर्तनीय हों उनकों चर कहते है। जैसे कि ऊपर लिये गये उदाहण में कक्षा के अतिरिक्त अन्य सभी अभिलक्षण नाम, पहचान–पत्र संख्या, ब्लड ग्रुप इत्यादि के मान परिवर्तित हो रहे है इसलिए उन्हें चर कहेगें।
जैसा कि ऊपर स्पष्ट किया गया है कि समंक संख्यात्मक तथा गैर सख्यांतमक प्रकार के हो सकते है, इस उदाहरण में भी कुछ अभिलक्षण संख्यात्मक है तथा कुछ गैर संख्यात्मक।

4.4.1 संख्यात्मक समंक : संख्यात्मक संमक से तात्पर्य ऐसे समंको से है जिनसे अर्थपूर्ण गणितीय संक्रियाएँ करना सम्भव हो। अर्थात जिन पर जोड, घटाना गुणा तथा भाग जैसी संक्रियाएँ करके अर्थपूर्ण निष्कर्ष प्राप्त हों। जैसे– ऊपर के उदाहरण में पारिवारिक आय एवं वजन जैसी अभिलक्षणों के समंक।

4.4.2 गैर संख्यात्मक समंक : संख्यात्मक संमको के विपरित गैर संख्यात्मक समंक ऐसे समक होते है जिनके ऊपर सर्वप्रथम तो गणितीय संक्रियाएं सम्भव ही नहीं होगी जैसे कि ऊपर के उदाहरण में नाम और ब्लड ग्रुप जैसे अभिलक्षणों के समंक। इन समंकों द्वारा प्रतिदर्श (सर्वेक्षण की जा रही विषय वस्तु) के लक्षण, पहचान तथा वर्ग इत्यादि का ही पता लगता है। इसके अलावा यदि ऐसे समंकों में गणितीय संक्रियाएँ सम्भव हों भी तो गणितीय संक्रियाओं द्वारा प्राप्त निष्कर्ष अर्थहीन होते है। जैसे ऊपर के उदाहरण में लिए गये कक्षा एवं पहचान पत्र संख्या जैसे अभिलक्षण।
देखने में तो ये समंक संख्या को ही प्रदर्शित करते हैं परन्तु वास्तव में यह भी पहचान बताने वाले लेबल है तथा इनको जोड़ने या औसत निकालने से किसी भी प्रकार का औचित्यपूर्ण निष्कर्ष नहीं निकलेगा। समंको का एक और वर्गीकरण उनकी मापनीयता के पैमाने के आधार पर किया जाता हैं जिसके अनुसार समंक निम्न चार वर्गो के हो सकते है।

बोध प्रश्न 1 निम्नलिखित में से कौन सा वर्गात्मक समंक/डेटा हैं?

i. आपकी शिक्षा का उच्चतम स्तर
ii. सेवा अनुभव के लिए ग्राहक रेटिंग जैसे खराब, औसत, अच्छा।

iii. आपकी आयु जैसे 18 वर्ष से कम, 19 से 30 वर्ष के बीच आदि।

iv. समय

v. दाब

4.8 मापनीयता के पैमाने के आधार समंक का वर्गीकरण

4.8.1 **सांकेतिक पैमाने पर मापनीय समंक (Nominal Scale)** :– जैसा कि पहले भी स्पष्ट किया जा चुका है, कछ समंक केवल पहचान या वर्ग जैसे अभिलक्षण को ही स्पष्ट कर सकते है जैसे नाम लिंग इत्यादि। अगर इन अभिलक्षणों को संख्या के रूप में रूपान्तरित भी कर दिया जाये तो भी इन संख्याओं को केवल पहचान या संकेत के रूप में ही देखना चाहिए तथा उन पर किसी भी प्रकार की गणितीय संक्रिया नहीं करनी चाहिए। जैसे ऊपर लिये गये उदाहरण में लिंग अभिलक्षण के अर्न्तगत पुरूष को 0 तथा महिला को 1 से प्रदर्शित कर दिया जाये तो इन संख्याओं की मापनीयता सांकेतिक ही रहेगी अर्थात यह संख्याएँ किसी भी प्रकार की तुलना अथवा अनुपात को नहीं दर्शाते हैं वरन ये संख्याएँ मात्र एक संकेत अथवा पहचान ही प्रदर्शित कर रहे हैं। हम चाहें तो पुरूष को 1 से तथा महिला को 0 से यह किसी भी अन्य संख्या से प्रदर्शित कर दें इससे महिला या पुरूष के बड़े या छोटे होने का निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता।

4.5.2 **क्रमागत पैमाने पर मापनीय समक (Ordinal Scale)** :– जब कोई अभिलक्षण विभिन्न ऐसे वर्गो को प्रदर्षित करता हो जिनमें एक क्रम महत्वपूर्ण हो तब ऐसे समंको को क्रमागत (Ordinal Scale) पैमाने पर मापनीय समंक कहते है तथा ऐसे अभिलक्षण क्रमागत चर कहलाते हैं। उदाहरण के लिए हम अपने प्रतिदर्श (Sample) की आर्थिक हैसियत जानना चाहते है और उत्तर के रूप में में हमें अति गरीब, गरीब, सामान्य, अमीर तथा अत्यधिक अमीर के उदाहरण मिलते है। यहाँ निश्चित रूप से अत्यन्त गरीब से अत्यधिक अमीर के बीच एक क्रम है। अगर इन समंकों को संख्या में रूपान्तरित करें तो ये संख्यायें भी इसी क्रम में छोटी से बड़ी होनी चाहिए। जैसे–

अत्यन्त गरीब	1
गरीब	2
सामान्य	3
अमीर	4
अत्यधिक अमीर	5

निश्चय ही यहाँ विभिन्न वर्गो के बीच तुलना की जा सकती है तथा यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि 1 सबसे निम्न है तथा 5 सबसे श्रेष्ठ है।

क्रमागत पैमाने पर मापनीय चर के समंको से इससे अधिक गणितीय निष्कर्ष नहीं निकाले जाने चाहिए। अर्थात हम यह नहीं कह सकते कि गरीब से अत्यंत गरीब का अन्तर उतना ही है जितना समान्य से गरीब का या अमीर से सामान्य का या फिर अत्यधिक अमीर से अमीर का। अर्थात इन समंकों में जोड़ धटाना जैसी आर्थिक संक्रियाएँ नहीं की जानी चाहिए।

4.5.3 **अन्तराल पैमाने पर मापनीय समंक (Interval Scale)** :– जब इस प्रकार हो कि उनके द्वारा प्रदर्शित अभिलक्षण किसी इकाई में मापे गये हो तथा उनके बीच का अन्तर अर्थपूर्ण हो तो ऐसे चर द्वारा प्रदर्शित समंक अन्तराल पैमाने पर मापनीय कहलाते हैं। जैसे तापमान को डिग्री सेल्शियस या डिग्री फारनेहाइट मे मापा जाये तो दो ताममानों के बीच का अन्तर भी स्पष्ट अर्थ देता है। जैसे 30^0C से 20^0C के बीच का अन्तर 10^0C का है जो कि 40^0C से 30^0C के बीच के अन्तर जितना ही है। हालांकि अन्तराल मापनीय समंक में आनुपातिक तुलना नहीं की जानी चाहिए। जैसे कि हम यह नही कह सकते कि 20^0 सेल्शियस से 40^0 डिग्री सेल्शियस

दुगना गर्म है। अन्तराल समंक में शून्य का मान मनमाना (Arbitrary) होता है। जैसे शून्य डिग्री सेल्शियस तापमान का मतलब ताप का न होना नहीं कहा जा सकता।

4.5.4 **आनुपातिक पैमाने पर मापनीय संमक (Ratio Scale)** :– जब चर द्वारा प्रदर्शित अभिलक्षण ऐसे हों जिनके लिए शून्य का मान वास्ततिक तथा अर्थपूर्ण हो तो ऐसे समंको में तुलना एवं अनुपात ज्ञात करना सम्भव भी होता है एवं अर्थपूर्ण भी। जैसे आय, उम्र, वजन, लम्बाई इत्यादि।

4.6 सतत एवं असतत समंक

संख्यात्मक समंक सतत एवं असतत प्रकार के हो सकते है। असतत एक निश्चित मान ग्रहण कर सकते है जैसे– कक्षा मे बच्चों की संख्या, यह सिर्फ पूर्णांक मान ही हो सकते है। जबकि सतत चर एक निश्चित दायरे में कोई भी मान ग्रहण कर सकते हैं। जैसे– वजन, तापमान।

बोध प्रश्न 2 निम्नलिखित में से कौन से असतत डेटा हैं?

i. आपके कितने भाई–बहन हैं?
ii. वजन
iii. आपके इलाके में घरों की संख्या
iv. प्रति घंटे दुर्घटनाएँ
v. दबाव

बोध प्रश्न 3 निम्नलिखित में से कौन सा सतत डेटा है?

i. एक उपकरण की दो क्रमिक विफलताओं के बीच का समय
ii. आयतन
iii. लिंग
iv. आपका पसंदीदा व्यंजन
v. घनत्व

4.7 समंको का प्रस्तुतिकरण

समंको का विश्लेषण करने हेतु समंको को विश्लेषण योग्य प्रारूप में प्रस्तुत करना आवश्यक है। समंको का प्रस्तुतिकरण दो प्रारूपों में हो सकता है।

1. सारणी के रूप में
2. ग्राफ के रूप में

समक प्राप्त करने के दो स्रोत होते हैं: प्राथमिक एवं द्वितीयक। प्राथमिक स्रोत से तात्पर्य है स्वंय द्वारा Questimaire बना कर समंक एकत्रित करना। जबकि द्वितीयक स्रोत के अर्न्तगत समंक पूर्व में ही किसी संस्थान अथवा एजेंसी द्वारा एकत्रित करके प्रकाशित किये गये होते है। द्वितीयक स्रोत के समंक चूंकि पूर्व में प्रकाशित हो चुके होते है अतः प्रायः यह किसी सारणी के प्रारूप में अथवा ग्राफ के रूप में ही रहते है। इसके विपरीत जब प्राथमिक रूप से समंक एकत्रित किये जाते है, तो इनको विश्लेषण एवं निष्कर्षों हेतु सारणी या ग्राफ के रूप में प्रस्तुत किये बगैर ऐसा नहीं किया जा सकता। इस प्रकार की सारणी में प्रत्येक पंक्ति किसी प्रतिदर्श की एक इकाई के सम्बन्ध में समस्त अभिलक्षणों को दर्शाती है।

4.7.1 **सारणी के रूप में समंको का प्रस्तुतिकरण** :– सारणी से तात्पर्य है स्तम्भ तथा पंक्तियों के रूप में विभिन्न अभिलक्षणों (चर तथा अचर) एवं उनके मानों को प्रस्तुत किया जाना जैसा कि ऊपर

लिये गये उदाहरण में भी किया गया है। प्रायः प्रत्येक अभिलक्षणों को एक स्तम्भ के रूप में तथा उस अभिलक्षण के विभिन्न मानों को पंक्तियों के रूप में लिखते है।

जैसे

नाम
राम
सुरेश
महेश
श्याम

या

नाम	**वजन**	**ब्लड ग्रुप**
राम	45	O^+
सुरेश	48	B^+
महेश	39	AB^+
श्याम	42	A^-

उपरोक्त सभी सारणी में अभिलक्षणों नाम, वजन, ब्लडग्रुप को स्तम्भ के रूप में तथा इनके विभिन्न मानों को पंक्तियों के रूप में दर्शाया गया है। हालंकि हम इसके विपरीत भी कर सकते है अर्थात अभिलक्षणों को पंक्ति के रूप में तथा इसके मानों को स्तम्भ के रूप में ।

जैसे –

नाम	राम	सुरेश	महेश	श्याम

या

वजन	45	48	39	42

या

नाम	राम	सुरेश	महेश	श्याम
वजन	45	48	39	42
ब्लडग्रुप	O^+	B^+	AB^+	A^-

4.7.1.1 आवृत्ति वितरण :–

किसी अभिलक्षण के विभिन्न मानों की बार–बार होने वाली प्राप्तियों की गणना को ही उस चर या अभिलक्षण की बारम्बारता या आवृत्ति वितरण कहते हैं।

उदाहरण के लिए यदि एक कक्षा की 20 छात्राओं के रंग पसन्दगी का समंक निम्न हो–

क्र0सं0	नाम	पसन्दीदा रंग
1	सौम्या	लाल
2	केतकी	पीला
3	पंकजा	लाल
4	प्रिया	बैगंनी
5	श्रेष्ठा	गुलाबी
6	दिव्या	गुलाबी
7	कंचन	लाल
8	काम्या	बैंगनी
9	नन्दीनी	नीला
10	मधु	गुलाबी
11	सुधा	पीला

12	काजल	गुलाबी
13	संगीता	लाल
14	हर्षिता	गुलाबी
15	मान्या	बैंगनी
16	कौषिकी	गुलाबी
17	मधुलिका	बैंगनी
18	प्रियंका	लाल
19	अंशिका	गुलाबी
20	अपर्णा	गुलाबी

उपरोक्त उदाहरण में कई छात्राओं की रंग पसन्दगी एक समान है, अतः यदि रंग पसन्दगी का आवृत्ति वितरण बनायें तो भिन्न–भिन्न रंगों की जितनी बार पुनरावृति हुई है उसे गिन कर उस रंग के सामने लिख दिया जायेगा। प्रत्येक रंग की पुनरावृति की गणना हेतु हम आवृत्ति में एक खड़ी लाइन (tally marks) खीचंते जाते हैं तथा 5 वीं गिनती पर चार खड़ी लाइनों को तिरछी लाइन से काट देते है। इस आवृत्ति की गणना में गलती की सम्भावना नही रहती है।

रंग	आवृत्ति (tally marks)	आवृत्ति
लाल	𝍸	5
पीला	𝍷𝍷	2
बैंगनी	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
गुलाबी	𝍸 𝍷𝍷𝍷	8
नीला	𝍷	1

संख्यात्मक समंको का आवृत्ति वितरण का उदाहरण :
मान लिजिए कक्षा के 20 छात्रों का वजन का आंकडा निम्नवत है–

छात्रों का वजन :
41, 40, 45, 41, 40, 40, 41
45, 39, 43, 41, 40, 43, 41
45, 41, 43, 39, 37, 41

उपरोक्त उदाहरण के लिए समंको का आवृत्ति वितरणः

छात्रों का वजन	आवृत्ति (tally marks)	आवृत्ति
41	𝍸 𝍷𝍷	7
40	𝍷𝍷𝍷𝍷	4
45	𝍷𝍷𝍷	3
39	𝍷𝍷	2
43	𝍷𝍷𝍷	3
37	𝍷	1

4.7.1.2 वर्ग अन्तरालः जब समंको की संख्या (Size of data) अत्यधिक हो तो व्यक्तिगत समंक का आवृत्ति वितरण भी न करके अंक वर्ग अन्तरालों का आवृत्ति वितरण बनाना चाहिए इससे समंको का प्रस्तुतीकरण संक्षिप्त तथा अर्थपूर्ण होता है।

उदाहरण : किसी कक्षा के 60 छात्रों के अर्थशास्त्र विषय की परीक्षा के प्राप्तांक निम्नवत है–

प्राप्तांक : 67, 45, 54, 50, 77, 56, 55

44,	43,	58,	57,	56,	43,	78
66,	60,	65,	53,	55,	49,	72
57,	44,	58,	63,	60,	70,	51
59,	50,	72,	61,	48,	55,	42
51,	43,	47,	67,	59,	48,	44
52,	58,	47,	48,	70,	61,	69
56,	54,	52,	57,	47,	51,	58
40,	48,	49,	52			

उपरोक्त समंको का आवृत्ति वितरण यदि व्यक्तिगत समंक के लिए किया जाये तो ऐसे आवृत्ति वितरण न तो संक्षिप्त होगा न ही कार्यक्षम। अतः बेहतर होगा कि समंको को विभिन्न वर्ग में विभाजित करके उन वर्गों का आवृत्ति वितरण प्रस्तुत किया जाये।

4.7.1.3 वर्गों की संख्या का निर्धारण : किसी आवृत्ति वितरण में 5 से 20 के बीच वर्ग होने चाहिए। वर्गों की वास्तविक संख्या समंको की संख्या पर निर्भर होनी चाहिए। जैसे– ऊपर लिये गये संमक श्रेणी का आकार 60 है, अगर इस समंक श्रेणी को 20 वर्गो में बांटे तो कई ऐसे वर्ग होंगे जिनकी आवृति या तो शून्य होगी या बहुत कम होगी। इसी प्रकार किसी बड़े आकार की समंक श्रेणी में यदि वर्गो की संख्या कम होगी तो वर्गो की आवृतियाँ इतनी अधिक होगी कि समंको का वितरण स्पष्ट रूप से रेखांकित नही हो पायेगा।

4.7.1.4 वर्ग अन्तराल का निर्धारण : इसका निर्धारण वर्गो की संख्या तथा समंको के निम्नतम एवं उच्चतम मान से होता है।

अब हम उपरोक्त दिये गये उदाहरण का वर्ग–आवृत्ति वितरण बनातें है।

यहाँ कुल समंक $(N) = 60$ है।

निम्नतम समंक का मान $= 40$

उच्चतम समंक का मान $= 78$

उच्चतम तथा निम्नतम समंक का अन्तर $= 78 - 40 = 38$

यदि हम कुल 6 वर्ग बनाना चाहें तो $\frac{38}{6} = 6.5$ या 7 का वर्गान्तर ले सकते है।

यदि हम कुल 8 वर्ग बनाना चाहें तो $\frac{38}{8} = 4.75$ या 5 के वर्गान्तर ले सकते है।

5 के वर्गान्तर से कुल 8 वर्ग–अन्तरालों के वर्ग बनायेंगे तथा जो इस संख्या किसी वर्ग के निचले मान के बराबर तथा उच्च मान से छोटी हो उसे उस वर्ग में रखेंगे। इस प्रकार के वर्गो को **अपवर्जी वर्ग** कहते है, क्योंकि इनमें वर्ग के उच्च मान के बराबर वाला समंक शामिल नही किया जाता है।

वर्ग–अन्तराल	मिलान चिन्ह (tally marks)	आवृत्ति
40–45	~~||||~~ |||	8
45–50	~~||||~~ ~~||||~~	10
50–55	~~||||~~ ~~||||~~ |	11
55–60	~~||||~~ ~~||||~~ ~~||||~~	15
60–65	~~||||~~	5
65–70	~~||||~~	5
70–75	||||	4

75–80	||	2

इस प्रकार उपरोक्त उदाहरण के लिए समंको का आवृत्ति वितरण

वर्ग–अन्तराल	आवृत्ति
40–45	8
45–50	10
50–55	11
55–60	15
60–65	5
65–70	5
70–75	4
75–80	2

इस आवृत्ति वितरण से यह स्पष्ट होता है कि आधे से अधिक छात्रों का 45 से 60 के बीच नम्बर प्राप्त हुए हैं इनमें भी 55 से 60 के बीच सर्वाधिक 15 बच्चे हैं। उच्चतम वर्ग 75–80 में सिर्फ 2 ही छात्र है।

ध्यान रहे कि अपवर्जी वर्गों में किसी वर्ग की उच्च सीमा अगले वर्ग की निम्न सीमा के बराबर होता है। वर्गान्तर बनाने के लिए एक अन्य विधि समावेशी विधि का भी प्रयोग किया जा सकता है। समावेशी वर्गो में एक वर्ग की उच्च सीमा अगले वर्ग की निम्न सीमा के बराबर नहीं होगी। तथा किसी वर्ग में सिर्फ उन्ही समंको की गिनती होती है जो उस वर्ग के निम्न तथा उच्च सीमाओं के बराबर या बीच में हो।

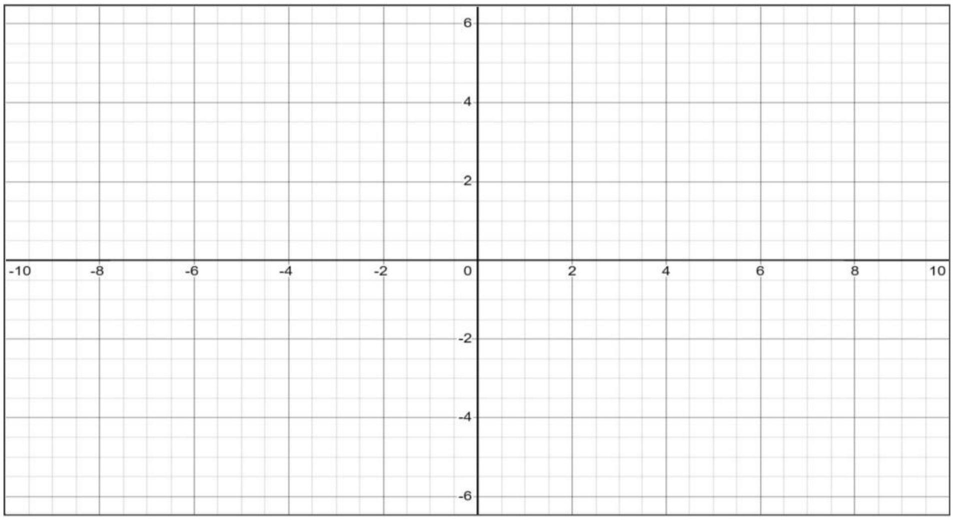
उपरोक्त उदाहरण के समंको को ही समावेशी वर्ग–अन्तराल निम्नवत होगा–

वर्ग–अन्तराल	मिलान चिन्ह (tally marks)	आवृत्ति
40–44	$\cancel{\|\|\|\|}$ |||	8
45–49	$\cancel{\|\|\|\|}$ $\cancel{\|\|\|\|}$	10
50–54	$\cancel{\|\|\|\|}$ $\cancel{\|\|\|\|}$ |	11
55–59	$\cancel{\|\|\|\|}$ $\cancel{\|\|\|\|}$ $\cancel{\|\|\|\|}$	15
60–64	$\cancel{\|\|\|\|}$	5
65–69	$\cancel{\|\|\|\|}$	5
70–74	||||	4
75–79	||	2

जब समंक असतत (Discrete) प्रकार के हो तो **समावेशी वर्ग–अन्तराल** का निर्माण किया जाता हैं।

4.7.2 **ग्राफ के रूप में समंको का प्रस्तुतिकरण** :–एक द्वि–आयामी पटल पर समंको का निरूपण ही ग्राफ कहलाता है। यह द्वि–आयामी पटल प्रायः एक ग्राफ पेपर होता है एक दूसरे को 90^0 के कोंण पर काटती हुई क्षैतिज (xअक्ष) एवं उदग्र (y अक्ष) रेखाओं से विभिन्न वर्ग निर्मित होते हैं। ग्राफ बनाने हेतु ऊर्ध्व तथा क्षैतिज रेखाओं के कटान बिन्दु को सन्दर्भ बिन्दु मानते हुए उसे (0,0) निर्देशांक मान लेते हैं, यह सन्दर्भ बिन्दु एक न्यूट्रल बिन्दु होता है जिसके दायीं ओर क्षैतिज रेखा (x-अक्ष) पर समान दूरी पर बढ़ने पर x-अक्ष पर लिये गये अभिलक्षण की एक मानक इकाई से वृद्धि होती दर्शायी जाती है तथा बायीं ओर जाने पर इस अभिलक्षण की एक मानक इकाई से ह्रास दर्शाते हैं। इसी प्रकार सन्दर्भ बिन्दु (0,0) निर्देशांक से ऊर्ध्व दिशा में जाने पर ऊर्ध्व अक्ष पर लिये गये अभिलक्षण के मान में एक मानक इकाई से वृद्धि होती है तथा

सन्दर्भ बिन्दु के नीचे ऊर्ध्व दिशा में जाने पर अभिलक्षण के मान में लिये गये मानक इकाई से एक इकाई कमी दर्शाते हैं।

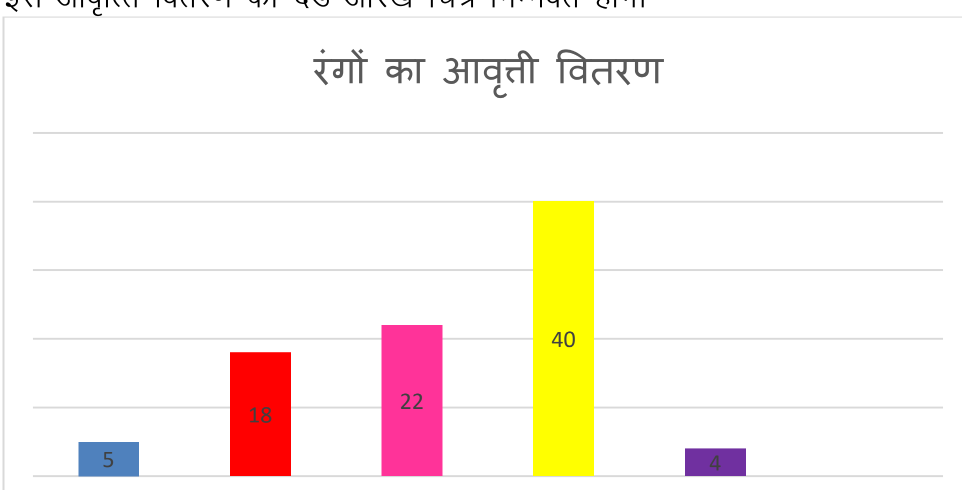


समंको के विभिन्न प्रकारों जैसे संख्यात्मक, गैर संख्यात्मक एवं सतत, असतत तथा विभिन्न अभिलक्षणों के मध्य सम्बन्धों के आधार पर विभिन्न प्रकार के ग्राफ (रेखाचित्र) बनते हैं। कुछ महत्वपूर्ण एवं उपयोगी रेखाचित्रों का वर्णन यहाँ किया गया है।

4.7.2.1 दंड आरेख (Bar Chart) : जब हम किसी एक गैर–संख्यात्मक अभिलक्षण (चर) को लेते हैं तो इसके लिए दंड आरेख खीचना सर्वथा उपयुक्त होता है। यदि किसी कक्षा की 60 छात्राओं की रंग पसन्दगी के समंको का आवृत्ति वितरण निम्नवत हो

रंग	आवृत्ति
नीला	5
लाल	18
गुलाबी	22
पीला	40
बैंगनी	4

इस आवृत्ति वितरण का दंड आरेख चित्र निम्नवत होगा



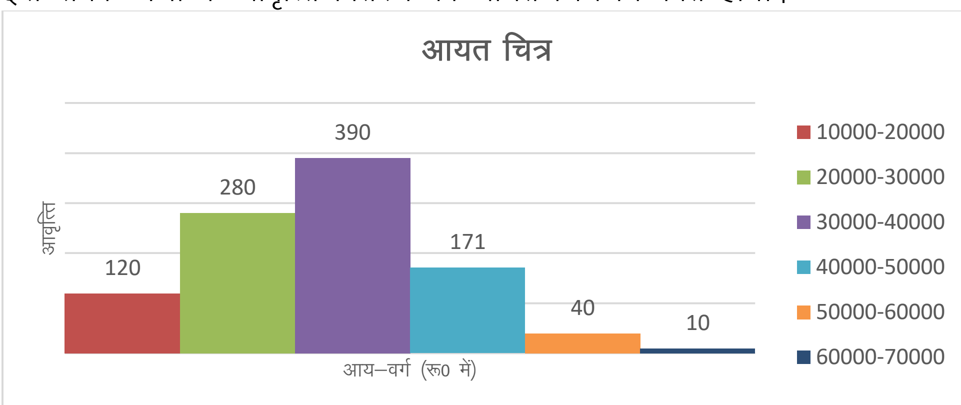
इसमें प्रत्येक दंड की चौडाई समान होनी चाहिए।

4.7.2.2 आयत चित्र : सतत समंक श्रेणी के आवृत्ति वितरण का रेखाचित्र बनाने के लिए आयत चित्रों का चयन किया जाता है। इसमें आवृत्ति वितरणों को आयताकार दण्डों की सतत श्रृंखला होती है।

उदाहरण : यदि किसी कॉलेज के 100 छात्रों के पारिवारिक आय स्तर का समंक निम्नवत् हो–

आय–वर्ग (रू0 में)	आवृत्ति
0–10000	70
10000–20000	120
20000–30000	280
30000–40000	390
40000–50000	171
50000–60000	40
60000–70000	10

इस समंक श्रेणी के आवृत्ति वितरण का आयत चित्र निम्नवत होगा।



आयत चित्र के आयत की चौड़ाई वर्गो के अन्तराल के अनुपात में होनी चाहिए।

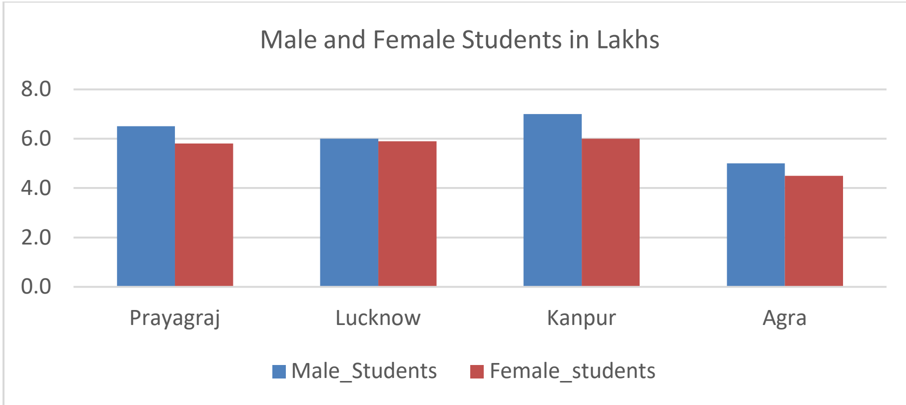
4.7.2.3 बहु–दण्ड चित्र : एक से अधिक अभिलक्षणों को प्रकट करने वाले असतत चर के समंको का आरेख बनाना हो तो बहुदण्ड चित्र इसमें सहायक होंगे।

उदाहरणः यदि विभिन्न जिले के महाविद्यालयों में बालक बालिकाओं की निम्न संख्या को दर्शाना हो

छात्र छात्राओं की संख्या लाख में

जिले का नाम	छात्र	छात्राएँ
प्रयागराज	6.5	5.8
लखनऊ	6.0	5.9
कानपुर	7.0	6.0
आगरा	5.0	4.5

तो इस समंक श्रेणी का बहु–दण्ड चित्र निम्नवत होगा।

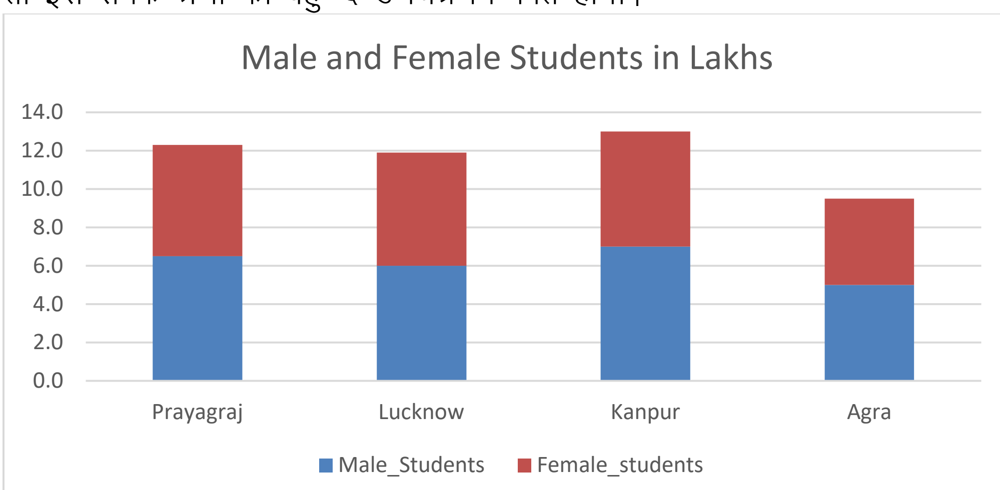


बहुदण्ड चित्र के विकल्प के रूप में एक से अधिक चरों का ही रेखाचित्र संघटक भाग दण्ड चित्र के रूप में निर्मित होता है।

4.7.2.4 संधटक भाग दण्ड चित्र : संधटक भाग दण्ड चित्र में एक ही दंड में एक समान मापनीय एक से अधिक चरों को दर्शाया जाता है तथा प्रत्येक दंड की ऊंचाई सभी चरों के योगफल की माप को दर्शाता है। पिछले उदाहरण (बहुदण्ड चित्र के उदाहरण) को ही यदि संधटक–भाग दण्ड चित्र के रूप में दर्शायें

जिले का नाम	छात्र	छात्राएँ
प्रयागराज	6.5	5.8
लखनऊ	6.0	5.9
कानपुर	7.0	6.0
आगरा	5.0	4.5

तो इस समंक श्रेणी का बहु–दण्ड चित्र निम्नवत होगा।

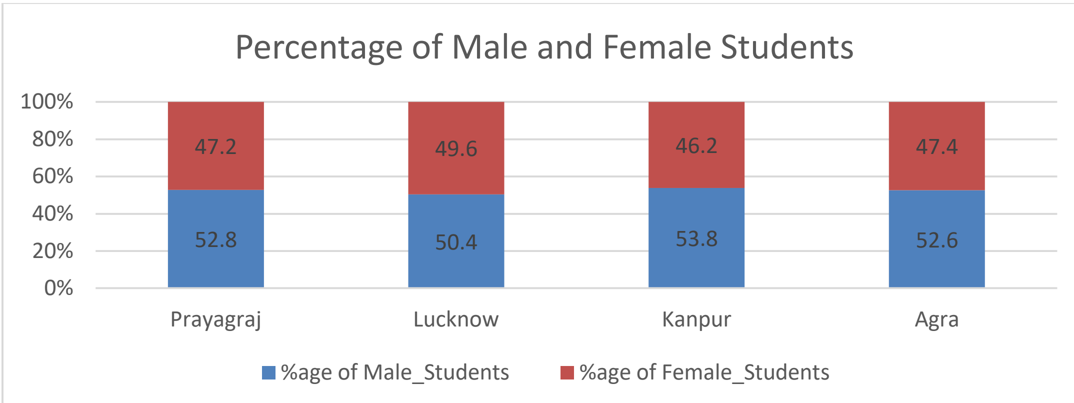


उपरोक्त आरेख को प्रतिशत के रूप में भी प्रदर्षित कर सकते हैं, जिसे प्रतिशत संधटक भाग दण्ड चित्र कहते हैं। इसमें कुल को 100% के समान मान कर प्रत्येक चर के हिस्से के इसी अनुपात (%) के रूप में प्रदर्शित करते हैं।

उदाहरण :

जिले का नाम	छात्र	छात्रा	कुल विद्यार्थी	छात्र प्रतिशत	छात्रा प्रतिशत	कुल %
प्रयागराज	6.5	5.8	12.3	52.84	47.16	100
लखनऊ	6.0	5.9	11.9	50.42	49.58	100
कानपुर	7.0	6.0	13.0	53.84	46.14	100
आगरा	5.0	4.5	9.5	52.63	47.37	100

इस समंक श्रेणी का प्रतिशत संधटक भाग दण्ड चित्र निम्नवत होगा।



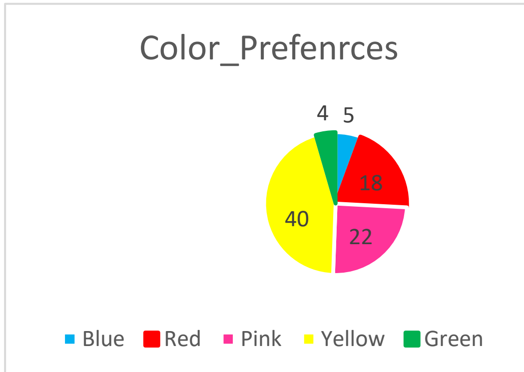
4.7.2.5 वृत चित्र : जब किसी अभिलक्षण के विभिन्न अवयवों को दर्शाना हो तो पाई/वृत चित्र उपयोगी होते है। इसके अतिरिक्त गुणात्मक चरों के सापेक्षिक आवृत्तियों (Relative frquency) का भी पाई चित्रों द्वारा अर्थपूर्ण प्रदर्शन कर सकते है। पाई चित्र वृताकार होते है अतः किसी अभिलक्षण के अवयवों के प्रतिशत को 360^0 अंश के अनुपात में बदलकर उतने ही अंश के हिस्से द्वारा अभिलक्षण के अवयव को दर्शाते हैं।

रंग पसन्दगी	आवृति	सापेक्षिक आवृति	अंश में हिस्सा
नीला	5	$\frac{5}{60}$	$\frac{5}{60} \times 360 = 30$
लाल	18	$\frac{18}{60}$	$\frac{18}{60} \times 360 = 108$
गुलाबी	22	$\frac{22}{60}$	$\frac{22}{60} \times 360 = 132$
पीला	10	$\frac{10}{60}$	$\frac{10}{60} \times 360 = 60$
बैंगनी	4	$\frac{4}{60}$	$\frac{4}{60} \times 360 = 24$
हरा	1	$\frac{1}{60}$	$\frac{1}{60} \times 360 = 6$

इस समंक श्रेणी का वृत चित्र निम्नवत होगा।

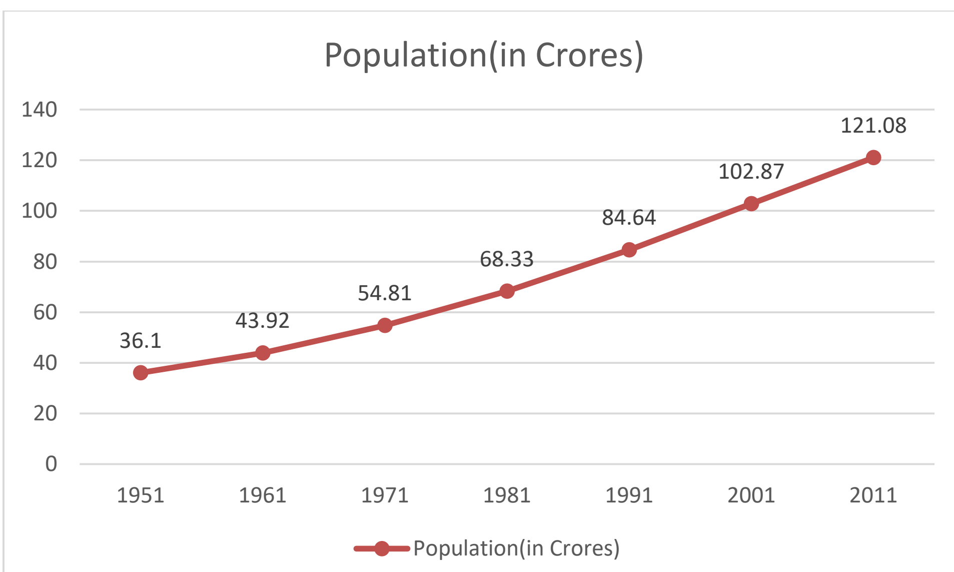
4.7.2.6 रेखा चित्र : जब समय के सापेक्ष (काल श्रेणी) चर में होने वाले परिवर्तन दिखाने होते है तो रेखाचित्र उपयोगी होते है।

उदाहरण :



जनगणना वर्ष	जनसंख्या (करोड़ में)
1951	36.10
1961	43.92
1971	54.81
1981	68.33
1991	84.64
2001	102.87
2011	121.08

इस समंक श्रेणी का रेखा चित्र निम्नवत होगा।



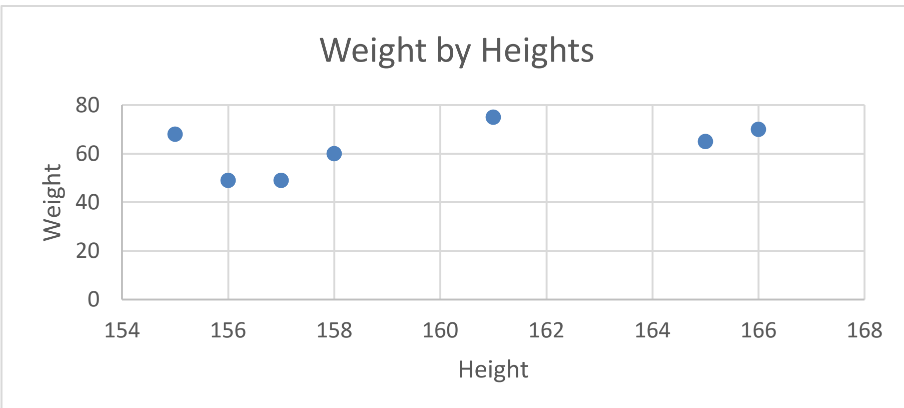
4.7.2.7 स्कैटर डाइग्राम: जब दो चरों के बीच कारण और परिणाम के संबंध हों तो इस संबंध को दर्शाने के लिए स्कैटर डाइग्राम उपयोगी होते है।

स्कैटर डाई ग्राम के X - अक्ष पर परिणाम दर्शाने वाले चर की माप दर्शाते हैं।

उदारहण :

ऊँचाई	वजन
157	49
161	75
165	65
158	60
156	49
166	70
155	68

इस समंक श्रेणी का स्कैटर डाइग्राम/बिन्दु विखराव चित्र निम्नवत होगा।



बोध प्रश्न 4 लाइन चार्ट का उपयोग किस प्रकार के डेटा के लिए किया जाता है?

1. कुल योग के अनुपात में एक आइटम दिखाने के लिए
2. एकाधिक आइटम घटक दिखाने के लिए
3. वस्तुओं के बीच तुलना
4. समय के साथ रुझान
5. वस्तुओं की आवृत्ति

4.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. वर्गात्मक डेटा है –
   - i. आपकी शिक्षा का उच्चतम स्तर
   - ii. सेवा अनुभव के लिए ग्राहक रेटिंग जैसे खराब, औसत, अच्छा।
   - iii. आपकी आयु जैसे 18 वर्ष से कम, 19 से 30 वर्ष के बीच आदि।
2. असतत डेटा हैं–
   - *i.* आपके कितने भाई–बहन हैं?
   - *iii.* आपके इलाके में घरों की संख्या
   - *iv.* प्रति घंटे दुर्घटनाएं
3. सतत डेटा है–

$i.$ आयतन

$v.$ घनत्व

4. लाइन चार्ट का उपयोग किया जाता है–

$iv.$ समय के साथ रुझान दिखाने के लिए

4.9 अभ्यास प्रश्न

1. निम्न समंक श्रेणी के लिए रेखीय रेखा चित्र बनाइये –

वर्ष	भारत में निर्धनता (प्रतिशत में)
2005-06	55.34
2013-14	29.17
2015-16	24.85
2019-21	14.96
2022-23	11.28

2. वर्ष 2017 में भारत के सकल घरेलू उत्पाद में कृषि का योगदान 15.4 प्रतिशत, उद्योगों का योगदान 23 प्रतिशत तथा सेवा क्षेत्र का योगदान 61.6 प्रतिशत था। एक पाई चार्ट के माध्यम से इस जानकारी को प्रदर्शित कीजिए।

4.10 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography@Usefull Books)

Elhance,D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Greenlaw, Steven A (2005): Doing Economics: A Guide to Understanding and Carrying Out Economic Research.

Gupta,S.P (2011) : Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

Hazarika,Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Kothari, C.R: Research Methodology: Methods & Techniques. New Age International Publishers ISBN (13) : 978-81-224-2488-1

Leighton,Thomas (2011) : Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.

Lind, Wathen &Marchal (2013): Basic Statistics for Business & Economics, McGraw Hill Education.

Newbold, Paul (2008) : Statistics for Business and Economics , Pearson Education.

Richard ,I. Levin. H. Siddiqui Masood S. Rubin David Sanjay Rastogi (2017): Statistics for Management. Pearson. ISBN-10 8184957491

Sharma,J.K(2011) : Business Statistics “Pearson Education.

