उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

B.Com-201

सांख्यिकी के तत्व

खंड

1

सांख्यिकी की आधारभूत संकल्पनाएँ

इकाई 1

सांख्यिकी का अर्थ तथा क्षेत्र 5

इकाई 2

सांख्यिकीय सर्वेक्षण का संगठन 16

इकाई 3

परिशुद्धता, सन्निकटमान तथा विभ्रम 34

इकाई 4

अनुपात, प्रतिशतता तथा दर 53

विशेषज्ञ समिति

प्रो० बी.एस. शर्मा
सम-कुलपति
इं०गां०रा०मु०वि०

प्रो० राकेश खुराना
निदेशक, प्रबंध अध्ययन विद्यापीठ
इं०गां०रा०मु०वि०

प्रो० जे. सत्यनारायण (अध्यक्ष)
उस्मानिया विश्वविद्यालय
हैदराबाद

प्रो० जी.वी. शिनॉय
इंस्टीट्यूट ऑफ रूरल मैनेजमेंट
आनंद

प्रो० बी.एस. भाटिया
पंजाबी विश्वविद्यालय
पटियाला

प्रो० पी.के. घोष
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

प्रो० आर.बी. उपाध्याय
राजस्थान विश्वविद्यालय
जयपुर

प्रो० आई. एच. फारूकी
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय
अलीगढ़

श्री ए.के. मजूमदार
इंस्टीट्यूट ऑफ चार्टर्ड एकाउंटेंट्स
ऑफ इंडिया
नई दिल्ली

प्रो० अमर चन्द
मद्रास विश्वविद्यालय
मद्रास

पाठ निर्माण दल

डॉ० विद्या रत्न
श्रीराम कॉलिज ऑफ कॉमर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

डॉ० ओ.पी. गुप्त
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

डॉ० सी.आर. कोठारी
राजस्थान विश्वविद्यालय
जयपुर

प्रो० (श्रीमती) सरला अच्युतन
गुजरात विश्वविद्यालय
अहमदाबाद

संकाय सदस्य
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
डॉ० आर.के. ग्रोवर
डॉ० एन.वी. नरसिम्हम
श्रीमती मधु सूर्या
श्री नवल किशोर
डॉ० (श्रीमती) मधु त्यागी
प्रो० जी. सांबशिव राव
(भाषा संपादक)

अनुवाद

श्री के.के. खन्ना
ज़ाकिर हुसैन कॉलिज
नई दिल्ली

डॉ० एस.के. साहनी
मोतीलाल नेहरू कॉलिज
नई दिल्ली

श्री शुक्ला
एस.जी.टी.बी. खालसा कॉलिज
दिल्ली

श्री जे.डी. गुप्ता
वैशाली, पीतमपुरा
दिल्ली

संकाय सदस्य
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
प्रो० वी.रा. जगन्नाथन
डॉ० आर.के.ग्रोवर
श्री नूर नबी अब्बासी
डॉ० भगत सिंह
डॉ० श्रीमती मधु सूर्या

सचिवालयिक सहायक
श्री हरीश कुमार सेठी

सामग्री निर्माण

श्री बालकृष्ण सेल्वराज
कुलसचिव
मुद्रण एवं प्रकाशन प्रभाग
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

जनवरी 1991 (पुर्नमुद्रित) जनवरी

© इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, 1990

ISBN-81-7091-552-X

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस सामग्री के किसी भी अंश को इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति के बिना किसी भी रूप में मिमियोग्राफी (चक्रमुद्रण) द्वारा या अन्यथा पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

इन्दिरा गाँधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की अनुमति से पुनः मुद्रित। उत्तर प्रदेश राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय, प्रयागराज की ओर से कर्नल विनय कुमार, कुलसचिव द्वारा पुनः मुद्रित एवं प्रकाशित–2025

मुद्रकः चन्द्रकला यूनिवर्सल प्रा० लि० 42/7 जवाहर लाल नेहरू रोड, प्रयागराज ।

खंड 1 सांख्यिकी की आधारभूत संकल्पनाएँ

सांख्यिकी विज्ञान, सांख्यिकीय समंकों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा विवेचन में उपयोग की जाने वाली विधियों का अध्ययन है। सांख्यिकीय समंक या आँकड़े वे तथ्य तथा संख्याएँ हैं, जिन्हें परिशुद्धता के उचित स्तर के अनुसार पूर्व-निर्धारित उद्देश्य के लिए व्यवस्थित ढंग से संकलित कर अंकों में व्यक्त किया जाता है। इस परिचयात्मक खंड–संख्यिकीय की आधारभूत संकल्पनाएँ–में चार इकाइयाँ हैं:

इकाई 1 में सांख्यिकी की परिभाषा, महत्व तथा क्षेत्र के विषय में बताया गया है। इसमें सांख्यिकीय विधियों की परिसीमाओं तथा उनके प्रयोग द्वारा ज्ञात किए गए निष्कर्षों पर अविश्वास के कारणों को भी समझाया गया है।

इकाई 2 में सांख्यिकीय सर्वेक्षण के संगठन के विभिन्न चरणों को स्पष्ट किया गया है।

इकाई 3 में "परिशुद्धता के उचित स्तर" की संकल्पना को विस्तार से स्पष्ट किया गया है तथा सन्निकटमान (approximation) की विधियों को समझाया गया है। इसमें सांख्यिकीय विभ्रम (errors) की संकल्पना, उसके कारणों तथा विभिन्न प्रकारों को भी सविस्तार स्पष्ट किया गया है।

इकाई 4 में सांख्यिकीय संगणना में "अनुपात", "प्रतिशत", "दर" आदि की आवश्यकता को स्पष्ट किया गया है। इसमें इनकी गणना की विधियों, विभिन्न स्थितियों में इनके प्रयोग तथा इनके प्रयोग में की जाने वाली सावधानियों को भी स्पष्ट किया गया है। साथ ही संगणना में लघुगणक (logarithms) के प्रयोग को भी स्पष्ट किया गया है।

इकाई 1 सांख्यिकी का अर्थ तथा क्षेत्र

इकाई की रूपरेखा

1.0 उद्देश्य

1.1 प्रस्तावना

1.2 सांख्यिकी का अर्थ

- 1.2.1 बहुवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी की परिभाषा
- 1.2.2 एकवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी की परिभाषा

1.3 विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी

1.4 सांख्यिकी के कार्य

1.5 सांख्यिकी का महत्व

1.6 सांख्यिकी की परिसीमाएँ

1.7 सांख्यिकी पर अविश्वास

1.8 सारांश

1.9 शब्दावली

1.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

1.11 स्वपरख प्रश्न

1.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़कर आप इस योग्य हो सकेंगे किः

- सांख्यिकी शब्द की परिभाषा बता सकें
- विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी में अंतर कर सकें
- सांख्यिकी के विभिन्न कार्यों का वर्णन कर सकें
- विभिन्न क्षेत्रों में सांख्यिकीय विधियों का महत्व स्पष्ट कर सकें
- सांख्यिकी विधियों की परिसीमाओं को समझ सकें
- सांख्यिकी में अविश्वास के कारणों को स्पष्ट कर सकें

1.1 प्रस्तावना

सांख्यिकी (Statistics) कोई नई विधा नहीं है, वरन् यह इतनी ही प्राचीन है जितनी मानवीय क्रियाएँ। परंतु इस की उपयोगिता का क्षेत्र लगातार बढ़ता जा रहा है। प्राचीन समय में इसे "शासन-कला का विज्ञान" समझा जाता था तथा राज्य की प्रशासनिक क्रिया का उपोत्पाद समझा जाने के कारण इस का क्षेत्र सीमित था। उस समय में सरकार, प्रशासनिक उद्देश्य से, जनसंख्या, जन्म-मृत्यु आदि के अभिलेख रखती थी। वास्तव में आंग्ल भाषा के शब्द "स्टेटिस्टिक्स" (Statistics) की उत्पत्ति लैटिन भाषा के शब्द 'स्टेटस' (status) या इटालवी शब्द "स्टेटिस्टा" (Statista) अथवा जर्मन शब्द "स्टेटिस्टिक" (Statistik) से हुई है, जिन सभी का अर्थ "राजनीतिक राज्य" (Political State) है। आज सांख्यिकी विधियों का कृषि, अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र, व्यवसाय-प्रबन्ध आदि भिन्न-भिन्न क्षेत्रों में व्यापक रूप से प्रयोग किया जाता है। इस इकाई में आप सांख्यिकी की परिभाषा, विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी में अंतर, सांख्यिकी के कार्यों, सांख्यिकी के महत्व तथा परिसीमाओं तथा सांख्यिकी पर अविश्वास का अध्ययन करेंगे।

1.2 सांख्यिकी का अर्थ

"सांख्यिकी" शब्द का प्रयोग विभिन्न प्रकार से किया जाता है। यदा-कदा तथ्यों के संख्या संबंधी विवरणों या आँकड़ों (data) का उल्लेख करने के लिए बहुवचन के रूप में इसका प्रयोग किया जाता है। दूसरी ओर इस शब्द का प्रयोग एकवचन में गणित, अर्थशास्त्र आदि जैसे विषय के अध्ययन के रूप में भी प्रयोग किया जाता है। उदाहरणार्थ, जब हम यह कहते हैं कि हमारे देश से संबंधित कुछ "सांख्यिकी" इस प्रकार हैं – भारत में प्रति 1,000 पुरुषों के लिए स्त्रियों की जनसंख्या 932 है, अथवा सामयिक मूल्यों पर आधारित प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय उत्पाद 1950-51 में 246 रु० से बढ़कर 1985-86 में 2,596 रु० हो गया है–तब हम सांख्यिकी शब्द का उपयोग बहुवचन अर्थ में (अर्थात् समंकों या आँकड़ों के अर्थ में) करते हैं। उक्त संख्याओं में व्यक्त विवरण को तैयार करने के लिए हमारे लिए उन विधियों तथा तकनीकों की जानकारी होना आवश्यक है जो आँकड़ों के संकलन, संघटन, प्रस्तुतिकरण, विश्लेषण तथा अर्थनिर्णय में प्रयोग की जाती हैं। इन विधियों तथा तकनीकों का अध्ययन सांख्यिकी विज्ञान कहलाता है। इस संदर्भ में सांख्यिकी शब्द का प्रयोग एकवचन में है। इस अभिप्राय में सांख्यिकी का अर्थ है सांख्यिकीय विधियाँ या सांख्यिकी-विज्ञान। आइए, इन दोनों अर्थों का विस्तार से अध्ययन किया जाए।

1.2.1 बहुवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी की परिभाषा

अलग-अलग लेखकों ने सांख्यिकी को अलग-अलग प्रकार से परिभाषित किया है। वेबस्टर (Webster) के अनुसार "समंक किसी राज्य में रहने वाले व्यक्तियों की स्थिति से संबंधित वर्गीकृत तथ्य हैं – विशेष रूप से वे तथ्य जिनको अंकों के रूप में अथवा किसी भी सारिणी या वर्गित पद्धति द्वारा प्रस्तुत किया गया हो।" बाउले (Bowlay) के अनुसार, "किसी अनुसंधान से संबंधित अंकों में व्यक्त किये गये उन तत्वों के विवरण को समंक या आँकड़े कहते हैं जिन्हें एक-दूसरे की तुलना में रखा जा सकता है।" यूल तथा केण्डाल (Yule and Kendall) के अनुसार, "समंकों से तात्पर्य उन संख्यात्मक तथ्यों से है जो पर्याप्त सीमा तक अनेक प्रकार के कारणों से प्रभावित होते हैं।" उक्त परिभाषाएँ बहुत संकीर्ण हैं क्योंकि ये सांख्यिकी के क्षेत्र को उन्हीं तथ्यों तथा संख्याओं तक सीमित करती हैं जो राज्य में रहने वाले व्यक्तियों की दशाओं से संबंधित हों और या फिर समंकों की कुछ विशिष्ट विशेषताएँ हों।

सांख्यिकी की अधिक व्यापक परिभाषा होरेस सेक्रिस्ट (Horace Sacrist) ने दी थी। उनके अनुसार सांख्यिकी से तात्पर्य "तथ्यों के उस समूह से है जो अनेक कारणों से पर्याप्त मात्रा में प्रभावित होते हैं, जिन्हें अंकों में व्यक्त किया जाता है, जिनकी गणना या अनुमान परिशुद्धता के एक उचित स्तर के अनुसार की जाती है, जिन्हें पूर्वनिश्चित उद्देश्य के लिए एक व्यवस्थित ढंग से संग्रह किया जाता है, तथा जिन्हें एक-दूसरे के तुलनात्मक रूप में रखा जाता है।" यह परिभाषा व्यापक है तथा उन समस्त विशेषताओं का उल्लेख करती है जो संख्यात्मक तथ्यों (समंक) में होनी चाहिए ताकि वे सांख्यिकी कहला सकें। आइए, अब हम इन विशेषताओं की एक-एक करके विवेचना करें।

क) **समंक तथ्यों के समूह होने चाहिए:** अकेली तथा असंबंधित संख्याएँ आँकड़े नहीं होतीं। उन्हें किसी विशेष अनुसंधान क्षेत्र से संबंधित तथ्यों के समूह का भाग होना आवश्यक है। उदाहरणार्थ, राम की मासिक आय 2,000 रु० है। यह एक सांख्यिकीय विवरण या समंक नहीं है। तथापि, यह कथन कि राम, मोहन तथा सोहन की मासिक आय क्रमशः 2,000 रु०, 2,500 रु० तथा 3,000 रु० है, सांख्यिकीय समंक हैं।

ख) **समंक अनेक कारणों द्वारा प्रभावित होते हैं:** किसी समस्या/तथ्यों पर अनेक कारणों का प्रभाव पड़ता है। उदाहरणार्थ, किसी वस्तु पर किया जाने वाला घरेलू व्यय अनेक कारणों जैसे, आय, रूचि, शिक्षा आदि द्वारा प्रभावित होता है। इसी प्रकार, गेहूँ की उत्पादन मात्रा मिट्टी, बीज, वर्षा, तापमान आदि अनेक कारणों पर निर्भर करती है। इन तथ्यों से संबंधित आँकड़े। समंक कहलाते हैं। परंतु यदि हम एक से दस तक अंक तथा उनके वर्ग एक कागज़ पर लिख दें तो, एक से अधिक संख्याएँ होने पर भी, उन्हें समंक नहीं कहा जा सकता। ये संख्याएँ अनेक कारणों द्वारा प्रभावित नहीं होतीं।

ग) **समंकों को संख्या में व्यक्त किया जाना चाहिए:** केवल संख्याओं में व्यक्त तथ्य-विवरण ही समंक कहलाते हैं। लक्षणों का गुणात्मक वर्णन जैसे, सुन्दरता, आँखों का रंग आदि प्रत्यक्ष रूप से मापे नहीं

जा सकते। इसलिए सामान्यतया, वे समंक नहीं कहलाते। इन लक्षणों को संख्यात्मक रूप देकर ही समंक बनाया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक विद्यालय में हम काले, नीले या भूरे रंग की आँख वाली लड़कियों की संख्या गिन सकते हैं।

घ) **समंक यथोचित परिशुद्धता के मानदण्ड के अनुसार प्रमाणित अथवा अनुमानित किये जाते हैं:** समंकों का प्रगणन या तो आगणन द्वारा किया जाता है या अनुमान द्वारा । परंतु यथोचित शुद्धता का मानदण्ड बनाए रखना अनिवार्य है । शुद्धता का स्तर अनुसंधान की प्रकृति तथा उस के उद्देश्य पर निर्भर करता है । कल्पना करें कि आप एक विद्यालय के प्रधानाचार्य के नाते बी.काम. में प्रवेश पाने वाले छात्रों के परिणाम निष्पादन के औसत स्तर को जानना चाहते हैं । इसके लिए आप को उन विद्यार्थियों के उच्चमाध्यमिक स्तर पर प्राप्त किए गये अंक अवश्य संकलित करने चाहिएं । यह दो प्रकार से किया जा सकता है । पहले, आप विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों की सूची तैयार कर उस की औसत ज्ञात कर सकते हैं । अन्यथा, यदि किसी कारण पूर्ण संगणना संभव नहीं है तो आप प्रतिदर्श (Sample) का चुनाव कर सकते हैं । प्रतिदर्श के आधार पर आप बाद में सभी विद्यार्थियों के परिणाम निष्पादन औसत स्तर का अनुमान लगा सकते हैं । इस प्रकार, समंक संगणना द्वारा अथवा अनुमान द्वारा प्राप्त किए जा सकते हैं । आइए, एक अन्य उदाहरण द्वारा यथोचित/परिशुद्धता के मानदण्ड के अभिप्राय को समझें । यदि आप भारत के कुल खाद्यान्न उत्पादन का अनुमान, लाख टनों में, लगा रहे हैं, तो आप की उचित इकाई (या परिशुद्धता का स्तर) लाख टनों में होगी । परंतु, यदि आप स्वर्ण का कुल उत्पादन बतला रहे हैं तो आपकी उचित इकाई किलोग्राम हो सकती है । इस प्रकार परिशुद्धता का स्तर अनुसंधान की प्रकृति तथा उसके उद्देश्य पर निर्भर करता है ।

ड.) **समंकों का संग्रह पूर्व-निर्धारित उद्देश्य के लिए व्यवस्थित ढंग से किया जाना चाहिए:** समंकों का संग्रह व्यवस्थित ढंग से होना चाहिए । अव्यवस्थित ढंग से संग्रहीत समंकों से उद्देश्य सिद्ध नहीं होगा । समंकों के संग्रहण का उद्देश्य पूर्वनिर्धारित तथा स्पष्ट व निश्चित होना चाहिए । अनुसंधान का उद्देश्य स्पष्ट न होने पर या तो हम बहुत से अनावश्यक समंक कर लेंगे अथवा आवश्यक आँकड़े छोड़ देंगे ।

च) **समंकों को एक-दूसरे से संबंधित रूप में रखा जाना चाहिए:** समंक कहे जाने के लिए संख्याओं में व्यक्त तथ्य तुलना के योग्य होने चाहिए । उदाहरणार्थ, किसी विशेष वर्ष में किसी वस्तु के उत्पादन तथा निर्यात संबंधी आँकड़े परस्पर संबंधित हैं । साथ-साथ लिखे जाने पर ही वे समंक हैं । परंतु यदि आपके पास तीन संख्याएँ हैं, जैसे –(1) 1986 में भारत में चावल का उत्पादन, (2) 1987 में संयुक्त-राज्य-अमेरिका में जन्मे बच्चों की संख्या तथा (3) 1988 में इंग्लैण्ड में पंजीकृत गाड़ियों की संख्या । तब उक्त संख्याएँ तथ्य भले ही हों, परंतु इकट्ठा रखने पर भी वे समंक नहीं कही जा सकतीं क्योंकि इन संख्याओं का परस्पर कोई संबंध नहीं है । अतः यह स्पष्ट है कि **सभी समंक तथ्यों के संख्यात्मक विवरण हैं परंतु तथ्यों के सभी संख्यात्मक विवरण समंक नहीं होते** । उपरोक्त विशेषताओं के उपस्थित होने पर ही उन्हें समंक कहा जा सकता है ।

1.2.2 एकवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी की परिभाषा

विवेकपूर्ण निर्णय के लिए संख्यात्मक सूचनाओं को संकलित, संगठित, प्रस्तुत, विश्लेषित तथा निर्वचित किया जाना चाहिए । ऐसा करने के लिए हमें ऐसी विधियों की आवश्यकता होती है जो इस कार्य में हमारी सहायता कर सकें । अतः **एकवचन में प्रयुक्त सांख्यिकी शब्द से तात्पर्य विधियों के उस समूह से है जिसे समंकों के संग्रहण, विश्लेषण तथा निर्वचन या अर्थनिर्णय के लिए प्रयोग किया जाता है** । इस संदर्भ में भी अलग-अलग लेखकों ने सांख्यिकी की परिभाषा अलग-अलग की है । आइए, अब हम इन में से कुछ परिभाषाओं का वर्णन करें । उदाहरणार्थ, बाउले ने कई परिभाषाएँ दी हैं । परन्तु उन में से कोई परिभाषा भी व्यापक नहीं कही जा सकती । वास्तव में इन परिभाषाओं से हमें सांख्यिकी विज्ञान की प्रगति का आभास होता है । बाउले की कुछ परिभाषाएँ इस प्रकार हैं:

(i) सांख्यिकी को गणना का विज्ञान कहा जा सकता है ।
(ii) सांख्यिकी को अनुपातों का विज्ञान कहा जा सकता है ।
(iii) सांख्यिकी वह विज्ञान है जो सामाजिक व्यवस्था को सम्पूर्ण मानकर, उसके सभी रूपों का मापन करता है ।

क्रॉक्सटन तथा कॉउडन (Croxton and Cowden) ने सांख्यिकी की सरल तथा संक्षिप्त परिभाषा दी है। उनके अनुसार, "सांख्यिकी को संख्यात्मक समंकों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।"

सेलिगमेन (Selligman) द्वारा दी गई परिभाषा भी इतनी ही सरल परंतु व्यापक है। उनके अनुसार, "सांख्यिकी वह विज्ञान है जिसका संबंध समंकों के संकलन, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण, तुलना तथा निर्वचन की रीतियों से है जिनको किसी अनुसंधान-क्षेत्र पर कुछ प्रकाश डालने के लिए एकत्रित किया गया हो"। उपरोक्त पिछली दोनों परिभाषाएँ काफी सारगर्भित तथा व्यापक हैं तथा सांख्यिकी विधियों के क्षेत्र को स्पष्ट करती है। सांख्यिकी विज्ञान हमें (1) समंकों के संकलन, (2) समंकों के वर्गीकरण तथा सारणीयन, (3) समंकों के प्रस्तुतीकरण, (4) समंकों के विश्लेषण तथा (5) समंकों के निर्वचन की विधियों तथा तकनीकों की शिक्षा देता है। उपरोक्त विवेचन से हम यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि सांख्यिकी शब्द या तो बहुवचन अर्थ में प्रयोग होता है, जहाँ उसका तात्पर्य समंकों या आँकड़ों से है, अथवा एकवचन अर्थ में प्रयोग किया जाता है जहाँ इसका अर्थ अनिश्चितता की स्थिति में बुद्धिमत्तापूर्ण निर्णय लेने के लिए प्रयुक्त विधियों के रूप में किया जाता है।

1.3 विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी (Descriptive and Inferential Statistics)

आपको विदित है, एकवचन में प्रयोग होने पर, सांख्यिकी शब्द से तात्पर्य उन विधियों तथा सिद्धांतों से है जो किसी अनुसंधान-क्षेत्र से संबंधित समंकों के संकलन, प्रस्तुतीकरण, विश्लेषण तथा निर्वचन में प्रयोग किए जाते हैं। ये विधियाँ तथा तकनीकें इतनी विविध हैं कि सांख्यिकीविद् प्रायः इन्हें दो वर्गों में बांटते हैं: (1) विवरणात्मक सांख्यिकी तथा (2) निष्कर्षात्मक सांख्यिकी।

विवरणात्मक सांख्यिकी (**Descriptive Statistics**): से तात्पर्य उन विभिन्न मापों से है जो समंकों की विशेषताओं के विवरण प्रस्तुत करने के लिए प्रयोग किए जाते हैं। इन मापों में केन्द्रीय प्रकृति के माप, विचलन के माप आदि शामिल हैं। रेखाचित्रों, सारणियों तथा चित्रों द्वारा समंकों का निरूपण भी विवरणात्मक सांख्यिकी में सम्मिलित है। उदाहरणार्थ, यदि बी.काम. के विद्यार्थियों की संख्या 100 है और आप इन विद्यार्थियों के औसत अंक ज्ञात करते हैं, तो आप यहाँ विवरणात्मक सांख्यिकी का प्रयोग कर रहे हैं। इसी प्रकार, जब आप उसी कक्षा से प्रतिदर्श (Sample) द्वारा चुने 25 विद्यार्थियों के औसत अंक ज्ञात कर रहे हैं परंतु आप सम्पूर्ण कक्षा के लिए कोई सामान्यीकरण करने का प्रयास नहीं कर रहे, तो भी आप विवरणात्मक सांख्यिकी का प्रयोग कर रहे हैं।

निष्कर्षात्मक सांख्यिकी (**Inferential Statistics**): से तात्पर्य निदर्श समंकों के लक्षणों के आधार पर समग्र समंकों (population data) के संबंध में प्रामाणिक निष्कर्ष निकालने की सांख्यिकीय प्रक्रिया से है। सांख्यिकी में समग्र (population) शब्द से तात्पर्य जनगणना से न हो कर किसी अध्ययन क्षेत्र से संबंधित सभी इकाइयों से है। उपरोक्त उदाहरण में यदि प्राध्यापक प्रतिदर्श औसत अंकों के आधार पर कक्षा के सभी विद्यार्थियों के औसत अंकों का अनुमान लगाने का निर्णय ले तो हम कहेंगे कि वह निष्कर्षात्मक सांख्यिकी का प्रयोग कर रहे हैं। यह बात ध्यान देने योग्य है कि हम अधिकतर निदर्श समंको के आधार पर ही समग्र समंकों के लक्षणों को समझने का प्रयास करते हैं। निदर्श निष्कर्षों के आधार पर समग्र के संबंध में ज्ञात निष्कर्षों में कुछ विभ्रम अथवा असंगति होना स्वाभाविक है। सम्भाव्यता सिद्धांत (probability theory) के आधार पर ऐसे विभ्रम का परिमाण ज्ञात किया जा सकता है।

बोध प्रश्न क

1 क्या निम्नलिखित वक्तव्य सांख्यिकी समंक हैं? हां या नहीं में उत्तर दीजिये।
   i) एक फैक्ट्री के 100 श्रमिकों की साप्ताहिक मज़दूरी। ....
   ii) राम का कद 6 फुट है। ....
   iii) मोहन का वजन 70 किलोग्राम है, सोहन का कद 6.2 फुट है तथा राम की मासिक आय 1,500 रु० है। ....
   iv) गत 10 वर्षों में कंपनी की बिक्री। ....

2 निम्नलिखित वक्तव्यों पर एक पंक्ति में टिप्पणी लिखिए।

i) वेब्सटर तथा सेक्रिस्ट ने विवरणात्मक सांख्यिकी की परिभाषा दी है।

....

ii) यूल एवं केण्डाल द्वारा दी गई परिभाषा सेक्रिस्ट द्वारा दी गई परिभाषा में निहित है।

....

iii) सांख्यिकी के अंतर्गत गुणात्मक समंकों का अध्ययन नहीं किया जाता।

....

iv) सांख्यिकीय विधियाँ केवल समंकों के संकलन तथा विश्लेषण से संबंधित हैं।

....

v) बाउले द्वारा दी गई सांख्यिकी विज्ञान की परिभाषा सांख्यिकीय कार्य पद्धति के विभिन्न स्तरों पर प्रकाश डालती है।

....

vi) निष्कर्षात्मक सांख्यिकी निदर्श के अध्ययन से संबंधित है।

....

1.4 सांख्यिकी के कार्य

आप ने सांख्यिकी के अर्थ तथा परिभाषा का अध्ययन किया है। आप ने विवरणात्मक तथा निष्कर्षात्मक सांख्यिकी के अंतर को भी समझा है। आइए, अब हम सांख्यिकी के कुछ महत्वपूर्ण कार्यों की परिचर्चा करें।

1 **तथ्यों को सही रूप में प्रस्तुत करना:** सांख्यिकीय विधियाँ सामान्य कथनों को संक्षिप्त तथा निश्चित रूप में प्रस्तुत करती हैं। उदाहरणार्थ, आप कह सकते हैं कि भारत में कपास की औसत पैदावार 180 किलोग्राम प्रति हेक्टेयर है। यह कथन अधिक संक्षिप्त तथा प्रत्यायक है बजाय यह कहने के कि भारत में कपास की औसत उपज बहुत कम है।

2 **वृहत तथा जटिल समंकों को सरल बनाना:** सांख्यिकीय विधियाँ वृहत तथा जटिल समंकों को बोधगम्य बनाने के लिए उन्हें सरल बनाती हैं। अपरिष्कृत समंक प्रायः दुरूह तथा अबोधगम्य होते हैं। जब तक उन्हें किसी सामान्य लक्षणों के आधार पर वर्गीकृत न किया जाय तब तक उनके लक्षणों को समझना मुश्किल है। उदाहरणार्थ, आपको एक कारखाने में काम करने वाले 1000 श्रमिकों की साप्ताहिक मज़दूरी दी गई है। आप के लिए उन समंकों से कोई निष्कर्ष निकालना तब तक असम्भव होगा जब तक उन्हें वर्गीकृत कर संक्षिप्त रूप में निम्न प्रकार प्रस्तुत न किया जाए:

साप्ताहिक मजदूरी (रु०)	श्रमिकों की संख्या
600 से कम	100
600 – 700	200
700 – 800	400
800 – 900	200
900 से अधिक	100
	योग = 1000

3 **तुलना करने हेतु तकनीक प्रदान करना:** सांख्यिकी का प्राथमिक उद्देश्य समय अथवा अन्तराल में विभिन्न समस्याओं के तुलनात्मक अध्ययन को सम्भव बनाना है। उदाहरणार्थ, राष्ट्रीय आय का आगणन निरूद्देश्य नहीं किया जाता, परंतु यह जानने के लिए किया जाता है कि एक समय-अंतराल

में जनता का जीवन-स्तर सुधर रहा है अथवा नहीं। उदाहरणार्थ, 1987 की तुलना में 1988 में भारत में प्रति-व्यक्ति आय 10% बढ़ी है। इस सूचना के आधार पर हम 1988 में एक भारतीय के जीवन-स्तर पर कुछ प्रकाश डाल सकते हैं।

4 **विभिन्न क्षेत्रों में नीति बनाना:** सांख्यिकीय विधियाँ सामाजिक, आर्थिक तथा व्यावसायिक क्षेत्रों में नीति-निर्धारण में सहायक होती है। उदाहरणार्थ, जन्म-मरण के सांख्यिकीय समंकों के आधार पर राज्य सरकार परिवार-नियोजन कार्यक्रम चलाने में सफल होती है। इसी प्रकार, उपभोक्ता-मूल्य-सूचकांकों के आधार पर राज्य-सरकार अपने कर्मचारियों को महंगाई-भत्ता प्रदान करती है।

5 **विभिन्न तथ्यों के बीच संबंधों का अध्ययन करना:** सांख्यिकीय माप जैसे कि सह-संबंध तथा प्रतीपगमन विभिन्न चलों में परस्पर संबंध ज्ञात करने के लिए प्रयोग किए जाते हैं। निष्कर्ष तथा निर्णय पर पहुँचने के लिए इस प्रकार के परस्पर संबंध महत्वपूर्ण हैं। उदाहरणार्थ, आप किसी वस्तु की माँग तथा उसके मूल्यों में परस्पर संबंध पाते हैं। सामान्यतः यदि किसी वस्तु का मूल्य बढ़ता है, तो उस वस्तु की माँग घटने की सम्भावना रहती है।

6 **भविष्य के मूल्यों का पूर्वानुमान करना:** कुछ सांख्यिकी विधियों का उपयोग चल के भविष्य के मूल्यों का पूर्वानुमान करने के लिए किया जाता है। पिछले दस वर्षों के विक्रय आँकड़ों के आधार पर एक विपणन-प्रबन्धक अपने उत्पाद की अगले वर्ष की सम्भावित माँग का अनुमान लगा सकता है।

7 **अनिश्चितता को मापना:** सम्भावित नियम की सहायता से आप किसी घटना के घटने की सम्भावना का पता लगा सकते हैं। निर्णय लेने में सम्भावित अवधारणाएँ काफी उपयोगी होती हैं। उदाहरणार्थ, यदि आप बी.काम. परीक्षा में अपने उत्तीर्ण होने की संभावना जानने के इच्छुक हैं तो आप पिछले दस वर्षों के उत्तीर्ण-प्रतिशत का अध्ययन करके इसका अनुमान लगा सकते हैं।

8 **प्राक्कल्पना (hypothesis) की सत्यता की जाँच करना:** प्राक्कल्पना की सत्यता की जाँच करने तथा नये सिद्धांतों के प्रतिपादन में सांख्यिकीय विधियाँ अत्यधिक उपयोगी होती हैं। उदाहरणार्थ, एक कम्पनी मलेरिया-नियंत्रण के लिए निर्मित एक नई दवाई की प्रभावकारिता को जानना चाहती है। वह एक सांख्यिकीय तकनीक का उपयोग कर इसे ज्ञात कर सकती है जिसको वर्ग परीक्षा (Chi-Square Test) कहते हैं।

9 **प्रामाणिक निष्कर्ष निकालना:** अवलोकित तथ्यों तथा प्रतिदर्श समंक के आधार पर समग्र की विशेषताओं के संबंध में अनुमान लगाने के लिए भी सांख्यिकीय विधियाँ उपयोगी होती हैं।

1.5 सांख्यिकी का महत्व

प्राचीन काल में सांख्यिकी केवल शासन - कला के विज्ञान के रूप में ही प्रयोग की जाती थी। प्रशासनिक कार्यों के लिए राज्य द्वारा जनसंख्या, जीवन एवं मृत्यु आदि विविध कार्यों संबंधी आँकड़े एकत्रित किए जाते थे। तथापि, हाल के वर्षों में, सांख्यिकी का क्षेत्र बढ़ गया है तथा सामाजिक तथा आर्थिक समस्याएँ भी इस के कार्यक्षेत्र में शामिल हो गई हैं। सांख्यिकीय तकनीकों में हुए विकास ने भी इसके क्षेत्र को विस्तृत कर दिया है। सांख्यिकी अब राज्य-प्रशासन का अंग मात्र ही न होकर आज लगभग सभी विज्ञानों जैसे—सामाजिक, भौतिक तथा प्राकृतिक को परिवेष्टित करती है। वास्तव में आज सांख्यिकी का प्रयोग विभिन्न क्षेत्रों, जैसे—कृषि, व्यवसाय एवं उद्योग, समाजशास्त्र, अर्थशास्त्र, जीवांकिकी (biometry) आदि में किया जाता है। अतः आजकल सांख्यिकी का उपयोग मानवीय क्रिया के प्रत्येक क्षेत्र में किया जाता है।

सांख्यिकी एवं राज्य

प्राचीन काल में राज्य-प्रशासन का कार्य केवल कानून और व्यवस्था बनाये रखने तक सीमित था। राज्य (सैनिक तथा राजस्व नीति निर्माण के उद्देश्य से) मानवशक्ति, अपराधों, आय तथा धन आदि संबंधी आँकड़े एकत्रित करते थे। परंतु कल्याणकारी राज्य की परिकल्पना के प्रादुर्भाव के साथ राज्य की भूमिका में भी विस्तार हुआ है। अतः समस्त विश्व में आर्थिक तथा अन्य नीतियाँ बनाने के लिए सरकारों द्वारा मूल्यों, उत्पादन, उपभोग, आय एवं व्यय आदि संबंधी सांख्यिकीय आंकड़ों का प्रयोग पर्याप्त मात्रा में किया जाता है। अपनी जनता का जीवन-स्तर ऊँचा करने के लिए, भारत जैसे विकासशील देश नियोजित आर्थिक

विकास की नीति अपना रहे हैं। इस उद्देश्य के लिए राज्य को अपने निर्णयों के लिए सांख्यिकीय आँकड़ों के सही तथा विश्वसनीय विश्लेषण को आधार बनाना चाहिए। उदाहरणार्थ, पंचवर्षीय योजनाओं का निर्माण करते समय विभिन्न नीतियों का निर्धारण करने के लिए सरकार को देश में कच्चे माल, पूँजीगत वस्तुओं तथा वित्तीय साधनों की उपलब्धता तथा आयु, लिंग, आय आदि के गुणों के आधार पर जनसंख्या के वितरण का ज्ञान होना चाहिए।

अर्थशास्त्र में सांख्यिकी

विभिन्न आर्थिक समस्याओं जैसे, उत्पादन, उपभोग, वितरण आदि के समाधान में सांख्यिकीय विश्लेषण अत्यधिक उपयोगी है। उदाहरणार्थ, उपभोग संबंधी समंकों के विश्लेषण से समाज के विभिन्न वर्गों द्वारा विभिन्न वस्तुओं के उपभोग के प्रारूप का ज्ञान हो सकता है। विभिन्न आर्थिक नीतियों के निर्धारण के लिए मूल्य, मजदूरी, उपभोग, बचत तथा विनियोग, आदि संबंधी समंक महत्वपूर्ण है। इसी प्रकार, आय की विषमता कम करने संबंधी नीति बनाने के लिए राष्ट्रीय आय एवं सम्पत्ति पर आँकड़े उपयोगी हैं। अर्थशास्त्र में सांख्यिकी के उपयोग के परिणाम स्वरूप अनेक आर्थिक सिद्धांत, जैसे ऐंजिल का उपभोग का नियम, आय-वितरण का नियम आदि बने हैं। आर्थिक नियोजन में सूचकांक, समय सारणी विश्लेषण, प्रतिगमन विश्लेषण आदि सांख्यिकीय तकनीकें महत्वपूर्ण हैं। उदाहरणार्थ, मजदूरों को महंगाई-भत्ता या बोनस देने के लिए उपभोक्ता मूल्य निर्देशांक का उपयोग किया जाता है। समय सारिणी विश्लेषण द्वारा माँग का पूर्वानुमान किया जा सकता है। अनेक आर्थिक परिकल्पनाओं के सत्यापन के लिए सांख्यिकीय समंकों का अधिकाधिक उपयोग किया जाने लगा है।

व्यवसाय तथा प्रबंध में सांख्यिकी

आकार विस्तार तथा बढ़ती हुई प्रतियोगिता के परिणामस्वरूप आधुनिक व्यावसायिक उद्यम की क्रियाएँ अधिक जटिल तथा अभियाचन करने वाली होती जा रही हैं। विशाल उद्यमों में स्वामित्व तथा प्रबन्ध के पृथ्क्करण के परिणामस्वरूप पेशेवर प्रबन्ध का उद्भव हुआ है। प्रबंधकीय निर्णय लेने की सफलता बहुत कुछ सही तथा सामयिक सूचनाओं पर निर्भर करती है जो सांख्यिकीय समंकों से प्राप्त होती है। अतः व्यवसाय तथा उद्योग की विभिन्न क्रियाओं जैसे, विक्रय, क्रय, उत्पादन, विपणन, वित्त आदि में सांख्यिकीय समंकों का उपयोग दिन-प्रतिदिन बढ़ता जा रहा है। सांख्यिकीय विधियाँ अब विपणि खोज, उत्पाद अनुसंधान, विनियोज़न नीतियों, निर्मित वस्तुओं की गुणवत्ता, आर्थिक पूर्वानुमान, अंकेक्षण तथा अनेक दूसरे क्षेत्रों में अधिकाधिक अपनायी जा रही है। प्रबन्धकों के समक्ष सभी समस्याओं में एक बात समान रहती है कि उन्हें अनिश्चितताओं की दशा में निर्णय लेने पड़ते हैं। इस प्रकार की परिस्थितियों से निपटने के लिए सांख्यिकीय विधियाँ तकनीकें प्रदान करती हैं। अतः वालिस तथा रॉबर्टस् का कथन, कि "अनिश्चितता की दशा में विवेकपूर्ण निर्णय लेने के लिए उपयोग किये जाने वाले विधि-समूह को सांख्यिकी कहते हैं", आश्चर्यजनक नहीं है।

बोध प्रश्न ख

1 सांख्यिकी के कार्य बताइए।

....

....

....

....

2 निम्नलिखित वक्तव्यों पर एक पंक्ति में संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

i) सांख्यिकी केवल जटिलताओं की सरलता प्रदान करने का कार्य करती है।

....

ii) सांख्यिकी अन्य विज्ञानों के नियमों के सत्यापन में सहायता प्रदान करती है।

....

iii) भविष्य में घटनाक्रम की अनिश्चितता के कारण, उनके अध्ययन में सांख्यिकी मुश्किल से ही कुछ सहायता प्रदान कर सकती है।

....

iv) सांख्यिकी के अभाव में नियोजन की कल्पना नहीं की जा सकती।

....

v) एक बड़े संस्थान में एक कार्मिक अधिकारी सांख्यिकी के ज्ञान के बिना एक व्यावहारिक कार्मिक योजना तैयार कर सकता है।

....

1.6 सांख्यिकी की परिसीमाएँ

हमने सांख्यिकी के महत्व तथा कार्यों का विवेचन किया है। अब हम सांख्यिकी की परिसीमाओं के विषय में परिचर्चा करेंगे। सांख्यिकीय विधियों की निम्नलिखित कुछ परिसीमाएँ हैं जिनको इन विधियों का उपयोग करते समय ध्यान में रखना चाहिए।

1 **सांख्यिकी केवल संख्यात्मक विशिष्टताओं पर विचार करती है:** सांख्यिकी संख्याओं में व्यक्त तथ्यों से संबंध रखती है। अतः वे तथ्य तथा समस्याएँ जो संख्याओं में व्यक्त नहीं की जा सकती, सांख्यिकी के क्षेत्र में नहीं आतीं। सुन्दरता, आँखों का रंग, बुद्धि आदि गुणात्मक लक्षण हैं, अतः प्रत्यक्ष रूप में इनका अध्ययन नहीं किया जा सकता। इन लक्षणों का अध्ययन केवल परोक्ष रूप से, विशिष्ट अंक निर्धारित करने के पश्चात् इन्हें संख्याओं में व्यक्त करके ही किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक व्यक्ति समूह के बौद्धिक-स्तर का अध्ययन "बौद्धिक-स्तर-भागफल" (Intellegence Quotients-IQS) का प्रयोग करके ही किया जा सकता है।

2) **सांख्यिकी व्यक्तिगत इकाइयों का अध्ययन नहीं करती:** सांख्यिकी का संबंध तथ्यों के समूह से होने के कारण, एक अकेली तथा पृथक संख्या सांख्यिकी नहीं समझी जा सकती। उदाहरणार्थ, सांख्यिकी के दृष्टिकोण से एक व्यक्ति का कद महत्वपूर्ण नहीं, परंतु एक व्यक्ति-समूह का औसत कद महत्वपूर्ण है। इस संदर्भ में आप सेक्रिस्ट द्वारा दी गई परिभाषा पुनः स्मरण कर सकते हैं।

3 **सांख्यिकीय नियम यथातथ्य नहीं होते:** सांख्यिकी के नियम प्राकृतिक विज्ञान के नियमों के समान यथातथ्य नहीं होते। वे कुछ परिस्थितियों में ही सत्य होते हैं तथा उन के सत्य होने के लिए हमेशा कोई आकस्मिक कारण जुड़ा रहता है। अतः उन पर आधारित निष्कर्ष केवल लगभग समीपवर्ती रहते हैं तथा एकदम सही एवं यथातथ्य नहीं होते। उनका सार्वभौमिक उपयोग नहीं किया जा सकता। भौतिकी तथा रसायनशास्त्र जैसे शुद्ध विज्ञानों के नियम प्रयोग में सार्वभौमिक होते हैं।

4 **सांख्यिकीय परिमाण एवं निष्कर्ष औसत रूप में सत्य होते हैं:** सांख्यिकीय विधियाँ किसी तथ्य तथा समस्या का औसत आचरण ही स्पष्ट करती हैं। अतः एक कम्पनी के कर्मचारियों की औसत आय किसी व्यक्ति विशेष की आय को स्पष्ट नहीं करेगी। अतः सांख्यिकीय परिणाम किसी समस्या या तथ्य के सामान्य मूल्यांकन का अध्ययन करने में ही उपयोगी हैं।

5 **सांख्यिकीय विधि किसी समस्या के अध्ययन की विभिन्न विधियों में से एक है:** एक समस्या का अध्ययन अनेक विधियों द्वारा किया जा सकता है। सांख्यिकीय विधि केवल उन विधियों में से एक है। सभी परिस्थितियों में सांख्यिकीय विधियाँ सर्वोत्तम समाधान या उत्तर प्रदान नहीं करतीं। प्रायः यह आवश्यक होता है कि एक समस्या का अध्ययन उसके सामाजिक परिवेश, जैसे – संस्कृति, धर्म आदि के संदर्भ में किया जाता है। अतः सांख्यिकीय निष्कर्षों को अन्य प्रमाणों द्वारा अनुपूरित करने की आवश्यकता पड़ती है।

6 सांख्यिकी का दुरूपयोग भी हो सकता है: विभिन्न सांख्यिकीय विधियों की अपनी परिसीमाएँ होती हैं। यदि उनका सावधानी से प्रयोग न किया जाए तो उनसे गलत परिणाम निकल सकते हैं। अतः सांख्यिकी की परिसीमाओं में से एक यह है कि गलत हाथों में इसका दुरुपयोग हो सकता है। यह दुरुपयोग आकस्मिक एवम् ऐच्छिक दोनों ही हो सकता है। अनेक सरकारी एजेंसियाँ तथा शोध संस्थान अपने दृष्टिकोण को सिद्ध करने के लिए सांख्यिकीय आँकड़ों के मिथ्या रूप प्रस्तुत करने के लिए लालायित हो जाते हैं। उदाहरणार्थ, यदि आपको यह बताया जाए कि एक विशेष वर्ष में स्त्री चालकों द्वारा शहर में कार दुर्घटनाओं की संख्या 10 थी, तथा पुरूष चालकों द्वारा यह संख्या 40 थी तब इस सूचना के आधार पर आप इस निष्कर्ष पर पहुँच सकते हैं कि स्त्रियाँ सुरक्षित वाहन चालक हैं। यदि आप यह निष्कर्ष निकालते हैं, तो आप इस सूचना का गलत अर्थ लगा रहे हैं। सही निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए आपके लिए दोनों प्रकार के वाहन-चालकों की कुल संख्या का ज्ञान होना आवश्यक है।

1.7 सांख्यिकी पर अविश्वास (Distrust of Statistics)

सांख्यिकी विज्ञान की उपयोगिता तथा महत्व होने के बावजूद इसे अविश्वास की नजर से देखा जाता है। प्रायः इसे ऐसे व्यक्तियों द्वारा बदनाम किया जाता है जो इसके वास्तविक उद्देश्य और परिसीमाओं को नहीं जानते हैं। प्रायः हमें निम्न प्रकार के कथन सुनने को मिलते हैं, ''झूठ की तीन श्रेणियाँ होती हैं – झूठ, सफेद झूठ तथा सांख्यिकी।'' ''सांख्यिकी कुछ भी सिद्ध कर सकती है।'' ''सांख्यिकी कुछ भी सिद्ध नहीं कर सकती''। ''सांख्यिकी सबसे प्रथम श्रेणी का झूठ है''। ये कथन सांख्यिकी में अविश्वास की अभिव्यक्ति हैं। सांख्यिकी में अविश्वास से हमारा तात्पर्य सांख्यिकी समंकों, सांख्यिकीय विधियों तथा ज्ञात किए गये निष्कर्षों में हमारे विश्वास की कमी से है। आप यह प्रश्न पूछ सकते हैं कि सांख्यिकी में अविश्वास क्यों होता है? सांख्यिकी में अविश्वास के कुछ महत्वपूर्ण कारण निम्नलिखित हैं:

1 संख्याओं पर आधारित तर्क अधिक विश्वासोत्पादक होते हैं। परंतु व्यक्ति विशेष की इच्छानुसार संख्याओं में हेर-फेर किया जा सकता है। किसी विशेष दृष्टिकोण को सिद्ध करने के लिए, कभी-कभी तर्कों की गलत आँकड़ों द्वारा पुष्टि की जाती है।

2 भले ही सही संख्याओं का प्रयोग किया गया हो, वे अधूरी हो सकती हैं तथा उन्हें पाठक को भ्रमित करने के उद्देश्य से एक विशेष प्रकार से प्रस्तुत किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, साफ मौसम के दिनों की अपेक्षा कोहरे के मौसम के दिनों में यातायात दुर्घटनाएँ कम पाई जाती हैं। इससे यह निष्कर्ष लगाया जा सकता है कि कोहरे के मौसम में वाहन चलाना अधिक सुरक्षित है। यह निष्कर्ष गलत है। सही निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए हमें दोनों प्रकार के मौसम में यातायात की तीव्रता के अन्तर को ध्यान में रखना होगा।

3 सांख्यिकीय आँकड़ों को देखकर उसकी गुण कोटि का पता नहीं लगा सकते। कभी-कभी अनजाने में भी अधूरे या अशुद्ध आँकड़ों का प्रयोग किया जाता है जिससे गलत निष्कर्ष प्राप्त होते हैं।

4 सांख्यिकीय विधियों की अपनी अलग परिसीमाएँ हैं। अतः अनुसंधानकर्ता को उनका सावधानी से प्रयोग करना चाहिए। परंतु कभी-कभी सांख्यिकीय विधियाँ उन व्यक्तियों के द्वारा प्रयोग की जाती हैं जिन्हें उनका कोई भी ज्ञान नहीं होता या फिर बहुत कम ज्ञान होता है। परिणामस्वरूप, सही तथा पूर्ण समंक होने पर भी गलत विधियाँ अपनाने के कारण गलत निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। यह सांख्यिकीय विधियों का दोष नहीं है, परंतु उन व्यक्तियों का है जो इनका उपयोग करते हैं।

एक उदाहरण लेकर हम इस विषय का उपसंहार कर सकते हैं। माना कि एक बच्चा चाकू से अपना हाथ काट लेता है। उस बच्चे के संरक्षक चाकू को दोष देना प्रारंभ करते हैं। यहाँ दोष चाकू का नहीं है बल्कि बच्चे का है जो चाकू का दुरुपयोग करता है। यह ध्यान देने योग्य बात है कि सांख्यिकी न तो कुछ सिद्ध करती है और न ही किसी बात को असत्य प्रमाणित करती है। सांख्यिकी तो केवल मात्र एक साधन (अर्थात् निष्कर्ष पर पहुँचने की विधि) है, जिसका सावधानीपूर्वक प्रयोग किया जाना चाहिए तथा केवल उन्हीं व्यक्तियों द्वारा किया जाना चाहिए जिन्हें इस विषय का ज्ञान हो।

1.8 सारांश

सांख्यिकी शब्द का उपयोग या तो बहुवचन के अभिप्राय में किया जा सकता है और या एकवचन के अभिप्राय में। बहुवचन में सांख्यिकी शब्द का अर्थ तथ्यों के संख्यात्मक विवरण या आँकड़ों या समंकों से है। सांख्यिकी कहलाने के लिए संख्यात्मक समंकों में निम्नलिखित लक्षण होने चाहिएः (1) ये तथ्यों के समूह होने चाहिए, (2) ये संख्यात्मक तथ्य समूह या आँकड़े अनेक कारणों द्वारा प्रभावित होने चाहिए, (3) ये संख्याओं में व्यक्त किए जाने चाहिए, (4) उनका आगणन या आकलन उचित-स्तर की परिशुद्धता को ध्यान में रखकर किया जाना चाहिए, (5) समंकों को पूर्वनिर्धारित उद्देश्य के लिए उचित ढंग से एकत्रित किया जाना चाहिए तथा (6) आँकड़ों को परस्पर संबंधित रूप में प्रस्तुत किया जाना चाहिए। एकवचन में जब सांख्यिकी शब्द का प्रयोग किया जाता है तो इस का तात्पर्य उस ज्ञान-समूह से है जिसमें (1) समंकों के संकलन, (2) समंकों के वर्गीकरण तथा सारणीयन, (3) समंकों के प्रस्तुतीकरण, (4) समंकों के विश्लेषण, तथा (5) समंकों के निर्वचन करने संबंधी निधियाँ तथा तकनीकें समझाई जाती हैं।

सांख्यिकीय विधियाँः (1) विवरणात्मक सांख्यिकी, तथा (2) निष्कर्षात्मक सांख्यिकी में विभाजित की जा सकती हैं। सांख्यिकीय विधियाँ (1)तथ्यों को सही रूप में प्रस्तुत करने, (2) जटिल तथा दुःसाध्य समंकों को सरल बनाने)(3) तुलना करने हेतु तकनीक प्रदान करने, (4) विभिन्न क्षेत्रों में नीति-निर्धारण करने, (5) विभिन्न तथ्यों के परस्पर संबंध को ज्ञात करने, (6) भविष्य का पूर्वानुमान लगाने, (7) घटना की अनिश्चितता को मापने, (8) सांख्यिकीय परिकल्पना का सत्यापन करने, तथा (9) प्रामाणिक निष्कर्ष ज्ञात करने में सहायक होते हैं।

सांख्यिकीय विधियाँ विभिन्न क्षेत्रों जैसे – राज्य प्रशासन, प्रबन्ध अर्थशास्त्र, व्यवसाय प्रबन्ध आदि में उपयोगी होती हैं। आज के व्यवसाय के प्रबन्ध करने की जटिलताओं में उत्तरोत्तर वृद्धि के परिणामस्वरुप निर्णय लेने की प्रक्रिया में सांख्यिकी विधियाँ बहुत उपयोगी तथा सुविधाजनक साबित हो रही हैं। फिर भी सांख्यिकीय प्रसाधनों या विधियों के प्रयोग की कुछ परिसीमाएँ हैं। सांख्यिकी न तो गुणात्मक तथ्यों का अध्ययन करती है और न ही व्यक्तिगत इकाइयों का। सांख्यिकीय नियम यथातथ्य नहीं होते और उनका दुरुपयोग किया जा सकता है, विशेष रूप से जो सांख्यिकीय विधियों से अनभिज्ञ हैं, के द्वारा उनके अंधाधुंध प्रयोग के परिणामस्वरुप लोगों का, इस पर से विश्वास उठ गया है।

1.9 शब्दावली

विवरणात्मक सांख्यिकी: आँकड़ों के लक्षणों के संक्षिप्तीकरण तथा वर्णन करने की विधि तथा तकनीक।
निष्कर्षात्मक सांख्यिकी: ऐसी विधियाँ जो अवलोकित समंक समूह (Observed data) अर्थात् निदर्शन के आधार पर वृहत समंक समूह या समग्र (Unobserved data or population) के लक्षणों के संबंध में निष्कर्ष ज्ञात करने में सहायक होती हैं।
सांख्यिकीय समंक या आँकड़ेः संख्यात्मक या मात्रात्मक रूप में प्रस्तुत सूचना को सांख्यिकीय समंक या आँकड़ा कहा जाता है। तथ्यों के सभी संख्यात्मक विवरण सांख्यिकी नहीं हैं परंतु सभी सांख्यिकीय समंक तथ्यों के संख्यात्मक विवरण हैं। समंक कहे जाने के लिए संख्यात्मक विवरणों में कुछ लक्षण होने आवश्यक हैं।
सांख्यिकीय विधियाँ: विधियों तथा सिद्धांतों का एक ऐसा समूह जो संख्यात्मक समंकों के संकलन, संक्षिप्तीकरण, वर्णन, विश्लेषण तथा विवेचन में सहायक होता है।
सांख्यिकी: बहुवचन में प्रयोग किए जाने पर इस शब्द का तात्पर्य तथ्यों या समंकों के संख्यात्मक विवरण से है। एकवचन में प्रयोग किए जाने पर इसका तात्पर्य विधियों के उस समूह से है जो समंकों का संकलन, विश्लेषण तथा विवेचन करने के साधन प्रदान करती हैं।

1.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 1 i) हाँ ii) नहीं iii) नहीं
iv) हाँ

2 i) नहीं। उनकी परिभाषा आँकड़ों से संबंधित है।
ii) हाँ
iii) हाँ। प्रत्यक्ष रूप से नहीं, उनके परिमाणन के पश्चात्।
iv) नहीं। कुछ अन्य पहलू भी हैं।
v) हाँ
vi) नहीं। वे निदर्शन से प्राप्त निष्कर्षों से समग्र संबंधी परिणाम ज्ञात करने की विधियाँ हैं।

ख 2 i) नहीं। कुछ अन्य कार्य भी हैं।
ii) हाँ। संबद्ध समंक (आँकड़े) संकलित करके।
iii) नहीं। सम्भाविता सिद्धांत तथा पूर्वानुमान की विधियाँ सहायक होती हैं।
iv) हाँ। बहुत से समंकों (आँकड़ों) की आवश्यकता होती है।
v) नहीं। सांख्यिकीय विधियों का उपयोग किया जाएगा।

1.11 स्वपरख प्रश्न

1 "सांख्यिकी तथ्यों का संख्यात्मक विवरण है, परंतु संख्याओं में व्यक्त सभी तथ्य सांख्यिकी नहीं कहलाते", विवेचना कीजिए।
2 सांख्यिकी की परिभाषा कीजिए तथा सांख्यिकी के विभिन्न कार्यों की विवेचना कीजिए।
3 सांख्यिकी के महत्व की विवेचना कीजिए तथा सांख्यिकी की परिसीमाओं को स्पष्ट कीजिए।
4 सांख्यिकी के अविश्वास से आप क्या समझते हैं? क्या सांख्यिकी विज्ञान इस के लिए जिम्मेदार है?

टिप्पणी: इन प्रश्नों से आपको इस इकाई को भली प्रकार समझने में सहायता मिलेगी। इन प्रश्नों के उत्तर लिखने का प्रयास कीजिए। परंतु विश्वविद्यालय को इन के उत्तर न भेजें। ये प्रश्न केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 2 सांख्यिकीय सर्वेक्षण का संगठन

इकाई की रूपरेखा

2.0 उद्देश्य

2.1 प्रस्तावना

2.2 सांख्यिकीय सर्वेक्षण के चरण

2.3 सांख्यिकीय आँकड़ों के स्रोत

- 2.3.1 प्राथमिक आँकड़े और द्वितीयक आँकड़े
- 2.3.2 प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण की विधियाँ
- 2.3.3 द्वितीयक आँकडों के स्रोत

2.4 अनुसंधानों के प्रकार

- 2.4.1 अनुसंधान के प्रकार को प्रभावित करने वाले तत्व
- 2.4.2 अनुसंधानों के विभिन्न प्रकार

2.5 प्रतिचयन विधियाँ

- 2.5.1 संभाविता प्रतिचयन विधियाँ
- 2.5.2 असंभाविता प्रतिचयन विधियाँ

2.6 सांख्यिकीय नियमितता का नियम

2.7 बृहद संख्याओं के जड़त्व का नियम

2.8 सांख्यिकीय इकाई

- 2.8.1 एक अच्छी सांख्यिकीय इकाई के लक्षण
- 2.8.2 इकाइयों के प्रकार

2.9 परिशुद्धता की मात्रा

- 2.9.1 समुचित परिशुद्धता का महत्व
- 2.9.2 मिथ्या परिशुद्धता की संकल्पना

2.10 सारांश

2.11 शब्दावली

2.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

2.13 स्वपरख प्रश्न

2.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे किः

- सांख्यिकीय सर्वेक्षण से सम्बद्ध चरणों का वर्णन कर सकें
- प्राथमिक आँकड़ों और द्वितीयक आँकड़ों में भेद कर सकें और उन के स्रोतों की पहचान कर सकें
- विभिन्न प्रकार के अनुसंधानों के प्रमुख लक्षणों का वर्णन कर सकें
- सांख्यिकीय नियमितता का नियम और बृहत् संख्याओं की जड़त्व के नियम, की व्याख्या कर सकें
- सांख्यिकीय इकाई और परिशुद्धता की मात्रा के महत्व को जान सकें ।

2.1 प्रस्तावना

पिछली इकाई में, आपने, सांख्यिकी के अर्थ और उसके क्षेत्र के बारे में पढ़ा । हमने सांख्यिकीय के महत्व और उसकी सीमाओं की भी चर्चा की है । इस इकाई में, आप सांख्यिकीय सर्वेक्षण की व्यवस्था करने के विभिन्न चरणों, आँकड़ों के स्रोतों, अनुसंधानों के विभिन्न प्रकार, और उनसे संबंधित कुछ नियमों का अध्ययन करेंगे । आप कुछ अन्य पहलुओं जैसे सांख्यिकीय इकाई और परिशुद्धता मात्रा की भी जानकारी प्राप्त करेंगे, जिन्हें सर्वेक्षण करते समय, ध्यान में रखना होता है ।

2.2 सांख्यिकीय सर्वेक्षण के चरण

जब हम एक सांख्यिकीय सर्वेक्षण (statistical survey) करते हैं, तो हमें कुछ चरणों को क्रमागत रूप (sequential order) में सम्पन्न करना होता है। जब तक हम इन चरणों को व्यवस्थित रूप में सम्पन्न नहीं करते, हमें सर्वेक्षण का उपयोगी परिणाम नहीं मिल सकेगा। सांख्यिकीय सर्वेक्षण से संबंधित महत्वपूर्ण चरणों को, एक अनुक्रम के रूप में, नीचे प्रस्तुत किया गया है:

1 समस्या को परिभाषित करना

2 उद्देश्य और क्षेत्र निर्धारित करना

3 आँकड़ों के संग्रहण (collection of data) की प्रारंभिक तैयारियाँ
   - i) आँकड़ों का स्रोत (source of data)
   - ii) अनुसंधान का प्रकार (type of enquiry)
   - iii) सांख्यिकीय इकाई (statistical unit)
   - iv) परिशुद्धता की मात्रा (degree of accuracy)

4 आँकड़ों का संग्रहण (collection of data)

5 आँकड़ों का सम्पादन (editing of data)

6 आँकड़ों का वर्गीकरण और सारणीयन (classification and tabulation of data)

7 आँकड़ों का विश्लेषण (analysis of data)

8 आँकड़ों का निर्वचन (interpretation of data)

9 रिपोर्ट लिखना (report writing)

आइये अब हम इन सभी चरणों के बारे में, संक्षेप में विचार करें।

1 **समस्या को परिभाषित करना:** प्रत्येक सांख्यिकीय सर्वेक्षण में, सबसे पहले हमें अन्वेषणीय समस्या का, बड़े ही स्पष्ट शब्दों में वर्णन करना होता है। समस्या की स्पष्ट परिभाषा करना परम महत्वपूर्ण है, क्योंकि इससे सुसंगत आँकड़ों को पहचानने में सहायता मिलती है। जैसा कि आप जानते हैं, सांख्यिकी (विज्ञान), संख्यात्मक रूप में व्यक्त, तथ्यों के समूह से संबंधित है। इसलिए, समस्या को परिभाषित करते समय, हमें मात्रात्मक मापन (quantitative measurement) की सम्भावना को सुनिश्चित करना चाहिए।

2 **उद्देश्य और क्षेत्र निर्धारित करना:** समस्या परिभाषित करने के पश्चात्, अगला चरण सर्वेक्षण का उद्देश्य और क्षेत्र निर्धारित करना होता है। यदि सर्वेक्षण का उद्देश्य स्पष्टतः बताया गया हो, तो यह अभीष्ट सूचना एकत्रित करने में पथ-प्रदर्शक का कार्य करता है। यदि उद्देश्य का यथार्थतः वर्णन किया जाए, तो सर्वेक्षण के दौरान उत्पन्न होने वाली कई समस्याओं से निपटने के लिए, एक समान उपगम (uniform approach) अपना सकते हैं। सर्वेक्षण के क्षेत्र से अभिप्राय है: कार्यक्षेत्र और उसकी परिधि, अध्ययन काल, या समष्टि (population or items) या वे मद जिन के बारे में सूचना प्राप्त करनी है, संग्रह करने योग्य सूचना का प्रकार, इत्यादि। ये सभी, अन्वेषणीय समस्या और अध्ययन के उद्देश्य पर आश्रित हैं। अंतिम परिणाम की परिशुद्धता, उपरोक्त सभी तत्वों के ठीक-ठीक निर्धारण पर निर्भर होती है। अतः आपको अवश्यमेव यथार्थ रूप में सर्वेक्षण निर्धारित करना चाहिए।

3 आँकड़े-संग्रहण के लिए प्रारम्भिक तैयारियाँ: आँकड़ों के संग्रहण में प्रवृत्त होने से पूर्व, आपको निम्न प्रारंभिक तैयारियाँ करनी चाहिए।

   i) **आँकड़ों का स्रोत:** आपको उन स्रोतों के बारे में, निश्चय करना चाहिए, जहाँ से आँकड़ों को संग्रहीत करना है। आँकड़ों के संग्रहण के लिए, दो उपागम हैं: (1) आप स्वयं आँकड़े एकत्रित करें, या (2) आप पूर्व-प्रकाशित स्रोतों से आँकड़ें लें। उन आँकड़ों को, जो अनुसंधानकर्ता, स्वयं, पहली बार संग्रहीत करता है, प्राथमिक आँकड़ें (primary data) कहते हैं। दूसरी ओर, यदि

आप, किसी अन्य व्यक्ति द्वारा संग्रहीत आँकड़ों का उपयोग करते हैं, तो ऐसे आँकड़ों को द्वितीयक आँकड़े (secondary data) कहते हैं। आप बाद में इसी इकाई में आँकड़ों के इन दो प्रकारों के बारे में, विस्तार से अध्ययन करेंगे।

ii) **अनुसंधान का प्रकार:** आपको किस प्रकार का अनुसंधान करना है यह निश्चय करना चाहिए। सांख्यिकीय अनुसंधान विभिन्न प्रकार के होते हैं, जैसे संगणना (census) या प्रतिदर्श (sample), प्रारम्भिक या आवृत्तीय (initial or repetitive), प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष, नियमित या तदर्थ (regular or ad-hoc), गोपनीय या अगोपनीय, सरकारी या गैर सरकारी इत्यादि। प्रस्तावित अध्ययन के लिए, अधिकतम उपयुक्त। अनुसंधान के प्रकार का निश्चय करते समय, निम्न तत्वों को ध्यान में रखना चाहिए। अनुसंधान का उद्देश्य और क्षेत्र, वद्धहित पक्ष। ग्राहक (client), आँकडों का स्रोत, इत्यादि। आप इसके बारे में, बाद में, इसी इकाई में, विस्तार से अध्ययन करेंगे।

iii) **सांख्यिकीय इकाई को परिभाषित करना:** आपको, उस सांख्यिकीय इकाई (या इकाइयों) को परिभाषित करना चाहिए जिसके लिए आँकड़ों को एकत्रित करना है। इकाई उपयुक्त और अनेकार्थता रहित होनी चाहिए। यदि सांख्यिकीय इकाई, स्पष्टतः परिभाषित हो, तो हम गलत आँकड़ों के संग्रहण की संभावना से बच सकते हैं। एक बार, सांख्यिकीय इकाई निश्चित करने के पश्चात् समस्त अन्वेषण में, उसी इकाई का प्रयोग करना चाहिए। आप इसी इकाई में बाद में सांख्यिकीय इकाई के बारे में, विस्तार से अध्ययन करेंगे।

iv) **परिशुद्धता की मात्रा:** आपको, आँकड़ों के संग्रहण में, अभीष्ट परिशुद्धता की मात्रा भी निश्चित करनी चाहिए। सांख्यिकीय अनुसंधान में परम परिशुद्धता (absolute accuracy) यदि यह प्राप्य भी हो, तब भी कभी वांछनीय नहीं होती। ऐसा इसलिए है क्योंकि इसके प्रयत्न में, परिशुद्धता के अभीष्ट स्तर में प्रचुर वृद्धि के बिना ही, समय और धन अधिक व्यय होता है। परंतु आपको, संग्रहणीय आँकड़ों के प्रकार और अनुसंधान के प्रयोजन को ध्यान में रखते हुए, एक समुचित (reasonable) परिशुद्धता स्तर प्राप्त करने का प्रयत्न करना चाहिए। हम बाद में, इसी इकाई में, परिशुद्धता की मात्रा के बारे में, विस्तार से विवेचन करेंगे।

4 **आँकड़ों का संग्रहण:** इन प्रारंभिक तैयारियों को पूरा करने के पश्चात् अगले चरण में, आँकड़ों का वास्तविक संग्रहण करना होता है। आँकड़ों के संग्रहण की कई विधियाँ हैं। आप, उनमें से किसी का भी प्रयोग कर सकते हैं। विभिन्न उपादानों (factors) जैसे अध्ययन की प्रकृति, अन्वेषण का उद्देश्य और क्षेत्र, वित्तीय साधनों की प्राप्यता, समय की उपलब्धता, आदि का विचार करने के पश्चात् ही, आँकड़ों के संग्रहण की उपयुक्त विधि का निर्णय करना चाहिए। बाद में, इसी इकाई में आँकड़ों के संग्रहण की विधियों पर, विस्तार से विचार करेंगे।

5 **आँकड़ों का सम्पादन:** आँकड़ों के संग्रहण के पश्चात् अगला चरण एकत्रित सूचना की संवीक्षा (scrutiny) करना है। इसे आँकड़ों का सम्पादन करना (editing of data) कहते हैं। ऐसा करना, इसलिए आवश्यक है, क्योंकि अकसर संग्रहीत आँकड़े अशुद्धियों और त्रुटियों से युक्त होते हैं। परंतु सम्पादन के समय, हमें आँकड़ों में फेर बदल करने का प्रयत्न नहीं करना चाहिए।

6 **आँकड़ों का वर्गीकरण और सारणीयन:** संग्रहीत और सम्पादित आँकड़ों के समूह को, व्यवस्थित कर, एक सारणी (table) या सचित्र (chart/diagram) या रेखाचित्र (graphs) के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। इन्हें एक संहत (compact) रूप में, जिसे आवृत्ति बंटन (frequency distribution) कहते हैं, भी प्रस्तुत करते हैं। इनके द्वारा, हम आँकड़ों की प्रमुख विशेषताओं को ज्ञात करने में समर्थ होते हैं। आँकड़ों के वर्गीकृत और सारणीबद्ध होने पर, उनकी तुलना करना सरल हो जाता है।

7 **आँकड़ों का विश्लेषण:** अगले चरण में, आँकड़ों का, विभिन्न सांख्यिकीय मापों, जैसे माध्य अनुपात (averages), प्रतिशतता (percentages) और गुणांकों (coefficients) द्वारा विश्लेषण किया जाता है। अव्यवस्थित आँकड़ों के एक बड़े समूह में केवल आँकड़ों की तुलना करना सम्भव नहीं होता। परंतु जब इनको एक ऐसी संख्या के रूप में प्रस्तुत किया जाए जो पूर्ण रूप से आँकड़ों को एक व्यापक विचार प्रदान करती हो, तो तुलना करना सम्भव हो जाता है। ऐसे विभिन्न सांख्यिकीय माप हैं, जो आँकड़ों के विभिन्न लक्षणों का संक्षिप्त रूप में वर्णन करते हैं। आप बाद में इसी इकाई में, इनमें से कुछ विधियों के बारे में, विस्तार से अध्ययन करेंगे। सांख्यिकीय विधियों की एक लम्बी सूची में से, आपको केवल उन मापों का चयन करना चाहिए जो सर्वेक्षण के प्रयोजन में उपयुक्त हों।

8 **आँकड़ों का निर्वचन:** आँकड़ों का विश्लेषण करने के पश्चात्, हमें निष्कर्ष (inferences) निकालना होता है। इसे बड़ी सावधानी से करना होता है। अन्यथा, भ्रामक निष्कर्ष निकलने का भय रहता है। हम निर्वचन (interpretation) द्वारा ही, सर्वेक्षण के परिणामों को, व्यापक अर्थ दे सकते हैं। उपयुक्त निर्वचन द्वारा, संबंधों और प्रक्रियाओं को उभारा जा सकता है जो सर्वेक्षण का आधार हैं।

9 रिपोर्ट लिखना: सांख्यिकीय सर्वेक्षण का अंतिम चरण रिपोर्ट लिखना है। जब तक लिखित रिपोर्ट प्रस्तुत न की जाए, सर्वेक्षण कार्य अधूरा रहता है। यदि सर्वेक्षण के परिणामों को, प्रभावी रूप में, जन-साधारण तक न पहुँचाया जाए, तो सर्वेक्षण का प्रयोजन, ठीक से, पूरा नहीं होता। सर्वेक्षण के परिणामों का ज्ञान के सामान्य भंडार में अपरिवर्तनीय ढंग से समावेश होना चाहिए। ये सभी तथ्य, सर्वेक्षण रिपोर्ट लिखने के महत्व को दशाति हैं।

बोध प्रश्न क

1 सांख्यिकीय सर्वेक्षण करने का क्या प्रयोजन है?

....

....

....

....

2 सांख्यिकीय सर्वेक्षण करने के प्रमुख चरणों की सूची लिखिये?

....

....

....

....

3 क्या आंकड़ों के संग्रहण की प्रारंभिक तैयारियों के रूप में सांख्यिकीय सर्वेक्षण से संबंधित निम्न चरण, सम्पन्न हो सकते हैं? उत्तर "हाँ" या "नहीं" में दीजिए।

i) आँकड़ों का सम्पादन
ii) अनुसंधान का प्रकार
iii) परिशुद्धता का स्तर
iv) आँकड़ों का विश्लेषण
v) सारणीयन

2.3 सांख्यिकीय आँकड़ों के स्रोत

जैसा कि आप जानते हैं समस्या परिभाषित करने और अनुसंधान के उद्देश्य तथा क्षेत्र को निर्धारित करने के पश्चात्, अगला चरण है, उन स्रोतों के बारे में निश्चय करना, जिनसे आंकड़ों का संग्रहण करना है। आप यह भी जानते हैं कि स्रोतों के विचार से, आँकड़ों को दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है: (1) प्राथमिक आँकड़े (primary data) और (2) द्वितीयक आँकड़े (secondary data)। आइये, अब आँकड़ों के इन दो वर्गों के बारे में, विस्तार से विचार-विमर्श करें।

2.3.1 प्राथमिक आँकड़े और द्वितीयक आँकड़े

उन आँकड़ों को, जिनका संग्रहण, आप पहली बार, अपने प्रयोग के लिए करते हैं, प्राथमिक आँकड़े कहते हैं। यदि आप आँकड़ों का संग्रहण, पहली बार, मौलिक आँकड़ों के रूप में करते हैं तो ऐसे आंकड़ों के स्रोत

को प्राथमिक स्रोत (original data) कहते हैं। इसके विपरीत, यदि आप किसी अन्य व्यक्ति द्वारा संग्रहीत, वर्गीकृत और विश्लेषित आँकड़ों का प्रयोग करते हैं, तो ऐसे आँकड़ों को द्वितीयक आँकड़े (secondary data) कहते हैं। द्वितीयक आँकड़े के स्रोत को द्वितीयक स्रोत कहते हैं। उदाहरण के लिए, एक देश में राज्य द्वारा एकत्रित, राष्ट्रीय आय संबंधित आँकडे, उस राज्य के लिए प्राथमिक आँकड़े हैं, परंतु वही आँकडे, उन अनुसंधानकर्ताओं के लिए, जो बाद में उनका प्रयोग करते हैं, द्वितीयक आँकडे बन जाते हैं। इस प्रकार हम कह सकते हैं कि प्राथमिक आँकड़े, कच्ची सामग्री के रूप में होते हैं, जिनका, सांख्यिकीय विधियों द्वारा, विश्लेषण किया जाता है। जब कि, द्वितीयक आँकड़े, तैयार माल के रूप में होते हैं, क्योंकि इन्हें किसी न किसी रूप में सांख्यिकीय विधियों के प्रयोग द्वारा प्रतिपादित किया जा चुका होता है।

यदि आपने, अपने सर्वेक्षण के लिए, प्राथमिक आँकड़ों को एकत्रित करने का निश्चय कर लिया है, तो आपको उन स्रोतों की पहचान करनी होगी जिन से आप आँकड़े एकत्रित कर सकते हैं। बड़े अनुसंधानों जैसे जनगणना में, सर्वेक्षणीय व्यक्तियों की संख्या बहुत अधिक होती है, परंतु छोटे अनुसंधानों, जैसे "किसी नगर में, औद्योगिक श्रमिकों का निर्वाह-व्यय ज्ञात करना", में सर्वेक्षणीय व्यक्तियों की संख्या कम हो जाती है। यदि आपने द्वितीयक आँकड़ों का प्रयोग करने का निश्चय किया है, तो आप के लिए यह आवश्यक है कि आप उन आँकड़ों का संपादन और सूक्ष्म परीक्षण करें। अन्यथा, संभव हो सकता है कि इनमें वांछित परिशुद्धता स्तर न हो या ये आपके प्रयोजन के लिए उपयुक्त या पर्याप्त न हों। यदि आप अपने सर्वेक्षण में प्रयोग करने से पूर्व, द्वितीयक आँकड़ों का संपादन और संवीक्षण नहीं करें तो सम्भव है कि आप के अनुसंधान के परिणाम, पूर्णतया शुद्ध न हों। इसलिए, द्वितीयक आँकड़ों को सदैव ही बड़ी सावधानी से प्रयोग करना चाहिए। बाउले (Bowley) लिखते हैं: **"प्रकाशित आँकड़ों के अभिप्राय और सीमाओं को ज्ञात किए बिना, इनके प्रत्यक्ष मूल्य को मान्यता देना कभी सुरक्षित नहीं होता"**।

2.3.2 प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण की विधियाँ

प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण की कई विधियाँ हैं। उनमें से प्रमुख हैं: i) प्रेक्षण (observation), ii) साक्षात्कार (interview), iii) प्रश्नावली (questionnaire), iv) अनुसूची (schedules)। आइये इनका संक्षिप्त अध्ययन करें।

i) **प्रेक्षण:** इस विधि में, घटना, जब वह वस्तुतः घटित हो, के गहन अध्ययन और व्यक्तिगत प्रेक्षण द्वारा, सूचना एकत्रित करते हैं।
ii) **साक्षात्कार:** इस विधि में, वांछित सूचना, उन व्यक्तियों से व्यक्तिगत साक्षात्कार द्वारा प्राप्त करते हैं, जिनके पास, अंवेषणाधीन समस्या के बारे में ज्ञान होने की अपेक्षा की जाती है।
iii) **प्रश्नावली:** इस विधि में, विभिन्न स्रोतों से डाक द्वारा अन्वेषणाधीन समस्या से संबंधित प्रश्नों की एक सूची को, अंतर्विष्ट करने वाली, प्रश्नावली भेजकर सूचना एकत्रित करते हैं। प्रश्नावली, संबंधित व्यक्तियों को डाक द्वारा भेज देते हैं, और उत्तर देने वालों से प्रार्थना करते हैं कि वे प्रश्नों के उत्तर लिखकर प्रश्नावली को वापिस भेंज दें।
iv) **अनुसूची:** अनुसूची विधि में, प्रश्नावली को, प्रगणकों द्वारा भेजते हैं। ये प्रगणक, सूचना देने वालों की, उत्तर लिखने में सहायता करते हैं। परिस्थितियों और व्यक्तियों, धन और समय की प्राप्यता के आधार पर प्राथमिक आँकड़े एकत्रित करने के लिए इन चार विधियों में से, किसी का भी प्रयोग कर सकते हैं।

2.3.3 द्वितीयक आँकड़ों के स्रोत

द्वितीयक आँकड़ों का संग्रहण, निम्न दो स्रोतों से कर सकते हैं: (i) प्रकाशित स्रोत और (ii) अप्रकाशित स्रोत। प्रकाशित आँकड़ों के स्रोत, सामान्यतः देशी और विदेशी सरकारों, अंतर्राष्ट्रीय निकायों (जैसे, संयुक्त राष्ट्र संगठन, विश्व बैंक, इत्यादि) व्यापारिक संघों, वाणिज्य-मंडलों, बैंकों और स्टाक एक्सचेंजों तकनीकी और व्यापारिक पत्रिकाओं, पुस्तकों, समाचार पत्र और पत्रिकाओं के सरकारी प्रकाशन इत्यादि होते हैं। अप्रकाशित आँकड़ों के स्रोत विभिन्न होते हैं, और ऐसी सामग्री प्रायः विद्वानों, अनुसंधानकर्ताओं, श्रम ब्यूरो और व्यापारिक संगमों, इत्यादि से मिल सकती है।

2.4 अनुसंधानों के प्रकार

सांख्यिकीय सर्वेक्षण की व्यवस्था करते समय, आँकड़ों के स्रोतों का निश्चय करने के पश्चात आपको अनुसंधान के प्रकार के बारे में निश्चय करना होता है। अनुसंधान विभिन्न प्रकार के होते हैं, जैसे संगणना या निदर्शन, मौलिक या पुनरावृत्ति, प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष और उन्मुक्त या गोपनीय। इन प्रकारों के बारे में विचार-विमर्श करने से पूर्व, आइये उन उपादानों की व्याख्या करें, जो अनुसंधान के प्रकार के बारे में निर्णय को प्रभावित करते हैं।

2.4.1 अनुसंधान के प्रकार को प्रभावित करने वाले तत्व

अनुसंधान के प्रकार के बारे में निश्चय कई बातों द्वारा प्रभावित होता है। उनकी व्याख्या निम्नलिखित ढंग से की जा सकती है:

i) **सर्वेक्षण का उद्देश्य और क्षेत्र:** यह उन उपादानों में से एक है जो अनुसंधान के प्रकार को निर्धारित करते हैं। उदाहरणतः मान लीजिए, आपके अनुसंधान का उद्देश्य है: पश्चिमी बंगाल में, धान की कृषि आधीन भूमि का कुल क्षेत्रफल ज्ञात करना। इस स्थिति में अनुसंधान का सबसे उपयुक्त प्रकार वह होगा जिसमें पूर्णगणना (complete enumeration) की जाए। यदि उद्देश्य, पश्चिमी बंगाल में, प्रति हैक्टेयर उपज ज्ञात करना हो, तो आप भिन्न-भिन्न स्थानों पर खेतों के कुछ प्रतिदर्श ले कर प्रति हैक्टेयर उपज का अनुमान लगा सकते हैं। ऐसी स्थिति में पूर्ण गणना की आवश्यकता नहीं है। एक प्रतिदर्शी सर्वेक्षण द्वारा बहुत कुछ परिशुद्ध (accurate) परिणाम प्राप्त हो सकते हैं। इसी प्रकार, यदि अनुसंधान का क्षेत्र विस्तृत है (अर्थात मदों की एक बड़ी संख्या से सूचना एकत्रित करनी हो) तो आप एक प्रकार का अनुसंधान अपनाएंगे और यदि क्षेत्र संकीर्ण हो, तो किसी अन्य प्रकार का अनुसंधान अपनायेंगे।

ii) **सर्वेक्षण का संचालन कौन करता है:** अनुसंधान के प्रकार को निर्धारित करते समय एक अन्य विचारणीय उपादान है, अनुसंधान का संचालन कौन करता है। सर्वेक्षण का संचालन किस के द्वारा किया जाना है। राज्य संगठन या किसी व्यक्ति द्वारा सर्वेक्षण के आधार पर ही आँकड़े इकट्ठे करने की सुविधाएँ भी अलग-अलग प्रकार की होती है। इस प्रश्न के उत्तर के अनुसार आँकड़ों के संग्रहण के साधन, विभिन्न होते हैं। राज्य अधिक धन व्यय कर सकता है और सूचना प्रदान करने के लिए, (स्रोतों को) विवश कर सकता है। यदि अनुसंधान, राज्य की बजाय, किसी संगठन या संस्था द्वारा किया जा रहा हो, तो वे नैतिक प्रभाव का प्रयोग कर सकते हैं और लोगों को आवश्यक सूचना देने के लिए राजी कर सकते हैं। ऐसी स्थितियों में, अनुसंधान का प्रकार, अवश्य ही भिन्न होगा, और यदि सर्वेक्षण का संचालन किसी व्यक्ति द्वारा, स्वयं अपने लिए किया जा रहा हो, तो अनुसंधान का प्रकार और भी भिन्न होगा क्योंकि व्यक्तियों के निजी साधन सीमित होते हैं।

iii) **वित्तीय उलझाव:** अनुसंधान के प्रकार के बारे में निर्णय वित्तीय उलझावों (financial implications) से भी प्रभावित होता है। जैसा कि आप जानते हैं सांख्यिकीय सर्वेक्षण के संचालन के लिए धन की आवश्यकता होती है। बड़े पैमाने के सर्वेक्षण के लिए, छोटे पैमाने के सर्वेक्षण की तुलना में अधिक धन की आवश्यकता होती है। हम सभी जानते हैं कि सर्वेक्षण का संचालन करने वाले विभिन्न संगठनों या व्यक्तियों के वित्तीय स्रोत भिन्न होते हैं। एक गैर सरकारी संगठन की तुलना में, एक राज्य बहुत अधिक धन व्यय कर सकता है और एक व्यक्ति की तुलना में, एक गैर सरकारी संगठन अधिक व्यय कर सकता है। अतः अनुसंधान के प्रकार के बारे में निश्चय करते समय, हमें इसके लिए आवश्यक वित्तीय स्रोतों के बारे में विचार करना होता है।

iv) **आँकड़ों के स्रोत:** एक अन्य उपादान जो अनुसंधान के प्रकार प्रभावित करता है, वह स्रोत है जहाँ से सांख्यिकीय सूचना प्राप्त की जाती है। यदि प्राथमिक आंकड़ों का संग्रहण करना है, (अर्थात् आँकड़ों को मौलिक रूप से एकत्रित करना है) तो अनुसंधान का प्रकार उस से भिन्न होगा जो द्वितीयक आँकड़ों को एकत्रित करने के लिये आदर्श हो। ऐसा इसलिए है क्योंकि प्राथमिक, आँकड़ों के सम्बन्ध में, अनुसंधान के उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए हमें विभिन्न शर्तों, इकाइयों आदि को परिभाषित करना होता है, परंतु द्वितीयक आँकड़ों का प्रयोग करते समय, इसकी आवश्यकता नहीं होती।

2.4.2 अनुसंधानों के विभिन्न प्रकार

जैसा कि पहले विवेचन किया जा चुका है, अनुसंधान विभिन्न प्रकार के होते हैं। आइये, अब इन में से प्रत्येक के बारे में, संक्षेप में विवेचन करें।

संगणना या प्रतिदर्श अनुसंधान (Census or Sample Enquiry): आपको ज्ञात होगा कि अनुसंधान के किसी क्षेत्र में समस्त इकाइयाँ, एकनिष्ठ या समष्टि (universe or population) का गठन करती हैं। सांख्यिकी में, समष्टि से अभिप्राय केवल मानव जनसंख्या नहीं होता। इससे अभिप्राय होता है, वे सभी मद; जो किसी अध्ययन विशेष से संबंधित हों। **संगणना अनुसंधान में, समस्त समष्टि का सर्वेक्षण करना होता है जबकि प्रतिदर्श अनुसंधान में, समष्टि के केवल एक भाग का सर्वेक्षण किया जाता है।**

संगणना अनुसंधानः जैसा कि पहले बताया गया है कि समष्टि में सभी मदों की सम्पूर्ण गणना को 'संगणना अनुसंधान' (census enquiry) कहते हैं। इस अनुसंधान में यह माना जा सकता है कि जब सभी मदों से सूचना एकत्रित की जाती है तो संयोग के लिए कोई स्थान नहीं रहता और उच्चतम परिशुद्धता प्राप्त होती है। परंतु, वास्तव में आवश्यक नहीं कि यह बात पूर्ण रूप से सत्य हो। इस प्रकार के अनुसंधान में, पूर्वग्रह (bias) नामक एक विभ्रम (error) होता है जो प्रेक्षणों की संख्या के अनुसार बढ़ता जाता है। इसके अतिरिक्त, इस विभ्रम की जाँच के लिए, पुनसर्वेक्षण या प्रतिदर्श जाँच के सिवाय और कोई विधि नहीं है। आप इकाई 3 में, पूर्वग्रह के बारे में और अधिक जानकारी प्राप्त करेंगे। इसके अतिरिक्त संगणना अनुसंधान में, समय, धन और शक्ति बहुत अधिक व्यय होती है। इसलिए, सम्बद्ध साधन शामिल होने के कारण बड़े पैमाने पर संगणना अनुसंधान की व्यवस्था करना कठिन हो जाता है। व्यवहारतः कभी-कभी तो इस प्रकार का अनुसंधान व्यक्तियों की पहुँच से बाहर होता है। कदाचित केवल राज्य ही पूर्ण संगणना संपन्न करा सकते हैं। राज्य भी, इस प्रकार के अनुसंधान को बहुत कम स्थितियों में अपनाते हैं। उदाहरण के लिए, भारत सरकार, दस वर्षों में एक बार, जनगणना करवाती है। इसके अतिरिक्त बहुधा समष्टि में प्रत्येक मद की जाँच करना सम्भव भी नहीं होता। कई बार, समस्त समष्टि के केवल एक भाग के अध्ययन से ही पर्याप्त परिशुद्ध परिणाम प्राप्त करना सम्भव होता है। ऐसी स्थिति में संगणना सर्वेक्षण की कोई उपयोगिता नहीं होती।

प्रतिदर्श अनुसंधानः जैसा कि आप जानते हैं **प्रतिदर्श अनुसंधान (sample enquiry) में, समष्टि के केवल एक भाग का ही अध्ययन किया जाता है।** जब क्षेत्र-अध्ययन किया जाता है तो पूर्व परिचर्चा के अनुसार समय, लागत सुविधा, इत्यादि के विचार से प्रतिदर्श सर्वेक्षण का ही चयन किया जाता है। प्रतिदर्श सर्वेक्षण में यह मूल धारणा होती है कि प्रतिदर्श के लिए चयन किए गए मद, समष्टि का वास्तविक रूप में प्रतिनिधित्व करते हैं। अतः प्रतिदर्श मदों के अध्ययन द्वारा अन्वेषक समाष्टि के विशिष्ट लक्षणों को, बिना किसी पूर्वग्रह के अनुमानित करने में सफल होता है और इस प्रकार, वैध तथा विश्वसनीय परिणाम प्राप्त होते हैं। प्रतिदर्श सर्वेक्षण के निम्नलिखित लाभ हैं:

i) प्रतिदर्श अध्ययन पर संगणना अध्ययन की तुलना में, कम व्यय होता है, और सापेक्षतः अधिक तीव्र गति से परिणाम प्राप्त होते हैं।
ii) इससे हम अधिक परिशुद्ध परिणाम प्राप्त करने में समर्थ होते हैं, क्योंकि इसका संचालन करने वाले प्रायः प्रशिक्षित और अनुभवी होते हैं।
iii) जब समष्टि बहुत अधिक विस्तीर्ण हो तो आँकड़ों के संग्रहण की प्रतिदर्श सर्वेक्षण विधि सर्वाधिक उपयुक्त विधि है।
iv) जब एक परीक्षण के लिए अध्ययनाधीन मदों का विनाश आवश्यक हो, तो ऐसी स्थिति में, प्रतिदर्श सर्वेक्षण बहुत ही उपयुक्त है। उदाहरणतः भौतिकीय विज्ञानों में, आप प्रत्येक बार, रसायनों का नया प्रतिदर्श लेते हैं।
v) इसकी सहायता से, हम प्रतिचयन के कारण होने वाले विभ्रमों को आकलित करने में भी समर्थ होते हैं।

प्रतिदर्श सर्वेक्षण के इन लाभों के बावजूद, हमें स्मरण रखना चाहिए कि यदि समिष्ट छोटी हो, तो प्रतिदर्श सर्वेक्षण करना उपयोगी नहीं होता। वस्तुतः अनुंसधान के प्रकार (अर्थात प्रतिदर्श अनुसंधान या संगणना अनुसंधान) के विषय में निर्णय उद्देश्य, क्षेत्र, अनुसंधान का स्वरूप, साधनों की प्राप्यता, इत्यादि विभिन्न उपादानों पर आश्रित है।

मौलिक अथवा पुनरावृत्तीय अनुसंधान (Original or Repititive Enquiry)

मौलिक अनुसंधानः उस अनुसंधान् को कहते हैं, जो पहली बार सम्पन्न किया गया हो, जबकि **पुनरावृत्तीय अनुसंधान** उस अनुसंधान को कहते हैं, जिसका संचालन, पूर्व सर्वेक्षणों के क्रम में किया जा रहा हो। मौलिक सर्वेक्षण (जिसे प्रारम्भिक सर्वेक्षण भी कहते हैं) की स्थिति में, आँकड़ें संग्रहण करने की किसी भी विधि को अपनाने की स्वतंत्रता होती है, परंतु पुनरावृत्तीय सर्वेक्षण में, सामान्यतः पुरानी विधि का ही प्रयोग जारी रखा जाता है। केवल नई परिस्थिति के उपयुक्त बनाने के लिए इसमें फेरबदल कर सकते हैं। परंतु पुनरावृत्तीय अनुसंधान में, विभिन्न पदों की परिभाषाओं में कोई परिवर्तन नहीं करना चाहिए, क्योंकि ऐसा करने से तुलनाएँ गलत हो जाएंगी।

खुला अथवा गोपनीय अनुसंधान (Open or Confidential Eaquiries)

गोपनीय अनुसंधान उस अनुसंधान को कहते हैं, जिसके परिणाम गोपनीय रखे जाएँ और सामान्य जनता को न बताए जाएँ। परंतु **खुले अनुसंधान** की स्थिति में, परिणाम सामान्य जनता के लिए खुले होते हैं। खुले और गोपनीय अनुसंधानों में, प्रतिपादन के तरीके (modes of treatment) भिन्न होते हैं। राज्य या गैर सरकारी संगठनों द्वारा, और व्यक्तियों द्वारा भी संचालित अधिकतर अनुसंधान, अगोपनीय (खुले) प्रकार के होते हैं। परंतु कभी-कभी निजी निकाय, जैसे विनिर्माता संघ, व्यापारिक संघ, आदि सूचना एकत्रित करते हैं, जिसका ब्यौरा वे अपने सदस्यों तक ही सीमित रखते हैं और अन्य किसी को नहीं बताते।

प्रत्यक्ष अथवा अप्रत्यक्ष अनुसंधान (Direct or Indirect Enquiry)

प्रत्यक्ष अनुसंधान वह होता है, जिसमें, आँकड़े की सीधे मात्रात्मक माप की जा सके। उदाहरण के लिए, ऊँचाई, भार, आय, इत्यादि उपादानों को, मात्रात्मक रूप में माप सकते हैं। **अप्रत्यक्ष अनुसंधान** वह होता है जिसमें सीधा मात्रात्मक मापन संभव नहीं होता। उदाहरण के लिए, प्रज्ञा, दक्षता, ईमानदारी, इत्यादि जैसे उपादानों को सीधे मात्रात्मक रूप में नहीं माप सकते। अप्रत्यक्ष अनुसंधान की स्थिति में, हमें अध्ययनाधीन समस्या से सम्बद्ध सभी उपादानों पर विचार करना होता है, चाहे हम उनको मात्रात्मक रूप में न माप सकते हों। परंतु उन उपादानों को, जिन का सीधे परिमाणन (quantification) न कर सके हों (मात्रात्मक रूप में) अप्रत्यक्ष रूप से मापना चाहिए। उदाहरण के लिए, विद्यार्थियों की प्रज्ञा का अध्ययन करने के लिए, हम, संबंधित विद्यार्थी समूह के द्वारा प्राप्त अंकों का अध्ययन कर सकते हैं।

नियमित अथवा तदर्थ अनुसंधान (Regular or Adhoc Enquiry)

नियमित अनुसंधान वह होता है जिसमें आँकड़ों का संग्रहण, एक कालावधि में, नियमित अंतरालों पर किया जाता है जबकि तदर्थ अनुसंधान में, आँकड़ों का संग्रहण, जब भी आवश्यक हो बिना किसी नियमितता के किया जाता है।

सरकारी, अर्द्ध सरकारी या गैर सरकारी अनुसंधान (Official, Semi-Official or Non-Official Enquiry)

जब सर्वेक्षण का संचालन राज्य की ओर से किया गया है, तो इसे सरकारी अनुसंधान कहते हैं। जब सर्वेक्षण, एक ऐसे निकाय द्वारा किया जा रहा हो, जिसे राज्य संरक्षण प्राप्त हो तो इसे **अर्द्ध-सरकारी अनुसंधान** कहते हैं। उस अनुसंधान को, जिस का संचालन निजी निकायों या व्यक्तियों द्वारा किया जा रहा हो, **गैर सरकारी** या **निजी अनुसंधान** कहते हैं। इन तीन प्रकार के अनुसंधानों में उपलब्ध साधन भिन्न होंगे। सरकारी अनुसंधान की स्थिति में, लोगों को सूचना देने के लिए बाध्य किया जा सकता है। अर्द्ध-सरकारी अनुसंधान में, लोगों से, सूचना देने के लिए, विनती कर सकते हैं, और सापेक्षतः सरलता से सूचना प्राप्त की जा सकती है। परंतु गैर सरकारी अनुसंधान में, अन्वेषक को आँकड़ों के संग्रहण में, उसके बड़े प्रयत्नों के बावजूद, बड़ी कठिनाई का सामना करना पड़ सकता है।

2.5 प्रतिचयन विधियाँ (Sampling Methods)

जैसा कि पहले बताया गया है, सर्वेक्षण दो प्रकार के होते हैः (i) संगणना सर्वेक्षण, जिसमें समस्त समूह का सर्वेक्षण करना होता है, और (ii) प्रतिदर्श सर्वेक्षण, जिसमें समूह के कुछ चयन किए गए प्रतिनिधि मदों का अध्ययन किया जाता है। प्रतिदर्श सर्वेक्षण में, इस प्रकार चयन किए गए, प्रतिनिधि मदों को सामूहिक

रूप से एक प्रतिदर्श (sample) कहते हैं। प्रतिदर्श के लिए, मदों का चयन करने की तकनीक को प्रायः प्रतिचयन विधि (sampling method) कहते हैं। प्रतिचयन विधियाँ कई हैं। उनको सामान्यतः दो वर्गों में विभाजित करते हैं: (i) संभाविता (probability) प्रतिचयन विधियाँ और (ii) असंभाविता (non-probability) प्रतिचयन विधियाँ।

2.5.1 संभाविता प्रतिचयन विधियाँ (Probability Sampling Methods)

संभावित प्रतिचयन विधि में, समष्टि के प्रत्येक मद की प्रतिदर्श में सम्मिलित किए जाने की एक प्रायिकता या संयोग होता है। इस प्रकार, इस विधि में, समष्टि के प्रत्येक मद का प्रतिदर्श के लिए चयन किए जाने का समान संयोग होता है। इस प्रायिकता प्रतिचयन की विभिन्न विधियाँ हैं, जैसे:

1	सरल यादृच्छिक प्रतिचयन	(Simple random sampling)
2	व्यवस्थित प्रतिचयन	(Systematic sampling)
3	स्तरित प्रतिचयन	(Stratified sampling)
4	गुच्छ प्रतिचयन	(Cluster sampling)
5	क्षेत्र प्रतिचयन	(Area sampling)
6	बहुस्तरीय प्रतिचयन	(Multi-stage sampling)

अब इन विधियों में से प्रत्येक का संक्षिप्त वर्णन करेंगें।

1 **सरल यादृच्छिक प्रतिचयनः** इस विधि को, संयोग या लॉटरी प्रतिचयन विधि भी कहते हैं। इस विधि में, समष्टि के प्रत्येक मद का, प्रतिदर्श में सम्मिलित किए जाने का समान संयोग होता है और सभी सम्भव प्रतिदर्श के चयन किए जाने की समान प्रायिकता होती है। जब समष्टि एक समांग (homogeneous) समूह हो, तो इस विधि का सर्वाधिक प्रयोग किया जाता है। प्रतिदर्श इकाइयों को अभिज्ञात करने के लिए, समान्यतः यादृच्छिक संख्याओं (random numbers) का प्रयोग करते हैं।

2 **व्यवस्थित प्रतिचयनः** इस विधि में, समष्टि को वर्णमाला के क्रम (alphabetical order) क्रमिक क्रम (serial order) इत्यादि में, व्यवस्थित किया जाता है। तत्पश्चात् नियत अंतरालों पर स्थापित, प्रतिदर्श इकाइयों का चयन किया जाता है। इस प्रकार, आप एक सूची में से प्रत्येक चौदहवाँ नाम चुन सकते हैं, एक गली के एक ओर के प्रत्येक दसवें मकान का चयन कर सकते हैं इत्यादि। इस विधि में, प्रारम्भ करने के लिए पहली इकाई का चयन यादृच्छिक संख्याओं के द्वारा करके यादृच्छिकता तत्व (element of randomness) का प्रवेश किया जाता है। इस प्रकार, इस विधि में, चयन प्रक्रिया का प्रारम्भ समष्टि की सूची में से एक यादृच्छिक बिंदु का चयन करने से होता है और इकाइयों का चयन तब तक करना होता है जब तक कि (इकाइयों की) वांछित संख्या प्राप्त न हो जाए।

3 **स्तरित प्रतिचयनः** इस विधि का प्रयोग, सामान्यतः उस स्थिति में करते हैं जब समष्टि एक समांग समूह न हो। इस विधि में, समष्टि का, कुछ समांग उप-समष्टियों (homogeneous sub-populations) या स्तरों (strata) में विभाजित करते हैं। ऐसा करते समय, परस्पर व्याप्तता को दूर रखने के लिए, सावधानी बरतनी चाहिए। स्तरीकरण के पश्चात् प्रतिदर्श मदों का, यादृच्छिक रूप में, प्रत्येक स्तर से समानुपाती या ममानता के आधार पर चयन करते हैं। आइये, इस विधि को स्पष्ट रूप से समझने के लिए, एक उदाहरण लें। मान लीजिए, हम एक विश्वविद्यालय और उसके सम्बद्ध और संघटक कालिजों के कर्मचारियों की आर्थिक दशा का सर्वेक्षण करना चाहते हैं। कर्मचारियों के विभिन्न वर्ग हैं (i) प्रिन्सिपल और प्रोफेसर, (ii) रीडर, (iii) लेक्चरर, (iv) प्रशासकीय स्टॉफ और (v) चर्तुथ श्रेणी के कर्मचारी। इनमें से प्रत्येक समूह, न्यूनाधिक समांग है। इसलिए, इन पाँच वर्गों को "स्तर" कहेंगे। इन पाँचों समूहों में से प्रत्येक से, एक उपयुक्त माप के प्रतिदर्श का यादृच्छिक रूप से, चयन कर सकते हैं। चयन की इस विधि को स्तरित प्रतिचयन कहते हैं।

4 **गुच्छ प्रतिचयनः** इस विधि में, समष्टि को कुछ विषमांग समूहों में बाँट देते हैं, जिन्हें गुच्छ कहते हैं। और फिर सरल यादृच्छिक प्रतिचयन विधि द्वारा कुछ समूहों (या गुच्छों) का चयन किया जाता है। सर्वेक्षण कार्य सम्पन्न करने के लिए, चयन किए गए गुच्छों के सभी मदों का अध्ययन किया जाता है। आइये, उसी उदाहरण पर विचार करें जिसकी स्तरित प्रतिचयन के निदर्श उदाहरण के रूप में परिचर्चा की थी। प्रत्येक सम्बद्ध या संघटक कालिज और विश्वविद्यालय के भिन्न विभागों में, (i) प्रिंसिपल,

प्रोफेसर, (ii) रीडर, (iii) लैक्चरर, (iv) प्रशासकीय स्टाफ और, (v) चतुर्थ श्रेणी के कर्मचारी । ये सभी पांचों वर्ग होते हैं । अतः आर्थिक स्थिति की दृष्टि से, प्रत्येक संस्था के कर्मचारी एक विषमांग समूह बनाते हैं । इसलिए, प्रत्येक संस्था को एक "गुच्छ" कह सकते हैं । आप सरल यादृच्छिक विधि द्वारा कुछ संस्थाओं का चयन करते हैं और फिर चयन की गई संस्थाओं के सभी कर्मचारियों का सर्वेक्षण करते हैं । इस विधि को गुच्छ प्रतिचयन विधि कहते हैं ।

5 **क्षेत्र प्रतिचयन:** यह विधि बहुत कुछ गुच्छ प्रतिचयन विधि जैसी है । इस विधि का प्रयोग प्रायः उस स्थिति में करते हैं जबकि सर्वेक्षण के अंतर्गत आने वाला भौगोलिक क्षेत्र बहुत विस्तीर्ण हो । इस प्रतिचयन विधि में सर्वप्रथम भौगोलिक क्षेत्र को छोटे क्षेत्रों में विभाजित किया जाता है और फिर इन छोटे क्षेत्रों की एक उपयुक्त संख्या का, यादृच्छिक रूप में चयन किया जाता है । तत्पश्चात् इन चयन किए गए छोटे क्षेत्रों के सभी मदों का अध्ययन और परीक्षण करके सर्वेक्षण कार्य को सम्पन्न किया जाता है ।

6 **बहुस्तरीय प्रतिचयन:** यह विधि काफी बड़े भौगोलिक क्षेत्र में विस्तीर्ण बड़े सर्वेक्षणों, तथा ऐसे सर्वेक्षणों के उपयुक्त हैं जिसकी समष्टि विषमांग हो । उदाहरण के लिए, एक सर्वेक्षण में आप सारे देश से कुछ कुटुम्बों का चयन करना चाहते हैं । इस बहुस्तरीय प्रतिचयन विधि में, पहले चरण में कुछ राज्यों का यादृच्छिक रूप में, चयन हो सकता है । दूसरे चरण में, प्रत्येक प्रतिदर्श राज्य से, कुछ जिलों का, यादृच्छिक रूप से चयन किया जा सकता है । तीसरे चरण में, प्रत्येक चुने गए जिले से, कुछ नगरों का चयन किया जा सकता है । अंततः प्रत्येक चुने गए नगर से, कुछ कुटुम्बों का यादृच्छिक रूप से, चयन किया जा सकता है । इस प्रकार, अंतिम प्रतिदर्श के निर्माण के लिये चार चरणों में स्तरीकरण सम्पन्न किया जाता है । यह ध्यान रहे कि इस बहुस्तरीय प्रतिचयन में, समष्टि के प्रत्येक मद के चयन होने का संयोग तो है, परंतु यह आवश्यक नहीं कि यह संयोग (प्रायिकता), सभी मदों के लिए समान हो ।

2.5.2 असंभाविता प्रतिचयन विधियाँ (Non-probability Sampling Methods)

यह विधि, प्रतिदर्श बनाने के लिए, समष्टि के विशेष मदों के सविचार (purposive) चयन से सम्बद्ध है । इसका तात्पर्य यह है कि यदि अन्वेषक के विचार में, कुछ इकाइयाँ समष्टि का प्रतिनिधित्व नहीं करती तो ऐसी इकाइयों को प्रतिदर्श में सम्मिलित होने का समान संयोग प्रदान नहीं किया जाता । इसीलिए, इस विधि को असंभाविता प्रतिचयन विधि कहते हैं । इस वर्ग में निम्नलिखित विधियाँ हैं:

1 **सुविधा प्रतिचयन (Convenience sampling)**: जब आप प्रतिदर्श के मदों का, समष्टि से, पहुँच में सुविधा के आधार पर, चयन करते हैं, तो इस प्रक्रिया को **सुविधा प्रतिचयन** कहते हैं । उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि हम पैट्रोल उपभोक्ताओं से आँकड़े एकत्रित करना चाहते हैं । हम, अपनी पहुँच के कुछ पैट्रोल पम्पों का चयन कर सकते हैं और फिर उन्हीं व्यक्तियों का, जो वहाँ पैट्रोल खरीदते हैं, साक्षात्कार कर सकते हैं । यह, पैट्रोल ग्राहकों के सुविधा प्रतिदर्श का एक उदाहरण होगा ।

2 **विवेक प्रतिचयन (Judgement sampling)**: जब प्रतिनिधि प्रतिदर्श बनाने के लिए, प्रतिदर्श मदों का चयन, अन्वेषक के निजी विवेक द्वारा किया जाता है, तो हम इसे विवेक प्रतिचयन कहते हैं । विवेक प्रतिचयन का उपयोग, प्रायः गुणात्मक अनुसंधान सर्वेक्षण में किया जाता है, जहाँ हमारा उद्देश्य, परिकल्पनाएं (hypotheses), विकसित करना होता है न कि बड़ी समष्टियों का समान्यीकरण (generalisation)

3 **अभ्यांश प्रतिचयन (Quota Sampling)**: यह अप्रायिकता प्रतिचयन का एक अन्य प्रकार है । इस विधि के अंतर्गत समष्टि को पहले कुछ समांग समूहों में विभाजित किया जाता है, और साक्षात्कारियों को, प्रत्येक समूह का एक निश्चित अभ्यांश आबंटित कर दिया जाता है । प्रतिदर्श मदों का वास्तविक चयन, साक्षात्कारी के निर्णय पर छोड़ दिया जाता है । प्रत्येक समूह में अभ्यांश का आकार, प्रायः समष्टि में उस समूह के परिणाम का समानुपाती होता है ।

ऊपर दिए गए विवेचन से आप समझ गए होंगे कि प्रतिचयन की अनेक विधियाँ हैं । आप, उनमें से, अपने अनुसंधान के उपयुक्त किसी भी विधि को अपना सकते हैं । और यदि आप, यादृच्छिक प्रतिचयन का प्रयोग करें तो सामान्यतः व्यक्तिगत निर्णय के कारण, प्रतिदर्शी मदों के चयन में प्रवेश करने वाली त्रुटियों

को समाप्त किया जा सकता है। इस स्थिति में, प्रतिचयन विभ्रम का आकलन भी किया जा सकता है। प्रतिचयन विभ्रमों को आकलित करने की कुछ विधियाँ हैं, जो इस पाठ्यक्रम के क्षेत्र से बाहर हैं। सविचार प्रतिचयन उस स्थिति में वांछनीय है, जब समष्टि छोटी हो और इसके एक ज्ञात लक्षण का गहन अध्ययन करना अभीष्ट हो। यादृच्छिक प्रतिचयन के अतिरिक्त अन्य विधियों का प्रयोग केवल सुविधा और कम व्यय आदि, कारणों से ही किया जा सकता है। अतः अनुसंधान की प्रकृति और क्षेत्र तथा अन्य संबंधित उपादानों जैसे समय, धन, स्टाप, सुविधा, इत्यादि पर विचार करने के पश्चात् ही प्रतिचयन विधि के विषय में विनिश्चय किया जाना चाहिए।

2.6 सांख्यिकीय नियमितता का नियम (Law of Statistical Regularity)

सांख्यिकी नियमितता का नियम हमें बताता है कि समष्टि से, मदों के यादृच्छिक चयन द्वारा एक प्रतिनिधि प्रतिदर्श किये जाने की काफी संभावना है। इस प्रकार, यह सिद्धांत हमें यह बताता है कि समष्टि से यादृच्छिक रूप में, चुने गए प्रतिदर्श के संघठन और लक्षण औसतन वही होंगे जो कि समष्टि के हैं। उदाहरण के लिए यदि एक स्कूल में 700 लड़के और 300 लड़कियाँ हों, तो 100 विद्यार्थियों के यादृच्छिक चयन में, लगभग 70 लड़के और 30 लड़कियाँ होंगी। विलोमतः हम यह भी कह सकते हैं कि यदि एक स्कूल से 100 विद्यार्थियों के यादृच्छिक चयन में, 70 लड़के और 30 लड़कियाँ हों तो यह निष्कर्ष निकालना तर्क-हीन न होगा कि स्कूल के 1000 विद्यार्थियों में लगभग 700 लड़के और 300 लड़कियाँ होंगी। इस स्थिति में, 100 मदों के अध्ययन से प्राप्त परिणाम, 1,000 मदों के लिए लागू किए गए हैं, और ठीक यही प्रतिचयन का प्रयोजन है। सांख्यिकीय नियमितता का यह नियम तभी प्रभावी होता है जब निम्न दो शर्तें पूरी हो जाएँ:

i) प्रतिदर्श के लिए, मदों का चयन, यादृच्छिक होना चाहिए। इसका अभिप्राय यह है कि समष्टि के प्रत्येक मद का, प्रतिदर्श में सम्मिलित किए जाने का संयोग समान हो।
ii) प्रतिदर्श में सम्मिलित करने के लिए, मदों की अभीष्ट संख्या, उचित और पर्याप्त रूप में बड़ी होनी चाहिए, ताकि प्रतिदर्श पर्याप्त रूप में प्रतिनिधित्व करें।

इस प्रकार, यदि समष्टि में से, एक साधारणतः बड़े परिमाण के प्रतिदर्श का यादृच्छिक रूप में चयन किया जाए, तो यह प्रायः निश्चित है कि औसतन इस प्रकार लिए गए प्रतिदर्श के वही लक्षण होगें, जैसे कि समष्टि के हैं।

2.7 बृहत् संख्याओं के जड़तव का नियम (Law of Inertia of Large Numbers)

बृहत् संख्याओं के जड़त्व का नियम, सांख्यिकीय नियमितता के नियम का, एक उपप्रमेय है जिसकी चर्चा हमने ऊपर की है। प्रतिदर्श के परिमाण और उसकी परिशुद्धता में, एक संबंध है। इसका कारण, इस तथ्य में है कि बृहत् संख्याओं में, प्रतिपूरक (compensatory) त्रुटियों के होने का संयोग अधिक होता है। दूसरे शब्दों में, बड़े प्रतिदर्श से संग्रहीत किए गए आँकड़ों में, छोटे प्रतिदर्शों से संग्रहीत किए गए आँकड़ों की अपेक्षा अधिक स्थिरता होती है। उदाहरण के लिए, यदि एक सिक्के को 40 बार उछाला जाए, तो आशा की जाती है कि चित्त 20 बार प्रकट होंगे। परंतु वस्तुतः उछालने पर, हो सकता है कि चित्त 25 बार प्रकट हों और पट्ट केवल 15 बार। यदि सिक्के को आगे और उछाला जाए, तो इसके विपरीत परिस्थिति भी उत्पन्न हो सकती है। यदि सिक्के को 1,000 बार उछाला जाए, तो यह बिल्कुल सम्भव है, कि 500 चित्त और 500 पट्ट प्रकट हो। ऐसा इसलिए है क्योंकि जैसे-जैसे सिक्के के उछालों की संख्या उत्तरोत्तर अधिक बड़ी होती जाती है, वैसे-वैसे बहुधा विभ्रम (यथार्थ और प्रत्याशित में अंतर) विपरीत दिशाओं में उपस्थित होते जाते हैं और इस प्रकार परस्पर कट जाते हैं। उपरोक्त उदाहरण में, ऐसे उछालों की संख्या जितनी बड़ी होगी, उतनी ही अधिक, विभ्रमों के परस्पर कटने की सम्भावना होगी। इस आधार पर ही हम कहते हैं कि बड़ी संख्याओं में जड़त्व होता है। सरल शब्दों में, इसका अर्थ यह है कि बड़ी संख्याएँ अधिक "अचर" होती है। एक दिये गए जिले में, धान के उत्पादन में, प्रति वर्ष अधिक परिवर्तन हो सकता है, परंतु सारे राज्य के उत्पादन में, अधिक परिवर्तन नहीं होगा, क्योंकि यदि कुछ जिलों में, फसल

सामान्य से अधिक हो, तो यह ठीक सम्भव है कि अन्य जिलों में, यह सामान्य से कम हो। इस प्रकार, राज्य स्तर पर, उत्पादन स्थिर होगा। इसी प्रकार, समस्त देश के उत्पादन आँकड़ों में, प्रति वर्ष बहुत थोड़ा परिवर्तन होगा। इसी घटना को, ''बृहत् संख्याओं का जड़त्व'' कहते हैं।

परंतु इस चर्चा से, हमें यह निष्कर्ष नहीं निकालना चाहिए कि ''बृहत् संख्याओं के जड़त्व का नियम'', समय व्यतीत होने के साथ, आँकड़ों में किसी परिवर्तन की अनुमति नहीं देता। इसका अभिप्राय केवल यह है कि बृहत् संख्याओं में कोई तीव्र या महत्वपूर्ण उच्चावचन नहीं होते। बड़ी संख्याओं में, उच्चावचन धीमे और क्रमिक होते हैं। जैसे-जैसे मदों की संख्या बड़ी होती जाती है, वैसे-वैसे प्रत्याशित मान से, समानुपाती विचलन छोटे होते हैं।

बोध प्रश्न ख

1 द्वितीयक आँकड़े प्राप्त करने के कुछ स्रोतों के नाम लिखिए।

....

....

....

....

....

2 प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण की कुछ विधियाँ बताइये।

....

....

....

....

....

3 सरल यादृच्छिक प्रतिचयन किसे कहते हैं? इसके प्रमुख लाभ क्या है?

....

....

....

....

....

4 बताइए कि निम्नलिखित प्रतिचयन विधियाँ, प्रायिकता प्रतिचयन के उदाहरण हैं या नहीं। उत्तर ''हाँ'' या ''नहीं'' में दीजिए।

i) अभ्यांश प्रतिचयन ....

ii) स्तरित प्रतिचयन ....

iii) क्षेत्र प्रतिचयन ....

iv) विवेक प्रतिचयन ....

5 बताइये कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य

i) संख्यिकीय नियमितता नियम, इस कल्पना पर आधारित है कि प्रतिदर्श चयन के लिए, सुविधा प्रतिचयन विधि अपनायी गयी है। ....

ii) बड़ी संख्यिाओं का जड़त्व नियम बताता है कि बड़ी संख्याएँ सापेक्षतः स्थिर होती हैं। ....

iii) बृहत् संख्याओं का जड़त्व नियम, आँकड़ों में, समय व्यतीत होने के साथ, किसी परिवर्तन की अनुमति नहीं देता। ....

iv) स्तरित प्रतिचयन उस स्थिति में प्रयोग करते हैं, जब समष्टि मदों का समांग समूह न हो। ....

2.8 सांख्यिकीय इकाई (Statistical Unit)

जैसा कि आप जानते हैं सांख्यिकीय सर्वेक्षण की योजना बनाते समय, यह आवश्यक है कि वह इकाई, जिस (के पदों) में आँकड़ों का संग्रहण करना है, यथोचित रूप से परिभाषित की जाए। सांख्यिकीय इकाई हम उस इकाई को कह सकते हैं, जिसके पदों में अन्वेषक, गणना विश्लेषण और निर्वचन के लिए चुने गए, चरों को मापता है (या गुणों की गणना करता है)। सुस्तात आँकड़ों का संग्रहण करने के लिए, सांख्यिकीय इकाई की उचित परिभाषा परम आवश्यक है। एक सुपरिभाषित सांख्यिकीय इकाई के न होने की स्थिति में, संम्भव है कि जिन आँकड़ों का संग्रहण करना अभीष्ट हो, वे छूट जाएँ और जिन आँकड़ों को छोड़ देना था, वे संग्रहीत हो जाएँ। इकाई को परिभाषित करना इतना सरल नहीं है जितना कि यह पहली नजर में प्रतीत होता है।

2.8.1 एक अच्छी सांख्यिकीय इकाई के लक्षण

अनुसंधान के लिए, सांख्यिकीय इकाई का निश्चय करते समय, हमें निम्न आवश्यकताओं पर अवश्य ध्यान देना चाहिए:

i) **इकाई उपयुक्त होनी चाहिए:** सांख्यिकीय इकाई, अनुसंधान के प्रयोजन के अनुरूप होनी चाहिए। उदाहरण के लिए, आप जानते हैं कि मूल्य विभिन्न प्रकार के होते हैं, जैसे फुटकर मूल्य, थोक मूल्य, लागत मूल्य, इत्यादि। जब आप अपने अनुसंधान के लिए, मूल्य की इकाई का चयन करते हैं, तो आपको उस मूल्य इकाई का चयन करना चाहिये जो आप के अनुसंधान के लिए उपयुक्त हो। यदि फुटकर मूल्य उपयुक्त हो और आप थोक मूल्य का चयन कर लें तो आपको भ्रामक परिणाम प्राप्त होंगे।

ii) **इकाई विशिष्ट और स्पष्ट होनी चाहिए:** इकाई को विशिष्ट (specific) रूप से परिभाषित किया जाना चाहिए और उसका अर्थ अस्पष्ट नहीं होना चाहिए। अन्यथा संग्रहीत आँकड़ों के पूर्णतया शुद्ध न होने की सम्भावना है और वे गलत हो जाते हैं।

iii) **इकाई स्थिर होनी चाहिए:** यदि इकाई के मान में उच्चावचन हो, तो हो सकता है कि विभिन्न समयों पर या विभिन्न स्थानों पर एकत्रित किए गए आँकड़े, तुलनीय न हों। कभी-कभी परिणाम गुमराह कर सकते हैं।

iv) **इकाई समांग होनी चाहिए:** एक बार सांख्यिकीय इकाई परिभाषित कर लेने के पश्चात् यह समस्त अनुसंधान में समांग (homogeneous) होनी चाहिए, ताँकि, संग्रहीत आँकड़ों के आधार पर, वैध तुलनाएँ की जा सकें।

v) **इकाई सरल होनी चाहिए:** सांख्यिकीय इकाई, स्वतः पूर्ण होनी चाहिए और समझने में सरल होनी चाहिए।

2.8.2 इकाइयों के प्रकार

आपने सांख्यिकीय इकाई के अर्थ को और एक अच्छी इकाई के विशिष्ट गुणों के विषय में जान लिया है। आइये अब सांख्यिकीय इकाई के विभिन्न प्रकारों का अध्ययन करें।

1 सांख्यिकीय इकाइयाँ दो प्रकार की हो सकती है, **भौतिक इकाइयाँ** (physical unit) और **स्वैच्छिक इकाइयाँ** (arbitary unit)। माप की इकाइयाँ जैसे टन, किलोग्राम, मीटर, सेंटीमीटर, लिटर, इत्यादि, भौतिक इकाइयों के उदाहरण हैं। ऐसी इकाइयाँ सामान्य प्रयोग में प्रचलित हैं, और इन्हें किसी व्याख्या की आवश्यकता नहीं। बहुत से अध्ययनों में ये भौतिक इकाइयाँ उपयुक्त नहीं होती। उदाहरण के लिए, कल्पना कीजिए कि आप एक उद्योग में, कर्मचारियों की मज़दूरी से संबंधित एक अनुसंधान का संचालन कर रहे हैं। यहाँ सांख्यिकीय इकाई जिसे परिभाषित करना है, "मज़दूरी" है। मज़दूरियाँ विभिन्न प्रकार की होती हैं, नकद मजदूरी, यथार्थ मज़दूरी, उजरत, मासिक मज़दूरी इत्यादि। ऐसी स्थिति में आपको स्वैच्छिक रूप से निश्चय करना होता है कि कौन सी मज़दूरी लें और फिर उसे यथोचित रूप से परिभाषित करना होता है।

2 सांख्यिकीय इकाइयों को एक अन्य प्रकार से भी दो भिन्न वर्गों में विभाजित किया जा सकता है:

i) **आकलन की या गणना की इकाइयाँ और ii) विश्लेषण तथा निर्वचन की इकाइयाँ।**

i) **गणना की इकाइयाँ:** ये वे इकाइयाँ हैं जिनके पदों में, आँकडों का संग्रहण किया जाता है। गणना की इकाइयाँ या तो सरल इकाइयाँ हो सकती हैं, या संयुक्त इकाइयाँ। सरल इकाई उसे कहते हैं, जो किसी एक ही सत्ता की एक मानक मात्रा को, बिना किसी गुणविशिष्टता (qualification) के निरूपित करे। कर्मचारी, गृह, टन, मीटर, घंटा, इत्यादि ऐसी इकाइयों के उदाहरण है। एक संयुक्त इकाई की रचना, एक सरल इकाई में एक विशेषक (composite unit) शब्द को जोड़कर की जाती है। इसके परिणामस्वरूप, इस का क्षेत्र सीमित हो जाता है, और इसे परिभाषित करना, सापेक्ष रूप से, कठिन हो जाता है। उदाहरण के लिए, इन दो इकाइयों, श्रमिक और कुशल-श्रमिक (skilled labour) पर विचार कीजिए। यहाँ पहली इकाई एक सरल इकाई है। और, दूसरी इकाई एक संयुक्त इकाई है। दूसरी स्थिति में, हमें न केवल श्रमिक का अर्थ जानना चाहिए, बल्कि पद "कुशल श्रमिक" का भी। संयुक्त इकाइयों के अन्य उदाहरण हैं, मशीन-घंटा, यात्री-किलोमीटर, किलोवाट-घंटा, इत्यादि।

ii) **विश्लेषण और निर्वचन की इकाइयाँ:** ये वे इकाइयाँ हैं जिनका प्रयोग, सांख्यिकीय आँकड़ों की तुलना और उनके निर्वचन के लिए किया जाता है। इनमें अनुपात, दर, प्रतिशतता, गुणांक, इत्यादि सम्मिलित हैं। आप, अनुपातों, दरों, प्रतिशतों आदि के बारे में, इकाई 4 में विस्तार से अध्ययन करेंगे।

2.9 परिशुद्धता की मात्रा (Degree of Accuracy)

जैसा कि इसी इकाई में, पहले चर्चा की गई थी, अनुसंधान का संचालन करते समय, हमें, आँकड़ों के संग्रहण में, अभीष्ट परिशुद्धता की मात्रा (degree of accuracy) का भी निश्चय करना होता है। परिशुद्धता की मात्रा का निर्धारण करते समय, हमें दो पहलुओं को ध्यान में रखना चाहिए:

i) परिशुद्धता जो सामान्यतः सम्भव हो सकती है, और

ii) परिशुद्धता की मात्रा, जिसे उस विशेष अनुसंधान में आवश्यक समझा जाता हो। परम परिशुद्धता (absolute accuracy) प्राप्त करना, अर्थात् एक तथ्य का यथार्थतः वर्णन करना बहुत कठिन है। इस तथ्य के परम परिशुद्धता से, वर्णन करने में असमर्थ होने के दो कारण हो सकते हैं, या तो स्वयं अन्वेषक की अपूर्णता या मापक यंत्रों की अपूर्णता। अतः सांख्यिकीय अनुसंधानों में, परम परिशुद्धता की आशा करना निरर्थक है। भौतिक विज्ञानों में भी, जहाँ नियंत्रित प्रयोग सम्पन्न किए जाते हैं, परम परिशुद्धता प्राप्त नहीं की जा सकती। अतः सामाजिक विज्ञान में, इसके बारे में विचार करने का कोई लाभ नहीं है।

2.9.1 समुचित परिशुद्धता का महत्व

जैसा कि ऊपर बताया गया है सांख्यिकीय अनुसंधान में, परम परिशुद्धता की कोई आवश्यकता नहीं होती। यदि पर्याप्त रूप से परिशुद्ध आकलन उपलब्ध हो तो एक तथ्य को समझने और उसका विश्लेषण करने में कोई कठिनाई नहीं होती। उदाहरण के लिए, जब हम खाद्यान्न को टनों में तोलते हैं, तो हम एक ग्राम तक परिशुद्ध तोल प्राप्त करने का प्रयत्न नहीं करते। यदि तोल एक किलोग्राम तक परिशुद्ध हो तो भी इसे पर्याप्त मान लेते हैं। इसी प्रकार दो नगरों के बीच की दूरी किलोमीटरों में प्रकट की जाती है तथा इसमें कुछ मीटरों के अंतर की कोई सार्थकता नहीं होती। गणना में भी, परम परिशुद्धता, कभी ही प्राप्त होती है। जनगणना में, लोगों की वास्तविक संख्या की गणना करने के लिए अधिकतम सम्भव परिशुद्धता अभीष्ट होती है। परंतु ऐसी स्थिति में भी, सम्भव हो सकता है कि गणना करते समय, कुछ व्यक्ति छूट जाएँ। इसी प्रकार, साधारण प्रयोग में, आयु के संबंध में, उतनी अधिक परिशुद्धता की आवश्यकता नहीं होती जितनी की जनगणना में होती है। यदि आयु पूर्ण वर्षों में दी जाए तो वह सभी सामान्य प्रयोजनों के लिए पर्याप्त होगी। अतः, परम परिशुद्धता की कोई आवश्यकता नहीं है, केवल **समुचित परिशुद्धता** (reasonable accuracy) से ही काम चल सकता है।

अब प्रश्न यह होता है कि समुचित परिशुद्धता किसे कहते हैं? समुचित परिशुद्धता इस बात पर निर्भर करती है कि अनुसंधान की प्रकृति, और उद्देश्य क्या है तथा किस प्रकार के आँकड़ों की आवश्यकता है। बहुत सी स्थितियों में तो परिशुद्धता के रूढ़ मानक (conventional standards) होते हैं। दो नगरों के बीच की दूरी को मापते समय कुछ मीटरों को छोड़ा जा सकता है। परंतु कपड़ा मापते समय कुछ सेंटीमीटरों को भी नहीं छोड़ा जा सकता। यदि हम कोयला तोल रहे हैं तो कुछ ग्रामों को छोड़ सकते हैं, परंतु सोना तोलते समय, हम ऐसा नहीं कर सकते। सांख्यिकीय अनुसंधानों में, उचित परिशुद्धता मात्रा का निश्चय करते समय हम इन रूढ़ियों का अनुगमन कर सकते हैं।

अन्वेषक को, वे विधियाँ और इकाइयाँ अपनानी चाहिए, जो अभीष्ट परिशुद्धता मात्रा प्रदान कर सकें। माप की परिशुद्धता दो उपादानों पर आश्रित हैः
i) मापक यंत्रों की सूक्ष्मता, और ii) वह सावधानी जिससे अन्वेषक इस का प्रयोग करता है। उदाहरण के लिए, यदि एक पैमाना केवल सेंटीमीटरों तक ही अंकित है, तो इसके द्वारा मिली मीटरों तक शुद्ध, लम्बाई मापना न्याय संगत न होगा। इसी प्रकार, यदि एक अनुसंधान में लोगों की आयु, वर्षों और मासों में बताई गई हो, तो उससे वास्तविक दिनों तक शुद्ध सूचना प्राप्त नहीं की जा सकती।

2.9.2 मिथ्या परिशुद्धता की संकल्पना

आपने उचित परिशुद्धता के बारे में ज्ञात किया है। अब आप को **मिथ्या परिशुद्धता** (spurious accuracy) के बारे में भी अध्ययन करना चाहिए। आप, मिथ्या परिशुद्धता के अर्थ को, एक उदाहरण द्वारा समझ सकते हैं। मान लीजिए, कक्षा दस के पाँच विद्यार्थियों की आयु क्रमशः 16 वर्ष 7 मास, 17 वर्ष 2 मास, 16 वर्ष 8 मास, 15 वर्ष 9 मास, और 15 वर्ष 10 मास है। इन आँकड़ों से निष्कर्ष रूप में यह कहना भ्रामक होगा कि विद्यार्थियों की औसत आयु $(16+17+16+15+15)/5=15.8$ वर्ष है। इस मामले में, उच्चतम परिशुद्धता-मात्रा, वर्षों में प्रकट की गई औसत आयु है, अर्थात् 15 पूर्ण वर्ष। 15.8 वर्ष के आँकड़े द्वारा अभ्यारोपित (imputed) परिशुद्धता-मात्रा, को मिथ्या परिशुद्धता कहते हैं। संख्यात्मक तथ्यों को प्रकट करते समय, ऐसी मिथ्या परिशुद्धता के बारे में सतर्क रहना आवश्यक है।

बोध प्रश्न ग

1 परम परिशुद्धता और उचित परिशुद्धता में भेद कीजिए।

....

....

....

....

2 उचित परिशुद्धता और मिथ्या परिशुद्धता में भेद कीजिए।

....

....

....

....

3 एक अच्छी सांख्यिकीय इकाई की विशेषताएँ बताइए।

....

....

....

....

4 सांख्यिकीय इकाई की उचित परिभाषा क्यों आवश्यक है?

....

....

....

....

5 गणना की इकाइयों और विश्लेषण की इकाइयों का अन्तर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

6 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य

i) दरें और प्रतिशत, विश्लेषण और निर्वचन इकाई के रूप में वर्गीकृत की जाती है। ....

ii) यात्री किलोमीटर, गणना एक सरल इकाई का उदाहरण है। ....

iii) मिथ्या परिशुद्धता और उचित परिशुद्धता परस्पर विनिमेय शर्ते हैं। ....

iv) सर्वेक्षण में सदैव प्राप्त करने योग्य परिशुद्धता-मात्रा का निश्चय आँकड़ों के संग्रहण का कार्य प्रारंभ करने से पूर्व, किया जाता है।। ....

2.10 सारांश

सांख्यिकीय सर्वेक्षण जो विषयों से संबंधित तथ्य ज्ञात करने के अनुसंधान होते हैं, का समुचित रूप से आयोजन और संचालन करना चाहिए, ताकि उनके परिणाम, वास्तविकताओं को चित्रित कर सकें। एक सांख्यिकीय सर्वेक्षण की व्यवस्था करते समय, आपको अनेक चरणों को सम्पन्न करना होता है: (i) समस्या को परिभाषित करना, (ii) सर्वेक्षण के उद्देश्य और क्षेत्र को निर्धारित करना, (iii) प्रारंभिक तैयारियों को पूरा करना, जैसे आंकड़ों के स्रोतों, अनुसंधान के प्रकार, सांख्यिकीय इकाई और वांछित परिशुद्धता-मात्रा का निश्चय करना, (iv) आंकड़ों का संग्रहण, (v) आंकड़ों का सम्पादन (vi) आंकड़ों का वर्गीकरण और सारणीयन, (vii) आंकड़ों का विश्लेषण, (viii) आंकड़ों का निर्वचन, और (ix) रिपोर्ट लिखना। सांख्यिकीय आँकड़ों के स्रोत या तो प्राथमिक होते हैं, या द्वितीयक। यदि आँकड़े, अन्वेषक द्वारा, पहली बार, मौलिक आँकड़ों के रूप में संग्रहीत किए जाएँ, तो ऐसे आँकड़ों को प्राथमिक आँकड़े कहते हैं। जिन स्रोतों से प्राथमिक आँकड़े संग्रहीत किए जाते हैं उन्हें प्राथमिक स्रोत कहते हैं। जब पहले से संग्रहीत आँकड़ों का प्रयोग किया जाता है, तो ये अन्वेषक के लिए, द्वितीयक आँकड़े होते हैं। ऐसे आंकड़ों के स्त्रोतों को द्वितीयक स्रोत कहते हैं। प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण की कई विधियाँ हैं, जैसे व्यक्तिगत प्रेक्षण, प्रश्नावली, साक्षात्कार अनुसूची, इत्यादि। अनुसंधान की प्रकृति, उद्देश्य, और क्षेत्र के आधार पर तथा धन और समय के प्रतिबंधों को ध्यान में रखते हुए, प्रयोग के लिए विधि का चयन करना चाहिए। द्वितीयक आँकड़ों का संग्रहण कई स्रोतों से किया जा सकता है, जैसे पुस्तकें, रिपोर्ट, पत्रिकाएँ, समाचार पत्र और अन्य प्रकाशित स्रोत। ये अप्रकाशित स्रोतों से भी एकत्रित किये जा सकते हैं।

सर्वेक्षण कई प्रकार के हो सकते हैं। यह संगणना सर्वेक्षण या प्रतिदर्श सर्वेक्षण हो सकता है। पहली स्थिति में, सारे समूह का सर्वेक्षण किया जा सकता है, परंतु दूसरी स्थिति में, समूह के केवल एक अंश का ही सर्वेक्षण किया जाता है। व्यवहार में, कई लाभों के कारण, प्रतिदर्श सर्वेक्षण अधिक लोकप्रिय है। अनुसंधानों के अन्य प्रकार हैं: प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष, मौलिक या आवृत्तीय, खुला या गोपनीय, नियामित या तदर्थ, इत्यादि। यह निश्चय करने के लिए कि किस प्रकार के अनुसंधान को अपनाया जाए, आपको कई

उपादानों को ध्यान में रखना होता है। प्रतिदर्श सर्वेक्षण की स्थिति में, प्रतिदर्श के प्रतिचयन की कई विधियाँ हैं। इन विधियों को मुख्य रूप से, इन वर्गों में बांट सकते हैं, (1) संभाविता प्रतिचयन विधियाँ और (2) असंभाविता प्रतिचयन विधियाँ। प्रतिचयन से संबंधित दो नियम महत्वपूर्ण हैं, (i) सांख्यिकीय नियमितता का नियम और (ii) बृहत् संख्याओं के जड़त्व का नियम। सांख्यिकीय नियमितता का नियम बताता है कि यदि समष्टि में से, एक सामान्य परिमाण के प्रतिदर्श का, यादृच्छिक रूप से चयन किया जाए तो, इस के विशिष्ट लक्षण औसत समष्टि के अनुरूप होंगे। बृहत् संख्याओं के जड़त्व का नियम, सांख्यिकी नियमितता नियम का एक उपप्रमेय है। यह बताता है कि बड़ी संख्याएँ, छोटी संख्याओं की तुलना में, अधिक स्थिर होती हैं। बड़ी संख्याओं में उच्चावचन धीमे और क्रमिक होते हैं।

सांख्यिकीय इकाई उसे कहते हैं जिनके पदों में अन्वेषक गणना, विश्लेषण और निर्वचन के लिए, चुने गए चरों को मापता है या गुणों की गणना करता है। चुनी गई सांख्यिकीय इकाई, विशिष्ट, सरल, असंदिग्धार्थी, स्थिर, पूर्ण और उपयुक्त होनी चाहिए। सांख्यिकीय सर्वेक्षणों में परम परिशुद्धता प्राप्त करना प्रायः बहुत कठिन होता है। समुचित परिशुद्धता, जो काफी हद तक सर्वेक्षण के विषय और प्रकृति पर आधारित होती है भली प्रकार से अनुसंधान के उद्देश्य की पूर्ति कर सकती है।

2.11 शब्दावली

संगणना अनुसंधानः समष्टि में सभी मदों की सम्पूर्ण गणना।
बृहत् संख्याओं के जड़त्व का नियमः वह सांख्यिकीय नियम है जो यह बताता है कि आँकड़ों के बड़े समूहों में, छोटे समूहों की अपेक्षा, अधिक स्थिरता होती है। इसका सीधा अभिप्राय है कि बड़ी संख्याओं में कोई तीव्र उच्चावचन नहीं होते और वे सापेक्ष रूप से अधिक स्थिर होती हैं।
सांख्यिकीय नियमितता का नियमः वह सांख्यिकीय नियम जो यह बताता है कि यादृच्छिक रूप से चयन किए गए सामान्यतः बड़े परिमाण के प्रतिदर्श में औसतन वे सभी विशेषताएँ होंगी जो कि समष्टि में हैं।
समष्टिः किसी अध्ययन से संबंधित सभी मदों का समुच्चय।
प्राथमिक आँकड़ेः वे मौलिक आँकड़े, जो अन्वेषक द्वारा पहली बार एकत्रित किए जाएं। वे कच्ची सामग्री के रूप में होते हैं, जिनपर, विश्लेषण के लिए, सांख्यिकीय विधियों का प्रयोग किया जाता है।
यादृच्छिक प्रतिचयन विधिः एक ऐसी प्रतिचयन विधि, जो समष्टि के प्रत्येक मद को, प्रतिदर्श में सम्मिलित किए जाने का समान संयोग प्रदान करती है।
समुचित परिशुद्धताः परिशुद्धता की वह मात्रा, जो, किसी विशेष अनुसंधान की परिस्थिति के अनुसार आवश्यक समझी जाती है।
प्रतिचयन अनुसंधानः समष्टि में से, प्रतिनिधि रूप में चयन किए गए केवल कुछ मदों का अध्ययन।
प्रतिचयन विधियाँः समष्टि में से, प्रतिदर्श मदों के चयन करने की तकनीकें।
द्वितीयक आँकड़ेः वे आंकड़े, जिनका पहले किसी अन्य व्यक्ति द्वारा, संग्रहण किया गया हो परंतु जिनका अब अन्वेषक द्वारा प्रयोग किया जा रहा है। वे प्रकाशित या अप्रकाशित रूप में हो सकते हैं। वे तैयार माल के रूप में होते हैं क्योंकि इनका, किसी न किसी रूप में, प्रयोग किया जा चुका होता है।
सांख्यिकीय सर्वेक्षणः एक निर्दिष्ट क्षेत्र में, एक काल अवधि में घटित घटना से संबंधित तथ्य ज्ञात करने का अनुसंधान। इस सर्वेक्षण के द्वारा विचाराधीन तथ्य के विभिन्न पहलुओं पर, मात्रात्मक सूचना एकत्रित की जाती है।
सांख्यिकीय इकाईः वह इकाई, जिसके पदों में, अन्वेषक, गणना, विश्लेषण और निर्वचन के लिए, चरों को मापता है (या गुणों की गणना करता है)।

2.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

क	3	i) नहीं	ii) हाँ	iii) हाँ	iv) नहीं	v) नहीं
ख	4	i) नहीं	ii) हाँ	iii) हाँ	iv) नहीं	
	5	i) असत्य	ii) सत्य	iii) असत्य	iv) सत्य	
ग	6	i) सत्य	ii) असत्य	iii) असत्य	iv) सत्य	

2.13 स्वपरख प्रश्न

1 सांख्यिकीय सर्वेक्षण किसे कहते हैं? सांख्यिकीय अनुसंधान की व्यवस्था करते समय क्या कार्यवाही की जानी चाहिए? वर्णन कीजिए।

2 आंकड़ों का संग्रहण कार्य आरम्भ करने से पूर्व, किन प्रारंभिक तैयारियों को पूरा करना चाहिए। व्याख्या कीजिए।

3 प्राथमिक और द्वितीयक आँकड़ों में भेद स्पष्ट कीजिए। प्राथमिक आँकड़ों के संग्रहण की विभिन्न विधियों और द्वितीयक आँकड़ों के विभिन्न स्रोतों की व्याख्या कीजिए।

4 संगणना सर्वेक्षण की तुलना में, प्रतिदर्श सर्वेक्षण क्यों अधिमान्य है? व्याख्या कीजिए।

5 प्रतिचयन किसे कहते हैं? प्रतिचयन की विभिन्न विधियों की व्याख्या कीजिए।

6 निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए:
   i) एक अच्छी सांख्यिकीय इकाई की प्रमुख विशेषताएँ
   ii) सांख्यिकीय सर्वेक्षण में, समुचित परिशुद्धता मात्रा का महत्व।
   iii) सांख्यिकीय नियमितता का नियम।
   iv) बड़ी संख्याओं के जड़त्व का नियम।
   v) समुचित परिशुद्धता, परम परिशुद्धता और मिथ्या परिशुद्धता में अंतर बताइये।

नोटः ये प्रश्न, इकाई को समझने में आपकी सहायता करेंगे। उनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। परंतु, अपने उत्तरों को विश्वविद्यालय को न भेजिए। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 3 परिशुद्धता, सन्निकटमान एंव विभ्रम

इकाई की रूपरेखा

3.0 उद्देश्य

3.1 प्रस्तावना

3.2 परिशुद्धता

3.3 सन्निकटमान

3.4 सांख्यिकीय विभ्रम

- 3.4.1 सन्निकटमान सम्बंधी विभ्रम
- 3.4.2 सन्निकटमान सम्बधी विभ्रमों का मापन
- 3.4.3 निकटतम पूर्णांको तक गणना
- 3.4.4 गणितीय प्रक्रियाओं का विभ्रमों पर प्रभाव
- 3.4.5 अभिनत एवं अनभिनत विभ्रम
- 3.4.6 अभिनत एवं अनभिनत विभ्रमों का अनुमान
- 3.4.7 प्रतिदर्शी एवं गैर-प्रतिदर्शी विभ्रम

3.5 सारांश

3.6 शब्दावली

3.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

3.8 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

3.0 उद्देश्य

- इस इकाई को पढ़ने के बाद आप :
- परिशुद्धता की आवश्यकता की विवेचना कर सकेंगे तथा परम् परिशुद्धता एवं मिथ्या परिशुद्धता में भेद कर सकेंगे
- उपसादन के अर्थ एवं विधियों की व्याख्या कर सकेंगे
- सांख्यिकी में विभिन्न प्रकार के विभ्रमों का वर्णन कर सकेंगे
- विभिन्न विधियों द्वारा विभ्रमों की गणना कर सकेंगे।

3.1 प्रस्तावना

जैसा कि आप पहले पढ़ चुके हैं, सांख्यिकीय समंकों में यथोचित स्तर की परिशुद्धता का होना आवश्यक होता है और जब कभी भी हम कोई सांख्यिकीय सर्वेक्षण आरम्भ करते हैं तो हमें परिशुद्धता के स्तर को स्पष्ट रूप से परिभाषित कर देना पड़ता है। अतः प्रश्न यह उठता है कि परिशुद्धता को कैसे मापा जाए और उपसादन कैसे किया जाए – जिससे कि परिशुद्धता का वांछनीय स्तर उपलब्ध हो सके? सांख्यिकीय सर्वेक्षणों के दौरान कुछ अशुद्धियों का होना स्वभाविक बात है। अतः इनको भी ध्यान में रखना आवश्यक है। इन अशुद्धियों के होने के अनेक कारण हो सकते हैं, जैसे – गलत माप, अनुपयुक्त विधियों का प्रयोग, संमकों का सन्निकटमान, प्रतिदर्श के चुनाव से सम्बद्ध संयोग कारक आदि। इस इकाई में आप परिशुद्धता की संकल्पना के विषय में अधिक विस्तार से अध्ययन करेंगे। साथ ही सन्निकटमान की संकल्पना एवं विधियाँ, सन्निकटमान एवं प्रतिचयन प्रतिक्रिया से उत्पन्न होने वाले विभ्रमों तथा विभ्रमों के मापन को विभिन्न विधियों के विषय में भी जान सकेंगे।

3.2 परिशुद्धता (Accuracy)

जैसा कि आप जानते हैं, सांख्यिकीय समंक–गणना, मापन या आकलन – द्वारा प्राप्त किए जा सकते है। कारों के उत्पादन से संबंधित आँकड़े गणना द्वारा प्राप्त किए जा सकते हैं। इसी प्रकार, दुग्ध पाउडर के उत्पादन से संबंधित आँकड़े तोल द्वारा अर्थात् मापन विधि द्वारा प्राप्त हो सकते हैं। किन्तु जब सरकार को, फसल कटने से पूर्व गेहूँ के संभावित उत्पादन के समंकों की आवश्यकता पड़ती है तो ये समंक आकलन विधि द्वारा ही उपलब्ध कराए जाते हैं। यदि गणना उचित ढ़ंग से की जाए तो उससे यथार्थ संख्याएँ उपलब्ध होती है। किन्तु मापन एवं आकलन विधियों से संकलित समंक सर्वथा यथार्थ नहीं होते। उदाहरणार्थ – जब दुग्ध पाउडर से भरा ट्रक धर्मकांटे पर तोला जाता है तो इससे एक किलोग्राम तक की कमी या अधिकता का कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि यहाँ तोल में किलोग्राम तक की परिशुद्धता पर्याप्त मानी जाती है। किन्तु यदि प्रयोगशाला में चुटकी भर पाउडर को रासायनिक तुला (Chemical balance) द्वारा तोला जाए तो एक मिलीमीटर का भार भी तोल की परिशुद्धता को प्रभावित करेगा। अतः इस दशा में एक मिलीमीटर तक की परिशुद्धता को भी ध्यान में रखा जाता है। इसी प्रकार, जब अनेक वस्तुओं को मापा जाता है तो उनके माप की परिशुद्धता की सीमा प्रयुक्त माप-यंत्रों पर निर्भर करती है।

कुछ अन्य कारक भी परिशुद्धता को प्रभावित करते हैं, जिनके फलस्वरूप विभ्रमों का उदय होता है। इस इकाई में आगे विभ्रम के स्रोतों पर प्रकाश डाला जाएगा और वही पर उक्त कारकों की अधिकतम जानकारी संभव होगी। पिछली इकाई में यह बताया गया है कि पूर्ण परिशुद्धता प्राप्त करना बड़ा कठिन कार्य होता है। यहाँ तक कि भौतिकी एवं रसायनशास्त्र जैसे भौतिकीय विज्ञानों में भी पूर्ण परिशुद्धता प्राप्त करना असंभव होता है। अर्थात् सांख्यिकी विज्ञान में पूर्ण परिशुद्धता न तो संभव है और न ही आवश्यक। पिछली इकाई में '' सांख्यिकीय मापों'' के अंतर्गत यह उल्लिखित है कि इसमें (सांख्यिकी में) यथोचित स्तर की परिशुद्धता ही पर्याप्त मानी जाती है, जिसका निर्धारण उसकी व्यावहारिक उपयोगिता पर निर्भर करता है। जैसे इसके उपयोग, लागत तथा सर्वेक्षण के उद्देश्य एवं प्रकृति आदि पर। अनेक जाँचों में पूर्ण परिशुद्धता की आवश्यकता भी नहीं होती। जैसे एक देश की जनसंख्या 10,04,601 है। यह पूर्ण परिशुद्धता है। किन्तु यदि इसे दस लाख कहा जाए तो यह कहीं अधिक व्यावहारिक या सार्थक परिशुद्धता होगी। अतः जब तक कि यह अनुसंधानों के लिए वांछनीय न हो, पूर्ण परिशुद्धता के लिए चिन्तित नहीं होना चाहिए।

पूर्ण परिशुद्धता से वांछित स्पष्टता परिलक्षित नहीं होती : मान लीजिए, आप किसी दुकान की पोलिस्टर तथा सूती कपड़ों की वार्षिक बिक्री की तुलना कर रहे हैं और उनकी वास्तविक बिक्री की राशियाँ क्रमशः 60,340 रूपये तथा 40,105 रूपये है। तुलनात्मक दृष्टि से वास्तविक बिक्री राशियों को न दर्शाकर यदि उनके बिक्री अनुपात (अर्थात 3:2) को व्यक्त किया जाए तो अधिक अच्छा होगा।

परिशुद्धता की आवश्यक सीमा संबंधित परिस्थिति पर भी निर्भर करती है: जैसे कि एक लोहार लोहे का तोल करते समय कुछ ग्राम कमी या बेसी पर कोई ध्यान नहीं देता, जबकि सुनार सोने का तोल करते समय मिलीग्राम तक की परिशुद्धता को ध्यान में रखता है।

परिशुद्धता एक सापेक्षित पद है : कोई सांख्यिकी माप या परिणाम किसी एक उद्देश्य के लिए उपयोगी सिद्ध हो सकता है, जबकि दूसरे के लिए अनुपयोगी। जैसे जनसंख्या उसकी वास्तविक संख्या के स्थान पर उसकी निकटतम संख्या से भी व्यक्त की जा सकती है। लेकिन चुनाव के परिणामों की घोषणा करते समय यह बताना भी आवश्यक होता है कि किसके पक्ष में कितने मत डाले गए हैं क्योंकि कभी-कभी जीत या हार एक वोट से भी हो सकती है। अतः परिशुद्धता का वांछित स्तर क्या होगा, यह अनुसंधान के उद्देश्यों पर निर्भर करेगा।

मिथ्या परिशुद्धता (Spurious accuracy) : जब परिशुद्धता का स्तर इसके वास्तविक या वांछित स्तर से भी कहीं अधिक होता है तो यह स्थिति मिथ्या परिशुद्धता होती है। सांख्यिकी विज्ञान में ऐसी परिशुद्धता का दावा या कल्पना नहीं करनी चाहिए, जोकि संभव न हो। ध्यान रहे कि ऐसी परिशुद्धता कभी-कभी पथ भ्रष्ट भी कर सकती है। समंकों के सांख्यिकीय प्रतिपादन या विवेचन में मिथ्या परिशुद्धता के कारण उनमें जिस परिशुद्धता की अपेक्षा की जाती है प्रायः उससे कहीं अधिक परिशुद्धता उपलब्ध हो जाती है। कभी-कभी अन्तिम परिणामों मे परिशुद्धता अधिक होती है, जबकि मध्यवर्ती गणनाओं में कम परिशुद्धतम पाई जाती है। इसके कारण भी मिथ्या परिशुद्धता उत्पन्न होती है। अतः अत्यधिक परिशुद्धता के मिथ्या वर्णन से भी बचना चाहिए।

3.3 सन्निकटमान (Approximation)

जैसा कि आप जानते हैं, अनेक स्थितियों में केवल सन्निकटमान (उपसादित) समंक ही उपलब्ध हो पाते हैं। ऐसा विशेषकर मापन क्रिया के अंतर्गत होता है क्योंकि पूर्ण परिशुद्ध मापन कर पाना कठिन होता है। यद्यपि यथोचित स्तर की परिशुद्धता प्राप्त करना संभव है। अनेक जटिल अंकों वाली संख्या से कुछ भ्रम उत्पन्न हो सकता है। सन्निकटमान प्रक्रिया द्वारा कुछ अंकों को निकालकर भ्रमात्मकता को दूर किया जा सकता है। संमकों को सही ढंग से समझने, उनका विश्लेषण करने तथा उनकों तुलनात्मक बनाने में सन्निकटमान की प्रक्रिया बड़ी ही सहायक सिद्ध होती है। किस बिन्दु पर सन्निकटमान करना है : यह इस तथ्य पर निर्भर करता है कि समंकों में किस स्तर की परिशुद्धता आवश्यक है। इस क्रिया में अंकों को सरल, संक्षेप एवं पूर्णांकों में प्रदर्शित किया जाता है।

सन्निकटमान की विधियाँ

ऊपर यह बताया गया है कि सन्निकटमान अंकों का पूर्णांकन करके किया जाता है। अब प्रश्न यह उठता है कि पूर्णांकन क्या होता है? जटिल एवं बड़ी संख्याओं को निकटतम सरल संख्याओं में, जोकि अंतिम कुछ अंकों को छोड़कर संभव होता है, व्यक्त करने की प्रक्रिया को पूर्णांकन करना कहते हैं। पूर्णांकन की अनेक विधियाँ हैं। आइए अब हम इनका अध्ययन करें।

i) **संख्या को अगली पूर्णांक संख्या तक बढ़ाकर (Rounding up):** इस विधि के अंतर्गत किसी विद्यमान संख्या को उसके आगे की पूर्ण इकाई तक बढ़ाकर उपसादित किया जाता है। जैसे डाक द्वारा भेजे जाने वाले एक पार्सल का वज़न 8.9 ग्राम है, यदि इस वज़न को पूर्णांक बनाया जाए तो डाक शुल्क पूरे 9 ग्राम पर लगेगा।

ii) **संख्या को पिछली पूर्णांक संख्या तक घटाकर (Rounding down):** इसमें संख्या को पहले की पूर्ण इकाइयों तक कम करके पूर्णांक बनाया जाता है। जैसे पिछले जन्म दिन पर आयु बताना। मान लीजिए आज आपकी आयु 19 वर्ष 10 माह है। फिर भी आप पिछले जन्म दिन की आयु 19 वर्ष ही बताएंगे।

iii) **निकटतम पूर्णांक तक मूल्य को बताना** : निकटतम पूर्णांक तक सन्निकटमान करने के निम्नलिखित नियम हैं।

   क) यदि आगे का अंक आधे से कम हो तो उसके पूर्व के अंक पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। जैसे – 2,23,490 को हज़ार तक उपसादित करने पर 490 बचते हैं, जो आधे से कम हैं। अतः सन्निकटमान में यह संख्या 2,23,000 हो जाएगी।

   ख) यदि आगे का अंक आधे से अधिक हो तो उसके पूर्वांक में एक बढ़ा दिया जाता है, जैसे 1,42,896 को हजार तक उपसादित करने पर 896 बचते हैं, जो आधे से अधिक हैं। अतः सन्निकटमान की यह संख्या 1,43,000 होगी। इसी प्रकार यदि 1,83,503 को हज़ार तक उपसादित किया जाए तो सन्निकटमान संख्या 1,84,000 होगी।

   ग) यदि आगे का अंक ठीक आधा है और उसके दाहिने ओर केवल शून्य हो तो समसंख्या की स्थिति में पूर्वांक में कोई परिवर्तन नहीं होता। किन्तु विषम संख्या की स्थिति में बढ़ा दिया जाता है। ताकि वह संख्या समसंख्या बन जाए। उदाहरणार्थ – यदि 2,23,500 को हज़ार तक उपसादित किया जाए तो प्राप्त संख्या 2,24,000 होगी। इसी प्रकार यदि 2,24,500 को हज़ार तक उपसादित किया जाए तो नई संख्या भी 2,24,000 होगी। प्रथम दशा में 500 को छोड़ने पर पूर्वांक एक विषम संख्या (3) है, अतः इसमें एक जोड़कर चार बना दिया गया। जबकि दूसरी दशा में पहले से ही एक समसंख्या (4) है। अतः इससे 500 छोड़ने पर भी कोई परिवर्तन नहीं होता। इस उद्देश्य के लिए शून्य को सदा समसंख्या ही माना जाता है।

iv) **अनेक सार्थक संख्याओं तक सन्निकटमान** : किसी साधारण संख्या में या किसी संगणना प्रक्रिया में किसी संख्या की परिशुद्धता के स्तर को दर्शाने वाले अंक "सार्थक अंक" की श्रेणी में आते हैं। शून्य के अतिरिक्त कोई भी अंक सार्थक होता है, क्योंकि प्रायः इसकी परिभाषा सुनिश्चित होती है। परन्तु शून्य सार्थक हो भी सकता है और नहीं भी। शून्य तभी सार्थक होते हैं जबकि कहीं न कहीं उसकी दायीं ओर तथा बायीं ओर भी सार्थक अंक हों। संख्या 14,005 में शून्य सार्थक हैं क्योंकि उनके दायें एवं बायें, दोनों ओर कोई न कोई अंक (शून्य के अतिरिक्त) आया हुआ है। किसी संख्या के

बिल्कुल बाईं ओर शून्यों का कोई अर्थ नहीं होता। जैसे संख्या 0,00,500 में बायें सिरे के तीनों शून्यों का कोई मूल्य नहीं है। संख्या 501,00.501 तथा 0.000,501 में क्रमशः 5,0 तथा 1 महत्व वाले अंक हैं। किसी संख्या के बिल्कुल दायें सिरे पर आने वाले शून्य किसी विशेष समय पर ही महत्व रखते हैं। जैसे, यदि संख्या 17,000 अपनी इकाई तक सही है तो पांचों अंक महत्व वाले हैं। हाँ, यदि 17,000 का उपसादन हज़ार तक किया जाता है तो केवल दो अंक 1 तथा 7 महत्व वाले हैं और शून्यों का कोई महत्व नहीं है।

दशमलव बिन्दु के बिल्कुल दायीं ओर आने वाले शून्य, जिनके बाद कोई अंक नहीं आता, इस तथ्य का ज्ञान कराते हैं कि किसी दी हुई संख्या को कितने स्थानों पर सही माना जाएगा। संख्या 123.00 से यह संकेत मिलता है कि यह दो दशमलव-बिन्दु तक ही सही है। अतः यहाँ पर दोनों शून्य सार्थक हैं। अगर ऐसा कहा जाए कि अमुक सार्थक स्थानों तक गणना की जानी है तो इसका आशय यह हुआ कि दर्शायी गई संख्या उसी स्थान तक सही मानी जाएगी। जैसे यदि यह कहा जाए कि संख्या 3.4752 को दो अंकों तक व्यक्त कीजिए तो इसका अर्थ यह होगा कि उपसादन दो अंकों तक करना है। इसके लिए अंक 752 को छोड़ दिया जाएगा तथा अभीष्ट संख्या 3.5 होगी। इसी प्रकार यदि संख्या 2,23,490 को चार अंकों तक उपसादित करना है तो प्राप्त संख्या 2,23,500 होगी।

सार्थक संख्याओं का आशय उन अंकों से है जिनसे सही सूचनाएँ मिलती हैं और उनमें किसी प्रकार की अशुद्धता नहीं पाई जाती। उदाहरण–1 का सावधानी से अध्ययन कीजिए। इससे आपको उपसादन प्रक्रिया एवं सार्थक अंकों के भाव के बारे में स्पष्टता हासिल होगी।

उदाहरण 1

मूल संख्या	पूर्णांकित संख्या	पूर्णांकित संख्या में सार्थक अंक
	(हज़ार तक पूर्णांकन)	
5,99,502	600 हज़ार	600
5,99,500	600 हज़ार	600
5,99,498	599 हज़ार	599
5,98,500	598 हज़ार	598
	प्रथम दशमलव अंक तक सन्निकटमान	
999.051	999.1	9,991
999.049	999.0	9,990
999.150	999.2	9,992
999.950	1,000.0	10,000
	दशमलवों के तीन अंकों तक उपसादन	
0.00723	0.007	7

बोध प्रश्न क

1 मिथ्या परिशुद्धता क्या होती है?

....

....

....

2 सन्निकटमान की विधियों का उल्लेख कीजिए।

....

....

....

3 सार्थक अंकों से आप क्या समझते हैं?

....

....

....

4 नीचे दिए गए कथन सत्य हैं या असत्य :

i) सांख्यिकीय समंकों में पूर्ण परिशुद्धता पाना असंभव होता है। ....

ii) पूर्ण परिशुद्धता एवं मिथ्या परिशुद्धता, दोनों का एक ही आशय होता है। ....

iii) ऊपर की ओर पूर्णांकन की प्रक्रिया द्वारा प्राप्त मूल्य वास्तविक मूल्य से बड़ा होता है। ....

iv) ''शून्य'' कभी भी सार्थक अंक नहीं होता। ....

5 निम्नलिखित संख्याओं को निकटतम हज़ार तक पूर्णांकित कीजिए :

i) 2,62,500 ....

ii) 87,634 ....

iii) 96,215 ....

iv) 43,99,510 ....

v) 3,21,501 ....

6 निम्नलिखित संख्याओं को दो सार्थक अंको तक व्यक्त कीजिए:

i) 2,358 ....

ii) 76,435 ....

iii) 8.901 ....

iv) 0.00 635 ....

v) 2.031 ....

3.4 सांख्यिकीय विभ्रम (Errors in Statistics)

''विभ्रम'' शब्द का सांख्यिकीय में एक विशिष्ट अर्थ होता है। इसका आशय किसी मद के — वास्तविक मूल्य तथा अनुमानित या उपसादित मूल्य के अंतर से होता है। विभ्रम का होना अनिवार्य है, चूंकि अनुमान प्रायः प्रतिदर्श (sample) अवलोकन पर आधारित होते हैं तथा समंकों को सरल एवं पूर्णांक बनाने के लिए सन्निकटमान की विधि का भी प्रयोग होता है। मान लीजिए कि आप किसी उर्वरक में (तोल द्वारा) नाइट्रोजन का प्रतिशत जानना चाहते हैं। इसके लिए अलग-अलग दिनों में भिन्न-भिन्न उर्वरक के ढेरों से मिश्रण के प्रतिदर्श लिए जा सकते हैं। इन्हें अनेक प्रयोगशालाओं में भेज दिया जाता है जहाँ इनका विभिन्न विश्लेषकों द्वारा अलग-अलग विधियों से विश्लेषण किया जाता है। तापमान, नमी एवं अन्य कारकों के कारण मिश्रण के संयोजन में कुछ विभिन्नताएँ आ सकती हैं। कुछ विभिन्नताएँ प्रतिदर्शों की भिन्नता के कारण भी हो सकती हैं, जिससे प्रतिदर्श विभ्रम उत्पन्न होता है। कुछ विभ्रम विश्लेषकों की विचार विभिन्नता के कारण भी हो सकते हैं। इसके अतिरिक्त मापन की त्रुटियों के कारण भी विभ्रम हो सकते हैं। इन्हें अवलोकन विभ्रम (errors of observation) कहा जाएगा। अब हम कह सकते हैं कि प्रयोग एवं सर्वेक्षण में अनेक प्रकार के विभ्रमों की संभावना होती है। जैसे (i) प्रतिदर्शी विभ्रम (sampling error), (ii) विश्लेषणात्मक विभ्रम

(analytical error), (iii) अवलोकन एवं माप संबंधी विभ्रम (errors of observations and measurement) । हाँ, यह ध्यान रहे कि समंक परिकलन में जो गलतियाँ होती हैं, वे विभ्रम नहीं होती । अपरिशुद्धता जो जोड़, घटा, गुणा, भाग (arithmetical) के कारण होती हैं, वह विभ्रम नहीं होती बल्कि उसे गलती या अशुद्धि कहा जाता है । चूँकि सांख्यिकी में अनुमानित या उपसादित मूल्यों का या दोनों का उपयोग होता है इसलिए विभ्रम का होना अपरिहार्य है । इन्हें पूर्णतः समाप्त नहीं किया जा सकता । उन्हें यथा-संभव कम अवश्य किया जा सकता है ।

विभ्रमों का स्रोत

सांख्यिकी में विभ्रम तीन प्रमुख स्रोतों से उत्पन्न होते हैं, जिनका वर्णन नीचे दिया गया है ।

i) **मूल विभ्रम (Error of origin)** : ऊँचाई, वज़न तथा दूरी जैसे चरों का माप करते समय उनकी यथार्थता या पूर्ण परिशुद्धता तक पहुँचना संभव नहीं होगा । ऐसा माप-यंत्र की परिसीमाओं के कारण होता है । उसी के फलस्वरूप वास्तविक मूल्य एवं मापे हुए मूल्यों में अंतर होने की संभावना रहती है । कभी-कभी अनुपयुक्त सांख्यिकीय इकाई का चयन भी गलत माप प्रदान करता है । यह संभव है कि सूचना देने वाले ही गलत सूचना देते हैं । इसके अतिरिक्त समंकों का पक्षपातपूर्ण संग्रहण अर्थात संग्रहकर्ता द्वारा पूर्वग्रह के अनुसार समंकों का संग्रहण भी विभ्रम का कारण होता है । इस प्रकार से उत्पन्न होने वाले विभ्रम को मूल विभ्रम कहते हैं । इस प्रकार का विभ्रम अवलोकनों की संख्या के साथ बढ़ता जाता है ।

ii) **अपर्याप्तता के कारण विभ्रम (Errors of inadequacy):** किसी भी अनुसंधान में प्रतिदर्श (sample) को समष्टि (population) का अच्छा प्रतिनिधित्व करना चाहिए । यदि प्रतिदर्श का आकार बहुत छोटा है और वह समष्टि का सही प्रतिनिधित्व नहीं कर पाता तो इससे विभ्रम उत्पन्न होता है । ऐसे विभ्रम को अपर्याप्तता विभ्रम कहते हैं ।

iii) **प्रहस्तन विभ्रम (errors of manipulations)** : ऐसे विभ्रम बिना पक्षपात की भावना से—मापन, गणना एवं वर्गीकरण प्रक्रिया के दौरान अनायास हो जाते हैं । उन्हें (सन्निकटमान से होने वाले विभ्रमों सहित) प्रहस्तन विभ्रम कहते हैं । अवलोकनों की अधिकता से इसकी मात्रा में वृद्धि होती है ।

किसी भी सांख्यिकीय जाँच में ऐसे तीनों प्रकार के विभ्रम अविश्वासी होते हैं

3.4.1 सन्निकटमान सम्बंधी विभ्रम (Errors of Approximation)

सांख्यिकीय रिपोर्टों में समान्यतः अंकों को सुविधा के लिए पूर्णांकित किया जाता है । जब अंकों का पूर्णांकन (rounding off) किया जाता है तो परिशुद्धता (या अपरिशुद्धता) के स्तर को निम्न में से किसी भी विधि से व्यक्त किया जा सकता है:

i) संमकों को निकटतम हज़ार तक, सैंकड़ों तक या पूर्णांक में व्यक्त किया जा सकता है । जैसे
निकटतम हज़ार तक
4,672.4 के स्थान पर 5,000
निकटतम इकाई तक
4,672.4 के स्थान पर 4,672

ii) (+) तथा (–) चिन्हों के प्रयोग द्वारा उपसादन के निरपेक्ष स्वरूप को दिखाना —जैसे 5,000 ± 500 । इससे यह संकेत मिलता है कि वास्तविक मूल्य 5,000 से पांच सौ कम या 500 अधिक हो सकता है । अर्थात् यह 4,500 से 5,500 के बीच में कहीं भी हो सकता है ।

iii) (+) तथा (–) चिन्हों के उपयोग द्वारा विभ्रम का प्रतिशत दर्शाना – जैसे 5,000 ± 0.1 । इससे यह विदित होता है कि वास्तविक मूल्य (5,000 का 1/10 = 500) 5,000 से 500 कम या 500 अधिक हो सकता है ।

iv) यही बात प्रतिशत द्वारा भी व्यक्त की जा सकती है । जैसे 5,000 ± 10 प्रतिशत । अर्थात् विभ्रम 5,000 के 10 प्रतिशत तक हो सकता है ।

v) परिशुद्धता उपसादन स्तर को सार्थक अंकों द्वारा व्यक्त करना: जैसे संख्या 4672.4 पांच सार्थक अंकों तक सही होगी ।

परिशुद्धता (या विभ्रम) के स्तर को व्यक्त करने के लिए $\pm$ चिन्हों का प्रयोग बड़ी ही उपयोगी प्राविधि है। ये चिन्ह यह स्पष्ट करते हैं कि विभ्रम की अधिकतम एवं निम्नतम सीमा क्या हो सकती है। वे सीमाएँ जिनके बीच वास्तविक विभ्रम का होना अनिवार्य है शाक्य विभ्रम (possible error) कहलाती है। 5,000 $\pm$ 500 को लीजिए। इसमें अधिकतम शाक्य विभ्रम 500 है। यदि किसी संख्या को हज़ार तक निकटतम पूर्णांक विधि द्वारा उपसादित किया जाए तो विभ्रम की उच्चतम सीमा +500 तथा निम्नतम सीमा −500 होगी। अतः विभ्रम को $\pm$500 लिखा जाएगा। इसी प्रकार, यदि किसी संख्या का संक्षेपण निकटतम सैंकड़े तथा दहाई तक किया जाए तो उसका शाक्य विभ्रम क्रमशः $\pm$50 तथा $\pm$5 होगा। अधिकतम शाक्य विभ्रम का अनुमान संख्याओं की पूर्णांकन विधि पर आधारित होता है।

3.4.2 सन्निकटमान सम्बंधी विभ्रमों का मापन (Measurement of Errors of Approximation)

उपसादन के संदर्भ में – विभ्रम का अर्थ क्या होता है और उसके कारण कौन-कौन से होते हैं – इन सभी तथ्यों का उल्लेख ऊपर किया जा चुका है। अब हम इन विभ्रमों को मापने की विभिन्न विधियों का अध्ययन करेंगे।

i) **निरपेक्ष विभ्रम (Absolute error)**: अनुमानित मूल्य एवं वास्तविक मूल्य का अंतर निरपेक्ष विभ्रम कहलाता है।

यहाँ निरपेक्ष विभ्रम (A E) = $x - x'$

यहाँ x = वास्तविक मूल्य (True value)

x' = अनुमानित मूल्य (Estimated value)

AE = निरपेक्ष विभ्रम (Absolute Error)

निरपेक्ष विभ्रम धनात्मक या ऋणात्मक हो सकता है। जैसे 5,000 $\pm$ 500 की स्थिति में अधिकतम निरपेक्ष विभ्रम किसी भी दशा में 500 तक हो सकता है। यदि वास्तविक मूल्य अनुमानित मूल्य से अधिक हो तो विभ्रम धनात्मक और यदि वास्तविक मूल्य अनुमानित मूल्य से कम हो तो विभ्रम ऋणात्मक होगा।

मान लीजिए किसी संपूर्ण राज्य तथा उसकी राजधानी की जनसंख्याएँ क्रमशः 2,71,70,314 तथा 26,39,766 हैं। यदि इन संख्याओं को निकटतम लाख तक उपसादित किया जाए तो संपूर्ण राज्य की जनसंख्या 272 लाख तथा राजधानी की जनसंख्या 26 लाख होगी।

प्रथम स्थिति में उपसादित मूल्य वास्तविक मूल्य से अधिक है, जबकि दूसरी स्थिति में उपसादित मूल्य वास्तविक मूल्य से कम है। अब हम नीचे इन दोनों स्थितियों में निरपेक्ष विभ्रम (AE) की गणना करेंगे।

राज्य की जनसंख्या के लिए

निरपेक्ष विभ्रम = वास्तविक मूल्य (True value) – उपसादित मूल्य (Approximate value)

= 2,71,70,314 − 2,72,00,000

= − 29,686

राजधानी की जनसंख्या के लिए

निरपेक्ष विभ्रम = वास्तविक मूल्य – उपसादित मूल्य

= 26,39,766 − 26,00,000

= 39,766

उपरोक्त गणनाएँ प्रथम स्थिति में ऋणात्मक तथा दूसरी स्थिति में धनात्मक निरपेक्ष विभ्रम दर्शाती हैं।

ii) **सापेक्ष विभ्रम (Relative error)**: सम्पूर्ण राज्य का निरपेक्ष विभ्रम (−29,686) और उसकी राजधानी की जनसंख्या के निरपेक्ष विभ्रम (39,766) में कोई खास अंतर नहीं है। यद्यपि राज्य की जनसंख्या राजधानी की जनसंख्या से दस गुणा अधिक है। यदि हम यह जानना चाहें कि कौनसा-विभ्रम अधिक सार्थक है तो निरपेक्ष विभ्रम से इसका सही ज्ञान नहीं होता। अर्थात क्या 272 लाख की संख्या में 29,686 का विभ्रम 26 लाख की संख्याएँ 39,766 के विभ्रम से ज्यादा सार्थक है? इसकी जानकारी के लिए विभ्रम को वास्तविक या उपसादित मूल्य के अंश या अनुपात में व्यक्त किया जाना चाहिए। इस कार्य के लिए सापेक्ष विभ्रम की गणना अधिक उपयोगी होगी। अतः यदि निरपेक्ष विभ्रम को उपसादित या वास्तविक मूल्य के अनुपात में व्यक्त किया जाए तो इस प्रकार प्राप्त

संख्या सापेक्ष विभ्रम का माप होगी। इसे निम्न सूत्र द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है।

$$\text{सापेक्ष विभ्रम} = \frac{\text{निरपेक्ष विभ्रम}}{\text{अनुरूपी उपसादित मूल्य}}$$

आइए, अब हम निरपेक्ष विभ्रम की गणना में प्रयुक्त उदाहरण से ही राज्य तथा राजधानी की जनसंख्याओं का उपसादन करने में होने वाले सापेक्ष विभ्रम की गणना करें:

राज्य का सापेक्ष विभ्रम = −29,686 ÷ 2,72,00,000 = −0.0011

राजधानी का सापेक्ष विभ्रम = 39,766 ÷ 26,00,000 = 0.0153

राजधानी की जनसंख्या के उपसादन में विभ्रम की मात्रा दस गुना से अधिक है। ऐसा इसलिए हुआ कि राजधानी की जनसंख्या सम्पूर्ण राज्य की जनसंख्या के 1/10 से भी कम है।

टिप्पणी: राज्य की जनसंख्या को 272 लाख −0.001 तथा राजधानी की जनसंख्या को 26 लाख +0.0153 के रूप में भी व्यक्त किया जा सकता है।

प्रतिशत विभ्रम (Percentage error) : यदि सापेक्ष विभ्रम को प्रतिशत के रूप में दिखाया जाए तो उसे प्रतिशत विभ्रम कहते हैं। यदि सापेक्ष विभ्रम को प्रतिशत में बदल दिया जाता है तो उससे समझने में सुगमता होती है।

प्रतिशत विभ्रम (P.E.) = सापेक्ष विभ्रम × 100

अतः राज्य की जनसंख्या का प्रतिशत विभ्रम = −0.0011 × 100 = −0.11% तथा

राजधानी की जनसंख्या का प्रतिशत विभ्रम = 0.0153 × 100 = 1.53% है।

राजधानी का प्रतिशत विभ्रम समस्त राज्य के प्रतिशत विभ्रम के 10 गुना से भी अधिक है। वास्तव में समस्त सांख्यिकीय विभ्रम के अध्ययन का आधार सापेक्ष एवं प्रतिशत विभ्रम ही होते हैं। अतः तुलना करने के लिए सापेक्ष एवं प्रतिशत विभ्रम, निरपेक्ष विभ्रम से कहीं अधिक उपयोगी सिद्ध होते हैं।

उदाहरण 2

यदि संख्या 2,234.752 को निम्नलिखित स्थानों तक उपसादित किया गया हो:

i) निकटतम दशमवलों से दो अंकों तक
ii) निकटतम पूर्ण इकाई तक
iii) निकटतम सैंकड़ों तक
iv) निकटतम हज़ार तक

तो सापेक्ष तथा प्रतिशत विभ्रम ज्ञात कीजिए।

पूर्णांकन विधि (1)	पूर्णांकन मूल्य (2)	अधिकतम निरपेक्ष संभावित विभ्रम (3)	सापेक्ष विभ्रम (स्तम्भ 3÷2) (4)	प्रतिशत विभ्रम (स्तम्भ 4×100) (5)
निकटतम दशमलवों से दो अंकों तक	2,234.75	±0.005	±0.000002 मामूली	±0.0002 % मामूली
निकटतम पूर्ण इकाई तक	2,235	±0.5	±0.0002	±0.02 %
निकटतम सैंकड़ों तक	2,200	±50	±0.0227	±2.27 %
निकटतम हजार तक	2,000	±500	±0.25	±25 %

यदि आप उपरोक्त उदाहरण का सावधानी से अध्ययन करेंगे तो आपको निम्न निष्कर्ष प्राप्त होंगे:

i) पूर्णांकन के क्रम में बढ़ोत्तरी अर्थात अधिक संख्याओं को छोड़ना – इससे निरपेक्ष विभ्रम की मात्रा बढ़ती है।

ii) पूर्णांकन के क्रम में बढ़ोत्तरी के साथ-साथ सापेक्ष विभ्रम की मात्रा भी बढ़ती है। अतः पूर्णांकन के ऊँचे क्रम के कारण सुतथ्यता कम हो जाती है।

3.4.3 निकटतम पूर्णांकों तक गणना (Computation with Rounded Numbers)

पूर्णांकित संख्याओं के साथ जोड़ तथा घटाव करते समय यह ध्यान रखने की बात है कि उत्तर न्यूनतम परिशुद्ध संख्याओं से अधिक परिशुद्ध नहीं हो सकता। उदाहरणार्थ – तीन संख्याओं (i) 357 (574) तथा 600 को जोड़िए। चूँकि संख्या 600 को सैंकड़े तक पूर्णांकित किया गया है इसलिए इसमें अल्पतम परिशुद्धता होगी। इन तीनों संख्याओं का जोड़ 1531 है। किन्तु इसको सैंकड़े तक पूर्णांकित करके परिणाम संख्या 500 द्वारा व्यक्त किया जाएगा। उच्चतर यथार्थता को व्यक्त करने के लिए किया गया कोई भी प्रयास मिथ्या परिशुद्धता को जन्म देता है।

इसी प्रकार, पूर्णांकित संख्याओं द्वारा गुणा, भाग करते समय यह सुनिश्चित कर लेना चाहिए कि उत्तर में गणना में प्रयुक्त पूर्णांकों में निम्नतम संख्या से अधिक सार्थक संख्याएँ नहीं है। जैसे यदि पूर्णांकित संख्या 2.92 को 2.6 से गुणा किया जाए तो गुणनफल 7.592 होगा। यहाँ पर उत्तर को केवल दो सार्थक अंकों तक ही व्यक्त किया जाना चाहिए क्योंकि 2.6 में केवल दो ही सार्थक अंक हैं। अतः उत्तर केवल 7.6 के रूप में ही व्यक्त किया जाएगा। निष्कर्ष यह है कि जब गणनाएँ पूर्णांकित संख्याओं मे की जाती हैं तब परिणामों में भी सीमित परिशुद्धता ही पाई जाती है। आइए, अब इसका अध्ययन अब विस्तार से करें।

3.4.4 गणितीय प्रक्रियाओं का विभ्रमों पर प्रभाव (Effect of Mathematical Operations on Errors)

उपसादित संख्याओं से सम्बद्ध विभ्रम गणितीय प्रक्रियाओं, जैसे – जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग आदि से प्रभावित होते हैं। अब हम प्रत्येक के प्रभाव का अध्ययन करेंगे।

जोड़ का प्रभाव (Effect of addition) : किसी जोड़ या योग का निरपेक्ष विभ्रम उसके संघटकों के निरपेक्ष विभ्रमों के योग के बराबर होता है। जैसे 500 (निकटतम दहाई तक) तथा 400 (निकटतम सैंकड़े तक) को जोड़िए। इसे संक्षेप में निम्न प्रकार से भी व्यक्त किया जा सकता है:

$$(500\pm5) + (400\pm50) = 900\pm55$$

उपरोक्त को विस्तार में निम्नलिखित सारणी द्वारा भी प्रस्तुत किया जा सकता है:

संख्या	विभ्रम	निरपेक्ष विभ्रम	अधिकतम मूल्य	न्यूनतम मूल्य
500	निकटतम दहाई तक	5	505	495
400	निकटतम सैंकड़े तक	50	450	350
योग		55	955 =900+55	845 =900−55

निष्कर्ष: निरपेक्ष विभ्रम = $\pm$55 (5+50)
सापेक्ष विभ्रम = $\pm$0.061 ($\pm$55/900)
प्रतिशत विभ्रम = $\pm$6.1% ($\pm$0.061 × 100)

घटाव का प्रभाव (Effect of substraction) : अंतर का निरपेक्ष विभ्रम उसके संघटकों के विभ्रमों के योग के बराबर होता है। जैसे संख्या 500 (निकटतम दहाई तक) में से संख्या 400 (निकटतम सैंकड़े

तक) को घटाइए। अंतर $500-400 = 100$ का विभ्रम $5+50 = 55$ होगा।
संक्षेप में: $(500 \pm 5) - (400 \pm 50) = 100 \pm 55$

अब हम इसकी विस्तृत व्याख्या करेंगे। वास्तव में विभ्रम उस दशा में अधिकतम होगा, जब बड़ी संख्या (बड़ा मूल्य) उच्चतम स्थान पर तथा छोटी संख्या (अल्प मूल्य) निम्नतम स्थान पर अथवा इसके विपरीत, दशा में होगी। अतः अन्तर के निरपेक्ष विभ्रम की गणना निम्न प्रकार से की जाएगी:

संख्या	विभ्रम	निरपेक्ष विभ्रम	घटाने की क्रिया द्वारा	
			अधिकतम मूल्य	न्यूनतम मूल्य
500	निकटतम दहाई तक	5	505 (बड़ा मूल्य)	495 (छोटा मूल्य)
400	निकटतम सैंकड़े तक	50	350 (छोटा मूल्य)	450 (बड़ा मूल्य)
100	योग	55	155 (= 100+55)	45 45 (= 100−55)

संक्षेप में : निरपेक्ष विभ्रम = ± 55 (अर्थात् 5+50)
सापेक्ष विभ्रम = ± 0.55 (अर्थात् 55/100)
प्रतिशत विभ्रम = ± 55 % (अर्थात् $\pm 0.55 \times 100$)

यदि अब आप जोड़ एवं घटाने की क्रिया से प्राप्त विभ्रम की तुलना करें तो उससे निम्न निष्कर्ष निकालेंगे:

i) घटाने की प्रक्रिया में जोड़ने की प्रक्रिया की अपेक्षा सापेक्ष विभ्रम की मात्रा अधिक होती है। (क्योंकि इसमें आधार या हर छोटा है)।
ii) दोनों दशाओं में निरपेक्ष विभ्रम समान होता है। तथा
iii) दोनों दशाओं में (जोड़ने एवं घटाने में) निरपेक्ष विभ्रम — संघटकों के निरपेक्ष विभ्रमों के योग के बराबर होता है।

गुणन प्रक्रिया का प्रभाव (Effect of Multiplication) : एक गुणनफल का सापेक्ष विभ्रम उसके संघटकों के सापेक्ष विभ्रमों के योग के लगभग बराबर होता है। संख्या 500 (निकटतम दहाई तक) को संख्या 40 (निकटतम इकाई तक) से गुणा कीजिए। अब संख्या 500 में निरपेक्ष विभ्रम ± 5 और साक्षेप विभ्रम $\pm 1\%$ है। इसी प्रकार संख्या 40 में निरपेक्ष विभ्रम ± 0.5 और साक्षेप विभ्रम $\pm 1.25\%$ है। संख्या 500 तथा 40 का गुणनफल 20,000 है। संक्षेप में इसे निम्न प्रकार से भी व्यक्त किया जा सकता है:

$$(500 \pm 1\%) \times (40 \pm 1.25\%) = 20{,}000 \pm 2.25\%$$

यहाँ पर प्रतिशत सापेक्ष विभ्रम ± 2.25 है,जो $\pm 1\%$ तथा $\pm 1.25\%$ का योग है।

इसकी आगे और व्याख्या करने पर हम गुणनफल का अधिकतम एवं न्यूनतम मूल्य इस प्रकार प्राप्त करेंगे:
अधिकतम मूल्य:
$(500 \pm 5) \times (40 \pm 0.5) = (500 \times 40) + (500 \times 0.5) + (5 \times 40) + (5 \times 0.5)$.........., (क)
न्यूनतम मूल्य :
$(500-5) \times (40-0.5) = (500 \times 40) - (5 \times 40) - (0.5 \times 500) + (5 \times 0.5)$.........., (ख)

सामान्यतः जब विभ्रम बहुत ही लघु (मामूली) होते हैं तो दोनों विभ्रमों के गुणनफल (अर्थात् ऊपर खंड (क) और (ख) में 5×0.5) की उपेक्षा कर दी जाती है। अतः संख्या 500×40 अर्थात 20,000 में विभिन्न प्रकार के विभ्रमों की गणना निम्न क्रिया विधि से की जाती है:

निरपेक्ष विभ्रम = $(5 \times 40) + (0.5 \times 500) = 450$
सापेक्ष विभ्रम = $(450/20,000) = 0.0225$
प्रतिशत विभ्रम = $(0.0225 \times 100) = 2.25\%$

भाग प्रक्रिया का प्रभाव (Effect of division) : भागफल का सापेक्ष विभ्रम, उसके संघटकों के सापेक्ष विभ्रमों के योग के लगभग बराबर होता है। इसको समझने के लिए आइए हम वही उदाहरण लें, जिसको पहले हमने गुणन प्रक्रिया में लिया था और उसका विभाजन करके देखें। जैसे $500 \div 40 = 12.5$। अब हम सापेक्ष विभ्रमों को ध्यान में रखते हुए पाएंगे किः

$$(500 \pm 1\%) \div (40 \pm 1.25\%) = 12.5 \pm 2.25\%$$

इसका अर्थ है कि भागफल का प्रतिशत सापेक्ष विभ्रम 2.25% है, जोकि उसके संघटकों के दो सापेक्ष विभ्रमों 1% तथा 1.25% का योग है।

इसकी जाँच के लिए हम विभाजन की न्यूनतम एवं अधिकतम संख्या को निकालते हैं और यह देखते हैं कि यह 500 को 40 से विभाजित करके अर्थात् 12.5 से कितना अधिक अथवा कम है।

अब प्रश्न यह है कि विभाजन की न्यूनतम संख्या (मूल्य) कैसे प्राप्त होगी? इसके लिए अंश के न्यूनतम मूल्य को (अर्थात् $500-1\%$) हर के अधिकतम मूल्य $(40+1.25\%)$ से विभाजित किया जाएगा।

अब $500-1\% = 500-5 = 495$, तथा
$40+1.25\% = 40 \pm 0.5 = 40.5$

अतः विभाजन का न्यूनतम मूल्य $(495 \div 40.5) = 12.22$ होगा तथा 12.50 और 12.22 का अंतर 0.28 निरपेक्ष विभ्रम होगा। सापेक्ष प्रतिशत विभ्रम $(0.28 \div 12.5 \times 100) = 2.24\%$ है, जोकि उसके दोनों संघटकों के सापेक्ष प्रतिशत विभ्रमों 1% तथा 1.25% के योग के लगभग बराबर है।

इसी प्रकार, हम विभाजन की अधिकतम संख्या (मूल्य) निकालते हैं और देखते हैं कि यह $(500 \div 40)$ अर्थात् 12.5 से कितना कम या अधिक है। वास्तव में यह $[(500+5) \div (40-0.5) - 12.5 = 505 \div 39.5 - 12.5 = 0.28]$ 0.28 होगा।

इस अंतर और पूर्व प्राप्त अंतर में कोई फर्क नहीं है।
इससे यह सिद्ध होता है कि भागफल सापेक्ष विभ्रम उसके संघटकों के सापेक्ष विभ्रमों के योग के लगभग बराबर होता है।

बोध प्रश्न ख

1 सांख्यिकीय विभ्रमों के स्रोत कौन-कौन से हैं?

....

....

....

2 उपसादन प्रक्रिया में सांख्यिकीय विभ्रम को किन विधियों से व्यक्त किया जाता है?

....

....

....

3 निम्नलिखित कथन सही है या गलत, बताइए

i) सांख्यिकीय विभ्रम का आशय गणना की त्रुटियों से होता है। ....

ii) नीचे की ओर पूर्णांकन से धनात्मक विभ्रम उत्पन्न होते हैं। ....

iii) निरपेक्ष तथा सापेक्ष विभ्रम में कोई अंतर नहीं होता। ....

iv) एक गुणनफल का कुल निरपेक्ष विभ्रम, उसके संघटकों के निरपेक्ष विभ्रमों के गुणनफल के बराबर होता है। ....

v) भागफल का सापेक्ष विभ्रम उसके संघटकों के सापेक्ष विभ्रमों के योग के बराबर होता है ....

4 यदि अ = 25000 तथा ब = 500, तो निम्न की गणना कीजिए तथा परिणाम में विभ्रम की सीमा ज्ञात कीजिएः

i) क + ख ....

ii) क − ख ....

iii) क × ख ....

iv) क ÷ ख ....

3.4.5 अभिनत एवं अनभिनत विभ्रम (Biased and Unbiased Errors)

जैसा कि आप जानते हैं, सांख्यिकी में विभ्रमों से बचाव नहीं हो सकता । यद्यपि हमने इसकी अपरिहार्यता को स्वीकार किया है, फिर भी यह जानना आवश्यक होगा कि यह विभ्रम अभिनत विभ्रम हैं अथवा अनभिनत विभ्रम । अब हम नीचे इन दो प्रकार के विभ्रमों की चर्चा करेंगे ।

अभिनत विभ्रम (Biased Errors) : ऐसे विभ्रम जो एक ही दिशा में होते हैं, अभिनत विभ्रम कहलाते हैं । इस स्थिति में अनुमानित संख्याओं (मूल्यों) का योग वास्तविक संख्याओं (मूल्यों) के योग से या तो बहुत अधिक होता है, या फिर बहुत कम ।

मान लीजिए, किसी अभ्यास में आपने सभी संख्याओं का नीचे की ओर पूर्णांकन कर दिया है । इससे अभिनत विभ्रम उत्पन्न होता है । क्योंकि नीचे की ओर पूर्णांकन करने के बाद सभी संख्याएँ अपने वास्तविक मूल्यों से कम होंगी । जैसे संख्या 14,132 तथा 5,396 का पूर्णांकन क्रमशः 10,100 तथा 5,000 में किया गया है । ऐसे विभ्रमों का प्रभाव एक ही दिशा में होता है और यह बढ़ता जाता है । इनकी मात्रा क्रमशः +4, +32 और +396 है । अतः यदि संख्या 14,132 और 5,396 (जिनका योग है 5,542) को क्रमशः 10,100 तथा 5,000 (जिनका योग 5,110) में पूर्णांकित किया जाए तो इनके योगों का विभ्रम (5,542−5,110) 432 होगा, जोकि विभ्रम 4+32+396 के बराबर है । ऐसे विभ्रम संचयी प्रकृति के होते हैं । इसलिए इन्हें संचयी विभ्रम (cumulative errors) भी कहा जाता है । ये विभ्रम संमकों के संग्रहण के दौरान प्रगणकों के पक्षपात या माप-यंत्रों के दोष के कारण भी उत्पन्न हो सकते हैं । जैसे – व्यक्तिगत पक्षपात से प्रेरित होकर कोई सूचना देने वाला सूचना को बढ़ा-चढ़ा कर (या कम करके) देता है या फिर कपड़ा नापने की "मीटर राड" कुछ छोटी हो सकती है । इन दोनों स्थितियों में संचयी विभ्रम या अभिनत विभ्रम उत्पन्न होता है । ऊपर की ओर पूर्णांकन अथवा नीचे की ओर पूर्णांकन की प्रक्रिया से भी अभिनत विभ्रम उत्पन्न होता है । किन्तु यदि पूर्णांकन निकटतम अंक तक किया जाता है तो इसमें ऐसे विभ्रम की संभावना नहीं होती, क्योंकि यदि अवलोकन पर्याप्त होते हैं तो उपसादन में कुछ संख्याओं का मूल्य बढ़ जाता है और कुछ का कम हो जाता है । अतः विभ्रमों का योग आपस में निरस्त हो जाता है ।

अनभिनत विभ्रम (Unbiased errors) : जब विभ्रम आपस में एक-दूसरे को निरस्त कर देते हैं अर्थात् एक विभ्रम दूसरे विभ्रम के प्रभाव को समाप्त कर देता है तो इन्हें अनभिनत या समकारी विभ्रम (compensating errors) कहा जाता है । जैसे संख्या 21, 22, 24, 26, 27 और 28 को निकटतम दहाई तक पूर्णांकित करके कुल विभ्रम ज्ञात कीजिए । इसमें प्रारंभ की तीन संख्याओं – 21, 22 और 24 में प्रत्येक का उपसादित मूल्य 20 होगा तथा इनके विभ्रमों का योग +7 होगा । इसी प्रकार शेष संख्याओं – 26, 27 तथा 28 में प्रत्येक का मूल्य 30 होगा और संबंधित विभ्रमों का योग – 9 होगा । अतः इन सभी छः संख्याओं के विभ्रमों का योग (7−9) −2 होगा । इससे यह स्पष्ट होता है कि यदि विभ्रम अनभिनत हैं तो कुछ स्थितियों में अनुमानित मूल्य वास्तविक मूल्य से कम होते हैं और कुछ स्थितियों में अधिक । अतः ये विभ्रम धनात्मक एवं ऋणात्मक, दोनों हो सकते हैं जो एक दूसरे के प्रभाव को निरस्त या कम कर देते हैं तथा शुद्ध विभ्रम की मात्रा बहुत कम रह जाती है । किसी अनुसंधान में अवलोकनों की संख्या जितनी अधिक होगी, उतनी ही कम अनभिनत विभ्रम की मात्रा होगी । अतः अनभिनत विभ्रम की मात्रा को कम करने की एक विधि अनुसंधान में अवलोकनों की संख्या को बढ़ाना है । उदाहरण 3 का सावधानी से अध्ययन कीजिए ।

उदाहरण 3

वास्तविक संख्या	स्थिति I		स्थिति II		स्थिति III	
	अनभिनत पूर्णांकन	अनभिनत निरपेक्ष विभ्रम	न्यूनतम उपसादन (000)	अभिनत निरपेक्ष विभ्रम	न्यूनतम उपसादन (000)	अभिनत निरपेक्ष विभ्रम
17,118	17,000	+118	17,000	+118	18,000	−882
8,362	8,000	+362	8,000	+362	9,000	−638
10,509	11,000	−491	10,000	+509	11,000	−491
15,443	15,000	+443	15,000	+443	16,000	−557
वास्तविक निरपेक्ष विभ्रम		+432		+1,432		−2568
सापेक्ष विभ्रम		+0.847%		+2.864%		−4.756%

उपरोक्त उदाहरण से हमें निम्न निष्कर्ष प्राप्त होते हैं:

i) अभिनत विभ्रम की स्थिति से अनभिनत विभ्रम की स्थिति में निरपेक्ष विभ्रम की मात्रा कम होती है।

ii) अनभिनत विभ्रम की स्थिति में सापेक्ष विभ्रम की मात्रा भी कम होती है। और यह अवलोकनों की संख्या में बढ़ोतरी के साथ घटती जाती है।

iii) अभिनत विभ्रम की दशा में निरपेक्ष एवं सापेक्ष, दोनों विभ्रमों की मात्रा अधिक होती है। वस्तु स्थिति यह है कि अवलोकनों की संख्या में वृद्धि के साथ ये भी बढ़ जाते हैं।

3.4.6 अभिनत एवं अनभिनत विभ्रमों का अनुमान

जब संख्याओं का उपसादन किया जाता है तो उपसादन प्रक्रिया में होने वाले विभ्रम का अनुमान लगाना भी आवश्यक हो जाता है। कभी-कभी वास्तविक संख्याएँ ज्ञात नहीं होती, केवल उपसादित संख्याएँ ही उपलब्ध होती हैं। ऐसी स्थिति में विभ्रम की वास्तविक मात्रा (अर्थात् वास्तविक मूल्य एवं अनुमानित मूल्य का अंतर) का ज्ञान नहीं हो पाता। बल्कि इसका केवल अनुमान लगाया जा सकता है। इस प्रक्रिया को समझने के लिए हम उदाहरण 3 को लें उसमें यह भी मान लें कि प्रथम स्तम्भ में दिये गए वास्तविक मूल्य अज्ञात हैं। अब प्रश्न यह उठता है कि योग में सापेक्ष विभ्रम की गणना कैसे की जाए। अनुमानित प्रक्रिया इस तथ्य पर आधारित होगी कि विभ्रम अभिनत है या अनभिनत। अब हम दोनों स्थितियों में प्रयुक्त होने वाली विधियों का अध्ययन करेंगे।

अनभिनत विभ्रम की स्थिति में अनुमान लगाना : जब संख्याओं को निकटतम हज़ार तक पूर्णांकित किया जाता है तो किसी एक संख्या या मूल्य में निरपेक्ष अनभिनत विभ्रम 0 से 500 तक हो सकता है। कथित उदाहरण 3 में संख्या 17,118 में निम्नतम विभ्रम 118 है, जबकि एक अन्य संख्या 10,509 में अधिकतम विभ्रम की मात्रा 491 है। किसी भी हज़ार तक पूर्णांकित संख्या में विभ्रम न्यूनतम मात्रा शून्य तथा अधिकतम मात्रा 500 तक हो सकती है। अतः किसी भी ऐसी संख्या में औसत निरपेक्ष विभ्रम (0+500÷2) को 250 माना जा सकता है। औसत निरपेक्ष विभ्रम का उत्तम अनुमान निम्न प्रक्रिया से प्राप्त हो सकता है:

i) पदों की संख्या का वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

ii) फिर उसे औसत निरपेक्ष विभ्रम से गुणा कीजिए।

iii) गुणनफल उत्तम अनुमान होगा।

(इस सूत्र को सिद्ध करने की क्रिया इस पाठ्यक्रम के क्षेत्र से बाहर है)

सूत्र के रूप में:

(अनभिनत विभ्रम की दशा में)

$$\text{निरपेक्ष विभ्रम} = \text{औसत निरपेक्ष विभ्रम} \times \sqrt{N}$$

यहाँ N = पदों की संख्या

इसी सूत्र के द्वारा हम वर्तमान उदाहरण से औसत निरपेक्ष विभ्रम (A.A.E. or Average Absolute Error) की गणना करेंगे।

निरपेक्ष विभ्रम $= 250 \times \sqrt{4}$

$= 500$

इसी प्रकार, हम निम्न सूत्र द्वारा सापेक्ष विभ्रम की भी गणना करेंगे:

सापेक्ष विभ्रम = औसत निरपेक्ष विभ्रम $\times \sqrt{N} \div$ अनुमानित योग

$= 250 \times \sqrt{4} \div 5{,}10{,}000$

$= 0.0098$ या 0.98%

अभिनत विभ्रम की स्थिति में अनुमान लगाना : यदि किसी संख्या (मूल्य) को निकटतम हज़ार तक उपसादित किया गया है तो इसमें अभिनत विभ्रम 0 से 999 तक हो सकता है। अतः इस स्थिति में औसत निरपेक्ष विभ्रम $(0+999\div2)$ 499.5 होगा। इस प्रक्रिया के लिए निम्न सूत्रों का प्रयोग किया जाएगा

अभिनत विभ्रम की स्थिति में :

i) निरपेक्ष विभ्रम = औसत निरपेक्ष विभ्रम $\times N$

ii) सापेक्ष विभ्रम = औसत सापेक्ष विभ्रम $\times N \div$ अनुमानित योग

इस सूत्र के द्वारा अब हम वर्तमान उदाहरण से औसत विभ्रम की गणना करेंगे।

निरपेक्ष विभ्रम $= 499.5 \times 4$

$= 1{,}998$

इसी प्रकार दूसरे सूत्र द्वारा सापेक्ष विभ्रम का भी अनुमान लगाया जा सकता है:

नीचे की ओर पूर्णांकन की स्थिति में :

सापेक्ष विभ्रम $= 499.5 \times 4 \div 50{,}000$

$= 0.0399$ या 3.99%

ऊपर की ओर पूर्णांकन की स्थिति में :

सापेक्ष विभ्रम $= 499.5 \times 4 \div 54{,}000$

$= 0.037$ या 3.7%

इस उदाहरण में आप देखेंगे कि अनुमानित सापेक्ष तथा निरपेक्ष विभ्रम वास्तविक सापेक्ष तथा निरपेक्ष विभ्रमों से, जिनकी गणना तब की गई थी जब यथार्थ संख्याएँ उपलब्ध थीं, कम हैं। यदि अवलोकनों का संख्या अधिक है, तो यह अंतर बहुत कम होगा।

3.4.7 प्रतिदर्शी तथा गैर-प्रतिदर्शी विभ्रम (Sampling and Non-sampling Errors)

अभिनत तथा अनभिनत विभ्रमों के आशय एवं अनुमान प्रक्रिया से आप अब तक भली प्रकार से अवगत हो चुके हैं। अतः आगे हम प्रतिदर्श तथा गैरप्रतिदर्श विभ्रमों के बारे में चर्चा करेंगे।

प्रतिदर्श विभ्रम (Samling Error)

प्रतिदर्शों के आधार पर समष्टि के बारे में निष्कर्ष प्राप्त करने में जो विभ्रम उत्पन्न होते हैं, उन्हें प्रतिदर्श विभ्रम कहा जाता है। प्रतिदर्श की इकाइयों के चुनाव में पक्षपात या अभिनत के कारण प्रतिदर्श विभ्रम उत्पन्न होते हैं। ये विभ्रम इसलिए होते हैं क्योंकि एक समष्टि का अध्ययन उसके केवल एक ही हिस्से या प्रतिदर्श पर ही आधारित होता है। यदि किसी जाँच में समस्त समष्टि (सभी इकाइयों का) का अध्ययन किया जाए तो इससे प्रतिदर्श विभ्रम को समाप्त किया जा सकता है। ऐसा भी देखा गया है कि यदि एक समष्टि से दो या अधिक प्रतिदर्श दैव-प्रतिचयन विधि द्वारा लिए जाएँ तो उनके परिणाम एक जैसे नहीं होते। यहाँ तक कि दोनों प्रतिदर्शों के निष्कर्ष समग्र के निष्कर्ष से भी भिन्न हो सकते हैं। ऐसा इसलिए होता है क्योंकि चुने गए दोनों प्रतिदर्शों की इकाइयाँ समरूप नहीं होतीं। अतः संक्षेप में, प्रतिदर्श विभ्रम से

आशय समष्टि एवं प्रतिदर्श के निष्कर्षों की भिन्नता से होता है, बशर्ते कि दोनों के निष्कर्ष एक ही गणना प्रणाली के द्वारा प्राप्त किए गए हों। प्रतिदर्श विभ्रम की यथार्थ मात्रा विभिन्न प्रतिदर्शों में भिन्न होती है। भले ही प्रतिदर्श का चयन कितनी ही सावधानी के साथ किया जाए, फिर भी प्रतिदर्श विभ्रम की संभावना से बचा नहीं जा सकता है। अर्थात् यह अपरिहार्य है। हाँ इसे सर्वेक्षण की उपयुक्त योजना द्वारा कम अवश्य किया जा सकता है।

प्रतिदर्श विभ्रम दो प्रकार के होते हैं: i) अभिनत प्रतिदर्श विभ्रम, तथा ii) अनभिनत प्रतिदर्श विभ्रम। आइए, अब इनके बारे में विस्तारपूर्वक वर्णन करें।

i) **अभिनत प्रतिदर्शी विभ्रम** : पक्षपात (अभिनत) की स्थिति उस समय होती है, जब सर्वेक्षण में एकत्रित किए गए समंकों के मूल्यों में केवल एक ही दिशा की ओर विचलन की प्रवृत्ति हो। अतः इस प्रकार के विभ्रम परस्पर एक-दूसरे को निरस्त नहीं करते। ये कई कारणों से उत्पन्न होते हैं। जैसे — प्रतिदर्श इकाइयों के चयन में पक्षपात, समंकों का त्रुटिपूर्ण संग्रहण, तथा विश्लेषण में पक्षपात आदि। अभिनत प्रतिदर्श विभ्रम की संभावना उस समय अधिक हो जाती है, जब प्रतिदर्श की इकाइयों का चयन दैव प्रतिचयन विधि के स्थान पर सविचार प्रतिचयन विधि द्वारा होता है।

   दैव प्रतिचयन द्वारा उपलब्ध प्रतिदर्श में कुछ ऐसी इकाइयाँ भी हो सकती हैं, जिनसे सूचना प्राप्त करने में कठिनाइयाँ हों और अनुसंधानकर्ता उनके स्थान पर समष्टि से कुछ अन्य इकाइयाँ प्रस्थापित कर ले। यदि इन प्रस्थापित इकाइयों का चुनाव दैव प्रतिचयन विधि द्वारा नहीं हुआ है तो इससे भी अभिनत उत्पन्न हो सकता है। इसी प्रकार, कभी-कभी सूचना देने वाले (प्रत्यार्थी) पूरी सूचना नहीं देते और ऐसी स्थिति में अनुसंधानकर्ता स्वयं शेष सूचनाओं को भर लेता है तो इससे भी अभिनत हो सकता है। कुछ स्थितियों में सूचकों (respondent) द्वारा जान-बूझकर गलत सूचनाएँ दी जाती हैं, विशेषकर जब वे किसी तथ्य को अनुसंधानकर्ता से छिपाना चाहते हैं। यह भी अभिनत का एक कारण बन जाता है। इनके अतिरिक्त अभिनत के कुछ अन्य कारण भी हो सकते हैं। जैसे — सूचना संकलन में जान-बूझकर पक्षपात करना, दोषपूर्ण माप या यंत्र का उपयोग तथा अनुसंधानकर्ता की अयोग्यता आदि। सूचना संकलन, कोडिंग तथा विश्लेषण की विधियों की भी कुछ परिसीमाएँ होती हैं, जिनके कारण अभिनत उत्पन्न हो सकता है। अवलोकनों की संख्या में वृद्धि के साथ-साथ अभिनत प्रतिदर्श विभ्रम की मात्रा भी बढ़ती जाती है अर्थात् इनकी प्रकृति संचयी होती है।

ii) **अनभिनत प्रतिदर्श विभ्रम** : समष्टि इकाइयों एवं प्रतिदर्श की इकाइयों (जिनका चयन समष्टि से ही हुआ हो) में संयोगात्मक अंतरों के कारण ऐसे विभ्रमों का उदय होता है। अतः जो विभ्रम संयोगवश उत्पन्न होते हैं उन्हें अनभिनत (पक्षहीन) प्रतिदर्श विभ्रम कहा जाता है। इनका उदय किसी पूर्वग्रह के कारण नहीं होता है। अवलोकनों की संख्या में वृद्धि के साथ इनमें कोई बढ़त नहीं होती। इसके विपरीत, जैसे-जैसे अवलोकनों की संख्या बढ़ती जाती है, वैसे-वैसे विभ्रम निष्प्रभावित होते जाते हैं। इसलिए इन्हें समकारी (Compensating) या असंचयी (Non-Cumulative) विभ्रम कहते हैं।

संक्षेप में, कुल प्रतिदर्श विभ्रम में अभिनत तथा अनभिनत विभ्रमों का समावेश होता है। किसी भी सर्वेक्षण (जाँच) में सांख्यिकीय विधि का यह मुख्य उद्देश्य होता है कि जहाँ तक संभव हो अभिनत विभ्रम को विलुप्त (समाप्त) किया जाए तथा अनभिनत विभ्रम को न्यूनतम स्तर पर लाया जाय।

गैर-प्रतिदर्श विभ्रम (Non-Sampling Error)

किसी भी सर्वेक्षण में चाहे वह संगणना विधि या प्रतिचयन विधि द्वारा किया गया हो, गैर-प्रतिदर्श विभ्रम उत्पन्न हो सकते हैं। गैर प्रतिदर्श विभ्रम में अभिनत विभ्रम तथा त्रुटियाँ (mistakes) दोनों शामिल होते हैं। ये विभ्रम संयोगात्मक या आकस्मिक नहीं होते।

अभिनत के अधिकतर कारक, जिनका उल्लेख प्रतिदर्श विभ्रमों के अंतर्गत किया गया है, संगणना विधि को भी प्रभावित करते हैं। इसमें कुछ अन्य कारकों को भी शामिल किया जा सकता है। जैसे — समष्टि की स्पष्ट परिभाषा न देना, जो सूचनाएँ प्राप्त की जानी हैं, उनमें स्पष्टता की कमी होना तथा साक्षात्कार की अक्षम विधि का प्रयोग करना आदि। अनुपयुक्त कोडिंग संगणना अथवा उपयोगीकरण प्रक्रियाओं के कारण अनेक त्रुटियाँ हो जाती हैं। अधिकांशतः गैर-प्रतिदर्श विभ्रम के प्रमुख कारण निम्न हो सकते हैं:

i) अनुपयुक्त तथा अस्पष्ट समंक प्रमाप, जोकि संगणना या सर्वेक्षण के उद्देश्यों के अनुकूल नहीं है।
ii) अनुपयुक्त प्रतिचयन विधियों, अपूर्ण प्रश्नावलियां तथा साक्षात्कार लेने का गलत ढंग।
iii) अनुसंधानकर्ता या सूचकों (सूचना देने वालों) का व्यक्तिगत पूर्वग्रह।
iv) प्रशिक्षित एवं योग्य अनुसंधानकर्ताओं की कमी।
v) संकलन एवं सारणीय न में त्रुटि (विभ्रम)

यह सूची अपने में पर्याप्त नहीं है। फिर भी, इससे कुछ प्रमुख संभावित कारणों का संकेत अवश्य मिलता है।

प्रतिदर्श तथा गैर-प्रतिदर्श विभ्रमों का योग कुल विभ्रमों के योग के अनुरूप होता है। किसी भी सर्वेक्षण का उद्देश्य कुल विभ्रमों के योग को न्यूनतम करना होता है। निम्न क्रियाओं से गैर प्रतिदर्श विभ्रम को बड़ी ही सुगमता से नियंत्रित किया जा सकता है।
(i) समष्टि की सुस्पष्ट परिभाषा देकर; (ii) सोच-समझकर एक उपयुक्त प्रश्नावली तैयार करके तथा उसका पूर्व परीक्षण करके; (iii) अनुसंधानकर्ताओं को प्रशिक्षित करके; तथा (iv) प्रत्येक स्तर पर तथा प्रत्येक कार्य की उचित जाँच एवं मार्ग दर्शन करके।

यह सब तभी संभव होगा जब जाँच की जाने वाली इकाईयाँ सीमित हों। अन्यथा इसमें समय और धन का अपव्यय होगा। लेकिन अगर प्रतिदर्श का आकार छोटा रखा जाता है तो इससे प्रतिदर्श विभ्रम की मात्रा बढ़ सकती है। इसलिए आप जब भी किसी सर्वेक्षण का आयोजन करें तो अपने सीमित साधनों (रुपया, समय, मानव संसाधन आदि) का बड़ी सावधानी से विनियोजन या बंटवारा कीजिए। हाँ, संसाधन का बंटवारा ऐसा होना चाहिए, जिससे प्रतिदर्श एवं गैर-प्रतिदर्श विभ्रमों को कम से कम किया जा सके तथा परिशुद्धता के उच्चतम स्तर को पाया जा सके

बोध प्रश्न ग

1 अभिनत विभ्रम एवं अनभिनत विभ्रम में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

2 प्रतिदर्श विभ्रम एवं गैर प्रतिदर्श विभ्रम में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

3 गैर-प्रतिदर्श विभ्रम के कौन-कौन से कारण होते हैं?

....

....

....

4 निम्नलिखित कथन सही है अथवा गलत, बताइए:

i) अनभिनत विभ्रम स्वभाव में संचयी होते हैं।
ii) अभिनत विभ्रम केवल तभी होता है, जब संख्याओं को पूर्णांकों तक उपसादित किया जाता है।
iii) प्रतिदर्श अध्ययनों में ही प्रतिदर्श विभ्रम उत्पन्न होते हैं।
iv) प्रतिदर्श सर्वेक्षण में गैर-प्रतिदर्श विभ्रम उत्पन्न नहीं होते।
v) दैव निदर्शन रीति से एक ही समष्टि के लिए गए दो प्रतिदर्शों से प्राप्त निष्कर्ष असमान हो सकते हैं

5 नौ संख्याओं को जोड़ा गया। योगफल में निरपेक्ष विभ्रम की गणना कीजिए, यदि उनका पूर्णांकन निकटतम (i) हजार तक तथा (ii) निकटतम दहाई तक किया गया हो।

....

....

....

3.5 सारांश

सांख्यिकीय समंक गणना, माप या अनुमान द्वारा प्राप्त किए जा सकते हैं। जब मदों की गणना की जाती है तो यथार्थ संख्याएँ या समंक प्राप्त हो सकते हैं। किन्तु मापन या अनुमान प्रक्रिया द्वारा प्राप्त समंकों मे पूर्ण परिशुद्धता का होना संभव नहीं होता, यद्यपि गणना प्रक्रिया द्वारा प्राप्त सूचनाओं में पूर्ण परिशुद्धता संभव होती है। फिर भी सदैव यह आवश्यक या वांछनीय नहीं होती है। ऐसा संभव है कि इससे अभीष्ठ स्पष्टता व्यक्त न होती हो। सांख्यिकी में किस स्तर तक की परिशुद्धता की अपेक्षा की जानी चाहिए यह अनुसंधान के उद्देश्य एवं प्रकृति पर निर्भर करता है। मिथ्या परिशुद्धता, जिसका आशय वांछनीय परिशुद्धता या निरपेक्ष परिशुद्धता से भी अधिक परिशुद्धता की अपेक्षा करना होता है, से बचना चाहिए। अर्थात् सांख्यिकी में शुद्धता के अधिकतम संभव स्तर को प्राप्त करने का प्रयास व्यर्थ होता है। समंकों (संख्याओं) में वांछित स्तर की परिशुद्धता पूर्णांकन द्वारा प्राप्त की जाती है। इसमें संख्याओं को पूर्णांकित अथवा निकटतम सरल स्वरूप में व्यक्त किया जाता है। सरल बनाने या पूर्णांकित करने में निम्न विधियों का उपयोग किया जाता है: (i) उपर की ओर पूर्णांकन, (ii) नीचे की ओर पूर्णांकन तथा (iii) निकटतम इकाई या संख्या तक पूर्णांकन। एक संख्या किस स्तर (सीमा) तक परिशुद्ध है, इसे व्यक्त करने वाले अंकों को सार्थक अंक कहते हैं। इसी प्रकार, अनुमानित मूल्य एवं वास्तविक मूल्य के अंतर को सांख्यिकीय विभ्रम कहा जाता है। ये तीन कारणों से उत्पन्न होते हैं: (i) **मूल विभ्रम** – जो कि दोषपूर्ण सांख्यिकीय माप, सूचकों से गलत सूचना का मिलना तथा अनुसंधानकर्ता के पक्षपात के कारण उत्पन्न होते हैं। (ii) **अपर्याप्तता के कारण विभ्रम** – जैसे अति लघु आकार का प्रतिदर्श या समष्टि का सही प्रतिनिधित्व न करने वाला प्रतिदर्श आदि; और (iii) **प्रहस्तन विभ्रम** – जैसे गणना तथा मापन के दौरान कोई अनजाने में भूल का होना या उपसादन के कारण त्रुटि का होना आदि।

जब किसी दी हुई संख्या को सार्थक अंकों तक उपसादित किया जाता है तो उसमें विभ्रम का होना स्वाभाविक है। इन विभ्रमों को तीन प्रकार से आंका जा सकता है: (i) निरपेक्ष विभ्रम: वास्तविक मूल्य – अनुमानित मूल्य (ii) सापेक्ष विभ्रम: जो कि निरपेक्ष विभ्रमों में अनुमानित मूल्य को भाग देने से प्राप्त होते हैं; तथा (iii) प्रतिशत विभ्रम: सापेक्ष विभ्रम × 100 के द्वारा परिकलित किया जाता है।

जब सन्निकट अंकों से गणना की जाती है तो विभ्रम की मात्रा बढ़ती जाती है। दो संख्याओं के योग या अंतर का कुल निरपेक्ष विभ्रम संबंधित संख्याओं के अलग-अलग ज्ञात किए गए निरपेक्ष विभ्रमों के योग के बराबर होता है। इसी प्रकार, दो संख्याओं के गुणन या भाग क्रिया से प्राप्त कुल सापेक्ष विभ्रम उन संख्याओं के विभ्रमों के योग के बराबर होता है। अभिनत विभ्रम वे होते हैं जिनकी प्रवृत्ति या झुकाव एक ही दिशा में होता है। (अर्थात् धनात्मक या ऋणात्मक)। ये संचयी प्रकृति के होते हैं तथा मदों या अवलोकनों की वृद्धि के साथ इनकी मात्रा में भी वृद्धि होती जाती है।

प्रतिदर्श के आधार पर समष्टि के बारे में निष्कर्ष प्राप्त करने में जो विभ्रम उत्पन्न होते हैं, उन्हें प्रतिदर्श विभ्रम कहा जाता है। ये दो प्रकार के हो सकते हैं:(i) अभिनत प्रतिदर्श विभ्रम, जोकि दोषपूर्ण सांख्यिकीय इकाई के उपयोग, त्रुटिपूर्ण विधि से सूचना संकलन तथा विश्लेषण में पक्षपात आदि से उत्पन्न होते हैं,(ii) अनभिनत प्रतिदर्श विभ्रम – ये संयोगात्मक अंतर या समष्टि तथा प्रतिदर्श की इकाइयों में अंतर के कारण उत्पन्न होते हैं। अभिनत प्रतिदर्श विभ्रम को पूर्णतः विलुप्त नहीं किया जा सकता। गैर प्रतिदर्श विभ्रम को भी पूर्णतः विलुप्त नहीं किया जा सकता, लेकिन उसे कम अवश्य किया जा सकता है अर्थात् उसे निम्नतम स्तर पर लाया जा सकता है। समष्टि के अध्ययन में भी गैर प्रतिदर्श विभ्रम उत्पन्न हो सकते हैं। ये प्रायः अभिनत प्रकृति के होते हैं।

3.6 शब्दावली

निरपेक्ष विभ्रम : अनुमानित मूल्य एवं वास्तविक मूल्य का अंतर ।
अभिनत विभ्रम : जब विभ्रमों का प्रभाव एक ही दिशा में होता है ।
गैर प्रतिदर्श विभ्रम : वे विभ्रम जो समष्टि के अध्ययन में भी उत्पन्न हो सकते हैं ।
प्रतिशत विभ्रम : जब सापेक्ष विभ्रम को प्रतिशत के रूप में दर्शाया जाता है । जैसे—सापेक्ष विभ्रम × 100 = प्रतिशत विभ्रम ।
सापेक्ष विभ्रम : जब निरपेक्ष विभ्रम को अनुमानित मूल्य के अनुपात के रूप में व्यक्त किया जाता है ।
पूर्णांकन : जब जटिल एवं वृहत संख्याओं में कुछ अंक कम करके उन्हें सरल संख्याओं में व्यक्त किया जाता है तो इसे पूर्णांकन कहते हैं ।
ऊपर की ओर पूर्णांकन : इस विधि में संख्या को उसके आगे की पूर्ण इकाई तक बढ़ा दिया जाता है ।
नीचे की ओर पूर्णांकन : इस विधि में संख्या को उसके पहले की पूर्ण इकाई तक कम कर दिया जाता है ।
प्रतिदर्श विभ्रम : एक प्रतिदर्श के निष्कर्ष के आधार पर समष्टि के बारे में निष्कर्ष निकालने से ऐसा विभ्रम उत्पन्न होता है ।
सार्थक (महत्वपूर्ण) अंक : जब संख्याओं को सही अंकों (वास्तविक मूल्यों) में ही व्यक्त किया जाता है, तो उन्हें सार्थक अंक कहा जाता है । इन्हीं अंकों से सही सूचनाएँ प्राप्त होती हैं ।
मिथ्या परिशुद्धता : ऐसी परिशुद्धता, जोकि वांछित या वास्तविक परिशुद्धता से भी अधिक हो ।
सांख्यिकीय विभ्रम : किसी मद (संख्या) के अनुमानित या उपसादित मूल्य एवं वास्तविक मूल्य के अंतर को सांख्किीय विभ्रम कहते हैं ।
अनभिनत विभ्रम : जो विभ्रम परस्पर एक-दूसरे को निष्प्रभावित कर देते हैं, उन्हें अनभिनत विभ्रम कहा जाता है ।

3.7 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 4 i) सही ii) गलत iii) सही iv) गलत
5 i) 263 हज़ार ii) 88 हज़ार iii) 96 हजार iv) 4400 हज़ार v) 322 हज़ार
6 i) 24 सौ ii) 76 हज़ार iii) 8.9 iv) 0 .0064 v) 2.03
ख 3 i) गलत ii) सही iii) गलत iv) गलत v) सही
4 i)25,500±500 ii) 24,500±500 iii) 1,25,00,000±12% iv) 50±12%
ग 4 i) गलत ii) गलत iii) सही iv) गलत v) सही
5 i) $\pm\sqrt{9} \times 250 = \pm 750$ ii) $\pm 9 \times 49.5 = \pm 445.5$

3.8 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

प्रश्न

1 सांख्यिकीय-विभ्रम कितने प्रकार के होते हैं? इनके उत्पन्न होने वाले कारकों की व्याख्या कीजिए ।
2 सांख्यिकी जाँचों में किस स्तर की परिशुद्धता की आवश्यकता होती है? सांख्यकी में उपसादन की विभिन्न विधियों एवं उनकी उपयोगिता का वर्णन कीजिए ।
3 अभिनत एवं अनभिनत विभ्रमों में अंतर स्पष्ट कीजिए तथा उनके अनुमान लगाने की विधियों की व्याख्या कीजिए ।
4 निम्नलिखित पर संक्षिप्त टिप्पणियाँ लिखिए:
i) उपसादन-विभ्रम
ii) गैर प्रतिदर्श विभ्रम तथा प्रतिदर्श विभ्रम में अंतर
iii) अभिनत विभ्रम तथा अनभिनत विभ्रम में अंतर

अभ्यास

1 निकटतम अंकों तक पूर्णांकन के नियमों का प्रयोग करते हुए निम्नलिखित संख्याओं को – पहले चार सार्थक अंकों तक, फिर तीन सार्थक अंकों तक और अंत में दो आर्थक अंकों तक पूर्णांकित कीजिए:

i) 5.6994 ii) 47.251 iii) 3.0009 iv) 0.0064251 v) 5.3465

2 एक नगर की अनुमानित एवं वास्तविक जनसंख्याएँ क्रमशः 49,000 तथा 50,000 हैं। इनमें i) निरपेक्ष विभ्रम ii) सापेक्ष विभ्रम तथा iii) प्रतिशत विभ्रम की गणना कीजिए।

उत्तर : [i) 1000 ii) 0.02 iii) 2%]

3 एक नगर से दो पैट्रोल पम्पों की दूरियाँ 225±0.5 किलोमीटर तथा 175±0.3 किलोमीटर नापी गई। i) कुल दूरी तथा ii) दोनों दूरियों के अंतर में निरपेक्ष विभ्रम तथा सापेक्ष विभ्रम ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : i) AE ± 0.8; RE ±0.002; ii) AE ± 0.8 RE ± 0.0166]

4 दो माप उपलब्ध हैं, जिनमें अ = 375 तथा ब = 25। दोनों माप यंत्रों में ±1% का विभ्रम है। निम्न स्थितियों में निरपेक्ष विभ्रम तथा सापेक्ष विभ्रम का विस्तार ज्ञात कीजिए:

i) क + ख के जोड़ में

ii) क × ख के गुणनफल में

iii) क – ख के अंतर में

iv) क / के भजनफल में

[उत्तर : i) AE ± 40, RE ± 10;
ii) AE ± 1969 RE ± 21
iii) AE ± 40 RE ± 11.4
iv) AE ± 3.3 ± 22.2%]

5 8 किलो चीनी की लागत 13 रुपये है। यदि एक किलो चीनी की लागत 1 रुपये 60 पैसे दी हुई है तो निरपेक्ष एवं प्रतिशत विभ्रम ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : निरपेक्ष विभ्रम 0.025,
प्रतिशत विभ्रम 1.5%]

6 यदि कुल दूरी को निकटतम 1,440 कि. मि. तक तथा समय को निकटतम 70.5 घटों तक लिखा गया हो तो औसत गति की गंणना में निरपेक्ष विभ्रम तथा सापेक्ष विभ्रम ज्ञात कीजिए।

[उत्तर : निरपेक्ष विभ्रम 0.022, सापेक्ष विभ्रम 0.0011]

7 एक कंपनी की पाँच क्षेत्रीय शाखाओं द्वारा की गई बिक्री निम्नलिखित है:

क्षेत्र	इकाइयाँ
उत्तर	13,434
दक्षिण	54,682
पूर्व	36,482
पश्चिम	17,804
मध्य	34,384

उपरोक्त संख्याओं को निकटतम हज़ार तक उपसादित कीजिए। फिर यह मानते हुए कि वास्तविक बिक्री की राशियाँ ज्ञात नहीं हैं: कुल बिक्री के सापेक्ष विभ्रम का आकलन कीजिए। यदि बिक्री की संख्याओं को उनकी वास्तविक संख्याओं से आगे की ओर 1,000 तक उपसादित किया गया है तो इससे आकलित विभ्रम कैसे परिवर्तित होगा? वास्तविक सापेक्ष विभ्रम के साथ आकलित (अनुमानित) सापेक्ष विभ्रम की तुलना कीजिए।

टिप्पणी : इस इकाई को भली प्रकार समझने में आपको इन प्रश्नों एवं अभ्यासों से बड़ी मदद मिलेगी। अतः इनके उत्तर लिखने का प्रयास कीजिए। इन उत्तरों को विश्वविद्यालय भेजने की कोई आवश्यकता नहीं है। यह केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 4 अनुपात,प्रतिशतता और दर

इकाई की रूपरेखा

4.0 उद्देश्य
4.1 प्रस्तावना
4.2 विभिन्न सांख्यिकीय व्युत्पनों के अर्थ
4.2.1 अनुपात
4.2.2 प्रतिशतता
4.2.3 दर
4.3 सांख्यिकीय व्युत्पन्नों का प्रयोजन
4.4 अनुपातों के प्रकार
4.5 अनुपातों का परिकलन
4.6 अनुपातों का उपयोग
4.7 व्युत्पन्नों के उपयोग में सावधानी
4.8 लघुगणक
4.8.1 लघुगणक का अर्थ
4.8.2 संख्या का लघु मान ज्ञात करना
4.8.3 लघुगणक की सहायता से परिकलन
4.9 सारांश
4.10 शब्दावली
4.11 बोध प्रश्नों के उत्तर
4.12 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास
लघुगणक सारणियां

4.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि:

- अनुपात, प्रतिशतता और दरों की व्याख्या कर सकें
- अनुपात, प्रतिशतता और दरों को ज्ञात करने से सम्बद्ध परिकलनात्मक पहलुओं की परिचर्चा कर सकें
- अनुपात, प्रतिशतता और दरों का उपयोग करते समय, पूर्व सावधानियों का वर्णन कर सकें
- वाणिज्य और प्रशासन में, अनुपातों, प्रतिशतताओं और दरों के उपयोगों को उदाहरण के साथ समझा सकें
- गुणन, भाजन, मूलकलन, इत्यादि के परिकलन में, लघुगणकों का प्रयोग कर सकें।

4.1 प्रस्तावना

सांख्यिकीय आँकड़ों के स्रोतों और आँकड़ों के संग्रह करने की विधियों के बारे में, आप पहले ही पढ़ चुके हैं। विभिन्न प्रकार के विभ्रमों के बारे में, जो आकड़ों में आ जाते हैं, आप जानते हैं और उनको अनुमानित करने की विधियाँ भी आप को ज्ञात हैं। उचित रूप से परिशुद्ध आँकड़ों का संग्रह मात्र ही, निष्कर्ष निकालने के लिए पर्याप्त नहीं होता क्योंकि आँकड़े स्वयं नहीं बोलते। आँकड़ों का विश्लेषण और उनकी तुलना करना आवश्यक है, ताकि सार्थक और उपयोगी निष्कर्ष निकाले जा सकें । संख्यात्मक आँकड़ों को सार्थक रूप में, संक्षिप्त करना होता है, ताकि उन्हें आसानी से समझा जा सके और उनकी व्याख्या की जा सके।

इस के लिए सामान्य विधियों में से एक है, सांख्यिकीय व्युत्पन्नों (statistical derivatives) का परिकलन करना। अनुपात, प्रतिशतता और दर, इत्यादि, सरल व्युत्पन्न हैं। ये माप, उपादानों में विद्यमान सम्बन्ध को निर्देशित करते हैं, और इसलिए, श्रेष्ठतर व्याख्या करने में सहायक होते हैं। इस खण्ड में, आप सांख्यिकीय आँकड़ों के विश्लेषण में प्रयुक्त होने वाले, विभिन्न प्रकार के अनुपातों, प्रतिशतताओं और दरों के अर्थ प्रयोजन, परिकलन और उन के प्रयोग में सावधानियों के बारे में पढ़ेंगे। लम्बे परिकलनों में, लघुगणकों का प्रयोग करना भी, आप सीखेंगे।

4.2 विभिन्न सांख्यिकीय व्युत्पन्नों के अर्थ

जैसा कि पहले बताया गया है, संग्रहीत आँकड़ों के समूह से, सार्थक निष्कर्ष निकालने के लिए उनका उचित रूप से विशलेषण करना आवश्यक होता है। सांख्यिकीय व्युत्पन्नों का परिकलन, सामान्य उपागमों में से एक है। सांख्यिकीय व्युत्पन्नों से सम्बद्ध तीन महत्वपूर्ण विधियाँ हैं। ये हैं: (1) अनुपात, (2) प्रतिशतता और (3) दर। आइये, अब इन में से प्रत्येक के अर्थ को समझें।

4.2.1 अनुपात (Ratio)

अनुपात एक ही जाति और प्रकार की दो राशियों के परिमाणों में सम्बन्ध को व्यक्त करता है। इस से विदित होता है कि एक राशि, दूसरी राशि में कितनी बार सम्मिलित है।
दो राशियों A और B के ऐसे सम्बन्ध को, एक अनुपात के रूप में, प्रतीक 'A : B' द्वारा प्रकट करते हैं। और, इसे पढ़ते हैं: 'A अनुपात B' या 'A का B' से अनुपात "A : B में"; A को **पूर्व पद** और B को **उत्तर पद** कहते हैं। अनुपात A : B को, A/B के रूप में भी प्रकट कर सकते हैं। इस प्रकार, इन दो संख्याओं A और B में अनुपात केवल 'A का B के द्वारा भाजित होने' की संकल्पना है। यद्यपि अनुपात, एक संख्या का, दूसरी संख्या से, अंतर्निहित या वस्तुतः भाजन ही है, फिर भी अनुपात को भाजन के रूप में प्रकट करना सुविधाजनक नहीं होता। उदाहरण के लिए, मान लीजिए आप एक फैक्टरी में, पुरूष श्रमिकों और स्त्री श्रमिकों की तुलना के लिए, उनके अनुपात पर विचार कर, रहे हैं तो यदि इसे 550/110 रूप में प्रकट करें, तो समझने में इतना सरल न होगा। दूसरी ओर, इसे 550:110 या 5:1 लिख सकते हैं, जो समझने में सरलतर है। इस प्रकार, **अनुपात के रूप में निरूपित करने से, संख्याओं (पदों) के परिमाण भी छोटे हो जाते हैं, जिससे उनकी तुलना करना सरल हो जाता है और उन्हें शीघ्र समझने में सहायता मिलती है।**

यदि एक अनुपात के दोनों पदों को परस्पर बदल दें, तो इस प्रकार प्राप्त नये अनुपात को, पहले अनुपात का **व्युत्क्रम अनुपात (inverse ratio)** कहते हैं। इस प्रकार, अनुपात, A : B का व्युत्क्रम अनुपात है A : B। उदाहरण के लिए, कल्पना कीजिए, कि 80 विद्यार्थियों की एक कक्षा में, 50 लड़के और 30 लड़कियाँ हैं। अब लड़कों का, लड़कियों से अनुपात 5:3 है, और लड़कियों का लड़कों से अनुपात 3:5 है। ध्यान दीजिए कि 5:3, (इकाई) 1 से बड़ा है और 3:5, (इकाई) 1 से छोटा है। परिस्थिति के अनुसार, कोई अनुपात, 1 से बड़ा, 1 से छोटा, या 1 के बराबर हो सकता है। इस प्रकार, **अनुपात, एक संख्या या राशि के, दूसरी संख्या या राशि से संबंध को व्यक्त करता है। और, इसके मान को, पहली संख्या के दूसरी संख्या द्वारा भागफल, के रूप में प्रकट कर सकते हैं।**

अनुपात की संकल्पना को विस्तृत कर, इसे तीन या अधिक संख्याओं के लिए भी, परिभाषित किया जा सकता है। इससे, तीन या अधिक संख्याओं की तुलना की जा सकती है, और इस तुलना परिणाम को प्रतीक A : B : C : D, इत्यादि द्वारा प्रकट किया जा सकता है। उदाहरण के लिए कल्पना कीजिए कि विधि के 100 विद्यार्थियों की कक्षा में, 70 वाणिज्य से हैं, 20 विज्ञान से और शेष 10 कला से। तो, वाणिज्य, विज्ञान और कला विद्यार्थियों की तुलना को, 7 : 2 : 1 द्वारा प्रकट कर सकते हैं।

जैसे जैसे राशियों (वर्गों) की संख्या बढ़ती है, तो उनके प्रस्तुतिकरण के लिए, सम्मानुपात एक श्रेष्ठतर व्युत्पन्न है क्योंकि यह सरल और कम सम्भ्रमकारी होगा। मान लीजिए यदि कुछ N मदें हैं, और उनको

तीन वर्गों में इस प्रकार बांटा गया है, कि पहले वर्ग में N_1 दूसरे में N_2 और तीसरे वर्ग में N_3 मदें हैं। तो वर्गों 1, 2, 3, में, समानुपात क्रमशः N_1/N, N_2/N और N_3/N होंगे। प्रत्येक समानुपात में हर कुल मदों की संख्या है, और अंश में उस (संगत) वर्ग में मदों की संख्या है। **समानुपात सदैव 1 से छोटा होता है और सभी समानुपातों का योग 1 होता है।** किसी भी अनुपात को, सदैव समानुपात में परिवर्तित कर सकते हैं। उदाहरण के लिए, यदि पुरूषों का, स्त्रियों से अनुपात 3 :2 हो तो पुरूषों का समानुपात 3/ (3+2) = 0.6 और स्त्रियों का, 2/ (3+2) = 0.4 होगा।

4.2.2 प्रतिशतता (Percentage)

अनुपातों और समानुपातों को बहुधा प्रतिशतताओं के रूप में प्रकट किया जाता है, क्योंकि सापेक्ष मापों को, प्रतिशतताओं के रूप में प्रकट करने से, उनकी अधिक साकार रूप में, कल्पना की जा सकती है। शब्द "प्रतिशत" का अर्थ है, प्रति सौ। किसी भी अनुपात को, उसकी एक संख्या को आधार मान कर और उसे 100 से गुणा करके, प्रतिशत रूप में परिवर्तित किया जा सकता है। उदाहरण के लिए, 1988 और 1989 में, धान की उपजों में अनुपात 2 : 3 है। इसे प्रतिशत रूप में परिवर्तित करने के लिए, 1988 की उपज (अर्थात् 2) को आधार मान लेते हैं। तो 1989 की उपज, 1988 की उपज का 3/2 × 100 = 150 प्रतिशत है। आपको ज्ञात होना चाहिए कि सभी प्रतिशतताओं का योग तभी 100 होगा, जबकि सभी वर्ग परस्पर निवारक (mutually exclusive) और सामूहिक रूप से परिपूर्ण हों, (अर्थात् 3) प्रत्येक मद, केवल किसी एक वर्ग में हो और कुल में से कोई मद छूट न गया हो।

4.2.3 दर (Rate)

सामान्यतः जब एक ही प्रकार की दो राशियों की तुलना की जाती है, तो अनुपात का प्रयोग किया जाता है। उदाहरण के लिए, फैक्टरी में, पुरूष श्रमिकों और स्त्री श्रमिकों के अनुपात पर विचार कीजिए। यहाँ पुरूष और स्त्रियाँ दोनों ही, फैक्टरी में, श्रमिक हैं। अतः इस अर्थ में वे दोनों ही एक ही प्रकार के हैं। **एक ऐसे अनुपात को दर कहते हैं जो भिन्न इकाइयों (अर्थात् भिन्न प्रकार की राशियों) के पदों में प्रकट किया गया हो।** उदाहरण के लिए, प्रति व्यक्ति आय की स्थिति में, अंश, कुल आय होता है और हर, कुल आबादी। दरों के उदाहरण हैं: मृत्यु दर, जन्म दर, दुर्घटना दर, इत्यादि। दर, परिवर्तन की संकल्पना से संबद्ध होता है। दर, प्रायः गत्यात्मक और समय से संबद्ध होते हैं। परिवर्तन दर, एक भागफल होता है, जिसका अंश, परिवर्तन की मात्रा को और हर, कुल समय को निरूपित करते हैं। एक दर का मानकीकरण, प्रायः उसके हर के संबंध में किया जाता है। यदि एक संख्या को, दूसरी संबंधित संख्या से भाजित किया जाए और भाग फल को 1,000 से गुणा किया जाए, तो प्राप्त परिणाम को, **दर प्रति सहस्र** कहा जाएगा। उदाहरण के लिए, यदि कुल मृत्यु संख्या को, कुल जनसंख्या से भाजित किया जाए और भाग फल को 1,000 से गुणा किया जाए, तो एक अशोधित मृत्यु दर प्राप्त होगी। **दर प्रति एक हज़ार** को दर प्रति सहस्र भी कहते हैं।

गुणांक (Coefficient): दर प्रति इकाई को गुणांक कहते हैं। मान लीजिए, मृत्यु दर लगभग 1.97 या 19 प्रति सहस्र है, तो मृत्यु गुणांक .019 होगा। यदि इस गुणांक को, कुल जनसंख्या से गुणा करें, तो मृतकों की कुल संख्या प्राप्त हो जाएगी।

4.3 सांख्यिकीय व्युत्पन्नों का प्रयोजन

आपने विभिन्न सांख्यिकीय व्युत्पन्नों, अर्थात् अनुपात, प्रतिशतता और दर के अर्थ जान लिए हैं। अब प्रश्न यह है कि इन सांख्यिकीय व्युत्पन्नों के परिकलन का क्या प्रयोजन है। जैसा कि पहले बताया गया है, सांख्यिकीय व्युत्पन्नों के परिकलन का मुख्य प्रयोजन, तुलना करना है। अनुपात, प्रतिशतता और गुणांकों के अर्थ से स्पष्ट है कि ये सब, एक सापेक्ष चित्र प्रस्तुत करते हैं।

जब एक या एक से अधिक संख्याओं की तुलना अन्य किसी संख्या से की जाती है, तो तुलना के लिए, जिस संख्या को मानक रूप में लिया जाता है उसे आधार (base) कहते हैं। किस प्रकार के आधार का

चयन किया जाए, यह परिस्थिति पर निर्भर करेगा। एक निर्दिष्ट समस्या के विश्लेषण के लिए कोई भी व्युत्पन्न, अपने आपमें, प्रायः सार्थक नहीं होता। उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि यह बताया जाता है कि एक कंपनी ने, चालू वर्ष में, अपने निवेश पर 18% प्रतिलाभ प्राप्त किया। इससे क्या अभिप्राय है? आप पूछ सकते हैं,कि यह प्रतिलाभ की एक ऊँची दर है अथवा नहीं। व्युत्पन्नों के किसी भी सार्थक प्रयोग के लिए यह आवश्यक है कि उनकी तुलना, उपयुक्त मानक मापदण्ड से की जाए, ताकि उनकी सार्थकता का मूल्यांकन किया जा सके। 18% प्रतिलाभ की तुलना, या तो (उसी कंपनी के) पिछले वर्ष के प्रतिलाभ से की जा सकती है, या किसी अन्य प्रतियोगी कंपनी के, निवेश पर प्रतिलाभ से की जा सकती है, यदि ये दोनों तुलना करने योग्य हों। जब व्युत्पन्नों का उपयोग विभिन्न वर्गों की तुलना करने के लिए किया जाता है तो उन्हें एक सार्व हर के द्वारा लघुकृत करने की, सामान्य रीति है। इससे तुलना सरल और अधिक सार्थक हो जाती है। मान लीजिए, दो व्यावसायिक फर्मों ने, क्रमशः 50,000 रूपये और 1,20,000 रूपये की पूंजी से कार्य आरंभ किया। वर्ष के अंत में, पहली फर्म ने 20,000 रूपये और दूसरी फर्म ने 40,000 रूपये का लाभ उपार्जित किया। स्पष्ट है कि दूसरी फर्म का लाभ, पहली फर्म के लाभ का दो गुना है। परन्तु, उन्हें एक सार्व हर 100 के द्वारा लघुकृत करने पर, हम देख सकते हैं कि पहली फर्म ने, अपनी पूंजी का 40 प्रतिशत लाभ उपार्जित किया, जबकि दूसरी फर्म ने अपनी पूंजी का 33 प्रतिशत लाभ उपार्जित किया। निरपेक्ष संख्याओं को देखने से, जो प्रभाव आपके मन पर पड़ा था, वह अब बदल गया है। इस प्रकार, लाभ की तुलना पूंजी के प्रतिशत के रूप में, वस्तुतः अधिक सार्थक है।

व्युत्पन्न, अज्ञात राशियों के आकलन के लिए भी उपयोगी होते हैं। उदाहरण के लिए, एक प्रदेश की जन्म दर ज्ञात है तथा एक लम्बे समय तक पूर्णतया यह दर, निरंतर मान्य हो जाती है। अब यदि आपको किसी समय विशेष पर जन्म लेने वालों की कुल संख्या ज्ञात हो, तो आप, उस समय उस प्रदेश की जनसंख्या का आकलन कर सकते हैं। **इस प्रकार, व्युत्पन्न आँकड़ों को सरल करने, और उनकी तुलनीयता को बढ़ाने के अतिरिक्त, अज्ञात राशियों को आकलित करने के लिए भी, उपयोगी है।**

बोध प्रश्न क

1 अनुपात किसे कहते हैं?

....

....

....

....

2 प्रतिशतता किसे कहते हैं?

....

....

....

....

....

....

3 दर किसे कहते हैं?

....

....

....

....

4 सांख्यिकीय कार्य में प्रयुक्त होने वाले, विभिन्न प्रकार के अनुपातों के नाम लिखिए।

....

....

....

....

....

5 निम्नलिखित कथनों में से कौन-सा सही अथवा गलत है?

i) अनुपात, सदैव एक ही प्रकार की दो राशियों में, ज्ञात किया जाता है।

ii) प्रतिशतता परिकलन के लिए, आधार सदैव 100 लिया जाता है।

iii) अनुपात को, समानुपात में, परिवर्तित नहीं किया जा सकता।

iv) दर प्रति इकाई को गुणांक कहते हैं।

6 कॉलम A की मदों को कॉलम B की मदों से मिलाइए:

कॉलम A	कॉलम B
i) एक व्यवसायी फर्म की पूंजी में, रमेश और रंगनाथ के भाग हैं, 2 : 3	क) दर
ii) भारत में, 1000 व्यक्तियों में से, 20 व्यक्ति, दिल के दौरे से ग्रस्त होते हैं।	ख) समानुपात
iii) एक नगर में, पुरुषों और स्त्रियों की जन्म संख्या है, 0.6 : 0.4	ग) प्रतिशतता
iv) भारत में, प्रति 100 व्यक्तियों में से, 70 ग्रामों में रहते हैं।	घ) अनुपात

4.4 अनुपातों के प्रकार

सांख्यिकीय कार्य में प्रयुक्त होने वाले अनुपात कई प्रकार के होते हैं। मौलिक रूप से, प्रयुक्त अनुपात का प्रकार, उसके आधार पर निर्भर होता है। जब तक एक या अधिक संख्याओं की तुलना, किसी अन्य संख्या से की जाती है, तो उस संख्या को, जिस से तुलना की जाती है, आधार कहा जाता है। आइये, अब विभिन्न प्रकार के अनुपातों का अध्ययन करें।

क) **बंटन अनुपात (Distribution Ratio)** : किसी राशि के एक भाग का, उस भाग को समानिष्ठ करती हुई संपूर्ण राशि से, अनुपात को, बंटन अनुपात कहते हैं। मान लीजिए, एक कंपनी में, 1,000 श्रमिकों में से 300 स्त्रियाँ हैं, तो स्त्रियों का कुल से, बंटन अनुपात 300 : 1,000 या 3 : 10 है। इससे अभिप्राय है कि कुल श्रमिक दल का 30 प्रतिशत स्त्रियाँ हैं। इस उदाहरण में, 1,000 श्रमिकों में, 300 स्त्री श्रमिक भी सम्मिलित हैं। बंटन अनुपात की संकल्पना को विस्तृत कर, इसे दो से अधिक समूहों के लिए भी, प्रयोग किया जा सकता है। इस प्रकार के अनुपात को, **कुल का, भागों से अनुपात भी कह सकते हैं।**

ख) **अंतर्भागीय और अंतर्वर्गीय अनुपात (Interpart and Interclass Ratio)** : एक राशि के एक भाग का, उसी संपूर्ण राशि के दूसरे भाग से अनुपात को, अंतर्भागीय अनुपात कहते हैं। यहाँ आधार उन भागों में से एक होगा, क्योंकि मौलिक रूप से, हम इन दो भागों की ही तुलना कर रहे हैं। उदाहरण के लिए, एक आंबादी का लिंग अनुपात, एक अंतर्भागीय अनुपात है, क्योंकि इस अनुपात को, सामान्यतः, स्त्री संख्या प्रति सहस्र पुरुष के रूप में प्रकट करते हैं, न कि स्त्री संख्या प्रति सहस्र जनसंख्या के रूप में।

ग) **काल अनुपात (Time Ratio)** : यह अनुपात, एक माप है, जो एक काल श्रेणी के रूप में व्यवस्थित मानों में, परिवर्तनों को प्रकट करता है और इसे आदर्श रूप में, प्रतिशत रूप में प्रदर्शित किया जाता है। सामान्यतः इसे **भूतकाल से, वर्तमान का अनुपात** भी कहते हैं। काल अनुपातों के दो मुख्य वर्ग हैं: (1) वे, जो एक स्थिर (या नियत) काल को आधार मानते हैं; और (2) वे, जो बदलते हुए

काल-आधार (चल आधार) का प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, मान लीजिए, आपकी अभिरूचि, चालू वर्ष में, चाय के उत्पादन का अध्ययन करने में है। नियत काल आधार की रीति में, आप एक वर्ष विशेष, मान लीजिए 1980 को आधार वर्ष के रूप में चुन लेंगे, और चालू वर्ष के उत्पादन की, 1980 के उत्पादन से, तुलना करेंगे। चल आधार रीति में, आधार वर्ष बदलता रहता है। चालू वर्ष में, चाय के उत्पादन का परिकलन करने के लिए, पिछले वर्ष के चाय उत्पादन को आधार मानेंगे। इसी प्रकार, अगले वर्ष के चाय उत्पादन का परिकलन करने के लिए, चालू वर्ष के उत्पादन को आधार मानेंगे। इस प्रकार, 1982, के परिकलनों के लिए, 1981 के आँकड़ों को आधार मानेंगे, इत्यादि। मौलिक रूप से, ऐसे परिकलन, दो क्रमागत कालों के संगत आँकड़ों को तुलना प्रदान करते हैं।

घ) **संकर अनुपात (Hybrid Ratio)** : दो भिन्न वर्गों के, आंकड़ों के, संगत भागों में अनुपात को संकर अनुपात कहते हैं। इस अनुपात के अंश और हर, प्रायः भिन्न इकाइयों में होते हैं। उदाहरण के लिए, यह कथन कि एक कार 30 किमी. प्रति घंटे की चाल से जा रही है, एक संकर अनुपात का प्रयोग करता है। यहाँ किलोमीटरों की संख्या को, घंटों की संख्या से भाजित किया गया है, और दोनों इकाइयों का, परिणाम के कथन में उल्लेख है। संकर अनुपातों के अन्य उदाहरण हैं: प्रति व्यक्ति आय, प्रति घंटा या प्रतिदिन आय, व्यक्ति प्रति वर्ग कि. मी., बच्चों की संख्या प्रति कुटुम्ब, लागत प्रति यात्री कि. मी., निवेश प्रति कि. मी. इत्यादि। संकर अनुपातों को प्रायः प्रति इकाई आधार के पदों में प्रकट किया जाता है, प्रतिशत के रूप में नहीं। ऐसा इसलिए है क्योंकि इस प्रकार के अनुपात में, अंश और हर भिन्न वर्गों के होते हैं। इस अभिप्राय से संकर अनुपातों को दर भी माना जा सकता है।

4.5 अनुपातों का परिकलन

अनुपातों के अर्थ और प्रकारों का अध्ययन, आप पहले ही कर चुके हैं। आइये अब उन महत्वपूर्ण पहलुओं पर विचार करें, जिन्हें अनुपातों का परिकलन करते समय, ध्यान में रखना चाहिए। प्रत्येक सांख्यिकीय अनुपात के संबंध में, तीन बातों पर विचार करना आवश्यक है: (1) वे चर (variable), जिन्हें संबंधित करना है, (2)आधार या हर (denominator) का तर्क-संगत चयन और (3)हर में इकाइयों की संख्या का चयन। आइये अब इन का विस्तार से अध्ययन करें।

1 **चर, जिनमें सम्बंध मालूम करना है** : अंश और हर की राशियों में, एक निश्चित संबंध होना चाहिए। उदाहरण के लिए, यदि आपकी अभिरुचि, एक कंपनी द्वारा, चालू वर्ष में, उपार्जित आय का परिकलन करने में हो, तो चालू वर्ष के निवेश को ही हिसाब में लेना होगा, न कि, आरंभ के निवेश को। एक अन्य उदाहरण है, कृषि उत्पादन प्रति हैक्टेयर। इस उदाहरण में कृषि उत्पादन प्रति हैक्टेयर कुल भूमि (जिसमें बंजर भूमि, वन, मरूभूमि, इत्यादि भी सम्मिलित होती है) की अपेक्षा कृषि उत्पादन प्रति हैक्टेयर जोत भूमि अधिक सार्थक है।

2 **आधार का चयनः** सांख्यिकीय अनुपात का आधार अथवा हर सदैव एक मानक होता है, जिससे, अंश की तुलना की जा रही होती है। जैसे कि आप जानते हैं, अनुपात के द्वारा, हम दो मदों में संबंध स्थापित करते हैं। यहाँ यह निश्चय करना बड़ा ही महत्वपूर्ण है कि उन दो मदों में से किस को आधार के रूप में लिया जाए। कुछ स्थितियों में तो आधार का चयन स्पष्ट होता है, जब कि अन्य स्थितियों में, आधार का चयन इतना स्पष्ट नहीं होता। फिर भी, आधार के चयन के बारे में, कुछ व्यापक नियम बनाये जा सकते हैं।

i) किसी राशि के एक भाग की संपूर्ण राशि से तुलना करने में, संपूर्ण राशि को ही सदैव आधार माना जाता है। उदाहरण के लिए, बेरोजगार व्यक्तियों की संख्या और कुल श्रम शक्ति में संबंध स्थापित करने के लिए, श्रमिकों की कुल संख्या ही, अनुपात का आधार होगी।

ii) समरूप मदों की काल तुलनाओं (अर्थात् काल अनुपातों) में प्रायः पूर्वतर घटना को ही आधार माना जाता है। उदाहरण के लिए चालू वर्ष की बिक्री में, पिछले वर्ष की बिक्री के सापेक्ष, प्रतिशत परिवर्तन परिकलित करने के लिए, पिछले वर्ष की बिक्री को ही आधार मानते हैं।

iii) यदि संबंध का अध्ययन, ऐसे दो चरों में करना हो, जिनमें से एक चर, दूसरे चर पर आश्रित हो तो प्रायः स्वतंत्र (अनाश्रित) चर को ही तुलना के आधार के रूप में, लिया जाता है। उदाहरण के लिए, दुर्घटनाओं की संख्या का कुल यात्री – कि.मी. संख्या से संबंध ज्ञात करने के लिये कुल यात्री कि.मी. संख्या को ही प्रायः तुलना के आधार रूप में लिया जाएगा।

3 **हर में इकाइयों की संख्या का चयन**: हर (अर्थात् आधार) में, इकाइयों की संख्या का निश्चय, रीति, सुविधा और प्रभावकारिता के आधार पर किया जाता है। इस संबंध में, हम कुछ रीतियों को निदर्शित कर सकते हैं।

i) ऐसी बहुत सी स्थितियाँ हैं जिनमें अनुपात के आधार को, एक अकेली इकाई के रूप में प्रकट किया जाता है। उदाहरण के लिए, प्रति व्यक्ति आय, प्रति यात्री कि.मी., उत्पादन प्रति हैक्टेयर, इत्यादि।

ii) बहुधा अनुपात को प्रतिशत रूप में प्रकट किया जाता है। उदाहरण के लिए, कथन, ''आज के सक्रिय टेलीफोन लाइनों की संख्या, एक वर्ष पूर्व की संख्या का 15 प्रतिशत है'', पर विचार कीजिए। इस स्थिति में, प्रतिशत की संख्या, यह निर्देशित करती है, कि हर की प्रत्येक 100 इकाइयों के लिये, अंश की कितनी इकाइयाँ हैं। 100 इकाइयों का आधार लेकर, संबंध की कल्पना करना सरल है।

iii) आधार में, एक हजार, दस हजार या उससे भी बड़ी इकाइयाँ ली जा सकती हैं। उदाहरण के लिए, ''4.5 दुर्घटनाएँ प्रति 1,000 मनुष्य घंटे'' को, निम्न रूप में भी कहा जा सकता है: 45 दुर्घटनाएँ प्रति 10,000 मनुष्य घंटे या 0.0045 दुर्घटनाएँ प्रति मनुष्य घंटें''।

निम्नलिखित कुछ ऐसे मार्ग दर्शक तत्व हैं जो यह निश्चित करने में सहायक होते हैं कि आधार, को किसी
4 एक अंक वाली इकाई के रूप में अथवा अधिक अंकों वाली इकाइयों के रूप में प्रकट किया जाना चाहिये।

i) आधार के रूप में प्रयुक्त संख्या, पर्याप्त रूप में बड़ी होनी चाहिए, ताकि अंश का मान, मुख्यतया एक पूर्ण संख्या हो, परंतु दशमिक बिन्दु के बाईं ओर तीन अंकों से अधिक न हो। यह कहना कि 45 दुर्घटनाएँ प्रति 10,000 मनुष्य घंटे हुई, यह कहने की अपेक्षा कि 4,500 दुर्घटनाएँ प्रति 10,00,000 मनुष्य घंटे हुई, अधिक सुविधाजनक है।

ii) आधार के रूप में प्रयुक्त संख्या, उस संख्या से छोटी होनी चाहिए, जो प्रारंभिक आँकड़ों में, हर की संगत संख्या थी। उदाहरण के लिए, मान लीजिए कि एक फर्म में केवल 12 व्यक्ति हैं और उनमें से 9 के पास कारें हैं। इस स्थिति में, संबंध वर्णन करने के लिए, प्रारंभिक आँकड़ों का प्रयोग करना ही श्रेष्ठतर है, क्योंकि आँकड़ों को अनुपात रूप में लघुकृत किये बिना ही उनमें संबंध स्पष्ट हैं। इसी प्रकार यदि आप कहें कि 75 प्रतिशत कर्मचारियों के पास कारें हैं, तो संभव है इससे स्पष्ट धारणा न बन सके। यहाँ हर 100 है, जोकि प्रारंभिक संख्या12 से बड़ी है।

अतः सांख्यिकीय अनुपातों के परिकलन करने में, पहले हमें यह निश्चय करना चाहिए कि किस चर को अंश के रूप में लें और किस को हर के रूप में। फिर यह निश्चय करना चाहिए कि अभीष्ट अनुपात के हर में इकाइयों की संख्या कितनी होनी चाहिए।

4.6 अनुपातों के उपयोग

अनुपात, दर और गुणांक, सभी प्रकार के अध्ययनों में प्रयुक्त होते हैं। प्रति व्यक्ति आय, जनसंख्या प्रति वर्ग किलो मीटर, उत्पादन प्रति हैक्टेयर, पूंजी आवर्त अनुपात, स्थायी परिसंपत्ति अनुपात, प्रज्ञा गुणांक, माल भाड़ा आय प्रति किलो मीटर, निवेश प्रति किलोमीटर, श्रम-निपज अनुपात,पूंजी-निपज अनुपात, इत्यादि,विभिन्न लोक प्रिय प्रयुक्त अनुपातों के उदाहरण हैं। सामान्यतः प्रयोग में आने वाले कुछ अनुपातों का ब्योरा नीचे दिया गया है। निस्संदेह ये निदर्शी उदाहरण परिपूर्ण नहीं हैं, परन्तु ये, अर्थशास्त्र, वाणिज्य और जनांकिकीय अध्ययनों में, एक सांख्यिकीय माप के रूप में, अनुपातों के महत्व को दशार्ते हैं।

i) 1987-88 में,हमारे देश की प्रति व्यक्ति आय 3,184 रुपये थी। इसको परिकलित करने के लिए, हम कुल राष्ट्रीय आय 2,49,905 करोड़ रूपये को, कुल जनसंख्या 78.5 करोड़ से भाजित करते हैं।

ii) चार महानगरों के कुछ अनुपात, सारणी 4.1 में सूची बद्ध किए गए हैं:

सारणी 4.1 : चार महानगरों का पार्श्व चित्र

क्र. सं.	अनुपात	बम्बई	कलकत्ता	दिल्ली	मद्रास
1	स्त्रियाँ प्रति 1,000 पुरुष	772	781	808	930
2	आबादी प्रति वर्ग किलो मीटर ("000में)	13.7	10.8	10.6	7.5
3	साक्षरता दर (प्रतिशत)	68.2	65.5	62.7	57.4
4	श्रमिक-आबादी अनुपात (प्रतिशत)	34.7	30.5	32.2	28.2
5	सड़क दुर्घटनाएँ, प्रति 10,000 मोटर गाड़ियाँ	607	279	74	417
6	प्रति व्यक्ति पेय जल उपलब्धि प्रतिदिन (लिटर)	112	259	239	73
7	हस्पताल पलंग संख्या प्रति 1000 आबादी	3.3	4.1	2.1	3.2

स्रोत: "स्टेटस्टिकल आऊटलाईन आफ इंडिया" 1988-89

सराणी 4.1, चार महानगरों के कुछ अनुपात, प्रदर्शित करती है। अब, आप चार महानगरों में, इन अनुपातों की तुलना कर सकते हैं। अर्थशास्त्रियों और योजना-कारों के लिए, उनके जनांकिकीय अध्ययनों में, ये अनुपात बड़े सहायक हैं।

iii) लेखा अनुपातों में, एक प्रसिद्ध अनुपात है, चालू परिसंपत्ति-चालू देयता अनुपात। यदि एक कार्पोरेशन की चालू परिसंपत्ति 30 लाख हो और चालू देयता 10 लाख हो तो चालू अनुपात है, 3. विभिन्न प्रकार के उद्योगों और व्यवसायों के लिए चालू अनुपातों के विभिन्न मानक नियत किए गए हैं। इन उद्योगों और व्यवसायों में, ये चालू मानक अनुपात व्यक्तिगत उद्यमों के लिए मार्ग दर्शक तत्व माने जाते हैं।

iv) आजकल जनसंख्या के अध्ययनों में, अनुपातों का प्रयोग बहुत प्रचलित हो गया है चालू जनसंख्या वृद्धि दर 2.2 प्रतिशत परिकलित की गयी है। जनसंख्या वृद्धि दर, मृत्यु दरों, प्रसव शक्ति दरों और जनसंख्या के आयु संघटन द्वारा निर्धारित की जाती है।

1985 में, भारत में, शिशु मृत्यु दर (मृत्यु संख्या प्रति 1,000 जन्मे शिशु) 97 थी। 1986 के आँकड़ों के अनुसार, जन्म दर और मृत्यु दर प्रति 1,000 आबादी क्रमशः 33.2 और 12.2 हैं। इन सभी अनुपातों को शोधित किया गया है और इसलिए इन्हें **शोधित अनुपात** कहते हैं। शोधित अनुपात उस अनुपात को कहते हैं जिस के अंश या हर या दोनों को, इस प्रकार समायोजित किया गया हो कि असंबद्ध उपादानों को, जो सीधे संबंध को अस्पष्ट करने का प्रयत्न करते हैं, अपवर्जित किया जा सके। उदाहरण के लिए, एक फैक्टरी में, उत्पादन की श्रम-लागत का कुल लागत से अनुपात एक उपयोगी अनुपात है। परन्तु हर में दो प्रकार की लागतें सम्मिलित हैं, स्थिर लागत और चर लागत। परन्तु श्रम लागत का कुल चर लागत से अनुपात, एक ऐसा अनुपात है, जो प्रबंध के लिए, संक्रियाओं के विश्लेषण में, अधिक उपयोगी है।

अन्य अनुपातों से श्रेष्ठतर तुलना के लिए, एक अनुपात के घटकों को समंजित कर, उनका मानकीकरण किया जा सकता है। जन्म-मरण संबंधी आँकड़ों के क्षेत्र में, मानकीकृत अनुपातों के प्रयोग का बड़ा महत्व है। यहाँ देश के विभिन्न नगरों या भागों की तुलना के लिए, मानकीकृत मृत्यु दर, जन्म दर, इत्यादि का प्रयोग किया जाता है। मानकीकृत दरों का परिकलन, भारित माध्य की संकल्पना से संबद्ध है और इस लिए यह इकाई के विषय क्षेत्र से बाहर है।

4.7 व्युत्पन्नों के उपयोग में सावधानी

व्युत्पन्नों के अनुप्रयोग की बहुत सी त्रुटियाँ, व्युत्पन्नों के अर्थ को ठीक से प्रकट न करने के कारण होती हैं। व्युत्पन्नों के परिकलन और प्रयोग में सामने आनी वाली कठिनाइयाँ, निम्न में से किसी एक या अधिक कारणों से हो सकती हैं:

1 **आधार संबंधी गड़बड़ी:** कल्पना कीजिए कि चालू वर्ष में, एक उत्पाद का मूल्य 2,000 रुपये से बढ़कर, 2,500 रुपये हो गया है। इस प्रकार चालू मूल्य, पिछले वर्ष के मूल्य का 125 प्रतिशत है। वैकल्पिक रूप से, हम यह भी कह सकते हैं कि चालू वर्ष का मूल्य, पिछले वर्ष के मूल्य से 25 प्रतिशत अधिक है। इन आँकड़ों की अशुद्ध व्याख्या के रूप में, कोई यह भी कह सकता है कि चालू वर्ष में मूल्य पिछले वर्ष के मूल्य का 25 प्रतिशत है, या कि चालू वर्ष में, मूल्य में 125प्रतिशत की वृद्धि हुई है। इसी उदाहरण को जारी रखते हुए, मान लीजिए, अगले वर्ष तक, मूल्य घट कर 2,000

रुपये रह जाता है। इसका अर्थ है कि मूल्य में 500 रुपये की कमी हुई है जो कि पिछले वर्ष की वृद्धि के बराबर है। ध्यान दीजिए कि निरपेक्ष पदों में, परिवर्तन अभिन्न हैं अर्थात् 500 रुपये। परंतु, यदि हम इन्हें प्रतिशतता के रूप में प्रकट करें, तो पहली स्थिति में, वृद्धि 25 प्रतिशत थी, परंतु अब कमी है, केवल 20 प्रतिशत की (अर्थात् 2,500 में 500)। इन दो स्थितियों में, परिवर्तन की प्रतिशतताएँ प्रत्यक्ष रूप से तुलनीय नहीं है क्योंकि प्रत्येक प्रतिशतता, भिन्न आधार लेकर परिकलित की गई है। यदि इनका माध्य ज्ञात करने का प्रयत्न किया जाए, तो बड़ी आसानी से एक अशुद्ध निष्कर्ष निकाला जा सकता है। उदाहरण के लिए, 25 प्रतिशत और –20 प्रतिशत का माध्य है, 2.5 प्रतिशत। इसका अर्थ है कि पिछले दो वर्ष में, मूल्यों में औसतन, 2.5 प्रतिशत प्रति वर्ष की वृद्धि हुई है। इस प्रकार का परिकलन शुद्ध नहीं है। वस्तुतः दो परिवर्तनों के पश्चात् मूल्य वापिस प्रारंभिक मान पर आ जाता है। एक ही निरपेक्ष मान, 500 रुपये के दो क्रमागत परिवर्तन, 20 प्रतिशत की कमी की तुलना में 25 प्रतिशत की उच्चतर वृद्धि प्रतिशतता प्रदान करते हैं, क्योंकि वृद्धि प्रतिशतता का परिकलन एक छोटे आधार का किया गया है। प्रतिशतताओं की तुलना, उनके आधार पर उल्लेख किए बिना, अवैध होती है।

एक अन्य परिस्थिति पर विचार कीजिए, जहाँ एक द्रव्य का मूल्य 2,000 रुपये है। इसमें 20% की वृद्धि की जाती है, और फिर 20% की कमी। 20% की वृद्धि और फिर 20% की कमी संपन्न करने पर मूल्य रुपये 1.920 होगा, जो कि प्रारंभिक मान से कम है। इस प्रकार, समान प्रतिशत की क्रमागत वृद्धि और कमी, का अंतिम परिणाम, प्रारंभिक मान से कम हो जाता है। किसी भी मान में, यदि 100 प्रतिशत की कमी की जाए, तो शून्य मान रह जाता है। लागत मजदूरी, श्रमिक वर्ग, इत्यादि की स्थिति में, 100% से अधिक कमी नहीं हो सकती और यदि हो, तो यह एक अशुद्धि को निर्देशित करेगी। उदाहरण के लिए, यदि 2,000 रुपये के मूल्य को घटा कर 800 रुपये कर दिया जाए और 1,200 रुपये की कमी को, अंतिम मूल्य के 150 प्रतिशत के रूप में परिकलित किया जाए, तो यह एक अशुद्ध कथन होगा। आधार का चयन ठीक नहीं है। सामान्यतः 150% की कमी, मूल्य को ऋण बना देगी जो यहाँ सत्य नहीं है। प्रतिशत कमी, का परिकलन सदैव प्रारंभिक मान को आधार मान कर करना चाहिए, अर्थात्, यहां कथन करना चाहिए कि "मूल्य में 60% की कमी हुई है"। परन्तु ऐसी परिस्थितियाँ हो सकती हैं, जहाँ प्रतिशत कमी 100 से अधिक हो। मान लीजिए, एक फर्म ने, एक वर्ष में 1 लाख रु० के लाभ का उपार्जन किया और अगले वर्ष में 50,000 रुपये की हानि उठाई। तो दूसरे वर्ष में, पहले वर्ष की तुलना में, कुल लाभ में कमी 1,50,000 रुपये होगी, अर्थात् पहले वर्ष के लाभ का 150%। यहाँ क़ोई अशुद्धि नहीं है, क्योंकि अंतिम मान ऋणात्मक है, जो कि एक हानि है। कुछ आँकड़े, जैसे कि लाभ, एक ऋण मान ले सकते हैं। ऐसी परिस्थिति में कमी 100% से अधिक हो सकती है।

2) **छोटे आधारों द्वारा उत्पन्न विरूपण (distortion)**: एक अन्य उदाहरण पर विचार कीजिए, जहाँ छोटे आधारों द्वारा उत्पन्न विरूपण के कारण, अशुद्ध निष्कर्ष निकाले जा सकते हैं। मान लीजिए फर्म A का लाभ 1,000 रुपये से बढ़कर 10,000 रूपये हो गया, और फर्म B का लाभ, 50 लाख रुपये से बढ़कर 70 लाख रुपये हो गया। पहली स्थिति में वृद्धि 900% है, जबकि दूसरी स्थिति में केवल 40%। फर्म A की स्थिति में वृद्धि की बड़ी ऊँची प्रतिशतता है। इन आँकड़ों की व्याख्या करने में सावधानी बरतनी होगी। स्पष्टतः यह निष्कर्ष कि फर्म A का प्रबंध अधिक दक्ष है, न्यायोचित नहीं ठहराया जा सकता। क्योंकि प्रतिशतता एक सापेक्ष परिमाण को निर्देशित करती है। इसलिए इससे निरेपक्ष मानों के बारे में, कोई अनुमान नहीं लगाना चाहिये। ऐसी परिस्थिति में एक यथार्थ चित्र तभी प्राप्त होता है जबकि निरपेक्ष मान दिये गये हों।

3 **असमरूप स्थितियों पर आधारित तुलना**: परिकलन के लिए और अनुपातों तथा प्रतिशतताओं के प्रयोग के लिए आँकड़े समांग होने चाहिए। उदाहरण के लिए किसी नगर या देश की सामान्य मृत्यु दर को उस नगर या देश की कुल मृत्यु संख्या को वहाँ की कुल जनसंख्या से भाजित कर और 1000 से गुणा करके ज्ञात किया जा सकता है। परंतु यह सामान्य मृत्यु दर या अशोधित मृत्यु दर, जैसा कि इसे कहा जाता है, असमांग आंकड़ों से सम्बद्ध है, क्योंकि मृत्यु दर आयु, लिंग आदि के आधार पर जनसंख्या के संघटन के अनुसार भिन्न होती है।

एक अन्य उदाहरण पर विचार कीजिए। एक बस्ती A में, 1,000 व्यक्तियों में से 500 हैज़े से ग्रस्त हुए और, बस्ती B में, 1,000 व्यक्तियों में से केवल 100 प्रभावित हुए। यदि आप प्रत्येक बस्ती के लिए

रोग से ग्रस्त व्यक्तियों का, रोग से ग्रस्त नहीं हुए व्यक्तियों से अनुपात का परिकलन करें तो बस्ती A की स्थिति में यह अनुपात 1 : 1 है, जबकि बस्ती B की स्थिति में, 1 : 9। इन अनुपातों की तुलना से आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि बस्ती B का रख-रखाव आरोग्य शास्त्र की दृष्टि से श्रेष्ठतर है और बस्ती B के लोग अधिक स्वस्थ हैं। किन्तु आवश्यक नहीं, कि यह सत्य हो क्योंकि संभव है कि बस्ती के लोगों ने हैजे का टीका लगवा लिया हो

एक अन्य कथन पर विचार कीजिए। पिछले वर्ष की तुलना में, इस वर्ष 45% अधिक अपराध किए गए। इस कथन से स्पष्ट निष्कर्ष निकलता है कि अपराध बढ़ रहे हैं। परंतु, यदि यह अनुपात, असमरूप परिस्थितियों की तुलना करता है, तो ऐसा निष्कर्ष निकालना ठीक न होगा। मान लीजिए पहले रिपोर्ट करने की कोई उचित प्रणाली न थी जबकि चालू वर्ष के आरंभ में रिपोर्ट करने की एक नई प्रणाली लागू की गई थी। ऐसी परिस्थिति में, हम यह निष्कर्ष नहीं निकाल सकते कि अपराध बढ़ रहे हैं। संभव है कि नई रिपोर्ट करने की प्रणाली के कारण अब सभी अपराधों की रिपोर्ट की जा रही है, जैसा कि पहले नहीं था। इसका अर्थ है कि तुलना असमरूप परिस्थितियों में की गई है। इसी प्रकार, यदि कुछ कंपनियों की लागत तथा लाभ की परिभाषाएँ भिन्न हों, तो उनकी लाभ और लागत की प्रतिशतताओं की तुलना नहीं की जानी चाहिए। तुलना से, सार्थक निष्कर्ष निकालने से पूर्व, यह आवश्यक है कि हम यह ज्ञात करें, कि जिन आंकड़ों का विश्लेषण किया गया है, वे तुलनीय हैं या नहीं।

4 **छोटी निरपेक्ष संख्याओं पर आधारित परिकलनः** यदि मदों की संख्या छोटी हो, तो प्रतिशतताएँ, भ्रामक निष्कर्ष दे सकती हैं। मान लीजिए एक स्कूल से, केवल 5 विद्यार्थी एस.एस.सी. परीक्षा में बैठे और वे सभी उत्तीर्ण हो गए। तो हम कहेंगे कि परिणाम 100% है। इस उदाहरण में, आधार, और वह परिमाण जिसकी इससे तुलना की जा रही है, दोनों छोटे हैं। इस प्रकार का कथन, मन पर एक अशुद्ध प्रभाव डालता है। इसलिए, यदि मदों की संख्या छोटी हों, तो प्रतिशतताओं का प्रयोग नहीं करना चाहिए। कभी-कभी ऐसी परिस्थिति भी हो सकती है कि आधार, बहुत ही छोटा हो और वह परिमाण जिसकी आधार से तुलना करनी है, बहुत ही बड़ा हो। ऐसी स्थिति में, हम प्रतिशतता का बहुत ही ऊँचा मान प्राप्त कर सकते हैं, जो तुलना के लिए, सरल या सुविधाजनक नहीं होता। उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक द्रव्य का मूल्य 10 रुपये प्रति इकाई है। एक समय अंतराल में, इस मूल्य में 400 रुपये की वृद्धि हो गई। इसका अर्थ है कि मूल्यों में, 4,000% की वृद्धि हुई है। इससे, तुलना को, समझना सरल नहीं बल्कि कठिन हो जाता है। यह कथन कि पेय जल में, जीवाणु, 0.0002 आबादी को नुकसान पहुँचाएंगे। इस कथन की तुलना में कि 5,00,000 व्यक्तियों में से 1 को नुकसान होगा, कम निश्चित और कम स्पष्ट है। इस उदाहरण में, आधार बहुत बड़ा है और अंश बहुत ही छोटा है। अतः ऐसी स्थिति में, अनुपात या प्रतिशत रूप में प्रकट करने की तुलना में, तथ्य का कथन, अधिक स्पष्ट है।

5 **अंकगणितीय अशुद्धियाँः** दशमिक बिन्दु के अशुद्ध स्थापन से संबंद्ध अशुद्धियों के कारण, बड़ी ही अशुद्ध व्याख्या किया जाना नितांत संभव है। उदाहरण के लिए, निम्न कथन पर विचार कीजिए। "पिछले वर्ष की तुलना में, चालू वर्ष में, करों में 14% की वृद्धि हुई है"। यदि दशमिक बिन्दु का अशुद्ध स्थापन कर, यह कहें कि करों में 0.14% की वृद्धि हुई है, तो इसका अभिप्राय बिल्कुल भिन्न होगा। दो नगरों A और B की जनसंख्याएँ क्रमशः 8 लाख और 1.5 लाख हैं, इनके अनुपात को 8 : 1 के रूप में प्रकट किया जाना अशुद्ध है। वास्तव में, अनुपात 5:3:1 है। इस प्रकार, अनुपातों में अंकगणितीय अशुद्धियाँ भी एक अशुद्ध चित्र प्रस्तुत करती हैं।

6 **अनुचित माध्य निकालना (Improper averaging):** प्रतिशतताओं के माध्य ज्ञात करने पर कुछ विचार-विमर्श की आवश्यकता है, क्योंकि कई परिस्थितियों में, अशुद्ध रूप से माध्य निकाला जाता है। उदाहरण के लिए, वोल्ट निर्माण करने वाली एक फैक्टरी के विषय में विचार कीजिए, जहां वोल्ट निर्माण करने हेतु तीन मशीनें A, B, और C हैं। इन मशीनों द्वारा निर्मित कुछ वोल्ट सदोष होते हैं। A, B और C की सदोष दरें क्रमशः 3%, 2% और 4% हैं। इन प्रतिशतताओं का समांतर माध्य, 3% (अर्थात् $3 + 2 + 4 \div 3$) सदोष दर प्रदान करता है। परन्तु यह संभव है कि यह वास्तविक माध्य सदोष दर न हो क्योंकि संभव है कि प्रत्येक मशीन द्वारा निर्मित वोल्टों की संख्या समान न हो। उचित माध्य ज्ञात करने के लिए, प्रत्येक मशीन द्वारा निर्मित वोल्टों की संख्या ज्ञात करना आवश्यक है। मान लीजिए मशीन A ने 300 वोल्ट निर्मित किए, मशीन B ने 100 वोल्ट और मशीन C ने 600 वोल्ट। अब सदोष वोल्टों की उचित माध्य दर, निम्नानुसार परिकलित करेंगे।

मशीन (1)	सदोष बोल्ट प्रतिशत (2)	निर्मित बोल्टों की कुल संख्या (3)	सदोष बोल्टों की यथार्थ संख्या (स्तंभ 2 × 3 ÷ 100) (4)
A	3	300	9
B	2	100	2
C	4	600	24
कुल		1,000	35

सदोष बोल्टों का माध्य दर = 35/1000 × 100 = 3.5 है। इस प्रकार, बोल्टों में 3.5% सदोष हैं। यह पूर्व परिकलित समांतर माध्य से काफी भिन्न है। उपरोक्त परिचर्चा से यह स्पष्ट है कि अनुपात और प्रतिशतता का परिकलन सावधानी से करना चाहिए, ताकि उनसे सार्थक निष्कर्ष निकाले जा सकें। जब भी संभव हो, वे आँकड़े भी, जिनसे ये व्युत्पन्न लिए गए हैं, दिये जाने चाहिएँ, ताकि प्रयोक्ता संबंध की जाँच कर सकें और अशुद्धियों का पता लगाकर, स्वयं अपनी व्याख्या कर सकें।

बोध प्रश्न ख

1 **अनुपात परिकलन के लिए, हर के चयन संबंधी मार्ग दर्शक तत्वों को सूचीबद्ध कीजिए**

....

....

....

....

....

2 **उन कारणों को सूचीबद्ध कीजिए जो प्रायः सांख्यिकीय व्युत्पन्नों की अशुद्ध व्याख्या को जन्म देते हैं।**

....

....

....

....

....

3 निम्नलिखित कथनों में से कौन सा कथन सत्य है अथवा कौन सा असत्यः

i) काल संबंधी तुलनाओं में, प्रायः पहले हुई घटना को आधार रूप में लेते हैं।

ii) अनुपात परिकलित करने के लिये, आधार रूप में प्रयुक्त संख्या का तुलनीय संख्याओं के परिमाण से कोई संबंध नहीं होता।

iii) दो प्रतिशतता मानों की तुलना करते समय, उन हरों के यथार्थ मानों को जानना आवश्यक नहीं है जिन पर प्रतिशतताएँ आधारित हैं।

iv) आप तब तक ठोस निष्कर्ष नहीं निकाल सकते, जब तक कि आँकड़ों के विश्लेषण के लिए प्रयुक्त विधि प्रयोजन के अनुरूप न हो।

v) सांख्यिकीय व्युत्पन्नों का प्रयोग अज्ञात राशियों को आकलित करने के लिए नहीं किया जा सकता।

vi) बंटन अनुपात द्वारा योग के एक भाग की दूसरे भाग से तुलना की जाती है।

vii) काल अनुपात ज्ञात करने के लिए, सदैव एक स्थिर आधार का प्रयोग करना आवश्यक नहीं है।

viii) **संकर अनुपातों को प्रायः प्रतिशतता रूप में प्रकट किया जाता है।**

4.8 लघुगणक

अनुपातों और प्रतिशतताओं के समान, लघुगणक भी, सापेक्ष अध्ययनों में सहायक होते हैं। विशेष कर, गणितीय परिकलनों में, लघुगणक, बहुत ही सहायक होते हैं। बड़ी संख्याओं के गुणन, भाजन, मूल कलन और घात करण, को लघुगणकों की सहायता से, बड़ी ही सरलता से संपन्न किया जा सकता है।

4.8.1 लघुगणक का अर्थ

दो संख्याओं 4 और 16 पर विचार कीजिए। इनमें एक संबंध, समता $4^2=16$, द्वारा प्रकट किया जा सकता है। **घातांक 2, आधार 4 पर, 16 का लघुगणक (लघु)** है। इसे लिखते हैं, $\log_4 16=2$ प्रतीक 'log' लघुगणक के अंग्रेजी पर्याय logarithm के, पहले तीन अक्षरों से बना है। इस उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि लघुगणक, केवल वह घातांक है, जिस पर आधार (14) के घातकरण से, निर्दिष्ट संख्या (16) प्राप्त हो जाए।

सामान्यतः, यदि $y=b^t$ तो $t=\log_b y$ जो यह निर्देशित करता है कि y का लघुगणक, **$\log_b y$ वह घातांक है जिस पर, आधार b का घातकरण करना होगा, ताकि उसका मान y प्राप्त हो जाए।**
लघुगणकों के निम्न गुण स्मरण रखे जाने चाहिएः

1) एक ऋण संख्या और शून्य का लघुगणक नहीं होता।
2) इकाई से भिन्न, परिमित धन संख्या आधार पर, 1 (इकाई) का लघुगणक शून्य होता है। क्योंकि $1=3^0$, इसलिए $\log_3 1=0$
3) किसी भी संख्या का लघुगणक, उसी संख्या आधार पर, 1 होता है। ($\log_3^3=1$, क्योंकि $3=3$)।

यह आवश्यक नहीं कि लघुगणक का आधार, किसी विशेष संख्या तक ही सीमित रखा जाए। परन्तु वस्तुतः अनुप्रयोगों में, दो ही संख्याओं को आधार के रूप में लिया जाता है, अर्थात् संख्या 10 और संख्या "e"। जब आधार 10 हो, तो लघुगणक को **साधारण लघुगणक** कहा जाता है और प्रतीक $\log_{10}$ या केवल 'log' द्वारा प्रकट किया जाता है। यदि नेपियर (Napier) के अचर "e" को (जिसका मान लगभग 2.71828 है) आधार लिया जाए, तो लघु गणक को **प्राकृतिक लघुगणक** कहा जाता है और प्रतीक 'l_n' द्वारा दर्शाया जाता है। वैश्लेषिक अध्ययन में, साधारण लघुगणकों की अपेक्षा प्राकृतिक लघुगणक अधिक उपयोगी हैं। इस इकाई में, परिकलनात्मक प्रयोजन से लघुगणकों के प्रयोग पर जोर दिया गया है। परिकलन कार्य के लिए सामान्य लघुगणकों का प्रयोग, बहुधा किया जाता है। इसलिए, उन्हें गणितीय परिकलनों में किस प्रकार प्रयोग में लाते हैं, इस पर अब हम विचार करेंगे।

$\log_{10} 1{,}000 = 3$ (क्योंकि $10^3 = 1{,}000$)
$\log_{10} 100 = 2$ (क्योंकि $10^2 = 100$)
$\log_{10} 10 = 1$ (क्योंकि $10^1 = 10$)
$\log_{10} 1 = 0$ (क्योंकि $10^0 = 1$)
$\log_{10} 0.1 = -1$ (क्योंकि $10^{-1} = 0.1$)
$\log_{10} 0.01 = -2$ (क्योंकि $10^{-2} = 0.01$)

उपरोक्त परिणामों से स्पष्ट है कि 10 और 100 के बीच, संख्या का लघुगणक 1 और 2 के बीच होगा, और 1 और 10 के बीच, संख्या का लघुगणक अवश्य ही 1 से छोटा एक धन भिन्न होगा। कल्पना कीजिए, कि एक संख्या N, 10 से बड़ी और 100 से छोटी है, अर्थात् यह दो अंकों से बनी है। तो, log N, 1 और 2 के बीच होगा, अर्थात् 1 +a, जहां 1 पूर्णांकीय भाग है, और a भिन्न भाग। भिन्न भाग को, सदैव उसके पूर्व दशमिक बिन्दु लगा कर सूचित किया जाता है। यदि N 100 से बड़ा और 1000 से छोटा हो, तो N का लघुगणक 2 +b होगा, जहां 2, पूर्णांकीय भाग और b भिन्न भाग होगा। इससे अभिप्राय है, तीन अंकों वाली संख्या के लघुगणक में, पूर्णांकीय भाग 2 है। इस तर्क को जारी रखते हुए, **यदि कोई संख्या, 1 से बड़ी हो, और इसके पूर्णांकीय भाग में n अंक हों, तो इसके लघुगणक के पूर्णांकीय भाग में, (n−1) अंक होंगे।**

अब कल्पना कीजिए कि संख्या N, 1 और 0.1 के बीच है। मान लीजिए 0.8, तो इसका लघुगणक 0 और −1 के बीच होगा अर्थात् −1+C, जहां C, एक धन भिन्न है। इसी प्रकार, यदि संख्या N, 0.1 और 0.01 के बीच हो, मान लीजिए 0.03, तो इसका लघुगणक −1 और −2 के बीच होगा। अर्थात् −2 +d जहाँ d तक धन भिन्न है। इसी प्रकार जारी रखते हुए, यदि संख्या N, 0.01 और 0.001 के बीच हो। मान लीजिए, 0.004, तो इसका लघुगणक −2 और −3 के बीच होगा, अर्थात् रूप −3 +f, जहां f एक धन भिन्न है। अतः हम देखते हैं कि लघुगणक का पूर्णांकीय भाग ऋण है और परिमाण में, संख्या में दशमिक बिन्दु के पश्चात् और पहले सार्थक अंक से पूर्व, शून्यों की संख्या से, एक अधिक होता है।

इस तर्क को जारी रखते हुए यदि कोई संख्या 1 से छोटी हो, और उसमें दशमिक बिन्दु के पश्चात् और पहले सार्थक अंक से पूर्व, x शून्य हो, तो उसके लघुगणक का पूर्णांकीय भाग ऋण होगा, और परिमाण में, शून्यों की संख्या से एक अधिक, अर्थात् −(x + 1) होगा।

किसी संख्या के लघुगणक के पूर्णांकीय भाग को उसके लघुगणक का **पूर्णांश** और भिन्न भाग को उसके लघुगणक का **अपूर्णांश** कहा जाता है। ध्यान दीजिए कि पूर्णांश, शून्य, धन या ऋण हो सकता है, परंतु अपूर्णांश सदैव धन होता है।

4.8.2 संख्या का लघु मान ज्ञात करना

किसी संख्या के लघु मान log को ज्ञात करने की प्रक्रिया के तीन प्रमुख चरण हैं। ये हैं: (1) पूर्णांश ज्ञात करना,(2) अपूर्णांश ज्ञात करना और (3) प्रतिलघुगणक ज्ञात करना। आइये अब इन तीन चरणों पर विस्तार से विचार करें।

1 **पूर्णांश (Characteristics) ज्ञात करना:** पहले चरण मे हम पूर्णांश ज्ञात करते हैं। जैसा कि पहले बताया गया था, यदि संख्या में अंकों की गिनती, 1 से अधिक हो, तो पूर्णांश, संख्या में दशमिक बिन्दु के बाईं ओर के अंकों की संख्या से एक कम होगा। उदाहरण के लिए log 415.42 का पूर्णांश 2 है, क्योंकि संख्या में दशमिक बिन्दु के बाईं ओर अंकों की संख्या 3 है। इसी प्रकार, 17.23 का पूर्णांश 1 है और log 7.23 का पूर्णांश 0 है।

उन संख्याओं की स्थिति में, जो 1 से छोटी हों, पूर्णांश ऋण होता है, और परिमाण में दशमिक बिन्दु के पश्चात् और पहले सार्थक अंक से पूर्व, शून्यों की संख्या से अधिक होता है। इस प्रकार, log 0.98 का पूर्णांश −1होगा, log 0.098 का पूर्णांश −2, और log 0.00908 का पूर्णांश −3 होगा, इत्यादि।

2 **अपूर्णांश (Mantissa) ज्ञात करना:** किसी संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश ज्ञात करने के लिए, हम लघुगणक सारणियों का प्रयोग करते हैं। लघुगणक सारणियाँ इस इकाई के अंत में दी गई हैं। उदाहरण के लिए, मान लीजिए, log 3451 का अपूर्णांश अभीष्ट है। पहले हम, लघुगणक सारणी में, 34 (अर्थात् संख्या के पहले दो अंकों से बनी संख्या) की पंक्ति में, और 5 (अर्थात् संख्या के तीसरे अंक) के स्तम्भ में देखते हैं। इनके प्रतिच्छेद पर, अपूर्णांश 5378 पाते हैं। अब इसी पंक्ति में, माध्य अंतरों के स्तंभ 1 (संख्या में, चौथा अंक) में देखते हैं, तो मान 1 प्राप्त करते हैं। इस 1 का 5378 में योग करें तो 5379 प्राप्त होता है। अतः log 3451 का अपूर्णांश 0.5379 है। आप पहले ही ज्ञात कर चुके हैं कि log 3451 का पूर्णांश 3 है। अतः log 3451 = 3.5379।

ध्यान दीजिए कि अपूर्णांश सदैव धन होता है और संख्या में दशमिक बिन्दु के स्थानांतरण का इस पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता। अर्थात् संख्याओं 245, 2.45, 24.5, 0.245, 0.0245, 0.00245 और 0.000245 में से प्रत्येक के लघुगणक का अपूर्णांश एक समान होगा। लघुगणक सारणी देखने पर, यह ज्ञात किया जा सकता है कि log 245 का अपूर्णांश 0.3892 है। संख्या के लघुगणक के पूर्णांश का निश्चय, स्वयं उस संख्या के अंकों को देख कर किया जा सकता है, और अपूर्णांश को, संख्या के पहले चार सार्थक अंकों द्वारा, सारणी से प्राप्त किया जा सकता है। निम्न सारणी का अवलोकन कीजिए, और देखिए कि किस प्रकार, अपूर्णांश में परिवर्तन के बिना, पूर्णांश में परिवर्तन होता है।

संख्या	लघुगणक का मान
2450.0	3.3892
245.0	2.3892
24.5	1.3892
2.45	0.3892
0.245	$\bar{1}.3892$
0.0245	$\bar{2}.3892$
0.00245	$\bar{3}.3892$

टिप्पणी—कुछ लघुगणक मानों में, आप पूर्णांश के ऊपर एक दण्डिका पाते हैं। पूर्णांश के ऊपर दण्डिका लगाने से अभिप्राय है, कि वह भाग जिस पर दण्डिका है, ऋण है और अपूर्णांश (दशमलव भाग) धन है।

3 **प्रति लघुगणक (Antilogarithms) ज्ञात करना**: जैसा कि आप को ज्ञात है, लघुगणक सारणियाँ किसी संख्या के लघुगणक का अपूर्णांश मान प्रदान करती हैं। जब कि प्रति लघुगणक सारणियाँ उस संख्या का मान प्रदान करती हैं जिसका लघुगणक मान दिया गया हो। मान लीजिए, उपरोक्त उदाहरण में, लघुगणक मान 3.3892 ज्ञात है। अब हमारी अभिरुचि उस (संगत) यथार्थ संख्या को ज्ञात करने में है, जिसका लघुगणक मान 3.3892 है, अर्थात् संख्या 2450। हम कहेंगे कि 3.3892 का प्रति लघुगणक 2450 है, या प्रतीकों में, anti log 3.3892 = 2450। आइये, अब देखें कि किस प्रकार, प्रति लघुगणक सारणी से, यह प्रति लघु मान ज्ञात किया जा सकता है। 3.3892 का प्रति लघुगणक ज्ञात करने के लिए पहले केवल अपूर्णांश भाग, अर्थात् .3892 पर विचार कीजिए। प्रति लघु सारणी में, .38 की पंक्ति और 9 के स्तम्भ में देखिए। आप संख्या 2449 पाएगें। अब माध्य अंतरों के स्तम्भ 2 में और उसी पंक्ति में देखिए। तो आप मान 1 प्राप्त करेंगे। इस मान 1 को, 2449 में योग करने पर, आप प्रति लघु मान के अंक 2450 ज्ञात करते हैं। अब केवल दशमिक बिन्दु की स्थिति के बारे में निश्चय करना है। लघु मान 3.3892 में, पूर्णांश 3 है। अतः पूर्वचर्चित नियमों के अनुसार, प्रति लघुगणक संख्या में, (दशमिक बिन्दु से बाईं ओर) 4 अंक होने चाहिए। अतः चार अंकों के पश्चात् दशमिक बिन्दु लगा दीजिए। इसका अर्थ है, कि 2,450.0 ही मूल संख्या है। log $\bar{2}$.3892 की संगत, संख्या प्राप्त करने के लिए, सारणी से प्राप्त लघु मान में, संख्याएँ पहली स्थिति के अनुसार ही होंगी। केवल दशमिक बिन्दु की स्थिति बदल जाएगी, जिस का निश्चय पूर्णांश की सहायता से किया जाएगा। इस स्थिति में, पूर्णांश $\bar{2}$ है। इसलिए, पूर्वचर्चित नियमों के अनुसार, प्रति लघु 1 से छोटा होगा और उसमें दशमिक बिन्दु के पश्चात् और पहले सार्थक अंक से पहले एक शून्य होगा। इस प्रकार, anti log $\bar{2}$.3892 0.0245।

4.8.3 लघुगणक की सहायता से परिकलन

हमने, लघु मान और प्रति लघुमान ज्ञात करने के बारे में परिचर्चा की है। आइये, अब देखें कि विभिन्न प्रकार के परिकलनों में, लघुगणकों का प्रयोग कैसे किया जाता है। सामान्यतः लघुगणकों का प्रयोग, संख्याओं के गुणन, भाजन, मूलकलन और घात करण के लिए किया जाता है। परिकलन कुछ नियमों पर आधारित होते हैं। आइये देखें कि यह (परिकलन) कैसे किया जाता है।

1 **संख्याओं का गुणन**: जिन संख्याओं को गुणा करना है, उनके लघु गणक ज्ञात कीजिए। इनका योगफल ज्ञात कीजिए और फिर योगफल का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए। इस प्रकार:

$a \times b = \text{anti log } (\log a + \log b)$

यह निम्न नियम पर आधारित है:

$\log (a \times b) = \log a + \log b$

उदाहरण 1.