इकाई–5

केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें–माध्य, माध्यिका, बहुलक

(Mesures of Central Tendency: Mean, Mediam and mode)

इकाई संरचना **(Unit lan)**

5.1 उद्देश्य **(Objectives)**

5.2 प्रस्तावना **(Introduction)**

5.3 केन्द्रीय प्रवृति की मापें–परिचय **(Measures of Central Tendency: Introduction)**

5.4 माध्य **(Mean)**

  5.4.1 समांन्तर माध्य **(Arithmetic mean)**

  5.4.1.1 आवृत्ति वितरण का समान्तर माध्य

  5.4.1.2 समानान्तर माध्य ज्ञात करनें की वैकल्पिक विधि

  5.4.2 गुणोत्तर माध्य **(Geometric mean)**

  5.4.2.1 आवृत्ति वितरण का गुणोत्तर माध्यः

  5.4.3 हरात्मक माध्य **(Harmonic Mean)**

  5.4.3.1 आवृत्ति वितरण का हरात्मक माध्य

5.5 समान्तर माध्य गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य की बीच संबंध **(relationship between Arithmetic Mean, Geometric Mean and Harmonic Mean)**

5.6 माध्यिका (**Median**)

  5.6.1 आवृत्ति वितरण की माध्यिका

5.7 बहुलक (**Mode**)

  5.7.1 समूहन विधि

5.8. बोध प्रश्नों के उत्तर **(Answers to the Basic Questions)**

5.9 अभ्यास प्रश्न **(Questions for Exercise)**

5.10 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें **(Bibliography/Usefull Books)**

5.1 उद्देश्य **(Objectives)**

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी –

1. केन्द्रीय प्रवृत्ति की अवधारणा से परिचित हो जाएंगे
2. केन्द्रीय प्रवृत्ति की विभिन्न मापों की गणना की विधियों से परिचित हो जाएंगे

5.2 प्रस्तावना (Introduction)

किसी दी हुई समंक श्रेणी से कुछ तथ्यात्मक निष्कर्ष प्राप्त करना अत्यंत उपयोगी होता है। जैसे यदि हम किसी कक्षा के 50 या 60 विद्यार्थियों के वजन का आंकड़ा इकठ्ठा करते हैं तो उपयोगिता की दृष्टि से इन आंकड़ों का औसत एक अकेली ऐसी संख्या होगी जो पूरी कक्षा के विद्यार्थियों के पोषण की अवस्था को व्यक्त कर देगी। इस प्रकार हम बार – बार सभी विद्यार्थियों के वजन के आंकड़ों को ना इंगित करके सिर्फ उसके औसत के आधार पर ही पूरी कक्षा की पोषणीयता पर विचार करने में सक्षम हो जाते हैं। अतः यह कहा जा सकता है कि औसत मान पूरी कक्षा का प्रतिनिधि मान है। किसी भी समंक श्रेणी के ऐसे ही प्रतिनिधि मान को केन्द्रीय प्रवृत्ति भी कहा जाता है। इस इकाई में हम इन्ही केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों की तमाम विधियों का अध्ययन करेंगे।

5.3 केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें– परिचय

संख्यात्मक समंको द्वारा कुछ विवेचनात्मक सांख्यकीय (Descriptive statistics) तथ्यों का अध्ययन सम्भव होता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें भी ऐसी ही विवेचनात्मक सांख्यकीय है। केन्द्रीय प्रवृत्ति से तात्पर्य समंक के प्रतिनिधि मान से है। वस्तुतः यह मान समंको के बीचो–बीच होता है। मुख्य केन्द्रीय प्रवृत्ति के मान हैं– माध्य माध्यिका एवं बहुलक इनकों ज्ञात करने की विधि को क्रमवार जानेंगे।

5.4 माध्य (Mean)

माध्य तीन प्रकार के हो सकते है–सामान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य।

5.4.1 समानान्तर माध्य : समानान्तर माध्य समंक के मध्य का ऐसा बिन्दु होता है जिससे अन्य सभी बिन्दुओं से दूरी का बीजगणितीय योग शून्य होता है। वस्तुतः समानान्तर माध्य और कुछ नहीं बस समंको का औसत होता है जिसे समंको के योगफल में समंको की संख्या से भाग देकर ज्ञात करते है।

समानान्तर माध्य = समंको का योग्य ÷ समंको की संख्या

यदि किसी अभिलक्षण (चर) X के विभिन्न मान $X_1, X_2 \dots\dots\dots\dots, X_N$ हो तो सामान्तर माध्य $\bar{X}$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_N}{N}$$

या

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N}$$

उदाहरण : 5 समंको 10, 15, 20, 25, 30 का सामानान्तर माध्य

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5}{5}$$

$$= \frac{10+15+20+25+30}{5}$$

$$= \frac{100}{5} = 20$$

5.4.1.1 आवृत्ति वितरण का समान्तर माध्य :

एक आवृति वितरण जिसके समंक क्रमशः $X_1, X_2 \dots\dots\dots X_n$ तथा आवृत्तियाँ $f_1, f_2 \dots\dots, f_n$ हो तो इस आवृति वितरण का समानान्तर माध्य

$$\bar{X} = \frac{f_1X_1 + f_2X_2 + \cdots + f_n.X_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

या

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$$

चूंकि आवृतियों का योग कुल पदों की संख्या N के बराबर होता है अतः

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{N}$

उदाहरणः यदि किसी कक्षा में विद्यार्थियों के वजन का आवृत्ति वितरण निम्नवत हो–

वजन (किग्रा0)	छात्रों की संख्या
45	3
46	7
47	12
48	10
49	8

तो इस आवृत्ति वितरण का समानान्तर माध्य निम्नवत होगा।

वजन (X)	आवृत्ति (f)	f.X
45	3	135
46	7	322
47	12	564
48	10	480
49	7	392
$\sum f = 40, \sum f.X = 1893$		

आवृत्ति वितरण का समानान्तर माध्य

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{189.3}{40}$

$= 47.35$

कक्षा के विद्यार्थियों का औसत वजन 47.35 किग्रा0 होगा।

जब संमको का वर्ग–अन्तराल के साथ आवृत्ति वितरण दिया होता है तो ऐसे मे प्रत्येक वर्ग का मध्यमान ज्ञात करके इन मध्यमानों का समानान्तर माध्य ज्ञात करते है।

उदाहरणः किसी कक्षा के छात्रों के आय वर्ग का आवृत्ति वितरण निम्नवत् है–

आय वर्ग	आवृत्ति (f)	आय वर्ग का मध्यमान (x)	f.x
0–5000	4	2500	10000
5000–10000	13	7500	97500
10000–15000	16	12500	200000
15000–20000	9	17500	157500
20000–25000	6	22500	135000
25000–30000	2	27500	55000
			654000

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{654000}{50} = 13800$$

5.4.1.2 समान्तर माध्य ज्ञात करनें की वैकल्पिक विधि :– जब समंको या आवृत्तियों के मान बहुत बड़े हों तो बड़ी संख्याओं के गुणनफल तथा योगफल के कारण त्रुटियां न हो इसके लिए कल्पित माध्य की वैकल्पिक

विधि को अपनाना श्रेयस्कर होता है। इसके अन्तर्गत समंक के बीच का कोई भी मान को ही समान्तर माध्य मान लेते है। इसे ही वैकल्पिक माध्य कहेंगे। वास्ततिक समान्तर माध्य निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$$\bar{X} = A + \sum_{i=1}^{N} \frac{f_i(X_i - A)}{N}$$

जहाँ A वैकल्पिक माध्य है।

उदाहरण के लिए –

वर्गान्तर	आवृत्ति	मध्यमान (X_i)
40–50	63	45
50–60	87	55
60–70	201	65
70–80	121	75
80–90	67	85
90–100	11	95

$\sum f_i = 550$

माना वैकल्पिक माध्य $A = 75$ है।

$(X_i - A)$	$f_i(X_i - A)$
$45 - 75 = -30$	$63(-30) = -1890$
$55 - 75 = -20$	$87(-20) = -1740$
$65 - 75 = -10$	$201(-10) = -2010$
$75 - 75 = 00$	$121(0) = 0$
$85 - 75 = 10$	$67(10) = 670$
$95 - 75 = 20$	$11(20) = 200$
	$\sum f_i\,(X_i - A) = -4750$

समानान्तर माध्य

$$\bar{X} = A + \sum_{i=1}^{N} \frac{f_i(X_i - A)}{N}$$

$$= 75 + \frac{(-4750)}{550}$$
$$= 75 - 8.63$$
$$= 66.37$$

वैकल्पिक माध्य द्वारा समान्तर माध्य ज्ञात किये जाने का भी उपरोक्त विधि से यह स्पष्ट होता है कि समंको के केन्द्र में परिवर्तन से समान्तर माध्य भी परिवर्तित हो जाता है। इसीलिए जब हम किसी बिन्दु को वैकल्पिक माध्य मानते हुए सभी समंको से वैकल्पिक माध्य घटाते है (अर्थात समंको का केन्द्र परिवर्तित करते है।) तो वैकल्पिक माध्य से समंको के अन्तराल का माध्य वास्वतिक माध्य के बराबर न होकर वैकल्पिक माध्य के बराबर ही दूरी पर होता है। इसीलिए वास्तविक माध्य ज्ञात करने हेतु इस अन्तराल के माध्य में वैकल्पिक माध्य को जोड़ दिया जाता है।

वास्ततिक समानान्तर माध्य = वैकल्पिक माध्य + वैकल्पिक माध्य से अन्तराल का माध्य

$\bar{X} = A + \sum_{i=1}^{n} f\,(X_i - A)$

$\bar{X} = A + \frac{\sum f di}{N}$

जहाँ, $d_i = (X_i - A)$

यदि समंको के पैमाने मे परिवर्तन किया जाए तो समानान्तर माध्य का पैमाना भी उसी अनुपात में परिवर्तित हो जाएगा। तथा उपरोक्त सूत्र निम्नवत हो जायेगा।

$\bar{X} = A + \left(\frac{\sum f_i d_i^{'}}{N}\right) \times\ i$

जहाँ, $d_i' = \frac{(X_i - A)}{i}$

तथा $i =$ वह राशि जिससे समंको का पैमाना परिवर्तित किया जाता है।

उदाहरणः उपरोक्त उदाहरण में पैमाने के परिवर्तन करने पर

माना $A = 75$ तथा $i = 10$

वर्गा–अन्तराल	आवृत्ति	माध्यमान (x)	$d_i = (X - A)$	$d_i' = \frac{(X-A)}{i}$	$f_i d_i'$
$40 - 50$	63	45	$45 - 75$	$-{}^{30}/_{10} = -3$	-189
$50 - 60$	87	55	$55 - 75$	$-{}^{20}/_{10} = -2$	-174
$60 - 70$	201	65	$65 - 75$	$-{}^{10}/_{10} = -1$	-201
$70 - 80$	121	75	$75 - 75$	${}^{0}/_{10} = 0$	0
$80 - 90$	67	85	$85 - 75$	${}^{10}/_{10} = 1$	67
$90 - 100$	11	95	$95 - 75$	${}^{20}/_{10} = 2$	22
					$\sum f d_i^{'} = -475$

$\bar{X} = A + i \sum \frac{f d_i^{'}}{N}$

$= 75 + \frac{10(-475)}{550} = 75 - \frac{4750}{550}$

$= 66.37$

5.4.2 गुणोत्तर माध्य : यदि $X_1, X_2 \dots, X_n$ एक $'n'$ आकार की समक श्रेणी है तो इसका गुणोत्तर माध्य (GM) इन सभी समंको के गुणनफल का nवाँ मूल होगा। अर्थात

$$GM = (X_1, X_2 \dots, X_n)^{1/n}$$

उदाहरण : समंक श्रेणी $3, 12$ गुणोत्तर माध्य

$$GM = (3 \times 12)^{1/2} = \sqrt[2]{36}$$
$$= 6$$

इसी प्रकार समंक श्रेणी $2, 4$ तथा 8 का गुणोत्तर माध्य

$$GM = (2 \times 4 \times 8)^{1/3} = \sqrt[3]{64} = 4$$

यदि समंक का आकार 3 से अधिक हो तो इस आकार का मूल ज्ञात करने के लिए लधुगुणक का प्रयोग करना पडेगा।

जैसे समंक श्रेणी $3, 5, 8, 10$ का गुणोत्तर माध्य

$$GM = (3 \times 5 \times 8 \times 10)^{1/4}$$
$$= (1200)^{1/4}$$

या $$\log GM = \frac{1}{4} \log 1200$$

या $$GM = \text{antilog}\left(\frac{1}{4} \log 1200\right)$$

5.4.2.1 आवृत्ति वितरण का गुणोत्तर माध्यः

आवृत्ति वितरण का गुणोत्तर माध्य निम्नवत होगा $GM = \frac{(f_1 logX_1 + f_2 logX_2 + \cdots + f_n logX_n)}{N}$

जहाँ, $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

5.4.3 हरात्मक माध्यः समक $X_1, X_2 \dots X_n$ का हरात्मक माध्य इन समंको के व्युत्क्रम के समानान्तर माध्य का व्युत्क्रम होगा। अर्थात

हरात्मक माध्य $HM = 1/\frac{(\frac{1}{X} + \frac{1}{X^2} + \cdots + \frac{1}{X_n})}{N}$

या $HM = \frac{N}{\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_n}}$

उदाहरण : समंक $3, 5, 7$ का हरात्मक माध्य

$$= \frac{3}{\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}} = \frac{3}{\frac{35+21+15}{105}}$$
$$= \frac{3}{\frac{71}{105}} = \frac{315}{71} = 443$$

5.4.3.1 आवृत्ति वितरण का हरात्मक माध्य

$$HM = \frac{N}{\frac{f_1}{X_1} + \frac{f_2}{X_2} + \cdots + \frac{f_n}{X_n}}$$

जहाँ, $N = \sum_{i=1}^{n} f_i$

5.5 समान्तर माध्य गुणोत्तर माध्य एवं हरात्मक माध्य के बीच संबंध :

गणोत्तर माध्य $= \sqrt{\text{समान्तर माध्य X हरात्मक माध्य}}$

$GM = \sqrt{AM.HM}$

या

$(GM)^2 = (AM \times HM)$

उदाहरण : समंक 2 तथा 8 का

समान्तर माध्य $(AM) = \frac{2+8}{2} = \frac{10}{2} = 5$

गणोत्तर माध्य $(GM) = (2 \times 8)^{1/2} = \sqrt{16} = 4$

हरात्मक माध्य $= \frac{2}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} = \frac{2}{\frac{4+1}{8}}$

$= \frac{2\times 8}{5} = \frac{16}{5}$

अब समान्तर माध्य (AM) $\times$ हरात्मक माध्य (HM)

$= 5 \times \frac{16}{5} = 16 = (4)^2 = (\text{गुणोत्तर माध्य})^2$

बोध प्रश्न 1. किसी समंक श्रेणी का औसत मध्य 3 तथा हरात्मक मध्य 27 हो तो इस समंक श्रेणी का गुणोत्तर मध्य कितना होगा।

5.6 माध्यिका (Median):

माध्यों के अर्न्तगत एक दोष होता है कि वह अतिमानों से अत्यधिक प्रभावित होते है जैसे $2, 3, 4$ का समान्तर माध्य 3 होगा। परन्तु यदि इस समंक श्रेणी में एक अन्य समंक जुड जाये जो कि इन 3 समंको की अपेक्षा अत्यन्त बड़ा या छोटा (अतिमान) हो जैसे 500 तो अब नई समंक श्रेणी $2, 3, 4, 500$ का समान्तर माध्य $\frac{2+3+4+500}{4} = \frac{509}{4} = 127.5$ होगा।

यह माध्य इस समंक श्रेणी के मध्य न होकर अतिमान की ओर झुक जाता है। माध्यिका समान्तर माध्य के इसी दोष को दूर करने वाली एक अन्य विवेचनात्मक सांख्यिकी होती है। माध्यिका, समंको के मध्य एक ऐसा बिन्दु या संख्या होता है जो संमक श्रेणी को दो बराबर भागों में बांट देती है। माध्यिका ज्ञात करने हेतु समंको को छोटे से बड़े के क्रम (आरोही) अथवा बड़े से छोटे के क्रम (अवरोही) में लिखना आवश्यक होता है जिससे समंक श्रेणी के बीचो बीच की संख्या स्पष्ट हो सके।

जब समंक श्रेणी का आकार (N) विषम संख्या होती है तो $\frac{N+1}{2}$ पद एक ऐसा पद होगा जिसके पहले तथा बाद में समंको की संख्या बराबर होगी। अतः $\frac{N+1}{2}$वाँ पद ही माध्यिका होती है। परन्तु जब पदों की संख्या (N) एक सम संख्या होती है तो $N/_2$ वें पद तथा $\frac{N}{2} + 1$वें पद का औसत माध्यिका होती है।

उदाहरण : समंक $13, 7, 15, 8, 200$ की माध्यिका ज्ञात करने हेतु सर्वप्रथम इन समंको को आरोही क्रम में लिखेगें।

आरोही क्रम में $-7,\ 8,\ 13,\ 15,\ 200$

अब चूंकि कुल पदों की संख्या $N = 5$ है जो कि विषम है, अतः $\frac{N+1}{2} = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$

अर्थात तीसरा पद ही माध्यिका होगी।

आरोही क्रम में सजे समंक में तीसरा पद 13 है अतः माध्यिका $(MD) = 13$

वास्तव में 13 ही ऐसी संख्या है जो पूरी समंक श्रेणी के दो बराबर भाग में बांट रही है। 13 से पूर्व भी दो पद है तथा बाद में भी। अतः यही अभीष्ट माध्यिका होगी। यह भी ध्यान देने योग्य है कि माध्यिका अतिमान (यहाँ संख्या 200 एक अतिमान कहा जा सकता है) से प्रभावित नही होती।

एक अन्य उदाहरण –समंक श्रेणी $13,\ 10,\ 15,\ 8,\ 7,\ 200$ की माध्यिका ज्ञात करने हेतु इन समंको को आरोही क्रम में लिखने पर–

आरोही क्रम में समंक : $7,\ 8,\ 10,\ 13,\ 15,\ 200$ अब इन समंको के पदों की संख्या $N = 6$ है जो कि सम है अतः $\frac{N}{2}$वॉ पद तथा $\frac{N}{2} + 1$वॉ पद का माध्य हो माध्यिका होगी।

$\frac{N}{2} = \frac{6}{2} = 3$

तथा

$\frac{N}{2} + 1 = \frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$

अर्थात माध्यिका $= \frac{\text{तीसरा पद} + \text{चौथा पद}}{2}$

$= \frac{10+13}{2} = \frac{23}{2} = 11.5$

अर्थात माध्यिका 11.5 होगी।

यहाँ भी यह स्पष्ट होता है कि यह आवश्यक नहीं है कि दिये गये समंको में से ही कोई समंक माध्यिका हो। जैसे यहां 11.5 दिये समंको में नही है परन्तु यह निश्चित रूप से ऐसी संख्या है जो दिये गये समंको को दो बराबर भागों में बांटती है। 3 समंक इससे छोटे हैं तथा 3 समंक इससे बड़े है।

5.6.1 आवृत्ति वितरण की माध्यिकाः

किसी दिये गये आवृत्ति वितरण की माध्यिका आवृत्ति वितरण में पदों की संख्या को दो से भाग देकर प्राप्त होने वाला पद होगा। आवृत्ति वितरण की माध्यिका ज्ञात करने हेतु पूर्व की ही भांति सर्वप्रथम समंको को आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करके उनकी संगत आवृत्रियां लिखते है। तत्पष्चात संचयी आवृत्रियां ज्ञात करते हैं। प्रत्येक पद की संचयी आवृत्ति उस पद की तथा उससे पूर्व तक के पदों की आवृत्तियों का योग होती है। इस प्रकार अन्तिम पद की संचयी आवृत्ति समस्त पदों की आवृत्तियों का योग होगी जो कि पदों की कुल संख्या (N) होती है। इसके पष्चात $\frac{N}{2}$ ज्ञात करत है तथा उस संचयी आवृत्ति को चिहिनत करते है जिसमें $\frac{N}{2}$ समाहित हो। इसी संचयी आवृत्ति का संगत पद ही माध्यिका होगी।

उदाहरण : निम्न आवृत्ति वितरण की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

विद्यार्थियों का वनज	आवृत्ति
45	3
46	7
47	12
48	10
49	8

चूंकि आवृत्ति वितरण पहले से ही समंको के आरोही क्रम में है अतः हम माध्यिका की गणना प्रक्रिया कर सकते है।

वजन	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
45	3	3
46	7	10
47	12	22
48	10	32
49	8	40

$\sum f_i = 40$

$\frac{N}{2} = \frac{40}{2} = 20$

चूंकि $\frac{N}{2}$ का मान 20 है जो कि संचयी आवृत्ति 22 के अर्न्तगत आयेगा अतः इसके संगत पद का मान 47 ही अभीष्ट माध्यिका होगी।

वर्ग–अन्तराल की माध्यिका:

चूंकि वर्ग अन्तराल के अर्न्तगत संमक कोई एक संख्या न होकर एक वर्गान्तर होता है अतः संचयी आवृत्ति के द्वारा अभीष्ट माध्यिका न ज्ञात होकर एक वर्ग प्राप्त होता है जिसे माध्यिका वर्ग कहते है। ऐसे में माध्यिका ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$M = Lo + \frac{i({}^{N}/_{2} - C)}{f}$$

जहाँ $Lo -$ माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा होगी।

$C -$ माध्यिका वर्ग से एक पूर्व वर्ग की संचयी आवृत्ति।

$f -$ माध्यिका वर्ग की आवृत्ति।

$i -$ वर्गान्तर।

उदाहरण: यदि किसी कक्षा के छात्रों के आय वर्ग आवृत्ति वितरण निम्नवत हो तो इसका माध्यिका निम्न तरीके से निकालेगें।

आय वर्ग	**आवृत्ति**	**संचयी आवृत्ति**
$0 - 5000$	4	4
$5000 - 10000$	13	17
$10000 - 15000$	16	33

$15000 - 20000$	9	42
$20000 - 25000$	6	48
$25000 - 30000$	2	50

$\frac{N}{2} = \frac{50}{2} = 25$

चूंकि $\frac{N}{2} = 25$ है अतः संचयी आवृत्ति 33 वाला वर्ग कहलायेगा।

अतः

$Lo = 10000$

$C = 17$

$f = 16$

$i = 15000 - 10000 = 5000$

$M = 10000 + 5000 \times \frac{(25-17)}{16}$

$= 10000 + 5000 \times \frac{8}{16}$

$= 12500$

5.7 बहुलक (Mode):

किसी समंक श्रेणी में जिस संमक की आवृत्ति सर्वाधिक होती है उस समंक को बहुलक कहते है। किसी व्यक्तिगत एवं छोट आकार की समंक श्रेणी को देखकर ही बहुलक ज्ञात किया जा सकता है। जैसे–$3, 5, 4, 3, 5, 7, 5, 4, 5$ में 5 को बहुलक कहेंगे। क्योंकि इस समंक श्रेणी में 5 की आवृत्ति सर्वाधिक (4) है।

किसी आवृत्ति वितरण में सर्वाधिक आवृत्ति वाले समंक को बहुलक कहेंगें।

उदाहरण :

विद्यार्थियों का वजन	आवृत्ति
45	3
46	7
47	12
48	10
49	8

में बहुलक 47 है क्योंकि इसकी आवृत्ति सर्वाधिक (12) है।

कभी–कभी एक समंक श्रेणी में एक से अधिक बहुलक (Multi-Mode) भी हो सकते है।

उदाहरण :

विद्यार्थियों का वजन : $45, 46, 47, 48, 49$

आवृत्तिः $3, 7, 12, 5, 12$

इस समंक श्रेणी में स्पष्ट रूप से दो समंक ऐसे है जिनकी आवृत्ति सर्वाधिक है अतः इसमें दो बहुलक (Bi-Model) होंगे।

कभी–कभी आवृत्ति वितरण में बहुलक इस प्रकार का होता है कि बहुलक का निर्धारण सिर्फ आवृत्ति देखकर नहीं किया जा सकता। उदाहरण के लिए–

विद्यार्थियों का वजन : 45, 46, 47, 48, 49, 50, 51
आवृत्ति : 4, 13, 7, 6, 12, 10, 5

इस प्रकार के आवृत्ति वितरण में आवृत्ति की अधिकता के नियम से तो बहुलक 46 होना चाहिए। परन्तु आवृत्तियों का वितरण का इस प्रकार है कि दूसरी सर्वाधिक आवृत्ति वाला समंक 49 भी बहुलक हो सकता है। ऐसी स्थिति में बहुलक की गणना समूहन विधि (Grouping Method) से करते है।

5.7.1 समूहन विधि : सर्वप्रथम आवृत्ति वितरण में कुछ अतिरिक्त स्तम्भ क्रमषः दो–दो आवृत्तियों के योग, पहली आवृत्ति छोड़ कर पुनः दो–दो आवृत्तियों के योग, तीन–तीन आवृत्तियों के योग एवं पहली तथा दूसरी आवृत्ति को छोड़कर तीन–तीन आवृत्तियों के योग बनाएगें। उपरोक्त उदाहरण के लिए ऐसे ही स्तम्भ यहां बनाये गये हैं।

विद्यार्थियों का वजन	आवृत्ति I	II	III	IV	V	VI
45	4	17				
46	13		20	24		
47	7	13			26	
48	6		18			25
49	12	22		28		
50	10		15		27	
51	5					

तत्पश्चात प्रत्येक स्तम्भ के अधिकतम मान को चिन्हित करते हुए इस अधिकतम मान में प्रत्येक आवृत्ति के योगदान को देखेंगे। जिस आवृत्ति का योगदान अधिकतम आवृत्तियों के योग में सर्वाधिक होगा उसी के संगत पद को बहुलक माना जायेगा। इस प्रक्रिया हेतु मिलान चिन्ह (Tally Marks) का प्रयोग किया जाता है।

वजन	अधिकतम आवृत्ति में योगदान (मिलान चिन्ह)	संख्या
45		
46	||	2
47	||	2
48	||	2
49	||||	4
50	|||	3
51	|	1

चूंकि अधिकतम आवृत्तियों में 49 की आवृत्ति का योगदान सर्वाधिक 4 बार हुआ अतः बहुलक 49 होगा।

वर्ग–अन्तराल का बहुलकः

जब समंक वर्ग–अन्तरालों में वर्गीकृत हो तो सर्वाधिक आवृत्ति वाले वर्ग को बहुलक वर्ग कहेंगे तथा सटीक बहुलक की गणना हेतु निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$M = l + \frac{i(f_1 - f_o)}{2f_1 - f_o - f_2}$

जहाँ $l -$ बहुलक वर्ग की निम्न सीमा।
$f_1 -$ बहुलक वर्ग की आवृत्ति।
$f_o -$ बहुलक वर्ग से पूर्व के वर्ग की आवृत्ति।
$f_2 -$ बहुलक वर्ग से बाद के वर्ग की आवृत्ति।
$i -$ बहुलक वर्ग के अन्तराल की माप।

उदाहरण : छात्रों के पारिवारिक आय वर्ग के आवृत्ति वितरण के निम्न उदाहरण में

आय वर्ग	आवृत्ति
$0 - 5000$	4
$5000 - 10000$	13
$10000 - 15000$	16
$15000 - 20000$	9
$20000 - 25000$	6
$25000 - 30000$	2

सर्वाधिक आवृत्ति (16) वाला वर्ग $10000 - 15000$ है इसे ही बहुलक वर्ग कहेंगे। इस प्रकार

$L = 10000$

$f_1 = 16$

$f_o = 13$

$f_2 = 9$

$i = 15000 - 10000 = 5000$

बहुलक

$M = 10000 + \frac{5000\ (16-13)}{2(16)-13-19}$

$= 10000 + 5000\left(\frac{3}{10}\right)$

$= 11500$

5.8. बोध प्रश्नों के उत्तर

बोध प्रश्न 1- किसी समंक श्रेणी का औसत माध्य, हरात्मक माध्य तथा गुणोत्तर माध्य के बीच संबंध

$$GM = \sqrt{AM \times\ HM}$$

दिया है

$$AM = 3$$
$$HM = 27$$

अब

गुणोत्तर माध्य $GM = \sqrt{AM \times\ HM} =\ \sqrt{3 \times 7} = \sqrt{81} = 9$

अतः गुणोत्तर माध्य 9 होगा

5.9 अभ्यास प्रश्न

1. समंक श्रेणी के लिए समांतर माध्य, माध्यिका तथा बहुलक की गणना कीजिए

आय वर्ग	आवृत्ति
0—25000	90
25000—50000	110
50000—75000	140
75000—100000	120
100000—125000	70
125000—150000	10

5.10 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

Elhance,D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Greenlaw, Steven A (2005): Doing Economics: A Guide to Understanding and Carrying Out Economic Research.

Gupta,S.P (2011) : Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

Hazarika,Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Kothari, C.R: Research Methodology: Methods & Techniques. New Age International Publishers ISBN (13) : 978-81-224-2488-1

Leighton,Thomas (2011) : Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.

Lind, Wathen &Marchal (2013): Basic Statistics for Business & Economics, McGraw Hill Education.

Newbold, Paul (2008) : Statistics for Business and Economics , Pearson Education.

Richard ,I. Levin. H. Siddiqui Masood S. Rubin David Sanjay Rastogi (2017): Statistics for Management. Pearson. ISBN-10 8184957491

Sharma,J.K(2011) : Business Statistics “Pearson Education.

इकाई–6
अपकिरण की मापें : प्रमाप विचलन, प्रमाप विचलन का गुणांक
(Measures of Disperson: Standard Deviation, Coefficient of S.D)

6.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी–

1. अपकिरण के अर्थ से परिचित हो जाएंगे ।
2. अपकिरण की माप की आवश्यकता को समझ जाएंगे ।
3. अपकिरण की विभिन्न मापों की गणना की विधियाँ सीख जाएंगे

6.2 प्रस्तावना (Introduction)

पिछली इकाई में हमने जाना की समंकों के प्रतिनिधि मान, जिनको हम केन्द्रीय प्रवृत्ति भी कहते हैं , आंकड़ों का प्रतिनिधित्व करने वाली एक संख्या होती है। समस्त आंकड़ों का प्रतिनिधित्व करने वाली एक संख्या अध्ययन के दृष्टिकोण से सुविधाजनक तो हो सकती है परंतु पर्याप्त नहीं। क्योंकि केन्द्रीय प्रवृत्ति के मान आंकड़ों के बिखराव को व्यक्त नहीं करते हैं। उदाहरण के लिए निम्न दो छात्र समूहों के वजन के आंकड़ों की केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप (समान्तर माध्य) को देखिए–

प्रथम छात्र समूह का वजन (A)	द्वितीय छात्र समूह का वनज (B)
24	18
25	30
25	21
24	19
27	37
प्रथम छात्र समूह का औसत वजन $\overline{A} = 25$	द्वितीय छात्र समूह का औसत वजन $\overline{B} = 25$

उपरोक्त दोनों ही छात्र समूहों के लिए औसत मान या समान्तर माध्य 25 है, परंतु छात्रों के दूसरे समूह के वजन में काफी अंतर या बिखराव है, जबकि छात्रों के पहले समूह में सभी के वजन लगभग बराबर हैं। स्पष्ट है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापें समंकों में बिखराव को नहीं व्यक्त करते। जबकि सांख्यकीय अध्ययन में आंकड़ों के बिखराव को जानना और उसको मापना एक महत्वपूर्ण प्रक्रिया होती है। जिसके बगैर समंकों का विवेचनात्मक अध्ययन पूर्ण नहीं हो सकता। इस इकाई में हम इसी महत्वपूर्ण विवेचनात्मक सांख्यकी ($Descriptive\ Statistics$) का अध्ययन करेंगें तथा अपकिरण की विभिन्न मापों की गणना की विधियों को सीखेंगें।

6.3 अपकिरण की माप–परिचय

अपकिरण से तात्पर्य है आँकड़ों का बिखराव। वस्तुतः हम समंको के कुछ चुने हुए बिन्दुओं के बीच के बिखराव भी देख सकते है तथा समंको के मध्यमान (माध्य, माध्यिका इत्यादि) से अन्य समंको के बिखराव को भी। प्रसार एवं अन्तर चतुर्थक प्रसार या चतुर्थक विचलन समंको के चुने हुए दो बिन्दुओं के बीच के अन्तराल या बिखराव का मापक है जबकि माध्य विचलन तथा प्रमाप विचलन मध्यमानों से समंक के अन्तराल अथवा बिखराव का मापक है।

6.4 प्रसार (Range) : समंक श्रेणी के उच्चतम तथा निम्नतम मान के अन्तर को ही प्रसार कहते हैं। समंक श्रेणी $14,\ 4,\ 5,\ 8,\ \ 24,\ \ 16,\ \ 9$ के लिए प्रसार $R = 24 - 4 = 20$

प्रसार $R = U - L$ जहाँ $U -$ समंक का उच्चतम पद तथा $L -$ समंक का निम्नतम पद

6.4.1 प्रसार गुणांक : प्रसार गुणांक निम्नतम परिभाषित है

प्रसार गुणांक $(R) = \frac{U-L}{U+L}$

उपरोक्त उदाहरण के लिए

प्रसार गुणांक $= \frac{24-4}{24+4} = \frac{20}{28} = \frac{5}{7} = 0.71$
चतुर्थक विचलन का अध्ययन अगली इकाई में विस्तार से किया गया है।

प्रसार तथा चतुर्थक विचलन दो चुने हुए बिन्दुओं क्रमशः समंक के उच्चतम तथा निम्नतम मान एवं तृतीय तथा चतुर्थ चतुर्थक के बीच में बिखराव को ही मापता है। इन मापको में सभी समंक बिन्दुओं के बिखराव की अवहेलना होती है; अतः इन्हें अपकिरण की उचित माप नही मान सकते।

6.5 माध्य विचलन (Mean Deviation) : माध्य विचलन में सभी समंको का अपने मध्यमान से बिखराव मापा जाता है।

यदि समंक श्रेणी $X_1,\ X_2 - - - - X_n$ है जिसका मध्यमान $'A'$ हो तो इस मध्यमान से माध्य विचलन $MD_A = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|X_i - A|$ होगा।

जहॉ $|X_i - A|$ से तात्पर्य विचलन के निरपेक्ष (Modulus) मान से है।

चूंकि जब मध्यमान समान्तर माध्य को लिया जाता है तो माध्य विचलन जो कि समान्तर माध्य से सभी समंको के अन्तराल का बीजगणितीय योग होगा शून्य हो जायेगा इसीलिए इन सभी अन्तरालों के ऋणात्मक मानों की अनदेखी करते हुए निरपेक्ष मान लिया जाता है। एक सममित आवृत्ति वितरण के लिए समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक का मान बराबर होता है इसलिए सभी प्रकार के मध्यमानों के लिए अन्तराल के निरपेक्ष मान को लेना उचित होता है।

उदाहरण : समंक श्रेणी 10, 15, 20, 25, 30 के लिए समान्तर माध्य से माध्य विचलन की गणना निम्नवत होगी।

समान्तर माध्य $\bar{X} = \frac{10+15+20+25+300}{5} = \frac{100}{5} = 20$

समान्तर माध्य से माध्य विचलन

$$MD_{\bar{X}} = \frac{|10-20|+|15-20|+|20-20|+|25-20|+|30-20|}{5}$$

$$= \frac{|-10|+|-5|+0+|5|+|10|}{5}$$

$$= \frac{10+5+0+5+10}{5} = \frac{30}{5} = 6$$

$$MD_{\bar{X}} = 6$$

6.5.1 आवृत्ति वितरण का माध्य विचलन :

आवृत्ति वितरण के माध्य विचलन के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग होगा।

$$MD_A = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i|X_i - A|}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i|X_i - A|}{N}$$

वर्ग अन्तराल के लिए वर्ग–अन्तराल के मध्यमान को X_i के स्थान पर लिया जायेगा।

चूंकि माध्य विचलन की गणना करते समय हम समंको के माध्य से लिए गये अन्तराल के ऋणात्मक मानों को अनदेखा करते हुए कृत्रिम रूप से निरपेक्ष रखा जाता है इसलिए आगे की गणितीय व्यवहार करना निरर्थक होगा। इस समस्या को दूर करने के लिए प्रमाप विचलन द्वारा अपकिरण की माप ज्यादा उचित होती है।

6.6 प्रमाप विचलन (Standard Deviation) : किसी समंक श्रेणी के माध्य विचलन में माध्य से अन्तरालों के मान को कृत्रिम रूप से निरपेक्ष रखने के दोष को दूर करने हेतु प्रमाप विचलन की गणना करते हुए माध्य से अन्तरालों के वर्ग करने से इनके पैमाने में हुई बढ़ोत्तरी को अकृत (nullify) करने के लिए इन अन्तरालों के वर्गो के योग का वर्गमूल निकाला जाता है। सूत्र के रूप में प्रमाप विचलन निम्नवत् परिभाषित है–

प्रमाप विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{(X_i - \bar{X})^2}{N}}$

ध्यान रहे कि प्रमाप विचलन की गणना में माध्य के रूप में केवल समान्तर माध्य लिया जाता है।

उदारहण : समंक श्रेणी 10, 15, 20, 25, 30 के लिए प्रमाप विचलन की गणना निम्नवत होगी।

समानान्तर माध्य $\bar{X} = \frac{10+15+20+25+30}{5} = \frac{100}{5} = 20$

प्रमाप विचलन $= \sqrt{\frac{(10-20)^2+(15-20)^2+(20-20)^2+(25-20)^2+(30-20)^2}{5}}$

$= \sqrt{\frac{(-10)^2+(5)^2+0^2+5^2+10^2}{5}}$

$\sqrt{\frac{250}{5}} = \sqrt{50} = 7.07$

आवृत्ति वितरण के लिए प्रमाप विचलन के लिए सूत्र निम्नवत होगा–

$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - X)^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \bar{X})^2}{N}}$

6.7 विचरण (Vaniance) : प्रमाप विचलन के वर्ग को विचरण (Vaniance) कहते है।

विचरण (Vaniance) $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$

आवृत्ति वितरण हेतु

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \bar{X})^2}{\sum_{i=1}^{n} f_i}$

$= \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i (X_i - \bar{X})^2}{N}$

6.7.1 विचरण ज्ञात करने के वैकल्पिक सूत्र :

विचरण के सूत्र $\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ का प्रसार करने पर

$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}({X_i}^2 + (\bar{X})^2 - 2X_i\bar{X})$

$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 + \sum_{i=1}^{n}(\bar{X}^2) - \sum_{i=1}^{n} 2X_i\,\bar{X}\right)$

$= \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2 + \bar{X}^2 \sum_{i=1}^{n}(1) - 2\bar{X}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$

चूंकि $\bar{X}$ एक अचर है।

$= \frac{\sum {X_i}^2}{N} + \frac{\bar{X}^2.N}{N} - 2\bar{X}\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}$

$= \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{N} + \bar{X}^2 - 2\bar{X}.(\bar{X})$

$\therefore \frac{\sum X_i}{N} = \bar{X}$

$= \frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{N} + \bar{X}^2 - 2\bar{X}^2$

$\frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{N} - \bar{X}^2$

या

$\sigma^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} {X_i}^2}{N}\right) - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N}\right)^2$

आवृत्ति वितरण के लिए

$\sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i {X_i}^2}{\sum f_i} - \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} f_i\, X_i}{\sum f_i}\right)^2$

इस सूत्र का प्रयोग तब उपयोगी होता है जब समान्तर माध्य का मान पूर्णांक न हो।
हालांकि जब समंको तथा आवृत्तियों के मान बहुत बड़े हों तो इनके गुणनफल अत्यधिक बड़े होंगे। ऐसे में वैकल्पिक माध्य विधि के द्वारा विचरण की गणना सुलभ होती है।
समंक में किसी भी बीच के बिन्दु (A) को वैकल्पिक माध्य मानते हुए विचलन d की गणना करते हैं। अर्थात $d_i = X_i - A$
इस विचलन का माध्य

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i}{N} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i - A}{N}\right)$$

या

$$\bar{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{N} - \frac{A\sum_{i=1}^{n}(1)}{N}$$

या

$$\bar{d} = \bar{X} - A$$

अब

$$d_i - \bar{d} = (X_i - A) - (\bar{X} - A)$$

या

$$d_i - \bar{d} = X_i - \bar{X}$$

अतः

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum(X_i - \bar{X})^2$$

या

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(d_i - \bar{d})^2$$

अर्थात

$$\sigma_X{}^2 = \sigma_d{}^2$$

अर्थात मूल के बदलने का विचरण पर प्रभाव नहीं पड़ता है।
हालांकि पैमाने में परिवर्तन से विचरण पूर्णतया स्वतन्त्र नहीं होते हैं। आइये देखते है–
यदि

$$d_i{}' = \frac{X_i - A}{h}$$

तो

$$X_i = A + hd_i{}'$$

$$\bar{X} = A + h.\frac{1}{N}\sum d_i{}'$$

या

$$\bar{X} = A + h\bar{d}'$$

या

$$X_i - \bar{X} = h(d_i{}' - \bar{d}')$$

इसलिए

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

$$= h^2.\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n}(d_i{}' - \bar{d}')^2$$

अर्थात

$$\sigma_X{}^2 = h^2\sigma_{d'}{}^2$$

उदाहरण: यदि किसी परिवार के एक वर्ष (52) सप्ताह के व्यय का वर्गीकरण निम्नवत हो तो इसके प्रमाप विचलन की गणना की विधि यहाँ विस्तार से समझाई गई है।

साप्ताहिक व्यय का वर्ग (रू0 में)	सप्ताह
$0-500$	4
$500-1000$	10
$1000-1500$	21
$1500-2000$	12
$2000-2500$	5

प्रमाप विचलन के लिए सर्वप्रथम समानान्तर मध्य $\bar{X}$ की गणना करनी चाहिए।

साप्तहिक व्यय	मध्यमान (X_i)	सप्ताह (f_i)	$f_i X_i$
$0-500$	250	4	1000
$500-1000$	750	10	7500
$1000-1500$	1250	21	26250
$1500-2000$	1750	12	21000
$2000-2500$	2250	5	11250
$\sum f_i = 52, \sum f_i X_i = 67000$			

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i X_i}{N} = \frac{67000}{52} = 1288.462$$

चूंकि माध्य का मान दशमलव में है अतः प्रमाप विचलन की गणना का अन्तराल का सूत्र $\sigma^2 = \frac{\sum f_i (X_i - \bar{X})^2}{N}$ का प्रयोग करना गणितीय रूप से अत्यधिक उलझन भरा होगा अतः हम वैकल्पिक सूत्र का प्रयोग करेंगे।

चूंकि मध्यमानों X_i के मान अत्यधिक बड़े हैं अतः सूत्र $\sigma^2 = \frac{\sum X_i^2}{N} - (\bar{X})^2$ का प्रयोग भी दुष्कर होगा। ऐसे में मध्यमानों के केन्द्र को बदलकर कल्पित माध्य से विचलन के सूत्र का प्रयोग उचित प्रतीत होता है।

माना $A = 1250$

$X_i - A = d_i$

$250 - 1250 = -1000$

$750 - 1250 = -500$

$1250 - 1250 = 0$

$1750 - 1250 = 500$

$2250 - 1250 = 1000$

सप्ताह (f_i)	D	f.d
4	-1000	-4000
10	-500	-5000
21	00	00
12	500	6000
5	1000	5000
52		2000

$\bar{d} = \frac{2000}{52} = \frac{500}{13}$

चूंकि d_i के सभी मान 500 के गुणांक में है अतः इनके पैमाने में परिवर्तन करके पुनः प्रमाप विचलन की गणना को सुलभ बना सकते है।

इसके लिए हम $h = 500$ से सभी d_i को भाग देकर d_i' का स्तम्भ प्राप्त कर लेंगे तथा आगे इसी d_i' का प्रमाप विचलन ज्ञात करेंगे। चूंकि प्रमाप विचलन पैमाने के परिवर्तनों से स्वतन्त्र नहीं होते अतः बाद में पैमाने के इसी परितर्वन $(h = 500)$ से गुणा करके अभीष्ट प्रमाप विचलन प्राप्त कर लेंगे।

$d_i' = \frac{d_i'}{500}$	f_i	$f_i d_i'$	$d_i'^{\,2}$	$f d_i'^{\,2}$
$-1000/500 = -2$	4	-8	4	16
$-500/500 = -1$	10	-10	1	10
$0/500 = 0$	21	0	0	00
$500/500 = 1$	12	12	1	12
$1000/500 = 2$	5	10	4	20
	$\sum f_i = 52$	$\sum f_i d_i' = 4$	$\sum d_i^2 = 10$	$\sum f d_i'^2 = 58$

$$\sigma = 500 \times \sqrt{\left(\frac{\sum f d_i'^2}{N}\right) - \left(\frac{\sum f d_i'}{N}\right)^2}$$

$= 500 \times \sqrt{\left(\frac{58}{52}\right) - \left(\frac{4}{52}\right)^2} =$

$500 \times \sqrt{1.11 - (0.076)^2} =$

$500 \times \sqrt{1.11 - .0057} =$

$500 \times \sqrt{1.1043} =$

500×1.1043

= 525.42.

यही उपरोक्त व्यय वर्ग के वितरण का अभीष्ट प्रमाप विचलन होगा।

बोध प्रश्न 1.यदि किसी समंक श्रेणी का विचरण (variance) 4.2 है, तो समंक श्रेणी के प्रत्येक समंक में एक अचर संख्या 3 जोड़ देने पर नई समंक श्रेणी का विचरण क्या होगा ?

बोध प्रश्न 2.यदि किसी समंक श्रेणी का विचरण (variance) 4.2 है, तो समंक श्रेणी के प्रत्येक समंक में एक अचर संख्या 3 से गुणा देने पर नई समंक श्रेणी का विचरण क्या होगा ?

6.7.2 प्रमाप विचलन का गुणांक

प्रमाप विचलन के मान समंको के पैमाने के अनुरूप होते है इसलिए दो भिन्न समंक श्रेणीयों के बिखराव की तुलना इन समंक श्रेणीयों के प्रमाप विचलनों की तुलना से नहीं हो सकती। अतः विभिन्न समंक श्रेणियों के बिखराव की निरपेक्ष माप के रूप में प्रमाप विचलन गुणांक को परिभाषित किया गया है। यदि एक समंक श्रेणी का प्रमाप विचलन σ तथा समान्तर माध्य $\bar{X}$ हो तो

प्रमाप विचलन गुणांक $CV \quad = \frac{\sigma}{\bar{X}} \times 100$

उपरोक्त उदाहरण में $\sigma x = 525.42$ तथा $\bar{X} = 1288.46$

अतः प्रमाप विचलन गुणांक = $\frac{524.42}{1288.46} \times 100 = 40.77$

अर्थात इस उदाहरण में आँकड़ों का बिखराव 40.77% है।

विभिन्न समंक श्रेणियों के प्रमाप विचलन गुणांक से उनमें बिखराव की तुलना सम्भव होगी।

6.8. बोध प्रश्नों के उत्तरः

1. चूंकि विचरण पर समंकों के मूल में परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं पड़ता है अतः समंक के प्रत्येक मान में अचर संख्या 3 (अथवा कोई भी अन्य संख्या) के जोड़ने (अथवा घटाने) से विचरण का मान अपरिवर्तनीय रहेगा, अर्थात नई समंक श्रेणी का विचरण भी 4.2 ही रहेगा।
2. विचरण पर समंकों के पैमाने में परिवर्तन का प्रभाव पड़ता है अतः समंक के प्रत्येक मान में अचर संख्या 3 गुणा करने पर विचरण का मान इस अचर राशि के वर्ग के गुणन के बराबर परिवर्तन हो जाएगा, अर्थात नई समंक श्रेणी का विचरण भी $4.2 \times 9 = 37.8$ हो जाएगा।

6.9 अभ्यास प्रश्नः

1. निम्न समंक श्रेणी के लिए मध्यिका से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए –

आय–वर्ग (000रुपये में)	2–4	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
परिवारों की संख्या	12	38	70	125	94	58	28	10

2. निम्न समंक श्रेणी के लिए प्रमाप विचलन तथा प्रमाप विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए –

X	20	25	30	35	40	45	50	55
F	2	5	12	15	10	8	7	3

6.10 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकेः

Elhance,D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Greenlaw, Steven A (2005): Doing Economics: A Guide to Understanding and Carrying Out Economic Research.

Gupta,S.P (2011) : Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

Hazarika,Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Kothari, C.R: Research Methodology: Methods & Techniques. New Age International Publishers ISBN (13) : 978-81-224-2488-1

Leighton,Thomas (2011) : Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.