84.5 को 32.8 से गुणा कीजिए।

चरण I 84.5 और 32.8 के लघुगणक ज्ञात कीजिए।

log 84.5 = 1.9269
log 32.8 = 1.5159

चरण II दोनों लघु मानों का योग कीजिए।

log 84.5 + log 32.8 = 1.9269 + 1.5159 = 3.4428

चरण III 3.4428 का प्रति लघु ज्ञात कीजिए।

anti log 3.4428 = 2772.0
84.5 × 32.8 = 2772.0

टिप्पणीः यदि 84.5×32.8 को सीधे (बिना लघुगणकों के प्रयोग के) गुणा करें तो गुणनफल 2771.6 प्राप्त होता है। लघुगणक सारणियाँ केवल 4 सार्थक अंकों तक ही शुद्ध संख्याएँ देती हैं। अतः लघुगणकों द्वारा प्राप्त परिणाम, 2771.6 का, चार सार्थक अंकों तक शुद्ध सन्निकट मान है, अर्थात् 2772।

उदाहरण 2

59.3 को 0.0892 से गुणा कीजिए।

उदाहरण 1 के चरणों का अनुकरण करते हुएः

log 59.3 = 1.7731
log 0.0892 = $\bar{2}$.9504

इन लघु मानों का योग करते हुए, हम योगफल 0.7235 प्राप्त करते हैं।

ध्यान दीजिए, अपूर्णांशों का योग करने पर, "हासिल" 1 होता है। इसलिए, पूर्णांशों का योग करते समय, धन 2 और ऋण 2, कट जाते हैं। अतः योगफल में, पूर्णांश 0 होगा। पूर्णांशों का योग करते समय, प्रत्येक के चिन्ह का भी हिसाब लेना होगा।

अब anti log 0.7235 = 5.290
59.3 × 0.0892 = 5.290 (4 सार्थक अंकों तक)

2 **भाजनः** एक संख्या को दूसरी संख्या से भाजित करने के लिए, अंश और हर, दोनों के लघुगणक ज्ञात कीजिए। फिर अंश के लघुगणक में से, हर के लघुगणक को घटा दीजिए। अंतर का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए यही अभीष्ट उत्तर है।

$$\frac{a}{b} = \text{anti log}(\log a - \log b)$$

यह निम्न नियम पर आधारित हैः

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

उदाहरण 3

1465.2 को 18.6 से भाजित कीजिए।

चरण I 1465.2 और 18.6 के लघुगणक ज्ञात कीजिए।

log 1465.2 = 3.1659
log 18.6 = 1.2695

चरण II 18.6 के लघुगणक को 1465.2 के लघुगणक में से घटा दीजिए, अर्थात्

3.1659 − 1.2695 = 1.8964

चरण III 1.8964 का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए।

1.8964 = 78.77
1465.2 ÷ 18.6 = 78.77

उदाहरण 4

0.009 को 0.043 से भाजित कीजिए।

उदाहरण 3 के चरणों का अनुकरण करते हुए

log (0.009) = $\bar{3}$.9542
log (0.045) = $\bar{2}$.6532
$\bar{3}$.9542 − $\bar{2}$.6532 = $\bar{1}$.3010
anti log ($\bar{1}$.3010) = 0.2000
∴ 0.009 ÷ 0.045 = 0.2000

3 **संख्या का किसी क्रम का घात ज्ञात करनाः (To raise a number to a power)** किसी संख्या का, किसी क्रम का घात, ज्ञात करने के लिए, संख्या के लघु मान को, घातांक से गुणा कीजिए और गुणक फल का प्रति लघुगणक ज्ञात कीजिए। अर्थात्

$$a^n = \text{anti log}(n \times \log a)$$

यह निम्न नियम पर आधारित हैः

$$\log a^n = n \times \log a$$

उदाहरण 5

$(0.4)^3$ का मान ज्ञात कीजिए।

चरण I आधार, अर्थात् 0.4, का लघुगणक ज्ञात कीजिए।

$\log 0.4 = \bar{1}.6021$

चरण II लघु मान को घातांक से गुणा कीजिए।

अर्थात् $\bar{1}.6021 \times 3 = \bar{2}.8063$

ध्यान कीजिए, अपूर्णांश को 3 से गुणा करने पर, 1 हासिल होता है, जो धन है। पूर्णांश को 3 से गुणा करने पर, परिणाम ऋण 3 है, अतः योग फल $-3 + 1 = -2$ या $\bar{2}$ है।

चरण III परिणाम, अर्थात् $\bar{2}.8063$ का प्रतिलघु ज्ञात कीजिए।

$\text{anti log } \bar{2}.8063 = 0.0640$

$\therefore (0.4)^3 = 0.0640$

4) **संख्या का मूल (Root) कलन करना:** एक संख्या के किसी मूल को ज्ञात करने के लिए, संख्या के लघुगणक को, मूल के सूचकांक से भाजित कीजिए, और परिणाम का प्रतिलघु ज्ञात कीजिए। अर्थात्

$$\sqrt[n]{a} = a^{1/n} = \text{anti log } \frac{\log a}{n}$$

यह उसी नियम पर आधारित है, जिस पर उदाहरण (5), का परिणाम, जिसे निम्नानुसार भी लिखा जा सकता है:

$$\log a^{1/n} = \frac{1}{n} \times \log a$$

उदाहरण 6

$\sqrt[4]{85.6}$ का मान ज्ञात कीजिए

चरण I 85.6 का लघुमान ज्ञात कीजिए।

$\log 85.6 = 1.9325$

चरण II 85.6 के लघुमान को, 4 से भाजित कीजिए क्योंकि हमारी अभिरुचि चौथा मूल ज्ञात करने में है।

$1.9325 \div 4 = 0.4831$

चरण III 0.4831 का प्रतिलघु ज्ञात कीजिए।

$\text{anti log } 0.4831 = 3.042$

$\sqrt[4]{85.6} = 3.042$

उदाहरण 7

$\sqrt[6]{0.00856}$ का मान ज्ञात कीजिए।

उपरोक्त उदाहरण के चरणों का अनुकरण करते हुए:

$\log 0.00856 = \bar{3}.9325$

$\bar{3}.9325$ को 6 से भाजित करने के लिए, हमें इसे रूप $\bar{6} + 3.9325$ में लिखना होगा, क्योंकि $\bar{3}.9325$ में पूर्णांश $\bar{3}$, जो ऋण है, 6 से भाजित होने पर, भागफल एक पूर्णांक नहीं बल्कि -0.5 प्रदान करता है। यदि भाग फल को किसी संख्या का लघुगणक होना है, तो पूर्णांकीय भाग ऋण हो सकता है, परन्तु भिन्न भाग का धन होना आवश्यक है।

$$\frac{\bar{3}.9325}{6} = \frac{\bar{6} + 3.9325}{6} = \bar{1}.6554$$

अब, $\text{anti log } \bar{1}.6554 = 0.4523$

$\sqrt[6]{0.00856} = 0.4523$

उदाहरण 8

सरल कीजिए: $\sqrt{\dfrac{1.764 \times 89.727}{0.00406 \times 6584}}$

मान लीजिए, हमारा अंतिम उत्तर x है।

$$x = \sqrt{\frac{1.764 \times 89.727}{0.00406 \times 6584}}$$

दोनों पक्षों के लघुगणक लेने पर

$$\log x = \log \left(\frac{1.764 \times 89.727}{0.00406 \times 6584}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \log\left(\frac{1.764 \times 89.727}{0.00406 \times 6584}\right)$$

(नियम $\log a^n = n \log a$, से)

$$= \frac{1}{2} [\log (1.764 \times 89.727) - \log (0.00406 \times 6584)]$$

(नियम $a/b = \log a - \log b$)

$$= \frac{1}{2} [\log 1.764 + \log 89.727 - (\log 0.00406 + \log 6854)^{+}]$$

(नियम $\log a \times b = \log a + \log b$)

$$= \frac{1}{2} (0.2465 + 1.9529 - \bar{3}.6085 - 3.8162)$$

टिप्पणी: लघुगणक सारणियों से, केवल 4 सार्थक अंकों वाली संख्याओं के लघुगणक प्राप्त हो सकते हैं। परन्तु 89.727 में 5 अंक हैं। इसलिए पहले इसका 4 सार्थक अंकों तक, उपसादन करना होगा, अर्थात् 89.73 और फिर सारणी देखी जाएगी। अपरोक्त व्यंजक को सरल करने पर

$$\log x = \frac{1}{2} (0.7747) = 0.3874$$

(केवल 4 सार्थक अंकों तक)

$\therefore x = \text{anti} \log 0.3874$

$= 2.440$

अतः निर्दिष्ट व्यंजक का मान 2.440 है।

उदाहरण 9

$1/2^{10}$ का मान ज्ञात कीजिए।

मान लीजिए $x = 1/2^{10}$

उदाहरण 8 के अनुसार प्रवृत्त होते हुए।

$$\log x = \log \left(\frac{1}{2^{10}}\right)$$

$= \log 1 - \log 2^{10}$

$= \log 1 - 10 \log^2$

$= 0 - 10 \times 0.3010$

$= 3.010$

टिप्पणी

1 2 के लघुगणक का पूर्णांश, सारणी से ज्ञात करने के लिए हमें इसे 2.00 के रूप में लेना होगा या 200 के लघुगणक के लिए सारणी देखी जाएगी।

2 हमारे पास, $\log x = -3.010$ है इसका अर्थ है कि पूर्णांकीय भाग "3" और भिन्न भाग ".010", दोनों ऋण हैं। यदि −3.010 ने किसी संख्या x का लघुगणक होना है, तो भिन्न भाग (अर्थात् अपूर्णांश) का धन होना आवश्यक है। इसलिए, −3.010 को, इसमें 1 योग तथा व्यवकलन कर, इस प्रकार लिखते हैं कि दशमलव भाग धन हो जाए।

अब, $\log x = -3.010$

$= -3.010 + 1 - 1$

$= -3 - .010 + 1 - 1$

$= -3 - 1 + 1 - .010$

$= -4 + .990$

$= \bar{4}.990$

$\therefore x = \text{anti log } \bar{4}.990$

$= 0.0009772$

प्रति लघु सारणियों को पढ़ते समय, हमने अपूर्णांश 0.990 के लिए, जिस में केवल तीन सार्थक अंक हैं, संख्या की खोज की। इसलिए, प्राप्त परिणाम भी, केवल तीन सार्थक अंकों तक शुद्ध होना चाहिए।

अतः $1/2^{10} = 0.000977$

लघुगणकों के अन्य उपयोग

लघुगणक, सांख्यिकीय गणनाओं मे बड़े उपयोगी हैं। लघुगणकों का प्रयोग, समानुपाती परिवर्तनों के अध्ययन में किया जाता है। उदाहरण के लिए, 10 से 100 तक के सापेक्ष परिवर्तन की मात्रा वही है, जो 100 से 1000 तक की दोनों स्थितियों में, संख्याएँ दस गुणा हो जाती हैं। इस तथ्य को, लघुगणकों द्वारा बड़ी सरलता से देखा जा सकता है। 10 का लघुगणक 1 है और 100 का 2। इस प्रकार लघुगणक में परिवर्तन 1 है। इसी प्रकार, 100 से 1000 तक के परिवर्तन के फलस्वरूप लघुगणक में परिवर्तन 2 से 3 तक होता है। 1 से 2 तक की वृद्धि और 2 से 3 तक की वृद्धि समान हैं। इस प्रकार, यदि लघु मानों में परिवर्तन समान हों, तो यह निर्देशित करता है कि मूल संख्याओं में सापेक्ष परिवर्तन भी समान हैं। लघुगणक की संकल्पना का प्रयोग, आलेखों में, वृद्धि दर को प्रदर्शित करने के लिए भी किया जाता है। इनका प्रयोग भिन्न मात्रकों पर आधारित या भिन्न परिमाणों की श्रेणियों की तुलना के लिए, एक ही श्रेणी में, उच्चावचनों की तुलना करने के लिए, अनुपातों और प्रतिशतताओं की परख आदि के लिए भी करते हैं। लेखा चित्रीय उपस्थापन में लघुगणकों के प्रयोग विस्तार, सांख्यिकी के इस प्रारंभिक पाठ्यक्रम के विषय क्षेत्र से बाहर है।

बोध प्रश्न ग

1 **निम्न का योग कीजिए:**

i) $\bar{1}.8346$ और $\underline{2}.6213$
ii) $\bar{3}.1680$ और $\underline{2}.9431$

....

....

....

2 **मान ज्ञात कीजिए:**

i) $\underline{2}.2163 - \bar{3}.8304$
ii) $\bar{3}.1694 - 2.4560$
iii) $0.3483 - \underline{2}.8631$
iv) $0.1294 - \bar{1}.0643$

....

....

....

....

....

....

3 **निम्न को सरल कीजिए। परिणाम को ऐसे रूप में लिखिए कि वह किसी संख्या का लघुगणक प्रतीत हो।**

i) $\underline{8} \times \bar{1}.4631$
ii) $\bar{2}.1625/3$
iii) -8.864
iv) $0 - 2.4831$

....

....

....

....

4 लघुगणकों के प्रयोग, से निम्न का मान ज्ञात कीजिए।

i) 3.45×138.034
ii) 0.083×0.0048
iii) $183.45/3.56$
iv) $0.0136/1.26$
v) $(3.14)^5$

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5 लघुगणकों की सहायता से, निम्न का मान ज्ञात कीजिए

i) $\dfrac{4.31 \times 63.453}{20.56 \times 9}$

ii) $\dfrac{83}{564 \times 35.05}$

....

....

....

....

....

4.9 सारांश

सार्थक और उपयोगी निष्कर्ष प्राप्त करने के लिए, संग्रह किए गए आँकड़ों का, सांख्यिकीय व्युत्पन्नों जैसे अनुपात, प्रतिशतता और दर, इत्यादि का पदों में विश्लेषण किया जाना चाहिए। अनुपात, दो राशियों के परिमाणों में संबंध को व्यक्त करता है। इसे प्रायः रूप A : B या A/B के रूप में प्रकट करते हैं। यदि वर्गों की संख्या अधिक हो तो प्रयोग करने के लिए, समानुपात श्रेष्ठतर व्युत्पन्न है। समानुपात किसी एक वर्ग का, सभी वर्गों के कुल से अनुपात होता है। अनुपातों और समानुपातों को बहुधा प्रतिशत रूप में भी प्रकट किया जाता है। ऐसे अनुपात को, जिसे दो भिन्न प्रकार के आँकड़ों (अर्थात् एक अंश में और दूसरा हर में) से प्राप्त किया गया हो, दर कहा जाता है। एक दर को प्रायः "प्रति 1,000", "प्रति 100" इत्यादि पदों में प्रकट किया जाता है। जब एक दर को "प्रति इकाई" रूप में प्रकट किया जाए, तो इसे गुणांक कहा जाता है। इन व्युत्पन्नों के परिकलन करने का मुख्य प्रयोजन, तुलना में, इनका सहायक होना है। ये, अंश या हर की अज्ञात राशियों का आकलन करने में भी उपयोगी हैं।

अनुपात विभिन्न प्रकार के होते हैं, जैसे बंटन अनुपात, अन्तर्भागीय और अंतर्वर्गीय अनुपात, काल अनुपात और संकर अनुपात। काल अनुपात की गणना दो प्रकार से की जा सकती है (i) स्थिर (नियत) आधार के प्रयोग से, या (ii) बदलते हुए (चल) आधार के प्रयोग से। संकर अनुपात की गणना दो भिन्न वर्गों के आँकड़ों के संगत भागों में की जाती है। इन्हें प्रायः प्रति इकाई के पदों में लिखा जाता है, प्रतिशत के पदों में नहीं। इस अर्थ में, उन्हें दर भी कहा जा सकता है। इन अनुपातों के परिकलन में, हर या आधार, सदैव एक मानक होता है, जिससे अंश की तुलना की जाती है। काल से सम्बद्ध तुलनाओं में, पहले हुई घटना को

ही, प्रायः आधार रूप में लिया जाता है। हर में, आधार रूप में प्रयोग की जाने वाली इकाइयों की संख्या का निश्चय सामान्य रीति, सुविधा और प्रभावकारिता की दृष्टि से किया जाता है। यह संख्या पर्याप्त मात्रा में बड़ी होनी चाहिए ताकि अंश का मान एक पूर्णांक हो जिसमें दो या तीन अंकों से अधिक न हों। यह उस संख्या से भी छोटी होनी चाहिए, जो मूल आँकड़ों में, हर के रूप में लिये जाते हैं। अनुपातों, प्रतिशतताओं, इत्यादि की अशुद्ध व्याख्या या दुरूपयोग प्रायः निम्नलिखित कारणों से होता है। (1) आधार संबंधी गड़बड़ी (2) छोटे आधारों द्वारा उत्पन्न विरूपण, (3) असमरूप स्थितियों पर आधारित तुलना (4) परिकलन की अंकगणितीय अशुद्धियाँ, (5) छोटी निरपेक्ष संख्याओं पर आधारित परिकलन और (6) माध्यम की अनुचित प्रक्रिया। सांख्यिकीय व्युत्पन्नों के परिकलन और उनसे निष्कर्ष निकालते समय, हमें इन समस्याओं का ध्यान रखना चाहिए। गणितीय परिकलनों में, लघुगणक बड़े सहायक होते हैं। आधार b पर, संख्या y का लघुगणक, वह घातांक है, जिस पर आधार b का घातकरण करना होगा, ताकि उसका मान निर्दिष्ट संख्या (y) प्राप्त हो जाए। यदि $y = b^t$ तो $\log y = t$ आधार 10 के लघुगणकों को साधारण लघुगणक कहा जाता है, और ये ही परिकलनों में प्रयुक्त होते हैं। लघुगणक मान के पूर्णांकीय भाग को उसका **पूर्णांश और** दशमलव भाग को उसका अपूर्णांश कहा जाता है। पूर्णांश, धन, ऋण या शून्य हो सकता है और इसका निर्धारण संख्या के अंकों को देखने मात्र से हो सकता है। दशमिक बिन्दु के बाईं ओर अंकों की संख्या से या यदि संख्या 1 से छोटी हो तो दशमिक बिन्दु के पश्चात्, और पहले सार्थक अंक से पूर्व, शून्यों की संख्या की गिनती करके इसका निर्धारण किया जा सकता है। अपूर्णांश सदैव धन होता है, और इसे लघुगणक सारणी से जाना जा सकता है। किसी संख्या t का प्रति लघुगणक 10^t होता है। इसे प्रति लघुगणक सारणी की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है। लघुगणकों की सहायता से परिकलन, निम्न तीन नियमों पर आधारित होता है:

1 $\log a \times b = \log a + \log b$
2 $\log a/b = \log a - \log b$
3 $\log a^n = n \times \log a$

4.10 शब्दावली

लघुगणक का पूर्णांश: यह साधारण लघुगणक का पूर्णांकीय भाग होता है।
साधारण लघुगणक: यदि लघुगणक का आधार 10 हो तो इसे साधारण लघुगणक कहते हैं।
बंटन अनुपात: किसी राशि के एक भाग का, उस भाग को समाविष्ट करती हुई, संपूर्ण राशि से अनुपात बंटन अनुपात कहलाता है। इसे समानुपात भी कहा जाता है।
संकर अनुपात: दो भिन्न वर्गों के आँकड़ों के संगत भागों में अनुपात संकर अनुपात कहलाता है। यह दर के अनुरूप होता है।
लघुगणक: एक निर्दिष्ट संख्या y का लघुगणक (log y) वह घातांक है, जिस पर आधार b का घातकरण किया जाता है ताकि यह निर्दिष्ट संख्या मान प्राप्त कर ले। यदि $y = b^t$ तो $t = \log_b y$
लघुगणक का अपूर्णांश: सामान्य लघुगणक मान में दशमलव भिन्न भाग।
प्रतिशतता: जब किसी अनुपात का हर 100 हो तो यह उसके अंश को प्रकट करता है।
समानुपात: किसी एक वर्ग से इकाइयों का सभी वर्गों की कुल इकाइयों से अनुपात।
दर: एक अनुपात, जिसके अंश और हर भिन्न इकाइयों में प्रकट किये गए हों।
अनुपात: एक ही जाति और प्रकार की दो राशियों के परिमाणों में संबंध व्यक्त करता है तथा एक राशि दूसरी राशि में कितनी बार सम्मिलित है, यह प्रकट करता है।
काल अनुपात: इसे प्रायः प्रतिशत रूप में प्रकट किया जाता है और यह, दो भिन्न कालों से संबद्ध मानों की श्रेणी में परिवर्तन को व्यक्त करता है।

4.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 5 i) असत्य ii) सत्य iii) असत्य iv) सत्य
6 i) घ ii) क iii) ख iv) ग
ख 3 i) सत्य ii) असत्य iii) असत्य iv) सत्य
v) असत्य vi) असत्य vii) सत्य viii) असत्य

ग 1 i) 2.4559 ii) 4.1111

2 i) 4.3859 ii) 6.7134 iii) 3.4852
iv) 1.0651

3 i) 5.7048 ii) 1.3875 iii) 9.136
iv) 1.5169

4 i) 476.2 ii) 0.0004 iii) 51.53
iv) 0.011 v) 305.2

5 i) 1.263 ii) 0.5903

4.12 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

प्रश्न

1 अनुपात, प्रतिशतता और दरों के अर्थ और प्रयोजन की व्याख्या कीजिए।

2 उन उपादानों की व्याख्या कीजिए, जो सांख्यिकीय व्युत्पन्नों की अशुद्ध व्याख्या का कारण बनते हैं।

3 अनुपातों के विभिन्न प्रकारों को लिखिए। अनुपातों का परिकलन करते समय, किन बातों को ध्यान में रखना चाहिए, व्याख्या करें।

अभ्यास

1 एक हस्पताल में प्रति वर्ष हुए जन्मों की संख्या दी गई है। निम्न का परिकलन कीजिए:

क) पुरुष जातीय और स्त्री जातीय बच्चों की प्रति वर्ष की प्रतिशतता।

ख) i) स्थिर आधार उपागम का प्रयोग करते हुए, (1982) और ii) चल आधार का प्रयोग करते हुए काल अनुपात।

वर्ष	पुरुष	स्त्रियां
1982	1,847	1,754
1983	1,915	1,816
1984	1,823	1,733
1985	1,670	1,588
1986	1,608	1,529

2 एक व्यक्ति, एक नगर में पिछले महीने, टी.वी. के तीन ट्रेडमार्कों (Brand) x, y और z की बिक्री की तुलना करना चाहता है। इन ट्रेडमार्कों का संव्यवहार करने वाले चार फुटकर विक्रेताओं का पता लगा लिया गया है और उनकी बिक्रियों के आँकड़े निम्न प्रकार हैं:

फुटकर	विक्रेता	बेचे गए टी.वी. सेटों की संख्या		
		ब्रांड x	ब्रांड y	ब्रांड z
विक्रेता	1	4	3	1
विक्रेता	2	8	4	3
विक्रेता	3	8	6	1
विक्रेता	4	10	7	0

निम्न की गणना कीजिए:

क) ब्रांड x के बेचे गए सेटों का कुल बेचे गए सेटों से, बंटन अनुपात और प्रतिशतता।

ख) ब्रांड x और ब्रांड y के इकट्ठे सेटों का, कुल बेचे गए सेटों से, बंटन अनुपात।

ग) ब्रांड x और ब्रांड y के बेचे गए सेटों का अंतर्वर्गीय अनुपात।

घ) ब्रांड x और ब्रांड y के इकट्ठे बेचे गए सेटों का, ब्रांड z के बेचे गए सेटों से, अंतर्वर्गीय अनुपात।

उत्तर

क) 0.545, 54.55%

ख) 0.909, 90.91%

ग) 3:2

घ) 10:1

3 एक व्यवसायी फर्म में A एक नया विक्रेता है, और B उसी फर्म में, एक अनुभवी विक्रेता है। विक्रेता A ने दूसरे मास में पहले मास की अपनी विक्री ती तुलना में, 50% से भी अधिक वृद्धि की। विक्रेता B की बिक्री केवल 5% बढ़ी। क्या इस से आप यह निष्कर्ष निकाल सकते हैं कि, B की तुलना में, A श्रेष्ठतर विक्रेता है? व्याख्या कीजिए।

4 निम्न अनुपातों में से प्रत्येक के हर में, क्या शोधन वांछनीय है?
क) एक बस दुर्घटना में मृत कर्मचारियों का, कुल रेल कर्मचारियों की संख्या से।
ख) एक समुदाय में, बेरोज़गार व्यक्तियों की संख्या का, उस समुदाय के कुल व्यक्तियों की संख्या से।
ग) B.A. की डिग्री परीक्षा पास करने वाले छात्रों की संख्या का नगर में कुल छात्रों की संख्या से।
घ) नगर में चेचक रोग से ग्रस्त व्यक्तियों की संख्या का नगर की कुल जनसंख्या से।

5 दो भिन्न प्रदेशों की ऋण समितियों के बारे में निम्न सूचना दी गई है। विभिन्न अनुपातों को परिकलित कीजिए, जिनसे आँकड़ों की व्याख्या की जा सके। अपने निष्कर्ष लिखिए:

प्रदेश	संख्या		वर्ष के अंतर्गत दिए गए ऋण	
	समितियों की	सदस्यों की (,000में)	संख्या (,000 में)	राशि (,000 में)
A	962	2,240	1,340	4,55,800
B	481	546	240	28,900

6 लघुगणकों के प्रयोग से निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

i) $100 \times \sqrt{\frac{280 \times 234}{232 \times 194}}$

ii) $32 \div \sqrt{176.5 \times 60}$

iii) $(34.1)^{5.1}$

उत्तर :

i) 120.7 ii) 0.9874 iii) 6,56,60,000

7 का मान ज्ञात कीजिए,

$$(1+\frac{r}{100})^5 = 2$$

(उत्तर : 14.9)

टिप्पणी : ये प्रश्न और अभ्यास, आपको इस इकाई को अधिक अच्छी प्रकार से समझने में सहायता करेंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। परन्तु, मूल्यांकन के लिए, उन्हें विश्वविद्यालय को न भेजिए। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

एन. के. कक्कर एवं एन. डी. वोहरा : *सांख्यिकी* (नई दिल्ली: एस. चन्द एंड कम्पनी लि., 1990) अध्याय 1
सत्य प्रकाश गुप्ता: *सांख्यिकी के सिद्धांत* (नई दिल्ली: सुल्तान चन्द एंड संस, 1990) अध्याय 1, 2

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1 2 3	4 5 6	7 8 9
10	0000	0043	0086	0128	0170						5 9 13	17 21 26	30 34 38
						0212	0253	0294	0334	0374	4 8 12	16 20 24	28 32 36
11	0414	0453	0492	0531	[illegible]						4 8 12	16 20 23	27 31 35
						0607	0645	0682	0719	0755	4 7 11	15 18 22	26 29 33
12	0792	0828	0864	0899	0934						3 7 11	14 18 21	25 28 32
						0969	1004	1038	1072	1106	3 7 10	14 17 20	24 27 31
13	1139	1173	1206	1239	1271						3 6 10	13 16 19	23 26 29
						1303	1335	1367	1399	1430	3 7 10	13 16 19	22 25 29
14	1461	1492	1523	1553	1584						3 6 9	12 15 19	22 25 28
						1614	1644	1673	1703	1732	3 6 9	12 14 17	20 23 26
15	1761	1790	1818	1847	1875						3 6 9	11 14 17	20 23 26
						1903	1931	1959	1987	2014	3 6 8	11 14 17	19 22 25
16	2041	2068	2095	2122	2148						3 6 8	11 14 16	19 22 24
						2175	2201	2227	2253	2279	3 5 8	10 13 16	18 21 23
17	2304	2330	2355	2380	2405						3 5 8	10 13 15	18 20 23
						2430	2455	2480	2504	2529	3 5 8	10 12 15	17 20 22
18	2553	2577	2601	2625	2648						2 5 7	9 12 14	17 19 21
						2672	2695	2718	2742	2765	2 4 7	9 11 14	16 18 21
19	2788	2810	2833	2856	2878						2 4 7	9 11 13	16 18 20
						2900	2923	2945	2967	2989	2 4 6	8 11 13	15 17 19
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2 4 6	8 11 13	15 17 19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2 4 6	8 10 12	14 16 18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2 4 6	8 10 12	14 15 17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2 4 6	7 9 11	13 15 17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2 4 5	7 9 11	12 14 16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2 3 5	7 9 10	12 14 15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2 3 5	7 8 10	11 13 15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2 3 5	6 8 9	11 13 14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2 3 5	6 8 9	11 12 14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1 3 4	6 7 9	10 12 13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1 3 4	6 7 9	10 11 13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1 3 4	6 7 8	10 11 12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1 3 4	5 7 8	9 11 12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1 3 4	5 6 8	9 10 12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1 3 4	5 6 8	9 10 11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1 2 4	5 6 7	9 10 11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1 2 4	5 6 7	8 10 11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1 2 3	5 6 7	8 9 10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1 2 3	5 6 7	8 9 10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1 2 3	4 5 7	8 9 10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1 2 3	4 5 6	8 9 10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1 2 3	4 5 6	7 8 9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1 2 3	4 5 6	7 8 9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1 2 3	4 5 6	7 8 9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1 2 3	4 5 6	7 8 9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1 2 3	4 5 6	7 8 9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1 2 3	4 5 6	7 7 8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1 2 3	4 5 5	6 7 8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1 2 3	4 4 5	6 7 8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1 2 3	4 4 5	6 7 8

Table 1

LOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4

Table 2

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·00	1000	1002	1005	1007	1009	1012	1014	1016	1019	1021	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·01	1023	1026	1028	1030	1033	1035	1038	1040	1042	1045	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·02	1047	1050	1052	1054	1057	1059	1062	1064	1067	1069	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·03	1072	1074	1076	1079	1081	1084	1086	1089	1091	1094	0	0	1	1	1	1	2	2	2
·04	1096	1099	1102	1104	1107	1109	1112	1114	1117	1119	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·05	1122	1125	1127	1130	1132	1135	1138	1140	1143	1146	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·06	1148	1151	1153	1156	1159	1161	1164	1167	1169	1172	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·07	1175	1178	1180	1183	1186	1189	1191	1194	1197	1199	0	1	1	1	1	2	2	2	2
·08	1202	1205	1208	1211	1213	1216	1219	1222	1225	1227	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·09	1230	1233	1236	1239	1242	1245	1247	1250	1253	1256	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·10	1259	1262	1265	1268	1271	1274	1276	1279	1282	1285	0	1	1	1	1	2	2	2	3
·11	1288	1291	1294	1297	1300	1303	1306	1309	1312	1315	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·12	1318	1321	1324	1327	1330	1334	1337	1340	1343	1346	0	1	1	1	2	2	2	2	3
·13	1349	1352	1355	1358	1361	1365	1368	1371	1374	1377	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·14	1380	1384	1387	1390	1393	1396	1400	1403	1406	1409	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·15	1413	1416	1419	1422	1426	1429	1432	1435	1439	1442	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·16	1445	1449	1452	1455	1459	1462	1466	1469	1472	1476	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·17	1479	1483	1486	1489	1493	1496	1500	1503	1507	1510	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·18	1514	1517	1521	1524	1528	1531	1535	1538	1542	1545	0	1	1	1	2	2	2	3	3
·19	1549	1552	1556	1560	1563	1567	1570	1574	1578	1581	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·20	1585	1589	1592	1596	1600	1603	1607	1611	1614	1618	0	1	1	1	2	2	3	3	3
·21	1622	1626	1629	1633	1637	1641	1644	1648	1652	1656	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·22	1660	1663	1667	1671	1675	1679	1683	1687	1690	1694	0	1	1	2	2	2	3	3	3
·23	1698	1702	1706	1710	1714	1718	1722	1726	1730	1734	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·24	1738	1742	1746	1750	1754	1758	1762	1766	1770	1774	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·25	1778	1782	1786	1791	1795	1799	1803	1807	1811	1816	0	1	1	2	2	2	3	3	4
·26	1820	1824	1828	1832	1837	1841	1845	1849	1854	1858	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·27	1862	1866	1871	1875	1879	1884	1888	1892	1897	1901	0	1	1	2	2	3	3	3	4
·28	1905	1910	1914	1919	1923	1928	1932	1936	1941	1945	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·29	1950	1954	1959	1963	1968	1972	1977	1982	1986	1991	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·30	1995	2000	2004	2009	2014	2018	2023	2028	2032	2037	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·31	2042	2046	2051	2056	2061	2065	2070	2075	2080	2084	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·32	2089	2094	2099	2104	2109	2113	2118	2123	2128	2133	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·33	2138	2143	2148	2153	2158	2163	2168	2173	2178	2183	0	1	1	2	2	3	3	4	4
·34	2188	2193	2198	2203	2208	2213	2218	2223	2228	2234	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·35	2239	2244	2249	2254	2259	2265	2270	2275	2280	2286	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·36	2291	2296	2301	2307	2312	2317	2323	2328	2333	2339	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·37	2344	2350	2355	2360	2366	2371	2377	2382	2388	2393	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·38	2399	2404	2410	2415	2421	2427	2432	2438	2443	2449	1	1	2	2	3	3	4	4	5
·39	2455	2460	2466	2472	2477	2483	2489	2495	2500	2506	1	1	2	2	3	3	4	5	5
·40	2512	2518	2523	2529	2535	2541	2547	2553	2559	2564	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·41	2570	2576	2582	2588	2594	2600	2606	2612	2618	2624	1	1	2	2	3	4	4	5	5
·42	2630	2636	2642	2649	2655	2661	2667	2673	2679	2685	1	1	2	2	3	4	4	5	6
·43	2692	2698	2704	2710	2716	2723	2729	2735	2742	2748	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·44	2754	2761	2767	2773	2780	2786	2793	2799	2805	2812	1	1	2	3	3	4	4	5	6
·45	2818	2825	2831	2838	2844	2851	2858	2864	2871	2877	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·46	2884	2891	2897	2904	2911	2917	2924	2931	2938	2944	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·47	2951	2958	2965	2972	2979	2985	2992	2999	3006	3013	1	1	2	3	3	4	5	5	6
·48	3020	3027	3034	3041	3048	3055	3062	3069	3076	3083	1	1	2	3	4	4	5	6	6
·49	3090	3097	3105	3112	3119	3126	3133	3141	3148	3155	1	1	2	3	4	4	5	6	6

Table 3

ANTILOGARITHMS

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·50	3162	3170	3177	3184	3192	3199	3206	3214	3221	3228	1	1	2	3	4	4	[illegible]	[illegible]	7
·51	3236	3243	3251	3258	3266	3273	3281	3289	1296	3304	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·52	3311	3319	3327	3334	3342	3350	3357	3365	3373	3381	1	2	2	3	4	5	5	6	7
·53	3388	3396	3404	3412	3420	3428	3436	3443	3451	3459	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·54	3467	3475	3483	3491	3499	3508	3516	3524	3532	3540	1	2	2	3	4	5	6	6	7
·55	3548	3556	3565	3573	3581	3589	3597	3606	3614	3622	1	2	2	3	4	5	6	7	7
·56	3631	3639	3648	3656	3664	3673	3681	3690	3698	3707	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·57	3715	3724	3733	3741	3750	3758	3767	3776	3784	3793	1	2	3	3	4	5	6	7	8
·58	3802	3811	3819	3828	3837	3846	3855	3864	3873	3882	1	2	3	4	4	5	6	7	8
·59	3890	3899	3908	3917	3926	3936	3945	3954	3963	3972	1	2	3	4	5	5	6	7	8
·60	3981	3990	3999	4009	4018	4027	4036	4046	4055	4064	1	2	3	4	5	6	6	7	8
·61	4074	4083	4093	4102	4111	4121	4130	4140	4150	4159	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·62	4169	4178	4188	4198	4207	4217	4227	4236	1246	4256	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·63	4266	4276	4285	4295	4305	4315	4325	4335	4345	4355	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·64	4365	4375	4385	4395	4406	4416	4426	4436	4446	4457	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·65	4467	4477	4487	4498	4508	4519	4529	4539	4550	4560	1	2	3	4	5	6	7	8	9
·66	4571	4581	4592	4603	4613	4624	4634	4645	4656	4667	1	2	3	4	5	6	7	9	10
·67	4677	4688	4699	4710	4721	4732	4742	4753	4764	4775	1	2	3	4	5	7	8	9	10
·68	4786	4797	4808	4819	4831	4842	4853	4864	4875	4887	1	2	3	4	6	7	8	9	10
·69	4898	4909	4920	4932	4943	4955	4966	4977	4989	5000	1	2	3	5	6	7	8	9	10
·70	5012	5023	5035	5047	5058	5070	5082	5093	5105	5117	1	2	4	5	6	7	8	9	11
·71	5129	5140	5152	5164	5176	5188	5200	5212	5224	5236	1	2	4	5	6	7	8	10	11
·72	5248	5260	5272	5284	5297	5309	5321	5333	5346	5358	1	2	4	5	6	7	9	10	11
·73	5370	5383	5395	5408	5420	5433	5445	5458	5470	5483	1	3	4	5	6	8	9	10	11
·74	5495	5508	5521	5534	5546	5559	5572	5585	5598	5610	1	3	4	5	6	8	9	10	12
·75	5623	5636	5649	5662	5675	5689	5702	5715	5728	5741	1	3	4	5	7	8	9	10	12
·76	5754	5768	5781	5794	5808	5821	5834	5848	5861	5875	1	3	4	5	7	8	9	11	12
·77	5888	5902	5916	5929	5943	5957	5970	5984	5998	6012	1	3	4	5	7	8	10	11	12
·78	6026	6039	6053	6067	6081	6095	6109	6124	6138	6152	1	3	4	6	7	8	10	11	13
·79	6166	6180	6194	6209	6223	6237	6252	6266	6281	6295	1	3	4	6	7	9	10	11	13
·80	6310	6324	6339	6353	6368	6383	6397	6412	6427	6442	1	3	4	6	7	9	10	12	13
·81	6457	6471	6486	6501	6516	6531	6546	6561	6577	6592	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·82	6607	6622	6637	6653	6668	6683	6699	6714	6730	6745	2	3	5	6	8	9	11	12	14
·83	6761	6776	6792	6808	6823	6839	6855	6871	6887	6902	2	3	5	6	8	9	11	13	14
·84	6918	6934	6950	6966	6982	6998	7015	7031	7047	7063	2	3	5	6	8	10	11	13	15
·85	7079	7096	7112	7129	7145	7161	7178	7194	7211	7228	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·86	7244	7261	7278	7295	7311	7328	7345	7362	7379	7396	2	3	5	7	8	10	12	13	15
·87	7413	7430	7447	7464	7482	7499	7516	7534	7551	7568	2	3	5	7	9	10	12	14	16
·88	7586	7603	7621	7638	7656	7674	7691	7709	7727	7745	2	4	5	7	9	11	12	14	16
·89	7762	7780	7798	7816	7834	7852	7870	7889	7907	7925	2	4	5	7	9	11	13	14	16
·90	7943	7962	7980	7998	8017	8035	8054	8072	8091	8110	2	4	6	7	9	11	13	15	17
·91	8128	8147	8166	8185	8204	8222	8241	8260	8279	8299	2	4	6	8	9	11	13	15	17
·92	8318	8337	8356	8375	8395	8414	8433	8453	8472	8492	2	4	6	8	10	12	14	15	17
·93	8511	8531	8551	8570	8590	8610	8630	8650	8670	8690	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·94	8710	8730	8750	8770	8790	8810	8831	8851	8872	8892	2	4	6	8	10	12	14	16	18
·95	8913	8933	8954	8974	8995	9016	9036	9057	9078	9099	2	4	6	8	10	12	15	17	19
·96	9120	9141	9162	9183	9204	9226	9247	9268	9290	9311	2	4	6	8	11	13	15	17	19
·97	9333	9354	9376	9397	9419	9441	9462	9484	9506	9528	2	4	7	9	11	13	15	17	20
·98	9550	9572	9594	9616	9638	9661	9683	9705	9727	9750	2	4	7	9	11	13	16	18	20
·99	9772	9795	9817	9840	9863	9886	9008	9931	9954	9977	2	5	7	9	11	14	16	18	20

Table 4

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

B.Com-201
सांख्यिकी के तत्व

खंड
2

समंकों का संग्रहण, वर्गीकरण तथा प्रस्तुतीकरण

इकाई 5

समंकों का संग्रहण 83

इकाई 6

समंकों का वर्गीकरण 99

इकाई 7

सारणिक प्रस्तुतीकरण 120

इकाई 8

आरेखीय प्रस्तुतीकरण 135

इकाई 9

रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण 158

विशेषज्ञ समिति

प्रो. बी. एस. शर्मा
सम-कुलपति
इं. गां. रा. मु. वि.

प्रो. राकेश खुराना
निदेशक, प्रबंध अध्ययन विद्यापीठ
इं. गां. रा. मु. वि.

प्रो. जे. सत्यनारायण (अध्यक्ष)
उस्मानिया विश्वविद्यालय
हैदराबाद

प्रो. जी. वी. शिनॉय
इंस्टीट्यूट ऑफ रूरल मैनेजमेंट
आनंद

प्रो. बी. एस. भाटिया
पंजाबी विश्वविद्यालय
पटियाला

प्रो. पी. के. घोष
दिल्ली विश्वविद्याल
दिल्ली

प्रो. आर. बी. उपाध्याय
राजस्थान विश्वविद्यालय
जयपुर

प्रो. आई. एच. फारूकी
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय
अलीगढ़

श्री ए. के. मजूमदार
इंस्टीट्यूट ऑफ चार्टर्ड एकाउंटेंट्स ऑफ इंडिया
नई दिल्ली

प्रो. अमर चन्द
मद्रास विश्वविद्यालय
मद्रास

पाठ निर्माण दल

डॉ. सी. आर. कोठारी
राजस्थान विश्वविद्यालय
जयपुर

डॉ. एन. के. कक्कड़
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

संकाय सदस्य:
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
डॉ. आर. के. ग्रोवर
डॉ. एन. वी. नरसिम्हम
सुश्री मधु सूर्या
श्री नवल किशोर
डॉ. मधु त्यागी
प्रो. जी. सांबशिव राव
(भाषा संपादक)

अनुवाद

श्री. के. के. खन्ना
जाकिर हुसैन कॉलेज
नई दिल्ली

श्री जे. डी. गुप्ता
वैशाली
दिल्ली

डॉ. एस. के. साहनी
मोतीलाल नेहरू कॉलेज
नई दिल्ली

संकाय सदस्य:
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय
प्रो. वी. रा. जगन्नाथन
डॉ. आर. के. ग्रोवर
श्री नूर नबी अब्बासी
डॉ. भगत सिंह
श्रीमती मधु सूर्या

सचिवालयिक सहायक:
इं. गां. रा. मु. वि.
श्री हरीश कुमार सेठी

सामग्री निर्माण

श्री बालकृष्ण सेल्वराज
कुलसचिव
मुद्रण एवं प्रकाशन प्रभाग
इंदिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

अगस्त, 1991 (पुर्नमुद्रित)

© इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, 1990

ISBN-81-7091-553-8

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस कार्य का कोई भी अंश इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति लिए बिना मिमियोग्राफ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

खंड 2 समंकों का संग्रहण, वर्गीकरण और प्रस्तुतीकरण

खंड 1 में आपने आँकड़ों (समंकों) को संग्रहीत करने के लिए एक सांख्यिकीय सर्वेक्षण की योजना बनाने और उसे संगठित करने के विभिन्न पहलुओं का अध्ययन किया है। समंकों का संग्रहण, विभिन्न विधियाँ अपनाकर प्राथमिक स्रोतों से या द्वितीयक स्रोतों से, किया जा सकता है। बहुधा संकलित आँकड़े दु:साध्य होते हैं और शीघ्र आत्मसात करने योग्य नहीं होते। इसलिए कोई भी विश्लेषण करने से पहले उन्हें वर्गीकृत करके संघनित रूप में प्रस्तुत करना होता है। इस खंड में आप आँकड़ों के संकलन, वर्गीकरण और प्रस्तुतीकरण की विभिन्न विधियों के बारे में सविस्तार पढ़ेंगे। इस खंड में पाँच इकाइयाँ हैं।

इकाई 5 में आँकड़ों को विभिन्न स्रोतों से संकलित करने की विभिन्न विधियों का सविस्तार वर्णन किया गया है। इसमें, आँकड़े संकलित करते समय प्रस्तुत होने वाली समस्याओं की और आँकड़ों का उपयोग करते समय बरती जाने वाली विभिन्न सावधानियों की भी व्याख्या की गई है।

इकाई 6 में समंकों के वर्गीकरण को परिभाषित किया गया है, वर्गीकरण की विभिन्न विधियों की विवेचना की गई है तथा आवृत्ति बंटन संरचना की सविस्तार व्याख्या की गई है। इसमें विभिन्न प्रकार के आवृत्ति बंटनों उनसे संबंधित विभिन्न पदों और उनकी विभिन्न रचना विधियों का भी वर्णन किया गया है।

इकाई 7 सारणीयन से संबंधित है। इसमें सारणीयन के उद्देश्यों सांख्यिकीय सारणियों के प्रकारों, सांख्यिकीय सारणी के विभिन्न भागों, एक उत्तम सांख्यिकीय सारणी के आवश्यक गुणों तथा उसकी रचना प्रविधि की व्याख्या की गई है।

इकाई 8 आँकड़ों के आरेखीय प्रस्तुतीकरण के बारे में है। इसमें आरेखीय प्रस्तुतीकरण का महत्व और उसके विभिन्न प्रकार के आरेखों की रचना-विधियों का वर्णन किया गया है।

इकाई 9 आँकड़ों के रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण से संबंधित है। इसमें रेखाचित्रों के महत्व की और उन्हें बनाते समय आवश्यक सामान्य सावधानियों की चर्चा की गई है। इसमें विभिन्न प्रकार के रेखाचित्रों की रचना विधियों की व्याख्या भी की गई है।

इकाई 5 समंकों का संग्रहण

इकाई की रूपरेखा

5.0 उद्देश्य
5.1 प्रस्तावना
5.2 समंकों के चुनाव को प्रभावित करने वाले कारक
5.3 प्राथमिक समंकों के संग्रहण की समस्याएँ
5.4 प्राथमिक समंकों के संग्रहण की विधियाँ
5.4.1 अवलोकन
5.4.2 वैयक्तिक साक्षात्कार
5.4.3 स्थानीय रिपोर्ट तथा संवाददाताओं के माध्यम से
5.4.4 प्रश्नावली
5.4.5 अनुसूची
5.4.6 विधि का चुनाव
5.5 द्वितीयक समंकों के स्रोत
5.5.1 प्रकाशित स्रोत
5.5.2 अप्रकाशित स्रोत
5.6 द्वितीयक समंकों के उपयोग में सावधानियाँ
5.7 द्वितीयक समंकों के लाभ तथा हानियाँ
5.8 सारांश
5.9 शब्दावली
5.10 बोध प्रश्नों के उत्तर
5.11 स्वपरख प्रश्न

5.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि:

- समंकों के चुनाव को प्रभावित करने वाले कारकों को बता सकें
- प्राथमिक समंकों के संकलन की समस्याओं को स्पष्ट कर सकें
- प्राथमिक समंकों के संकलन की विभिन्न विधियों का वर्णन कर सकें
- द्वितीयक समंकों के स्रोतों को बता सकें
- द्वितीयक समंकों के उपयोग में अपनायी जाने वाली, सावधानियों को स्पष्ट कर सकें,
- द्वितीयक समंकों के उपयोग के लाभ तथा हानियों का वर्णन कर सकें।

5.1 प्रस्तावना

इकाई 2 में हमने प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों (आँकड़ों) के अर्थ, प्राथमिक समंकों के संग्रहण (संकलन) की विभिन्न विधियों तथा द्वितीयक समंकों को प्राप्त करने के स्रोतों का संक्षेप में विवेचन किया है। इस इकाई के अंतर्गत हम समंकों के चुनाव को प्रभावित करने वाले विभिन्न कारकों, प्राथमिक समंकों के संकलन की समस्याओं तथा प्राथमिक समंकों के संकलन की विभिन्न विधियों का विस्तार में विवेचन करेंगे। आप द्वितीयक समंकों के गुण तथा परिसीमाओं, उनके स्रोतों, तथा उनके उपयोग में अपनाई जाने वाली सावधानियों के विषय में भी पढ़ेंगे।

5.2 समंकों के चुनाव को प्रभावित करने वाले कारक

आप जानते ही हैं, सांख्यिकीय समंक प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों के रूप में वर्गीकृत किये जा सकते हैं। प्राथमिक समंकों से तात्पर्य अनुसंधानकर्त्ता द्वारा प्रथम बार संकलित आरंभिक समंकों से है। प्राथमिक समंक प्राय: कच्चे माल की भांति है जिनके विश्लेषण के लिए सांख्यिकीय विधियाँ अपनानी पड़ती हैं। यदि अनुसंधानकर्त्ता ऐसे समंक एकत्रित करें जो किसी अन्य व्यक्ति द्वारा संकलित तथा साधित किए गए हों तो ऐसे समंक द्वितीयक समंक कहलाते हैं। द्वितीयक समंक प्राय: तैयार माल के रूप में होते हैं क्योंकि इन्हें किसी न किसी रूप में साधित किया जा चुका होता है। जब आप किसी सांख्यिकीय अनुसंधान की योजना बनाते हैं तो आप को यह निर्धारित करना होता है कि आप प्राथमिक समंक संकलित करेंगे अथवा द्वितीयक। यह एक आधारभूत प्रश्न है जिसका समाधान समंक संकलन के प्रारंभ से पूर्व ही हो जाना चाहिए। समंकों का चुनाव कई कारकों पर निर्भर करता है, जो निम्न प्रकार के हैं:

1 अनुसंधान का उद्देश्य
2 अनुसंधान का क्षेत्र
3 वित्तीय साधन
4 उपलब्ध समय
5 अनुसंधानकर्त्ता एजेंसी का स्तर
6 मानवीय संसाधन
7 द्वितीयक समंकों की उपलब्धता
8 अपेक्षित परिशुद्धता की मात्रा

1 **अनुसंधान का उद्देश्य:** समंकों के चुनाव को प्रभावित करने वाला यह सबसे महत्वपूर्ण कारक है। आपको वे समंक एकत्रित करने चाहिए जो अनुसंधान का उद्देश्य पूरा कर सकें। उद्देश्य से यह निर्धारित होगा कि सर्वेक्षण के लिए किस प्रकार की सूचना की आवश्यकता है। यदि अध्ययन के उद्देश्य की पूर्ति प्राथमिक समंकों से होती है तो आप प्राथमिक समंक ही संकलित करेंगे।

2 **अनुसंधान का क्षेत्र:** क्षेत्र से तात्पर्य सूचना के प्रकार, विषय-वस्तु, तथा भौगोलिक क्षेत्र आदि से संबंधित सर्वेक्षण के सीमा क्षेत्र से है। यदि प्राप्त की जाने वाली सूचनाएँ व्यापक तथा आधारभूत हैं तो प्राथमिक समंक अधिक उपयुक्त सिद्ध होंगे।

3 **वित्तीय साधन:** उपलब्ध वित्तीय साधन, वास्तव में, सांख्यिकीय अनुसंधान में एक बड़ा प्रतिबंध है तथा आपको इस परिसीमा में ही काम करना पड़ता है। अनुसंधान में किस प्रकार के समंक उपयोग किए जाएँ, यह बहुत सीमा तक वित्तीय साधनों की उपलब्धता पर निर्भर करता है। अधिकतर परिस्थितियों में द्वितीयक समंकों की अपेक्षा प्राथमिक समंकों के संकलन में अधिक धन की आवश्यकता पड़ती है। जब साधन बहुत सीमित हों, तो प्राय: द्वितीयक समंकों का विकल्प उचित रहता है। यदि पर्याप्त साधन उपलब्ध हों, तो आप प्राथमिक समंक संकलित करने की योजना बना सकते हैं।

4 **उपलब्ध समय;** प्राथमिक समंकों तथा द्वितीयक समंकों के संकलन में व्यय होने वाले समय को भी यह निर्णय लेने के लिए ध्यान में रखने की आवश्यकता है कि प्राथमिक समंकों को चुना जाय या द्वितीयक समंकों का प्रयोग किया जाए। द्वितीयक समंकों की तुलना में प्राथमिक समंकों के संकलन में अपेक्षाकृत अधिक समय लगता है। यदि अनुसंधान को पूरा करने के लिए पर्याप्त समय उपलब्ध है, तो हम प्राथमिक समंकों का प्रयोग कर सकते हैं। परन्तु यदि समय एक प्रतिबंध है, तो हमें द्वितीयक समंकों के संकलन पर विचार करना चाहिए। अत: उपलब्ध समय, सर्वेक्षण के लिए एकत्रित किए जाने वाले समंकों के प्रकार को प्रभावित करता है।

5 **अनुसंधानकर्त्ता एजेंसी का स्तर:** संकलित किये जाने वाले समंकों के चुनाव को निर्धारित करने वाला यह एक महत्वपूर्ण कारक है। इस बात पर बहुत कुछ निर्भर करता है कि अनुसंधानकर्त्ता एजेंसी सरकार है, अथवा कोई सार्वजनिक संगठन/संस्थान है, या फिर एक व्यक्ति मात्र है। सरकार एक बड़े स्तर पर प्राथमिक समंकों के संकलन पर विचार कर सकती है। परन्तु किसी एक व्यक्ति के लिए एक बड़े स्तर पर प्राथमिक समंक

संकलित करना बहुत कठिन है। एक व्यक्ति के लिए द्वितीयक समंकों का प्रयोग मितव्ययी तथा व्यावहारिक दृष्टि से उपयुक्त है। सार्वजनिक संगठन अथवा संस्थान आवश्यक सूचनाएँ एकत्रित करने के लिए क्षेत्र-सर्वेक्षण भी कर सकते हैं, परन्तु एक निजी संगठन के लिए यह कठिन है। सरकारी अथवा सार्वजनिक संस्थान प्राथमिक समंक संकलित करने के लिए अधिक धन व्यय कर सकते हैं तथा पर्याप्त मात्रा में प्रशिक्षित व कार्यक्षम कर्मचारी जुटा सकते हैं। परन्तु व्यक्तियों या निजी-संस्थाओं पर इस संबंध में काफी प्रतिबंध हैं।

6 **मानवीय संसाधन:** मानवीय संसाधनों की उपलब्धता भी समंकों के प्रकार के चुनाव पर प्रभाव डालती है। जैसा कि आप जानते हैं, प्राथमिक समंकों के संग्रहण के लिए आपको अधिक व्यक्तियों की आवश्यकता होती है। यदि आप के पास प्रशिक्षित तथा कार्यक्षम कर्मचारी पर्याप्त संख्या में उपलब्ध हैं, तो आप सरलता से क्षेत्र-सर्वेक्षण का संगठन करके प्राथमिक समंक संकलित कर सकते हैं। यदि आपके पास पर्याप्त मानवीय संसाधन नहीं हैं तो आप अपने अनुसंधान के लिए द्वितीयक समंकों के प्रयोग की योजना बना सकते है।

7 **द्वितीयक समंकों की उपलब्धता:** द्वितीयक समंकों के उपयोग के लिए पहले उनका उपलब्ध होना आवश्यक है। यदि द्वितीयक समंक उपलब्ध ही न हों, या वे पर्याप्त न हों, या उपयुक्त न हों तो हमारे लिए प्राथमिक समंकों को एकत्रिंत करने के अतिरिक्त कोई विकल्प ही नहीं रह जाता।

8 **अपेक्षित परिशुद्धता की मात्रा:** समंकों का चुनाव अपेक्षित परिशुद्धता की मात्रा पर भी निर्भर करता है। समंकों का चुनाव करने से पूर्व हमें अपेक्षित परिशुद्धता की मात्रा के विषय में निश्चय करना होता है। यदि उपलब्ध द्वितीयक समंकों की परिशुद्धता वही है, जो वर्तमान अनुसंधान के लिए अपेक्षित है तो आप द्वितीयक समंकों का प्रयोग कर सकते है। अन्यथा यह वांछनीय है कि अपेक्षित परिशुद्धता की आवश्यकता को पूरा करने वाले प्राथमिक समंकों के संकलन के लिए योजना बनाई जाए।

उपरोक्त वर्णित सभी घटकों में कोई भी एक समंक के चुनाव का आधार नहीं बन सकता। सभी घटकों को ध्यान में रख कर ही यह निर्णय लेना होगा कि प्राथमिक समंकों का संकलन किया जाए अथवा द्वितीयक समंक प्रयोग किए जाएँ।

5.3 प्राथमिक समंकों के संग्रहण की समस्याएँ

हमने समंकों के चुनाव के निर्णय को प्रभावित करने वाले विभिन्न घटकों की चर्चा की है। आइए अब हम प्राथमिक समंकों के संकलन की समस्याओं का विवेचन करें वास्तव में प्राथमिक समंको के संकलन की समस्याएँ उन समस्याओं से भिन्न हैं, जो द्वितीयक समंकों के संकलन में पेश आती हैं। जब आप प्राथमिक समंक संकलित करते हैं तो आप प्राय: निम्नलिखित समस्याओं का सामना करते हैं:

1 जब आप प्राथमिक समंक संकलित करने का निर्णय लेते हैं तो आपको क्षेत्रीय कार्य की विस्तृत योजना तैयार करनी होती है। ऐसा इसलिए आवश्यक है कि अनुसंधान के परिणामों की विशिष्टता, बहुत सीमा तक, समंकों के संकलन के पूर्व की गई तैयारी पर निर्भर करती है। अनुसंधान की योजना के विभिन्न कदमों की चर्चा हम पहले ही इकाई 2 में कर चुके हैं।

2 प्राथमिक समंक संकलित करने के लिए वह इकाई जिसमें समंक एकत्र किए जाने है स्पष्ट तथा असंदिग्ध रूप में बताई जानी चाहिए। इकाई में एक अच्छी सांख्यिकीय इकाई के सभी लक्षण होना आवश्यक है। सुपरिभाषित सांख्यिकीय इकाई प्राथमिक समंकों के निर्विघ्न संकलन की पूर्व-आवश्यकता है।

3 समंकों के संकलन की तकनीक से संगंधित समस्याओं को देखना भी आवश्यक है। आप जानते हैं कि समंकों के संकलन की दो तकनीकें हैं: (i) संगणना विधि, तथा (ii) निदर्शन विधि। संगणना विधि में समष्टि की सभी इकाइयों से सूचना एकत्रित की जाती है जबकि निदर्शन विधि में समष्टि के एक भाग से ही सूचना प्राप्त की जाती है। अनुसंधानकर्त्ता को

यह निर्णय लेना चाहिए कि वह किस तकनीक का प्रयोग करेगा। वित्तीय साधनों की उपलब्धता, अनुसंधान की प्रकृति तथा क्षेत्र, उपलब्ध समय तथा इसी प्रकार के अन्य कारकों पर यह निर्णय निर्भर करता है। यदि निदर्शन तकनीक अपनाई जानी है तो निदर्शन की रूपरेखा का सावधानी से उल्लेख किया जाना चाहिए।

4 समंकों का संकलन प्रारंभ करने से पूर्व, ढांचा तैयार करना एक अन्य समस्या है। 'ढांचे' से तात्पर्य उन इकाइयों की एक सूची, नक्शे या अन्य विशिष्टताओं से है जो एक विशेष अनुसंधान के लिए निर्दिष्ट समष्टि से संबंधित उपलब्ध सूचनाओं का संगठन करती है। यदि उपयुक्त ढांचा पूर्व उपलब्ध हो तो समंक सरलता से संकलित किए जा सकते हैं। अन्यथा समंकों का संकलन आरंभ करने से पूर्व एक उपयुक्त ढांचा तैयार किया जाना चाहिए।

5 प्राथमिक समंकों के संकलन से पूर्व अपेक्षित परिशुद्धता की मात्रा के संबंध में निर्णय लेना अनिवार्य है। जैसा कि आपको विदित है, सभी सांख्यिकीय अनुसंधानों में परिशुद्धता का उचित स्तर वांछनीय है। अनुसंधान के उद्देश्य तथा ध्येय को ध्यान में रख कर ही परिशुद्धता का स्तर निर्धारित किया जाता है।

6 प्राथमिक समंकों के संदर्भ में एक अन्य समस्या समंक संकलन हेतु फार्म की रूपरेखा तैयार करना है। उन विभिन्न फार्मों (अर्थात् प्रश्नावली, अनुसूची आदि) की रूपरेखा पर सावधानीपूर्वक ध्यान दिया जाना चाहिए जिनका उपयोग किया जाएगा। फार्मों की रूपरेखा इस प्रकार तैयार की जानी चाहिए कि उनके माध्यम से आवश्यक सूचना एकत्र की जा सके। समंकों के संकलन का कार्य प्रारंभ करने से पूर्व, फार्मों की समर्थता की पूर्व-जाँच भी आवश्यक है। पूर्व-जाँच या परख में यदि कुछ कमियाँ पता चलें तो उन्हें प्रपत्र अर्थात्, फॉर्म को, अन्तिम रूप देने से पूर्व, दूर कर देना चाहिए।

7 द्वितीयक समंकों की अपेक्षा प्राथमिक समंकों के संकलन के लिए क्षेत्र-कर्मचारियों का चुनाव, प्रशिक्षण तथा पर्यवेक्षण अधिक आवश्यक है। सर्वेक्षण की सफलता क्षेत्र-कर्मचारियों पर निर्भर होने के कारण यह आवश्यक है कि उनका सही प्रकार चयन किया जाए, उन्हें अच्छी प्रकार प्रशिक्षित किया जाए तथा उनके कार्य का सावधानीपूर्वक पर्यवेक्षण किया जाए। चुने गये परिगणक (गणना करने वाले) ईमानदार, समझदार तथा परिश्रमी होने चाहिए। सूचनादाताओं से आवश्यक सूचना उगलवाना उन परिगणकों के लिए संभव होना चाहिए।

8 इसके पश्चात् क्षेत्र-कार्य की गुणवत्ता पर नियंत्रण करने की समस्या आती है। यह सुनिश्चित करने के लिए कि प्रश्नकर्त्ता अपना निर्धारित कार्य ईमानदारी तथा कुशलता से कर रहे हैं, क्षेत्र-जाँच यदाकदा की जानी चाहिए। समंक संकलन का कार्य यथासंभव यथार्थ हो इसके लिए अप्रत्याशित कारकों पर सुविचारित निगरानी रखना आवश्यक है। दूसरे शब्दों में, ऐसे आवश्यक कदम उठाए जाने चाहिए जिनसे यह सुनिश्चित किया जा सके कि समंक संकलन का कार्य नियंत्रण में है तथा एकत्रित सूचना परिशुद्धता के पूर्व-निर्धारित स्तर के अनुसार ही संकलित की गयी है। समंकों पर आगे कार्यवाही प्रारंभ करने से पूर्व उनमें से भूल की अशुद्धियों, असंगतियों तथा अन्य अशुद्धियों को दूर रखने के लिए उनकी जाँच की जानी चाहिए।

9 भरसक कोशिश के बावजूद प्रत्यार्थियों द्वारा जवाब न दिये जाने की समस्या फिर भी संभव है। इस समस्या के समाधान के लिए उपयुक्त विधि परिकल्पित की जानी चाहिए। उत्तर न दिये जाने की समस्या से निपटने की एक विधि यह है कि उत्तर न देने वालों (non-respondent) की एक सूची तैयार करके उनमें से कुछ इकाइयां निदर्शन द्वारा चुन कर विशेषज्ञों की सहायता से उनसे उत्तर जानने का प्रयास किया जाए। परन्तु किसी भी परिस्थिति में गणनकारों को या परिगणकों को यह अनुमति नहीं होनी चाहिए कि वे किसी एक व्यक्ति के स्थान पर, जो अच्छा प्रत्यर्थी न समझा गया हो, किसी अन्य व्यक्ति का स्थानापन्न कर सकें, अन्यथा संकलित सूचना में अभिनति (पूर्वाग्रह) आ जाएगी। समंक संकलन का कार्य भली प्रकार चलाने के लिए उचित संगठन स्थापित किया जाना चाहिए। एक बड़े सर्वेक्षण या अनुसंधान में यह समस्या विशेष रूप से अधिक गंभीर होती है। आपको अपने अध्ययन के लिए उपयुक्तता को ध्यान में रखकर समंक संकलन की विधि (यों) (जैसे अवलोकन, प्रश्नावली, अनुसूची, साक्षात्कार आदि) का विवेकपूर्वक चुनाव

करना चाहिए। निस्संदेह, प्रयोग की जाने वाली विधि का चुनाव करते समय, आपको अनुसंधान की प्रकृति तथा उसके उद्देश्य, उपलब्ध वित्तीय साधन, उपलब्ध समय, वांछित परिशुद्धता आदि पर ध्यान देना चाहिए

बोध प्रश्न क

1 प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

2 एक अनुसंधान में प्रयोग किए जाने वाले समंकों के चुनाव को प्रभावित करने वाले कारकों को सूचीबद्ध कीजिए।

....

....

....

....

3 एक अनुसंधानकर्त्ता के समक्ष प्राथमिक समंक संकलित करते समय पेश आने वाली पाँच समस्याएँ बताइए।

....

....

....

....

4 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य।

i) प्राथमिक समंकों की अपेक्षा द्वितीयक समंकों का संकलन करने में अधिक समय लगता है। ....

ii) एक अनुसंधानकर्त्ता के हाथों में सरकार द्वारा संकलित राष्ट्रीय आय के समंक, जिन्हें वह अपने शोध के लिए प्रयोग करता है, द्वितीयक समंक हैं। ....

iii) किसी एक कारक को पार्थक में समंकों के चुनाव का आधार नहीं बनाया जाना चाहिए। ....

iv) अनुसंधानकर्त्ता के समक्ष, चाहे वह प्राथमिक समंक संकलित करें या द्वितीयक समंकों का प्रयोग करें, प्रस्तुत होने वाली समस्याओं में कोई अंतर नहीं होता। ....

v) द्वितीयक समंकों का प्रयोग तभी किया जाना चाहिए जब यह सुनिश्चित कर लिया गया हो कि वे विश्वसनीय पर्याप्त तथा उपयुक्त है। ....

vi) द्वितीयक समंकों का प्रयोग करते समय एक उपयुक्त ढाँचा तैयार करने की समस्या उत्पन्न होती है। ....

vii) जब भी हम प्राथमिक समंक संकलित करते हैं, चाहे उसके लिए कोई भी विधि अपनाई गई हो, क्षेत्र-कर्मचारियों के चुनाव, उनके प्रशिक्षण तथा उन पर पर्यवेक्षण की समस्या उत्पन्न होती है। ....

viii) द्वितीयक समंकों से संबंधित मुख्य समस्या उत्तर न दिये जाने की समस्या है। ....

5.4 प्राथमिक समंकों के संग्रहण की विधियाँ (Methods of Collecting Primary Data)

प्राथमिक समंकों के संकलन की अनेक विधियाँ हैं तथा अनुसंधान की प्रकृति के अनुरूप उनमें से किसी एक को भी अपनाया जा सकता है। आपने इकाई 2 में, संक्षेप में, उनका अध्ययन किया है। आइए अब हम अधिक विस्तार में उनका अध्ययन करें।

5.4.1 अवलोकन (Observation)

दृश्य घटना को ध्यान में रखकर सुव्यवस्थित दर्शन 'अवलोकन' या 'प्रेक्षण' कहलाता है। ऑक्सफोर्ड संक्षिप्त शब्दकोश के अनुसार प्रकृति में घटित घटनाओं को कारण-प्रभाव या परस्पर संबंध के संदर्भ में यथार्थ रूप में निहारना तथा उन पर ध्यान देना अवलोकन है। अवलोकन द्वारा वांछित सूचना, दूसरों के प्रतिवेदनों से प्राप्त करने की बजाय प्रत्यक्ष रूप से प्राप्त की जाती है। व्यक्ति विशेष का अवलोकन कर हम उसके व्यवहार को जान सकते हैं, हमें यह सुनने की आवश्यकता नहीं कि वह अपने व्यवहार के बारे में क्या कहता है। यदि सूचनादाता सूचना प्रदान करने में असमर्थ हो या केवल अयथार्थ उत्तर दें, तो प्रश्न करना उपयोगी नहीं है, तथा केवल अवलोकन के माध्यम से ही अनुसंधान में आगे बढ़ा जा सकता है। उदाहरणार्थ, जब आप बोलने में असमर्थ छोटे बच्चों के व्यवहार का अध्ययन कर रहे हैं तो आप विभिन्न परिस्थितियों में बच्चों का अवलोकन करके सूचना एकत्रित कर सकते हैं। यह स्मरण रहे कि सभी घटनाओं का अवलोकन संभव नहीं। घटना का अवलोकन संभव होने पर भी यह संभव है कि प्रेक्षक पास में उपलब्ध न हो। अवलोकन सहभागी (participants) या असहभागी (non-participant) हो सकता है। सहभागी अवलोकन विधि में प्रेक्षक उन समूहों या संगठनों के दैनिक जीवन में सम्मिलित हो जाता है जिनका वह अध्ययन कर रहा है। प्रेक्षक इस पर दृष्टि रखता है कि एक समूह के सदस्यों के साथ क्या घटता है या वे कैसा व्यवहार करते हैं। प्रेक्षक उन से वार्तालाप द्वारा घटित घटनाओं के संबंध में उनकी प्रतिक्रियाओं तथा घटित घटनाओं के निर्वचनों को ज्ञात करता है। असहभागी अवलोकन विधि के अंतर्गत सूचना एकत्र करने के लिए प्रेक्षक समूह या संगठन में सम्मिलित नहीं होता वरन् बाहर से ही उनका अवलोकन तथा अध्ययन करके सूचना एकत्रित करता है।

गुण

1 यह विधि उन परिस्थितियों में सर्वोत्तम है जब सूचनादाता सूचना प्रदान करने में असमर्थ हों अथवा सही सूचनाएँ न दे सकते हों।

2 यह विधि आँखों देखी सूचना प्रदान करती है तथा समस्या की गहरी तथा पूरी जानकारी इस विधि से मिलती है। अत: गहन अध्ययन में यह विधि उपयोगी है।

दोष

1 बहुत सी परिस्थितियों में घटना के घटने का पूर्वाभास संभव नहीं होता अत: घटना का अवलोकन संभव होने पर भी यह संभव है कि प्रेक्षक उपलब्ध न हो।

2 प्रेक्षक को अवलोकित घटना का विवेचन करने में तटस्थ होना चाहिए। अन्यथा, प्रेक्षक का पक्षपात परिणाम में झलक सकता है।

3 बड़े पैमाने पर विस्तृत अध्ययन में यह विधि उपयुक्त नहीं है।

4 प्रेक्षक की उपस्थिति अवलोकित व्यक्ति के व्यवहार को प्रभावित कर सकती है। ऐसी परिस्थितियों में इस विधि द्वारा वास्तविक सूचना प्राप्त न होने की संभावना रहती है।

5.4.2 वैयक्तिक साक्षात्कार (Personal Interview)

इस विधि में अनुसंधानकर्त्ता द्वारा वैयक्तिक रूप में सूचनादाताओं से साक्षात् करके समंक एकत्रित किए जाते हैं। अत: जांच पड़ताल व्यापक न होकर गहन होती है। इस विधि में अनुसंधानकर्त्ता स्वयं वैयक्तिक रूप से सूचनादाताओं से भेंट करकी, उनके जाँच-पड़ताल संबंधी प्रश्न पूछकर वांछित सूचना एकत्र करता है। अत: यदि कोई व्यक्ति राष्ट्रीय बॉल बेअरिंग कंपनी के श्रमिकों की मज़दूरी से सम्बन्धित समंक एकत्र करना चाहता है, तो वह

स्वयं कंपनी के फैक्ट्री-स्थान पर जाकर श्रमिकों से संपर्क स्थापित करके आवश्यक सूचना एकत्र करेगा। इस प्रकार यह विधि उन परिस्थितियों में प्रयोग की जाती है जब सर्वेक्षण छोटे आकार का हो तथा उसका क्षेत्र सीमित हो।

साक्षात्कार औपचारिक (formal) हो सकता है अथवा अनौपचारिक (informal) ।

औपचारिक साक्षात्कार के अंतर्गत निर्धारित प्रश्न पूछ कर एक मानकीकृत फार्म पर उनके उत्तर रिकार्ड किए जाते हैं। बड़े पैमाने पर किये जाने वाले साक्षात्कारों में जहाँ अनेक अनुसंधानकर्त्ताओं को साक्षात्कार का कार्य सौंपा जाता है, यही विधि अपनाई जाती है। औपचारिक साक्षात्कार में, साक्षात्कर्ता का व्यक्तिगत पक्षपात न्यूनतम रहता है। इस प्रकार का साक्षात्कार तब सर्वोपयुक्त होता है जब आप यह स्पष्ट रूप से जानते हैं कि आपको सर्वेक्षण के लिए किस प्रकार की सूचना चाहिए।

अनौपचारिक साक्षात्कार में अनुसंधानकर्त्ता के पास निर्धारित प्रश्न भले ही न हो परन्तु कुछ मूल बातें रहती हैं जिनके आधार पर वह साक्षात्कार की रचना करता है। साक्षात्कर्ता को इस बात की स्वतंत्रता रहती है कि वह प्रश्नों का क्रम बदल सके, उनका अर्थ समझा सके, नये प्रश्न जोड़ सके तथा उन की भाषा तथा शब्द बदल सके। अनौपचारिक साक्षात्कार अन्वेषणात्मक सर्वेक्षण में, जहाँ आप संकलित किए जाने वाले समंकों के बारे में निश्चित न हों, पसंद किए जाते हैं।

गुण

1 प्रतिक्रिया उत्साहवर्धक होती है क्योंकि अधिकतर व्यक्ति, वैयक्तिक रूप से मिलने पर, स्वेच्छा से सूचना प्रदान करते हैं।

2 प्राप्त की गई सूचना के अधिक सही होने की संभावना रहती है क्योंकि सूचनादाताओं के संदेह अनुसंधानकर्त्ता द्वारा स्वयं दूर किए जा सकते हैं।

3 सूचनादाताओं के व्यक्तिगत लक्षणों संबंधी अतिरिक्त सूचना, जो बाद में निष्कर्षों का विवेचन करने में सहायक होती है, भी एकत्र की जा सकती है।

सीमाएँ

1 इस विधि की प्रमुख सीमा यह है कि इसमें व्यक्तिनिष्ट कारण या अनुसंधानकर्त्ता के पक्षपात की अभिज्ञता या अनभिज्ञता से आ जाने की संभावना रहती है।

2 यदि ऐसे व्यक्ति जिन से साक्षात्कार करना है अधिक हों तथा वे विस्तृत क्षेत्र में फैले हों तो यह विधि खर्चीली तथा अधिक समय लेने वाली है। अत: विशाल सर्वेक्षणों के लिए यह विधि उपयुक्त नहीं है।

5.4.3 स्थानीय रिपोर्टों तथा संवाददाताओं के माध्यम से

इस विधि में अनुसंधानकर्त्ता जाँच-पड़ताल के क्षेत्र में विभिन्न स्थानों पर स्थानीय प्रतिनिधियों अथवा संवाददाताओं की नियुक्ति करके उनके माध्यम से आवश्यक सूचना एकत्र करता है। ये संवाददाता सूचना एकत्र करके अनुसंधानकर्त्ता के कार्यालय में संप्रेषित करते हैं। समाचार एजेंसियाँ प्राय: सूचना एकत्र करने के लिए इसी विधि को अपनाती हैं। जहाँ अपेक्षाकृत विस्तृत क्षेत्र से सूचना निरंतर संकलित करनी पड़ती है वहाँ विभिन्न सरकारी विभाग भी इसी विधि को अपनाते हैं। फसल का अनुमान लगाने के लिए या मूल्य सूचकांकों के निर्माण के निर्माण हेतु विभिन्न वस्तुओं के मूल्य निरंतर संकलित करने के लिए सामान्यत: यही विधि प्रयोग की जाती है।

गुण: अपेक्षाकृत सस्ती विधि है तथा इससे लगभग सही परिणाम प्राप्त होते हैं। यह विधि व्यापक जाँच-पड़ताल में भी बराबर उपयुक्त रहती है।

सीमाएँ: संवाददाताओं द्वारा प्राय: नियत अंतराल पर जो रिपोर्ट प्रस्तुत की जाती है उसमें उनके व्यक्तिगत पक्षपात का भय अधिक रहता है। अत: यह आवश्यक है कि जो भी संवाददाता तथा प्रतिनिधि नियुक्त किए जाएँ, उन्हें बड़ी सावधानी से चुना जाए तथा उनको सही ढंग से प्रशिक्षण दिया जाए।

5.4.4 प्रश्नावली (Questionnaire)

प्रश्नावलियों के माध्यम से समंकों के संकलन की विधि प्राथमिक समंकों के संकलन की सबसे अधिक लोकप्रिय विधि है। प्रश्नावली से तात्पर्य अनुसंधान से संबंधित प्रश्नों की सूची से है। इस विधि में सूचनादाताओं को प्रश्नावली इस प्रार्थना के साथ भेजी जाती है कि वे प्रश्नों के उत्तर भर कर प्रश्नावली लौटा दें। प्रश्नावली डाक द्वारा ऐसे उत्तरदाताओं को भेजी जाती है जो प्रश्नों को पढ़ सकें तथा समझ कर उनके उत्तर प्रश्नावली में ही निर्धारित स्थान पर लिख सकें। उत्तरदाताओं को स्वयं ही उत्तर देने होते हैं। यह विधि विभिन्न आर्थिक तथा व्यावसायिक सर्वेक्षणों में प्रयोग की जाती है।

गुण

1 यह विधि बहुत मितव्ययी है। विशेषकर वहाँ जहाँ कि समग्र वृहत् हो तथा बड़े भोगौलिक क्षेत्र में फैला हुआ हो।

2 प्रश्नों के उत्तर स्वयं उत्तरदाताओं के शब्दों में ही होने के कारण यह विधि साक्षात्कर्त्ता के पक्षपात से मुक्त होती है।

3 उत्तरदाता सुविधानुसार प्रश्नों का उत्तर भेजने में अपना समय लगाते हैं। अत: प्रश्नों के उत्तर वे सोच-विचार के पश्चात् ही देते हैं।

4 इस विधि में उन उत्तरदाताओं तक भी पहुँचा जा सकता है जो दूर-दराज़ के इलाकों में रहते हैं और जिन तक सरलता से नहीं पहुँचा जा सकता।

5 वृहत् प्रतिदर्श का अध्ययन संभव होने के कारण परिणाम अधिक विश्वसनीय तथा भरोसेमंद होते हैं।

सीमाएँ

1 कभी-कभी उत्तरदाता प्रश्नावली लौटाने की चिंता ही नहीं करते। अत: एक भरी प्रश्नावली की वापसी की कम दर की समस्या हमेशा बनी रहती है। यही नहीं उत्तर न मिलने के कारण होने वाली अभिनति का ज्ञान अनिश्चित रहता है।

2 प्रश्नावली केवल उन्हीं उत्तरदाताओं को भेजी जाती है जो शिक्षित तथा सहयोग करने वाले हों।

3 एक बार प्रश्नावली उत्तरदाताओं को भेजने के बाद अनुसंधानकर्ता का उस पर कोई नियंत्रण नहीं रह जाता। वह विशिष्ट उत्तरदाता के लिए प्रश्नों में फेर-बदल नहीं कर सकता।

4 प्रश्नावली एक बार भेजने के पश्चात् उसमें संशोधन या सुधार की संभावना न होने के कारण इस विधि में लोच नहीं होता।

5 अस्पष्ट उत्तरों की संभावना भी रहती है तथा कुछ प्रश्नों के उत्तर छूट भी सकते हैं। छूटे हुए प्रश्नों के उत्तरों की व्याख्या कठिन है।

6 यह ज्ञात करना कठिन है कि इच्छुक उत्तरदाता वास्तव में समग्र का प्रतिनिधित्व करते हैं।

7 इस विधि के सबसे मंद होने की संभावना रहती है क्योंकि सूचनादाता प्रश्नावली को भर कर भेजने में अपना ही समय लेते हैं।

उत्तरदाताओं को प्रश्नावली भेजने से पहले यह उपयुक्त होगा कि उसका मार्गदर्शी सर्वेक्षण द्वारा पूर्व-परीक्षण कर लिया जाए। मार्गदर्शी-सर्वेक्षण वास्तव में मुख्य-सर्वेक्षण की प्रतिकृति तथा पूर्वाभ्यास या रिहर्सल है। इस प्रकार के मार्गदर्शी-सर्वेक्षण से प्राप्त अनुभव के आधार पर प्रश्नावली में, समंकों के अंतिम संकलन से पूर्व, सुधार किए जा सकते हैं। विशेष रूप से एक बड़े अनुसंधान में पूर्व-परीक्षण आवश्यक हैं।

एक अच्छी प्रश्नावली के लक्षण

प्रश्नावली को अधिक प्रभावी बनाने के लिए उसका प्रारूप सावधानीपूर्वक तैयार किया जाना चाहिए। प्रश्नावली का प्रारूप तथा शैली इस प्रकार की होनी चाहिए कि उसमें वह व्यक्तिगत पुट आ सके जोकि डाक द्वारा भेजी जाने वाली प्रश्नावली में लुप्त हो जाता है। एक अच्छी प्रश्नावली के लक्षण निम्नलिखित हैं:

1 वह संक्षिप्त तथा सरल होनी चाहिए।

2 प्रश्न तर्कसंगत क्रम में, सरल प्रश्नों से प्रारंभ कर क्रमश: कठिन प्रश्नों की ओर, आगे बढ़ने चाहिए। वैयक्तिक प्रश्नों से प्राय: दूर ही रहना चाहिए अन्यथा उन्हें अंत में लिखना चाहिए।

3 प्रश्न द्विभाजनीय (जिन के उत्तर "हाँ" अथवा "नहीं" में हो) या बहु-विकल्पी होने चाहिए। खुले-छोर के प्रश्नों (जिनके उत्तर विस्तार में दिए जाते हों) से यथासंभव दूर ही रहना चाहिए क्योंकि उनका विश्लेषण कठिन कार्य है।

4 प्रश्नावली में उत्तरदाता की विश्वसनीयता को निश्चित करने के लिए कुछ निरीक्षण प्रश्न (control question) भी होने चाहिए। इस प्रकार के प्रश्न विभिन्न प्रश्नों की परस्पर सत्यता आँकते हैं कि सूचना सही है अथवा नहीं।

5 प्रश्नावली में ही उत्तर लिखने के लिए पर्याप्त स्थान होना चाहिए। अनिश्चितता का संकेत दर्शाने के लिए भी व्यवस्था होनी चाहिए जैसे "कोई जानकारी नहीं" या "कोई वरीयता/अभिरुचि नहीं" आदि।

6 प्रश्नावली की रूपरेखा तथा खाका आकर्षक होना चाहिए ताकि वह उत्तरदाताओं का ध्यान आकृष्ट कर सके।

5.4.5 अनुसूची (Schedule)

समंक संकलन की यह विधि उपरोक्त वर्णित प्रश्नावली विधि के समान है। अनुसूची भी एक प्रोफार्मा है जिसमें प्रश्नों का एक समूह होता है। प्रश्नावली तथा अनुसूची में केवल इतना अंतर है कि अनुसूची विशेष रूप से नियुक्त किए गए गणनाकारों द्वारा भरी जाती है। गणनाकार अनुसूची सहित सूचनादाताओं के पास जाकर अनुसूची में लिखे प्रश्न क्रमानुसार पूछते हैं। गणनाकार स्वयं उत्तरदाताओं के उत्तरों को अनुसूची में निर्धारित स्थान पर लिख देते हैं। कुछ परिस्थितियों में अनुसूची उत्तरदाताओं को सौंप दी जाती है तथा गणनाकार प्रश्नों के उत्तर भरने में उनकी सहायता करता है। गणनाकार सूचनादाताओं को अनुसंधान का उद्देश्य स्पष्ट करते हैं, प्रश्नों को समझने में उनकी सहायता करते हैं तथा कुछ विशेष प्रश्न (ों) का आशय या कुछ कठिन पदों की परिभाषा या संकल्पना समझाते हैं। अत: प्रश्नावली तथा अनुसूची में विशेष अंतर यह है कि प्रश्नावली तो सूचनादाताओं को डाक द्वारा भेजी जाती है जबकि अनुसूची गणनाकार स्वयं उत्तरदाताओं के पास ले जाते हैं तथा स्वयं अपनी लिखावट में ही उसको भरते हैं। यह विधि प्राय: सरकारी एजेंसियों या कुछ बड़े संगठनों द्वारा किए गए अनुसंधानों में अपनाई जाती है। उदाहरणार्थ, विश्व भर में जनगणना के लिए यह विधि उपयोग की जाती है। अनुसूचियों के माध्यम से समंक संकलित करते समय अनुसूचियाँ भरने के लिए गणनकारों की आवश्यकता पड़ती है जिनका चुनाव बड़ी सावधानी से किया जाना चाहिए। अपना कार्य भली प्रकार करने के लिए उनको प्रशिक्षित करना चाहिए। उनमें जिरह करने की क्षमता होनी चाहिए और इतनी बुद्धिमत्ता होनी चाहिए कि वे सूचनादाताओं से सत्य जान सकें। यही नहीं उनका ईमानदार, निष्कपट, मेहनती, धैर्यवान, सहनशील, अध्यवसायी, दृढ़प्रतिज्ञ होना भी आवश्यक है। अनुसूची तैयार करते समय एक अच्छी प्रश्नावली की पूर्व-वर्णित सभी बातों का ध्यान रखना भी आवश्यक है।

गुण

1 यह विधि उन परिस्थितियों में उपयोग की जा सकती है जहाँ सूचनादाता अशिक्षित हों।

2 क्योंकि साक्षात्कर्त्ता स्वयं सूचना एकत्रित करने जाते हैं अत: अनुसूचियों के उत्तर न मिलने की समस्या दूर हो जाती है।

3 यह विधि वृहत् जाँच-पड़ताल में अति उपयोगी है तथा इससे काफी विश्वसनीय परिणाम मिल सकते हैं।

4 उत्तरदाताओं की पहचान पता चल जाती है जबकि प्रश्नावली विधि में हमेशा यह संभव नहीं है।

सीमाएँ

1 यह विधि बहुत महंगी है क्योंकि गणनकार प्राय: वैतनिक व्यक्ति होते हैं तथा उनके प्रशिक्षण पर भी धन व्यय करना पड़ता है।

2 एक अन्य परिसीमा यह है कि यदि गणनाकार साक्षात्कार करने में कुशल न हों तो उसके द्वारा अधिकतर संकलित सूचनाएँ अविश्वसनीय हो सकती हैं।

3 चूंकि जब उत्तरदाता प्रश्नों के उत्तर दे रहा होता है उस समय वहाँ अनुसंधानकर्ता उपस्थित रहता है, अत: संभव है कि उत्तरदाता कुछ व्यक्तिगत प्रश्नों के उत्तर निर्बाध रूप से न दे सके।

5.4.6 विधि का चुनाव

उपरोक्त वर्णित प्राथमिक समंकों के संकलन की अनेक विधियाँ हैं। अपने अध्ययन के लिए आपको सर्वोत्तम विधि का चुनाव करना पड़ता है। आपको विधि का चुनाव विवेकपूर्वक करना चाहिए ताकि चुनी हुई विधि उपयुक्त तथा प्रभावी हो। इसके लिए आपको (i) अनुसंधान की प्रकृति, क्षेत्र तथा उद्देश्य, (ii) उपलब्ध वित्तीय साधन, (iii) उपलब्ध समय, (iv) परिशुद्धता का निर्धारित मापदण्ड, तथा (v) अन्य ऊपर खंड 5.2 में लिखित तत्वों को ध्यान में रखना चाहिए।

परन्तु आपको यह बात सदा स्मरण रखनी चाहिए कि समंक संकलन की प्रत्येक विधि के अपने गुण, दोष, लाभ तथा परिसीमाएँ हैं तथा कोई भी विधि सभी परिस्थितियों में उपयुक्त नहीं है। उदाहरणार्थ, अवलोकन विधि गहन-क्षेत्रीय-सर्वेक्षणों में, जहाँ घटना वास्तव में घटित हो रही हो, उपयुक्त है। साक्षात्कार विधि वहाँ उपयुक्त समझी जाती है जहाँ प्रत्यक्ष अवलोकन संभव न होने के कारण, सूचना के अप्रत्यक्ष स्रोतों से संपर्क स्थापित करना आवश्यक होता है। स्थानीय रिपोर्ट तथा संवाददाताओं से सूचना प्राप्त करने की विधि वहाँ उपयुक्त समझी जाती है जहाँ अपेक्षाकृत वृहत् क्षेत्र से निरंतर कालांतरों पर सूचना एकत्रित करनी हो। प्रश्नावली विधि वहाँ उपयुक्त है जहाँ विस्तृत जाँच-पड़ताल करनी हो तथा सूचनादाता वृहत् क्षेत्र में फैले हों। परन्तु यह विधि तभी अपनाई जा सकती है जब उत्तरदाता शिक्षित हो तथा प्रश्नावली को स्वयं भरने में समर्थ हो। अनुसूचियों के माध्यम से समंक संकलित करना वहाँ उपयुक्त है जहाँ विस्तृत क्षेत्र में व्यापक पूछताछ करनी हो तथा सूचनादाता सदा शिक्षित न हों। परन्तु इस विधि में पर्याप्त वित्तीय साधनों, अपेक्षाकृत अधिक समय तथा कर्मठ गणनकारों की आवश्यकता पड़ती है। इस विधि में सूचनादाताओं द्वारा उत्तर देने की दर अधिक होने के कारण यह विधि सरकार द्वारा वृहत् अनुसंधानों, जैसे जनसंख्या की जनगणना में, अपनाई जाती है।

यदि पर्याप्त वित्तीय साधन उपलब्ध हों तथा अधिक सूचना एकत्रित करनी हो तो व्यक्तिगत साक्षात्कार विधि सुगमतापूर्वक अपनाई जा सकती है बशर्ते कि जाँच-पड़ताल का क्षेत्र सीमित हो। यदि समय पर्याप्त हो और वित्तीय साधन सीमित हों तो प्रश्नावली विधि अधिक उपयुक्त रहेगी। जहाँ विस्तृत भौगोलिक क्षेत्र से सूचना एकत्रित करनी हो, वहाँ प्रश्नावली विधि के साथ-साथ वैयक्तिक साक्षात्कार करने से अधिक विश्वसनीय परिणाम मिल सकते हैं। संक्षेप में, समंक संकलन की उपयुक्त विधि का चुनाव करते समय विशिष्ट समस्या की प्रकृति, उपलब्ध समय तथा साधन (वित्तीय तथा मानवीय साधन सभी) तथा साथ ही परिशुद्धता के वांछित स्तर आदि बातों को ध्यान में रखना चाहिए। सर्वोपरि, अनुसंधानकर्ता की योग्यता तथा अनुभव पर बहुत कुछ निर्भर करता है। इस प्रसंग में ए. एल. बॉडले का यह कथन, कि सांख्यिकीय समंकों के संकलन में सामान्य ज्ञान अपेक्षित गुण तथा अनुभव प्रमुख शिक्षक हैं, बहुत महत्वपूर्ण तथा उपयुक्त है।

बोध प्रश्न ख

1 साक्षात्कार तथा अनुसूची में अंतर बताइए।

....

....

....

....

....

2 प्रश्नावली तथा अनुसूची में अंतर बताइए।

....

....

....

....

3 अवलोकन तथा साक्षात्कार में अंतर बताइए।

....

....

....

....

4 निम्नलिखित परिस्थितियों में से प्रत्येक में प्राथमिक समंक संकलन की उपयुक्त विधि बताइए:

परिस्थिति	उपयुक्त विधि
i) जब घटना वास्तविकता में घटित हो रही हो उस समय गहन सर्वेक्षण किया जाना हो।	....
ii) जब वृहत क्षेत्र से निरंतर कालांतरों पर सूचना एकत्रित की जानी हो।	....
iii) वृहत अनुसंधान में जहाँ सूचनादाता विस्तृत क्षेत्र में फैले हों तथा आप के पास पर्याप्त समय हो।	....
iv) जब समय पर्याप्त हो, वित्तीय साधन सीमित हों, अधिक सूचना एकत्रित करनी हो, क्षेत्र विशाल हो तथा सूचनादाता शिक्षित व्यक्ति हो।	....
v) जब समय पर्याप्त हो वित्तीय साधन पर्याप्त हों, क्षेत्र विस्तृत हो, सभी सूचनादाता शिक्षित न हों तथा ईमानदार और कर्मठ गणनाकारों की टोली उपलब्ध हो।	....

5.5 द्वितीयक समंकों के स्रोत (Sources of Secondary Data)

हमने प्राथमिक समंकों के संकलन की विभिन्न समस्याओं तथा विधियों का वर्णन किया है। आइए अब द्वितीयक समंकों की चर्चा करें। यदि आप द्वितीयक समंकों को संकलित करना चाहते हैं तो आपको उन विभिन्न स्रोतों को देखना होगा जहाँ से उन्हें प्राप्त किया जा सकता है। समस्या की प्रकृति पर यह निर्भर करेगा कि किन स्रोतों से वास्तव में समंक एकत्रित किए जाएँ। द्वितीयक समंकों के स्रोत, मोटे तौर पर, दो वर्गों में वर्गीकृत किए जा सकते हैं: (1) प्रकाशित स्रोत तथा (2) अप्रकाशित स्रोत। आइए इन दोनों स्रोतों का विस्तार में वर्णन करें।

5.5.1 प्रकाशित स्रोत

सभी इच्छुक व्यक्तियों को समंक प्रकाशित कर उपलब्ध कराए जाते हैं। प्रकाशित समंकों के सामान्य स्रोत निम्नलिखित हैं:

1 केन्द्रीय तथा राज्य सरकारों द्वारा प्रकाशित प्रतिवेदन तथा शासकीय प्रकाशन।

2 विदेशी सरकारों या अंतर्राष्ट्रीय संगठनों तथा उनकी उप-संस्थाओं जैसे विश्व बैंक अंतर्राष्ट्रीय मुद्रा कोष, संयुक्त राष्ट्र संघ आदि के विभिन्न प्रकाशन।

3 स्थानीय संस्थाओं, जैसे नगरपालिका, जिला-बोर्ड आदि, के अर्ध-सरकारी प्रकाशन।

4 निजी प्रकाशन, जैसे:

i) तकनीकी तथा व्यापारिक जर्नल जैसे कॉमर्स, कैपिटल आदि।

ii) व्यावसायिक संगठनों, जैसे इंस्टिट्यूट ऑफ चार्टड अकॉउन्टेंट ऑफ इंडिया, इंस्टीट्यूट ऑफ कंपनी सेक्रेटॅरीज इंस्टिट्यूट ऑफ बैंकर्स आदि, के प्रकाशन।

iii) व्यापार तथा उद्योग संगठनों, जैसे फेडेरेशन ऑफ इंडियन चैम्बर ऑफ कॉमर्स, स्टॉक एक्सचेंज आदि, के प्रकाशन।

iv) बैंकों तथा संयुक्त स्कंध कंपनियों की वार्षिक रिपोर्ट।

v) शोध विद्वानों, विश्वविद्यालयों, अर्थशास्त्रियों आदि द्वारा तैयार की गई रिपोर्टें।

vi) सार्वजनिक रिकार्ड तथा आँकड़े, ऐतिहासिक दस्तावेज तथा प्रकाशित सूचना के अन्य स्रोत, जैसे पुस्तकें, पत्रिकाएँ, समाचार पत्र आदि।

5.5.2 अप्रकाशित स्रोत

सभी सांख्यिकीय सामग्री प्रकाशित रूप में उपलब्ध नहीं होती। अप्रकाशित समंकों के बहुत से स्रोत होते हैं जिनका आवश्यकतानुसार उपयोग किया जा सकता है। अप्रकाशित आँकड़े सामान्यत: डायरियों, पत्रों, अप्रकाशित जीवनियों तथा आत्मकथाओं में पाये जा सकते हैं। अप्रकाशित समंक विद्वानों, शोध-कर्त्ताओं, व्यापारिक संगठनों, श्रम-ब्यूरों, अन्य सार्वजनिक/निजी संगठनों तथा व्यक्तियों से भी उपलब्ध हो सकते हैं। इस प्रकार प्रकाशित तथा अप्रकाशित स्रोतों, दोनों से ही पर्याप्त मात्रा में सूचनाएँ उपलब्ध होती हैं। जिनके आधार पर अनेक सांख्यिकीय अध्ययन किये जाते हैं। अनुसंधानकर्त्ता अपनी प्रयोजना के लिए एक या अधिक उपयुक्त स्रोतों का प्रयोग कर सकता है।

5.6 द्वितीयक समंकों के उपयोग में सावधानियाँ

जैसा कि आपको विदित है, द्वितीयक समंक किसी अन्य व्यक्ति द्वारा संकलित तथा विश्लेषित किए गए हैं। अत: उनका प्रयोग करते समय आपको अत्यधिक सावधान रहना चाहिए। आपको समंकों का अध्ययन सावधानीपूर्वक करना चाहिए क्योंकि संभव है कि आपके अध्ययन के संदर्भ में वे अनुपयुक्त या अपर्यान्त हों। प्रकाशित समंकों को प्रत्यक्ष मूल्य पर बिना उनके अर्थ तथा परिसीमाओं को जानें उपयोग में लेना सुरक्षित नहीं रहता। द्वितीयक समंकों को उपयोग में लाने से पूर्व आपको निम्न सावधानियाँ ध्यान में रखनी चाहिए:

1 **समंकों की विश्वसनीयता:** द्वितीयक समंक तभी उपयोग करने चाहिए जब वे विश्वसनीय हों। निम्न पहलुओं का परीक्षण कर विश्वसनीयता को जाँचा जा सकता है:

i) समंकों का संकलन किसने किया ?

ii) समंकों के स्रोत क्या थे ?

iii) क्या वे सही ढंग से संकलित किए गये थे ?

iv) वे किस समय संकलित किए गये थे ?

v) क्या संकलकर्त्ता पक्षपात पूर्ण था ?

vi) परिशुद्धता का वांछित स्तर क्या था ? क्या वह प्राप्त हुआ ?

यदि समंक संकलन की एजेंसी कोई सरकारी संस्था या अंतर्राष्ट्रीय संगठन या कोई अन्य सक्षम प्राधिकरण है, तो द्वितीयक समंक, किसी व्यक्ति या किसी अन्य कम प्रसिद्ध वैयक्तिक संगठन द्वारा संकलित किए गए समंकों की तुलना में अधिक विश्वसनीय माने जा सकते हैं। किसी सरकारी विभाग, संसद के अधिनियम के अंतर्गत स्थापित निगम तथा अंतर्राष्ट्रीय संस्थानों द्वारा संकलित तथा प्रकाशित द्वितीयक समंक विश्वसनीय होते हैं।

2 **समंकों की उपयुक्तता:** यह आवश्यक नहीं कि एक अनुसंधान के लिए उपयुक्त समंक दूसरे अनुसंधान के लिए भी उपयुक्त हों। अत: आपको यह देखना चाहिए कि समंक आपके अध्ययन के लिए उपयुक्त हैं अथवा नहीं। यदि उपलब्ध समंक उपयुक्त न पाए जाएँ तो उनका प्रयोग नहीं होना चाहिए। अत:, समंकों की सांख्यिकीय इकाई की सावधानीपूर्वक छान-बीन करनी चाहिए। इसी प्रकार मूल जाँच-पड़ताल का उद्देश्य, क्षेत्र तथा प्रकृति भी ज्ञात करनी चाहिए। यदि उक्त पहलू उपयुक्त न हों तो वर्तमान अनुसंधान के लिए इन समंकों का उपयोग करना उचित नहीं होगा। उदाहरणार्थ, आप श्रमिकों के भत्तों के सहित वेतन-स्तर का सवेक्षण कर रहे हैं। यदि द्वितीयक समंक केवल मूल्य वेतन के संबंध में ही हैं तो इस प्रकार के समंक वर्तमान अनुसंधान के लिए उपयुक्त नहीं हैं।

3 **समंकों की पर्याप्तता:** सर्वेक्षण की आवश्यकताओं तथा उपलब्ध द्वितीयक समंकों द्वारा आवृत्त भौगोलिक क्षेत्र को ध्यान में रख कर समंकों की पर्याप्तता निर्धारित की जाती है। उदाहरणार्थ यदि अध्ययन का उद्देश्य भारत के कपड़ा उद्योग में कार्यरत श्रमिकों की मजदूरी दर का अध्ययन करना है, तथा प्रकाशित रिर्पोटों में श्रमिकों की मजदूरी दर के आँकड़े सभी उद्योगों में कार्यरत श्रमिकों के बारे में हैं, तो इन समंकों से हमारा उद्देश्य पूरा नहीं होगा। समंकों की पर्याप्तता का प्रश्न उपलब्ध समंकों के समय-अंतराल को ध्यान में रख कर भी किया जाना चाहिए। उदाहरणार्थ, मूल्य-स्तर की उपनति का अध्ययन करने के लिए हमें गत बीस वर्षों के आँकड़ों की आवश्यकता पड़ सकती है, परन्तु द्वितीयक समंक केवल गत चार वर्षों के ही उपलब्ध हैं। यहाँ उपलब्ध समंक अपर्याप्त हैं तथा उनसे हमारा उद्देश्य पूरा नहीं होगा। इसी प्रकार, यदि समंकों में परिशुद्धता का स्तर, वर्तमान अनुसंधान के उद्देश्य को ध्यान में रखते हुए अपर्याप्त है तो अनुसंधानकर्त्ता को ऐसे समंकों का प्रयोग नहीं करना चाहिये।

इस प्रकार, द्वितीयक समंकों का तभी उपयोग किया जाना चाहिए जबकि वे विश्वसनीय उपयुक्त तथा पर्याप्त हों। यदि द्वितीयक समंक प्रामाणिक स्रोतों से उपलब्ध हैं तथा वर्तमान अध्ययन के लिए उपयुक्त और पर्याप्त हैं, तो प्राथमिक समंकों के संकलन के लिए क्षेत्र-सर्वेक्षण आयोजित करने में समय शक्ति व धन व्यय करना किफायती नहीं होगा। अत: यदि द्वितीयक समंक उपलब्ध हैं तो उन्हें उपर्युक्त सावधानियों को ध्यान में रखकर उपयोग करना चाहिए।

5.7 द्वितीयक समंकों के लाभ तथा हानियाँ

द्वितीयक समंकों के उपयोग के कुछ लाभ तथा हानियाँ हैं। आइए अब उनकी चर्चा करें।

लाभ

1 द्वितीयक समंकों का उपयोग करना बहुत अधिक सस्ता है क्योंकि हमें समंक-संकलन फार्मों के छपवाने तथा बड़ी संख्या में गणनकारों की नियुक्ति की आवश्यकता नहीं पड़ती।

2 उपलब्ध होने पर द्वितीयक समंक, प्राथमिक समंकों की तुलना में अधिक शीघ्र प्राप्त किए जा सकते हैं। द्वितीयक समंक कुछ ही दिनों में संकलित किए जा सकते हैं। जबकि प्राथमिक समंकों का संकलन करने के लिए क्षेत्रीय-कार्य पूरा करने में ही महीनों का समय लग सकता है। इस प्रकार द्वितीयक समंकों द्वारा अनुसंधान का कार्य कम समय में पूरा हो जाता है।

3 व्यक्तिगत अनुसंधानकर्त्ता या शोध संगठन, जब अनेक विषयों पर प्राथमिक समंकों का संकलन करना कठिन पाते हैं तब वे द्वितीयक समंकों द्वारा अपना कार्य सुविधापूर्वक पूरा कर सकते हैं। जनसंख्या समंक, राष्ट्रीय आय समंक, आदि एक व्यक्ति द्वारा एकत्रित नहीं किए जा सकते परन्तु इन्हें सरकारी प्रकाशनों से सरलता से प्राप्त किया जा सकता है।

4 विश्व-व्यापार, उद्योग, जनसंख्या, स्वास्थ्य, आदि विभिन्न समस्याओं से संबंधित विश्वव्यापी समंक, प्राय: अंतर्राष्ट्रीय एजेंसियों, जैसे संयुक्त राष्ट्र संघ, विश्व बैंक, अंतर्राष्ट्रीय मुद्रा कोष आदि द्वारा प्रकाशित द्वितीयक स्रोतों से ही प्राप्त किए जा सकते हैं।

5 कभी-कभी पहले से उपलब्ध समंकों में काफी उपयोगी सूचना उपलब्ध रहती है जो अनुसंधानकर्त्ता द्वारा प्रयोग की जा सकती है, तथा वह अध्ययन की जाने वाली समस्या के संबंध में एक नई अंतर्दृष्टि प्राप्त कर सकता है।

6 अधिकतर सांख्यिकीय विश्लेषण व्यवहार में द्वितीयक समंकों पर ही निर्भर करते हैं क्योंकि ज्यादातर, विभिन्न क्षेत्रों से संबंधित समंक सरलता से उपलब्ध रहते हैं। हम प्राथमिक समंकों का उपयोग तभी करते हैं जब द्वितीयक समंक विश्लेषण के लिए पर्याप्त आधार प्रदान नहीं करते।

हानियाँ

1 द्वितीयक समंकों का प्रयोग जोखिम का काम है अत: उन्हें तभी उपयोग किया जाना चाहिए जब उनकी विश्वसनीयता उपयुक्तता तथा पर्याप्तता सुनिश्चित हो। यदि यह न किया जाय तो संभव है कि अनुसंधान के परिणाम पूर्णरूप से सही न हों।

2 ऐसे द्वितीयक समंक प्राप्त करना कठिन है जो आपके अनुसंधान के लिए पूरी तरह उपयुक्त हों।

3 ऐसे द्वितीयक समंक प्राप्त करना भी कठिन है जो पूरी तरह सही हों। पक्षपात, निदर्शन के अपर्याप्त आकार, परिभाषा की अशुद्धि, आदि के कारण द्वितीयक समंक भ्रांतिपूर्ण हो सकते हैं।

4 बहुत बार द्वितीयक समंक उपलब्ध नहीं होते तथा उन परिस्थितियों में हमें आवश्यक रूप से प्राथमिक समंकों को ही संकलित करना पड़ता है।

बोध प्रश्न ग

1 द्वितीयक समंकों के किन्हीं पाँच प्रकाशित स्रोतों के नाम लिखिए।

....

....

....

....

2 द्वितीयक समंकों का प्रयोग करते समय किन आधारभूत बातों को ध्यान में रखना आवश्यक है।

....

....

....

....

3 बताइए क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं या असत्य।

i) प्राथमिक समंकों की अपेक्षा द्वितीयक समंकों का प्रयोग सदा मितव्ययी होता है। ....

ii) द्वितीयक समंक सदा प्रकाशित स्रोतों में उपलब्ध होते हैं। ....

iii) यदि द्वितीयक समंकों को, इस बात का सत्यापन किए बिना कि वे उपयुक्त, विश्वसनीय तथा पर्याप्त हैं, प्रयोग किया जाए तो उनसे सही परिणाम प्राप्त न होने की संभावना है। ....

iv) द्वितीयक समंक, जो प्रकाशित नहीं है, वह विश्वसनीय भी नहीं हैं। ....

5.8 सारांश

सांख्यिकीय समंक प्राथमिक समंक हो सकते हैं या द्वितीयक समंक। प्राथमिक समंक वे समंक है। जो पहली बार मूल-समंक के रूप में एकत्रित किए गये हों। द्वितीयक समंक से तात्पर्य उन

समंकों से है जो किसी अन्य व्यक्ति द्वारा संकलित तथा साधित किए गए हों तथा अब वर्तमान जाँच-पड़ताल के लिए उपयोग किए जा रहे हों। समंकों के चुनाव को प्रभावित करने वाले प्रमुख घटक हैं: (1) जाँच-पड़ताल का उद्देश्य तथा क्षेत्र, (2) वित्तीय साधन, (3) उपलब्ध समय, (4) अनुसंधानकर्ता की पदवी तथा प्रतिष्ठा (5) मानव संसाधन (6) वांछित परिशुद्धता तथा (7) द्वितीयक समंकों की उपलब्धि।

प्राथमिक समंकों के संकलन में अनेक समस्याएँ हैं। उनमें प्रमुख हैं: समंक संकलन की इकाई को परिभाषित करना संकलन की तकनीक से संबंधित समस्या रूपरेखा या ढाँचे को तैयार करने की समस्या, परिशुद्धता की मात्रा निर्धारण की समस्या प्रश्नावली/एनुसूची के ढाँचे को तैयार करने की समस्या, गणानकारों के चुनाव तथा प्रशिक्षण की समस्या, प्रश्नावलियों के उत्तर न प्राप्त होने की समस्या को सुलझाना, क्षेत्र-कार्य पर नियंत्रण तथा अन्य प्रशासनिक दृष्टिकोण।

प्राथमिक समंकों के संकलन की अनेक विधियाँ हैं, जैसे अवलोकन, साक्षात्कार सूचनादाताओं तथा स्थानीय रिपोर्टों से प्राप्त सूचना, प्रश्नावलियाँ तथा अनुसूचियाँ। इनमें से प्रत्येक विधि के अपने गुण तथा परिसीमाएँ हैं। अत: कोई भी अकेली विधि सभी परिस्थितियों की उपलब्धता उपलब्ध समय तथा परिशुद्धता मात्रा आदि बातों को ध्यान में रखकर परिस्थिति की आवश्यकताओं के अनुसार किसी एक या दूसरी विधि का चुनाव करना चाहिए।

द्वितीयक समंक प्रकाशित तथा अप्रकाशित स्रोतों से प्राप्त किए जा सकते हैं। द्वितीयक समंकों का उपयोग हमेशा सावधानी से करना चाहिए। इनकी विश्वसनीयता, उपयुक्तता तथा पर्याप्तता सुनिश्चित करने के बाद ही इनका उपयोग करना चाहिए। द्वितीयक समंकों के कुछ लाभ तथा हानियाँ हैं। अत: इनका सावधानीपूर्वक उपयोग करना चाहिए अन्यथा भ्रमित निष्कर्ष निकाले जाने की संभावना रहती है।

5.9 शब्दावली

गणानाकार: वे व्यक्ति जो उत्तरदाताओं के पास जाकर पूर्वअभिकल्पित अनुसूची के माध्यम से सूचना एकत्रित करते हैं।

साक्षात्कार: सूचनादाताओं से व्यक्तिगत रूप में मिलकर तथा उनसे प्रश्न पूछ कर प्राथमिक समंक संकलित करने की विधि।

अ-प्रतिक्रिया: सूचनादाताओं से उनके द्वारा भरी हुई प्रश्नावली वापिस प्राप्त न होने की समस्या।

प्रेक्षण/अवलोकन: घटना के वास्तव में घटित होते समय अवलोकन द्वारा सूचना एकत्रित करने की विधि।

अग्रगामी सर्वेक्षण: मुख्य सर्वेक्षण की प्रतिकृति तथा पूर्वाभ्यास। अग्रगामी सर्वेक्षण से प्राप्त अनुभव का उपयोग प्रश्नावली को अंतिम रूप देने में किया जाता है।

प्राथमिक समंक: वे समंक जो प्रथम बार मूल समंक के रूप में संकलित किए जाते हैं।

प्रकाशित स्रोत: वे स्रोत जिनमें प्रकाशित सांख्यिकीय सूचना उपलब्ध हो।

प्रश्नावली: एक ऐसा प्रपत्र या दस्तावेज जो प्राथमिक समंक संकलित करने हेतु प्रयोग किया जाता है, जिसमें जाँच संबंधी प्रश्नों की सूची दी होती है, जिसे प्राय: डाक द्वारा सूचनादाताओं के पास भेजा जाता है, तथा जिसमें उत्तरदाता प्रश्नों के उत्तर स्वयं लिखते हैं।

अनुसूची: एक ऐसा प्रपत्र या दस्तावेज जो प्राथमिक समंकों के संकलन हेतु प्रयोग किया जाता है, तथा जिसमें दिए गए प्रश्नों के उत्तर विशेष रूप से नियुक्त गणनाकारों द्वारा सूचनादाताओं से पूछ कर भरे जाते हैं।

द्वितीयक समंक: समंक जो किसी अन्य व्यक्ति द्वारा संकलित तथा साधित किए गये थे परन्तु वर्तमान जाँच-पड़ताल के लिए प्रयोग किए जा रहे हैं।

5.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 4 i) असत्य, ii) सत्य, iii) सत्य, iv) असत्य, v) सत्य, vi) असत्य, vii) असत्य viii) असत्य

ख 4 i) अवलोकन, ii) संवाददाताओं तथा स्थानीय रिपोर्टों के माध्यम से, iii) प्रश्नावली, iv) प्रश्नावली, v) अनुसूची

ग 3 i) असत्य, ii) असत्य, iii) सत्य, iv) असत्य

5.11 स्वपरख प्रश्न

1 प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों में अंतर स्पष्ट कीजिए। एक अनुसंधान में समंकों के चुनाव को प्रभावित करने वाले कारकों का वर्णन कीजिए।

2 प्राथमिक समंकों के संकलन में एक अनुसंधानकर्त्ता को प्राय: जिन समस्याओं का सामना करना पड़ता है। उनका वर्णन कीजिए।

3 प्राथमिक समंकों के संकलन की विभिन्न विधियाँ स्पष्ट कीजिए तथा उनके लाभ और हानियाँ भी बताइए।

4 "बिना सही छान-बीन किए द्वितीयक समंकों का उपयोग कभी भी ठीक नहीं" स्पष्ट कीजिए।

5 द्वितीयक समंकों के स्रोत बताइए। द्वितीयक समंकों को उपयोग में लाने के क्या लाभ तथा हानियाँ हैं।

टिप्पणी: ये प्रश्न इस इकाई को अधिक अच्छी तरह समझने में आपकी मदद करेंगे। किन्तु इनके उत्तर विश्वविद्यालय को न भेजें। ये केवल आपके अभ्यास के लिये हैं।

इकाई 6 समंकों का वर्गीकरण

इकाई की रूपरेखा

6.0 उद्देश्य
6.1 प्रस्तावना
6.2 वर्गीकरण का अर्थ
6.3 वर्गीकरण के उद्देश्य
6.4 वर्गीकरण की विधियाँ
 6.4.1 गुणों के आधार पर वर्गीकरण
 6.4.2 चरों के आधार पर वर्गीकरण
6.5 आवृत्ति-बंटन से सम्बन्धित शब्द/पद
6.6 आवृत्ति बंटन की रचना
 6.6.1 समंकों का क्रम-विन्यास
 6.6.2 आवृत्ति-बंटन की रचना के चरण
 6.6.3 वर्गान्तरों के चुनाव के लिये मार्गदर्शक नियम
6.7 सारांश
6.8 शब्दावली
6.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
6.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

6.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि:

- वर्गीकरण के अर्थ की व्याख्या कर सकें
- वर्गीकरण के उद्देश्यों और विधियों का वर्णन कर सकें
- आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित विभिन्न पदों का वर्णन कर सकें
- आवृत्ति बंटन तैयार कर सकें।

6.1 प्रस्तावना

आप प्राथमिक तथा द्वितीयक समंकों को एकत्र करने की विधियों तथा उनके विभिन्न स्रोतों के विषय में पढ़ चुके हैं। संग्रहीत समंक अव्यवस्थित दशा में होते हैं। आप उनका निर्वचन नहीं कर सकते, न ही उनसे उपयोगी निष्कर्ष निकाल सकते हैं। अत: संग्रहीत समंकों के आधार पर उपयोगी निष्कर्ष निकालने के लिए यह आवश्यक है कि समंकों को संक्षिप्त तथा सरल रूप में प्रस्तुत किया जाए। समंकों का वर्गीकरण समंकों के समूह को संक्षिप्त तथा सरल रूप में प्रस्तुत करने में हमारी सहायता करता है। इस इकाई में आप वर्गीकरण के अर्थ व उद्देश्य तथा उसकी विभिन्न रीतियों के विषय में पढ़ेंगे। आप विभिन्न प्रकार के आवृत्ति बंटनों के विषय में तथा उनके निर्माण की विधियों के विषय में भी जानकारी प्राप्त करेंगे।

6.2 वर्गीकरण का अर्थ

समंकों को उनकी समानता और सम्यता के आधार पर व्यवस्थित करके वर्गों या विभागों में प्रस्तुत करने की क्रिया को वर्गीकरण (classification) कहते हैं। समस्त समान मदें एक वर्ग में तथा समस्त असमान मदें विभिन्न वर्गों में रख दी जाती हैं। सांख्यिकीय समंक अपनी विशेषताओं के अनुसार वर्गीकृत किये जाते हैं। उदाहरणार्थ यदि हमने एक वर्ष में

विश्वविद्यालय में प्रवेश लेने वाले विद्यार्थियों की संख्या के विषय में समंक एकत्रित किये है, तो विद्यार्थियों का लिंग के आधार पर वर्गीकरण किया जा सकता है। इस स्थिति में समस्त पुरुष विद्यार्थी एक वर्ग में, तथा समस्त स्त्री विद्यार्थी दूसरे वर्ग में रखे जाएंगे। विद्यार्थियों को आयु, अंकों, वैवाहिक स्थिति, ऊँचाई आदि के आधार पर भी वर्गीकृत किया जा सकता है। वर्गीकरण के लिए हम किन विशेषताओं का चुनाव करते हैं, यह इस बात पर निर्भर करेगा कि अध्ययन का उद्देश्य क्या है। उदाहरण के लिए, यदि हम विद्यार्थियों के धार्मिक मिश्रण का अध्ययन करना चाहते हैं तो हम धर्म के आधार पर विद्यार्थियों का वर्गीकरण करेंगे।

6.3 वर्गीकरण के उद्देश्य

वर्गीकरण निम्नलिखित उद्देश्यों को प्राप्त करने में सहायक होता है।

1 वर्गीकरण समंकों के समूह को संक्षिप्त तथा सरल रूप में प्रस्तुत करने में सहायक होता है।

2 यह समंकों के समूह को समानताओं और साम्यताओं के आधार पर विभाजित करता है जिससे तुलना करना संभव हो जाता है।

3 यह अव्यवस्थित समंकों के व्यवस्थित ढंग से प्रस्तुत करने की एक प्रक्रिया है जिससे हमें उपयोगी निष्कर्ष निकालने में सहायता मिलती है।

4 यह समंकों के सारणीयन तथा उनके विश्लेषण का आधार प्रस्तुत करता है।

5 यह समंकों को एक सार्थक ढाँचा प्रदान करता है जिससे हमें उनकी सम्भव विशेषताओं को पहचानने में सहायता मिलती है।

6.4 वर्गीकरण की विधियाँ

आप वर्गीकरण के अर्थ और उद्देश्यों के विषय में पढ़ चुके हैं। आइये अब हम वर्गीकरण की विधियों के विषय का अध्ययन करें। मोटे तौर पर, वर्गीकरण की दो विधियाँ हैं: (i) गुणों के आधार पर वर्गीकरण, (ii) चरों के आधार पर वर्गीकरण।

6.4.1 गुणों के आधार पर वर्गीकरण

गुण (attribute) एक ऐसी गुणात्मक विशेषता है जिसे संख्या में व्यक्त नहीं किया जा सकता। एक गुण की केवल उपस्थिति या अनुपस्थिति के विषय में जाना जा सकता है। उदाहरणार्थ, बुद्धि, धर्म, जाति, लिंग, आदि ऐसे गुण हैं जिनका परिमाणन नहीं किया जा सकता। जब वर्गीकरण गुणों के आधार पर करना होता है, तो मदों में अन्तर किसी गुण की उपस्थिति के आधार पर (जैसे पुरुष और स्त्री) अथवा इसकी अनुपस्थिति के आधार पर किया जाता है। एक गुण की विशेषताओं में अन्तर किसी प्राकृतिक सीमांकन रेखा के आधार पर किया जा सकता है। इस प्राकृतिक अन्तर के आधार पर हम उस समूह का निश्चय कर सकते हैं जिसमें कि एक विशेष मद को रखा जाना है। उदाहरणार्थ, यदि हम बालों के रंग को वर्गीकरण के आधार के रूप में चुनते हैं, तब एक समूह भूरे बालों वाले व्यक्तियों का, और दूसरा काले बालों वाले व्यक्तियों का। गुणात्मक विशेषता के आधार पर वर्गीकरण दो प्रकार का होता है।

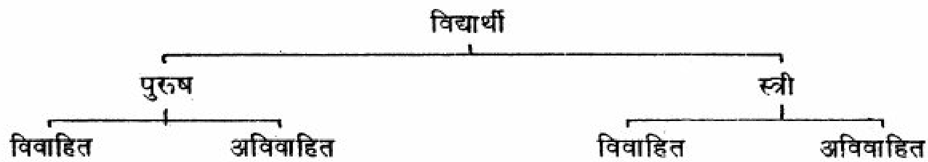
1 **साधारण वर्गीकरण** (Simple Classification) साधारण वर्गीकरण में समंकों को केवल एक गुणात्मक विशेषता के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है। लिंग के आधार पर वर्गीकृत समंक साधारण **वर्गीकरण का एक** उदाहरण हैं। इसे निम्न प्रकार से दिखाया जा सकता है।

विद्यार्थी

पुरुष स्त्री

इस प्रकार के वर्गीकरण को द्विधा वर्गीकरण (dichotomous classification) भी कहा जाता है।

2 **बहुगुणीय वर्गीकरण** (Manifold classification) वर्गीकरण की इस विधि में समंकों को एक से अधिक गुणात्मक विशेषताओं के आधार पर वर्गीकृत किया जाता है। उदाहरणार्थ, एक विश्वविद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या से सम्बन्धित समंकों को उनके लिंग तथा उनकी वैवाहिक स्थिति के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है जैसा कि नीचे दिखाया गया है —



6.4.2 चरों के आधार पर वर्गीकरण (Classification according to Variable)

समंकों की अनुमान्य विशेषताओं को जिन्हें संख्यात्मक रूप में प्रकट किया जा सके चर कहते हैं। मज़दूरी, आयु, ऊँचाई, भार, अंक, दूरी आदि, चरों के उदाहरण हैं। जैसा कि आप जानते हैं ये सब चर परिमाणात्मक रूप में व्यक्त किये जा सकते हैं। वर्गीकरण के इस रूप में, समंकों को एक आवृत्ति बंटन के रूप में दिखाया जाता है। आवृत्ति बंटन एक ऐसा सारणिक प्रस्तुतिकरण हैं जो सामान्यत: समंकों को वर्गों में व्यवस्थित करता है तथा इन वर्गों में से प्रत्येक में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या (आवृत्ति बरंबारता) को दिखाता है। अनुप्रयुक्त चरों की संख्या के आधार पर आवृत्ति बंटन के तीन वर्ग होते हैं: (1) एक-चरीय (uni-variate) आवृत्ति बंटन (2) द्वि चरीय (bi-variate) आवृत्ति बंटन, तथा (3) बहुचरीय (multi-variate) आवृत्ति बंटन।

1 **एक-चरीय आवृत्ति बंटन**: एक चर वाले आवृत्ति बंटन को एक चरीय आवृत्ति बंटन कहा जाता है। उदाहरण के लिए एक कक्षा के विद्यार्थियों को उनके द्वारा प्राप्त अंकों के आधार पर वर्गीकृत किया जा सकता है। यह उदाहरण 1 में प्रस्तुत किया गया है।

उदाहरण 1

एक चरीय आवृत्ति बंटन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0–10	15
10–20	25
20–30	30
30–40	20
40–50	10
कुल योग	100

उदाहरण 1 में दिये गए आवृत्ति बंटन के विषय में निम्न बातों पर ध्यान दिया जाना चाहिए:

i) सांख्यिकी में अंकों को 0–10, 10–20, 20–30 आदि विभिन्न वर्गों में विभाजित किया गया है।

ii) 0–10 अंक वाला प्रथम वर्ग यह संकेत करता है कि वे विद्यार्थी जिन्होंनें शून्य अथवा उससे अधिक, पर 10 से कम अंक प्राप्त किये हैं, इस वर्ग में रखें जाएंगे। इसी प्रकार 10–20 अंक वाला वर्ग यह संकेत करता है कि वे विद्यार्थी जिन्होंनें 10 या अधिक परन्त 20 से कम अंक प्राप्त किये हैं, इस वर्ग में रखे जाएंगे।

iii) इन वर्गों में आने वाले विद्यार्थियों को सम्बन्धित वर्गों में रखा गया है, जिसका अर्थ है कि

15 विद्यार्थी 0–10 अंक वाले वर्ग में आते हैं, 25 विद्यार्थी 20–30 अंक वाले वर्ग में आते हैं, आदि। किसी वर्ग में आने वाले विद्यार्थियों की संख्या को उस वर्ग की बारंबारता (आवृत्ति) कहा जाता है।

2 **द्विचरीय आवृत्ति बंटन:** दो चरों वाले आवृत्ति बंटन को द्विचरीय आवृत्ति बंटन कहते हैं। निदर्श चित्र 1 में दिया गया एक-चरीय आवृत्ति बंटन केवल सांख्यिकी में विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक दर्शाता है। यदि एक आवन्ति बंटन दो चरों जैसे सांख्यिकी में प्राप्त अंक तथा आयु को दर्शाता है तो उसे द्विचरीय आवृत्त बंटन कहा जाता है। द्विचरीय आवृत्ति बंटन के लिए उदाहरण 2 को देखिए।

उदाहरण 2

द्विचरीय आवृत्ति बंटन

सांख्यिकी में	आयु के साथ विद्यार्थियों की संख्या (पिछली सालगिरह पर वर्षों में)				
प्राप्त अंक	18 वर्ष	19 वर्ष	20 वर्ष	21 वर्ष	योग
0–10	1	4	8	2	15
10–20	4	8	9	4	25
20–30	–	3	17	10	30
30–40	–	5	10	5	20
40–50	–	–	1	9	10
योग	5	20	45	30	100

उदाहरण 2 में दिये गए द्वि-चरीय आवृत्ति बंटन के विषय में निम्न बातों पर ध्यान दिया जाना चाहिए:

i) सांख्यिकी में प्राप्त अंकों को 0–10, 10–20, 20–30, आदि, वर्गों में विभाजित किया गया है, जबकि पिछली साल-गिरह पर वर्षों में आयु 18 वर्ष, 19 वर्ष, 20 वर्ष, आदि ली गई है।

ii) वे विद्यार्थी जिन्होंने शून्य अथवा उससे अधिक पर 10 से कम अंक प्राप्त किये हैं तथा जिनकी आयु 18 वर्ष है 0–10/18 के सम्मुख रखे गए हैं। इसी प्रकार 0–10 अंक वाले वर्ग में आने वाले विद्यार्थियों जिनकी आयु 19, 20 और 21 वर्ष है, की संख्या क्रमश: 4, 8, और 2 है। 18 वर्ष की आयु वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या 5 है, जिनमें से एक विद्यार्थी 0–10 अंक वाले वर्ग में तथा शेष 4, 10–20 अंक वाले वर्ग में रखे गए हैं।

3 **बहुचरीय आवृत्ति बंटन;** दो से अधिक चरों वाला आवृत्ति बंटन बहुचरीय आवृत्ति कहलाता है। उदाहरणार्थ, एक कक्षा के विद्यार्थियों को अंकों, आयु तथा लिंग के आधार

उदाहरण 3

बहुचरीय आवृत्ति बंटन का उदाहरण

सांख्यिकी	(पिछली वर्ष गाँठ पर वर्षों में) आयु सहित विद्यार्थियों की संख्या											
में प्राप्त	18 वर्ष		19 वर्ष		20 वर्ष		21 वर्ष		22 वर्ष		योग	
अंक	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पु.	स्त्री
0–10	–	1	2	2	5	3	2	–	–	–	9	6
10–20	3	1	4	4	4	5	4	–	–	–	15	10
20–30	–	–	1	2	7	10	7	3	–	–	15	15
30–40	–		3	2	5	5	3	2	–	–	11	9
40–50	–	–	–	–	–	1	2	2	3	2	5	5
योग	3	2	10	10	21	24	18	7	3	2	55	45

पर वर्गीकृत किया जा सकता है। आइए निदर्श चित्र में दिये गए उदाहरण को लें तथा विद्यार्थियों को लिंग के आधार पर और आगे वर्गीकृत करें। उदाहरण 3 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और जाँच कीजिए कि यह कैसे किया गया है।

बोध प्रश्न क

1 वर्गीकरण क्या है ?

....

....

....

....

2 वर्गीकरण के क्या उद्देश्य हैं ?

....

....

....

3 गुणों के आधार पर साधारण वर्गीकरण तथा बहुगुणीय वर्गीकरण में क्या अन्तर है ?

....

....

....

4 गुणात्मक विशेषताओं के अनुसार वर्गीकरण तथा चरों के अनुसार वर्गीकरण में अन्तर कीजिए।

....

....

....

....

5 एक चरीय और निचरीय आवृत्ति बंटन में क्या अंतर है ?

....

....

....

....

6 बताइये कि निम्न कथन सत्य है अथवा असत्य है ?

i) समंकों के वर्गीकरण का अर्थ उन्हें समानताओं और साम्यताओं के आधार पर विभिन्न वर्गों में व्यवस्थित करता है। ....

ii) वर्गीकरण समंकों के समूह को संक्षिप्त तथा सरल रूप से प्रस्तुत करने में सहायता करता है। ....

iii) वर्गीकृत समंकों की सहायता से किसी प्रकार की तुलना सम्भव नहीं है। ....

iv) लिंग तथा आयु के आधार पर वर्गीकृत समंक साधारण वर्गीकरण का एक उदाहरण हैं। ....

v) आवृत्ति बंटन एक ऐसा सारणिक प्रस्तुतिकरण है जो सामान्य रूप से समंकों को वर्गों में व्यवस्थित करता है तथा इन वर्गों में से प्रत्येक में रखे जाने वाले प्रेषणों को दर्शाता है। ....

vi) एक द्वि-चरीय आवृत्ति बंटन दो चरों पर आधारित बटन को दर्शाता है। ....