Lind, Wathen &Marchal (2013): Basic Statistics for Business & Economics, McGraw Hill Education.

Newbold, Paul (2008) : Statistics for Business and Economics , Pearson Education.

Richard ,I. Levin. H. Siddiqui Masood S. Rubin David Sanjay Rastogi (2017): Statistics for Management. Pearson. ISBN-10 8184957491
Sharma,J.K(2011) : Business Statistics “Pearson Education.

इकाई–7
चतुर्थक विचलन, विषमता तथा उनका माप
(Quartile Deviation, Skewness and Its Measurement)

इकाई संरचना (Unit Plan)

7.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी

1. चतुर्थकों के विचार से परिचित हो जाएंगें
2. चतुर्थकों की गणना की विधि से परिचित हो जाएंगे
3. समंकों के वितरण में विषमता के विचार से परिचित हो जाएंगें
4. विषमता को मापने की विधियों से परिचित हो जाएंगे

7.2 प्रस्तावना (Introduction)

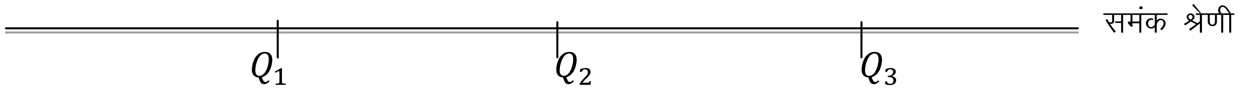
समंक या आंकड़ों के आवृत्ति वितरण आंकड़ों में बिखराव को प्रदर्शित करते हैं। आंकड़ों का अपने मध्यमानों से बिखराव आवृत्ति वितरण के सम अथवा विषम होने का परिचायक होता है। अर्थशास्त्र के अध्ययन में बहुधा ऐसे अभिलक्षणों का अध्ययन किया जाता है जिनके वितरण में समानता की आशा की जाती है। जैसे अर्थव्यवस्था में खाद्य पदार्थों की उपलब्धता का वितरण समान हो यह एक वांछनीय लक्ष्य हो सकता है यद्यपि व्यावहारिक जगत में अभिलक्षणों के मानों के बिखराव में समानता हो यह आवश्यक नहीं होता अतः असामानता कितनी और किस प्रकार की है इसके अध्ययन का अपना महत्व है। प्रस्तुत इकाई में हम आवृत्ति वितरण की समानता ($Symmetry$) के विचार को समझते हुए असमानता के प्रकारों तथा उसकी माप की विधियों का अध्ययन करेंगे।

चतुर्थक (Quartiles)**:** जिस प्रकार माध्यिका समंको के बीच एक ऐसा बिन्दु होता है जो पूरी समंक श्रेणी को दो बराबर हिस्सों में बांट देता है, उसी प्रकार एक समंक श्रेणी आपस में चार बराबर भाग में बांटने वाले बिन्दुओं को चतुर्थक कहते है। चतुर्थकों की संख्या तीन होती है।

प्रथम चतुर्थक Q_1 यह समंको को $1/_4$ तथा $3/_4$ हिस्से में बांटता है।

द्वितीय चतुर्थक Q_2 यह समंको को आधे–आधे दो हिस्से में बांटता है।

तृतीय चतुर्थक Q_3 यह समंको को $3/_4$ तथा $1/_4$ हिस्से में बांटता हैं।



वस्तुतः द्वितीय चतुर्थक Q_2 ही माध्यिका होती है।

7.3.1 चतुर्थक की गणना : चतुर्थक की गणना हेतु सर्वप्रथम समंको को आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित कर लेते है, तत्पश्चात यदि समंको का आकार विषम हो तो प्रथम चतुर्थक $Q_1 = \frac{N+1}{4}$ वां पद

द्वितीय चतुर्थक $Q_2 = \frac{N+1}{2}$ वाँ पद

तथा तृतीय चतुर्थक $Q_3 = \frac{3N}{4}$ वाँ पद

यदि समंक का आकार सम हो तो

$Q_1 = \frac{N}{4}$ वाँ पद तथा $\frac{N}{4} + 1$ वाँ पद का औसत

$Q_2 = \frac{2N}{4}$ वाँ पद तथा $\frac{2N}{4} + 1$ वाँ पद का औसत

$Q_3 = \frac{3N}{4}$ वाँ पद तथा $\frac{3N}{4} + 1$ वाँ पद का औसत

7.3.2 आवृत्ति वितरण के लिए चतुर्थक की गणनाः

आवृत्ति वितरण दिये होने पर समंको को आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करके संचयी आवृत्ति की गणना करके प्रथम द्वितीय एवं चतुर्थ चतुर्थक के लिए क्रमशः $\frac{N}{4}$, $\frac{2N}{4}$ या $\frac{N}{2}$ तथा $3N/_4$ की गणना करेंगे। इन्हें शामिल करने वाली संचयी आवृत्तियों के संगत पद ही अभीष्ट चतुर्थक होंगे।

7.3.3 वर्ग–अन्तरालों की आवृत्ति वितरण के लिए चतुर्थक की गणनाः

वर्ग–अन्तरालों की आवृत्ति वितरण में $N/_4$, $\frac{N}{2}$, तथा $3N/_4$ को शामिल करने वाली संचयी आवृत्तियों के संगत वर्ग क्रमशः प्रथम चतुर्थक वर्ग, द्वितीय चतुर्थक वर्ग तथा तृतीय चतुर्थक वर्ग कहलायेंगे। चतुर्थकों की गणना निम्न सूत्रों द्वारा की जायेगी।

$$Q_1 = L + \frac{i\left(\frac{N}{4} - C\right)}{f}$$

$$Q_2 = L + \frac{i\left(\frac{N}{2} - C\right)}{f}$$

$$Q_3 = L + \frac{i\left(\frac{3N}{4} - C\right)}{f}$$

जहाँ $L -$ उस चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा

$i -$ उस चतुर्थक वर्ग का अन्तराल

$c -$ उस चतुर्थक वर्ग के पूर्व के वर्ग की संचयी आवृत्ति

$f -$ उस चतुर्थक वर्ग की आवृत्ति

उदाहरण : आय वर्ग के निम्न आवृत्ति वितरण के लिए चतुर्थकों की गणना कीजिए–

आय–वर्ग	आवृत्ति
$1000 - 2000$	3
$2000 - 3000$	7
$3000 - 4000$	13
$4000 - 5000$	9
$5000 - 6000$	6
$6000 - 7000$	2

हल : चतुर्थकों की गणना हेतु सर्वप्रथम समंको की संचयी आवृत्ति की गणना करेंगे।

आय वर्ग	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
$1000 - 2000$	3	3
$2000 - 3000$	7	10
$3000 - 4000$	13	23
$4000 - 5000$	9	32
$5000 - 6000$	6	38
$6000 - 7000$	2	40
	40	

$$N = 40$$

$\frac{N}{4} = 10$ अतः इसे शामिल करने वाली संचयी आवृत्ति 10 का संगत वर्ग $2000 - 3000$ का प्रथम चतुर्थक वर्ग कहेंगे।

$\frac{N}{2} = 20$ इसे शामिल करने वाली संचयी आवृत्ति 23 का संगत वर्ग $3000 - 4000$ को द्वितीय चतुर्थक वर्ग कहेंगे।

$\frac{3N}{4} = 30$ इसे शामिल करने वाली संचयी आवृत्ति 32 का संगत वर्ग $4000 - 5000$ को तृतीय चतुर्थक वर्ग कहेंगें।

प्रथम चतुर्थक के लिए

$L = 2000$
$f = 7$
$C = 3$
$i = 1000$
प्रथम चतुर्थक

$$Q_1 = 2000 + \frac{1000\left(\frac{40}{4} - 3\right)}{7}$$

$$= 2000 + 1000\left(\frac{7}{7}\right) = 3000$$

द्वितीय चतुर्थक के लिए
$L = 3000$
$f = 13$
$C = 10$
$i = 1000$

$$Q_3 = 3000 + \frac{1000\left(\frac{40}{2} - 10\right)}{13}$$

$$= 3000 + 1000 \times \frac{10}{13}$$

$$= 3000 + 769.2$$

$$= 3769.2$$

तृतीय चतुर्थ के लिए
$L = 3000$
$f = 13$
$C = 10$
$i = 1000$

$$Q_3 = 4000 + \frac{1000\left(3 \times \frac{40}{4} - 23\right)}{9}$$

$$= 4000 + 1000\left(\frac{7}{9}\right)$$

$$= 4000 + 777.7$$

$$= 4777.7$$

7.4 चतुर्थक विचलन : समंको के बिखराव के मापक के रूप में चतुर्थक विचलन निम्नवत परिभाषित है।
अन्तर चतुर्थक विचलन $= Q_3 - Q_1$
उदारहण उपरोक्त उदाहरण के लिए अन्तर चतुर्थक विचलन $= 4777.7 - 3000 = 1777.7$ होगा।
7.4.1 चतुर्थक विचलन गुणांक : भिन्न भिन्न समंक श्रेणियों में विचलन की तुलना हेतु चतुर्थक विचलन गुणांक निम्नवत परिभाषित है।

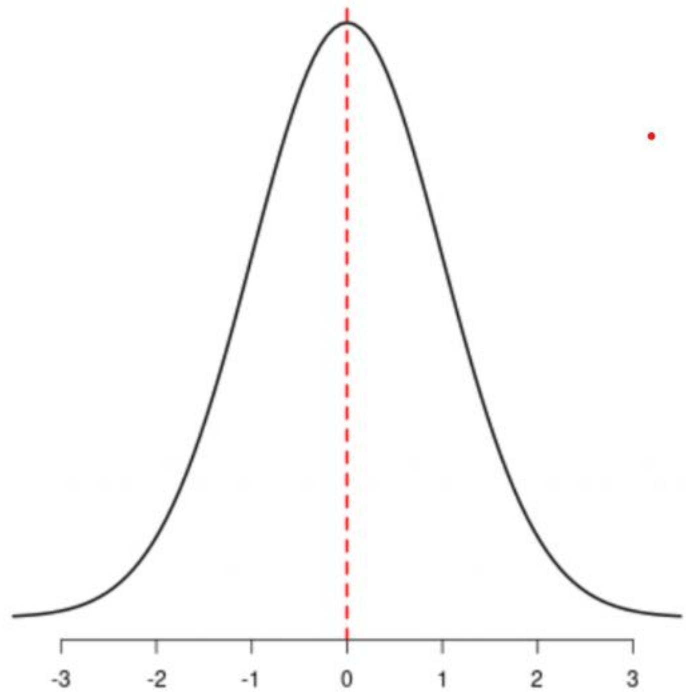
चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

उपरोक्त उदाहरण के लिए

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{4777.7 + 3000}{4777.7 + 3000}$

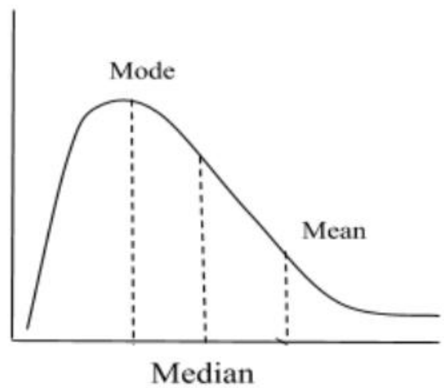
$$= \frac{1777.7}{7777.7} = 0.2286$$

7.5 विषमता :
यदि किसी आवृत्ति वितरण का आयाताकार बहुभुज इस प्रकार का हो कि इसके उच्चतम बिन्दु (अर्थात बहुलक) से एक अनुप्रस्थ काट लगाए जाने पर इस रेखा के दायीं तथा बायीं ओर की आवृत्ति वितरण एक दूसरे का प्रतिबिम्ब लगे तो ऐसे आवृत्ति वितरण को सममित आवृत्ति वितरण (Symmetrical frequency distribution) कहेंगे। एक सममित आवृत्ति वितरण के लिए माध्य माध्यिका एवं बहुलक आपस में बराबर होगें।



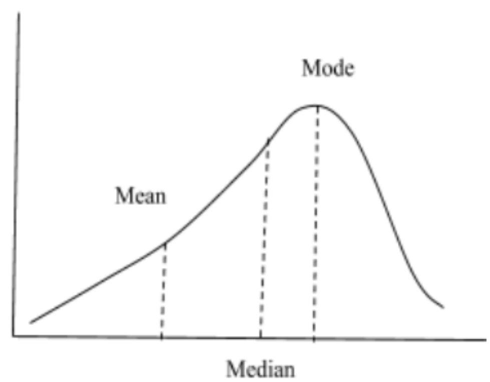
एक सममित आवृत्ति वितरण में समंको का संकेद्रण मध्यमानों के पास अधिक होता है। परन्तु जब ऐसा न हो, अर्थात समंको का वितरण मध्यमान की बजाय निचले या उच्च मान की तरफ ज्यादा हो तो ऐसे आवृत्ति वितरण का आयत चतुर्भुज को बहुलक से काटने पर दोनो हिस्से एक दूसरे के बिम्ब नहीं लगेंगे। साथ ही इनके मध्यमान (समान्तर माध्य, माध्यिका एवं बहुलक) आपस में बराबर नहीं होंगे। ऐसे आवृत्ति वितरण को विषम–आवृत्ति वितरण कहेंगे। आवृत्ति वितरण की विषमता के दो रूप हो सकते है। धनात्मक विषमता तथा ऋणात्मक विषमता।

7.5.1 धनात्मक विषमता : जब एक आवृत्ति वितरण के समंक अपने निम्न मानों की तरफ ज्यादा केन्द्रित हो तो ऐसे आवृत्ति वितरण की विषमता धनात्मक विषमता कहलाती है। धनात्मक विषमता वाले आवृत्ति वितरण में माध्यिका बहुलक से बड़ी तथा समान्तर माध्य माध्यिका से भी बड़ा होता है।



mode<median<mean

7.5.2 ऋणात्मक विषमता : जब किसी आवृत्ति वितरण में समंको का संकेन्द्रण समंको के उच्च मान की तरफ ज्यादा न हो तो ऐसे आवृत्ति वितरण की विषमता को ऋणात्मक विषमता कहते है। ऋणात्मक विषमता वाले आवृत्ति वितरण में माध्यिका समान्तर माध्य से बड़ी तथा बहुलक माध्यिका से भी बड़ा होता है।



mean<median<mode

वस्तुतः किसी भी विषम आवृत्ति वितरण में बहुलक से माध्यिका का अन्तराल माध्यिका तथा समान्तर माध्य के अन्तराल का तिगुना होता है।
अर्थात

$(\bar{X} - Z) = 3(\bar{X} - M)$

जहाँ, $\bar{X}$ =माध्य

$M =$ माध्यिका

$Z =$ बहुलक

7.6 विषमता की माप

विषमता की माप करने के लिए कुछ प्रमुख निरपेक्ष मापक निम्नवत् हैं–

(i) विषमता $S_k = \bar{X} - M$

(ii) विषमता $S_k = (Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1) = Q_3 - 2Q_2 + Q_1$

बोध प्रश्न 1–किसी समंक श्रेणी का समानांतर माध्य 5 तथा माध्यिका 6 हो तो बहुलक का मान क्या होगा? इस आवृत्ती वितरण की विषमता पर भी टिप्पणी कीजिए।

विषमता के निरपेक्ष मान के धनात्मक होने पर धनात्मक विषमता, विषमता के निरपेक्ष मान के ऋणात्मक होने पर ऋणात्मक विषमता तथा इसके शून्य होने पर आवृत्ती वितरण में असमानता का अभाव होगा अर्थात आवृत्ती वितरण सम होगा।

विषमता के निरपेक्ष मान द्वारा भिन्न भिन्न समंक श्रेणियों में विषमता की आपस में तुलना नहीं की जा सकती। इसके लिए विषमता के गुणांक निकालने पड़ेंगे। कुछ प्रमुख विषमता के गुणांक निम्नवत हैं।

I. कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक :

$$S_k = \frac{(\bar{X}-Z)}{\sigma} \quad \text{या} \quad \frac{3(\bar{X}-M)}{\sigma}$$

II. प्रो0 बाऊले का विषमता गुणांक :

$$S_k = \frac{(Q_3-Q_2)-(Q_2-Q_1)}{(Q_3-Q_2)+(Q_2-Q_1)} \text{ या } \frac{Q_3-2Q_2+Q_1}{Q_3-Q_1}$$

7.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. दिया है–

   समान्तर माध्य $\bar{X} = 5$ तथा माध्यिका $M = 6$

   हम जानते हैं कि विषम आवृत्ति वितरण में बहुलक से माध्यिका का अन्तराल माध्यिका तथा समानान्तर माध्य के अन्तराल का दुगुना होता है।

अर्थात

$$(Z - M) = 2M - \bar{X}$$

या

$$Z = 3M - 2\bar{X}$$

$$\Rightarrow Z = 3(6) - 2(5)$$

$$\Rightarrow Z = 18 - 10 = 8$$

अर्थात बहुलक का मान 8 होगा ।

अब विषमता $S_k = \bar{X} - M = 5 - 6 = -1$

अर्थात इस आवृत्ती वितरण के लिए विषमता ऋणात्मक होगी।

7.8 अभ्यास प्रश्न

1. निम्न समंक श्रेणी के लिए कार्ल पियर्सन का विषमता गुणांक ज्ञात कीजिए –

X	20	25	30	35	40	45	50	55
F	2	5	12	15	10	8	7	3

7.9 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

Elhance, D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Greenlaw, Steven A (2005): Doing Economics: A Guide to Understanding and Carrying Out Economic Research.

Gupta, S.P (2011) : Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

Hazarika, Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Kothari, C.R: Research Methodology: Methods & Techniques. New Age International Publishers ISBN (13) : 978-81-224-2488-1
Leighton, Thomas (2011) : Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.
Lind, Wathen &Marchal (2013): Basic Statistics for Business & Economics, McGraw Hill Education.
Newbold, Paul (2008) : Statistics for Business and Economics , Pearson Education.
Richard , I. Levin. H. Siddiqui Masood S. Rubin David Sanjay Rastogi (2017): Statistics for Management. Pearson. ISBN-10 8184957491
Sharma,J.K(2011) : Business Statistics "Pearson Education.

इकाई–8:
लॉरेन्ज वक्र (Lorenz Curve)

इकाई संरचना (Unit Plan)

8.1 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थीः

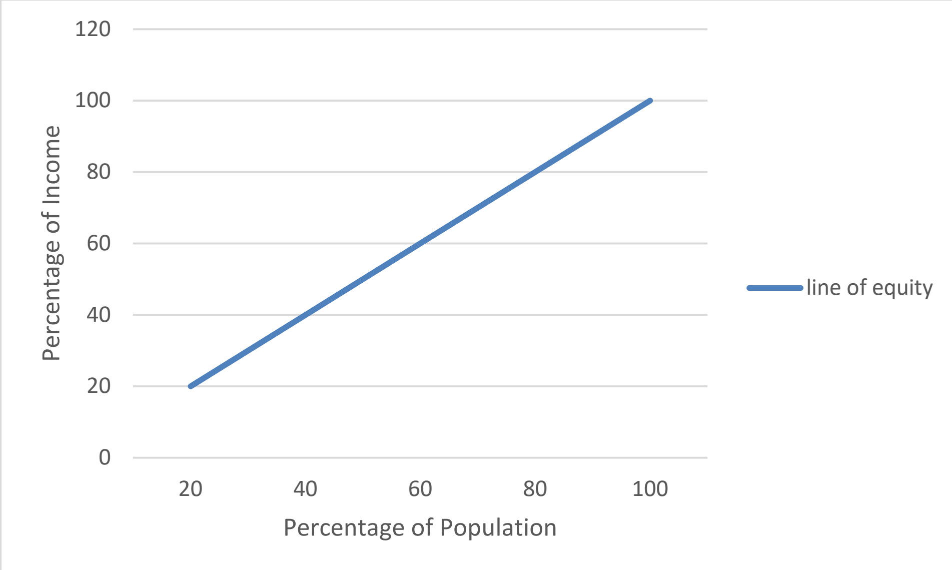
1. लॉरेंज वक्र के महत्व से परिचित हो जाएंगे।
2. दिए हुए समंक की आवृत्ती वितरण से लॉरेंज वक्र बनाना सीख जाएंगे
3. दो या दो से अधिक लॉरेंज वक्रों के बीच तुलना करके वांछित निष्कर्ष निकाल सकेंगे।

8.2 प्रस्तावना

लोरेंज वक्र एक रेखा–चित्रीय उपकरण है जिसका उपयोग जनसंख्या के भीतर आय या धन वितरण को चित्रित करने के लिए किया जाता है। यह वक्र आर्थिक असमानता का अध्ययन करने में अत्यंत उपयोगी होता है। लोरेंज वक्र अर्थशास्त्र और अन्य सामाजिक विज्ञान के अध्ययन में भी अत्यंत महत्व रखता है क्योंकि यह जनसंख्या के भीतर आय या धन वितरण को एक रेखाचित्र के माध्यम से दर्शा देता है। इस इकाई में हम गणितीय अर्थशास्त्र के इसी महत्वपूर्ण विधि को समझेंगे।

8.3 लॉरेंज वक्र – परिचय

आवृत्ति वितरणों की विषमता के अन्तर्गत हमने समंको के उनके निम्न, मध्य अथवा उच्च मानों की तरफ संकेद्रण को सापेक्षता में समझा। परन्तु कभी कभी हम समंको के अनुपात का उनकी आवृत्ति के अनुपात में वितरण जानने के इच्छुक हो सकते हैं। उदाहरण के लिए एक अर्थषास्त्री होने के नाते हम यह जानने के इच्छुक हो सकते हैं कि अर्थव्यवस्था में धन, सम्पति का वितरण कैसा है या फिर विभिन्न योजनाओं के लाभार्थियों में योजनाओं के लाभ का वितरण कैसा है। धन या सम्पति के आदर्श वितरण की दशा में देश की जनसंख्या के प्रत्येक प्रतिशत स्तर के बीच कुल धन/सम्पति का उतना ही प्रतिशत हिस्सा होना चाहिए। अर्थात देश की 1% जनसंख्या के पास कुल धन सम्पति का भी 1% हिस्सा होना चाहिए इसी प्रकार देश की 5% जनसंख्या के पास कुल धन सम्पति का 5% हिस्सा या 20% जनसंख्या के पास धन सम्पति का 20% हिस्सा या क्रमशः 40% जनसख्या के पास 40% हिस्सा, 75% जनसंख्या के पास 75% हिस्सा होना चाहिए। अगर धन सम्पति का वितरण इस प्रकार से होगा तो हम कहेंगे कि वितरण में असामनता का अभाव है। वितरण में सामनता के दृष्टिकोण से इसे एक आदर्श स्थिति कहेंगे। रेखाचित्र में इस आदर्ष स्थिति को समान वितरण की रेखा (Line of equal distribution) द्वारा दर्शाते हैं



संलग्नक चित्र संख्या 8.1 में समान वितरण की रेखा ED द्वारा दर्शाया गया है। इस रेखा के प्रत्येक बिन्दु पर जनसंख्या का प्रतिशत धन/सम्पति के प्रतिशत के बराबर है। लॉरेन्ज वक्र वितरण की असामनता को दर्शाने वाला वक्र होता है जो समान वितरण की रेखा से दूरी के सापेक्ष असामनता के स्तर को प्रदर्शित करता है।

8.4 लॉरेन्ज वक्र बनाने की विधि :

लॉरेन्ज वक्र बनाने के लिए सर्वप्रथम वांछित अभिलक्षणों के समंको एवं आवृत्तियों दोनो के ही संचयी मानों के स्तम्भ बनाते है। तत्पश्चात इन संचयी मानों के कुल के प्रतिशत के रूप में नये स्तम्भ बना लेते हैं। तत्पश्चात $X -$ अक्ष पर आवृत्ति के प्रतिशत को तथा $Y -$अक्ष पर अभिलक्षण के प्रतिशत को अंकित करके इनके संगत निर्देशांक बिन्दुओं को मिलाते हैं। यहाँ उल्लेखनीय है कि $Y -$ अक्ष पर अभिलक्षण के समंको के संचयी मूल्य के प्रतिशत का क्रम 0 से 100 प्रतिशत का रहेगा परन्तु $X -$ अक्ष पर संचयी आवृत्तियों के प्रतिशत का क्रम 100 से 0 प्रतिशत का रहेगा। यदि आवृत्ति वितरण समंको की बजाये वर्गान्तरों का हो तो वर्गो के मध्यमान निकल कर यही प्रक्रिया करेंगे।

उदाहरण : यदि हम आर्थिक असामनता के अध्ययन हेतु 200 परिवारों का सर्वेक्षण करते है और उनकी सम्पति के मूल्यों का निम्न आवृत्ति वितरण प्राप्त होता है।

सम्पति का वर्ग (लाख रूपये में)	**आवृत्ति**
$0 - 2$	80
$2 - 4$	60
$4 - 6$	30
$6 - 8$	25
$8 - 10$	5

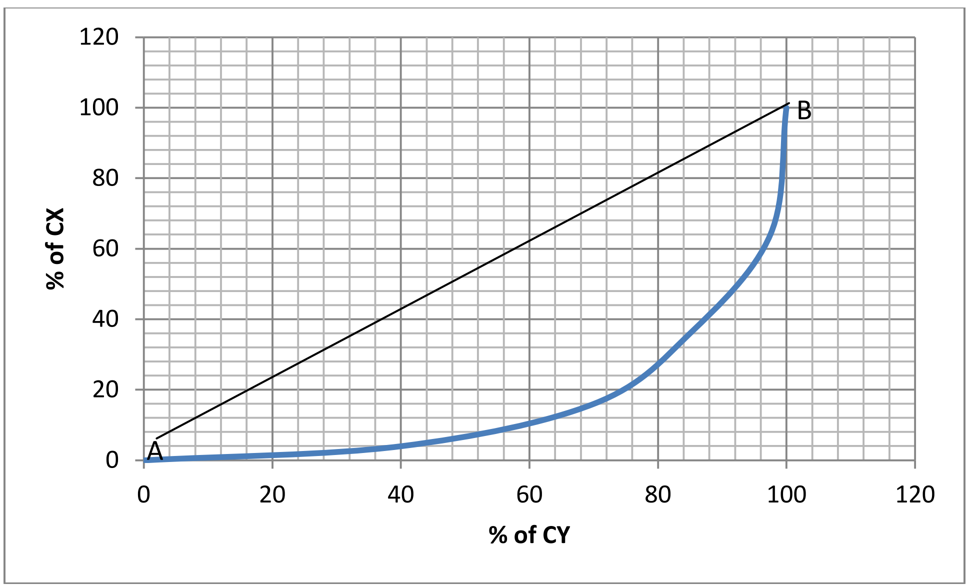
सम्पति तथा उसकी धारणीयता में इस आवृत्ति वितरण में असामानता को दर्शाने वाले लॉरेन्ज वक्र का निर्माण करने हेतु हम निम्न पदों (Steps) का अनुपालन करेंगे।

1. वर्गो के मध्यमान निकालेंगे।
2. समंको (मध्यमानों) तथा आवृत्तियों के संचयी मूल्यों को ज्ञात करते हुए पृथक स्तम्भों में दर्शयेंगे।
3. प्रत्येक समंक एवं आवृत्ति के संचयी मान का प्रतिशत मूल्य ज्ञात करते हुए पुनः नये स्तम्भों में दर्शायेंगे।
4. समंको के संचयी मानों के प्रतिशत को आवृत्तियों के संचयी मानों के प्रतिशत के सापेक्ष बिन्दु ओरख बनाकर दर्शायेंगे जो कि अभीष्ट लॉरेन्ज वक्र होगा।

सम्पति का वर्ग (C I)	आवृत्ति (Y)	मध्यमान (X)	समंको का संचयी मान (CX)	समंकों का संचयी प्रतिशत मान (% of CX)	संचयी आवृत्ति (CY)	आवृत्ति के संचयी मान के % मान (% of CY)
$0-2$	80	1	1	4	80	40
$2-4$	60	3	4	16	140	70
$4-6$	30	5	9	36	170	85
$6-8$	25	7	16	64	195	97.5
$8-10$	5	9	25	10	200	100

$N=200$

समंको के संचयी मानों के प्रतिशत का संचयी आवृत्ति के प्रतिशत के सापेक्ष बिन्दु आरेख–

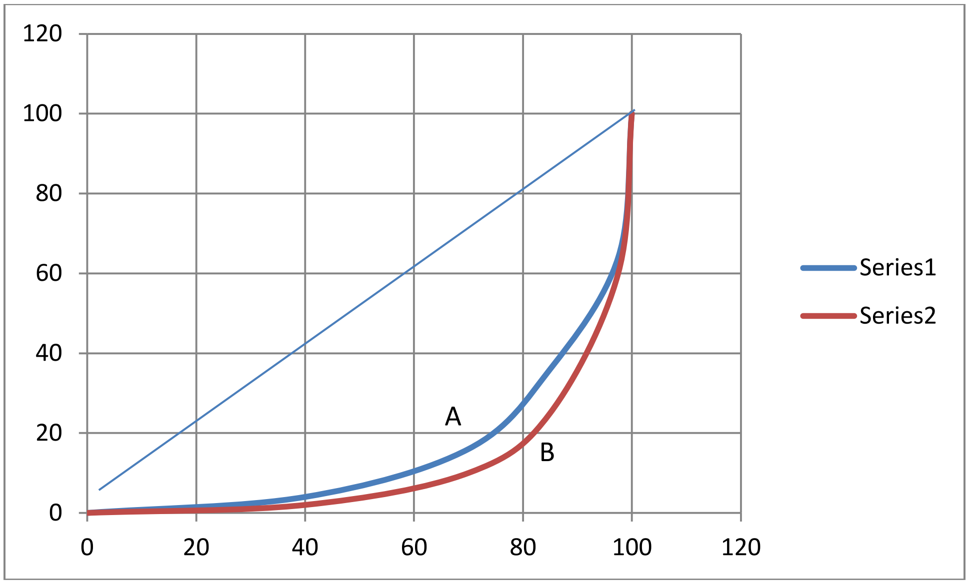


यहाँ AB समान वितरण की रेखा है।

स्पष्ट है कि लॉरेन्ज वक्र समान वितरण की रेखा से अत्यधिक दूर है अतः हम कह सकते है कि उपरोक्त सर्वेक्षण में सम्पति के वितरण में अत्यधिक असमानता परिलक्षित होती है।

8.5 लॉरेंज वक्रों द्वारा दो अर्थव्यवस्थाओं में व्याप्त विषमताओं का तुलनात्मक अध्ययनः

यदि एक ही रेखा चित्र में एक से अधिक अर्थव्यवस्थाओं में वितरण की असमानता का लॉरेन्ज वक्र बनाया जाये तो उनमें व्याप्त असमानताओं का तुलनात्मक अध्ययन किया जा सकता है।



इस रेखाचित्र द्वारा दर्शाये गए दो भिन्न देशों A तथा B के लोरन्ज वक्रों से स्पष्ट होता है कि देश A की अपेक्षा देश B का लोरेंज वक्र समान वितरण की रेखा से ज्यादा दूरी पर है, इसका निहितार्थ यह है कि देश B में असमानता का स्तर देश A की तुलना में अधिक है। इस प्रकार लॉरेंज वक्रों के माध्यम से दो या दो से अधिक अर्थव्यवस्थाओं में व्याप्त असमानता का चित्रण किया जा सकता है तथा अत्यधिक सहजता से निष्कर्ष पर पहुँचा जा सकता है।

8.6 अभ्यास के प्रश्न

1. Construct the Lorenz Curve from the data given below:

Income (X) in Rs.	100	200	400	500	800
No. of Person (F)	80	70	50	30	20

8.7 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

Elhance, D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Greenlaw, Steven A (2005): Doing Economics: A Guide to Understanding and Carrying Out Economic Research.

Gupta, S.P (2011) : Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

Hazarika, Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Kothari, C.R: Research Methodology: Methods & Techniques. New Age International Publishers ISBN (13) : 978-81-224-2488-1

Leighton, Thomas (2011) : Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.

Lind, Wathen &Marchal (2013): Basic Statistics for Business & Economics, McGraw Hill Education.

Newbold, Paul (2008) : Statistics for Business and Economics , Pearson Education.

Richard , I. Levin. H. Siddiqui Masood S. Rubin David Sanjay Rastogi (2017): Statistics for Management. Pearson. ISBN-10 8184957491

Sharma,J.K(2011) : Business Statistics “Pearson Education.

खण्ड–3
सहसम्बन्ध विश्लेषण
इकाई–1
सहसम्बंधः अर्थ, महत्व, प्रकार, परिमाण
(Correlation: Meaning, Importance, Types and Measurement)

इकाई संरचना (Unit plan)

1.1 उद्देश्य (Objectives)
इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी :

1. सहसंबंध के अर्थ, प्रकार तथा इसके अध्ययन के महत्व को समझेंगे।
2. सहसंबंध की गणितीय माप के विभिन्न मूल्य किस प्रकार के सहसंबंध की पुष्टि करते हैं यह सीख जाएंगे।

1.2 प्रस्तावना (Introduction)
आर्थिक जगत के अध्ययन में हम पाते हैं कि प्रायः एक से अधिक क्षेत्रों में परिवर्तन साथ – साथ होते हैं। जैसे –

1. अर्थव्यवस्था में मोटर वाहनों की बिक्री तथा सीमेंट की खपत की मात्रा
2. प्रति व्यक्ति आय तथा सकल घरेलू आय में कृषि की हिस्सेदारी
3. स्कूली शिक्षा के वर्ष तथा मृत्यु दर इत्यादि

ध्यान रहे कि विभिन्न क्षेत्रों में परिवर्तन की दिशा एक समान या विपरीत हो सकती है । जब एक से अधिक क्षेत्र में परिवर्तन साथ साथ होता है तो इसको ही सांख्यकीय भाषा में सहसंबंध कहते हैं। यदि हमें एक क्षेत्र से सहसंबंध रखने वाले अन्य क्षेत्रों का ज्ञान हो तो हम उस क्षेत्र विशेष में वांछित परिवर्तन हेतु नीति का निर्माण कर अन्य सभी संबंधित क्षत्रों में भी परिवर्तन प्राप्त कर सकते हैं। इस दृष्टिकोण से अर्थ–जगत में

सहसंबंध विश्लेषण के अध्ययन का बहुत ही महत्व है। इस इकाई में हम सहसंबंध के अर्थ, प्रकार तथा उसके परिमाण का विस्तार से अध्ययन करेंगे।

1.3 सहसंबंधः परिचय (Correlation: Introduction)

दो या दो अधिक चरों के सापेक्षिक परिवर्तनों के परिमाण तथा दिशा का अध्ययन हम सह–सम्बन्ध विश्लेषण के अन्तर्गत करते हैं। जब दो चरो में परिवर्तन एक साथ एक ही या विपरीत दिशा में हो तो हम कहते हैं कि दोनों चरों के बीच सह–सम्बन्ध है। यदि चरों में होने वाला परिवर्तन एक ही दिशा में हो तो यह धनात्मक सह–सम्बन्ध का परिचायक होता है जबकि यदि दोनों चरों में परितर्वन एक दूसरे से विपरीत दिशा में हो तो ऋणात्मक सह–सम्बन्ध परिलक्षित होता है। सहसम्बन्ध के परिमाण तथा दिशा (धनात्मक या ऋणात्मक) की माप करने वाला गुणांक सहसम्बन्ध गुणांक कहलाता है।

यद्यपि सह सम्बन्ध दो या दो से अधिक चरों में परिवर्तन से सम्बन्धित विचार है परन्तु यह सदैव आवश्यक रूप से कारण–परिणाम सम्बन्ध नहीं होता है। अर्थात सह–सम्बन्ध यह नहीं बताता कि किसी चर में होने वाला परितर्वन अन्य चरों में परिवर्तन के परिणाम स्वरूप होता है। उदाहरण के लिए किसी कक्षा के विद्यार्थियों के गणित एवं अर्थशास्त्र के विषयों के प्राप्तांकों में होने वाला परितर्वन एक ही दिशा में हो सकता है जिसकी वजह से दोनो विषय के प्राप्तांको में धनात्मक सह–सम्बन्ध गुणांक प्राप्त होगा परन्तु यह कहना उचित नहीं होगा कि विद्यार्थी गणित पढ़ते हैं इसलिए अर्थशास्त्र में अच्छे अंक प्राप्त होते है या विद्यार्थी अर्थशास्त्र पढ़ते हैं इसलिए गणित में अच्छे अंक प्राप्त होते हैं। इसी प्रकार भारत में पिछले कुछ वर्षो में चावल की पैदावार तथा बाढ़ से विस्थापित लोगों की संख्या में होने वाले परिवर्तन विपरीत दिशा में हो सकते हैं अर्थात इनके बीच ऋणात्मक सह सम्बन्ध हो सकता है। परन्तु इससे यह निष्कर्ष नहीं निकाला जाना चाहिए कि बाढ़ से विस्थापितों की संख्या में गिरावट चावल की पैदावार बढ़ने से आयी है या फिर कि चावल की पैदावार में वृद्धि बाढ़ से विस्थापन में कमी लाती है। कुल मिलाकर कहने का तात्पर्य इतना है कि सह–सम्बन्ध कारण–परिणाम सम्बन्ध नहीं होते है। हालांकि कारण परिणाम सम्बन्ध वाले चरों में सह–सम्बन्ध होगा। कारण परिणाम सम्बन्धों के बारे में हम प्रतीपगमन (इकाई–4) में पढ़ेगें।

1.4 सहसंबंध का महत्व (Importance of Correlation)

सहसम्बन्ध एक महत्वपूर्ण द्विचरीय अथवा बहुचरीय विवेचनात्मक सांख्यिकी होता है जिसके माध्यम से दो या दो से अधिक चरों में परिवर्तन की दिशा के साथ–साथ इनके बीच सह–सम्बन्ध के परिमाण (सह–सम्बन्ध गुणांक) की गणना कर सकते हैं। सहसम्बन्ध यद्यपि कारण–परिणाम सम्बन्ध नहीं होते मगर चरों के मध्य सह–सम्बन्ध आगे कारण–परिणाम सम्बन्ध के अध्ययन की पहली सीढ़ी कहे जा सकते हैं। यदि चरों में सह–सम्बन्ध हैं तो हम आगे जानना चाहेंगें कि क्या इनके बीच कारण–परिणाम का भी सम्बन्ध है या फिर ये चर अन्य किसी कारण (चर) से सम्बन्धित है। नीतिगत निर्णयों में सह सम्बन्ध बहुत काम के हो सकते हैं, जैसे हम ऐसे नीतिगत निर्णय लेने के इच्छुक हो सकते है जिसके परिणाम आपस में सम्बन्धि अधिक से अधिक क्षेत्रों पर पड़े। व्यापार, उद्यम तथा वाणिज्य के क्षेत्र में सह–सम्बन्ध निर्णय लेने में अहम भूमिका तय करता है। सहसम्बन्धों के माध्यम से व्यापार में ऐसे पूर्वानुमान लगाये जा सकते है जिनसे अनिश्चितता में कमी आये।

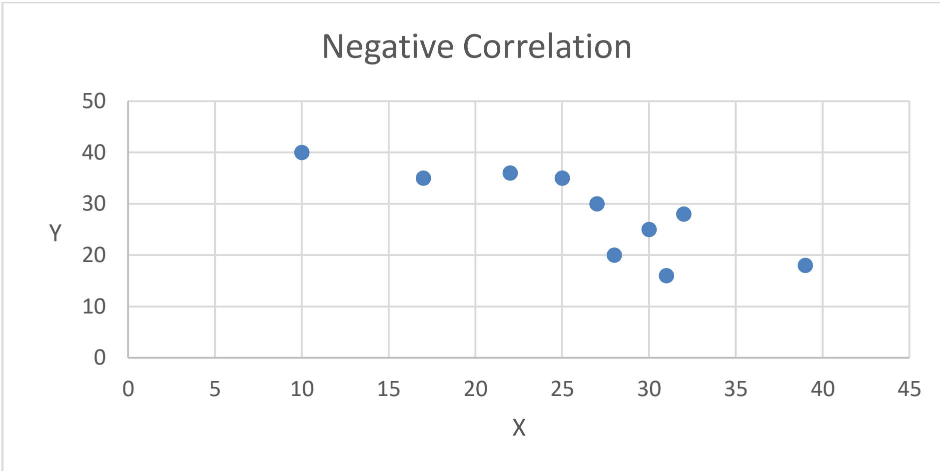
1.5 सहसंबंध के प्रकार (Types of Correlation)

चरों में परिवर्तन की दिशा के आधार पर सह–सम्बन्ध दो प्रकार के हो सकते है।

1. धनात्मक सह–सम्बन्ध
2. ऋणात्मक सह–सम्बन्ध

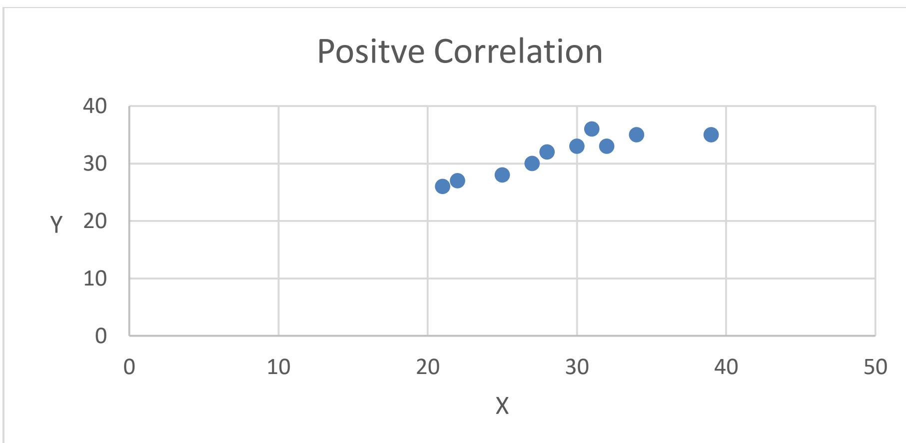
जब दो चरो में परिवर्तन की दिशा समान हो, अर्थात जब दोनों चर एक साथ बढें या एक साथ घटें तो इसे धनात्मक सह–सम्बन्ध कहते है। इसके विपरीत जब दो चरों में परिवर्तन की दिशा विपरीत हो अर्थात एक चर में वृद्धि हो रही है जबकि दूसरे चर में ह्रास हो रहा हो तो इनके बीच ऋणात्मक सह सम्बन्ध कहलाएगा। सह सम्बन्ध के परिमाण की सटीक गणना तो सह सम्बन्ध गुणांक से ही सम्भव है परन्तु द्विचरीय सह सम्बन्धों की दिशा विक्षेप चित्रों के माध्यम से भी ज्ञात की जा सकती है। यहाँ द्विचरीय सह सम्बन्ध को दर्शाने वाले कुछ विक्षेप चित्र दर्शाये गये हैं–

विक्षेप चित्र–1



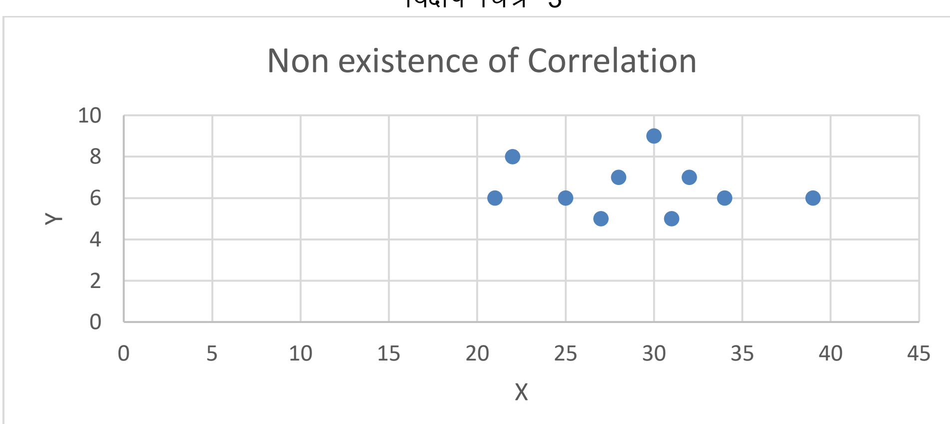
विक्षेप चित्र–1 में चर X के मान बढ़ने पर चर Y के मान घट रहे हैं अर्थात चर X तथा चर Y के मानों में परिवर्तन विपरीत दिशा में हो रहा है अतः यहां सह सम्बन्ध की दिशा ऋणात्मक होगी।

विक्षेप चित्र–2



विक्षेप चित्र–2 में दोनो चरों में परिवर्तन की दिशा समान है अर्थात चर X में तथा चर Y में वृद्धि साथ–साथ होती है। अतः यह सह सम्बन्ध धनात्मक होगा।

विक्षेप चित्र–3



विक्षेप चित्र–3 में किसी भी प्रकार के सह सम्बन्ध की पुष्टि नहीं की जा सकती।

1.6 सहसंबंध की माप (Measurement of Correlation)

दो चरों के बीच सह सम्बन्ध को मापा जा सकता है तथा इस आधार पर चरों के मध्य सहसबंध की गहनता की तुलना भी की जा सकती है। सह सम्बन्ध का मापक सह सम्बन्ध गुणांक (Correlation Coefficient) कहलाता है। सह सम्बन्ध गुणांक को $'r'$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं। r का मान -1 से $+1$ के बीच हो सकता है। सह सम्बन्ध गुणांक में $+$ या $-$ का चिन्ह सह सम्बन्ध की दिशा बतलाता है तथा संख्यात्मक मान सह सम्बन्घ की मात्रा या कोटि को बतलाता है।

यदि $r = 0$ तो सह सम्बन्ध नहीं है।

यदि $0 < r \leq +0.25$ तो निम्न कोटि का धनात्मक सह सम्बन्ध कहलायेगा।

यदि $0.25 < r \leq +0.75$ तो मध्यम कोटि का धनात्मक सह सम्बन्ध कहलायेगा।

यदि $0.75 < r < +1$ तो उच्च कोटि का धनात्मक सह सम्बन्ध कहलायेगा।

यदि $r = 1$ तो पूर्णतया धनात्मक सह सम्बन्ध कहलायेगा।

यदि $r = -1$ तो पूर्णतया ऋणात्मक सह सम्बन्ध कहलायेगा।

यदि $-1 < r \leq -0.75$ तो उच्च कोटि का ऋणात्मक सह सम्बन्ध कहलायेगा।

यदि $-0.75 < r \leq -0.25$ तो मध्यम कोटि का ऋणात्मक सह सम्बन्ध कहलायेगा।

तथा यदि $-0.25 < r < 0$ तो निम्न कोटि का ऋणात्मक सह सम्बन्ध कहलायेगा।

बोध प्रश्न 1– यदि दो समंक श्रेणियों X तथा Y के मध्य सहसंबंध गुणांक r का मान -0.45 है तो इस प्रकार के सहसबंध की विवेचना कीजिए।

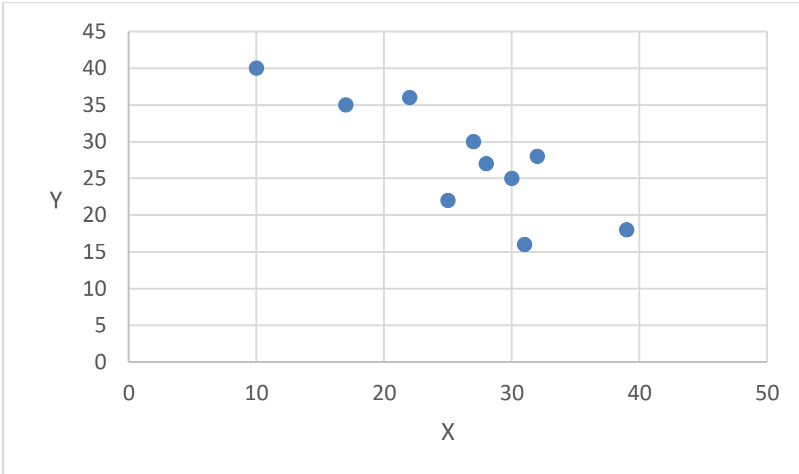
1.7 सहसम्बन्ध के कारण (Causes of Correlation)

सहसम्बन्ध के मुख्य रूप से तीन कारण हो सकते हैं–

1. यदि दोनों चरों में सम्बन्ध होः यघपि दो चरों में सहसम्बन्ध यह कतई नही दर्शाता कि दोनों चरों के बीच कारण तथा परिणाम का सम्बन्ध है परन्तु यदि चरों के बीच कारण तथा परिणाम का सम्बन्ध होगा तो उनके बीच सहसम्बन्ध अवश्य होगा। जैसे आय तथा उपभोग के बीच कारण तथा परिणाम का का सम्बन्ध होता है; अर्थात उपभोग आय पर निर्भर करता है। आय के बढ़ने पर उपभोग में वृद्धि होती है। अतः आय तथा उपभोग के बीच धनात्मक सहसम्बन्ध देखने को मिलेगा।
2. दोनो चर किसी अन्य चर के परिवर्तनों के परिणाम होः कभी कभी ऐसा भी होता है कि दो चरों के बीच प्रत्यक्ष रूप से कारण–परिणाम सम्बन्ध नहीं हों परन्तु ये किसी अन्य कारण से प्रभावित होते हों तो भी इन चरों के बीच सह–सम्बन्ध देखने को मिलता है। उदाहरण के लिए हमें किसी अर्थव्यवस्था में कैब ड्राईवर की संख्या एवं काश्तकारों (किसानों) की संख्या में ऋणात्मक सह–सम्बन्ध देखने को मिल सकता है। इसका अर्थ यह नहीं हो सकता कि काश्तकारों की संख्या घटनें का कारण कैब ड्राईवर की संख्या में इजाफा होता है अथवा इसके विपरीत कैब ड्राईवरों की संख्या में वृद्धि काश्तकारों की संख्या में कमी के कारण हो रही है। वस्तुतः काश्तकारों एवं कैब ड्राईवरों की संख्या के बीच किसी भी प्रकार का प्रत्यक्ष कारण–परिणाम सम्बन्ध नहीं है, परन्तु यह दोनों ही चर किसी अन्य चर पर निर्भर करते हैं। अर्थव्यस्था संरचनात्मक परिवर्तन यथा नगरीकरण के परिणाम स्वरूप हो सकता है कि उपरोक्त दोनो चर परिवर्तित हो रहे हैं। अतः कैब ड्राईवर तथा काश्तकारों के बीच सह सम्बन्ध कारण–परिणाम को नहीं बताता है।
3. निरर्थक सहसम्बन्ध : कई बार दो ऐसे चरों के बीच भी सहसम्बन्ध दिखाई देता है जिसका संख्यिकीय महत्व भले हो परन्तु ये औचित्यपूर्ण अध्ययन की दृष्टि से अर्थहीन होते हैं। जैसे किसी

क्षेत्र विशेष में चाइनीज व्यंज्जन की खपत तथा वार्षिक औसत वर्षा के स्तर में धनात्मक सम्बन्ध का पाया जाना किसी औचित्य पूर्ण अध्ययन की प्राप्ति नहीं कही जा सकती है।

बोध प्रश्न 2. निम्न विक्षेप चित्र द्वारा दर्शाये गए सहसंबंध की विवेचना कीजिए।



1.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answer to the basic Questions)

1– दिया है दो समंक श्रेणियों X तथा Y के मध्य सहसंबंध गुणांक r का मान $= -0.45$

यहाँ ऋण का चिह्न ऋणात्मक सहसंबंध की पुष्टि करता है तथा सहसंबंध गुणांक -0.75 तथा -0.25 के मध्य है अतः यह माध्यम कोटि का ऋणात्मक सहसंबंध कहलाएगा।

2–दिए हुए विक्षेप चित्र द्वारा दर्शाये गया सहसंबंध मध्यम कोटी का ऋणात्मक सहसंबंध प्रतीत होता है।

1.9 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise)

1. निम्न समंक श्रेणी का विक्षेप चित्र बनाते हुए चरों के मध्य सहसंबंध पर टिप्पणी कीजिए।

X	2	4	6	8	10	12	14	16	18
Y	6	6	9	12	13	12	17	16	20

1.10 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography and Usefull Books)

Elhance, D.L (2010): Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Greenlaw, Steven A (2005): Doing Economics: A Guide to Understanding and Carrying Out Economic Research.

Gupta, S.P (2011): Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

Hazarika, Padmalochan (2006): Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Kothari, C.R: Research Methodology: Methods & Techniques. New Age International Publishers ISBN (13): 978-81-224-2488-1

Leighton, Thomas (2011) : Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.

Gupta and Kapoor (Latest Edition): Fundamental of Mathematical Statistics, Sultan Chand & Sons, Delhi.

इकाई–2
सहसम्बन्ध विश्लेषणः सरल, बहुगुणी तथा आंशिक सहसम्बन्ध
(Correlation Analysis: Simple, Multiple and Partial Calculation)

इकाई संरचना (Unit Plan)

2.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी :

1. सरल, आंशिक एवं बहुगुणी सहसम्बंधों के अर्थ समझते हुए इनमें विभेद करना सीख जाएंगे।
2. सरल सहसम्बंधों की भांति आंशिक एवं बहुगुणी सहसम्बंधों की गणना कि विधियाँ भी सीख जाएंगे।

2.2 प्रस्तावना (Introduction)

आर्थिक जगत में दो या दो से अधिक क्षेत्रों की अन्तरक्रिया एक सहज घटना है। जब मात्र दो आर्थिक चरों में उतार–चढ़ाव (परिवर्तन) का अध्ययन करते हैं तो इसे सरल सहसंबंध विश्लेषण कहते हैं। दो से अधिक चरों की स्थिति में इनके मध्य अंतरसम्बंध का अध्ययन आंशिक तथा बहुगुणी सहसम्बंध के अंतर्गत करते हैं। इस इकाई में हम आंशिक तथा बहुगुणी सहसम्बंध का विस्तृत अध्ययन करेंगे।

2.3 सरल सहसम्बन्ध (Simple correlation)

सरल सहसम्बन्ध से तात्पर्य दो चरों के बीच सहसम्बन्ध से है। जब हमारा सहसम्बन्ध विश्लेषण द्विचरीय होता है तो इन चरों में परिवर्तन की दिशा तथा सहसम्बन्ध के परिणाम का अध्ययन सरल सहसम्बन्ध के अर्न्तगत करते हैं। पिछली इकाई में हमने सहसम्बन्ध के इसी प्रकार का विस्तृत अध्ययन किया है। सरल सहसम्बन्ध की माप की विधियों का अध्ययन हम अगली इकाई में करेंगें।

2.4 बहुगुणी सहसम्बन्ध (Multiple Correlation)

बहुचरीय (दो या अधिक चरों के) विष्लेषण में चरों के बीच ऐसे अन्तर्सम्बन्ध भी देखे जाते है जहां एक चर अन्य कई चरों से प्रभावित होता है। उदाहरण के लिए वस्तु की मांग (x_1) कई चरों जैसे वस्तु के मूल्य (x_2) आय के स्तर (x_3) पूरक वस्तु की कीमत (x_4) स्थानपन वस्तु की कीमत (x_5) वस्तु में रूचि (x_6) इत्यादि से प्रभावित होती है। ऐसे में जब हम वस्तु की मांग (x_1) पर अन्य सभी चरों $(x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ आदि) के संयुक्त प्रभाव का अध्ययन करें तो इसे बहुगुणी सहसम्बन्ध कहेंगे।

स्पष्ट है कि बहुगुणी सहसम्बन्ध में एक चर का सहसम्बन्ध अन्य सभी चरों के संयुक्त प्रभाव से देखा जाता है। यदि किसी त्रिचरीय विश्लेषण में जिसमें तीन चर x_1, x_2 तथा x_3 हों यदि चर x_1 का सहसम्बन्ध अन्य दो चरों x_2 तथा x_3 के संयुक्त प्रभाव से देखा जाये तो इसे $R_{1.23}$ से प्रदर्शित करेंगे।

इसी प्रकार $R_{2.13}$ चर x_2 का अन्य दो चरों x_1 तथा x_3 के संयुक्त प्रभाव से सहसम्बन्ध होगा।

और इसी क्रम में $R_{3.12}$ चर x_3 का चर x_1 तथा x_2 के संयुक्त प्रभाव से सहसम्बन्ध होगा। चर x_1 का x_2 तथा x_3 के संयुक्त प्रभाव से बहुगुणी सहसम्बन्ध का परिमाण निम्न सूत्र के माध्यम से ज्ञात किया जाता है।

$$R_{1.23} = \frac{r_{12}^2 + r_{13}^2 - 2r_{12}r_{13}r_{23}}{1 - r_{23}^2}$$

जहाँ r_{12}, r_{13} तथा r_{23} क्रमशः चर x_1 तथा x_2 चर x_1 तथा x_3 एवं चर x_2 तथा x_3 के मध्य सरल सहसम्बन्ध गुणांक है। उपरोक्त की भांति ही x_2 का अन्य चरों से तथा x_3 का अन्य चरों से बहुगुणी सहसम्बन्ध का सूत्र भी लिखा जा सकता है। सरल सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की विधि अगली इकाई में समझाई गई है।

बहुगुणी सहसम्बन्ध गुणांक सदैव धनात्मक होते है।

$$0 \leq R_{1.23} \leq 1$$

इनकी सीमा 0 तथा 1 के बीच होती है।

तीन से अधिक चरों की दशा में बहुगुणी सहसम्बन्ध एक चर का अन्य सभी चरों के संयुक्त प्रभाव से सहसम्बन्ध होता है। यदि चरों की संख्या n हो तो पहले चर x_1 का अन्य सभी चरों $x_2, x_3, \ldots, x_n$ के संयुक्त प्रभाव से बहुगुणी सहसम्बन्ध का गुणांक $R_{1.23\ldots\ldots n}$ से प्रर्दशित होगा।

बोध प्रश्न 1–यदि एक अर्थव्यवस्था में ऑटो सेक्टर के उत्पादन का सीमेंट क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक 0.55, सीमेंट क्षेत्र के उत्पादन का खनन क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक 0.75 तथा ऑटो सेक्टर के उत्पादन का खनन क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक 0.20 हो तो खनन क्षेत्र के उत्पादन का अन्य दोनों क्षेत्रों के उत्पादन से बहुगुणीय सहसंबंध की गणना कीजिए।

2.5 आंशिक सहसम्बन्ध (Partial Correlation)

बहुचरीय विश्लेषण में जब किन्ही दो चरों के मध्य सहसम्बन्ध अन्य सभी चरों के प्रभाव को नजर अंदाज करते हुए देखा जाये तो ऐसे में दोनों चरों के मध्य सहसम्बन्ध को आंशिक सहसम्बन्ध कहेंगे।

उदाहरण के लिए यदि त्रि–चरीय विश्लेषण में जहाँ x_1, x_2 तथा x_3 तीन चर हों यदि x_3 के प्रभावों को नजर अंदाज करते हुए x_1 तथा x_2 के मध्य सहसम्बन्ध देखा जाये तो यह आंशिक सहसम्बन्ध कहलायेगा तथा इसे $r_{12.3}$ से प्रदर्शित किया जायेगा।

x_1 तथा x_2 के आंशिक सहसम्बंध के परिमाण का सूत्र

$$r_{12.3} = \frac{r_{12} - r_{13}r_{23}}{\sqrt{(1-r_{13}^2)\,(1-r_{23}^2)}}$$

इसी सूत्र की भांति x_2 तथा x_3 एवं x_3 तथा x_1 के मध्य भी आंशिक अवकलन के सूत्र लिखे जा सकते है।

तीन से अधिक चर होने पर किन्हीं दो चरों के मध्य आंशिक सहसम्बन्ध को निम्नवत प्रर्दशित करेंगें।

$x_1 x_2$ का आंशिक अवकलन

$r_{12.3\ldots.n}$

$x_1 x_3$ का आंशिक अवकलन

$r_{13.2,4\ldots.n}$

$x_2 x_3$ के मध्य आंशिक अवकलन

$r_{23.1,4,\ldots.n}$ इत्यादि।

बोध प्रश्न 2–यदि एक अर्थव्यवस्था में ऑटो सेक्टर के उत्पादन का सीमेंट क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक 0.55, सीमेंट क्षेत्र के उत्पादन का खनन क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक 0.75 तथा ऑटो सेक्टर के उत्पादन का खनन क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक 0.20 हो तो खनन क्षेत्र के उत्पादन का अन्य दोनों क्षेत्रों के उत्पादन से आंशिक सहसंबंध की गणना कीजिए।

2.6 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. **हलः**–

   मान लें ऑटो सेक्टर का उत्पादन X_1सीमेंट क्षेत्र का उत्पादन X_2 तथा खनन क्षेत्र का उत्पादन X_3है। दिया है कि –

   ऑटो सेक्टर के उत्पादन का सीमेंट क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक $r_{12} = 0.55$

   सीमेंट क्षेत्र के उत्पादन का खनन क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक $r_{23} = 0.75$ तथा

   ऑटो सेक्टर के उत्पादन का खनन क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक $r_{13} = 0.20$

   अतः खनन क्षेत्र के उत्पादन का अन्य दोनों क्षेत्रों के उत्पादन से बहुगुणीय सहसंबंध

$$R_{3.12} = \frac{r_{13}^2+r_{23}^2-2r_{12}r_{13}r_{23}}{1-r_{12}^2}$$

$$R_{3.12} = \frac{0.20^2+0.75^2-2(0.55)(0.75)(0.20)}{1-0.75^2}$$

$$= \frac{0.04+0.5625-0.165}{1-0.5625} = \frac{0.4375}{0.4375} = 1$$

2. **हलः**–

   मान लें ऑटो सेक्टर का उत्पादन X_1 सीमेंट क्षेत्र का उत्पादन X_2 तथा खनन क्षेत्र का उत्पादन X_3 है। दिया है कि –

   ऑटो सेक्टर के उत्पादन का सीमेंट क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक $r_{12} = 0.55$

   सीमेंट क्षेत्र के उत्पादन का खनन क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक $r_{23} = 0.75$ तथा

   ऑटो सेक्टर के उत्पादन का खनन क्षेत्र के उत्पादन के साथ सहसंबंध गुणांक $r_{13} = 0.20$

   अतः खनन क्षेत्र के उत्पादन काऑटो सेक्टर के उत्पादनसे आंशिक सहसंबंध

$$r_{31.2} = \frac{r_{31} - r_{32}r_{12}}{\sqrt{(1-r_{32}^2)(1-r_{12}^2)}} = \frac{0.2-(0.75)(0.55)}{\sqrt{(1-0.75^2)(1-0.55^2)}}$$

$$= -\frac{0.2125}{\sqrt{(0.4375)(0.6975)}} = -\frac{0.2125}{0.5524} = -0.385$$

   खनन क्षेत्र के उत्पादन का सीमेंट क्षेत्र के उत्पादन से आंशिक सहसंबंध

$$r_{32.1} = \frac{r_{32} - r_{31}r_{12}}{\sqrt{(1-r_{31}^2)(1-r_{12}^2)}} = \frac{0.75-(0.20)(0.55)}{\sqrt{(1-0.20^2)(1-0.55^2)}}$$

$$= \frac{0.64}{\sqrt{(0.96)(0.6975)}} = \frac{0.64}{0.6696} = 0.96$$

2.7 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise)

प्रश्न 1.आंशिक तथा बहुगुणी सहसंबंध को समझाइए, दोनों में भिन्नताओं का स्पष्ट कीजिए।

प्रश्न 2.साधारण तथा आंशिक सहसंबंध कैसे एक दूसरे से भिन्न हैं ?

2.8 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography and Useful Books)

Elhance, D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Greenlaw, Steven A (2005): Doing Economics: A Guide to Understanding and Carrying Out Economic Research.

Gupta, S.P (2011) : Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

Hazarika, Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Kothari, C.R: Research Methodology: Methods & Techniques. New Age International Publishers ISBN (13) : 978-81-224-2488-1

Leighton, Thomas (2011) : Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.

Gupta and Kapoor (Latest Edition): Fundamental of Mathematical Statistics, Sultan Chand & Sons, Delhi.

इकाई–3
सह–सम्बन्ध गुणांक, कार्ल पियर्सन तथा स्पियर मैन का कोटि अन्तर गुणांक
(Karl Pearson and Spearman's Rank Correlation Coefficients)

3.1 उद्देश्य (Objectives)
इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी

1- सरल सहसंबंध की गणना की कार्ल पियर्सन विधि से भली भांति परिचित हो जायेंगे।

2- कोटि सहसबंध की गणना की स्पीयरमैन विधि सीख जाएंगे।

3.2 प्रस्तावना (introduction)
आर्थिक इकाइयों अथवा क्षेत्रों के मध्य सहसंबंध ज्ञात होने से उन्हें प्रभावित करने हेतु नीतियों के निर्माण में सुगमता होती है तथा एक विद्यार्थी होने के नाते इस प्रकार के सहसंबंधों की पहचान करना एवं उनकी गणना करना हमें आना चाहिए। यदि संबंधित क्षेत्रों के चरों के मान ज्ञात हों तो सहसंबंध के परिमाण की गणना कैसे की जाए यह हम इस इकाई में सीखेंगे।

जैसा कि प्रथम इकाई में स्पष्ट किया गया है कि सहसम्बन्ध के परिमाण की गणना सहसम्बन्ध गुणांक के द्वारा की जाती है, यहाँ हम दो महत्वपूर्ण सह सम्बन्ध गुणांक की गणना की विधि के बारें में पढ़ेगें।

1. कार्ल पियर्सन का सह सम्बन्ध गुणांक
2. स्पियर मैन का कोटि अन्तर गुणांक

3.3 कार्ल पियर्सन का सह सम्बन्ध गुणांकः

दो चरों X तथा Y के बीच सह सम्बन्ध गुणांक क मापक r की गणना निम्न सूत्र के माध्यम से करते हैं :

$$r_{xy} = \frac{Cov\ (X,Y)}{\sqrt{V(X) \quad V(Y)}}$$

जहाँ

$Cov\ (X, Y) =$ चर X तथा Y के मध्य सहविचरण (Covariance)

$V(X) =$ चर X का विचरण

$V(Y) =$ चर Y का विचरण

उपरोक्त सूत्र को निम्नवत भी लिख सकते हैं

$$r_{xy} = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$$

जहां $\sigma_x =$ चर X का प्रमाप विचलन जो कि X के विचरण का वर्गमूल $\left(\sqrt{V(x)}\right)$ होता है।

तथा $\sigma_y =$ चर Y का प्रमाप विचलन जो कि Y के विचरण का वर्गमूल $\left(\sqrt{V(y)}\right)$ होता है।

3.3.1 सह विचरण (Covariance): सह सम्बन्ध गुणांक की गणना हेतु सह विचरण ज्ञात करना आवश्यक होता है। जिस प्रकार एक चरीय विश्लेषण में किसी चर का उसके माध्य से विचलन/विचरण द्वारा ज्ञात किया जाता है उसी प्रकार द्विचरीय विष्लेषण में दो चरों X तथा Y का उनके माध्यों से विचलन सह विचरण द्वारा ज्ञात किया जाता है। चर X तथा Y का सह विचरण निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है।

$$Cov(X, Y) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (X_i - \bar{X})\ (Y_i - \bar{Y})$$

आवृत्ति वितरण के लिए

$$Cov(X, Y) = \frac{\sum_{i=1} f x_i (X_i - \bar{X})\ f_{yi} (Y_i - \bar{Y})}{N}$$

इस प्रकार के सह सम्बन्ध गुणांक के सूत्र में $Cov\ (X, Y)$ तथा σ_x और σ_y के सूत्र लिखने पर

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})\ (Y_i - \bar{Y})}{N} \div \sqrt{\frac{\sum (X_i - \bar{X})^2}{N}} \times \sqrt{\frac{\sum (Y_i - \bar{Y})^2}{N}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2 \sum (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

यदि चर X के मानों का अपने माध्य से विचलन $X_i - \bar{X} = dx_i$ तथा चर Y के मानों का अपने माध्य Y से अन्तर $Y_i - \bar{Y} = dy_i$ द्वारा व्यक्त किया जाय तो

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} dx_i\, dy_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} d^2 x_i \sum_{i=1}^{n} d^2 y_i}}$$

यह सूत्र याद रखने की दृष्टि से आसान है।

3.3.2 वैकल्पिक सूत्रः जब माध्य के मान दशमलव में प्राप्त हो तो उपरोक्त सूत्र का प्रयोग r की गणना को जटिल बना देगा ऐसे में निम्न सूत्र से सह सम्बन्घ गुणांक की गणना करना हितकर होगा।

$$r = \frac{N \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\{N \sum X^2 - (\sum X)^2\}\{N \sum Y^2 - (\sum Y)^2\}}}$$

उपरोक्त सूत्र प्रारम्भिक सूत्र $r = \frac{Cov\ (X,Y)}{\sigma_x \sigma_y}$ से ही प्राप्त है। हम जानतें है कि–

$$Cov\ (X, Y) = \frac{1}{N} \sum (X - \bar{X})\ (Y - \bar{Y})$$

अब दायें पक्ष का विस्तार करनें पर

$$\frac{1}{N}\left(\sum X.Y - \bar{X}\sum Y - \bar{Y}\sum X + \sum \bar{X}\bar{Y}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\sum X.Y - \bar{X}\frac{\sum Y}{N} - \bar{Y}\frac{\sum X}{N} + \frac{N.\bar{X}\bar{Y}}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum XY - \bar{X}\bar{Y} - \bar{Y}\bar{X} + \bar{X}\bar{Y}$$

$$= \frac{1}{N}\sum XY - \bar{X}\bar{Y}$$

$$= \frac{1}{N}\sum XY - \frac{\sum X}{N}\frac{\sum Y}{N}$$

$$= \frac{1}{N^2}\left(\sum XY - \frac{\sum X \sum Y}{N}\right)$$

अर्थात

$$Cov(X,Y) = \frac{1}{N^2}\left(N\sum xy - \sum X\sum Y\right) \text{.........} 1$$

इसी प्रकार $\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N}\sum(X-\bar{X})^2}$ के दायें पक्ष का विस्तार करनें पर

$$\sqrt{\frac{1}{N}\sum(X^2 + \overline{X^2} - 2X\bar{X})}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N}\left(\sum X^2 + N\bar{X}^2 - 2\bar{X}\sum X\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{N}\sum X^2 + \frac{NX^2}{N} - 2\bar{X}\frac{\sum X}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} + \bar{X}^2 - 2\bar{X}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \bar{X}^2}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum X^2}{N} - \left(\frac{\sum X}{N}\right)^2}$$

अर्थात

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N^2}\left(N\sum X^2 - \left(\sum X\right)^2\right)} \qquad \text{.........} 2$$

इसी प्रकार

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{N^2}\left(N\sum Y^2 - \left(\sum Y\right)^2\right)} \qquad \text{.........} 3$$

अब यदि 1, 2 तथा 3 को r के प्रारम्भिक सूत्र $r = \frac{Cov\ (X,\ Y)}{\sigma_x\sigma_y}$ में रखा जाये तो

$$r = \frac{\frac{1}{N^2}\left(N\sum XY - \sum X\sum Y\right)}{\sqrt{\frac{1}{N^2}\{N\sum X^2 - (\sum X)^2 . \frac{1}{N^2}\{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2\}}}$$

या, $r = \dfrac{\frac{1}{N^2}\left(N\sum XY - \sum X\sum Y\right)}{\frac{1}{N^2}\sqrt{\{N\sum X^2 - (\sum X)^2\}\{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2\}}}$

या, $r = \frac{N\sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{\{N\sum X^2 - (\sum X)^2\}\{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2\}}}$

जैसा कि ऊपर भी स्पष्ट किया गया, जब समान्तर माध्य के मान दशमलव में हो तो उपरोक्त सूत्र उपयोगी हो सकता है। परन्तु यदि चर X या चर Y अथवा दोनो चर X और Y के मान अपेक्षाकृत बड़े हो तो उपरोक्त सूत्र गणना को और भी जटिल कर देगा क्योंकि इसमें चरों के मानों के वर्ग का प्रयोग होता है। ऐसे में यह समंको के मूल बिन्दु में परिवर्तन करने वाली कल्पित माध्य विधि तथा समंको के पैमाने में परिवर्तन उपयोगी होता है।

उदाहरण–1: एक कक्षा के 10 बच्चों की ऊँचाई तथा भार के समंक निम्नवत हैं। ऊँचाई तथा भार के बीच सहसम्बन्ध की गणना कीजिए।

ऊँचाई (सेमी) :	158	168	152	157	163	171	165	164	159	163
भार (किग्रा) :	72	65	60	59	67	71	64	70	56	66

हल : माना ऊँचाई – चर x तथा भार – चर y है। सर्वप्रथम इन चरों के माध्य $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ निकालेंगे

$\bar{x} = \frac{1620}{10} = 162,\ \bar{y} = \frac{650}{10} = 65$

चूंकि $\bar{x}$ तथा $\bar{y}$ के मान पूर्णांक हैं अतः सहसम्बन्ध गुणांक की गणना हेतु माध्य से अन्तर की विधि वाला सूत्र $r_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}}$

x	y	$x - \bar{x} = d_x$	$y - \bar{y} = d_y$	dx^2	dy^2	$d_x\, d_y$
158	72	$158 - 162 = -4$	$72 - 65 = 7$	16	49	-28
168	65	$168 - 162 = 6$	$65 - 65 = 0$	36	0	0
152	60	$152 - 162 = -10$	$60 = 65 = -5$	100	25	50
157	59	$157 - 162 = -5$	$59 - 65 = -6$	25	36	30
163	67	$163 = 162 = 1$	$67 = 65 = 2$	1	04	2
171	71	$171 - 162 = 9$	$71 - 65 = 6$	81	36	54
165	64	$165 - 162 = 3$	$64 - 65 = -1$	9	01	-3
164	70	$164 - 162 = 2$	$70 - 65 = 5$	4	25	10
159	56	$159 - 162 = -3$	$56 - 65 = -9$	9	81	27
163	66	$163 - 162 = 1$	$66 - 65 = 1$	1	01	01
$\sum = 1620$	$\sum y = 650$			$\sum d^2{}_x = 282$	$\sum d^2{}_y = 258$	$d_x\, d_y = 143$

$N = 10$

$r_{xy} = \frac{\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum(x-\bar{x})^2 \sum(y-\bar{y})^2}}$

$= \frac{\sum d_x d_y}{\sqrt{\sum d^2{}_x \sum\sum d^2{}_y}}$

$= \frac{143}{\sqrt{282x258}}$

$= \frac{143}{\sqrt{72756}}$

$= \frac{143}{269.73}$

$= 0.53$

r_{xy} का मान 0.53 है। अर्थात ऊँचाई तथा भार में धनात्मक सहसम्बन्ध है। अर्थात हम कह सकते है कि भार तथा ऊँचाई में होने वाले परिवर्तन एक ही दिशा में होते है।

3.4 सहसंबंध गुणांक पर मूल बिन्दु तथा पैमाने में परिवर्तन का प्रभावः

ध्यान रहे कि सह–सम्बन्ध गुणांक मूल बिन्दु के परिवर्तन तथा पैमानों के परिवर्तन से प्रभावित नही होते। अर्थात

$$r_{xy} = r_{dx\,dy} = \frac{N\sum d_x d_y - \sum d_x \sum d_y}{\sqrt{\{N\sum dx^2 - (\sum dx)^2\}\{N\sum dy^2 - (\sum d)^2\}}}$$

अर्थात यदि हम संमको X_i तथा Y_i के लिए सह–सम्बन्ध गुणांक की गणना करने की बजाय इनके कल्पित माध्यों से अन्तर $d_x = (X_i - A)$ तथा $d_y = (Y_i - B)$ (मूल बिन्दु परिवर्तित करके) लेकर d_x तथा d_y के लिए सहसम्बन्ध गुणांक की गणना करें तो सह–सम्बन्ध गुणांक का मान वही रहेगा। यही नहीं यदि पैमाने को बदलते हुए किसी गुणांक h से d_x तथा d_y को भाग दे दें अर्थात

$d'_x = \frac{d_x}{h}$ तथा $d'_y = \frac{d_y}{h}$ निकाल कर d'_x तथा d'_y के लिए गुणांक की गणना करें तो भी सह–सम्बन्ध गुणांक का मान वही रहेगा।

$$r_{xy} = r'_{dx} d'_y = \frac{N\sum d'_x d'_y - \sum d'_x \sum d'_y}{\sqrt{\{n\sum {d'_x}^2 - (\sum d'_x)^2\}\{n\sum {d'_y}^2 - (\sum d'_y)^2\}}}$$

उदाहरण–2 : किसी कक्षा के एक विद्यार्थियों के पिछले 6 सप्ताहों की उपस्थिति के दिन तथा अर्थशास्त्र के टेस्ट के प्राप्तांक निम्नवत है। उपस्थिति के दिन तथा प्राप्तांक के मध्य सहसम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए।

उपस्थिति के दिन :	2	3	4	5	6	3
प्राप्तांक :	8	12	10	15	13	17

x	y	x^2	y^2	xy
2	8	4	64	16
3	12	9	144	36
4	10	16	100	40
5	15	25	225	75
6	13	36	169	78
3	17	9	289	51
$\sum x = 23$	$\sum y = 75$	$\sum x^2 = 99$	$\sum y^2 = 991$	$\sum xy = 296$

$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{23}{6} = 3.833$, $\bar{y} = \frac{75}{6} = 12.5$

चूंकि सामान्तर माध्यों के मान दशमलव में प्राप्त हैं इसलिए माध्यों से अन्तर वाला सूत्र प्रयोग करने पर गणना अत्यन्त जटिल हो जायेगी।

अतः सूत्र $r = \frac{N\sum xy - \sum x \sum y}{\sqrt{\{N\sum x^2 - (\sum x)^2\}\{N\sum y^2 - (\sum y)^2}}$ का प्रयोग करेंगे।

$N = 6 \qquad \sum x = 23, \qquad \sum y = 75, \qquad \sum xy = 296$

$\sum x^2 = 99, \qquad \sum y^2 = 991$

सह–सम्बन्ध गुणांक की गणना के उपरोक्त सूत्र में मान रखने पर

$$r = \frac{6(296)-(23)(75)}{\sqrt{\{6(99)-(23)^2\}\{6(991)-(75)^2\}}}$$
$$= \frac{51}{\sqrt{65\times32}}$$
$$= \frac{51}{\sqrt{20865}}$$
$$= \frac{51}{144.45}$$
$$= 0.3542$$

$r = 0.35$ एक मध्यम श्रेणी का धनात्मक सह सम्बन्ध है। अतः हम कह सकते है कि कक्षा में उपस्थित तथा प्राप्तांक कभी–कभी एक साथ बढ़ते या घटते है।

बोध प्रश्न 1. नीचे दी गई तालिका में 10 परिवारों के मासिक विद्युत इकाइयों की खपत एवं बचत खातों की जमा के आँकड़े दिये गये हैं। विद्युत खपत एवं बचत जमाओ के मध्य सह सम्बन्ध गुणांक ज्ञात कीजिए।

विद्युत खपत (इकाई में) :	215	300	315	275	180	145	205	205	304	160
बचत जमाएं (हजार रू0 में) :	130	90	115	135	140	210	95	100	85	125

3.5 आवृत्ती वितरण के लिए कार्ल पियर्सन गुणांक की गणना विधिः

ऊपर के सह सम्बन्ध विश्लेषण में हमने व्यक्तिगत द्विचरीय समंक श्रेणियों के सन्दर्भ में सह सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करने की विधियों की चर्चा की। द्विचरीय संमक श्रेणियॉ व्यक्तिगत के साथ–साथ आवृत्ति वितरण भी हो सकती हैं। सूत्र के दृष्टिकोंण से द्विचरीय आवृत्ति वितरणों के लिए सह सम्बन्ध गुणांक निकालने के लिए पूर्व की भांति प्रत्येक पद में संगत आवृत्ति से गुणा भी शामिल हो जायेगा। जैसे–

सामान्य सूत्र

$$r_{xy} = \frac{N\sum f_{xy}\,xy-\sum f_x\,x\sum f_y\,y}{\sqrt{\{N\sum f_x x^2-(\sum f_x\,x)^2\}\{N\sum f_y y^2-(\sum f_y\,y)^2\}}}$$

माध्य विचलन सूत्र

$$r_{dxdy} = \frac{N\sum f_{xy}d_x d_y-\sum f_x d_x\sum f_y d_y}{\sqrt{\{N\sum f_x {d_x}^2-(\sum f_x d_x)^2\}\{N\sum f_y {d_y}^2-(\sum f_y d_y)^2\}}}$$

या फिर पैमाने परिवर्तन के साथ (पद विचलन के सूत्र में)

$$r_{d'_x d'_y} = \frac{N\sum f_{xy}{d_x}'{d_y}'-\sum f_x {d_x}'\sum f_y {d_y}'}{\sqrt{\{N\sum f_x {d_x}'^2-(\sum f_x {d_x}')^2\,\{N\sum f_y {d_y}'^2-(\sum f_y {d_y}')^2\}}}$$

परन्तु गणना की दृष्टि से द्विचरीय आवृत्ति वितरण के लिए सह सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करना अतिरिक्त विस्तृत प्रक्रिया होती है। सर्वप्रथम तो आवृत्ति वितरण के सूत्र से ही स्पष्ट है कि इसमें चर x की आवृत्ति f_x तथा चर y की आवृत्ति f_y के साथ–साथ दोनों चरों x तथा y की संयुक्त आवृत्ति f_{xy} का भी प्रयोग होगा। इस दृष्टि से द्विचरीय आवृत्ति वितरण के प्रश्न भी विस्तृत होगें तथा इनका हल भी।

उदाहरण 3ः यदि किसी कक्षा के 60 विद्यार्थियों के अर्थषास्त्र एवं संख्यिको के प्राप्तांकों के द्विचरीय आवृत्ति वितरण निम्नवत हो तो सह–सम्बन्ध गुणांक की गणना कीजिए। जहाँ x– अर्थशास्त्र के प्राप्तांक y– सांख्यिकी के प्राप्तांक हैं।

x / y	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	स्तम्भों का योग
0–10		1				1
10–20	1	5	3	3	1	13

20—30		1	19	15	1	36
30—40	2		5		1	8
40—50		1			1	2
पंक्तियों का योग	3	8	27	18	04	60

यहाँ उपरोक्त आवृत्ति वितरण में x तथा y (अर्थशास्त्र तथा सांख्यिकी के प्राप्तांकों) के संयुक्त तथा सीमान्त आवृत्तियों को दर्शाया गया है।

प्रथम पंक्ति में x (अर्थशास्त्र के प्राप्तांको) के वर्ग 0—10, 10—20 —————— 40—50 को दर्शाया गया है तथा अन्तिम पंक्ति में पंक्तियों के योग के रूप में दर्शाये गये मूल्य इस x की सीमान्त आवृत्तियाँ है। इसी प्रकार प्रथम स्तम्भ में y (सांख्यिकी के प्राप्तांको) के वर्ग 0—10, 10—20, ———— , 40—50 को दर्शाया गया है तथा स्तम्भों के योग का स्तम्भ इसी y के सीमान्त आवृत्तियों f_y को दर्शाता है।

x तथा y के कटान वाले कोष्ठक में दर्शाये गए मूल्य, x तथा y के संयुक्त आवृत्ति f_{xy} हैं। खाली कोष्ठक का मतलब सयुंक्त आवृत्ति शून्य है।

उपरोक्त आवृत्ति वितरण के सह सम्बन्ध गुणांक की गणना एक विशिष्ट सारणी बनाकर की जाती है। जो कि उपरोक्त प्रश्न में बनी सारणी का ही विस्तृत रूप होता है।

				d'^2_x	4	1	0	1	4	जहाँ $d_x = x - 25$, $d_y = y - 25$, $d'_x = \frac{d_x}{10}$, $d'_y = \frac{d_x}{10}$			
				d'_x	-2	-1	0	1	2				
				d_x	-20	-10	0	10	20				
				मध्यमान x	5	15	25	35	45				
d'^2_y	d'_y	d_y	मध्यमान y	x→वर्ग / y↓वर्ग	$0-10$	$10-20$	$20-30$	$30-40$	$40-50$	f_x	$f_x d'_x$	$f_x d'^2_x$	$\boldsymbol{f_{xy}f'_x d'_y}$
4	-2	-20	5	$0-10$		^{1} 2				1	-2	4	2
1	-1	-10	15	$10-20$	^{1} 2	^{1} 5	^{3} 0	^{1} -3	^{1} -2	13	-13	13	2
0	0	0	25	$20-30$		^{1} 0	^{19} 0	^{15} 0	^{1} 0	36	0	0	0
1	1	10	35	$30-40$	^{1} -4		^{5} 0		^{1} 2	8	8	8	-2
4	2	20	45	$40-50$		^{1} -4			^{1} 4	2	4	8	2
					03	8	27	18	04	$N = 60$			
					-6	-8	0	18	08	$\sum f_y d'_y = 12$			
					12	8	0	18	16	$\sum f_y d'^2_y = 54$			

	-2	5	0	-3	4	$\sum f_{xy} d'_x\, d'_y = 4$	

स्पष्ट है कि मूल प्रश्न में दी गई सारणी में ही आगे पीछे ऊपर और नीचे अतिरिक्त स्तम्भ और पंक्तियां बढ़ा कर वर्ग के मध्यमानों, माध्य से विचलनों तथा पद विचलनों तथा इनके संगत आवृत्तियों से गुणन की गणनाएं की गई हैं। उपरोक्त प्रश्न में मध्यमानों (x, y) से भी सहसम्बन्ध गुणांक की गणना की जा सकती थी या फिर वैकल्पिक माध्य विधि (d_x, d_y) का प्रयोग करके भी इसे हल कर सकते थें। उरोक्त सारणी में सबसे ध्यान देने योग्य गणना x तथा y के पद विचलनों (d'_x तथा d'_y) का उनकी संयुक्त आवृत्ति (f_{xy}) से गुणन की है। इस गणना को संगत संयुक्त आवृत्ति वाले कोष्ठकों में ही एक गोले में लिखा गया है। अन्तिम पंक्ति तथा स्तम्भ में इन्ही का योग $(\sum f_{xy} d'_x d'_y)$ है।

अब सभी गणनाओं के सह सम्बन्ध गुणांक के पद विचलन वाले सूत्र–

$$r_{dx'dy'} = \frac{N\sum f_{xy} d'_x d'_y - \sum f_x d'_x \sum f_y d'_y}{\sqrt{\{N\sum f_x d'^2_x - (\sum f_x d'_x)^2\}\{N\sum f_y d'^2_y - (\sum f_y d'_y)^2\}}}$$

में रखनें पर

$$r_{dx'dy'} = \frac{60(4)-(-3)(12)}{\sqrt{\{60(33)-(-3)^2\}\{60(54)-(12)^2\}}}$$

$$= \frac{240+36}{\sqrt{(190-9)(3240-144)}}$$

$$= \frac{276}{\sqrt{6102216}}$$

$$= \frac{276}{2470.26}$$

$$= 0.112$$

चूंकि सह सम्बन्ध गुणांक मूल बिन्दू पैमाने के परिवर्तनों से स्वतन्त्र होते है अतः पद विचलनों का सह सम्बन्ध गुणांक $(r_{dx'dy'})$ x तथा y के सह सम्बन्ध गुणांक (r_{xy}) के बराबर ही होगा।

$$r_{xy} = r'_{xy} d'_y$$

अतः

$$r_{xy} = 0.112$$

सह सम्बन्ध गुणांक धनात्मक है परन्तु उसकी तीव्रता (intensity) अत्यन्त कम है अर्थात अर्थशास्त्र तथा सांख्यिकी में निम्न तीव्रता का धनात्मक सह सम्बन्ध है।

3.6 स्पीयर मैन का कोटि सह सम्बन्ध गुणांक :

कोटि सह सम्बन्ध गुणांक तब उपयोगी होते है जब हमें दो भिन्न निर्णयों की कोटि में सहमति अथवा मतान्तर की तीव्रता की माप करनी हो। कोटि सह सम्बन्ध गुणांक निकालने के लिए आवश्यक होता है कि हमें संमको की बजाए उनकी कोटियों की श्रेणियाँ ज्ञात हों। यदि कोटि श्रेणी की जगह संमक श्रेणियाँ दी हों तो सर्वप्रथम समंको की वरीयता के क्रम में उनकी कोटि निर्धारित कर लेंगे तत्पश्चात निम्न सूत्र का प्रयोग करते हुए स्पियरमैन का कोटि सह सम्बन्ध गुणांक ज्ञात करेंगे।

$$r = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{N\,(N^2-1)}$$

जहां $d_i =$ कोटियों के अन्तर होते है।

$N =$ कटियों के पदों की संख्या।

संमको की वरीयता का क्रम निर्धारित करते हुए एक समस्या यह आती है कि कई बार एक समान मूल्य के (टाइ) एक से अधिक समंक दिये हुए हो सकते है। तो ऐसे में एक समान मूल्य ज्ञात करने के लिए जितनें समंको के मूल्य समान होते है उनको उतने समंको के वरीयता क्रमांको के औसत का क्रमांक प्रदान करते है।

उदाहरण 4ः उदाहरण के लिए यदि समंक श्रेणी निम्नवत् हो–

$x : 5 \quad 8 \quad 12 \quad 9 \quad 7 \quad 8 \quad 13 \quad 6$

$y : 25 \quad 16 \quad 18 \quad 16 \quad 19 \quad 23 \quad 16 \quad 15$

यहाँ x तथा y समंक श्रेणियों में वरीयता क्रम निर्धारित करनी है। सबसे पहले समंक श्रेणी x को देखते हैं। x की समंक श्रेणी में सबसे बडा मूल्य 13 है अतः इसकी वरीयता का क्रमांक 1 होगा। इसी प्रकार 12 को वरीयता क्रमांक $2,$ 9 को वरीयता क्रमांक $3,$ 8 के दोनों मानों को वरीयता क्रमांक 4.5 मिलेगा। नोटः 8 का मान दो बार आया है।

शेष बचे मान 7 को 6 तक्षा 6 को 7 क्रम प्रदान किया जाएगा।

इसी प्रकार समंक श्रेणी y के लिए सबसे बड़े समंक मूल्य 25 का वरीयता क्रमांक $1,$ 23 का वरीयता क्रमांक $2, 19$ का वरीयता क्रमांक $3, 18$ का वरीयता क्रमांक 4 होगा इसके बाद अगले 3 वरीयता क्रमांको $5,$ 6 तथा 7 के लिए एक समान समंक मूल्य वाला समंक 16 है अतः 16 के तीनों पदों की वरीयता में टाई है और इसका वरीयता क्रमांक (कोटि) $\frac{5+6+7}{3} = \frac{18}{3} = 6$ होगा इसके बाद समंक मूल्य 15 का वरीयता क्रमांक 8 होगा।

इस प्रकार x तथा y श्रेणियों के वरीयता क्रमांक (कोटियां) निम्नवत् होंगे।

x की वरीयता 8 $4.5, \quad 2, \quad 3, \quad 6, \quad 4.5, \quad 1, \quad 7$

y की वरीयता $1 \quad 6 \quad 4 \quad 6 \quad 3 \quad 2 \quad 6$ 8

इस प्रकार की टाई कोटि वाले समंक श्रेणी के लिए कोटि सह सम्बन्ध गुणांक की गणना निम्न सूत्र से होगी।

$$r = 1 - \frac{6\left\{\sum d_i^2 + \frac{m\,(m^2-1)}{12}\right\}}{N(N^2-1)}$$

जहां m टाई का आकार है (अर्थात जितने समंक का मूल्य बराबर हो)

उपरोक्त उदाहरण में x की श्रेणी में दो पदों का मूल्य बराबर है अर्थात x की टाई का आकार $(m) = 2$ है इसी प्रकार y की श्रेणी में एक 3 आकार की टाई है। अतः यहां कोटि सह सम्बन्ध गुणांक की गणना

$$r = 1 - \frac{6\{\sum d_i^2 + \frac{m(m^2-1)}{12} + \frac{m(m^2-1)}{12}\}}{N\,(N^2-1)}$$

द्वारा होगी जहां पहले $m = 2$ तथा दूसरे $m = 3$ रखेंगे।

उपरोक्त उदाहरण का हल निम्नवत् होगा

x	y	x की कोटि	y की कोटि	d_i (कोटियों का अन्तर)	d_i^2
5	25	8	1	7	49
8	16	4.5	6	−1.5	2.25
12	18	2	4	−2	4
9	16	3	6	−3	9
7	19	6	3	3	9
8	23	4.5	2	2.5	6.25
13	16	1	6	−5	25
6	15	7	8	−1	1