7 कोष्ठकों में दिये गए शब्दों में से उपयुक्त शब्द चुनिये तथा रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

i) गुणात्मक विशेषता समंकों के .... पहलू को बताती है। (संख्यात्मक/गुणात्मक)

ii) एक विश्वविद्यालय के विद्यार्थियों का उनकी ऊँचाई के आधार पर वर्गीकरण .... के अनुसार वर्गीकरण का एक **उदाहरण** है। (गुणात्मक विशेषता/चर)

iii) एक विश्वविद्यालय के विद्यार्थियों का उनके धर्म के आधार पर वर्गीकरण .... के अनुसार वर्गीकरण का एक उदाहरण है। (गुणात्मक विशेषता/चर)

iv) व्यक्तियों के भार के आधार पर बनाया गया आवृत्ति बंटन .... आवृत्ति बंटन का एक उदाहरण है। (एक-चरीय/द्वि-चरीय)

v) आयु, भार तथा ऊँचाई के आधार पर तैयार किया गया आवृत्ति बंटन .... आवृत्ति बंटन का एक उदाहरण है। (द्वि-चरीय/बहुचरीय)

6.5 आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित शब्द/पद

आवृत्ति बंटन के अर्थ और विधियों के अध्ययन के पश्चात् अब हमें आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित पदों के विषय में विवेचन करना चाहिए। आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित अनेक पद हैं। सर्वप्रथम उन्हें समझना हमारे लिए अनिवार्य है।

1 खण्डित तथा अखण्डित चर (Discrete and Continuous Variables)

खण्डित चर एक ऐसा चर है जिसका मूल्य निश्चित होता है तथा जिसके विभिन्न मूल्यों में एक निश्चित अन्तर होता है। सामान्यत: इसका मूल्य भिन्नों में नहीं होता। प्राय: यह किसी वस्तु गणना का परिणाम होता है। एक फैक्टरी में श्रमिकों की संख्या, एक परिवार में बच्चों की संख्या, किसी विशेष दिन हुई दुर्घटनाओं की संख्या, आदि खण्डित चर के उदाहरण है। खण्डित चर को विच्छिन्न चर भी कहा जाता है। इसके विपरीत एक अखण्डित चर मूल्यों के एक निश्चित सीमान्तर में कोई भी भिन्नात्मक मूल्य ग्रहण कर सकता है। यह किसी वस्तु के परिमापन का परिणाम होता है। एक कक्षा के विद्यार्थियों का भार एक संगठन के श्रमिकों की आय, एक नगर के वासियों की आयु आदि अखण्डित चर के उदाहरण हैं।

खण्डित चरों के लिए बनाया गया आवृत्ति बंटन खण्डित आवृत्ति बंटन कहलाता है जबकि अखण्डित चरों के लिए बनाया गया आवृत्ति अखण्डित आवृत्ति बंटन कहलाता है। उदाहरण 4 व 5 में ये दो प्रकार के आवृत्ति बंटन दिखाए गए हैं।

उदाहरण 4

खण्डित आवृत्ति बंटन

एक हॉकी मैच में किये गए गोल	मैचों की संख्या
0	20
1	15
2	10
3	3
4 और अधिक	2
योग	50

उदाहरण 5

अखण्डित आवृत्ति बंटन

विद्यार्थियों की ऊँचाई (से.मी. में)	विद्यार्थियों की संख्या
130–140	5
140–150	15
150–160	20
160–170	5
170–180	5
योग	50

उदाहरण 4 में एक हॉकी मैच में किये गये गोलों की संख्या का चर एक खण्डित चर है। इसी प्रकार, उदाहरण 5 में विद्यार्थियों की ऊँचाई का चर एक अखण्डित चर है। किन्तु ऊपर दिये गए निदर्शनचित्रों से यह नहीं समझना चाहिये कि केवल अखण्डित चरों के लिए ही वर्गान्तरों सहित आवृत्ति बंटन बनाया जा सकता है। वास्तव में, वर्गान्तरों के साथ आवृत्ति बंटन खण्डित चरों के लिए भी बनाया जा सकता है, जैसा कि उदाहरण 6 में दिखाया गया है:

उदाहरण 6

खण्डित चरों के लिए वर्गान्तरों के साथ आवृत्ति बंटन

एक कक्षा में उपस्थित छात्रों की संख्या	वर्ष में कार्य दिवसों की संख्या
10–14	8
15–19	12
20–24	116
25–29	114
योग	250

उदाहरण 6 में एक कक्षा में उपस्थित छात्रों की संख्या का चर एक खण्डित चर है, किन्तु यहाँ इसे एक अखण्डित चर की भाँति वर्गान्तरों सहित दिखाया गया है। ऐसे बंटन खण्डित प्रकृति के होते हैं, यद्यपि प्रस्तुतीकरण में ये अखण्डित बंटनों जैसे दिखाई देते हैं।

2 **वर्ग सीमाएँ (Class limits) :** प्रत्येक वर्ग या वर्गान्तर की दो सीमाएँ होती हैं (i) अध:सीमा (lower limits) तथा (ii) ऊपरि सीमा (upper limit) किसी वर्ग में न्यूनतम सम्भव माप को अध:सीमा के नाम से जाना जाता है, जबकि अधिकतम सम्भव माप को उपरि सीमा के नाम से जाना जाता है। उदाहरण 6 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए। इसमें प्रस्तुत आवृत्ति बंटन में पहले वर्ग (10–14) की वर्ग सीमाएँ 10 तथा 14 हैं। इस वर्ग के लिए न्यूनतम सम्भव माप 10 है, जबकि अधिकतम माप 14 है। इसी प्रकार दूसरे वर्ग (15–19) की अध:सीमा 15, तथा ऊपरि सीमा 19 है।

3 **एक वर्गान्तर का मध्य बिन्दु (Mid-point of a class interval)** किसी वर्ग की अध:सीमा तथा ऊपरि सीमा आधी दूरी पर आने वाले बिन्दु को उस वर्ग का मध्य बिन्दु या मध्य मूल्य कहते हैं। सूत्र रूप में इसे निम्न प्रकार से अभिव्यक्त किया जा सकता है,

Mid–Point or Mid–value $= L + U/2$

जहाँ, $L =$ वर्गान्तर की अध:सीमा
$U =$ वर्गान्तर की ऊपरि सीमा

दूसरे शब्दों में, एक वर्ग अध:सीमा तथा ऊपरि सीमा के योग को दो से विभाजित करने पर उस वर्ग का मध्य बिन्दु प्राप्त शिक्षा प्राप्त किया जाता है। उदाहरण 7 में सांख्यिकी में अंकों के उदाहरण में विभिन्न वर्गों के मध्य बिन्दु परिकलित किये गए हैं।

उदाहरण 7

वर्गान्तरों के मध्य बिन्दुओं का परिकलन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या	एक वर्गान्तर का मध्यबिन्दु
0–10	15	$\frac{0+10}{2}=5$
10–20	25	$\frac{10+20}{2}=15$
20–30	30	$\frac{30+40}{2}=35$
30–40	20	$\frac{20+30}{2}=25$
40–50	10	$\frac{40+50}{2}=45$

4 **वर्गान्तर का वर्ग-विस्तार (Magnitude of a class interval)**
एक वर्गान्तर की ऊपरि सीमा तथा अध:सीमा के बीच के अन्तर को वर्गान्तर का वर्ग-विस्तार कहा जाता है। उदाहरण 8 को ध्यानपूर्वक देखिए तथा इस बात का अध्ययन कीजिए कि विभिन्न वर्गान्तरों का वर्ग-विस्तार किस प्रकार परिकलित किया गया है।

उदाहरण 8

वर्गान्तरों के वर्ग-विस्तार का परिकलन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या	वर्गान्तरों का वर्ग-विस्तार
0–10	15	10 – 0 = 10
10–20	25	20 – 10 = 10
20–30	30	30 – 20 = 10
30–40	20	40 – 30 = 10
40–50	10	50 – 40 = 10

ऊपर दिये गए उदाहरण 8 में, आपने देखा होगा कि विभिन्न वर्गान्तरों का वर्ग विस्तार बराबर है। किन्तु यह सदा आवश्यक नहीं है कि विभिन्न वर्गान्तरों का वर्ग-विस्तार बराबर हो। विभिन्न वर्गों के लिए असमान वर्गविस्तार वाला आवृत्ति बंटन भी हो सकता है।

5 **वर्ग-आवृत्ति (Class frequency) :** किसी वर्ग की सीमाओं के अन्तर्गत आने वाले प्रेक्षणों की संख्या को उस वर्ग की आवृत्ति कहते हैं। ऊपर दिये गए निदर्श चित्र 8 का अध्ययन कीजिये। प्रथम वर्गान्तर (अर्थात् 0–10) की आवृत्ति 15 है। इसी प्रकार दूसरे वर्गान्तर (अर्थात् 10–20) की आवृत्ति 25 है। इसका यह अर्थ है कि 15 विद्यार्थी प्रथम वर्गान्तर की सीमाओं में आते हैं, 25 विद्यार्थी दूसरे वर्गान्तर की सीमाओं में आते हैं आदि।

6 **वर्गों की संख्या तथा चौड़ाई (Number and width of classes) :** वर्गों की संख्या तथा चौड़ाई के विषय में कोई निश्चित नियम बनाना सम्भव नहीं है। वर्गों की संख्या न तो बहुत बड़ी और न ही बहुत छोटी होनी चाहिए। स्टर्जिज ने वर्गों की संख्या निश्चित करने के लिए एक सूत्र बताया है। जिसके अनुसार : $K = 1 + 3.3 \text{ Log } N$

जिसमें N – वर्गीकृत की जाने वाली मदों की संख्या
K – सामान्यत: प्रयोग की जाने वाले वर्गों की संख्या

कुछ अन्य कारणों से, यदि वर्गों की संख्या को K के बराबर लेना सम्भव न हो, तो वर्गों की संख्या सामान्यत: K – 2 से K + 2 के बीच हो सकती है। उदाहरण के लिए यदि N = 500 हो, तो हम K का मूल्य मिम्न प्रकार परिकलित कर सकते हैं:

$$K = 1 + 3.3 \log N$$
$$= 1 + 3.3 \log (500)$$
$$= 1 + 3.3 (2.6990)$$
$$= 1 + 8.90670$$
$$= 9.9067$$
$$= 10$$

अंत: 500 मदों के लिए वर्गों की संख्या 10 हो सकती है या हम K^{-2} तथा K^{+2} अर्थात् 8 से 12 के बीच कोई भी संख्या ले सकते हैं। वस्तुत: यह सूत्र केवल हमारा मार्गदर्शन करता है। वर्गों की संख्या का निश्चय करते समय वर्गों की चौड़ाई सम्बन्धी निर्णय को भी ध्यान में रखना आवश्यक है। जैसा कि पहले कहा गया है, यह आवश्यक नहीं है कि विभिन्न वर्गान्तरों की चौड़ाई बराबर रखी जाए। किन्तु, यदि विभिन्न वर्गों की चौड़ाई समान रखी जाती है, तो यह समंकों की तुलना का एक उपयुक्त आधार प्रदान करती है।

7 **खुले सिरे वाले बंटन (Open-end distribution) :** खुले सिरे वाला बंटन एक ऐसा बंटन है जिसके एक या दो वर्गों की वर्ग-सीमा नहीं होती। यह सम्भव है कि एक आवृत्ति बंटन में प्रथम वर्गान्तर की अध: सीमा न हो, तथा अन्तिम वर्गान्तर की ऊपरि-सीमा न हो। ऐसे आवृत्ति बंटन को खुले सिरे वाला बंटन कहते हैं। खुले सिरे वाले बंटन के उदाहरण के लिए उदाहरण 9 को ध्यानपूर्वक देखिए।

उदाहरण 9

खुले सिरे वाले बंटन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	15
10–20	25
20–30	30
30–40	20
40 और अधिक	10
योग	100

ऊपर दिये गए उदाहरण 9 में, पहला वर्गान्तर "10" से कम के रूप में प्रस्तुत किया गया। इस वर्ग में कोई अध:सीमा नहीं है। इसी प्रकार अन्तिम वर्गान्तर के लिए कोई ऊपरि सीमा नहीं है, क्योंकि इसे "40" और अधिक कहा गया है।

8 **अपवर्जी तथा समावेसी आवृत्ति बंधन (Exclusive and inclusive frequency distribution)** आवृत्ति बंटन, अपवर्जी बंटन अथवा समावेशी बंटन हो सकता है। एक अपवर्जी आवृत्ति बंटन में एक दिये गए वर्गान्तर की ऊपरि सीमा उस वर्ग से अपवर्जित की जाती है तथा अगले वर्गान्तर की अध:सीमा के रूप में ली जाती है। ऐसे बंटन में परस्परव्यापी वर्गान्तर होते हैं। एक समावेशी आवृत्ति बंटन में, एक विशेष वर्ग की ऊपरि

उदाहरण 10

अपवर्जी आवृत्ति बंटन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0–10	15
10–20	25
20–30	30
30–40	20
40–50	10
योग	100

सीमा उस वर्गान्तर में समाविष्ट की जाती है। ऐसे बंटन में गैर-परस्पर व्यापी वर्गान्तर होते है। उदाहरण 10 व 11 में अपवर्जी तथा समावेशी आवृत्ति बंटनों के उदाहरण दिये गए है।

उदाहरण 11

समावेशी आवृत्ति बंटन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या
0–9	15
10–19	25
20–29	30
30–39	20
40–49	10
योग	100

उदाहरण 10 में दिखाये गए अपवर्जी बंटन में, प्रथम वर्गान्तर की ऊपरि सीमा (अर्थात् 10) इस वर्गान्तर से अपवर्जित की जाएगी तथा अगले वर्गान्तर (अर्थात् 10–20) में सम्मिलित की जाएगी। अत: प्रथम वर्गान्तर को दिया जाने वाला अर्थ होगा 0 तथा 10 से नीचे, दूसरे वर्गान्तर का अर्थ 10 तथा 20 से नीचे होगा, तथा इसी प्रकार अन्य वर्गान्तरों का अर्थ होगा। किन्तु निदर्श चित्र 11 में दिखाये गए समावेशी बंटन में प्रथम वर्गान्तर (अर्थात् 0–9) की ऊपरि सीमा प्रथम वर्गान्तर में ही सम्मिलित की जाएगी। वास्तव में, एक वर्ग की अध: सीमा तथा ऊपरि सीमा, दोनों उसी वर्ग में सम्मिलित की जाती है।

वर्गान्तरों को प्रस्तुत करने की समावेशी रीति में उन मदों का वर्गीकरण सम्भव नहीं होता जिनके मूल्य दो लगातार वर्गान्तरों की ऊपरि सीमा तथा अध: सीमा के बीच हों। उदाहरण 11 में, 9.3, 9.5, 9.9, 19.1, 19.4 आदि मूल्य वाले मदों का किसी भी वर्ग में वर्गीकरण नहीं किया जा सकता। वर्गान्तरों को प्रस्तुत करने की अपवर्जी रीति में ऐसी कोई कठिनाई नहीं होती। अत: वर्गान्तर सामान्यत: अपवर्जी रूप में अभिव्यक्त किये जाते हैं। तथापि, अखण्डित चरों के लिए अपवर्जी रीति, तथा खण्डित चरों के लिए समावेशी रीति अपनाने की सामान्य प्रथा है।

9 **वर्ग परिसीमाएँ (Class boundaries) अथवा एक वर्गान्तर की वास्तविक सीमा**

अखण्डित चरों से सम्बन्धित माप सदा परिशुद्धता की एक समुचित मात्रा तक दर्ज किये जाते हैं। जब एक व्यक्ति की ऊँचाई 160 से. मी. दर्ज की जाती है, तो इसका अर्थ यह होता है कि उस व्यक्ति की ऊँचाई 159.5 से. मी. तथा 160.5 से. मी. के बीच कहीं भी हो सकती है। यदि केवल पूर्णसांख्यिक मूल्यों में दर्ज किये गए ऐसे समंक समावेशी वर्गान्तरों का प्रयोग करके वर्गीकृत किये जाएँ (जैसे 155–159, 160–164, 165–169 आदि), तब वर्ग 160–164 में वे सब व्यक्ति सम्मिलित किये जाएँगे जिनकी वास्तविकता ऊँचाई 159.5 से. मी. व 164.5 से. मी. के मध्य है। सीमाओं 159.5 तथा 164.5 को समावेशी वर्गान्तर 160–164 की अध: तथा ऊपरि वर्ग परिसीमाएँ अथवा वास्तविक सीमाएँ कहा जाता है। इस वर्गान्तर की अध:सीमा तथा ऊपरि सीमा तो केवल 160 तथा 164 है जिनका प्रयोग वर्गान्तर लिखने में किया जाता है। अत: किसी समावेशी वर्गान्तर की अध परिसीमा उसकी अध:सीमा से 0.5 कम, तथा ऊपरि परिसीमा उसकी ऊपरि सीमा से 0.5 अधिक होती है।

जब खण्डित रूप में दर्ज किये गए अखण्डित चर समावेशी प्रकार के वर्गान्तरों का प्रयोग करके वर्गीकृत किये जाते हैं, तब वर्ग सीमाओं को वास्तविक सीमाओं में परिवर्तित करना आवश्यक होता है। आपके सम्मुख ऐसी परिस्थितियाँ इकाई 11 व 12 में आएँगी। जब समंकों के विश्लेषण का विवेचन किया जाएगा।

10 **संचयी आवृत्ति बंटन (Cumulative frequency districtions)**: संचयी आवृत्ति बंटन विभिन्न वर्गों के लिए उनकी वास्तविक आवृत्तियों को नहीं दिखाता, बल्कि उनकी संचयी

आवृत्तियों को दिखाता है। प्रथम वर्गान्तर की संचयी आवृत्ति वही होती है, जो कि उसकी वास्तविक आवृत्ति है। दूसरे वर्गान्तर की संचयी आवृत्ति, प्रथम वर्गान्तर की आवृत्ति तथा दूसरे वर्गान्तर की आवृत्ति का योग करके प्राप्त की जाती है। इसी प्रकार अन्य विभिन्न वर्गान्तरों की संचयी आवृत्तियों का निश्चय किया जाता है। उदाहरण 12 को ध्यानपूर्वक देखिए और अध्ययन कीजिए कि आवृत्ति बंटन को किस प्रकार संचयी आवृत्ति बंटन में रूपान्तरित किया जाता है।

उदाहरण 12

संचयी आवृत्ति बंटन का परिकलन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)	संचयी आवृत्ति
0–10	15	15
10–20	25	25 + 15 = 40
20–30	30	30 + 40 = 70
30–40	20	20 + 70 = 90
40-50	10	10 + 90 = 100

एक संचयी आवृत्ति बंटन को उदाहरण 13 में दिखाए गए रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 13

संचयी आवृत्ति बंटन प्रस्तुतीकरण

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या (संचयी आवृत्ति)
10 से कम	15
20 से कम	40
30 से कम	70
40 से कम	90
50 से कम	100

संचयी आवृत्ति बंटन 'से कम' (less than) संचयी आवृत्ति बंटन या 'से अधिक' (more than) संचयी आवृत्ति बंटन हो सकता है। निदर्श चित्र 13 में प्रस्तुत आवृत्ति बंटन 'से कम' संचयी आवृत्ति बंटन का एक उदाहरण है। इस प्रकार के आवृत्ति बंटन में आवृत्तियाँ आरोही क्रम में होती है।

"से अधिक" संचयी आवृत्ति बंटन में अन्तिम वर्गान्तर की आवृत्ति को उस वर्गान्तर की संचयी आवृत्ति के रूप में लिया जाता है। अन्तिम वर्गान्तर के पहले वाले वर्गान्तर की सचयी आवृत्ति उस वर्गान्तर की आवृत्ति को अगले वर्गान्तर की संचयी आवृत्ति में जोड़कर, प्राप्त की जाती है। "से अधिक" प्रकार के संचयी आवृत्ति बंटन में आवृत्तियाँ अवरोही क्रम में होती है। उदाहरण 14 को ध्यानपूर्वक देखिए तथा अध्ययन कीजिए कि "से अधिक" संचयी आवृत्ति बंटन का परिकलन किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण 14

'से अधिक' आवृत्ति का परिकलन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)	सचयी आवृत्ति
0–10	15	15+85 = 100
10–20	25	25+60 = 85
20–30	30	30+30 = 60
30–40	20	20+10 = 30
40–50	10	+ = 10

"से अधिक" आवृत्ति बंटन को उदाहरण 15 के अनुसार भी व्यक्त किया जा सकता है।

उदाहरण 15

'से अधिक' आवृत्ति का परिकलन

सांख्यिकी में अंक	विद्यार्थियों की संख्या (संचयी आवृत्ति)
0 से अधिक	100
10 से अधिक	85
20 से अधिक	60
30 से अधिक	30
40 से अधिक	10
50 से अधिक	0

आपको यह ध्यान देना चाहिए कि "से कम" संचयी आवृत्तियाँ वर्गान्तरों की ऊपरि सीमाओं से संबंधित होती है, तथा "से अधिक" संचयी आवृत्तियाँ वर्गान्तरों की अध सीमाओं से सम्बन्धित होती हैं।

बोध प्रश्न ख

1 एक अखण्डित चर तथा एक खण्डित चर में अन्तर बताइए।

....

....

....

....

2 एक वर्गान्तर का वर्गविस्तार क्या होता है ?

....

....

....

....

3 एक वर्गान्तर का मध्य बिन्दु क्या होता है ?

....

....

....

....

4 एक वर्गान्तर की आवृत्ति क्या होती है ?

....

....

....

....

5 खुले सिरे वाला बंटन क्या होता है ?

....

....

....

6 अपवर्जी तथा समावेशी आवृत्ति बंटनों में अन्तर कीजिए।

....

....

....

7 "से कम" संचयी आवृत्ति बंटन तथा "से अधिक" संचयी आवृत्ति बंटन में अन्तर बताइए।

....

....

....

8 नीचे दिये गए कथन सत्य हैं अथवा असत्य, बताइए।

i) एक खण्डित चर की माप की जा सकती है। ....

ii) एक खण्डित चर का मूल्य भिन्न में होता है। ....

iii) एक अखण्डित चर का मूल्य भिन्न में हो सकता है। ....

iv) किसी वर्ग में न्यूनतम सम्भव माप को उस वर्ग की ऊपरि सीमा के रूप में जाना जाता है। ....

v) किसी वर्ग का वर्गविस्तार उस वर्ग की ऊपरि सीमा और अधःसीमा का अन्तर होता है। ....

vi) किसी वर्ग की सीमाओं में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या को उस वर्ग की आवृत्ति कहा जाता है। ....

vii) एक वर्गान्तर का मध्य मूल्य उस वर्गान्तर की अधःसीमा तथा ऊपरि सीमा के आधे बीच में होता है। ....

viii) एक वर्गान्तर में वर्गों की संख्या बड़ी या छोटी हो सकती है। ....

ix) खुले सिरे वाले बंटन में मध्यबिन्दु का परिकलन करने में समस्या होती है। ....

x) "से अधिक" संचयी आवृत्ति बंटन में आवृत्तियाँ आरोही क्रम में होती हैं। ....

9 कोष्ठकों में दिये गए शब्दों में से उपयुक्त शब्द चुनिए तथा रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए।

i) अखण्डित चर .... का परिणाम होता है। (गणना/परिमापन)

ii) एक कक्षा में विद्यार्थियों की ऊँचाई .... चर का एक उदाहरण है। (खण्डित/अखण्डित)

iii) एक क्रिकेट मैच में बनाई गई दौड़ों की संख्या .... चर का उदाहरण है। (खण्डित/अखण्डित)

iv) यह सदा आवश्यक नहीं है कि विभिन्न वर्गों का वर्ग-विस्तार .... हो। (समान/असमान)

v) एक खुले सिरे वाले आवृत्ति बंटन में प्रथम वर्गान्तर की .... वर्ग सीमा/वर्ग सीमाएँ नहीं होती। (एक/दो)

vi) एक समावेशी आवृत्ति बंटन में, वर्ग सीमाएँ .... होती हैं। (परस्पर व्यापी/अपरस्परव्यापी)

vii) समावेशी आवृत्ति बंटन में एक वर्ग की ऊपरि सीमा उस वर्ग में .... की जाती है। (समाविष्ट/अपवर्जित)

viii) "से कम" संचयी आवृत्ति बंटन की संचयी आवृत्तियाँ .... क्रय में होती है। (आरोही/अवरोही)

6.6 आवृत्ति बंटन की रचना

आपने आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित विभिन्न पदों का अध्ययन कर लिया है। आइए अब हम आवृत्ति बंटन के निर्माण से सम्बन्धित क्रियाविधि का ब्यौरेवार अध्ययन करें।

6.6.1 समंकों का क्रम विन्यास (Data Array)

आवृत्ति बंटन के निर्माण की प्रक्रिया में समंकों का क्रमविन्यास पहला कदम है। समंकों को आरोही क्रम अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना समंकों का क्रमविन्यास कहलाता है। समंकों का क्रमविन्यास इसलिए उपयोगी है, क्योंकि यह हमें समंकों के सीमान्तर के विषय में सूचना प्रदान करता है, तथा समंकों की प्रकृति पर कुछ प्रकाश डालता है। किन्तु समंकों का क्रमविन्यास तभी बहुत उपयोगी होता है जबकि प्रेक्षकों की संख्या बहुत बड़ी न हो। बहुत बड़ी संख्या में प्रेक्षण होने की स्थिति में समंकों के सीमान्तर बहुत दु:साध्य हो जाएंगे। उदाहरण 16 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए तथा समझने का प्रयत्न कीजिए कि समंकों का क्रमविन्यास कैसे तैयार किया जाता है।

उदाहरण 16

एक कक्षा में विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी में प्राप्त अंकों से सम्बन्धित आँकड़ों का क्रमविन्यास कीजिए।

17, 21, 9, 26, 17, 10, 9, 26, 44, 18,
27, 28, 23, 35, 45, 36, 20, 13, 39, 29
30, 35, 29, 39, 41, 48, 40, 43, 33, 48
39, 15, 16, 47, 31, 49, 46, 48, 36, 14

हल :

एक कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी में प्राप्त अंकों को आरोही क्रम में निम्न प्रकार से प्रस्तुत किया जा सकता है:

9	14	17	23	28	31	36	39	44	48
9	15	18	26	29	33	36	40	45	48
10	16	20	26	29	35	39	41	46	48
13	17	21	27	30	35	39	43	47	49

उदाहरण 16 में दिये गए समंक क्रमविन्यास से हम विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी में प्राप्त अधिकतम व न्यूनतम अंकों के विषय में भलीभांति जान सकते हैं।

6.6.2 आवृत्ति-बंटन की रचना के चरण

जैसा कि पहले बताया गया है, जब प्रेक्षणों की संख्या बहुत बड़ी होती है, तो समंक-क्रमविन्यास दु:साध्य हो जाता है। ऐसी स्थितियों में समंकों के आकार को संघनित करने के लिए आवृत्ति बंटन का निर्माण किया जाता है। एक आवृत्ति बंटन का निर्माण करने से पूर्व निम्नलिखित कदम आवश्यक है।

i) वर्गसीमाओं की स्पष्टत: पहिचान करते हुए वर्गान्तरों का निर्माण।

ii) प्रत्येक मद ली जाती है तथा उपयुक्त वर्गान्तर के सम्मुख एक मिलान-दण्ड (Tally Bar) लगा दिया जाता है। मिलान-दण्ड एक उदग्र-दण्ड होता है। प्रत्येक मूल्य के लिये एक मिलान-दण्ड खींचा जाता है।

iii) जब चार मिलान दण्ड खींच लिये गये हो, तब पाँचवां दण्ड यहाँ दिखाई गई विधि के अनुसार आर-पार खींचा जाता है।

iv) समस्त प्रेक्षणों को उपयुक्त वर्गों के समुख रख दिये जाने के बाद, उनका योग किया जाता है तथा उसे विशेष वर्गान्तर की आवृत्ति के रूप में दर्ज कर दिया जाता है।

उदाहरण 17

16 में दिये गए समंकों के लिए एक आवृत्ति बंटन बनाइये। 0–10 को पहले वर्गान्तर के रूप में कीजिए।

हल:

पहले वर्गान्तर का आकार 10 है तथा सबसे बड़ी मद का मूल्य 49 है। समस्त वर्गान्तरों को बराबर लम्बाई को लेते हुए अन्य वर्गान्तर 10–20, 20–30, 30–40, 40–50 होंगे। आपको ध्यान देना चाहिए कि दिये हुए समंक खण्डित हैं किन्तु तब भी अपवर्जी वर्गान्तर लिये गए हैं जोकि उपयोग में सर्वाधिक सर्वसामान्य विधि है। वर्गान्तर 0–10 का अर्थ 0 तथा 10 से कम है। अत: इसमें 0 से 9 तक के मूल्य वाली समस्त मदें सम्मिलित हैं। इसी प्रकार अन्य वर्गान्तरों में 10 से 19 तक के मूल्यों वाली, 20 से 29 तक के मूल्यों वाली, आदि मदें सम्मिलित होंगी।

सांख्यिकी में प्राप्त अंकों का आवृत्ति बंटन

सांख्यिकी में अंक	मिलान-दण्ड	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)
0–10	II	2
10–20	~~IIII~~ III	8
20–30	~~IIII~~ IIII	9
30–40	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
40–50	~~IIII~~ ~~IIII~~ I	11
योग		40

उदाहरण 18

एक टाइपिस्ट द्वारा एक पृष्ठ पर की गई टाइप की गलतियों की संख्या से सम्बन्धित नीचे दिये गए समंकों से एक खण्डित आवृत्ति बंटन बनाइए।

0, 0, 2, 1, 3, 0, 4, 2, 0, 4, 3, 3,

1, 2, 0, 3, 2, 3, 3, 1, 2, 1, 3, 4, 2

हल:

प्रतिपृष्ठ की गई गलतियों की सबसे छोटी संख्या 0 है, तथा सबसे बड़ी संख्या 4 है। हमें खण्डित आवृत्ति बंटन बनाना है, अत: गलतियों की संख्या 0, 1, 2, 3, और 4 के रूप में ली जाएगी।

खण्डित आवृत्ति बंटन

प्रति पृष्ठ गलतियों की संख्या	मिलान-दण्ड	पृष्ठों की संख्या (आवृत्ति)
0	~~IIII~~	5
1	IIII	4
2	~~IIII~~ I	6
3	~~IIII~~ II	7
4	III	3
योग		25

6.6.3 वर्गान्तरों के चुनाव के लिए मार्गदर्शक नियम

यदि वर्गान्तर नहीं दिये गए हैं तो उनकी संख्या और चौड़ाई का निश्चय निम्नलिखित मार्गदर्शक नियमों के आधार पर किया जा सकता है।

i) समंकों की सबसे छोटी तथा सबसे बड़ी मद का पता लगाइये। उनका अन्तर निकालिए। यह समंकों का सीमान्तर प्रदान करता है।

ii) मदों की संख्या की गिनती कीजिए, तथा स्टर्जिज के नियम अथवा सुविधानुसार वर्गों की संख्या 'K' का निश्चय कीजिए।

iii) सीमान्तर को वर्गों की संख्या 'K' से विभाजित कीजिये। भागफल को 'C' कह सकते हैं। यह मूल्य 'C' वर्गान्तरों की चौड़ाई के विषय में निश्चय करने का आधार होगा।

iv) सामान्यत:, समस्त वर्गान्तरों की चौड़ाई समान होनी चाहिये तथा वर्गान्तर की समाएँ एक पूर्णांक होनी चाहिए। जैसे 5 या 10 का एक गुणज। अत: वर्गान्तरों की दो सम्भव सीमाएँ, (i) एक पूर्णांक जोकि 'C' से एकदम कम है, लघुतम सीमा होगी, तथा 'C' से एकदम अधिक एक पूर्णांक ऊपरि सीमा होगा।

v) प्रथम वर्गान्तर का आरम्भिक बिन्दु एक पूर्णांक को लिया जाना चाहिये, जोकि लघुतम् मद से एकदम कम हो, अथवा यदि समंकों की लघुतम् मद स्वयं एक पूर्णांक है, तो उसके बराबर हो।

vi) अब ऊपर दिये गए पद के अन्तर्गत निश्चित किये गए **आरम्भिक** बिन्दु को लेते हुए, पद iv) के अन्तर्गत निश्चय किये गए "i" के उपयुक्त मूल्यों की सहायता से वर्गान्तर के पूर्ण कुलकों को लिखिये। इन कुलकों में से वह कुलक जिसमें वर्गान्तरों की संख्या 'K' है। एक आर्दश कुलक माना जाएगा। यदि किसी भी कुलक में 'K' वर्गान्तर नहीं है, तो वह कुलक, जिसमें "K – 2' से K + 2 संख्याओं के बीच वर्गान्तरों की संख्या है, चुना जाता है।

उदाहरण 19

एक कक्षा के विद्यार्थियों के भार (किलोग्राम में) से सम्बन्धित निम्नलिखित समंकों से समावेशी रीति द्वारा एक आवृत्ति बंटन बनाइए।

42	47	48	50	41	61	57	52	57
47	41	59	60	63	42	44	45	46
57	47	57	53	48	47	56	61	56
62	49	58	52	55	42	42	56	51
43	48	51	54	52	60	62	63	61

हल:
वर्गान्तरों की संख्या नहीं दी गई है, अत: आइये हम पहले वर्गान्तरों की संख्या का निश्चय करें।

i) न्यूनतम भार 41 कि. ग्रा. है, तथा अधिकतम् भार 63 कि. ग्रा. है। अत: सीमान्तर 22 है।

ii) मदों की संख्या 45 है। अत: स्टर्जिज के नियम के अनुसार वर्गान्तरों की संख्या निम्न प्रकार से परिकलित की जा सकती है:

$K = 1 + 3.3 \log 45$
$= 1 + 3.3 \times 1.65$
$= 6.4$
$= 7$ (उपसादित)

iii) वर्गान्तर की सम्भव चौड़ाई होगी

C = सीमान्तर /K
$= 22/7$
$= 3.1$

iv) 3.1 से अधिक एक पूर्णांक 5 है, तथा 3.1 से कम पूर्णांक 0 है। अत: वर्गान्तर की लम्बाई 5 है। यहाँ हमारे पास "i" का केवल एक मूल्य है।

v) चूँकि लघुतम् मूल्य 41 है, अत; पहला वर्गान्तर 40 से आरम्भ होगा। अत: समावेशी प्रकार के 5 के माप वाले विभिन्न वर्गान्तर 40–41, 45–49, 50–54, 55–59 तथा 60–64 होंगे। यहाँ अन्तिम वर्गान्तर 60–64 है चूँकि सबसे बड़ी मद 63 है।

vi) इस कुलक में वर्गान्तरों की संख्या 5 है। यह इसकी आदर्श संख्या "K" के बराबर नहीं है, किन्तु यह K–2 से K + 2 (अर्थात् 5 से 9) की सीमाओं के भीतर है। अत: हम आवृत्ति बंटन बनाने का कार्य कर सकते हैं।

आवृत्ति बंटन (समावेशी विधि द्वारा)

भार (कि. ग्रा. में)	मिलान-दण्ड	विद्यार्थियों की संख्या (आवृत्ति)
40–44	~~IIII~~ III	8
45–49	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
50–54	~~IIII~~ III	8
55–59	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
60–64	~~IIII~~ IIII	9
योग		45

उदाहरण 20

20 विद्यार्थियों के आन्तरिक मूल्यांकन के आधार पर प्राप्त अंकों (x) तथा अन्तिम परीक्षा में प्रतिशतता (y) से सम्बन्धित निम्नलिखित समंकों के लिए एक द्विचरीय आवृत्ति बंटन बनाइए।

X : 13 13 12 10 11 13 12 12 14 12 15 14 13 14 10 12 11 11 12 13

Y : 56 72 60 12 20 52 43 50 60 58 54 78 81 69 38 47 41 45 49 63

हल:

आन्तरिक मूल्यांकन में अंकों (x) के केवल 5 विभिन्न मूल्य, 10, 11, 12, 13 तथा 14 है। अत: इनमें से प्रत्येक को एक समूह का प्रतिनिधित्व करने के लिए लिया जाएगा। अन्तिम परीक्षा में अंकों की प्रतिशतता का न्यूनतम अंक 12 है तथा उच्चतम् अंक 81 है, जिससे 69 का सीमान्तर प्राप्त होता है। स्टर्जिज के नियम के अनुसार 20 मदों के लिए वर्गों की आदर्श संख्या 5 होगी। अत: प्रत्येक वर्ग की सम्भाव्य लम्बाई 69/5 या 14 होगी। पूर्णांकन के बाद इसे 15 माना जा सकता है। चूँकि न्यूनतम प्रतिशतता (y) 12 है, अत: प्रथम वर्गान्तर की अध: सीमा 10 ली जाएगी। अत: y के लिए विभिन्न वर्गान्तर 10–25, 25–40, 40–55, 55–70, तथा 70–85 होंगे। "x" चर को प्रथम् पंक्ति में, तथा y चर को प्रथम स्तम्भ में लिखने पर द्विचरीय बंटन की रूपरेखा निम्न प्रकार की होगी।

अंतिम परीक्षा में प्रतिशतता (y)	आन्तरिक मूल्यांकन के अक (x)					योग
	10	11	12	13	14	
10–25						
25–40						
40–55						
55–70						
70–85						
योग						

अब द्विचरीय आवृत्ति बंटन बनाने के लिए, आवृत्तियों की संख्या का निश्चय "x" तथा "y" के संगत मूल्यों को आबंटित करके तथा मिलान-दण्ड खींचकर किया जाएगा। "x" तथा "y" के संगत मूल्यों के प्रथम् कुलक में 10 तथा 12 के मूल्य हैं। अत: कोष्ठ में, जिसके स्तम्भ को 10 से भरा गया है, तथा जिसकी पंक्ति का शीर्षक 10-य है, एक मिलान-दण्ड खींचा जाएगा। इसी प्रकार अन्य कोष्ठों के लिए मिलान-दण्ड खींचे जाएँगे। विभिन्न कोष्ठकों को समस्त मूल्यों के आबंटन किये जाने तथा सम्बन्धित मिलान-दण्डों के खींचे जाने के बाद, अपेक्षित द्विचरीय आवृत्ति बंटन निम्न प्रकार का होगा।

द्विचरीय आवृत्ति बंटन

अन्तिम परीक्षा में प्रतिशतता (y)	आन्तरिक मूल्यांकन में अंक (x)					योग
	10	11	12	13	14	
10–25	1 (1)	1 (1)				2
25–40	1 (1)					1
40–55		11 (2)	IIII (4)	11 (2)	II	8
55–70			11(2)	11 (2)	11 (2)	6
70–85				11 (2)	1 (1)	3
योग	2	3	6	6	3	20

बोध प्रश्न ग

1 समंक क्रमविन्यास क्या होता है ?

....
....
....
....

2 एक आवृत्ति बंटन के निर्माण में कौन-कौन से कदम होते हैं ?

....
....
....
....

3 निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य बताइए।

i) आरोही क्रम अथवा अवरोही क्रम में समंकों की क्रमबद्ध व्यवस्था को समंकों का क्रमविन्यास कहते हैं। ....

ii) समंकों के क्रमविन्यास से समंकों के सीमान्तर के विषय में कोई सूचना नहीं मिलती। ....

iii) जब प्रेक्षणों की संख्या बहुत बड़ी हो, तो, समंक-क्रमविन्यास बहुत उपयोगी होता है। ....

iv) एक आवृत्ति बंटन से समंकों को संघनित करने में सहायता मिलती है। ....

v) उपयुक्त वर्गान्तर के सम्मुख रखा गया उदग्र दण्ड मिलान दण्ड कहलाता है। ....

vi) एक द्वार से गिनती में सहायता मिलती है। ....

6.7 सारांश

वर्गीकरण का अर्थ समंकों को समानताओं तथा साम्यताओं के आधार पर विभिन्न वर्गों में व्यवस्थित करना है। यह दु:साध्य समंकों को संक्षिप्त तथा सरल रीति से प्रस्तुत करने में सहायक होता है। वर्गीकरण हमें सारणीयन तथा विश्लेषण का एक आधार प्रदान करता है,

तथा समंकों की सम्भव विशेषताओं को पहचानने में सहायक होता है। वर्गीकरण गुणों के आधार पर अथवा चरों के आधार पर किया जा सकता है। गुणों के अनुसार वर्गीकरण समंकों की गुणात्मक विशेषताओं पर आधारित होता है। सरल वर्गीकरण एक गुण के आधार पर किया जाता है, जबकि बहुगुणीय वर्गीकरण एक से अधिक गुणों के आधार पर किया जाता है। चरों के आधार पर वर्गीकरण समंकों की परिमाणन योग्य विशेषताओं के आधार पर किया जाता है। एक आवृत्ति बंटन एक चरीय, द्विचरीय अथवा बहुचरीय हो सकता है। आवृत्ति बंटन से सम्बन्धित बहुत से पद हैं। एक खण्डित चर का एकाकी मूल्य होता है, जबकि एक अखण्डित चर का मूल्यों के एक विशिष्ठ सीमान्तर (खुले सिरे वाले के अतिरिक्त) के अन्दर कोई भी भिन्नात्मक मूल्य हो सकता है। खुलें सिरे वाले वर्गान्तरों के अतिरिक्त प्रत्येक वर्गान्तर की दो सीमाएँ होती हैं: (i) अध:सीमा तथा (ii) ऊपरि सीमा। एक वर्ग का मध्यबिन्दु उसकी दो सीमाओं के आधे बीच में होता है। एक वर्गान्तर के वर्गविस्तार का अर्थ उसकी दो सीमाओं के बीच का अन्तर होता है। एक वर्ग की आवृत्ति से तात्पर्य उस वर्ग की सीमाओं में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या होता है।

एक बंटन में वर्गों की संख्या वैज्ञानिक आधार पर निश्चित की जा सकती है। वर्गों की संख्या का निश्चय करते समय वर्गों की चौड़ाई के विषय में भी निर्णय लिया जाना चाहिये। प्रथम वर्ग की अध:सीमा तथा अन्तिम वर्ग की ऊपरि सीमा का अभाव खुले सिरे वाले वर्गान्तर का द्योतक है। अपवर्जी वर्गान्तर में, एक वर्गान्तर की ऊपरि सीमा उस वर्गान्तर से अपवर्जित की जाती है तथा अगले वर्गान्तर की अध:सीमा के रूप में ली जाती है। एक समावेशी वर्गान्तर में, एक वर्ग की ऊपरि सीमा भी उसी वर्ग में समाविष्ट की जाती है। एक अपवर्जी वर्ग में सीमाएँ परस्पर व्यापी होती हैं जबकि एक समावेशी वर्ग में वे गैर-परस्पर व्यापी होती हैं। एक संचयी आवृत्ति बंटन में, वर्ग संचयी आवृत्तियों को व्यक्त करते हैं। ये "से कम" अथवा "से अधिक" संचयी आवृत्ति बंटन हो सकते हैं। समंक-क्रमविन्यास समंकों की आरोही क्रम में अथवा अवरोही क्रम में एक क्रमबद्ध व्यवस्था है। यह समंकों के समान्तर तथा उनकी विशेषताओं के विषय में सूचना प्रदान करता है। एक आवृत्ति बंटन समंकों के आकार सघनित करने के लिए बनाया जाता है।

6.8 शब्दावली

गुण: तथ्यों की एक गुणात्मक विशेषता की अभिव्यक्ति।

द्विचरीय: दो चरों वाला।

वर्गीकरण: समानताओं और साम्यताओं के आधार पर समंकों का विभाजन।

वर्गसीमाएँ: एक वर्गान्तर की अध:सीमा तथा ऊपरि सीमा।

अखण्डित चर: एक ऐसा चर जो मूल्यों के निश्चित सीमान्तर के बीच कोई भी भिन्नात्मक मूल्य ग्रहण कर सकता है।

संचयी आवृत्ति बंटन: एक ऐसा बंटन जो वास्तविक आवृत्तियों के स्थान पर संचयी आवृत्तियाँ दर्शाता है।

समंक-क्रमविन्यास: समंकों की आरोही क्रम अथवा अवरोही क्रम में क्रमबद्ध व्यवस्था।

खण्डित चर: एक ऐसा चर जिसका कोई भी एकाकी मूल्य हो सकता है।

अपवर्जी वर्ग: एक ऐसा वर्ग जिसकी ऊपरि सीमा उस वर्ग से अपवर्जित की जाती है। तथा उसके अगले वर्ग में अध:सीमा के रूप में समाविष्ट की जाती है।

आवृत्ति: एक विशेष वर्ग में आने वाले प्रेक्षणों की संख्या।

समावेशी वर्ग: एक ऐसा वर्ग जिसकी अध:सीमा तथा ऊपरि सीमा दोनों उसी वर्ग में समाविष्ट की जाती है।

"से कम-बंटन": एक ऐसा आवृत्ति बंटन जो संचयी आवृत्तियों को आरोही क्रम में दर्शाता है.

एक वर्ग का विस्तार: एक वर्ग की ऊपरि सीमा तथा अध:सीमा के बीच का अन्तर।

मध्यबिन्दु: वह बिन्दु जो अध:सीमा व ऊपरि सीमा के बिल्कुल मध्य में स्थित होता है।

"से अधिक" बंटन: एक ऐसा आवृत्ति बंटन जिसमें संचयी आवृत्तियाँ अवरोही क्रम में हो।

बहुचरीय: बहुत से चरों वाला।

खुले सिरे वाला बंटन: एक ऐसा बंटन जिसमें एक वर्ग का सिरा खुला होता है (बन्द नहीं होता)।

मिलान दण्ड: एक प्रेक्षण का प्रतिनिधित्व करने वाला उदग्र-दण्ड जो कि समुचित वर्ग के सम्मुख रखा जाता है।

एक चरीय: एक चर वाला।

चर: इसका तात्पर्य समंकों की अनुमान्य विशेषता से है।

6.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 6 i) सत्य, ii) सत्य, iii) असत्य, iv) असत्य, v) सत्य, vi) सत्य

7 i) गुणात्मक, ii) चर, iii) गुणात्मक विशेषता, iv) एकचरीय, v) बहुचरीय

ख 8 i) असत्य, ii) असत्य, iii) सत्य, iv) असत्य, v) सत्य, vi) सत्य, vii) सत्य, viii) असत्य, ix) सत्य, x) असत्य

9 i) परिमापन, ii) अखण्डित, iii) अखण्डित, iv) समान, v) एक, vi) परस्पर व्यापी, vii) समाविष्ट, viii) आरोही

ग 3 i) सत्य, ii) असत्य, iii) असत्य, iv) सत्य, v) सत्य, vi) सत्य

6.10 स्वपरख प्रश्न अभ्यास

प्रश्न

1 वर्गीकरण के अर्थ तथा उद्देश्यों की व्याख्या कीजिए। साथ ही वर्गीकरण की विभिन्न विधियों का विवेचन कीजिए।

2 निम्नलिखित में से प्रत्येक पर एक संक्षिप्त टिप्पणी लिखिए।

i) खण्डित चर
ii) वर्ग सीमाएँ
iii) एक वर्ग का मध्य बिन्दु
iv) एक बंटन में वर्गों की संख्या
v) खुले सिरे वाला बंटन
vi) संचयी आवृत्ति बंटन
vii) समंक क्रमविन्यास

अभ्यास

1 निम्नलिखित समंकों का आरोही क्रम में क्रमविन्यास कीजिए।

3 19 27 25 23 21 19 17 15 13 11 9 10 26 34
32 30 28 26 24 22 20 18 16 15 31 29 27 25 13
23 21 19 17 15 11 18 28 26 24 22 20 18
16 14 12 10 8

2 निम्नलिखित समंकों का अवरोही क्रम में क्रमविन्यास कीजिए।

51	28	29	75	33	25	73	67	67	27	61	55
48	81	66	45	37	61	55	47	39	53	61	53
34	49	49	55	36	54	47	73	21	44	36	61
37	35	29	61								

3 बी. काम. द्वितीय वर्ष के विद्यार्थियों के द्वारा लेखों में प्राप्त अंक नीचे दिये गए हैं। प्रथम वर्गान्तर 0–19 लेते हुए समावेशी रीति द्वारा एक आवृत्ति बंटन बनाइए।

55	33	35	5	23	37	73	75	87	29	97	80	66	53
87	71	4	25	93	66	47	93	81	29	58	66	59	62
29	61	21	37	46	27	42	71	52	78	27	47	16	49
91	9	38	7	11	61								

4 निम्नलिखित समंकों के लिए अपवर्जी रीति द्वारा एक आवृत्ति बंटन बनाइए।

2	18	25	16	21	21	16	15	12	13	11	9	9	25
28	34	28	28	22	24	20	18	18	14	14	30	27	25
23	21	19	15	11	6	9	16	27	15	22	20	17	18
13	14	10	10	7									

5 एक फुटबॉल टीम द्वारा विभिन्न मैचों में किये गए गोलों से सम्बन्धित निम्नलिखित समंकों के लिए एक आवृत्ति बंटन बनाइए।

0	2	4	1	3	0	3	2	3	0	0	1	5	2	0
3	3	4	2	1	1	3	1	3	2	1	0	1	3	1
2	1	2	1	2	2	0	1	2	1	0	2	1	0	2

6 मासिक वेतन तथा कर्मचारियों की संख्या से सम्बन्धित निम्नलिखित समंकों के लिए "से कम" संचयी आवृत्ति बंटन बनाइये।

मजदूरी (रु. में):	450–475	475–500	500–525	525–550	550–575	575–600
कर्मचारियों की संख्या:	30	45	60	40	15	10

7 निम्नलिखित समंकों के लिए "से अधिक" संचयी आवृत्ति बंटन बनाइये।

अंक:	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
विद्यार्थियों की संख्या:	12	17	31	40	28	22	12	8

टिप्पणीः ये प्रश्न और अभ्यास इस इकाई को अधिक अच्छी तरह समझने में आपकी सहायता करेंगे। उनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। किन्तु अपने उत्तर विश्वविद्यालय को न भेजें। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 7 सारणिक प्रस्तुतीकरण

इकाई की रूपरेखा

7.0 उद्देश्य
7.1 प्रस्तावना
7.2 सारणीयन का अर्थ
7.3 सारणीयन के उद्देश्य
7.4 वर्गीकरण एवं सारणीयन में अंतर
7.5 सारणियों के प्रकार
7.5.1 सूचनात्मक या वर्गीकरण करने वाली सारणियाँ
7.5.2 सामान्य उद्देश्य वाली या संदर्भ सारणियाँ
7.5.3 विशेष उद्देश्य वाली या सारांश सारणियाँ
7.6 सांख्यिकीय सारणि की संरचना
7.6.1 सांख्यिकीय सारणी के मुख्य अंग
7.6.2 एक अच्छी सांख्यिकीय सारणी के आवश्यक गुण
7.6.3 सांख्यिकीय सारणी की रचना
7.7 सारांश
7.8 शब्दावली
7.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
7.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

7.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि:

- सारणीयन के अर्थ एवं उद्देश्यों का वर्णन कर सकें
- एक सांख्यिकीय सारणी के अंगों की सूची बना सकें
- एक अच्छी सांख्यिकीय सारणी के आवश्यक तत्वों का संक्षिप्त वर्णन कर सकें
- सांख्यिकीय सारणी बना सकें।

7.1 प्रस्तावना

इकाई 6 के अंतर्गत हमने समंकों के वर्गीकरण के उद्देश्यों की चर्चा की थी, जिसके फलस्वरूप समंकों में तुलना का कार्य सरल हो जाता है। साथ ही एक या दो चरों वाले आवृत्ति बंटन को बनाने की विधि का भी उल्लेख किया था। जब दो चर-मूल्यों को विभिन्न स्तम्भों (columns) एवं पंक्तियों (rows) द्वारा क्रमबद्ध एवं सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत किया जाता है तो यह प्रस्तुतीकरण सांख्यिकीय सारणी (statistical table) कहलाता है। गुणात्मक विशेषताओं से संबंधित समंकों के प्रदर्शन के लिए भी ऐसी सारणी बनाई जा सकती है। इस इकाई में हम सारणीयन (tabulation) के अर्थ एवं उद्देश्यों की विस्तार में चर्चा करेंगे तथा सांख्यिकी सारणियों के तैयार करने की प्रक्रिया पर भी प्रकाश डालेंगे।

7.2 सारणीयन का अर्थ

समंकों की प्रस्तुति की अनेक विधियाँ होती हैं जैसे सारणिक प्रस्तुति (tabular presentation), आरेखीय प्रस्तुति (diagrammatic presentation) तथा रेखाचित्रीय प्रस्तुति (graphic presentation)। सारणिक प्रस्तुति से आशय संकलित समंकों के स्तम्भों (columns) एवं पंक्तियों (rows) में क्रमबद्ध प्रस्तुतीकरण है। समंकों की क्षैतिज व्यवस्था को पंक्ति कहते हैं

और उदग्र व्यवस्था को स्तम्भ कहते हैं। वर्गीकृत तथ्यों को सारणी का स्वरूप देने के लिए पंक्तियों तथा स्तम्भों में दर्ज किया जाता है।

7.3 सारणीयन के उद्देश्य

सारणीयन के मुख्य उद्देश्य निम्नलिखित हैं:

1 **समंकों की व्यवस्थित प्रस्तुति**: प्रारम्भ में संकलित समंक प्राय: अखंडित एवं अव्यवस्थित सारणी द्वारा संक्षिप्त एवं सरल रूप में प्रस्तुत किया जाता है। अत: सारणीयन समंकों को क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत करने में सहायक होता है।

2 **तुलना की सुविधा**: यदि समंक अपरिष्कृत (अव्यवस्थित) रूप में हों तो उनकी तुलना करना कठिन होता है। तुलना करना तभी संभव होता है जबकि समंकों की संबंधित मदों को सरल एवं संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत किया जाए। जटिल एवं अव्यवस्थित समंकों को सारणियों द्वारा प्रस्तुत करने से उनके विभिन्न पहलुओं में तुलना करने का कार्य सरल हो जाता है।

3 **वांछित मूल्यों की पहचान**: सारणीयन में समंकों को स्तम्भों एवं पंक्तियों द्वारा क्रमबद्ध रूप में प्रस्तुत किया जाता है। अत: वांछित मूल्यों को पहचानने में कोई समस्या नहीं होती। हाँ, यदि समंक सारणी द्वारा प्रस्तुत नहीं होते तो आवश्यक मूल्यों को पहचानने में कठिनाई होती है।

4 **विश्लेषण का आधार प्रदान करना**: यदि समंक सारणी द्वारा प्रस्तुत किए जाते हैं तो उससे उनके विश्लेषण का कार्य सरल हो जाता है। सांख्यिकीय कार्यपद्धति के अनुसार समंकों के विश्लेषण का कार्य समंकों के सुव्यवस्थित प्रदर्शन के बाद ही आरम्भ होता है। अत: समंकों का सुव्यवस्थित ढंग से सारणी द्वारा प्रस्तुतीकरण, उनके विश्लेषण की प्रथम आवश्यकता है। संक्षेप में सांख्यिकीय सारणियाँ विश्लेषण कार्य में बड़ी उपयोगी सिद्ध होती हैं।

5 **समंकों की प्रवृत्ति दर्शाना**: यदि समंकों को संक्षिप्त रूप में एक स्थान पर सारणी द्वारा प्रस्तुत किया जाए तो इससे उनकी उपनति या प्रवृत्ति का पता चलता है। केवल सांख्यिकीय सारणी को देखने मात्र से यह पता चल जाता है कि समंकों की उपनति किस ओर है।

7.4 वर्गीकरण एवं सारणीयन में अंतर

कुछ लोगों का विचार है कि वर्गीकरण एवं सारणीयन एक-दूसरे के पर्यायवाची हैं। दोनों के अर्थ एवं उद्देश्य एक जैसे प्रतीत होते हैं, फिर भी इनमें अंतर है। **वर्गीकरण में समंकों को समानता एवं साम्यता के आधार पर विभिन्न वर्गों में बाँटा जाता है, जबकि सारणीयन वर्गीकृत तथ्यों को स्तम्भों एवं पंक्तियों में दर्ज करने की प्रक्रिया है।** यहाँ पर यह दोनों एक ही जंजीर की दो कड़ियाँ हैं।

सारणीयन का कार्य, वर्गीकरण के बाद आरम्भ होता है। (समंकों को पहले वर्गीकृत किया जाता है, उसके बाद सारणी के रूप में प्रस्तुत किया जाता है)। वास्तव में, वर्गीकरण ही सारणीयन को आधार प्रदान करता है। इकाई 6 में यह बताया गया है कि आवृत्ति बंटन विभिन्न मापों या वर्गान्तरों से संबंधित प्रेक्षणों की संख्याओं का सारणीबद्ध प्रदर्शन है। अत: समंकों को विभिन्न वर्गों में बांटने के उपरांत उन्हें सारणी के रूप में दिखाया जाना चाहिए।

7.5 सारणियों के प्रकार

प्रस्तुत किए जाने वाले समंकों के उपयोग एवं उद्देश्यों के अनुसार सांख्यिकीय सारणियों के

विभिन्न प्रकार हैं। उन्हें निम्न मुख्य शीर्षकों के अंतर्गत विभाजित किया जा सकता है:

1 सूचनात्मक वर्गीकरण करने वाली सारणियाँ
2 सामान्य उद्देश्य वाली या संदर्भ सारणियाँ
3 विशेष उद्देश्य वाली या सारांश सारणियाँ

7.5.1 सूचनात्मक या वर्गीकरण करने वाली सारणियाँ

संकलित तथ्यों की मुख्य विशेषताओं को दर्शाने के लिए ऐसी सारणियाँ तैयार की जाती हैं। इसके अंतर्गत सारणी की रचना, संकलित समंकों की समान विशेषताओं पर आधारित होती हैं। ऐसी सारणियाँ बनाने का मुख्य उद्देश्य समंकों को संघनित एवं सरल रूप में प्रस्तुत करना होता है। इन सारणियों को निम्न प्रकार से आगे भी वर्गीकृत किया जा सकता है: (i) सरल सारणियाँ, तथा (ii) जटिल सारणियाँ।

i) **सरल सारणियाँ (Simple table) :** इन्हें एक गुण प्रदर्शित करने वाली सारणियाँ भी कहा जाता है। इनकी रचना संकलित समंकों के केवल एक ही गुण या विशेषता के आधार पर की जाती है। किसी महाविद्यालय के विभिन्न वर्षों के विद्यार्थियों की संख्या को, यदि एक सारणी द्वारा प्रस्तुत किया जाए तो यह सरल या एक गुण वाली सारणी का एक उत्तम उदाहरण होगा। सरल सारणी को समझने के लिए उदाहरण 1 को देखिए।

उदाहरण 1

महाविद्यालय के विद्यार्थियों की संख्या

(1982–83 से 1988–89 तक)

वर्ष	विद्यार्थियों की संख्या
1982–83	1,500
1983–84	1,550
1984–85	1,600
1985–86	1,650
1986–87	1,600
1987–88	1,675
1988–89	1,700

उपरोक्त विद्यार्थियों को आयु के आधार पर भी विभाजित किया जा सकता है तथा प्रत्येक वर्ष के लिए अलग-अलग सरल सारणी बनाई जा सकती है।

ii) **जटिल सारणी (Complex table) :** जैसा कि आप जानते हैं सरल सारणियाँ समंकों के केवल एक ही गुण या विशेषता को प्रस्तुत करती हैं। किन्तु जब किसी सारणी द्वारा समंकों के एक से अधिक गुणों या विशेषताओं को प्रदर्षित किया जाता है तो वह जटिल सारणी कहलाती है। इसमें द्विगुणसारणी (twofold table) तैयार की जा सकती है, जिसमें समंकों को दो विशेषताओं के आधार पर प्रस्तुत किया जाता है अथवा वह बहुगुण सारणी (manifold table) भी बनाई जा सकती है जिसमें समंकों के अनेक गुणों को एक साथ प्रस्तुत किया जाता है।

एक विश्वविद्यालय में विद्यार्थियों की संख्या को उनके लिंग तथा वैवाहिक स्थिति के आधार पर प्रदर्शित करने वाली सारणी जटिल सारणी का एक उदाहरण है। एक जटिल सारणी के उदाहरण के लिए उदाहरण 2 का अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 2

विश्वविद्यालय के विद्यार्थियों की संख्या लिंग एवं वैवाहिक स्थिति के आधार पर

(1982–83 से 1988–89 तक)

वर्ष	विद्यार्थियों की संख्या				योग
	पुरुष		स्त्री		
	अविवाहित	विवाहित	अविवाहित	विवाहित	
1982–83	950	50	475	25	1,500
1983–84	975	55	490	30	1,550
1984–85	1,000	55	510	35	1,600
1985–86	1,035	60	520	35	1,650
1986–87	1,010	50	510	30	1,600
1987–88	1,080	50	510	35	1,675
1988–89	1,090	55	515	40	1,700
योग	7,140	375	3,530	230	11,275

7.5.2 सामान्य उद्देश्य वाली या संदर्भ सारणियाँ

ऐसी सारणियों का प्रयोग सूचनाओं को एक स्थान पर संग्रहित करने के लिए किया जाता है। इनमें, किसी विशेष विषय से संबंधित विस्तृत सूचनाएँ उपलब्ध होती हैं। ये सारणियाँ जटिल सारणियाँ जैसी होती हैं तथा प्रतिवेदनों में परिशिष्ट (appendix) के रूप में लगी होती है। ऐसी सारणियों की तैयारी व्यवस्थित ढंग से की जानी चाहिए जिससे कि आवश्यक संदर्भ सरलता से उपलब्ध हो सकें। जनगणना प्रतिवेदनों के साथ संलग्न विभिन्न सारणियाँ, ऐसी सारणियों का उपयुक्त उदाहरण हैं।

7.5.3 विशेष उद्देश्य वाली या सारांश सारणियाँ

ऐसी सारणियाँ समंकों के किसी विशिष्ट तथ्य को प्रभावशाली रूप में प्रस्तुत करती है तथा सांख्यिकीय विश्लेषण में सहायक होती है। इनमें पूछे गए प्रश्नों के विशिष्ट उत्तर दिए होते हैं, जिससे तुलना का कार्य सुविधाजनक हो जाता है। इन्हें, विषय सारणी (text tables) भी कहा जाता है क्योंकि ये किसी दिए गए विषय की पूरक होती हैं। ये सारणियाँ दरों, प्रतिशतताओं, माध्यों आदि को प्रदर्शित करती हैं। जैसे कि हम किसी अध्ययन में एक देश में औद्योगिक दुर्घटनाओं की बढ़ती हुई दर और इन दुर्घटनाओं में मरने वालों की संख्या का विवेचन करते हैं। नीचे उदाहरण 3 के अंतर्गत प्रस्तुत सारणी-कोयला खानों में दुर्घटनाओं के फलस्वरूप मरने वालों की ऊँची दर दर्शाती है।

उदाहरण 3

औद्योगिक दुर्घटनाओं में मरने वालों की कुल संख्या तथा कोयला खानों में मरने वालों की संख्या के बीच संबंध

वर्ष	औद्योगिक दुर्घटनाओं में मरने वालों की संख्या	कोयला खानों में मरने वालें की संख्या	औद्योगिक दुर्घटनाओं में कुल मरने वालों में से कोयला खानों में मरने वालों का प्रतिशत
1976	930	150	16.1
1977	1,154	285	24.7
1978	1,250	115	9.2
1979	900	108	12.0
1980	1,350	270	20.0

बोध प्रश्न क

सारणीयन क्या होता है ?

. . . .

. . . .

. . . .

2 सारणीयन के उद्देश्य क्या होते हैं ?

. . . .

. . . .

. . . .

3 वर्गीकरण एवं सारणीयन में अंतर स्पष्ट कीजिए ?

. . . .

. . . .

. . . .

4 सरल एवं जटिल सारणियों में अंतर स्पष्ट कीजिए।

. . . .

. . . .

. . . .

5 सामान्य उद्देश्य वाली या संदर्भ सारणी क्या होती है ?

. . . .

. . . .

. . . .

6 विशेष उद्देश्य वाली सारणी क्या होती है ?

. . . .

. . . .

. . . .

7 निम्नलिखित कथन सही हैं अथवा गलत, बताइए:

i) सारणीयन समंकों के विश्लेषण की एक विधि होती है। ....

ii) सारणीयन से तात्पर्य संकलित समंकों के स्तम्भों एवं पंक्तियों में क्रमबद्ध प्रस्तुतीकरण से होता है। ....

iii) स्तम्भ (column) समंकों की एक उदग्र (vertical) व्यवस्था है। ....

iv) सारणीयन, समंकों की तुलना में सहायक होता है। ....

v) सारणीबद्ध समंकों की अनुपस्थिति में वांछित मूल्यों की पहचान करना सरल होता है। ....

vi) विश्लेषण क्रिया में सांख्यिकीय सारणियाँ उपयोगी सिद्ध होती हैं। ....

vii) सारणीयन की सहायता से समंकों के समग्र स्वरूप को समझा जा सकता है। ....

viii) समंकों की एक से अधिक विशेषताओं को सरल सारणी द्वारा व्यक्त किया जाता है। ....

ix) आयु धर्म एवं वैवाहिक स्थिति से संबंधित सूचनाएँ सरल सारणी द्वारा प्रदर्शित की जाएँगी। ....

x) सामान्य उद्देश्य वाली सारणी में विभिन्न श्रेणियों की सूचना होती है। ....

xi) 1981 की जनगणना परिशिष्टियाँ संदर्भ सारणियों का एक उदाहरण हैं। ....

xii) विशेष उद्देश्य वाली सारणियाँ तुलना करने का आधार प्रदान करती हैं। ....

कोष्ठक में दिए गए उपयुक्त शब्दों से रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

i) पंक्ति समंकों की एक .... व्यवस्था होती है। (क्षैतिज/उदग्र)

ii) वर्गीकृत तथ्यों को पंक्तियों एवं खानों में अंकित करने को .... कहा जाता है। (वर्गीकरण/सारणीयन)

iii) सांख्यिकीय सारणियाँ समंकों को .... ढंग से प्रस्तुत करने में सहायक होती हैं। (सरल/जटिल)

iv) सारणीयन .... का एक आधार प्रदान करता है। (संकलन/विश्लेषण)

v) वर्गीकरण एवं सारणीयन .... अर्थ को सूचित करते हैं। (समान/भिन्न)

vi) समंकों को .... रूप में प्रस्तुत करने के लिए सूचनात्मक सारणियाँ बनाई जाती हैं। (संघनित/अव्यवस्थित)

vii) जटिल सारणी समंकों की .... विशेषताओं को प्रदर्शित करती हैं। (एक/एक से अधिक)

viii) सामान्य उद्देश्य वाली सारणियाँ .... होती हैं। (प्रतिवेदन का मुख्य अंश/प्रतिवेदन में संलग्न परिशिष्टयाँ)

ix) विशेष उद्देश्य वाली सारणियाँ समंकों के .... में सहायक होती हैं। (संकलन/विश्लेषण)

x) विशेष उद्देश्य वाली सारणियाँ किसी दिए गए विषय की .... होती है। (स्वतंत्र/या पूरक)

7.6 सांख्यिकीय सारणी की संरचना

पीछे आपने यह पढ़ा है कि सारणीयन का मुख्य उद्देश्य अव्यवस्थित समंकों को क्रमबद्ध एवं सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करना होता है, जिससे कि उनके विश्लेषण का कार्य सुगम हो जाता है। इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए हमें समंकों का सारणीयन करते समय बड़ी ही सावधानी बरतनी चाहिए। इसके लिए हमें उन नियमों एवं कार्य-प्रणालियों का स्पष्ट ज्ञान होना आवश्यक है जिनका उपयोग सांख्यिकीय सारणियों को बनाने में किया जाता है। अत: इस संदर्भ में (सारणी तैयार करने से पूर्व) पहले यह आवश्यक होगा कि हम एक उत्तम सारणी के लक्षणों एवं मुख्य अंगों का वर्णन करें।

7.6.1 सांख्यिकीय सारणी के मुख्य अंग

सामान्यत: एक सांख्यिकीय सारणी के निम्न भाग होने चाहिए (प्रत्येक भाग की जानकारी के लिए चित्र 7.1 देखिए):

1 **शीर्षक:** प्रत्येक सारणी का एक शीर्षक होना चाहिए और इसे सारणी के ऊपर लिखा जाना चाहिए। शीर्षक संक्षिप्त, स्पष्ट एवं यथेष्ट होना चाहिए। शीर्षक से सारणी में प्रदर्शित विषय सामग्री तथा उसकी उपयोगिता का ज्ञान हो जाना चाहिए। शीर्षक से यह स्पष्ट हो जाना चाहिए कि (i) समंक या विषय-सामग्री क्या है ? (ii) तथ्य किस क्षेत्र से संबंधित

हैं, (iii) तथ्यों (समंकों) को किस प्रकार वर्गीकृत किया गया है ? तथा (iv) वे किस समय से संबंधित हैं ?

2 **सारणी संख्या:** प्रत्येक सारणी की एक संख्या निर्धारित कर दी जाती है जिससे उसे आवश्यकता पड़ने पर सरलता से पहचाना जा सके। इससे संदर्भ सुगम हो जाता है। जब कभी आप किसी सारणी का उल्लेख करते हैं तो केवल उस सारणी की संख्या देना ही पर्याप्त होता है। यह संख्या अरबी (Arabic) या रोमन (Roman) अंकों में हो सकती है। यह संख्या सारणी के शीर्षक से पहले या उसके ऊपर मध्य स्थान पर अंकित की जा सकती है।

चित्र 7.1 : सांख्यिकीय सारणी के विभिन्न अंग

सारणी संख्या

शीर्षक

शीर्ष टिप्पणी

पंक्ति शीर्षक	स्तम्भ शीर्षक		योग
	उपशीर्षक उपशीर्ष	उपशीर्षक उपशीर्ष	
पंक्ति शीर्षक प्रविष्टियाँ	कलेवर या क्षेत्र		
योग			

पाद टिप्पणीः
स्रोतः

3 **शीर्ष टिप्पणी (Head Note) :** इसे शीर्षक से बिल्कुल नीचे आम तौर पर दाहिने किनारे पर लिखा जाता है। इससे उस इकाई का संकेत होता है, जिसमें समंक प्रदर्शित किए गए हैं।

4 **पंक्ति शीर्षक (Stub Note) :** जैसा कि आप जानते हैं कि सांख्यिकीय सारणी समंकों को स्तम्भों तथा पंक्तियों में क्रमबद्ध करके प्रस्तुत करती है। पंक्तियों के शीर्षक को पंक्ति शीर्षक कहते हैं। पंक्ति शीर्षक का बड़ा स्पष्ट उल्लेख होना चाहिए। इससे सारणी की हर पंक्ति में दी गई सामग्री की प्रकृति का स्पष्ट संकेत मिलना चाहिए।

5 **स्तंभ शीर्षक (Caption Note) :** स्तम्भों के शीर्षक स्तम्भ शीर्षक कहलाते हैं। इन्हें Box Head भी कहते हैं। इससे सारणी के किसी खाने में प्रदर्शित समंकों की प्रकृति का संकेत मिलता है। स्तम्भ शीर्षक बड़े ही स्पष्ट रूप से अंकित होना चाहिए। प्रत्येक स्तम्भ शीर्षक के उप-शीर्षक भी हो सकते हैं।

6 **कलेवर या क्षेत्र (Body Field) :** सारणी का कलेवर सारणी का सबसे महत्वपूर्ण भाग है। स्तम्भों तथा पंक्तियों में दी गई सूचना से सारणी का कलेवर बनता है। समस्त संख्यात्मक तथ्यों का प्रदर्शन इसी भाग में होता है।

7 **पाद टिप्पणी (Foot Note) :** सारणी की विषय सामग्री से संबंधित कोई भी व्याख्यात्मक सूचना, जो कि सारणी के बिल्कुल नीचे दी गई हो पाद टिप्पणी कहलाती है। इसका मुख्य उद्देश्य सारणी में दिए गए विशिष्ट मदों को स्पष्ट करना होता है अथवा यदि सारणी में दिए गए मदों में कोई संदिग्धता या त्रुटि हो तो उसकी व्याख्या करना होता है।

8 **संदर्भ टिप्पणी (Reference Note) :** यदि समंक द्वितीयक स्रोतों से प्राप्त किए गए हैं तो ऐसी स्थिति में सारणी के नीचे समंकों के स्रोतों की जानकारी देने के लिए एक टिप्पणी दी जाती है। ऐसी टिप्पणी को संदर्भ टिप्पणी कहते हैं। इस टिप्पणी को बहुत ही स्पष्ट एवं सुनिश्चित होना चाहिए क्योंकि यही समंकों की विश्वसनीयता के परीक्षण का आधार बन जाती है।

9 **योग (Total) :** सारणी में सभी पंक्तियों एवं स्तम्भों में अंकित समंकों के योग को दर्शाने की व्यवस्था भी होनी चाहिए।

7.6.2 एक अच्छी सांख्यिकीय सारणी के आवश्यक गुण

अभी आपने सांख्यिकीय सारणी के भागों का अध्ययन किया है। आइए, अब हम एक अच्छी सारणी की विशेषताओं का अध्ययन करें। सारणी तैयार करने के कुछ सामान्य मार्गदर्शक नियम होते हैं, जिनका उल्लेख नीचे किया गया है:

1 एक अच्छी सारणी द्वारा समंक स्पष्ट एवं सरल ढंग से प्रस्तुत किए जाने चाहिए।

2 इसका एक संक्षिप्त एवं स्पष्ट "शीर्षक" होना चाहिए, जो कि स्वत: स्पष्ट हो और इससे यह भी पता चल सके कि सारणी में किस प्रकार के समंक दिखाए गए हैं।

3 पंक्ति शीर्षक, उसकी प्रविष्टियाँ, स्तम्भ शीर्षक आदि संक्षिप्त एवं स्पष्ट होने चाहिए। विषय के शीघ्र-संदर्भ के लिए स्तम्भों पर क्रम संख्या लिख देनी चाहिए।

4 शीर्ष टिप्पणी स्पष्ट एवं पूर्ण होनी चाहिए क्योंकि इससे समंकों की इकाई का ज्ञान होता है।

5 योगों और उप-योगों की व्यवस्था सारणी में उपयुक्त स्थानों पर होनी चाहिए।

6 संदर्भ टिप्पणियाँ स्पष्ट होनी चाहिए, जिससे कि आवश्यकता पड़ने पर समंकों की विश्वसनीयता की पुष्टि की जा सके।

7 सारणी ऐसी होनी चाहिए जिसमें कि आवश्यकता पड़ने पर व्युत्पन्न समंक (derived data) अर्थात् अनुपात, प्रतिशतता, औसत आदि का भी समावेश किया जा सके।

8 जहां तक संभव हो, सांख्यिकीय सारणी में संकेताक्षरों (abbreviations) का प्रयोग नहीं होना चाहिए। हाँ, यदि संकेताक्षर का प्रयोग आवश्यक ही है तो उनकी पूर्ण व्याख्या टिप्पणी द्वारा दी जानी चाहिए।

9 जहाँ आवश्यक हो, सारणी में रेखाएँ खींची जानी चाहिए। सामान्यत: स्तम्भों को रेखाओं द्वारा एक-दूसरे से पृथक किया जाता है। रेखाएँ सारणी को आकर्षक, रोचक एवं पठनीय बना देती हैं और इनसे समंकों के संबंध भी अधिक स्पष्ट होते हैं। सारणी के शीर्ष तथा आधार पर और स्तम्भों के नीचे भी रेखाएँ खींची जाती हैं।

10 यथोपरि (अर्थात् जैसे ऊपर) जैसे संकेत का प्रयोग सारणी में नहीं किया जाना चाहिए।

11 स्तम्भ तथा पंक्तियां, जिनकी सामग्री की एक-दूसरे से तुलना की जानी है, पास-पास रखी जानी चाहिए।

12 यदि कुछ वर्गों के सापेक्ष महत्व को भी दर्शाना आवश्यक हो तो इसके लिए मोटे अक्षर, टेढ़े अक्षर कुछ स्थान रिक्तता की विधियों का उपयोग करना चाहिए।

13 खानों में अंकित संख्याएँ एक सीध में होनी चाहिए। यदि दशमलवों + या – चिन्ह का उपयोग हुआ है तो उन्हें भी सुनियोजित ढंग से एक सीध में होना चाहिए।

14 सामान्यत: एक सारणी में चार, पाँच से अधिक विशेषताओं के आधार पर समंकों को प्रस्तुत नहीं करना चाहिए, अन्यथा इसका स्वरूप बहुत ही जटिल बन जाएगा।

7.6.3 सांख्यिकीय सारणी की रचना

अब तक हमें एक अच्छी सारणी के लक्षणों एवं उसके मुख्य अंगों की जानकारी हो चुकी है। अत: अब हम कुछ उदाहरणों के द्वारा सारणी की रचना विधि को समझने का प्रयास करेंगे।

उदाहरण 4

सन् 1988 में एक महाविद्यालय के विद्यार्थियों के अंक, आयु एवं लिंग के आधार पर एक रिक्त सारणी तैयार कीजिए। अंकों के वर्गान्तर 0–10, 10–20, 20–30, 30–40 और 40–50 लिए जाने चाहिए तथा आयु 17 वर्ष, 18 वर्ष, 19 वर्ष तथा 20 वर्ष ली जानी चाहिए।

हल:

सारणी में विद्यार्थियों को उनके द्वारा प्राप्त अंक, उनकी आयु एवं लिंग के आधार पर प्रदर्शित

करना है। अंकों को पंक्तियों, आयु को स्तम्भों एवं लिंग के उप-स्तम्भों द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है। इन सूचनाओं के प्रदर्शन के लिए रिक्त सारणी का स्वरूप निम्न प्रकार का होगा:

सन् 1988 में विद्यार्थियों का प्राप्तांक, आयु एवं लिंग के अनुसार वितरण

अंक	आयु (वर्ष)								योग	
	17		18		19		20			
	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री	पुरुष	स्त्री
0–10										
10–20										
20–30										
30–40										
40–50										
योग										

पाद टिप्पणी :
स्रोत :

उदाहरण 5

वर्ष 1985–86 में विभिन्न विनिर्माताओं द्वारा निर्मित कुल कारों के उत्पादन में मारुति उद्योग का भाग 48.4%, प्रीमियर ऑटो का भाग 28.5% तथा हिन्दुस्तान मोटर्स का भाग 22.6% था। वर्ष 1986–87 में हिन्दुस्तान मोटर्स का भाग घटकर 18% रह गया, जबकि मारुति उद्योग का भाग बढ़कर 59.2% हो गया। अन्य कार विनिर्माताओं का भाग 1986–87 में केवल 1.2% था। इन समंकों को सारणीबद्ध कीजिए।

हल:

यहाँ पर समंक प्रतिशतताओं में दिए गए हैं। वर्ष 1985–86 में मारुति उद्योग, प्रीमियर ऑटो एवं हिन्दुस्तान मोटर्स (तीनों को मिलाकर) का उत्पादन कुल कारों के उत्पादन का 99.5% है। अत: शेष 0.5% कारों का उत्पादन अन्य निर्माताओं द्वारा किया गया है। 1986–87 में हिन्दुस्तान मोटर्स का भाग 22.6% से घटकर 18% रह गया। जबकि मारुति उद्योग का भाग 28.4% से बढ़कर 59.2% हो गया और अन्द उत्पादकों का हिस्सा 0.5% से बढ़कर 1.2% हो गया। इससे यह निष्कर्ष निकलता है कि वर्ष 1986–87 में शेष उत्पादन अर्थात् 21.8% भाग प्रीमियर ऑटो का है। इन सूचनाओं को नीचे दी गई सारणी द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है:

भारत में कार उत्पादन में विभिन्न विनिर्माताओं का भाग

(प्रतिशत)

कार निर्माता का नाम	1985–86	1986–87
1 मारुति उद्योग	48.4	59.2
2 प्रीमियर ऑटो	28.5	21.6
3 हिन्दुस्तान मोटर्स	22.6	18.0
4 अन्य	0.5	1.2
योग	100.0	100.0

उदाहरण 6

केन्द्रीय सरकार की सातवीं पंचवर्षीय योजना में श्रम एवं श्रम कल्याण के लिए निवेश 9510 लाख रुपये था। इसमें से 4,184 लाख रुपये प्रशिक्षण के लिए, 546 लाख रुपये रोज़गार सेवाओं के लिए, 3,180 लाख रुपये श्रम कल्याण के लिए और 1,600 लाख रुपये बंधुआ

मज़दूरों के पुनर्वास के लिए रखे गए थे। किन्तु 1986–87 के लिए कुल निवेश 1,847 लाख रुपये था। इसमें से 465 लाख रुपये प्रशिक्षण पर 107 लाख रुपये रोजगार सेवाओं पर, 755 लाख रुपये श्रम कल्याण पर और शेष राशि बंधुआ मजदूरों के पुनर्वास पर व्यय की जानी थी। वर्ष 1987–88 में निवेश 1986–87 की तुलना में 49 लाख रुपये अधिक था। वर्ष 1986–87 की तुलना में वर्ष 1987–88 के लिए रोजगार सेवाओं पर 11 लाख रुपये, श्रम कल्याण पर 148 लाख रुपये तथा बंधुआ मजदूरों के पुनर्वास पर 327 लाख रुपये के निवेश की कमी हुई। किन्तु उपरोक्त राशियों में अनुसूचित जातियों और अनुसूचित जनजातियों के प्रशिक्षण और पथप्रदर्शन पर खर्च की जाने वाली राशि को निवेश की राशि में शामिल नहीं किया गया है। यह सूचना भारत सरकार के योजना आयोग द्वारा प्रकाशित वार्षिक योजना 1987–88 की पृष्ठ संख्या 335 से ली गई है। इन तथ्यों को सारणीबद्ध कीजिए।

हल:

सातवीं पंचवर्षीय योजना में निवेश की जाने वाली कुल राशि मदों के अनुसार अलग-अलग दी हुई है। किन्तु वर्ष 1986–87 के लिए बंधुआ मजदूरों के पुनर्वास पर खर्च की जाने वाली राशि अलग से नहीं दी गई है। यह एक शेषांक है। वर्ष 1986–87 में निवेश की कुल राशि 1847 लाख रुपए थी तथा अन्य सब मदों पर निवेश की कुल राशि 1327 लाख रुपये (अर्थात् प्रशिक्षण पर 465 लाख रुपये, रोजगार सेवाओं पर 107 लाख रुपये तथा श्रम कल्याण पर 755 लाख रुपये) थी। अत: बंधुआ मजदूरों के पुनर्वास के लिए निवेश की राशि 520 लाख रुपये (शेषांक) थी। यह कहा गया है कि 1986–87 की तुलना में वर्ष 1987–88 के लिए निवेश की राशि 49 लाख रुपये बढ़ा दी गई है अर्थात् वर्ष 1987–88 के लिए निवेश की राशि (1847+49) 1896 लाख रुपये होगी। रोजगार सेवाओं पर निवेश में 11 लाख रुपयों की कमी की गई है अर्थात् इस वर्ष में इसपर निवेश की राशि 107 लाख रुपये से घट कर 96 लाख रुपये रह जाएगी। इसी प्रकार श्रम कल्याण पर निवेश में भी 148 लाख रुपये की कटौती की गई है अर्थात् इस मद पर निवेश 755 लाख रुपये के स्थान पर अब केवल 607 लाख रुपये होगा। बंधुआ मजदूरों के पुनर्वास पर निवेश की राशि में 327 लाख रुपये की कटौती की गई है अर्थात् इसपर निवेश की राशि केवल 193 लाख रुपये होगी। इससे यह भी स्पष्ट होता है कि वर्ष 1987-88 के लिए प्रशिक्षण के लिए विनियोग 1,000 लाख रुपये (शेषांक) होगा। इन तथ्यों को नीचे दी गई सारणी द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है:

केन्द्र सरकार द्वारा श्रम एवं श्रम कल्याण के लिए निवेश

(लाख रुपयों में)

खर्च के मद	सातवीं पंचवर्षीय योजना	1986–87	1987–88
1 प्रशिक्षण	4,184	465	1,000
2 रोजगार सेवाएँ	546	107	96
3 श्रम कल्याण-	3,180	755	607
4 बंधुआ मजदूरों का पुनर्वास	1,600	520	193
योग	9,510	1,847	1,896

टिप्पणी : उपरोक्त विनियोग में अनुसूचित जातियों और अनुसूचित जनजातियों के प्रशिक्षण तथा मार्गदर्शन पर व्यय की जाने वाली राशि को शामिल नहीं किया गया है।

स्रोत : वार्षिक योजना 1987-88 योजना आयोग, भारत सरकार पृष्ठ 335

बोध प्रश्न ख

1 नीचे एक सांख्यिकीय सारणी दी गई है। इसके मुख्य अंगों (भागों) को पहचानिए:

सारणी 7A
साप्स एण्ड ऑयल्स लिमिटेड
उत्पादन बिक्री शुद्ध लाभ या शुद्ध हानि

(1980-81 से 1983-84 तक)

(लाख रुपयों में)

वर्ष	उत्पादन		बिक्री		शुद्ध लाभ/शुद्ध हानि (लाख रूपयों में)
	मात्रा (मीटर)	लागत (रुपये)	मात्रा (मीटर)	मूल्य (रुपये)	
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
1980-81	8.319	862.00	7.439	747.36	11.59
1981-82	8.659	925.48	9.125	897.03	09.62
1982-83	9.212	1.016.93	9.141	952.57	(–) 50.60
1983-84	6.013	793.00	6.094	757.61	(–) 190.12
1984-85	उपलब्ध नहीं	939.00	उपलब्ध नहीं	882.80	(–) 112.92

स्रोतः केरल सोप्स एण्ड आयल्स लिमिटेड कालीकट के 1980-81 से 1983-84 तक की वार्षिक रिपोर्ट तथा एकाउट्स।

2 शीर्षक एवं शीर्ष टिप्पणी में अंतर समझाइए।

....

....

3 स्तम्भ शीर्षक एवं पंक्ति शीर्षक में अंतर बताइए।

....

....

4 पाद टिप्पणी एवं संदर्भ टिप्पणी में अंतर समझाए।

....

....

5 सारणी का कलेवर क्या होता है ?

....

....

6 निम्नलिखित कथन सही हैं अथवा गलत, बताइए:

i) प्रत्येक सांख्यिकीय सारणी के शीर्ष पर उसका एक स्पष्ट, संक्षिप्त एवं स्व-व्याख्यात्मक शीर्षक होना चाहिए। ....

ii) सारणी के कलेवर के बिल्कुल नीचे शीर्ष-टिप्पणी लिखी जानी चाहिए। ....

iii) सारणी में शीर्ष टिप्पणी के अंतर्गत समंको के लिए प्रयुक्त माप की इकाई का उल्लेख होना चाहिए। ....

iv) स्तम्भ शीर्षक को 'बाक्स शीर्षक' भी कहा जाता है। ....

v) सारणी के कलेवर में संख्यात्मक सूचनाएँ प्रदर्शित की जाती हैं। ....

vi) सारणी में यदि कोई संदिग्धता हो तो उसे संदर्भ टिप्पणी द्वारा स्पष्ट किया जाता है। ....

vii) समंकों के स्रोतों को पाद टिप्पणी (foot-note) द्वारा बताया जाता है। ....

viii) सारणी के स्तम्भ शीर्षक तथा पंक्ति शीर्षक स्पष्ट एवं संक्षिप्त होने चाहिए। ....

ix) सारणी में रेखाएँ खींचना ज्यादा जरूरी नहीं होता है। ....

x) जहाँ तक संभव हो, सारणी के संकेताक्षरों का प्रयोग नहीं करना चाहिए। ....

7 कोष्ठक में दिए गए उपयुक्त शब्दों से रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

i) सारणी का शीर्षक .... होना चाहिए। (बड़े से बड़ा/छोटे से छोटा)

ii) शीर्ष टिप्पणी सारणी के शीर्षक के बिल्कुल नीचे अधिमान्यत: .... किनारे पर लिखी जानी चाहिए। (दायें/बायें)

iii) सारणी में पंक्तियों के शीर्षक को .... कहते हैं। (स्तम्भ शीर्षक/पंक्ति शीर्षक)

iv) स्तम्भ शीर्षक से .... में प्रदर्शित समंकों का संकेत मिलता है। (स्तम्भों/पंक्तियों)

v) प्रत्येक सारणी में उसके नीचे "सारणी संख्या" देना .... होता है। (आवश्यक/अनावश्यक)

vi) स्तम्भ शीर्षकों को क्रमांकित .... जा सकता है। (किया/नहीं किया)

vii) शीर्ष टिप्पणी का संबंध समंकों की .... से होता है। (इकाई/विशेषताओं)

viii) सांख्यिकीय सारणी बनाते समय यथोपरि (जैसे ऊपर) संकेत .... करना चाहिए। (का प्रयोग/का प्रयोग नहीं)

7.7 सारांश

सारणीयन समंकों को स्तम्भों एवं पंक्तियों में सुव्यवस्थित ढंग से क्रमबद्ध करने की एक तकनीक है। समंकों के क्षैतिज (horizontal) विन्यास को "पंक्ति" तथा उदग्र (vertical) विन्यास को "स्तम्भ" कहा जाता है। सारणीबद्ध प्रदर्शन समंकों की तुलना करने में वांछित मूल्यों को पहचानने में विश्लेषण का आधार प्रदान करने में, तथा समंकों की प्रवृत्ति दर्शाने में बड़े उपयोगी सिद्ध होते हैं। अनेक लोग सारणीयन तथा वर्गीकरण को एक-दूसरे का पर्यायवाची मानते हैं, किन्तु ऐसा मानना सही नहीं है। वर्गीकरण में समंकों को समानता एवं साम्यता के आधार पर बाँटा जाता है जबकि सारणीयन वर्गीकृत समंकों को स्तम्भों एवं पंक्तियों में दर्ज करने की प्रक्रिया है।

सांख्यिकीय सारणियाँ विभिन्न प्रकार की हो सकती हैं, जैसे — सूचनात्मक या सामान्य उद्देश्य वाली सारणी, या विशेष उद्देश्य वाली सारणी। गुणों या विशेषताओं की संख्या के आधार पर सूचनात्मक सारणियों को दो भागों में बाँटा जा सकता है: (i) सरल या एक गुण वाली सारणी तथा (ii) जटिल सारणी। सरल सारणी में समंकों के केवल एक गुण या विशेषता को तथा जटिल सारणी में एक से अधिक गुणों को प्रदर्शित किया जाता है। जटिल सारणी को तीन प्रकार से विभाजित किया जा सकता है: (i) द्विगुण सारणी, (ii) त्रिगुण सारणी, (iii) बहुगुण सारणी। सामान्य उद्देश्य वाली सारणियाँ एक प्रकार से सूचनाओं का भंडार गृह होती हैं। और ये प्राय: विभिन्न प्रतिवेदनों के साथ परिशिष्ट के रूप में लगी होती हैं। विशेष उद्देश्य वाली सारणियाँ सांख्यिकीय विश्लेषण के लिए बड़ी उपयोगी होती हैं। इनमें दरें, प्रतिशतताओं, माध्यों आदि का उल्लेख मूल अंकों के साथ या उनके स्थान पर होता है।

सारणी के अनेक भाग या अंग होते हैं। जैसे — शीर्षक, शीर्ष या ऊपरी टिप्पणी, स्तम्भ शीर्षक, पंक्ति शीर्षक, कलेवर (body), पाद-टिप्पणी, संदर्भ टिप्पणी, योग, सारणी, क्रमाँक

आदि। एक अच्छी सारणी में समंकों का प्रदर्शन सरल एवं स्पष्ट होना चाहिए, उसके स्तम्भ शीर्षक एवं पंवित शीर्षक संक्षिप्त एवं स्पष्ट होने चाहिए। उसकी शीर्ष टिप्पणी संक्षिप्त एवं पूर्ण होनी चाहिए, उसकी संदर्भ टिप्पणी स्पष्ट होनी चाहिए तथा सभी योग(totals) उपयोग (sub-totals) सारीण में उपयुक्त स्थान पर लिखे जाने चाहिए। आवश्यकता के अनुसार व्युत्पन्न समंक (derived data) भी दिखाये जाने चाहिए तथा सारणी में संकेताक्षरों एवं यथोपरि जैसे संकेतों के उल्लेख से बचना चाहिए। जहाँ कहीं आवश्यक हो, सारणी को उपयोगी और आकर्षक बनाने के लिए रेखाएँ डाल देनी चाहिए।

7.8 शब्दावली

स्तम्भ शीर्षक: स्तम्भों के शीर्षक को स्तम्भ शीर्षक कहा जाता है।

जटिल सारणी: वह सारणी, जो समंकों की एक से अधिक विशेषता के आधार पर बनाई जाए।

स्तम्भ (कॉलम): एक सारणी में समंकों का उदग्र विन्यास।

क्षेत्र/कलेवर: सारणी का वह मुख्य भाग, जिसमें संख्यात्मक तथ्यों का उल्लेख होता है।

पाद टिप्पणी: प्रदर्शित समंकों की संदिग्धता को, यदि कोई है, स्पष्ट करने के लिए सारणी के नीचे दी गई टिप्पणी।

सामान्य उद्देश्य सारणी: ऐसी सारणी जिसमें किसी विशिष्ट विषय के बारे में विस्तृत सूचनाएँ दी जाती हैं। प्राय: ये रिपोर्टों में परिशिष्ट के रूप में लगी होती हैं।

शीर्ष टिप्पणी: सारणी के शीर्षक के नीचे मुख्यत: दाहिने किनारे पर, उस इकाई को बताने वाली टिप्पणी जिसमें समंकों को प्रस्तुत किया गया है।

संदर्भ टिप्पणी: सारणी के मुख्य भाग के नीचे इसी के द्वारा समंकों के स्रोतों की जानकारी दी जाती है। इसे स्रोत टिप्पणी भी कहा जाता है।

पंक्ति: सारणी में समंकों का क्षैतिज विन्यास।

सरल सारणी: ऐसी सारणी जोकि समंको की केवल एक विशेषता के आधार पर तैयार की जाती है। इसे एक गुण वाली सारणी भी कहा जाता है।

विशेष उद्देश्य वाली सारणी: यह सारणी संमकों के विश्लेषण में बहुत उपयोगी सिद्ध होती है। इसमें व्युत्पन्न समंकों का उल्लेख होता है।

पंक्ति शीर्षक: सांख्यिकीय सारणी के किसी पंक्ति के शीर्षक को "पंक्ति शीर्षक" कहा जाता है।

शीर्षक: सारणी के ऊपर, उसमें प्रदर्शित समंकों की विशेषताओं का स्पष्टीकरण देने वाली टिप्पणी को शीर्षक कहा जाता है।

7.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 7 i) असत्य ii) सत्य, iii) सत्य iv) सत्य, v) असत्य, vi) सत्य, vii) सत्य viii) असत्य, ix) असत्य, x) सत्य xi) सत्य, xii) सत्य

8 i) क्षैतिज, ii) सारणीयन, iii) सरल, iv) विश्लेषण, v) भिन्न, vi) संघनित vii) एक से अधिक, viii) प्रतिवेदना में संलग्न परिशिष्टियाँ, ix) विश्लेषण x) पूरक

सारणी 7 ए

केरल सोप्स एण्ड ऑयल्स लिमिटेड

उत्पादन, बिक्री तथा शुद्ध लाभ/शुद्ध हानि 1980-81 से 1983-84 तक

(रु. लाखों में) शीर्ष टिप्पणी

पंक्ति शीर्षक स्तम्भ शीर्षक स्तम्भ उपशीर्षक	वर्ष	उत्पादन मात्रा (मीटरों में)	लागत	बिक्री मात्रा (मीटरों में)	मूल्य	स्तम्भ शीर्षक शुद्ध लाभ/हानि (लाख रुपयों में)	
	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	
	1980-81	8.319	862.00	7,439	747.36	11.59	
	1981-82	8,659	925.48	9,125	897.03	09.62	
अनुशीर्षक प्रविष्टियां	1982-83	9.212	1,016.93	9,141	952.57	(-) 50.60	क्षेत्र/कलेवर
	1983-84	6,013	793.00	6,094	757.61	(-) 190.12	
	1984-85		939.00		882.80	(-) 112.92	

स्रोत: केरल सोप्स एण्ड ऑयल्स लिमिटेड कालीकट के 1980-81 से 1983-84 तक की वार्षिक रिपोर्ट तथा एकाउंट्स।
संदर्भ टिप्पणी

6 i) सत्य, ii) असत्य, iii) सत्य, iv) असत्य, v) सत्य, vi) असत्य, vii) असत्य, viii) सत्य, ix) असत्य, x) सत्य

7 i) छोटा, ii) दायें, iii) पंक्ति शीर्षक, iv) स्तम्भ, v) आवश्यक, vi) किया, vii) इकाई, viii) का प्रयोग नहीं

7.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

प्रश्न

1 सारणीयन क्या होता है ? सांख्यिकीय सारणियों के उद्देश्य क्या होते हैं ?

2 एक सांख्यिकीय सारणी का एक प्रारूप तैयार कीजिएं और उसमें उसके मुख्य अंगों को इंगित कीजिए।

3 जटिल एवं सरल सांख्यिकीय सारणियों में अंतर स्पष्ट कीजिए तथा उनके उपयुक्त उदाहरण दीजिए।

4 एक अच्छी सांख्यिकीय सारणी के आवश्यक गुणों का उल्लेख कीजिए।

अभ्यास

1 एक नगर के निवासियों को उनकी आयु, लिंग एवं साक्षरता के स्तर का दिखाने के लिए एक खाली सांख्यिकीय सारणी तैयार कीजिए।

2 एक संगठन में 1,000 कर्मचारी हैं, जिनमें 40% कर्मचारी स्त्री कर्मचारी हैं: कुल कर्मचारियों का 30% धूम्रपान करते हैं किन्तु इनमें स्त्रियों की संख्या केवल 10 है। इन तथ्यों को सारणी द्वारा दिखाइए।

3 निम्नलिखित समंक भारत के चार महानगरों में अपराधों की संख्या (संख्याएँ निकटतम हज़ारों तक) से संबंधित हैं। 1961 में बम्बई में सबसे अधिक अपराध दर्ज किए गए, जिनकी संख्या 19,400 थी, इसी अवधि में कलकत्ता दिल्ली तथा मद्रास में क्रमश: 14,200, 10,000 तथा 5,700 अपराध दर्ज किए गए। सन् 1961 की तुलना में सन् 1971 में बम्बई, दिल्ली तथा मद्रास में क्रमश: 5,700, 6,400 तथा 1,500 अधिक अपराध दर्ज किए गए। किन्तु इसी अवधि में, अर्थात् 1971 में कलकत्ता में अपराधों की संख्या गिरकर 10,900 रह गई। 1981 में बम्बई में कुल 36,300 अपराध दर्ज हुए। इसी

वर्ष दिल्ली में बम्बई की अपेक्षा अपराधों की संख्या 7,000 कम थी। 1971 की अपेक्षा 1981 में कलकत्ता में अपराधों की संख्या में 3,100 की वृद्धि हुई। 1971 की तुलना में 1981 में मद्रास में अपराधों की संख्या में 8,500 की वृद्धि हुई। इन तथ्यों को सारणी द्वारा व्यक्त कीजिए।

टिप्पणी: इस इकाई को भली प्रकार से समझने में इन प्रश्नों एवं अभ्यासों से आपको बड़ी मदद मिलेगी। इनके उत्तर लिखने का प्रयास कीजिए। किन्तु इन्हें विश्वविद्यालय को भेजने की कोई आवश्यकता नहीं है। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 8 आरेखीय प्रस्तुतीकरण

इकाई की रूपरेखा

8.0 उद्देश्य
8.1 प्रस्तावना
8.2 आँकड़ों के दृष्टिक प्रस्तुतीकरण का महत्व
8.3 आरेखों की संरचना के नियम
8.4 आरेखों के प्रकार
8.5 एक-विमितीय आरेख
   8.5.1 सरल दण्ड आरेख
   8.5.2 बहु दण्ड आरेख
   8.5.3 उप-विभाजित दण्ड आरेख
   8.5.4 प्रतिशतता उप-विभाजित दण्ड आरेख
8.6 द्विविमितीय आरेख
   8.6.1 आयत
   8.6.2 उप-विभाजित आयत
   8.6.3 वर्ग और वृत्त
   8.6.4 वृत्तीय आरेख
7.7 सारांश
8.8 शब्दावली
8.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
8.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

8.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि आप:

- दृष्टिक प्रस्तुतीकरण के महत्व का वर्णन कर सकें
- आँकड़ों के प्रस्तुतीकरण के लिए आरेखों की उपयोगिता का वर्णन कर सकें
- आरेख की संरचना के नियमों की व्याख्या कर सकें
- विभिन्न प्रकार के आरेखों की पहचान कर सकें
- विभिन्न प्रकार के आरेखों की संरचना कर सकें।

8.1 प्रस्तावना

आपने इकाई 7 में पढ़ा है कि आँकड़ों का सारणिक प्रस्तुतीकरण, उनकी तुलना को सुगम बना देता है क्योंकि यह आँकड़ों के एक बड़े समूह को सरल और सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करता है। जब आँकड़े सारणिक रूप में हों, तो उपनति (trend) और प्रतिरूप (patterns) का संस्थापन करना सरलतर हो जाता है। सारणिक रूप में प्रस्तुत करने के अतिरिक्त आँकड़ों को आरेखों (diagrams) और आलेखों (graphs) के रूप में भी प्रस्तुत कर सकते हैं। आँकड़ों के आरेखों और आलेखों के रूप में प्रस्तुतीकरण को आँकड़ों का दृष्टिक प्रस्तुतीकरण (visual presentation) भी कहते हैं। सारणिक प्रस्तुतीकरण की तुलना में, आरेखों और आलेखों के रूप में प्रस्तुत आँकड़े अधिक प्रभावशाली होते हैं और उनके द्वारा निष्कर्ष निकालना सरलतर होता है। इस इकाई में आप आँकड़ों के आरेखीय प्रस्तुतीकरण के महत्व, नियमों और विभिन्न प्रकारों का अध्ययन करेंगे।

8.2 आँकड़ों के दृष्टिक प्रस्तुतीकरण का महत्व

आँकड़ों के दृष्टिक प्रस्तुतीकरण का अभिप्राय है आँकड़ों को **आरेखों** (diagrams) **वक्रों** (curves) और **सरल रेखाओं** (straight line) के रूप में प्रस्तुत करना। आँकड़ों का दृष्टिक प्रस्तुतीकरण निम्नलिखित कारणों से वांछनीय है:

1 आँकड़ों का दृष्टिक प्रस्तुतीकरण **संख्यात्मक आँकड़ों** (numerical data) की मंदता को दूर करता है। संख्यात्मक आँकड़ों के एक बड़े समूह से कोई निष्कर्ष निकालना, बहुधा कठिन होता है। इसके अतिरिक्त, यह मन में अनावश्यक तनाव भी पैदा करता है। आँकड़े जब आरेखों और आलेखों के रूप में प्रस्तुत किए जाते हैं तो रुचिकर हो जाते हैं और पाठक के मन पर एक अधिक चिरस्थायी प्रभाव छोड़ जाते हैं।

2 यदि आँकड़ों को **आरेखों** (diagrams) और आलेखों (graphs) के रूप में प्रस्तुत किया जाए तो उनकी तुलना करना सरलतर हो जाता है। बहुत-सी स्थितियों में, आरेख या आलेख पर एक सचेत क्षणिक दृष्टिपात ही जटिल आँकड़ों की तुलना को बहुत सरल बना देता है।

3 रेखाचित्रों की सहायता से विभिन्न **सांख्यिकीय मापों** (statistical measures) को आसानी से मालूम किया जा सकता है। **केन्द्रीय प्रवृत्ति** (central tendency) के कई माप, जैसे **मध्यका** (median) **चतुर्थक** (quartiles) **भूयिष्ठक** (mode) इत्यादि की स्थिति, आलेख जैसे तोरण (ogive) **आयतचित्र** (histograms) की सहायता से निर्धारित की जा सकती है।

4 आलेखों की सहायता से निष्पादन की उपनति (trend) भी निर्धारित की जा सकती है। ऐसी उपनतियों को आलेखों द्वारा प्रस्तुत करने से **पूर्वानुमान** (forecast) करने में सहायता मिलती है।

5 आरेख और रेखाचित्र कई व्यावसायिक प्रतिष्ठानों के विज्ञापन अभियान का अभिन्न अंग बन गए हैं। दृष्टिक प्रभाव रहित कोई भी विज्ञापन अधूरा लगता है।

8.3 आरेखों की संरचना के नियम

हमने आँकड़ों के आरेखीय प्रस्तुतीकरण के महत्व के बारे में पढ़ा है। आइए अब उन मार्गदर्शक नियमों का अध्ययन करें, जिनका पालन आरेखों की संरचना करते समय करना होता है। आरेखों को बनाते समय, निम्नलिखित नियमों को ध्यान में रखना चाहिए :

1 एक आरेख की संरचना निर्देशाक्षों (graphic axes) X-अक्ष और Y-अक्ष पर की जाती हैं। परन्तु, यह आवश्यक नहीं, कि सदैव ग्राफ पेपर का ही प्रयोग किया जाए। इन अक्षों पर माप (scale) इस प्रकार लेने चाहिए कि आँकड़ों को सार्थक रूप में प्रस्तुत किया जा सके। दोनों अक्षों पर माप स्पष्ट रूप में अंकित करने चाहिए।

2 **जब कभी आँकड़ों को Y-अक्ष (लम्बवत् माप) पर प्रस्तुत करना हो तो माप को शून्य से प्रारम्भ करना चाहिए। प्राय: लम्बवत् अक्ष को तोड़ा नहीं जाता।**

3 आरेख का सदैव, एक संक्षिप्त और स्वतः स्पष्ट शीर्षक होना चाहिए।

4 आरेख के विभिन्न संघटकों को प्रदर्शित करने के लिए विभिन्न रंगों और छाया के प्रकारों का प्रयोग करना चाहिए और इनके अर्थ को स्पष्ट करने के लिए एक संकेत तालिका (Key) भी देनी चाहिए।

5 आरेख को आकर्षक बनाने के लिए उसके चारों ओर उचित हाशिया छोड़ देना चाहिए। आरेख बहुत बड़ा या बहुत छोटा नहीं होना चाहिए।

6 यदि कई आरेख बनाने अभीष्ठ हों तो सुगम संदर्भ के लिए उनपर क्रम संख्या अंकित कर देनी चाहिए।

8.4 आरेखों के प्रकार

आरेखों का वर्गीकरण सामान्यत: लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई के आधार ' किया जाता है। मोटे तौर पर आरेखों का वर्गीकरण (1) एक-विमितीय (one-dimensional) आरेख, (2) द्विविमितीय (two-dimensional) आरेख और (3) त्रिविमितीय (three-dimensional) आरेख के रूप में किया जाता है। इन तीन प्रकार के आरेखों के अतिरिक्त आँकड़ों को **मान-चित्रों** (maps) और **चित्रीय-आरेखों** (pictographs) द्वारा भी प्रस्तुत किया जा सकता है। परन्तु इस इकाई में हम केवल एक विमितीय और द्विमितीय आरेखों का ही विवेचन करेंगे।

एक विमितीय आरेखों का पुन: निम्न वर्गों में विभाजित किया जा सकता है: (1) सरल दण्ड आरेख, (2) बहु दण्ड आरेख, (3) अंतर्विभक्त दण्ड आरेख और (4) प्रतिशतता अंतर्विभक्त दण्ड आरेख। इसी प्रकार, द्विविमितीय आरेखों को भी निम्न वर्गों में विभाजित किया जा सकता है: (1) **आपंत,** (2) अंतर्विभक्त आयत, (3) वर्ग और वृत्त; तथा (4) वृत्तीय आरेख। आइए अब हम इन सभी प्रकारों के बारे में सविस्तार अध्ययन करें।

8.5 एक-विमितीय आरेख (One Dimensional Diagrams)

एक विमितीय आरेखों की संरचना, केवल एक ही विमा, अर्थात् लम्बाई के आधार पर की जाती है। इस प्रकार के आरेख में अन्य दो विमाओं की कोई सार्थकता नहीं होती। इस प्रकार के आरेख, दण्डों या स्तम्भ चार्टों (column charts) का रूप ले लेते हैं। दण्ड या स्तम्भ चार्ट, परिमाणों की दृष्टिक तुलना करने में सहायक होते हैं। विभिन्न दण्डों की लम्बाइयाँ, निर्दिष्ट आँकड़ों के परिमाण की समानुपाती होती है। परन्तु, उनकी मोटाई, आँकड़ों के परिमाणों से संबंधित नहीं होती। उनकी मोटाई तो केवल आरेख को आकर्षक बनाने के लिए होती है। उदाहरण के लिए, एक व्यावसायिक संस्था के 1988 और 1989 के लिए उत्पादन आँकड़े क्रमश: 10,000 और 20,000 इकाइयाँ हैं। यदि इन आँकड़ों के लिए एक दण्ड आरेख (bar diagram) की संरचना करें तो इन दो दण्डों की लम्बाइयाँ सामान्यत: 1 : 2 के अनुपात में होनी चाहिए। सामान्यत: इनकी मोटाई समान होगी। एक विमितीय आरेखों का पुन: वर्गीकरण निम्नलिखित विवेचन के अनुसार किया जा सकता है।

8.5.1 सरल दण्ड आरेख (Simple Bar Diagrams)

सरल दण्ड आरेख में एक मान को निरूपित करने के लिए एक दण्ड की संरचना की जाती है। विभिन्न दण्डों की लम्बाइयाँ, निर्दिष्ट आँकड़ों के परिमाण की समानुपाती होती हैं क्योंकि दण्डों की चौड़ाई की कोई सार्थकता नहीं होती। इसलिए सभी दण्डों की चौड़ाई समान होती है। यद्यपि दण्ड देखने में आयत जैसे लगते हैं, किन्तु वे आयत नहीं हैं क्योंकि वे केवल लम्बाई को निरूपित करते हैं। विभिन्न दण्डों के बीच अंतर छोड़ा जा सकता है। सामान्यत: दण्डों के बीच का अंतर एक समान होता है। सरल दण्ड आरेखों की संरचना लम्बवत् रूप में या क्षैतिज रूप में की जा सकती है। सरल दण्ड आरेख के द्वारा धन और ऋण दोनों मान निरूपित किए जा सकते हैं।

सरल दण्ड आरेख की संरचना प्राय: उस स्थिति में की जाती है, जब आँकड़े एक काल अवधि में चर (variable) के विभिन्न मानों को प्रकट करते हैं या जब आँकड़े दो विभिन्न स्थितियों को निरूपित करते हैं। सरल दण्ड आरेख की संरचना बहुत सरल है। उदाहरण 1 और 2 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और सरल दण्ड आरेख बनाने की विधि को सीखिए।

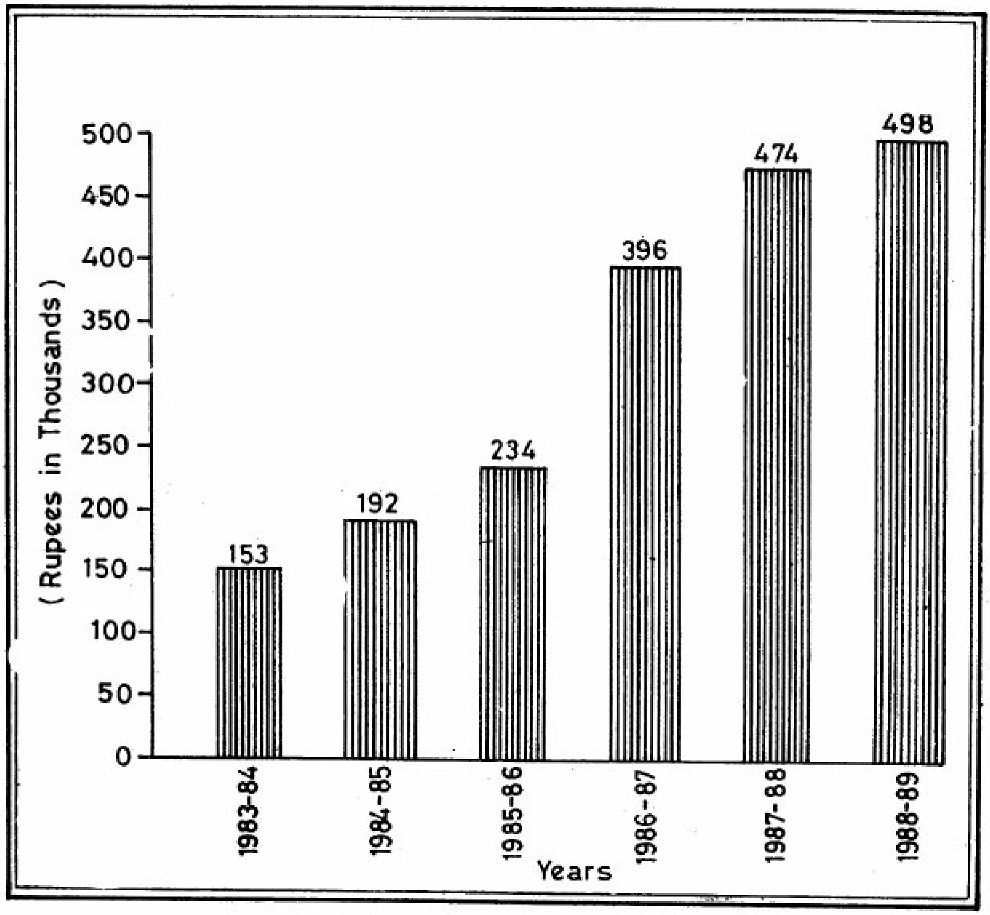
उदाहरण 1

निम्न आँकड़े मारुति उद्योग लिमिटेड में प्रति कर्मचारी परिवर्धित मान से संबंधित हैं। इनके लिए एक सरल दण्ड आरेख की संरचना कीजिए।

वर्ष:	1983–84	1984–85	1985–86	1986–87	1987–88	1988–89
प्रति कर्मचारी परिवर्धित मान (000 रु. में):	153	192	234	396	474	498

हल:

विभिन्न वर्षों के लिए प्रति कर्मचारी परिवर्धित मान (000 रु. में) निर्दिष्ट हैं। निर्दिष्ट आँकड़ों के परिमाणों के अनुपात में प्रत्येक वर्ष के लिए एक दण्ड की संरचना की जाएगी। विभिन्न दण्डों के बीच एक समान अंतर छोड़ा जाएगा। वर्षों को X-अक्ष पर, और प्रति कर्मचारी परिवर्धित मान को Y-अक्ष पर दिखाते हुए दण्डों की संरचना लम्बवत् रूप में की गई है। अब आरेख 8.1 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।



(आरेख 8.1)

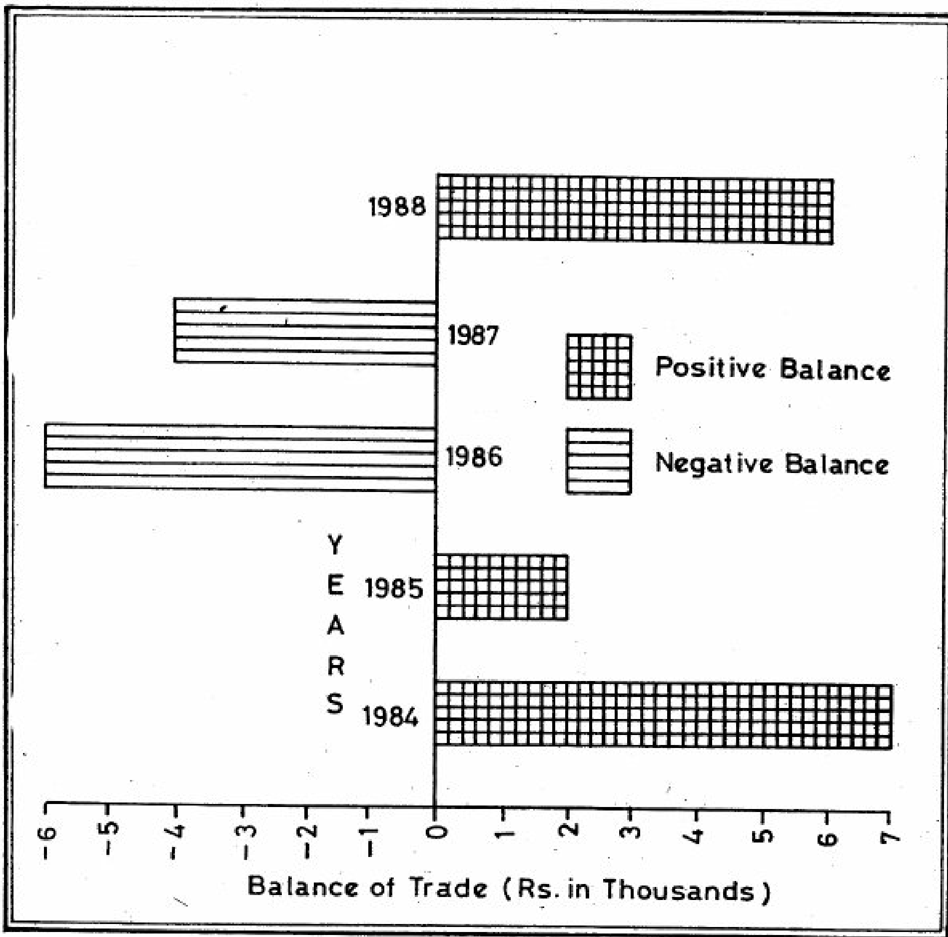
उदाहरण 2

एक देश के व्यापारांतर से संबंधित निम्न आँकड़ों के लिए एक दण्ड आरेख की संरचना कीजिए।

वर्ष :	1984	1985	1986	1987	1988
व्यापारांतर (000 रु. में) :	7	2	– 6	– 4	6

हल:

निर्दिष्ट आँकड़ों में धन मान और ऋण मान, दोनों हैं। इन आँकड़ों को लम्बवत् रूप में या क्षैतिज रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। यदि दण्डों की संरचना क्षैतिज रूप में की जाती है तो धन मानों को लम्बवत् अक्ष के दाईं ओर लिया जाता है और ऋण मानों को उसके बाईं ओर। इसी प्रकार, जब दण्डों की संरचना लम्बवत् रूप में की जाती है तो धन मानों को क्षैतिज अक्ष के ऊपर की ओर लिया जाता है और ऋण मानों को उसके नीचे की ओर। क्योंकि पहले उदाहरण में हमने दण्डों को लम्बवत् प्रदर्शित किया था, अब इस आरेख में हम उन्हें क्षैतिज रूप में प्रस्तुत करेंगे। आरेख 8.2 का, ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और दण्डों की संरचना विधि को समझिए।



(आरेख 8.2)

8.5.2 बहुदण्ड आरेख (Multiple Bar Diagram)

इस प्रकार के आरेख में दो या दो से अधिक दण्ड परस्पर संलग्न बनाए जाते हैं। ये दण्ड या तो विभिन्न चरों को, या एक ही चर के विभिन्न संघटकों को निरूपित करते हैं। चरों के एक निर्दिष्ट मान समुच्चय (set) "K" के लिए दण्ड परस्पर संलग्न बनाए जाते हैं और विभिन्न समुच्चयों के दण्ड समूहों के बीच एक समान अंतर छोड़ दिया जाता है। एक सरल दण्ड आरेख के समान ही विभिन्न दण्डों की लम्बाई, निर्दिष्ट मानों के परिमाण के समानुपाती होती है। सभी दण्डों की चौड़ाई समान होती है। इस आरेख के द्वारा एक ओर चरों के एक समुच्चय में विभिन्न मानों की तुलना करना सरल हो जाता है तो दूसरी ओर, एक निर्दिष्ट अवधि में, एक ही चर के मानों की तुलना करना सरल हो जाता है। सुगम तुलना के लिए एक ही समुच्चय के विभिन्न दण्डों को विभिन्न रंगों से भर दिया जाता है या विभिन्न प्रकार से छायांकित कर दिया जाता है। परन्तु, विभिन्न समुच्चयों में एक ही चर को या संघटक को निरूपित करने वाले दण्डों में रंग या छाया एक समान होनी चाहिए। आइए अब उदाहरण 3 का अध्ययन करें और बहुदण्ड आरेख की संरचना विधि को सीखें।

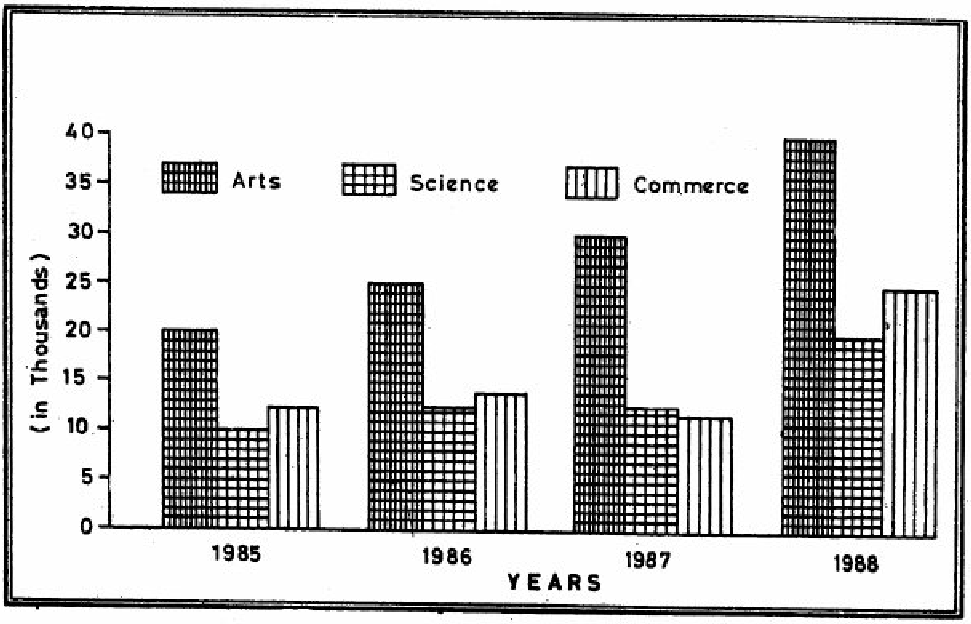
उदाहरण 3

निम्न आँकड़े एक विश्वविद्यालय में विभिन्न संकायों में विद्यार्थियों के नामांकन से संबंधित हैं। इन आँकड़ों का एक बहुदण्ड आरेख के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

वर्ष	कला	विज्ञान	वाणिज्य
1985	20	10	12
1986	25	12	14
1987	30	15	14
1988	40	20	25

हल :

ये आँकड़े एक विश्वविद्यालय में कला, विज्ञान और वाणिज्य के संकायों में विद्यार्थियों के नामांकन से संबंधित हैं। ये आँकड़े चार वर्षों, 1985 से 1988 तक से संबंधित हैं। अत: दण्डों के चार समूहों की संरचना करनी चाहिए, जहाँ प्रत्येक समुच्चय एक वर्ष को निरूपित करे। प्रत्येक समुच्चय में तीनों संकायों को निरूपित करने वाले तीन दण्ड होने चाहिए। प्रत्येक समुच्चय में ये तीनों दण्ड परस्पर संलग्न बनाने चाहिए और उनकी चौड़ाई समान होनी चाहिए। चारों समुच्चयों के बीच एक समान अंतर छोड़ना चाहिए। आरेख 8.3 का अध्ययन, ध्यानपूर्वक कीजिए और बहुदण्ड आरेख संरचना की विधि को समझिए।



(आरेख 8.3)

8.5.3 उप-विभाजित दण्ड आरेख (Sub-divided Bar Diagram)

इस प्रकार के आरेख की संरचना एक ही चर के विभिन्न संघटकों को निरूपित करने के लिए की जाती है। इसे संघटक आरेख (component diagram) भी कहते हैं। इस आरेख में चर के कुल मान को निरूपित करने के लिए एक दण्ड की संरचना की जाती है। फिर इस दण्ड को चर के विभिन्न संघटकों के मानों के अनुपात में उप-विभाजित कर दिया जाता है। वास्तव में इस दण्ड आरेख की संरचना के लिए विभिन्न संघटकों के मानों को संचित कर लिया जाता है और फिर दण्ड को इन संचित बिन्दुओं पर उप-विभाजित कर दिया जाता है। उदाहरण 4 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और उप-विभाजित दण्ड आरेख की संरचना विधि को समझिए।

उदाहरण 4.

निम्न आँकड़े एक कॉलेज में प्रथम वर्ष कक्षा में विभिन्न पाठ्यक्रमों में प्रविष्ट किए गए विद्यार्थियों की संख्या से संबंधित हैं। इन आँकड़ों को एक उप-विभाजित दण्ड आरेख द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

वर्ष	कला	वाणिज्य	विज्ञान
1986	300	200	100
1987	250	250	200
1988	250	300	200

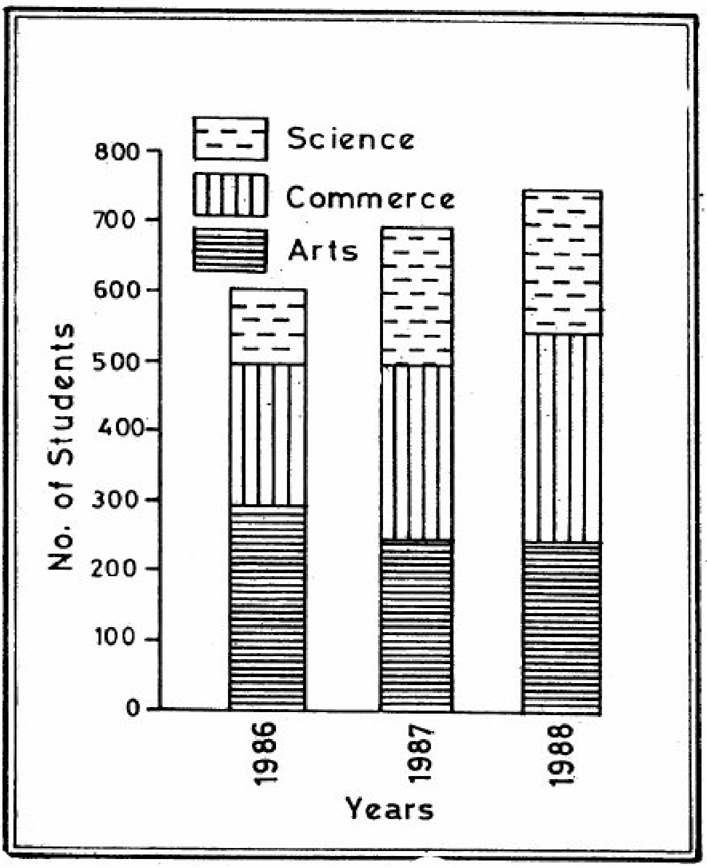
हल:

एक अंतर्विभक्त दण्ड आरेख की संरचना के लिए सबसे पहले हमें वे बिन्दु अभिज्ञात करने हैं जहाँ विभिन्न वर्षों के लिए दण्डों को अंतविभक्त करना है। इस प्रयोजन के लिए हमें संचयी मान ज्ञान करने चाहिए। किसी वर्ष विशेष के लिए, दण्ड की लम्बाई, उस वर्ष में कॉलेज में प्रविष्ट विद्यार्थियों की कुल संख्या के अनुपात में होगी। इस उदाहरण में प्रत्येक दण्ड में तीन संघटक होने चाहिए अर्थात् कला, वाणिज्य और विज्ञान। अब आइए पहले संचयी संख्याएँ परिकलित करें।

विभिन्न पाठयक्रमों में प्रथम वर्ष में प्रविष्ट विद्यार्थियों की संख्या

पाठयक्रम	1986		1987		1988	
	संख्या	संचयी संख्या	संख्या	संचयी संख्या	संख्या	संचयी संख्या
कला	300	300	250	250	250	250
वाणिज्य	200	500	250	500	300	550
विज्ञान	100	600	200	700	200	750
कुल	600		700		750	

ऊपर की सारणी में परिकलित संचयी आँकड़ों से हमें वे विन्दु ज्ञात होते हैं, जहाँ दण्डों को उप-विभाजित करना है। उदाहरण के लिए 1986 की संचयी संख्याओं को लीजिए। दण्ड को बिन्दुओं 300 और 500 पर अंतर्विभक्त करना होगा। अब आरेख 8.4 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और समझिए कि उपरोक्त आँकड़ों के लिए अंतर्विभक्त दण्ड आरेख कैसे बनते हैं।



(आरेख 8.4)

8.5.4 प्रतिशतता उप-विभाजित दण्ड आरेख (Percentage Sub- Divided Bar Diagrams)

उप-विभाजित दण्ड आरेख की संरचना प्रतिशतता संख्याओं के आधार पर भी की जा सकती है। इस प्रकार के आरेख में दण्ड की लम्बाई को 100 मान लिया जाता है और प्रत्येक संघटक की लम्बाई, कुल में उस संघटक के प्रतिशतता अंश के द्वारा निरूपित की जाती है। आरेख में विभिन्न दण्डों की लम्बाइयाँ समान होती हैं। इस आरेख के द्वारा विभिन्न संघटकों के मानों में सापेक्ष परिवर्तनों को निरूपित किया जाता है, न कि यथार्थ परिवर्तनों को।

इस प्रकार के आरेख की संरचना भी ठीक उसी प्रकार करते हैं, जैसे सरल अंतविभक्त दण्ड आरेख की। क्योंकि प्रत्येक संघटक कुल के प्रतिशत के रूप में प्रकट होता है इसलिए सबसे

पहले इन प्रतिशतताओं को परिकलित किया जाता है। फिर इन प्रतिशतताओं को संचित किया जाता है तथा एक दण्ड को इन संचयी बिन्दुओं पर अंतर्विभक्त किया जाता है। उदाहरण 5 और 6 को ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और प्रतिशतता उप-विभाजित दण्ड आरेख की संरचना विधि को समझिए।

उदाहरण 5

निम्न आँकड़े वर्ष 1987 और 1988 में एक कॉलेज में प्रथम वर्ष कक्षा में विभिन्न पाठ्यक्रमों में प्रविष्ट किए गए छात्रों की संख्या से संबंधित हैं। इन आँकड़ों को एक प्रतिशतता उप-विभाजित दण्ड आरेख के रूप में निरूपित कीजिए।

पाठ्यक्रम	1987	1988
कला	200	200
विज्ञान	40	100
वाणिज्य	160	200
कुल	400	500

हल:

एक प्रतिशतता अंतर्विभक्त दण्ड आरेख की संरचना के लिए पहले हमें विभिन्न संघटकों को कुल में प्रतिशतताएँ परिकलित करनी होती हैं। फिर इन प्रतिशतताओं को संचित करना चाहिए और दण्डों को इन संचयी प्रतिशतता बिन्दुओं पर उप-विभाजित करना चाहिए। दोनों दण्डों में से प्रत्येक की लम्बाई को 100 मानेंगे। इस उदाहरण में प्रत्येक दण्ड के तीन संघटक होंगे, अर्थात् कला विज्ञान और वाणिज्य।

प्रथम वर्ष में विभिन्न पाठ्यक्रमों में प्रविष्ट विद्यार्थियों की संख्या

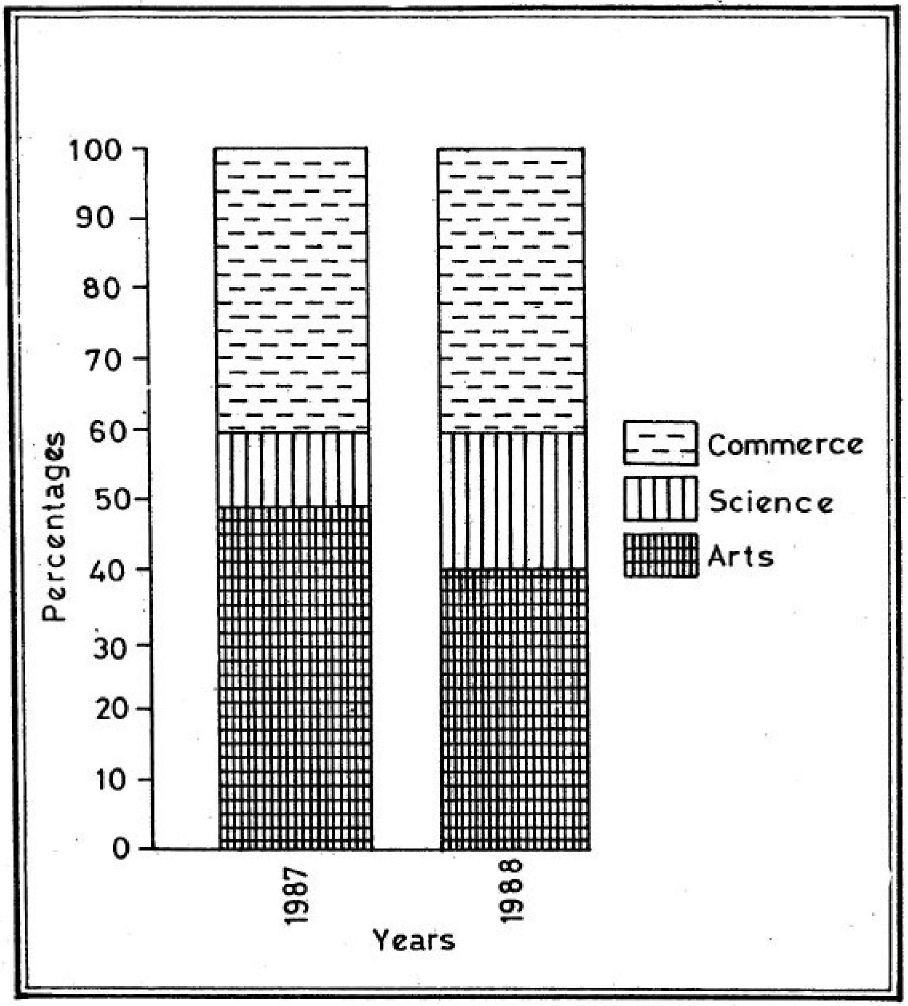
	1987			1988		
पाठ्यक्रम	संख्या	%	संचयी %	संख्या	%	संचयी %
1 कला	200	50	50	200	40	40
2 विज्ञान	40	10	60	100	20	60
3 वाणिज्य	160	40	100	200	40	100
कुल	400	100		500	100	

ऊपर की सारणी में परिकलित संचयी प्रतिशतता आँकड़ों से हमें वे बिन्दु ज्ञात होते हैं जिनपर दण्डों को उप-विभाजित करना है। उदाहरण के लिए 1987 के लिए संचयी प्रतिशतताओं को लीजिए। इस स्थिति में आप वे 100 के लिए एक दण्ड की संरचना करनी होगी और इसे 50 तथा 60 पर उप-विभाजित करना होगा। आरेख 8.5 को ध्यान से देखिए और ज्ञात कीजिए कि दण्ड किस प्रकार बनाए जाते हैं।

उदाहरण 6

निम्न आँकड़े एक टी. वी. कैबिनेट की उत्पादन लागत और विक्रय मूल्य से संबंधित हैं। इन आँकड़ों के लिए एक प्रतिशतता उप-विभाजित दण्ड आरेख की संरचना कीजिए।

मद	उत्पादन लागत, विक्रय मूल्य प्रति कैबिनेट (रु. में)	
	1987	1988
1 कच्चा माल	500	660
2 मज़दूरी	200	330
3 पॉलिश करायी	100	110
4 विक्रय मूल्य	1000	1000
5 लाभ (+) अथवा हानि (–)	+200	– 100



(आरेख 8.5)

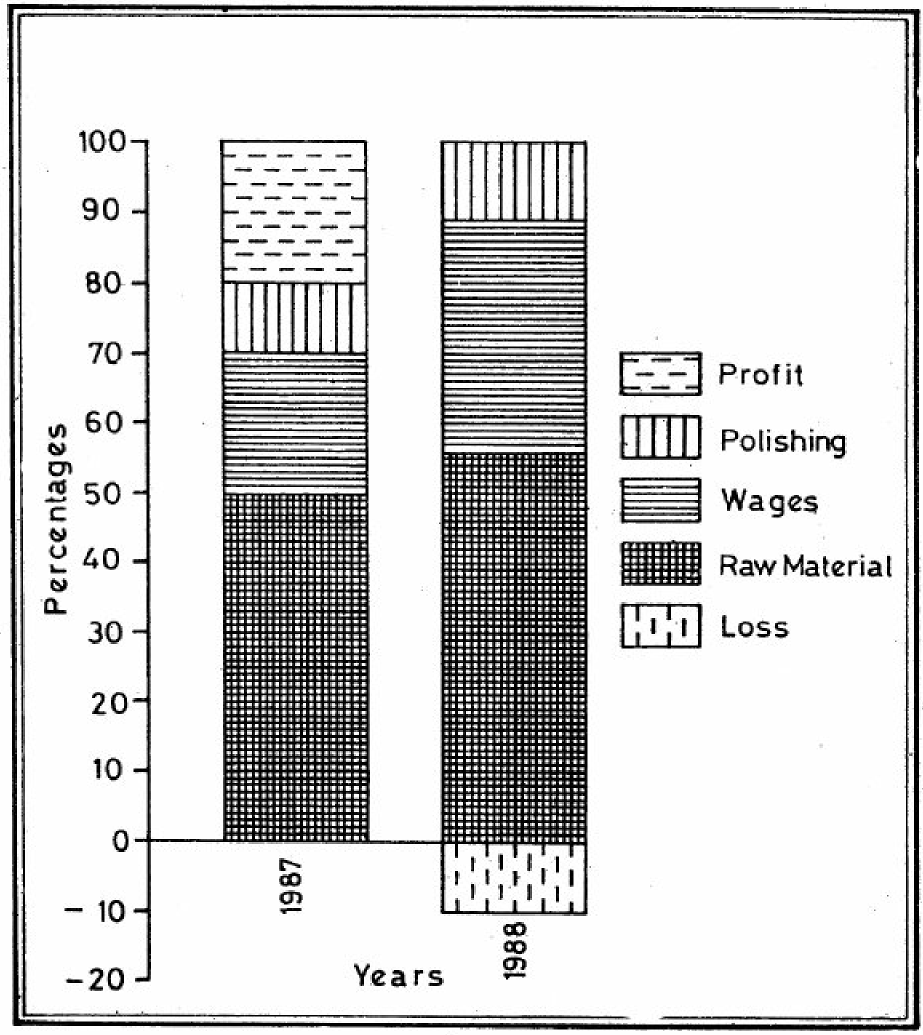
हल:

इस समस्या में एक संघटक के धन मान और ऋण मान, दोनों दिए गए हैं। इस स्थिति में प्रतिशतता उप-विभाजित दण्ड आरेख की संरचना के लिए, सबसे पहले यह निश्चय करना आवश्यक है कि किस चर मान को 100% लेना है, ताकि धन और ऋण प्रतिशतताओं को उचित रूप में से निरूपित किया जा सके। इस उदाहरण में विक्रय मूल्य को 100% लेना चाहिए और अन्य सभी संघटकों को विक्रय मूल्य के प्रतिशतताओं के रूप में प्रकट करना चाहिए। अत: सर्वप्रथम हमें विभिन्न संघटकों के विक्रय मूल्य के प्रतिशतताओं को परिकलित करना होगा। फिर इन प्रतिशतताओं को संचित किया जाएगा और इन संचयी प्रतिशतता बिन्दुओं पर दण्डों को उप-विभाजित किया जाएगा।

प्रत्येक टी. वी. कैबिनेट की लागत और विक्रय मूल्य

	1987			1988		
मद	राशि रु.	%	संचयी %	राशि रु.	%	संचयी %
1 कच्चा माल	500	50	50	660	66	66
2 मजदूरी	200	20	70	330	33	99
3 पॉलिश करायी	100	10	80	110	11	110
4 लाभ (–) अथवा हानि (–)	200	20	100	– 100	– 10	100
5 विक्रय मूल्य	1000	100		1000	100	

1987 के लिए (जबकि लाभ होता है) दण्ड X-अक्ष पर शून्य रेखा से प्रारंभ करेगा। क्योंकि 1988 में हानि होती है, इस हानि की स्थिति को X-अक्ष से नीचे की ओर दिखाना चाहिए। वर्ष 1988 के लिए, दण्ड को अंकित करने की प्रक्रिया X-अक्ष के नीचे से प्रारम्भ होगी। इस प्रकार, 1988 के दण्ड में पहला अंश, जो कच्चे माल (66 प्रतिशत) को, निरूपित करता है, 10 प्रतिशत X-अक्ष के नीचे प्रदर्शित होगा। जो हानि को संकेतित करेगा और शेष 56% (अर्थात् 66%–10%) X-अक्ष के ऊपर होगा। अब मज़दूरी अंश 56% से प्रारम्भ कर 89% (अर्थात् 99%–10%) तक जाएगा। इसी प्रकार अन्य भागों को भी अंकित किया जाएगा। अब प्रतिशतता उप-विभाजित दण्ड आरेख, ठीक वैसा ही लगेगा, जैसा कि आरेख 8.6 में प्रदर्शित है।



(आरेख 8.6)

बोध प्रश्न क

1 आँकड़ों के सारणिक प्रस्तुतीकरण और दृष्टिक प्रस्तुतीकरण में क्या अंतर है?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2 एक-विमितीय और द्विविमितीय आरेखों में अंतर स्पष्ट कीजिए।

. . . .

. . . .

....

....

3 सरल दण्ड आरेख किसे कहते हैं?

....

....

....

....

4 उन परिस्थितियों का वर्णन कीजिए, जिनमें एक बहुदण्ड आरेख की संरचना की जाती हैं ?

....

....

....

....

5 बहुदण्ड आरेख और अंतविभक्त दण्ड आरेख में क्या अंतर है?

....

....

....

....

....

6 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य ?

i) सांख्यिकीय सारणियों की तुलना में आरेखों से निष्कर्ष निकालना सरलतर होता है। ....

ii) आँकड़ों का दृष्टिक प्रस्तुतीकरण उन्हें रूचिकर और रचनात्मक बना देता है। ....

iii` आरेखों की सहायता से किसी भी सांख्यिकीय माप को निर्धारित नहीं किया जा सकता। ....

iv) आँकड़ों के दृष्टिक प्रस्तुतीकरण की सहायता से पूर्व आँकड़ों की उपनति संस्थापित की जा सकती है। ....

v) एक आरेख की संरचना करते समय यह सुनिश्चित करना चाहिए कि आँकड़े सार्थक रूप में प्रस्तुत हों। ....

vi) एक आरेख में सदा उसकी संकेत तालिका भी दी जानी चाहिए। ....

vii) एक विमितीय आरेखों की संरचना केवल लम्बाई के आधार पर की जाती है। ....

viii) एक बहुदण्ड आरेख में, विभिन्न दण्डों की लम्बाई, निर्दिष्ट आँकड़ों के परिणाम की समानुपाती होती है। ....

ix) एक दण्ड और एक आयत में कोई अंतर नहीं होता। ....

x) सामान्यतः विभिन्न दण्डों के बीच एक समान अंतर छोड़ना चाहिए। ....

xi) बहुदण्ड आरेख की स्थिति में विभिन्न दण्डों की लम्बाई निर्दिष्ट आँकड़ों के परिणामों के अनुपात में परिवर्तित होती है। ....

xii) अंतर्विभक्त दण्ड आरेख की संरचना एक ही निर्दिष्ट चर के विभिन्न संघटकों को प्रदर्शित करने के लिए की जाती है। ....

7 **कोष्ठक में दिए गए शब्दों में से उपयुक्त शब्द के द्वारा रिक्त स्थान को भरिए:**

i) आँकड़ों का दृष्टिक प्रस्तुतीकरण, संख्यात्मक आँकड़ों की मंदता ·········· करता है। (का विलोपन/में वृद्धि)

ii) आरेखों पर एक सचेत दृष्टिपात जटिल आँकड़ो को तुलना को ·········· बना देता है। (अधिक कठिन/सरलतर)

iii) एक सरल दण्ड आरेख की संरचना ·········· निर्दिष्ट मान (मानों) को निरूपित करने के लिए कहते हैं। (एक/दो)

iv) सरल दण्ड, ऋण मानों को निरूपित ·········· सकते हैं। (कर/नहीं कर)

v) बहुदण्ड आरेखों में विभिन्न दण्डों की चौड़ाई ·········· रखते हैं। (भिन्न/समान)

vi) अंतर्विभक्त दण्ड आरेख में प्रत्येक दण्ड को ·········· मानों के आधार पर अंतर्विभक्त करते हैं। (संचयी/यथार्थ)

vii) एक अंतर्विभक्त दण्ड आरेख को प्रतिशतता के आधार पर बना ·········· हैं। (सकते/नहीं सकतें)

viii) एक अंतर्विभक्त दण्ड आरेख में ऋण मानों को दिखा ·········· हैं। (सकते/नहीं सकते)

8.6 द्विविमितीय आरेख (Two Dimensional Diagrams)

जैसा कि आप जानते हैं, आरेखों को निम्न तीन वर्गों में विभाजित किया जा सकता है: (1) एकविमितीय आरेख, (2) द्विविमितीय आरेख, और (3) त्रिविमितीय आरेख। हम पहले ही एकविमितीय आरेखों के बारे में परिचर्चा कर चुके हैं। आइए अब द्विविमितीय आरेखों पर विचार करें।

जैसा कि आप जानते हैं, लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई, ये तीन विमाएँ हैं जिनके आधार पर आरेखों की संरचना की जाती है। एक-विमितीय आरेखों को केवल लम्बाई के आधार पर बनाया जाता है और इनकी चौड़ाई की कोई भी सार्थकता नहीं होती। सरल दण्ड आरेख में दण्डों की लम्बाई, निर्दिष्ट आँकड़ों के परिमाण की समानुपाती होती है। परन्तु, द्विविमितीय आरेख दो विमाओं अर्थात् लम्बाई और चौड़ाई के आधार पर बनाए जाते हैं। क्योंकि लम्बाई और चौड़ाई का गुणनफल, क्षेत्रफल के परिमाण को संकेतित करता है, इस प्रकार के आरेख को क्षेत्रफल आरेख कहा जाता है।

द्विविमितीय आरेखों को निम्न वर्गों में विभाजित किया जा सकता है: (1) आयत, (2) उप-विभाजित आयत (3) वर्ग और वृत्त; तथा (4) वृत्तीय चित्र। आइए अब इनमें से प्रत्येक वर्ग के बारे में सविस्तार विवेचना करें।

8.6.1 आयत (Rectangies)

एक आयत की संरचना लम्बाई और चौड़ाई के आधार पर की जाती है और यह क्षेत्रफल को प्रकट करता है। आयत की संरचना करने से पूर्व, हमें उन चरों के बारे में निश्चय करना होता है जिन्हें क्रमशः आयत की लम्बाई और चौड़ाई द्वारा निरूपित करना है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक विनिर्माता ने, किसी विशेष मास में एक उत्पाद की 10,000 इकाइयों का उत्पादन किया और उत्पादन लागत प्रति इकाई 20 रुपए है। आयत की संरचना के लिए हम मान लेंगे कि उत्पादन की कई इकाइयों की संख्या, लम्बाई को निरूपित करती है और उत्पादन लागत प्रति इकाई, चौड़ाई को निरूपित करती है। क्योंकि एक आयत, क्षेत्रफल को प्रकट करता है इसलिए इस स्थिति में आयत कुल उत्पादन लागत (अर्थात् $10{,}000 \times 20 =$ 2,00,000 रुपए) को प्रदर्शित करेगी। आइए अब एक उदाहरण पर विचार करें और व्यावहारिक रूप में आयत आरेख बनाना सीखें।

उदाहरण 7

निम्न आँकड़े, एक विनिर्माता द्वारा 1989 के पहले दो मासों में उत्पादन की गई इकाइयों की संख्या और लागत प्रति इकाई से संबंधित है। इन आँकड़ों के लिए एक आयत आरेख बनाइए।

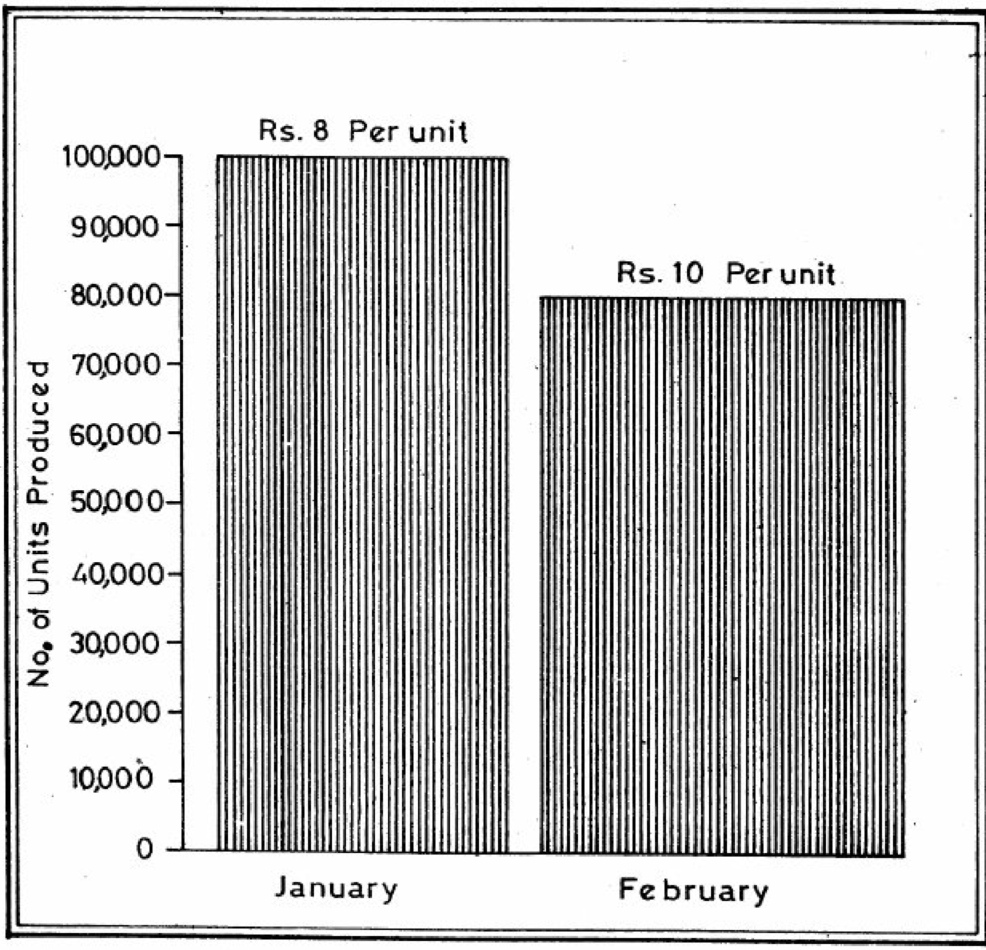
	जनवरी	फरवरी
उत्पादन इकाइयाँ	1,00,000	80,000
लागत प्रति इकाई	8.00 रुपए	10.00 रुपए

हल:

इन आँकड़ों से हमने दो आयतों को, निम्न आधार पर बनाना है:

	आयत-I	आयत-II
लम्बाई (उत्पादन इकाइयाँ) (इकाइयों में)	1,00,000	80,000
चौड़ाई (लागत प्रति इकाई) (रुपए में)	8	10

दो आयतों की लम्बाइयों में अनुपात 10 : 8 होगा और उनकी चौड़ाइयों में अनुपात 8 : 10 होगा। अब आरेख 8.7 को देखिए, जिसमें दोनों आयतों को प्रस्तुत किया गया है परन्तु आपको यह भी ध्यान देना चाहिए कि दोनों आयतों की स्थिति में क्षेत्रफल समान है।



(आरेख 8.7)

8.6.2 उप-विभाजित आयत (Sub-divided Rectangle)

एक आयत को उप-विभाजित भी किया जा सकता है। उप-विभाजित आयत भी विभिन्न

संघटनों के संगत क्षेत्रफल को प्रदर्शित करेगी। एक आयत को उप-विभाजित करने के लिए विभिन्न संघटकों के संचयी मानों का परिकलन किया जाता है और इन संचयी मानों के अनुसार आयत को उप-विभाजित किया जाता है। आइए एक उदाहरण में और उप-विभाजित आयतों को बनाएँ।

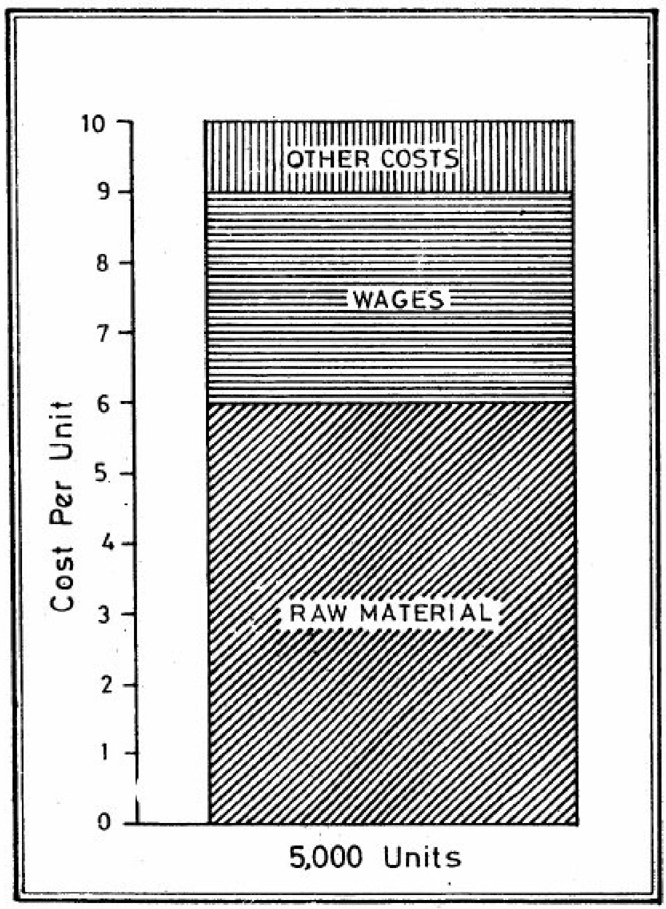
उदाहरण 8

नेम्न आँकड़े एक विनिर्माता प्रतिष्ठान द्वारा उत्पादन की गई इकाइयों की संख्या और विभिन्न मदों की लागत प्रति इकाई से संबंधित हैं। इन आँकड़ों के लिए एक उप-विभाजित आयत की संरचना कीजिए।

i) उत्पादन की गई इकाइयाँ	5,000 इकाइयाँ
ii) कच्चे माल की लागत	30,000 रु.
iii) मजदूरी	15,000 रु.
iv) अन्य लागत	5,000 रु.