चूंकि यहां दो बार टाई है तथा एक बार $m_1 = 2$ तथा एक बार $m_2 = 3$ है अतः

$$r = 1 - \frac{6\left\{\sum d_i^2 + \frac{2(2^2-1)}{12} + \frac{3(3^2-1)}{12}\right\}}{8(8^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left\{105.5 + \frac{6}{12} + \frac{24}{12}\right\}}{8(63)}$$

$$= \frac{1-6\,\{105.5+0.5+2\}}{504}$$

$$= 1 - 6\frac{(108)}{504}$$

$$1 - 1.28$$

$$= -0.28$$

$$r = -0.28$$

कार्ल पियर्सन के सह सम्बन्ध गुणांक की ही भांति स्पीयर मैन के कोटि–सह सम्बन्ध गुणांक भी -1 तथा $+1$ के बीच कोई भी मान ग्रहण कर सकता है। r का मान -1 कोटि निर्धारण में पूर्णतया असहमति तथा r का मान $+1$ कोटि निर्धारण में पूर्ण सहमति को दर्शायेगा जबकि r का मान शून्य (0) कोटि निर्धारण के निर्णय को एक दूसरें से स्वतन्त्र दर्शायेगा।

बोध प्रश्न 2. किसी संगीत प्रतियोगिता में दो निर्णायकों A एवं B द्वारा 7 संगीत प्रतिभागियों को दिये गये निर्णय में कोटि सह–सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

निर्णायक A द्वारा प्रदान अंक : 17, 15, 18, 16, 19, 17, 13

निर्णायक B द्वारा प्रदान अंक : 20, 18, 16, 19, 15, 17, 15

3.7 बोध प्रश्नों के उत्तरः

1. हल :

विद्युत खपत (x)	विद्युत खपत (y)
215	130
300	90
315	115
275	135
180	140
145	210
205	95
235	100
305	85
160	125

$$\sum x = 2335 \qquad \sum y = 1225$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{N} = \frac{2335}{10} = 233.5$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y}{n} = \frac{1225}{10} = 1225.5$$

चूंकि यहां माध्यों के मान दशमलव में होने के साथ–साथ समंको के मान भी अपेक्षाकृत बड़े है। अतः यहां समंको के मूल बिन्दू परिवर्तित करते हुए वैकल्पिक माध्य विधि के सूत्र से सहसम्बन्ध गुणांक की गणना करना उचित होगा। चर x के लिए 275 को तथा चर y के लिए 140 को कल्पित माध्य मानते हुए

$d_x = (x - 275)$	$d_y = y - 140$	$d_x{'} = \frac{d_x}{5}$	$d_y{'} = \frac{d_y}{5}$
$215 - 275 = -60$	$130 - 140 = -10$	-12	-2
$300 - 275 = 25$	$90 - 140 = -50$	5	-10
$315 - 275 = 40$	$115 - 140 = -25$	8	-5
$275 - 275 = 60$	$135 - 140 = -5$	0	-1
$180 - 275 = -95$	$140 - 140 = 0$	-19	-0
$145 - 275 = -130$	$210 - 140 = 70$	-26	14
$205 - 275 = -70$	$95 - 140 = -45$	-14	-9
$235 - 275 = -40$	$100 - 140 = -40$	-8	-8
$305 - 275 = 30$	$85 - 140 = -55$	6	-11
$160 - 275 = -115$	$125 - 140 = -15$	-23	-3
		$\sum d_x{'} = -83$	$\sum d_y{'} = -35$

${d'_x}^2$	${d'_y}^2$	$d'_x d'_y$
144	40	24
25	100	-50
64	25	-40
0	1	0
361	0	0
676	196	-364
196	81	126
64	64	64
36	121	-66
529	9	69

$\sum {d'_x}^2 = 2095$ $\qquad$ $\sum {d'_y}^2 = 601$ $\qquad$ -237

$$r = \frac{N \sum d'_x d'_y - \sum d'_x \sum d'_y}{\sqrt{\{N \sum {d'_x}^2 - (\sum d'_x)^2\}\{N \sum {d'_y}^2 - (\sum d'_y)^2\}}}$$

$$= \frac{10(-237) - (-83)(-35)}{\sqrt{\{10(2095) - (-83)^2\}\{10(601) - (35)^2}}$$

$$= \frac{-2370 - 2090}{\sqrt{(20950 - 6889)\,(6010 - 1225)}}$$

$$= \frac{-4460}{\sqrt{(14061)(4785)}}$$

$$= \frac{-4460}{\sqrt{67281885}}$$

$= \frac{-4460}{8202.55}$
$= -0.544$

2. हल : चूंकि यहाँ निर्णायकों द्वारा प्रदान किये अंक दिये गये है अतः सर्वप्रथम इन अंको के आधार पर दोनो निर्णयों की कोटि ज्ञात करेंगे।

अंक (A)	अंक (B)	कोटि (A)	कोटि (B)	कोटि अन्तर (d_i)	d_i^2
17	20	3.5	1	2.5	6.25
15	18	6	3	3	9
18	16	2	5	−3	9
16	19	5	2	3	9
19	15	1	6.5	−5.5	30.25
17	17	3.5	4	−0.5	.25
13	15	7	6.5	0.5	.25
					$\sum d_i^2 = 64.00$

यहाँ दो बार टाई हुआ है और दोनो ही टाई का आकार 2 है अतः

$$r = 1 - \frac{6\{\sum d_i^2 + \frac{m(m^2-1)}{12} + \frac{m(m^2-1)}{12}\}}{N(N^2-1)}$$

दोनों ही m का मान 0.5 होगा।

$$r = 1 - 6\left\{\frac{64 + \frac{2(2^2-1)}{12} + \frac{2(2^2-1)}{12}}{7(7^2-1)}\right\}$$

$$r = 1 - 6\,\frac{6\{64+0.5+0.5\}}{7(49-1)}$$

$= 1 - 6\frac{(65)}{336}$

$= 1 - \frac{390}{336}$

$= 1 - 1.161$

$= -0.161$

अर्थात दोनों निर्णायकों में आंशिक असहमति है।

3.8 अभ्यास प्रश्न (Questions for exercise)

1. निम्न 10 कर्मचारियों के लिए कार्य अनुभव के वर्षों की संख्या और वेतन स्तर (लाख रुपये वार्षिक में) के बीच सहसंबंध गुणांक निर्धारित करें।
   कार्य अनुभव के वर्षः 5, 7, 3, 6, 8, 4, 10, 2, 9, 6
   वेतन (लाख रुपये वार्षिक में): 60, 70, 50, 65, 75, 55, 85, 45, 80, 70
2. 12 घरों के नमूने के लिए घरेलू आय (हजारों रुपये में) और विलासिता की वस्तुओं पर व्यय (रुपये में) के बीच सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

घरेलू आय : 50, 60, 45, 55, 65, 70, 40, 75, 80, 55, 65, 70,

विलासिता की वस्तुओं पर व्ययः 500, 600, 450, 550, 650, 700, 400, 750, 800, 550, 650, 700

3. काम पर आने–जाने में लगने वाले समय और नौकरी से संतुष्टि के स्तर के बीच संबंध का अध्ययन करने के लिए एक प्रयोग किया जाता है। 10 प्रतिभागियों से एकत्र किया गया डेटा इस प्रकार हैः
आवागमन का समय (मिनटों में): 20, 30, 15, 40, 25, 35, 10, 45, 30, 50
नौकरी से संतुष्टि स्तर (1 से 10 के पैमाने पर): 7, 6, 8, 5, 7, 4, 9, 3, 6, 2
इस डेटासेट के लिए स्पीयरमैन के रैंक (कोटि) सहसंबंध गुणांक की गणना करें।

3.9 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography and Useful Books)

Elhance, D.L (2010): Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Greenlaw, Steven A (2005): Doing Economics: A Guide to Understanding and Carrying Out Economic Research.

Gupta, S.P (2011): Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

Hazarika, Padmalochan (2006): Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Kothari, C.R: Research Methodology: Methods & Techniques. New Age International Publishers ISBN (13) : 978-81-224-2488-1

Leighton, Thomas (2011): Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.

Gupta and Kapoor (Latest Edition): Fundamental of Mathematical Statistics, Sultan Chand & Sons, Delhi.

इकाई–4
प्रतीपगमनः अर्थ, उपयोग, सहसम्बन्ध से अन्तर
(Regression: Meaning and Utility, Difference from Correlation)

4.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी

1. प्रतीपगमन के अर्थ महत्व तथा उपयोगिता से परिचित हो जाएंगे।
2. प्रतीपगमन तथा सहसंबंध विश्लेषण में अंतर को स्पष्ट कर सकेंगे।

4.2 प्रस्तावना (Introduction)

सहसंबंध तथा प्रतीपगमन विश्लेषण दोनों ही बहुचरीय सांख्यकीय पद्धतियाँ हैं। कई बार विद्यार्थियों में इन दोनों के अंतर की स्पष्ट समझ नहीं होती तथा विद्यार्थी सहसंबंध विश्लेषण को भी कारण परिणाम संबंध के रूप में परिभाषित कर बैठते हैं। प्रस्तुत इकाई में इस तथ्य को ध्यान में रखते हुए प्रतीपगमन को स्पष्ट रूप से परिभाषित करते हुए सहसंबंध से इसकी भिन्नता पर भी प्रकाश डाल गया है।

4.3 प्रतीपगमन अर्थ (meaning of Regression)

प्रतीपगमन का शाब्दिक अर्थ है पीछे (औसत) की ओर लौटना। ब्रिटेन के जीवमितीय (bio-metric) विज्ञानी सर फ्रांसिस गाल्टन ने अपने अध्ययन में पाया कि असाधारण रूप से लम्बे माता–पिता की सन्तानें सामान्य या औसत लम्बाई की ओर प्रतीपगमित होते हैं या वापस लौटते हैं। आज के सांख्यकीय सन्दर्भ में प्रतीपगमन जीवमितीय (bio-metric) अध्ययन तक सीमित नही है। वस्तुतः प्रतीपगमन कारण परिणाम सम्बन्धों में शामिल चरों के बीच के औसत सम्बन्ध की गणितीय माप है।

निश्चित रूप से प्रतीपगमन में शामिल चरों के बीच कारण–परिणाम सम्बन्ध होगा। वह चर जो अन्य चरों में परिवर्तन के प्रभाव से परिवर्तित होता है उसे आश्रित चर (परिणाम) कहते हैं यथा जो चर आश्रित चर या परिणाम को प्रभावित करते हैं उन्हें स्वतन्त्र चर कहते हैं। प्रतीपगमन (regression) की शब्दावली में स्वतन्त्र चर को predictor या regressor भी कहते हैं तथा आश्रित चर को explainable अथवा regressed कहते है।

4.4 प्रतीपगमन की उपयोगिता (Imortance of Regression)

प्रतीपगमन विश्लेषण गणितीय अर्थशास्त्र में एक महत्वपूर्ण उपकरण है जो विभिन्न चरों के बीच के संबंध को समझने और अनुमान लगाने में मदद करता है। चर के बीच संबंधों का विश्लेषण करने और ऐतिहासिक डेटा के आधार पर भविष्यवाणियाँ करने की क्षमता के कारण विभिन्न उद्देश्यों के लिए आर्थिक अध्ययन में प्रतीपगमन विश्लेषण का व्यापक रूप से उपयोग किया जाता है। आर्थिक अध्ययन में प्रतीपगमन विश्लेषण के कुछ प्रमुख उपयोग यहाँ दिए गए हैः

4.4.1 **आर्थिक पूर्वानुमान**: प्रतीपगमन विश्लेषण का उपयोग जीडीपी वृद्धि, मुद्रास्फीति दर, रोजगार स्तर और उपभोक्ता खर्च जैसे आर्थिक चर का पूर्वानुमान लगाने के लिए किया जा सकता है। ऐतिहासिक डेटा का विश्लेषण करके, अर्थशास्त्री उन रुझानों और सम्बंधों की पहचान कर सकते हैं जो भविष्य के आर्थिक परिणामों की भविष्यवाणी करने में मदद करते हैं।

4.4.2 **कारण सम्बंधों का निर्धारण**: अर्थशास्त्री अक्सर आर्थिक चर के बीच कारण संबंधों को निर्धारित करने के लिए प्रतीपगमन विश्लेषण का उपयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, वे निवेश खर्च पर ब्याज दरों में बदलाव के प्रभाव या आर्थिक विकास पर सरकारी खर्च के प्रभाव का विश्लेषण कर सकते हैं।

4.4.3 **नीति विश्लेषण**: प्रतीपगमन विश्लेषण अर्थशास्त्रियों को विभिन्न आर्थिक नीतियों की प्रभावशीलता का मूल्यांकन करने में मदद करता है। नीतिगत हस्तक्षेपों और आर्थिक परिणामों के बीच संबंधों की जांच करके, नीति निर्माता कर कटौती, मौद्रिक नीति परिवर्तन या व्यापार समझौतों जैसी नीतियों के प्रभाव का आकलन कर सकते हैं।

4.4.4 **बाजार विश्लेषण**: प्रतीपगमन विश्लेषण का उपयोग बाजार के रुझान और व्यवहार का विश्लेषण करने के लिए किया जाता है। अर्थशास्त्री प्रतीपगमन तकनीकों का उपयोग करके मांग और आपूर्ति, मूल्य लोच और बाजार संतुलन को प्रभावित करने वाले कारकों का अध्ययन कर सकते हैं। यह जानकारी व्यवसायों, नीति निर्माताओं और बाजार में निर्णय लेने वाले निवेशकों के लिए मूल्यवान है।

4.4.5 **जोखिम प्रबंधन**: जोखिम प्रबंधन उद्देश्यों के लिए वित्तीय अर्थशास्त्र में प्रतीपगमन विश्लेषण का उपयोग किया जाता है। यह पोर्टफोलियो जोखिम का आकलन करने और निवेश रणनीतियों को अनुकूलित करने के लिए परिसम्पत्ति की कीमतों, ब्याज दरों और अन्य वित्तीय चर के बीच सम्बंधों का विश्लेषण करने में मदद करता है।

4.4.6 **श्रम अर्थशास्त्र**: श्रम अर्थशास्त्र में, प्रतीपगमन विश्लेषण का उपयोग मजदूरी, रोजगार स्तर और श्रम बाजार परिणामों के निर्धारकों का अध्ययन करने के लिए किया जाता है। वेतन अंतर और रोजगार पैटर्न को समझने के लिए शोधकर्ता शिक्षा, अनुभव और उद्योग जैसे कारकों का विश्लेषण कर सकते हैं।

4.4.7 **मांग विश्लेषण**: प्रतिगमन विश्लेषण अर्थशास्त्रियों को उपभोक्ता व्यवहार और वस्तुओं और सेवाओं की मांग का विश्लेषण करने में मदद करता है। आय, कीमतें और जनसांख्यिकी जैसे कारकों की जांच करके, अर्थशास्त्री मांग कार्यों का अनुमान लगा सकते हैं और उपभोक्ता व्यवहार पर इन चर में परिवर्तन के प्रभाव की भविष्यवाणी कर सकते हैं।

4.4.8 **लागत–लाभ विश्लेषण**: प्रतीपगमन विश्लेषण का उपयोग परियोजनाओं और नीतियों की आर्थिक व्यवहार्यता का मूल्यांकन करने के लिए लागत–लाभ विश्लेषण में किया जाता है। लागत और लाभ की तुलना करके और उनके संबंध का अनुमान लगाकर, अर्थशास्त्री परियोजनाओं के शुद्ध आर्थिक प्रभाव को निर्धारित कर सकते हैं और उनकी दक्षता का आकलन कर सकते हैं।

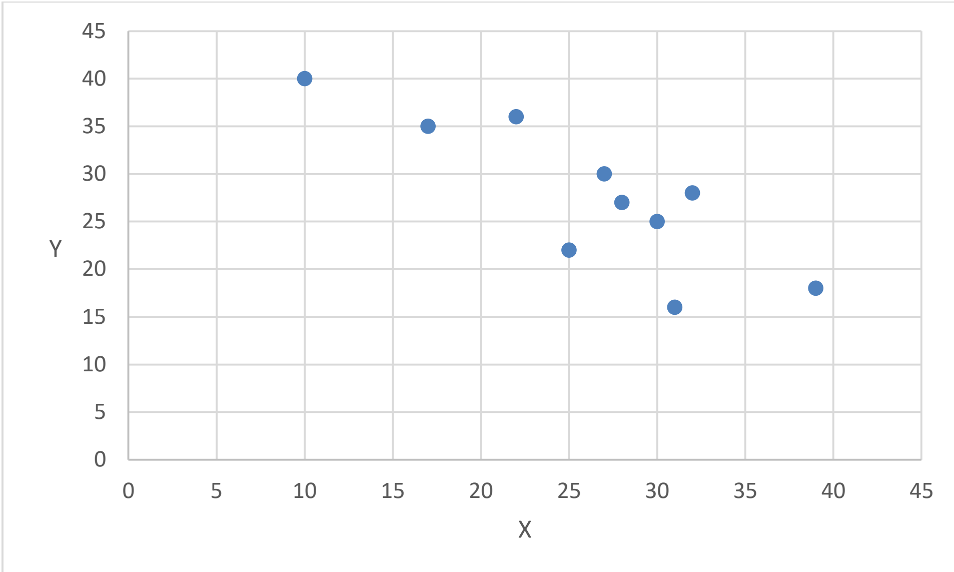
कुल मिलाकर, प्रतिगमन विश्लेषण आर्थिक अध्ययन में एक शक्तिशाली उपकरण है, जो आर्थिक संबंधों, रुझानों और भविष्यवाणियों में मूल्यवान अंतर्दृष्टि प्रदान करता है जो अर्थशास्त्र और नीति के विभिन्न क्षेत्रों में निर्णय लेने की जानकारी देता है। प्रतीपगमन में चूंकि चरों के बीच औसत सम्बन्ध की गणितीय माप होती है अतः इसमें आश्रित चर स्वतन्त्र चरों के गणितीय सूत्र के रूप में प्रकट होते हैं। अतः स्वतन्त्र चरों के किन्ही भी मानों के लिए आश्रित चर का अनुमान किया जा सकता है। इस प्रकार प्रतीपगमन के माध्यम से कारको (स्वतन्त्र चर के मान) ज्ञात होने पर परिणाम (आश्रित चर) का अनुमान तथा पूर्वानुमान किया जा सकता है।

बोध प्रश्न 1. प्रतीपगमन विश्लेषण का प्राथमिक उद्देश्य क्या है?
क) दो चरों के बीच संबंध की गहनता को मापना
ख) अन्य चर के मूल्यों के आधार पर एक चर के मूल्य की भविष्यवाणी करना
ग) दो चरों का औसत ज्ञात करना
घ) दो चरों के मानक विचलन की गणना करना

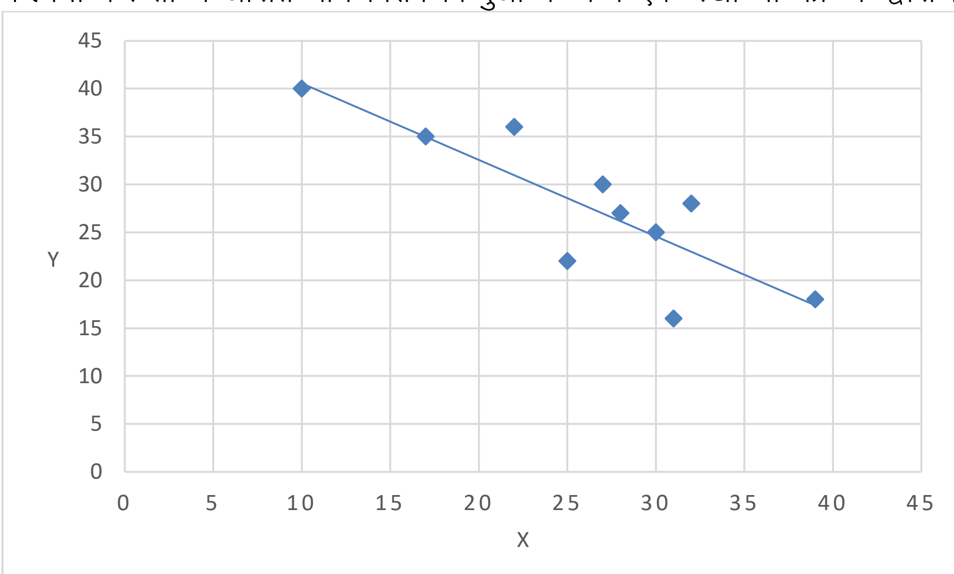
बोध प्रश्न 2. निम्नलिखित में से कौन सा कथन प्रतीपगमन विश्लेषण का सबसे अच्छा वर्णन करता है–
क) दो चरों के बीच सहसंबंध निर्धारित करने के लिए उपयोग की जाने वाली एक सांख्यिकीय विधि
ख) ऐतिहासिक डेटा और चर के बीच संबंधों के आधार पर परिणामों की भविष्यवाणी करने के लिए इस्तेमाल की जाने वाली तकनीक
ग) डेटासेट के माध्य की गणना करने की एक विधि
घ) डेटासेट में अतिमानों की पहचान करने की एक प्रक्रिया

4.5 सहसम्बन्ध एवं प्रतीपगमन में अन्तर

द्विचरीय अथवा बहुचरीय अध्ययन में सहसम्बन्ध विश्लेषण एक आधारभूत सांख्यिकीय विवेचना होती है, जो चरों में एक समान अथवा विपरीत दिशा में परिवर्तन की दिशा एवं इसकी तीव्रता को मापता है। जैसा कि पहले भी स्पष्ट किया जा चुका है, सहसम्बन्ध का होना चरों के बीच कारण परिणाम के सम्बन्ध की पुष्टि नहीं करता और इसलिए सहसम्बन्ध विश्लेषण के माध्यम से अनुमान एवं पूर्वानुमान (Preddiction and forecasting) का विश्लेषण नहीं किया जा सकता है। प्रतीपगमन (Regression) विश्लेषण निश्चित रूप से कारण–परिणाम सम्बन्धों वाले चरों के औसत मानों के बीच के सम्बन्ध की गणितीय माप करता है और इसलिए प्रतीपगमन विश्लेषण के माध्यम से अनुमान एवं पूर्वानुमान करना सम्भव होता है।
इसको और स्पष्ट करने के लिए हम द्विचरीय विश्लेषण के विक्षेप चित्र का सहारा ले सकते है।
किसी द्विचरीय वितरण का विक्षेप–चित्र निम्नवत है–



तो सहसम्बन्ध विश्लेषण बताता है कि x तथा y चरों के बीच ऋणात्मक दिशा में सहसम्बन्ध है तथा इस सहसम्बन्ध की तीव्रता उच्च कोटि की है। परन्तु इसी विक्षेप चित्र में यदि हम चरों के औसत मानों की कल्पना करें तो ये औसत मान विक्षेप बिन्दुओं के मध्य एक रेखा या वक्र के द्वारा निरूपित होगा।



चरों के औसत मानों की यह रेखा अथवा वक्र एक सुस्पष्ट गणितीय समीकरण द्वारा व्यक्त हो सकता है। प्रतीपगमन विश्लेषण में उपलब्ध आंकड़ों के माध्यम से इसी रैखीय अथवा गैर रेखीय समीकरण के प्राचलों (Paramrters) के मान ज्ञात करते हैं। चर के उपलब्ध मानों से एक सुस्पष्ट समीकरण प्राप्त कर लेने का फायदा यह होता है कि इस समीकरण के माध्य से हम स्वतन्त्र चर के मानों का अनुमान लगा सकते है। प्रतीपगमन विश्लेषण की यही विशेषता इसके अध्ययन के महत्व को दर्शाती है एवं आज के युग में डेटा साइंस और मशीन लर्निंग जैसे उपयोगी अध्ययनों को आधार प्रस्तुत करती है।

प्रतीपगमन विश्लेषण और सहसंबंध विश्लेषण दोनों सांख्यिकीय तकनीकें हैं जिनका उपयोग चर के बीच संबंधों का विश्लेषण करने के लिए किया जाता है, लेकिन वे विभिन्न उद्देश्यों की पूर्ति करते हैं और विभिन्न

प्रकार की जानकारी प्रदान करते हैं। प्रतीपगमन विश्लेषण और सहसंबंध विश्लेषण के बीच मुख्य अंतर यहां दिए गए हैं–

4.5.1 उद्देश्यों में अंतरः प्रतीपगमन विश्लेषण का प्राथमिक उद्देश्य एक आश्रित चर (परिणाम) और एक या अधिक स्वतंत्र चर (भविष्यवक्ताओं) के बीच संबंध का मॉडल और भविष्यवाणी करना है। इसका उद्देश्य आश्रित चर पर स्वतंत्र चर के प्रभाव का अनुमान लगाना और इस संबंध के आधार पर भविष्यवाणियाँ करना है। दूसरी ओर, सहसंबंध विश्लेषण का उपयोग दो चर के बीच रैखिक संबंध की ताकत/प्रगाढ़ता और दिशा को मापने के लिए किया जाता है। इसमें एक चर से दूसरे चर की भविष्यवाणी करना शामिल नहीं है बल्कि इसके बजाय उनके बीच संबंध की डिग्री का आकलन करने पर ध्यान केंद्रित किया जाता है।

4.5.2 रिश्तों के प्रकार में अंतरः प्रतीपगमन विश्लेषण स्वतंत्र और आश्रित चर के बीच एक कारण संबंध मानता है। यह निर्धारित करने का प्रयास करता है कि स्वतंत्र चर में परिवर्तन निर्भर चर को कैसे प्रभावित करते हैं। प्रतीपगमन विश्लेषण में, एक चर को परिणाम या प्रतिक्रिया माना जाता है, जबकि अन्य को भविष्यवक्ता या व्याख्यात्मक चर माना जाता है। सहसंबंध विश्लेषण उस डिग्री का आकलन करता है कि दो चर एक–दूसरे से किस हद तक संबंधित हैं। यह मापता है कि एक चर में परिवर्तन किस हद तक दूसरे चर में परिवर्तन से जुड़े हैं, बिना किसी कारण के।

4.5.3 परिणाम में अंतरः प्रतीपगमन विश्लेषण के परिणाम में गुणांक शामिल होते हैं जो स्वतंत्र और आश्रित चर के बीच संबंध के परिमाण और दिशा का प्रतिनिधित्व करते हैं। यह एक प्रतीपगमन समीकरण भी प्रदान करता है जिसका उपयोग स्वतंत्र चर के मूल्यों के आधार पर आश्रित चर की भविष्यवाणी करने के लिए किया जा सकता है। सहसंबंध विश्लेषण का परिणाम एक सहसंबंध गुणांक है, जिसे आम तौर पर "r" द्वारा दर्शाया जाता है, जो दो चर के बीच रैखिक संबंध की ताकत और दिशा को निर्धारित करता है। सहसंबंध गुणांक -1 से 1 तक होता है, जहाँ 1 के करीब के मान एक मजबूत धनात्मक सहसंबंध को इंगित करते हैं, -1 के करीब के मान एक मजबूत ऋणात्मक सहसंबंध को इंगित करते हैं, और 0 के करीब के मान थोड़ा या कोई सहसंबंध नहीं दर्शाते हैं।

4.5.4 उपयोगिता में अंतरः प्रतिगमन विश्लेषण का उपयोग आमतौर पर अर्थशास्त्र, वित्त, सामाजिक विज्ञान और इंजीनियरिंग जैसे विभिन्न क्षेत्रों में पूर्वानुमानित मॉडलिंग, पूर्वानुमान कारण–और–प्रभाव संबंधों को समझने में किया जाता है। सहसंबंध विश्लेषण चर के बीच संबंधों की खोज करने, पैटर्न की पहचान करने और उनके बीच संबंध की डिग्री का आकलन करने के लिए उपयोगी है। इसका उपयोग अक्सर खोजपूर्ण डेटा विश्लेषण और आगे के शोध का मार्गदर्शन करने के लिए किया जाता है।

संक्षेप में, जबकि प्रतीपगमन विश्लेषण और सहसंबंध विश्लेषण दोनों में चर के बीच संबंधों का आकलन करना शामिल है, प्रतीपगमन विश्लेषण परिणामों की भविष्यवाणी करने और कारण संबंधों को समझने पर ध्यान केंद्रित करता है, जबकि सहसंबंध विश्लेषण बिना कारण बताए चर के बीच संबंधों की ताकत और दिशा को निर्धारित करने पर केंद्रित है।

बोध प्र**श्**न 3. प्रतीपगमन विश्लेषण को सहसंबंध विश्लेषण से क्या अलग करता है–

क) प्रतीपगमन विश्लेषण परिणामों की भविष्यवाणी पर ध्यान केंद्रित करता है, जबकि सहसंबंध विश्लेषण चर के बीच संबंध की ताकत को मापता है।

ख) प्रतीपगमन विश्लेषण में चर के माध्य की गणना करना शामिल है, जबकि सहसंबंध विश्लेषण डेटासेट में आउटलेयर्स की पहचान करता है।

ग) प्रतीपगमन विश्लेषण डेटा बिंदुओं के प्रसार को मापता है, जबकि सहसंबंध विश्लेषण वितरण की विषमता का आकलन करता है।

घ) प्रतीपगमन विश्लेषण का उपयोग डेटासेट के मध्य को निर्धारित करने के लिए किया जाता है, जबकि सहसंबंध विश्लेषण डेटा में भविष्य के रुझान की भविष्यवाणी करता है।

4.6 बोध प्रश्नों के उत्तरः

1. ख) अन्य चर के मूल्यों के आधार पर एक चर के मूल्य की भविष्यवाणी करना

2. ख) ऐतिहासिक डेटा और चर के बीच संबंधों के आधार पर परिणामों की भविष्यवाणी करने के लिए इस्तेमाल की जाने वाली तकनीक
3. क) प्रतीपगमन विश्लेषण परिणामों की भविष्यवाणी पर ध्यान केंद्रित करता है, जबकि सहसंबंध विश्लेषण चर के बीच संबंध की ताकत को मापता है।

4.7 अभ्यास प्रश्नः

1. प्रतीपगमन की किन्ही दो विशेषताओं को संक्षेप में बताइए।
2. प्रतीपगमन तथा सहसंबंध में किन्ही दो अंतर को स्पष्ट कीजिए ।

4.8 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें:

Elhance, D.L (2010): Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.
Greenlaw, Steven A (2005): Doing Economics: A Guide to Understanding and Carrying Out Economic Research.
Gupta, S.P (2011): Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.
Hazarika, Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.
Kothari, C.R: Research Methodology: Methods & Techniques. New Age International Publishers ISBN (13) : 978-81-224-2488-1
Leighton, Thomas (2011) : Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.
Gupta and Kapoor (Latest Edition): Fundamental of Mathematical Statistics, Sultan Chand & Sons, Delhi

इकाई–5
प्रतीपगमन विश्लेषण, प्रतीपगमन रेखाएँ
(Regression Analysis and Regression Lines)

इकाई संरचना (Unit Plan)

5.1 उद्देश्य (Objectives)

5.2 प्रस्तावना (Introduction)

5.3 प्रतीपगमन रेखाएं–द्विचरीय रैखिक प्रतीपगमन विश्लेषण (Bi-variate Linear Regression Analysis)

5.4 y का x पर प्रतीपगमन (Regression of y on X)

5.5 न्यूनतम वर्ग विधि (Least Square Method)

2.8 सह–सम्बन्ध गुणांक के माध्यम से प्रतीपगमन रेखा का सूत्र (Regression Coefficients and Correlation Coefficient)

5.7 x का y पर प्रतीपगमन Regression of X on Y)

5.8 बोध प्रश्नों के उत्तर (Answers to the Basic Questions)

5.9 अभ्यास प्रश्न (Questions for Exercise)

5.10 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें (Bibliography and Useful Books)

5.1 उद्देश्य (Objectives)
इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थीः
1. द्विचरीय रैखिक प्रतीपगमन का परिचय प्राप्त करेंगे।
2. द्विचरीय रैखिक प्रतीपगमन के प्राचलों के मान ज्ञात करने की $Least\ Square$ विधि एवं सहसंबंध गुणांक विधियों को सीख जाएंगे।

5.2 प्रस्तावना (Introduction)
प्रतीपगमन विश्लेषण एक मौलिक सांख्यिकीय उपकरण है जो शोधकर्ताओं, विश्लेषकों और निर्णय निर्माताओं को रिश्तों को समझने, भविष्यवाणियाँ करने, परिकल्पना परीक्षण करने और मॉडल को परिष्कृत करने में सक्षम बनाता है। इसकी व्यापक प्रयोज्यता और जटिल डेटा को संभालने की क्षमता इसे विभिन्न वैज्ञानिक और व्यावहारिक डोमेन में अपरिहार्य बनाती है। प्रतीपगमन विश्लेषण का अध्ययन विभिन्न क्षेत्रों और अनुप्रयोगों में कई कारणों से फायदेमंद है। ऐतिहासिक डेटा के आधार पर भविष्य के परिणामों की भविष्यवाणी करने के लिए प्रतीपगमन का व्यापक रूप से उपयोग किया जाता है। यह वित्त, अर्थशास्त्र, विपणन और स्वास्थ्य सेवा जैसे क्षेत्रों के अध्ययन का एक महत्वपूर्ण स्तम्भ है। प्रतिगमन विश्लेषण आश्रित और स्वतंत्र चर के बीच संबंधों को समझने में मदद करता है। इससे पता चल सकता है कि स्वतंत्र चर में परिवर्तन आश्रित चर को कैसे प्रभावित करते हैं तथा इन चरों के मध्य अंतरसंबंध की गहनता कितनी है। इसके माध्यम से शोधकर्ता रुझानों का पूर्वानुमान लगा सकते हैं और यह समझकर सूचित निर्णय ले सकते हैं कि समय के साथ चर कैसे बदलने की संभावना है। प्रतीपगमन विश्लेषण के अन्तर्गत हम कारण परिणाम सम्बन्धों को एक सुस्पष्ट गणितीय समीकरण द्वारा निरूपित करते है। ये गणितीय समीकरण रैखिक होने के

साथ–साथ गैर रैखिक भी हो सकते हैं। गैर रैखिक प्रतीपगमन विष्लेषण आपको उच्च कक्षाओं अथवा पाठ्यक्रमों में पढ़ना होगा। यहाँ हम रैखिक प्रतीपगमन (Liner Regression) विश्लेषण का अध्ययन करेंगे। उपयोगिता एवं समझने की सरलता के लिए हम केवल द्विचरीय रैखिक प्रतीपगमन विश्लेषण का अध्ययन करेंगें।

5.3 प्रतीपगमन रेखाएँ–द्विचरीय रैखिक प्रतीपगमन विष्लेषण:

एक द्विचरीय मॉडल में दो चर x तथा y होंगे जिनके औसत मानों के मध्य एक गणितीय सम्बन्ध को प्रदर्शित करने वाले समीकरण को स्थापित करना होता है। चूंकि हम रैखिक सम्बन्ध का अध्ययन करना चाहते है। अतः इस सम्बन्ध को व्यक्त करने वाला समीकरण

$$y = a + bx$$

अथवा

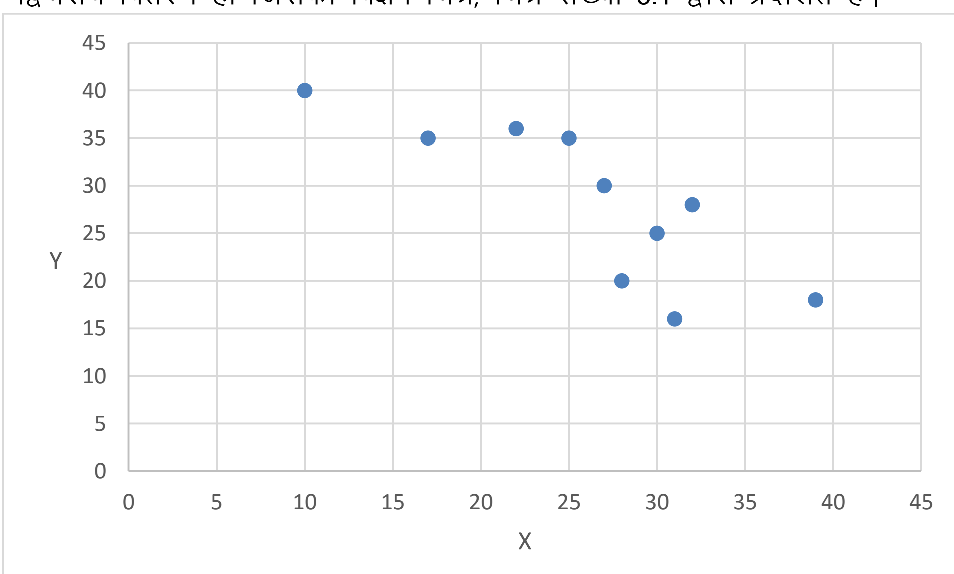
$$y = \acute{a} + \acute{b}\ y$$

के स्वरूप हो सकता है। चूंकि दो चर x तथा y लिये गये है तो इनके बीच कारण परिणाम के सम्बन्ध की दो स्थितियाँ हो सकती हैं, पहली में चर x स्वतन्त्र तथा चर y आश्रित हो तथा दूसरी जब चर y स्वतन्त्र एवं चर x आश्रित हो। अगर x स्वतन्त्र चर (explanatary variable) तथा y आश्रित चर (explained variable) हो तो इनके बीच रैखिक समीकरण $y = a + bx$ के स्वरूप का होगा। इसी प्रकार जब y स्वतन्त्र चर (explanatary variable) तथा x आश्रित चर (explained variable) हो तो इनके बीच रैखिक समीकरण $X = \acute{a} + \acute{b}y$ के स्वरूप होगा।

5.4 y का x पर प्रतीपगमन:

यदि
$$x = x_1,\ x_2, x_3 \dots\dots\dots\dots.., x_n$$
$$y = \ y_1, y_2, y_3, \dots\dots\dots\dots.., y_n$$

द्विचरीय वितरण हो जिसका विक्षेप चित्र, चित्र संख्या 5.1 द्वारा प्रदर्शित है।

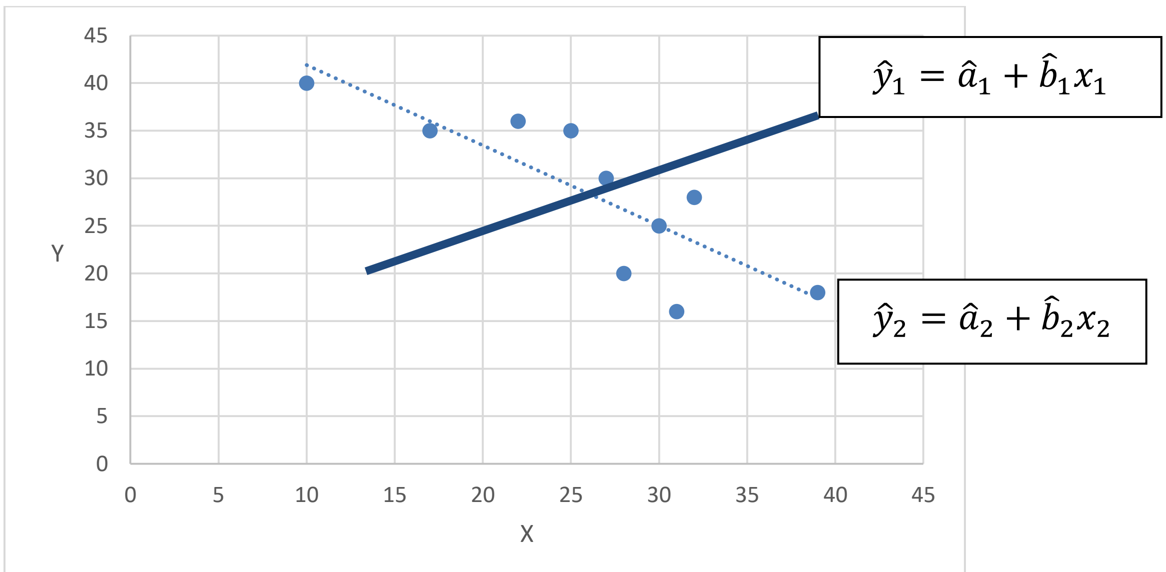


चित्र संख्या 5.1

$y = a + bx$ द्वारा प्रदर्शित रेखा अक्षों के मध्य कहाँ स्थित होगी तथा इसका ढाल कैसा होगा यह प्राचलों a तथा b के मान पर निर्भर करता है। प्रतीपगमन विश्लेषण का मुख्य उद्देश्य भी प्राचलों के ऐसे मानों $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ को प्राप्त करना होता है जिसके माध्यम से हमारी अनुमानित $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ रेखा ऐसी दशा में उपस्थित हो कि y के वास्तविक मानों से अनुमानित मानों के अन्तर के वर्गों का योग $(\sum e^2)$ न्यूनतम हो।

5.5 *Least square Method* विधि:

यदि अनुमानित y के दो भिन्न रूप निम्नवत हों तो



चित्र संख्या 5.2

तो अनुमानित रेखा $\hat{y}_1 = \hat{a}_1 + \hat{b}_1 x_1$ वास्तविक सम्बन्ध को त्रुटिपूर्वक प्रदर्शित कर रही है। प्रथम तो विक्षेप चित्र चरों के मध्य विपरीत सम्बन्ध की ओर इशारा कर रहा था जबकि अनुमानित रेखा $\hat{y}_1$ की ढाल धनात्मक है। इसके अतिरिक्त यदि प्रत्येक x के लिए वास्तविक y एवं अनुमानित $\hat{y}$ के अन्तराल स्पष्ट रूप से अत्यधिक है।

इसके विपरीत दूसरी अनुमानित रेखा $\hat{y}_2 = \hat{a}_2 + \hat{b}_2 x_2$ चरों के बीच विपरीत सम्बन्ध को भी स्पष्ट कर रही है और इस रेखा द्वारा y के अनुमान $\hat{y}_2$, y के वास्तविक मानों से अपेक्षाकृत निकटता भी प्रदर्शित कर रहे हैं। वास्तव में प्राचलों के ऐसे असंख्य मान हो सकते है जिनसे y के अनुमान प्रदर्शित किये जा सकें। प्रतीपगमन विश्लेषण का मुख्य कार्य ऐसी सटीक रेखा (line of best fit) को प्रदर्शित करने वाले प्राचलों को ज्ञात करना है जिससे अनुमानित $\hat{y}$ तथा वास्तविक y के मध्य अन्तराल न्यूनतम हो।

यदि $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}\, x$ वही सटीक रेखा हो जिससे x के मानों के लिए y के वास्तविक तथा अनुमानित मूल्यों का अन्तरालों के वर्गों का योग न्यूनतम हो तो $e_i = y_i - \hat{y}_i$ अर्थात वास्तविक तथा अनुमानित

मूल्यों के अन्तर को त्रुटि (error) से परिभाषित करते है। त्रुटि $e_i = y_i - \hat{y_i}$ में $\hat{y}_i = \hat{a} + \hat{b}_i x$ रखने पर

$$e_i = y_i - (\hat{a} + \hat{b}x_i)$$
$$e_i = y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i$$

Least square विधि का प्रयोग करके हम $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ को निर्धारित करेंगे। इसके लिए त्रुटियों के वर्गो के योग $\sum e^2{}_i = \sum(y_i - \hat{a} - \hat{b}x)^2$ को चरममान के सिद्वान्त (Principal of maxima and minima) का प्रयोग करते हुए $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ के सापेक्ष आंशिक अवकलन करेंगे तथा इन अवकलजों को शून्य के बराबर रखेंगे।

(i) $\frac{\partial(\sum e^2{}_i)}{\partial \hat{a}} = 0$

या, $-2\sum\left(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i\right) = 0$

या, $\sum y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum x_i$----------- (A)

(ii) $\frac{\partial \sum e^2}{\partial \hat{b}} = 0$

या, $-2\, x\sum(y_i - \hat{a} - \hat{b}x_i) = 0$

या, $\sum x_i y_i = \hat{a}\sum x_i - \hat{b}\sum x_i^2$------------ (B)

समीकरण A तथा B का Normal equation कहते है। इन्हें साथ रखनें पर

$\sum x_i y_i = \hat{a}\sum x_i + \hat{b}\sum x_i^2$ ------------ (B)

$\sum y_i = n\hat{a} + \hat{b}\sum x_i$ ------------ (A)

x तथा y के वास्तविक मानों का हमें पता है अतः $\sum x_i y_i, \sum y_i, \sum x_i$ की गणना हो जायेगी और उपरोक्त normal equation $\hat{a}$ तथा $\hat{b}$ के लिए हल हो जायेगा।

उदारहणः चर x तथा y के निम्न मानों के लिए y की x पर प्रतीपगमन रेखा ज्ञात कीजिए।

x: 3 5 6 4 7
y: 8 15 15 10 17

हलः y का x पर प्रतीपगमन की रेखा ज्ञात करने हेतु नॉर्मल समीकरण (Normal equations)

$$\sum y_i = na + b\sum x_i \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$
$$\sum x_i y_i = a\sum x_i + b\sum x^2{}_i \ldots\ldots\ldots.. (2)$$

के अनुरूप $\sum x_i y_i$, $\sum y_i$, $\sum x_i{}^2$, $\sum x_i$ ज्ञात करके इन समीकरणों में प्रतिस्थापित करते हुए a तथा b के मान ज्ञात करेंगे। जहाँ $n = 5$ है।

x	y	$x_i{}^2$	$x_i y_i$
3	8	9	24
5	15	25	75
6	15	36	90

4	10	14	40
7	17	49	119
$\sum x_i = 25$	$\sum y_i = 65$	$\sum {x_i}^2 = 135$	$\sum x_i y_i = 348$

सभी मानों को normal समीकरणों में प्रतिस्थापित करनें पर

$5a + 25b = 65 \ldots\ldots\ldots (1)$

$25a + 135b = 348 \ldots\ldots (2)$

समीकरण (1) से $\quad 5a + 25b = 65$

या, $\ a + 5b = 13$

या, $\ a = 13 - 5b$ --------------(3)

a का मान समीकरण (2) में रखनें पर

$25(13 - 5b) + 105b = 348$

$325 - 125b + 135b = 348$

$325 + 10b = 348$

$10b = 348 - 325$

$10b = 23$

$b = \frac{23}{10}$

$b = 2.3$

b का मान समीकरण (3) में रखनें पर

$a = 13 - 5b$

$= 13 - 5(2.30)$

$= 13 - 11.5$

$= 1.5$

अतः अभीष्ट प्रतीपगमन रेखा $y = 1.5 + 2.3x$ होगी।

बोध प्रश्न 1. चर x तथा y के निम्न मानों के लिए y की x पर प्रतीपगमन रेखा ज्ञात कीजिए।

x	75	80	93	65	87	71	98	68	84	77
y	82	78	86	72	91	80	95	72	89	74

5.6 सह–सम्बन्ध गुणांक के माध्यम से प्रतीपगमन रेखा का सूत्रः

वैकल्पिक रूप में सहसम्बन्ध गुणांक एवं x तथा y के प्रमाप विचलनों के माध्यम से भी y के लिए x की रैखिक प्रतीपगमन रेखा ज्ञात की जा सकती है।

यह सूत्र निम्नवत है

$y - \bar{y} = r\frac{\sigma y}{\sigma x}(x - \bar{x})$------------- (D)

जहाँ, $\quad r = x$ तथा y का सहसम्बन्ध गुणांक

$\sigma x = x$ का प्रमाप विचलन

$\sigma y = y$ का प्रमाप विचलन होगा।

उपरोक्त सूत्र D दो बिन्दुओं के मध्य सरल रेखा के समीकरण से तुलनीय है। यदि y के x पर प्रतीपगमन रेखा की ढाल को b_{yx} कहें तो उपरोक्त सूत्र का व्यंजक $r\frac{\sigma y}{\sigma x}$ इसी b_{yx} के बराबर होगा।

अर्थात, $b_{yx} = r\frac{\sigma y}{\sigma x}$-------------(E)

या $y - \bar{y} = b_{yx}(x - \bar{x})$

5.7 x का y पर प्रतीपगमनः

x का y पर प्रतीपगमनः यदि y को स्वतन्त्र चर (regressor) तथा x को आश्रित चर (regressand) लिया जाये तो x की y पर प्रतीपगमन रेखा निकाली जायेगी जिसका मानक सूत्र $x = \acute{a} + \acute{b}y$ होगा।
x तथा y के दिये हुए समंको के लिए x की y पर सटीक रेखा (line of best fit) ज्ञात करने के लिए पूर्व की ही भांति least square विधि का प्रयोग करते हुए X तथा Y के लिए नार्मल समीकरण (normal equations)
निम्नवत होगी।

$\sum x_i = n\acute{a} + \acute{b}\sum y_i \dots\dots\dots\dots (1)$

$\sum x_i y_i = \acute{a}\sum y_i + \acute{b}\sum {y_i}^2 \dots\dots\dots.. (2)$

दिये हुए समंको से $\sum x_i$,$\sum y_i$,$\sum y_i x_i$,$\sum {y_i}^2$ के मान निकालते हुए normal equations में रखते हुए $\acute{a}$ तथा $\acute{b}$ के अनुमान $\hat{\acute{a}}$ तथा $\hat{\acute{b}}$ ज्ञात हो जायेंगे और इन्हें $x = \acute{a} + \acute{b}y$ में रखनें पर वाछिंत x की y पर प्रतीपगमन रेखा मिल जायेगी।

वैकल्पिक रूप से $x - \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$ का भी प्रयोग करके x की y पर प्रतीपगमन रेखा ज्ञात हो जायेगी। यदि x की y पर प्रतीपगमन रेखा की ढाल b_{xy} कही जाये ता

` $b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$ -----(F) होगा।

अर्थात $x - \bar{x} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \bar{y})$

या $x - \bar{x} = b_{xy}(y - \bar{y})$

E तथा F से b_{yx} तथा b_{xy} का गुणन करने पर

$b_{yx} \times b_{xy} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}.\ r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}$

या

$b_{yx} \times b_{xy} = r^2$------------(G)

अर्थात Y की X पर प्रतीपगमन रेखा की ढाल b_{yx} तथा X की Y पर प्रतीपगमन रेखा की ढाल b_{xy} का गुणा सहसम्बन्ध गुणांक r के वर्ग के बराबर होगा।

उदारहणः नीचे दिए गए डेटा से X पर Y और Y पर X के दो प्रतिगमन समीकरणों की गणना करें।

X	1	2	3	4	5	6	7
Y	9	8	10	12	11	13	14

हल

X	Y	X^2	Y^2	XY
1	9	1	81	9
2	8	4	64	16
3	10	9	100	30
4	12	16	144	48
5	11	25	121	55
6	13	36	169	78
7	14	49	196	98
$\sum X$=28	$\sum Y = 77$	$\sum X^2$ =149	$\sum Y^2$ =875	$\sum XY$ =334

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{28}{7} = 4$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{77}{7} = 11$$

x की y पर प्रतीपगमन रेखा की ढाल

$$b_{xy} = \frac{N\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N\sum Y^2 - (\sum Y)^2} = \frac{7(334) - (28)(77)}{7(875) - 77^2}$$

$$= \frac{2338 - 2156}{6125 - 5929}$$

$$= \frac{182}{196}$$

$$b_{xy} = 0.929$$

x की y पर प्रतीपगमन रेखा$X - \bar{X} = b_{xy}(Y - \bar{Y})$

या $X - 4 = 0.929(Y - 11)$

या $X - 4 = 0.929Y - 10.219$

या $X = 0.929Y - 6.219$

अतः

x की y पर प्रतीपगमन रेखा $X = 0.929Y - 6.219$ होगी।

अब Y की X पर प्रतीपगमन रेखा $Y - \bar{Y} = b_{yx}(X - \bar{X})$ के लिए

$$b_{yx} = \frac{N\sum XY - (\sum X)(\sum Y)}{N\sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{7(334) - (28)(77)}{7(140\ ) - 28^2}$$

$$= \frac{2338 - 2156}{980 - 784}$$

$$= \frac{182}{196}$$

$$b_{yx} = 0.929$$

Yकी X पर प्रतीपगमन रेखा $Y - \bar{Y} = b_{yx}(X - \bar{X})$

या $Y - 11 = 0.929(X - 4)$
या $Y - 11 = 0.929X - 3.716$
या $Y = 0.929X + 7.284$
अतः
Y की X पर प्रतीपगमन रेखा $Y = 0.929X + 7.284$ होगी।

बोध प्रश्न 2 नीचे दिए गए डेटा से X और Y के वास्तविक माध्य से विचलन लेते हुए X पर Y और Y पर X के दो प्रतिगमन समीकरणों की गणना करें।

मूल्य	10	12	13	12	16	15
मंग	40	38	43	45	37	43

मूल्य स्तर 20 पर संभावित मांग कितनी होगी?