हल:

पहले हमें आयत की लम्बाई और चौड़ाई निर्धारित करनी है। लम्बाई को लागत प्रति इकाई द्वारा निरूपित किया जा सकता है, जोकि कुल लागत को इकाइयों की संख्या से भाजित करने पर प्राप्त होती है अर्थात् जो 50,000 रुपए ÷ 5,000 = 10 रु. है। चौड़ाई का उत्पादन की गई इकाइयों की संख्या से निरूपित किया जा सकता है अर्थात् 5,000 इकाइयाँ। क्योंकि एक उप-विभाजित आयत बनाना अभीष्ठ है अत: हमें प्रत्येक मद के **(व्यय शीर्ष)** के लिए लागत प्रति इकाई निर्धारित करनी होगी और फिर उनके संचयी मान ज्ञात करने होंगे। नीचे की सारणी को देखिए, जिसमें इन संचयी मानों का परिकलन किया गया है और उन्हें प्रस्तुत किया गया है।



संचयी मानों का परिकलन

(उत्पादन की गई इकाइयाँ 5.000)

मद	कुल लागत (रू.)	प्रति इकाई लागत (रू.)	संचयी लागत प्रति इकाई (रू.)
1 कच्चा माल	30.000	6	6
2 मज़दूरी	15.000	3	9
3 अन्य लागत	5.000	1	10
कुल	50.000	10	

क्योंकि हमने संचयी मानों को परिकलित कर लिया है, अत: अब हम उप-विभाजित आयत बनाने में प्रवृत्त हो सकते हैं। आरेख 8.8 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और समझने का प्रयत्न कीजिए कि उप-विभाजित आयत की संरचना किस प्रकार की जाती है।

8.6.3 वर्ग और वृत्त (Squares and Circles)

वर्ग और वृत्त भी द्विविमितीय आरेख हैं क्योंकि ये भी क्षेत्रफल को निरूपित करते हैं। वर्ग की सभी भुजाएँ समान होती हैं। अत: वर्ग की स्थिति में लम्बाई और चौड़ाई समान होती है। वर्ग की एक भुजा निर्धारित करने के लिए हम निर्दिष्ट आँकड़ों का वर्गमूल परिकलित करते हैं और फिर वर्ग की संरचना करने के लिए एक उपयुक्त स्केल को अपनाते हैं। यदि एक ही आरेख में एक से अधिक वर्ग बनाए जाएँ तो सभी वर्गों के आधार पर एक ही रेखा पर लेते हैं।

एक वृत्त भी क्षेत्रफल को निरूपित करता है, जो सूत्र πr^2 द्वारा परिकलित किया जाता है। वृत्त की संरचना के लिए हम उस वृत्त की त्रिज्या (radius) ज्ञात करते हैं। विभिन्न वृत्तों की त्रिज्याओं के अनुपात ज्ञात करने के लिए हम निर्दिष्ट आँकड़ों के वर्गमूल परिकलित करते हैं। जब एक ही आरेख में, एक से अधिक वृत्त बनाने हों तो विभिन्न वृत्तों के केन्द्र बिन्दु, एक ही सरल रेखा में होने चाहिए। आपको स्मरण रखना चाहिए कि निर्दिष्ट आँकड़ों के वर्गमूल ज्ञात करने पर बड़े मान काफी कम हो जाते हैं। सामान्यत: वृत्त आरेख का प्रयोग उस स्थिति में किया जाता है, जब एक ही चर के विभिन्न मानों को बिना किसी उपविभाजन के प्रदर्शित करना हो। आइए अब वर्गों और वृत्तों का बनाना, व्यावहारिक रूप से सीखें।

उदाहरण 9

निम्न आँकड़े वर्ष 1987–88 के लिए विभिन्न विकास शीर्षों पर वार्षिक योजना परिव्यय से संबंधित हैं। इन आँकड़ों के लिए वर्ग और वृत्त बनाइए।

	राशि (करोड़ रुपयों में)
1 कृषि और संश्रित क्रियाकलाप	2,378
2 ऊर्जा	12,999
3 उद्योग और खनिज	5,635

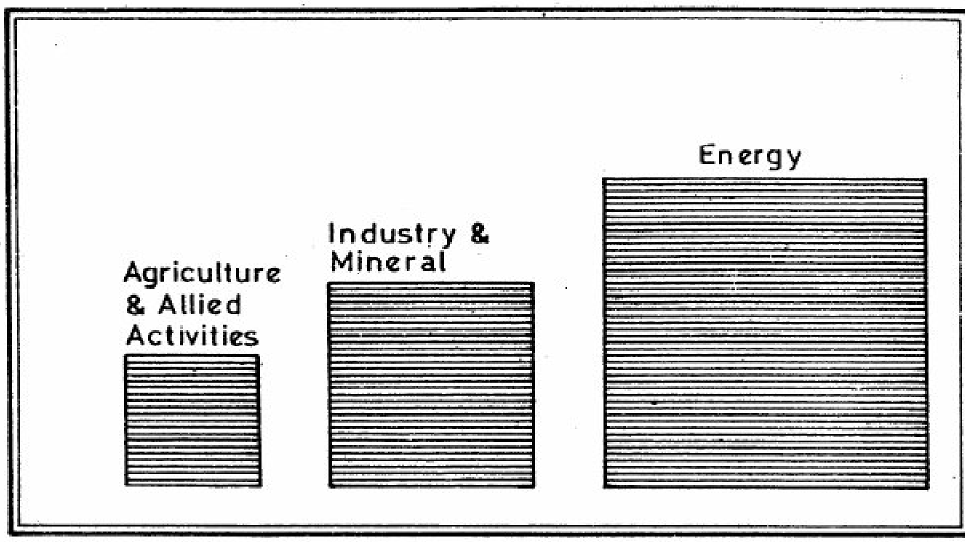
हल:

पहले हमें निर्दिष्ट आँकड़ों के वर्गमूल परिकलित करने हैं। फिर, वर्गों की भुजाओं और वृत्तों की त्रिज्याएँ निर्धारित करने के लिए उपयुक्त स्केल को अपनाना है।

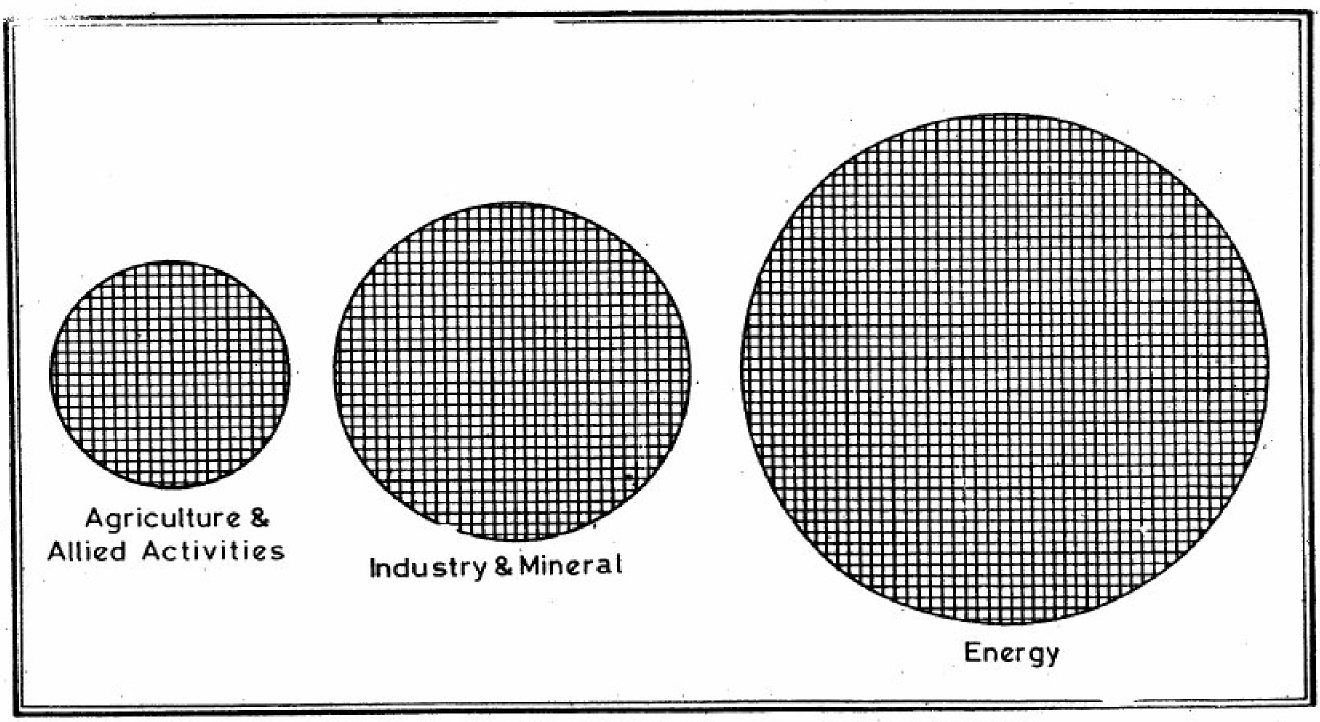
वर्गमूलों का परिकलन

विकास शीर्ष	राशि (करोड़ रु. में)	वर्गमूल	वर्ग की भुजा या वृत्त की त्रिज्या (सेंटीमीटरों में)
1 ऊर्जा	12,999	114.01	4.68
2 उद्योग और खनिज	6,243	79.01	3.24
3 कृषि और संश्रित क्रियाकलाप	2.378	48.76	2.00

वर्ग की भुजा या वर्ग की त्रिज्या निर्धारित करने के लिए न्यूनतम वर्गमूल मान को आधार रूप में लिया गया है। ऊपर की स्थिति में वर्गमूल मान 48.76 को 2.00 सेंटीमीटर के तुल्य लिया गया है। अन्य वर्गभुजा/वृत्त-त्रिज्या विभिन्न वर्गमूल मानों के समानुपाती निर्धारित किए गए हैं। अब वर्गों और वृत्तों को क्रमश: आरेखों 8.9 क और 8.9 ख के रूप में बनाया गया है।



(आरेख 8.9 क)



(आरेख 8.9 ख)

8.6.4 वृत्तीय आरेख (Pie Diagrams)

वृत्तीय चित्र एक उप-विभाजित वृत्त होता है। निर्दिष्ट चर के विभिन्न संघटकों को सूचित करने के लिए एक वृत्त को उप-विभाजित किया जाता है। वृत्तीय चित्र में विभिन्न उपखंडों के क्षेत्रफल, निरूपणीय आँकड़ों के समानुपाती होते हैं। विभिन्न संघटकों का योग 360° । (एक बिन्दु के गिर्द कुल अंश) मान लिया जाता है और विभिन्न संघटकों के अंशों को संघटकों के कुल के समानुपात में परिकलित किया जाता है। उदाहरण के लिए एक ड्रेसिंग मेज की कुल

उत्पादन लागत 500 रुपए है, जिसमें कच्चे माल की लागत 200 रुपए है। कुल उत्पादन लागत अर्थात् 500 रुपए को 360 के तुल्य मान लिया जाएगा। इसमें उपर्युक्त कच्चे माल का भाग 40%, अर्थात् 144 है। इसी प्रकार अन्य संघटकों के अंशों का परिकलन किया जाएगा। अब वृत्त को इन संचयी अंशों के आधार पर उप-विभाजित किया जाएगा। एक वृत्तीय चित्र विभिन्न संघटकों में संबंध को सरलतापूर्वक ज्ञात करने में हमारी सहायता करता है। परन्तु वृत्त के उप-खंडों की संख्या बहुत बड़ी नहीं होनी चाहिए। आइए अब हम एक उदाहरण लें और वृत्तीय चित्र को बनाएँ।

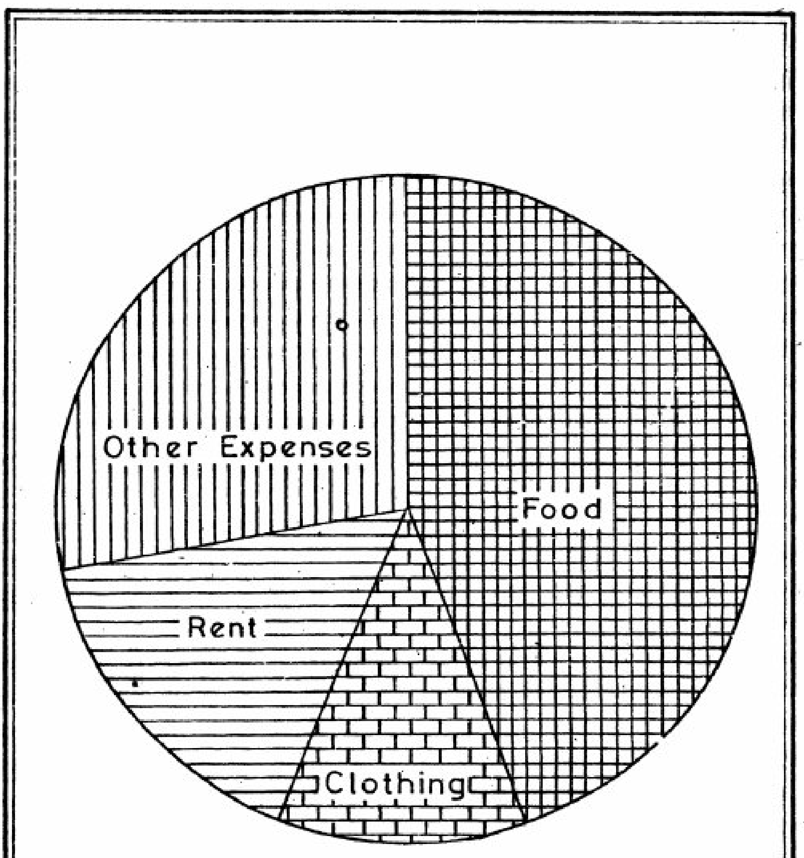
उदाहरण 10

एक कुटुम्ब द्वारा एक माह में विभिन्न मदों पर व्यय के बारे में निम्न सूचना को एक वृत्तीय चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

मद	राशि (रु.)
1 खाद्य	800
2 कपड़ा	200
3 मकान किराया	300
4 अन्य व्यय	500

हल:

विभिन्न मदों पर कुल व्यय 1,800 रुपए है। इसे 360° के तुल्य मान लिया गया है। इस आधार पर विभिन्न मदों के लिए अंशों की संख्या परिकलित की गई है। उसे नीचे सारणी रूप में प्रस्तुत किया गया है। तब वृत्तीय चित्र को बनाया गया है, जैसा कि आरेख 8.10 में प्रदर्शित है।



अंशों का परिकलन

मद	राशि (रू.)	अंश	संचयी अंश
1 खाद्य	800	160	160
2 कपड़ा	200	40	200
3 मकान किराया	300	60	260
4 अन्य व्यय	500	100	360
कुल	1,800	360	

बोध प्रश्न ख

1 **एक आयत और एक दण्ड में अंतर स्पष्ट कीजिए।**

....
....
....
....
....
....

2 **वृत्तों की संरचना के लिए निर्दिष्ट मानों के वर्गमूल परिकलित करने के महत्व का वर्णन कीजिए।**

....
....
....
....
....
....

3 **एक वृत्त और एक वृत्तीय चित्र में अंतर स्पष्ट कीजिए।**

....
....
....
....
....
....

4 **बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य ?**

i) **द्विविमितीय आरेख, लम्बाई और ऊँचाई के आधार पर बनाए जाते हैं।** ....

ii) **आयत को भी उप-विभाजित किया जा सकता है।** ....

iii) **एक उप-विभाजित आयत में उप-विभाजित भाग भी क्षेत्रफल को संकेतित करते हैं।** ....

iv) **उप-विभाजित आयत बनाने के लिए संचयी मान लेने की कोई आवश्यकता नहीं है।** ....

v) वृत्त बनाने के लिए हम निर्दिष्ट आँकड़ों का वर्गमूल परिकलित करते हैं। ....

vi) वर्गों की संरचना के लिए निर्दिष्ट **मानों के वर्गमूल** परिकलित करने से बड़े मान काफी कम हो जाते हैं। ....

vii) वृत्तीय चित्र की संरचना करते समय विभिन्न संघटकों के अंशों का परिकलन विभिन्न संघटकों के मानों के कुल मान के समानुपात में किया जाता है। ....

5 कोष्ठक में दिए गए शब्दों में से उपयुक्त शब्द द्वारा रिक्त स्थान को भरिए:

i) द्विविमितीय आरेख .... को संकेतित करते हैं। (आयतन/क्षेत्रफल)

ii) एक वर्ग की भुजा निर्धारित करने के लिए हम निर्दिष्ट आँकड़ों का वर्गमूल .... हैं। (परिकलित करते/परिकलित नहीं करते)

iii) यदि एक ही आरेख में एक से अधिक वर्ग बनाने हों तो यह .... है कि सभी वर्गों के आधार पर एक सरल रेखा में हों। (आवश्यक/आवश्यक नहीं)

iv) वृत्त की रचना करने के लिए हम उसका .... निर्धारित करते हैं। (व्यास/त्रिज्या)

v) वृत्तीय चित्र के बनाने में विभिन्न संघटकों के योगफल को .... मान लेते हैं। (360°/300°)

vi) वृत्तीय चित्र में उपखंडों की संख्या बहुत बड़ी .... चाहिए। (होनी/नहीं होनी)

8.7 सारांश

सारणिक रूप में प्रस्तुतीकरण के अतिरिक्त आँकड़ों को आरेखों और आलेखों के रूप में भी प्रस्तुत किया जा सकता है। आँकड़ों का दृष्टिक प्रस्तुतीकरण, संख्यात्क आँकड़ों की मन्दता का विलोपन कर देता है, आँकड़ों की तुलना को सरल बना देता है, विभिन्न सांख्यिकीय मापों को निर्धारित करने में सहायक होता है और पूर्व निष्पादन की उपनति का संस्थापन करता है।

आरेखों की संरचना, आलेखीय अक्षों, X-अक्ष और Y-अक्ष पर की जाती है। परन्तु यह आवश्यक नहीं कि उन्हें ग्राफ पेपर पर ही बनाया जाए। आरेख का एक संक्षिप्त और स्वतः स्पष्ट शीर्षक होना चाहिए। आरेख के विभिन्न संघटकों को प्रदर्शित करने के लिए रंगों और छाया का प्रयोग किया जाता है। आरेख को सार्थक बनाने के लिए उपलब्ध स्थान का अनुकूलतम उपयोग करना चाहिए।

आरेखों को निम्न तीन वर्गों में विभाजित किया जा सकता है: (1) एक-विमितीय आरेख, (2)द्विविमितीय आरेख; और (3) त्रिविमितीय आरेख। एक-विमितीय आरेख की संरचना केवल लम्बाई के आधार पर की जाती है। विभिन्न दण्डों की लम्बाई, आँकड़ों के परिमाण के समानुपाती होती है। इन आरेखों में ऋण मानों को भी प्रदर्शित किया जा सकता है। दण्डों को क्षैतिज रूप में या लम्बवत् रूप में बनाया जा सकता है। एक-विमितीय आरेख, निम्न प्रकार के होते हैं: (1) सरल दण्ड आरेख, (2) बहु-दण्ड आरेख, (3)उप-विभाजित दण्ड आरेख; और (4) प्रतिशतता उप-विभाजित दण्ड आरेख। सरल दण्ड आरेख एक चर को निरूपित करता है, जबकि बहु-दण्ड आरेख एक से अधिक चरों को निरूपित करता है। एक उप-विभाजित दण्ड आरेख एक निर्दिष्ट चर के विभिन्न संगटकों को निरूपित करता है और इसे प्रतिशतता के आधार पर भी बनाया जा सकता है।

द्विविमितीय आरेखों की संरचना लम्बाई और चौड़ाई के आधार पर की जाती है। ये आरेख क्षेत्रफल प्रकट करते हैं। द्विविमितीय आरेखों के निम्न प्रकार हैं: (1) आयत, (2) उप-

विभाजित आयत, (3) वर्ग और वृत्त; तथा (4) वृत्तीय चित्र। आयत की संरचना के लिए उसकी लम्बाई और चौड़ाई ज्ञात करनी होती है। एक आयत को भी उप-विभाजित किया जा सकता है तथा उप-विभाजित आयत भी क्षेत्रफल प्रकट करते हैं। वर्ग और वृत्त बनाने के लिए निर्दिष्ट आँकड़ों का वर्गमूल परिकलित करना होता है तथा फिर वर्ग की स्थिति में भुजा या वृत्त की स्थिति में त्रिज्या निर्धारित की जाती है। एक वृत्तीय चित्र एक उप-विभाजित वृत्त होता है, जहाँ विभिन्न उपखंडों को एक बिन्दु के गिर्द 360° के आधार पर निर्धारित किया जाता है। विभिन्न उपखंडों के अंश, विभिन्न संघटकों के कुल मान के समानुपात में होते हैं।

8.8 शब्दावली

दण्ड: एक एक-विमितीय आरेख, जो केवल लम्बाई को प्रकट करता है और जिसकी चौड़ाई की कोई सार्थकता नहीं होती। यद्यपि देखने में यह आयत जैसा ही लगता है, किन्तु यह आयत नहीं होता क्योंकि आयत में लम्बाई और चौड़ाई, दोनों सार्थक होते हैं।

वृत्त: एक द्विविमितीय आरेख, जो क्षेत्रफल πr^2 को प्रकट करता है।

बहुदण्ड: एक, एक-विमितीय आरेख, जिसमें एक से अधिक दण्ड होते हैं और जो या तो विभिन्न चरों के मानों को या फिर एक ही चर के विभिन्न संघटकों के मानों को प्रकट करते हैं।

एक-विमितीय आरेख: एक ऐसा आरेख जिसकी संरचना केवल एक ही विमा, अर्थात् लम्बाई के आधार पर की जाए।

वृत्तीय चित्र: एक वृत्त जिसे त्रिज्य खंडों में उप-विभाजित किया गया हो और जो त्रिज्य खंड एक ही चर के विभिन्न संघटकों के सापेक्ष क्षेत्रफल को प्रकट करें।

आयत: एक द्विविमितीय आरेख, जिसकी संरचना चरों को निरूपण करने वाली लम्बाई और चौड़ाई पर इस प्रकार आधारित हो कि क्षेत्रफल किसी चर को निरूपित करे।

वर्ग: एक द्विविमितीय आरेख, जो क्षेत्रफल को प्रकट करें। क्योंकि वर्ग की सभी चारों भुजाएँ समान होती हैं, इसलिए इसे बनाने के लिए एक भुजा को निर्धारित किया जाता है।

उप-विभाजित दण्ड आरेख; एक दण्ड आरेख, जिसे एक ही चर के विभिन्न संघटकों मानों के आधार पर उप-विभाजित किया गया हो।

उप-विभाजित आयत: एक आयत, जिसे एक ही चर के विभिन्न संघटकों के मानों के आधार पर उप-विभाजित किया गया हो।

द्विविमितीय आरेख: एक आरेख जिसकी संरचना दो विमाओं अर्थात लम्बाई और चौड़ाई पर आधारित हो।

त्रिविमितीय आरेख: एक आरेख जिसकी संरचना तीन विमाओं, अर्थात् लम्बाई, चौड़ाई और ऊँचाई पर आधारित हो।

X-अक्ष: आलेखीय अक्ष, जिसे क्षैतिज रूप में खींचा जाता है।

Y-अक्ष: आलेखीय अक्ष, जिसे लम्बवत् रूप में खींचा जाता है।

8.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 6 i) सत्य, ii) सत्य, iii) असत्य, iv) सत्य v) सत्य, vi) सत्य, vii) सत्य, viii) सत्य, ix) असत्य, x) सत्य, xi) सत्य xii) सत्य,

7 i) का विलोपन, ii) सरलतर, iii) एक, iv) कर, v) अभिन्न, vi) संचयी, vii) सकते, viii) सकते

ख - 4 i) असत्य, ii) सत्य, iii) सत्य, iv) असत्य, v) सत्य, vi) सत्य, vii) सत्य,

5 i) क्षेत्रफल, ii) परिकलन करते, iii) आवश्यक, iv) त्रिज्या, v) 360°, vi) नहीं होनी।

8.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

प्रश्न

1 आँकड़ों का दृष्टिक प्रस्तुतीकरण किसे कहते हैं ? आँकड़ों के दृष्टिक प्रस्तुतीकरण के उद्देश्य क्या हैं ?

2 सांख्यिकी में प्रयुक्त होने वाले विभिन्न प्रकार के आरेख बताइए। एक-विमितीय आरेखों के विभिन्न प्रकारों की विवेचना कीजिए।

3 आँकड़ों के आरेखीय प्रस्तुतीकरण के नियमों की विवेचना कीजिए।

4 वर्गों और वृत्तों की संरचना विधि को एक उदाहरण द्वारा स्पष्ट कीजिए।

5 द्विविमितीय आरेखों के विभिन्न प्रकारों की विवेचना कीजिए।

अभ्यास

1 1984–85 में विभिन्न तिलहनों के उत्पादन संबंधी निम्न आँकड़ों के लिए एक सरल दण्ड आरेख बनाइए।

तिलहन	उत्पादन (कि. ग्रा./हैक्टेयर)
मूंगफली	898
तोरिया और सरसों	711
सोयाबीन	768
तिल	246
तिल्ली	251

2 निम्न आँकड़े भारत में विभिन्न वर्गों में धान के उत्पादन से संबंधित हैं।

वर्ष	उत्पादन (लाख टन)
1983–84	601
1984–85	583
1985–86	638
1986–87	604

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक सरल दण्ड आरेख बनाइए।

3 निम्न आँकड़ों को एक उपयुक्त आरेख के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

वर्ष	1984	1985	1986	1987	1988
लाभ (+) या हानि (–) (000 रु. में)	+ 5	+ 3	– 2	+ 4	– 1

4 निम्न आँकड़ों को एक बहुदण्ड आरेख के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

फसल	उत्पादन (लाख टनों में) 1984–85	1985–86
गेहूं	44	47
चावल	58	64
दालें	12	13
अन्य धान्य	31	26

5 निम्न आँकड़ों को एक अंतर्विभक्त दण्ड आरेख द्वारा निरूपित कीजिए:

परिणाम	विद्यार्थियों की संख्या		
	1985–86	1986–87	1987–88
प्रथम श्रेणी	50	90	80
द्वितीय श्रेणी	250	300	300
तृतीय श्रेणी	100	120	200
फेल	100	90	170
कुल	500	600	750

6 निम्न आँकड़े प्रति अल्मारी लागत, विक्रय-प्राप्ति, लाभ या हानि से संबंधित हैं। इनके लिए एक प्रतिशतता उप-विभाजित दण्ड आरेख की संरचना कीजिए।

	1989		
विशिष्टियाँ	जनवरी	फरवरी	मार्च
सामग्री	400	550	550
मजदूरी	200	300	350
अन्य लागत	100	150	200
विक्रय प्राप्ति प्रति अलमारी	800	1,000	1,000
लाभ (+) या हानि (−)	+ 100	0	− 100

7 निम्नलिखित आँकड़ों का संबंध दो परिवारों के मासिक खर्च से है। इन्हें आयतों के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

खर्च की मद	परिवार	परिवार
खाद्य	1,000	1,000
कपड़ा	300	500
मकान किराया	500	750
विभिन्न	200	250
कुल	2,000	2,500

8 निम्न आँकड़ों के लिए वर्गों और वृत्तों की संरचना कीजिए:

देश	धान की उपज (पौण्ड प्रति एकड़)
भारत	728
संयुक्त राज्य अमरीका	1,469
इटली	2,903

9 नई दिल्ली में विभिन्न समाचार पत्रों की बिक्री के प्रतिशतता अंश निम्नानुसार हैं। इन आँकड़ों के लिए एक वृत्तीय चित्र की संरचना कीजिए:

समाचार-पत्र का नाम	प्रतिशत अंश
टाइम्स ऑफ इण्डिया	45
इण्डियन एक्सप्रेस	12
हिन्दुस्तान टाइम्स	28
अन्य	14
कुल	100

10 निम्न आँकड़े, 1984–85 में विभिन्न उपभोक्ता खंडों द्वारा बिजली की माँग से संबंधित हैं। इन आँकड़ों के लिए एक वृत्तीय चित्र की संरचना कीजिए।

उपभोक्ता खंड	माँग (अरब)
औद्योगिक	735
घरेलू	155
कृषि	110
अन्य	150

टिप्पणी: ये प्रश्न और अभ्यास, इस इकाई को अच्छी तरह से समझने में आपकी सहायता करेंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। परन्तु अपने उत्तरों को, मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय को मत भेजिए। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 9 रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण

इकाई की रूपरेखा

9.0 उद्देश्य
9.1 प्रस्तावना
9.2 रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण का महत्व
9.3 रेखाचित्र की संरचना के नियम
9.4 काल श्रेणियों के रेखाचित्र-कालिक चित्र
9.5 कालिक चित्रों के प्रकार
  9.5.1 एक आश्रित चर-कालिक चित्र
  9.5.2 एक से अधिक आश्रित चर-कालिका चित्र
  9.5.3 मिश्रित रेखाचित्र
  9.5.4 विस्तार रेखाचित्र
9.6 आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्र
9.7 आवृत्ति बंटन रेखाचित्रों के प्रकार
  9.7.1 आयत चित्र
  9.7.2 आवृत्ति बहुभुज
  9.7.3 आवृत्ति वक्र
  9.7.4 तोरण या संचयी आवृत्ति बंटन रेखाचित्र
9.8 सारांश
9.9 शब्दावली
9.10 बोध प्रश्नों के उत्तर
9.11 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

9.0 उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि आप :

- रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण के महत्व को बता सकें
- रेखाचित्र की संरचना के नियमों का वर्णन कर सकें
- विभिन्न प्रकार के रेखाचित्रों को सूचीबद्ध कर सकें
- विभिन्न प्रकार के रेखाचित्रों की संरचना कर सकें।

9.1 प्रस्तावना

आपने इकाई 8 में पढ़ा है कि आँकड़ों का दृष्टिक प्रस्तुतीकरण, आँकड़ों के संख्यात्मक प्रस्तुतीकरण की नीरसता को दूर करता है तथा उन्हें अधिक रूचिकर बना देता है। दृष्टिक प्रस्तुतीकरण, आँकड़ों की तुलना करने और पूर्व निष्पादन की प्रवृत्ति को निर्धारित करने में भी सहायक होता है। आपने पहले ही आँकड़ों के दृष्टिक प्रस्तुतीकरण की एक सामान्य तकनीक अर्थात् आरेखीय प्रस्तुतीकरण के बारे में पढ़ा है। आँकड़ों के दृष्टिक प्रस्तुतीकरण की एक अन्य महत्वपूर्ण तकनीक, आँकड़ों को एक रेखाचित्र के रूप में प्रस्तुत करना है। इस इकाई में आप रेखाचित्रों की संरचना के नियमों, काल श्रेणियों और आवृत्ति बंटनों के विभिन्न प्रकार के रेखाचित्रों तथा उनकी संरचना के नियमों का अध्ययन करेंगें।

9.2 रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण का महत्त्व

आँकड़ों का रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण (graphical presentation) देखने में अच्छा लगता है। यह मन पर एक प्रबद्व प्रभाव भी डालता है जिससे आँकड़ों की प्रवृत्ति (trends) निकालना

आसान हो जाता है। आँकड़ों के रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण के प्रमुख लाभ निम्न प्रकार से हैं:

1 आँकड़ों का रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण, आँकड़ों की तुलना को, अधिक सहज बना देता है। रेखाचित्र पर वक्रों या सरल रेखाओं की दिशाएँ, तुलनात्मक निष्कर्ष निकालना सरल कर देती हैं।

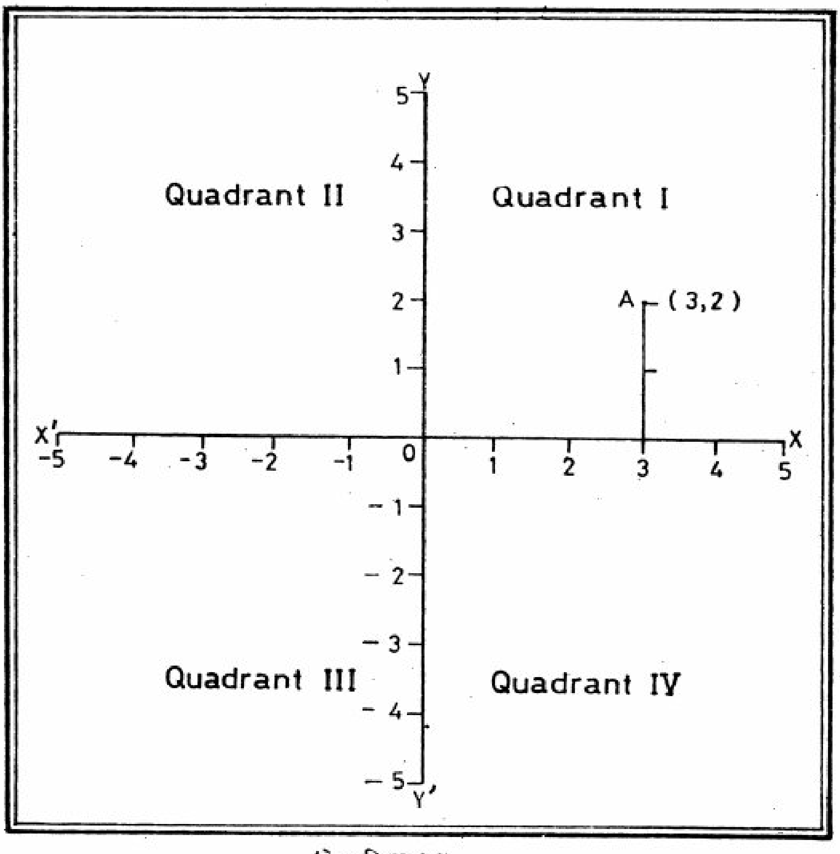
2 आँकड़ों का रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण निष्पादन की प्रवृत्ति निर्धारित करने में सहायक होता है। एक **काल श्रेणी** (time series) के आँकड़ों के रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण द्वारा, मानों का **अंतर्वेशन** (interpolation) और **बहिर्वेशन** (extrapolation) संभव हो जाता है। इस प्रकार यह पूर्वानुमान में भी सहायक होता है।

3 आँकड़ों के रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण से स्थैतिक माध्यों (positional averages) जैसे मध्यका (median), चतुर्थक (quartiles), भूयिष्टक (mode) आदि के मान निर्धारित करना संभव हो जाता है। आवृत्ति बंटन (frequency distribution) का रेखाचित्र इन मानों को स्थापन करने में हमारी सहायता करता है।

4 रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण के द्वारा दो चरों में सह-सम्बन्ध (corelation) स्थापित करना भी संभव होता है। प्रकीर्ण आरेख (scatter diagram) सह-संबंध की मात्रा निर्धारित करने के लिए, एक रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण तकनीक है क्योंकि सह-संबंध के अध्ययन का इस पाठ्यक्रम में समावेश नहीं है। अतः इस इकाई में हम रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण की, प्रकीर्ण आरेख विधि का विवेचन नहीं करेंगे। हम केवल काल श्रेणियों और आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्रों पर ही विचार करेंगे।

9.3 रेखाचित्र की संरचना के नियम

रेखाचित्र की संरचना, बिन्दु अंकित करने के **निर्देशांक तंत्र** पर आधारित है। जब दो परस्पर लम्ब रेखाएँ खींची जाएँ तो इन लम्ब रेखाओं के प्रतिच्छेद बिन्दु को **मूल बिन्दु** या **मूल** कहते हैं। क्षैतिज रेखा को **X-अक्ष** और लम्बवत् रेखा को **Y-अक्ष** कहते हैं। दो परस्पर लम्ब रेखाओं के प्रतिच्छेद से हमें चार **चतुर्थांश** प्राप्त होते हैं। दो परस्पर लम्ब रेखाएँ और उनके द्वारा बनाए गए चार चतुर्थांश आकृति 9.1 में दिखाए गए हैं।



(रेखाचित्र 9.1)

X के धन मान मूल बिन्दु के दाईं ओर तथा उसके ऋण मान मूल बिन्दु के बाईं ओर लिए जाते हैं। Y के धन मान मूल बिन्दु के ऊपर की ओर तथा उसके ऋण मान, मूल बिन्दु के नीचे की ओर लिए जाते हैं। रेखाचित्र के किसी बिन्दु की स्थिति का निर्धारण यह मापकर किया जाता है कि वह मूल बिन्दु से X-अक्ष के समांतर और Y-अक्ष के समांतर कितनी दूरी पर है। इसे प्रकट करने के लिए, x-दूरी और y-दूरी को इसी क्रम में कोष्ठकों में बंद करके लिखा जाता है। ऊपर के रेखाचित्र 9.1 में, बिन्दु A (3, 2) अंकित किया गया है। यह बिन्दु A मूल बिन्दु से X-अक्ष के साथ 3 इकाई की दूरी पर और Y-अक्ष के साथ 2 इकाई की दूरी पर है। एक बिन्दु, जिसके दोनों **अक्षों** पर धन मान हों, चतुर्थांश-I में अंकित होगा। परन्तु यदि कोई एक मान ऋण हो तो **बिन्दु एक भिन्न** चतुर्थांश में अंकित होगा। यदि X-मान ऋण हो और Y-मान धन, तो रेखाचित्र **पर यह बिन्दु चतुर्थांश** II में होगा। यदि X-मान धन हो और Y-मान ऋण हो तो बिन्दु की स्थिति चतुर्थांश IV में होगी। और, यदि X-मान और Y-मान दोनों ऋण हों तो अंकित बिन्दु चतुर्थांश III में होगा। सांख्यिकी आँकड़ों के रेखाचित्र प्राय: चतुर्थांश I में होते हैं।

9.4 काल श्रेणियों के रेखाचित्र-कालिक चित्र (Historigrams)

मोटे तौर पर सांख्यिकीय आँकड़ों के रेखाचित्र निम्न दो प्रकार के होते हैं:

i) काल श्रेणियों के रेखाचित्र, जिन्हें **कालिक चित्र** कहते हैं।

ii) आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्र।

काल श्रेणी, आँकड़ों की उस श्रेणी को कहते हैं, जिसका काल-क्रम में वर्णन किया गया हो। एक संगठन द्वारा दस वर्ष की काल-अवधि में की गई बिक्री के आँकड़े एक काल श्रेणी का उदाहरण हैं। एक काल श्रेणी के रेखाचित्र की संरचना, एक काल अवधि में, एक या एक से अधिक चरों के मानों को प्रदर्शित करने के लिए की जाती है। काल श्रेणी के आँकड़ों के रेखाचित्र को **कालिक चित्र** (Historigram) कहते हैं क्योंकि इसमें इतिहास को रेखाचित्र द्वारा निरूपित किया जाता है।

कालिक चित्रों की संरचना के नियम

एक काल के रेखाचित्र या कालिक चित्र की संरचना निम्नलिखित नियमों के आधार पर की जाती है:

1 समय को स्वतंत्र चर माना जाता है और इसलिए इसे X-अक्ष पर निरूपित किया जाता है। आँकड़ों के मानों को आश्रित चर माना जाता है तथा इन्हें Y-अक्ष पर निरूपित किया जाता है। उदाहरण के लिए, एक व्यावसायिक संस्था के, वर्ष 1980-88 की अवधि के लिए बिक्री संबंधी आँकड़ों के रेखाचित्र की संरचना करने के लिए, बिक्री को Y-अक्ष पर और वर्षों को X-अक्ष पर लिया जाएगा। निर्दिष्ट आँकड़ों के संगत विभिन्न बिन्दुओं को अंकित करने के पश्चात बिन्दुओं को समय के क्रम में सरल रेखा द्वारा मिला दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त रेखाचित्र को निर्दिष्ट आँकड़ों का **कालिक चित्र** कहा जाता है। अंकित रेखाओं के उतार-चढ़ाव, यह दिखाते हैं कि समय के साथ आंकड़े किस प्रकार परिवर्तित हो रहे हैं। इस प्रकार अंकित विभिन्न स्तरों को सामूहिक रूप से निर्दिष्ट आँकड़ों के संगत **"अंकित वक्र"** भी कहा जाता है।

2 Y-अक्ष (जिसे लम्बवत्) अक्ष भी कहते हैं सामान्यत: शून्य से आरंभ होता है। परंतु जब आँकड़ों के न्यूनतम मान और शून्य में बहुत अधिक अंतर हो तो Y-अक्ष को तोड़ा भी जा सकता है और एक **मिथ्या आधार रेखा** (False base-line) को लिया जा सकता है। आप बाद में, इसी इकाई में, मिथ्या आधार रेखा के बारे में सविस्तार अध्ययन करेंगे।

3 दोनों अक्षों पर, स्केल (scale) इस प्रकार लेने चाहिए कि आँकड़ों को सार्थक रूप से दिखाया जा सके।

4 रेखाचित्र का, एक संक्षिप्त और स्व-व्याख्यात्मक शीर्षक होना चाहिए।

5 एक से अधिक आश्रित चर संबंधी आँकड़े भी, कालिक चित्र द्वारा प्रदर्शित किए जा सकते हैं। ऐसी स्थिति में कालिक चित्र में एक से अधिक वक्र होते हैं। जिनमें प्रत्येक वक्र,

एक भिन्न चर को निरूपित करता है। प्राय: विभिन्न वक्रों को विभिन्न प्रकार से ही अंकित किया जाता है, ताकि उनमें एक-दूसरे में भेद किया जा सके। कभी-कभी विभिन्न वक्रों को दिखाने के लिए विभिन्न रंगों का प्रयोग भी किया जाता है।

6 यदि चरों को विभिन्न इकाइयों में मापा गया है तो Y-अक्ष पर दोहरा स्केल लिया जा सकता है।

7 रेखाचित्र की संरचना करते समय अपनाए गए स्केलों को स्पष्टत: संकेतित करना चाहिए।

9.5 कालिक चित्रों के प्रकार (Types of Historigrams)

एक कालिक चित्र की संरचना दो प्रकार से की जा सकती है: (i) इसकी संरचना प्राकृतिक स्केल पर की जा सकती है। इस स्थिति में यह रेखाचित्र एक काल अवधि में हुए निरपेक्ष परिवर्तनों को दर्शाता है। (ii) इसकी संरचना, आनुपातिक स्केल पर की जा सकती है। इस स्थिति में यह रेखाचित्र एक काल अवधि में हुए सापेक्ष परिवर्तनों को दर्शाता है। परन्तु इस पाठ्यक्रम में हम केवल पहली विधि अर्थात् प्राकृतिक स्केल रेखाचित्र का ही अध्ययन करेंगे। प्राकृतिक-स्केल रेखाचित्र में आश्रित चर के मानों को Y-अक्ष पर निरूपित करने के लिए, Y-अक्ष को इस प्रकार अंकित किया जाता है कि Y-अक्ष पर एक समान दूरियाँ, मान में समान वृद्धियों को निरूपित करती हैं। स्केल अंकित करने की यही सामान्य विधि है और इसका ही भाग 9.3 के रेखाचित्र 9.1 में प्रयोग किया गया है। कालिक चित्रों को निम्न चार वर्गों में बाँटा जा सकता है:

1 एक आश्रित चर-कालिक चित्र
2 एक से अधिक आश्रित चर-कालिक चित्र
3 मिश्रित रेखाचित्र
4 विस्तार रेखाचित्र

इन विभिन्न प्रकार के कालिक चित्रों और उनकी संरचना की विधियों का विवेचन नीचे किया गया है।

9.5.1 एक आश्रित चर-कालिक चित्र (One dependent variable historigram)

इस प्रकार के कालिक चित्र में केवल एक ही आश्रित चर होता है। जैसा कि पहले बताया गया था, आश्रित चर के मान Y-अक्ष पर लिए जाते हैं, जबकि समय को X-अक्ष पर लिया जाता है। उदाहरण के लिए, किसी काल अवधि में बिक्री संबंधी आंकड़े एक आश्रित चर-कालिक चित्र का उदाहरण प्रस्तुत करते हैं। इस स्थिति में बिक्री के आँकड़ों को Y-अक्ष पर अंकित किया जाता है और समय को X-अक्ष पर लिया जाता है। यह एक सरलतम प्रकार का रेखाचित्र है। उदाहरण 1 का ध्यान से अध्ययन कीजिए और आश्रित चर कालिक चित्र की संरचना विधि को समझिए।

उदाहरण 1

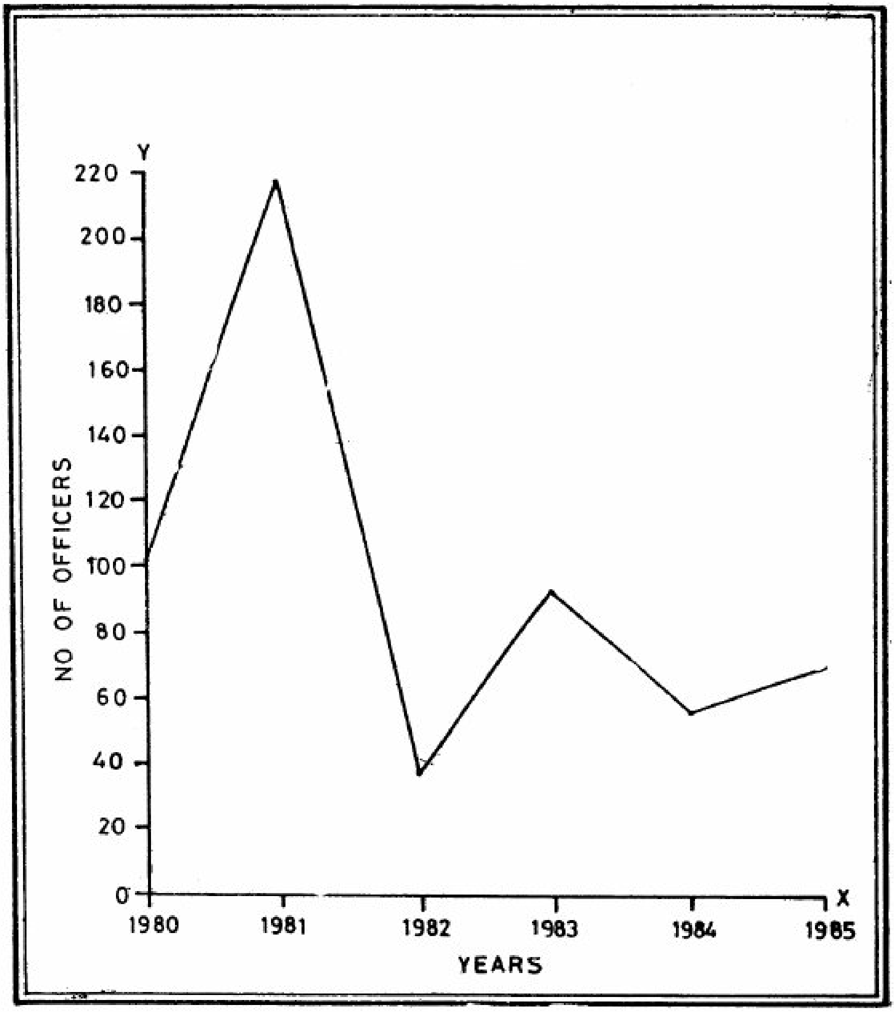
निम्न आँकड़े, एक संस्थान द्वारा, विभिन्न वर्षों में पदाधिकारियों के प्रशिक्षण से संबंधित हैं। इनके लिए एक उपयुक्त कालिक चित्र की संरचना कीजिए।

वर्ष	1980	1981	1982	1983	1984	1985
प्रशिक्षित किए गए पदाधिकारियों की संख्या	100	217	36	90	56	70

हल:

चूँकि ये आँकड़े केवल एक आश्रित चर से संबंधित हैं, इसलिए हमें एक आश्रित चर-कालिक चित्र की संरचना करनी है। विभिन्न वर्षों को X-अक्ष पर और पदाधिकारियों की संख्याओं को Y-अक्ष पर लिया जाएगा। चूँकि आश्रित चर के सभी मान धन हैं, अंत: रेखाचित्र पहले

चतुर्थांश में होगा। अत: हम X-अक्ष को ग्राफ पेपर की तली के निकट और Y-अक्ष को उसकी बाईं ओर की सीमा पर खींच सकते हैं। रेखाचित्र 9.2 को ध्यान से देखिए। X-अक्ष पर 10 बड़े वर्गों का **स्थान है।** अत: हम आँकड़ों के प्रारंभिक वर्ष को मूल बिन्दु पर ही ले लेंगे और मान लेंगे कि दो बड़े वर्गों द्वारा एक वर्ष निरूपित होता है। इसलिए X-अक्ष पर स्केल, तदनुसार ही अंकित किया जाएगा और इसके नीचे "वर्ष" शब्द लिखा जाएगा। Y-अक्ष पर लगभग 12 बड़े वर्गों का स्थान है। हमने अधिकतम मान 217 को निरूपित करना है। स्केल प्राय: पूर्ण अंकों या पूर्ण दहाइयों इत्यादि में अंकित किया जाता है। इसलिए मान लीजिए कि प्रत्येक बड़ा वर्ग 20 की वृद्धि को निरूपित करता है। इसके अनुसार ही स्केल अंकित कीजिए और उसके बाईं ओर ये शब्द लिख दीजिए "पदाधिकारियों की संख्या"। अब विभिन्न बिन्दुओं (1980, 100), (1981, 217) इत्यादि को अंकित कीजिए तथा उन्हें क्रमागत रूप में सरल रेखाओं द्वारा मिला दीजिए। हमें एक संक्षिप्त शीर्षक भी लिखना होगा। इन आँकड़ों के लिए संरचित रेखाचित्र को रेखाचित्र 9.2 में दर्शाया गया है।



(रेखाचित्र 9.2)

उदाहरण 2

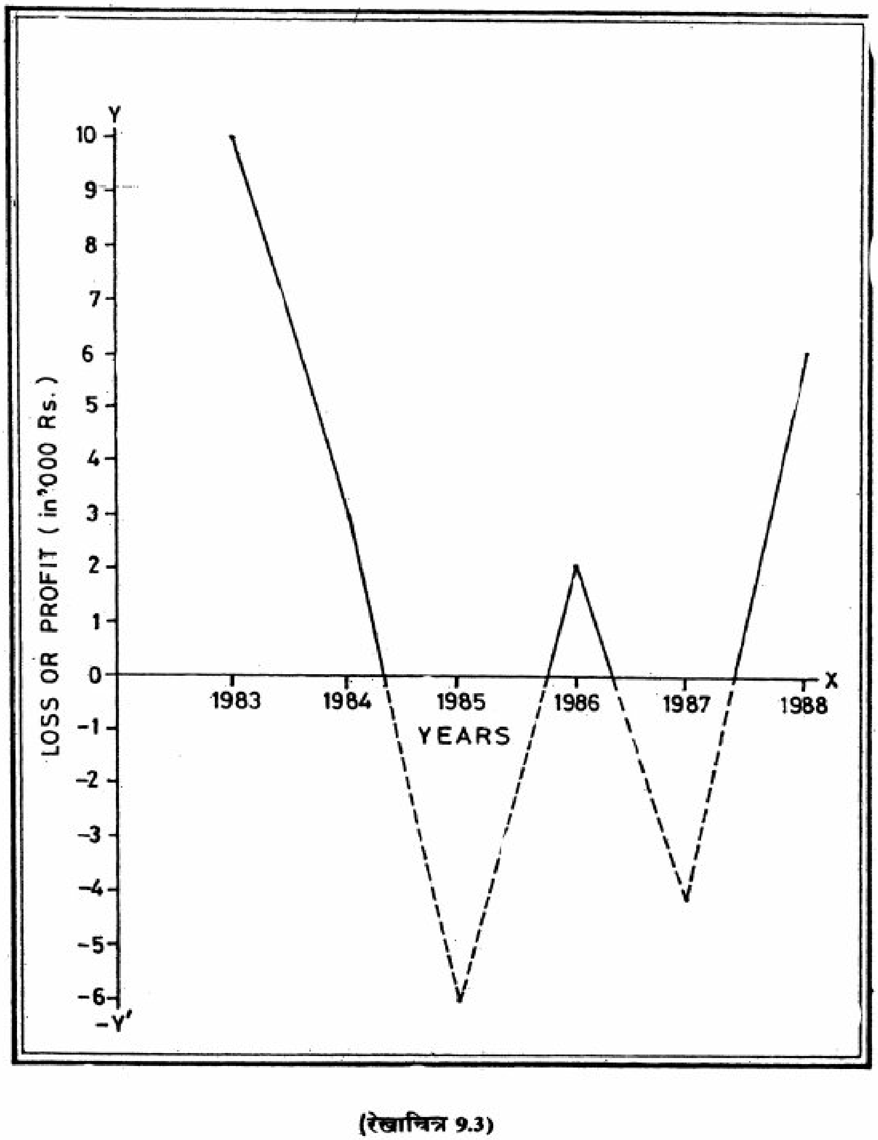
निम्न आँकड़े एक व्यावसायिक प्रतिष्ठान के वार्षिक लाभ-हानि से संबंधित हैं। इन आँकड़ों के लिए एक एकचर रेखाचित्र की संरचना कीजिए।

वर्ष	1983	1984	1985	1986	1987	1988
लाभ (–) या हानि (–) (.000 रु.)	– 10	– 3	– 5	+ 2	– 3	6

हल:

इस उदाहरण में लाभ और हानि, दोनों दिए गए हैं। यदि लाभ को धन मानों से निरूपित

किया जाए तो हानि को ऋण मानों से निरूपित करना होगा। धन मानों को Y-अक्ष पर, मूल बिन्दु से ऊपर की ओर तथा ऋण मानों को Y-अक्ष पर मूल बिन्दु से नीचे की ओर अंकित करना चाहिए। अतः इस स्थिति में X-अक्ष को ग्राफ पेपर की तली के निकट नहीं लिया जाएगा, बल्कि इसे प्रदर्शनीय ऋण मानों के परिमाणों के अनुसार कहीं मध्य में लिया जाएगा। रेखाचित्र 9.3 को ध्यान से देखिए और ज्ञात कीजिए कि X-अक्ष को किस प्रकार खींचा गया है। प्रस्तुत उदाहरण में स्थान की उपलब्धता के अनुसार हमने 2 बड़े वर्गों द्वारा एक वर्ष को निरूपित किया है और एक बड़े वर्ग द्वारा हजार रुपये के लाभ/हानि को। रेखाचित्र 9.3 का ध्यान से अध्ययन कीजिए और लाभ/हानि को अंकित करने की विधि को समझिए।



(रेखाचित्र 9.3)

मिथ्या आधार रेखा

कालिक चित्रों की संरचना के नियमों का अध्ययन करते समय हमने कहा था कि Y-अक्ष पर स्केल प्रायः शून्य से प्रारम्भ किया जाना चाहिए। यदि आँकड़ों के न्यूनतम मान और शून्य में बहुत अधिक अंतर हो तो Y-अक्ष को तोड़ दिया जाता है और एक **मिथ्या आधार रेखा** (false base line) (जिसे लहरदार रूप में खींचा जाता है) ली जाती है ताकि आँकड़ों को अधिक सार्थकतापूर्वक दिखाया जा सके। आँकड़ों के न्यूनतम मान को या न्यूनतम मान से कम एक पूर्णांक या पूर्ण दहाई इत्यादि को Y-अक्ष पर "मिथ्या आधार" के रूप में अंकित किया जाता है। आइए इसे व्यावहारिक रूप में एक उदाहरण द्वारा समझें।

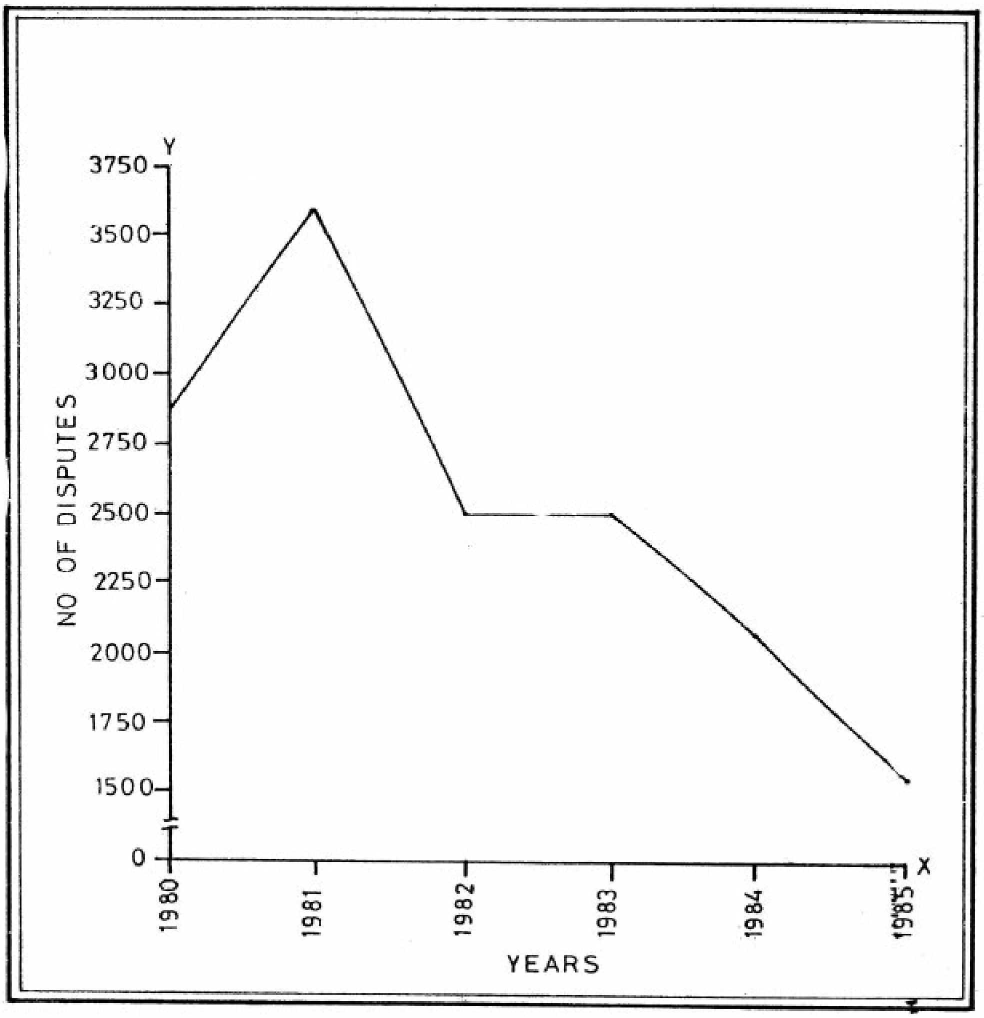
उदाहरण 3

निम्न आँकड़े भारत में प्रति वर्ष औद्योगिक विवादों से संबंधित हैं। इन आँकड़ों के लिए एक कालिक चित्र की संरचना कीजिए।

वर्ष	1980	1981	1982	1983	1984	1985
विवादों की संख्या	2,856	3,589	2,483	2,488	2,061	1,522

हल:

विवादों की न्यूनतम संख्या 1,522 है जो शून्य से बहुत दूर हैं। अत: Y-अक्ष को X-अक्ष के निकट तोड़ दिया गया है और एक मिथ्या आधार रेखा खींची गई है। स्केल अंकित करने के लिए पहला मान आधार रेखा पर 1500 लिया जा सकता है, जो विवादों की न्यूनतम संख्या 1522 से कम है। अब Y-अक्ष पर स्थान की उपलब्धता पर आधारित, हम मान लेते हैं कि एक बड़ा वर्ग 250 की वृद्धि को निरूपित करता है। अब रेखाचित्र 9.4 का ध्यान से अध्ययन कीजिए और मिथ्या आधार रेखा खींचने और आँकड़ों को अंकित करने की विधि समझिए।



(रेखाचित्र 9.4)

टिप्पणी: यदि मिथ्या आधार रेखा न लें तो स्केल पर 0 से 1500 तक के संगत Y-अक्ष पर स्थान (जो अपनाए गए स्केल के अनुसार छ: बड़े वर्गों के बराबर होगी) व्यर्थ जाएगा। इसके कारण ग्राफ पेपर के ऊपरी भाग में खींचा गया रेखाचित्र भी संघनित हो जाएगा। तोड़ी गई रेखा यह संकेत देती है कि ग्राफ पेपर का एक भाग, जिसमें कोई मान आलिखित नहीं है, छोड़ दिया गया है।

9.5.2 एक से अधिक आश्रित चर-कालिक चित्र (More than One Dependent Variable Historigram)

कभी-कभी एक कालिक चित्र के आँकड़े एक से अधिक आश्रित चरों से संबंधित हो सकते हैं। उदाहरण के लिए निर्दिष्ट आँकड़े एक काल अवधि में गेंहू और चावल, दोनों के उत्पादन से संबंधित हो सकते हैं। उस कालिक चित्र को जिसकी संरचना इन दो वक्रों (एक गेंहू के

उत्पादन के लिए और दूसरा चावल के उत्पादन के लिए) को दिखाने के लिए की जाती है, **एक से अधिक आश्रित चर-कालिक चित्र** कहा जाता है। इन एक से अधिक चर रेखाचित्रों की संरचना ठीक उसी प्रकार की जाती है, जैसी कि एक आश्रित चर रेखाचित्र की। मिथ्या 'आधार रेखा' इस स्थिति में भी ली जा सकती है। अब उदाहरण 4 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और इस प्रकार के रेखाचित्रों की संरचना से सम्बद्ध व्यावहारिक प्रक्रिया को समझिए।

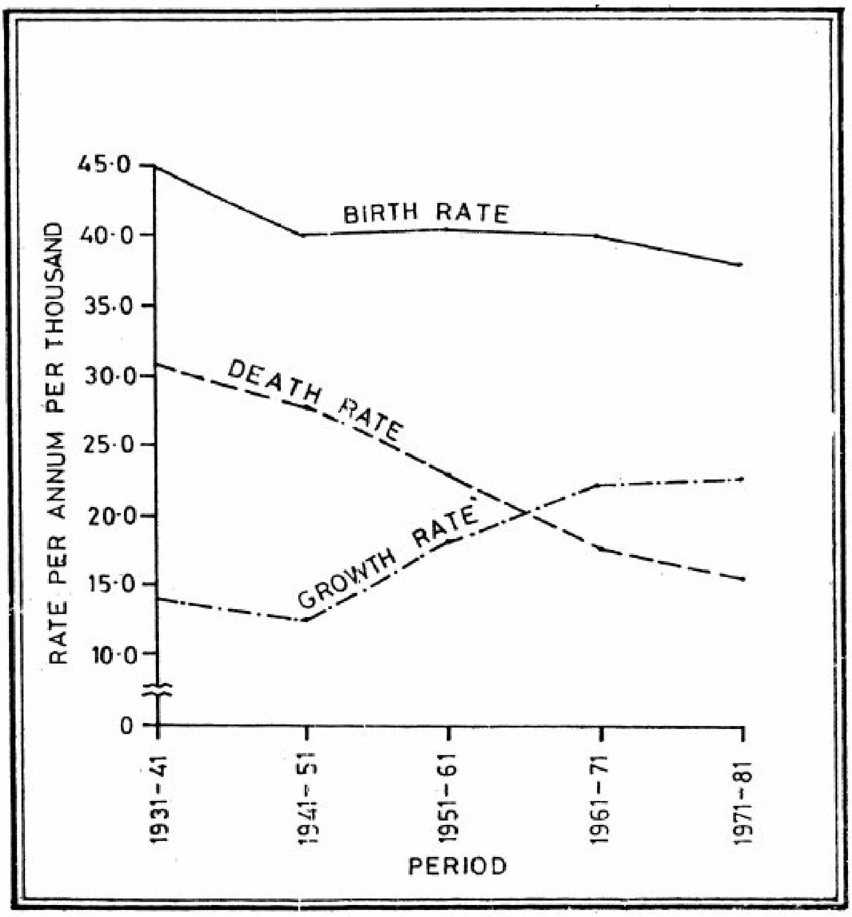
उदाहरण 4

निम्न आँकड़े भारत में जन्म-दर मृत्यु-दर और वृद्धि-दर से संबंधित हैं। इन आँकड़ों के लिए एक से अधिक आश्रित चर-कालिक चित्र की संरचना कीजिए:

काल अवधि	1931–41	1941–51	1951–61	1961–71	1971–81
जन्म दर	45.2	39.9	40.9	40.0	37.9
मृत्यु दर	31.2	27.4	22.8	17.8	15.4
वृद्धि दर	14.0	12.5	18.1	22.2	22.5

हल:

इन आँकड़ों के लिए एक बहुचर कालिक चित्र की संरचना की गई है और इसे रेखाचित्र 9.5 में प्रस्तुत किया गया है। "मिथ्या आधार रेखा" भी ली गई है। इस रेखाचित्र में प्रत्येक चर अर्थात् "जन्म दर", "मृत्यु दर" और "वृद्धि दर" के लिए एक पृथक वक्र खींचा गया है। सरल पहचान के लिए प्रत्येक वक्र को बिन्दुओं को मिलाने की एक भिन्न विधि से अंकित किया गया है। रेखाचित्र से स्पष्ट होता है कि समय व्यतीत होने के बाद, मृत्यु-दर में गिरावट, जन्म दर में गिरावट की तुलना में अधिक है। और इसलिए 1941 के पश्चात् समय के साथ वृद्धि दर वर्धमान है।



9.5.3 मिश्रित रेखाचित्र (Mixed Graph)

मिश्रित रेखाचित्र एक प्रकार का कालिक चित्र है, जिसकी संरचना ऐसे दो आश्रित चरों के लिए की गई है जिनकी मापन इकाइयाँ समान नहीं है। इन आश्रित चरों के मानों को दो भिन्न स्केलों द्वारा निरूपित किया जाता है, एक सामान्य Y-अक्ष पर और दूसरा एक अन्य Y-अक्ष पर, जिसे क्षैतिज अक्ष के दाईं और लिया जाता है। मिश्रित रेखाचित्र की संरचंना करते समय निम्न तत्वों को ध्यान में रखना चाहिए:

i) दोनों लम्बवत् अक्षों के स्केलों के मध्य बिन्दु, एक ही क्षैतिज रेखा पर होने चाहिए।

ii) दो भिन्न वक्र खींचे जाएंगे:— एक सामान्य Y-अक्ष की सहायता से और दूसरा, दूसरे Y-अक्ष की सहायता से, जिसे X-अक्ष के दाईं ओर लिया गया है।

iii) इस स्थिति में, यदि आवश्यक हो तो मिथ्या आधार रेखा भी ली जा सकती है। आइए अब एक उदाहरण द्वारा मिश्रित रेखाचित्र की संरचना करना सीखें।

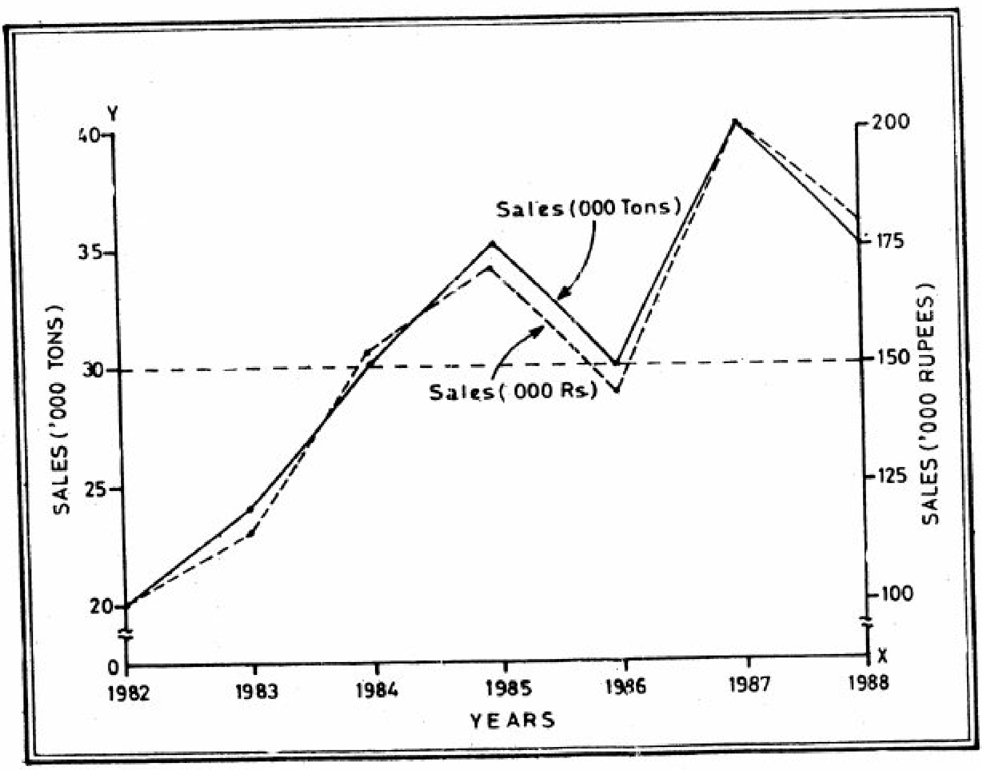
उदाहरण 5

निम्न आंकड़े, एक व्यावसायिक प्रतिष्ठान के वार्षिक विक्रयों से संबंधित हैं। इन आँकड़ों को एक मिश्रित रेखाचित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

वर्ष	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
विक्रय राशि ('000 टनों में)	20	24	30	35	30	40	35
विक्रय मान ('000 रुपए में)	100	115	155	170	145	200	180

हल:

रेखाचित्र 9.6 में प्रदर्शित मिश्रित रेखाचित्र को ध्यान से देखिए। विक्रय मात्रा, सामान्य Y-अक्ष पर दिखाई गइ है और विक्रय मूल X-अक्ष के दाईं ओर लिए गए Y-अंक्ष पर दिखाए गए हैं। विक्रय मात्रा का विस्तार 20 हज़ार टन से 40 हज़ार टन तक है और विक्रय मूल्य का विस्तार 100 से 200 हजार रुपए है। दोनों वक्रों को प्रमुखत: दिखाने के लिए (ग्राफ पेपर के



स्थान को व्यर्थ छोड़े बिना) हम मिथ्या आधार रेखा खींचते हैं और टनों की ओर, प्रारंभिक बिन्दु 20 लेते हैं तथा रुपयों की ओर 100 लेते हैं। टनों का मध्य माल 10 और रुपयों का मध्य मान 150 की एक रेखा पर लिया जाएगा। इसे रेखाचित्र में बिन्दुचित्रित रेखा के रूप में दिखाया गया है। उपलब्ध स्थान के आधार पर टनों की ओर स्केल के लिए दो बड़े वर्ग 5 की वृद्धि निरूपित करते हैं और इसी प्रकार रुपयों की ओर स्केल के लिए दो बड़े वर्ग 25 हजार को निरूपित करते हैं। दोनों वक्रों में भेद के लिए, हमने टनों में विक्रय को सतत वक्र द्वारा दिखाया है और रुपयों में विक्रय को बिन्दुचित्रित रेखा द्वारा दिखाया है।

9.5.4 विस्तार रेखाचित्र (Range Graph)

कभी-कभी आश्रित चर के दो चरम मान (अर्थात् अधिकतम और न्यूनतम मान) दिए होते हैं। किसी विशेष दिन के अधिकतम और न्यूनतम तापमान इसका एकं उदाहरण हैं। उस रेखाचित्र को, जो इन दो चरम मानों को प्रदर्शित करे, **विस्तार रेखाचित्र** (Range Graph) कहा जाता है, इस प्रकार के रेखाचित्र में दो वक्र प्रदर्शित होते हैं; एक वक्र विभिन्न काल अवधियों में अधिकतम मानों के लिए और दूसरा न्यूनतम मानों के लिए। इस रेखाचित्र को, विस्तार रेखाचित्र इसलिए कहते हैं, क्योंकि यह निर्दिष्ट आँकड़ों के विस्तार को प्रदर्शित करता है (विभिन्न समयों पर विस्तार आँकड़ों के दो चरम मानों का अंतर होता है)

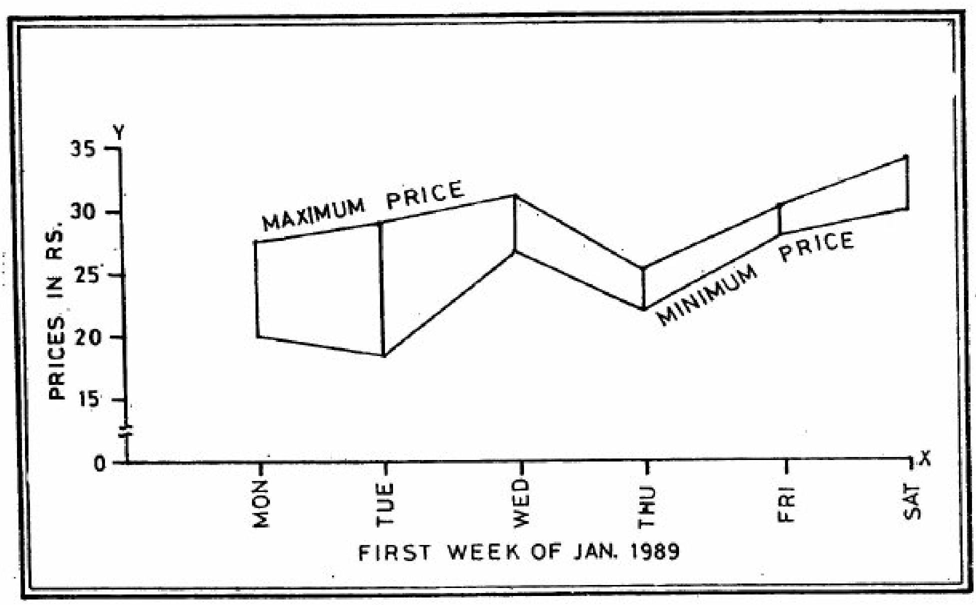
उदाहरण 6

जनवरी, 1989 के पहले सप्ताह में XYZ कम्पनी के शेयर के न्यूनतम और अधिकतम मूल्यों के निम्न आँकड़ों के लिए विस्तार रेखाचित्र की संरचना कीजिए:

दिन	न्यूनतम मूल्य (रु.)	अधिकतम मूल्य (रु.)
सोमवार	20	27
मंगलवार	18	29
बुधवार	27	31
बृहस्पतिवार	22	25
शुक्रवार	28	30
शनिवार	30	34

हल:

अभीष्ट विस्तार रेखाचित्र की संरचना की गई है और यह रेखाचित्र 9.7 में प्रस्तुत है। यह दो वक्र प्रदर्शित करता है, एक अधिकतम मूल्यों के लिए और दूसरा न्यूनतम मूल्यों के लिए।



विभिन्न दिनों पर, लम्बवत् रेखाएँ, उस दिन के मूल्यों के विस्तार को प्रदर्शित करती हैं। दो क्षैतिज रेखाओं के उतार और चढ़ाव विभिन्न काल अवधियों पर अधिकतम और न्यूनतम मूल्यों के उतार और चढ़ाव को प्रदर्शित करते हैं। इसलिए, इस प्रकार के रेखाचित्र से ये दो प्रकार की सूचनाएँ मिलती हैं।

बोध प्रश्न क

1 एक काल श्रेणी के रेखाचित्र से क्या तात्पर्य है ?

....

....

....

....

2 एक आश्रित चर-कालिक चित्र और एक से अधिक आश्रित चर-कालिक चित्र में भेद कीजिए।

....

....

....

....

3 मिथ्या आधार रेखा किसे कहते हैं ?

....

....

....

....

4 एक मिश्रित रेखाचित्र और एक विस्तार रेखाचित्र में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

5 बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं या गलत:

i) आँकड़ों के रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण से, आँकड़ों की तुलना करना आसान हो जाता है। ....

ii) पूर्व निष्पादन की प्रवृत्ति, रेखाचित्रों की सहायता से निर्धारित नहीं हो सकती। ....

iii) यदि मान धनात्मक हों तो रेखाचित्र की संरचना प्राय: चतुर्थांश 1 में की जाती है। ....

iv) एक कालिक चित्र में Y-अक्ष को कभी नहीं तोड़ा जाता। ....

v) एक कालिक चित्र एक से अधिक आश्रित चरों के आँकड़ों को प्रदर्शित नहीं कर सकता। ....

vi) मिथ्या आधार रेखा लेने का मौलिक उद्देश्य, आँकड़ों को अधिक सार्थकता से दिखाना है। ....

vii) एक से अधिक आश्रित चर के कालिक चित्र की स्थिति में, आश्रित चरों को X-अक्ष पर लिया जाता है। ....

viii) मिश्रित रेखाचित्र की स्थिति में, मिथ्या आधार रेखा नहीं ले सकते। ....

6 कोष्ठक में दिए गए शब्दों में से उपयुक्त शब्दों के द्वारा रिक्त स्थानों को भरिए:

i) आँकड़ों का रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण स्थैतिक माध्यों के मानों को निर्धारित करने में .... है। (सहायक होता/सहायक नहीं होता)

ii) यदि आश्रित चर के मान ऋण हों तो रेखाचित्र की संरचना चतुर्थांश .... में की जाती है। (iii/iv)

iii) कालिक चित्र में समय को .... अक्ष पर लेते हैं। (X/Y)

iv) एक रेखाचित्र को अनुपातिक स्केल पर संरचित .... हैं। (कर सकते/नहीं कर सकते)

v) एक से अधिक चर-कालिक चित्र की स्थिति में मिथ्या आधार रेखा .... हैं। (ले सकते/नहीं ले सकते)

vi) मिश्रित रेखाचित्र की संरचना .... आश्रित चरों, जिनकी मापन इकाइयाँ भिन्न हैं, से संबंधित आँकड़ों को प्रदर्शित करने के लिए की जाती है। (दो/तीन)

vii) मिश्रित रेखाचित्र की स्थिति में, दोनों स्केलों के मध्य बिन्दु एक ही क्षैतिज रेखा पर .... चाहिए। (होने/नहीं होने)

viii) विस्तार रेखाचित्र एक चर के दो चरम मानो के .... को प्रदर्शित करता है। (अंतर/योग)

9.6 आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्र (Graphs of Frequency Distribution)

आपने इकाई 7 में पढ़ा है कि आवृत्ति बंटनों को सारणियों के रूप में प्रस्तुत किया जा सकता है। वास्तव में, आवृत्ति बंटनों को रेखाचित्रों के रूप में भी प्रस्तुत किया जा सकता है। सारणिक प्रस्तुतीकरण की तुलना में, आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्र (आँकड़ों के) लक्षणों और संबंधों की पहचान करने में सहायक होते हैं। आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्र, स्थैतिक माध्यों जैसे भूयिष्टक, मध्यका, चतुर्थकों इत्यादि का स्थान निर्धारित करने में भी सहायक होते हैं। आइए, उन मौलिक नियमों का अध्ययन करें जिन्हें आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्रों की संरचना करते समय ध्यान में रखना होगा।

आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्रों की संरचना के सिद्धांत

आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्रों की संरचना निम्नलिखित सिद्धांतों पर आधारित होती है:

1 चर के मानो को X-अक्ष पर दिखाया जाता है। उदाहरण के लिए आयु (वर्षों में) के विचार से विद्यार्थियों के बंटन के रेखाचित्र में आयु को X-अक्ष पर दिखाया जाएगा।

2 मदों/वर्गों की आवृत्तियों से व्युत्पन्न मान, Y-अक्ष पर दिखाए जाएँगे।

3 यह आवश्यक नहीं कि क्षैतिज अक्ष शून्य से ही प्रारम्भ हो। परन्तु, इन रेखाचित्रों में लम्बवत् अक्ष को तोड़ा नहीं जाता। मिथ्या आधार रेखा नहीं ली जा सकती।

4 दोनों अक्षों पर, स्केल इस प्रकार लिए जाने चाहिए कि आँकड़ों को सार्थकतापूर्वक प्रदर्शित किया जा सके। इन स्केलों को स्पष्ट रूप से उल्लिखित किया जाना चाहिए।

5 रेखाचित्र का एक संक्षिप्त और स्वतः स्पष्ट शीर्षक होना चाहिए।

9.7 आवृत्ति बंटन रेखाचित्रों के प्रकार (Types of Frequency Distribution Graphs)

आवृत्ति बंटन रेखाचित्रों को निम्न वर्गों में विभाजित किया जा सकता है: (1) आयत चित्र (2) आवृत्ति बहुभुज, (3) आवृत्ति वक्र; और (4) तोरण या संचयी आवृत्ति रेखाचित्र। आइए अब हम इन चार प्रकार के रेखाचित्रों की संरचना से सम्बद्ध प्रक्रिया को समझें।

9.7.1 आयत चित्र (Histogram)

आयत चित्र आयतों की एक श्रृंखला होता है, जिसमें प्रत्येक आयत की चौड़ाई एक वर्गान्तर के परिमाण की समानुपाती होती है तथा प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल उस वर्गान्तर से संबंधित आवृत्ति की संख्या का समानुपाती होता है। इस रेखाचित्र में मद/वर्गान्तर X-अक्ष पर लिए जाते हैं और आवृत्तियों से व्युत्पन्न मान, आयत की ऊँचाई के रूप में Y-अक्ष पर लिए जाते हैं। ऊँचाई निर्धारित करने के लिए सब से छोटे वर्गान्तर को एक इकाई चौड़ाई का वर्गान्तर मान लिया जाता है। अन्य सभी वर्गान्तरों की चौड़ाइयाँ, इसके पदों में निर्धारित की जाती हैं। फिर, आवृत्ति को इस संख्या से भाजित किया जाता है। इस प्रकार प्राप्त मान को **आवृत्ति घनत्व** (frequency density) या **समंजित आवृत्ति** (adjusted frequency) कहा जाता है। यह मान प्रति इकाई वर्ग अंतराल आवृत्ति को निरूपित करता है। यदि सभी वर्ग अंतराल बराबर हों तो प्रत्येक वर्ग अंतराल की चौड़ाई एक इकाई होगी। अत: आवृत्ति (जो क्षेत्रफल द्वारा निरूपित होती है) को I से भाजित करने पर हमें ऊँचाई (अर्थात् आवृत्ति घनत्व) संख्यात्मक रूप में आवृत्ति के बराबर प्राप्त होती है। अत: बराबर वर्ग अंतरालों की स्थिति में, ऊँचाई को आवृत्ति का समानुपाती लिया जा सकता है। परन्तु, वास्तव में, संकल्पना के विचार से क्षेत्रफल ही आवृत्ति का समानुपाती है। आयत चित्र की संरचना में दो क्रमागत आयतों के बीच कोई रिक्त स्थान नहीं होना चाहिए। यदि आँकड़े समावेशी आवृत्ति बंटन के रूप में या असतत श्रेणी के रूप में दिए गए हों तो पहले इन्हें अपवर्जी रीति के वर्गान्तरों वाले सतत चर के रूप में परिवर्तित किया जाना चाहिए। आयत चित्र आँकड़ों के भूयिष्टक को निर्धारित करने में भी सहायक होता है; जिसके बारे में आप बाद में इसी पाठ्यक्रम में पढ़ेंगे।

उदाहरण 7

निम्न बंटन एक कालिज के विद्यार्थियों द्वारा सांख्यिकी में प्राप्त अंकों से संबंधित है। इसे रेखाचित्र के रूप में प्रस्तुत कीजिए।

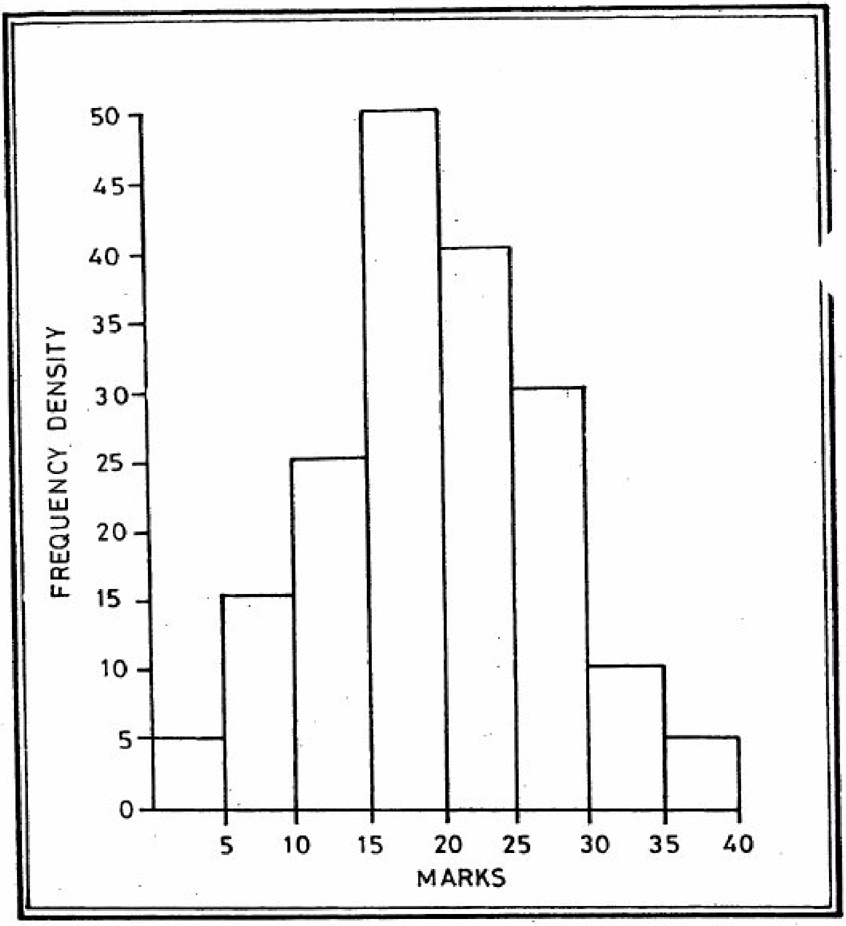
अंक	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35	35–40
विद्यार्थियों की संख्या	5	15	25	50	40	30	10	5

हल:

इस उदाहरण में आँकड़े एक अपवर्जी प्रकार के अविच्छिन्न आवृत्ति बंटन के रूप में दिए गए हैं। अत: निर्दिष्ट वर्गान्तरों को जैसे हैं; वैसे ही X-अक्ष पर लिया जाएगा। चूँकि सभी वर्गान्तर समान आकार के हैं, इसलिए उनकी चौड़ाई को 1 इकाई से प्रकट कर प्रत्येक वर्गान्तर की चौड़ाई 1 इकाई होगी। आवृत्ति (अर्थात् आयत के क्षेत्रफल) को इस चौड़ाई (I) से भाजित करने पर आयतों की ऊँचाई उनकी आवृत्ति के बराबर होगी।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (क्षेत्रफल)	चौड़ाई इकाइयाँ (आधार)	एावृत्ति घनत्व (ऊँचाई)
0–5	5	1	5/1 = 5
5–10	15	1	15/1 = 15
10–15	25	1	25/1 = 25
15–20	50	1	50/1 = 50
20–25	40	1	40/1 = 40
25–30	30	1	30/1 = 30
30–35	10	1	10/1 = 10
35–40	5	1	5/1 = 5

ऊँचाई को Y-अक्ष पर लिया जाएगा। अब X-अक्ष और Y-अक्ष दोनों पर उपयुक्त रूप से स्केल अंकित किया जाएगा। आयत चित्र की संरचना के लिए, हम प्रत्येक वर्गान्तर को आधार मानकर और ऊँचाई, ऊपर बताई गई विधि के अनुसार व्युत्पन्न मान के बराबर लेकर, आयतों की संरचना करेंगे। आयत चित्र को इस प्रकार संरचित करके रेखाचित्र 9.8 में प्रस्तुत किया गया है।



(रेखाचित्र 9.8) : असमान चौड़ाई के वर्गान्तरों की स्थिति में आयत चित्र

आपने उदाहरण 7 में देखा होगा कि वर्गान्तरों की चौड़ाइयाँ समान थीं और इसलिए आवृत्ति और आवृत्ति घनत्व संख्यात्मक रूप में समान थे। परन्तु ऐसा सम्भव हो सकता है कि आवृत्ति बंटन के वर्गान्तर असमान चौड़ाई के हों। ऐसी परिस्थिति में, वर्गान्तरों की आवृत्तियाँ आवृत्ति घनत्व से भिन्न होंगी। जैसा कि ऊपर बताया गया है, सबसे कम चौड़ाई के वर्गान्तर को आधार मानकर अन्य वर्गान्तरों में आवश्यक समायोजन किया जाता है। अन्य वर्गान्तरों की समंजित व आवृत्तियों या आवृत्ति घनत्व का परिकलन निम्न प्रकार से किया जाता है।

$$\text{एक वर्ग की समंजित आवृत्ति} = \frac{\text{आधार वर्ग की चौड़ाई}}{\text{निर्दिष्ट वर्ग की चौड़ाई}} \times \text{निर्दिष्ट वर्ग की आवृत्ति}$$

समायोजन की यह विधि, आयत की ऊँचाई को वही मान प्रदान करती हैं, जैसा कि पहले उदाहरण में बताई गई विधि द्वारा प्राप्त होता है। इस विधि में भी, आयत का क्षेत्रफल आवृत्ति को निरूपित करता है। आइए अब एक उदाहरण द्वारा इसे व्यावहारिक रूप में समझे।

उदाहरण 8

निम्न बंटन, एक कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा लेखाशास्त्र में प्राप्त अंकों से संबंधित है। इनके लिए, एक आयत चित्र की संरचना कीजिए।

अंक	0-5	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-40	40-60
विद्यार्थियों की संख्या	5	15	25	50	40	30	20	16

हल:

इस उदाहरण में विभिन्न वर्गों की चौड़ाइयाँ समान नहीं हैं। अत: कुछ वर्ग अंतरालों की आवृत्तियों में आवश्यक समायोजन करना होगा। सबसे छोटी चौड़ाई 5 को, आधार मानकर दो वर्गों अर्थात 30–40 और 40–60 की आवृत्तियों को निम्नानुसार समंजित किया जाएगा:

किसी वर्ग की समंजित आवृत्ति

$$= \frac{\text{आधार वर्ग की चौड़ाई}}{\text{निर्दिष्ट वर्ग की चौड़ाई}} \times \text{निर्दिष्ट वर्ग की आवृत्ति}$$

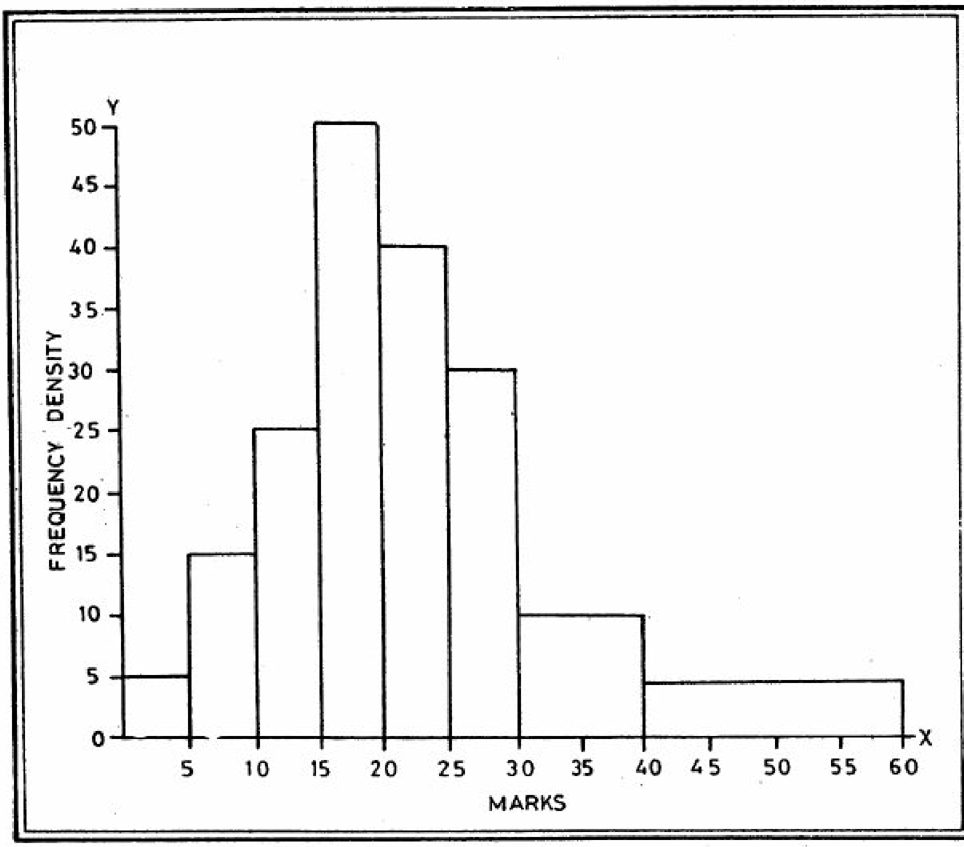
वर्ग 30–40 के लिए समंजित आवृत्ति या आवृत्ति घनत्व $= 5/10 \times 20 = 10$

वर्ग 40–60 के लिए, समंजित आवृत्ति या आवृत्ति घनत्व $= 5/20 \times 16 = 4$

आइए, आवृत्ति घनत्व का परिकलन उदाहरण 7 में बताई गई विधि से भी करें और जाँच करें कि क्या दोनों विधियाँ ऊँचाई का वही मान प्रदान करती हैं या नहीं।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या (क्षेत्रफल)	चौड़ाई इकाइयाँ (आधार)	आवृत्ति घनत्व (ऊँचाई)
0–5	5	1	5/1 = 5
5–10	15	1	15/1 = 15
10–15	25	1	25/1 = 25
15–20	50	1	50/1 = 50
20–25	40	1	40/1 = 40
25–30	30	1	30/1 = 30
30–40	20	2	20/2 = 10
40–60	16	4	16/4 = 4

आयत चित्र की संरचना की गई है और वह रेखाचित्र 9.9 में प्रस्तुत है।



(रेखाचित्र 9.9)

उदाहरण 9

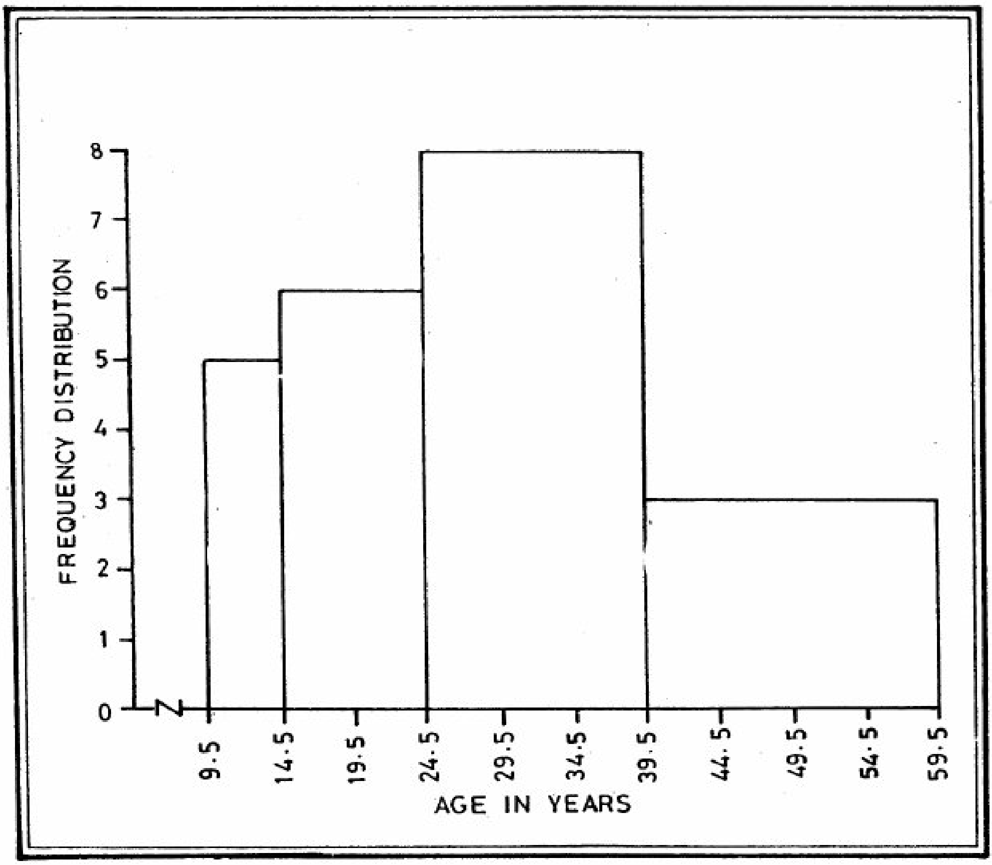
निम्न आँकड़े एक क्लब के सदस्यों की आयु (निकटतर जन्म दिवस पर वर्षों में) से संबंधित **हैं। इनके लिए एक आयत चित्र** की संरचना कीजिए।

आयु वर्षों में	10–14	15–24	25–39	40–59
सदस्यों की सं.	5	12	24	12

हल:
इस उदाहरण में वर्गान्तर असमान परिमाण के हैं और समावेशी रूप में हैं। इन्हें अपवर्जी रूप में परिवर्तित करने पर, ताकि इनके बीच कोई अन्तर न रहे, और सबसे छोटे वर्गान्तर के परिमाण (अर्थात 5) को एक इकाई चौड़ाई मानकर आँकड़े निम्नानुसार हो जाते हैं:

आयु (वर्षों में)	9.5–14.5	14.5–24.5	24.5–39.5	39.5–59.5
सदस्यों की सं.	5	12	24	12
चौड़ाई इकाइयाँ (आधार)	1	2	3	4
आवृत्ति घनत्व (ऊँचाई)	5	6	8	3

रेखाचित्र 9.10 को ध्यान से देखिए, जिसमें निर्दिष्ट आँकड़ों का आयत चित्र प्रस्तुत किया गया है। इस रेखाचित्र में एक बड़ा वर्ग 5 वर्षों को निरूपित करता है। बिन्दु 9.5 इत्यादि एक मोटी रेखा पर अंकित किए गए हैं ताकि अंकन सरल हो जाए। मूल बिन्दु के निकट X-अक्ष को तोड़ा हुआ दिखाया गया है। इससे संकेत मिलता है कि X-अक्ष का यह भाग उस स्केल पर अंकित नहीं है, जैसा कि शेष X-अक्ष।



(रेखाचित्र 9.10)

9.7.2 आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon)

आवृत्ति बहुभुज, आवृत्ति बंटन को रेखाचित्रीय रूप में प्रदर्शित करने की एक अन्य विधि है। आवृत्ति बहुभुज बनाने की दो विधियाँ हैं। पहली विधि में दिए गए वर्गान्तरों के साथ-साथ शून्य (0) आवृत्ति वाले दो और वर्गान्तर लिए जाते हैं – एक वर्गान्तर दिए गए वर्गान्तरों के प्रारंभ में तथा दूसरा उनके अंत में। फिर सभी वर्गों के मध्य बिन्दुओं पर उनके आवृत्ति

घनत्वों को अंकित किया जाता है तथा इन बिन्दुओं को सरल रेखा द्वारा मिला दिया जाता है. आवृत्ति बहुभुज की संरचना की दूसरी विधि में, पहले सामान्य रूप में एक आयत चित्र की संरचना की जाती है। फिर आयतों के शिखरों पर उनके मध्य बिन्दु अंकित किए जाते हैं और पहली तथा अंतिम लम्बवत् रेखाओं पर अनेक मध्य बिन्दु भी अंकित किए जाते हैं। फिर आवृत्ति बहुभुज बनाने के लिए विभिन्न बिन्दुओं को सरल रेखा द्वारा मिला दिया जाता है। इन विधियों से ज्ञात होता है कि आवृत्ति बहुभुज, पहले वर्गान्तर के बाईं ओर उसकी निचली सीमा से, अंतराल को चौड़ाई को आधी दूरी पर एक बिन्दु से प्रारम्भ होता है। इसी प्रकार, विस्तरित होने के पश्चात यह अंतिम वर्गान्तर के दाईं ओर उसकी ऊपरी सीमा से, वर्गान्तर की चौड़ाई की आधी दूरी, पर एक बिन्दु पर समाप्त होता है।

यह ध्यान देने योग्य है कि आयत चित्र का कुल क्षेत्रफल और बहुभुज के अध:स्थ क्षेत्रफल, दोनों सदैव समान होते हैं और ये कुल आवृत्ति को निरूपित करते हैं।

उदाहरण 10

निम्न आँकड़ों के लिए एक आयत चित्र और एक आवृत्ति बहुभुज की संरचना कीजिए:

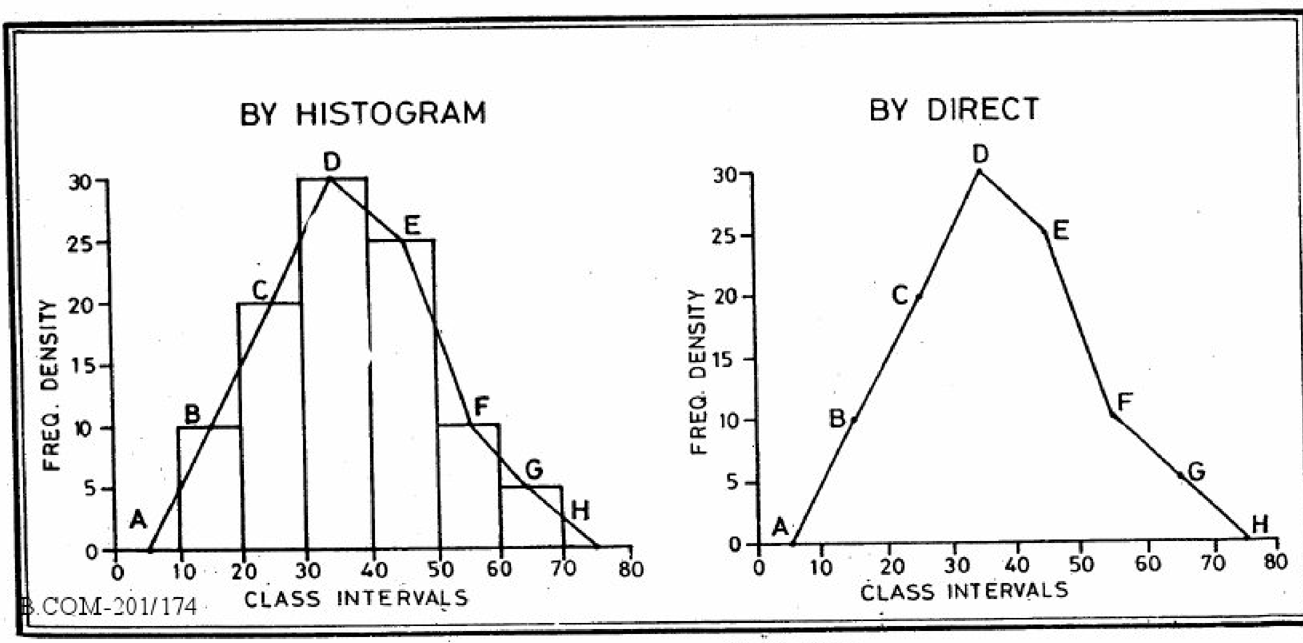
वर्ग अंतराल	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70
आवृत्ति	10	20	30	25	10	5

हल:

आयत चित्र और आवृत्ति बहुभुज की संरचना के लिए आवश्यक गणनाएँ इस प्रकार हैं:

वर्ग अंतराल	आवृत्ति (क्षेत्रफल)	चौड़ाई इकाइयाँ (आधार)	आवृत्ति घनत्व (ऊँचाई)	मध्य बिन्दु
10–20	10	1	10	15
20–30	20	1	20	25
30–40	30	1	30	35
40–50	25	1	25	45
50–60	10	1	10	55
60–70	5	1	5	65

दो अतिरिक्त वर्गान्तर 0–10 तथा 70–80 होंगे। इनमें से एक निर्दिष्ट वर्गान्तरों से पहले और दूसरा उनके पश्चात् होगा क्योंकि इन वर्गान्तरों में कोई मद नहीं है, इसलिए इनकी आवृत्तियाँ शून्य ली जाएँगी। अब आवृत्ति बहुभुज की संरचना दो विधियों द्वारा की गई है: (1) आयत



रेखाचित्र 9.11

चित्र के प्रयोग से शिखरों के मध्य बिन्दुओं और पहले तथा अंतिम लम्बवत् रेखा खण्डों के मध्य बिन्दुओं (अर्थात् A, B, C, D, E, F, G और H) को मिलाकर; और (2) प्रत्यक्ष विधि द्वारा अर्थात् निर्दिष्ट वर्गान्तरों के मध्य बिन्दुओं तथा दो अतिरिक्त वर्गान्तरों के मध्य बिन्दुओं (अर्थात् A, B, C, D, E, F, G और H) को मिलाकर।

रेखाचित्र 9.11 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए। आपको निम्नलिखित बातें ज्ञात होंगी:

1 आयत चित्र की स्थिति में, एक वर्गान्तर के अंतर्गत विभिन्न बिन्दुओं पर ऊँचाई समान है, जबकि बहुभुज की स्थिति में, यह परिवर्तनशील है। इसका अभिप्राय यह है कि आयत चित्र में, प्रत्येक वर्गान्तर के अंतर्गत, आवृत्तियाँ एक समान बंटित हैं, जबकि आवृत्ति बहुभुज में, विभिन्न बिन्दुओं पर आवृत्ति घनत्व भिन्न है।

2 आवृत्ति बहुभुज में, आवृत्ति घनत्व का उतार-चढ़ाव और धीरे-धीरे होता है; जबकि आयत चित्र में यह वर्गान्तरों के **अंतक बिन्दुओं पर आकस्मिक छलांग लगाता है।**

अत: जब एक समूह से दूसरे समूह तक, आवृत्तियों के आकस्मिक उतार और चढ़ाव को प्रदर्शित करना हो तो आयत चित्र का प्रयोग किया जाता है तथा जब धीरे-धीरे उतार और चढ़ाव को दर्शाना अभिष्ट हो तो आवृत्ति बहुभुज का प्रयोग किया जाता है।

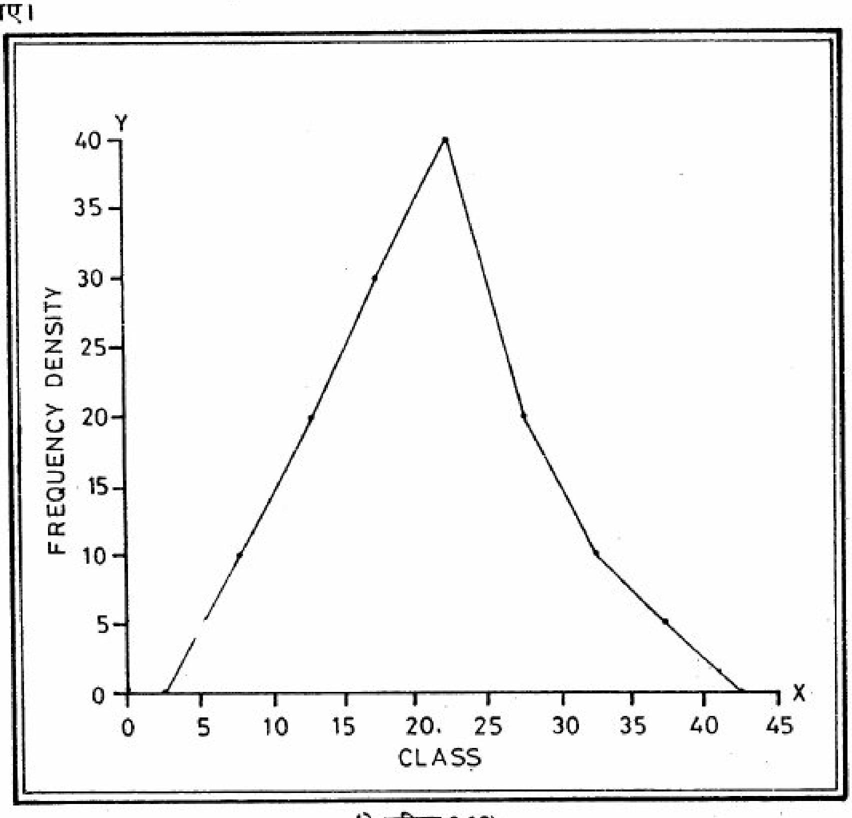
उदाहरण 11

निम्न बंटन के लिए एक आवृत्ति बहुभुज की संरचना कीजिए:

मध्य बिन्दु	7.5	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5
आवृत्ति	10	20	30	40	20	10	5

हल:

इस उदाहरण में, आवृत्ति बहुभुज की संरचना, मध्य बिन्दुओं के आधार पर बड़ी सरलता से सम्पन्न की जा सकती है। पहले वर्गान्तर की लम्बाई, पहले दो मध्य बिन्दुओं के बीच अंतर अर्थात् 12.5 – 7.5 = 5 के बराबर है। इसी प्रकार, समस्त बंटन में वर्गान्तरों की लम्बाइयाँ समान हैं। इसलिए, दो अतिरिक्त वर्गान्तरों, एक निर्दिष्ट आँकड़ों से पहले और दूसरा इनके बाद में, के मध्य बिन्दु 2.5 और 42.5 होंगे तथा आवृत्ति घनत्व के मान, परिमाण में निर्दिष्ट आवृत्तियों के बराबर होंगे। रेखाचित्र 9.12 में प्रस्तुत आवृत्ति बहुभुज का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।



(रेखाचित्र 9.12)

9.7.3 आवृत्ति वक्र (Frequency Curve)

एक आवृत्ति वक्र की संरचना, आवृत्ति बहुभुज को निष्कोण रूप देने के लिए की जाती है। इसे बनाने के लिए एक मुक्त हस्त वक्र, बहुभुज के साथ-साथ, इस प्रकार खींची जाती है कि बहुभुज के अध:स्थ क्षेत्रफल और वक्र के अध:स्थ क्षेत्रफल समान हों। आवृत्ति वक्र का अध:स्थ कुल क्षेत्रफल भी, कुल आवृत्ति को निरूपित करता है। आवृत्ति वक्र, आवृत्ति बहुभुज का एक व्यापक रूप है। इसका अभिप्राय यह है कि यदि निर्दिष्ट आँकड़े, एक बहुत बड़े समूह का एक छोटा प्रतिदर्श है तो आवृत्ति वक्र, बड़े समूह की व्यापक प्रवृत्ति को प्रकट करता है।

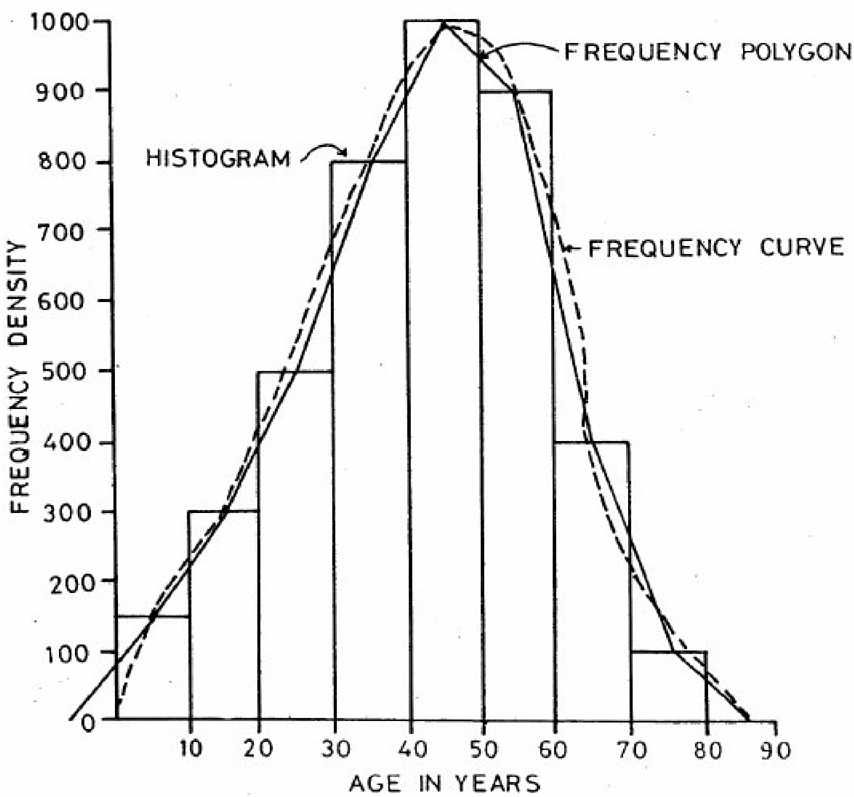
उदाहरण 12

निम्न आँकड़ों के लिए एक आयत चित्र, एक आवृत्ति बहुभुज और एक आवृत्ति वक्र की संरचना कीजिए:

आयु (वर्षों में)	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
निवासियों की संख्या	150	300	500	800	1000	900	400	100

हल:

इस उदाहरण में सभी वर्गान्तर समान हैं। हम आयत चित्र की संरचना पहले बताई गई विधि द्वारा कर सकते हैं। आयत चित्र की सहायता से अब आवृत्ति बहुभुज की संरचना की जा सकती है। अब रेखाचित्र 9.13 को ध्यानपूर्वक देखिए। आप देखेंगे कि आयत चित्र की पहली



(रेखाचित्र 19.13)

लम्बवत् रेखा, स्वयं Y-अक्ष ही है। अत: जब हम पहली लम्बवत् रेखा के मध्य बिन्दु को पहली आयत के शिखर के मध्य बिन्दु से मिलाते हैं तो बहुभुज की रेखा, X-अक्ष की ऋण ओर आएगी। सामान्यत: इसका अर्थ यह होता है कि आँकड़ों में कुछ ऋणात्मक मद भी हैं। वस्तुत: आँकड़ों में कोई ऋणात्मक मान नहीं हैं। यथार्थत: आवृत्ति बहुभुज को ऋण ओर,

केवल इसलिए जाने दिया जाता है क्योंकि आयत चित्र और आवृत्ति बहुभुज के क्षेत्रफल समान हों और कुल आवृत्ति को निरूपित करें। आवृत्ति वक्र खींचने के लिए, हमें आवृत्ति बहुभुज के व्यापक पैटर्न का अनुगमन करना होता है तथा एक निष्कोण वक्र खींचना होता है जो कभी बहुभुज के नीचे और कभी इसके ऊपर होता है ताकि बहुभुज का क्षेत्रफल और वक्र का क्षेत्रफल समान हो। वर्तमान स्थिति के समान **स्थिति में** ऋण ओर के बहुभुज अंश को समंजित करने के लिए, आवृत्ति वक्र को **शून्य से प्रारम्भ** किया जाता है।

9.7.4 तोरण या संचयी आवृत्ति रेखाचित्र (Ogive and Cummulative Frequency Graph)

एक तोरण या संचयी आवृत्ति रेखाचित्र की संरचना संचयी आवृत्तियों के आधार पर की जाती है। हम पहले ही जान चुके हैं कि **संचयी** आवृत्ति बंटन या तो **आरोही** क्रम में, या **अवरोही** क्रम में हो सकते हैं। इसी प्रकार, एक तोरण भी या तो **"से कम तोरण"** होता है या **"से अधिक तोरण"**। एक "से कम **तोरण**" की संरचना, एक आरोही क्रम के संचयी आवृत्ति बंटन के आधार पर की जाती है **तथा** एक "से अधिक तोरण" की संरचना एक अवरोही क्रम के संचयी आवृत्ति बंटन के **आधार** पर की जाती है। एक "से कम तोरण" में प्रत्येक वर्ग की "से कम" प्रकार की संचयी आवृत्ति, उसकी ऊपरी सीमा पर अंकित की जाती है किन्तु एक "से अधिक" तोरण में, प्रत्येक वर्ग को "से अधिक" प्रकार की संचयी आवृत्ति वर्ग इस की निचली सीमा पर अंकित की जाती है। तोरण मध्यका, चतुर्थकों, शतमकों इत्यादि को ज्ञात करने में हमारी सहायता करता है।

उदाहरण 13

निम्न आँकड़े एक कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा रेखाशास्त्र में प्राप्त अंकों से संबंधित हैं। इनके "से कम" तोरण और "से अधिक" तोरण पृथक रेखाचित्र में बनाइए। दोनों को एक ही रेखाचित्र में प्रदर्शित कीजिए:

अंक	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	70–80
विद्यार्थियों की संख्या	10	20	35	30	20	15	10	10

हल:

पहले हमें उपरोक्त बंटन को "से कम" और "से अधिक" संचयी आवृत्ति बंटनों में परिवर्तित करना है। इन दो संचयी आवृत्ति बंटनों की संरचना नीचे की गई है:

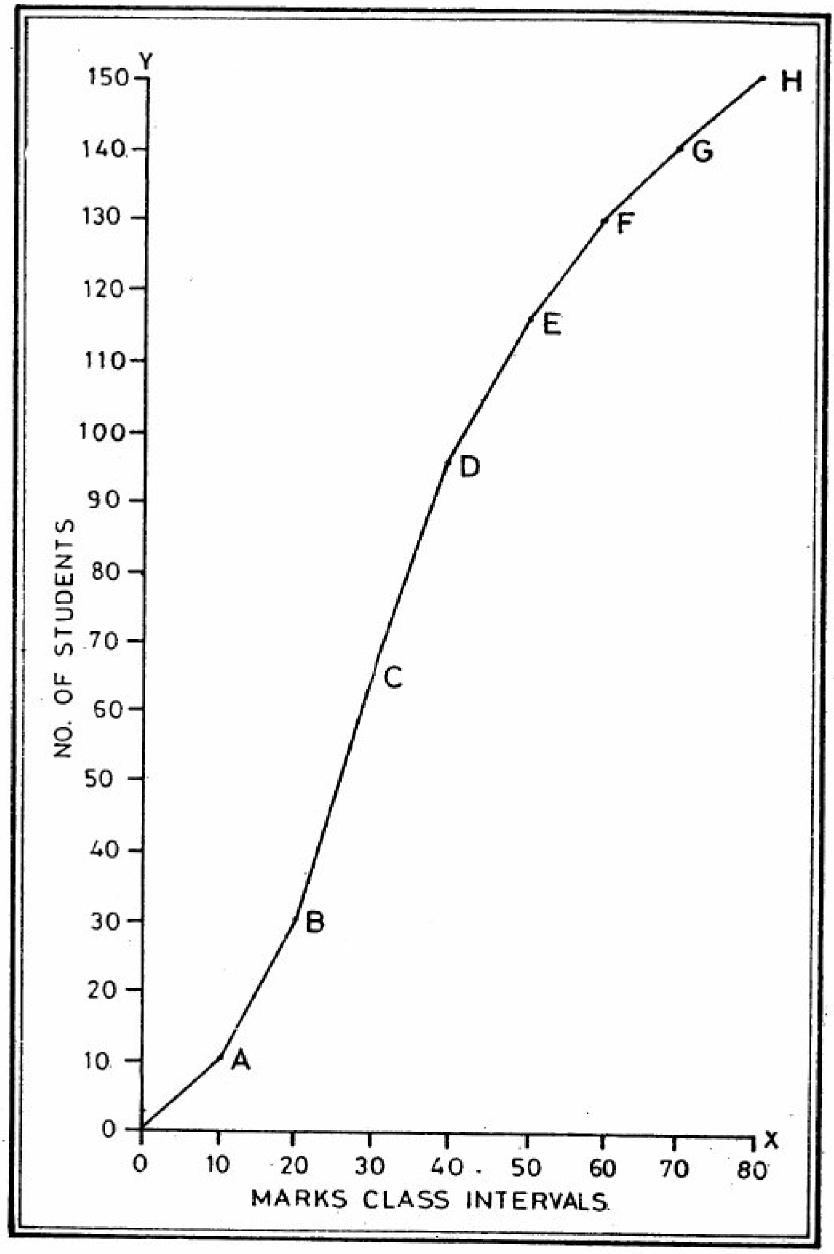
संचयी आवृत्ति बंटनों की संरचना

अंक	आवृत्ति	"से कम" संचयी आवृत्ति	"से अधिक" संचयी आवृत्ति
0–10	10	10	150
10–20	20	30	140
20–30	35	65	120
30–40	30	95	85
40–50	20	115	55
50–60	15	130	35
60–70	10	140	20
70–80	10	150	10

अब रेखाचित्र 9.14 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए। "से कम" तोरण की संरचना के लिए वर्गों की "से कम" संचयी आवृत्तियों को, उनकी ऊपरी सीमाओं पर अंकित किया गया है। इस प्रकार, बिन्दु (10, 10), (20, 30), (30, 65), (40, 95), (50, 115), (60, 130), (70, 140) और (80, 150) को बिन्दुओं A, B, C, D, E, F, G और H के रूप में अंकित किया गया है।

प्रत्येक अंकित बिन्दु, एक वर्ग अंतराल की ऊपरी सीमा से कम अंक प्राप्त करने वाले विद्यार्थियों की संख्या को निरूपित करता है। यदि आप, वर्ग अंतरालों की सीमाओं पर ध्यान दें

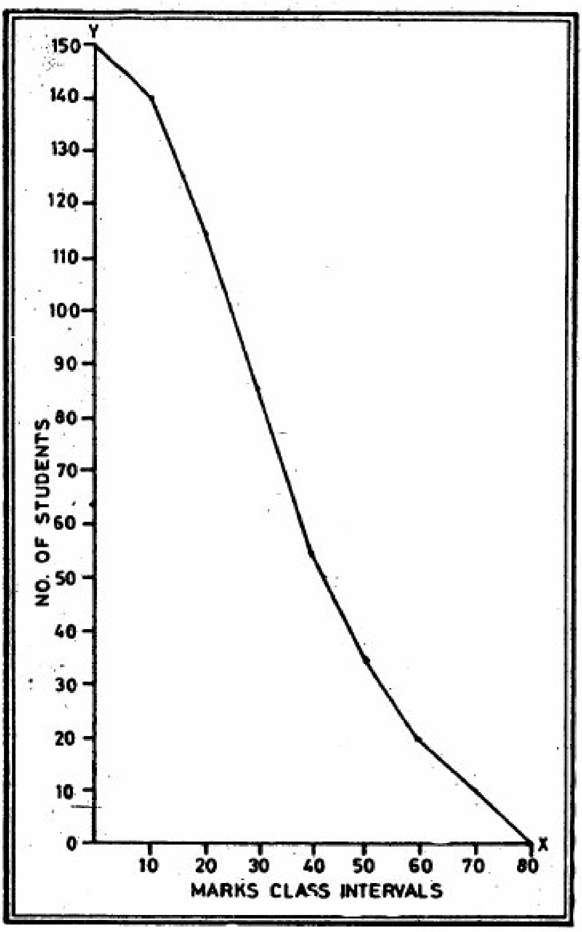
तो आप देखेंगे कि पहले वर्ग अंतराल की निचली सीमा (अर्थात् "0") को छोड़कर, शेष सभी मानों पर बिन्दु अंकित किए गए हैं। 0, से कम अंक प्राप्त करने वाले कोई विद्यार्थी नहीं हैं। इसलिए सभी मानों पर बिन्दु अंकित करने के लिए बिन्दु (0, 0) को भी बिन्दु P पर अंकित किया गया है। अब सभी बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिला दिया गया है।



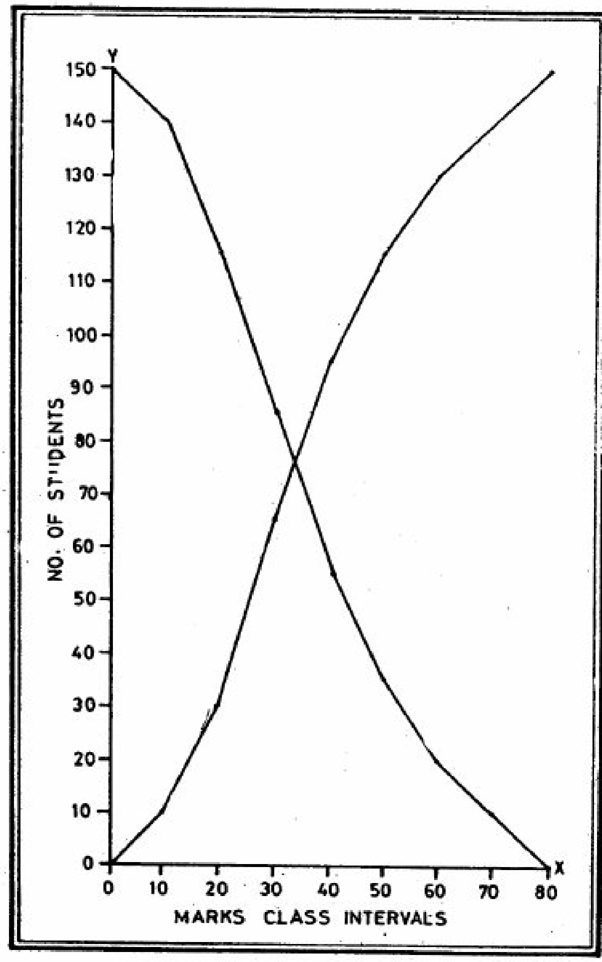
(रेखाचित्र 9.14)

रेखाचित्र 9.15 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए। "से अधिक" तोरण की संरचना, विभिन्न वर्गान्तरों की अध: सीमाओं पर, उनकी संगत "से अधिक" संचयी आवृत्तियाँ और अंतिम वर्गान्तर की ऊपरी सीमा पर "0" आवृत्ति अंकित करके की गई है। रेखाचित्र 9.16 को देखिए, जिसमें "से कम" और "से अधिक" दोनों प्रकार के तोरणों को एक ही रेखाचित्र पर प्रदर्शित किया गया है।

रेखाचित्र 9.16 में आप देखेंगे कि "से अधिक तोरण" और "से कम तोरण" एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करते हैं, जो 50 प्रतिशत आवृत्ति के संगत हैं। इस उदाहरण में यह 15/2 या 75 आवृत्ति है। ऐसा सदैव ही सत्य होगा।



(रेखाचित्र 9.15)



(रेखाचित्र 9.16)

बोध प्रश्न ख

1 एक कालिक चित्र और एक आयत चित्र में अंतर स्पष्ट कीजिए।

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

2. आवृत्ति बहुभुज किसे कहते है?

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3. एक आयत चित्र की संरचना के लिए जब वर्गान्तरों की चौढ़ाई असमान हो तो आप आवृत्तियों को किस प्रकार समंजित करते हैं?

. . . .

. . . .

. . . .

4 आवृत्ति वक्र किसे कहते हैं ?

....

....

....

....

5 "से कम" तोरण और "से अधिक" तोरण में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

6 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य ?

i) एक आवृत्ति बंटन रेखाचित्र में चर के मान को X-अक्ष पर दिखाया जाता है। ....

ii) आवृत्ति बंटन रेखाचित्रों में भी, मिथ्या आधार रेखा ली जा सकती है। ....

iii) एक आयत चित्र, आयतों की एक श्रेणी होती है, जिसमें प्रत्येक आयत की चौड़ाई, वर्गान्तर के परिमाण की समानुपाती होती है, और क्षेत्रफल, आवृत्तियों की संख्या का समानुपाती होता है। ....

iv) असमान चौड़ाई वाले वर्गान्तरों की स्थिति में आयत चित्र की संरचना, आवृत्तियों में कोई समायोजन किए बिना की जा सकती है। ....

v) एक आवृत्ति बहुभुज में, आवृत्तियों को वर्ग अंतराल की ऊपरी सीमा पर अंकित किया जाता है। ....

vi) एक आवृत्ति बहुभुज को दोनों ओर विस्तरित किया जाता है, बाईं ओर पहले वर्गान्तर से, पूर्व के एक वर्ग तक और दाईं ओर अंतिम वर्गातर के पश्चात् एक वर्ग तक। ....

vii) एक आवृत्ति वक्र की संरचना आवृत्ति बहुभुज को निष्कोण बनाने के लिए की जाती है। ....

viii) एक आवृत्ति वक्र को मुक्त हस्त द्वारा बनाया जाता है। ....

7 रिक्त स्थानों को, कोष्ठक में दिए गए शब्दों में से, उपयुक्त शब्दों द्वारा भरिए:

i) एक आवृत्ति बंटन के रेखाचित्र में बंटन की आवृत्तियाँ .... पर दिखाई देती हैं। (X-अक्ष/Y-अक्ष)

ii) एक आयत चित्र .... के निर्धारण में सहायक होता है। (भूयिष्टक/मध्यका)

iii) आयत चित्र की स्थिति में आवृत्तियाँ .... द्वारा निरूपित होती हैं। (आयतन/क्षेत्रफल)

iv) आयत चित्र के अध:स्थ और आवृत्ति बहुभुज के अध:स्थ क्षेत्रफल समान .... । (होते हैं/नहीं होते हैं)

v) एक तोरण की संरचना .... आवृत्तियों के आधार पर की जाती है। (निर्दिष्ट/संचयी)

vi) एक "से कम" तोरण की संरचना .... क्रम की संचयी आवृत्तियों के आधार पर की जाती है। (आरोही/अवरोही)

9.8 सारांश

रेखाचित्रीय वस्तुतीकरण, आँकड़ों की तुलना को सरल बना देता है, पूर्व निष्पादन की प्रवृत्ति निर्धारित करने में हमारी सहायता करता है और स्थैतिक माध्यों को निर्धारित करना संभव कर देता है। रेखाचित्रों की संरचना, बिन्दुओं की समन्वित प्रणाली के आधार पर अंकित करके तथा उन्हें रेखाओं द्वारा मिलाकर की जाती है। रेखाचित्र दो प्रकार के होते हैं: (1) काल श्रेणियों के रेखाचित्र; और (2) आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्र।

काल श्रेणियों के रेखाचित्र जिन्हें कालिक चित्र भी कहते हैं, काल क्रम में दिए गए निर्दिष्ट आँकड़ों को प्रदर्शित करते हैं। चूँकि काल (समय) स्वतंत्रता चर है, इसलिए सदा X-अक्ष पर लिया जाता है और आश्रित चर को Y-अक्ष पर लिया जाता है। Y-अक्ष या लम्बवत् अक्ष सामान्यत: शून्य से प्रारम्भ होता है, परन्तु इसे तोड़ा भी जा सकता है और इस प्रकार एक मिथ्या आधार रेखा ली जा सकती है।

इस प्रकार का रेखाचित्र या तो एक आश्रित चर के लिए या एक से अधिक आश्रित चरों के लिए बनाया जा सकता है। कालिक चित्र ऋणात्मक मानों के लिए भी बनाया जा सकता है। यदि दो आश्रित चर, दो भिन्न मापन इकाइयों में दिए गए हों तो समंकों को एक मिश्रित रेखाचित्र द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है। इस स्थिति में, दो लम्बवत् अक्ष लिए जाते हैं और इन अक्षों के आधार पर, दो आश्रित चरों के लिए दो वक्रों की संरचना की जाती है। एक अन्य प्रकार का कालिक चित्र विस्तार रेखाचित्र जिसकी संरचना, आँकड़ों के विस्तार को प्रदर्शित करने के लिए की जाती है। इस रेखाचित्र की संरचना यह दिखाने के लिए की जाती है कि आश्रित चर के चरम मान (अधिकतम और न्यूनतम मान), समय के साथ-साथ किस प्रकार बदल रहे हैं।

आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्र, आवृत्ति बंटन के आँकड़ों को निरूपित करते हैं। इस प्रकार के रेखाचित्र में चर के मानों को X-अक्ष पर लिया जाता है और आवृत्तियों से व्युत्पन्न मानों को Y-अक्ष पर। इस प्रकार के रेखाचित्र में, Y-अक्ष को नहीं तोड़ा जाता। आवृत्ति बंटनों के रेखाचित्रों को निम्न वर्गों में विभाजित किया जाता है: (1) आयत चित्र (2) आवृत्ति बहुभुज ,3) आवृत्ति वक्र, और (4) तोरण।

एक आयत चित्र, आयतों की एक श्रेणी से निर्मित होता है। इसमें प्रत्येक आयत की चौड़ाई, वर्गान्तर के परिमाण की समानुपाती होती है और क्षेत्रफल, उस वर्गान्तर से संबंधित आवृत्ति का समानुपाती होता है। जब सभी वर्गान्तर, समान हों तो आयतों की ऊँचाइयाँ भी संख्यात्मक रूप में आवृत्तियों की समानुपाती होंगी। यदि वर्गान्तर असमान हैं तो ऊँचाई आवृत्ति घनत्व की समानुपाती होगी।

एक आवृत्ति बहुभुज की संरचना, वर्गों के मध्य बिन्दुओं पर, आवृत्ति घनत्व अंकित करके और उन्हें रेखाओं द्वारा मिलाकर की जाती है। इसकी संरचना इस प्रकार भी की जा सकती है कि पहले एक आयत चित्र बनाया जाए और फिर इसपर मध्य बिन्दुओं के संगत बिन्दु अंकित किए जाएँ तथा इन बिन्दुओं को सरल रेखाओं द्वारा मिला दिया जाए। इसे आयत चित्र के दोनों ओर विस्तरित किया जाता है। आयत चित्र और आवृत्ति बहुभुज दोनों के अध:स्थ क्षेत्रफल समान होता है। एक आवृत्ति वक्र की संरचना, आवृत्ति बहुभुज का निष्कोण बनाने के लिए मुक्त हस्त से की जाती है। यह आवृत्ति बहुभुज का एक व्यापक रूप है।

एक तोरण या संचयी आवृत्ति रेखाचित्र, संचयी आवृत्तियों को प्रदर्शित करता है। हम या तो संचयी आवृत्तियों के आरोही क्रम में होने की स्थिति में "से कम" तोरण की संरचना कर सकते हैं या संचयी आवृत्तियों के अवरोही क्रम में होने की स्थिति में "से अधिक" तोरण की संरचना कर सकते हैं। तोरण मध्यका और अन्य स्थैतिक मानों को निर्धारित करने में हमारी सहायता करता है।

9.9 शब्दावली

समंजित आवृत्ति या आवृत्ति घनत्वः आवृत्ति प्रति इकाई वर्गान्तर को निरूपित करता है।

मिथ्या आधार रेखा: कालिक चित्र में Y-अक्ष को तोड़ कर ली जाती है।

आवृत्ति वक्र: एक वक्र, जिसकी संरचना, आवृत्ति बहुभुज को निष्कोण बनाने के लिए की जाती है।

आवृत्ति बहुभुज: आवृत्ति बंटन का एक रेखाचित्र जिसकी संरचना, वर्गान्तरों के मध्य बिन्दुओं पर, आवृत्ति घनत्व अंकित करके की जाती है।

आयत चित्र: आवृत्ति बंटन का एक रेखाचित्र, जिसमें आयतों की रचना की जाती है और जिनका आधार वर्गान्तर होता है तथा क्षेत्रफल उस वर्गान्तर की आवृत्ति का समानुपाती होता है।

कालिक चित्र: काल श्रेणी का एक रेखाचित्र।

मिश्रित रेखाचित्र: एक रेखाचित्र जिसकी संरचना भिन्न मापक इकाइयों वाले दो आश्रित चरों को प्रदर्शित करने के लिए की जाए।

तोरण: संचयी आवृत्ति बंटन का एक रेखाचित्र, जो संचयी आवृत्तियों को चित्रित करता है।

प्रारंभिक बिन्दु: X-अक्ष और Y-अक्ष का प्रतिच्छेद बिन्दु।

विस्तार रेखाचित्र: एक रेखाचित्र, जो विभिन्न समय बिन्दुओं पर एक चर के दो चरम मानों के अंतर को प्रदर्शित करता है।

X- अक्ष: बिन्दु अंकित करने के लिए क्षैतिज अक्ष।

Y-अक्ष: बिन्दु अंकित करने के लिए लम्बवत् अक्ष।

9.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 5 i) सत्य, ii) असत्य, iii) सत्य, iv) असत्य, v) असत्य, vi) सत्य, vii) असत्य viii) असत्य,

6 i) सहायक होता, ii) IV, iii) X, iv) कर सकते, v) ले सकते, vi) दो, vii) होने, viii) अंतर

ख 6 i) सत्य, ii) असत्य, iii) सत्य, iv) असत्य, v) असत्य, vi) सत्य, vii) सत्य, viii) सत्य,

7 i) Y-अक्ष, ii) भूयिष्टक, iii) क्षेत्रफल, iv) होते हैं, v) संचयी, vi) आरोही, vii) मध्यका

9.11 स्वपरख प्रश्न अभ्यास

प्रश्न

1 आँकड़ों के रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण के नियमों का वर्णन कीजिए।

2 आँकड़ों के रेखाचित्रीय प्रस्तुतीकरण के महत्व का विवेचन कीजिए।

3 काल श्रेणी के रेखाचित्र को क्या कहते हैं? काल श्रेणी के रेखाचित्र की संरचना के नियमों की विवेचना कीजिए।

4 आवृत्ति बंटन के रेखाचित्र को क्या कहते हैं? आवृत्ति बंटन के रेखाचित्रों की संरचना के नियमों का विवेचन कीजिए।

5 आवृत्ति बंटन पर आधारित विभिन्न प्रकार के रेखाचित्रों का वर्णन कीजिए।

6 काल श्रेणी के विभिन्न प्रकार के रेखाचित्रों का वर्णन कीजिए।

अभ्यास

1 निम्न आँकड़े एक वर्कशाप में बिजली न होने के कारण नष्ट हुए श्रम-दिवसों की संख्या से संबंधित हैं। इन्हें एक उपयुक्त रेखाचित्र द्वारा दिखाइए।

वर्ष	1980	1981	1982	1983	1984	1985
नष्ट श्रम दिवस	1900	1588	1469	1461	1927	1011

2 विभिन्न पंचवर्षीय योजनाओं में शिक्षा पर वित्तीय परिव्यय से संबंधित निम्न आकड़ों के लिए एक कालिक चित्र की संरचना कीजिए:

योजना	I	II	III	IV	V	VI	VII
प्रतिशत परिव्यय	7.6	5.9	6.9	4.9	3.3	2.6	3.6

3 निम्न आँकड़े भारत की जनसंख्या से संबंधित हैं:

वर्ष	1931	1941	1951	1961	1971	1981
जनसंख्या (करोड़ों में)	27.9	31.9	36.1	43.9	54.8	68.5

उपर्युक्त आँकड़ों के लिए एक उपयुक्त रेखाचित्र बनाइए।

4 एक देश के व्यापार संतुलन से संबंधित निम्न आँकड़ों के लिए एक उपयुक्त रेखाचित्र की संरचना कीजिए:

वर्ष	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
व्यापार का संतुलन ('000 रु.)	+ 3	+ 5	+ 1	− 4	− 2	+ 3	− 5	+ 6

5 निम्न आँकड़े भारत में कार्यशील जनसंख्या के व्यावसायिक बंटन से संबंधित हैं:

वर्ष	प्राथमिक (प्रतिशत)	द्वितीयक (प्रतिशत)	तृतीयक (प्रतिशत)	कुल आबादी
1941	76.0	10.5	13.5	100
1951	72.1	10.7	17.2	100
1961	—	—	—	—
1971	72.1	11.2	16.7	100
1981	70.6	12.9	16.5	100

उपरोक्त आँकड़ों के लिए एक से अधिक चर रेखाचित्रों की संरचना कीजिए।

6 मात्रा और मूल्य के पदों में एक पदार्थ के उत्पादन संबंधी निम्न आँकड़ों के लिए एक मिश्रित रेखाचित्र की संरचना कीजिए:

वर्ष	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
मात्रा ('000 टन)	20	24	24	26	25	28	30
मूल्य (लाख रु.)	1000	1100	1200	1350	1350	1500	1800

7 निम्न आँकड़े दिल्ली में तापमान से संबंधित हैं। इन आँकड़ों के लिए एक विस्तार रेखाचित्र की संरचना कीजिए।

दिनाँक	(डिग्री सैल्शियस)	
	अधिकतम तापमान	न्यूनतम तापमान
1.11.1989	32.5	16.5
2.11.1989	31.6	16.0
3.11.1989	30.2	16.0
4.11.1989	29.5	15.5
5.11.1989	30.5	15.0
6.11.1989	31.6	14.5
7.11.1989	30.0	14.5

8 निम्न आँकड़ों के लिए एक आयत चित्र बनाइए:

स्कोर किए गए गोलों की संख्या	0	1	2	3	4	5	6
मैचों की संख्या	8	12	20	10	6	4	2

9 निम्न आँकड़ों के लिए एक आयत चित्र बनाइए:

माप	1	2	3	4	5	6	7	8
आवृत्ति	5	15	20	30	25	20	10	10

10 नीचे दिए गए आँकड़ों के लिए एक आयत चित्र बनाइए:

आयु (वर्षों में)	4–6	6–8	8–10	10–12	12–14	14–16	16–18
बच्चों की सं.	50	80	140	200	300	180	40

11 निम्न आँकड़े एक कालेज के विद्यार्थियों द्वारा अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों से संबंधित हैं। इन आँकड़ों के लिए एक मिश्रित रेखाचित्र की संरचना कीजिए:

अंक	0–10	10–20	20–40	40-50	50–60	60–70	70–100
विद्यार्थियों की संख्या	30	15	40	30	50	30	15

12 निम्न आँकड़ों के लिए एक आयत चित्र, एक आवृत्ति बहुभुज और एक आवृत्ति वक्र की संरचना कीजिए:

वर्ग	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
आवृत्ति	5	20	40	50	30	10	5

13 निम्न आँकड़ों के लिए, एक आवृत्ति बहुभुज बनाइए:

मध्य बिन्दु	5	15	25	35	45	55	65
आवृत्ति	20	40	50	80	60	30	10

14 निम्न आँकड़ों के लिए एक "से कम" तोरण और एक "से अधिक" तोरण पृथक-पृथक बनाइए:

वर्ग	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30	30–35
आवृत्ति	5	20	40	50	30	10	5

15 निम्न आँकड़ों के लिए एक ही रेखाचित्र में "से कम" और "से अधिक" तोरणों की संरचना कीजिए:

अंक	0–10	10-20	20-30	30–40	40-50	50–60	60–70	70–100
विद्यार्थियों की संख्या	20	40	80	150	250	100	60	10

टिप्पणी: ये प्रश्न और अभ्यास, आपकी इस इकाई को अच्छी तरह से समझने में सहायता करेंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। परन्तु इन्हें मूल्यांकन के लिए विश्वविद्यालय को मत भेजिए। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

एन. के. कक्कर एवं एन. डी. वोहरा: **सांख्यिकी** (नई दिल्ली: एस. चन्द एंड कम्पनी लि., 1990) अध्याय 2, 3, 4

सत्य प्रकाश गुप्ता: **सांख्यिकी के सिद्धांत** (नई दिल्ली: सुल्तान चन्द एंड संस, 1990) अध्याय 6, 7, 8

B.Com-201
सांख्यिकी के तत्व

खंड

3

केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप

इकाई 10

केन्द्रीय प्रवृत्ति की संकल्पना तथा माध्य 191

इकाई 11

माध्यिका 217

इकाई 12

भूयिष्ठक 242

इकाई 13

गुणोत्तर; हरात्मक और चल माध्य 256

विशेषज्ञ समिति

प्रो॰ बी॰ एस॰ शर्मा
उप-कुलपति
इं॰ गां॰ रा॰ मु॰ वि॰

प्रो॰ राकेश खुराना
निदेशक, प्रबंध अध्ययन विद्यापीठ
इं॰ गां॰ रा॰ मु॰ वि॰

प्रो॰ जे॰ सत्यनारायण (अध्यक्ष)
उस्मानिया विश्वविद्यालय
हैदराबाद

प्रो॰ जी॰ वी॰ शिनॉय
इंस्टीट्यूट ऑफ रूरल मैनेजमेंट
आनंद

प्रो॰ बी॰ एस. भाटिया
पंजाबी विश्वविद्यालय
पटियाला

प्रो॰ पी॰ के॰ घोष
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

प्रो॰ आर॰ बी॰ उपाध्याय
राजस्थान विश्वविद्यालय
जयपुर

प्रो॰ आई॰ एच॰ फारुकी
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय
अलीगढ़

श्री ए॰ के॰ मजूमदार
इंस्टीट्यूट ऑफ चार्टर्ड एकाउंटेंट्स ऑफ इंडिया
नई दिल्ली

प्रो॰ अमर चन्द
मद्रास विश्वविद्यालय
मद्रास

पाठ निर्माण दल

श्री विद्यानन्द
श्रीराम कालेज ऑफ कॉमर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

प्रो॰ ब्रह्म भटट
स्कूल ऑफ कॉमर्स
गुजरात विश्वविद्यालय
अहमदाबाद

संकाय सदस्य :
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ॰ आर॰ के॰ ग्रोवर
डॉ॰ एन॰ वी॰ नरसिम्हम
सुश्री मधु सूर्या
श्री नवल किशोर
डॉ॰ (श्रीमती) मधु त्यागी

प्रो॰ जी॰ सांबशिव राव
(भाषा संपादक)

अनुवाद

श्री के॰ के॰ खन्ना
ज़ाकिर हुसैन कॉलेज
नई दिल्ली

श्री जे॰ डी॰ गुप्ता
वैशाली
दिल्ली

संकाय सदस्यः इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

प्रो॰ वी॰ रा॰ जगन्नाथन
डॉ॰ आर॰ के॰ ग्रोवर
श्री नूर नबी अब्बासी
डॉ॰ भगत सिंह
श्रीमती मधु सूर्या

सामग्री निर्माण : बी. नटराजन, कॉपी एडिटर, एस. ओ. एम. एस., इग्नो

सितम्बर, 1999 (पुनर्मुद्रण)

© इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, 1994

ISBN-81-7091-584-8

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस कार्य का कोई भी अंश इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति लिए बिना मिमियोग्राफ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

खंड 3 केन्द्रीय प्रवृत्ति की माप

द्वितीय खंड में आपने समंकों के संकलन की विधियों तथा समंकों को आरेखों, रेखाचित्रों तथा आवृत्ति बटनों द्वारा प्रस्तुत करने के विषय में पढ़ा था। इन विधियों द्वारा समंकों का संक्षेपण तो अवश्य हो जाता है किन्तु समंकों के अधिक विश्लेषण के लिए हमें कुछ मापों की आवश्यकता होती है जो समंकों की मुख्य विशेषताओं को अधिक यथार्थ रूप में प्रस्तुत करते हैं। इस खंड में आप ऐसे मापों के प्रथम कुलक के विषय में पढ़ेंगे जो समस्त समंकों का एक विहंगम दृश्य प्रदान करते हैं। इन्हें अत्यन्त उपलक्षक अथवा समंकों का मध्य-बिन्दु भी माना जा सकता है। ऐसे मापों को केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप अथवा अवस्थिति के माप (Measures of Position) भी कहा जाता है। इस खंड में चार इकाइयाँ हैं।

इकाई 10 में केन्द्रीय प्रवृत्ति के अर्थ तथा इसके विभिन्न मापों का वर्णन किया गया है। साथ ही साधारण और भारित समांतर माध्य की संकल्पना, उनकी संगणना की विधियों, उनके विशेष गुणों तथा उनके उपयोगों और परिसीमाओं का विवेचन भी किया गया है।

इकाई 11 में मध्यका (Median) की संकल्पना, इसकी संगणना, विशेष गुणों, उपयोगों आदि की चर्चा की गई है। इसमें अन्य विभागकारी मूल्यों (Partitions Values) का भी विवेचन किया गया है जो केन्द्रीय प्रवृत्ति नहीं है परन्तु संकल्पना में मध्यका के समान हैं।

इकाई 12 भूयिष्ठक (Mode) से संबंधित है। इसमें भूयिष्ठक की संकल्पना, इसकी संगणना, इसके विशेष गुणों तथा उपयोगों आदि का विवेचन है।

इकाई 13 गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean), हरात्मक माध्य (Harmonic Mean) तथा चल माध्य (Moving Mean) की व्याख्या करके खंड का सारांश प्रस्तुत करती है। इसमें यह भी बताया गया है कि दी हुई परिस्थिति में केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक उपयुक्त माप का चुनाव किस प्रकार किया जाए।

इकाई 10 केन्द्रीय प्रवृत्ति की संकल्पना तथा माध्य

इकाई की रूपरेखा

10.0 उद्देश्य
10.1 प्रस्तावना
10.2 केन्द्रीय प्रवृत्ति की संकल्पना
10.3 एक आदर्श माध्य के आवश्यक गुण
10.4 माध्यों के उद्देश्य
10.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप
10.6 समांतर माध्य क्या है ?
10.7 समांतर माध्य की संगणना
    10.7.1 अवर्गीकृत समंक
    10.7.2 वर्गीकृत समंक
10.8 भारित समांतर माध्य
    10.8.1 भारित समांतर माध्य की संगणना
    10.8.2 साधारण समांतर माध्य से तुलना
    10.8.3 भारित समांतर माध्य के उपयोग
10.9 समांतर माध्य के विशेष गुण
10.10 समांतर माध्य के गुण तथा सीमाएँ
10.11 कुछ उदाहरण
10.12 सारांश
10.13 शब्दावली तथा प्रतीकों की सूची
10.14 बोध प्रश्नों के उत्तर
10.15 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

10.0 उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन के बाद आप इस योग्य हो जाएँगे कि आपः

- यह बता सकें कि केन्द्रीय प्रवृत्ति क्या है
- यह मूल्यांकन कर सकें कि माध्यों के परिकलन का क्या उद्देश्य है
- एक आदर्श माध्य के गुणों की व्याख्या कर सकें
- विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए समान्तर माध्य तथा भारित समांतर माध्य की परिभाषा तथा संगणना कर सकें
- समांतर माध्य के विशेष गुणों तथा गुण-दोषों की व्याख्या कर सकें
- समांतर माध्य की सीमाओं तथा उपयोगों का वर्णन कर सकें।

10.1 प्रस्तावना

आपने इसका विस्तारपूर्वक अध्ययन कर लिया है कि समंकों को किस प्रकार वर्गीकृत किया जाता है तथा किस प्रकार उन्हें सारणियों, आरेखों तथा लेखाचित्रों के रूप में प्रस्तुत किया जाता है। यदि समंकों की विशेषताओं को भलीभांति समझना हो, तो यह आवश्यक है कि समंकों का और अधिक संक्षेपण तथा विश्लेषण किया जाए। माध्य या केन्द्रीय प्रवृत्ति, जो संपूर्ण समंकों का एक विहंगम दृश्य प्रस्तुत करती है, कि संगणना इस दिशा में पहला कदम है।

इस इकाई में आप माध्यों की संगणना का उद्देश्य तथा एक आदर्श माध्य के तात्विक अंशों का अध्ययन करेंगे, तथा माध्यों के विभिन्न मापों की पहचान करेंगे। साथ ही आप माध्यों के दो मापों, अर्थात् समांतर माध्य तथा भारित समांतर माध्य के परिकलन, गुणदोषों तथा परिसीमाओं का विस्तारपूर्वक अध्ययन करेंगे।

10.2 केन्द्रीय प्रवृत्ति की संकल्पना (Concept of Central Tendency)

एक आवृत्ति बंटन का विश्लेषण करने के लिए उपयोग किये जाने वाले विभिन्न सांख्यिकीय मापों का सही गुण-दोष विवेचन करने के लिए यह जान लेना आवश्यक है कि अधिकतर सांख्यिकीय बंटनों के कुछ सामान्य लक्षण होते हैं। यदि हम एक चर के न्यूनतम मूल्य से उसके अधिकतम मूल्य की ओर चलें, तो प्रत्येक क्रमिक अवस्था में मदों की संख्या तब तक बढ़ती जाती है जब तक कि हम एक अधिकतम मूल्य तक नहीं पहुँचते, तत्पश्चात् जैसे-जैसे हम आगे बढ़ते हैं, वे घटती जाती हैं। सांख्यिकीय समंक जो इस सामान्य प्रतिरूप का अनुसरण करते हैं, एक चर से दूसरे चर तक निम्नलिखित तीन प्रकार से भिन्न हो सकते हैं:

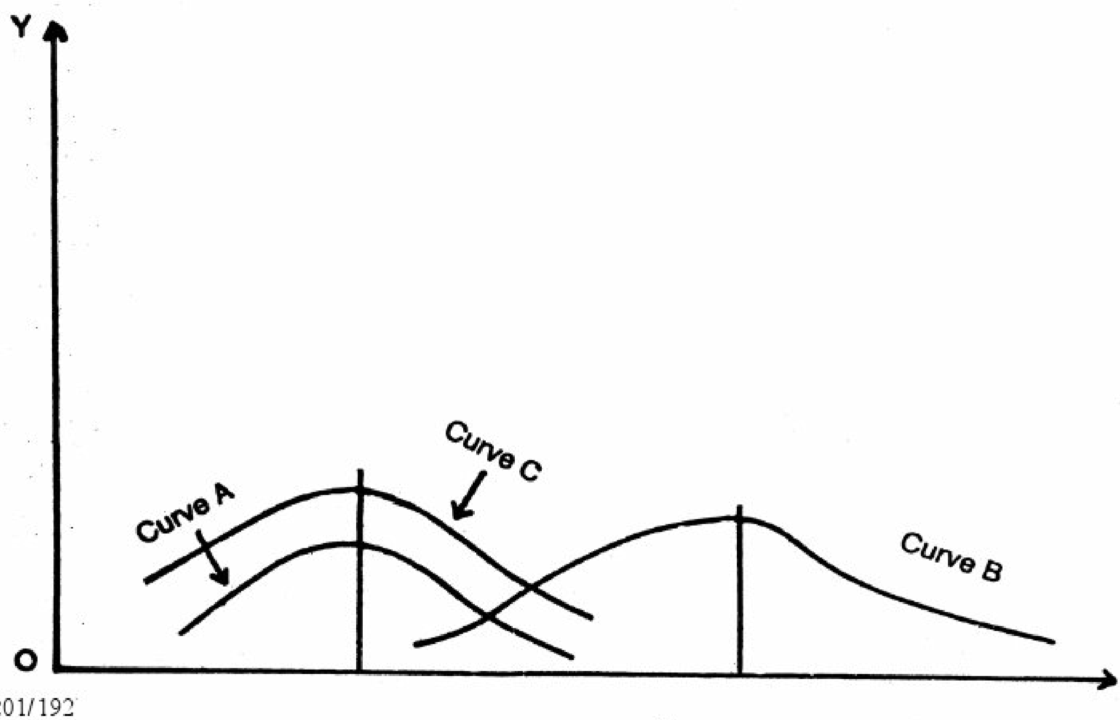
1 वे एक दूसरे से चरों के उन मूल्यों के संबंध में भिन्न हो सकते हैं जिनके चारों ओर अधिकतर मदों का झुंड होता है (अर्थात-माध्य)।

2 वे उस विस्तार के विषय में भिन्न हो सकते हैं जिस तक मद व्यासृत (dispersed) हैं अर्थात् अपकिरण (dispersion)।

3 वे किसी मानक बंटन, जिसे प्रसामान्य बंटन (normal distribution) कहा जाता है, से विचलन की सीमा के विषय में भिन्न हो सकते हैं अर्थात् विषमता (skewness) तथा कुकुदता (kurtosis)।

तदनुसार इन तीन प्रकार की विशेषताओं का अध्ययन करने के लिए सांख्यिकीय मापों के तीन कुलक हैं। इस समय हम केवल मापों के प्रथम कुलक का ही अध्ययन करेंगे जिन्हें माध्य या केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप या स्थिति के माप कहा जाता है। हम मापों के अन्य दो कुलकों (अर्थात् अपकिरण तथा विषमता के मापों) का अध्ययन इस पाठ्यक्रम के चतुर्थ खण्ड में करेंगे।

बंटन के सामान्य प्रतिरूप में समंकों में हम एक ऐसा मूल्य पहचान सकते हैं जिसके चारों ओर समंकों के बहुत से अन्य मद संकेन्द्रित हों। यह एक ऐसा मूल्य होता है जो समस्त मूल्यों के सीमान्तर के मध्य भाग में कहीं स्थित होता है। चूँकि समंकों का यह प्रतिरूपी मद समंकों के मध्य भाग की ओर हो सकता है, अतः इसे केन्द्रीय प्रवृत्ति के नाम से जाना जाता है। चूंकि यह मदों के गुच्छन (clustering) की स्थिति को इंगित करता है, अतः इसे अवस्थिति का माप (Measure of location) भी कहा जाता है। जिस प्रकार एक निबंध के शीर्षक से उसकी केन्द्रीय विषय वस्तु का ज्ञान हो जाता है, उसी प्रकार संख्यात्मक समंकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति से संपूर्ण समंकों का केन्द्रीय प्रत्यय मिल जाता है। चित्र 10.1 को ध्यानपूर्वक देखिए। यह तीन भिन्न वक्रों A, B तथा C की केन्द्रीय स्थितियों को दर्शाता है। आपने अवश्य देखा होगा कि वक्र A तथा वक्र C की केन्द्रीय स्थितियाँ समान हैं। वक्र B की केन्द्रीय स्थिति वक्र A तथा वक्र C की केन्द्रीय स्थितियों के दाहिने भाग में है।



चित्र 10.1

10.3 एक आदर्श माध्य के आवश्यक गुण

जैसा कि प्रसिद्ध सांख्यिकीविदों, यूल तथा कैन्डॉल ने सुझाव दिया है, एक आदर्श माध्य में निम्नलिखित विशेषताएँ होनी चाहिए :

1 **समझने में सरल तथा संगणना करने में सुगम :** माध्य निकालना सरल होना चाहिए तथा इसकी संगणना सुगम होनी चाहिए।

2 **स्पष्ट रूप से परिभाषित :** एक माध्य किसी गणितीय सूत्र द्वारा स्पष्ट रूप से परिभाषित होना चाहिए ताकि विभिन्न व्यक्तियों द्वारा, जो उसकी संगणना करने का प्रयत्न करते हैं, एक ही उत्तर निकाला जाए। इसे संगणना करने वाले व्यक्ति के व्यक्तिगत पक्षपात या पूर्वग्रह पर आधारित नहीं होना चाहिए।

3 **समंकों के समस्त मदों पर आधारित :** माध्य निकालने के लिए समंक कुलक की प्रत्येक मद सम्मिलित की जानी चाहिए। कोई भी मद छोड़ी नही जानी चाहिए अन्यथा माध्य का मूल्य बदल सकता है।

4 **न्यूनतम व अधिकतम मूल्यों से अनुचित रूप से प्रभावित नहीं होना चाहिए :** एक अकेला चरम मूल्य, जैसे कि एक अधिकतम मूल्य या एक न्यूनतम मूल्य माध्य को अनुचित रूप से प्रभावित कर सकता है। एक बहुत छोटी मद माध्य के मूल्य को कम कर सकती है, तथा एक बहुत बड़ी मद बड़ी सीमा तक इसके मूल्य को बढ़ा सकती है। यदि कोई माध्य एक चरम मूल्य के सम्मिलन अथवा अपवर्जन से परिवर्तित हो जाता है, तो वह उस समंक कुलक का वास्तविक प्रतिनिधि मूल्य नहीं है।

5 **बीजगणितीय विवेचन संभव :** एक माध्य का और अधिक बीजगणितीय विवेचन संभव होना चाहिए। इससे इसकी उपयोगिता बढ़ेगी। उदाहरणार्थ, यदि हमें तीन एक समान समंक कुलको के माध्य दिए गए हों, तो उन तीनों समंकों कुलकों का संयुक्त माध्य निकालना संभव होना चाहिए।

6 **प्रतिदर्शी स्थिरता :** माध्य की एक समान प्रतिदर्शी स्थिरता होनी चाहिए। इसका अर्थ यह है कि यदि हम समष्टि से विभिन्न प्रतिदर्श लें, तो किसी भी प्रतिदर्श का माध्य लगभग वही होना चाहिए जो अन्य प्रतिदर्शों का है।

10.4 माध्यों के उद्देश्य

आपने एक आदर्श माध्य के लक्षणों का अध्ययन कर लिया है। आइये, अब हम माध्यों की संगणना के उद्देश्यों का विवेचन करें। माध्यों के प्रमुख उद्देश्य निम्नलिखित हैं।

1 **एक ऐसा अकेला मूल्य प्रदान करना जो पूर्ण समंकों की विशेषताओं की व्याख्या करता है :** एक माध्य समंकों के जटिल समूह का एक अकेले प्रतिनिधि मूल्य में लघुकरण कर देता है, जिससे इसकी तफसील में खोये बिना हम समंकों की मुख्य विशेषताओं को समझ सकते हैं। इस प्रकार हजारों-लाखों मूल्यों को केवल एक मूल्य द्वारा निरूपित किया जा सकता है। उदाहरणार्थ, एक बड़ी फैक्टरी के प्रत्येक श्रमिक के मासिक वेतन को याद रखना प्रायः असंभव है। किन्तु यदि सारे श्रमिकों के कुल वेतन को श्रमिकों की संख्या से विभाजित करके औसत वेतन निकाल लिया जाए, तो हम जान सकते हैं कि औसत रूप में श्रमिक को कितना वेतन मिल रहा है।

2 **तुलना में सहायक होना :** विशाल असाधित समंकों के दो कुलकों की तुलना करना सुगम नहीं है। किंतु दो भिन्न समंक कुलकों की तुलना उनके माध्य निकालकर सुगमतापूर्वक की जा सकती है। तुलना एक समय बिन्दु पर अथवा एक समय की अवधि में की जा सकती है। उदाहरणार्थ, दो व्यावसायिक फर्मों "अ" तथा "ब" की चालू वर्ष की बिक्री की तुलना उनकी औसत बिक्री की तुलना करके की जा सकती है। इस इकाई की चालू वर्ष की बिक्री तथा इसी इकाई की पिछले वर्ष की बिक्री की तुलना पिछले वर्ष तथा चालू वर्ष की बिक्री का औसत निकाल कर की जा सकती है। किन्तु, दो समंक कुलकों के औसत की तुलना करने के लिए औसत की संगणना की समान विधि अपनाई जानी चाहिए। उदाहरणार्थ, एक इलाके के लोगों की समांतर माध्य आय की दूसरे इलाके के लोगों की मध्यका आय से तुलना करना युक्तिसंगत नहीं है। हम आगे इसी इकाई में समांतर माध्य के विषय में विस्तारपूर्वक विवेचन करेंगे, तथा मध्यका के विषय में विवेचन इकाई 11 में किया जाएगा।

3 **सांख्यिकीय अनुमान में सहायक होना :** समष्टि के अज्ञात मापों अथवा "प्राचलों" (parameters) के विषय में अनुमान लगाने के लिए हम प्रतिदर्श से परिकलित मूल्यों पर निर्भर करते हैं। इस प्रक्रिया को सांख्यिकीय अनुमिति (statistical inference) कहा जाता है। एक प्रतिदर्श से प्राप्त माध्य समष्टि के माध्य का प्राक्कलन करने में सहायक होता है।

4 **निर्णय लेने की प्रक्रिया में सहायक होना :** माध्यों की संगणना प्रबंधकों को निर्णय लेने में सहायता प्रदान करने के लिए की जाती है। प्रबंधक प्रायः एक संयंत्र का सामान्य उत्पादन, प्रतिनिधि बिक्री-परिमाण, कुल उत्पादिता सूचकांक (over all productivity index), मूल्य सूचकांक आदि के विषय में जानने में रुचि रखते हैं। ये सब एक माध्य के अभिधार्थ हैं।

10.5 केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप

माध्यों अथवा केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न माप निम्नलिखित हैं :

1 **गणितीय माध्य** (Mathematical Averages)

- i) समांतर माध्य (Arithmetic Mean)
- ii) गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)
- iii) हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

ये सारे माप साधारण अथवा भारित हो सकते हैं। आप इस इकाई में समांतर माध्य के बारे में विस्तारपूर्वक अध्ययन करेंगे। गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य का विवेचन इकाई 13 में किया गया है।

2 **स्थिति के माध्य** (Averages of Position)

- i) मध्यका (Median)
- ii) भूयिष्टक (Mode)

हम इकाई 11 में मध्यका के विषय में, तथा इकाई 12 में भूयिष्टक के विषय में विस्तारपूर्वक विवेचन करेंगे।

3 **विशिष्ट माध्य** (Special Averages)

- i) चल माध्य (Moving Averages)
- ii) संचयी माध्य (Progressive Averages)

ये विशिष्ट माध्य सामान्यतः व्यवसाय से संबंधित काल श्रेणी समंकों के विश्लेषण में प्रयोग किये जाते हैं। इकाई 13 में हम चल माध्य के विषय में विस्तारपूर्वक अध्ययन करेंगे।

10.6 समांतर माध्य (Arithmetic Average) क्या है ?

समांतर माध्य को समान्यतः माध्य के नाम से जाना जाता है। यह केंद्रीय प्रवृत्ति का एक माप है क्योंकि समंकों की अन्य संख्याएँ इसके चारों ओर एकत्र होती हैं। समांतर माध्य निकालने के लिए दिए गए समंक कुलक के समस्त प्रेक्षणों के मूल्यों के योग को उस कुलक के प्रेक्षणों की संख्या से विभाजित किया जाता है। वाणिज्य, प्रबंध, अर्थशास्त्र, वित्त, उत्पादन आदि विषयों में उपयोग किया जाने वाला यह सर्वसामान्य माध्य है। समांतर माध्य को साधारण समांतर माध्य भी कहा जाता है।

10.7 समांतर माध्य की संगणना

जैसा कि आप जानते हैं, संकलन के पश्चात् समंकों को उनकी समानताओं और साम्यताओं के आधार पर विभिन्न वर्गों में व्यवस्थित करके वर्गीकृत किया जाता है। समांतर माध्य की संगणना अवर्गीकृत या असमूहित समंकों (असाधित समंकों) तथा वर्गीकृत या समूहित समंकों, दोनों के लिए की जा सकती है। किन्तु दोनों प्रकार के समंकों की संगणना की विधियाँ भिन्न होती हैं। आइए, अब हम अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत समंकों के लिए समांतर माध्य की संगणना की विधियों को समझें। सामान्यतः समांतर माध्यकों को, जिसे 'x दण्ड' पढ़ा जाता है, $\bar{x}$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

10.7.1 अवर्गीकृत समंक (Ungrouped Data)

विधि 1 : जब समंक अवर्गीकृत हों, अर्थात् जब आवृत्ति बंटन न किया गया हो, तो समांतर माध्य की संगणना बहुत सरल होती है। इसके लिए केवल प्रेक्षणों के सारे मूल्यों को जोड़कर, उनके योगफल को प्रेक्षणों की संख्या

से विभाजित कर दिया जाता है। इसकी व्याख्या और अभिव्यक्ति एक सूत्र के रूप में निम्न प्रकार से की जा सकती है।

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

जहाँ $\bar{x}$ (दण्ड) x_n चर का समांतर माध्य है, $x_1, x_2 \dots x_n$ x चर के विभिन्न मूल्य हैं, तथा n प्रेक्षणों की कुल संख्या है।

इस सूत्र का सरलीकरण निम्न प्रकार से किया जा सकता है :.

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

जहाँ $\sum$ जिसे सिग्मा पढ़ा जाता है) एक ग्रीक प्रतीक है जो x के समस्त मूल्यों के योग को सूचित करता है।

उदाहरण 1

एक किराना स्टोर पाँच भिन्न उत्पाद बेचता है। इन उत्पादों में से प्रत्येक की बिक्री दर पति इकाई लाभ नीचे दिया गया है। औसत लाभ ज्ञात कीजिए।

उत्पादन 1 – 4 रु.

उत्पादन 2 – 9 रु.

उत्पादन 3 – 6 रु.

उत्पादन 4 – 2 रु.

उत्पादन 5 – 9 रु.

हल

औसत लाभ निम्न प्रकार से ज्ञात किया जा सकता है :

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$= \frac{4 + 9 + 6 + 2 + 9}{5}$$

$$= \frac{30}{5}$$

= 6 रुपए

विधि 2 : जब दिए गए समंकों में प्रेक्षणों के मूल्य अत्यधिक हो अथवा भिन्नों में हों, तब इस विधि को अपनाया जा सकता है। यह विधि इस तथ्य पर आधारित है कि एक श्रेणी के व्यक्तिगत प्रेक्षणों के उनके माध्य से विचलनों का बीजगणितीय योग (Algebric sum) सदा शून्य होता है। उदाहरणार्थ 8, 14, 16, 12 और 20 का समांतर माध्य 14 है। इनमें से प्रत्येक मद का समांतर माध्य से अंतर –6, 0, +2, –2,+6 होगा, तथा इनका योग शून्य है : यह सदा सत्य है। इस विधि द्वारा समांतर माध्य की संगणना के लिए निम्न पग उठाए जाते हैं :

i) कोई कल्पित समांतर माध्य A (Assumed Mean) लीजिए जिससे मदों का विचलन ज्ञात किया जाए ।

ii) प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य (x) का इस कल्पित माध्य से विचलन अर्थात्
d = x – A का परिकलन कीजिए।

iii) समस्त विचलनों का योग कीजिए जिसे Σd (सिग्मा d) कहा जाता है।

iv) निम्नलिखित सूत्र द्वारा समांतर माध्य का परिकलन कीजिए।

$$\bar{x} = A + \frac{\sum d}{n}$$

जहाँ

$\bar{x}$ = x चर का समांतर माध्य
A = कल्पित समांतर माध्य
$\sum d$ = प्रत्येक व्यक्तिगत मूल्य के कल्पित माध्य से विचलनों का योगफल
n = प्रेक्षणों की संख्या

उदाहरण 2

10 विक्रेताओं द्वारा स्कूटरों की मासिक बिक्री नीचे प्रस्तुत की गई है। प्रतिमास औसत बिक्री परिकलित कीजिए।

विक्रेता :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
बिक्री :	23	8	14	31	6	28	11	27	32	46

हल :

समान्तर माध्य का परिकलन

विक्रेता	बिक्री (x)	d = x–A
1	23	–2
2	8	–17
3	14	–11
4	31	6
5	6	–19
6	28	3
7	11	–14
8	27	2
9	32	7
10	46	21
n = 10		Σd = –24

कल्पित समान्तर माध्य $A = 25$

$\Sigma d = -24$

$n = 10$

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma d}{n}$$

$$= 25 + \frac{-24}{10}$$

$$= 25 - 2.4$$

$$\bar{x} = 22.6$$

स्कूटरों की औसत बिक्री = 22.6

10.7.2 वर्गीकृत समंक (Grouped Data)

जैसा कि आपने इकाई 6 में पढ़ा था, चरों को विच्छिन्न चरों तथा अविच्छिन्न चरों के रूप में वर्गीकृत किया जा सकता है। अविच्छिन्न चरों के लिए बनाए गए आवृत्ति बंटन को असतत बंटन (discrete distribution) तथा अविच्छिन्न चरों के लिए बनाए गए आवृत्ति बंटन को सतत बंटन कहा जाता है। इन दो प्रकार के बंटनों के लिए समांतर माध्य का परिकलन करने की विधियाँ भिन्न हैं। आइए, अब इन विधियों का अध्ययन करें।

असतत श्रेणियों के लिए समान्तर माध्य (Arithmatic Mean for Discrete Series)

विधि 1 : इस विधि के अंतर्गत समूहित समंकों का समान्तर माध्य निम्न सूत्र द्वारा प्राप्त किया जा सकता है :

$$\bar{x} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots f_n} = \frac{\Sigma fx}{\Sigma f}$$

जहाँ x_1, x_2, x_3 आदि क्रमशः वर्ग 1, 2, 3 आदि के चरों के मूल्य को बताते हैं। इसी प्रकार f_1, f_2, f_3 आदि क्रमशः वर्ग 1, 2, 3 आदि की आवृत्ति को निर्देशित करते हैं। fx_1 प्रथम वर्ग की आवृत्ति (f_1) तथा उस वर्ग में चर के मूल्य (x_1) के गुणनफल को बताते हैं। $f_2 x_2 f_3 x_3 \ldots\ldots f_n x_n$ भी इसी अर्थ को सूचित करते हैं। इसी प्रकार $\Sigma f, f_1$ से f_n तक का योगफल है।

विधि 2 : जब दिए गए आवृत्ति बंटन में वर्गों की संख्या बड़ी होती है, तब इस विधि को अभिमान्यता दी जाती है। इस विधि में भी लगभग वही क्रियाविधि अपनाई जाती है जैसी कि अवर्गीकृत समकों के लिए अपनाई जाती है। इस विधि में निम्नलिखित पग उठाए जाते हैं :

i) एक कल्पित समांतर माध्य (A) लीजिए।

ii) इस कल्पित समांतर माध्य से x चर के विचलन ज्ञात कीजिए तथा उसे $d = x - A$ द्वारा निदर्शित कीजिए। किसी भी मूल्य को कल्पित समांतर माध्य के रूप में लिया जा सकता है, किन्तु दिए गए बंटन में बीचोंबीच स्थित वर्ग में x चर के मूल्य को चुना जाना चाहिए।

iii) विचलनों (d) को उनसे संबंधित वर्ग आवृत्तियों (f) से गुणा करके तथा उनका योग करके $\sum fd$ प्राप्त कीजिए।

iv) $\sum fd$ का $\sum f$ से अनुपात अर्थात् $\frac{\sum fd}{\sum d}$ निकालिए, इसे शोधन घटक (correaction factor) कहा जाता है।

v) समांतर माध्य ($\bar{x}$) निकालने के लिए इस शोधन घटक को कल्पित समांतर माध्य में जोड़िए।

इस विधि के अंतर्गत समांतर माध्य का परिकलन निम्न सूत्र द्वारा किया जाता है।

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \text{ या } \bar{x} = A + \frac{\sum fd}{n}$$

जहाँ A = कल्पित समांतर माध्य।

$\sum f$ = मदों की कुल संख्या जिसे 'n' द्वारा भी निदर्शित किया जा सकता है।

$\sum fd$ = विचलनों $(d = x - A)$ को उनसे संबंधित वर्ग आवृत्तियों से गुणा करके प्राप्त गुणनफल का कुल योग।

आइए अब हम एक उदाहरण (उदाहरण 3) लेकर अध्ययन करें कि इन दोनों विधियों के अंतर्गत समांतर माध्य का परिकलन किस प्रकार किया जाता है।

उदाहरण 3

दोनों विधियों का उपयोग करते हुए निम्न समकों का समांतर माध्य परिकलित कीजिए :

अंक :	10	20	30	40	50	60	70	80
विद्यार्थियों की संख्या :	8	21	23	17	15	9	5	2

हल :

समांतर माध्य का परिकलन

अंक (x)	विद्यार्थियों की संख्या (f)	d = x – 40	fd	fx
10	8	–30	–240	80
20	21	–20	–420	420
30	23	–10	–230	690
40	17	0	0	680
50	15	+10	150	750
60	9	+20	180	540
70	5	+30	150	350
80	2	+40	80	160
योग	Σf =100		Σfd = – 330	Σfx = 3,670

इस स्थिति में काल्पनिक समांतर माध्य (A) 40 है।

विधि 1 :

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{3670}{100} = 36.70$$

विधि 2 :

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} = 40 + \frac{(-330)}{100} = 40 - 3.30 = 36.70$$

सतत श्रेणी के लिए समान्तर माध्य (Arithmetic Mean for Continuous Series)

सतत श्रेणियों के लिए (अर्थात् जब समंकों का वर्गीकरण वर्गान्तरों के अनुसार किया गया हो), समान्तर माध्य निम्नलिखित विधियों द्वारा परिकलित किया जा सकता है।

विधि 1 : जैसा कि आप जानते हैं, समान्तर माध्य ज्ञात करने के लिए आपको समस्त मदों के कुल मूल्यों की आवश्यकता होती है। जब समंक वर्गान्तरों के अनुसार वर्गीकृत किए जाते हैं, तो आपको समस्त मदों के मूल्य ज्ञात नहीं होते। आप केवल यह जानते हैं कि विभिन्न समूहों से संबंधित मद अपने-अपने वर्गान्तरों में बिखरे हुए हैं। अतः कुल मूल्य का परिकलन करने के लिए आप यह मान लेते हैं कि एक वर्गान्तर की समान मदें उस समूह में एक समान बिखरी हुई हैं। इसका तात्पर्य यह है कि परिकलन के लिए आप यह मान सकते हैं, कि एक समूह से सम्बन्धित मदों के मूल्य उस समूह के मध्य बिन्दु के बराबर हैं। सतत श्रेणी की स्थिति में, वर्गान्तरों को बदलने के लिए विभिन्न वर्गान्तरों के मध्य बिन्दुओं की संगणना की जाती है। ऐसा किये जाने के बाद सतत श्रेणी तथा असतत श्रेणी में कोई अन्तर नहीं रह जाता। इस अवस्था के बाद समांतर माध्य की संगणना की विधि वही है जैसी कि असतत श्रेणी की स्थिति में उपयोग की जाती है। असतत श्रेणी की स्थिति में उपयोग की जाने वाली दो विधियाँ यहाँ भी उपयोग की जा सकती हैं। किन्तु समावेशी वर्गान्तरों तथा अपवर्जी वर्गान्तरों दोनों के लिए उपयोग की जाने वाली विधियाँ एक समान होगी। इस विधि के अन्तर्गत समान्तर माध्य निम्नलिखित सूत्र का उपयोग करके प्राप्त किया जाता है।

$$\bar{x} = \frac{\sum fm}{\sum f} \quad \text{या} \quad \bar{x} = \frac{\sum fm}{n}$$

जहाँ m एक वर्ग का मध्य मूल्य है। इस विधि के अनुसार पहले प्रत्येक वर्ग के मध्यमूल्य तथा उसकी आवृत्ति का गुणनफल निकालिये, तथा फिर उन गुणनफलों का योग करके $\sum fm$ ज्ञात कीजिये, तथा इसे आवृत्ति के योग ($\sum f$) से भाग दीजिये।

विधि 2 : d प्राप्त करने की विधि में थोड़ा परिवर्तन करके वही सूत्र जिसका उपयोग असतत श्रेणी के लिए किया गया था, यहाँ भी उपयोग किया जा सकता है। यहाँ कल्पित समान्तर माध्य से मध्यमूल्यों के विचलन (अर्थात $d = m - A$) ज्ञात किये जाते हैं।

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{\sum f} \quad \text{or} \quad A + \frac{\sum fd}{n}$$

पद विचलन विधि (Step-deviation method): यदि कल्पित समांतर माध्य से विचलनों का कोई उभयनिष्ठ गुणक (Common factor) हैं, तो विचलनों के आकार को इस उभयनिष्ठ गुणक (c) से भाग देकर और छोटा किया जा सकता है। इन पद विचलनों का d' अर्थात् $d' = (m - A)/c$ द्वारा निदर्शित किया जाता है। फिर समान्तर माध्य निम्न प्रकार से निकाला जाता है।

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{\sum f} \times C \quad \text{या} \quad \bar{x} = A + \frac{\sum d'}{\sum n} \times c$$

टिप्पणी : यदि सारे वर्गान्तर बराबर हैं तो वर्गान्तर उभयनिष्ठ गुणक होगा।

उदाहरण 4

एक कम्पनी के 50 विक्रेताओं की साप्ताहिक बिक्री नीचे दी गई है। पद–विचलन विधि अपनाते हुए समान्तर माध्य का परिकलन कीजिये।

कुल बिक्री (000 रु में) :	0 — 5	5 — 10	10 — 25	25 — 50
विक्रेताओं की संख्या :	3	12	25	10

हल :

समान्तर माध्य का परिकलन

साप्ताहिक बिक्री (000 रु में)	विक्रेताओं की संख्या (f)	मध्यबिन्दु (m)	विचलन (m–17.5)	पदविचलन $d = \frac{m - 17.5}{5}$	fd
0 – 5	3	2.5	–15	–3	–9
5 – 10	12	7.5	–10	–2	–24
10 – 25	25	17.5	0	0	0
25 – 50	10	37.5	20	+4	40
योग	$\Sigma f = 50$				$\Sigma fd' = 7$

विचलन स्तम्भ से साफ पता चलता है कि कल्पित समांतर माध्य (A)17.5 है, तथा उभयनिष्ठ गुणक (c) 5 है।

$$\text{अब } \bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times C$$

$$= 17.5 + \frac{7}{50} \times 5$$

$$= 17.5 + .7$$

$$= 18.2$$

बिक्री का समान्तर माध्य 18.2 हज़ार रुपये प्रति सप्ताह है।

उदाहरण 5

नीचे दिए गए समंकों से याम्टो मशीन (क) के कर्मचारियों द्वारा किये गए काम के घण्टों का समांतर माध्य ज्ञात कीजिये।

काम के घण्टे	कर्मचारियों की संख्या
36.0 — 37.8	6
37.8 — 39.6	7
39.6 — 41.4	24
41.4 — 43.2	7
43.2 — 45.0	2
45.0 — 46.8	4
योग	50

हल :

सबसे पहले समस्त वर्गों का मध्य मूल्य (m) निकालिये तथा **कल्पित समान्तर माध्य A' (अर्थात 42.3) से** उनका विचलन ज्ञात कीजिये। उभयनिष्ठ गुणांक 'c' 1.8 है जो कि **विभिन्न समूहों के वर्गान्तर के बराबर है।**

काम किये गए घण्टे	m		m — A (m – 42.3)	d' = (m – A)/C $\left(d' = \frac{m - 42.3}{1.8}\right)$	fd'
36.0 — 37.8	36.9	6	–5.4	–3	–18
37.8 — 39.6	38.7	7	–3.6	–2	–14
39.6 — 41.4	40.5	24	–1.8	–1	–24
41.4 — 43.2	42.3	7	0	0	0
43.2 — 45.0	44.1	2	+1.8	1	2
45.0 — 46.8	45.9	4	+3.6	2	8
		n = Σf = 50			Σfd = – 46

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times c$$

$$= 42.3 + \frac{(-46)}{50} \times 1.8$$

$$= 42.3 + (-0.92) \times 1.8$$

$$= 42.3 - 1.656$$

$$= 40.644$$

किये गए काम के घण्टों का समान्तर माध्य 40.644 घण्टे है। आप देख सकते हैं कि जब सारे वर्गान्तर एक बराबर हैं, तो d, मूल्य 1, 2, 3,......... तथा –1, –2, –3, ... आदि होंगे। किन्तु जब वर्गान्तर एक बराबर नही होते तो d' मूल्यों का क्रमिक संख्याओं में होना आवश्यक नहीं है। ऐसी स्थिति में यह आवश्यक होता है कि स्तम्भ m–A बनाया जाए और फिर 'c' से भाग दिया जाए किन्तु जब सारे वर्गान्तर एक बराबर हों, तो m–A स्तम्भ को लिखने से बचा जा सकता है, तथा सीधे ही d, मूल्यों को लिखा जा सकता है।

बोध प्रश्न क

1 कोष्ठकों में दिये गए उपयुक्त शब्दों से रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये।

i) एक माध्य समस्त समंकों का एक .... प्रदान करता है। (विहंगम दृश्य/चित्र)

ii) एक माध्य समंकों की मुख्य विशेषताओं का संक्षेपण करता है, अतः इसे .... भी कहा जाता है। (केन्द्रीय प्रवृत्ति/सारांश)

iii) एक आदर्श माध्य को .... मदों द्वारा अनावश्यक रूप से प्रभावित नहीं होना चाहिए। (मध्य/चरम)

iv) एम माध्य तुलना करने में .... (सहायक होता है/कोई सहायता नहीं करता)।

v) प्रतिदर्श मूल्यों के आधार पर समष्टि के अज्ञात मूल्यों का अनुमान लगाने की प्रक्रिया को सांख्यिकीय .... कहा जाता है। (अध्ययन/अनुमान)

2 बताइये कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य।

i) जब पूरे समंक उपलब्ध हों, तो केन्द्रीय प्रवृत्ति की संगणना करने की कोई आवश्यकता नही होती क्योंकि यह उससे अधिक कुछ नही देती जो कि समंकों में दिया गया है।

ii) समान्तर माध्य एक स्थैतिक (positional) माध्य है।

iii) समान्तर माध्य ज्ञात करने की पद विचलन विधि में 'c' सदा वर्गान्तर का पर्याय होता है।

iv) समान्तर माध्य का परिकलन करते समय सारे मदों के मूल्य लिये जाते हैं।

v) दिये गए समंकों के लिये यदि समान्तर माध्य का परिकलन विभिन्न विधियों द्वारा किया जाए, तो भिन्न परिणाम दे सकता है।

i) यदि कल्पित माध्य 12 से लिये गए 6 मदों के विचलन का योग – 6 है, तो उनका समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

....

....

....

ii) सतत श्रेणी के समूहित समंकों के समान्तर माध्य की संगणना के लिये प्रयोग किये जाने वाले सूत्रों को लिखिए।

....

....

....

iii) जब भी सम्भव हो पद-विचलन विधि को अधिमान्यता दी जानी चाहिये। क्यों ?

....

....

....

iv) यदि किसी दिये गए समंक कुलक के लिए $\bar{x} = 33$, $\sum fd' = -20$, $\sum f = 100$, तथा $c = 10$, तो कल्पित समान्तर माध्य ज्ञात कीजिये।

....

....

....

v) समूहित समंकों से समान्तर माध्य की संगणना करते समय हम कौन सी बड़ी मान्यता करते हैं?

....

....

....

एक नगर में बारह परिवारों की मासिक आय नीचे दी गई है। समान्तर माध्य का परिकलन कीजिये।

परिवार :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
मासिक आय (रुपयों में)	280	180	96	98	104	75	80	84	100	75	600	20

....

....

....

. बारह क्रमिक मासों में एक मशीन के परिचालक द्वारा उत्पादित अस्वीकृत इकाइयों की संख्या 82, 74, 65, 67, 62, 73, 68, 63, 65, 62, 69, और 66 थी। बताइये कि :

i) अस्वीकृत इकाइयों की औसत संख्या क्या थी ?

....

....

....

ii) इस माध्य से विचलनों का योग क्या है?

....

....

....

6 वैकल्पिक विधियों का उपयोग करके निम्नलिखित समंकों का समान्तर माध्य परिकलित कीजिये।

श्रमिकों से साप्ताहिक मजदूरी (रूपयें में)	श्रमिकों की संख्या	श्रमिकों की साप्ताहिक मज़दूरी (रुपयों में)	श्रमिकों की संख्या
100 - 105	200	130 — 135	410
105 - 110	210	135 — 140	320
110 - 115	230	140 -- 145	280
115 - 120	320	145 — 150	210
120 - 125	350	150 — 155	160

....

....

....

....

....

....

....

7 निम्नलिखित आवृत्ति बंटन का पद विचलन विधि **द्वारा समांतर माध्य ज्ञात कीजिये।**

वर्गान्तर :	15 – 25,	22 – 35,	35 – 45,	45 – 55,	55 – 65,	65 – 75
आवृत्ति :	4	11	19	14	0	2

....

....

....

....

....

....

....

10.8 भारित समान्तर माध्य (Weighted Arithmetic Mean)

आपने विभिन्न प्रकार के समंक कुलकों के लिए समांतर माध्य की संगणना करने की विभिन्न विधियों का अध्ययन कर लिया है। इन सभी विधियों में हमने यह माना है कि दिये गए समंक कुलक की सारी मदों का महत्व बराबर है। किन्तु प्रत्येक परिस्थिति में ऐसा होना आवश्यक नही है। व्यावहारिक परिस्थितियों मे कुछ मदें दूसरी मदों की अपेक्षा अधिक महत्वपूर्ण होती हैं। उदाहरणार्थ किसी वर्ग का निर्वाह सूचकांक (cost of living index) बनाते समय उनके द्वारा उपभोग की जाने वाली वस्तुओं का महत्व अलग-अलग हो सकता है। ऐसी वस्तुओं के मूल्यों का साधारण समांतर माध्य उनके जीवन-यापन के प्रतिरूप का यथार्थ चित्र प्रस्तुत नही कर सकेगा। ऐसी परिस्थितियों में विभिन्न वस्तुओं के भार नियत किये जाते हैं, तथा एक भारित समांतर माध्य निकाला जाता है। एक कारखाने में जहाँ निर्माण लागत निकालनी हो, वहाँ एक भारित समान्तर माध्य अधिक उपयुक्त है।

10.8.1 भारित समान्तर माध्य की संगणना

भारित समान्तर माध्य की संगणना के लिए X चर के विभिन्न मूल्यों (जैसे $x_1, x_2........, x_n$) के लिए क्रमशः $w_1, w_2 ...., w_n$ जैसे विभिन्न भार नियत किए जाते हैं। इन मूल्यों को उनके तत्संबंधी भारों से गुणा किया जाता है। इस प्रकार प्राप्त किए गए गुणनफलों का योग करके $\sum wx$ प्राप्त किया जाता है। तत्पश्चात् इसे भारों के योगफल ($\sum w$) से भाग दिया जाता है, तथा प्राप्त भजनफल भारित समांतर माध्य होता है। भारित समांतर माध्य की संगणना में मुख्य कठिनाई भारों के चुनाव से संबंधित है। ये भार वास्तविक अथवा अनुमानित हो सकते हैं। यदि वास्तविक भार उपलब्ध हों तो उनका उपयोग किया जाना चाहिए। यदि वे उपलब्ध नहीं है तो परिस्थिति के अनुसार कुछ या यादृच्छिक (arbitary) भार नियत किए जा सकते हैं।

उदाहरण 6

तीन वस्तुओं. अ, ब और स के मूल्यों में क्रमशः 40%, 60% तथा 90% वृद्धि हुई है। वस्तु अ वस्तु स से 6 गुणा अधिक महत्वपूर्ण है तथा वस्तु ब वस्तु स से तीन गुणा अधिक महत्वपूर्ण है। इन तीनों वस्तुओं के मूल्यों में कितनी औसत वृद्धि हुई है ?

हल :

चूँकि मूल्यों में औसत वृद्धि का निश्चय करना है, अतः मूल्यों में वृद्धि की संख्याओं को x के रूप में दिखाया जाएगा। अ, ब, स का सापेक्ष महत्व 6 : 3 : 1 है। अतः इन संख्याओं को भार 'w' के रूप में लिया जाएगा।

वस्तु	मूल्यों में प्रतिशत वृद्धि (x)	भार (w)	wx
अ	40	6	240
ब	60	3	180
स	90	1	90
योग		$\sum w = 10$	$\sum wx = 510$

$$\text{भारित समांतर माध्य} = \frac{\sum wx}{\sum w} = \frac{510}{10} = 51\%$$

मूल्यों में औसत वृद्धि 51% है।

यह देखा जा सकता है कि संगणना के उद्देश्य के लिए मदों के भारों को उसी प्रकार प्रयुक्त किया जाता है जैसे कि मदों की आवृत्तियों को किया जाता है। किन्तु वास्तव में भार आवृत्ति नहीं होते। आवृत्ति का अर्थ समंकों में एक मद की होने वाली पुनरावृत्ति की संख्या है, जबकि भार केवल विभिन्न मदों के सापेक्ष महत्व को बताते हैं। मद तो, वास्तव में, समंकों में केवल एक बार ही पाये जाते हैं।

भारित समान्तर माध्य को भारित माध्य (weighted average) भी कहा जाता है। जैसा कि पहले बताया जा चुका है, सांख्यिकी में माध्य शब्द केन्द्रीय प्रवृत्ति के अन्य मापों, जैसे गुणोत्तर माध्य तथा हरात्मक माध्य के लिए भी प्रयोग किया जाता है। अतः व्यापक दृष्टि से भारित हरात्मक माध्य भी सम्मिलित है। (इन दोनों के विषय में आप इकाई 13 में विस्तारपूर्वक पढ़ेंगे)।

10.8.2 साधारण समान्तर माध्य से तुलना

भारित समान्तर माध्य साधारण समान्तर माध्य से भिन्न है। क्योंकि इसमें हम भारों का प्रयोग करते हैं। भारित माध्य और साधारण माध्य के बीच परस्पर सबंध निम्न प्रकार से है।

1 यदि सारे मदों को बराबर का महत्व दिया जाए तो भारित माध्य साधारण माध्य के बराबर होगा।

2 यदि बड़ी मदों को बड़े भार तथा छोटी मदों को छोटे भार दिए जाएँ तो भारित माध्य साधारण माध्य से अधिक होगा।

3 यदि बड़ी मदों को छोटे भार तथा छोटी मदों को बड़े भार दिए जाएँ तो भारित माध्य साधारण माध्य से कम होगा।

उदाहरण 7

इस परस्पर संबंध को भलीभाँति समझने के लिए कुछ उदाहरण लिए जा सकते हैं। आइए, उदाहरण 6 को एक बार फिर लें। इस बार हम भारों के निम्नलिखित दो कुलकों को लेकर मूल्यों में औसत वृद्धि ज्ञात करें।

अ : ब : स 1 : 3 : 6 के समान कुलक w_1

अ : ब : स 10 : 10 : 10 के समान कुलक w_2

हल :

भारित समान्तर माध्य का परिकलन

वस्तु	प्रतिशत वृद्धि x	प्रथम कुलक के लिए w_1	xw_1	द्वितीय कुलक के लिए w_2	xw_2
अ	40	1	40	10	400
ब	60	3	180	10	600
स	90	6	540	10	900
योग	$\Sigma x = 190$	$\Sigma w_1 = 10$	$\Sigma xw_1 = 760$	$\Sigma w_2 = 30$	$\Sigma xw_2 = 1900$

1 प्रथम कुलक के लिए भारित माध्य $= \frac{\Sigma xw_1}{\Sigma w_1} = \frac{760}{10} = 76\%$

2 द्वितीय कुलक के लिए भारित माध्य $= \frac{\Sigma xw_2}{\Sigma w_2} = \frac{1900}{30} = 63.3\%$

3 साधारण माध्य $= \frac{\Sigma x}{n} = \frac{190}{3} = 63.3\%$

यदि हम ध्यानपूर्वक परिणामों की तुलना करें, तो हमें निम्नलिखित बातें पता चलेंगी।

i) भार कुलक 2 के अंतर्गत, सारी वस्तुओं को समान भार दिए गए हैं। यहाँ भारित माध्य (63.3) साधारण माध्य (63.3) के बराबर है।

ii) भार कुलक 1 के अंतर्गत, बड़े मूल्य 90 को बड़ा भार 6 तथा छोटी मद 40 को छोटा भार 1 दिया गया है। यहाँ भारित माध्य (76) साधारण माध्य (63.3) से अधिक है।

iii) भारों के मूल्य कुलक के अंतर्गत (उदाहरण 6 देखें) बड़े मूल्य 90 को छोटा भार 1 तथा छोटे मूल्य 40 को बड़ा भार 6 दिया गया था। उस स्थिति में भारित माध्य (51) साधारण माध्य (63.3) से कम था।

भारित माध्य के ये तीन गुण (जो कि हर प्रकार के भारित माध्य के लिए सत्य हैं) निम्नलिखित तथ्य की ओर संकेत करते हैं। भारित माध्य न केवल मदों का माध्य है वरन् यह दो वस्तुओं का माध्य देता है : (i) मदों का औसत, तथा (ii) मद भारण (weight) के प्रतिरूप से किस प्रकार प्रभावित होते हैं। अतः जब मद असमान महत्व के हों, तो उचित औसत ज्ञात करने के लिए भारित माध्य का परिकलन अनिवार्य है।

10.8.3 भारित समान्तर माध्य के उपयोग

भारित समान्तर माध्य निम्नलिखित अवस्थाओं में मुख्यतः उपयोगी हैं।

1 जब दिए गए मद असमान महत्व के हों।

2 जब उन प्रतिशतताओं का औसत निकालना हो जो हर (denominater) में मदों की भिन्न संख्या लेकर संगणित किए गए हों।

3 जब सांख्यिकीय मापों, जैसे बहुत से समूहों के माध्यों, को संयोजित करना हो।

भारित समांतर माध्य का उपयोग निम्नलिखित परिस्थितियों में विशेष रूप से किया जाता है।

1 सूचकांकों के निर्माण में।

2 मानकित जन्म तथा मृत्यु दरों की संगणना में।

3 जहाँ मशीनों की क्षमता भिन्न हो, वहाँ प्रति मशीन उत्पादन ज्ञात करने के लिए।

4 एक फैक्टरी के कुशल, अर्धकुशल तथा अकुशल श्रमिकों की औसत मज़दूरी का निश्चय करने में।

10.9 समान्तर माध्य के विशेष गुण (Properties of Mean)

आपने समान्तर माध्य के अर्थ तथा उसकी संगणना की विधियों का अध्ययन कर लिया है। आपने यह भी अध्ययन कर लिया है कि एक भारित समान्तर माध्य साधारण समान्तर माध्य से किस प्रकार भिन्न हैं। आइये, अब हम समान्तर माध्य के मुख्य गुणों का अध्ययन करें।

1 अलग-अलग मदों के समान्तर माध्य से विचलनों का योग सदा शून्य होता है, अर्थात् $\sum(x-\bar{x})=0$ इसकी व्याख्या निम्न उदाहरण में की गई है।

x	$(x-\bar{x})$
5	–1
6	0
7	1
9	3
3	–3
30	=0

$$\bar{x} = \frac{\sum x}{n}$$

$$= \frac{30}{5}$$

$$= 6$$

इस उदाहरण में आप देखेंगे कि धनात्मक विचलनों का योग ऋणात्मक विचलनों के योग के बराबर है। इसीलिए समान्तर माध्य को गुरुत्व का केन्द्र (centre of gravity) भी कहा जाता है। यह सब प्रकार के समंकों के लिए सत्य है चाहे वे वर्गान्तरों सहित हों अथवा वर्गान्तरों के बिना।

2 समान्तर माध्य से विचलनों के योग का वर्ग न्यूनतम होता है, अर्थात यह सदा किसी अन्य मूल्य से लिए गए विचलनों के योग से कम होता है। अन्य शब्दों में, $\sum(x-\bar{x})^2$ सदा न्यूनतम होता है। ऊपर दिये गये उदाहरण को लेकर हम इस तथ्य की जाँच कर सकते हैं।

समान्तर माध्य से विचलनों का वर्ग ($\bar{x}=6$)			किसी अन्य मूल्य जैसे 5 से विचलनों का वर्ग		
x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	x	(x–5)	$(x-5)^2$
5	–1	1	5	0	0
6	0	0	6	1	1
7	1	1	7	2	4
9	3	9	9	4	16
3	–3	9	3	–2	4
		20			25

इससे स्पष्ट है कि $\sum(x-\bar{x})^2 < \sum(x-5)^2$

3 यदि मदों की संख्या तथा समान्तर माध्य दोनों ज्ञात हों, तो मदों का योग समान्तर माध्य को मदों की संख्या से गुणा करके प्राप्त किया जा सकता है।

अर्थात $\sum x = n\bar{x}$ जहाँ n मदों की संख्या है।

इस गुण का बड़ा व्यावहारिक महत्व है। उदाहरण के लिए यदि हम यह जानते है कि एक फैक्टरी में श्रमिकों की संख्या 100 है तथा उनकी मासिक औसत मज़दूरी 400 रुपये है तो हम सुगमतापूर्वक उस फैक्टरी द्वारा दी जाने वाली कुल मासिक मज़दूरी पता चला सकते है जो कि $400 \times 100 = 40,000$ रुपये होगी।

4 यदि हम किसी ऐसे एक प्रेक्षण को सम्मिलित करलें या निकाल दें जो कि माध्य के बराबर है, तो समांतर माध्य पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता।

5 यदि x चर के प्रत्येक मूल्य को किसी स्थिरांक c द्वारा बढ़ा या घटा दिया जाए, तो समांतर माध्य भी c द्वारा बढ़ या घट जाता है। इसी प्रकार जब 'x' चर के मूल्यों को एक स्थिरांक, मान लो k द्वारा गुणा किया जाता है, तो समांतर माध्य भी उसी संख्या k से गुणित हो जाता है।

उदाहरणार्थ, पिछले उदाहरण को लीजिये, प्रत्येक प्रेक्षण में 2 जमा कीजिए तथा उनमें से प्रत्येक को 3 से गुणा कीजिये। अब नया माध्य (मूल समान्तर माध्य + 2) × 3 = (6 + 2) × 3 = 24 होगा। आइये, इसकी जांच करें :

x	x + 2	3 (x + 2)
5	7	21
6	8	24
7	9	27
9	11	33
3	5	15
30	40	120

x का समान्तर माध्य $= \frac{30}{5} = 6$

x + 2 का समान्तर माध्य $= \frac{40}{5} = 8 = 6 + 2$ अर्थात् पुराना समान्तर माध्य + 2

3 (x + 2) का समान्तर माध्य $= \frac{120}{5} = 24$ या 8×3 या $(6 + 2) \times 3$, अर्थात् (पुराना माध्य + 2) × 3

6 यदि हमें दो या अधिक सम्बन्धित समूहों के समान्तर माध्य तथा मदों की संख्या ज्ञात हो तो हम भिन्न विधि द्वारा इन समूहों का संयुक्त समान्तर माध्य ज्ञात कर सकते है

$$\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

यहाँ $\bar{x}_1$ तथा $\bar{x}_2$ क्रमशः समूह 1 और समूह 2 के समांतर माध्य है, तथा n_1 व n_2 क्रमशः समूह 1 व समूह 2 में मदों की संख्या है।

उदाहरणार्थ, जनवरी से अगस्त के बीच की अवधि में एक वस्तु के उत्पादन का समांतर माध्य 400 टन प्रतिमास है, तथा सितम्बर से दिसम्बर के बीच की अवधि के लिए उत्पादन का समान्तर माध्य 430 टन प्रतिमास है। अब हम पूरे वर्ष के लिए औसत उत्पादन की संगणना निम्न प्रकार से कर सकते हैं :

$\bar{x}_1 = 400$

$\bar{x}_2 = 430$

$n_1 = 8$ (जनवरी से अगस्त तक = 8 मास)

$n_2 = 4$ (सितम्बर से दिसम्बर तक = 4 मास)

पूरे वर्ष के लिए औसत, $\bar{x}_c = \frac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

$$= \frac{8 \times 400 + 4 \times 430}{8 + 4}$$

$$= \frac{4920}{12}$$

$= 410$ टन प्रति मास।

इस सूत्र के पीछे निम्नलिखित तर्क है :

$n_1\bar{x}_1$ प्रथम समूह से संबंधित समस्त मदों का कुल मूल्य है, तथा $n_2\bar{x}_2$ दूसरे समूह से संबंधित समस्त मदों का कुल मूल्य है। अतः $n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2$ दोनों समूहों से मदों के कुलों का योग है। दूसरे शब्दों में, संयुक्त विभिन्न समूहों के माध्यों का भारित माध्य है। प्रत्येक समूह में मदों की संख्या को भार माना गया है।

बोध प्रश्न ख

1 भारित समान्तर माध्य तथा साधारण समान्तर माध्य की तुलना कीजिए।

....

....

....

....

2 नीचे दिये गये समंकों के मूल्यों का साधारण समांतर माध्य तथा भारित समान्तर माध्य परिकलित कीजिये तथा बताइये कि दोनों के बीच अन्तर के क्या कारण हैं।

प्रति टन मूल्य (रुपयों में) :	45.60	40.70	42.45
क्रय किये गए टन :	135.00	40.00	25.00

....

....

....

....

3 दो महाविद्यालयों अ और ब के परिणामों से बताइये कि उनमें से कौन-सा श्रेष्ठतर है।

परीक्षा का नाम	महाविद्यालय अ		महाविद्यालय ब	
	परीक्षा दी	उत्तीर्ण हुए	परीक्षा दी	उत्तीर्ण हुए
एम·ए·	30	25	100	80
एम·कॉम·	50	45	120	95
बी·ए·	200	150	100	70
बी·कॉम·	120	75	80	50
योग	400	295	400	295

....

....

....

....

....

....

....

एक विद्यार्थी के अ ब और स विषयों में लिखित तथा मौखिक परीक्षा में अंक निम्न प्रकार से है।

विषय	अ	ब	स
लिखित (75 अंकों में से)	43	32	29
मौखिक (25 अंकों में से)	15	12	18

मौखिक परीक्षा में अंकों को प्रतिशतताओं को भार मानते हुए लिखित परीक्षाओं के माध्य के ज्ञात कीजिये :

....

....

....

....

....

....

5 बताइये कि निम्नलिखित कथन सत्य है अथवा असत्य।

i) यदि बड़ी मदों को बड़े भार दिये जाएँ, तो साधारण समान्तर माध्य भारित समान्त्र माध्य से बड़ा होगा।

ii) कुछ परिस्थितियों में साधारण माध्य को भारित के रूप में लिया जा सकता है।

iii) भारित माध्य, यदि विद्यमान हो, तो वह सदा साधारण माध्य से अच्छा माप होता है।

iv) किसी पद को '0' भार दिये जाने का यह अर्थ है कि उस मद को भारित माध्य के परिकलन से निकाल दिया गया है।

v) समंकों की सबसे महत्वपूर्ण मद को चुनकर भारित माध्य ज्ञात किया जा सकता है।

6 कोष्ठकों में दिये गये उपयुक्त ाब्दों से रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये।

i) सूचकांक के निर्माण में विशेषतः .... माध्य का प्रयोग किया जाता है। (भारित/अभारित)

ii) यदि भार न दिये गये हो, तो भारों का .... प्रयोग किया जा सकता है। (नहीं/ इच्छानुसार)

iii) यदि कुछ मजदूरों की कुल मजदूरी 5,000 रूपये है, तथा प्रत्येक मजदूर को औसत मजदूरी 250 रूपये है, जो मजदूरों की संख्या .... है। (30/20)

iv) दस मदों के एक कुलक की संख्या 30 से लिये गये विचलनों का योग शून्य है। अतः उनका माध्य .... है। (30/10)

v) पन्द्रह मदों के एक कुलक को एक संख्या 35 से लिये गये विचलनों के वर्ग का योग 890 ह। इन मदों का उनके समान्तर माध्य 30 से लिये गये विचलनों के वर्ग का योग 890 से अवश्य .... होना चाहिये। (अधिक/कम)

vi) दिन की पाली में काम करने वाले 60 श्रमिकों की औसत मज़दूरी 40 रूपयें है, तथा रात की पाली में काम करने वाले श्रमिकों की औसत मज़दूरी 35 रूपये है। अतः दोनों समूहों की संयुक्त ौसत मजदूरी .... रूपयें है। (38/40)

vii) 5 पदों के समंक कुलक का माध्य 40 है। प्रत्येक मद से संख्या 3 को घटाया जाता है, तथा फिर प्रत्येक मद को 2 से गुणा किया जाता है। तथा माध्य .... होगा। (14/15)

10.10 समान्तर माध्य के गुण तथा सीमाएँ

समान्तर माध्य के गुण और परिसीमाएँ निम्नलिखित हैं :

गुण

1 इसे समझना सरल है तथा इसकी संगणना करना सुगम है। यह सबसे व्यापक रूप से प्रयोग किया जाने वाला संक्षिप्त माप है।

2 यह स्पष्ट रूप से परिभाषित होता है।

3 यह कुल समंक कुलक का एक अकेली प्रतिनिधि संख्या के रूप में कार्य करता है।

4 यह समंकों की समस्त मदों पर आधारित होता है। यह श्रेणी में अपनी स्थिति पर निर्भर नहीं करता।

5 इसका और अधिक गणितीय विवेचन किया जा सकता है।

6 यह और अधिक सांख्यिकीय विश्लेषण में उपयोगी होता है। इसका उपयोग अन्य सांख्यिकीय मापों, जैसे मानक विचलन (standard deviation), विचरण गुणांक (coefficient of variation), वैषम्य गुणांक (coefficient of skewness) आदि, की संगणना में किया जाता है। (आप इनके विषय में खंड 4 में पढ़ेंगे)

7 इसे गुरुत्व के केन्द्र-संतुलन का एक बिन्दु भी माना जाता है।

8 विभिन्न प्रतिचयन विधियों के लिए, प्रतिदर्श माध्य समष्टि के माध्य का एक पक्षपातहीन अनुमान है।

सीमाएँ

1 यह चरम मूल्यों से अत्यधिक प्रभावित होता है। समंकों में बहुत छोटे या बहुत बड़े मूल्य समान्तर माध्य के मूल्य को अत्यधिक प्रभावित करते हैं। अतः एक ऐसे बंटन के लिए, जिसमें छोटे या बड़े मूल्यों पर केन्द्रीकरण हो, समान्तर माध्य प्रतिनिधि संख्या बताने के लिये एक उपयुक्त माध्य नहीं होगा ।

2 खुले सिरे वाले बंटन के लिए, समान्तर माध्य की संगणना परिशुद्धता के साथ नहीं की जा सकती। उदाहरणार्थ, एक आय के बंटन के लिए, जिसका प्रारंभ "500 से कम" वर्ग से तथा अन्त "5000 से ऊपर" के वर्ग से होता है, दोनों चरमों के मूल्यों के विषय में कल्पना किये बिना समांतर माध्य की संगणना नहीं की जा सकती। परिणामस्वरूप विभ्रम उत्पन्न हो सकता है।

3 समान्तर माध्य सुन्दरता, ईमानदारी, बुद्धि आदि जैसे साक्षात विषयों (Phenomena) के अध्ययन के लिए उपयोगी नहीं है।

4 एक पर्याप्त प्रसामान्य (छतरि की आकृति वाले) बंटन के लिए समान्तर माध्य केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक अच्छा माप है। किन्तु U आकृति वाले बंटन के लिए (जिसमें प्रारंभ में अधिक, मध्य में कम तथा पुनः अन्त में अधिक आवृत्ति होती है), यह स्थिति का एक ऐसा बिन्दु होने में मुश्किल से सफल हो पाता है जिसके चारों ओर अन्य अलग-अलग मूल्य केन्द्रित होते हैं।

5 समान्तर माध्य का अपना निजी अस्तित्व नहीं होता। उदाहरणार्थ इस कथन का कि भारतीय परिवार में बच्चों की औसत संख्या 4.8 है, यह अर्थ नहीं है कि एक भी परिवार में बच्चों की संख्या 4.8 है। न ही कभी कोई बतख दो निशानों की औसत से जिनमें से एक उससे एक गज़ आगे तथा दूसरा उससे एक गज़ पीछे लगा है, मारी गई है।

6 असजातीय (non-homogenous) समंकों के लिए, समान्तर माध्य भ्रामक परिणाम दे सकता है। उदाहरणार्थ, पिछले पांच वर्षों में दो व्यावसायिक इकाइयों अ और ब की बिक्री (लाख रुपयों में) निम्न प्रकार से हुई

अ :	30	25	20	15	10
ब :	10	15	20	25	30

यहाँ यह स्पष्ट है कि दोनों इकाइयों की औसत बिक्री बिल्कुल समान है। परन्तु इकाई 'ब' उन्नति कर रही है जबकि इकाई 'अ' में गिरावट आ रही है।

10.11 कुछ उदाहरण

उदाहरण 8

30 श्रमिकों की साप्ताहिक मज़दूरी (रुपयों में) नीचे दी गई है।

140	139	126	114	100	88	62	77	99	103
108	129	144	148	134	63	69	148	132	118
142	116	123	104	95	80	85	106	123	133

फर्म ने 65–75 रु., 76–90 रु., 91–105 रु., 106–120 रु., 121–135 रु., तथा 136–150 रु., के वेतन वर्गों से संबंधित व्यक्तियों को क्रमशः 10 रु., 15 रु., 20 रु., 25 रु., 30 रु., तथा 35 रु., बोनस दिया। सारे श्रमिकों को दिया गया औसत बोनस ज्ञात कीजिये।

हल :

यह जानने के लिए कि कितने व्यक्तियों को 10 रु., 15 रु., 20 रु., आदि बोनस दिया गया, आपको 61–75 रु., 76–90 रु., आदि वेतन वर्गों में श्रमिकों की संख्या ज्ञात करनी होगी। इसके लिए मिलान-दण्ड विधि का प्रयोग करते हुए, औसत बोनस निम्न प्रकार से परिकलित किया जाता है :

औसत बोनस का परिकलन

साप्ताहिक मज़दूरी रुपयों में	मिलान दण्ड	आवृत्ति f	दिया गया बोनस x	fx
61 — 75	III	3	10	30
76 — 90	IIII	4	15	60
91 — 105	~~IIII~~	5	20	100
106 — 120	~~IIII~~	5	25	125
121 — 135	~~IIII~~ II	7	30	210
136 — 150	~~IIII~~ I	6	35	210
		$n = \Sigma f = 30$		$\Sigma fx = 735$

दिये गये बोनस का समान्तर माध्य $= \frac{\Sigma fx}{\Sigma f} = \frac{735}{30} = 24$ रु. 50 पै.

उदाहरण 9

एक कंपनी के सब मज़दूरों को दी गई औसत मज़दूरी 500 रुपये है। कुशल तथा अकुशल मज़दूरों को दी गई औसत मजदूरी क्रमशः 520 रुपये तथा 420 रुपये है। कुशल तथा अकुशल मजदूरों का प्रतिशत ज्ञात कीजिए।

हल :

मान लीजिए कुशल मजदूरों का प्रतिशत n_1 है। तब अकुशल मज़दूरों का प्रतिशत $10 - n_1$ होगा। कुशल तथा अकुशल मज़दूरों की औसत मज़दूरी को क्रमशः $\bar{x}_1$ तथा $\bar{x}_2$ से निदर्शित कीजिए।

संयुक्त माध्य $\bar{x}_c = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$

अब $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, n_1 तथा n_2 के मूल्यों को सूत्र में प्रतिस्थापित कीजिए

$$500 = \frac{520 \times n_1 + 420\,(100 - n_1)}{n_1 + 100 - n_1}$$

$$500 = \frac{520\, n_1 + 42{,}000 - 420\, n_1}{100}$$

$$50{,}000 = 100\, n_1 + 42{,}000$$

$8,000 = 100 n_1$

$n_1 = \frac{8,000}{100}$

$= 80$

$n_2 = 100 - n_1$

$= 100 - 80$

$= 20$

कुशल मज़दूरों की प्रतिशतता 80% है, तथा अकुशल मज़दूरों की प्रतिशतता 20% है।

उदाहरण 10

100 मदों का समान्तर माध्य 50.8 पाया गया। बाद में पता चला कि एक मद 47 को गलती से 67 ले लिया गया। सही माध्य ज्ञात कीजिए।

हल :

समस्त मदों का परिकलित योग $(n\bar{x}) = 100 \times 50.8 = 5,080$, इसमें से गलत प्रविष्टि को घटाकर तथा सही प्रविष्टि को जोड़कर हम परिशुद्ध योग ज्ञात कर सकते हैं।

परिशुद्ध योग $= 5,080 - 67 + 47 = 5,060$

सही समान्तर माध्य $= \frac{5,060}{100} = 50.6$

उदाहरण 11

नीचे दिए गए समंकों से लुप्त आवृत्ति ज्ञात कीजिए :

अंक :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60
विद्यार्थियों की संख्या :	5	15	20	–	20	10

अंकों का समान्तर माध्य = 34

हल :

समान्तर माध्य का परिकलन

अंक	आवृत्ति f	मध्य बिन्दु m	fm
0 — 10	5	5	25
10 — 20	15	15	225
20 — 30	20	25	500
30 — 40	F	35	35F
40 — 50	20	45	900
50 — 60	10	55	550
	n = 70 + F		ΣFm = 2200 + 35 F

अब $\bar{x} = \frac{\Sigma fm}{n}$

$34 = \frac{2,200 + 35\,F}{70 + F}$

$34\,(70 + F) = 2,200 + 35\,F$

$2,380 + 34\,F = 2,200 + 35\,F$

$2,380 - 2,200 = 35\,F - 34\,F$

$180 = 1\,F$ ∴ लुप्त आवृत्ति = 180

उदाहरण 12

निम्नलिखित समंक दो विश्वविद्यालयों के विभिन्न पाठ्यक्रमों की परीक्षा देने वाले विद्यार्थियों की संख्या तथा उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों की प्रतिशतता से संबंधित हैं। साधारण समान्तर माध्य तथा भारित समान्तर माध्य द्वारा औसत उत्तीर्णता प्रतिशतता परिकलित कीजिए, तथा विवेचना कीजिए कि किस विश्वविद्यालय की उत्तीर्णता प्रतिशतता ऊँची है।

पाठ्यक्रम	विश्वविद्यालय अ		विश्वविद्यापल ब	
	उत्तीर्णता प्रतिशतता	विद्यार्थी	उत्तीर्णता प्रतिशतता	विद्यार्थी
एम· ए·	71	400	82	200
एम· कॉम·	83	500	75	300
बी· ए·	72	300	74	600
बी· कॉम·	74	200	73	700

हल :

साधारण और भारित समान्तर माध्य का परिकलन

पाठ्यक्रम	विश्वविद्यालय अ			विश्वविद्यालय ब		
	उत्तीर्णता प्रतिशतता xA	विद्यार्थी wA	xAwA	उत्तीर्णता प्रतिशतता xB	विद्यार्थी wB	xBwB
एम· ए·	71	400	28,400	82	200	16,400
एम· कॉम·	83	500	41,500	75	300	22,500
बी· ए·	72	300	21,600	74	600	44,400
बी· कॉम·	74	200	14,800	73	700	51,100
योग	300	1,400	1,06,300	304	1,800	1,34,400

विश्वविद्यालय अ

साधारण समांतर माध्य $= \frac{\sum xA}{n} = \frac{300}{4} = 75\%$

भारित समांतर माध्य $= \frac{\sum xAwA}{\sum wA} = \frac{1,06,300}{1,400} = 75.9\%$

विश्वविद्यालय ब

साधारण समान्तर माध्य $= \frac{\sum xB}{n} = \frac{304}{4} = 76\%$

भारित समान्तर माध्य $= \frac{\sum xBwB}{\sum wB} = \frac{1,34,400}{1,800} = 74.7\%$

विश्वविद्यालय ब के लिए साधारण समान्तर माध्य ऊँचा है, तथा विश्वविद्यालय अ के लिए भारित माध्य ऊँचा है, अतः साधारण माध्य की दृष्टि से विश्वविद्यालय ब श्रेष्ठतर है, किन्तु भारित माध्य की दृष्टि से विश्वविद्यालय अ श्रेष्ठतर है। वास्तव में, इस प्रश्न में विभिन्न पाठ्यक्रमों में परीक्षा देने वाले विद्यार्थियों की संख्या एक दूसरे से भिन्न है। अतः विभिन्न पाठ्यक्रमों के लिए उत्तीर्णता की प्रतिशतता के परिकलन के आधार एक दूसरे से भिन्न हैं। ऐसी स्थिति में भारित माध्य ही सही परिणाम देगा। अतः विश्वविद्यालय अ की औसत उत्तीर्णता प्रतिशतता ऊँची है। दूसरे शब्दों में, विश्वविद्यालय अ में कुल 1,400 विद्यार्थियों में से उत्तीर्ण होने वाले विद्यार्थियों की वास्तविक संख्या 1,063 है। अतः उत्तीर्णता प्रतिशतता $\frac{1063}{1400} \times 100 = 75.9\%$ है, जो कि भारित माध्य के बराबर है। इसी प्रकार विश्वविद्यालय ब में कुल 1800 विद्यार्थियों में से 1,344 **विद्यार्थी उत्तीर्ण हुए हैं, अर्थात् उत्तीर्णता** प्रतिशतता $\frac{1344}{1800} \times 100 = 74.7$ है, जो कि भारित माध्य के **बराबर है। अतः भारित माध्य की तुलना से पता चल सकता है कि कौन सा विश्वविद्यालय श्रेष्ठतर है।**

10.12 सारांश

समंकों की मुख्य विशेषताएँ एक अकेली संख्या द्वारा जिसे "औसत" या "माध्य" कहा जाता है, निरूपित की जाती है । यह स्थिति का एक ऐसा बिन्दु होता है जिसके चारों ओर व्यक्तिगत मूल्य एकत्र होते हैं । एक आदर्श माध्य में कुछ गुण होने चाहिए, जैसे इसके परिकलन की सुगमता, इसकी परिभाषा की स्पष्टता, इसका समस्त मदों पर आधारित होना, इसका चरम मूल्यों द्वारा अप्रभावित रहना, और इसका अधिक बीजगणितीय विवेचन के योग्य होना, तथा इसमें प्रतिदर्शी स्थिरता होना । एक माध्य समस्त समंकों का एक विहंगम दृश्य प्रस्तुत करता है, तुलना में सहायक होता है तथा सांख्यिकीय अनुमान में उपयोगी होता है । अवर्गीकृत तथा वर्गीकृत समंकों का साधारण माध्य ज्ञात करने के लिए आसान सूत्र हैं । जब समंक कुलक में मूल्य असमान महत्व के होते हैं, तब भारित समांतर माध्य एक सच्चा प्रतिनिधि माध्य होगा । भारित माध्य दो वस्तुओं का संक्षेपण करता है : (i) मदों का, तथा (ii) किस प्रकार भार मदों को प्रभावित करते हैं । अतः भारण-प्रतिरूप के अनुसार साधारण माध्य भारित माध्य के बराबर, उससे अधिक या उससे कम हो सकता है ।

समान्तर माध्य के कुछ महत्वपूर्ण गुण होते हैं : (अ) समान्तर माध्य से विचलनों का योग सदा शून्य होता है, (ब) समान्तर माध्य से मदों के विचलनों का वर्ग न्यूनतम होता है । (स) यदि समान्तर माध्य और मदों की संख्या ज्ञात हो, तो हम कुल मूल्य ($\sum x$) का अनुमान लगा सकते हैं । (द) यदि एक समंक कुलक के प्रत्येक मद में एक स्थिरांक "c" जोड़ा जाए या घटाया जाए तो समान्तर माध्य भी "c" मात्रा से बढ़ या घट जाएगा। इसी प्रकार यदि प्रत्येक मद को किसी स्थिरांक "k" से गुणा किया जाए, तो समान्तर माध्य भी "k" से गुणा हो जाता है । (ज) दो या अधिक समूहों का संयुक्त समान्तर माध्य ज्ञात किया जा सकता है ।

समांतर माध्य एक अति उपयोगी माप है । यह सन्तुलन का एक बिन्दु है तथा यह आगे विश्लेषण का आधार बनता है । इसकी कुछ सीमाएँ भी हैं । यह चरम मदों से प्रभावित होता है । एक खुले सिरे वाले बंटन के लिए इसका अनुमान कुछ मान्यताओं के साथ ही किया जा सकता है । असजातीय समंकों के लिए यह भ्रामक परिणाम देता है ।

10.13 शब्दावली तथा प्रतीकों की सूची

केन्द्रीय प्रवृत्ति : एक अकेला मूल्य जिसकी कही केन्द्र में तथा समस्त मूल्यों के सीमान्तर में होने की प्रवृत्ति होती है ।

चरम मूल्य : वे मद जो समंकों के अन्य मदों से बहुत बड़े या बहुत छोटे हों । वे माध्य को अनावश्यक रूप से प्रभावित करते हैं ।

समान्तर माध्य : दिए गए समंक कुलक में समस्त प्रेक्षणों के मूल्यों के योग को प्रेक्षणों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होने वाला मूल्य ।

स्थिति का माप : एक माप, जो कि स्थिति का ऐसा बिन्दु होता है जिसके चारों ओर समंक कुलक के अन्य व्यक्तिगत मूल्य एकत्रित हों ।

प्रतिदर्शी स्थिरता : एक ही समग्र से लिए गए विभिन्न प्रतिदर्शों से प्राप्त माध्य लगभग एकसमान होने चाहिए ।

भारित समान्तर माध्य : एक ऐसा माध्य जिसके घटक मदों के लिए उनके सापेक्ष महत्व के अनुसार भार नियत किए जाते हैं ।

प्रतीकों की सूची (List of Symbols)

आपकी अध्ययन सामग्री में विभिन्न सूत्र लिखते समय प्रयोग किए गए प्रतीक वे हैं जिनका व्यापक उपयोग किया जाता है । नीचे दी गई सूची में, वे विभिन्न शब्दों के नीचे प्रथम प्रतीक के रूप में दिए गए हैं । बहुत सी पाठ्य पुस्तकों में इनसे भिन्न प्रतीकों का प्रयोग किया गया है । बहुत से सामान्य रूप से प्रयोग किए जाने वाले प्रतीक भी निम्न सूची में दिए गए हैं । जब भी आप कोई पुस्तक पढ़ें, तो यह महत्वपूर्ण है कि आप उसमें प्रयुक्त विभिन्न प्रतीकों का अर्थ ठीक-ठीक समझ लें । विभिन्न सूत्रों को लिखने के लिए आप इच्छानुसार प्रतीकों का कोई भी कुलक प्रयोग कर सकते हैं, परंतु यह सदा वांछनीय है कि उनके साथ-साथ उनके अर्थों की व्याख्या कर दी जाए ।

समान्तर माध्य (Arithmetic Mean)	:	$\bar{x}$, A.M., $\bar{x}$ समष्टि के माध्य को सामान्यत μ द्वारा निदर्शित किया जाता है।
कल्पित माध्य (Assumed Mean)	:	A, a, x o, $\bar{x}$ d
वर्गांतर (Class interval)	:	i, c, h, w
समूहों का संयुक्त माध्य (Combined Mean of Groups)	:	$\bar{x}c$, $\bar{\bar{x}}$, $\bar{x}_{12}$
उभयनिष्ठ गुणांक (Common factor)	:	c, i, h
माध्य से मदों का विचलन (Deviation of items from mean)	:	$(x-\bar{x})$, x, D
मध्य मूल्यों का कल्पित माध्य से विचलन (Deviation of midpoints) (from assumed mean)	:	d, x^1, x, d_x
आवृत्ति (Frequency)	:	f, F
मद (Items)	:	X, x
वर्गान्तर का मध्य मूल्य (Midpoint of class intervals)		m,X
पद विचलन (Step-deviation)		d´,d,x´,u,U,dx
मदों की कुल संख्या (Total Number of Items)	:	n, N, $\sum f$ जब समंक प्रतिदर्श से संबंधित हों, तो सामान्यतः 'n' तथा जब समष्टि से संबंधित हों, तो "N" का प्रयोग किया जाता है।
भार (Weights)	:	w,W,wt
भारित माध्य (Weighed mean)		$\bar{X}w$, $\bar{x}w$, wt

10.14 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 1 (i) विहंगम दृश्य (ii) सारांश (iii) चरम (iv) सहायक होता है (v) अनुमान

2 (i) असत्य (ii) असत्य (iii) असत्य (iv) सत्य (v) असत्य

3 (i) 11 (ii) $\bar{x}-\frac{\sum fm}{\sum f}$, $\bar{x}$ $\frac{A+\sum fd}{n}$, $\bar{x}=\frac{A+\sum fd'}{n}\times c$

(iii) यह पकिलनों को न्यूनतम करता है (iv) A = 35

(v) एक वर्ग में प्रत्येक मूल्य उस वर्ग के मध्य बिन्दु के बराबर है।

4 164.33 रुपये

5 (i) 68 (ii) 0

6 दोनों विधियों द्वारा 128 रु॰ 33 पैसे

7 40.2

ख 2 साधारण समान्तर माध्य = 42 .92, भारित माध्य = 44.23

3 दोनों 73.7x के बराबर हैं।

4 34.47

5 (i) असत्य (ii) सत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य

6 (i) भारित (ii) इच्छानुसार (iii) 20 (iv) 30 (v) कम
(vi) 38 (vii) 14

10.15 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

प्रश्न

1 केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक अच्छे माप के गुणों की व्याख्या कीजिए।

2 समान्तर माध्य के गुण तथा परिसीमाएँ बताइए।

3 भारित माध्य क्या है ? किन परिस्थितियों में भारित माध्य साधारण माध्य से अधिमान्य है।

अभ्यास

1 दो नगरों में कुशल और अकुशल श्रमिकों की संख्या तथा उनकी औसत प्रति घंटा मज़दूरी नीचे दी गई है। प्रत्येक नगर के लिए औसत प्रति घंटा मज़दूरी ज्ञात कीजिए।

	बम्बई		कलकत्ता	
श्रमिक	संख्या	प्रति घंटा मज़दूरी (रु॰ में)	संख्या	प्रति घंटा मज़दूरी (रु॰ में)
कुशल	150	1.80	350	1.75
अकुशल	850	130	650	1.25

(उत्तर : 1 रु॰ 38 पैसे, तथा 1 रु॰ 43 पैसे)

2 एक विनियोक्ता प्रति मास एक कंपनी के 120 रुपये के अंश खरीदता है। पहले पाँच मास में उसने क्रमशः 10 रु॰, 12 रु॰, 15 रु॰, 20 रु॰ तथा 24 रु॰ प्रति अंश के हिसाब से अंश खरीदे। पाँच मास बाद उसके पास अंशों का औसत मूल्य क्या है ?

(उत्तर 14.63 रुपये)

3 एक फैक्टरी में जो दो पालियों में चलती है, कुल 100 श्रमिक हैं। श्रमिकों को दी जाने वाली औसत मज़दूरी 38 रु॰ प्रतिदिन है। पहली पाली में 60 श्रमिक काम करते हैं, तथा उनकी औसत मज़दूरी 40 रु॰ प्रतिदिन है। बाकी 40 श्रमिकों की, जो कि दूसरी पाली में काम करते हैं औसत मज़दूरी क्या है ?

(उत्तर : 35 रुपये)

4 50 मदों का समान्तर माध्य 28.5 पाया गया। बाद में पता चला कि एक मद 39 अधिक ले ली गई थी। 49 मदों का परिशुद्ध माध्य ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : 28.3)

5 निम्न सारिणी विभिन्न व्यापार श्रेणियों में श्रमिकों की संख्या दर्शाती है, जिन्होंने एक सप्ताह में सोमवार से शुक्रवार तक प्रतिदिन अलग–अलग घंटों तक काम किया। I, II, III, IV और V वर्ग के श्रमिकों का प्रति घंटा वेतन क्रमशः 0.97 रु॰, 0.77 रु॰, 1.01 रु॰, 0.67 रु॰ तथा 0.75 रु॰ है। पूरे सप्ताह के लिए सारी श्रेणियों की प्रति श्रमिक प्रति घंटा औसत मज़दूरी का परिकलन कीजिए।

	श्रमिकों की संख्या				
श्रेणी	सोमवार (7 घंटे)	मंगलवार (6 घंटे)	बुधवार (5 घंटे)	वृहस्पतिवार (4 घंटे)	शुक्रवार (5 घंटे)
I	30	20	25	15	30
II	25	25	30	20	20
III	30	25	30	25	20
IV	20	20	20	20	25
V	25	20	25	15	25

(संकेत : प्रत्येक श्रेणी के अंतर्गत कुल घंटे ज्ञात कीजिए तथा इसे भार के रूप में लीजिए)

(उत्तर : 0.84 रुपये प्रति घंटा)

6 एक राज्य प्राधिकरण ने दो तहसीलों में परिवारों की आयु का अनुमान लगाया जो नीचे दिया गया है। माध्य का परिकलन कीजिए :

i) क्षेत्र "अ" के लिए

ii) क्षेत्र "ब" के लिए

iii) एक साथ दोनों क्षेत्रों के लिए।

अनुमानित आयु (वर्षों में)	परिवारों की प्रतिशतता	
	क्षेत्र अ	क्षेत्र ब
0 — 20	16	13
20 — 40	37	35
40 — 80	35	46
80—100	12	6

(उत्तर : क्षेत्र अ = 58.45, क्षेत्र ब = 58.48, सामूहिक क्षेत्र = 58.47)

7 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं अथवा असत्य। कारण भी दीजिए।

i) एक व्यक्ति का दावा है कि उसका वर्ष के अंतर्गत औसत बैंक शेष 370 रु॰ था। बैंक का दावा है कि उसने वर्ष के दौरान कम से कम 10 बार अपने खाते से अधिविकर्ष (overdraft) किया, दोनों ही कथन ठीक हैं।

ii) एक संख्या 28 से, 10 प्रेक्षणों के एक कुलक के विचलनों का योग शून्य है। अतः प्रेक्षणों का माध्य शून्य है।

iii) 20 प्रेक्षणों के एक कुलक के संख्या 42 से लिए गए विचलनों के वर्गों का योग 750 हैं, तथा इन प्रेक्षणों के समान्तर माध्य 34 से लिए गए विचलनों के वर्गों का योग 800 है।

iv) मदों की किसी एक संख्या का माध्य 42 है। यदि समंकों में एक और मद "64" जोड़ दी जाए तो माध्य 44 हो जाता है। अतः मूल समंकों में 10 मद होने चाहिए।

v) यदि हम एक श्रेणी की प्रत्येक मद को श्रेणी के माध्य मूल्य से प्रतिस्थापित करें, तो इन प्रतिस्थापित मूल्यों का योग अलग-अलग मदों के योग के बराबर होगा।

उत्तर : 1) सत्य ii) असत्य iii) असत्य iv) सत्य v) सत्य

नोट : ये प्रश्न/अभ्यास आपको इस इकाई को अच्छी तरह समझने में सहायक होंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। किन्तु अपने उत्तर विश्वविद्यालय को न भेजें। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 11 माध्यिका (Median)

इकाई की रूपरेखा

11.0 उद्‌देश्य

11.1 प्रस्तावना

11.2 माध्यिका किसे कहते हैं ?

11.3 माध्यिका का परिकलन

- 11.3.1 अवर्गीकृत समंक
- 11.3.2 वर्गीकृत समंक

11.4 माध्यिका के विशेष गुण

11.5 माध्यिका के गुण और परिसीमाएँ

11.6 विभाजन मान

- 11.6.1 चतुर्थक
- 11.6.2 दशमक
- 11.6.3 शतमक

11.7 माध्यिका और अन्य विभाजक मानों का आलेखीय निर्धारण

11.8 सारांश

11.9 शब्दावली और प्रतीक सूची

11.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

11.11 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

11.0 उद्‌देश्य

इस इकाई को पढ़ने के पश्चात्, आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- माध्यिका को परिभाषित कर सकें
- विभिन्न प्रकार के आंकड़ों के लिए, माध्यिका का परिकलन कर सकें
- माध्यिका के विशेष गुणों का वर्णन कर सकें
- विभिन्न प्रकार के विभाजन मानों को परिभाषित कर सकें और उनका परिकलन कर सकें
- माध्यिका और अन्य विभाजन मानों का रेखाचित्रों द्वारा निर्धारण कर सकें
- केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में, मध्यिका के उपयोगों और सीमाओं का वर्णन कर सकेंगे।

11.1 प्रस्तावना

आपने इकाई 10 में पढ़ा है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति के कई माप हैं। आपने समान्तर माध्य के बारे में भी जो कि केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक माप है, विस्तार से पढ़ा है। जैसा कि आप जानते हैं, समांतर माध्य पर, चरम मदों का बहुत अधिक प्रभाव होता है। कई बार, हम माध्य का ऐसा माप चाह सकते हैं जो चरम मदों द्वारा प्रभावित न हो। माध्यिका एक ऐसा ही माप है। कुछ अन्य माप भी हैं, जिन्हें विभाजन मान कहते हैं, जो माध्य माप नहीं हैं, परंतु संकल्पना की दृष्टि से जो माध्यिका के सदृश हैं। इस इकाई में, आप माध्यिका और अन्य विभाजन मानों के अर्थ, परिकलन, विशेष गुणों, उपयोगों और सीमाओं के बारे में पढ़ेंगे।

11.2 माध्यिका किसे कहते हैं ?

माध्यिका भी केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक माप है। समांतर माध्य के विपरीत, माध्यिका, आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित श्रेणी में एक नियत स्थिति के प्रेक्षण पर आधारित होती है। इसलिए, इसे एक स्थैतिक माध्य (positional average) कहते हैं। सभी प्रेक्षणों के परिमाणों से इसका कोई सम्बंध नहीं होता, जैसा कि समांतर माध्य की स्थिति में होता है। सरल शब्दों में, माध्यिका चर के सर्वाधिक मध्यगत मान को निर्दिष्ट करती है, जब उन्हें (प्रेक्षण मानों को) परिमाण के क्रम में रखा जाए। श्रेणी में माध्यिका की स्थिति ऐसी होती है कि इसके प्रत्येक मद की संख्या समान होती है। *एक दी गई श्रेणी की माध्यिका चर का वह मान होती है, जो श्रेणी को दो समान भागों में विभाजित कर दें। यह श्रेणी का सर्वाधिक केन्द्रीय बिंदु होता है, जहाँ आधे मद, इस मान के*

ऊपर होते हैं और शेष आधे, इस मान के नीचे होते हैं। आवृत्ति वक्र की स्थिति में, माध्यिका चर का वह मान होती है जो क्षेत्रफल को दो समान भागों में विभाजित कर दे। *माध्यिका को प्रायः प्रतीक M_d द्वारा सूचित करते हैं।*

11.3 माध्यिका का परिकलन

अवर्गीकृत आंकड़ों और वर्गीकृत आंकड़ों, दोनों ही के लिए, माध्यिका का परिकलन किया जा सकता है। परंतु, विधियाँ भिन्न हैं। आइये, वर्गीकृत और अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए, माध्यिका के परिकलन की विधियों का पृथक्-पृथक् अध्ययन करें।

11.3.1 अवर्गीकृत समंक

आंकड़ों को अरोही क्रम या अवरोही क्रम में रखने के पश्चात्, माध्यिका को, $\frac{N+1}{2}$ वें मद के मान के रूप में, परिकलित किया जाता है, जहां N मदों की कुल संख्या को सूचित करता है।

1 **जब N विषम हो :** जब प्रेक्षणों की संख्या एक विषम संख्या हो तो माध्यिका (M_d) का सूत्र है : $\frac{N+1}{2}$ वें मद का मान, जहाँ N-प्रेक्षणों की संख्या है। उदाहरण के लिए, श्रेणी 6, 7, 4, 8, 11, 5, 3, 9, 10 पर विचार कीजिए। यहां प्रेक्षणों की संख्या 9 है जो कि एक विषम संख्या है। अतः $\frac{N+1}{2}$ $= \frac{9+1}{2} = 5$ वें मद का मान ही, माध्यिका होगी। इससे अभिप्राय है कि जब श्रेणी को आरोही क्रम में या अवरोही क्रम में रखा जाए, तो पांचवें मद का मान, दी गई श्रेणी की माध्यिका होगी। अब हम, आंकड़ों को आरोही क्रम में रख सकते हैं और फिर पांचवें मद को अभिज्ञात कर सकते हैं। क्रम में रखी गई श्रेणी है : 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 और पांचवें मद का मान 7 है। अतः माध्यिका (M_d); 7 है।

2 **जब N सम हो :** जब प्रेक्षणों की संख्या (N) एक सम संख्या हो तो $\frac{N+1}{2}$ का मान एक भिन्न से सम्बद्ध होगा। ऐसी स्थिति में, दो मध्यगत मदों के मानों के समांतर माध्य को ही, माध्यिका मानते हैं। उदाहरण के लिए, श्रेणी : 6, 11, 3, 16, 20, 32, 41, 36 पर विचार कीजिए। इस श्रेणी में, प्रेक्षणों की संख्या 8 है, जो कि एक सम संख्या है। $\frac{N+1}{2} = \frac{8+1}{2} = 4.5$ यह मान, भिन्न 0.5 से सम्बद्ध है। ध्यान दीजिए कि ऐसा कोई पद नहीं है जिसकी क्रम-संख्या 4.5 हो। अतः आपको, चौथे और पांचवें मदों के मानों के समांतर माध्य को ही माध्यिका मानना होगा।

यह स्थिति उन सभी श्रेणियों में प्रस्तुत होगी जहां N, एक सम संख्या हो। अब हम, दी गई श्रेणी को, आरोही क्रम में, निम्नानुसार रखते हैं :

3, 6, 11, 16, 20, 32, 36, 41

क्रम में रखी गई इस श्रेणी में, चौथे और पांचवें मदों के मानों का समांतर माध्य ही माध्यिका होगा। इस श्रेणी में, चौथे और पांचवें मदों के मान क्रमशः 16 और 20 है। अतः माध्यिका (M_d) 18 (अर्थात् $\frac{16+20}{2}$) है। N के एक सम संख्या होने की स्थिति में भी, हम $\frac{N+1}{2}$ वें मद के मान को, माध्यिका ले सकते हैं, परंतु इस प्रयोजन के लिए, हमें $\frac{N+1}{2}$ के मान में, भिन्न 0.5 की समुचित रूप से व्याख्या करनी होगी। ऊपर दिए गए उदाहरण में, 4.5 वें मद के मान को ज्ञात करना अभीष्ट है। लोक सम्मति सें, हम 4.5 वें मद के मान को ज्ञात करने के लिए चौथे मद के मान में, चौथे और पांचवें मदों के मानों के अंतर का आधा जोड़ देते हैं। दी गई श्रेणी को आरोही क्रम में रखने पर, चौथे मद का मान 16 है और पाँचवे मद का मान 20 है। अतः माध्यिका (M_d) 18 अर्थात् $16 + \frac{1}{2}(20 - 16)$ है। यह मान वही है जो पहले प्राप्त हुआ था। अतः अवर्गीकृत आंकड़ों के लिए, चाहे N, एक विषम संख्या हो या सम संख्या हो, $\frac{N+1}{2}$ वें मद के मान को ही माध्यिका परिभाषित कर सकते हैं।

ध्यान दीजिए कि जब N, एक सम संख्या है, तो दो माध्यिका मदों के मानों के समांतर माध्य के रूप में, माध्यिका परिकलित करना, सरल है। परंतु ऊपर दिखाई गई विधि के अनुसार, मद की भिन्नात्मक क्रम संख्या

की व्याख्या करना अन्य विभाजन मानों के परिकलन में बड़ा ही उपयोगी सिद्ध होता है। आप, इन विभाजन मानों के बारे में बाद में, इसी इकाई में अध्ययन करेंगे। इसके अतिरिक्त, यह सूत्र, वर्गीकृत आकड़ों की माध्यिका, व्यापक रूप में परिभाषित करने में, हमारी सहायता करता है।

11.3.2 वर्गीकृत समंक

जैसा कि आपको ज्ञात है, जब समंक एक आवृत्ति बंटन के रूप में हों, तो प्रेक्षण चर के मान, एक असतत श्रेणी या एक सतत श्रेणी का रूप ले लेते हैं। इन दो प्रकार के आवृत्ति बंटनों के लिए, माध्यिका परिकलन करने की विधियाँ भिन्न हैं। आइये इन विधियों का अलग-अलग अध्ययन करें।

असतत श्रेणी (Discrete Series)

इस स्थिति में, पहले समंकों को आरोही क्रम में या अवरोही क्रम में रखिये। फिर संचयी आवृत्तियाँ ज्ञात कीजिए। क्योंकि माध्यिका $\frac{N+1}{2}$ वें मद का मान होती है, इसलिए संचयी आवृत्तियों के स्तम्भ में, $\frac{N+1}{2}$ या अगले इससे बड़े संचयी आवृत्ति मान का पता लगाएँ। इस प्रकार, माध्यिका वर्ग ज्ञात कर लेने के पश्चात् इसके संगत चर का मान ही, माध्यिका का मान होता है।

आइये इस प्रक्रिया को एक उदाहरण द्वारा समझें।

उदाहरण 1

निम्न आंकड़ों के लिए, माध्यिका अंक ज्ञात कीजिए :

अंक :	40	15	25	5	30	35	10	50	45	20
विद्यार्थियों की संख्या :	9	75	72	20	45	39	43	6	8	76

हलः

आंकड़ों को, फिर से, अंकों के परिमाण के आरोही क्रम में लिखिए। फिर, निम्न प्रकार से संचयी आवृत्ति सारणी बनाइए।

अंक :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
विद्यार्थियों की संख्या :	20	43	75	76	72	45	39	9	8	6

संचयी आवृत्तियों का परिकलन

अंक	विद्यार्थियों की संख्या	संचयी आवृत्ति
5	20	20
10	43	63
15	75	138
20	**76**	**214**
25	72	286
30	45	331
35	39	370
40	9	379
45	8	387
50	6	393

यहाँ, N = 393

माध्यिका = $\frac{N+1}{2}$ वें मद = $\frac{393+1}{2}$ वां मद = 197 वें मद का मान।

अब 197 वाँ मद, संचयी आवृत्ति 214 वाले वर्ग में स्थित है। इस वर्ग में चर का मान 20 है। अतः माध्यिका अंक = 20

सतत श्रेणी (Continuous Series)

सतत श्रेणी के आवृत्ति बंटन की स्थिति में, विभिन्न मदों के यथार्थ मान ज्ञात नहीं होते। अतः किसी मद विशेष का मान ज्ञात नहीं किया जा सकता। हम केवल इतना कर सकते हैं कि चर का वह मान ज्ञात कर लें, जिसके ऊपर या नीचे आधे मद हों। अतः, माध्यिका वर्ग का निर्धारण करने के लिए, $\frac{N+1}{2}$ के स्थान पर N/2 का प्रयोग करते हैं, और शेष प्रक्रिया ठीक उसी प्रकार है, जैसी कि असतत श्रेणी की स्थिति में अपनाई गई थी। माध्यिका वर्ग निर्धारित करने के पश्चात्, चर का यथार्थ मान, उस वर्ग में अंतर्वेशन द्वारा, निम्न तीन विधियों में से किसी एक को अपना कर, निर्धारित किया जा सकता है।

विधि 1 : $M_d - l + \frac{\frac{N}{2} - c}{f} \times i$

जहां l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

c = माध्यिका वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति

f = माध्यिका वर्ग की (साधारण) आवृत्ति

i = माध्यिका वर्ग का वर्ग-अंतराल

विधि 2 : पहली विधि में प्रयुक्त सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि संचयी आवृत्तियों का परिकलन, निम्नतर मानों की ओर से किया गया है। यदि, संचयी आवृत्तियों का परिकलन, उच्चतर मानों की ओर से किय जाए, तो उपरोक्त सूत्र में तनिक संशोधन कर, निम्न सूत्र प्राप्त कर सकते हैं :

$$M_d = U - \frac{\frac{N}{2} - c'}{f} \times i$$

जहां U= माध्यिका वर्ग की उपरि सीमा

c = माध्यिका वर्ग के अगले (उच्चतर) वर्ग की संचयी आवृत्ति

f = माध्यिका वर्ग की (साधारण) आवृत्ति

i = माध्यिका वर्ग का अंतराल आमाप

विधि 3 : माध्यिका का परिकलन, निम्न सूत्र के प्रयोग से भी कर सकते हैं।

$$M_d = l + \frac{(u - l)}{f} \times (m - c)$$

जहां l = माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा

u = माध्यिका वर्ग की उपरि सीमा

f = माध्यिका वर्ग की (साधारण) आवृत्ति

c = माध्यिका वर्ग के पूर्वगामी वर्ग की संचयी आवृत्ति

m = N/2

ये तीनों विधियाँ ठीक एक ही परिणाम देती हैं। इन सभी विधियों में, मानी गई धारणाएँ और माध्यिका के मान को अंतर्वेशन द्वारा प्राप्त करने का तर्क प्रायः एक जैसे हैं। आइये, अब विधि I के सूत्र के लिए अपनाई गई धारणाओं की व्याख्या करें।

यदि मदों की गणना, निम्न मानों की ओर से आरम्भ करें तो माध्यिका वर्ग की निम्न सीमा तक, c मदों की गणना सम्पन्न कर चुकेंगे। परंतु माध्यिक बिंदु तक पहुँचने के लिए, N/2 मदों की गणना करनी होगी। इसलिए,

माध्यिका वर्ग के अंतर्गत N/2 – c मदों को भी करना होगा। माध्यिका वर्ग के, आमाप i वाले, इस वर्ग अंतराल में, f मद बिखरे हुए हैं। अब हम यह मानते हैं कि ये सभी f मद, वर्ग अंतराल के विस्तार i पर, एक समान बंटे हुए हैं। अतः N/2 – c मदों को माध्यिका वर्ग के अंतर्गत करने के लिए, निम्न सीमा l से आगे की ओर, $\frac{i}{f} \times (N/2 - c)$ की दूरी तय करनी हागी। अतः माध्यिका

$$M_d - l + \frac{i}{f} \times \left(\frac{N}{2} - c\right)$$

माध्यिका और माध्य के लिए, की गई धारणाओं के अंतर पर ध्यान दीजिए। माध्यिका की स्थिति में, कल्पना की गई है कि एक वर्ग अंतराल में, मद एक समान फैले हुए हैं, जब कि समांतर माध्य की स्थिति में, यह कल्पना की जाती है कि एक वर्ग अंतराल में, सभी मदों के मानों में से प्रत्येक उस वर्ग अंतराल के मध्य बिंदु के बराबर हैं।

उदाहरण 2

एक विभागीय भंडार के प्रबंधक ने; 200 लेनदारी खातों पर जो अपचारी थे, सूचना संकलित की। प्रत्येक खाते के लिए, उसने, नियत तारीख के पश्चात् बीते गए दिनों की संख्या नोट की। तब उसने, निम्न आवृत्ति बंटन में दिखाई गई विधि के अनुसार, समंकों को वर्गीकृत किया। माध्यिका ज्ञात कीजिए।

नियत तारीख के पश्चात् बीत गए दिनों की संख्या	खातों की संख्या
30 — 44	40
45 — 59	45
60 — 74	40
75 — 89	25
90 — 104	25
105 — 119	20
120 — 134	5

हलः

माध्यिका का परिकलन

नियत तारीख के पश्चात् बीत गए दिनों की संख्या	खातों की संख्या (f)	संचयी आवृत्ति (cf) निम्नतर मानों की ओर से	संचयी आवृत्ति (cf) उच्चतर मानों की ओर से
20 — 44	40	40	200
45 — 59	45	85(c)	160
60—74	**40**	**125**	**115**
75 — 89	25	150	75 (c')
90 — 104	25	175	50
105 — 119	20	195	25
120 — 134	5	200	5

यहाँ N/2 = 200/2 = 100; इससे अभिप्राय है कि माध्यिका के नीचे 100 मद हैं। इसलिए माध्यिका वर्ग 60-74 में है।

इस वर्ग की यथार्थ सीमाएँ, 59.5 – 74.5 हैं। अब पहली विधि के प्रयोग से, माध्यिका का परिकलन कीजिए।

$$M_d = l + \frac{N/2 - c}{f} \times i$$

जहाँ $l = 59.5$

$c = 85$

$f = 40$

$i = 15$

$N = 200$

$$\therefore M_d = 59.5 + \frac{100 - 85}{40} \times 15$$

$= 59.5 + 225/40$

$= 59.5 + 5.625$

$= 65.125$

माध्यिका = 65.125 दिन।

आइये अब, दूसरी विधि का प्रयोग कर माध्यिका का परिकलन करें।

$$M_d = u - \frac{N/2 - c'}{f} \times i$$

जहाँ $u = 74.5$

$f = 40$

$c' = 75$

$i = 15$

$N = 200$

$$\therefore M_d = 74.5 - \frac{100 - 75}{40} \times 15$$

$= 74.5 - 375/40$

$= 74.5 - 9.375$

$= 65.125$

अतः माध्यिका है, 65.1 दिन।

आप, तीसरी विधि के प्रयोग से भी, माध्यिका प्राप्त कर सकते हैं :

$$M_d = l + \frac{u - l}{f} (m - c)$$

जहाँ $l = 59.5$

$u = 74.5$

$f = 40$

$c = 85$

$m = N/2 = 200/2 = 100$

$$\therefore M_d = 59.5 + \frac{74.5 - 59.5}{40} (100 - 85)$$

$= 59.5 + \frac{15}{40} \times 15$

$= 65.125$

अतः माध्यिका = 65.1 दिन।

ध्यान दीजिए कि तीनों विधियों में से प्रत्येक वही परिणाम देती है।

उदाहरण 3

निम्न आय बंटन के लिए, माध्यिका आय ज्ञात कीजिए।

मासिक आय (रूपयों में)	कुटुम्बों की संख्या
100 से कम	50
100 — 200	500
200 — 300	555
300 — 500	100
500 — 800	3
800 और अधिक	2

हल :

मासिक आय (रूपयों में)	कुटुम्बों की संख्या	संचयी आवृत्ति
100 से कम	50	50
100 — 200	500	550
200 — 300	**555**	**1105**
300 — 500	100	1205
500 — 800	3	1208
800 और अधिक	2	1210

माध्यिका के नीचे N/2 मद हैं। इसका अर्थ है कि माध्यिका के नीचे 1210/2 = 605 मद हैं। इसलिए, माध्यिका वर्ग 200 − 300 में है। अब निम्न अंतर्वेशन सूत्र का प्रयोग करेंगे :

$$M_d = l + \frac{N/2 - c}{f} \times i$$

$l = 200$

$c = 550$

$f = 555$

$i = 100$

$N = 1210$

$$\therefore \quad M_d = 200 + \frac{605 - 550}{555} \times 100$$

$$= 200 + 55/555 \times 100$$

$$= 200 + 9.91$$

$$= 209.91$$

अतः माध्यिका मासिक आय 209.91 रु॰ है। ध्यान दीजिए कि इस उदाहरण में, वर्ग अंतराल असमान आमापों के हैं, और समंक विवृतमुखी हैं। इसका, माध्यिका के परिकलन पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता क्योंकि सूत्र में प्रयुक्त, एकमात्र वर्ग अंतराल का आमाप 'i' माध्यिका वर्ग का है।

उदाहरण 4

निम्न आंकड़ों से, माध्यिका मज़दूरी निर्धारित कीजिए।

मजदूरी से अधिक (रु॰)	कामगारो की संख्या
20	58
40	54
60	48
80	38
100	22
120	10
140	3
160	0

हल :

मजदूरी से अधिक (रु॰)	कामगारों की संख्या (संचयी आवृत्ति)	साधारण आवृत्ति
20	58	58 – 54 = 4
40	54	54 – 48 = 6
60	48	48 – 38 = 10
80	**38**	**38 – 22 = 16**
100	22	22 – 10 = 12
120	10	10 – 3 = 7
140	3	3 – 0 = 3
160	0	= 0

इस उदाहरण में, संचयी आवृत्ति दी गई है। अतः हमने साधारण आवृत्ति का परिकलन किया। अब, माध्यिका के ऊपर N/2 मद, अथात् 58/2 = 29 मद हैं। अतः माध्यिका "80" से अधिक वर्ग में है अर्थात् वर्ग 60 – 100 में। अब, हम माध्यिका का परिकलन, निम्न सूत्र के प्रयोग से करते हैं :

$$M_d = u - \frac{N/2 - c'}{f} \times i$$

जहाँ $u = 100$

$f = 16$

$c' = 22$

$i = 20$

$$\therefore M_d = 100 - \frac{29 - 22}{16} \times 20$$

$$= 100 - \frac{7}{16} \times 20$$

$$= 100 - 8.75$$

$$= 91.25$$

माध्यिका मज़दूरी है, रु॰ 91.25

उदाहरण 5

आपको निम्न अपूर्ण आवृत्ति बंटन दिया गया है। यह ज्ञात है कि कुल आवृत्ति 1000 है और माध्यिका 413.11 है। अविद्यमान आवृत्तियों को आकलित कीजिए।

मदों का मान	आवृत्ति
300 — 325	5
325 — 350	17
350 — 375	80
375 — 400	...
400 — 425	326
425 — 450	....
450 — 475	88
475 — 500	9

हल :
मान लीजिए कि वर्ग 375 — 400 की आवृत्ति है F अब, वर्ग 425 — 450 की आवृत्ति, 1000 – (525 + F) = 475 – F हो जाती है। (525, दी गई आवृत्तियों का जोड़ है।)

मदों का मान	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
300 — 325	5	5
325 — 350	17	22
350 — 375	80	102
375 — 400	F	102 + F
400 — 425	326	428 + F
425 — 450	475 – F	903
450 — 475	88	991
475 — 500	9	1000

क्योंकि माध्यिका 413.11 दिया गया है, इसलिए माध्यिका अवश्य ही वर्ग 400 — 425 में होगी :

अब, $M_d = l + \frac{N/2 - c'}{f} \times i$

जहाँ $l = 400$

$f = 326$

$c' = 102 + F$

$i = 25$

$M_d = 413.11$

$\therefore \; 413.11 = 400 + \frac{500 - (102 + F)}{326} \times 25$

या $413.11 - 400 = \frac{500 - 102 - F}{326} \times 25$

या $13.11 = \frac{398 - F}{326} \times 25$

या $13.11 \times 326 = (398 - F) \times 25$

या $4{,}273.86 = 9{,}950 - 25F$

या $25F = 9{,}950 - 4{,}273.86$

या $25F = 5{,}676.14$

$F = 227.04$

क्योंकि आवृत्ति सदैव पूर्णांकीय होती है, इसलिए F = 227 वर्ग 375 — 400 की आवृत्ति है, और 248 वर्ग 475 — 227 की आवृत्ति है।

11.4 माध्यिका के विशेष गुण (Properties)

आपने, माध्यिका परिकलित करने की विधियों का अध्ययन कर लिया है। अब आइये, माध्यिका के गुणधर्मों की विवेचना करें।

1 माध्यिका का एक महत्वपूर्ण गुण यह है कि विभिन्न मानों के माध्यिका से निरपेक्ष विचलनों का योगफल, न्यूनतम होता है, अर्थात् $\sum |x - M_d|$ न्यूनतम होता है, इस गुणधर्म के कारण, बहुत सी व्यावहारिक परिस्थितियों में, माध्यिका का प्रयोग ही उचित होता है। उदाहरण के लिए मदों 5, 7, 8, 9, 21 पर विचार कीजिए। यहाँ, माध्यिका $\frac{N+1}{2}$ वें मद का मान, अर्थात् माध्यिका 8 है। आइये, निरपेक्ष विचलनों का परिकलन करें, (1) माध्यिका से, (2) किसी अन्य मान जैसे, 7 से, और (3) समांतर माध्य, (अर्थात् (5 + 7 + 8 + 9 + 21)/5 = 10)

मद x	$\|x - M_d\|$ $= \|x - 8\|$	$\|x - 7\|$	$\|x - \bar{x}\|$ $= \|x - 10\|$
5	3	2	5
7	1	0	3
8	0	1	2
9	1	2	1
21	13	14	11
कुल योग	18	19	22

यदि आप ऊपर की सारणी का, ध्यान से अध्ययन करें तो आप देखेंगे कि न्यूनतम योग 18 है, जो कि माध्यिका से निरपेक्ष विचलनों का जोड़ है।

2 यह सीमांत मदों (अर्थात् चरम मानों) से प्रभावित नहीं होता। परंतु निस्संदेह ही मदों की संख्या, इसे प्रभावित करती है।

3 विवृत मुखी (खुले सिरे वाले) बंटन के लिए तो, माध्यिका सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है। उदाहरण के लिए, क्योंकि आय बंटन एक विवृत मुखी बंटन होता है, माध्यिका आय, बंटन का श्रेष्ठतर प्रतिनिधि मान होगा।

4 गुणात्मक सूचनाओं के लिए, संम्भवतः माध्यिका ही, केन्द्रीय प्रवृत्ति का एकमात्र उपयुक्त माप है। उदाहरण के लिए, हम एक प्रत्यर्थी से कह सकते हैं कि वह एक निगम प्रतिमा के अपने मूल्यांकन को गतिशील, प्रतिष्ठित, (व्यवसाय की दृष्टि से) सहयोग देने वाला, सफल और प्रत्याहरित (with drawn) के रूप में महत्व के आधार पर क्रमबद्ध करे। मान लीजिए वह उन्हें, ठीक उसी प्रकार क्रमबद्ध करता है, जैसा कि ऊपर दिया गया है, तो, इन पाँच क्रमबद्ध मानों की माध्यिका होगी, (व्यवसाय की दृष्टि से) सहयोग देने वाला।

5 माध्यिका को, एक लेखाचित्र द्वारा भी स्थापित (या निर्धारित) किया जा सकता है। (यह आप बाद में इसी इकाई में पढ़ेंगे)

6 माध्यिका का परिकलन करना सरल है, और इसे स्पष्ट रूप से समझा जा सकता है। कुछ स्थितियों में तो, इसे निरीक्षण मात्र से प्राप्त कर सकते हैं।

11.5 माध्यिका के गुण और परिसीमाएँ

आपने माध्यिका के अर्थ, उसके परिकलन की विधियों और गुणधर्मों का अध्ययन किया है। आइये, अब माध्यिका के गुणों (योग्यताओं और उसकी परिसीमाओं) की विवेचना करें।

गुण

1 एक विवृतमुखी बंटन, जैसे आय बंटन के लिए, माध्यिका एक श्रेष्ठतर प्रतिनिधि मान है।

2 क्योंकि माध्यिका चरम मानों द्वारा विकृत नहीं होता, जबकि माध्य उनसे विकृत होता है, इसलिए कुछ स्थितियों में, माध्य की अपेक्षा, माध्यिका अधिमान्य होता है।

3 गुणात्मक घटनाओं का अध्ययन करने के लिए, माध्यिका सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है।

4 क्योंकि माध्यिका से निरपेक्ष विचलनों का योगफल न्यूनतम होता है, इसलिए उन स्थितियों में जहाँ भौगोलिक दूरी को न्यूनतम करना हो, माध्यिका अधिमान्य है। उदाहरण के लिए, मान लीजिए, कि भारत के पाँच विभिन्न नगरों से, पाँच उच्च अधिकारियों का एक सम्मेलन है। वह नगर, जो माध्यिका दूरी पर स्थित हो, सम्मेलन के लिए अधिक उपयुक्त स्थान होगा।

5 जब केवल एक या दो टायर खरीदने हों, तो यह निश्चय करते समय कि कौन सी छाप का टायर खरीदा जाए, अधिकतम माध्यिका दूरी चलने वाली छाप ही अधिमान्य होगी। इसी प्रकार एक कपड़े धोने की मशीन खरीदते समय, एक अधिकतर माध्य जीवन वाली मशीन की अपेक्षा, अधिकतर माध्यिका जीवन वाली मशीन अधिमान्य होगी।

परिसीमाएँ

1 माध्यिका उच्च बीजगणितीय प्रतिपादन के अक्षम्य है। इसका अभिप्राय यह है कि दो या दो से अधिक समूहों की संयुक्त माध्यिका ज्ञात नहीं कर सकते जब तक कि उन समूहों के सभी मद ज्ञात न हों।

2 कभी-कभी इसे एक अचेतन माप कहा जाता है, क्योंकि यह श्रेणी के सभी मदों पर आधारित नहीं होती।

3 समांतर माध्य की अपेक्षा, यह प्रतिचयन उच्चावचनों से, अधिक प्रभावित होती है।

4 माध्यिका का परिकलन सूत्र, एक प्रकार से, अंतर्वेशन की एक विधि है, जो इस मान्यता पर आधारित है कि माध्यिका वर्ग के सभी मद, उस वर्ग अंतराल में, एक समान बंटे हुए हैं, परंतु यह मान्यता बहुत सत्य नहीं है।

5 माध्यिका द्वारा मन पर डाला गया प्रभाव, मायावी और धोखा देने वाला हो सकता है, क्योंकि इसका मान, केवल मात्र माध्य-गत प्रेक्षण(ों) द्वारा निर्धारित होता है। उदाहरण के लिए, प्रत्येक लाटरी में, एक टिकट द्वारा जीता गया माध्यिका इनाम सदैव शून्य होता है जबकि सारे टिकटों को ध्यान में रखा जाए। (50% से अधिक टिकटों द्वारा कोई भी इनाम न जीता जाएगा) इनाम का यह माध्यिका मान, लॉटरी द्वारा प्रस्तुत इनामों के विश्लेषण में कोई सहायता नहीं करता, क्योंकि प्रस्तुत कुल इनामों में से पहला इनाम ही रुचि का विषय हो सकता है।

बोध प्रश्न क

1 निम्न समंग कुलकों के लिए, माध्यिका ज्ञात कीजिए।

क) 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256

....

ख) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8, 1/9, 1/10

....

2 सतत बंटन की स्थिति में, जब संचयी आवृत्तियाँ उच्च मान की ओर से परिकलित की जाएँ, तो माध्यिका परिकलन का सूत्र लिखिए।

....

....

....

3 एक निर्दिष्ट आवृत्ति बंटन में, यदि वर्ग अंतरालों की चौड़ाइयाँ असमान हों, तो माध्यिका परिकलित करने के लिए, किस वर्ग अंतराल का प्रयोग करोगे ?

....

....

....

4 विद्यार्थियों के एक समूह की ऊँचाइयाँ (इंचों में) नीचे दी गई है। माध्यिका ज्ञात कीजिए
61, 62, 62, 63, 64, 64, 60, 65, 63, 64, 65, 66, 64

....

....

....

अब मान लीजिए, विद्यार्थियों के एक अन्य समूह का, जिनकी ऊँचाइयाँ 60, 66, 59, 68, 67 और 70 इंच है, पहले समूह में समाष्टि कर दी जाती है। संयुक्त समूह की माध्यिका ज्ञात कीजिए।

....

....

5 अर्थशास्त्र में प्राप्त अंकों के निम्न आवृत्ति बंटन के लिए माध्यिका ज्ञात कीजिए।

अंक :	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
विद्यार्थियों की संख्या :	20	43	75	76	72	45	39	9	8	6

....

....

....

....

....

....

....

....

6 एक नए प्रकार के, 100 प्रकाश बल्बों की जीवन (घंटों में) संबंधी सूचना निम्नानुसार है। माध्यिका जीवन ज्ञात कीजिए।

जीवन (घंटों में)	असफलों की संख्या
1 — 50	2
51 — 100	8
101 — 150	15
151 — 200	20
201 — 200	25
251 — 300	20
301 — 350	10

....

....

....

7 बताइये कि निम्नलिखित कथन सत्य है या असत्य :

i) माध्यिका निर्धारित करने से पूर्व, समकों को क्रम से रखना आवश्यक है।

ii) विवृतमुखी बंटन के लिए, माध्यिका का परिकलन नहीं कर सकते।

iii) माध्यिका परिवलन के लिए बंटन के वर्ग अंतराल समान या असमान दोनों ही प्रकार के हो सकते है।

iv) माध्यिका के विचलनों का योग न्यूनतम होता है।

v) एक 16 मदों वाले समंक कुलंक के लिए माध्यिका 8 है।

11.6 विभाजन मान (Partition Values)

जैसा कि आप जानते हैं, जब सभी मदों को परिमाण के क्रम में रखा जाए, तो माध्यिका, चर का मध्य मान होती है। इस प्रकार माध्यिका, श्रेणी को दो समान भागों में विभाजित करती है। अतः इसे एक **स्थैतिक माध्य** कहते हैं। वास्तव में ऐसे अन्य स्थैतिक माप भी हैं जो श्रेणी को, समान भागों की, अधिक बड़ी संख्या में, विभाजित करते हैं, जैसे चार समान भागों, या 10 समान भागों में या 100 समान भागों में। ऐसे मापों को, व्यापक रूप में, **विभाजन मान** कहते हैं। अधिक प्रयोग में आने वाले, तीन विभाजन मान हैं, (1) चतुर्थक, (2) दशमक और (3) शतमक। निस्संदेह ये अकेन्द्रीय स्थिति-निर्धारण के माप हैं। आइये, अब इनके बारे में एक-एक करके, अध्ययन करें।

11.6.1 चतुर्थक (Quartiles)

चर के उन मानों को, जो श्रेणी या बंटन को, 4 समान भागों में विभाजित करें, **चतुर्थक** कहते हैं। क्योंकि समंकों को 4 समान भागों में विभाजित करने के लिए, तीन बिंदु आवश्यक हैं, इसलिए तीन चतुर्थक होते हैं। जिन्हें Q_1, Q_2 और Q_3 द्वारा सूचित करते हैं।

पहला चतुर्थक (Q_1), जिसे **निम्न चतुर्थक** भी कहते हैं, चर का वह मान है, जिसके नीचे 25% प्रेक्षण और जिसके ऊपर 75% प्रेक्षण हों।

दूसरा चतुर्थक (Q_2), चर का वह मान है, जो बंटन को दो समान भागों में बाँट दे। इसका अभिप्राय यह है कि इसके ऊपर 50% प्रेक्षण और नीचे 50% प्रेक्षण होते हैं। इसलिए Q_2 और माध्यिका समरूप हैं।

तीसरा चतुर्थक (Q_3), जिसे **उपरि चतुर्थक** भी कहते हैं, चर का वह मान है, जिसके नीचे 75% प्रेक्षण और जिसके ऊपर 25% प्रेक्षण हों, स्पष्ट है कि $Q_1 < Q_2 < Q_3$.

चतुर्थकों का परिकलन

असतत श्रेणी

जब आंकड़ों को आरोही क्रम में रखा जाए, तो

$$Q_1 = \frac{N+1}{4} \text{ वें मद का मान}$$

$$Q_2 = \frac{2(N+1)}{4} \text{ वें मद का मान}$$

$$Q_3 = \frac{3(N+1)}{4} \text{ वें मद का मान।}$$

सतत श्रेणी

$$Q_j = l + \frac{j\,N/4 - C}{f} \times i, \quad j = 1, 2, 3$$

जहाँ l = चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा

c = चतुर्थक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति

f = चतुर्थक वर्ग की साधारण आवृत्ति

i = चतुर्थक वर्ग का वर्गान्तर

11.6.2 दशमक (Deciles)

चर के उन मानों को जो श्रेणी का बंटन को दस समान भागों में बांट दें, **दशमक** कहते हैं। प्रत्येक भाग में कुल-प्रेक्षणों के 10% प्रेक्षण होते हैं। स्पष्टतः ऐसे 9 मान होंगे, जिन्हें $D_1, D_2, D_3, .. D_9$ द्वारा सूचित करते हैं। इन्हें कहते है : पहला दशमक, दूसरा दशमक इत्यादि। पाँचवाँ दशमक (D_5) माध्यिका ही होता है।

दशमकों का परिकलन

असतत श्रेणी $D_j = j\,\frac{(N+1)}{10}$ वें मद का मान, $f = 1,2, \ldots\ldots 9$

सतत श्रेणी $D_j = l + \frac{j\,N/10 - c}{f} \times i, \quad j = 1, 2, \ldots\ldots 9$

जहाँ $C = j^{th}$ दशमक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति, और अन्य प्रतीकों, का वही सामान्य अर्थ है।

11.6.3 शतमक (Percentiles)

चर के उन मानों को, जो एक निर्दिष्ट श्रेणी या बंटन को 100 समान भागों में विभाजित कर दें, **शतमक** कहते हैं। प्रत्येक शतमक भाग में , कुल प्रेक्षणों के एक प्रतिशत होते हैं। शतमक P_j चर का वह मान है, जिसके नीचे, कुल-प्रेक्षणों के ठीक j % होते हैं। उदाहरण के लिए :

P_{10} = चर का वह मान, जिस तक (या जिसके नीचे) कुल प्रेक्षणों के ठीक 10% प्रेक्षण होते हैं। यह D के अभिन्न होता है।

P_{20} = चर का वह मान जिस तक (या जिसके नीचे) कुल प्रेक्षणों के ठीक 20% प्रेक्षण होते हैं।

P_{25} = चर का वह मान जिस तक (या जिसके नीचे) कुल प्रेक्षणों के ठीक 25% प्रेक्षण होते हैं। यह Q_1 के समरूप हैं।

P_{50} = चर का वह मान जिस तक (या जिसके नीचे) कुल प्रेक्षणों के ठीक 50% होते हैं। यह D_5 या Q_2 के समरूप है।

इसी प्रकार $P_{75} = Q_3$

शतमकों का परिकलन

असतत श्रेणी

$P_j = \frac{j\,(N+1)}{100}$ वे मद का मान, $j = 1, 2, \ldots\ldots 99$

उदाहरण : $P_{45} = \frac{45\,(N+1)}{100}$ वे मद का मान

सतत श्रेणी

$P_j = l + \frac{j\,N/100 - c}{f} \times i, \quad j = 1, 2, \ldots\ldots 99$

जहाँ C = j वें शतमक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति, और शेष प्रतीकों का वही सामान्य अर्थ है।

आइये, विभाजन मानों का परिकलन करना, दो उदाहरणों द्वारा समझ लें।

उदाहरण 6
एक कक्षा परीक्षा में, 16 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक (अधिकतम अंक 20) निम्नानुसार हैं :

2, 3, 6, 7, 10, 10, 11, 11, 11, 12, 12, 14, 15, 16, 18, 19

Q_1, P_{35} और D_9 ज्ञात कीजिए।

हल :
प्राप्त अंक पहल हा आरोही क्रम में रखे हुए हैं।

$Q_1 = \frac{N+1}{4}$ वें मद का मान

$= \frac{16+1}{4}$ वें मद का मान

$= 4\frac{1}{4}$ वे मद का मान

$\therefore Q_1$ = (चौथे मद का मान) + 1/4 (5 वें मद का मान –4थे मद का मान)

$= 7 + \frac{1}{4} - (10 - 7)$

$= 7 + \frac{3}{4}$

$= 7.75$

$P_{35} = \frac{35\ (N + 1)}{100}$ वें मद का मान

$= \frac{35 \times (16 + 1)}{100}$ वें मद का मान

$= 5\frac{95}{100}$ वें मद का मान

$= 5.95$ वें मद का मान

$\therefore P_{35} = 5$ वें मद का मान + $\frac{95}{100}$ (6 वें मद का मान – 5 वें मद का मान)

$= 10 + \frac{95}{100} \times (10 - 10)$

$= 10 + 0$

$= 10$

$D_9 = \frac{9\ (N + 1)}{10}$ वें मद का मान $= \frac{9\ (16 + 1)}{10}$ वें मद का मान

अथवा $15\frac{3}{10}$ वें मद का मान

$D_9 = 15$ वें मद का मान + $\frac{3}{10}$ (16 वें मद का मान – 15 वें मद का मान)

$= 18 + \frac{3}{10} \times (19 - 18)$

$= 18.3$

ध्यान दीजिए कि किसी भी विद्यार्थी के प्राप्तांक 7.75 या 18.3 अंक नही हैं। जब चयनीय मद की क्रम संख्या भिन्नात्मक हो तो ऐसे कल्पित मान प्राप्त हो सकते हैं। यदि निर्दिष्ट समंक एक सतत श्रेणी हों, और असतत श्रेणी न हो तो ऐसे मानों की व्याख्या वैध होगी।

उदाहरण 7

निम्न सारणी में, अहमदाबाद नगर के 600 कुटुम्बों की मासिक आय का बंटन दिया गया है।

मासिक आय (रु॰ में)	कुटुम्बों की संख्या
75 से कम	69
75 — 150	167
150 — 225	207
225 — 300	65
300 — 375	58
375 — 450	24
450 और अधिक	10

क) $D_2, D_5, P_{25}, P_{75}, Q_3$ और मध्यिका ज्ञात कीजिए।

ख) प्रेक्षित कुटुम्बों में से केन्द्रीय 50% की आय की सीमाएँ ज्ञात कीजिए।

ग) परिणामों की व्याख्या कीजिए।

इल :

मासिक आय (रु. में)	कुटुम्बों की संख्या	संचयी आवृत्ति
75 से कम	69	69
75 — 150	167	236
150 — 225	207	443
225 — 300	65	508
300 — 375	58	566
375 — 450	24	590
450 और अधिक	10	600

क) i) D_2 के नीचे 2N/10 मद होते हैं। इसक अर्थ है कि $2 \times 600/10 = 120$ मद, D_2 के नीचे हैं।

अतः D_2 वर्ग 75 — 150 में है।

अब $D_2 = l + \dfrac{2N/10 - c}{f} \times i$

$= 75 + \dfrac{120 - 69}{167} \times 75$

$= 75 + \dfrac{51}{167} \times 75$

$= 75 + 22.9$

$= 97.90$

$\therefore D_2 = 97.90$ रु.

ii) D_5 के नीचे 5N/10 मद होते हैं। इसका अर्थ है कि $5 \times 600/10 = 300$ मद, D_5 के नीचे है। इसलिए, D_5 वर्ग 150 — 225 में है।

अब $D_5 = l + \dfrac{5N/10 - c}{f} \times i$

$= 150 + \dfrac{300 - 236}{207} \times 75$

$= 150 + \dfrac{64}{207} \times 75$

$= 150 + 23.19$

$= 173.19$

$\therefore D_5 = 173.19$ रु.

iii) P_{25} के नीचे 25N/100 मद होते हैं। इसका अर्थ है कि $25 \times 600/100 = 150$ मद, P_{25} के नीचे है। अतः P_{25} वर्ग 75 — 150 में स्थित है।

अब $P_{25} = l + \dfrac{25N/100 - c}{f} \times i$

$= 75 + \dfrac{150 - 69}{167} \times i$

$= 75 + \dfrac{81}{167} \times 75$

$= 75 + 36.38$

$= 111.38$

$\therefore P_{25} = 111.38$ रु.

iv) P_{75} के नीचे 75N/100 मद होते हैं। इसका अर्थ है कि 75 × 600/100 = 450 मद, P_{75} के नीचे हैं। अतः P_{75}, वर्ग 225 — 300 में स्थित है।

$$\text{अब } P_{75} = l + \frac{75N/100 - c}{f} \times i$$

$$= 225 + \frac{450 - 443}{65} \times 75$$

$$= 225 + 8.077$$

$$= 233.077$$

$\therefore P_{75} = 233.08$ रु॰

v) Q_3 के नीचे 3N/4 मद होते हैं। इसका अर्थ है कि 3 × 600/4 − 450 मद, Q_3 के नीचे हैं। P_{75} के नीचे भी 450 मद है। अतः Q_3 और P_{75} समरूप हैं।

$\therefore Q_3 = 233.08$ रु॰

vi) माध्यिका (M_d) के नीचे N/2 मद होते हैं। इसका अर्थ है कि 600/2 = 300 मद M_d के नीचे हैं। अतः यह वर्ग 150 — 225 में स्थित हैं।

$$\text{अब } M_d = l + \frac{N/2 - c}{f} \times i$$

$$= 150 + \frac{300 - 236}{207} \times 75$$

$$= 150 + \frac{64 \times 75}{207}$$

$$= 150 + 23.19$$

$$= 173.19$$

अतः माध्यिका = 173.19 रु॰

ध्यान दीजिए कि M_d और D_5 समरूप है। इसलिए सीधे भी हम लिख सकते हैं कि
$M_d = D_5 = 173.19$

ख) **केन्द्रीय 50% प्रेक्षण** अंतराल Q से Q_3 तक में होंगे, क्योंकि Q के नीचे 25% मद हैं। और Q_3 के ऊपर 25% मद हैं।

यहाँ $Q_1 = P_{25} = 111.28$ रु॰ और

$Q_3 = P_{75} = 233.08$ रु॰

अतः प्रेक्षित कुटुम्बों के 50% की आय की सीमाएँ हैं, 111.28 रु॰ और 233.08 रु॰

ग) **व्याख्या**

i) $D_2 = 97.99$ रु॰

अतः 20% कुटुम्बों की आय, रु॰ 97.90 या इससे कम है और 80% की आय 97.90 रु॰ या इससे अधिक है।

ii) $D_5 = 173.19$ रु॰

अतः 50% कुटुम्बों की आय 173.19 रु॰ या इससे कम है और 50% कुटुम्बों की आय, 173.19 रु॰ या इससे अधिक है।

क्योंकि माध्यिका M_d और D_5 समरूप होते हैं, अतः दोनों की एक ही व्याख्या है।

iii) $P_{25} = 111.38$ रु॰

अतः 25% कुटुम्बों की मासिक आय 111.38 रु॰ या इससे कम है, और 75% कुटुम्बों की मासिक आय 111.38 रु॰ या इससे अधिक है।

iv) P_{75} = 233.08 रु॰

अतः 75% कुटुम्बों की मासिक आय, 233.08 रु॰ या इससे कम है और 25% कुटुम्बों की मासिक आय 233.08 रु॰ या इससे अधिक है। क्योंकि Q_3 और P_{75} समरूप होते हैं, अतः दोनों की एक ही व्याख्या है।

11.7 माध्यिका और अन्य विभाजक मानों का आलेखीय निर्धारण

आपने माध्यिका और अन्य विभाजन मानों का परिकलन करने की विधियों को सीख लिया है। वास्तव में इनका निर्धारण लेखाचित्रों द्वारा भी कर सकते हैं। माध्यिका का रेखाचित्र द्वारा निर्धारण, निम्न दो विधियों में से किसी भी एक के द्वारा कर सकते हैं।

1 'से कम' तोरण (Less than Ogive) और 'से अधिक' तोरण (More than Ogive) की संरचना कीजिए। उनके प्रतिच्छेद बिंदु से x-अक्ष पर लम्ब खींचिए।

2 केवल एक ही तोरण, अर्थात् 'से कम' तोरण की संरचना कीजिए। इसके लिए, चर को x-अक्ष पर और संचयी आवृत्ति को y-अक्ष पर लीजिए। अब y-अक्ष पर बिंदु N/2 का स्थापन कीजिए। इस बिंदु से एक क्षैतिज रेखा तोरण तक खींचिए। उस बिंदु से जहां यह रेखा, तोरण को मिलती है, x-अक्ष पर लम्ब खींचिए। वह बिंदु ही जहाँ यह लम्ब, x-अक्ष को प्रतिच्छेद करे, माध्यिका होगा। इसी प्रकार अन्य विभाजन मानों का निर्धारण लेखाचित्रों द्वारा किया जा सकता है। चतुर्थक Q_j के लिए बिंदु j N/4 को y-अक्ष पर स्थापित करते हैं। दशमक D_j के लिए बिंदु jN/10 को y-अक्ष पर स्थापित करते हैं। शतमक P_j के लिए, बिंदु jN/100 को y-अक्ष पर स्थापित करते हैं और माध्यिका के लिए बताई गई प्रतिक्रिया का अनुसरण करते हैं।

उदाहरण 8

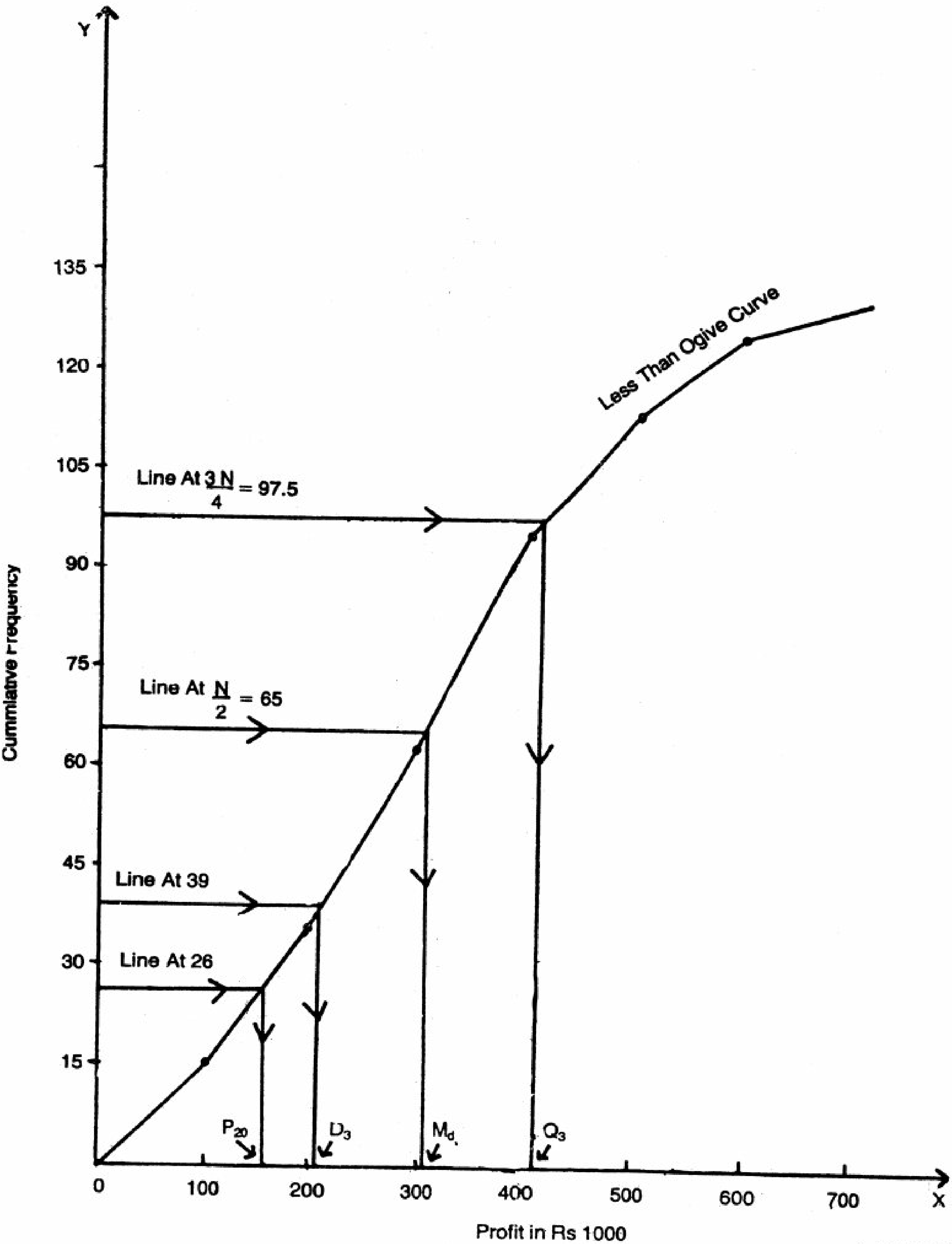
निम्न सूचना से, लेखाचित्र द्वारा माध्यिका, D_3, P_{20} और ज्ञात Q_3 कीजिए

लाभ प्रति दुकान ("से कम" रु "000)	दुकानों की संख्या
100	15
200	35
300	63
400	95
500	113
600	125
-700	130

हल :

लाभ प्रति दुकान ("से कम" रु. "000)	दुकानों की संख्या
100	15
200	35
300	63
400	95
500	113
600	125
700	130

अब चर x (लाभ) के मान, x-अक्ष पर लीजिए और संगत संचयी आवृत्तियाँ (cf_1) y-अक्ष पर लीजिए। फिर से "से कम" तोरण की संरचना कीजिए। आकृति 11.1 को ध्यान से देखिए और "से कम" तोरण की संरचना कैसे करते हैं, इसका अध्ययन कीजिए।



चित्र 11.1

माध्यिका के लिए, पहले N/2 (अर्थात् 130/2 = 65) का y-अक्ष पर स्थापित किया गया है और फिर N/2 (अर्थात् 65) से एक क्षैतिज रेखा खींची गई है। उस बिंदु से, जहाँ यह क्षैतिज रेखा वक्र का प्रतिच्छेद करती है, x-अक्ष पर एक लम्ब खींचा गया है। यह लम्ब, x-अक्ष को बिंदु "307" पर मिलता है, जो माध्यिका ही है। अतः माध्यिका लाभ 3,07, 000 रु. है।

D_3 के लिए, पहले y-अक्ष पर $3 \times 130/10 = 39$ को स्थापित किया गया है। फिर x-अक्ष पर, उसके संगत मान, अर्थात् D_3 का मान पढ़ा गया है, जो कि 213 है। अतः लाभ का D_3 2,13,000 रु. है।

P_{20} के लिए, y-अक्ष पर $20 \times 130/100 = 26$ को स्थापित किया गया है। माध्यिका की प्रक्रिया का अनुसरण करते हुए, हम लेखाचित्र के x-अक्ष पर P_{20} का मान पढ़ सकते हैं, जो 153 है। अतः P_{20} 1,53,000 रु. है। इसी प्रकार $Q_3 = 414.000$ रु.