5.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. हल

x	y	x^2	xy
75	82	5625	6150
80	78	6400	6240
93	86	8349	7998
65	72	4225	4680
87	91	7569	7917
71	80	5041	5680
98	95	9605	9310
68	72	4624	4896
84	89	7056	7476
77	74	5929	5698
$\sum x$ =798	$\sum y$ =819	$\sum$x2=64422	$\sum xy$= 66045

द्विचरीय प्रतीपगमन की नॉर्मल इक्वैशन होती हैं –

$$\Sigma y = a\Sigma x + nb$$

और

$$\Sigma xy = a\Sigma x^2 + b\Sigma x$$

उपरोक्त तलीका द्वारा गणना की गई राशियों के मान प्रतिस्थापित करने पर

$819 = 798a + 10b$
$66045 = 64422a + 798b$
इन समीकरणों को हल करने पर

$a = 0.9288$
$b = 7.78155$
अतः वांछित प्रतीपगमन रेखा का समीकरण $y = 0.9288x + 7.78155$ होगा

2. हल

मूल्य (X)	$x = (X - \bar{X})$	x^2	मंग(Y)	y	y^2	xy
10	-3	9	40	-1	1	3
12	-1	1	38	-3	9	3
13	0	0	43	2	4	0
12	-1	1	45	4	16	-4
16	3	9	37	-4	16	-12
15	2	4	43	2	4	4
$\sum X = 78$	$\sum x = 0$	$\sum x^2 = 24$	$\sum Y = 246$	$\sum y = 0$	$\sum y^2 = 50$	$\sum xy = -6$

$$\bar{X} = \frac{\sum X}{N} = \frac{78}{6} = 13$$

$$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{N} = \frac{246}{6} = 41$$

x की y पर प्रतीपगमन रेखा $X - \bar{X} = b_{xy}(Y - \bar{Y})$ के लिए

$$b_{xy} = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\sum xy}{\sum y^2} = -\frac{6}{50} = -0.12$$

अतः x की y पर प्रतीपगमन रेखा $X - 13 = -0.12(Y - 41)$

या $X = -0.12Y + 17.92$

इसी प्रकार

Y की X पर प्रतीपगमन रेखा $Y - \bar{Y} = b_{yx}(X - \bar{X})$के लिए

$$b_{yx} = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\sum xy}{\sum x^2} = -\frac{6}{24} = -0.25$$

अतः x की y पर प्रतीपगमन रेखा$Y - 41 = -0.25(X - 13)$

या $Y = -0.25\,X + 44.25$

मूल्य स्तर $X = 20$ पर संभावित मांगYके लिए

$Y = -0.25\,X + 44.25$में$X = 20$रखने पर

$Y = -0.25\,(20) + 44.25$

$= 39.25$

अर्थात मूल्य स्तर $X = 20$ पर संभावित मांग $Y = 39.25$ होगी ।

5.9 अभ्यास प्रश्नः

1. निम्न आंकड़ों के लिए सबसे सटीक सीधी रेखा $(Line\ of\ Best\ Fit)$ का समीकरण क्या होगा?

x	0	5	10	15	20

y	7	11	16	20	26

2. निम्न आंकड़ों के लिए x की y पर तथा y की x पर प्रतीपगमन रेखाएँ ज्ञात कीजिए ।

x	5	10	15	20	25
y	9	8	7	6	5

5.10 **संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें:**

Elhance, D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Gupta, S.P (2011) : Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

Hazarika, Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Leighton, Thomas (2011) : Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.

Gupta and Kapoor (Latest Edition): Fundamental of Mathematical Statistics, Sultan Chand & Sons, Delhi.

खण्ड–4
काल श्रेणी का विश्लेषण
इकाई–1
काल श्रेणी का विश्लेषण, काल श्रेणी के अवयव

1.1 उद्देश्य (Objectives)
इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी:
1. काल श्रेणी का आशय तथा इसके महत्व से परिचित हो जाएंगे।
2. काल श्रेणी कि विभिन्न अवयवों से परिचय प्राप्त करेंगे।

1.2 प्रस्तावना (Introduction)
गणितीय अर्थशास्त्र में काल श्रेणी का अध्ययन विद्यार्थियों को आर्थिक जगत का व्यावहारिक विश्लेषण के योग्य बनाता है। किसी अर्थव्यवस्था में होने वाले परिवर्तन जैसे आर्थिक विकास, मूल्य स्तर, रोजगार के स्तर, शेयर बाजार के उतार चढ़ाव इत्यादि को समय के सापेक्ष देखा जाता है इसलिए इन आर्थिक चरों परिवर्तनों का विश्लेषण करने हेतु ऐसी गणितीय पद्धतियों का ज्ञान आवश्यक है जिनसे काल श्रेणी के विभिन्न घटकों का विश्लेषण किया जा सके, क्योंकि इससे हमें डेटा के विभिन्न पैटर्न और प्रवृत्तियों को समझने में मदद मिलती है। इस प्रकार का विश्लेषण भविष्यवाणी करने, निर्णय लेने, और रणनीतियाँ बनाने में अत्यंत सहायक होता है। प्रस्तुत इकाई में काल श्रेणी तथा इसके विभिन्न घटकों को समझाने का प्रयास किया गया है।

1.3 काल श्रेणी – परिचय
समय के सापेक्ष समंको के संकलन की सारणी को काल श्रेणी कहते है। जैसे विभिन्न जनगणना में भारत की जनसंख्या विभिन्न वर्षो में भारत की सकल राष्ट्रीय आय, विभिन्न तिमाही में मौद्रिक आपूर्ति, मासिक आयत का मूल्य साप्ताहिक विद्युत की खपत इत्यादि।

उदाहरण–1: विभिन्न जनगणना वर्षों में भारत की जनसंख्या–

वर्ष:	1951	1961	1971	1981	1991	2001	2011
जनगणना:	36.10	43.92	54.81	68.33	84.64	102.87	121.08

उदाहरण –2: विगत 20 वर्षों की सकल घरेलू आय का वार्षिक आंकड़ा –

वर्ष	GNI (करोड रू0)	वर्ष	GNI (करोड रू0)
2000—01	2117153	2013—14	11093638
2001—02	2295175	2014—15	12320529
2002—03	2475924	2015—16	13612095
2003—04	2771822	2016—17	15215268
2004—05	3163957	2017—18	16905230
2005—06	3606009	2018—19	18697344
2006—07	4221395	2019—20	19881742
2007—08	4878150	2020—21	19534226
2008—09	5481229	2021—22	23296345
2009—10	6328407	2022—23	26799146
2010—11	7552665		
2011—12	8659505		
2012—13	9827250		

1.4 काल श्रेणी – महत्व

काल श्रेणी ($Time\ Series$) विश्लेषण सांख्यिकी और डेटा विज्ञान का एक महत्वपूर्ण हिस्सा है, जो समय के साथ डेटा में पैटर्न, प्रवृत्तियों, और अन्य घटकों की पहचान और विश्लेषण करता है। इसके महत्व को विभिन्न क्षेत्रों में इसके अनुप्रयोगों और लाभों के माध्यम से समझा जा सकता है।

i. प्रवृत्ति ($Trend$) विश्लेषण

काल श्रेणी विश्लेषण का एक प्रमुख उद्देश्य दीर्घकालिक प्रवृत्तियों का विश्लेषण करना है। यह समझने में मदद करता है कि समय के साथ डेटा कैसे बदलता है। उदाहरण के लिए, किसी कंपनी की बिक्री डेटा का विश्लेषण करके यह जाना जा सकता है कि बिक्री में वृद्धि हो रही है या कमी। यह जानकारी रणनीतिक निर्णय लेने, बजट की योजना बनाने और भविष्य की बिक्री का पूर्वानुमान करने में सहायक होती है।

ii. मौसमीयता ($seasonality$) की पहचान

मौसमीयता उन पैटर्नों को दर्शाती है जो नियमित अंतराल पर दोहराते हैं। उदाहरण के लिए, त्योहारों के दौरान या विशेष मौसम में बिक्री का बढ़ना। काल श्रेणी विश्लेषण के माध्यम से इन मौसमी पैटर्नों की पहचान की जा सकती है, जिससे व्यवसायी अपनी मार्केटिंग रणनीतियों को बेहतर ढंग से योजना बना सकते हैं और संसाधनों का अनुकूलन कर सकते हैं।

iii. चक्रीयता ($Cyclicality$) का विश्लेषण

चक्रीयता दीर्घकालिक चक्रों को दर्शाती है जो अक्सर आर्थिक या व्यावसायिक चक्रों से संबंधित होती है। उदाहरण के लिए, अर्थव्यवस्था में मंदी और उछाल के चक्र। काल श्रेणी विश्लेषण के माध्यम से इन चक्रीय पैटर्नों की पहचान की जा सकती है, जिससे नीतिनिर्माता और व्यवसाय बेहतर निर्णय ले सकते हैं और जोखिम प्रबंधन रणनीतियाँ विकसित कर सकते हैं।

iv. पूर्वानुमान ($Forecasting$)

काल श्रेणी विश्लेषण का एक प्रमुख लाभ भविष्य का पूर्वानुमान करना है। समय के साथ डेटा के पैटर्न का विश्लेषण करके भविष्य के मूल्यों का सटीक अनुमान लगाया जा सकता है। यह वित्तीय योजना, उत्पादन शेड्यूलिंग, और इन्वेंटरी प्रबंधन में महत्वपूर्ण है। उदाहरण के लिए, स्टॉक मार्केट में समय श्रृंखला विश्लेषण का उपयोग निवेशकों को संभावित भविष्य के मूल्यों का अनुमान लगाने में मदद करता है।

v. असामान्यता का पता लगाना (*Anomaly Detection*)
काल श्रेणी विश्लेषण के माध्यम से डेटा में असामान्य पैटर्न या विसंगतियों की पहचान की जा सकती है। यह पहचानने में मदद करता है कि किसी विशेष समय पर क्या असामान्य हुआ था, जैसे कि अचानक किसी मशीन का फेल होना। यह जानकारी तुरंत सुधारात्मक कार्रवाई करने में सहायक होती है, जिससे परिचालन कुशलता में सुधार होता है।

vi. विभिन्न चर के बीच संबंधों का विश्लेषण
काल श्रेणी विश्लेषण से विभिन्न समय–आधारित चर के बीच संबंधों का विश्लेषण किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, मौसम और ऊर्जा खपत के बीच का संबंध। इससे विभिन्न कारकों के बीच अंतर्संबंधों को समझने में मदद मिलती है, जो निर्णय लेने की प्रक्रिया को बेहतर बनाता है।

vii. व्यवसाय और आर्थिक नीतियों में सुधार
काल श्रेणी विश्लेषण के माध्यम से प्राप्त जानकारी का उपयोग नीतियों और योजनाओं को विकसित करने के लिए किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, सरकारें आर्थिक नीतियों को निर्धारित करने के लिए जीडीपी, बेरोजगारी दर, और मुद्रास्फीति जैसी समय श्रृंखलाओं का विश्लेषण करती हैं।

viii. विज्ञान और अनुसंधान में अनुप्रयोग
विज्ञान और अनुसंधान में, काल श्रेणी विश्लेषण का उपयोग मौसम के पूर्वानुमान, जलवायु परिवर्तन, भूकंप की भविष्यवाणी, और चिकित्सा अनुसंधान में किया जाता है। यह वैज्ञानिकों को समय के साथ होने वाले परिवर्तनों को समझने और मॉडल बनाने में मदद करता है।

काल श्रेणी विश्लेषण की व्यापकता और इसकी बहुमुखी उपयोगिता इसे सांख्यिकी और डेटा विज्ञान का एक महत्वपूर्ण उपकरण बनाती है। यह समय के साथ डेटा में पैटर्न और प्रवृत्तियों को पहचानने, भविष्यवाणी करने, और बेहतर निर्णय लेने में अत्यंत सहायक है। विभिन्न क्षेत्रों में इसके अनुप्रयोगों के कारण, इसका अध्ययन और उपयोग व्यवसायों, नीति निर्माताओं, वैज्ञानिकों, और अनुसंधानकर्ताओं के लिए अनिवार्य हो गया है।

1.5 काल श्रेणी के अवयव :
काल श्रेणी को निम्न अवयवों में विधटित करके अध्ययन किया जाता है–

1. उपनीति या प्रवृति रेखा (Trend Line)
2. मौसमी धटक (Seasonal Componet)
3. चक्रीय व्यवहार (Cyclic Behaviour)
4. अनियमित या अवशिष्ट धटक (Irregular or Residual Component)

1. **प्रवृति रेखाः** काल श्रेणी के दीर्धकालीन समंको का अध्ययन काल श्रेणी द्वारा दर्शाये गये चर की प्रवृति प्रदर्शित करती है। उदारहण के लिए पिछले 20 वर्षो में राष्ट्रीय आय के समंको को यदि समय के सापेक्ष प्रदर्शित किया जाये तो ऐसे रेखा चित्र में राष्ट्रीय आय का स्तर एक बढ़ती हुई प्रवृति को प्रदर्शित करेगा। इसी प्रकार यदि समय के सापेक्ष कृषि क्षेत्र के राष्ट्रीय आय में योगदान को प्रदर्शित किया जाये तो इसकी एक घटती हुई प्रवृति प्रदर्शित होगी। अतः हम कह सकते है कि प्रवृति रेखा दीर्धकाल में किस वृद्धि या ह्रास की प्रवृति को दर्शाती है। प्रवृति रेखा एक औसत को दर्शाती है। एक दीर्घकालीन प्रवृत्ति की रेखा की गति सुचारू, नियमित और स्थिर होती है। यद्यपि एक लम्बी अवधि में बीच के किसी समय बिन्दु पर चर का मान प्रवृत्ति रेखा से कम या ज्यादा हो सकते है परन्तु औसत रेखा या प्रवृत्ति रेखा चर की बढ़ती या घटती या बढ़ती हुई लय को दर्शाती है। उदाहरण– किसी कंपनी की बिक्री में साल दर साल वृद्धि।
2. **मौसमी घटकः** काल श्रेणी में मौसमी घटक की उपस्थिति एक निश्चित समय–अन्तराल पर पुनरावृत्ति को दर्शाती है। मौसमी घटक प्रत्येक वर्ष उसी समय बिन्दु या समयावधि पर अपने आपको दुहराते हैं। जैसे वर्षा ऋतु में छाते/बरसाती की बिक्री, गर्मी में कूलर/ए0 सी0 की बिक्री,

शादियों के सीजन में कपड़ों की मांग तथा बिक्री, त्योहारों के सीजन तथा गर्मी की छुट्टियों में सैलानियों की गतिविधियों में वृद्धि इत्यादि मौसमी घटक के उदाहरण है।

3. **चक्रीय उच्चावचनः** काल श्रेणी में चक्रीय उच्चावचन प्रवृत्ति रेखा के ऊपर से नीचे तथा नीचे से ऊपर आने वाले बदलावों को दर्शाते है। चक्रीय उच्चावचनों से एक पूरे चक्र की अवधि एक वर्ष तक या उससे भी लम्बी हो सकती है। जैसे शेयर बाजार में पिछले 20 वर्ष की लम्बी अवधि में एक वृद्धिमान प्रवृत्ति देखने को मिलती है। अगर शेयर बाजार के सूचकांक को समय के सापेक्ष दर्शाया जाये तो औसत प्रवृत्ति रेखा इस समयावधि (20 वर्ष) के दौरान बढ़ती हुई रेखा द्वारा प्रदर्शित हो जायेगी परन्तु वास्तव में सूचकांकों में इस प्रवृत्ति रेखा के ऊपर से नीचे तथा नीचे से पुनः ऊपर जाने की चक्रीय प्रवृत्ति भी स्पष्ट दिख जायेगी। एक चक्रीय उच्चावचन में 4 स्टेज आती है।

i. विस्तार या समृद्धि (चर का औसत मान से ऊपर की ओर जाना)
ii. प्रतिसार (पुनः ऊपर से औसत की ओर लौटना)
iii. अवसाद (चर का अपने औसत या प्रवृत्ति रेखा से नीचे जाना)
iv. पुनरूत्थान (चर का नीचे से पुनः औसत की ओर लौटना)

4. **अनियमित या अवशिष्ट घटकः** किसी चर में समय के सापेक्ष माप (काल श्रेणी) में कभी–कभी कुछ ऐसे अनियमित परिवर्तन देखने को मिलते है जो ऊपर उल्लेख की गयी किसी भी श्रेणी की नहीं होती, इसलिए काल श्रेणी में ऐसे अवयवों को अवशिष्ट (Residual) घटक कहते है। ऐसे घटक अनियमित होते हैं तथा इनकी माप सम्भव नहीं होती। काल श्रेणी में यह घटक किसी आपदा, भूकम्प, अकाल या फिर अन्य किसी अस्पष्ट कारण से आ सकती है।

बोध प्रश्न 1. एक दीर्घकालीन प्रवृत्ति की रेखा की गति –

i. सुचारू होती है।
ii. नियमित होती है।
iii. स्थिर होती है।
iv. इनमें से सभी ।

बोध प्रश्न 2. आपदा, भूकंप तथा अकाल के कारण काल श्रेणी में आने वाले परिवर्तन कहलाते हैं।

i. मौसमी धटक
ii. चक्रीय धटक
iii. अनियमित या अवशिष्ट धटक
iv. इनमें से कोई नहीं ।

1.6 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. (iv) इनमें से सभी ।
2. (iii) अनियमित या अवषिष्ट धटक

1.7 अभ्यास प्रश्न

1. चक्रीय उच्चावचनों से क्या आशय है? उदाहरण के द्वारा स्पष्ट कीजिए।
2. काल श्रेणी विश्लेषण के महत्व पर प्रकाश डालिए।

1.8 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

Elhance, D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.
Greenlaw, Steven A (2005): Doing Economics: A Guide to Understanding and Carrying Out Economic Research.
Gupta, S.P (2011) : Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

Hazarika, Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.
Kothari, C.R: Research Methodology: Methods & Techniques. New Age International Publishers ISBN (13) : 978-81-224-2488-1
Leighton, Thomas (2011) : Using Statistics in Economics, Tata McGraw Hill Education.
Gupta, S.P. (Latest Edition): Elementary Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

इकाई–2
उपनति का निर्धारण, सामयिक परिवर्तन

इकाई संरचना (Unit Plan)

2.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद विद्यार्थीः

1. कालश्रेणी समंकों के लिए एक उपनति की रेखा की रचना करना सीख जाएंगे ।
2. चल–माध्यों का परिकलन करना सीख जाएंगे।

2.2 प्रस्तावना (Introduction)

यदि किसी कालश्रेणी के समय के सापेक्ष विक्षेप चित्र का विश्लेषण किया जाए तो हम पाएंगे कि समंक के मान भले ही दीर्घकाल में किसी खास दिशा (ऊर्ध्व अथवा अधोगामी) में जाने की प्रवृत्ति रखते हों परंतु छोटे छोटे कालखंडों में इसमें काफी उतार चढ़ाव दिखेगा। वस्तुततः गणितीय विश्लेषण की दृष्टि से इस विक्षेप चित्र की उपयोगिता सीमित होती है। यदि इस कालश्रेणी के सभी समंक बिन्दु किसी स्पष्ट रेखा अथवा वक्र पर पड़ रहे होते तो गणितीय विश्लेषण की दृष्टि से यह कहीं ज्यादा उपयोगी कालश्रेणी होती, क्योंकि ऐसे रेखाचित्र एक स्पष्ट गणितीय सूत्र द्वारा परिभाषित किए जा सकते हैं जिनके माध्यम से दी गई कालश्रेणी के बाहर के समयबिन्दु पर भी चरों के पूर्वानुमान लगाए जा सकते हैं। किसी काल–श्रेणी को एक स्पष्ट प्रवृत्ति की रेखा या वक्र के रूप में निर्धारित करना ही उपनति का निर्धारण करना कहलाता है। प्रस्तुत इकाई में उपनति की अवधारणा को स्पष्ट करते हुए इसके निर्धारण की प्रमुख विधियों का अध्ययन किया जाएगा।

2.3 उपनति – परिचय

समय के सापेक्ष मापे जाने वाले चरों (काल–श्रेणी) में दीर्घकाल में बढ़ने घटने या स्थिर रहने की प्रवृत्ति हो सकती है जिसे हम उपनति भी कहते हैं। एक लम्बी अवधि की श्रेणी को यदि खंडों में विभाजित करके देखा जाए तो उसमें इन अवधियों में उतार चढ़ाव देखने को मिल जाएंगे परंतु दीर्घ काल में काल श्रेणियाँ समय के साथ ऊर्ध्वमुखी (बढ़ती हुई), अधोमुखी (घटती हुई) या लगभग स्थिर रह सकती हैं। जैसे समय के साथ जनसंख्या की समंक श्रेणी में प्रायः वृद्धि देखने को मिलती है जिसे ऊर्ध्वमुखी उपनति कहेंगे। इसी प्रकार उत्पादन तथा तकनीकी की काल श्रेणी कुछ अन्य श्रेणीयाँ हैं जो ऊर्ध्वमुखी उपनति को दर्शाएँगी। लेकिन सभी काल श्रेणियाँ वृद्धि को प्रदर्शित नहीं करती। कुछ श्रेणियाँ अधोमुखी भी हो सकती हैं तथा कुछ अन्य, उच्चावचनों को प्रदर्शित कर सकती हैं। जैसे किसी देश की अशोधित मृत्युदर की कालश्रेणी अधोमुखी उपनति को प्रदर्शित करेगी।

काल श्रेणी समंक में एक उपनति या प्रवृत्ति की रेखा का निर्धारण करने में चर में अन्तर्निहित प्रवृत्ति या दीर्घकालीन प्रवृत्ति की पहचान करना और मॉडलिंग करना (प्रतिमान स्थापित करना) शमिल है। उपनति रेखा द्वारा उस दिशा का ज्ञान होता है जिस दिशा में चर के मान जा रहे होते है। इसके द्वारा पूर्वानुमान एवं विश्लेषण करने में मदद प्राप्त होती है।

2.4 काल श्रेणी की उपनति का निर्धारण

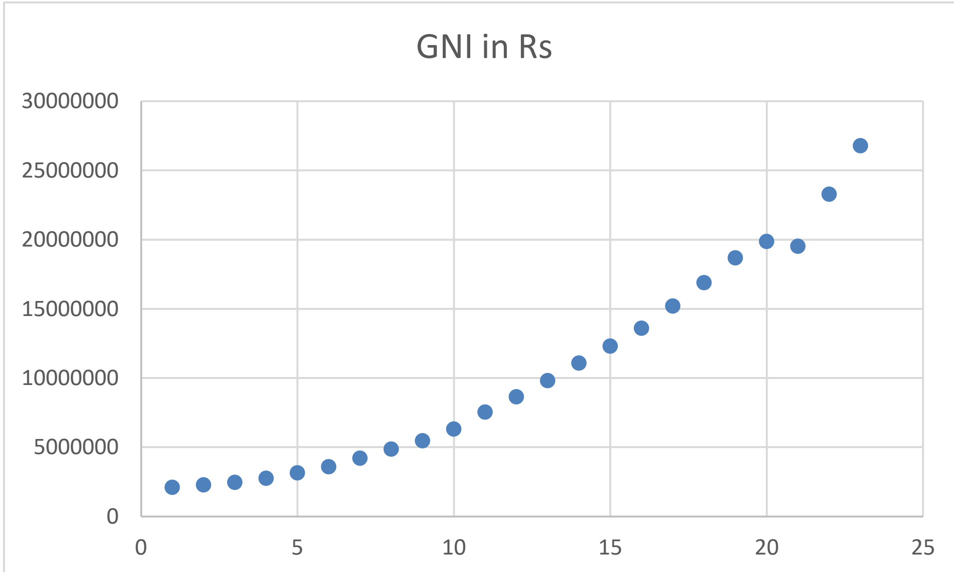
काल श्रेणी के समंक श्रृंखला के लिए उपनति का निर्धारण करने की अनेक विधियाँ होती हैं जिनका चुनाव इस बात पर निर्भर करता है कि संमक श्रेणी की विशेषताएँ क्या है तथा उपनति द्वारा काल श्रेणी विश्लेषण के किन लक्ष्यों को प्राप्त करना है। उपनति निर्धारण की कुछ सामान्य विधियाँ निम्नवत् है–

2.4.1 **दृष्य परीक्षण विधि (Visual Inspection):**– उपनति निर्धारित करने की सरलतम विधि काल श्रेणी समंक श्रृंखला को रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित करते हुए एक औसत रेखा खींचना है। इसके लिए सर्वप्रथम काल श्रेणी की समंक श्रृंखला को एक ग्राफ पेपर पर विक्षेप चित्र के रूप में दर्शाना चाहिए, तत्पश्चात समंक बिन्दुओं की सामान्य दिशा के अनुरूप ऊपर या नीचे की ओर एक सीधी रेखा समंक बिन्दुओं के बीचो बीच से खींची जा सकती है। यही रेखा समंक बिन्दुओं के औसत की रेखा होगी जो उपनति या प्रवृत्ति रेखा भी कहलाती है।

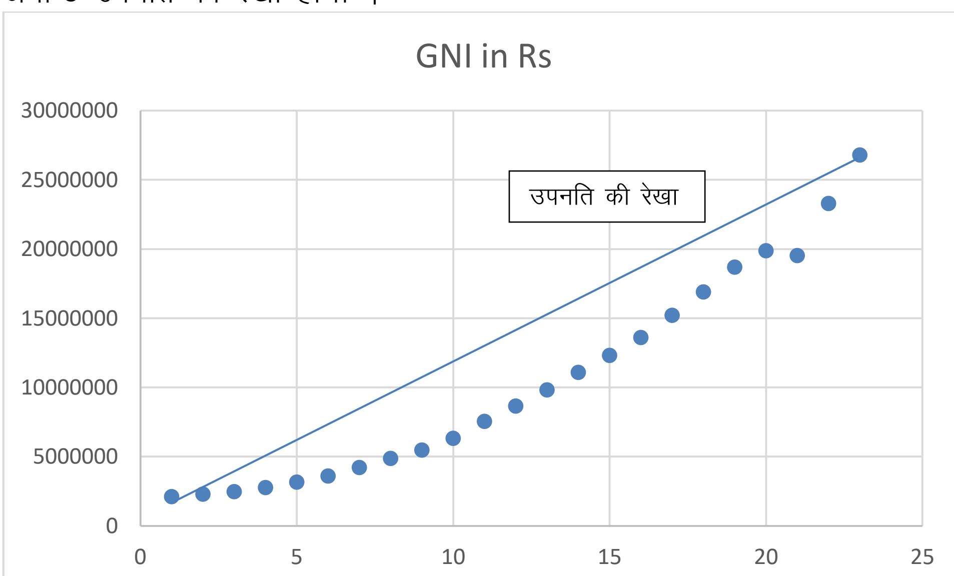
उदाहरण के लिए, यदि सकल राष्ट्रीय आय की पिछले 25 वर्ष की काल श्रेणी निम्नवत हो तो-

वर्ष	GNI (करोड रू0)	वर्ष	GNI (करोड रू0)
2000–01	2117153	2013–14	11093638
2001–02	2295175	2014–15	12320529
2002–03	2475924	2015–16	13612095
2003–04	2771822	2016–17	15215268
2004–05	3163957	2017–18	16905230
2005–06	3606009	2018–19	18697344
2006–07	4221395	2019–20	19881742
2007–08	4878150	2020–21	19534226
2008–09	5481229	2021–22	23296345
2009–10	6328407	2022–23	26799146
2010–11	7552665		
2011–12	8659505		
2012–13	9827250		

इस काल श्रेणी का दृश्य परीक्षण करते हुये उपनति का निर्धारण करने के लिए सर्वप्रथम इस काल श्रेणी का समय के सापेक्ष विक्षेप चित्र बनाएँगे ।



विक्षेप चित्र का प्रारम्भ से अंतिम बिन्दु को मिलाने वाली एक सरल सुचारु रेखा ही अभीष्ट उपनति की रेखा होगी ।



2.4.1 गणनात्मक विधिः काल श्रेणी में प्रवृत्ति को समतल करने और उपनति को निर्धारित करने के लिए विभिन्न गणनात्मक विधियों का उपयोग किया जाता है। इन विधियों में साधारण गत्यात्मक औसत, वजनी गत्यात्मक औसत और प्रतीपगमन विश्लेषण प्रमुख हैं। आइए इन विधियों को विस्तार से उदाहरण सहित समझते हैं।

2.4.1.1 गत्यात्मक औसतः काल श्रेणी में उतार–चढ़ाव को सुचारू करने हेतु गत्यात्मक औसत रेखा उपयोगी होती है। गत्यात्मक औसत रेखा एक निश्चित संख्या के समंक बिन्दुओं के औसत बिन्दुओं को मिलाने से प्राप्त रेखा होती है। काल श्रेणी समंको में अन्तर्निहित प्रवृत्ति को गत्यात्मक औसत रेखाओं द्वारा प्रकट किया जाता है। गत्यात्मक औसत निकालने के लिए सरल अथवा चर घातांकी औसत के उपयोग किये जा सकते है।

2.4.1.1.1 साधारण गत्यात्मक औसत ($\boldsymbol{Simple\ Moving\ Average}$)**:** साधारण गत्यात्मक औसत का उपयोग समय श्रेणी डेटा को समतल करने के लिए किया जाता है।यह विधि अस्थायी परिवर्तन, मौसमी

प्रभाव और अनियमित घटकों को समतल कर दीर्घकालिक प्रवृत्ति का आकलन करने में मदद करती है। गत्यात्मक औसत की विधि निम्नलिखित है–

इसमें एक निश्चित समय अंतराल जैसे 3 महीनों 6 महीनों 1 वर्ष के लिए डेटा का औसत निकाला जाता है और इसे मध्य बिंदु पर प्लॉट किया जाता है। यह प्रक्रिया समय श्रेणी में अस्थायी उतार.चढ़ाव को कम करने में मदद करती है।

एक निश्चित समय अंतराल (n)का चयन करें। पहले n अवलोकनों का औसत निकालें।

फिर अगले n अवलोकनों का औसत निकालें।

इस प्रक्रिया को समय श्रेणी के अंत तक दोहराएं।

यदि $n = 3$ है तो पहले तीन महीनों के डेटा का औसत निकालें फिर अगले तीन महीनों का और इसी प्रकार अंत तक प्रक्रिया को दुहराएँ।

प्राप्त औसत को समय श्रेणी के मध्य बिंदु पर प्लॉट करें।

उदाहरण– मान लीजिए आपके पास निम्नलिखित मासिक बिक्री डेटा है–

ज्नवरी	फरवरी	मार्चः	अप्रैल	मई	जूनः
100	120	130	150	170	160

मासिक साधारण गत्यात्मक औसत की गणना–

पहला औसत –$\frac{100 + 120 + 130}{3} = \ 116.67$

दूसरा औसत –$\frac{120 + 130 + 150}{3} = 133.33$

तीसरा औसत–$\frac{130 + 150 + 170}{3} = 150$

चौथा औसत–$\frac{150 + 170 + 160}{3} = \ 160$

साधारण गत्यात्मक औसत (SMA)

महीनाः मार्च अप्रैल मई जून

sma : 116.67 133.33 150 160

2.4.1.1.2 भारित गत्यात्मक औसतः भारित गत्यात्मक औसत में प्रत्येक अवलोकन को एक विशिष्ट भार दिया जाता है और भारित औसत निकाला जाता है। भारित औसत की विधि निम्नलिखित है–

एक निश्चित समय अंतराल (n) का चयन करें।

समय अंतराल n के प्रत्येक अवलोकन के लिए एक भार निर्धारित करें।

प्रत्येक अवलोकन को उसके भार से गुणा करें।

इन गुणित अवलोकनों का योग निकालें।

भारों का योग निकालें।

गुणित अवलोकनों के योग को भारों के योग से विभाजित करें।

उदाहरण–मान लीजिए हमारे पास निम्नलिखित मासिक बिक्री डेटा है और भार निम्नलिखित हैं

ज्नवरी	फरवरी	मार्चः	अप्रैल	मई	जूनः
100	120	130	150	170	160

भार $0.1, \ 0.3, \ 0.6$

3 .मासिक वजनी गत्यात्मक औसत की गणना

पहला $wma = \frac{(100\times 0.1+120\times 0.3+130\times 0.6)}{(0.1+0.3+0.6)} = \ 123$

दूसरा $wma = \frac{(120\times 0.1+130\times 0.3+150\times 0.6)}{(0.1+0.3+0.6)} = 141$

तीसरा $wma = \frac{(130\times 0.1+150\times 0.3+170\times 0.6)}{(0.1+0.3+0.6)} = 160$

चौथा $wma = \frac{(150\times 0.1+170\times 0.3+160\times 0.6)}{(0.1+0.3+0.6)} = 162$

बोध प्रश्न 1. निम्न काल श्रेणी समंक श्रृखंला में '3' आकार की गत्यात्मक औसत रेखा स्थापित कीजिए।

काल(t)	जनवरी	फरवरी	मार्च	अप्रैल	मई	जून	जुलाई	अगस्त	सितम्बर	अक्टूबर	नम्बर	दिसम्बर
चाय पति की ब्रिकी (टन में)	9	10	12	8	6	11	13	12	14	14	17	21

2.4.2.2 **बहुपद समंजन विधि** $(method\ of\ fitting\ polynomials)$: बहुपद समंजन विधि उपनति निर्धारण की उतम तथा वस्तुनिष्ठ विधि है। इसके अंतर्गत उपनति निर्धारण के लिए एक उपयुक्त बहुपद का चयन करके समंको द्वारा चयनित बहुपद समीकरण में शामिल स्थिरांकों के मान न्यूनतम–वर्ग विधि द्वारा ज्ञात किए जाते हैं । यदि काल श्रेणी का समय के सापेक्ष विक्षेप चित्र बनाने पर काल श्रेणी का बिखराव एक सरल रेखा के स्वरूप का हो तो समय को स्वतन्त्र चर के रूप में लेते हुए सरल रेखीय समीकरण $y = a + bx$ का चयन करते हुए इस समीकरण में शामिल स्थिरांकों a तथा b के मान न्यूनतम–वर्ग विधि द्वारा प्रसामान्य समीकरणों $(normal\ equations)$ द्वारा ज्ञात करेंगें।

2.4.2.3 **मौसमी अपघटन**: जब काल श्रेणी में मौसमी घटक की उपस्थिति होती है तो मौसमी अपघटन की विधि द्वारा मौसमी घटक के प्रभाव को अलग कर दिया जाता है तत्पश्चात उपनति की रेखा ज्ञात की जाती है। काल श्रेणी में मौसमी विचरणो को मापने की बहुत सी विधियाँ हैं, जो इस बात पर निर्भर करती हैं कि अन्य घटक जैसे चक्रीय, उपनति तथा अनियमित विचरण किस प्रकार इसमें विद्यमान हैं। सरलता के लिए, हम केवल मासिक तथा त्रैमासिक समकों पर ही विचार करेंगे लेकिन साप्ताहिक तथा दैनिक समंकों की विधि भी समरूप होती है। इन विधियों के उपयोग द्वारा हम त्रैमासिक (या मासिक) समंकों द्वारा 4 (या 12) संख्याओं का परिकलन करते हैं, जिनकों मौसमी सूचकांक कहते हैं। इन सूचकांको को प्रायः प्रतिशत रूप में व्यक्त किया जाता है। एक विशेष त्रैमास (या मास) की संख्या इस बात का सूचक होता कि इस त्रैमास (या मास) का मान, एक सामान्य त्रैमास (या मास) के मान से कम है या अधिक। उदाहरण के लिए, यदि व्यवसाय का निर्यात या बिक्री का एक त्रैमास का मान 80 है तो यह इस बात का सूचक है कि व्यवसाय का निर्यात या बिक्री सामान्य त्रैमास की तुलना में, 20 प्रतिशत कम है।

इनके अतिरिक्त कुछ अन्य जटिल सांख्यिकीय विधियाँ भी होती हैं जिनके द्वारा उपनति का निर्धारण किया जाता है। इनका अध्ययन उच्च कक्षाओं में कराया जायेगा।

2.6 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. हलः यहां '3' आकार का गत्यात्मक औसत निकालते हुए उपनति की रेखा ज्ञात करनी है इसके लिए प्रथम समंक बिन्दु सहित शुरूआती 3 समंको का औसत ज्ञात करेंगे जो पहला गत्यात्मक औसत बिन्दु होगा। इसके पश्चात अगला गत्यात्मक औसत बिन्दु प्रथम समंक बिन्दु को छोड़ते हुए अगले '3' समंक बिन्दुओं का औसत होगी, इसी प्रकार अगले गत्यात्मक औसत बिन्दु ज्ञात होतें जायेंगे।

काल(t)	चायपत्ती की ब्रिकी (टन में)	त्रैमासिक चल योग	त्रैमासिक चल माध्य
ज्नवरी	9		
फरवरी	10	31	10.33
मार्च	12	30	10
अप्रैल	8	26	8.66
मई	6	25	8.33
ज़ून	11	30	10
जुलाई	13	36	12
अगस्त	12	39	13
सितम्बर	14	40	13.33
अक्टूबर	14	45	15
नवंबर	17	52	17.33
दिसम्बर	21		

3 आकार का sma 10.33, 10, 8.66, 8.33 10, 12, 13, 13.33, 15, 17.33

2.7 अभ्यास प्रश्न

1. निम्नलिखित समंकों द्वारा 2011 से 2020 तक के औद्योगिक उत्पादन सूचकांक दिए

हुए हैं

वर्ष	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020
औद्योगिकउत्पादनसूचकांक	109.2	119.8	129.7	140.8	153.8	152.2	152.6	163.0	175.3	184.3

3–वर्षीय चल–माध्य विधि द्वारा उपनति का आकलन कीजिए।

2. उपरोक्त अभ्यास प्रश्न के लिए यदि वार्षिक भार 0.1, 0.3, 0.6 हों तो भारित त्रै–मासिक उपनति ज्ञात कीजिए।

2.8 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

1. Elhance,D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.
2. Hazarika,Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.
3. Gupta, S.P. (Latest Edition): Elementary Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

इकाई–3
सूचकांक मूल्य सापेक्ष तथा मात्रा सापेक्ष लास्पेयर एवं पाशे का सूचकांक

इकाई संरचना (Unit Plan)

3.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी
1. सूचकांकों के अवधारणा एवं महत्व से परिचित हो जाएंगे।
2. विभिन्न प्रकार के सूचकांकों के निर्माण की विधियाँ सीख जाएंगे

3.2 प्रस्तावना (Introduction)

सूचंकाक का शाब्दिक अर्थ है सूचक अंक अर्थात ऐसे अंक जो सूचना दें। सूचकांक अपने संदर्भ में परिवर्तनों की सूचना देते हैं जैसे –मूल्य सूचकांक सम्बन्धित बाजारों की वस्तुओं के मूल्यों में परिवर्तन (मंहगाई अथवा मंदी) की सूचना देते है, शेयर बाजार के सूचकांक (सेंसेक्स आदि) उस बाजार में लिस्टेड शेयर (अंशो) के मूल्य में परिवर्तन को दर्शाते हैं। मानव विकास सूचकांक विभिन्न देशों में मानव विकास के स्तर के अन्तर को व्यक्त करते हैं। वस्तुतः सूचकांक विभिन्न दशाओं (समय, काल, परिस्थिति, भौगोलिक स्थिति आदि) के सापेक्ष हमारे सन्दर्भ (जैसे मूल्य, जीवन–दशा मानव विकास इत्यादि) में क्या अन्तर हुआ है इसे जानने में सहायक होते है। इस इकाई में हम सूचकांकों का परिचय प्राप्त करते हुए विभिन्न प्रकार के सूचकांकों के निर्माण की विधियाँ सीखेंगे।

3.3 आधार वर्ष (Base Year)

सूचकांकों के निर्माण में आधार वर्ष का महत्वपूर्ण योगदान होता है। आधार वर्ष वह वर्ष होता है जिसके सापेक्ष अन्य वर्षों के आंकड़ों की तुलना की जाती है। सूचकांक को अधिक प्रभावी और सटीक बनाने के लिए आधार वर्ष का चयन सावधानीपूर्वक किया जाना चाहिए।

3.3.1 आधार वर्ष का महत्व

1. **संदर्भ बिन्दुः** आधार वर्ष के रूप में चुना गया वर्ष सूचकांक के लिए एक संदर्भ बिन्दु प्रदान करता है। यह एक मानक या बेंचमार्क के रूप में कार्य करता है, जिससे अन्य वर्षों की तुलना की जाती है।
2. **समानताः** आधार वर्ष के आंकड़े 100 माने जाते हैं। इससे अन्य वर्षों के आंकड़ों की सापेक्ष स्थिति स्पष्ट होती है। यह हमें आसानी से यह समझने में मदद करता है कि किसी विशेष वर्ष में वृद्धि या कमी कितनी हुई है।
3. **अर्थव्यवस्था की स्थितिः** आधार वर्ष का चुनाव इस प्रकार किया जाना चाहिए कि वह अर्थव्यवस्था की सामान्य स्थिति का प्रतिनिधित्व करे। इसका मतलब है कि वह वर्ष असाधारण आर्थिक परिस्थितियों, जैसे कि महामंदी या बूम, से प्रभावित नहीं होना चाहिए।
4. **तुलनीयताः** आधार वर्ष का सही चयन सुनिश्चित करता है कि सूचकांक विभिन्न समय बिन्दुओं पर तुलनीय हो। यह विश्लेषण और निर्णय लेने की प्रक्रिया को अधिक विश्वसनीय बनाता है।

चूँकि सूचकांक एक दशा से दूसरी दशा में सन्दर्भ के अन्तर को स्पष्ट करते है, अतः एक निरपेक्ष दशा को आधार मानना आवश्यक होता है। निरपेक्ष दशा के सूचकांक को 100 (यह एक निरपेक्ष इकाई होती है) माना जाता है। तत्पश्चात सन्दर्भ में परिवर्तनों को इसी 100 के सापेक्ष मापते हैं। उदाहरण के लिए, हम महंगाई या मंदी (मूल्यों में परिवर्तन) की माप करना चाहते हैं तो सर्वप्रथम हम किसी सामान्य से वर्ष (आधार वर्ष) के मूल्यों को 100 के बराबर (आधार वर्ष के सूचकांक को 100 के बराबर) मान लेते हैं। तत्पश्चात् मूल्यों को इसी 100 की सापेक्षता में देखेंगे। यदि बाद के वर्षो में सापेक्षिक मूल्य उत्तरोत्तर बढ़ते हुए हैं तो इसे मंहगाई (या तेजी) कहेंगे। जबकि इसके विपरीत यदि उत्तरोत्तर मूल्यों में कमी हो तो इसे मंदी कहेंगे। वस्तुतः मंहगाई या मंदी सापेक्षिक रूप से समान अवधि के लिए पिछले सूचकांक के तुलनात्मक रूप से क्रमशः अधिक या कम मान को कहते हैं।

3.3.2 **आधार वर्ष का चुनाव**ः स्पष्ट है कि सूचकांक के अध्ययन में आधार वर्ष या आधार दशा का महत्वपूर्ण स्थान है जिसका सूचकांक 100 के बराबर मानते हुए अन्य अवधियों के सूचकांक की गणना की जाती है। अतः आधार दशा या अधिक स्पष्ट रूप से आधार वर्ष का चुनाव करते समय कुछ मुख्य बिन्दुओं पर विचार अवश्य करना चाहिए।

1. **सामान्य वर्ष का चयनः** आधार वर्ष को एक सामान्य वर्ष होना चाहिए, जिसमें अर्थव्यवस्था स्थिर और संतुलित हो। यह सुनिश्चित करेगा कि आधार वर्ष में असाधारण घटनाएँ या उतार–चढ़ाव न हों। किसी वर्ष के सामान्य होने का पैमाना यह भी हो सकता है कि इस वर्ष मूल्य अथवा जिस भी सन्दर्भ में सूचकांक निर्मित किये जा रहे हैं वे सन्दर्भ एक लम्बी अवधि के औसत के बराबर होने चाहिए।
2. **सापेक्षिक स्थिरताः** आधार वर्ष को वह वर्ष होना चाहिए जिसमें न्यूनतम अस्थिरता हो। यह वर्ष उन वर्षों में से होना चाहिए जब कोई आर्थिक संकट, युद्ध, प्राकृतिक आपदा, आदि का प्रभाव न हो।
3. **आधिकारिक मान्यताः** यदि संभव हो, तो आधार वर्ष का चुनाव उस वर्ष के अनुसार किया जाना चाहिए जो सांख्यिकीय विभाग या संबंधित संगठन द्वारा अनुशंसित हो। इससे सूचकांक की आधिकारिकता और विश्वसनीयता बढ़ती है।
4. **हाल का वर्ष**ः आधार वर्ष को हाल के वर्षों में से चुना जाना चाहिए ताकि सूचकांक अधिक प्रासंगिक और उपयोगी हो। बहुत पुराने आधार वर्ष से तुलना करने पर वर्तमान आर्थिक परिस्थितियों की सटीकता कम हो सकती है।
5. **सांख्यिकीय पूर्णताः** आधार वर्ष के लिए उपलब्ध आंकड़े पूर्ण, सटीक और विश्वसनीय होने चाहिए। यह आवश्यक है कि आधार वर्ष के लिए सभी आवश्यक सांख्यिकीय जानकारी उपलब्ध हो।

यदि उपरोक्त परिस्थितियों के अनुसार किसी वर्ष की स्थितियाँ सामान्य हो तो उसे आधार माना जा सकता है तथा आधार दशा (या वर्ष) का सूचकांक 100 के बराबर मान लिया जाता है। इसके पश्चात की परिस्थितियों का इसी 100 के सापेक्षता में मापन करके उसे मूल्य प्रदान करते हैं।

3.4 सूचकांकों की गणना

सूचकांक निर्माण की विभिन्न विधियाँ होती हैं, जो समय के साथ आंकड़ों के मूल्य में परिवर्तन को मापने के लिए उपयोग की जाती है। यहाँ सूचकांक निर्माण की प्रमुख विधियों का वर्णन किया गया है–

3.4.1 योग रीति से सूचकांक

यह सूचकांक निर्माण की सरलतम विधि है, इसके अंतर्गत चालू वर्ष में चर के सभी मूल्यों का बीजगणितीय योग की तुलना आधार वर्ष के मूल्यों के योग से की जाती है ।

उदाहरणः यदि वर्ष 2000 तथा 2020 में आवश्यक खाद्य वस्तुओं के मूल्य निम्नवत् हो तो मूल्यों में परिवर्तन की तुलना कीजिए।

वस्तु	वर्ष 2000 में मूल्य (P_{0i})	वर्ष 2020 में (P_{1i})
गेहूँ	8	30
खाद तेल प्रति लीटर	25	120
गैस प्रति किलो	15	55
आलू प्रति किलो	2	20
कपड़ा प्रति मीटर	45	175
कुल	115	400

यहाँ वर्ष 2000 को आधार वर्ष मानते हुए वर्ष 2020 (चालू वर्ष) के मूल्यों की तुलना करनी है। वर्ष 2000 के समस्त मूल्यों का योग $\sum P_{oi} = 115$ है। आधार वर्ष के मूल्यों के योग को 100 के बराबर माना जायेगा क्योंकि आधार वर्ष का सूचकांक 100 होता है। $\sum P_{oi}$ को 100 के बराबर रखकर $\sum P_{1i}$ की सापेक्षिक मूल्य ज्ञात करेंगे। प्राथमिक गणित के ऐकिक निमया का उपयोग करके जो कि अभीष्ट सूचकांक होगा। इसको ज्ञात किया जा सकता है।

$\sum P_{oi}$ बराबर है 100 को तो 1 बराबर होगा $\frac{100}{\sum P_{oi}}$ के अतः $\sum P_{1i}$ के बाराबर होगा।

$\frac{100}{\sum Poi} \times \sum P_{li}$ के बाराबर होगा।

इस प्रकार सूचकांक ज्ञात करने का सूत्र

$I = \frac{\sum P_{li}}{\sum P_{oi}} \times 100$ होगा।

यह सूंचकांक ज्ञात करने की इस पद्धति को याोग रीति कहते हैं।

उपरोक्त उदारण के लिए सूचकांक

$$I = \frac{\sum P_{li}}{\sum P_{oi}} \times 100$$
$$= \frac{400}{115} \times 100$$
$$= 341.82$$

अर्थात वर्ष 2020 का मूल्य सूचकांक 347.82 होगा।

तुलना की दृष्टि से इसका अर्थ हुआ कि खाद्य वस्तुओं का मूल्य वर्ष 2000 में 100 के सापेक्ष वर्ष 2023 में बढ़कर 347.82 हो गया। इस प्रकार मूल्यों में लगभग 247.82% की वृद्धि होकर मूल्य आधार वर्ष की तुलना में लगभग 3.5 गुना हो गये।

ऊपर वर्णित की गई योग रीति से सूचकांक ज्ञात करने में महत्वपूर्ण दोष है। चूंकि वस्तु के मूल्य प्रति इकाई मात्रा में होते है, जैसे कपड़े का मूल्य प्रति मीटर, खाद्य तेल का मूल्य प्रति लीटर और अन्य वस्तु का मूल्य प्रति किग्रा है। योग रीति में वस्तुओं के कीमत की तुलना उनकी मात्रा की इकाई को उपेक्षित करते हुए की गयी है जो कि दोषपूर्ण है। इसका निराकरण करने के लिए सूचकांक बनाने की अनुपात रीति का प्रयोग करते है।

3.4.2 अनुपात रीति :

इस विधि में प्रत्येक वस्तु के चालू वर्ष के मूल्य का इसके आधार वर्ष के मूल्य से अनुपात ज्ञात करके सभी वस्तु के अनुपातों का औसत निकाल कर सूचकांक ज्ञात किया जाता है। अनुपात रीति से सूचकांक

$$I = \frac{\Sigma\left(\frac{P_{1i}}{P_{oi}} \times 100\right)}{N}$$ जहाँ N वस्तुओं की संख्या है।

उपरोक्त उदाहरण में दिये गये आधार वर्ष तथा चालू वर्ष के मूल्यों के आधार पर अनुपातिक मूल्यों की गणना निम्नवत होगी–

वर्ष 2000 में मूल्य	वर्ष 2020 में मूल्य	अनुपातिक मूल्य
P_{oi}	P_{1i}	$\left(\frac{P_{1i}}{P_{oi}}\right) \times 100$
8	30	$\left(\frac{30}{8}\right) \times 100 = 375$
25	120	$\left(\frac{120}{25}\right) \times 100 = 480$
35	55	$\left(\frac{55}{35}\right) x100 = 157.14$
2	20	$\left(\frac{20}{2}\right) \times 100 = 1000$
45	175	$\left(\frac{175}{45}\right) \times 100 = 388.88$
		$\sum(\frac{P_{li}}{P_{oi}} \times 100) = 2401.02$

अनुपातिक रीति से सूचकांक

$$I = \left(\frac{\Sigma\left(\frac{P_{li}}{P_{oi}} x100\right)}{N}\right) = \frac{2401.02}{5} = 480.20$$

3.4.3 भारांकित सूचकांक:

ऊपर हमने साधारण सूचकांक बनाने की योग विधि तथा अनुपात विधि का वर्णन किया है। साधारण सूचकांक में एक दोष यह होता है कि इनमें शामिल सभी वस्तुओं को एक महत्व दिया जाता है, जबकि व्यवहार में ऐसा नहीं होता है। उदाहरण के लिए यदि मध्यम वर्ग के लिए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक में खाद्यान्न, मकान किराया, ईंधन, टिकाऊ वस्तु तथा मनोरंजन के वर्ग के अवयवों के मूल्यों को शामिल किया गया हो तो निःसन्देह हम समझ सकते हैं कि किसी उपभोक्ता के लिए उपरोक्त सभी वर्गों की वस्तुओं या सेवाओं का एक समान महत्व नहीं हो सकता है। मध्यम वर्ग के उपभोक्ता के लिए सम्भवतः टिकाऊ वस्तु तथा मनोरंजन का महत्व अन्य अवयवों से काफी कम हो सकता है। अतः यह उचित होगा कि सूचकांक के निर्माण में शमिल अवयवों को उनके महत्व के अनुरूप उचित भार दिया जाये। मूल्य सूचकांक के निर्माण में भार के रूप में उपभोक्ता द्वारा वस्तु के उपभोग की मात्रा को लिया जाता है। शेयर बाजार के सूचकांक में शमिल कम्पनियों को बाजार पूंजी में हिस्सेदारी को भार के रूप में लिया जाता है। अलग–अलग सन्दर्भो में भार सन्दर्भ के अनुरूप सूचकांक में अवयवों की हिस्सेदारी का परिचायक होना चाहिये।

भाराकिंत सूचकांक भी योग विधि तथा अनुपातिक विधि से निर्मित किये जाते है।

योग विधि से भारांकित सूचकांक का सूत्र निम्नवत होगा।

$$I = \frac{\sum P_{1i}.W_i}{\sum P_{01}.W_i} \times 100$$

जहाँ W_i सूचकांक के अवयवों का सगंत भार है।

अनुपातिक रीति से भारांकित सूचकांक का सूत्र–

$$I = \frac{\sum W_i(\frac{P_{1i}}{P_{oi}} \times 100)}{\sum W_i}$$ होगा।

उदाहरणः यदि सन 2000 तथा सन 2020 में उपभोक्ता द्वारा उपभोग की गयी खाद्य वस्तुओं के मूल्य तथा औसत मासिक परिवर्तन उपभोग की मात्रा निम्नवत हो तो उपभोग की मात्रा को भार मानते हुए उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की गणना योग तथा अनुपातिक रीतियों से कीजिए–

वस्तु	वर्ष 2000 में मूल्य (P_{oi})	वर्ष 2020 में मूल्य (P_{1i})	उपभोग की मात्रा (W_i)
गेहूं / किग्रा	8	30	18
खाद्य तेल / ली0	25	120	2
गैस / किग्रा	35	55	10
आलू / किग्रा	2	20	15
कपड़ा / मीटर	45	175	3

हलः दिये गये प्रश्न में भारित मूल्य सूचकांक की गणना योग तथा अनुपातिक विधियों से करना है सर्वप्रथम योग विधि से भारित सूचकांक ज्ञात करने हेतु सूत्र

$$I = \frac{\sum P_{li}w_i}{\sum P_{oi}w_i} \times 100$$ का प्रयोग करेगें।

इस हेतु आवश्यक स्तम्भों की गणना निम्नवत होगी–

P_{oi}	P_{1i}	w_i	$P_{oi}w_i$	$P_{1i}w_i$
8	30	18	144	540
25	120	2	50	240
35	55	10	350	550
2	20	15	30	300
45	175	3	135	525

			$\sum P_{oi} w_i = 705$	$\sum P_{1i} w_i = 2155$

योग विधि भारित सूचकांक $I = \frac{2155}{709} \times 100$

$= 303.95$

अनुपातिक विधि से भारित सूचकांक हेतु सूत्र

$$I = \frac{\sum w_i \left(\frac{P_{1i}}{P_{oi}} \times 100\right)}{\sum w_i}$$

के अनुसार स्तम्भों का निर्माण निम्नवत होगा।

P_{oi}	P_{1i}	w_i	$\left(\frac{P_{li}}{P_{oi}}\right) \times 100$	$w_i \left(\frac{P_{li}}{P_{oi}}\right) \times 100$
8	30	18	375	6750
25	120	2	480	960
35	55	10	157.14	1571.4
2	20	15	1000	15000
45	175	3	388.88	1166.64
		$\sum w_i = 48$		$\sum w_i \left(\frac{P_{li}}{P_{oi}} x100\right) = 25448.04$

अनुपातिक विधि भारित सूचकांक

$I = \frac{25448.04}{48}$

$= 530.16$

भारित सूचकांक के उपरोक्त उदाहरण में आधार वर्ष तथा चालू वर्ष दोनों के लिए भार एक समान है। हालांकि दोनों वर्षो के लिए भार अलग–अलग भी हो सकते हैं। यदि किसी मूल्य सूचकांक के निर्माण हेतु मूल्य तथा उपभोग मात्रा के ऑकड़े आधार तथा चालू वर्ष दोनों के लिए उपलब्ध हो तो भार के रूप में आधार वर्ष या चालू वर्ष की मात्रा को लेकर सूचकांक की गणना को क्रमशः लेस्पियर तथा पाशे का मूल्य सूचकांक कहते है।

3.5 लेस्पियर का मूल्य सूचकांकः

लेस्पियर का मूल्य सूचकांक इस मान्यता पर आधारित है कि उपभोक्ता द्वारा आधार वर्ष में क्रय किये जाने वाली वस्तुओं के मूल्य में चालू वर्ष में कितनी वृद्धि हुई है। इस सूचकांक की गणना में आधार वर्ष की मात्रा को आधार तथा चालू दोनों वर्षो के लिए भार के रूप में प्रयोग किया जाता है।

लेस्पियर का मूल्य सूचकांक

$$I_{La} = \frac{\sum P_{1i}\, Q_{oi}}{\sum P_{oi}\, Q_{oi}} \times 100$$

जहाँ Q_{oi} आधार वर्ष की वस्तुओं की मात्राएं है।

3.6 पाशे का मूल्य सूचकांकः

पशे का मूल्य सूचकांक चालू वर्ष की मात्रा को दोनो वर्षो (आधार तथा चालू वर्ष) के लिए भार के रूप में प्रयोग करके बनाया जाता है। पाशे का सूचकांक इस मान्यता को लेकर चलता है कि चालू वर्ष में किया

जाने वाले उपभोग मात्रा का मूल्य आधार वर्ष में उतनी ही मात्रा के उपभोग मूल्य की तुलना में कितना बढ़ा है।

पाशे का मूल्य सूचकांक

$$I_{pa} = \frac{\sum P_{1i}\,Q_{1i}}{\sum P_{oi}\,Q_{1i}} \times 100$$

जहाँ Q_{1i} चालू वर्ष की वस्तुओं की मात्रा है।

बोध प्रश्न1. यदि वर्ष 2000 एवं 2020 में मूल्य एवं मात्रा के आँकड़े निम्नवत हो–

वस्तु	वर्ष 2000 में मूल्य (P_{oi})	वर्ष 2000 में मात्रा (Q_{oi})	वर्ष 2020 में मूल्य (P_{1i})	वर्ष 2020 में मात्रा (Q_{1i})
गेहूँ	8	18	30	20
खाद्य तेल	25	2	120	2.5
गैस	35	10	55	5
टालू	2	15	20	10
कपड़ा	45	3	175	5

उपरोक्त के लिए लेस्पियर एवं पाशे के मूल्य सूचकांक की गणना कीजिए।

3.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. दिये गये प्रश्न में लेस्पियर एवं पाशे दोनों मूल्य सूचकांकों की गणना की जानी है। सर्वप्रथम लेस्पियर के मूल्य सूचकांक की गणना हेतु आधार वर्ष की मात्राओं को भार के रूप में प्रयोग करते हुए सूत्र

$$I_{La} = \frac{\sum P_{1i}\,Q_{oi}}{\sum P_{oi}\,Q_{oi}} \times 100$$

के अनुसार स्तम्भों का निर्माण करेंगे।

P_{oi}	Q_{oi}	P_{1i}	Q_{1i}	$P_{oi}Q_{oi}$	$P_{1i}\,Q_{oi}$
8	18	30	20	144	540
25	2	120	25	50	240
35	10	55	5	350	550
2	15	20	10	30	300
45	3	75	5	135	525
				$\sum P_{oi}\,.\,Q_{oi} = 709$	$\sum P_{1i}\,.\,Q_{oi} = 2155$

लेस्पियर का मूल्य सूचकांक

$$I_{La} = \frac{2155}{709} \times 100$$

$$= 303.95$$

इसी प्रकार पाशे के मूल्य सूचकांक की गणना हेतु सूत्र

$$I_{pa} = \frac{\sum P_{1i}\,Q_{1i}}{\sum P_{oi}\,Q_{1i}} \times 100$$

के अनुसार स्तम्भों की गणना करनी होगी।

P_{oi}	Q_{oi}	P_{1i}	Q_{1i}	$P_{oi}Q_{1i}$	$P_{1i}\,Q_{1i}$

8	18	30	20	160	600
25	2	120	2.5	67.5	300
35	10	55	5	175	275
2	15	20	10	20	200
45	3	75	5	225	375
				$\sum P_{oi}.Q_{1i} = 647.5$	$\sum P_{1i}.Q_{1i} = 1750$

पाशे का मूल्य सूचकांक

$$I_{pa} = \frac{1750}{647.5} \times 100$$
$$= 270.03$$

3.7 अभ्यास प्रश्न

1. निम्न समंकों के लिए वर्ष 2005 को आधार वर्ष लेते हुए लेस्पियर तथा पाशे के मूल्य सूचकांकों की गणना कीजिए।

वस्तु	वर्ष 2005 के मूल्य	वर्ष 2005 की मांग की मात्रा	वर्ष 2024 के मूल्य	वर्ष 2005 के मूल्य की मांग की मात्रा
A	20	8	35	12
B	16	2	25	4
C	30	5	32	6
D	110	4	120	6
E	90	10	115	8
F	12	30	15	40

2. उपरोक्त समंकों के लिए वर्ष 2024 को आधार वर्ष लेते हुए लेस्पियर तथा पाशे के मूल्य सूचकांकों की गणना कीजिए।

3.9 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

Elhance, D.L (2010): Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Hazarika, Padmalochan (2006): Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Gupta, S.P. (Latest Edition): Elementary Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

इकाई–4
फिशर सूचकांक, आदर्श सूचकांक परीक्षण

इकाई संरचना (Unit plan)

4.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थीः

1. आदर्श सूचकांक की परिकल्पना से परिचित हो जाएंगे।
2. आदर्श सूचकांक के सिद्धांतों से परिचित हो जाएंगें ।

4.2 प्रस्तावना (Introduction)

आदर्श सूचकांक से आशय एक ऐसे सूचकांक से है जो समय के साथ मूल्य स्तर में होने वाले वास्तविक परिवर्तनों को सटीकता से मापता है और सूचकांक निर्माण के सिद्धांतों का पालन करता है। आदर्श सूचकांक विभिन्न मानदंडों को पूरा करने के लिए डिजाइन किए जाते हैं, जिससे वे अधिक विश्वसनीय और प्रासंगिक होते हैं। इस इकाई में आदर्श सूचकांक की विशेषताओं पर प्रकाश डालते हुए फिशर के सूचकांक का आदर्श सूचकांक के मानकों पर परीक्षण किया जाएगा।

4.3 आदर्श सूचकांक की विशेषताएँ

1. **प्रतिनिधित्वः** आदर्श सूचकांक का उपयोग करते समय, सभी प्रासांगिक वस्तुओं और सेवाओं को शामिल किया जाता है ताकि यह अर्थव्यवस्था या बाजार का व्यापक प्रतिनिधित्व कर सके।
2. **वजनः** वस्तुओं और सेवाओं को उनके वास्तविक आर्थिक महत्व के अनुसार वजनीकृत किया जाता है। यह सुनिश्चित करता है कि महत्वपूर्ण वस्तुओं का मूल्य परिवर्तन सूचकांक पर अधिक प्रभाव डालता है।
3. **मूल्य स्थिरताः** आदर्श सूचकांक को अस्थायी प्रभावों से मुक्त होना चाहिए। इसका मतलब है कि सूचकांक को मौसमी उतार–चढ़ाव या असाधारण घटनाओं से अधिक प्रभावित नहीं होना चाहिए।
4. **मात्रा और मूल्य की संगतिः** आदर्श सूचकांक में प्रयोग की जाने वाली मात्रा और मूल्य डेटा संगत और प्रामाणिक होनी चाहिए।
5. **समय के साथ तुलनीयताः** सूचकांक को समय के साथ तुलनीय होना चाहिए ताकि विभिन्न समय बिंदुओं पर मूल्य स्तर में परिवर्तन का सही–सही आकलन किया जा सके।

4.4 आदर्श सूचकांक के सिद्धांत

आदर्श सूचकांक के निर्माण के लिए कुछ प्रमुख सिद्धांत होते हैं जो इसे अन्य सूचकांकों से अलग बनाते हैं

4.4.1 समय उत्क्रमणता ($\boldsymbol{Time\ Reversal\ Test}$): आदर्श सूचकांक को समय उत्क्रमणता का पालन करना चाहिए। इसका अर्थ है कि यदि समय क्रम को उलट दिया जाए, तो सूचकांक का मान भी उलट जाएगा।

4.4.2 मूल्य उत्क्रमणता ($\boldsymbol{Factor\ Reversal\ Test}$): आदर्श सूचकांक को मूल्य उत्क्रमणता का पालन करना चाहिए। इसका अर्थ है कि यदि मूल्य और मात्राओं को आपस में बदल दिया जाए, तो सूचकांक का मान एक स्थिर गुणक के बराबर रहेगा।

4.5 फिशर का आदर्श सूचकांक (Fisher's Ideal Index)

फिशर का आदर्श सूचकांक सबसे प्रसिद्ध आदर्श सूचकांकों में से एक है। यह लेस्पियर ($Laspeyr\grave{e}$) और पाशे ($Paasche$) सूचकांकों का ज्यामितीय औसत है। फिशर का सूचकांक दोनों सूचकांकों के गुणों को मिलाकर आदर्श सूचकांक के सिद्धांतों का पालन करता है। फिशर का सूचकांक वस्तुतः लेस्पियर तथा पाशे के सूचकांक का गुणोत्तर माध्य होता है। अर्थात फिशर का सूचकांक

$$F_{01} = \sqrt{L_{01} \times P_{01}}$$

अथवा

$$F_{01} = \sqrt{\left(\frac{\sum P_{1i}Q_{0i}}{\sum P_{0i}Q_{0i}} \times 100\right)\left(\frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}\ \ Q_{1i}} \times 100\right)}$$

अथवा

$$F_{01} = \sqrt{\left(\frac{\sum P_{1i}Q_{0i}}{\sum P_{0i}Q_{0i}}\right) \times \left(\frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}\ \ Q_{1i}}\right) x10000}$$

फिशर के सूचकांक का आदर्श सूचकांक परीक्षण:

फिशर का सूचकांक एक आदर्श सूचकांक के निम्न सिद्धांतों के परीक्षण पर खरा उतरता है।

1. **तत्व उत्क्रमणता परीक्षण:** कीमत तथा मात्रा गुणनफल सकल मूल्य को दर्शाता है अर्थात कीमत $(P)\ \times$मात्रा $(Q) =$ सकल मूल्य (V)।
   तत्व उत्क्रमणता परीक्षण इसी सिद्धान्त पर आधारित है जो कहता है कि मूल्य सापेक्ष सूचकांक को यदि मात्रा सापेक्ष सूचकांक से गुणा कर दिया जाये तो परिणाम के रूप में सकल मूल्य सूचकांक प्राप्त होना चाहिए। अर्थात यदि कीमत सूचकांक P_{01} से मात्रा सूचकांक Q_{01} से तथा सकल मूल्य सूचकांक V_{01} से निरूपित होता हो तो तत्व उत्क्रमणता परीक्षण के अनुसार $P_{01} \times Q_{01} = V_{01}$सकल मूल्य सूचकांक V_{01} आधार वर्ष के सकल मूल्यों $(\sum P_{0i}Q_{0i})$ पर चालू वर्ष में सकल मूल्यों $(\sum P_{1i}Q_{1i})$ के परिवर्तन की माप होगी। अर्थात

$$V_{01} = \frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}Q_{0i}}$$

अतः तत्व उत्क्रमणता परीक्षण के अनुसार

$$P_{01} \times Q_{01} = \frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}Q_{0i}}$$

इस प्रकार तत्व उत्क्रमणता परीक्षण के अनुसार मूल्य निर्देशांक तथा तत्सम्बन्धित मात्रा निर्देशांक का गुणनफल कुल मूल्य में हुए परिवर्तनों की सही माप होनी चाहिए।

फिशर का सूचकांक तत्व उत्क्रमणता परीक्षण में सफल होता है। आइये इस परीक्षण की जांच द्वारा पुष्टि करते है।

फिशर का मूल्य सूचकांक

$$P_{01}^F = \sqrt{\left(\frac{\sum P_{1i}Q_{oi}}{\sum P_{0i}Q_{0i}}\right)\left(\frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}Q_{1i}}\right)}$$

फिशर का मात्रा सूचकांक

$$Q_{01}^F = \sqrt{\left(\frac{\sum Q_{1i}P_{0i}}{\sum Q_{0i}P_{0i}}\right)\left(\frac{\sum Q_{1i}P_{1i}}{\sum Q_{0i}P_{1i}}\right)}$$

अब मूल्य तथा मात्रा सूचकांको का गुणन

$$P_{01}^F \times Q_{01}^F = \sqrt{\frac{\sum P_{1i}Q_{0i}}{\sum P_{0i}Q_{0i}} \times \frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}\,Q_{1i}} \times \frac{\sum Q_{1i}P_{0i}}{\sum Q_{0i}P_{0i}} \times \frac{\sum Q_{1i}P_{1i}}{\sum Q_{0i}P_{1i}}}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}Q_{0i}}\right)^2}$$

$$= \frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}\,Q_{0i}} = V_{01}^F$$

2. **काल उत्क्रमणता परीक्षण**: काल उत्क्रमणता परीक्षण का तात्पर्य है कि यदि आधार वर्ष के सापेक्ष ज्ञात किये गये चालू वर्ष के सूचकांक को चालू वर्ष के सापेक्ष आधार वर्ष के सूचकांक से गुणा कर दिया जाये तो यह इकाई के बराबर होगा। अर्थात सूचकांकों की गणना में यदि काल को उलट दिया जाये अर्थात चालू वर्ष को आधार वर्ष तथा आधार वर्ष को चालू वर्ष मान लिया जाये तो आधार वर्ष के सापेक्ष ज्ञात किया गया चालू वर्ष का सूचकांक चालू वर्ष के सापेक्ष ज्ञात किये गये आधार वर्ष के सूचकांक का व्यूतक्रम होगा।

   अर्थात $P_{01} \times P_{10} = 1$

   जहां $P_{01} =$ आधार वर्ष के सापेक्ष चालू वर्ष का सूचकांक

   तथा $P_{10} =$ चालू वर्ष के सापेक्ष आधार वर्ष का सूचकांक है।

   फिशर का सूचकांक काल उत्क्रमणता परीक्षण में सफल होता है। यह परीक्षण निम्नवत है।

   फिशर का चालू वर्ष का सूचकांक

$$P_{01} = \sqrt{\frac{\sum P_{1i}Q_{0i}}{\sum P_{0i}Q_{0i}} \times \frac{\sum P_{1i}\;Q_{1i}}{\sum P_{0i}Q_{1i}}}$$

काल के विपरीत फिशर का आधार वर्ष का सूचकांक

$$P_{10} = \sqrt{\frac{\sum P_{0i}Q_{1i}}{\sum P_{1i}Q_{1i}} \times \frac{\sum P_{0i}Q_{0i}}{\sum P_{1i}Q_{0i}}}$$

अब काल/समय उत्क्रमणता परीक्षण के अनुसार

$$P_{01} \times P_{10} = \sqrt{\frac{\sum P_{1i}Q_{0i}}{\sum P_{0i}Q_{0i}} \times \frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}Q_{1i}}} \times \sqrt{\frac{\sum P_{0i}Q_{1i}}{\sum P_{1i}\;Q_{1i}} \times \frac{\sum P_{0i}\;Q_{0i}}{\sum P_{1i}\;Q_{0i}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sum P_{1i}Q_{0i}}{\sum P_{0i}Q_{0i}} \times \frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}Q_{1i}} \times \frac{\sum P_{0i}Q_{1i}}{\sum P_{1i}\;Q_{1i}} \times \frac{\sum P_{0i}\,Q_{0i}}{\sum P_{1i}\;Q_{0i}}} = \sqrt{1} = 1$$

चूंकि फिशर का सूचकांक काल उत्क्रमणता एवं तत्व उत्क्रमणता परीक्षणों पर खरा उतरता है इसलिए फिशर के सूचकांक को आदर्श सूचकांक कहते है।

बोध प्रश्न 1. निम्न में से कौन सा सूचकांक आदर्श सूचकांक है –

1. लेस्पियर का सूचकांक
2. पाशे का सूचकांक
3. फिशर का सूचकांक

4. उपरोक्त सभी

बोध प्रश्न 2. उदाहरण द्वारा दर्शाइए कि फिशर का सूचकांक काल उत्क्रमणता परीक्षण में सफल होता है।

4.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. (3)फिशर का सूचकांक
2. फिशर का सूचकांक को आदर्श सूचकांक माना जाता है क्योंकि यह सूचकांक विभिन्न गुणों और परीक्षणों को पूरा करता है जो इसे अन्य सूचकांकों से अधिक सटीक और विश्वसनीय बनाते हैं। इसे लेस्पियर ($Laspeyr\grave{e}$) और पाशे ($Paasche$) सूचकांकों का ज्यामितीय औसत ($geometric\ mean$) भी कहा जाता है। अब, हम उदाहरण द्वारा यह दर्शाएंगे कि फिशर का सूचकांक काल उत्क्रमणता परीक्षण में सफल होता है।
   मान लीजिए, हमारे पास निम्नलिखित डेटा है

वस्तु	A	B
आधार वर्ष मूल्य P_{0i}	10	20
आधार वर्ष मात्रा Q_{0i}	12	22
तुलना वर्ष मूल्य P_{1i}	5	8
तुलना वर्ष मात्रा Q_{1i}	6	9

1. लेस्पियर सूचकांक की गणना
लेस्पियर सूचकांक निम्नलिखित सूत्र से गणना की जाती है:

$$Laspeyres\ Index = \left(\frac{\sum P_{1i}Q_{0i}}{\sum P_{0i}Q_{0i}} \times 100\right)$$
$$= \frac{(5\times12)+(8\times22)}{(10\times12)+(20\times22)} \times 100 = \frac{(60+176)}{(120+440)} \times 100$$
$$= \frac{236}{560} \times 100$$
$$= 42.14$$

2. पाशे सूचकांक की गणना
पाशे सूचकांक निम्नलिखित सूत्र से गणना की जाती है

$$Paasche\ Index = \left(\frac{\sum P_{1i}Q_{1i}}{\sum P_{0i}Q_{1i}} \times 100\right)$$
$$= \frac{(5\times6)+(8\times9)}{(10\times6)+(20\times9)} \times 100$$
$$= \frac{(30+72)}{(60+180)} \times 100$$
$$= \frac{102}{240} \text{x} 100 = 42.5$$

3. फिशर सूचकांक ($Fisher\ Index$) निम्नलिखित सूत्र से गणना की जाती है

$$Fisher\ Index = \sqrt{Laspeyres\ Index \times Paasche\ Index}$$

$$= \sqrt{42.14 \times 42.5}$$

$= \sqrt{1790.95}$

$= 42.32$

समय उत्क्रमणता परीक्षण (*Time Reversal Test*): यदि समय को उलट दिया जाए, तो सूचकांक का मान एक स्थिर गुणक (आदर्श स्थिति में 1) होना चाहिए।

$$(\text{Fisher Index (Normal)}) \times \left(\text{Fisher Index}\left(\text{Time Reversed}\right)\right) = 1$$

जहाँ

$$\text{Fisher Index}\left(\text{Time Reversed}\right) = \sqrt{\text{Laspeyres (Reversed)} \times \text{Paasche (Reversed)}}$$

$$(\text{Fisher Index Normal})\text{x}\,(\text{Fisher Index Time Reversed})$$

$$= \sqrt{\frac{(5\times 12)+(8\times 22)}{(10\times 12)+(20\times 22)} \times \frac{(5\times 6)+(8\times 9)}{(10\times 6)+(20\times 9)} \times \frac{(10\times 6)+(20\times 9)}{(5\times 6)+(8\times 9)} \times \frac{(10\times 12)+(20\times 22)}{(5\times 12)+(8\times 22)}}$$

$$= 1$$

4.8 अभ्यास प्रश्न

1. उदाहरण द्वारा दर्शाइए कि फिशर का सूचकांक एक आदर्श सूचकांक है।
2. मूल्य उत्क्रमणता से क्या आशय है?
3.

4.9 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

Elhance, D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Hazarika, Padmalochan (2006) : Essential Statistics for Economics and Commerce , Akansha Publishing House.

Gupta, S.P. (Latest Edition): Elementary Statistical Methods, Sultan Chand & Sons, Delhi.

इकाई–5
उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (Consumer Price Index)

इकाई संरचना (Unit Plan)

5.1 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थीः

1. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की परिकल्पना एवं महत्व से परिचित हो जाएंगे।
2. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की निर्माण विधि से परिचित हो जाएंगें ।

5.2 प्रस्तावना

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (CPI) एक सांख्यिकीय माप है जो उपभोक्ताओं द्वारा खरीदी जाने वाली वस्तुओं और सेवाओं की औसत कीमतों में समय के साथ होने वाले परिवर्तनों को मापता है। CPI का उपयोग मुद्रास्फीति दर ($inflation\ rate$) को मापने, आर्थिक नीतियों और योजनाएँ बनाने तथा जीवन–यापन की लागत में परिवर्तनों का आकलन करने के लिए किया जाता है। प्रस्तुत इकाई में हम उपभोक्ता मूल्य सूचकांक के महत्व पर विस्तृत प्रकाश डालते हुए इनके निर्माण की विधि समझेंगे। भारत में उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का निर्माण किस प्रकार होता है यह भी इस इकाई में जानेंगे ।

5.3 उपभोक्ता मूल्य सूचकांकः परिचय

उपभोक्ता मूल्य सूचकांक एक महत्वपूर्ण सूचकांक होता है जो सीधे तौर पर उपभोक्ताओं के महत्व की वस्तुओं के खुदरा बाजार के मूल्यों में परिवर्तन की माप करता है। उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का महत्व सिर्फ इस नाते नहीं होता कि इससे अर्थव्यवस्था में सामान्य उपभोग वस्तुओं में मंहगाई का पता चलता है वरन इनका महत्व इसलिए भी होता है कि इसी सूचकांक के आधार पर सरकारें वस्तुओं की कीमत स्थिर रखनें की नीति बनाती है तथा नौकरीपेशा वर्ग को महंगाई के अनुरूप भत्ते इत्यादि निर्धारित करती है। वस्तुतः उपभोक्ता मूल्य सूचकांक सरकार, निवशक, उपभोक्ता इत्यादि सभी के लिए महत्वपूर्ण है, क्योंकि यह मूल्य स्तर के बदलावों की माप करता है और इसी के आधार पर वित्तीय निर्णय तथा नीतियों के साथ सामाजिक योजनाओं का निर्माण होता है।

5.4 उपभोक्ता मूल्य सूचकांकः महत्व

1. **मुद्रास्फीति का मापनः** CPI का उपयोग मुद्रास्फीति दर को मापने के लिए किया जाता है, जिससे यह निर्धारित किया जा सकता है कि वस्तुओं और सेवाओं की कीमतों में समय के साथ कितना बदलाव हुआ है।
2. **आर्थिक नीतियों की योजनाः** CPI के आधार पर सरकार और केंद्रीय बैंक विभिन्न आर्थिक नीतियों का निर्धारण करते हैं।
3. **वेतन समझौतों में उपयोगः** मजदूर संघ और नियोक्ता वेतन समझौतों में CPI का उपयोग करते हैं ताकि वेतन को मुद्रास्फीति के अनुरूप समायोजित किया जा सके।
4. **जीवन–यापन की लागतः** CPI का उपयोग जीवन–यापन की लागत में परिवर्तनों को मापने के लिए किया जाता है, जिससे यह समझा जा सकता है कि लोगों की क्रय शक्ति ($purchasing\ power$) में क्या परिवर्तन हुआ है।
5. **मुद्रास्फीति की अपेक्षाओं का प्रबंधनः** CPI मुद्रास्फीति की अपेक्षाओं को प्रबंधित करने में मदद करता है, जिससे बाजार में स्थिरता बनाए रखने में सहायता मिलती है।

बोध प्रश्न1. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (CPI) क्या गणना करता है?

1. केवल सेवाओं की कीमत
1. केवल वस्तुओं की कीमत
2. वस्तुओं और सेवाओं दोनों की कीमत
3. उपरोक्त में से कोई नहीं

5.5 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का निर्माण

CPI का निर्माण कई चरणों में किया जाता हैः

1. **वस्तुओं और सेवाओं की टोकरी का चयनः** सबसे पहले, उन वस्तुओं और सेवाओं की एक टोकरी बनाई जाती है जो औसत उपभोक्ता के द्वारा खरीदी जाती हैं। इसमें भोजन, वस्त्र, आवास, परिवहन, स्वास्थ्य सेवा, मनोरंजन आदि शामिल होते हैं।
2. **आधार वर्ष का चयन**ः आधार वर्ष ($base\ year$) का चयन किया जाता है, जो तुलना के लिए एक संदर्भ बिंदु के रूप में कार्य करता है।
3. **मूल्य डेटा का संग्रहः** विभिन्न वस्तुओं और सेवाओं के मूल्य डेटा को नियमित रूप से एकत्रित किया जाता है। यह डेटा विभिन्न भौगोलिक क्षेत्रों से संकलित किया जाता है ताकि यह सुनिश्चित किया जा सके कि सूचकांक व्यापक और प्रतिनिधि हो।
4. **वजन का निर्धारणः** विभिन्न वस्तुओं और सेवाओं को उनके महत्व के आधार पर वजनीकृत किया जाता है। यह वजन उपभोक्ताओं द्वारा खर्च किए गए अनुपात पर आधारित होता है।
5. **सूचकांक की गणना**ः वस्तुओं को उनकी महत्ता के आधार पर भारांकित कर लेने के पश्चात इनके आधार वर्ष के मूल्यों को 100 के समान मान के रूप में रखा जाता है और फिर इसे अन्य अवधियों के मूल्यों के साथ तुलना करने के लिए प्रत्येक वस्तु और सेवा के लिए मूल्य परिवर्तन को उसके वजन के अनुसार समायोजित किया जाता है। फिर, सभी समायोजित मूल्य परिवर्तनों का योग निकाला जाता है और इसे आधार वर्ष के कुल मूल्य से विभाजित किया जाता है।
6. **समायोजनः** CPI को मौसमी उतार–चढ़ाव और अन्य असाधारण घटनाओं के प्रभाव से मुक्त करने के लिए समायोजित किया जाता है।
7. **उपयोग**ः उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का उपयोग सरकारी नीतियों के निर्धारण, महंगाई की निगरानी, आर्थिक निर्णयों के मूल्याकंन, निवेश निर्णयों की निगरानी और आय को जीवन निर्वाह के मानको से मेल करानें में मदद करता है।

5.6 उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की गणना का सूत्र

$$\mathrm{CPI} = \frac{(\sum P_{1i} \times W_i)}{\sum (P_{0i} \times W_i)} \times 100$$

जहाँ $P_1 =$ तुलना वर्ष का मूल्य
$P_0 =$ आधार वर्ष का मूल्य
और W = प्रत्येक वस्तु का वजन है।

5.7 भारत में उपभोक्ता मूल्य सूचकांक :

केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (Central Statistics Organization, CSO) द्वारा भारत में उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का निर्माण संग्रहण और प्रकाशन किया जाता है। भारत में CPI का निर्माण चार प्रमुख सूचकांकों के माध्यम से किया जाता है:

i. $CPI\ (Urban)$–शहरी
ii. $CPI\ (Rural)$–ग्रामीण
iii. $CPI\ (Combined)$– शहरी और ग्रामीण दोनों का मिश्रण
iv. $CPI\ (IW)$– औद्योगिक श्रमिकों के लिए

5.7.1 निर्माण की प्रक्रिया

1. **डेटा संग्रहः** नेशनल सैंपल सर्वे ऑफिस ($NSSO$) और श्रम ब्यूरो द्वारा मूल्य डेटा संकलित किया जाता है। यह डेटा विभिन्न भौगोलिक क्षेत्रों, जैसे शहरी और ग्रामीण क्षेत्रों से एकत्रित किया जाता है।
2. **वस्तुओं और सेवाओं की टोकरी:** उपभोक्ता व्यय सर्वेक्षण ($Consumer\ Expenditure\ Survey$) के आधार पर वस्तुओं और सेवाओं की टोकरी निर्धारित की जाती है।
3. **वजन का निर्धारणः** विभिन्न वस्तुओं और सेवाओं के वजन को निर्धारित करने के लिए उपभोक्ता व्यय सर्वेक्षण का उपयोग किया जाता है।
4. **मूल्य संग्रहः** नियमित अंतराल पर विभिन्न वस्तुओं और सेवाओं के मूल्य डेटा एकत्रित किया जाता है।
5. **सूचकांक की गणनाः** प्रत्येक वस्तु और सेवा के लिए मूल्य परिवर्तन को उसके वजन के अनुसार समायोजित किया जाता है। सभी समायोजित मूल्य परिवर्तनों का योग निकाला जाता है और इसे आधार वर्ष के कुल मूल्य से विभाजित किया जाता है।
6. **प्रकाशनः** गणना के बाद, CPI को मासिक आधार पर प्रकाशित किया जाता है।

बोध प्रश्न 2. उपभोक्ता मूल्य सूचकांक का डेटा कितनी बार जारी किया जाता है?
1. हर दिन
2. हर साल
3. हर महीने
4. हर हफ्ते

वर्तमान (वर्ष 2023)में वर्ष 2012 के मूल्यों को आधार मानते हुए ग्रामीण तथा नगरीय क्षेत्रों के साथ दोनो क्षेत्रों का संयुक्त रूप से उपभोक्ता मूल्य सूचकांक निम्नवत है–

Group Code	Sub-group Code	Description	Rural			Urban			Combined		
		Goods and Services	Weights	May. 23 Index	Jun. 23 Index	Weights	May. 23 Index	Jun. 23 Index	Weights	May. 23 Index	Jun. 23 Index
				(Final)	(Prov.)		(Final)	(Prov.)		(Final)	(Prov.)
-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
	1.1.01	Cereals and products	12.35	173.2	174.2	6.59	174.7	175.7	9.67	173.7	174.7
	1.1.02	Meat and fish	4.38	211.5	220.3	2.73	219.4	226.6	3.61	214.3	222.5
	1.1.03	Egg	0.49	171	181.2	0.36	176.7	185.4	0.43	173.2	182.8
	1.1.04	Milk and products	7.72	179.6	180.1	5.33	179.4	179.8	6.61	179.5	180
	1.1.05	Oils and fats	4.21	173.3	167.3	2.81	164.4	159.7	3.56	170	164.5
	1.1.06	Fruits	2.88	169	166.9	2.9	175.8	177.8	2.89	172.2	172
	1.1.07	Vegetables	7.46	148.7	165.3	4.41	185	210.4	6.04	161	180.6
	1.1.08	Pulses and products	2.95	174.9	180.8	1.73	176.9	183.2	2.38	175.6	181.6
	1.1.09	Sugar and Confectionery	1.7	121.9	122.8	0.97	124.2	125	1.36	122.7	123.5
	1.1.10	Spices	3.11	221	226.2	1.79	211.9	216.6	2.5	218	223
	1.2.11	Non-alcoholic beverages	1.37	178.7	179.3	1.13	165.9	166.7	1.26	173.4	174
	1.1.12	Prepared meals, snacks, sweets etc.	5.56	191.1	191.5	5.54	197.7	198.4	5.55	194.2	194.7
1		Food and beverages	54.18	176.8	180.3	36.29	183.1	187.6	45.86	179.1	183
2		Pan, tobacco and intoxicants	3.26	199.9	200.3	1.36	204.2	204.6	2.38	201	201.4
	3.1.01	Clothing	6.32	191.2	191.9	4.72	181.3	182	5.58	187.3	188
	3.1.02	Footwear	1.04	187.9	188.6	0.85	168.1	168.5	0.95	179.7	180.3
3		Clothing and footwear	7.36	190.8	191.4	5.57	179.3	180	6.53	186.2	186.9
4		Housing	-	-	-	21.67	175.6	174.4	10.07	175.6	174.4
5		Fuel and light	7.94	182.5	181.8	5.58	183.4	184.6	6.84	182.8	182.9
	6.1.01	Household goods and services	3.75	179.8	180.3	3.87	170.1	170.4	3.8	175.2	175.6
	6.1.02	Health	6.83	187.8	188.5	4.81	182.2	182.8	5.89	185.7	186.3
	6.1.03	Transport and communication	7.6	169.7	169.9	9.73	160.4	160.8	8.59	164.8	165.1
	6.1.04	Recreation and amusement	1.37	173.8	174.1	2.04	169.2	169.8	1.68	171.2	171.7
	6.1.05	Education	3.46	180.3	181.8	5.62	174.8	177.1	4.46	177.1	179
	6.1.06	Personal care and effects	4.25	184.9	184.4	3.47	185.6	185.2	3.89	185.2	184.7

6		Miscellaneous	27.26	179.5	179.9	29.53	171.6	172.3	28.32	175.7	176.2
General Index (All Groups)			100	179.8	181.8	100	178.2	179.9	100	179.1	180.9

उपरोक्त सूची भारत सरकार के सांख्यिकी एवं कार्यक्रम क्रियान्वयन मंत्रालय की वेबसाइट से साभार ली गई है।

नोट–उपरोक्त सूची में ध्यान देने योग्य यह है कि विभिन्न वस्तुओं के भार का मूल्य सम्बन्धित क्षेत्र के अनुसार भिन्न भिन्न हैं।

बोध प्रश्न 3. वर्तमान उपभोक्ता मूल्य सूचकांक (सीपीआई) का आधार वर्ष क्या है?