आलेखन और पैमाना पठन की छोटी त्रुटियों को छोड़कर, रेखाचित्र द्वारा प्राप्त मान, उनके सूत्रों द्वारा प्राप्त मानों के लगभग समान होंगे।

बोध प्रश्न ख

1 विभाजन मानों की परिभाषा लिखिए। सांख्यिकी में प्रयुक्त होने वाले विभिन्न विभाजन मानों के नाम लिखिए।

....

....

....

....

2 विभिन्न विभाजन मानों को ज्ञात करने के लिए, उनके सूत्र लिखिए।

....

....

....

....

....

....

3 बताइये कि निम्नलिखित कथन, सत्य हैं या असत्य।

i) किसी भी विभाजन मान के लिए, रेखाचित्रीय और परिकलन विधियाँ, समान परिणाम नहीं देती।

ii) P_{70} का अर्थ है कि 70% मदों के मान इस बिंदु से कम हैं।

iii) सभी दशमकों का, शतमकों में, समावेश होता है।

iv) सभी चतुर्थकों का, दशमकों में समावेश होता है।

v) एक ऐसे बिंदु को, जिस के ऊपर 30% मदें हैं, D_3 कहते हैं।

vi) माध्यिका और तीसरा चतुर्थक समरूप है।

vii) एक दी हुई श्रेणी के लिए, $R_1 = 30.5$ और $Q_3 = 25.5$

viii) एक चर के 70% मान, 70 से कम हैं, इसलिए $D_3 = 70$

ix) तीसरा दशमक ही तीसवाँ शतमक होता है।

4 रिक्त स्थानों को भरिये :

i) माध्यिका से निरपेक्ष विचलनों का जोड़ .... होता है।

ii) माध्यिका .... चतुर्थक .... दशमक, ... और .... शतमक, होती है।

iii) एक (मासिक) आय बंटन के लिए, यदि $P_{30} = 125$, तो इससे अभिप्राय है कि .... % कुटुम्बों की मासिक आय 125 रु. या ....

iv) 60% चर 70 से कम हैं, इसलिए 70 = ...

v) एक दी हुई आय बंटन के लिए, केन्द्रीय 50% कुटुम्बों की आय की सीमाएँ .... और .... को निर्दिष्ट करती हैं।

11.8 सारांश

माध्यिका, एक स्थैतिक माध्य है। यह चर के सर्वाधिक मध्य मान को निर्दिष्ट करती है। इसके नीचे आधे मद और इसके ऊपर आधे मद स्थित होते हैं। अवर्गीकृत और वर्गीकृत समंकों के लिए, माध्यिका परिकलन करने के विभिन्न सूत्र हैं । इसी प्रकार, वर्गीकृत समंकों के लिए, असतत श्रेणियों और सतत श्रेणियों की स्थितियों में, भिन्न सूत्र है।

माध्यिका के कुछ महत्वपूर्ण विशेष गुण है :

(1) माध्यिका से, निरपेक्ष विचलनों का योग, न्यूनतम होता है। (2) यह चरम मानों से प्रभावित नहीं होती। (3) विवृतमुखी बंटन के लिए, यह अधिक उपयुक्त माध्य है। (4) गुणात्मक घटनाओं का तुलनात्मक अध्ययन, माध्यिका की सहायता से, अधिक अच्छी तरह किया जा सकता है। (5) इसका निर्धारण रेखाचित्रों द्वारा किया जा सकता है।

निम्न परिस्थितियों में, माध्यिका बड़ी ही उपयोगी सिद्ध होती है : (1) जहां चरम मानों से, माध्य के विकृत होने की संभावना हो, (2) जहाँ अध्ययन, गुणात्मक घटनाओं के बारे में हो, (3) जहाँ उद्देश्य, भौगोलिक दूरी का न्यूनतम मान प्राप्त करना हो, और (4) जहाँ किसी घरेलू उपकरण, जैसे कपड़े धोने की मशीन, की विशेष माप के "क्रय" का, निर्णय करना हो। माध्यिका की कुछ परिसीमाएँ भी हैं, जैसे : (1) यह उच्चतर बीजगणितीय प्रतिपादन के अक्षम है। (2) प्रतिचयन-अस्थिरता इत्यादि। कुछ परिस्थितियों में, यह मायावी और अयथार्थ माप सिद्ध होता है।

माध्यिका के सदृश, कुछ अन्य स्थैतिक माप भी हैं, जिन्हें विभाजन मान कहते हैं और जो श्रेणी को अधिक संख्या के समान भागों में विभाजित करते हैं। ये हैं : (1) चतुर्थक, (2) दशमक और (3) शतमक। चतुर्थक, चर के तीन ऐसे मान हैं जो श्रेणी को चार समान भागों में विभाजित कर दें। प्रत्येक भाग में कुल प्रेक्षणों के 25% प्रेक्षण होते हैं। दशमक, चर के वे नौ ऐसे मान हैं जो श्रेणी को दस समान भागों में विभाजित कर दें। प्रत्येक ऐसे भाग में, कुल प्रेक्षणों के 10% प्रेक्षण होते हैं। शतमक, चर के वे मान हैं जो श्रेणी को 100 समान भागों में विभाजित कर दें। प्रत्येक ऐसे भाग में कुल प्रेक्षणों के 1% प्रेक्षण होते हैं।

विभाजन मानों के परिकलन के लिए, माध्यिका के लिए निर्दिष्ट प्रक्रिया के प्रायः समरूप प्रक्रियाओं का अनुसरण करते हैं। माध्यिका को और विभाजन मानों को भी, रेखाचित्र में, तोरण (वक्र) द्वारा स्थापित कर सकते हैं। इस उद्देश्य के लिए, "से कम" तोरण का बहुत अधिक प्रयोग होता है।

11.9 शब्दावली और प्रतीक सूची

दशमक : विचर के वे मान जो दी गई श्रेणी या बंटन को दस समान भागों में विभाजित कर दें।

"से कम" तोरण : एक संचयी आवृत्ति वक्र जो क्षैतिज अक्ष पर, न्यूनतम सीमा से आरम्भ होकर, धीरे-धीरे ऊपर की ओर उठता है और बंटन की कुल आवृत्ति की संगत, उच्चतम वर्ग सीमा पर समाप्त होता है।

माध्यिका : चर का वह मान जो श्रेणी को दो समान भागों में विभाजित कर दे।

विभाजन मान : चर के वे मान जो बंटन को एक नियत संख्या के समान भागों में विभाजित कर दें।

शतमक : विचर के वे मान जो दी गई श्रेणी या बंटन को 100 समान भागों में बांट दें।

स्थैतिक माध्य : एक ऐसा माध्य,'जो परिमाण क्रम में रखी गई श्रेणी की एक विशेष स्थिति के प्रेक्षण के मान पर आधारित हो।

चतुर्थक : चर के वे मान जो एक दी गई श्रेणी या बंटन को चार समान भागों में विभाजित कर दें।

प्रतीक सूची (Symbols) :
इकाई 10 में दी गई प्रतीकों की सूची के अतिरिक्त माध्यिका और अन्य विभाजन मानों के संबंध में प्रयोग होने वाले प्रतीकों की सूची नीचे दी गई है। यह सूची, इकाई 10 में दी गई सूची की परम्परा के अनुसार ही है।

संचयी आवृत्ति : c, c, f, F, $\sum f_1$

दशमक -j वां : D_j

मदों का माध्यिका से विचलन : x $-M_d$, d, D

माध्यिका वर्ग की आवृत्ति : f, f_1, f_n, f_m

मान स्थित हो, निम्न सीमा

माध्यिका वर्ग की या ऐसे वर्ग की जिसमें कोई विभाजन : l, l_1, L, Lm

माध्यिका : M_d, M, $\bar{m}$,

शतमक -j वां : P_j

निम्नचतुर्थक : Q_1

उपरिचतुर्थक : Q_3

माध्यिका वर्ग की या ऐसे वर्ग की जिसमें कोई विभाजन मान स्थित हो, उपरि सीमा : μ, I, U, U_m

11.10 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 1 (क) 16, (ख) 0.18

2 $M_d = l + \frac{N/2 - c}{f} \times i$

3 माध्यिका वर्ग के वर्ग अंतराल का प्रयोग करेंगे।

4 पहला समूह : 63, संयुक्त समूह, 64

5 20

6 210.5

7 i) सत्य ii) असत्य iii) सत्य iv) असत्य v) असत्य

ख 3 i) असत्य ii) सत्य iii) सत्य iv) असत्य v) असत्य vi) असत्य vii) असत्य viii) असत्य ix) सत्य

4 i) न्यूनतम ii) दूसरा, पांचवॉं, 50वॉं iii) 30x इससे कम है iv) D_6 या P_{60} v) Q_1, Q_3

11.11 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

प्रश्न

1 माध्यिका किसे कहते हैं। इसके गुणों और परिसीमाओं की व्याख्या कीजिए।

2 माध्यिका परिकलन की विधियों की व्याख्या कीजिए।

3 समांतर माध्य और माध्यिका की, माध्य मापों के रूप में तुलना कीजिए।

4 चतुर्थकों, दशमकों और शतमकों में समानता और अंतर को स्पष्ट कीजिए।

अभ्यास

1 युनिवर्सिटी लाइब्रेरी के काउंटर से, 10 विभिन्न दिनों में, जारी की गई पुस्तकों की संख्या इस प्रकार है :

180, 96, 75, 70, 80, 102, 100, 94, 75, 400

इन आंकड़ों के प्रतिनिधि रूप में, कौन सा माध्य सर्वोत्तम होगा। इसे परिकलित कीजिए।

(उत्तर : माध्यिका 97.5)

2 ऑटोवाहन दुर्घटना बीमे के दावों के बारे में, सूचना नीचे दी गई है। माध्यिका ज्ञात कीजिए।

दावे की राशि (रु.)	आवृत्ति
150 से कम	52
150 – 199.99	108
200 – 249.99	230
250 – 299.99	528
300 – 349.99	663
350 – 399.99	816
400 – 449.99	993
450 – 499.99	825
500 और अधिक	650

(उत्तर : लगभग 402 रु.)

3 निम्न आंकड़ों के लिए माध्यिका ज्ञात कीजिए, जब कि माध्य 45.5 हो।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
70 — 80	10
60 — 70	10
50 — 60	20
40 — 50	...
30 — 40	12
20 — 30	7
10 — 20	8
0 — 10	5

(उत्तर : 50)

4 निम्न आंकड़ों के लिए, लेखाचित्र द्वारा, माध्यिका ज्ञात कीजिए। केन्द्रीय 80% विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों का विस्तार ज्ञात कीजिए।

अंक, 60 में से	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	4
20 से कम	10
30 से कम	30
40 से कम	40
50 से कम	50
60 से कम	60

(उत्तर : 27.5, 11.7 से 47.1 तक)

500 विद्यार्थियों के एक समूह के लिए, 100 अंकों में से प्राप्त अंकों के बारे में, निम्न सूचना उपलब्ध है :

माध्यिका = 45, $Q_1 = 23$, $Q_3 = 73$, $D_4 = 38$, $P_{63} = 60$, $P_{90} = 83$

8% विद्यार्थियों ने 12 अंकों से कम अंक प्राप्त किए। 3% विद्यार्थियों ने 95 अंकों से अधिक अंक प्राप्त किए। समंकों को वर्गान्तरों में सारणीबद्ध कीजिये।

उत्तर

अंक	: 0 — 12	12 — 23	23 — 38	38 — 45	45 — 60
विद्यार्थियों की संख्या	: 40	85	75	50	65
अंक	: 60 — 73	73 — 83	83 — 95	95 — 100	
विद्यार्थियों की संख्या	: 60	75	35	15	

6 अनुपस्थित आवृत्तियों को ज्ञात कीजिए, यदि माध्यिका 25 हो।

मासिक व्यय (रु.)	आवृत्ति
0 — 10	14
10 — 20	—
20 — 30	27
30 — 40	—
40 — 50	15

(**उत्तर** : 23, 21)

7 एक लाण्डरी दो विभिन्न छापों की कपड़े धोने की मशीनों का प्रयोग करती है। पूर्व अनुभव के आधार पर निम्न परिणाम अभिलिखित किए गए हैं :

छाप	माध्यिका जीवन	माध्य जीवन
A	6500 घंटे	6000 घंटे
B	6000 घंटे	6500 घंटे

यदि दोनों छापों के मूल्य समान हों तो किस छाप को खरीदना चाहिए ?

8 निम्न आंकड़ों के लिए, Q_1, P_{30}, D_8 परिकलित कीजिए :

पहनने के कालर का आमाप	:	14"	14.5"	15"	15.5"	16"
विद्यार्थियों की संख्या	:	20	37	43	26	14

(**उत्तर** : Q_1 = 14.5", P_{30} = 14.5", D_8 = 15.5")

9 निम्न आंकड़ों के लिए, रेखाचित्र द्वारा D_6 माध्यिका, P_{20}, Q_1 और Q_3 निर्धारित कीजिए। संगत सूत्रों के प्रयोग से, परिणामों की जाँच कीजिए।

दैनिक मज़दूरी (रु.)	कामगारों की संख्या
10 से कम	5
10 — 20	25
20 — 30	40
30 — 40	70
40 — 50	90
50 — 60	40
60 — 70	20
70 से अधिक	10

उत्तर : $D_6 = 44.4$, माध्यिका $= 41.1$

$P_{20} = 27.57$ $Q_1 = 30.7, Q_3 = 49.4$

नोट : य प्रश्न और अभ्यास, इकाई को भली भांति समझने में, आपकी सहायता करेंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। परंतु अपने उत्तर विश्वविद्यालय को मत भेजिए। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 12 भूयिष्ठक (Mode)

इकाई की रूपरेखा

12.0 उद्देश्य

12.1 प्रस्तावना

12.2 भूयिष्ठक किसे कहते हैं ?

12.3 भूयिष्ठक का परिकलन

- 12.3.1 अवर्गीकृत समंक
- 12.3.2 वर्गीकृत समंक
- 12.3.3 निष्कोण समंक
- 12.3.4 आनुभाविक विधि

12.4 भूयिष्ठक का आलेखीय निर्धारण

12.5 भूयिष्ठक के गुण और परिसीमाएं

12.6 कुछ उदाहरण

12.7 सारांश

12.8 शब्दावली और प्रतीक सूची

12.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

12.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

12.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात, आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- भूयिष्ठक को परिभाषित कर सकें
- विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए, भूयिष्ठक का परिकलन कर सकें
- भूयिष्ठक को रेखाचित्रों द्वारा निर्धारित कर सकें
- भूयिष्ठक के उपयोगों और परिसीमाओं का अभिमूल्यन कर सकें।

12.1 प्रस्तावना

जैसा कि आप जानते हैं, केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों में, कुछ माप ऐसे हैं जो समंकों के सभी मदों पर आधारित होते हैं, और कुछ अन्य माप ऐसे हैं, जो स्थैतिक माध्य हैं। इकाई 10 में, आपने समांतर माध्य के बारे में अध्ययन किया है, जो समंकों के सभी मदों पर आधारित है। इकाई 11 में आपने माध्यिका के बारे में अध्ययन किया है, जो एक स्थैतिक माध्य है। इस इकाई में आप, भूयिष्ठक (mode) के बारे में अध्ययन करेंगे जो कि एक अन्य स्थैतिक माध्य है। आप भूयिष्ठक के अर्थ, परिकलन विधियों, आलेखीय निर्धारण, परिसीमाओं और उपयोगों के बारे में पढ़ेंगे।

12.2 भूयिष्ठक किसे कहते हैं ?

भूयिष्ठक भी केन्द्रीय प्रवृत्ति का एक माप है। भूयिष्ठक चर का वह मान है, जो दिए गए समंक समूह में, सर्वाधिक बार दोहराया गया हो। अंग्रेजी में, भूयिष्ठक का पर्याय शब्द है, "मोड (Mode)", स्वयं जिसकी उत्पत्ति फ्रांसिसी भाषा के शब्द "ला मोडे — la mode" से हुई है, जिसका अर्थ है, "फैशन"। अतः भूयिष्ठक, सर्वाधिक सामान्य या सर्वाधिक लोकाचार के अनुरूप मान होता है।

बहुधा, भूयिष्ठक चर का वह मान माना जाता है, जो सर्वाधिक बार आए। परंतु, यह सभी आवृत्ति बंटनों के लिए यथार्थतः सत्य नहीं है। वस्तुतः **भूयिष्ठक चर का वह मान है, जिसके गिर्द, अन्य मदें, सर्वाधिक तीव्रता के साथ, संकेन्द्रित होने का प्रयत्न करें।** यह, एक मान पर और उसके गिर्द, आवृत्ति संकेन्द्रण के केन्द्र को प्रकट करता है। यह, समांतर माध्य के सदृश, गुरुत्व केन्द्र नहीं है। यह तो, माध्यिका के सदृश, एक स्थैतिक माप है। इसे प्रायः प्रतीक **'M_0' द्वारा सूचित किया जाता है।**

उदाहरण के लिए, एक जूता बेचने वाले दुकानदार को लीजिये। उसकी अभिरुचि यह ज्ञात करने में है कि जूता के वे कौन से आमाप हैं, जिनकी सामान्य रूप में सर्वाधिक मांग हैं। इस स्थिति पर ध्यान दीजिए। समांतर माध्य एक ऐसा आमाप हो सकता है, जो किसी व्यक्ति को भी ठीक न बैठे। बंटन में असमता के कारण, हो सकता है कि माध्यिका भी एक प्रतिनिधि आमाप न दे सके। भूयिष्ठक ही, एक ऐसा माप है, जो एक सन्निकट आमाप के चयन में हमारी सहायता कर सकता है, और जिसके लिए आर्डर दिया जा सकता है।

12.3 भूयिष्ठक का परिकलन

वर्गीकृत समंकों और अवर्गीकृत समंकों के लिए, भूयिष्ठक परिकलन की विधियां भिन्न हैं। आइये, अब इन विधियों का पृथक-पृथक अध्ययन करें।

12.3.1 अवर्गीकृत समंक

अवर्गीकृत समंकों के लिए, निरीक्षण मात्र से ही भूयिष्ठक ज्ञात कर सकते हैं। चर के उस मान को, जो दिये गए समंकों में सर्वाधिक बार उपस्थित हो, भूयिष्ठक मानते हैं।

उदाहरण के लिए, 10 लड़कों की आयु (वर्षों में) निम्नानुसार है : 5, 6, 4, 10, 7, 6, 9, 2, 8, 6; यहाँ संख्या 6 तीन बार (अर्थात् सर्वाधिक बार) आई है। अतः भूयिष्ठक आयु है, 6 वर्ष।

कुछ स्थितियों में इस प्रकार भूयिष्ठक विद्यमान नहीं होता। उदाहरण के लिए निम्न समंक समूह पर विचार कीजिए : 5, 10, 15, 20, 25, 30; इस स्थिति में कोई भूयिष्ठक नहीं है, क्योंकि कोई भी संख्या दोहरायी नहीं गई है।

कुछ स्थितियों में एक से अधिक भूयिष्ठक हो सकते हैं। उदाहरण के लिए, एक टाइपिस्ट ने 10 पृष्ठ टाइप किए और प्रति पृष्ठ-अशुद्धियों की संख्या निम्नानुसार हैं : 5, 1, 0, 1, 2, 1, 2, 3, 2, 4 इस स्थिति में, संख्याएं 2 और 1, दोनों ही समान बार उपस्थित होती हैं। अतः इस श्रेणी में, दो भूयिष्ठक हैं : 2 और 1। इसी प्रकार, एक बंटन त्रि-भूयिष्ठक या बहु भूयिष्ठक भी हो सकता है। ऐसे बंटनों के लिए, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप के रूप में, भूयिष्ठक की कोई सार्थकता नहीं है। अवर्गीकृत समंकों के लिए, बहुलक का बहुत सीमित उपयोग है।

12.3.2 वर्गीकृत समंक

सतत बंटन ओर असतत बंटन के लिए भूयिष्ठक परिकलन की विधियां भिन्न हैं। आइये, अब इन विधियों का विस्तार से अध्ययन करें।

असतत श्रेणी

असतत बंटन अर्थात् जब श्रेणी के व्यक्तिगत मदों के मान ज्ञात हों, के लिए, भूयिष्ठक का निर्धारण निरीक्षण मात्र से ही कर सकते हैं। निरीक्षण द्वारा, आप चर का वह मान ज्ञात कर सकते हैं, जिसके गिर्द मदें सर्वाधिक तीव्रता से संकेन्द्रित हों। उदाहरण के लिए, निम्न आवृत्ति बंटन का अध्ययन कीजिए :

मदों का मान :	20	21	22	23	24	25
आवृत्ति :	15	20	25	45	30	12

इस आवृत्ति बंटन में, मान 23 की आवृत्ति सर्वाधिक है। इसका अभिप्राय है कि इस मान के गिर्द, मदों का संकेन्द्रण सर्वाधिक है। अतः भूयिष्ठक 23 है। इस प्रकार की प्रत्येक श्रेणी में, भूयिष्ठक ज्ञात करना सरल है। परतु, कठिनाई वहां आ जाती है जब पास के दो या दो से अधिक वर्गों में, संकेन्द्रण प्रायः समान हो; अर्थात् अधिकतम आवृत्ति और उसके पूर्ववर्ती आवृत्ति या अनुवर्ती आवृत्ति में अंतर कम हो। ऐसी स्थिति में बहुलक निर्धारित करने के लिए, समूहन और विश्लेषण की आवश्यकता होती है।

समूहन सारणी (Grouping table) : समूहन सारणी में छः स्तम्भ होते हैं। इनकी व्याख्या निम्नानुसार है :

स्तम्भ 1 : यह स्तम्भ सारणियों का है। प्रत्येक वर्ग के सम्मुख, इस स्तंभ में, उसकी आवृत्ति लिखी होती है। अधिकतम आवृत्ति को अंकित कर देते हैं या एक वृत्त द्वारा घेर देते हैं।

स्तम्भ 2 : इस स्तम्भ में, दो-दो आवृत्तियों का समूहन करते हैं। उनके (अर्थात् समूहों के) जोड़ ज्ञात करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित कर देते हैं या एक वृत्त द्वारा घेर देते हैं।

स्तम्भ 3 : ऊपर से पहली आवृत्ति को छोड़ कर, शेष आवृत्तियों का, दो-दो का समूहन करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित कर देते हैं।

स्तम्भ 4 : ऊपर की ओर से, तीन-तीन आवृत्तियों का समूहन करते हैं। उनके जोड़ ज्ञात करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित कर देते हैं।

स्तम्भ 5 : ऊपर से, पहली आवृत्ति को छोड़ कर, शेष आवृत्तियों का तीन-तीन का समूहन करते हैं। उनके जोड़ ज्ञात करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित करते हैं।

स्तम्भ 6 : ऊपर से पहली दो आवृत्तियों का छोड़कर, शेष आवृत्तियों का, तीन-तीन का समूहन करते हैं। उनके जोड़ करते हैं। अधिकतम जोड़ को अंकित करते हैं।

विश्लेषण सारणी (Analysis table) : समूहन सारणी बनाने के पश्चात्, एक विश्लेषण सारणी बनानी होती है। यह सारणी दुहरे रूप में होती है : (1) लम्ब रूप में (अर्थात् अनुशीर्षक) समूहन सारणी में प्रयुक्त स्तम्भ संख्याएं (क्रम संख्याएं) होती हैं। (2) क्षैतिज रूप में, (अर्थात् उपशीर्षक) विचर के मान (या वर्ग) लेते हैं। अब आप समूहन सारणी को लीजिए, जिसके प्रत्येक स्तम्भ में, अधितम आवृत्ति जोड़ को अंकित किया गया है। अब इन वृत्तों द्वारा घेरी गई आवृत्तियों को बारी-बारी से, उनके विचर मानों के साथ लीजिए। विश्लेष सारणी में, इन मानों के नीचे (अर्थात् स्तम्भ में) और सम्बद्ध स्तम्भों की पंक्तियों में, मिलान दंडिकाएं रख देते हैं। विश्लेषण सारणी के प्रत्येक स्तम्भ में, मिलान दंडिकाओं की कुल संख्या को, (उसी स्तम्भ में और) अंतिम पंक्ति में लिख देते हैं। इन संख्याओं में, अधिकतम को अंकित करते हैं। इस अधिकतम संख्या के संगत चर का मान ही, भूयिष्ठक या भूयिष्ठक वर्ग प्रदान करता है।

आइये, एक उदाहरण द्वारा, समूहन और विश्लेषण सारणियों को बनाने की प्रक्रिया का अध्ययन करें।

उदाहरण 1
विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों के बारे में, निम्न सूचना से, भूयिष्ठक अंक ज्ञात कीजिए।

अंक :	55	60	61	62	63	64	65	66	68	70
विद्यार्थियों की संख्या :	4	6	5	10	20	22	24	6	2	1

हल :
जैसा कि हम यहां देखते हैं, अधिकतम आवृत्ति (अर्थात् 24) और उसके पूर्ववर्ती दो आवृत्तियों (अर्थात् 22 और 20) में अंतर बहुत कम है। अधिकतम आवृत्ति की अनुवर्ती आवृत्ति (अर्थात् 6) भी, बहुत छोटी है। अतः भूयिष्ठक वर्ग का निर्धारण करने के लिए, समूहन करने की आवश्यकता है।

समूहन सारणी

अंक	स्तम्भ 1	स्तम्भ 2	स्तम्भ 3	स्तम्भ 4	स्तम्भ 5	स्तम्भ 6
55	4		×	×	×	×
60	6	10				×
61	5		11	15		
62	10	15			21	
63	20		30			35
64	22	**42**		**52**		
65	**24**		**46**		**66**	
66	6	30				**52**
68	2		8	32	9	×
70	1	3	×	×		×

विश्लेषण सारणी

स्तम्भ संख्या	55	60	61	62	63	64	65	66	68	70
1							1			
2					1	1				
3						1	1			
4				1	1	1				
5					1	1	1			
6						1	1	1		
जोड़				1	3	5	4	1		

विश्लेषण सारणी में, अधिकतम जोड़ 5 है। इसके संगत मद 64 है। अतः भूयिष्ठक (M_o) 64 है। ध्यान दीजिए कि दिए गए आवृत्ति बंटन में अधिकतम आवृत्ति 65 की है। जबकि समूहन और विश्लेषण सारणियों द्वारा प्रकट होता है कि मदों का संकेद्रण 64 के गिर्द है। अतः भूयिष्ठक का शुद्ध मान 64 है।

सतत श्रेणी

सतत श्रेणी (अर्थात् वर्ग-अंतरालों में वर्गीकृत समंकों) की स्थिति में, जबकि सभी वर्ग-अंतरालों के आमाप समान हों, भूयिष्ठक परिकलन के दो मुख्य चरण हैं।

चरण 1 : समूहन सारणी और विश्लेषण सारणी बनाकर ठीक उसी प्रकार भूयिष्ठक वर्ग निर्धारित करें जैसे कि असतत श्रेणी के लिए किया जाता है।

चरण 2 : भूयिष्ठक वर्ग का ठीक निर्धारण करने के पश्चात्, भूयिष्ठक (M_o) को, अंतर्वेशन द्वारा, निम्न में से किसी एक सूत्र का प्रयोग से प्राप्त करते हैं :

क) $$M_o = l + \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \times i$$

जहाँ l = भूयिष्ठक वर्ग की निम्न सीमा

i = भूयिष्ठक बहुलक वर्ग का वर्गान्तर

$\Delta_1 = |f_1 - f_0|$

$\Delta_2 = |f_1 - f_2|$

f_1 = भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति

f_0 = भूयिष्ठक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की आवृत्ति

f_2 = भूयिष्ठक वर्ग के अनुवर्ती वर्ग की आवृत्ति।

उपरोक्त सूत्र में Δ_1 और Δ_2 के मान प्रति-स्थापित

$$M_o = l + \frac{f_1 - f_0}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times i$$

$$= l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

टिप्पणी : यदि $(2f_1 - f_0 - f_2)$ का मान शून्य हो, तो सूत्र निरर्थक हो जाता है। यदि अंश या हर में से कोई एक ऋणात्मक हो तो सूत्र द्वारा प्राप्त परिणाम वैध नहीं होता। ऐसी स्थिति में, सूत्र को निम्न रूप में लिखते हैं :

$$M_o = l + \frac{|f_1 - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f_1 - f_2|} \times i$$

जहाँ $|f_1 - f_0|$ और $|f_1 - f_2|$ अंतर के निरपेक्ष मान हैं।

ख) भूयिष्ठक वर्ग की उपरि सीमा का प्रयोग कर के भी, भूयिष्ठक का परिकलन कर सकते हैं .

$$M_o = u - \frac{f_1 - f_2}{(f_1 - f_0) + (f_1 - f_2)} \times i$$

ग) यदि भूयिष्ठक वर्ग, अधिकतम आवृत्ति के वर्ग से भिन्न हो तो निम्न सूत्र अधिक उपयुक्त है :

$$M_o = l + \frac{f_2}{(f_0 + f_2)} \times i$$

टिप्पणियाँ :

1 यदि आवृत्ति बंटन का पहला वर्ग ही, भूयिष्ठक वर्ग हो तो f_0 का मान शून्य लेते हैं। यदि आवृत्ति बंटन का अंतिम वर्ग, भूयिष्ठक वर्ग हो तो f_2 का मान शून्य लेते हैं।

2 ये सूत्र, केवल समान अंतरालों वाले आवृत्ति बंटनों के लिए ही वैध होते हैं। ऐसा क्यों ? कारण सरल है। यदि आमाप 10 और 20 के दो वर्ग अंतरालों की आवृत्तियां क्रमशः 15 और 18 हो, तो साधारण तुलना से प्रकट होता है कि आवृत्ति 18, आवृत्ति 15 से अधिक है। परतु, भूयिष्ठक का संबंध तो मदों के संकेन्द्रण से है। पहले वर्ग का संकेन्द्रण दर है। 15/10 या 1.5 मदें वर्ग की प्रति इकाई लंबाई; जबकि दूसरे वर्ग का संकेन्द्रण दर है, 18/20 या 0.9 मदें वर्ग की प्रति इकाई लम्बाई। अतः भूयिष्ठक आवृत्ति निर्धारित करने की दृष्टि से, आमाप 20 के वर्ग अंतराल की आवृत्ति 18 आमाप 10 के वर्ग अंतराल की आवृत्ति 15, की तुलना में, कम है। अतः समान वर्ग अंतरालों की स्थिति में ही, आवृत्तियों की तुलना, सीधे कर सकना सम्भव है।

3 ऐसे आवृत्ति बंटनों की स्थिति में, जहाँ वर्ग अंतराल समान न हों, पहले वर्ग अंतरालों को संयुक्त या विभाजित कर समान बना लेते हैं। इसके लिए कल्पना करते हैं कि मदें एक समान बंटी हुई हैं। इसके पश्चात् सामान्य सूत्रों का प्रयोग करते हैं।

उदाहरण 2

निम्न आवृत्ति बंटन के लिए, बहुलक परिकलित कीजिए।

प्रदत्त मासिक किराया (रु॰)	किराया देने वाले कुटुम्बों की संख्या
20 — 40	6
40 — 60	9
60 — 80	11
80 — 100	14
100 — 120	20
120 — 140	15
140 — 160	10
160 — 180	8
180 — 200	7
	100

हल :

निरीक्षण द्वारा जान पड़ता है कि बहुलक वर्ग, 100 — 120 है। परंतु, आइये समूहन और विश्लेषण द्वारा, इसकी जाँच करें।

समूहन सारणी

मासिक किराया (रु॰)	स्तम्भ 1	स्तम्भ 2	स्तम्भ 3	स्तम्भ 4	स्तम्भ 5	स्तम्भ 6
20 — 40	6]		×]		×	×
40 — 60	9]	15]		]		×
60 — 80	11]		20]	26		
80 — 100	14]	25]		]	34	]

100 — 120	(20)		(34)			(46)
120 — 140	15	(35)		(49)		
140 — 160	10		25		(45)	
160 — 180	8	18			×	
180 — 200	7	×	15	25	×	

विश्लेषण सारणी

स्तम्भ संख्या	20 — 40	40 — 60	60 — 80	80 — 100	100 — 120	120 — 140	140 — 160	160 — 180	180 — 200
1					1				
2					1	1			
3				1	1				
4				1	1	1			
5					1	1	1		
6			1	1	1				
जोड़			1	3	6	3	1		

क्योंकि अधिकतम जोड़ 6 है, इसलिए भूयिष्ठक वर्ग है, 100 — 120, अब निम्न सूत्र के प्रयोग से

$$M_o = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

$$= 100 + \frac{20 - 14}{2(20) - 14 - 15} \times 20$$

$$= 100 + \frac{6}{11} \times 20$$

$$= 100 + 10.91$$

$$= 110.91$$

भूयिष्ठक मासिक किराया है, रु॰ 110.91

उदाहरण 3

निम्न आँकड़ों से भूयिष्ठक का परिकलन कीजिए :

मदों का मान	आवृत्ति
0 — 9	3
10 — 19	4
20 — 29	8
30 — 39	7
40 — 49	6
50 — 59	3

हल :

निरीक्षण द्वारा भूयिष्ठक निर्धारित करना कठिन है, हमें समूहन करना होगा।

समूहन सारणी

वर्ग	स्तम्भ 1	स्तम्भ 2	स्तम्भ 3	स्तम्भ 4	स्तम्भ 5	स्तम्भ 6
0 — 9	3		×		×	×
10 — 19	4	7				×
20 — 29	(8)		12	15		
30 — 39	7	(15)			(19)	
40 — 49	6		(13)		×	(21)
50 — 59	3	9	×	(16)	×	×

विश्लेषण सारणी

स्तम्भ संख्या	0 — 9	10 — 19	20 — 29	30 — 39	40 — 49	50 — 59
1			1			
2			1	1		
3				1	1	
4				1	1	
5			1	1		
6			1	1	1	
जोड़			4	5	3	

विश्लेषण सारणी से स्पष्ट है कि वर्ग 30 – 39, भूयिष्ठक वर्ग है। परंतु अधिकतम आवृत्ति वर्ग 20 – 29 में है। अतः भूयिष्ठक के लिए अधिक उपयुक्त सूत्र है

$$M_o = l + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i$$

$$= 29.5 + \frac{6}{8 + 6} \times 10 \text{ (29.5 यथार्थ सीमा है)}$$

$$= 29.5 + \frac{60}{14}$$

$$= 29.5 + 4.29$$

$$= 33.79$$

अतः भूयिष्ठक 33.8 है।

ध्यान दीजिए कि यदि आप निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे, तो परिमाण भिन्न होगा :

$$M_o = l + \frac{|f_1 - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f_1 - f_2|} \times i$$

$$= 29.5 + \frac{(7 - 8)}{(7 - 8) + (7 - 6)} \times 10$$

$= 29.5 + \frac{1}{1 + 1} \times 10$

$= 29.5$ 0/2

$= 34.5$

ध्यान दीजिए कि इस विधि से, भूयिष्ठक 34.5 प्राप्त होता है, जबकि पहली रीति से यह 33.8 प्राप्त होता है। यदि आप सूत्र $M_o = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$, का प्रयोग करें, तो हर का मान शून्य हो जाता है और अंश का मान ऋण होगा। इसलिए, यह सूत्र प्रयोज्य नहीं है। यह ध्यान देना भी महत्वपूर्ण है, कि समांतर माध्य और माध्यिका के असदृश भूयिष्ठक परिकलन की विभिन्न विधियों से, विभिन्न परिणाम प्राप्त हो सकते हैं।

12.3.3 निष्कोण समंक (Smooth Data)

यदि एक आवृत्ति बंटन में, आवृत्ति सामान्य रूप से, बिना आकस्मिक परिवर्तनों के, वर्धमान या ह्रासमान हो तो ऐसे आवृत्ति बंटन को निष्कोण आवृत्ति बंटन या निष्कोण समंक कहते हैं। ऐसे समंकों के लिए, भूयिष्ठक का निर्धारण, उपरोक्त किसी भी सूत्र का प्रयोग किए बिना, सरलता से किया जा सकता है। इसके परिकलन में, बड़ी सरल क्रियाओं (गणनाओं) की आवश्यकता होती है। निष्कोण समंकों का भूयिष्ठक परिकलित करने के नियम इस प्रकार है : यदि $f_0 = f_2$ अर्थात् भूयिष्ठक वर्ग के पास के वर्गों की आवृत्तियां, समान हों, तो भूयिष्ठक वर्ग अंतराल की दोनों सीमाओं का मध्य बिंदु ही, भूयिष्ठक होता है। निम्न उदाहरण का ध्यानपूर्वक अध्ययन करें :

मान (x) :	0 — 10	10 — 20	20 — 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60	60 — 70
आवृत्ति (f) :	1	6	15	20	15	6	1

क्योंकि अधिकतम आवृत्ति 20 है, इसलिए भूयिष्ठक वर्ग, 30 — 40 है। क्योंकि अधिकतम आवृत्ति के पास की दोनों आवृत्तिया समान (अर्थात् 15), इसलिए भूयिष्ठक, 30 और 40 का समांतर माध्य है,

$\therefore M_o = \frac{30 + 40}{2}$

$= 35$

आप जांच कर सकते है कि इस सूत्र द्वारा प्राप्त परिणाम उस परिणाम के अभिन्न है, जो वर्गीकृत आंकड़ों के लिए बताए गए, अन्य सूत्रों से प्राप्त होता है। जब भी $f_0 = f_2$ और f_2 तथा f_0 प्रत्येक f_1 से कम हो, तो सदा ऐसा होगा, अर्थात् $M_o = \frac{lf_0 + uf_2}{f_0 + f_2}$

उदाहरण के लिए, निम्न बंटन पर विचार कीजिए।

मान :	0—10	10 — 20	20 — 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60	60 — 70
आवृत्ति :	500	610	740	748	745	690	500

यहाँ अधिकतम आवृत्ति (f_1) 745 है और इसके संगत भूयिष्ठक वर्ग, 30—40 है। पास की दो आवृत्तियां हैं, 740 (f_0) ओर 745 (f_2) जो बराबर नही है, परंतु उनके f_1 से अंतर अधिक नही है। भूयिष्ठक वर्ग, 30—40 है, अर्थात् $l = 30$ और $u = 40$

$\therefore M_o = \frac{(30 \times 740) + (40 \times 745)}{740 + 745}$

$= \frac{52,000}{1,485}$

$= 35.02$

इस विधि द्वारा प्राप्त परिणाम, सदैव वही होगा जो कि सूत्र $M_o = l + \frac{f_2}{f_o + f_2} \times i$ के प्रयोग से प्राप्त होता है। आप इसका सत्यापन कर सकते हैं।

उदाहरण 4

निम्न आंकड़ों के लिए भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए :

आयु (वर्षों में) :	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45	45—50	50—55	55—60
व्यक्तियों की संख्या :	50	70	80	180	150	120	70	50

हल :

अधिकतम आवृत्ति, वर्ग 35 — 40 में हैं। परंतु आवृत्ति का संकेन्द्रण, वर्ग 40 — 45 के गिर्द प्रतीत होता है। अतः भूयिष्ठक वर्ग ज्ञात करने के लिए समूहन करेंगे।

समूहन सारणी

आयु	स्तम्भ 1	2	3	4	5	6
20 — 25	50		×		×	×
25 — 30	70	120				×
30 — 35	80		150	200		
35 — 40	(180)	260			330	
40 — 45	150		(330)			(410)
45 — 50	120	(270)		(450)		
50 — 55	70		190		(340)	
55 — 60	50	120				240

जैसा कि हम देखते हैं, वर्ग 40-50, स्तम्भों 2, 3, 4, 5, और 6 में, (अर्थात 6 स्तम्भों में से 5 में) अधिकतम आवृत्ति जोड़ में, भागीदार है। परंतु वर्ग 35-40 केवल 4 आवृत्ति जोड़ों में भागीदार है। विश्लेषण सारणी से आप इसका सत्यापन कर सकते हैं।

$$\therefore M_o = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

सूत्र का प्रयोग करते हुए

$$= 40 + \frac{150 - 180}{2 \times 150 - 180 - 120} \times 5$$

$$= 40 + \frac{-30}{0} \times 5$$

परंतु क्योंकि $2f_1 - f_0 - f_2 = 2 \times 150 - 180 - 120 = 0$,

इसलिए, इस विधि से M_o ज्ञात नहीं कर सकते। अतः हम निम्न सूत्र

$$Mo = l + \frac{|f_1 - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f_1 - f_2|} \times i$$

$$= 40 + \frac{(150 - 180)}{(150 - 180) + (180 - 120)} \times 5$$

$$= 40 + \frac{30}{30 + 60} \times 5$$

$$= 40 + \frac{5}{3}$$

$$= 40 + 1.67$$

$$= 41.67$$

$\therefore$ भूयिष्ठक आयु = 41.67 वर्ष

12.3.4 आनुभविक विधि (Empirical Method)

एक सममित बंटन (जैसे कि खंड 12.3.3 में लिया गया बंटन) में, समांतर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक के

मान संपाती होते हैं। आप इसका सत्यापन कर सकते हैं। परंतु, ऐसे बंटन की स्थिति में, जो सममित न हो, (अर्थात् जहाँ केन्द्रीय वर्ग से बराबर दूरी के वर्गों की आवृत्तियां समान न हो) दो सम्भावनाएं होती हैं :

1 निम्नतर वर्गों में, मदों का अधिकतर संकेन्द्रण हो, ऐसे बंटन को धनात्मक वैषम्य वाला बंटन कहते हैं। जैसा कि चित्र 12.1 में दिखाया गया है, इस प्रकार के बंटन का पुच्छ भाग अधिक लम्बा और दाईं ओर स्थित होता है। इस प्रकार के बंटन में, समांतर माध्य का अधिकतम होता है। भूयिष्ठक का मान न्यूनतम होता है और माध्यिका, समांतर माध्य और भूयिष्ठक के बीच स्थित होती है। माध्य और माध्यिका के बीच दूरी, माध्य और भूयिष्ठक के बीच दूरी का, लगभग एक तिहाई भाग होती है।

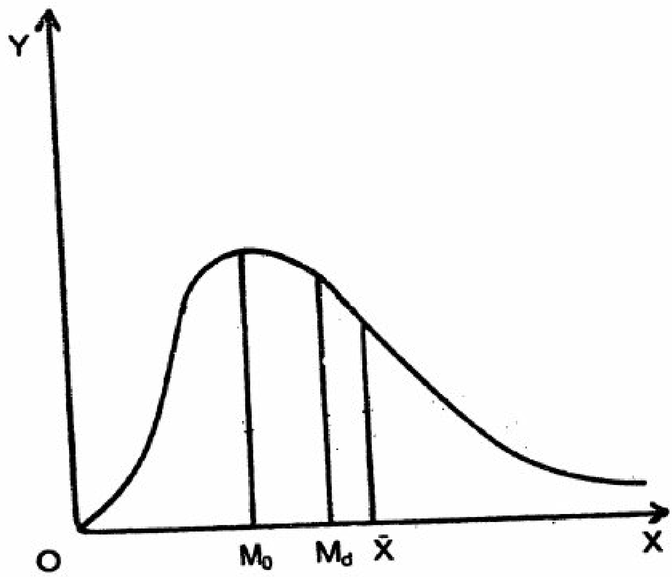


Figure 12.1 Positively Skewed Distribution

चित्र 12.1

2 उच्चतर वर्गों में, मदों का अधिकतर संकेन्द्रण हो सकता है, ऐसे बंटन तो ऋणात्मक वैषम्य वाला बंटन कहते हैं। चित्र 12.2 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए। ध्यान दीजिए कि इस प्रकार के बंटन में, पुच्छ भाग, अधिक लम्बा और बाईं ओर स्थित होता है। यहां समांतर माध्य न्यूनतम होगा और भूयिष्ठक उच्चतम होगा और माध्यिका, माध्य से भूयिष्ठक की ओर, लगभग इस दूरी के एक तिहाई दूरी पर स्थित होगी।

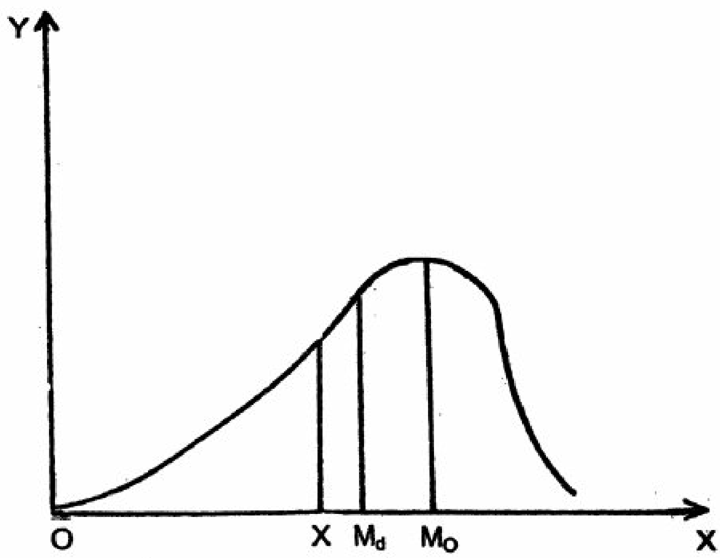


Figure 12.2 Negatively Skewed Distribution

उपरोक्त इन दो स्थितियों में, माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक में संबंध, काल पियरसन द्वारा, निम्न सूत्र के प्रयोग से स्थापित किया गया है :

माध्य - भूयिष्ठक = 3 (माध्य - माध्यिका)

इससे प्राप्त होता है :

भूयिष्ठक = माध्य – 3 (माध्य - माध्यिका)

अथवा = 3 माध्यिका – 2 माध्य

$$M_o = 3M_d - 2\bar{x}$$

यह एक आनुभविक संबंध सूत्र है क्योंकि प्रायः सभी समान्य वैषम्य वाले समकों में, इसको सत्य पाया गया है। हो सकता है कि अन्य स्थितियों में यह सत्य न हो। इसके गणितीय उपपत्ति सम्भव नही है। इस परिस्थिति में, जब कि भूयिष्ठक स्पष्टतः परिभाषित नही है, उपरोक्त आनुभविक सूत्र के प्रयोग से, इसका मान प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण 5

निम्न सारणी से बहुलक ज्ञात कीजिए :

मदों का नाम	आवृत्ति
40 — 49	7
50 — 59	9
60 — 69	10
70 — 79	6
80 — 89	13
90 — 99	10
100 — 109	12
110 — 119	7

हल :

निरीक्षण द्वारा, भूयिष्ठक वर्ग स्पष्ट नही होता। अतः समूहन और विश्लेषण का प्रयोग करेंगे।

समूहन सारणी

मदों का मान	स्तम्भ 1	2	3	4	5	6
40 — 49	7		×		×	×
50 — 59	9	16				×
60 — 69	10		19	26	25	
70 — 79	6	16				29
80 — 89	13		19			
90 — 99	10	23		29		
100 — 109	12		22	×	35	
110 — 119	7	19	×	×	×	29

विश्लेषण सारणी

स्तम्भ संख्या	60 - 69	70 - 79	80 - 89	90 - 99	100 - 109	110 - 119
1			I			
2			I	I		
3				I	I	
4		I	I	I		
5			I	I	I	
6	I	I	I	I	I	I
जोड़	1	2	5	5	3	1

विश्लेषण सारणी में, अधिकतम जोड़, 5, दो बार आता है। अतः भूयिष्ठक सुपरिभाषित नहीं है। अतः इसके मान का निर्धारण, आनुभाविक सूत्र $M_o = 3M_d - 2\bar{x}$ के प्रयोग से करेंगे।

आप स्वयं यह जांच कर सकते हैं कि इस बंटन के लिए, माध्यिका = 83.84, और $\bar{x}$ = 80.14

$$\therefore M_o = 3 \times (83.84) - 2 \times (80.14)$$

$$= 251.52 - 160.28$$

$$= 91.24$$

अतः भूयिष्ठक = 91.24

बोध प्रश्न क

1 भूयिष्ठक की परिभाषा लिखिए।

....

....

....

2 भूयिष्ठक परिकलन के लिए विभिन्न सूत्र लिखिए।

....

....

....

3 समांतर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक में, आनुभाविक संबंध क्या है?

....

....

....

4 एक आवृत्ति बंटन के लिए, माध्य 26.8 है, और माध्यिका 27.9 है। भूयिष्ठक का

....

....

....

5 बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य है, या असत्य ?

i) प्रत्येक बंटन के लिए, भूयिष्ठक एक अद्वितीय मान होता है।

ii) भूयिष्ठक की परिकलन प्रक्रिया, बंटन के चरम मानों की अपेक्षा करती है।

iii) किसी भी समंक समूह का भूयिष्ठक उसके समांतर माध्य से अधिक नही हो सकता।

iv) भूयिष्ठक सदैव सर्वाधिक आवृत्ति वाले वर्ग में पाया जाता है।

v) यद्यपि समंकों से, उनके भूयिष्ठक को परिकलित कर सकते हैं, तथापि भूयिष्ठक एक गणितीय माध्य नही है।

6 रिक्त स्थानों को भरिए।

i) यदि उद्देश्य, ...संकेन्द्रण का बिंदु ज्ञात करना हो, तो भूयिष्ठक अधिमानी होता है।

ii) भूयिष्ठक और माध्यिका .... माध्य है।

iii) निम्न श्रेणी में दो भूयिष्ठक हैं।

1, 2, 1, 2, 3, 2, 0, 1, वे हैं, ...और ....

iv) किसी श्रेणी में, जब दो या दो से अधिक समीपवर्ती वर्गों में प्रायः समान संकेन्द्रण पाया जाए, तो भूयिष्ठक ज्ञात करने के लिए, हम ....और ....सारणियां बनाते हैं।

v) यदि $2f_1 - f_0 - f_2$ शून्य हो, तो भूयिष्ठक, सूत्र .... द्वारा ज्ञात करते हैं।

vi) निम्न आकड़ों का अध्ययन कीजिए :

x :	0 - 10	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
y :	2	8	12	18	12	5	3

यहाँ भूयिष्ठक .... और .... का, साधारण माध्य है।

vii) निम्न आंकड़ों का अध्ययन कीजिए :

x :	10 - 20	20 - 30	30 - 40	40 - 50	50 - 60	60 - 70
y :	100	125	220	228	222	150

इस स्थिति में, भूयिष्ठक, भूयिष्ठक वर्ग की सीमाओं 40 और 50 का भारित माध्य होता है, जहाँ भार .... और ....है।

viii) यदि दिए गए समंक कुलक में, चर के दो मान, अन्य मानकों की अपेक्षा, अधिक बार आएं, तो बंटन को .... कहते हैं।

12.4 भूयिष्ठक का आलेखीय निर्धारण

आपने भूयिष्ठक परिकलन की विभिन्न विधियों का अध्ययन किया है। वस्तुतः माध्यिका के सदृश, भूयिष्ठक का निर्धारण भी, रेखाचित्र (आलेख) द्वारा कर सकते हैं। रेखाचित्र द्वारा, भूयिष्ठक निर्धारण की प्रक्रिया इस प्रकार है :

1 दिए गए आवृत्ति बंटन के लिए एक आयत चित्र की संरचना कीजिए। केवल तीन वर्गों-पूर्व भूयिष्ठक, भूयिष्ठक और अनुभूयिष्ठक के प्रयोग से, एक आंशिक आयत चित्र भी बना सकते हो। आयत चित्र के बारे में, आप इकाई 9 में पढ़ चुके हैं।

2 सर्वाधिक ऊँचाई वाले आयत (भूयिष्ठक वर्ग आयत) और उसके पूर्ववर्ती आयत के शिखरों के दाएं कोनों को, एक सरल रेखा द्वारा मिलाइए। इसी प्रकार, सर्वाधिक ऊँचाई वाले आयत और उसके अनुवर्ती आयत के शिखरों के बाएं कोनों को एक सरल रेखा द्वारा मिलाइए।

3 इन दो रेखाओं के प्रतिच्छेद बिंदु से, x– अक्ष पर एक लम्ब खींचिए।

4 वह बिंदु जहां यह (लम्ब), x–अक्ष को मिलाता है, भूयिष्ठक का मान प्रकट करता है। आइये, एक उदाहरण द्वारा, इस प्रक्रिया को स्पष्ट रूप से समझें।

उदाहरण 6

निम्न आंकड़ों का, भूयिष्ठक लेखाचित्र द्वारा ज्ञात कीजिए। परिणाम को परिकलन द्वारा जांच भी कीजिए।

वर्ग अंतराल :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
आवृत्ति :	4	18	30	42	24	10	3

हल :

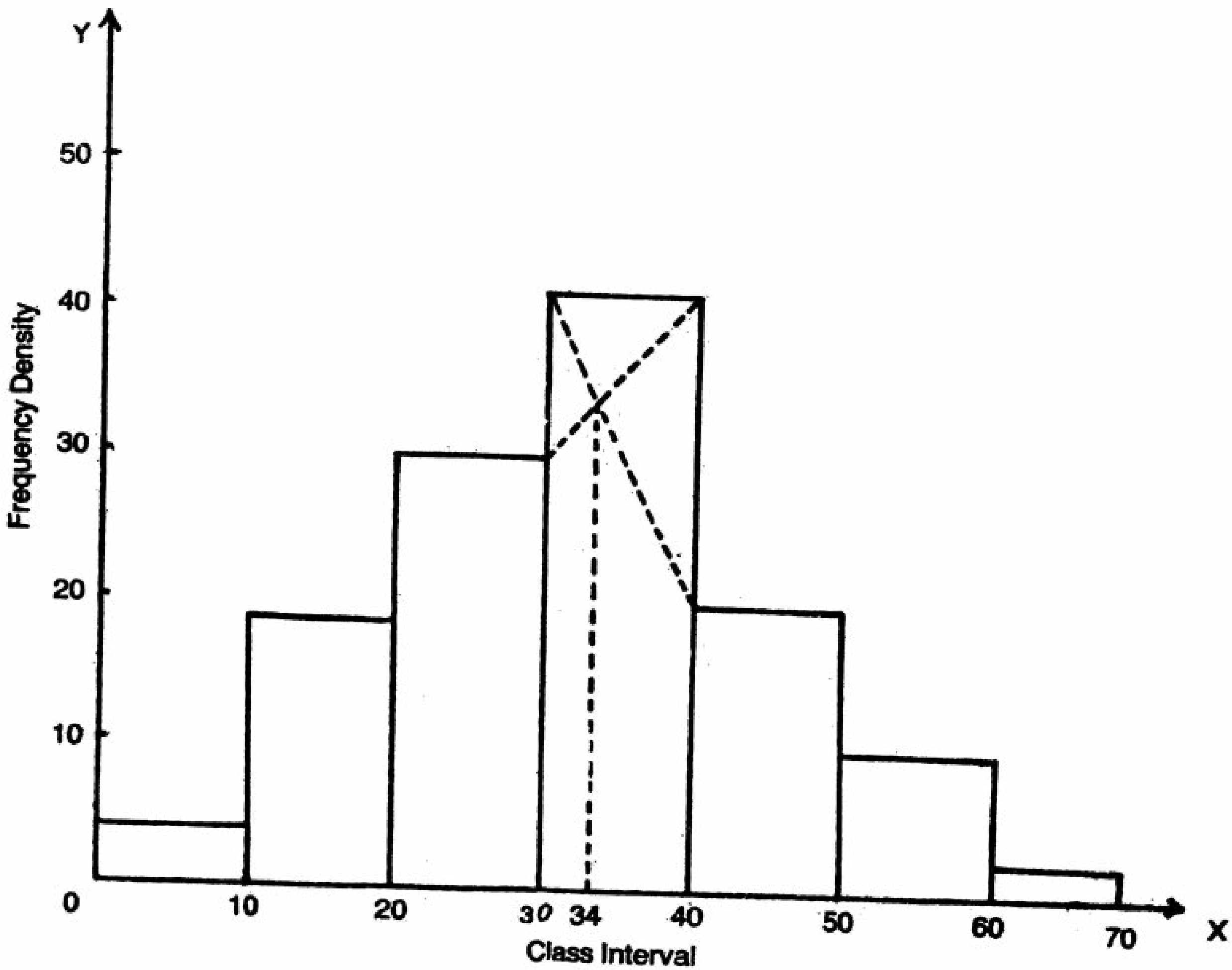


Figure 12.3. Histogram and Class Interval Determination of Mode

चित्र 12.3

सामान्य सूत्र: $Mo = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0\ f_2} \times i$, के प्रयोग से

$$= 30 + \frac{42 - 30}{84 - 30 - 24} \times 10$$

$$= 30 + \frac{12}{30} \times 10$$

$$= 30 + 4$$

$$= 34$$

ध्यान दीजिए कि यहा प्राप्त भूयिष्ठक का मान, ठीक वही है जो लेखाचित्र द्वारा प्राप्त हुआ था। परंतु, यदि आप भूयिष्ठक का परिकलन, सूत्र $M_o = l + \frac{f_2}{f_0 + f_2} \times i$ के प्रयोग से करें, तो परिणाम, रेखांचित्र द्वारा प्राप्त

परिणाम के समान नहीं होगा। रेखाचित्रीय विधि और f_0, f_1, f_2 से संबंध सूत्र, दोनों एक ही तर्क पर आधारित हैं। तर्क का विस्तार, इस पाठ्यक्रम के विषय क्षेत्र से बाहर है।

भूयिष्ठक निर्धारण के लिए लेखाचित्रीय विधि की एक सीमा है। जब भूयिष्ठक वर्ग, अधिकतम आवृत्ति वाले वर्ग के पास का हो, तो भूयिष्ठक वर्ग में, भूयिष्ठक का निर्धारण, लेखाचित्र द्वारा नहीं कर सकते, इसे, केवल अधिकतम आवृत्ति वर्ग में ही निर्धारित कर सकते हैं। इस प्रकार, रेखाचित्र द्वारा निर्धारित भूयिष्ठक यथार्थ भूयिष्ठक नहीं होगा। इसे समझने के लिए, **आइये पूर्व-चर्चित उदाहरण 3 के समंकों के लिए, रेखाचित्र द्वारा भूयिष्ठक ज्ञात करें।** यहां वर्ग अंतराल, समावेशी प्रकार के हैं। अतः आयत-चित्र की संरचना से पूर्व, वर्ग-अंतरालों को, यथार्थ सीमाओं के वर्ग अंतरालों में परिवर्तित करना होगा। आइये, अब चित्र 12.4 को ध्यानपूर्वक देखें :

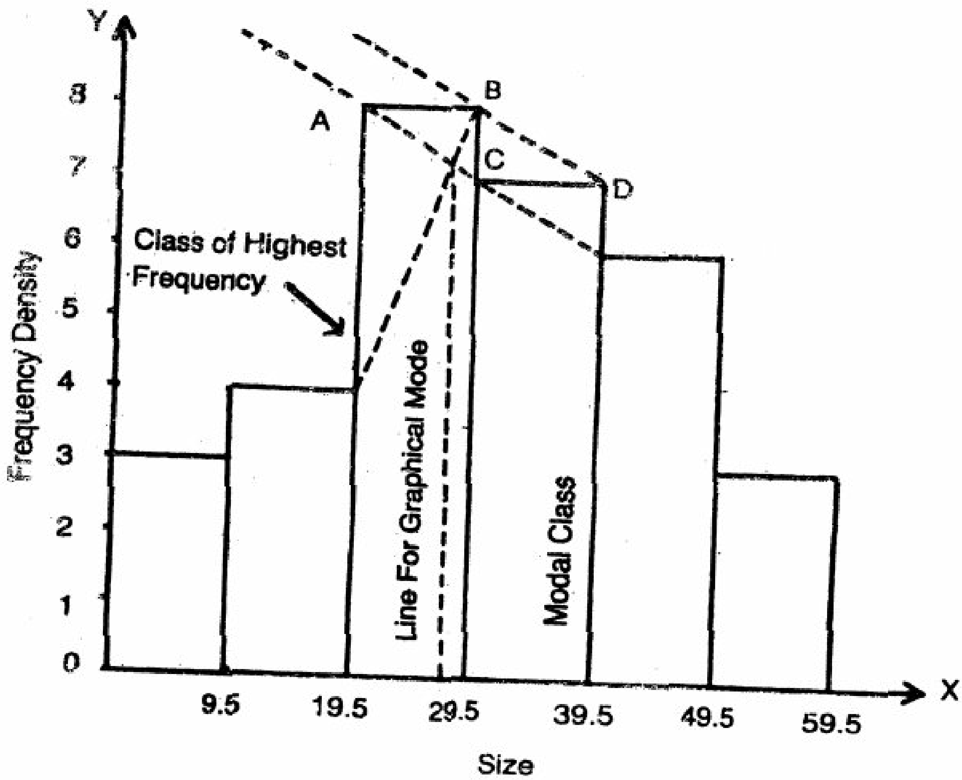


Figure 12.4. Histogram and Calculation of Mode

चित्र 12.4

आप देख सकते हैं कि भूयिष्ठक का रेखाचित्रीय मान, वर्ग 19.5 – 24.5 से प्राप्त कर सकते हैं। यह मान 27.5 प्राप्त होता है। यह, पहले प्राप्त किए गए मान 33.8 से भिन्न है। यदि आप, भूयिष्ठक वर्ग में भूयिष्ठक निर्धारित करने का प्रयत्न करें, तो आपको बिंदु A को बिंदु C से, और बिंदु B को बिंदु D से मिलाना होगा। परंतु ये दो रेखाएं AC और BD भूयिष्ठक वर्ग से, प्रतिच्छेद नहीं करती। अतः रेखाचित्रीय विधि द्वारा भूयिष्ठक वर्ग में, भूयिष्ठक निर्धारित नहीं कर सकते।

यदि भूयिष्ठक वर्ग और अधिकतम आवृत्ति के वर्ग पास के न हों, परंतु उनके बीच, दो या तीन अन्य वर्ग हों, तो इन दोनों ही वर्गों में रेखाचित्र द्वारा भूयिष्ठक ज्ञात कर सकते हैं। इन दो भूयिष्ठकों में प्रथम वरीयता के भूयिष्ठक का निर्णय, प्रतिच्छेद बिंदु से x-अक्ष पर खींचे गए लम्ब की ऊँचाई को देखकर कर सकते हैं। ऐसे बंटन को द्वि-भूयिष्ठक बंटन कहते है। आइये, इसकी व्याख्या के लिए, एक उदाहरण पर विचार करें।

उदाहरण 7

निम्न बंटन में, एक कम्पनी के 100 कर्मचारियों द्वारा, एक मास में, किए गए अतिरिक्त समय काम' का वर्णन है। रेखाचित्र द्वारा भूयिष्ठक निर्धारित कीजिए।

अतिरिक्त समय (घंटों में) :	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18	18 – 20	20 – 22
कर्मचारियों की संख्या :	3	5	16	21	17	6
अतिरिक्त समय (घंटों में) :	22 – 24	24 – 26	26 – 28	28 – 30		
कर्मचारियों की संख्या :	4	23	3	2		

हल :

समूहन और विश्लेषण सारणियां बनाकर आप सरलतापूर्वक सत्यापन कर सकते हो कि भूयिष्ठक वर्ग 16 – 18 है । परंतु, अधिकतम आवृत्ति वाला वर्ग 24 – 26 है ; जो कि भूयिष्ठक वर्ग से तीन वर्गों की दूरी पर स्थित है। अब आयत-चित्र और भूयिष्ठक के रेखाचित्रीय निर्धारण के लिए चित्र 12.5 को देखिए।

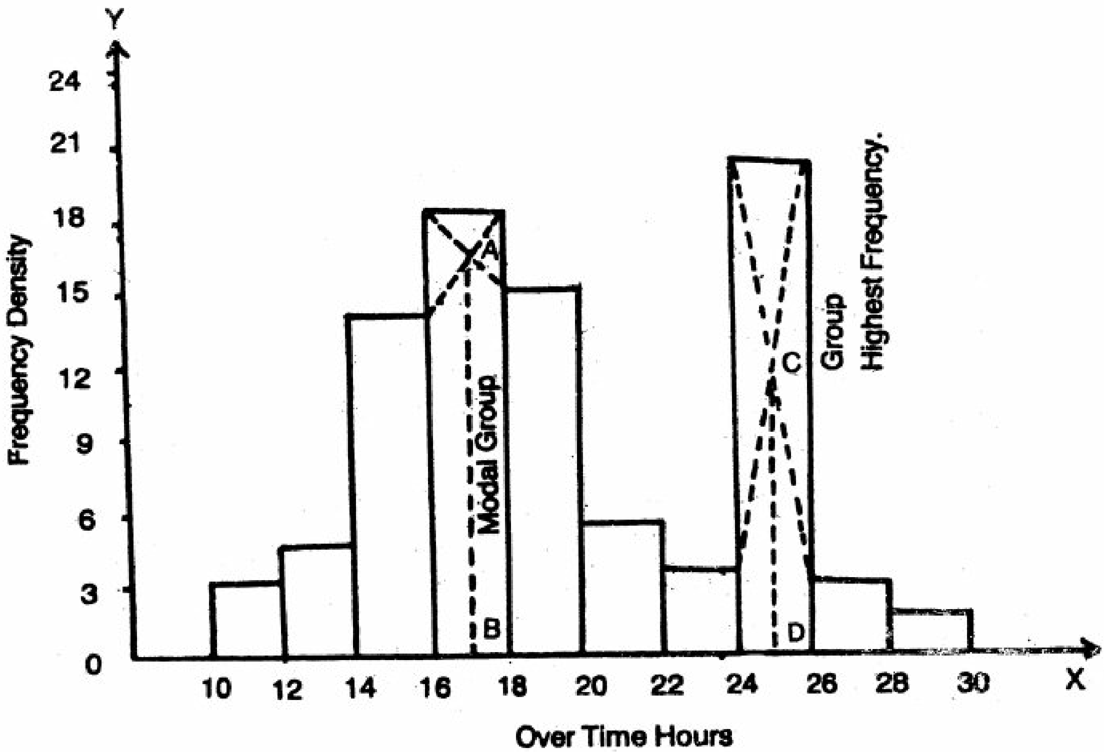


Figure 12.5. Histogram and Calculation of Mode

चित्र 12.5

भूयिष्ठक वर्ग में, बिंदु B, एक भूयिष्ठक प्रदान करता है। इसका मान लगभग 16.9 है। अधिकतम आवृत्ति वर्ग में, बिंदु D, दूसरा भूयिष्ठक प्रदान करता है। इसका मान लगभग 25.1 है। रेखाखंडों AB और CD की लम्बाइयां, क्रमशः बिंदुओं B और D पर, मदों के संक्रेद्रण की मात्रा को प्रकट करती हैं। क्योंकि AB की लम्बाई, CD की लम्बाई से अधिक है। इसलिए B पर, भूयिष्ठक D की तुलना में, मदों के संकेन्द्रण की मात्रा अधिक है । इस प्रकार, बिंदु B का मान (अर्थात् 16.9) प्रथम वरीयता का भूयिष्ठक है, और बिंदु D का मान (अर्थात् 25.1) द्वितीय वरीयता का भूयिष्ठक है। परिकलन विधि द्वारा भी, दोनों वर्गों में से प्रत्येक में, भूयिष्ठक निर्धारित कर सकते हैं। इस प्रकार प्राप्त मान, प्रायः वही होंगे जो रेखाचित्र द्वारा प्राप्त किए गए हैं। जैसा कि पहले बताया गया था, ऐसे बंटन को द्वि-भूयिष्ठक बंटन कहते हैं। किंतु, एक आदर्श द्वि-भूयिष्ठक बंटन उसे कहते हैं, जिसमें, दोनों भूयिष्ठकों पर, मदों का संकेन्द्रण यथार्थतः समान हो।

12.5 भूयिष्ठक के गुण और परिसीमाएं

गुण

1 कुछ परिथितियों में, भूयिष्ठक एकमात्र उपयुक्त माध्य है, जैसे, गारमेंटस् का भूयिष्ठक आमाप, जूतों का भूयिष्ठक आमाप, भूयिष्ठक मज़दूरी, बैंक के जमाकर्त्ता खातों में भूयिष्ठक शेष जमा राशि, इत्यादि ।

2 यह गुणात्मक घटनाओं का वर्णन करने के लिए प्रयुक्त होता है। उदाहरण के लिए, कल्पना कीजिए कि एक प्रिटिंग प्रेस, पांच छाप निकालता है, जिनका मूल्यांकन हम इस प्रकार करते हैं : अधिक तीव्र, तीव्र, तीव्र, अस्पष्ट और तीव्र; तो भूयिष्ठक मान होगा, तीव्र।

3 उपभोक्ता-उत्पाद की वरीयता के लिए, भूयिष्ठक वरीयता ही, मानी जाती है (स्वीकार की जाती है)। एक रेस्तरां का मालिक, जिसने एक मिठाई में विशेषज्ञता प्राप्त की है, अपने समान्य ग्राहकों की बहुलक वरीयता जानना चाह सकता है।

4 एक वैषम्य युक्त बंटन की स्थिति में, भूयिष्ठक अधिकतम संकेन्द्रण बिंदु का संकेतक होता है।

5 बाजार अनुसंधान में, इसका प्रयोग बड़ा ही लाभप्रद है।

6 यदि एक या एक से अधिक वर्ग विवृत-मुखी हों, तो भी भूयिष्ठक का प्रयोग कर सकते हैं।

परिसीमाएं

1 बहुधा, बंटन के लिए, कोई भूयिष्ठक मान विद्यमान ही नहीं होता। और जब एक से अधिक भूयिष्ठक होते हैं, तो यह एक निरर्थक माप सिद्ध होता है।

2 यह उच्चतर बीजगणितीय प्रतिपादन के अयोग्य है।

3 यह एक कुपरिभाषित माप है। अतः विभिन्न सूत्रों के प्रयोग से, कुछ भिन्न परिणाम ही प्राप्त होते हैं।

4 यह समंकों के, सभी मद्दों पर आधारित नहीं होता।

5 वर्ग अंतरालों के आमाप का, भूयिष्ठक के मान पर, सार्थक रूप से प्रभाव पड़ता है।

6 यद्यपि भूयिष्ठक चर का वह मान होता है, जो सर्वाधिक बार उपस्थित होता है, परंतु इसकी आवृत्ति, कुल आवृत्तियों के अधिकांश को निरुपित नहीं करती।

बोध प्रश्न ख

1 अवर्गीकृत आंकड़ों की अपेक्षा, वर्गीकृत आंकड़ों से, भूयिष्ठक परिकलित करना, प्रायः क्यों श्रेष्ठतर होता है ?

क) अवर्गीकृत आंकड़ों की द्विभूयिष्ठक होने की प्रवृत्ति होती है।

ख) वर्गीकृत आंकड़ों का बंटन की विषमता से अप्रभावित रहता है।

ग) वर्गीकृत समंकों के भूयिष्ठक पर चरम मानों का कम प्रभाव होता है।

घ) एक अप्रतिनिधि मान के, भूयिष्ठक रूप में चुने जाने का संयोग कम हो जाता है।

2 निम्न स्थितियों में से किस स्थिति में भूयिष्ठक केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक संकेतक के रूप में, सर्वाधिक उपयोगी संकेतक होगा ?

क) समंक कुलक में, प्रत्येक मान, एक और केवल एक बार उपस्थित होता है।

ख) समंक कुलक में, तीन मान, प्रत्येक 100 बार, आते हैं, और उनके अतिरिक्त सभी मान केवल एक बार आते हैं।

ग) समंक कुलक का प्रत्येक मान 100 बार आता है।

घ) समंक कुलक में, प्रत्येक प्रेक्षण का वही (चर) मान है।

3 जब घंटाकार बंटन सममित हो और उसका एक ही भूयिष्ठक हो, तो वक्र पर उच्चतम बिंदु को कहते हैं :

क) प्रसार, (ख) भूयिष्ठक, (ग) माध्यिका, (घ) माध्य, (च) इनमें से सभी (छ) ख, ग, और घ, परंतु क नहीं ।

4 बताइए कि निम्नलिखित कथन, सत्य है या असत्य।

i) भूयिष्ठक ज्ञात करने के लिए, रेखाचित्रीय विधि और परिकलन विधियाँ समयिक मान प्रदान करती है।

ii) क्योंकि भूयिष्ठक समंकों से परिकलित किया जा सकता है, अतः यह बीजगणितीय प्रतिपादक के योग्य है।

iii) कभी-कभी भूयिष्ठक का उपयोग, गुणात्मक घटनाओं को वर्णन करने के लिए कर सकते है।

iv) समंकों की सममिति की जांच करने में, भूमिष्ठक एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।

v) यदि भूयिष्ठक का परिकलन संभव न हो, तो आप इसे रेखाचित्रीय विधि द्वारा भी प्राप्त नहीं कर सकते।

5 रिक्त स्थानों को भरिए :

i) यदि एक सामान्य रूप से विषमित श्रेणी के समांतर माध्य और माध्यिका, क्रमशः 26.2 और 27.9 हो, तो सर्वाधिक प्रसभाव्य भूमिष्ठक .... होगा।

ii) भूयिष्ठक का लगभग मान 52 है, जबकि समांतर माध्य 58 है, और माध्यिका। .... है।

iii) यदि समंक कुलक का एक ही भूयिष्ठक हो, और यह माध्य से छोटा हो, तो यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि आंकड़ों का आवृत्ति वक्र ....ओर को वैषम्य युक्त है।

iv) सामान्य रूप से वैषम्य युक्त बंटन के लिए आनुभाविक संबंध का सूत्र ....

v) भूयिष्ठक के रेखाचित्रीय निर्धारण के लिए एक .... की संरचना करते है, और, ... आयात और दो .... आयतों का प्रयोग करते हैं।

vi) उपभोक्ता उत्पाद की वरीयता के लिए .... वरीयता पर विचार करते है।

vii) भूयिष्ठक प्रतिचयन .... से प्रभावित होता है।

12.6 कुछ उदाहरण

उदाहरण 8

यदि भूयिष्ठक 15.3 हो और माध्यिका 14.2 हो, तो समांतर माध्य का मान आकलित कीजिए।

हल :

समांतर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक में, आनुभविक संबंध है :

$M_o = 3M_d - 2\bar{x}$

M_o और M_d के मान प्रतिस्थापित करने पर,

$$15.3 = 3 \times 14.2 - 2\bar{x}$$

या $2\bar{x} = 42.6 - 15.3$

या $2\bar{x} = 27.3$

$\therefore$ $\bar{x} = 13.65$

उदाहरण 9

M_o, M_d और $\bar{x}$ में, आनुभविक संबंध की सहायता से, दिखाइए कि

1 $M_d = M_0 + \frac{2}{3}(\bar{x} - M_o)$

2 $\bar{x} = M_d + \frac{1}{2}(Md - M_o)$

हल :
समान्तर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक में आनुभविक संबंध है :

$$M_o = 3M_d - 2\,\bar{x}$$

1 $M_o = 3M_d - 2\bar{x}$

$\therefore \quad M_o + 2\,\bar{x} = 3M_d$

या $\frac{1}{3}\left(M_0 + 2\,\bar{x}\right) = M_d$

या $M_d = \frac{1}{3}M_o + \frac{2}{3}\,\bar{x}.$

$= M_o - \frac{2}{3}M_o + \frac{2}{3}\,\bar{x}$

$= M_o + \frac{2}{3}\left(\bar{x} - M_o\right)$

$\therefore \quad M_d = M_o + \frac{2}{3}\left(\bar{x} - M_o\right)$

या माध्यिका = भूयिष्ठक + $\frac{2}{3}$ (माध्य-भूयिष्टक)

2 $M_t = 3M_d - 2\,\bar{x}$

$\therefore \quad 2\,\bar{x} = 3M_d - M_o$

$\bar{x} = \frac{3}{2}M_d - \frac{1}{2}M_o$

$= M_d + \frac{1}{2}M_d - \frac{1}{2}M_o$

$= M_d + \frac{1}{2}(M_d - M_o)$

अतः माध्य = माध्यिका + $\frac{1}{2}$ (माध्यिका - भूयिष्ठक)

उदाहरण 10
निम्न सारणी में, एक फर्म के कर्मचारियों की आयु (वर्षों में) दी गई है। भूयिष्ठक आयु 32 वर्ष है। छूटी हुई आवृत्ति ज्ञात कीजिए।

आयु (वर्षों में) :	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45
कर्मचारियों की संख्या :	5	–	18	9	6

हल :
मान लीजिए छूटी हुई आवृत्ति 'F' है। क्योंकि भूयिष्ठक 32 है, इसलिए भूयिष्ठक वर्ग, 30-35 है।

अब, $M_o = l + \frac{f_1 - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$

जहां $l = 30$, $f_0 = F$, $f_1 = 18$, $f_2 = 9$, $i = 5$ और $M_0 = 32$

इन मानों को प्रतिस्थापित करने पर

$$32 = 30 + \frac{18 - F}{2 \times 18 - F - 9} \times 5$$

या $2 = \frac{18 - F}{27 - F} \times 5$

या $54 - 2F = 90 - 5F$

या $3F = 36$

$\therefore F = 12$

अतः छूटी हुई आवृत्ति 12 है।

उदाहरण 11
निम्न आंकड़ों से, भूयिष्ठक परिकलित कीजिए :

लाभ (लाख रुपयों में)	0 – 5	5 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 50
कम्पनियों की संख्या :	4	6	15	18	20

हल :
यहां वर्ग अंतराल समान नहीं है। ऐसी स्थिति में दो विधियों का प्रयोग कर सकते हैं : (1) आंकड़ों को फिर से, समान वर्ग अंतरालों वाले बंटन के रूप में लिखिए, (2) आनुभविक संबंध का प्रयोग कीजिए।

1 पहले दो वर्गों को, मिलाने से, वर्ग अंतराल 0 – 10 प्राप्त करेंगे। अगले दो वर्ग अंतराल पहले ही, आमाप 10 के हैं। अंतिम वर्ग अंतराल आमाप 20 का है। इसे दो वर्ग अंतरालों, अर्थात् 20 – 40 और 40 – 50 में विभाजित कर सकते हैं। यह मान कर कि आवृत्तियां एक समान बंटी हुई हैं, इन दोनों वर्गों में से प्रत्येक की आवृत्ति 10 होगी। अतः दिए गए समंकों को फिर से निम्न रूप में लिख सकते हैं :

लाभ (लाखों में) :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50
कम्पनियों की संख्या :	10	15	18	10	10

स्पष्ट है कि भूयिष्ठक वर्ग, 20 – 30 है।

$$\text{अब भूयिष्ठक} = l + \frac{f_i - f_0}{2f_1 - f_0 - f_2} \times i$$

और के मान प्रतिस्थापित करने पर

$$M_o = 20 + \frac{18 - 15}{2 \times 18 - 15 - 10} \times 10$$

$$= 20 + \frac{3}{11} \times 10$$

$$= 20 + 2.7$$

$$= 22.7$$

अतः लाभ का भूयिष्ठक 22.7 लाख रु. है।

2 आप यह सत्यापन कर सकते हैं कि माध्य = 24.3 लाख रुपये और माध्यिका = 23.6 लाख रुपये।

अब भूयिष्ठक = 3 (माध्यिका) -2 (समांतर माध्य)

$$\text{भूयिष्ठक} = 3 \times 23.6 - 2 \times 24.3$$
$$= 70.8 - 48.6$$
$$= 22.2$$

अतः भूयिष्ठक लाभ 22.2 लाख रुपये है। ध्यान दीजिए कि इन दोनों विधियों द्वारा प्राप्त भूयिष्ठक के मान भिन्न हैं। जैसा कि आप जानते हो, यह इस कारण है, क्योंकि भूयिष्ठक दृढ़ता पूर्वक परिभाषित नहीं है।

उदाहरण 12
मान लीजिए आप एक परिवहन कम्पनी के मैनेजर हैं। आप कम्पनी के लिए, 100 टायर खरीदना चाहते हैं, जो A उत्पादक से या उत्पादक B से खरीदने हैं। दोनों प्रकार के टायरों का प्रति टायर मूल्य समान है। इन दो प्रकार के टायरों द्वारा जीवन काल में तय की गई औसत दूरी के बारे में निम्न सूचना उपलब्ध है।

उत्पादक	जीवन काल में तय की गई औसत दूरी	
	समांतर माध्य (कि.मी.)	भूयिष्ठक (कि.मी.)
A	35,000	32,000
B	32,000	35,000

1 आप कौन से प्रकार के टायर खरीदोगे ?

2 यदि आपको अपनी कार के लिए केवल एक टायर खरीदना हो, तो क्या आपका निर्णय वही होगा जो (1) में किया गया है ?

हल :

1 समांतर माध्य × (मदों की संख्या)

= मदों का कुल मान

अतः यदि आप उत्पादक A के टायर खरीदें, तो सभी 100 टायरों द्वारा तय की जाने वाली दूरी 100 × 35,000 = 35,00,000 कि.मी. होगी। परंतु यदि आप, उत्पादक B के टायर खरीदें तो सभी 100 टायरों द्वारा तय की जाने वाली दूरी 100 × 32,000 = 32,00,000 कि.मी. होगी।

2 जब आप केवल एक टायर खरीद रहे हों, तो यह आवश्यक नहीं कि खरीदा गया टायर समांतर माध्य के समान ही दूरी तय करेगा। इसके विपरीत, यह बहुत सम्भव है, कि टायर भूयिष्ठक के समान दूरी तय कर ले। क्योंकि भूयिष्ठक वह मान है जिसके निकट, मदों का अधिकतम संकेद्रण होता है। क्योंकि उत्पादक B के टायर की स्थिति में भूयिष्ठक अधिकतर है, इसलिए, प्रस्तुत स्थिति में आपके लिए उत्पादक B का टायर ही वरीय होगा।

ध्यान दीजिए कि जब आप एक बड़ी संख्या में टायर खरीदते हैं तो कुछ टायर, समांतर माध्य दूरी के बराबर दूरी तय कर सकेंगे, तो अन्य, उससे अधिक या कम। यदि टायरों का चयन यादृच्छिक रूप से किया जाए, तो चयन किये गए टायरों द्वारा तय की गई दूरियों का समांतर माध्य, उत्पादक द्वारा दावा किए गए समांतर माध्य दूरी के प्रायः समान होगा। अतः स्थिति (1) में, यह निर्धारित करने के लिए कि कौन से प्रकार के टायर की खरीद से अधिकतर सेवा प्राप्त होगी, समांतर माध्य का प्रयोग किया गया था।

12.7 सारांश

भूयिष्ठक चर का वह मान होता है, जिसके गिर्द अन्य मदें, सर्वाधिक तीव्रता से संकेन्द्रित होने का प्रयत्न करती है। अवर्गीकृत समंकों और वर्गीकृत समंकों, दोनो ही के लिए, इसका परिकलन किया जा सकता है। परंतु, अवर्गीकृत समंकों के लिए इसका उपयोग सीमित है। असतत बंटन के लिए, भूयिष्ठक चर का वह मान होता है, जिसके गिर्द, मदें बडी तीव्रता से संकेन्द्रित हों। यदि अधिकतम आवृत्ति के वर्ग के समीप के दो या दो से अधिक वर्गों में, प्रायः मान संकेन्द्रण हो, तो भूयिष्ठक निर्धारित करना कठिन होता है। ऐसी स्थितियों में भूयिष्ठक वर्ग निर्धारित करने के लिए समूहन और विश्लेषण सारणियां बनाते हैं। सतत बंटन के लिए, भूयिष्ठक वर्ग निर्धारित करने के पश्चात् भूयिष्ठक का परिकलन, विभिन्न अंतर्वेशन सूत्रों द्वारा किया जाता है। ऐसे बंटन के लिए जहां आवृत्तियां एक-समान दर से वर्धमान या ह्रासमान हों, भूयिष्ठक को, सरल नियमों द्वारा प्राप्त किया जा सकता है। यहां यह, भूयिष्ठक वर्ग की सीमाओं का समांतर माध्य होता है या उनका एक भारित समातर माध्य। समान्य वैषम्य वाले बंटन के लिए, भूयिष्ठक एक आनुभविक सूत्र, $M_0 = 3M_d - 2\ \bar{x}$, द्वारा प्राप्त किया जाता है। भूयिष्ठक का निर्धारण, एक रेखाचित्र द्वारा भी किया जा सकता है। इसके लिए, आयत चित्र की संरचना की जाती हैं, और फिर, अधिकतम ऊँचाई की आयत और उसके समीप की दो आयतों का प्रयोग किया जाता है। भूयिष्ठक ऐसी परिस्थितियों में, जैसे जूतों का भूयिष्ठक आमाप, गार्मेंट्स का भूयिष्ठक आमाप, भूयिष्ठक मजदूरी, इत्यादि, ज्ञात करने में, बड़ा ही उपयोगी है। गुणात्मक घटनाओं के वर्णन के लिए भी इसका प्रयोग किया जाता है। उपभोक्ता उत्पादों के लिए, उपभोक्ताओं की भूयिष्ठक वरीयता को संकेतित करने के लिए भी इसका प्रयोग किया जाता है। भूयष्ठिक की कुछ परिसीमाएं भी हैं, जैसे उच्च बीजगणितीय प्रतिपादन के अयोग्य कुपरिभाषित प्रकृति, अस्तित्व न होना, एक से अधिक भूयिष्ठक का विद्यमान होना, इत्यादि।

12.8 शब्दावली और प्रतीक सूची

विश्लेषण सारणी : वह सारणी जो भूयिष्ठक वर्ग के निर्धारण में हमारी सहायता करती है और जो विभिन्न स्तम्भों में उपस्थित अधिकतम आवृत्ति को प्रदर्शित करती है।

द्वि-भूयिष्ठक बंटन : आंकड़ों का एक ऐसा आवृत्ति बंटन, जिसमें, दो मान, शेष मानों की अपेक्षा, अधिक बार आएं।

आनुभविक संबंध : वह संबंध, जो एक सामान्य वैषम्य वाले बंटन में, विभिन्न माध्यों में होता है, अर्थात् $M_0 = 3M_d - 2\,\bar{x}$

समूहन सारणी : छः स्तम्भों वाली वह सारणी जो भूयिष्ठक वर्ग के निर्धारण के लिए प्रयोग की जाती है।

बहुलक : चर का वह मान जिसके गिर्द अन्य मदें, सर्वाधिक तीव्रता से संकेन्द्रित होने का प्रयत्न करती हैं।

ऋणात्मक वैषम्य वाला बंटन : वह बंटन जिसमें, उच्चतर मानों में, मदों का अधिक संकेद्रण होता है और जिसका पुच्छ भाग अधिक लम्बा और बाईं ओर स्थित होता है।

धनात्मक वैषम्य वाला बंटन : वह बंटन जिसमें, निम्नतर मानों में, मदों का अधिक संकेन्द्रण होता है और जिसका पुच्छ भाग अधिक लम्बा और दाईं ओर स्थित होता है।

प्रतीक सूची (Symbols) :

इकाई 10 और 11 में दी गई प्रत्येक सूचियों के अतिरिक्त, नीचे भूयिष्ठक के संबंध में प्रयुक्त प्रतीकों की सूची दी गई है। यह सूची, इकाई 10 में दी गई सूची की परम्परा के अनुसार ही है।

1	भूयिष्ठक आवृत्ति और आगामी (उच्चतर मानों की ओर) आवृत्ति में अंतर	$f_1 - f_2, \Delta_2, d_2\,\Delta_2$ और d_2 सदैव धनात्मक लिए जाते हैं
2	भूयिष्ठक आवृत्ति और पूर्ववर्ती (निम्नतर मानों की ओर) आवृत्ति में अंतर	$f_1 - f_0,\ \Delta_1, d_1\,\Delta_1$ और d_1 सदैव धनात्मक लिए जाते हैं।
3	भूयिष्ठक वर्ग के अनुवर्ती वर्ग (उच्चतर मानों की ओर) की आवृत्ति	f_2
4	भूयिष्ठक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग (निम्नतर मानों की ओर) की आवृत्ति	f_0, f_1 (यदि भूयिष्ठक की आवृत्ति को f_1 से न सूचित किया गया हो)
5	भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति	$f_1, f_m, f_{mo}, f.$
6	भूयिष्ठक वर्ग की निम्न सीमा	l, l_1, L, L_{mo}
7	सीमा भूयिष्ठक	$M_o, Z,$
8	भूयिष्ठक वर्ग की उपरिसीमा	u, l_2, U, U_m, U_{mo}

12.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 4 30.1

5 (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) सत्य

6 (i) अधिकतम (ii) स्थैतिक (iii) 1, 2 (iv) समूहन, विश्लेषण

(v) $$M_o = l + \frac{|f_1 - f_0|}{|f_1 - f_0| + |f_1 - f_2|} \times i$$

या

$$M_o = l\frac{f_2}{f_1 - f_2} \times i$$

(vi) 30, 40

(vii) 220, 222 (viii) द्वि-भूयिष्ठक

ख 1 घ

2 ख

3 छ

4 (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) सत्य

5 (i) 30.1 (ii) 56 (iii) दाएं (iv) $3M_d - 2\bar{x}$

(v) आयत चित्र, अधिकतम, पास के (vi) भूयिष्ठक (vii) अस्थिरता।

12.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

प्रश्न

1 समान्तर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक, सभी समंकों के एक मुख्य विशिष्ठ गुण को निरूपित करने का प्रयत्न करते हैं, परंतु प्रत्येक अपने ढंग से। विवेचन कीजिए।

2 भूयिष्ठक किसे कहते हैं ? एक माध्य माप के रूप में, इसके गुणों (लाभों) और सीमाओं की व्याख्या कीजिए ।

अभ्यास

1 पहले प्रसव पर, विवाहित स्त्रियों की भूयिष्ठक आयु ज्ञात कीजिए :

आयु : (वर्षों में)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
संख्या : स्त्रियों की	37	162	343	390	256	433	261	355	65	85	49	49	40

(उत्तर : 18 वर्ष)

2 एक फैक्टरी में, मजदूरी बंटन के बारे में, निम्न सूचना से भूयिष्ठक मजदूरी निर्धारित कीजिए :

साप्ताहिक मजदूरी (रु.)	कर्मचारियों की संख्या
20 — 0	8
40 — 60	12
60 — 80	20
80 — 100	30
100 — 120	40
120 — 140	35
140 — 160	18
160 — 180	7
180 — 200	5

(उत्तर : रु. 113.33)

3 निम्न सूचना से, जूतों का भूयिष्ठक आमाप ज्ञात कीजिए :

जूतों का आमाप :	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आवृत्ति :	10	5	13	6	23	32	14	35	8	7

(उत्तर : 6)

4 निम्न सारणी में, गत मास में, अमर फारमेस्यूटिकल पर, की गई बिक्री मांगों की सापेक्ष आवृत्ति बंटन का वर्णन है। मांगों की भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए।

बिक्री मांगों की संख्या :	0	1	2	3	4	5 या अधिक
सापेक्ष आवृत्ति :	0.21	0.18	0.38	0.19	0.03	0.01

(उत्तर : 2 बिक्री मांगें)

5 निम्न समंकों के लिए भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए :

वर्ग :	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80
आवृत्ति :	24	42	56	66	108	130	154

(उत्तर : 71.34)

6 निम्न आंकड़ों से रेखाचित्रीय विधि द्वारा, सर्वाधिक सामान्य वेतन निर्धारित कीजिए। एक उपयुक्त सूत्र के प्रयोग से इस परिणाम की जांच कीजिए।

वेतन (से अधिक रु.) :	100	150	200	250	300	350	400	450
कर्मचारियों की संख्या :	100	98	93	83	43	23	12	5

(उत्तर : 280)

7 रेखाचित्र द्वारा भूयिष्ठक को निर्धारित कीजिए। भयिष्ठक परिकलन द्वारा भी ज्ञात कीजिए।

भार (कि. ग्रा. से कम) :	80	85	90	95	100	105	110	115	120	125
कर्मचारियों की संख्या :	0	5	13	30	55	75	85	93	120	125

(उत्तर : 98.1)

8 सामान्य सूत्रों का प्रयोग किए बिना, निम्न बंटनों के लिए भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए :

(i)

x :	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
f :	1	6	15	20	15	6	1

(ii)

x :	48 – 52	52 – 56	56 – 60	60 – 64	64 – 68	68 – 72	72 – 76
f :	4	8	16	18	15	4	2

(उत्तर : (i) 35, (ii) 61.93

9 यदि बंटन के लिए, समांतर माध्य 27.9 हो और भूयिष्ठक 25.2 हो, तो माध्यिका आकलित कीजिए। यदि कोई कल्पना की गई हो तो उन्हें लिखिए।

(उत्तर : 27)

10 निम्न बंटनों के लिए भूयिष्ठक मान ज्ञात कीजिए।

(i)

बालों का रंग :	ब्लैक	ब्रूनेट्टे	लैड	हैड ब्लांडे
आवृत्ति :	11	24	6	18

(ii)

रक्त वर्ग :	AB	0	A	B
आवृत्ति :	4	12	35	16

(उत्तर (क) ब्रूनेट्टे, (ख) A)

नोट : ये प्रश्न और अभ्यास, इकाई को श्रेष्ठतर समझने में आपकी सहायता करेंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। परंतु, अपने उत्तर विश्वविद्यालय को मत भेजिए। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं ।

इकाई 13 गुणोत्तर, हरात्मक और चल माध्य

इकाई की रूपरेखा

13.0 उद्देश्य
13.1 प्रस्तावना
13.2 गुणोत्तर माध्य
- 13.2.1 परिकलन
- 13.2.2 भारित गुणोत्तर माध्य
- 13.2.3 गुणोत्तर माध्य के विशेष गुण
- 13.2.4 उपयोग और परिसीमाएँ

13.3 हरात्मक माध्य
- 13.3.1 परिकलन
- 13.3.2 भारित हरात्मक माध्य
- 13.3.3 हरात्मक माध्य के विशेष गुण
- 13.3.4 उपयोग और परिसीमाएँ

13.4 हरात्मक माध्य तथा समांतर माध्य की तुलना
13.5 चल माध्य
- 13.5.1 चल माध्य किसे कहते हैं ?
- 13.5.2 परिकलन

13.6 एक उपयुक्त माध्य का चयन
13.7 सारांश
13.8 शब्दावली
13.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
13.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

13.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य को परिभाषित कर सकें और उनका परिकलन कर सकें
- गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य की विशेषताओं का वर्णन कर सकें
- गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य के उपयोगों और परिसीमाओं की व्याख्या कर सकें
- चल माध्य संकल्पना की व्याख्या कर सकेंगे
- काल श्रेणी की उपनति निर्धारित करने के लिये चल माध्य का प्रयोग कर सकें
- दी गई किसी परिस्थिति के लिए, उपयुक्त माध्य का चयन कर सकें।

13.1 प्रस्तावना

जैसा कि आप जानते हैं माध्य निम्न प्रकार के होते हैं, गणितीय माध्य, स्थैतिक माध्य और विशेष माध्य। आप पहले ही, समांतर माध्य का अध्ययन कर चुके हैं, जो कि एक गणितीय माध्य है, और माध्यिका तथा भूयिष्ठक का, जो स्थैतिक माध्यों के वर्ग के हैं। इस इकाई में, आप दो अन्य गणितीय माध्यों, अर्थात् गुणोत्तर माध्य (geometric mean), और हरात्मक माध्य (harmonicmean) के बारे में पढ़ेंगे। आप एक विशेष माध्य, अर्थात् चल माध्य (moving average) के बारे में भी पढ़ेंगे। दी गई परिस्थिति के लिए, एक ऐसे माध्य का चयन करना भी सीखेंगे जो सर्वाधिक उपयुक्त हो।

13.2 गुणोत्तर माध्य (Geometric Mean)

उन परिस्थितियों में, जहाँ हमें ऐसी राशियों से व्यवहार करना पड़े जो एक काल अवधि में परिवर्तनशील हों, हमारी अभिरुचि यह ज्ञात करने में हो सकती है, कि उस राशि की माध्य परिवर्तन दर क्या है ? ऐसी परिस्थितियों में सरल समांतर माध्य उपयुक्त नहीं होता और हमें गुणोत्तर माध्य की सहायता लेनी पड़ती है।

13.2.1 परिकलन

अन्य माध्यों की भांति, गुणोत्तर माध्य की प्रक्रिया भी, अवर्गीकृत समंकों और वर्गीकृत समंकों के लिए भिन्न होती है। आइये, इन विधियों का अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंक

यदि समंक श्रेणी में केवल दो मद हों, तो उन दो मदों के गुणनफल का वर्गमूल ही, उनका गुणोत्तर माध्य होता है। यदि तीन मद हों तो इन तीन मदों के गुणनफल का घनमूल, उनका गुणोत्तर माध्य होता है। यदि श्रेणी में, n मद हों तो इन n मदों के गुणनफल का n वाँ मूल, उनका गुणोत्तर माध्य होता है। आइये, इसे प्रतीकों में, बताएँ :

गुणोत्तर माध्य = $\sqrt[n]{x_1 . x_2 . x_3 . \ldots\ldots x_n}$ जहाँ $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_n$ श्रेणी के n मदों को सूचित करते हैं। उदाहरण के लिए, मान लीजिए, तीन संख्याएँ हैं, 4, 8, और 16, तो इन तीन संख्याओं का गुणोत्तर माध्य होगा :

$$\text{G.M.} = 3\sqrt{4 \times 8 \times 16}$$
$$= 3\sqrt{512}$$
$$= 8$$

इस प्रकार गुणोत्तर माध्य एक ऐसा माध्य है जो मदों के गुणनफल पर आधारित है। जब मदों की संख्या तीन या तीन से अधिक हो, तो उनका गुणनफल ज्ञात करना और उसका मूल निकालना कठिन हो जाता है। इसलिए, लघुगणकों के प्रयोग से, परिकलन गणनाओं को सरल कर सकते हैं। प्रक्रिया निम्नानुसार है :

1 चर के विभिन्न मानों के लघुगणक ज्ञात कीजिए और उनका योगफल लीजिए। $\Sigma \log x$.

2 इस योगफल को, मदों की संख्या, n द्वारा भाजित कीजिए, और इस प्रकार प्राप्त मान का प्रतिलघुगणक ज्ञात कीजिए। यह ही, दी गई संख्याओं को गुणोत्तर माध्य प्रदान करता है।

प्रतीकों में, इसे निम्नानुसार प्रकट करेंगे :

$$\log \text{G.M.} = \frac{1}{n} \log\ (x_1,\ x_2,\ x_3 \ldots\ldots\ldots + \log x_n)$$
$$= \frac{1}{n} [\log x_1 + \log x_2 + \ldots\ldots - \log x_n]$$
$$= \Sigma\ \frac{\log x}{n}$$
$$\therefore \text{G.M.} = \text{Anti log} \left(\frac{\Sigma \log x}{n}\right)$$

उदाहरण के लिए, चार संख्याओं, 20, 65, 83 और 138 के गुणोत्तर माध्य को इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

$$\text{G.M.} = \text{Anti log} \frac{\log 20 + \log 65 + \log 83 + \log 138}{4}$$
$$= \text{Anti log} \frac{1.3010 + 1.8129 + 1.9191 + 2.1303}{4}$$
$$= \text{Anti log. } 1.7908$$
$$= 61.77$$

उदाहरण 1

पूर्व वर्ष की तुलना में, 1987 में ऊपरी खर्च में, 32% की वृद्धि हुई, 1988 में 40% की और 1989 में 50% की। इन तीन वर्षों में, ऊपरी खर्च की माध्य वृद्धि दर को परिकलित कीजिए।

हल :

ऊपरि खर्च में वृद्धि, 1987, 1988 और 1989 में क्रमशः 32%, 40% और 50% हुई। इससे अभिप्राय है कि क्रमागत रूप में, ऊपरी खर्च, पूर्व वर्ष का 132% 140% और 150% हो जाता है। अतः तीन वर्षों के पश्चात्

अंतिम ऊपरि खर्च, मूल स्तर का $\frac{132 \times 140 \times 150}{100 \times 100}$

प्रतिशत होगा। क्योंकि ये संख्याएँ (ऊपरि खर्च) गुणात्मक प्रकृति की हैं, इसलिए, इनका माध्य, गुणोत्तर माध्य ही होगा।

$x_1 = 132, x_2 = 140, x_3 = 150$ n और = 3

अब $G.M. = \text{Anti log} \frac{\Sigma \log x}{n}$

$$= \text{Anti log} \left(\frac{\log 132 + \log 140 + \log 150}{3}\right)$$

$$= \text{Anti log} \left(\frac{2.1206 + 2.1461 + 2.1761}{3}\right)$$

$$= \text{Anti log} \frac{6.4428}{3}$$

$$= \text{Anit log } 2.1476$$

$$= 140.5$$

इस प्रकार, औसतन ऊपरि खर्चे, पूर्व वर्ष का 140.5% हो जाते हैं। अतः ऊपरि खर्च में माध्य वृद्धि दर 40.5% (140.5 – 100) है।

वर्गीकृत समंक

अवर्गीकृत समंकों के गुणोत्तर माध्य का परिकलन, कैसे करते हैं, यह आपने जान लिया है। अब हमें वर्गीकृत समंकों के लिए, प्रक्रिया की विवेचना करनी चाहिए। जैसा कि आप जानते हैं, वर्गीकृत समंक एक असतत् श्रेणी या सतत् श्रेणी के रूप में हो सकते हैं। इन दो प्रकार की श्रेणियों के लिए, हमें भिन्न प्रक्रियाएँ अपनानी होगीं।

असतत् श्रेणी : यदि समंक वर्गीकृत हों, अर्थात् एक आवृत्ति बंटन के रूप हों, तो गुणोत्तर माध्य का परिकलन निम्नानुसार करते हैं।

$$G.M. = \sqrt[n]{x_1^{f_1} \, x_2^{f_2} \, ... \, x_r^{f_r}}$$

जहाँ $x_1, x_2 .... x_r$ चर x के भिन्न मान हैं, और क्रमशः $f_1, f_2, ... f_r$, उनकी आवृतित्याँ हैं और $n = f_1 + f_2 + ... f_r = \Sigma f$

$$\log G.M. = \frac{1}{n} \quad [f_1 \log x_1 + f_2 \log x_2 + ... + f_r \log x_r]$$

$$= \frac{1}{n} \quad [\Sigma f \log x]$$

$$\therefore G.M. = \text{Anti log} \left(\frac{\Sigma f \log x}{n}\right)$$

सतत् श्रेणी : गुणोत्तर माध्य के उपरोक्त सूत्र में केवल इतना संशोधन करना होगा कि x के स्थान पर m लेंगे, जहाँ m, वर्ग के मध्य बिंदु (मान) को सूचित करता है।

यहाँ, $G.M. = \text{Anti log} \left(\frac{\Sigma f \log m}{n}\right)$

दोनों ही स्थितियों में जिस प्रक्रिया का अनुसरण करते हैं, वह निम्नानुसार है :

1 चर x के दिए गए मानों या, सतत् श्रेणी की स्थिति में, मध्य मानों (m) के लघुगणक मान ज्ञात कीजिए।

2 इन लघुगणक मानों को संगत आवृत्तियों द्वारा गुणा कीजिए, और इन गुणनफलों का योगफल $\Sigma f \log x$ या $\Sigma f \log m$, यथास्थिति, प्राप्त कीजिए।

3 इस योगफल को, कुल आवृत्ति $n = \Sigma f$ से भाजित कीजिए और इस प्रकार प्राप्त संख्या का प्रतिलघुगणक लीजिए।

उदाहरण 2

निम्न आंकड़ों के लिए, गुणोत्तर माध्य ज्ञात कीजिए।

मदों का मान	आवृत्ति
7.5 — 10.5	5
10.5 — 13.5	9
13.5 — 16.5	19
16.5 — 19.5	23
19.5 — 22.5	7
22.5 — 25.5	4
25.5 — 28.5	1

हल :

वर्ग अंतराल	मध्यबिंदु (m)	log (m)	f	f. log m
7.5 — 10.5	9	0.9542	5	4.7710
10.5 — 13.5	12	1.0792	9	9.7128
13.5 — 16.5	15	1.1761	19	22.3459
16.5 — 19.5	18	1.2553	23	28.8719
19.5 — 22.5	21	1.3222	7	9.2554
22.5 — 25.5	24	1.3802	4	5.5208
25.5 — 28.5	27	1.4314	1	1.4314
कुल			68	81.9092

$$\log G.M. = \frac{1}{n}\left[\Sigma f \log m\right]$$

$$= \frac{1}{68} \times 81.9092$$

$$= 1.2045$$

$$G.M. = \text{Anti log } 1.2045$$

$$= 16.02$$

औसत परिवर्तन दर के परिकलन के लिए गुणोत्तर माध्य का प्रयोग

अनेक बार हमारी अभिरुचि, किसी चर x के मान में, समयगत परिवर्तन का अध्ययन करने के लिए, उसकी औसत परिवर्तन दर प्रतिकाल इकाई ज्ञात करने में होती है। जैसे, जनसंख्या में वार्षिक वृद्धि दर, (किसी फर्म के) लाभ में औसत वार्षिक वृद्धि दर, इत्यादि। ऐसी दरों के परिकलन की प्रक्रिया, गुणोत्तर माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया के सदृश ही है।

एक दी गई श्रेणी के लिए, मान लीजिए, P_o चर का प्रारम्भिक मान (काल अवधि के आरम्भ का मान) और P_n चर का अंतिम मान (काल अवधि के अंत का मान) है। अब औसत वृद्धि दर (r) का परिकलन, जिस चक्रवृद्धि ब्याज के सूत्र के प्रयोग से करते हैं।

$$P_n = P_o (1 + r)^n$$

जहां n काल अवधियों की संख्या है।

$$\therefore (1 + r)^n = \frac{P_n}{P_o}$$

$$1 + r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}}$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}} - 1.$$

उदाहरण 3

एक देश की आबादी 1951 में 30 करोड़ थी। 1969 में, वह 52 करोड़ हो गई। प्रतिशत औसत वार्षिक वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

हल :

यहा $P_o = 30$, $P_n = 52$ और $n = 18$ मान लीजिए, r औसत वार्षिक वृद्धि दर है।

अब $1 + r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}}$

$$= \sqrt[18]{\frac{52}{30}}$$

लघुगणकों के प्रयोग से

$$\log (1 + r) = \frac{\log 52 - \log 30}{18}$$

$$(1 + r) = \text{Anti log}\left[\frac{2.7160 - 2.477}{18}\right]$$

$$= \text{Anti log}\left(\frac{0.2389}{18}\right)$$

$$= \text{Anti log } 0.0133$$

$$= 1.031$$

$$r = 1.031 - 1$$

$$= .031$$

अतः प्रतिशत औसत वार्षिक वृद्धि दर $= .031 \times 100\%$
$= 3.1\%$

13.2.2 भारित गुणोत्तर माध्य

भारित समांतर माध्य के सदृश हम भारित गुणोत्तर माध्य भी ज्ञात कर सकते हैं। परिकलन प्रक्रिया निम्नानुसार है :

$$\text{भारित गुणोत्तर माध्य} = \sqrt[\Sigma w]{x_1^{w_1}, x_2^{w_2}, \ldots\ldots\ldots x_n^{w_n}}$$

(WGM)

जहां $x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n$, चर के मान है, और $w_1, w_2 \ldots\ldots w_n$ संगत भार हैं।

लघुगणक लेने पर

$$\log WGM = \frac{W_1 \log x_1 + w_2 \log x_2 + \ldots\ldots\ldots w_n \log x_n}{\Sigma w}$$

या $\log WGM. = \frac{\Sigma w \log x}{\Sigma w}$

या $WGM = \text{Anti log}\left(\frac{\Sigma w \log x}{\Sigma w}\right)$

उदाहरण 4

निम्न सूचना से, भारित गुणोत्तर माध्य परिकलित कीजिए।

वर्ग	सूचकांक	भार
भोजन	300	40
ईंधन	200	10
कपड़ा	250	10
मकान किराया	150	15

हल :

वर्ग	सूचकांक (x)	भार (w)	log x	w. log x
भोजन	300	40	2.4771	99.084
ईंधन	200	10	2.3010	23.01
कपड़ा	250	10	2.3979	23.979
मकान किराया	150	15	2.1761	32.6415
		$\Sigma w = 75$		$\Sigma w \log x = 178.7145$

भारित गुणोत्तर माध्य $= \text{Anti log}\left[\frac{\Sigma w \log x}{\Sigma w}\right]$

(WGM)

$$= \text{Anti log}\left(\frac{178.7145}{75}\right)$$

$$= \text{Anti log } 2.3829$$

$$= 241.50$$

अतः दिए हुए सूचकांकों का भारित गुणोत्तर माध्य = 241.50

13.2.3 गुणोत्तर माध्य के विशेष गुण

गुणोत्तर माध्य के निम्न महत्वपूर्ण विशेष गुण (properties) हैं

1 एक दी गई श्रेणी में, यदि प्रत्येक मद के स्थान पर, श्रेणी का गुणोत्तर माध्य प्रतिस्थापित किया जाए तो मदों का गुणनफल अपरिवर्तित रहता है। उदाहरण के लिए, मदों 4.8, और 16 का गुणोत्तर माध्य 8 है, अतः

$4 \times 8 \times 16 = 8 \times 8 \times 8 = 512$

2 गुणोत्तर माध्य का मान स्वयं से, प्रेक्षणों के अनुपाती विचलनों को संतुलन प्रदान करता है। दूसरे शब्दों में, यदि a और b दो धन संख्याएँ हों तो उनका गुणोत्तर माध्य $G = \sqrt{ab}$, अब इससे, मदों के अनुपाती विचलनों a/G और G/b पर विचार कीजिए। स्पष्ट है कि :

$$\left(\frac{a}{G}\right). \left(\frac{b}{G}\right) = \frac{ab}{G^2} = 1$$

अर्थात् a/G और b/G संतुलित हैं, प्रत्येक, दूसरे के, व्युत्क्रम के समान है। उदाहरण के लिए, 4 और 16 का गुणोत्तर माध्य $\sqrt{4 \times 16} = 8$ है। अनुपात 4/8 और 16/8 का गुणनफल है या 4/8 और 8/16 बराबर हैं।

3 इसका बीजगणितीय प्रतिपादन किया जा सकता है। यदि दो या दो से अधिक समूहों के गुणोत्तर माध्य दिए गए हों, जो संयुक्त समूह का गुणोत्तर माध्य निम्नानुसार ज्ञात कर सकते हैं :

$$\text{संयुक्त G.M.} = \text{Anti log}\left[\frac{N_1 \log GM_1 + N_2 \log GM_2 + \ldots\ldots N_k \log GM}{N_1 + N_2 + \ldots\ldots N_k}\right]$$

जहां

GM_1 = पहले समूह का गुणोत्तर माध्य

GM_2 = दूसरे समूह का गुणोत्तर माध्य

GM_k = k वें समूह गुणोत्तर माध्य

उदाहरण के लिए, मान लीजिए एक समूह में 100 मदें है और उनका गुणोत्तर माध्य 50 है। और दूसरे समूह में 200 मदें हैं और उनका गुणोत्तर माध्य 40 है। तो दोनों समूहों का संयुक्त गुणोत्तर माध्य होगा :

$$\text{संयुक्त G.M.} = \text{Anti log}\left[\frac{100 \log 50 + 200 \log 40}{100 + 200}\right]$$

$$= \text{Anti log}\left[\frac{100 \times 1.6990 + 200 \times 1.6021}{300}\right]$$

$$= \text{Anti log}\,[1.6344]$$

$$= 43.09$$

4 समांतर माध्य की अपेक्षा, गुणोत्तर माध्य, बड़े मदों से कम प्रभावित होता है। कई बार, इसे शब्दों में इस प्रकार प्रकट करते हैं कि गुणोत्तर माध्य का छोटे मदों की ओर झुकाव होता है, जब कि समांतर माध्य का बड़े मदों की ओर झुकाव होता है। उदाहरण के लिए, पाँच मदों 2, 3, 5, 10 और 100 पर विचार कीजिए ।

$$\text{समांतर माध्य} = \frac{2 + 3 + 5 + 10 + 100}{5}$$

$$= 24.0$$

$$\text{गुणोत्तर माध्य} = \text{Anti log}\left[\frac{\log 2 + \log 3 + \log 5 + \log 10 + \log 100}{5}\right]$$

$$= \text{Anti log}\left[\frac{0.3010 + 0.4771 + 0.6990 + 1.0000 + 2.0000}{5}\right]$$

$$= \text{Anti log}\,[0.8954]$$

= 7.86 लगभग ।

ध्यान दीजिए कि समांतर माध्य 24 है, जो कि गुणोत्तर माध्य 7.86 से, पर्याप्त रूप में बड़ा है। अतः गुणोत्तर माध्य की अभिनति, छोटे मदों की ओर खींचे जाने की है, जब कि समांतर माध्य की अभिनति बड़े मदों की ओर खींचे जाने की है।

13.2.4 उपयोग और परिसीमाएँ

उपयोग

1 अनुपातों और प्रतिशतताओं के परिकलन के लिए, गुणोत्तर माध्य सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है।

2 क्योंकि गुणोत्तर माध्य का छोटे मानों की ओर झुकाव होता है, इसलिए यह विशेषकर ऐसी घटनाओं के लिए उपयोगी है, जहाँ निम्नतर मानों के लिए एक सीमा हो, परंतु उच्चतर मानों के लिए ऐसी कोई सीमा न हो। उदाहरण के लिए, मूल्य, शून्य से कम नहीं हो सकता।

3 सूचकांकों की संरचना में, गुणोत्तर माध्य को ही सर्वोत्तम माध्य माना जाता है। यह विशेष कर, फिशर के आदर्श सूत्र के विकास में प्रयुक्त होता है जो काल-विपर्यय परीक्षा (time reversal test) और तत्व विपर्यय परीक्षा (factor reversal test) दोनों को संतुष्ट करता है। इन संकल्पनाओं का अध्ययन, इस पाठ्यक्रम के विषय क्षेत्र से बाहर है।

4 जब छोटे मदों को बड़े भार और बड़े मदों को छोटे भार, निर्दिष्ट करना अभीष्ट हो तो समांतर माध्य की अपेक्षा, यह अधिक उपयुक्त माध्य है।

परिसीमाएँ

1 यदि श्रेणी का एक मद भी शून्य हो तो गुणोत्तर माध्य शून्य होता है। अतः उस स्थिति में, इसका परिकलन नहीं कर सकते। उदाहरण के लिए, तीन मदों 0, 10 और 100 का गुणोत्तर माध्य होगा

$$\sqrt[3]{0 \times 10 \times 100} = 0$$

2 यदि कोई मद ऋणात्मक हो तो गुणोत्तर माध्य का अस्तित्व नहीं होता।

3 परिकलन प्रक्रिया कठिन है, विशेष कर जब मद बहुत बड़े हों।

4 इसका छोटे मानों के लिए झुकाव. ऐसी परिस्थितियों में इसके प्रयोग में बाधा है, जहाँ असमानताओं को मुख्य रूप से दिखाना अभीष्ट हो जैसा कि आय बंटन की स्थिति में।

बोध प्रश्न क

1. NSC VI में लगाया गया धन, 6 वर्ष में दोगुना हो जाता है। प्रतिशत वार्षिक वृद्धि दर ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

2. एक परीक्षा में, 70 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंक (अधिकतम अंक 75 में से) नीचे दिए गए हैं। गुणोत्तर माध्य परिकलित कीजिए। और समांतर माध्य से इसकी तुलना कीजिए।

अंक :	5—15,	15—25,	25—35,	35—45,	45—55,	55—65
विद्यार्थियों की संख्या	12	15	25	10	6	2

....

....

....

3 एक द्रव्य के मूल्य में, 1978 - 1979 में 5% वृद्धि हुई, 1979-80 में, 8% वृद्धि हुई और 1980-81 में 77% वृद्धि हुई। 1978 से 1981 तक औसत वार्षिक वृद्धि 26% हुई बताते हैं, न कि 30%। इस कथन की जाँच कीजिए।

....

....

....

....

4. कल्पना की गई है कि एक मशीन के मान में पहले वर्ष 40% की कमी हुई, दूसरे में 25% की और आगामी तीन वर्षों में 10% वार्षिक की कमी हुई। प्रत्येक प्रतिशतता, ह्रासित मान पर परिकलित की गई है। इन पांच वर्षों के लिए औसत वार्षिक ह्रास दर क्या है?

....

....

....

....

5. बताइए कि निम्नलिखित कथन सत्य हैं, या असत्य ?

i) गुणोत्तर माध्य, n मदों के योगफल का n वां मूल होता है।

ii) गुणोत्तर माध्य, अनपातों और प्रतिशतताओं का माध्य ज्ञात करने की सर्वोत्तम विधि है।

iii) सभी प्रकार के समंकों के लिए, गुणोत्तर माध्य का परिकलन संभव है।

iv) भारित गुणोत्तर माध्य का मान, सरल गुणोत्तर माध्य के मान से सदैव बड़ा होता है।

v) जब बड़े मदों को अधिक महत्व देना हो, तो गुणोत्तर माध्य, ज्ञात करना, माध्य ज्ञात करने की एक अच्छी विधि नहीं है।

6 रिक्त स्थान को भरिए।

i) पदों 1,2,4 8, 16, 32, 64, 128, और 256 का गुणोत्तर माध्य है, ...

ii) यदि एक श्रेणी में 10 मदें हो तो उसका गुणोत्तर माध्य, इन मदों के गुणनफल का ....वाँ मूल होगा।

iii) G.N.P में औसत वृद्धि अनुपात का परिकलन करने के लिए, ..., एक अधिक उपयुक्त माप है।

iv) गुणोत्तर माध्य का झुकाव .... मानों की ओर होता है।

v) यदि एक दी गई श्रेणी का एक मद शून्य हो तो गुणोत्तर माध्य .... होगा।

vi) यदि एक द्रव्य का मूल्य 4 वर्ष में दो गुना हो जाए, तो औसत प्रतिशत वार्षिक वृद्धि दर .... होगी।

vii) एक फैक्टरी के उत्पादन में वार्षिक वृद्धि दर, पिछले 5 वर्षों में क्रमशः 5, 7·5, 2·5, 5 और 10 प्रतिशत है। तो इस काल अवधि में, माध्य वार्षिक चक्रवृद्धि दर .... है ?

13.3 हरात्मक माध्य (Harmonic Mean)

जैसा कि आप जानते हैं समंक प्रायः विभिन्न रूपों में होते हैं। दिए गए समंकों के लिए, केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों के प्रयोग की उपयुक्तता का निर्णय, बहुत अधिक इस बात पर निर्भर है कि समंक किस प्रकार से दिए गए हैं। उदाहरण के लिए, यदि कुल समय नियत हो और गति प्रति समय इकाई दी गई हो, तो औसत गति ज्ञात करने के लिए, हरात्मक माध्य, एक अधिक उपयुक्त माप है। मान लीजिए, समंक प्रति घंटे उत्पादित वस्तुओं के रूप में दिए हैं और हमारी अभिरुचि, औसत समय प्रति इकाई ज्ञात करने में है, तो हरात्मक माध्य ही उचित होगा।

13.3.1 परिकलन

हरात्मक माध्य परिकलन की विधियाँ, अवर्गीकृत समंकों और वर्गीकृत समंकों के लिए भिन्न है। आइये, इन विधियों का पृथक्-पृथक् अध्ययन करें।

अवर्गीकृत समंक

यदि $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ चर x के n मान हों तो उनके हरात्मक माध्य (HM) का परिकलन निम्नानुसार करते हैं :

$$\text{हरात्मक माध्य} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots\ldots + \frac{1}{x_n}} = \frac{n}{\Sigma \frac{1}{x}}$$

या $$\frac{1}{\text{हरात्मक माध्य}} = \frac{\Sigma \frac{1}{x}}{n}$$

उसे पुनः लिखते हुए

$$\text{H.M.} = \text{व्युत्क्रम}\left[\frac{\Sigma \frac{1}{x}}{n}\right]$$

व्युत्क्रम (n मानों $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ के व्युत्क्रमों का समांतर माध्य)

अतः **हरात्मक माध्य, व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है।**

उदाहरण के लिए, दो मानों 12 और 15 के हरात्मक माध्य को निम्नानुसार परिकलित करेंगे :

$$H.M. = \frac{2}{1/12 + 1/15}$$

$$= \frac{2}{\frac{5 + 4}{60}}$$

$$= \frac{120}{9}$$

$$= 13.34$$

उदाहरण 5

एक मोटरगाड़ी वाले ने तीन दिन, 480 कि·मी· प्रतिदिन, यात्रा की। उसने, पहले दिन 48 कि·मी· प्रतिघंटे की गति से 10 घंटे यात्रा की, दूसरे दिन, 40 कि·मी· प्रतिघंटे की गति से 12 घंटे यात्रा की, और तीसरे दिन 32 कि मी·, प्रतिघंटे की गति से 15 घंटे यात्रा की। उसकी औसत गति प्रतिघंटा ज्ञात कीजिए।

हल :

यहाँ प्रतिदिन तय की गई दूरी एक समान है, परंतु समय तथा गति परिवर्ती हैं। हमें, औसत चाल ज्ञात करना अभीष्ट है। इसलिए हरात्मक माध्य हीं उपयुक्त माध्य है।

$$H.M. = \frac{3}{\frac{1}{48} + \frac{1}{40} + \frac{1}{32}}$$

$$= \frac{3}{\frac{37}{480}}$$

$$= \frac{3 \times 480}{37}$$

= 39 कि·मी· प्रति घंटे (लगभग)

यहां, हरात्मक माध्य कैसे उपयुक्त हैं ? इसकी जाँच, सरलता से इस प्रकार कर सकते हैं।

तीन दिन में तय की गई कुल दूरी = 480 + 480 + 480

3×480 कि·मी·

दूरी तय करने में व्यय किया गया = 10 + 12 + 15 = 37 घंटे

औसत गति प्रतिघंटा = $\frac{3 \times 480}{37}$

= 39 कि·मी· प्रति घंटे (लगभग)

अब आप देख सकते हैं कि इस तार्किक विधि द्वारा प्राप्त परिणाम, हरात्मक माध्य के बराबर हैं। अतः गतियों का औसत निकालते समय यदि कुल दूरी एक समान हो और समय परिवर्ती हो तो हरात्मक माध्य ही एक उपयुक्त माध्य है।

वर्गीकृत समंक

जैसा कि आप को ज्ञात है, वर्गीकृत समंक दो प्रकार के होते हैं: (1) असतत श्रेणी और (2) सतत श्रेणी। आइये, इन दो प्रकार के समंक कुलकों के लिए, हरात्मक माध्य परिकलित करने की विधियों का अध्ययन करें।

असतत श्रेणी : एक असतत श्रेणी के लिए, हरात्मक माध्य निम्नानुसार परिकलित करते हैं,

$$H.M. = \frac{n}{\Sigma f \text{ (x का व्युत्क्रम)}}$$

$$= \frac{n}{\Sigma f \frac{1}{x}}$$

$$= \text{व्युत्क्रम} \frac{\left(\Sigma f \frac{1}{x}\right)}{n}$$

जहाँ प्रतीकों के, उनके सामान्य अर्थ हैं। आप जिस प्रक्रिया का अनुसरण करेंगे, वह इस प्रकार है :

1 चर x के विभिन्न मानों के व्युत्क्रम ज्ञात कीजिए।

2 व्युत्क्रमों को, उनकी संगत आवृत्तियों से गुणा कीजिए और कुल गुणनफल, अर्थात् $\Sigma f \frac{1}{x}$ ज्ञात कीजिए।

3 कुल आवृत्ति n को $\Sigma f \frac{1}{x}$ से भाजित कीजिए।

उदाहरण 6

एक व्यक्ति ने, 10 किं·ग्रा· वस्तु A, 2 कि·ग्रा· प्रति रुपये की दर से, 20 कि·ग्रा· वस्तु B, 5 कि·ग्रा· प्रति रुपये कीं दर से और 30 कि· ग्रा· वस्तु C, 10 कि·ग्रा· प्रति रुपये की दर से, खरीदा। औसत दर किलोग्रामों में ज्ञात कीजिए ।

हल :

हमें, औसत दर ज्ञात करना अभीष्ट है। अतः आइये, जिन मदों का औसत निकालना है उन्हें x द्वारा सूचित करें । खरीदी गई राशियाँ आवृत्तियों के सदृश हैं। अतः इन्हें f द्वारा सूचित करें। अब हरात्मक माध्य को निम्नानुसार परिकलित करेंगे।

वस्तु	मूल्य (कि·ग्रा· प्रति रुपये) x	खरीदी गई मात्रा (f)	$\frac{1}{x}$	$f\frac{1}{x}$
A	2	10	0.5	5.0
B	5	20	0.2	4.0
C	10	30	0.1	3.0
कुल		$n = \Sigma f = 60$		$\Sigma f \cdot \frac{1}{x} = 12.0$

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma f. \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{60}{12.0}$$

$$= 5.0$$

अतः औसत मूल्य 5 कि·ग्रा· प्रति रु· है।

टिप्पणी : सम्भव है आप पूछें कि इस उदाहरण में, हमने हरात्मक माध्य का परिकलन क्यों किया ? औसत मूल्य ज्ञात करने के लिए, आपको व्यय किया गया कुल धन तथा क्रय की गई कुल मात्रा (कि·ग्रा· में) की आवश्यकता है।

स्तम्भ 1/x में, 1 किं·ग्रा· वस्तु का मूल्य, रुपयों में दिया गया है, और स्तम्भ f में, खरीदी गई मात्रा कि·ग्रा· में दी गई है। अतः स्तम्भ $\Sigma f \frac{1}{x}$ में, मात्रा f खरीदने के लिए, व्यय किया गया धन दिया गया है। अब Σf या n, कुल मात्रा (कि·ग्रा· में) को प्रकट करता है, जिस पर कुल धन $\Sigma f \frac{1}{x}$ व्यय किया गया। अतः अभीष्ट माध्य है, $n/\Sigma f \frac{1}{x}$ जो हरात्मक माध्य के, अभिन्न है।

इस उदाहरण में भी ध्यान दीजिए कि, मात्रा इकाइयों में व्यक्त मूल्यों का औसत करते समय, उपयुक्त माध्य, हरात्मक माध्य ही है।

सामान्य रूप में, हम कह सकते हैं कि जिन मदों का औसत निकालना हो, उनका संयुक्त प्रभाव ज्ञात करने लिए यदि उनके व्युत्क्रमों का प्रयोग होता है, तो हरात्मक माध्य ज्ञात करना ही औसत ज्ञात करने की यथार्थ विधि है ।

सतत श्रेणी : सततं श्रेणी के लिए हरात्मक माध्य ज्ञात करने की प्रक्रिया ठीक वही है जो असतत श्रेणी के लिए बताई गई है । एक मात्र अंतर यह है कि सतत श्रेणी की स्थिति में, हम x के स्थान पर विभिन्न वर्गों के मध्यमान (m) का व्युत्क्रम लेते हैं । फिंर उन्हें, उनकी संगत वर्ग आवृत्तियों से गुणा करते हैं, और कुल गुणनफल अर्थात् $\Sigma f : \frac{1}{m}$ ज्ञात करते हैं । फिर कुल आवृतित $n = \frac{\Sigma}{f}$ को, कुल गुणनफल से भाजित करते हैं ।

$$\therefore \text{H. M.} = \frac{n}{\Sigma f.\frac{1}{m}}$$

$$= \text{व्युत्क्रम} \left(\frac{\Sigma f \frac{1}{m}}{n}\right)$$

उदाहरण 7

निम्न सूचना के लिए, हरात्मक माध्य परिकलित कीजिए ।

वर्ग अंतराल	f
0 — 10	5
10 — 20	8
20 — 30	10
30 — 40	12
40 — 50	7
50 — 60	6
60 — 70	3

हल :

वर्ग अंतराल	f	मध्यमान (m)	1/m	$f.\frac{1}{m}$
0 — 10	5	5	0.2	1.0
10 — 20	8	15	0.067	0.536
20 — 30	10	25	0.04	0.400
30 — 40	12	35	0.029	0.348
40 — 50	7	45	0.022	0.154
50 — 60	6	55	0.018	0.108
60 — 70	3	65	0.015	0.045
	51			Σf/m 2.591

$$\text{H.M.} = \frac{n}{\Sigma f.\frac{1}{m}}$$

$$= \frac{51}{2.591}$$

$$= 19.68$$

13.3.2 भारित हरात्मक माध्य

ऐसी परिस्थितियाँ भी होती हैं, जहाँ हमें, सरल हरात्मक माध्य की बजाय भारित हरात्मक माध्य के परिकलन की आवश्यकता होती है। उदाहरण के लिए, कल्पना कीजिए कि एक व्यक्ति पहले 10 कि·मी· 4 कि·मी· प्रति घटे की चाल से, आगामी 5 कि·मी· 3 कि·मी· प्रति घंटे की चाल से और तब 4 कि·मी· 2 कि·मी· प्रति घंटे की चाल से चलता है। उसकी औसत चाल ज्ञात करना अभीष्ट है। तीनों चरणों में, पृथक्-पृथक् जो कि·मी· दूरी वह चलता है, उसे भार मानेंगे। अब निम्न सूत्र का प्रयोग करेंगे।

$$\text{भारित H.M.} = \frac{\Sigma w}{\Sigma \frac{w}{x}}$$

जहां w भार को सूचित करता है।

$$\text{भारित H.M.} = \text{व्युत्क्रम} \left(\frac{\Sigma w \frac{1}{x}}{\Sigma w}\right)$$

उपरोक्त उदाहरण में

x :	4	3	2
w :	10	5	4

$$\text{भारित H.M.} = \frac{10+5+4}{\frac{10}{4}+\frac{5}{3}+\frac{4}{2}}$$

$$= \frac{19}{2.5+1.67+2.0}$$

$$= \frac{19}{6.17}$$

= 3.08 कि·मी· प्रतिघंटा

इस उदाहरण मे, भारित हरात्मक माध्य ही उपयुक्त विधि है। साधारण अंक गणितीय विधि से, औसत चाल ज्ञात करके हम इस कथन का सत्यापन कर सकते हैं।

चरण	दूरी (कि·मी·)	चाल (कि·मी· प्रति घंटा	समय जो लगा (घंटे)
पहला	10	4	10/4 = 2.50
दूसरा	5	3	5/3 = 1.67
तीसरा	4	2	4/2 = 2.00
कुल	19		6.17

औसत चाल = $\frac{19}{6.17}$ = 3.08 कि·मी· प्रतिघंटा दोनों परिणाम यथार्थतः समान हैं। अतः जब ऐसे मदों का हरात्मक माध्य ज्ञात करना हो, जिनका सापेक्ष महत्व भी भिन्न हो, तो हमें भारित हरात्मक माध्य परिकलित करना चाहिए।

उदाहरण 8

श्री राकेश 6 कि·मी· की दूरी पर स्थित एक गाव की, यात्रा पर निकले। उन्होंने अपनी कार में 40 कि·मी· प्रति घंटे की गति से यात्रा की। 4 कि·मी· चलने के पश्चात् कार ने चलना बंद कर दिया। तब उन्होंने एक रिक्शा में, 10 कि·मी· प्रति घंटे की गति से यात्रा की। 1·5 कि·मी· की यात्रा करने के पश्चात् उसने रिक्शा छोड़ दी और शेष दूरी, पैदल 4 कि·मी· प्रति घंटा की गति से तय की। उसकी औसत गति प्रति घंटा ज्ञात कीजिए और परिणाम की जाँच कीजिए।

हल :

यहाँ गति (x) के मान हैं : $x_1 = 40, x_2 = 10, x_3 = 4$; तय की गई दूरियाँ हैं, क्रमशः $w_1 = 4, w_2 = 1.5$ और $w_3 = 0.5$

$$\therefore \text{ भारित H.M.} = \frac{\Sigma w}{\Sigma w. \frac{1}{x}}$$

$$= \frac{6}{4 \times \frac{1}{40} + 1.5 \times \frac{1}{10} + 0.5 \times \frac{1}{4}}$$

$$= \frac{6}{0.1 + .15 + 0.125}$$

$$= \frac{6}{0.375}$$

$$= 16$$

इसलिए, राकेश की औसत गति 16 कि॰मी॰ प्रति घंटा है। आइये, इसकी जाँच, यात्रा में लगे कुल समय को परिकलित करके करें।

यात्रा के साधन	दूरी (कि॰मी॰)	गति (कि॰मी॰ प्रति घं॰),	समय जो लगा (मिनट)
कार	4	40	6
रिक्शा	1.5	10	9
पैदल	0.5	4	7.5
कुल	6		22.5

उसने कुल 6 कि॰मी॰ की दूरी 22.5 मिन्टों में तय की। अतः 60 मिन्ट में वह दूरी तय करेगा 16 कि॰मी॰ (अर्थात् $6 \times 60/22.5$)।

13.3.3 हरात्मक माध्य के विशेष गुण

1 यदि चर के प्रत्येक मान के लिए, (श्रेणी का) हरात्मक माध्य प्रतिस्थापित किया जाए तो चर के मानों के व्युत्क्रमों का योगफल अपरिवर्तित रहता है।

2 हरात्मक माध्य, व्यक्तिगत प्रेक्षणों के व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है।

3 समांतर माध्य और गुणोत्तर माध्य के सदृश, यह भी बीजगणितीय, प्रतिपादन के योग्य है।

4 तीनों माध्यों, अर्थात् समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य में, हरात्मक माध्य न्यूनतम होता है। अर्थात्

$$AM \geq GM \geq HM$$

इस तथ्य को निदर्शित करने के लिए, आइये पांच मदों 2, 3, 5, 10, और 100 का हरात्मक माध्य ज्ञात करें और इसकी तुलना, गुणोत्तर माध्य और समांतर माध्य से करें।

$$\text{H.M.} = \frac{5}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \frac{1}{100}}$$

$$= \frac{5}{0.50 + 0.33 + 0.20 + 0.10 + 0.01}$$

$$= \frac{5}{1.14} = 4.39$$

समांतर माध्य, 24 हैं और गुणोत्तर माध्य, 7.86 है। इससे स्पष्ट होता है कि AM > GM > HM ; इस गुणधर्म को दूसरे शब्दों में, इस प्रकार भी प्रकट कर सकते हैं कि हरात्मक माध्य का छोटे मानों की ओर झुकाव होता है।

टिप्पणी : जब दिए गए सभी मदों के मान यथार्थतः समान हो, तो केवल तभी AM = GM = HM;

ऐसी स्थिति में, माध्यिका और बहुलक भी, इस सार्वमान के बराबर होंगे।

13.3.4 उपयोग और परिसीमाएँ

उपयोग

1 ऐसी दरों और अनुपातों के लिए, जो गति, समय और दूरी से सम्बद्ध हों, हरात्मक माध्य का प्रयोग, औसत चाल ज्ञात करने के लिए किया जाता है।

2 ऐसी दरों और अनुपातों के लिए, जो मूल्य और मात्रा से सम्बद्ध हो, यदि व्यय किया गया कुल धन नियत हो और इकाइयाँ प्रति रुपया ही हों, तो हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं। समान्यतः यदि मदों का संयुक्त प्रभाव ज्ञात करने के लिए, उनके व्युत्क्रमों का प्रयोग किया जाता है, तो उनका औसत ज्ञात करने के लिए हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं।

3 यदि दिए गए समंक कुलक में, कुछ बड़े मान हों, तो व्युत्क्रमों का प्रयोग करने से, बड़े मानों का प्रभाव कम हो जाता है। ऐसी स्थितियों में, हरात्मक माध्य का प्रयोग करना चाहिए।

4 जब चर के छोटे मानों को अधिक महत्व और बड़े मानों को कम महत्व देना अभीष्ट हो तो हरात्मक माध्य के प्रयोग की सिफारिश की जाती है।

परिसीमाएँ

1 इसका परिकलन करना कठिन है और इसको समझना भी कठिन है।

2 यदि एक या एक से अधिक मद शून्य हों तो इसका परिकलन नहीं किया जा सकता। वास्तव में, ऐसी स्थिति में, HM का मान शून्य होगा, चाहे अन्य मदों के मान कुछ भी हों।

उदाहरण के लिए, 0.10 और 100 का हरात्मक होगा :

$$\frac{3}{\frac{1}{0}+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}} = \frac{3}{\infty + 0.1 + 0.1} = \frac{3}{\infty} = 0$$

3 न्यूनतम मद को, अधिकतम महत्व देना सदैव एक वांछनीय लक्षण नहीं है, और आर्थिक आंकड़ों के विश्लेषण में, इसके प्रयोग का सीमित अवसर है।

13.4 हरात्मक माध्य तथा समांतर माध्य की तुलना

ऐसी दरों और अनुपातों का, जो गति, समय और दूरी, या दर, राशि, और व्यय किए गए कुल धन इत्यादि से सम्बद्ध हों, माध्य ज्ञात करने के लिए, समांतर माध्य और हरात्मक माध्य में से चयन करना, इतना सरल नहीं होता। कुछ परिस्थितियों में, यथार्थ परिणाम प्राप्त करने के लिए हरात्मक माध्य, अधिक उपयुक्त प्रतीत होता है, जब कि अन्य परिस्थितियों में, समांतर माध्य ही अधिक उपयुक्त पाया जाता है। यह चयन, प्रायः समंकों की प्रकृति पर निर्भर होता है। इस तथ्य पर आधारित, उचित चयन के लिए सामान्य संदर्शक नियम दिये जा सकते हैं।

1 ऐसी दरों और अनुपातों के लिए, जो गति, समय और दूरी से सम्बद्ध हों, यदि कुल दूरी दी गई हो, तो हरात्मक माध्य ही वरीय होता है। परंतु, यदि कुल समय दिया हो, तो समांतर माध्य अधिक उपयुक्त होता है। सामान्यतः यदि दिए गए अनुपात, रूप : x इकाइयाँ, प्रति y हों, तो हरात्मक माध्य प्रयोग करें, जब x के मान दिए हों और समांतर माध्य प्रयोग करें जब y के मान दिए हों। आइये, एक उदाहरण द्वारा इसे और अच्छी तरह समझें।

उदाहरण 9

एक व्यक्ति, 100 कि·मी· की दूरी, कार से, 30 कि·मी· प्रति घंटा की औसत गति से तय करता है, फिर वह वापसी यात्रा 20 कि·मी· प्रति घंटा की औसत गति से तय करता है। कुल यात्रा में, औसत गति प्रति घंटा ज्ञात कीजिए।

हल :

यहाँ गति कि·मी· प्रति घंटे में दी गई है और तय की गई कुल दूरी चर है, (अर्थात् 100 कि·मी· प्रत्येक ओर) अतः भारित हरात्मक माध्य, समान भारों, प्रत्येक 100 के सत्य या सरल हरात्मक माध्य ही, एक उपयुक्त माध्य होगा।

$$HM = \frac{2}{\frac{1}{20} + \frac{1}{30}}$$

$$= \frac{2}{\frac{3+2}{60}} = \frac{2 \times 60}{5}$$

= 24 कि·मी· प्रति घंटा

आइये, अब उपरोक्त सूचना मे थोड़ा संशोधन करें। अब मान लीजिए कि दोनों ओर की कुल यात्रा के लिए, वह आधा समय 30 कि·मी· प्रति घंटा की गति से जाता है और शेष आधा समय, 20 कि·मी· प्रति घंटा की गति से जाता है। क्योंकि यात्रा के समय दिए गए हैं, अतः समांतर माध्य का प्रयोग करना उचित होगा। और क्योंकि दी गई काल अवधियाँ समान हैं, इसलिए सरल समांतर माध्य ही उपयुक्त होगा।

समांतर माध्य = $\frac{30 + 20}{2}$ = 25 कि·मी· प्रति घंटा

आप अब जाँच कर सकते हैं कि समांतर माध्य ही यथार्थ माध्य है या नहीं। वह (कुल मात्रा) 200 कि·मी· की दूरी, समांतर माध्य गति 25 कि·मी· प्रति घंटा की गति से 8 घंटे में तय कर सकता है। यदि वह, आधे समय (अर्थात् 4 घंटे), 30 किलोमीटर प्रति घंटा की गति से चले और शेष आधे समय, 20 कि·मी· प्रति घंटा की गति से तो वह ठीक 200 कि·मी· प्रति घंटा ही चलेगा। अतः इस स्थिति में, यथार्थ औसत गति, समांतर माध्य ही होगी।

2 इनमें एक अन्य भेद यह है कि जहाँ समांतर माध्य, चरम मानों से प्रभावित होता है, वहाँ हरात्मक माध्य का झुकाव छोटे मानों के प्रति अधिक होता है। इसलिए, एक असम बंटन के लिए, समांतर माध्य का प्रयोग नहीं कर सकते, तथा आर्थिक समंकों के विश्लेषण के लिए, हरात्मक माध्य का प्रयोग नहीं कर सकते ।

बोध प्रश्न ख

1 हरात्मक माध्य किसे कहते हैं ?

....

....

....

....

2 विद्यार्थियों के एक समूह के मासिक व्यय के आंकड़े नीचे दिए गए हैं। हरात्मक माध्य परिकलित कीजिए :

125, 75 , 10, 130, 45, 500, 150, 80, 65, 100

....

....

....

3 निम्न समको के लिए, हरात्मक माध्य परिकलित कीजिए :

मदों के आमाप :	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50
आवृत्ति	5	10	7	3	2

....

एक निवेशक प्रतिमास एक कम्पनी के, रु· 1200 मूल्य के शेयर खरीदता है। पहले पाँच महीनों में उसे में शेयर 10 रु·, 12 रु·, 15 रु·, 20 रु· और 24 रु· प्रति शेयर की दरों से खरीदे। औसत दर प्रति शेयर ज्ञात कीजिए।

....

....

....

....

5. एक व्यक्ति ने, अपने मूल निवास स्थान पहुँचने के लिए, पहले 1200 कि·मी· की यात्रा, रेलगाड़ी से 80 कि.मी. प्रतिघंटा की औसत गति से की, फिर 20 कि·मी· की यात्रा बस से, 40 कि·मी· प्रति घंटा की औसत गति से की और अंत में, 6 कि·मी· की यात्रा, साइकिल से, 8 कि·मी· प्रति घंटा की औसत गति से की। सारी यात्रा के लिए, उनकी औसत गति क्या है ?

....

....

....

....