1. 2001
2. 2012
3. 2004
4. 2015

5.8 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. (3) वस्तुओं और सेवाओं दोनों की कीमत
2. (3) हर महीने
3. (2) 2012

5.9 अभ्यास प्रश्न

1. भारत में उपभोक्ता मूल्य सूचकांक की निर्माण प्रक्रिया की विवेचना कीजिए।
2. उपभोक्ता मूल्य सूचकांकों के महत्व पर प्रकाश डालिए ।

5.10 संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

Handbook of Statistics on Indian Economy(Latest Edition) Reserve Bank of India Publications.

Elhance,D.L (2010) : Sankhiki Ke Siddhant (Hindi), Kitab Mahal.

Mishra and Puri (2024): Indian Economy, Himalaya Publishing House.

Gaurav Datt and Biswajit Nag (73rd Edition): Datt and Sundaram’s Indian Economy, S. Chand Publications.

खण्ड–5
अर्थशास्त्र में गणित का महत्व एवं भूमिका
इकाई–1
फलन, चर

इकाई संरचना

1.1 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थीः

1. फलन क्या है? समझ पायेंगे।
2. चर क्या है? समझ पायेंगे।
3. रेखीय फलन के बारे में जान पायेगे।
4. स्पष्ट फलन एवं अस्पष्ट फलन के विषय में जान पायेगें।
5. फलन की सीमा को जान पायेंगे।

1.2 प्रस्तावना

अर्थशास्त्रियों को विभिन्न प्रकार की अंतःक्रियाओं के परीक्षण में सघन रुचि होती है। उदाहरण के तौर पर, एक अर्थशास्त्री किसी व्यक्ति के आय स्तर और उस व्यक्ति द्वारा चुने गए व्यय विकल्पों की अन्वेषण कर सकता है। उपर्युक्त उपभोग सम्बन्ध या फलन का संकेतक है। एक और उदाहरणात्मक मामला एक अर्थशास्त्री द्वारा एक कॉर्पोरेट इकाई के पास मौजूद वित्तीय संसाधनों एवं नए उपकरणों के अधिग्रहण के लिए धन के आवंटन पर की गई परीक्षा है। इसे निवेश सम्बन्ध या निवेश फलन के रूप में संदर्भित किया जा सकता है। एक फलन इन संबंधों को स्थापित करने और उनका वर्णन करने का प्रयास करता है। संबंध को गणितीय तरीके से व्यक्त करने का प्रयास किया गया है। समीकरण एक गणितीय प्रतिनिधित्व है जो विभिन्न विचारों या संस्थाओं के बीच अंतर्संबंधों और संघों की अन्वेषण की अनुमति देता है। विचाराधीन विचारों या चीजों को चर के रूप में ज्ञात संस्थाओं द्वारा दर्शाया जाता है।

एक चर किसी विचार या वस्तु का एक प्रतीकात्मक प्रतिनिधित्व है जिसे मात्रात्मक रूप से मापा जा सकता है, जो इसके परिमाण को दर्शाता है। परिवर्तनशीलता की अंतर्निहित संपत्ति के कारण चर को "चर" नाम दिया गया है, जिसका अर्थ है कि उनमें विभिन्न मूल्यों की एक श्रृंखला मानने की क्षमता है। एक चर को

एक मात्रा के रूप में संकल्पित किया जा सकता है जो एक निश्चित कार्य के भीतर कई मान लेता है। अर्थशास्त्र के क्षेत्र में अनेक चर विविध संख्यात्मक मान ग्रहण करने की क्षमता रखते हैं। गणित के क्षेत्र में, चर को दर्शाने के उद्देश्य से वर्णमाला के उत्तरार्ध से प्राप्त अक्षरों का उपयोग करने की प्रथा है। अर्थशास्त्र के क्षेत्र में, किसी चर की परिवर्तनशीलता को दर्शाने के लिए उसके नाम के पहले अक्षर का उपयोग करना आम बात है। चर P का उपयोग अक्सर मूल्य को दर्शाने के लिए किया जाता है, जबकि चर Q का उपयोग आमतौर पर मात्रा को दर्शाने के लिए किया जाता है।

एक बीजगणितीय अभिव्यक्ति, जैसे कि $4x^3$, एक परिवर्तनीय मात्रा का प्रतिनिधित्व करती है। चर • में अलग–अलग मान ग्रहण करने की क्षमता होने के कारण वेरिएबल कई मान ले सकता है। उपरोक्त गणितीय कथन में, प्रतीक "x" चर का प्रतिनिधित्व करता है, जबकि संख्यात्मक मान "4" चर "x" के गुणांक के रूप में कार्य करता है। गुणांक, संख्यात्मक मान 4 द्वारा दर्शाया गया, एक कारक है जो चर x के साथ संयोजन में संचालित होता है। जैसे कि $4x^3$ जैसे व्यंजक जिसमें एक चर द्वारा घात तक बढ़ाए गए गुणांक के गुणक शामिल होते हैं, एकपदी कहलाते हैं।
एकपदी बीजगणित में एक गणितीय कथन है जिसे या तो एक स्थिरांक, एक एकल चर, या स्थिरांक और चर के उत्पाद के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है। शब्द "मोनोमियल" की उत्पत्ति ग्रीक शब्द "मोनोस" से हुई है, जिसका अनुवाद "एक" होता है। एकपदी, जिसे आमतौर पर वास्तविक संख्या कहा जाता है, इसमें 5 जैसी मात्राएँ शामिल होती हैं जो किसी चर से गुणा के अधीन नहीं होती हैं। एकपदी में एक से अधिक चर भी हो सकते हैं। $4x^3y^2$ ऐसा ही एक उदाहरण है। इस अभिव्यक्ति में x और y दोनों चर हैं और 4 उनका गुणांक है।
निम्नलिखित एकपदी के उदाहरण हैं:
$x, 4x^2, -6xy^2z, 7$

बहुपद एक या अधिक एकपदी के जोड़ या घटाने से बनते हैं। शब्द "बहुपद" ग्रीक शब्द "पॉली" से लिया गया है, जिसका अनुवाद "बहुत" होता है। एक बहुपद की विशेषता दो या दो से अधिक पदों, विशेष रूप से दो या दो से अधिक एकपदों की उपस्थिति होती है। ठीक दो पदों से युक्त बहुपद को द्विपद कहा जाता है।

व्यंजक $4x^3y^2 - 2xy^2 +3$ तीन पदों वाला एक बहुपद है।

ये पद $4x^3y^2$, $- 2xy^2$, और 3 हैं। पदों के गुणांक 4, -2, और 3 हैं।

किसी वाक्यांश या एकपदी की डिग्री इसमें शामिल चरों के घातांकों के योग की गणना करके निर्धारित की जा सकती है। बहुपद की डिग्री बहुपद के अंदर सबसे बड़ी डिग्री पद से निर्धारित होती है। उपर्युक्त उदाहरण में, वाक्यांशों को 5, 3 और 0 की घातों द्वारा दर्शाया गया है। बहुपद की घात 5 है।

यह ध्यान रखना महत्वपूर्ण है कि चर ऐसी इकाइयाँ हैं जिनमें विभिन्न मूल्यों को ग्रहण करने की क्षमता होती है। एक फंक्शन एक चर को दूसरे के संदर्भ में व्यक्त करके दो चर के बीच संबंध को स्पष्ट करने का प्रयास करता है। उपर्युक्त उदाहरण में, व्यय राशि किसी के वेतन पर निर्भर है। इस संदर्भ में, दो चर मौजूद हैं जिसमें एक व्यक्ति का वेतन और उनका व्यय का है

स्वतंत्र चर वे चर होते हैं जो अन्य कारकों से प्रभावित या निर्धारित नहीं होते हैं। आश्रित चर वे चर हैं जो स्वतंत्र चर से प्रभावित या प्रभावित होते हैं। देखी गई भिन्नता को स्वतंत्र चर के हेरफेर के लिए जिम्मेदार ठहराया जाता है। उपरोक्त उदाहरण में, स्वतंत्र चर को वेतन द्वारा दर्शाया गया है, जबकि आश्रित चर को व्यय की मात्रा द्वारा दर्शाया गया है।

उपर्युक्त परिदृश्य में, इस संभावना पर विचार करना उचित है कि व्यक्तियों द्वारा किए गए व्यय निर्णय न केवल उनके वेतन से प्रभावित होते हैं, बल्कि शेयर बाजार में उनके निवेश से उत्पन्न राजस्व से भी प्रभावित होते हैं। वर्तमान में, संदर्भ में तीन कारक हैं: वेतन और निवेश आय को स्वतंत्र चर माना जाता है, जबकि खर्च की गई मात्रा को आश्रित चर माना जाता है।

1.3 चर

यह ध्यान रखना महत्वपूर्ण है कि एक सेट एस को विशिष्ट और अच्छी तरह से परिभाषित वस्तुओं के संग्रह के रूप में परिभाषित किया गया है। इस संदर्भ में, शब्द "अच्छी तरह से परिभाषित" एक ऐसी स्थिति को संदर्भित करता है जहां यह निर्धारित करने के लिए एक स्पष्ट और स्पष्ट मानदंड मौजूद है कि कोई दिया गया आइटम सेट एस से संबंधित है या सेट एस से संबंधित नहीं है। सेट एस के अंदर शामिल इकाइयों को संदर्भित किया जाता है इसके तत्वों के रूप में. समुच्चय S पर विचार करते समय, दो दृष्टिकोण होते हैं: S के प्रत्येक तत्व का अलग–अलग विश्लेषण करना या S को एक सामूहिक इकाई के रूप में मानना। उदाहरण के लिए, वास्तविक संख्याओं के समुच्चय पर विचार करते समय, हम या तो एक विशेष वास्तविक संख्या निर्दिष्ट कर सकते हैं, जैसे कि 0, 1, 1.2, 2, या –ई, दूसरों के बीच में (एक स्थिरांक के रूप में संदर्भित), या हम एक अनिश्चित मान सकते हैं सेट से वास्तविक संख्या को एक अनिर्धारित मान के रूप में, x के रूप में दर्शाया गया है (एक चर के रूप में संदर्भित)। औपचारिक संदर्भ में, एक चर को इस प्रकार परिभाषित किया गया है:

सेट एस के संदर्भ में, S ∈ से संबंधित एक तत्व एक्स को एक चर के रूप में संदर्भित किया जाता है जब एक्स एस के किसी विशेष सदस्य को नहीं दर्शाता है, बल्कि एस के किसी भी मनमाने तत्व का प्रतिनिधित्व करता है। दूसरे शब्दों में, एक्स एक तक सीमित नहीं है एकल तत्व और संग्रह S से किसी भी तत्व के साथ जुड़ा हो सकता है। चर x को सेट S के पार के रूप में परिभाषित किया गया है, और S में वह तत्व जिसके साथ x जुड़ा हुआ है उसे चर x के मान के रूप में संदर्भित किया जाता है।

इस उदाहरण में, हम एक अलग चर की अन्वेषण कर रहे हैं। हम सभी प्राकृत संख्याओं के समुच्चय को निर्दिष्ट करें। इस चर्चा के संदर्भ में, प्रतीक ष्दष् किसी दिए गए सेट के अंदर एक अनिर्दिष्ट सदस्य का प्रतिनिधित्व करता है। अकादमिक शब्दावली में, हम "n" को एक चर के रूप में संदर्भित करते हैं जो सेट पर फैला हुआ है। इसके अलावा, जब प्राकृतिक संख्या 10 को "n" के बराबर किया जाता है, तो हम 10 को चर "n" को दिए गए मान के रूप में वर्णित करते हैं और इसे n =10 के रूप में चिह्नित करते हैं। यह स्वीकार करना महत्वपूर्ण है कि प्राकृतिक संख्याएं अलग–अलग बिंदुओं से जुड़ी हैं वास्तविक संख्या रेखा. इसके अतिरिक्त, चर n केवल उन बिंदुओं पर मान लेने तक सीमित है जो वास्तविक संख्या रेखा पर प्राकृ तिक संख्याओं के अनुरूप हैं। इसलिए, हम इस चर द को वास्तविक संख्या रेखा पर असतत चर के रूप में संदर्भित करते हैं।

इस उदाहरण में: (सतत् चर) आइए सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को निरूपित करें। यदि वर्णमाला $x \in$ के एक मनमाना तत्व को दर्शाता है, तो हम x को एक चर कहते हैं जो कि सीमा से अधिक होता है और जब वास्तविक संख्या, मान लीजिए 2 को x के साथ पहचाना जाता है, तो हम कहते हैं कि 2 चर x का मान है और $x \in 2$ लिखते हैं। वास्तविक रेखा पर प्रत्येक बिंदु एक वास्तविक संख्या से मेल खाता है और प्रत्येक वास्तविक संख्या वास्तविक रेखा पर एक बिंदु से मेल खाती है (वास्तविक रेखा की पूर्णता संपत्ति द्वारा), चर x वास्तविक रेखा पर प्रत्येक बिंदु के अनुरूप अपना मान ले सकता है। इसलिए, हम इस चर x को वास्तविक रेखा पर सतत चर कहते हैं।

1.4 फलन प्रक्रिया

फलन एक तकनीकी धारणा है जो चरों में पाए जाने वाले संबंध को व्यक्त करती है। जब दो चरों x और y में इस प्रकार का संबंध पाया जाता है कि x के प्रत्येक मूल्य के लिए y का एक निश्चित मूल्य होता है तो हम कहेंगे कि y, x का फलन है। इसे हम निम्न ढंग से व्यक्त कर सकते हैं।

$y=f(x)$ जहाँ x एक स्वतन्त्र चर है और y एक आश्रित चर है।

1.5 फलन के रुप या प्रकार

फलन के कई प्रकार या श्रेणियां हैं। इस अनुभाग में कई महत्वपूर्ण प्रकार के फलन के बारे में बताया जाएगा, जो इस प्रकार हैं:

1. रेखीय फलन

एक रेखीय फलन एक गणितीय फलन है जो परिवर्तन की निरंतर दर से विशेषता है, जहां स्वतंत्र चर x का अधिकतम मान 1 है। उपरोक्त को निम्नलिखित तरीके से व्यक्त किया जा सकता है।

$Y = ax + b, a \neq 0$ यहाँ a और b अचर हैं।

निम्नलिखित उदाहरण रेखीय फलन को व्यक्त करते हैं:–

$y = 5x + 9, y = 10x+5, y = 1/8 x$

2. बहुपद फलन

एक फलन बहुपद फलन कहलाता है यदि $y = f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2 + \ldots\ldots+ a_nx^n$, यहाँ द एक ऋणेतर पूर्णांक है। $an \neq 0$

1. यदि $n = 0$, तब हमारे पास $y = a$ एक स्थिर फलन है।
2. यदि $n = 1$, तब हमारे पास $y = a_0+a_1x$ एक रेखीय फलन है।
3. यदि $n = 2$, तब हमारे पास $y = a_0+a_1x+a_2x^2$ एक द्विघातीय फलन है।
4. यदि $a_0=a_1 \ldots.a_{n-1}=0$, , तब हमारे पास $y=ax^n$ ($a_n=a$ लेने पर) एक n-घातीय फलन है।

3. परिमेय फलन

दो बहुपदों के भिन्नों को परिमेय फलन कहते हैं। उदाहरणत $y= \frac{f(x)}{g(x)}$ परिमेय फलन है जहां f(x) तथा g(x) बहुपद फलन है, जिसमें $g(x) \neq 0$.

उदाहरणतया, $f(x)=(x^2+2x+1)/(x-5), x\neq5$ परिमेय फलन है।

4. स्पष्ट फलन और अस्पष्ट फलन

एक फलन $y = f(x)$, x का स्पष्ट फलन कहलाता है, यदि y का मान स्पष्ट रूप में x के संदर्भ में दिया गया है। जैसे $y = f(x)$

लेकिन यदि चर y और x मिश्रित है तब फलन को अस्पष्ट फलन कहा जाता है। जैसे $f(x, y) = 0$ उदाहरणतया, y = 9x2 + 3एक स्पष्ट फलन है जबकि x2+y2=a2 एक अस्पष्ट फलन है।

5. घातीय फलन

घातीय फलन वह फलन है जिसमें स्वतन्त्र चर एक घात x के रूप में होता है जैसे कि $y=a^x$ जहां $a>0$, a· 1

6. लघुगणकीय फलन

लघुगणकीय फलन वह होता है जिसमें स्वतन्त्र चर x लघुगणक के रूप में होता है। इसे निम्न प्रकार से लिखा जा सकता है –

y=loga X a>0, a· · · तथा x>1

7. एकल मान और बहुमान फलन –

एक फलन $y = f(x)$, x का एकल–मान फलन तब कहलाता है जब x के एक निष्चित मान पर y का केवल एक ही मान हो। उदाहरणतया, y = x2+1, y = logx एकल मान फलन है। यदि एक फलन में x का मान y के अनेक मान देता है तो उसे बहुमान फलन कहते हैं।

उदाहरण के लिए, y2 = x एक बहुमान फलन कहलाता है।

8. सम और विषम फलन

एक फलन $y = f(x)$ को x का सम फलन तब कहेगें यदि $f(-x) = f(x)$ है। उदाहरणतया, $f(x) = x^2$ एक सम एक समफलन है। उसी प्रकार एक फलन $f(x)$ को x का विषम फलन तब कहते हैं जब $f(-x)= -f(x)$ है। उदाहरणतया $f(x) = x^3$ एक विषम फलन है। यहाँ $f(-x) = (-x)^3 = - x^3 = -f(x)$

1.6 बढ़ते व घटते फलन

एक फलन $y = f(x)$, x का बढ़ते क्रम का फलन कहलाता है जब x में वृद्धि के साथ ल के मान में भी वृद्धि होती है। उसी प्रकार एक फलन $f(x)$ का घटते क्रम का फलन कहलाता है जब x के मान में वृद्धि होने पर y के मान में कमी आती हो।

1.7 आर्थिक फलन

अर्थशास्त्र में प्रयोग होने वाले कुछ महत्त्वपूर्ण फलन निम्नलिखित हैं:–

1. मांग फलन: यदि वस्तु की कीमत (D) तथा वस्तु की मांगी गई मात्रा (P) दी गई है तो मांग फलन निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है–

$D = f(P)$, मांग (D) कीमत (P) का फलन है।

2. पूर्ति फलन रू यदि वस्तु की कीमत (P) तथा वस्तु की पूर्ति(S) की मात्रा दी गई है तो पूर्ति फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता है –

$S = f(P)$, पूर्ति (S) कीमत (P) का फलन है।

3. कुल लागत फलन: कुल लागत फलन उत्पादन तथा लागत में परस्पर संबंध को व्यक्त करता है। लागत उत्पादन का फलन है, इसे निम्न प्रकार से व्यक्त किया जा सकता हैं:–

$$C = f(Q)$$

C = कुल लागत

Q = उत्पादन का स्तर

अर्थशास्त्र में हम लागत फलन को निम्न रूप से भी व्यक्त करते हैं –

1. $C = a + bQ$ (Linear)
2. $C = a + bQ + cQ2$ (Quadratic)
3. $C = a + bQ - cQ2 + dQ3$ (Cubic) a= स्थिर लागत, b = सीमांत लागत

उत्पादन फलन रू उत्पादन फलन एक अवधारणा है जो उत्पादन की प्रक्रिया और इस प्रक्रिया में उपयोग किए जाने वाले कई संसाधनों से संबंधित है, जिसमें भूमि, श्रम और पूंजी शामिल हैं। अल्पावधि में, उत्पादन का संबंध केवल श्रम के माध्यम से दिखाया जाता है, क्योंकि इस अवधि के दौरान पूंजी स्थिर बनी रहती है। उत्पादन फलन को इस प्रकार दर्शाया गया है–

$P = f(L, K)$;यहां L श्रम एवं K स्थिर पूंजी है।

(i) कॉब डगलस उत्पादन फलन– कॉब डगलस उत्पादन फलन का उपयोग श्रम एवं पूंजी को उत्पादन के साथ संबधों को दर्शाने के लिए प्रयोग किया जाता है। जिसके कुछ महत्वपूर्ण उदाहरण निम्नलिखित हैं:–

$Y = AL\alpha K\beta$

Y = कुल उत्पादन

L = श्रम की इकाइयां

K = पूंजी की इकाई

A, α , β = स्थिरांक एवं उत्पादन प्राचाल

कॉब डगलस उत्पादन फलन में Y, L तथा K तीन चर तथा तीन प्राचल A, α , β हैं। A कुशलता प्राचाल है जो उत्पादन के पैमाने को दर्शाता है। A का मूल्य अधिक होने पर उत्पादन भी अधिक होगा। जबकि α तथा β उत्पादन की लोच को प्रकट करते हैं जोकि श्रम तथा पूँजी से संबंधित है।

(ii) स्थिर प्रतिस्थापन लोच का उत्पादन **(CES Production Function):-** CES उत्पादन फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है।

$$Q = \gamma\left[\delta K^{-p} + (1-\delta)L^{-p}\right]^{-\frac{1}{p}}$$

K = पूंजी उत्पाद

L = श्रम उत्पाद

Y = कुशलता प्राचाल

δ = वितरण प्राचाल

p = प्रतिस्थापन प्राचाल

जहां $0 \leq \delta \leq 1$

$p \geq 1$

5. आय फलन: आय फलन एक फर्म के राजस्व और बेची गई वस्तुओं की संख्या के बीच संबंध को स्पष्ट करता है। इस फलन को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है।

R = f(Q) कुल आय (R) वस्तु की बिक्री की गई मात्रा (Q) पर निर्भर करती है।

6. लाभ फलन: लाभ फलन किसी उत्पाद की बिक्री से प्राप्त राजस्व और उस उत्पाद को बनाने में किए गए व्यय के मध्य संबंध को दर्शाता है। यदि x वस्तु की उत्पादित मात्रा, R फर्म के कुल आय तथा C कुल लागत है तो लाभ फलन को निम्न प्रकार से व्यक्त किया जाता है–

$\Pi = R(x) - C(x)$ Π = कुल लाभ

7. उपभोग फलन : उपभेाग आय का फलन है। उपभोग फलन को निम्न ढंग से लिखा जा सकता है–

C = f(Y) उपभोग (C) आय स्तर (Y) का फलन है।

1.8 फलन की सीमा

जब कोई फलन एक निश्चित संख्या तक पहुंचता है, तो उस बिंदु को फलन की "सीमा" के रूप में संदर्भित किया जाता है, और यह उस बिंदु पर है कि सीमा तक पहुंच जाती है। इसे निम्नलिखित प्रारूप का उपयोग करके व्यक्त करना संभव है।

$$\lim_{x \to a} f(x) = l$$

यहाँ $x \longrightarrow a$ का अर्थ है x, a के बहुत अधिक नजदीक है परंतु यह a के बराबर नहीं है।

1. बाएं पक्ष की सीमा

पर f(x) का अपेक्षित मान हैं। इस मान को a पर f(x) की बाएं पक्ष की सीमा कहते हैं।

2. दाएं पक्ष की सीमा

$\lim_{x \to a^+} f(x), x = a$ पर f(x) का अपेक्षिक मान हैं। इस मान को a पर f(x) की दाएं पक्ष की सीमा कहते हैं।

- यदि दांए व बाएं पक्ष की सीमाएं संपाती हो तो हम इस उपयनिष्ट मान को x=a पर f(x) की सीमा कहते हैं और इसे से $\lim_{x \to a} f(x)$ निरूपित करते हैं।
- यदि दाएं और बाएं पक्ष की सीमाएं सपांती नहीं हो तो यह कहा जाता है कि x=a पर f(x) की सीमा अस्तित्वहीन है।

1.9 अभ्यासार्थ प्रश्न

1. फलन किसे कहते हैं, फलन के अर्थशास्त्र में प्रयोग बताइए।
2. चर किसे कहते हैं? चर के अर्थशास्त्र में उपयोग बताइए।
3. फलन के विभिन्न प्रकारो का वर्णन करें।

1.10संदर्भ ग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

1. https://ncert.nic.in/textbook/pdf/lhmh.101pdf
2. file:///C:/Users/PC/Downloads/BLOCK%.202pdf
3. https://www.scotbuzz.org//12/2021falan-kya-hai.html
4. https://infinitylearn.com/surge/maths/polynomial-function/
5. https://redox-college.s.3ap-south-.1amazonaws.com/kmc//2020Nov//27jP0MYU6sN5rQyv3bomyF.pdf
6. https://www.mathcentre.ac.uk/resources/uploaded/mc-ty-introfns-.1-2009pdf

इकाई–2
समिकाएँ एवं समीकरण (Identity and Equation)

इकाई संरचना (Unit Plan)

2.1 उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात विद्यार्थी

1. समिकाओं तथा समीकरणों मे भेद से परिचित हो जाएंगें।
2. कुछ साधारण समीकरणों के हल ज्ञात करने की विधि सीख जाएंगे।

2.2 प्रस्तावना (Introduction)

समिकाएँ और समीकरण अर्थशास्त्र में महत्वपूर्ण उपकरण हैं जो हमें विभिन्न आर्थिक परिघटनाओं को समझने, विश्लेषण करने, और भविष्यवाणी करने में मदद करते हैं। समिका ($Identity$) और समीकरण ($Equation$) दोनों ही गणितीय संबंधों को दर्शाते हैं, लेकिन इनके बीच एक महत्वपूर्ण भेद होता है। समीकरण विशेष परिस्थितियों के लिए सही होते हैं और हमें विभिन्न चर के बीच संबंध को दर्शाने में मदद करते हैं, जबकि समिकाएँ हमेशा सही होती है और उन्हें पहचान ($identity$) के रूप में इस्तेमाल किया जाता है। दोनों ही प्रकार के गणितीय संबंध नीति निर्माण, पूर्वानुमान, और आर्थिक विश्लेषण के लिए महत्वपूर्ण हैं।

बीजगणित में चरों के बीच आपसी सम्बन्ध निम्न दो आधार पर निर्धारित होते हैं–

1. जब चरों के मध्य सम्बन्ध चर के सभी मानों के लिए सत्य हो। तथा
2. जब चरों के मध्य सम्बन्ध चर के सिर्फ उन्हीं मानों के लिए सत्य हो जो मान इस सम्बन्ध द्वारा निर्धारित होते हों।

प्रथम प्रकार के सम्बन्ध को समिका तथा द्वितीय प्रकार के सम्बन्ध को समीकरण कहते है।

2.3 समिकाएँ:
समिकायें चरों के मध्य ऐसे सम्बन्ध को कहते हैं जो चरों के मध्य सभी मानों के लिए सत्य सिद्ध होती है। वस्तुतः समिकाओं में बायां तथा दायां पक्ष दोनों ही एक ही अभिव्यक्ति के दो भिन्न स्वरूप होते हैं तथा दोनो पक्षों के बीच बराबर का चिन्ह $(=)$ न उपयोग कर के समानता का चिन्ह $(\equiv)$ प्रयोग किया जाता है।
उदाहरण : $x^2 - 4 \equiv (x+2)(x-2)$ एक समिका है तथा x के किसी भी मान के लिए उपरोक्त सम्बन्ध सत्य होगा। आएँ x के निम्न कुछ यादृच्छिक ($random$) मानों के लिए उपरोक्त सम्बन्ध की सत्यता की जांच करते हैं।

$$\text{(i) } x = -5, \quad \text{(ii) } x = -0.05, \quad \text{(iii) } x = 3$$

हलः (i) $x = -5$ के लिए समिका $(x^2 - 4) \equiv (x+2)(x-2)$ का बायां पक्ष
$= (-5)^2 - 4$
$= 25 - 4$
$= 21$
तथा दायां पक्ष
$= (-5+2)(-5-2)$
$= (-3)(-7)$
$= 21$
$x = -5$ के लिए समिका $(x^2 - 4) \equiv (x+2)(x-2)$ का बायां तथा दायां पक्ष एक समान है अतः उपरोक्त सम्बन्ध $x = -5$ के लिए सत्य सिद्ध हुआ।

(ii) $x = -0.05$ के लिए समिका $(x^2 - 4) \equiv (x+2)(x-2)$ का बायां पक्ष
$= ((-0.05)^2 - 4)$
$= 0.0025 - 4$
$= -3.9975$
तथा दायां पक्ष
$= (-0.05+2)\,(-0.05-2)$
$= (1.95)\,(-2.05)$
$= -3.9975$
अतः $x = -0.05$ के लिए समिका $(x^2 - 4) \equiv (x+2)\,(x-2)$ का बायां पक्ष तथा दायां पक्ष एक समान है। अतः समिका द्वारा प्रदर्शित उपरोक्त सम्बन्ध $x = -0.05$ के लिए सत्य सिद्ध हुआ।

(iii) $x = 3$ के लिए $(x^2 - 4) = (x+2)(x-2)$ का बायां पक्ष
$= 3^2 - 4$
$= 9 - 4$
$= 5$
तथा दायां पक्ष
$= (3+2)(3-2)$
$= (5)(1)$
$= 5$

अतः $x = 3$ के लिए भी समिका $(x^2 - 4) = (x + 2)(x - 2)$ का बायां तथा दायां पक्ष एक समान है जो सिद्ध करता है कि उपरोक्त समिका द्वारा प्रदर्शित सम्बन्ध $x = 3$ के लिए भी सत्य है।
वस्तुतः x के किसी भी मान के लिए उपरोक्त समिका द्वारा प्रदर्शित सम्बन्ध सत्य होगा।

बोध प्रश्न1. निम्न समिकाओं का परीक्षण इन समिकाओं में प्रदर्शित चर के कुछ यादृच्छिक ($random$) मानों के लिए कीजिए।

(i) $(x - 5)^2 = x^2 + 25 - 10x$

(ii) $(x + a)^2 = x^2 + a^2 + 2ax$

नोटः यहाँ x तथा a दोनो के मान एक साथ लेने होगें।

2.4 समीकरणः

चरों के मध्य के ऐसे सम्बन्ध जो चर के विशिष्ट मानों के लिए ही सत्य होते हैं उन्हें समीकरण द्वारा प्रदर्शित करते हैं। एक समीकरण को प्रदर्शित करते समय समीकरण के बायें तथा दायें के बीच बराबर का चिन्ह$(=)$ स्थापित करते है।
उदाहरणः $x - 5 = 3$ एक समीकरण है जो x के विशिष्ट मान $x = 8$ के लिए ही सत्य होगा।

वस्तुतः एक समीकरण उस में निहित चर अथवा चरों के किसी विशिष्ट मान के लिए सत्य होगा यह समीकरण को हल कर के ही ज्ञात होता है। चरों के विशिष्ट मान जो समीकरण को सन्तुष्ट करते है समीकरण के मूल कहलाते हैं।
समीकरण को हल करने का तात्पर्य इन्हीं मूलों को ज्ञात करना होता है। समीकरणों के मूल के सम्बन्ध में निम्न तथ्य ध्यान रखनें चाहिए—

1. यदि किसी समीकरण के दोनों पक्षों मे किसी समान राशि का योग या ऋण कर दिया जाये तो समीकरण के मूल्य पर किसी भी प्रकार का प्रभाव नहीं पड़ेगा।
2. शून्य के अतिरिक्त किसी भी संख्या से समीकरण के दानों पक्षों को गुणा अथवा भाग देने का भी समीकरण के मूल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।
3. समीकरण के दोनों पक्षों के समान घात का भी समीकरण के मूल पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है। समीकरण के मूल ज्ञात करने की विधि—

किसी समीकरण को हल करने अर्थात समीकरण के मूल ज्ञात करने की विधि इस बात पर निर्भर करता है कि समीकरण में चरों की संख्या कितनी है तथा समीकरण की घात कितनी है।

2.5 समीकरण एवं उनके हल

कुछ प्रमुख प्रकार के समीकरण एवं उन्हें हल करने की विधि निम्नवत है—

2.5.1 सरल रैखिक समीकरण: एक चर के एक घातीय समीकरण को सरल रैखिक समीकरण कहते हैं। इन समीकरणों का हल समीकरण में शामिल पदों का पक्षान्तर करते हुए ज्ञात किया जाता है।

उदाहरणः $2x - 5 = 0$ एक सरल रैखिक समीकरण है, जिसका हल ज्ञात करने के लिए x के पद को बायें पक्ष में रखते हुए अन्य सभी पद एवं गुणांक को दायें पक्ष पर गणितीय नियमों के अनुसार पक्षान्तर करेंगे।

$2x - 5 = 0$

या

$2x = 0 + 5$

या

$2x = 5$

या $x = \frac{5}{2}$

यही अभीष्ट हल होगा।

2.5.2 युगपत समीकरण : दो चरों के एक घातीय समीकरणों के युग्म को युगपत समीकरण कहते है। वस्तुतः रैखिक समीकरण की प्रणाली को हल करने हेतु यह आवश्यक है कि चरों की संख्या के बराबर ऐसे समीकरण हों जो एक दूसरे की अतिव्यापन ($over\ lapping$) न करते हों।

उदाहरणः

$3x - 2y = 0$ तथा

$3x + 2y = 12$ युगपत समीकरण कहलायेंगे। क्योंकि यहां दो चर तथा आपस में अतिव्यापन न करने वाले दो रैखिक समीकरणों द्वारा सम्बंधित हैं।

युगपत समीकरणों का हल करने के लिए विलोपन विधि या आव्यूह की विधियों (क्रैमर विधि अथवा व्यूत्क्रम विधि) का प्रयोग किया जाता है। **क्रैमर के नियम द्वारा युगपत समीकरणों को हल करने की विधि को विस्तार से खण्ड 2 की इकाई में समझाया गया है।** विलोपन विधि द्वारा समीकरणों को हल करने के लिए सर्वप्रथम पहले समीकरण में एक चर का दूसरे चर के पद में मूल्य ज्ञात करेंगे तथा इस चर का यह मूल्य दूसरे समीकरण में स्थापित करके दूसरे समीकरण को एक चरीय समीकरण में परिवर्तित कर लेंगे। अब इस एक चरीय समीकरण को आसानी से पक्षान्तर विधि द्वारा हल करते हुए दूसरे चर का मान ज्ञात हो जायेगा जिसे पहले समीकरण में रखकर पहले चर का मान भी ज्ञात हो जायेगा।

उपरोक्त समीकरण में इस प्रक्रिया का निम्नवत् अपनायेंगे।

$3x - 2y = 0$————————1

$3x + 2y = 12$————————2

समीकरण 1 को x के लिए हल करने पर

$3x = 2y$

या

$x = \frac{2}{3}y$—————————3

अब x के y के रूप में उपरोक्त मान को समीकरण 2 में स्थापित करेंगे जिससे समीकरण 2 में x का चर विलोपित हो जायेगा।

$3\left(\frac{2}{3}y\right) + 2y = 12$

या

$2y + 2y = 12$

या

$4y = 12$

या

$y = \frac{12}{4}$

$= 3$

अब y के मान को व्यंजक 3 में रखनें पर

$x = \frac{2}{3}\ (y)$

या

$x = \frac{2}{3}\ (3)$

या

$x = 2$

इस प्रकार युगपत समीकरण का हल $x = 2$ तथा $y = 3$ है।

बोध प्रश्न2. युगपत समीकरण
$2x - y = 13$ तथा
$x - 7y = 0$
को हल कीजिए।

2.5.3 बहुपद : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ के स्वरूप के समीकरण को बहुपद समीकरण कहते है। बहुपदों ($polynomial$) के हल ($roots$) ज्ञात करने की कई विधियाँ हैं। इन विधियों का उपयोग बहुपद के डिग्री ($degree$) और गुणांक ($coefficients$) के आधार पर किया जाता है। यहाँ कुछ प्रमुख विधियाँ विस्तार से दी गई हैं–

2.5.3.1 गुणन खंड विधि ($\boldsymbol{Factorization\ Method}$)

गुणनखंड विधि का उपयोग छोटे डिग्री वाले बहुपदों (जैसे डिग्री 2 और 3) के हल ज्ञात करने के लिए किया जाता है। उदाहरण–मान लें कि हमें निम्नलिखित द्विघात बहुपद ($quadratic\ polynomial$) $x^2 - 5x + 6 = 0$ के हल ज्ञात करने हैं:

द्विघातीय बहुपद के सामान्य समीकरण से तुलना करने पर इसमें $a = 1, b = 5$ तथा $c = 6$ है। गुणनखंड विधी से इस समीकरण को हल करने के लिए a तथा c के गुणनफल के दो ऐसे गुणनखंड प्राप्त करेंगे जिनका योगफल b के बराबर हो जाए। उपरोक्त दिए हुए अचर पदों a तथा c का गुणनफल $a \times c = 1 \times 6 = 6$ है। अब 6 के दो ऐसे गुणनखंड -3 तथा -2 हैं जिनका योगफल -5 के बराबर होता है। अतः दिए हुए द्विघात बहुपद $x^2 - 5x + 6 = 0$ को इस प्रकार भी लिख सकते हैं–

$x^2 - 5x + 6 = x^2 - 3x - 2x + 6 = 0$

या $x(x - 3) - 2(x - 3) = 0$

या $(x - 3)(x - 2) = 0$

अब चूंकि दो राशियों का गुणनफल शून्य है तो इन दोनों गुणनखंडों के मान बारी बारी से शून्य रखने पर
$x - 2 = 0$ या $x - 3 = 0$

इन्हें बारी बारी से हल करने पर हमें x के दो मान मिल जाते हैं
$x = 2$ या $x = 3$ जो कि इस समीकरण के अभीष्ट हल होंगे। अर्थात x के इन दोनों ही मानों के लिए समीकरण संतुष्ट होगा।

2.5.3.2 श्रीधराचार्य विधि

दो डिग्री वाले बहुपदों $ax^2 + bx + c = 0$ का हल प्रायः गुणनखण्ड विधि एवं श्रीधराचार्य विधि से होता है। श्रीधराचार्य विधि द्वारा सभी प्रकार के द्विघातीय बहुपदीय समीकरणों का हल निम्न सूत्र के माध्यम से हो जाते हैं ।

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

उदाहरणः $x^2 - 10x + 2$ का श्रीधराचार्य विधि से हल निम्नवत होगा–

यहाँ, $a = 1, \quad b = -10$ तथा $c = 2$ है।

$$x = \frac{-(-10) \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(2)}}{2(1)}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 84}}{2}$$

$= \frac{10 \pm \sqrt{16}}{2}$
$= \frac{10 \pm 4}{2}$
या
$x = \frac{10+4}{2}$
तथा
$x = \frac{10-4}{2}$
या
$x = \frac{14}{2}$
तथा
$x = \frac{6}{2}$
अर्थात, $x = 7$ तथा $x = 3$ उपरोक्त द्विघातीय बहुपद के दो मूल होंगे। अर्थात x के इन दोनों ही मानों के लिए समीकरण संतुष्ट होगा।
बहुपदों के हल ज्ञात करने के लिए कई विधियाँ उपलब्ध हैं, और इनका चयन बहुपद के प्रकार और उसकी डिग्री के आधार पर किया जाता है। गणितीय अर्थशास्त्र में सुविधा की दृष्टि से गुणनखंड विधि तथा द्विघात सूत्र (श्रीधारचार्य विधि) बहुत उपयोगी एवं पर्याप्त होते हैं। विद्यार्थियों को चाहिए कि इनका अधिक से अधिक अभ्यास करें।

2.6 अर्थशास्त्र में समीकरण एवं समिकाएँ

1. माँग समीकरण $(Demand\ Equation)$: $Q_d = \mathrm{a} - \mathrm{bP}$
2. आपूर्ति समीकरण ($Supply\ Equation$): $Q_s = \mathrm{c} + \mathrm{dP}$
3. बजट समिका ($Budget\ Identity$): $Y \equiv C + S + T$
4. GDP समिका ($GDP\ Identity$):$GDP \equiv C + I + G + (X - M)$

2.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

1. (i) समिका $(x-5)^2 = x^2 + 25 - 10x$ का परीक्षण
$x = 2$ के लिए
बायाँ पक्ष $(2-5)^2 = -3\ ^2 = 9$
दायाँ पक्ष $2^2 + 25 - 10(2) = 4 + 25 - 20 = 4 + 5 = 9$
बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष
(ii) $(x+a)^2 = x^2 + a^2 + 2ax$ का परीक्षण
$x = 1,\ a = 2$ के लिए
बायाँ पक्ष $(1+2)^2 = 3^2 = 9$
दायाँ पक्ष$1^2 + 2^2 + 2x1x\ 2 = 1 + 4 + 4 = 9$
बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष
2. युगपत समीकरण
$2x - y = 13$.........................1

$x - 7y = 0$ 2

का हल ज्ञात करने के लिए समीकरण (2) में 2 से गुणाकरने पर

$2x - y = 13$ 3

$2x - 14y = 0$ 4

समीकरण (3) में से समीकरण (4) घटाने पर

$13\,y = 13$

$y = 1$

y का मान समीकरण (2) में रखने पर

$x - 7(1) = 0$

$x - 7 = 0$

$x = 7$

अतः दिए हुए युगपत समीकरण का हल $x = 7,\ y = 1$ होगा।

2.8 अभ्यास प्रश्न

1. निम्न समिकाओं का परीक्षण x के मानों 3, –3, 2, तथा –1 के लिए कीजिए ।
   1. $(x-4)(x+4) = x^2 - 16$
   2. $(X-5)^2 = X^2 - 10X + 25$
   3. $(X+3)^2 = X^2 + 16X + 9$
2. युगपत समीकरण
   $x - 7\,y = 2$ तथा
   $5\,x + 2\,y = 17$
   को हल कीजिए ।
3. समीकरण $2x^2 + 5x - 12$ को हल कीजिए ।

2.9 संदर्भग्रंथ सूची एवं उपयोगी पुस्तकें

Agarwal, D.R. (2009): Mathematics for Economics, Vrinda Publications, Delhi

Livernois, John., Rees,Ray., &Hoy, Michael (2012): Mathematics for Economics , PHI Learning.

Agarwal, D.R. “Prarambhik Ganitiya Arthshastra (Hindi), Vrinda Publications, Delhi.

Allen, R.G.D (2008): Mathematical Analysis for Economics , AITBS.

Bhardwaj, R.S (2006): Mathematics for Economics and Business, Excel Books.

Chiang, A.C & Wainwright, Kevin (2013): Fundamental Methods of Mathematical Economics” Mc Graw Hill Publication.

Dowling, Edward.T (2005): Schaum's Easy Outline of Introduction to Mathematical Economics , Tata Mcgraw Hill Education.

Madnani, G M K: Mathematics for Economics. Sultan Chand & Sons
Mishra,J.P. “GaniteeyaArthshastra”, Pratiyogita Sahitya.
Rosser,Mike (2003) : Basic Mathematics for Economists , Routledge.
Seth,M.L.,“ Arthshastra mei Prarambhik Ganit”, Laxmi Narayan Publications, Agra.