6. बताइए कि निम्नलिखित कथन, सत्य (t) है, या असत्य। (f)

i) हरात्मक माध्य, समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है।

ii) सभी परिस्थितियों में, हरात्मक माध्य, दरों और चालों का औसत ज्ञात करने के लिए, सर्वोत्तम माप है।

iii) माध्यम के केवल गणितीय माप ही, भारों के प्रयोग से परिकलित किये जा सकते हैं।

iv) यदि दिए गए आंकड़ों में, एक मद शून्य हो तो उनका हरात्मक माध्य विद्यमान नहीं होता।

v) जब कुल खरीदे गए मदों की संख्या दी गई हो, तो (रुपयों में) औसत दर प्रति मद ज्ञात करने के लिए हरात्मक माध्य उपयुक्त माध्य है।

रिक्त स्थानों को भरिए:

i) ...., व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है। (समातर माध्य/हरात्मक माध्य)

ii) यदि चर के, प्रत्येक मान के लिए, हरात्मक माध्य प्रतिस्थापित करें, तो चर के मानों के .... का योगफल अपरिवर्तित रहता है। (व्युत्क्रमों/गुणनफल)

iii) तीन माध्यों (AM, GM और HM) में, हरात्मक माध्य ... . होता है। (अधिकतम/न्यूनतम)

iv) जब छोटे मानों को, ... महत्व देना अभीष्ट हो, तो हरात्मक माध्य के प्रयोग की सलाह दी जाती है। (न्यूनतर/अधिकतर)

v) यदि दिये गए अनुपात, x इकाइयाँ प्रति y के रूप में दिये गए हों और x के मान दिए गए हों, तो .... का प्रयोग कीजिए। (हरात्मक माध्य/समांतर माध्य)

vi) यदि विमान की गति और तय की गई कुल दूरी दी गई हो तो औसत गति ज्ञात करने के लिए, ... हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं। (सरल/भारित)

13.5 चल माध्य (Moving Average)

13.5.1 चल माध्य किसे कहते है

कुछ विषयों जैसे, मूल्य, बिक्री और लाभ इत्यादि के आंकड़ों की उपनति पर विचार करते समय हम एक विशेष प्रकार के माध्य का प्रयोग करते हैं, जिसे चल माध्य कहते है। यह काल-श्रेणी समंकों में उपनति (Trend) का एक माप है। गतिमान माध्य, वास्तव में, एक काल श्रेणी से सम्बंधित नियत अवधि के, क्रमागत परस्पर-व्यापी समंक समूहों के समांतर माध्यों की एक श्रेणी होता है। इस श्रेणी के प्रत्येक पद को भी चल माध्य कह देते हैं।

इसका परिकलन करने के लिए, पूर्ववर्ती माध्य में, पहले मद के स्थान पर, नए प्रवेश करने वाले मद को प्रतिस्थापित करते हैं। प्रत्येक चल माध्य, एक नियत काल अवधि के मानों पर आधारित होता है और इस नियत काल अवधि को **चल माध्य की अवधि** कहते हैं।

क्रमागत माध्यम प्रक्रिया, काल श्रेणी के समंकों पर, एक समरेखण संक्रिया (smoothing operation), सम्पन्न करती है। अर्थात् यह समान अवधि और तीव्रता के उच्चावचनों को कम करती है। गतिमान माध्य की अवधि को चक्रीय आवर्त काल के बराबर लेकर इन उच्चावचनों को पूर्णतया विलुप्त किया जा सकता है। काल श्रेणी में, यदि चक्रीय गति (cyclicat movement) अनुपस्थित भी हो तो भी गतिमान माध्यम प्रक्रिया द्वारा आंकड़ों के अनियमित विचरण, बड़ी सीमा तक कम किये जा सकते हैं।

13.5.2 परिकलन

चल माध्य के परिकलन में, गतिमान माध्य की अवधि, एक महत्वपूर्ण उपादान है। उदाहरण के लिए, वार्षिक मानों A, B, C, D, E और F के लिए, 3-वर्षीय गतिमान माध्य, सारणी 13.1 में दिखाये गए अनुसार परिकलित कर सकते हैं।

सारणी 13.1 चल माध्यों का परिकलन.

वार्षिक मान	3 वर्षीय गतिमान योग	3 वर्षीय गतिमान माध्य
A	—	—
B	A + B + C	(A + B + C)/3
C	B + C + D	(B + C + D)/3
D	C + D + E	(C + D + E)/3
E	D + E + F	(D + E + F)/3
F	—	—

चल माध्य की अवधि, या तो विषम ले सकते हैं, (जैसे 3 वर्ष, 5 वर्ष, 7 वर्ष) या सम, (जैसे 2 वर्ष, 4 वर्ष, 6 वर्ष)। गतिमान माध्य की अवधि, प्रायः आंकड़ों में, विवरण-चक्र की अवधि को ध्यान में रखकर, निर्धारित करते हैं। साधारणतः व्यवसायिक श्रेणियों के लिए, गतिमान माध्य की अवधि, 3 और 10 वर्ष के बीच होती है।

चल माध्य की विषम अवधि : जब गतिमान माध्य की अवधि, विषम हो (मान लीजिए, 3 वर्ष, 5 वर्ष, या 7 वर्ष, इत्यादि) तो गतिमान माध्य को, संगत काल अवधि के मध्य बिंदु से सम्बंधित करते हैं। क्रियाविधि को समझने के लिए सारणी 13.2 का अध्ययन कीजिए :

सारणी 13.2 विषम चल माध्य का परिकलन

वर्ष	बिक्री (000 टन)	3-वर्षीय गतिमान योग	3-वर्षीय गतिमान माध्य
1977	15	—	—
1978	25	(15 + 25 + 32) 72	24
1979	32	(25 + 32 + 24) 81	27
1980	24	(32 + 24 + 19) 75	25
1981	19	(24 + 19 + 17) 60	20
1982	17	—	—

ध्यान दीजिए कि पहले तीन वर्षों (1977, 1978 और 1979) के लिए, गतिमान माध्य, अर्थात् 24, को मध्य वर्ष, 1978 से सम्बंधित किया गया है। अब पहले वर्ष को छोड़कर, आगामी 3 वर्षों, अर्थात् 1978, 1979 और 1980 के गतिमान माध्य को, 1979 से सम्बंधित किया गया है, और उसके सम्मुख लिखा गया है और आगे भी इसी प्रकार किया गया है। यह भी ध्यान दीजिए कि दिए गए समकों में, पहले वर्ष और अंतिम वर्ष के चल

माध्य ज्ञात नहीं किये जा सकते। यदि गतिमान माध्य की अवधि 5 वर्ष हो, तो पहले दो वर्षों और अंतिम दो वर्षों के लिए चल माध्य ज्ञात नहीं कर सकते।

चल माध्य की सम अवधि : यदि चल माध्य की अवधि, सम हो (मान लीजिए, 4 वर्ष, 6 वर्ष, 8 वर्ष, इत्यादि) तो चल योग और चल माध्य, मूल काल अवधि के किसी वर्ष पर संपाती नहीं होंगे। चल माध्य को, ठीक किसी वर्ष के सम्मुख रखना सम्भव न होगा। इसलिए केन्द्रण आवश्यक होगा। केन्द्रण इस प्रकार किया जाता है कि वह गतिमान माध्य को, मूल समंकों के संपाती होने में सहायता प्रदान करे। केन्द्रण की प्रक्रिया को समझने के लिए उदाहरण 10 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 10

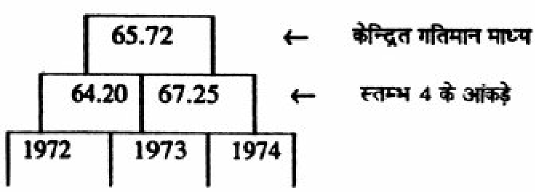
निम्न समंकों के लिए, 4-वर्षीय चल माध्य परिकलित कीजिए :

वर्ष :	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
बिक्री : ('000 रू.)	75	60	54	69	86	65	63	80	90	72

हल :

वर्ष	बिक्री ('000रू.)	4 वर्षीय गतिमान योग	4 वर्षीय गतिमान योग	4 वर्षीय गतिमान केन्द्रित
1971	75	—	—	—
1972	60	—	—	—
1973	54	258	64.50	65.88
1974	69	269	67.25	67.80
1975	86	274	68.50	69.62
1976	65	283	70.75	72.12
1977	63	294	73.50	74.00
1978	80	298	74.50	75.37
1979	90	305	76.25	—
1980	72	—	—	—

पहली चार संख्याओं (वर्ष 1971 से 1974) के योग, 258 को और उनके माध्य 64.50 को, इस काल अवधि के मध्य बिंदु, अर्थात् 1972 और 1973 के मध्य बिंदु के सामने लिखा गया है। यह माध्य बिंदु एक विशेषतः संरचित वर्ष को सूचित करता है, जिसके अंतर्गत, 1972 के अंतिम 6 मास और 1973 के पहले 6 मास सम्मिलित हैं। इसी प्रकार, सन् 1972 से 1975 तक के वर्षों के संगत योग 264 को और इनके माध्य 67.25 को एक विशेषतः संरचित वर्ष, अर्थात् सन् 1973 और 1974 वर्षों के मध्य बिंदु के सामने लिखा। इस प्रक्रिया को तब तक जारी रखते हैं, जब तक कि अंतिम माध्य 76.25 और अंतिम योग 305 को, 1978 और 1979 के मध्य बिंदु के सामने न लिख दिया जाए। पहला केन्द्रित माध्य, 65.72 (अर्थात् गतिमान माध्य का वह मान जो वर्ष 1973 के संपाती हो) ज्ञात करने के लिए, हमें स्तम्भ 4 के पहले दो आंकड़ों, 64.50 और 67.25 का मध्य मान ज्ञात करना होगा। निम्न आरेख की सहायता से, आप इस प्रक्रिया को भली भांति समझ सकेंगे :



आरेख से स्पष्ट होता है कि गतिमान माध्य का जो मान, 1973 के संपाती है। वह आधा 64.50 से और शेष आधा 67.25 से लेता है। जिसका अर्थ है कि यह दोनों गतिमान माध्यों का समांतर माध्य है। इसलिए इस गतिमान माध्य मान 65.88 को केन्द्रित गतिमान माध्य कहते हैं और इसे अंतिम स्तम्भ में लिखते हैं। इस प्रकार, विभिन्न केन्द्रित गतिमान माध्यों का परिकलन, क्रमागत रूप में, स्तम्भ 4 के, प्रत्येक दो निकटवर्ती आंकड़ों का समांतर माध्य ज्ञात करके किया जाता है।

13.6 एक उपयुक्त माध्य का चयन

इकाई 11 से प्रारम्भ कर हमने विभिन्न प्रकार के माध्यों, अर्थात् समांतर माध्य, भूयिष्ठक माध्यिका, गुणोत्तर माध्य, इत्यादि का अध्ययन किया है। हमने, इन माध्यों में से प्रत्येक के गुणों, दोषों और विशिष्ट उपयोगों का पृथक्-पृथक् अध्ययन किया है। अब हमें यह ज्ञात होंना चाहिए कि एक दिए गए प्रयोजन के लिए, एक उपयुक्त माध्य का चुनाव कैसे करें। केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक श्रेष्ठ माप के आवश्यक गुणों के दृष्टिकोण से जाँच करें तो समांतर माध्य ही सर्वोत्तम माध्य प्रतीत होता है, क्योंकि इसमें ये गुण सर्वाधिक संख्या में हैं। परंतु एक दी गई परिस्थिति के लिए उपयुक्त माध्य का चुनाव करना, एक समस्या प्रस्तुत कर देता है। यदि निर्णय उपयुक्त नहीं है, तो परिणाम अधिक विश्वसनीय नहीं होंगे। एक अनुपयुक्त माध्य का प्रयोग करने पर, जो तुलनात्मक दृश्य उभर कर आता है, वह यथार्थ से कहीं दूर होगा। इसलिए, एक माध्य का चुनाव करते समय, आपको निम्न पहलुओं को ध्यान में रखना चाहिए

1 **प्रयोजन :** किसी माध्य का चुनाव उस प्रयोजन के अनुकूल होना चाहिए, जिसकी पूर्ति के लिए, उस माध्य को अभिकल्पित किया गया है। यदि प्रयोजन, श्रेणी के सभी मदों को समान महत्व देना हो, तो समांतर माध्य एक उचित माध्य होगा। यदि प्रयोजन, सामान्यतम या सर्वाधिक प्रचलित मद ज्ञात करने का हो तो भूयिष्ठक एक उपयुक्त माध्य होगा। यदि प्रयोजन, एक निर्दिष्ट सापेक्ष स्थिति के मद को स्थापित करना हो, तो माध्यिका इस प्रयोजन को पूरा कर सकेगी। जब बड़े मदों की अपेक्षा, छोटे मदों को अधिक महत्व देना तो तो गुणोत्तर माध्य का चुनाव करना होगा। यदि छोटे मानों को, पर्याप्त रूप में अधिक महत्व देना हो, तो हरात्मक माध्य का प्रयोग करना चाहिए।

2 **समंक कुलक की प्रकृति और रूप :** यदि बंटन वैषम्य मुक्त हों, तो बहुलक या माध्यिका अधिमान्य होगा। विवृत मुखी बंटन के लिए भी, भूयिष्ठक या माध्यिका अधिक उपयुक्त होगी। J–रूप के या व्युत्क्रम J–रूप के बंटन में, अर्थात् ऐसे बंटन में जो सममिति से बहुत अधिक विचलित हो, माध्यिका ही, सर्वाधिक महत्वपूर्ण माध्य है। इसके दो उदाहरण हैं, मूल्य बंटन और आय बंटन। यदि समंक समता से फैले हों, और उनमें बहुत अधिक विचरण न हो, तो समांतर माध्य, एक उपयुक्त माध्य होगा। इसका एक उदाहरण है, औसत उत्पादन लागत। जब अनुपातों या प्रतिशतताओं की औसत निकालनी हो तो गुणोत्तर माध्य ही सर्वाधिक उपयुक्त माप है। ऐसे समंक कुलक के लिए, जिसमें, एक चर के मानों की तुलना, एक अन्य चर से की जाए, जिसका मान नियत हो, तो हरात्मक माध्य सर्वाधिक उपयुक्त माध्य है। इसके उदाहरण हैं : परिवर्ती गति जब दूरी नियत हो, और परिवर्ती दर (अर्थात् राशि प्रति रु॰) जब कुल राशि नियत हो, इत्यादि।

3 **बीजगणितीय प्रतिपादन के लिए वश्यता :** यदि एक माध्य पर, आगे बीजगणितीय प्रतिपादन अभीष्ट हो, तो समांतर माध्य को ही सर्वोत्तम मानते हैं, क्योंकि इसका बहुत अधिक प्रयोग होता है।

4 **गुणात्मक घटनाएँ :** ऐसे लक्षणों के लिए, जो गुणात्मक प्रकृति के हों, जैसे ईमानदारी, सौंदर्य. प्रज्ञा, इत्यादि, माध्यिका ही एक उपयुक्त माध्य प्रतीत होती है।

5 **विशेष प्रयोजन :** काल श्रेणी के विश्लेषण में उपनति का परिकलन करने के लिए, चल माध्य सर्वाधिक उपयुक्त माध्य होगा।

यद्यपि उपरोक्त विचार, एक उपयुक्त माध्य का चुनाव करने में, एक संदर्शक नियम की भूमिका निभाते हैं, फिर भी बहुत सी परिस्थितियों में, यह निर्णय स्वेच्छ होता है। यदि परिकल्पना (Hypothesis) को सिद्ध करने के लिए माध्य के उच्चतर मान की आवश्यकता हो, तो हम ऐसे माध्य का चुनाव करने के लिए प्रलोभित होते हैं, जो उच्चतर मान प्रदान करे। क्योंकि हम, केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप का चुनाव अपनी रुचि के अनुसार कर सकते हैं, इसलिए ऐसे माध्य के चुनाव की संभावना है, जो वही परिणाम प्रदान करे, जो हमें अभीष्ट हों। परंतु, जब माध्य का प्रयोग, असतर्कता और अक्षमता से किया जाए, तो इसमें प्रयोक्ता का ही दोष होता है, उपकरण का नहीं।

बोध प्रश्न ग

1 कोष्टकों में दिए गए, उपयुक्त शब्दों से, रिक्त स्थान भरिए :

i) .... उपनति और चक्रीय विचरणों का एक माप है। (माध्य/गतिमान माध्य)

ii) गतिमान माध्य की .... का यथोचित चुनाव करके काल श्रेणी के उच्चावचनों को पूर्णतया विलुप्त किया जा सकता है। (अवधि/लम्बाई)

iii) सम अवधि के गतिमान माध्य के लिए .... करना पड़ता है। (केन्द्रय/माध्यम)

2 निम्न स्थितियों के लिए, उपयुक्त माध्यों का सुझाव दीजिए :

i) एक वस्त्रों की दुकान पर, बेचे गए वस्त्रों के आमाप।

ii) विवृत मुखी वर्गों वाला बटन।

iii) वार्षिक प्रतिशत परिवर्तन के आंकडे दिए हैं और माध्य वृद्धि दर अभीष्ट है।

iv) दूरी नियत है, परंतु गति परिवर्ती है।

v) जो यह वांछित है कि अभीष्ट माध्य से मदों के निरपेक्ष विचलनों का योग न्यूनतम हों।

vi) जब काल श्रेणी के समंकों में, अनियमित उच्चावचनों को विलुप्त करना अभीष्ट हो।

vii) जब बड़े मदों की अपेक्षा, छोटे मदों को अधिक महत्व देना, हमारा प्रयोजन हो।

viii) यदि बंटन में, चरम मान उपस्थित हों।

ix) यदि जीवन निर्वाह सूचकांक की संरचना करना अभीष्ट हो।

x) उपलब्ध फर्नीचर शैलियों में से, एक शैली को श्रेष्ठतम बताना हो।

13.7 सारांश

केन्द्रीय प्रवृत्ति के कुछ अन्य माप भी हैं, जैसे, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य, जिनका प्रयोग विशिष्ट परिस्थितियों में करते हैं। अनुपातों और प्रतिशतताओं के माध्यम के लिए गुणोत्तर माध्य का प्रयोग करते हैं। यदि एक श्रेणी में N मद हों, तो उसका गुणोत्तर माध्य, इन मदों के गुणनफल का N वाँ मूल होता है। जब मदों की संख्या अधिक हो, तो परिकलन को सुगम बनाने के लिए, गुणोत्तर माध्य का लघुगणक लेते हैं। अवर्गीकृत समंकों और वर्गीकृत समंकों दोनों के लिए, तथा असतत और सतत श्रेणियों के लिए भी, विभिन्न सूत्रों के प्रयोग से, गुणोत्तर माध्य का परिकलन कर सकते हैं।

किसी दी गई काल अवधि में, एक चर के मान में औसत वृद्धि दर परिकलित करने के लिए, गुणोत्तर माध्य का बहुत अधिक प्रयोग होता है। भारित गुणोत्तर माध्य का परिकलन भी कर सकते हैं, जिसका प्रयोग सूचकांकों की संरचना में किया जाता है। गुणोत्तर माध्य के कुछ ऐसे गणितीय विशेष गुण हैं। जो अनुपातों और प्रतिशतताओं का औसत निकालने में, इसके प्रयोग को अधिक महत्वपूर्ण बना देते हैं, इसकी कुछ परिसीमाएँ भी हैं। यदि एक भी मद का मान, शून्य या ऋणात्मक हो तो गुणोत्तर माध्य का अस्तित्व नहीं होता। ऐसे समंक कुलकों के लिए, जिनमें एक चर के मानों की तुलना, नियत मान के एक अन्य चर से की जाए, हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं। उदाहरण के लिए, गति, समय और दूरी से सम्बद्ध अनुपातों और प्रतिशतताओं का औसत जानने के लिए, हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं। यह व्यक्तिगत प्रेक्षणों के व्युत्क्रमों के समांतर माध्य का व्युत्क्रम होता है। इसका परिकलन, अवर्गीकृत और वर्गीकृत समंकों तथा असतत और सतत श्रेणियों के लिए कर सकते हैं। भारित गुणोत्तर माध्य के सदृश, भारित हरात्मक माध्य का परिकलन भी कर सकते हैं। ऐसी परिस्थितियाँ भी हैं, जहाँ हरात्मक माध्य और समांतर माध्य में किसी एक का, उपयुक्त माध्य के रूप में चुनाव करना कठिन होता है। यदि दिए गए अनुपात, 'x इकाइयाँ प्रति y' रूप में हों, तथा x के मान निर्दिष्ट हों तो हरात्मक माध्य का प्रयोग करते हैं, और यदि y के मान निर्दिष्ट हों तो समांतर माध्य का प्रयोग करते हैं।

मूल्य, बिक्री, लाभ, इत्यादि की उपनति का विचार करते समय, चल माध्य का प्रयोग करते हैं। यह परस्पर व्यापी सरल समातर माध्यों की एक श्रेणी होती है, जो काल श्रेणी के समंकों पर एक समरेखण संक्रिया सम्पन्न करती है। गतिमान माध्य का परिकलन, गतिमान माध्य की अवधि पर आश्रित है, जो विषम या सम हो सकता है। विषम अवधि की स्थिति में, गतिमान माध्य को संगत काल अवधियों के मध्य बिंदुओं से सम्बंधित करते हैं । परंतु, सम अवधि की स्थिति में, यह सम्भव नहीं होता, अतः केन्द्रण किया जाता है। एक उपयुक्त माध्य का निर्णय, उस प्रयोजन पर निर्भर करता है जिसकी पूर्ति के लिए वह माध्य अभिकल्पित है, जैसे समंक समूह की प्रकृति और रूप; इसका आगे बीजगणितीय विश्लेषण के लिए अवश्य होना, इत्यादि। परंतु, केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों का प्रयोग, बड़ी सर्तकता और क्षमता से करना चाहिए।

13.8 शब्दावली

गुणोत्तर माध्य : यदि श्रेणी में N मद हों तो उनका गुणोत्तर माध्य, उनके गुणनफल का N वाँ मूल होता है।

हरात्मक माध्य : व्यक्तिगत प्रेक्षणों के व्युत्क्रमों के समांतर माध्य के व्युत्क्रम को, उनका हरात्मक माध्य कहते हैं।

चल माध्य : परस्पर व्यापी माध्यों का एक अनुक्रम, जिसमें, प्रत्येक माध्य, एक काल-अवधि के समंकों का सरल समांतर माध्य होता है और जिसे उस अवधि के मध्य वर्ष के सम्मुख लिखते हैं। इसकी अभिकल्पना श्रेणी की उपनति के सन्निकटन के रूप में की गई है।

उपनति : काल श्रेणी के समंकों की सामान्य दीर्घकालीन प्रवृत्ति।

13.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 1 12.3% लगभग
2 GM = 25.3 अंक
3 AM = 28.4 अंक
4 19.98%
5 (i) असत्य (ii) सत्य (iii) असत्य (iv) असत्य (v) सत्य
6 (i) 16 (ii) 10 (iii) σM (iv) निम्नतर (v) शून्य (vi) 18.7 (vii) 5.9

ख 2 H.M = 50.55 AM = 128.0
3 13
4 रु 14.63
5 लगभग 76 कि·मी· प्रतिघंटा
6 (i) असत्य (ii) असत्य (iii) सत्य (iv) सत्य (v) असत्य
7 (i) हरात्मक माध्य (ii) व्युत्क्रमों (iii) न्यूनतम (iv) अधिकतर (v) हरात्मक माध्य (vi) भारित

ग 1 (i) गतिमान माध्य (ii) अवधि (iii) केन्द्रण
2 (i) भूयिष्ठक (ii) माध्यिका (ii) गुणोत्तर माध्य (iv) हरात्मक माध्य (v) माध्यिका (vi) गतिमान माध्य (vii) हरात्मक माध्य (viii) माध्यिका (ix) भारित माध्य (x) भूयिष्ठक

13.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

प्रश्न

1 समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य और हरात्मक माध्य के सापेक्ष गुणों और परिसीमाओं को दिखाने के लिए, उनकी तुलना कीजिए।

2 गतिमान माध्य परिकलन-विधि की व्याख्या कीजिए। यह किस प्रयोजन को पूरा करता है।

3 आप, केन्द्रीय प्रवृत्ति के एक उपयुक्त माप का निर्णय, कैसे करते हो ?

अभ्यास

1 यदि 20 वर्ष में, आबादी दुगुनी हो गई है। तो क्या यह कहना ठीक होगा कि वृद्धि दर 5% वार्षिक रही है।

(उत्तर : नहीं 1.035%)

2 एक फैक्टरी के उत्पादन की वार्षिक वृद्धि दर, पिछले पांच वर्षों में, क्रमशः 5.0, 7.5, 5.0, 2.5 और 10 प्रतिशत रही है। इस अवधि के लिए उत्पादन का वार्षिक प्रतिशत चक्रवृद्धि दर क्या होगी ?

(उत्तर : 5.9% वार्षिक)

3 8 मदों का गुणोत्तर माध्य 3 है और 12 मदों का गुणोत्तर माध्य, 11 है। सभी 20 मदों का गुणोत्तर माध्य क्या होगा।

(उत्तर : 6.54)

4 निम्न आंकड़ों के लिए, हरात्मक माध्य ज्ञात कीजिए :
(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
(2) 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8 1/9

(उत्तर : (i) 3.184 (2) 4.505)

आप एक यात्रा करते हैं, जिसमें आपको, 900 कि·मी· रेलगाड़ी से, 60 कि·मी· प्रतिघंटा की औसत गति से, 3000 कि·मी· नाव से 25 कि·मी· प्रतिघंटा की औसत गति से, 4000 कि·मी· वायुयान से 350 कि·मी·

प्रति घंटा की औसत गति से और अंततः 15 कि·मी· टैक्सी से 25 कि·मी· प्रति घंटा की औसत गति से, यात्रा करनी पड़ी। सारी दूरी के लिए, औसत गति ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : 31.6 कि·मी· प्रतिघंटा)

मूल्य संबंधी निम्न आंकड़ों के लिए, (1) 3-वर्षीय और (2) 4-वर्षीय गतिमान माध्य परिकलित कीजिए।

वर्ष :	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982
मूल्य: (रु·)	6	8	11	7	10	11	15	11

वर्ष :	1983	1984	1985
मूल्य: (रु·)	12	13	17

7 निम्न परिस्थितियों में से. प्रत्येक के लिए, एक विशिष्ट उदाहरण, आप स्वयं अपनी ओर से दें :

i) समांतर माध्य की अपेक्षा, माध्यिका को वरीय मानते हैं।

ii) समांतर माध्य की अपेक्षा, हरात्मक माध्य को वरीय मानते हैं।

iii) माध्यिका की अपेक्षा बहुलक को वरीय माना जाएगा।

iv) हरात्मक माध्य की अपेक्षा समांतर माध्य को वरीय मानते हैं।

v) कोई भी माध्य सार्थक नहीं होगा।

नोट : ये प्रश्न/अभ्यास, इस इकाई को श्रेष्ठतर समझने में आपकी सहायता करेंगे। इनके उत्तर लिखने का, प्रयत्न कीजिए। परंतु अपने उत्तर, विश्वविद्यालय को न भेजिए। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

एन· के· कक्कर एवं एन· डी· वोहरा : *सांख्यिकी,* (नई दिल्ली : एस. चन्द एंड कम्पनी लि·, 1990) अध्याय 5

सत्य प्रकाश गुप्ता : *सांख्यिकी के सिद्धांत,* (नई दिल्ली : सुल्तान चन्द एंड संस, 1990) अध्याय 9

उत्तर प्रदेश
राजर्षि टण्डन मुक्त विश्वविद्यालय

B.Com-201
सांख्यिकी के तत्व

खंड

4

अपकिरण तथा विषमता की माप

इकाई 14

अपकिरण की माप I 293

इकाई 15

अपकिरण की माप II 310

इकाई 16

विषमता की माप 329

विशेषज्ञ समिति

प्रो. बी. एस. शर्मा
सम-कुलपति
इं·गां·रा·मु·वि·

प्रो. राकेश खुराना
निदेशक, प्रबंध अध्ययन विद्यापीठ
इं·गां·रा·मु·वि·

प्रो· जे· सत्यनारायण (अध्यक्ष)
उस्मानिया विश्वविद्यालय
हैदराबाद

प्रो· जी· वी· शिनॉय
इंस्टीट्यूट ऑफ रूरल मैनेजमेंट
आनंद

प्रो· बी· एस. भाटिया
पंजाबी विश्वविद्यालय
पटियाला

प्रो· पी· के· घोष
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

प्रो· आर· बी· उपाध्याय
राजस्थान विश्वविद्यालय
जयपुर

प्रो· आई· एच· फारूकी
अलीगढ़ मुस्लिम विश्वविद्यालय
अलीगढ़

श्री ए· के· मजूमदार
इंस्टीट्यूट ऑफ चार्टर्ड एकाउंटेंट्स
ऑफ इंडिया
नई दिल्ली

प्रो· अमर चन्द
मद्रास विश्वविद्यालय
मद्रास

पाठ निर्माण दल

डॉ. विद्यारत्न
श्रीराम कॉलेज ऑफ कॉमर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

श्री विजय कपूर
श्री राम कॉलेज ऑफ कॉमर्स
दिल्ली विश्वविद्यालय
दिल्ली

संकाय सदस्य :
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

डॉ· आर· के· ग्रोवर
डॉ· एन· वी· नरसिम्हम
सुश्री मधु सूर्या
श्री नवल किशोर
डॉ· (श्रीमती) मधु त्यागी

प्रो· जी· सांबशिव राव
(भाषा संपादक)

अनुवाद

श्री के· के· खन्ना
जाकिर हुसैन कॉलेज
नई दिल्ली

श्री जे· डी· गुप्ता
वैशाली
दिल्ली

संकाय सदस्य इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

प्रो· वी· रा· जगन्नाथन
डॉ· आर· के· ग्रोवर

श्री नूर नबी अब्बासी
डॉ· भगत सिंह
श्रीमती मधु सूर्या

सचिवालयिक सहायक :
इं. गां. रा. मु. वि.
श्री हरीश कुमार सेठी

सामग्री निर्माण

श्री बालकृष्ण सेल्वराज
कुलसचिव
मुद्रण एवं प्रकाशन प्रभाग
इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय

फरवरी 1991 (पुनर्मुद्रित)

© इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय, 1990

ISBN-81-7091-436-1

सर्वाधिकार सुरक्षित। इस कार्य का कोई भी अंश इन्दिरा गांधी राष्ट्रीय मुक्त विश्वविद्यालय की लिखित अनुमति लिए बिना मिमियोग्राफ अथवा किसी अन्य साधन से पुनः प्रस्तुत करने की अनुमति नहीं है।

खंड 4 अपकिरण और विषमता की माप

खंड 3 में आपने केन्द्रीय प्रवृत्ति के बारे में पढ़ा है, जोकि समंकों के विश्लेषण में पहला मुख्य लक्षण है। बहुधा ऐसा होता है कि दो या दो से अधिक बंटनों के केन्द्रीय प्रवृत्ति मान सम या समप्रायः होते हैं। परन्तु फिर भी वे बंटन एक-दूसरे से वस्तुतः भिन्न होते हैं। यह भिन्नता मदों के माध्य से विचलन की मात्रा के विषय में हो सकती है या माध्य के दोनों ओर मदों के वितरण की प्रकृति के संबंध में हो सकती है। बंटन के ये दो लक्षण समंकों के विश्लेषण में विचारणीय आगामी दो मुख्य लक्षण हैं। इस खंड में आज इन दो विशेषताओं के बारे में पढ़ेंगे, जिन्हें अपकिरण (dispersion) और विषमता (skewness) कहते हैं। इन दो मापों के अतिरिक्त कई अन्य सांख्यिकीय विधियाँ हैं जिनका प्रयोग समंकों के विश्लेषण और निर्वचन में किया जाता है। परन्तु इन उन्नत विधियों का अध्ययन इस पाठ्यक्रम के कार्यक्षेत्र के अंतर्गत नहीं है। इस खंड की तीन इकाइयाँ हैं।

इकाई 14 में अपकिरण की परिभाषा दी गई है, इसकी आवश्यकता की विवेचना की गई है और इसके अध्ययन के लिए प्रयुक्त होने वाली विभिन्न मापों के नाम दिए गए हैं। अपकिरण के तीन मापों, अर्थात् विस्तार (Range) चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation) और माध्य विचलन (Mean Deviation) के अर्थ, परिकलन और उनके उपयोगों की और अधिक व्याख्या की गई है।

इकाई 15 में अपकिरण के अन्य दो मापों, अर्थात् मानक विचलन (Standard Deviation) और विचरण गुणांक (Co-efficient of Variation) के अर्थ और आवश्यकता की व्याख्या की गई है। इसमें उनकी परिकलन विधियों, विशेषताओं, सीमाओं और उपयोगों का भी वर्णन किया गया है। लॉरेंज वक्र के बारे में भी चर्चा की गई है, जो कि अपकिरण के अध्ययन की आलेखीय विधि है।

इकाई 16 विषमता (वैषम्य) संबंधित है। इसमें विषमता के अर्थ, उसकी आवश्यकता और उसे निर्धारित करने की विभिन्न विधियों की चर्चा की गई है। इसमें अपकिरण और विषमता के अंतर की व्याख्या भी की गई है। यहाँ प्रसामान्य वक्र की संकल्पना के विषय में भी बताया गया है, जोकि आवृत्ति बंटनों की कुछ विशेषताओं का अध्ययन करने के लिए एक मानक है।

इकाई 14 अपकिरण की माप I

इकाई की रूपरेखा

14.0 उद्देश्य
14.1 प्रस्तावना
14.2 अपकिरण किसे कहते हैं ?
14.3 अपकिरण मापने का महत्व
14.4 अपकिरण के अच्छे माप की विशेषताएँ
14.5 अपकिरण के निरपेक्ष और सापेक्ष माप
14.6 अपकिरण की माप
14.7 विस्तार
14.8 चतुर्थक विचलन
14.9 माध्य विचलन
14.10 सारांश
14.11 शब्दावली और प्रतीक सूची
14.12 बोध प्रश्नों के उत्तर
14.13 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

14.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप

- अपकिरण की संकल्पना और उसे मापने के महत्व की व्याख्या कर सकेंगे
- विचरण की निरपेक्ष और सापेक्ष मापों के भेद कर सकेंगे
- विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए अपकिरण की कुछ मापों, जैसे विस्तार, चतुर्थक विचलन और माध्य विचलन को परिकलित कर सकेंगे
- विभिन्न परिस्थितियों में अपकिरण की उपयुक्त माप के प्रयोग का निर्णय ले सकेंगे।

14.1 प्रस्तावना

इकाई 10 से 13 में आपने केन्द्रीय प्रवृत्ति के विभिन्न मापों का अध्ययन किया है। परंतु समंकों का विश्लेषण करने के लिए, केवल केन्द्रीय प्रवृत्ति ही पर्याप्त नहीं है। समंकों के अधिक सार्थक विश्लेषण के लिए, अपकिरण अर्थात् समंकों के विस्तार या केन्द्रीय वृत्ति से मदों के विचलन की मात्रा का अध्ययन करना भी आवश्यक है। इस इकाई में, आप, अपकिरण के अर्थ और उसके महत्व का अध्ययन करेंगे। आप अपकिरण की तीन मापों, अर्थात् विस्तार, चतुर्थक विचलन और माध्य विचलन के बारे में भी विस्तार से पढ़ेगें।

14.2 अपकिरण किसे कहते हैं ?

'अपकिरण' (dispersion) शब्द का प्रयोग समंकों की विषमांगता की मात्रा को प्रकट करने के लिए किया जाता है। यह समंकों का एक महत्त्वपूर्ण लक्षण है, जो प्रेक्षणों की परस्पर विविधता की मात्रा को निर्दिष्ट करता है। अपकिरण की माप केन्द्रीय प्रवृत्ति के दोनों ओर व्यक्तिगत मानों के विस्तार या बिखराव का वर्णन करता है। अपकिरण की संकल्पना को स्पष्टतः समझने के लिए उदाहरण 1 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 1

तीन विभिन्न फर्मों की दैनिक बिक्री (रुपयों में)

फर्म A	फर्म B	फर्म C
60,000	62,500	51,000
60,000	60,000	32,000
60,000	52,250	22,000
60,000	56,500	18,000
60,000	60,500	27,000
60,000	68,250	2,10,000
$\bar{x}_A = 60{,}000$	$\bar{x}_B = 60{,}000$	$\bar{x}_C = 60{,}000$

क्योंकि तीनों फर्मों A, B और C की, औसत दैनिक बिक्री, अभिन्न है, यह निष्कर्ष निकालने की संभावना हो सकती है कि दैनिक बिक्री के ये तीनों बंटन एक जैसे हैं। परंतु ध्यान दीजिए कि प्रत्येक फर्म की बिक्री का विचरण (variation) प्रत्येक अन्य फर्म की बिक्री के विचरण से भिन्न है। फर्म A की स्थिति में सभी दिनों में बिक्री समान है। फर्म B की स्थिति में दैनिक बिक्री में कुछ विचरण है। परंतु फर्म C की स्थिति में विचरण की मात्रा बहुत अधिक है। यहाँ यद्पपि तीनों समंक कुलकों (data sets) के समांतर माध्य अभिन्न हैं, फिर भी मदों के बिखराव के विचार से वे भिन्न हैं। अतः विभिन्न समंक कुलकों के समान केन्द्रीय माप होते हुए भी वे मदों के विस्तार या बिखराव, अर्थात् अपकिरण के विचार से विभिन्न हो सकते हैं।

अपकिरण शब्द की व्याख्या एक अन्य अभिप्राय से भी कर सकते हैं। जब समंकों के सभी मद केन्द्रीय प्रवृत्ति के समान न हों तो प्रत्येक मद का केन्द्रीय प्रवृत्ति से अंतर (विचलन) एक निश्चित राशि होगा। अपकिरण यह निर्दिष्ट करता है कि केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों का औसत अंतर कितना है। ध्यान दीजिए कि फर्म B की स्थिति में व्यक्तिगत मदों की माध्य बिक्री (अर्थात् 60,000) से विचलन फर्म C के विचलनों की अपेक्षा बहुत कम हैं, इससे अभिप्राय है कि फर्म C की तुलना में फर्म B का माध्य बिक्री से विचलनों का औसत बहुत कम है। दूसरे शब्दों में फर्म C की तुलना में फर्म B की दैनिक बिक्री का अपकिरण बहुत कम है।

14.3 अपकिरण मापने का महत्व

विचरण (अपकिरण) की मापों का परिकलन निम्न प्रयोजनों से किया जाता है :

1 विचरण (अपकिरण) मापन, यह निर्दिष्ट करके कि माध्य किस सीमा तक सभी समंकों का प्रतिनिधित्व करता है, माध्य की विश्वसनीयता को निर्धारित करता ह। पहले चर्चा किए गए उदाहरण 1 में फर्म A की स्थिति में माध्य दैनिक बिक्री 60,000 रु. है, जो कि दैनिक बिक्री समंकों का आदर्श प्रतिनिधि है। फर्म B कि स्थिति में विचरण बहुत कम है, क्योंकि माध्य दैनिक बिक्री विभिन्न दिनों की बिक्री के आंकड़ों के सर्वथा निकट है। इसलिए इस स्थिति में माध्य दैनिक बिक्री को विभिन्न दिनों के बिक्री आंकड़ों का प्रतिनिधि मान सकते हैं। किंतु फर्म C की स्थिति में व्यक्तिगत आंकड़ों का विचरण बहुत अधिक है, इसलिए माध्य मान 60,000 रु. को सभी उच्च और निम्न आंकड़ों का, जैसे 2,10,000 रु. और 10,000 रु. का, प्रतिनिधि नहीं मान सकते।

2 अपकिरण की माप दो या दो से अधिक बंटनों की, विचरण के विचार से, तुलना करने में सहायक होती हैं।

3 विचरण मापन का एक अन्य प्रयोजन विचरण की प्रकृति और उसके कारण को ज्ञात करना है ताकि स्वयं विचरण पर नियंत्रण किया जा सके।

4 विचरण मापन अन्य सांख्यिकीय मापों, जैसे सहसम्बंध (correlation) समाश्रयण (regression), सांख्यिकीय अनुमान (inference) इत्यादि के प्रयोग को सुगम बना देना है।

14.4 अपकिरण के अच्छे माप की विशेषताएँ

जैसा कि आप जानते हैं, अपकिरण की माप मदों के उनके अपने माध्य से विचलनों का माध्य होती है, अर्थात् यह एक दूसरी कोटि का माध्य होता है। अतः इसमें वे सभी विशेषताएँ होनी चाहिए जो माध्य के एक अच्छी माप से अपेक्षित हैं। यूले और केण्डाल के अनुसार अपकिरण की एक अच्छी माप की विशेषताएँ निम्नलिखित हैं ।

1 सांख्यिकीय मापों का प्रयोग एक साधारण व्यक्ति द्वारा भी किया जाता है। इसलिए जटिल परिभाषाएँ और परिकलन विधियाँ वांछनीय नहीं हैं। यह समझने में सुगम तथा परिकलन में सरल होना चाहिए।

2 यह दृढ़ता से परिभाषित होना चाहिए ताकि एक ही समंक समूह के लिए सभी विधियाँ अभिन्न परिणाम प्रदान करें। विभिन्न विधियाँ विभिन्न परिणाम प्रदान करें यह उचित नहीं है।

3 यह सभी मदों पर आधारित होना चाहिए। यदि यह सभी मदों पर आधारित होगा तो इसके द्वारा प्रस्तुत परिणाम एक श्रेष्टतर प्रतिनिधि मान होगा। अतः अपकिरण की एक अच्छी माप को समस्त समंकों पर आधारित होना चाहिए।

4 यह और अधिक बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूल होना चाहिए। इससे अभिप्राय यह है कि दो परिणामों को संयुक्त करना, अशुद्ध प्रविष्टियों के लिए, परिणाम को समंजित करना, छूटे हुए मानों को आकलित करना आदि सभी मदों के यथार्थ मानों के ज्ञात न होने पर भी सम्भव होना चाहिए।

5 इसमें प्रतिचयन स्थिरता (sampling stability) होनी चाहिए। इससे यह अभिप्राय है कि प्रतिदर्श से प्राप्त परिणामों और समष्टि से प्राप्त संगत परिणामों का माध्य अंतर न्यूनतम होना चाहिए। यदि अपकिरण की किसी माप में यह विशेषता हो तो वह सर्वोत्तम माप होगा।

6 यह चरम मानों (extreme items) से अत्यधिक प्रभावित नही होना चाहिए। बहुधा चरम मान समंकों के यथार्थ प्रतिनिधि नहीं होते। अतः उनकी उपस्थिति से परिकलन पर अत्यधिक प्रभाव नहीं पड़ना चाहिए ।

यह सूची अपकिरण के एक अच्छे माप की अपेक्षित विशेषताओं की पूर्ण सूची नहीं है। परंतु अपकिरण की एक अच्छे माप के ये सर्वाधिक महत्वपूर्ण लक्षण हैं।

14.5 अपकिरण की निरपेक्ष और सापेक्ष माप

अपकिरण की उस माप को जो समंकों की मूल इकाई के पदों में प्रकट किया जाए **निरपेक्ष** माप कहते हैं। उदाहरण के लिए पहले चर्चा किये गए उदाहरण 1 में फर्म B की दैनिक बिक्री का विचरण 52,250 रु. से 68,250 रु. तक है। इसलिए समंकों का विस्तार 68,250 रु. - 52,250 रु. या 16,000 रु. की कोटि का है। यह बिक्री के विस्तार की निरपेक्ष माप है। यदि दो या दो से अधिक बंटन या श्रेणियाँ विभिन्न इकाइयों में व्यक्त हों तो उनके विचरण की तुलना के लिए समंकों की इकाइयों में व्यक्त ऐसे निरपेक्ष माप उपयुक्त नहीं होते। इसके विपरीत अपकिरण के सापेक्ष माप अनुपात या प्रतिशतता के रूप में प्राप्त किए जाते हैं। इसलिए प्रत्येक सापेक्ष माप समंकों की माप-इकाई से स्वतंत्र एक संख्या होती है। सापेक्ष अपकिरण की माप अपकिरण के एक निरपेक्ष माप का किसी उपयुक्त माध्य से या समंकों के एक चुने हुए मद से अनुपात होती है। इसीलिए इसे अपकिरण गुणांक भी कहते हैं। उदाहरण के लिए पहले चर्चा किए गए उदाहरण 1 में यदि बिक्री विस्तार, 16,000 रु. को बिक्री माध्य 60,000 रु. के अनुपात के रूप में प्रकट करें अर्थात् 16,000/60,000 रूप में, तो यह बिक्री विस्तार का एक सापेक्ष माप बन जाता है। यह मान एक शुद्ध संख्या है. और इसमें कोई विशिष्ट माप इकाई नहीं होती। इसी प्रकार, विस्तार 16,000 रु. को, दो चरम मानों के योग के अनुपात के रूप में (अर्थात् 16000/52250 + 68250 के रूप में) भी, प्रकट कर सकते हैं। यह भी बिक्री विस्तार का एक सापेक्ष माप प्रदान करता है। कुछ परिस्थितियों में, यद्यपि समंक एक समान इकाइयों में व्यक्त हैं, तथापि निरपेक्ष मापों द्वारा, उनके विचरण की तुलना निरर्थक होती है। दिल्ली से बम्बई की दूरी मापने में, 1 कि.मी. (1,00,00 सें.मी.) के विचरण की कोई सार्थकता नहीं है। परंतु 1.40 मीटर के एक कपड़े के टुकडे की लम्बाई मापने में, 10 सें.मी. के विचरण की बहुत अधिक सार्थकता है। अतः जब भी दो समंक समूहों में विचरण की तुलना करनी अभीष्ट हो तो यह तुलना सदैव सापेक्ष माप के पदों में की जाती है।

बोध प्रश्न क

1 अपकिरण का क्या अर्थ है ?

....

....

....

....

2 निरपेक्ष मापों और सापेक्ष मापों में भेद स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

3 बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं, या गलत।

i) विचरण से अभिप्राय केवल किसी समंक कुलक के मदों का विस्तार होता है।

ii) अपकिरण मापने का प्रयोजन केवल, माध्य की विश्वसनीयता का मूल्यांकन करना होता है।

iii) कुछ स्थितियों में निर्णय लेने के लिए स्वयं विचरण का प्रयोग किया जा सकता है।

iv) दो समंक कुलकों की तुलना केवल, अपकिरण के सापेक्ष मापों द्वारा ही की जा सकती है।

v) अपकिरण के सभी निरपेक्ष माप, शुद्ध संख्याएँ होती हैं।

vi) अपकिरण की एक अच्छे माप का समंकों के सभी मदों पर आधारित होना श्रेयस्कर है।

14.6 अपकिरण की माप

प्रायः प्रयुक्त होने वाले अपकिरण के निरपेक्ष माप निम्न हैं :

1 **समंकों के चुने हुए मदों पर आधारित**

i) **विस्तार** (Range): समस्त आंकड़ों का विस्तार।

ii) **अंतर-चतुर्थक विस्तार** (Inter Quartile Range) मध्य के 50x समंकों का विस्तार। सामान्यतः इसके स्थान पर चतुर्थक विचलन का अधिक प्रयोग करते हैं जो अंतर-चतुर्थक विस्तार का आधा होता है।

2 **समंकों के सभी मदों पर आधारित**

i) **माध्य विचलन** (Mean Deviation) केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी निर्दिष्ट माप से निरपेक्ष विचलनों का समांतर माध्य।

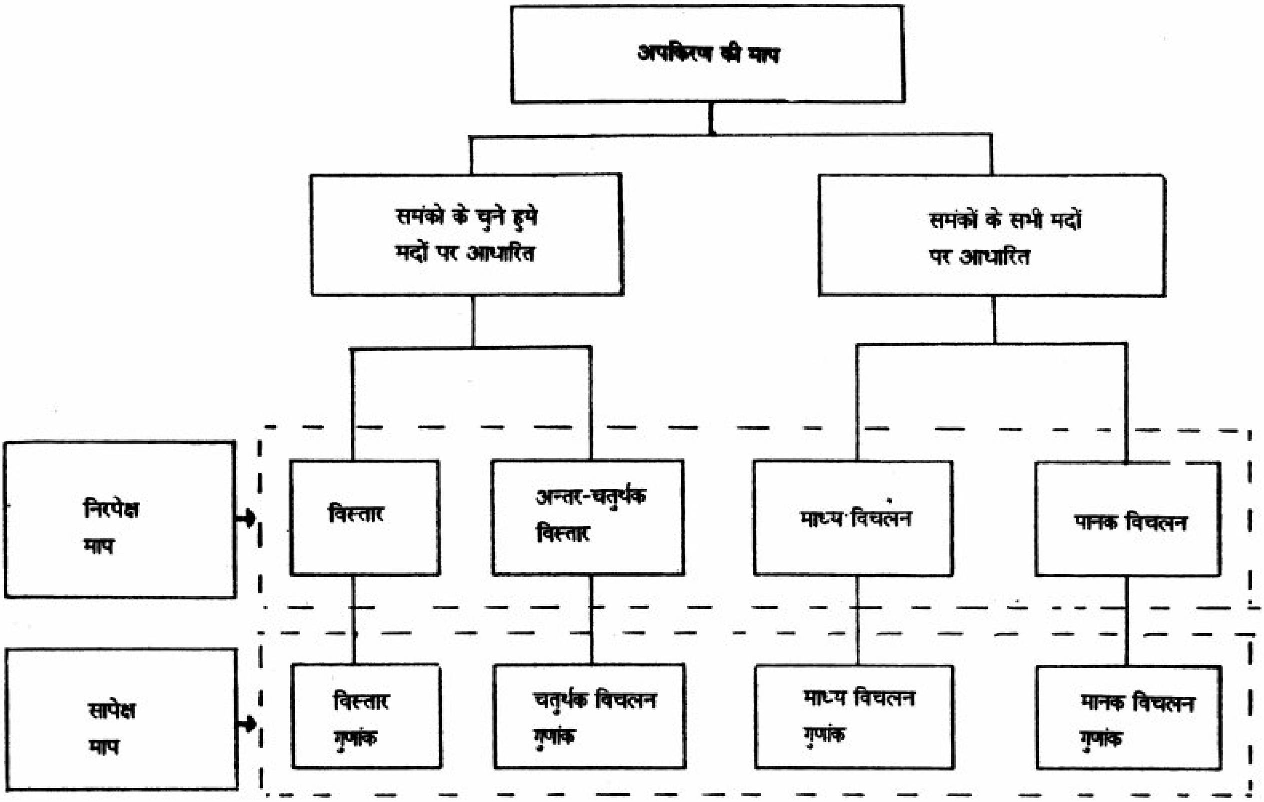
ii) **मानक विचलन** (Standard Deviation) या समांतर माध्य से विचलन-वर्ग-माध्य-मूल।

iii) **आरेखीय विधि :** लारेंज वक्र (Lorenz Curve) अपकिरण के निरपेक्ष मापों के संगत अपकिरण के सापेक्ष माप इस प्रकार हैं :

अपकिरण के निरपेक्ष माप	**अपकिरण के सापेक्ष माप**
1 विस्तार	विस्तार गुणांक (Coefficient of Range)
2 चतुर्थक विचलन	चतुर्थक विचलन गुणांक (Coefficient of Quartile Deviation)
3 माध्य विचलन	माध्य विचलन गुणांक (Coefficient of Mean Deviation)
4 मानक विचलन	मानक विचलन गुणांक (Coefficient of Standard Deviation)

मानक विचलन गुणांक को **प्रतिशत रूप में** प्रकट करने पर, उसे विचरण गुणांक (Coefficient Variation) कहते हैं। अपकिरण के विभिन्न मापों को चित्र 14.1 में दर्शाया गया है।

चित्र 14.1 अपकिरण की माप



14.7 विस्तार (Range)

एक समंक कुलक के उच्चतम (संख्यात्मक रूप में अधिकतम) मान और निम्नतम (संख्यात्मक रूप में न्यूनतम) मान के अंतर को विस्तार कहते हैं।

इस प्रकार, विस्तार = $x_{max} - x_{min}$

जहां x_{max} = उच्चतम मान, x_{min} = निम्नतम माप

उदाहरण I, जिसकी चर्चा हम पहले कर चुके हैं, तीनों फर्मों के दैनिक बिक्री आंकड़ों पर विचार कीजिए और विस्तार परिकलित कीजिए।

फर्म A के लिए, विस्तार = 60,000 – 60,000 = 0

फर्म B के लिए, विस्तार = 68250 – 52,250 = 16,000

फर्म C के लिए, विस्तार = 2,10,000 – 18,000 = 1,92,000

विस्तार के मान का स्पष्टीकरण बहुत सरल है। इस उदाहरण में फर्म A की स्थिति में, दैनिक बिक्री का विचरण शून्य है। फर्म B की स्थिति में विचरण कम है और फर्म C की स्थिति में, विचरण बहुत अधिक है। वर्गीकृत समंकों के लिए, उच्चतम वर्ग की ऊपरि सीमा और न्यूनतम वर्ग की निम्न सीमा के अंतर को सन्निकटतः विस्तार परिभाषित करते हैं।

विस्तार के संगत सापेक्ष माप को **विस्तार गुणांक** कहते हैं, जिसे प्राप्त करने के लिए विस्तार को चरम मानों के योग के अनुपात के रूप में व्यक्त करते हैं। यहाँ हम विस्तार को माध्य के अनुपात के रूप में व्यक्त नहीं करते क्योंकि विस्तार माध्य पर आश्रित नहीं होता। यह आंकड़ों के केवल दो चुने हुए मदों से ही संबंधित होता है। अतः विस्तार गुणांक को निम्नानुसार परिभाषित किया जाता है :

विस्तार गुणांक = $(x_{max} - x_{min})/(x_{max} + x_{min})$

उदाहरण 2 का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए और विस्तार के परिकलन से सम्बद्ध प्रक्रिया को समझिए

उदाहरण 2

निम्न आंकड़ों से विस्तार गुणांक का परिकलन कीजिए :

बिक्री (लाख रुपयों में)	दिनों की संख्या
30 — 40	12
40 — 50	18
50 — 60	20
60 — 70	19
70 — 80	13
80 — 90	8

हलः

विस्तार $= x_{max} - x_{min} = 90 - 30$

$= 60$

$\therefore$ विस्तार गुणांक $= \frac{x_{max} - x_{min}}{x_{max} + x_{min}} = \frac{90 - 30}{90 + 30}$

$= \frac{60}{120}$

$= 0.5$

विस्तार का परिकलन बहुत ही सरल है और इससे आंकड़ों के विचरण के बारे में कुछ अनुमान मिल जाता है। क्योंकि विस्तार के परिकलन में केवल दो चरम मानों का ही प्रयोग होता है, इसलिए यह विचरण का एक अशोधित (Crude) माप है। विस्तार की संकल्पना का सांख्यिकीय गुण नियंत्रण में बहुत अधिक प्रयोग होता है । शेयर, डिबेंचर और कृषि पण्यों जैसी उन वस्तुओं के विचरण के अध्ययन में विस्तार बड़ा सहायक होता है जो मूल्य परिवर्तनों के लिए बड़े ही सुग्राही हैं। मौसम के पूर्व अनुमान के लिए विस्तार एक अच्छा सूचक है । उदाहरण के लिए, दूरदर्शन के मौसम पूर्वानुमानों में।

14.8 चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

पहले और तीसरे चतुर्थकों के अंतर के आधे को **चतुर्थक विचलन** परिभाषित करते हैं। चतुर्थकों के परिकलन की विधियों का अध्ययन आप पहले ही इकाई 11 में कर चुके हैं।

चतुर्थक विचलन $= \frac{1}{2}(Q_3 - Q_1)$

जहां Q_1 पहला चतुर्थक है और Q_3 तीसरा चतुर्थक। क्योंकि Q_1 और Q_3 का अंतर दोनों चतुर्थकों के बीच की दूरी को निरूपित करता है, इसलिए इस अंतर को **अंतर चतुर्थक विस्तार** भी कह सकते हैं, तथा चतुर्थक विचलन को अर्द्ध अंतर-चतुर्थक विस्तार कह सकते हैं।

चतुर्थक विचलन (QD) दो सम्बद्ध चतुर्थकों पर आश्रित है और उच्चतम 25% तथा निम्नतम 25% प्रेक्षणों की उपेक्षा करता है, इसलिए यह चरम मानों से निष्प्रभावित रहता है। चतुर्थक विचलन का एक अन्य गुण यह है कि यह विचरण की एक मात्र ऐसी माप है, जिसे विवृत मुखी (open-end) बंटन के लिए प्रयोग कर सकते हैं । चतुर्थक विचलन की मुख्य सीमा यह है कि यह सभी प्रेक्षणों के मानों पर आधारित नहीं होता। यह केवल मध्य के 50% प्रेक्षणों पर आधारित होता है।

चतुर्थक विचलन पर आधारित, अपकिरण के सापेक्ष माप को **चतुर्थक विचलन गुणांक** कहते हैं। चतुर्थक विचलन गुणांक को निम्नानुसार परिभाषित करते हैं :

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

ऐसा इसलिए है कि ये दो चतुर्थक, आंकड़ों के दो चुने हुए मद भी हैं, और इनका आंकड़ों के माध्य से कोई सम्बंध नहीं है। निम्न उदाहरण का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए, इससे आप चतुर्थक विचलन के परिकलन की प्रक्रिया को समझ सकेंगे।

उदाहरण 3

निम्न आंकड़ों से, चतुर्थक विचलन और उसका गुणांक परिकलित कीजिए :

भार (कि.ग्रा. में) :	60	61	62	63	65	70	75	80
कामगारों की संख्या :	1	3	5	7	10	3	1	1

हल :

चतुर्थक विचलन और उसके गुणांक का परिकलन

भार (कि.ग्रा. में)	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
60	1	1
61	3	4
62	5	9
63	7	16
65	10	26
70	3	29
75	3	30
80	1	31 = n

Q_1 = 1/4 (n + 1) या 8 वें प्रेक्षण का मान

= 62 कि.ग्रा. (क्योंकि 8 वाँ प्रेक्षण इसी वर्ग में आता है)

Q_3 = 3/4 (n + 1) या 24 वें प्रेक्षण का मान

= 65 (क्योंकि 24 वां प्रेक्षण इसी वर्ग में आता है)

∴ चतुर्थक विचलन $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= 1/2\,(65 - 62)$

= 1.5 कि. ग्रा.

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

$= \frac{65 - 62}{65 + 62}$

$= 0.024$

उदाहरण 4

निम्न आंकड़ों से, अर्ध-अंतर चतुर्थक विस्तार और इसका गुणांक परिकलित कीजिए :

अंक :	0 - 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90
विद्यार्थियों की संख्या :	11	18	25	28	30	33	22	15	22

हल :

चतुर्थक विचलन परिकलित करने के लिए हमें पहले चतुर्थक और तीसरे चतुर्थक के मान अभीष्ट हैं, जो निम्न सारणी से प्राप्त कर सकते हैं :

अंक	आवृत्ति (f)	संचयी आवृत्ति (cf.)
0 — 10	11	11
10 — 20	18	29
20 — 30	25	54
30 — 40	28	82
40 — 50	30	112
50 — 60	33	145
60 — 70	22	167
70 — 80	15	182
80 — 90	22	204

Q_1 के नीचे N/4 प्रेक्षण अर्थात् 51 (= 204/4) प्रेक्षण हैं।

इसलिए यह वर्ग 20-30 के अंतर्गत है।

$$Q_1 = l + \frac{N/4 - C}{f} \times i$$

जहां l = चतुर्थक वर्ग की निम्न सीमा

c = चतुर्थक वर्ग के पूर्ववर्ती वर्ग की संचयी आवृत्ति

f = चतुर्थक वर्ग की साधारण आवृत्ति

i = चतुर्थक वर्ग अंतराल का आमाप

$$\therefore Q_1 = 20 + \frac{51 - 29}{25} \times 10$$

$$= 28.8$$

Q_3 के नीचे 3N/4 प्रेक्षण अर्थात् 153 (= 3/4 × 204) प्रेक्षण हैं। अतः Q_3 वर्ग 60-70 के अंतर्गत है।

$$Q_3 = l + \frac{3N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 60 + \frac{153 - 145}{22} \times 10$$

$$= 63.64$$

अर्ध अंतर-चतुर्थक विस्तार या चतुर्थक विचलन :

या $QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$= \frac{(63.64 - 28.8)}{2}$$

= 17.42 अंक

चतुर्थक विचलन के संगत, अपकिरण के सापेक्ष माप, चतुर्थक विचलन, गुणांक का परिकलन निम्नानुसार करेंगे :

चतुर्थक विचलन गुणांक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$

(Coefficient of QD) $= \frac{63.64 - 28.8}{63.64 + 28.8}$

$= 0.37$

उदाहरण 5

निम्न आंकड़ों के लिए अपकिरण की एक उपयुक्त माप परिकलित कीजिए।

मासिक व्यय (रु.)	कुटुम्बों की संख्या
850 से कम	12
850 — 900	16
900 — 950	39
950 —1000	56
1000 — 1050	62
1050 — 1100	75
1100 — 1150	30
1150 से अधिक	10

हल :

क्योंकि आवृत्ति बंटन के विवृत मुखी वर्ग हैं, इसलिए, चतुर्थक विचलन, अपकिरण का सर्वाधिक उपयुक्त माप होगा।

मासिक व्यय (रु.)	कुटुम्बों की संख्या	संचयी आवृत्ति
850 से कम	12	12
850 — 900	16	28
900 — 950	39	67
950 — 1000	56	123
1000 — 1050	62	185
1050 — 1100	75	260
1100 — 1150	30	290
1150 से अधिक	10	300 = n

Q_1 के नीचे N/4 प्रेक्षण, अर्थात् 75 (= 300/4) प्रेक्षण हैं, इसलिए Q_1, वर्ग 950-1000 के अंतर्गत है।

$$\therefore Q_1 = l + \frac{N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 950 + \frac{75 - 67}{56} \times 50$$

$$= 957.14 \text{ रुपये}$$

Q_3 के नीचे 3/4 प्रेक्षण अर्थात् 225 $\left(= \frac{3 \times 300}{4}\right)$ प्रेक्षण हैं, इसलिए Q_3, वर्ग 1050-1100 के अंतर्गत है।

$$\therefore Q_3 = l + \frac{3N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 1050 + \frac{225 - 185}{75} \times 50$$

$$= 1076.67 \text{ रुपये}$$

$$\therefore QD = \frac{(Q_3 - Q_1)}{2}$$

$$= \frac{(1076.67 - 957.14)}{2}$$

= 59.76 रुपये

बोध प्रश्न ख

1 अपकिरण के निरपेक्ष और सापेक्ष मापों में भेद स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

2 चतुर्थक विचलन की परिभाषा लिखिए।

....

....

....

....

3 विस्तार और विस्तार गुणांक में भेद स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

4 हस्पताल के आपात कक्ष में प्रतिदिन उपचार किए गए रोगियों की संख्या से सम्बंधित निम्न आंकड़ों के लिए विस्तार और चतुर्थक विचलन परिकलित कीजिए :

45, 50, 36, 59, 28, 42, 55, 67, 33, 35, 40, 50

5 निम्न आंकड़ों के लिए विस्तार, चतुर्थक विचलन और सम्बंधित गुणांकों को परिकलित कीजिए :

आमाप :	5 – 7	8 – 10	11 – 13	14 – 16	17 – 19
आवृत्ति :	14	24	38	20	4

....

....

....

....

....

....

6 बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं या गलत

i) विस्तार, दो चरम मानों के बीच के मानों के बंटन की उपेक्षा करता है।

ii) विवृतमुखी आंकड़ों के लिए, विस्तार का परिकलन कर सकते हैं।

iii) चतुर्थक विचलन और $P_{75} - P_{25}$ का अंतर शतमक विस्तार अभिन्न है।

iv) विवृतमुखी आंकड़ों के लिए, चतुर्थक विचलन, एक श्रेष्ठतम माप है।

v) चतुर्थक विचलन का सापेक्ष माप, माध्यिका पर आधारित होता है।

14.9 माध्य विचलन (Mean Deviation)

जैसा कि आपको ज्ञात है, अपकिरण के एक आदर्श माप के लक्षणों में से एक यह है कि वह दिए गए समंक तुलक के सभी प्रेक्षणों पर आधारित हो। इस दृष्टि से, विस्तार और चतुर्थक विचलन आदर्श माप नहीं है क्योंकि ये समंकों के सभी प्रेक्षणों पर आधारित नहीं होते। परंतु इस अर्थ में, माध्य (या औसत) विचलन एक आदर्श माप है क्योंकि यह समंकों के सभी प्रेक्षणों पर आधारित होता है। इस माप को निर्दिष्ट आंकड़ों के माध्य से व्यक्तिगत मदों के निरपेक्ष विचलनों के समांतर माध्य के रूप में परिकलित करते हैं। माध्य विचलन के परिकलन में जिस माध्य का बहुधा प्रयोग करते हैं, वह है समांतर-माध्य या माध्यिका, यद्यपि कभी-कभी बहुलक (mode) का प्रयोग भी कर लेते हैं। निरपेक्ष विचलनों से अभिप्राय है कि विचलनों के यथार्थ चिन्हों की उपेक्षा कर उन्हें धनात्मक ही मान लेते हैं।

यदि प्रेक्षण $x_1, x_2, ... x_4$ दिए हों तो माध्य A से माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए हम पहले विचलन, $x_1-A, x_2-A, ... x_n-A$ ज्ञात करते हैं। इनमें से कुछ विचलन धनात्मक (positive) होंगे तो कुछ ऋणात्मक (negative)। यदि हम x_1-A के धनात्मक मान को दिखाने के लिए प्रतीक (x_1-A) का प्रयोग करें तो निरपेक्ष विचलनों का योगफल होगा :

$$(x_1-A) + (x_2-A) + ... + (x_n-A) = \sum (x-A)$$

इन निरपेक्ष विचलनों का समातर माध्य ही माध्य विचलन होता है

$$\therefore \text{ A से, माध्य विचलन} = \frac{1}{n} \sum (x-A)$$

1 जब A, समांतर माध्य $\bar{x}$ हो, तो

$$\bar{x} \text{ से, माध्य विचलन} = \frac{1}{n} \sum (x-\bar{x})$$

2 जब A, माध्यिका (M_d) हो, तो

$$M_d \text{ से माध्य विचलन} = \frac{1}{n} \sum (x-M_d)$$

3 जब A, बहुलक (M_o) हो, तो

$$M_o \text{ से माध्य विचलन} = \frac{1}{n} \sum (x-M_o)$$

यदि निर्दिष्ट आंकड़े आवृत्ति बंटन के रूप में हों तो समांतर माध्य परिकलन प्रक्रिया के अनुरूप प्रक्रिया अपना कर $\bar{x}$ से, माध्य विचलन $= \frac{1}{n} \sum f(x-\bar{x})$

इसी प्रकार,

$$M_d \text{ से मांध्य विचलन} = \frac{1}{n} \sum f(x-M_d)$$

$$\text{और } M_o \text{ से माध्य विचलन} = \frac{1}{n} \sum (1.x-M_o)$$

माध्य विचलन के साथ सदैव उस माध्य के नाम (या प्रतीक) को निर्दिष्ट करते हैं जिस माध्य से विचलन लिए जाएँ। परंतु जब $\bar{x}$ से विचलन लिए जाएँ, तो कुछ लेखक, '$\bar{x}$ से माध्य विचलन' के स्थान पर केवल "माध्य विचलन" का प्रयोग करते हैं। माध्य विचलन की एक महत्वपूर्ण विशेषता यह है कि जब विचलन माध्यिका से लिए जाएँ तो इसका मान न्यूनतम होता है। अर्थात् माध्यिका से माध्य विचलन न्यूनतम होता है। माध्य विचलन के संगत सापेक्ष माप को, जिसे माध्य विचलन गुणांक कहते हैं, प्राप्त करने के लिए माध्य विचलन को उस विशेष माध्य से भाजित करते हैं, जिसका प्रयोग माध्य विचलन के परिकलन में किया गया हो। इस प्रकार, यदि माध्यिका से माध्य विचलन परिकलित किया गया हो तो माध्य विचलन को माध्यिका से

भाजित कर माध्य विचलन गुणांक प्राप्त करते हैं। M_d से, माध्य विचलन गुणांक = (M_d से, माध्य विचलन)/M_d ।

इसीप्रकार

$\bar{x}$ से, माध्य विचलन गुणांक = ($\bar{x}$ से, माध्य विचलन)। $\bar{x}$. माध्य विचलन, सभी प्रेक्षणों पर आधारित होता है, और इसलिए समंक कुलक के प्रत्येक मद के विचरण को उचित आदर देता है। परंतु चिन्हों की उपेक्षा करने की प्रथा और विचलनों के निरपेक्ष मान लेने के कारण, माध्य विचलन पर बीजगणितीय प्रतिपादन कठिन हो जाता है। यद्यपि माध्य विचलन विचरण का एक अच्छा माप है, फिर भी इसका उपयोग सीमित है। यदि हमें केवल कुछ समंक कुलकों के विचरणों को मापना और उनकी तुलना करना अभीष्ट हो तो माध्य विचलन का प्रयोग कर सकते हैं। माध्य विचलन की संकल्पना को अधिक स्पष्ट रूप से समझने के लिए, निम्न उदाहरणों का ध्यानपूर्वक अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 6

निम्न मानों का माध्यिका (median) से माध्य विचलन (mean deviation) परिकलित कीजिए :

18, 25, 63, 59, 29, 72, 17, 25, 105, 87

हल :

क्योंकि प्रेक्षणों की संख्या 10 है, जो कि एक सम संख्या है, इसलिए प्रेक्षणों को क्रमबद्ध करने के उपरांत, दो मध्यस्थतम प्रेक्षणों का समांतर माध्य ही माध्यिका होगी।

17, 18, 25, 25, $\overline{29}$, $\overline{59}$, 63, 72, 87, 105

माध्यिका = 1/2 (29 + 59) = 44

माध्य विचलन का परिकलन

x	$(x - M_d)$
18	26
25	19
63	19
59	15
29	15
72	28
17	27
25	19
105	61
87	43
कुल	$\Sigma (x-M_d) = 272$

माध्यिका से माध्य विचलन $= \frac{1}{n} \Sigma (x-M_d)$

$= 1/10 \times 272$

$= 27.2$

उदाहरण 7

निम्न श्रेणी के समांतर माध्य से माध्य विचलन ज्ञात कीजिए :

x :	10	11	12	13	14	कुल
आवृत्ति :	3	12	18	12	3	48

हल :

समांतर माध्य से माध्य विचलन का परिकलन

x	f	fx	$(x-\bar{x})$	$f(x-\bar{x})$
10	3	30	2	6
11	12	132	1	12
12	18	216	0	0
13	12	156	1	12
14	3	42	2	6
कुल	48	576		36

$$\bar{x} = \frac{\sum fx}{\sum f} = \frac{576}{48} = 12$$

$\therefore$ माध्य से माध्य विचलन $= \frac{1}{n} \sum f(x-\bar{x})$

$$= 36/48 = 0.75$$

उदाहरण 8

एक कम्पनी की दैनिक बिक्री संबंधी निम्न वर्गीकृत आंकड़ों के लिए, समांतर माध्य से माध्य विचलन गुणांक ज्ञात कीजिए :

बिक्री (000 रु.)	कम्पनियों की संख्या
40 — 50	5
50 — 60	15
60 — 70	25
70 — 80	30
80 — 90	20
90 — 100	5

हल :

माध्य विचलन ज्ञात करने के लिए, निम्न सारणी की संरचना कीजिए।

बिक्री (000 रु.)	मध्यमान (x)	कम्पनियों की संख्या (f)	fx	$(x-\bar{x})$	$f(x-\bar{x})$
40 — 50	45	5	225	26	130
50 — 60	55	15	825	16	240
60 — 70	65	25	1625	6	150
70 — 80	75	30	2250	4	120
80 — 90	85	20	1700	14	280
90 — 100	95	5	475	24	120

$n = 100 \; \sum fx = 7100 \; \sum f(x-\bar{x}) = 1040$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum fx = 7100/100 = 71$$

समांतर माध्य से माध्य विचलन $= \frac{1}{n} \sum f(x-\bar{x})$

$$= \frac{1 \times 1040}{100}$$

= 10.40 हजार रुपये

$$\text{माध्य विचलन गुणांक} = \frac{\bar{x} \text{ से माध्य विचलन}}{\bar{x}} \quad \left(\text{या } \frac{MD(\bar{x})}{\bar{x}}\right)$$

$$= \frac{10.40}{71}$$

$$= 0.146$$

उदाहरण 9

एक एजेंट के द्वारा बीमा किए गए 80 जीवन बीमा निगम की बीमा पालिसी धारकों का आवृत्ति बंटन नीचे दिया गया है। माध्यिका से माध्य विचलन गुणांक परिकलित कीजिए :

आयु वर्ग (वर्षों में)	आवृत्ति
16 — 20	8
21 — 25	15
26 — 30	13
31 — 35	20
36 — 40	11
41 — 45	7
46 — 50	3
51 — 55	2
56 — 60	1

हल :

माध्यिका से माध्य विचलन का परिकलन

आयु वर्ग (वर्षों में)	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति (c.f)	वर्ग मध्य बिंदु (M)	$(M-M_d)$ $(M-31.5)$	$f(x-M_d)$
16 — 20	8	8	18	13.5	108.0
21 — 25	15	23	23	8.5	127.5
26 — 30	13	36	28	3.5	45.5
31 — 35	20	56	33	1.5	30.0
36 — 40	11	67	38	6.5	71.5
41 — 45	7	74	43	11.5	80.5
46 — 50	3	77	48	16.5	49.5
51 — 55	2	79	53	21.5	43.0
56 — 60	1	80	58	26.5	26.5
कुल $\Sigma f = n = 80$					$\Sigma f(M-M_d) = 582.0$

माध्यिका के नीचे N/2 या 40 प्रेक्षण है। इसलिए माध्यिका वर्ग 31– 35 या 30.5 – 35.5 (यथार्थ सीमाओं के पदों में) के अंतर्गत है।

$$\text{माध्यिका} = l + \frac{N/2 - c}{f} \times i$$

$$= 30.5 + \frac{40 - 36}{20} \times 5$$

= 31.5 वर्ष

M_d से माध्य विचलन $= \sum f \left(\frac{M-Md}{\sum f}\right) = \frac{582}{80} = 7.275$ वर्ष

M_d से माध्य विचलन गुणांक $= \frac{M_d \text{ से माध्य विचलन}}{M_d}$

$$= \frac{7.275}{31.5} = 0.23$$

14.10 सारांश

अपकिरण समंकों के विस्तार या बिखराव को निरूपित करता है। इसका प्रयोग केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी माप से मदों के विचलनों के माध्य को प्रकट करने के लिए भी करते हैं। अपकिरण का परिकलन किसी माध्य की विश्वसनीयता का मूल्यांकन करने के लिए दो या दो से अधिक समंक कुलकों के विचरणों की तुलना करने के लिए या स्वयं विचरण का नियंत्रण करने के लिए करते हैं। अपकिरण की एक अच्छी माप सभी प्रेक्षणों पर आधारित होनी चाहिए। इसका परिकलन सुगम होना चाहिए और इस पर प्रतिचयन उच्चावचनों का न्यूनतम प्रभाव होना चाहिए। यह आगे के बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूल होना चाहिए।

अपकिरण के सापेक्ष मापों का परिकलन दो या दो से अधिक समंक कुलकों में विचरण की तुलना करने के लिए करते हैं। इन्हें प्राप्त करने के लिए अपकिरण के निरपेक्ष मापों को एक उपयुक्त माध्य या आंकड़ों के दो चुने हुए मदों के योगफल के अनुपात के रूप में प्रकट करते हैं। प्रायः प्रयोग में आने वाले अपकिरण के विभिन्न माप हैं : विस्तार, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन और मानक विचलन। विस्तार को आंकड़ों के उच्चतम और निम्नतम मदों के अंतर के रूप में परिभाषित करते हैं। यह समस्त आंकड़ों के विस्तार को प्रकट करता है। चतुर्थक विचलन Q_1 और Q_3 के अंतर का आधा होता है। यह केवल मध्यस्थ 50% मदों पर आधारित होता है। माध्य विचलन केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी माप से मदों के निरपेक्ष विचलनों का समांतर माध्य होता है। केन्द्रीय प्रवृत्ति का यह माप समांतर-माध्य, माध्यिका या कई बार बहुलक भी हो सकता है।

विवृतमुखी आंकड़ों के लिए चतुर्थक विचलन एक उपयुक्त माप है। जब चरम मानों को उचित महत्व देना हो, जैसे गुण नियंत्रण में, मूल्यों के अध्ययन में, या मौसम सबंधी आंकड़ों में, तो विस्तार उपयोगी होता है। क्योंकि माध्य विचलन सभी मदों पर आधारित होता है, इसलिए बहुत सी स्थितियों में यह समंकों के विचरण का अन्य दो मापों की तुलना में श्रेष्ठतर प्रतिनिधि होता है।

14.11 शब्दावली और प्रतीक सूची

अंतर-चतुर्थक विस्तार : अपकिरण का एक माप जो मध्यस्थ 50% आंकड़ों के विस्तार (Q_3-Q_1) पर आधारित है।

माध्य विचलन : समांतर माध्य, माध्यिका या बहुलक से मदों के निरपेक्ष विचलनों का समांतर माध्य।

चतुर्थक विचलन : पहले और तीसरे चतुर्थकों के बीच की दूरी का आधा।

विस्तार : किसी समंक कुलक में अधिकतम और न्यूनतम मानों में अंतर।

प्रतीक सूची (Symbols)

ब्लाक 3 में दी गई प्रतीकों की सूची के क्रम में इस इकाई में प्रयुक्त अपकिरण के मापों के सम्बंध में अतिरिक्त प्रतीक नीचे दिए गए हैं :

माध्य विचलन : MD, δ, A D

समांतर माध्य से माध्य विचलन : M D ($\bar{x}$) $\delta\bar{x}$, AD($\bar{x}$)

माध्यिका से माध्य विचलन : M D (M_d), δMd, AD (Md)

बहुलक से माध्य विचलन : MD (M_o), δM_o, AD (M_o)

चतुर्थक विचलन : QD, Q

विस्तार : R

14.12 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 3 i) गलत ii) गलत iii) सही iv) सही v) गलत vi) सही

ख 4 विस्तार = 39, QD = 9.25

5 विस्तार = 15, विस्तार गुणांक 682

Q.D. = 2.2725 Q.D. का गुणांक = .1

6 i) सही ii) गलत iii) गलत iv) सही v) गलत

14.13 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

प्रश्न

1 अपकिरण से आप क्या समझते हैं ? सापेक्ष अपकिरण की माप के उद्देश्य तथा विधियों की समीक्षा कीजिए।

2 माध्य विचलन किसे कहते हैं ? इसके गुणों और दोषों का पुनरावलोकन कीजिए।

अभ्यास

1 निम्न आंकड़ों के लिए, चतुर्थक विचलन और $\bar{x}$ से माध्य विचलन परिकलित कीजिए :

आयु (वर्षों में) :	20	30	40	50	60	70	80
सदस्यों की संख्या :	3	61	132	153	140	51	3

2 20 लम्बी दूरी के टेलीफोन कालों का, काल अवधि के विचार से आवृत्ति बंटन इस प्रकार है :

काल की अवधि	आवृत्ति
4 या अधिक, परंतु 8 से कम	4
8 या अधिक, परंतु 12 से कम	5
12 या अधिक, परंतु 16 से कम	7
16 या अधिक, परंतु 20 से कम	2
20 या अधिक, परंतु 24 से कम	1
24 या अधिक, परंतु 28 से कम	1
कुल	20

समांतर माध्य, माध्यिका और चतुर्थक विचलन परिकलित कीजिए।

3. निम्न आंकड़ों के लिए माध्यिका से माध्य विचलन और माध्य विचलन गुणांक परिकलित कीजिए।

बिक्री ('000 रु.)	कम्पनियों की संख्या
20 से कम	3
30 से कम	9
40 से कम	20
50 से कम	23
60 से कम	25

4 बिजली की घरेलू खपत के एक सर्वेक्षण में खपत की गई बिजली इकाइयों के विचार से निम्न आवृत्ति बंटन प्राप्त हुआ। चतुर्थक विचलन और उसका गुणांक परिकलित कीजिए :

इकाइया	उपभोक्ताओं की संख्या
200 से कम	9
200 — 400	18
400 — 600	27
600 — 800	32
800 — 1000	45
1000 — 1200	38
1200 — 1400	20
1400 और अधिक	11

5 निम्न आंकड़ों के लिए समांतर माध्य से और माध्यिका से माध्य विचलन परिकलित कीजिए :

वर्ग अंतराल :	0 — 9	10 — 19	20 — 29	30 — 39	40 — 49	50 — 59
आवृत्ति :	15	36	53	42	17	2

6 निम्न आंकड़ों के लिए बहुलक से माध्य विचलन और उसका गुणांक परिकलित कीजिए :

प्रति मद त्रुटियों की संख्या	आवृत्ति
0 — 5	18
5 — 10	32
10 — 15	50
15 — 20	75
20 — 25	125
25 — 30	150
30 — 35	100
35 — 40	90
40 — 45	80
45 — 50	50

7 निम्न आंकड़ों के लिए माध्य विचलन और उसका गुणांक परिकलित कीजिए :

आवेदन किए गए शेयरों की संख्या	आवेदकों की संख्या
50 — 100	2500
100 — 150	1500
150 — 200	1300
200 — 250	1100
250 — 300	900
300 — 350	750
350 — 400	675
400 — 450	525
450 — 500	450

नोट : ये प्रश्न/अभ्यास आपको इस इकाई को भलीभांति समझने में सहायक होंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। परंतु अपने उत्तर विश्वविद्यालय को न भेजिए। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 15 अपकिरण की माप II

इकाई की रूपरेखा

15.0 उद्देश्य
15.1 प्रस्तावना
15.2 मानक विचलन
 15.2.1 मानक विचलन का अर्थ
 15.2.2 परिकलन की विधियाँ
 15.2.3 विशेषताएं
 15.2.4 गुण व परिसीमाएँ
15.3 विचरण गुणांक
15.4 कुछ अन्य उदाहरण
15.5 लॉरेंज वक्र
15.6 अपकिरण की मापों की तुलना
15.7 सारांश
15.8 शब्दावली और प्रतीक सूची
15.9 बोध प्रश्नों के उत्तर
15.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

15.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के बाद आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- मानक विचलन और विचरण गुणांक की परिभाषा कर सकें
- विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए इनका परिकलन कर सकें
- मानक विचरान के गुणों और परिसीमाओं की व्याख्या कर सकें
- लॉरेंज वक्र बना सकें तथा आलेखीय विधि द्वारा मदों की असमानताओं का निर्धारण कर सकें
- अपकिरण की विभिन्न मापों की तुलना कर सकें तथा उपयुक्त स्थानों पर उनका प्रयोग कर सकें।

15.1 प्रस्तावना

इकाई 14 में आपने अपकिरण के तीन मापों अर्थात् विस्तार, चतुर्थक विचलन तथा माध्य विचलन के विषय में पढ़ा है। इनमें से प्रथम दो, समंकों की दो चुनी हुई मदों पर आधारित होती हैं, तथा तीसरी माप, प्रत्येक मद के मूल्यों का प्रयोग करके परिकलित की जाती है। किन्तु माध्य विचलन के परिकलन में केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के ऋणात्मक चिन्हों पर ध्यान नहीं दिया जाता। चूंकि हम परिकलन के अंतर्गत आए चिन्हों की अवहेलना कर देते हैं, अतः माध्य विचलन की कुछ परिसीमाएँ हो जाती हैं। अपकिरण की एक अन्य माप, अर्थात् मानक विचलन चिन्हों की इस समस्या का समाधान प्रस्तुत करती है। इस इकाई में आप विभिन्न प्रकार के समंकों के लिए मानक विचलन और इसके गुणांकों के परिकलन की विधियों तथा उनके गुणों, परिसीमाओं और उपयोगों का अध्ययन करेंगे। आप लॉरेंज वक्र के विषय में भी जानकारी प्राप्त करेंगे, जो कि अपकिरण ज्ञात करने की आलेखीय विधि है।

15.2 मानक विचलन (Standard Deviation)

जैसा कि पहले विवेचन किया गया है, माध्य विचलन का परिकलन करते समय हम केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के ऋणात्मक चिन्हों की अवहेलना कर देते हैं। ऐसा इसलिये है कि अपकिरण में हम केवल यह जानना चाहते हैं कि औसतन मदें केन्द्रीय प्रवृत्ति से कितनी विचलित हैं, तथा इस तथ्य पर विचार नहीं करते कि वे केन्द्रीय प्रवृत्ति से कम हैं अथवा अधिक। परिकलन के अंतर्गत आए चिन्हों की इस प्रकार अवहेलना करने से माप की कुछ परिसीमाएँ उत्पन्न हो जाती हैं। चिन्हों की अवहेलना करने का एक गणितीय हल उनका वर्गफल निकालना है। चूँकि किसी ऋणात्मक मद का वर्गफल धनात्मक हो जाता है, अतः अपकिरण की एक नई

माप परिभाषित होती है जिसमें विचलनों को पहले वर्गांकित किया जाता है (चिन्हों की अवहेलना करने के लिए) तथा फिर उनका औसत निकाला जाता है। इस प्रकार प्राप्त मूल्य विचलनों के वर्गों का माध्य प्रदान करता है, न कि प्रत्यक्ष रूप से विचलनों का। अतः अंत में इस मूल्य का वर्गमूल निकाला जाता है। अतः इस प्रकार प्राप्त परिणाम विचलनों का अप्रत्यक्ष औसत प्रदान करता है। चूँकि यह माप केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के वर्गों के माध्य का वर्गमूल प्राप्त करके परिकलित किया जाता है, अतः इसे मूल माध्य वर्ग विचलन (Root Mean Square Deviation) भी कहा जाता है। माध्य विचलन की भाँति, मूल माध्य वर्ग विचलन भी समांतर माध्य, माध्यिका या बहुलक को मदों के मूल्यों में से घटाकर परिकलित किया जा सकता है । हर प्रकार के समंकों में, इन तीनों मूल्यों में से समांतर माध्य से लिया गया मूल माध्य वर्ग विचलन न्यूनतम होता है। अतः इसे **मानक विचलन** कहा जाता है। आइये, अब हम मानक विचलन के अर्थ, इसके परिकलन की विधियों, इसके गुणों और परिसीमाओं का अध्ययन करें।

15.2.1 मानक विचलन का अर्थ

मानक विचलन की परिभाषा दिए गए प्रेक्षणों के, उनके समांतर माध्य से विचलनों के वर्गफल के समांतर माध्य के वर्गमूल के रूप में की जा सकती है। इसे सामान्यतः ग्रीक अक्षर (सिग्मा) द्वारा सूचित किया जाता है। मानक विचलन का परिकलन करने के मुख्य चरण निम्न प्रकार हैं :

1 दी गई श्रेणी का समांतर माध्य परिकलित कीजिए।

2 विभिन्न मदों का समांतर माध्य से विचलन परिकलित कीजिए।

3 समस्त व्यक्तिगत विचलनों का वर्ग परिकलित कीजिए।

4 वर्गांकित विचलनों का योग कीजिए तथा योगफल को मदों की संख्या से भाग दीजिये।

5 परिणामित संख्या का वर्गमूल श्रेणी का मानक विचलन होगा। N प्रेक्षणों के एक कुलक के लिए, जो $x_1, x_2,$ .... x_N हैं तथा जिनका समांतर माध्य $\bar{x}$ है, समांतर माध्य से विचलन $(x_1 - \bar{x})$, $(x_2 - \bar{x})$, ... $(x_N - \bar{x})$ होंगे। अतः समांतर माध्य से विचलनों के वर्गफल $(x_1 - \bar{x})^2$, $(x_2 - \bar{x})^2$ .... $(x_n - \bar{x})^2$ होंगे। अतः समांतर माध्य से माध्य वर्ग विचलन

$$\frac{1}{n}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \text{.........} + (x_n \; \bar{x})^2\right] = \frac{1}{n}\Sigma(x - \bar{x})^2 \text{ होगा।}$$

अतः मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\,(x - \bar{x})^2}$

परिभाषित करने की इस विधि से हमें मानक विचलन का परिकलन करने की विधि को समझने में भी सहायता मिलती है।

उदाहरण 1

निम्नलिखित मदों के एक कुलक का मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

3, 4, 6, 7, 15, 25

हल:

मानक विचलन का परिकलन

मद संख्या	x	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
1	3	–7	49
2	4	– 6	36
3	6	– 4	16
4	7	– 3	9
5	15	5	25
6	25	15	225
योग	$\Sigma x = 60$	$\Sigma(x - \bar{x}) = 0$	$\Sigma(x - \bar{x})^2 = 360$

समांतर माध्य $= (\bar{x}) = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{60}{6} = 10$

मानक विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma\,(x - \overline{x})^2} = \sqrt{\frac{360}{6}} = \sqrt{60} = 7\,7$ लगभग

वर्गीकृत समंकों के लिए ऊपर दी गई परिभाषा में कुछ समायोजन की आवश्यकता है। यदि समंकों को समूहित किया जाता है तो मदों (अथवा वर्गांतरों के मध्य मूल्यों) के, उनके समांतर माध्य से विचलनों के वर्गफलों को पहले उनसे सम्बंधित आवृत्तियों से गुणा किया जाता है, फिर उनका योग किया जाता है, तत्पश्चात् आवृत्तियों के कुल योग से भाग दिया जाता है। अतः समूहित समंकों के लिए मानक विचलन इस प्रकार प्राप्त होगा :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f\,(x - \overline{x})^2} \text{ या } \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f\,(m - \overline{x})^2}$$

जहाँ m वर्गान्तरों का मध्य मूल्य है।

मानक विचलन के वर्ग को प्रसरण (Variance) कहते हैं। अतः अवर्गित समंकों के लिए प्रसरण $= \frac{1}{n}\Sigma(x - \overline{x})^2$ तथा वर्गित समंकों के लिए प्रसरण $= \frac{1}{n}\Sigma f(x - \overline{x})^2$ अथवा $\frac{1}{n}\Sigma f(m - \overline{x})^2$ (जब वर्गान्तर दिए गए हों) होता है। आइये, कुछ उदाहरणों द्वारा मानक विचलन की परिभाषा तथा इसके परिकलन के लिए आवश्यक चरणों को समझें।

उदाहरण 2

निम्न समंकों से मानक विचलन तथा प्रसरण का परिकलन कीजिये

x :	10	12	14	16	18	20	22
f :	3	5	9	16	8	7	2

हलः

मानक विचलन का परिकलन

x	f	fx	$(x - \overline{x})$	$(x - \overline{x})^2$	$f(x - \overline{x})^2$
10	3	30	−6	36	108
12	5	60	−4	16	80
14	9	126	−2	4	36
16	16	256	0	0	0
18	8	144	2	4	32
20	7	140	4	16	112
22	2	44	6	36	72
	n = 50	Σfx = 800			$\Sigma f(x - \overline{x})^2 = 440$

$$\overline{x} = \frac{\Sigma fx}{n}$$

$$= \frac{800}{50} = 16$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f\,(x - \overline{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{50} \times 440} = 2.97$$

$$\text{प्रसरण (Variation)} = \frac{1}{n}\Sigma f(x - \overline{x})^2$$

$$= \frac{1}{50} \times 400$$

$$= 8.8$$

उदाहरण 3

निम्न आवृत्ति बंटन (frequency distribution) से मानक विचलन तथा प्रसरण ज्ञात कीजिये :

अंक :	0—4	4—8	8—12	12—16
विद्यार्थियों की संख्या :	4	8	2	1

हल :

मानक विचलन तथा प्रसरण का परिकलन

अंक	f	m मध्य बिंदु	fm	$(m-\bar{x})$	$(m-\bar{x})^2$	$f(m-\bar{x})^2$
0 — 4	4	2	8	– 4	16	64
4 — 8	8	6	48	0	0	0
8 — 12	2	10	20	4	16	32
12 —16	1	14	14	8	64	64
योग	N = 15		$\Sigma fm = 90$			$\Sigma f(m-\bar{x})^2 = 160$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fm}{N}$$

$$= \frac{90}{15} = 6$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f(m-\bar{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{15} \times 160} = 3.27 \text{ लगभग}$$

प्रसरण $= \frac{1}{n}\Sigma f(m-\bar{x})^2$

$$= \frac{160}{15} = 10.67 \text{ लगभग}$$

15.2.2 परिकलन की विधियाँ

मानक विचलन का परिकलन करने की दो विधियाँ हैं :

(1) प्रत्यक्ष विधि तथा (2) लघु विधि। आइये हम इन दोनों विधियों का अध्ययन करें।

प्रत्यक्ष विधि (Direct Method) : इस विधि के अंतर्गत परिभाषाओं का प्रत्यक्ष उपयोग करते हुए परिकलन किया जाता है। अतः यह विधि पिछले खंड में दी गई परिभाषाओं से अभिन्न है। अतः इस विधि के अंतर्गत मानक विचलन ज्ञात करने के सूत्र इस प्रकार हैं :

असमूहित समंकों के लिए $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma(x-\bar{x})^2}$

समूहित संकों के लिए $\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f(x-\bar{x})^2}$ या $\frac{1}{n}\Sigma f(m\,\bar{x})^2$

जब मदों के आमाप और उनकी संख्या बहुत बड़ी नहीं है, तब हम सीधे मदों के योग और मदों के वर्गों के योग का प्रयोग करके मानक विचलन ज्ञात कर सकते हैं। पहले समांतर माध्य का परिकलन करने, तथा फिर समांतर माध्य से मदों का विचलन ज्ञात करने की आवश्यकता नहीं होती। इस स्थिति में प्रयुक्त सूत्र निम्नलिखित हैं :

असमूहित समंकों के लिए $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left(\frac{\Sigma x}{n}\right)^2}$ या $\sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \bar{x}^2}$ चूँकि

$\bar{x} = \sum x$

समूहित समंकों के लिए $\sigma = \frac{\sum fx^2}{n} - \left(\frac{\sum fx}{n}\right)^2$ या $\frac{\sum fx^2}{n} - \bar{x}^2$ चूँकि $x = \frac{\sum fx}{n}$

यह गणितानुसार सिद्ध किया जा सकता है कि सूत्रों का दूसरा कुलक पहले दिये हुए प्रथम कुलक से अभिन्न है तथा समान परिणाम देता हैं।

लघु विधि (Short Cut Method) :

जब समंक विशाल हो या समांतर माध्य अपूर्णांक हो, तो मानक विचलन कल्पित समांतर माध्य (A) से विचलन लेकर भी परिकलित किया जा सकता है। इसके सूत्र नीचे दिये गए हैं।

असमूहित समंकों के लिए $\sigma = \sqrt{\frac{\sum d^2}{n} - \left(\frac{\sum d}{n}\right)^2}$ जहाँ $d = x - A$

समूहित समंकों के लिए $\sigma = \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{(\sum fd)}{n}\right)^2}$ या $C\frac{\sum fd^2}{n} - \frac{(\sum fd^2)}{n}$

जहाँ d' पद विचलन हैं, तथा $d' = \frac{x-A}{e}$ द्वारा प्राप्त होता है, तथा 'c' x – A या 'd' स्तम्भ में उभयनिष्ट गुणांक है। आइये, अब कुछ उदाहरणों द्वारा इन सूत्रों के प्रयोग के लिए आवश्यक परिकलनों की व्याख्या करें।

उदाहरण 4

निम्न श्रेणी के लिए प्रत्यक्ष विधि द्वारा तथा 32 को कल्पित माध्य के रूप में प्रयोग करते हुए छोटी विधि द्वारा मानक विचलन का परिकलन कीजिये :

क्रम संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
आमाप	20	22	27	30	31	32	35	40	45	48

हल :

प्रत्यक्ष विधि : मानक विचलन का परिकलन

क्रम संख्या	x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$
1	20	–13	169
2	22	–11	121
3	27	–6	36
4	30	–3	9
5	31	–2	4
6	32	–1	1
7	35	2	4
8	40	7	49
9	45	12	144
10	48	15	225
	$\sum x = 330$		$\sum(x-\bar{x})^2 = 762$

अब $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{330}{10} = 33$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{762}{10}} = \sqrt{76.2} = 8.73$$

क्रम संख्या	x	d = x − 32	d^2
1	20	− 12	144
2	22	− 10	100
3	27	− 5	25
4	30	− 2	4
5	31	− 1	1
6	32	0	0
7	35	3	9
8	40	8	64
9	45	13	169
10	48	16	256
		$\Sigma d = 10$	$\Sigma d^2 = 772$

अब $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2} = \sqrt{\frac{772}{10} - \left(\frac{10}{10}\right)^2} = \sqrt{77.2 - 1} =$

$= \sqrt{76.2}$

$= 8.73$

ध्यान दीजिये कि दोनों विधियों द्वारा प्राप्त परिणाम अभिन्न हैं।

उदाहरण 5

प्रत्यक्ष विधि द्वारा तथा 14 को कल्पित माध्य के रूप में प्रयोग करते हुए छोटी विधि द्वारा निम्न आवृत्ति बंटन के लिए मानक विचलन तथा प्रसरण परिकलित कीजिये :

x :	10	12	14	16	18	20	22
F :	3	5	9	16	8	7	2

हल :

मानक विचलन तथा प्रसरण का परिकलन

प्रत्यक्ष विधि :

x	f	fx	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$	$f(x-\bar{x})^2$
10	3	30	− 6	36	108
12	5	60	− 4	+ 16	80
14	9	126	− 2	+ 4	36
16	16	256	0	0	0
18	8	144	2	4	32
20	7	140	4	16	112
22	2	44	6	36	72
	N = 50	$\Sigma fx = 800$	$\Sigma f(x-\bar{x}) = 0$		$\Sigma f(x-\bar{x}) = 440$

अब $\bar{x} = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{800}{50} = 16$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\Sigma f\ (x - \overline{x})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{440}{50}} = \sqrt{8.8} = 2.97$$

प्रसरण $= \sigma^2 = 8.8$

लघु विधि

x	F	d = x – 14	f d	fd²
10	3	–4	–12	48
12	5	–2	–10	20
14	9	0	0	0
16	16	2	32	64
18	8	4	32	128
20	7	6	42	252
22	2	8	16	128
योग	n = 50		Σfd = 100	Σfd² = 640

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{640}{50} - \left(\frac{100}{50}\right)^2}$$

$$= \sqrt{12.8 - 4}$$

$$= \sqrt{8.8} = 2.97$$

प्रसरण $= \sigma^2 = 8.8$

ध्यान दीजिये कि जब समांतर माध्य पूर्णांकों में है, तब लघु विधि द्वारा परिकलन अधिक सरल नहीं होता।

उदाहरण 6

100 कम्पनियों द्वारा 1987–88 के अंतर्गत अर्जित लाभ (लाख रुपयों में) नीचे दिये गए हैं। मदों और उनके वर्गों का प्रयोग करते हुए (क) समांतर माध्य (ख) प्रसरण, (ग) मानक विचलन परिकलित कीजिए।

लाभ (लाख रुपयों में)	कम्पनियों की संख्या
20—30	4
30—40	8
40—50	18
50—60	30
60—70	15
70—80	10
80—90	8
90—100	7

हल :

वर्ग	मध्यबिंदु (x)	आवृत्ति (f)	fx	fx²
20 — 30	25	4	100	2, 500
30 — 40	35	8	280	9, 800
40 — 50	45	18	810	36, 450
50 — 60	55	30	1, 650	90, 750
60 — 70	65	15	975	63, 375
70 — 80	75	10	750	56, 250
80 — 90	85	8	680	57, 800
90 — 100	95	7	665	63, 175
योग		100	5, 910	3, 80, 100

(क) समान्तर माध्य $(\bar{x}) = \frac{\sum fx}{n} = \frac{5,910}{100} = 59.10$

(ख) प्रसरण $= \sigma^2 = \frac{\sum fx^2}{n} - \left(\frac{\sum fx}{n}\right)^2 \quad = \frac{3,80,100}{100} - \left(\frac{5910}{100}\right)^2$

$= 3801.00 - 3492.81 = 308.19$

(ग) मानक विचलन $= \sqrt{\text{प्रसरण}} = \sqrt{308.19} = 17.5$

ध्यान दीजिए कि इस उदाहरण में मदों के योग तथा उनके वर्गफलों का प्रयोग करने पर कुल परिकलन बहुत वृहत् है। यह विधि प्रत्यक्ष विधि है चूँकि इसमें हमने मदों को प्रत्यक्ष रूप से प्रयोग किया है, तथा किसी मूल्य से उनके विचलनों का परिकलन नहीं किया है। इस विधि का उपयोग केवल तभी करना चाहिये जबकि मदों के आमाप छोटे हों, तथा उनकी कुल संख्या भी छोटी हो।

उदाहरण 7

निम्नलिखित बंटन से समांतर माध्य और मानक विचलन परिकलित कीजिये :

वर्गान्तर :	10 — 20	20 — 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60	60 — 70	70 — 80
आवृत्ति :	4	8	8	16	12	6	4

हल :

आइये, लघु विधि का प्रयोग करें। यह विधि सबसे अधिक प्रयोग की जाती है, तथा इसमें लम्बी गणनाएँ न्यूनतम होती है, समान्तर माध्य के परिकलन के लिए मध्य की ओर के जहाँ ऊँची आवृत्ति हो, एक मध्य बिंदु को कल्पित समांतर माध्य के रूप में ले लिया जाता है तथा उससे विचलन ज्ञात किये जाते हैं। इस प्रकार से प्राप्त विचलनों को उभयनिष्ट गुणांक, यदि कोई हो, से भाजित किया जाता है। जब हम उभयनिष्ट गुणांक से भाग देते हैं, तो इस विधि को क्रमिक विचलन (step deviation) विधि भी कहा जाता है।

समान्तर माध्य और मानक विचलन का परिकलन।

वर्गान्तर	F	मध्य बिन्दु (x)	d = x–A (x – 45)	$d' = \frac{d}{c^2}\ \frac{d}{10}$	Fd'	F(d')²
10 — 20	4	15	– 30	– 3	– 12	36
20 — 30	8	25	– 20	– 2	– 16	32
30 — 40	8	35	– 10	– 1	– 8	8
40 — 50	16	45	0	0	0	0
50 — 60	12	55	10	1	12	12
60 — 70	6	65	20	2	12	24
70 — 80	4	75	30	3	12	36
योग n = 48					Σfd' = 0	Σf(d')² = 148

यहां कल्पित समांतर माध्य (A) 45 है तथा उभयनिष्ट गुणांक (C) 10 है जो वर्ग अंतराल भी है।

समांतर माध्य $\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd'}{n} \times C$

$$= 45 + \frac{0}{58} \times 10 = 45$$

मानक विचलन $\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fd'2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{148}{58} - \left(\frac{0}{58}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.552}$$

$$= 1.597 \times 10 = 15.97$$

उदाहरण 8

निम्न बंटन का मानक विचलन ज्ञात कीजिये :

वर्गान्तर :	0 — 500	500 — 1000	1000 — 1500	1500 — 2000	2000 — 3000
आवृत्ति :	90	218	86	41	15

हल :

मानक विचलन का परिकलन

वर्गान्तर	मध्य बिंदु	आवृत्ति	$d = \frac{M-750}{250}$	Fd	$F(d')^2$
0 — 500	250	90	–2	– 180	360
500 — 1000	750	218	0	0	0
1000 — 1500	1250	86	2	172	344
1500 — 2000	1750	41	4	164	656
2000 — 3000	2500	15	7	105	735
योग		$\Sigma f = 450$		$\Sigma fd = 261$	$\Sigma fd^2 = 2,095$

यहाँ कल्पित माध्य A 750 है तथा उभयनिष्ट गुणांक C 250 है।

मानक विचलन $\sigma = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fd'2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd'}{n}\right)^2}$

$$= 250 \times \sqrt{\frac{2095}{450} - \left(\frac{261}{450}\right)^2}$$

$$= 250 \times \sqrt{4.6556 - (0.58)^2}$$

$$= 250 \times \sqrt{4.33192} = 2.0811 \times 250$$

$$= 520.2750 \text{ लगभग}$$

ध्यान दीजिये कि जब वर्गान्तर समान नहीं हैं, तो पद विचलन क्रम में पूर्णांक, जैसे 1, 2, 3, ... या –1, –2, –3 .... आदि नहीं होते।

बोध प्रश्न क

मानक विचलन की परिभाषा कीजिये।

....

....

....

....

2 मानक विचलन के परिकलन के लिए प्रयोग किये जाने वाले सूत्र लिखिये।

....

....

....

....

....

....

3 प्रेक्षणों के निम्न कुलक के लिए मानक विचलन परिकलित कीजिये। 245, 322, 192, 310, 231

....

....

....

....

....

....

4 निम्नलिखित समंकों के लिए प्रसरण का परिकलन कीजिये :

मूल्य :	130–139	140–149	150–159	160–169	170–179	180–189	190–199
आवृत्ति :	1	4	14	20	22	12	2

....

....

....

....

....

....

....

....

....

5 बताइये कि निम्नलिखित कथन सही हैं या गलत।

i) प्रसरण को माध्य वर्ग विचलन कहा जा सकता है

ii) मानक विचलन ऋणात्मक हो सकता है

iii) दिये गए समंकों में मूल माध्य वर्ग विचलन के एक से अधिक मान हो सकते हैं

iv) मानक विचलन मूल माध्य वर्ग विचलन की एक विशेष स्थिति नहीं है

v) मानक विचलन परिकलित करने की विभिन्न विधियों से भिन्न-भिन्न परिणाम प्राप्त होंगे।

15.2.3 विशेषताएं

आप मानक विचलन को परिकलित करने के अर्थ, उसकी विधियों से अवगत हो चुके हैं। आइये अब मानक विचलन के प्रमुख गुणधर्मों का अध्ययन करें।

1 यदि श्रेणी के प्रत्येक प्रेक्षण को एक समान मान से बढ़ाया या घटाया जाए, तो मानक विचलन के मान में कोई अंतर नहीं पड़ता, वह वही रहता है। अतः यदि $y = x + k$ जहाँ k एक स्थिर मात्रा है, तो y का मानक विचलन x के मानक विचलन के बराबर होता है। दूसरे शब्दों में, मानक विचलन मूलबिंदु के परिवर्तन (Change of origin) से स्वतंत्र होता है। यह बात उदाहरण 9 से स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 9

x	$x-\bar{x}$	$(x-x)^2$	मान लीजिए $Y = x+10$	$Y-\bar{Y}$	$(Y-\bar{Y})^2$
1	–2	4	1+10 = 11	–2	4
2	–1	1	2+10 = 12	–1	1
3	0	0	3+10 = 13	0	0
4	1	1	4+10 = 14	1	1
5	2	4	5+10 = 15	2	4
योग = 15	0	10	65	0	10

x का समांतर $\bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{15}{5} = 3$

x का मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\sum(x-\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$

Y का समांतरं माध्य $(\bar{Y}) = \frac{\Sigma Y}{n} = \frac{65}{5} = 13$

Y का मानक विचलन $\sigma = \sqrt{\frac{\sum(Y-\bar{Y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$

अतः x का मानक विचलन =Y का मानक विचलन

2 किसी दी गई श्रेणी के लिए, यदि प्रत्येक प्रेक्षण को एक स्थिरांक से गुणा किया जाए या भाग दिया जाए, तो मानक विचलन पर भी समान प्रभाव पड़ेगा। अतः यदि $Y = Ax$, जहां 'A' एक स्थिरांक है, तो Y का मानक विचलन =(x का मानक विचलन) xA होगा। यह बात उदाहरण 10 से स्पष्ट हो जाएगी।

उदाहरण 10

x	$x-\bar{x}$	$(x-x)^2$	$Y = 10x$	$Y-\bar{Y}$	$(Y-\bar{Y})^2$
1	–2	4	10	–20	400
2	–1	1	20	–10	100
3	0	0	30	0	0
4	1	1	40	10	100
5	2	4	50	20	400
15	0	10	150	0	1,000

$\bar{Y} = \frac{\sum Y}{n} = \frac{150}{5} = 30$

Y का $\sigma = \sqrt{\sum(Y-\bar{Y})^2} = \sqrt{\frac{1000}{5}} = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$

Y का $\sigma = 10$ (x का σ)

अतः आप कह सकते हैं कि मानक विचलन मूल बिंदु के परिवर्तन से स्वतंत्र है, परंतु यह स्केल के परिवर्तन से स्वतंत्र नहीं है।

3 दिये गए प्रेक्षणों के एक कुलक के लिए मानक विचलन कभी भी समांतर माध्य से परिकलित माध्य विचलन तथा चतुर्थक विचलन से कम नहीं होता। वास्तव में सामान्य संमकों के लिए माध्य विचलन $4/5\ \sigma$ के बराबर तथा चतुर्थक विचलन $2/3\ \sigma$ के बराबर होता है।

4. यदि दो समूहों में n_1 तथा n_2 प्रेक्षण हो, तथा उनका समांतर माध्य x_1 तथा x_2 तथा मानक विचलन σ व σ_2 हो, तो संयुक्त समूह का मानक विचलन ज्ञात किया जा सकता है। यह निम्न सूत्र द्वारा ज्ञात होता है:

$$\sigma_{12} = \frac{\sqrt{(n_1\sigma^2, +n_2\sigma_2)^2 + n_1 d_1^{\ 2} + n_2 d_2^{\ 2}}}{n_1 + n_2}$$

जहाँ σ_{12} = दो समूहों का संयुक्त मानक विचलन $d_1 = x_{12} - x_1$; $-d_2 = x_{12} - x_2$

x_{12}=दोनों समूहों का संयुक्त समांतर माध्य गुणधर्म 13 व 14 को समझने के लिए 15.4 (कुछ उदाहरण) जो इस इकाई में आगे दिए गए हैं, में दिये गए उदाहरण 13 व 14 का अध्ययन कीजिये।

5. समान्तर माध्य के अतिरिक्त किसी भी अन्य मूल्य से परिकलित मानक विचलन, समांतर माध्य से परिकलित मानक विचलन से सदैव अधिक होगा। इसकी व्याख्या करने के लिए आइये फिर ऊपर (1) में दिये गये x के मानों के समान मान लेते हैं, तथा माम 4 से जो समांतर माध्य (x) 3 से भिन्न है, मानक विचलन परिकलित करते हैं।

x	:	1	2	3	4	5
x-4	:	-3	-2	-1	0	1
$(x-4)^2$	:	9	4	1	0	1

अब $\sum(x-4)^2=15$

4 से मूल्य माध्य वर्ग विचलन $= \sqrt{\frac{\sum(x-4)^2}{n}} = \sqrt{\frac{15}{5}} = \sqrt{3}$

किन्तु x का मानक विचलन $= \sqrt{2}$

अतः समांतर माध्य के अतिरिक्त किसी भी मूल्य से मूल माध्य वर्ग विचलन मानक विचलन से अधिक होता है।

6. साधारण प्रकार के समंकों में, या प्रसामान्य प्रकार के समंकों में (प्रसामान्य समंकों का अर्थ इकाई 16 में विस्तारपूर्वक बताया जाएगा। AM $\pm\sigma$ परिसर में पदों की संख्या का 68% परिसर पदों की संख्या का लगभग 95% तथा AM+3σ परिसर में समकों की लगभग सभी मदें सम्मिलित होती हैं। इसकी व्याख्या करने के लिए उदाहरण 5 में दिये गए समंक लेते हैं। इन समंकों के लिए समातर माध्य (AM) 16 है तथा σ 2.97 है। अतः परिसर AM$\pm\sigma$=16+2.97 या 13.03 से 18.97 होगा। समंकों में 13.03 से 18.97 के बीच मदों की संख्या 9+16+8=33 अर्थात मदों की कुल संख्या (अर्थात 50) का 66% है, जो कि 68% के निकट है। इसी प्रकार, परिसर AM$\pm2\sigma$=16$\pm$2x2.97 या 10.06 से 21.94 होगा। प्रथम तथा अंतिम समूह के मदों के अतिरिक्त समस्त मद इस परिसर के अंतर्गत आती है। इस प्रकार परिसर 10.06 से 21.94 में आने वाली मदो की कुल संख्या 45 अर्थात कुल मदों का 90 है जो कि 95% से बहुत भिन्न नहीं है। आप इस बात की भी जाँच कर सकते हैं कि परिसर AM$\pm3\sigma$ में 100% मदें आती हैं कि नहीं। ऊपर परिकलित परिसरों के बीच आने वाली मदों की प्रतिशतताएं यथावत वही नहीं है जो कि गुणधर्म में बताई गई है। इससे केवल यही संकेत मिलता है कि उदाहरण 5 पूरी तरह प्रसामान्य नहीं है किन्तु इसके बिल्कुल निकट है।

15.2.4 गुण व परिसीमाएँ

गुण

अपकिरण के समस्त मापों में मानक विचलन को श्रेष्ठ माना जाता है क्योंकि इसमें अपकिरण के अच्छे माप के लगभग तमाम आवश्यक गुण है। मानक विचलन में निम्नलिखित गुण है :

1. यह दृढ़ता से परिभाषित होता है, तथा श्रेणी के समस्त प्रेंक्षणों पर आधारित होता है।
2. मानक विचलन की अद्वितीय विशेषता जो इसे अपकिरण के अन्य मापों से श्रेष्ठतर बनाती है, वह है इसका बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूल होनां। अतः यदि हमें बहुत से समूहों में से प्रत्येक की मदों की संख्या, उनका समांतर माध्य तथा मानक विचलन दिया गया हो, तो हम सुगमतापूर्वक संयुक्त समूह का मानक विचलन परिकलित कर सकते हैं।
3. मानक विचलन प्रतिचयन के उच्चावचनों (fluctuation of sampling) से सबसे कम प्रभावित होता है।

4 एक प्रसामान्य बंटन में समांतर माध्य ± σ मानों के 68.36% का समावेश करता है, जबकि चतुर्थक विचलन केवल 50% तथा माध्य विचलन केवल 57% मानों का समावेश करते हैं। इस कारण से मानक विचलन को **मानक माप** कहा जाता है।

परिसीमाएँ

अपकिरण के माप के रूप में मानक विचलन की मुख्य परिसीमाएँ या अवगुण निम्नलिखित हैं :

1 मानक विचलन की एक बड़ी परिसीमा यह है कि भिन्न इकाइयों में दिये गए दो या दो से अधिक श्रेणियों के प्रेक्षणों के अपकिरण की तुलना करने के लिये इसका प्रयोग नहीं किया जा सकता। इस उद्देश्य के लिए **मानक विचलन गुणांक** (Coefficient of Standard deviation) की परिभाषा करनी पड़ती है।

2 समांतर माध्य से विचलनों का वर्गफल निकालने और फिर उन वर्णित विचलनों के समांतर माध्य का वर्गमूल ज्ञात करने की प्रक्रिया काफी जटिल कार्य लगती है। वास्तव में इससे एक अन्य परिसीमा का उदय होता है, अर्थात् मानक विचलन चरम मूल्यों से बहुत अधिक प्रभावित होता है। विचलनों का वर्ग निकालने की प्रक्रिया समान्तर माध्य से बड़े विचलनों को, जो कि केवल चरम मूल्यों से प्राप्त किये जाते हैं, अनुचित महत्व प्रदान करती है, तथा उन मदों को कम महत्व देती है जो समांतर माध्य के निकट है।

3 विवृतमुखी वर्गों वाले बंटन के लिए मानक विचलन परिकलित नहीं किया जा सकता।

15.3 विचरण गुणांक (Coefficient of Variation)

विचरण गुणांक, जिसे प्रतिशतताओं में व्यक्त मानक विचलन गुणांक के नाम से भी जाना जाता है, श्रेणी के समान्तर माध्य से मानक विचलन के अनुपात पर आधारित होता है। अतः विचरण गुणांक को इस प्रकार व्यक्त किया जा सकता है :

$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{समांतर माध्य}} \times 100 \text{ या } \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

विचरण गुणांक अपकिरण का एक सापेक्ष माप है और इसे सामान्यतः प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है। अतः इसका उपयोग भिन्न इकाइयों में दिये गए प्रेक्षणों के दो कुलकों के अपकिरण की तुलना करने के लिये सुगमतापूर्वक किया जा सकता है। यदि प्रेक्षणों की इकाइयाँ समान हों, परंतु उनके औसत मान बहुत भिन्न हों, तब भी उनके अपकिरण की तुलना के लिए इसका उपयोग किया जा सकता है। अतः प्रेक्षणों के दो या अधिक कुलकों की सुतथ्यता के माप या तुलना के लिए भी इसका प्रयोग किया जा सकता है।

इस बात को समझने के लिए आइये एक उदाहरण लें। मान ला, हम दिल्ली और बम्बई के बीच की दूरी नापते हैं तथा 1,540 कि.मी. की वास्तविक दूरी में 1 कि.मी. या 1,00,000 से.मी. का विचलन करते हैं। एक मीटर कपड़े के टुकड़े को मापने में 10 सें.मी. के विचलन की तुलना में इस विचलन का महत्व नगण्य है। जब प्रथम स्थिति के 1,00,000 से.मी. के विचलन की तुलना प्रत्यक्ष रूप से दूसरी स्थिति के 10 से.मी. विचलन से की जाती है, तो यह तथ्य स्पष्ट नहीं होता। चूँकि 1,00,000 से.मी. 10 से· मी· से अधिक है, तो यह निष्कर्ष निकाले जाने की सम्भावना है कि प्रथम स्थिति में माप का विचलन बहुत अधिक महत्वपूर्ण है। किन्तु यदि हम गुणांकों का परिकलन करें, तो चित्र स्पष्ट हो जाता है। प्रथम स्थिति में गुणांक केवल $\frac{1}{1540} \times 100 =$ 0.865% है, तथा दूसरी स्थिति में गुणांक $10/1000 \times 100$ या 1% है। अतः दूसरी स्थिति में विचलन सापेक्ष रूप से अधिक है। अतः जब कभी विचलन की तुलना करनी हो तो यह विचरण गुणांक के द्वारा ही की जानी चाहिए।

उदाहरण 11

एक फुटबाल के मौसम में टीम A द्वारा दागे गये गोलों का रिकार्ड नीचे दिया गया है :

एक मैच में दागे गए गोलों की संख्या :	0	1	2	3	4
मैचों की संख्या : :	1	9	7	5	3

टीम B के लिए, दागे गए गोलों की प्रति मैच औसत संख्या 2.5, तथा मानक विचलन 1.25 गोल था। कौन सी टीम अधिक संगत है।

हलः

टीम A के सामान्तर माध्य मानक विचलन का परिकलन

गोलों की संख्या	मैचों की संख्या (F)	विचलन (d)	fd	fd^2
0	1	–2	–2	4
1	9	–1	–9	9
2	7	0	0	0
3	5	1	5	5
4	3	2	6	12
	n = 25		$\Sigma fd = 0$	$\Sigma d^2 = 30$

टीम A का समांतर माध्य $= A + \frac{\Sigma fd}{n} = 2 + \frac{0}{25} = 2$

टीम A का मानक विचलन (σ) $= \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{30}{25} - \left(\frac{0}{25}\right)^2}$

$= \sqrt{1.2 - 0}$

$= \sqrt{1.2}$

$= 1.1$

टीम A का विचरण गुणांक :

$= \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{समांतर माध्य}} \times 100$

$= \frac{1.1}{2} \times 100 = 55\%,$

टीम B का विचरण गुणांक :

$= \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{समान्तर माध्य}} \times 100$

$= \frac{1.25}{2.5} \times 100 = 50\%$

टीम का विचरण गुणांक टीम के विचरण गुणांक से कम है। अतः टीम की अपेक्षा अधिक संगत मानी जाएगी।

उदाहरण 12

नीचे दिये गए समंकों से बताइये कि कौन सी श्रेणी अधिक विचरणशील है:

चर	श्रेणी A	श्रेणी B
10 — 20	10	18
20 — 30	18	22
30 — 40	32	40
40 — 50	40	32
50 — 60	22	18
60 — 70	18	10

हल : श्रेणी के लिए समांतर माध्य और मानक विचलन का परिकलन

वर्गान्तर (चर)	मध्यमान	आवृत्ति (f_1)	मद (d_1)	fd_1	fd_1^2
10 – 20	15	10	-2	-20	40
20 – 30	25	18	-1	-18	18
30 – 40	35	32	0	0	0
40 – 50	45	40	1	40	40
50 – 60	55	22	-2	44	88
60 – 70	65	18	3	54	162
		140		100	348

यहाँ कल्पित माध्य A, 35 है तथा C_1 10 है।

$x_1 = A_1 + \sum f_1 d_1 \times C_1$

$= 35 + 100/140 \times 10$

$= 35 + 7.143 = 42.1$ लगभग

$$\sigma_1 = C_1 \times \sqrt{\frac{\sum f_1 d_1^2}{n_1} - \left(\frac{\sum f_1 d_1}{n_1}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{348}{140} - \left(\frac{100}{140}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.486 - 0.510}$$

$$= 1.406 \times 10 = 14.06$$

चिरण गुणांक (श्रेणी A) = $\frac{\sigma_1}{x_1} \times 100 = \frac{14.06}{42.1} \times 100 = 33.3\%$

श्रेणी B के लिए समांतर माध्य और मानक विचलन का परिकलन

वर्गान्तर (चर)	मध्यमान	आवृत्ति (F_2)	पद विचलन (d_2)	F_2d_2	$f_2d_2^2$
10 – 20	15	18	-2	-36	72
20 – 30	25	22	-1	-22	22
30 – 40	35	40	0	0	0
40 – 50	45	32	1	32	32
50 – 60	55	18	2	36	72
60 – 70	65	10	3	30	90
		140		40	288

यहाँ $A_2 = 35$ तथा $C_2 = 10$

$$X_2 = A_2 + \frac{\sum f_2 d_2}{n_2} \times C_2 = 35 + \frac{40}{140} \times 10$$

$$= 35 + 2.85 = 37.85$$

$$\sigma_2 = C \times \sqrt{\frac{\sum f_2 d_2'^2}{n_2} - \left(\frac{\sum fd_2'}{n^2}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{288}{140} - \left(\frac{40}{140}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.057 - 0.0784}$$

$$= 10 \times \sqrt{1.9786}$$

$$= 1.406 \times 10$$

$$= 14.06$$

$$\text{C.V. (श्रेणी B)} = \frac{\sigma_2}{X_2} \times 100$$

$$= \frac{14.06}{37.85} \times 100 = 37.1\%$$

चूंकि श्रेणी B का विचरण गुणांक श्रेणी A के विचरण गुणांक से अधिक है, अतः श्रेणी B अधिक विचरणशील है। इस उदाहरण में आप देख सकते हैं कि दोनों श्रेणियों का मानक विचलन एक समान, अर्थात् 14.06 है। इस तथ्य से हमें यह निष्कर्ष नहीं निकालना चाहिये कि दोनों श्रेणियों का विचरण अभिन्न है। सही निर्वचन के लिए समांतर माध्य के अंतर का ध्यान रखना भी आवश्यक है।

15.4 कुछ अन्य उदाहरण

उदाहरण 13

एक राज्य सरकार ने 60 वर्ष की आयु से अधिक के लोगों को वृद्धावस्था पेंशन देने का निश्चय किया। पेंशन की निम्न दरें निश्चित की गई :

आयु वर्ग	रुपये प्रति मास
60 — 65	250
65 — 70	300
70 — 75	350
75 — 80	400
80 — 85	450

पेंशन के अधिकार प्राप्त 25 व्यक्तियों की आयु नीचे दी गई है :

74	62	84	72	83	72	81	64	71	63	61	61	74
64	79	73	75	76	69	78	66	67	68	60	67	

दी जाने वाली औसत मासिक पेंशन तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल :

आयु वर्ग	मिलान रेखाएँ	आवृत्ति
60 – 65	~~||||~~ ||	7
65 – 70	~~||||~~	5
70 – 75	~~||||~~ |	6
75 – 80	~~||||~~	4
80 – 85	|||	3
		25

दी जाने वाली मासिक औसत पेंशन तथा मानक विचलन का परिकलन

पेंशन की दर (रूपयों में)	$d_2 \left(\frac{X-350}{50}\right)$	F	Fd	Fd^2
250	–2	7	–14	28
300	–1	5	–5	5
350	0	6	0	0
400	1	4	4	4
450	2	3	6	12
		25	–9	49

यहाँ $A = 350$, $C = 50, \sum f = n = 25$, $\sum fd = -9$ तथा $\sum fd^2 = 49$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd}{n} \times C = 350 + \frac{-9}{25} \times 50 = 350 - 18 = 332$$

$$\sigma = C \times \sqrt{\frac{\sum fd^2}{n} - \left(\frac{\sum fd}{n}\right)^2}$$

$$= 50 \times \sqrt{\frac{49}{25} - \left(\frac{-9}{25}\right)^2}$$

$$= 1.353 \times 50 = 67.65$$

अतः मासिक औसत पेंशन 332 रु है, तथा मानक विचलन 67.25 रुपये हैं ।

मानक विचलन के अशुद्ध मान को शुद्ध करना : कभी-कभी ऐसा होता है कि समांतर माध्य और मानक विचलन का परिकलन करते समय बिना ध्यान दिए ही हम गलत प्रेक्षणों की नकल कर लेते है। उदाहरणार्थ, एक प्रेक्षण 25 की 52 के रूप में लिया जा सकता है। समांतर माध्य और मानक विचलन के अशुद्ध मानों को शुद्ध करने की एक सरल प्रक्रिया है। शुद्ध समांतर माध्य ज्ञात करने के लिए, हम मूल $\sum x$ में से गलत प्रेक्षणों को घटाकर, उसमें सही प्रेक्षण जोड़ देते है इसी प्रकार, शुद्ध मानक विचलन ज्ञात करने के लिए हम सही $\sum x^2$ का मान ज्ञात करते है। ऊपर दी गई प्रक्रिया को उदाहरण 14 में स्पष्ट किया गया है।

उदाहरण 14

100 प्रेक्षणों के समांतर माध्य और मानक विचलन क्रमशः 40 और 5 निककाले गए। गलती से एक प्रेक्षण का मूल्य 40 के स्थान पर 50 ले लिया गया। सही समांतर माध्य और प्रसरण ज्ञात कीजिए।

अशुद्ध $\sum x = n\bar{x} = 100 \times 40 = 4'0000$

शुद्ध $\sum x = 4000 - 50 + 40 = 3,990$

शुद्ध समांतर माध्य $= \frac{3990}{100} = 39,90$

अब प्रसरण $= \frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2$

दिये गए मानों को प्रतिस्थापित करने पर

$$25 = \frac{\sum x^2}{100} - (40)^2$$

$$25 = \frac{\sum x^2}{100} - 1600$$

$$25 = \frac{\sum x^2 - 1,60,000}{100}$$

$$2500 = \sum x^2 - 1,60,000$$

$\sum x^2 = 1,60,000 + 2,500$

$= 1,62,500$ यह मूल $\sum x^2$ का मान है।

शुद्ध $\sum x^2 = 1,62,500 - (50)^2 + (40)^2$

$= 1,62,500 - 2,500 + 1600 = 1,61,600$

शुद्ध प्रसरण $= \frac{\text{शुद्ध} \sum x^2}{n} - (\text{शुद्ध } \bar{x})^2$

$= \frac{1,61,600}{100} = -(39.9)^2$

$= 1,616 - 1592.01 = 23.99$

अतः शुद्ध समांतर माध्य 39.9 तथा शुद्ध प्रसरण 23.99 है।

संयुक्त मानक विचलन : जिस प्रकार दो या दो से अधिक समूहों का संयुक्त समांतर माध्य परिकलित करना सम्भव है, उसी प्रकार हम दो या अधिक समूहों का संयुक्त मानक विचलन परिकलित कर सकते हैं। दो समूहों के संयुक्त मानक विचलन को σ_{12} से सूचित किया जाता है, तथा इसका परिकलन निम्न प्रकार किया जाता है :

$$\sigma_{12}^2 = \frac{n_1 \sigma_1^2 + n_2\sigma_2^2}{n_1 + n_2} + \frac{n_1 d_1^2 + n_2 d_2^2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{n_1 (\sigma_1^2 + d_1^2) + n_2 (\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}$$

जहाँ σ_{12} = संयुक्त मानक विचलन

σ_1 = प्रथम समूह का मानक विचलन

σ_2 = दूसरे समूह का मानक विचलन

$d_1 = (\bar{x}_1 - \bar{x}_{12})$

$d_2 = (\bar{x}_2 - \bar{x}_{12})$

$\bar{x}_1$ = प्रथम समूह का समांतर माध्य

$\bar{x}_2$ = दूसरे समूह का समांतर माध्य

$\bar{x}_{12}$ = संयुक्त समांतर माध्य

तीन या अधिक समूहों का संयुक्त मानक विचलन ज्ञात करने के लिए उपरोक्त सूत्र का विस्तार भी किया जा सकता है।

उदाहरण 15
50 पुरुष श्रमिकों के एक समूह के लिए उनकी दैनिक मज़दूरी का समांतर माध्य 72 रु० तथा मानक विचलन 9 रु० है। 40 स्त्री श्रमिकों के एक अन्य समूह के लिए मज़दूरी का समांतर माध्य 54 रु० तथा मानक विचलन 6 रु० है। 90 श्रमिकों के संयुक्त समूह के लिए मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल :

इन समंकों में $n_1 = 50$ तथा $n_2 = 40$

$\bar{x}_1 = 72$ तथा $\bar{x}_2 = 54$

$\sigma_1 = 9$ तथा $\sigma_2 = 6$

90 श्रमिकों के समूह का संयुक्त समांतर माध्य ($\bar{x}_{12}$)

$$= \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

$$= \frac{50 \times 72 + 40 \times 54}{50 + 40}$$

$$= \frac{3600 + 2160}{90} = 64$$

90 श्रमिकों के समूह का संयुक्त मानक विचलन :

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{n_1(\sigma_1 + d_1^2) + n_2(\sigma_2^2 + d_2^2)}{n_1 + n_2}}$$

अब $d_1 = 64 - 72 = -8$ तथा $d_2 = 64 - 54 = 10$

$$\sigma_{12}^2 = \frac{50(81 + 64) + 40(36 + 100)}{90} = \frac{7250 + 5440}{90}$$

$$= \frac{12690}{90} = 141$$

$\sigma_{12} = \sqrt{141} = 11.87$ लगभग

आप देख सकते हैं कि दोनों समूहों के संयुक्त समांतर माध्य का मान दो समूहों के समांतर माध्यों के बीच है, परंतु संयुक्त मानक विचलन का मान दिये गए मानक विचलनों के बड़े से बड़े मान से भी बहुत अधिक है। संयुक्त समांतर माध्य सदैव दिये गए समांतर माध्यों के विस्तार के बीच होगा, किंतु संयुक्त मानक विचलन का एक ऐसा मान प्राप्त करना जो दिये गए मानक विचलनों के विस्तार से बाहर हो, त्रुटिपूर्ण नहीं है। वास्तव में, दिये गए माध्यों के बीच जितना अधिक अंतर होगा, संयुक्त मानक विचलन दिये गए अधिकतम मानक विचलन से उतनी ही अधिक दूरी पर होगा। जब दिये गए समस्त समूहों के समांतर माध्य समान हैं, केवल तब ही संयुक्त मानक विचलन दिये गए मानक विचलनों के विस्तार के बीच होगा।

उदाहरण 16

उदाहरण 7 में दिये गए समंकों का समांतर माध्य से माध्य विचलन परिकलित कीजिये, तथा दिखाइए कि माध्य विचलन मानक विचलन से कम है।

हल :

वर्गान्तर	आवृत्ति (f)	मध्यबिंदु (m)	$m-\bar{x}$	$f(m-\bar{x})$ f(m–45)
10—20	4	15	–30	120
20—30	8	25	–20	160
30—40	8	35	–10	80
40—50	16	45	0	0
50—60	12	55	10	120
60—70	6	65	20	120
70—80	4	75	30	120
योग	58			720

उदाहरण 7 से हमें पता चलता है कि

$\bar{x} = 45$ तथा $\sigma = 15.97$

समांतर माध्य से माध्य विचलन $= \frac{\Sigma f|m-\bar{x}|}{n} = \frac{720}{58} = 12.41$

अतः समांतर माध्य से परिकलित माध्य विचलन मानक विचलन से कम है। ध्यान दीजिये कि समंक चाहे कैसे भी हो, समांतर माध्य से परिकलित माध्य विचलन मानक विचलन से सदा कम होगा।

बोध प्रश्न ख

1. बताइये कि निम्नलिखित कथन सही हैं, या गलत ।
   i) मानक विचलन अन्य सभी मापो में पाए जाने वाले दोषों से मुक्त है।
   ii) प्रसरण तथा विचरण गुणांक अभिन्न हैं।
   iii) समान्तर माध्य से परिकलित मूल माध्य वर्ग विचलन न्यूनतम होता है।
   iv) प्रत्येक मद को 5 से कम करने पर मानक विचलन भी 5 से कम हो जाएगा।
   v) एक सामान्य समंक में, मानक विचलन चतुर्थक विचलन से कम होता है।
2. रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिये।
   i) माध्य विचलन मानक विचलन से --------------- होता है।
   ii) विस्तार में ------------- प्रतिशत मद सम्मिलित होते हैं ।
   iii) यदि एक श्रेणी में विचरण गुणांक 64 तथा समांतर माध्य 10 है तो मानक विचलन ------------होगा।
   iv) प्रसरण सदैव --------------- ऋणात्मक होता है।
   v) यदि एक कलक के 10 मानों में से प्रत्येक 5 के बराबर है तो मानक विचलन -------के बराबर होगा।
3. सही उत्तर पर सही ( ) का चिन्ह लगाइये।

क) श्रेणी की प्रत्येक मद पर आधारित माप :
   i) विस्तार
   ii) मानक विचलन
   iii) चतुर्थक विचलन
   iv) सब की

ख) अपकिरण की एक ऐसी माप जो विवृतमुखी बंटनों की स्थिति में अधिक उपयोगी होती हैं ।
   i) विस्तार
   ii) माध्य विचलन
   iii) मानक विचलन
   iv) चतुर्थक विचलन

ग) मानक विचलन का परिकलन सदा इससे किया जाता है।
   i) समांतर माध्य
   ii) बहुलक
   iii) माध्यिका
   iv) गुणोत्तर माध्य

घ) निम्न में से कौन सी माप चरम मदों से सबसे कम प्रभावित होती है।
   i) चतुर्थक विचलन
   ii) विस्तार
   iii) मानक विचलन
   iv) मांध्य विचलन

ङ) माध्य विचलन होता है ।
   i) मानक विचलन से कम

ii) मानक विचलन से अधिक

iii) मानक विचलन से सम्बंधित नहीं

iv) मानक विचलन के बराबर

च) विचरण गुणांक इस सूत्र से ज्ञात किया जाता है :

i) $\frac{\sigma}{\bar{x}}$

ii) $\frac{\bar{x}}{\sigma}$

iii) $\frac{\bar{x}}{\sigma} \times 100$

iv) $\frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$

15.5 लॉरेंज वक्र (Lorenz Curve)

लॉरेंज वक्र डा॰ मैकस ओ॰ लॉरेंज द्वारा, जो कि एक प्रसिद्ध आर्थिक सांख्यिक है, प्रकल्पित की गई है। यह अपकिरण का अध्ययन करने की एक लेखाचित्रीय विधि है। यह वक्र जो मूल रूप से उनके द्वारा सम्पत्ति और आय के बंटन का माप करने के लिए प्रयोग किया गया था, अब लाभ मज़दूरी तथा कुल बिक्री आदि के बंटनों के लिए भी प्रयोग किया जाने लगा है।

लॉरेंज वक्र बनाने के लिए निम्नलिखित कदम उठाए जाते हैं :

1 विभिन्न समूहों से मदों के कुल मान प्राप्त किये जाते है।

2 फिर विभिन्न समूहों से संगत मदों के कुल मानों और आवृत्तियों का "से कम" प्रकार में संचय किया जाता है तथा उन्हें प्रतिशतताओं में परिवर्तित किया जाता है।

3 x अक्ष पर स्केल 100 से प्रारम्भ करते है तथा यह o तक जाता है। इसे संचयी आवृत्तियों (x) की प्रतिशतता के लिये प्रयोग किया जाता है।

4 y अक्ष पर स्केल o से प्रारम्भ करते हैं तथा यह 100 तक जाता है। इस पर मदों के कुल मानों (y) की प्रतिशतताओं को आलेखित किया जाता है।

5 अक्ष पर o को y अक्ष पर 100 से जोड़ती हुई एक कर्ण रेखा (diagonal line) खींची जाती है। **इसे समान बंटन की रेखा (Line of equal distribution)** कहा जाता है। इस कर्ण पर कोई भी बिंदु x तथा y पर समान प्रतिशतता दर्शाता है।

6 x और y से संगत विभिन्न बिंदुओं को आलेखित किया जाता है तथा उन्हें मिला दिया जाता है। इस प्रकार प्राप्त की गई रेखा, जब तक कि समस्त मदें बिल्कुल बराबर न हों, सदैव समान बंटन की रेखा के नीचे एक वक्र बनाएगी। समान बंटन की रेखा तथा आलेखित वक्र के बीच का क्षेत्रफल मदों में असमानता की सीमा दर्शाता है। यदि विभिन्न बंटनों का वक्र एक ही लॉरेंज प्रस्तुति में दिखाया जाए, तो कर्ण रेखा से सबसे अधिक दूरी वाला वक्र सर्वाधिक असमानता प्रस्तुत करता है।

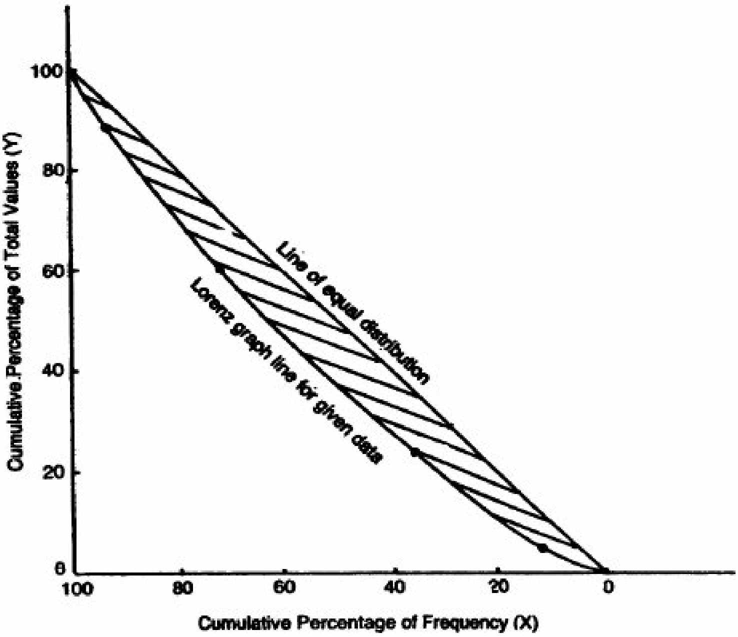
उदाहरण 17

50 व्यावसायिक फर्मों के लाभ से सम्बंधित समंकों के लिए लॉरेंज वक्र खीचिंये, तथा लाभों में उपस्थित असमानता की सीमा दिखाइये :

लाभ (000 रु॰) :	10 — 20	20 — 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60
फर्मों की संख्या :	5	13	18	10	4

		f		x	(mxf)	मानं	(y)
10 — 20	15	5	5	10	75	75	4.4
20 — 30	25	13	18	36	325	400	23.5
30 — 40	35	18	36	72	630	1030	60.6
40 — 50	45	10	46	92	450	1410	87.1
50 — 60	55	4	50	100	220	1700	100.0

अब आप पहले बताए गए क्रमों का एक-एक करके अनुसरण कीजिये तथा x अक्ष पर प्रतिशत संचयी आवृत्ति (x) तथा y- अक्ष पर प्रतिशत संचयी कुल मानों (y) को लेकर लॉरेंज वक्र खींचिये। चित्र 15.1 को ध्यानपूर्वक देखिये और अध्ययन कीजिये कि यह किस प्रकार खींचा गया है।



चित्र 15.1

व्याख्या : प्रथम बिंदु x पर 10 तथा y पर 4.4 इसका प्रतिनिधित्व करते हैं कि 10% मदों का कुल मान 4.4% है । इसी प्रकार द्वितीय बिंदु x अक्ष पर 36 तथा y अक्ष पर 23.5 बताते है कि यदि हम नीचे के मूल्यों की ओर से गणना करें तो 36% मदों का मान कुल मान का 23.5% हैं। आप अन्य बिंदुओं का निर्वचन भी इसी प्रकार प्राप्त कर सकते हैं। जब कोई मद नहीं ली जाती तो कोई कुल मान भी नहीं होता। अतः बिंदु x =0 तथा y = 0 भी लॉरेंज वक्र पर आता है। अतः x और y के परिकलित मानों के साथ बिंदु (0,0) को भी आलेखित किया जाता है। तथा फिर विभिन्न बिंदुओं को मिला दिया जाता है।

जैसा कि पहले कहा गया है (100,100) को (0,0) से मिलाने वाली रेखा को समान बंटन की रेखा कहते हैं। ऐसा क्यों है ? यह रेखा (0,0), (20,20), (70,70) आदि, जैसे बिंदुओं का प्रतिनिधित्व करती है। ये बिंदु बताते हैं कि मदों की प्रतिशतताएँ तथा कुल मानों की प्रतिशतताएँ भिन्न हैं, अथवा कुल मान बिल्कुल उसी अनुपात में बढ़ते हैं जिसमें कि मदें। यह तभी सम्भव है जबकि समस्त मदों के समान मान हो। अतः इस रेखा को समान बंटन की रेखा कहा जाता है।

दोनों अक्ष (x-अक्ष तथा y-अक्ष) एक साथ लिये जाने पर अधिकतम असमानता के लिए लॉरेंज वक्र रेखाचित्र का प्रतिनिधित्व करते हैं। अधिकतम असमानता का अर्थ है कि अंतिम मद के अतिरिक्त समस्त मदों का मान

शून्य है। समस्त मान (ग लॉरेंज द्वारा लिए गए समंकों में सम्पत्ति) अंतिम मद पर केन्द्रित है। अतः अधिकतम असमानता का लेखाचित्र खींचने के लिए हमें ये बिन्दु लेने होते हैं।

Ox मान के साथ Ox मद, Ox मान के साथ 20 x मदें, 0 % मान के साथ 80 % मदें, O% मान के साथ 99% मदें आदि। ज्यूँही अन्तिम मद ली जाती है 100% मदों का 100 % मूल्य होता है तथा ये समस्त बिन्दु दो अक्ष बनाते हैं। अतः दोनों अक्ष एक साथ अधिकतम असमानता के लॉरेंज वक्र का प्रतिनिधित्व करते हैं। अतः किसी भी दिये गए समंकों का लेखाचित्र समान बंटन की रेखा से दूर तथा दो अक्षों की ओर होगा। इस प्रकार समान बंटन की रेखा तथा दिये गये समंकों के आरेख के बीच का क्षेत्रफल (जिसे चित्र में छायांकृत क्षेत्र के रूप में दिखाया गया है) समंकों में असमानता की सीमा को बताते हैं।

उदाहरण 18

पाँच-पाँच श्रमिकों के दो कलकों के लिए जिनकी साप्ताहिक आय के आँकड़े नीचे दिये गये हैं लॉरेंज लेखाचित्र खीचिये। बताइये किस कुलक की आय में अधिक असमानता है।

समूह A की आय (रूपयों में) :	96	104	103	99	98
समूह B की आय (रूपयों में) :	100	270	580	620	430

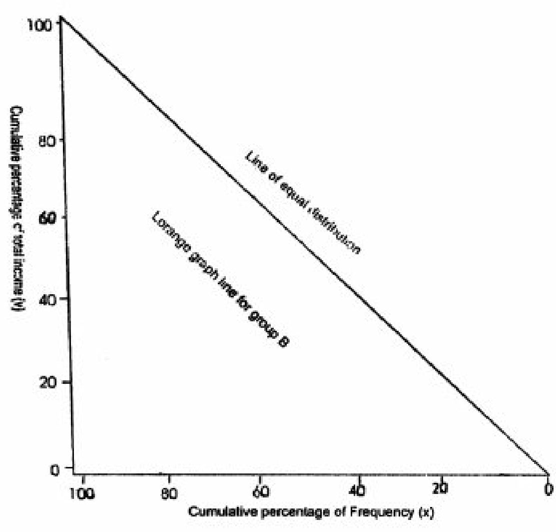
हल :

इस स्थिति में आवृत्तियाँ नहीं दी गई हैं। वास्तव में प्रत्येक आय का आँकड़ा एक श्रमिक की आय का प्रतिनिधित्व करता है। अतः समूह A तथा B में विभिन्न आय के आँकड़ों में से प्रत्येक की आवृत्ति एक है। समंकों के आरोही क्रम में व्यवस्थित करने पर दोनों कुलकों के लिए संगणना निम्न प्रकार से होगी।

लॉरेंज वक्र के लिए परिकलन

समूह A			समूह B			दोनों कलकों के लिए		
आय (रू.)	संचयी आय	%संचयी आय (YA)	आय रू.	संचयी आय	%संचयी आय (YB)	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति	%संचयी आवृत्ति
96	96	19.2	100	100	5.0	1	1	20
98	194	38.8	270	370	18.5	1	2	40
99	293	58.6	430	800	40.0	1	3	60
103	396	79.2	580	1380	69.0	1	4	80
104	500	100.0	620	2000	100.0	1	5	100

अब पहले बनाए गए चरणों का अनुसरण कीजिये, तथा दोनों समूहों के लिए लॉरेंज वक्र खींचिए। चित्र 15.2 को ध्यानपूर्वक देखिये तथा अध्ययन कीजिए कि आरेख किस प्रकार बनाया गया है।



चित्र 15.2

चित्र 15.2 दिखाता है कि समूह B के लिए बनाई गई वक्र समूह A के लिए बनाई वक्र की अपेक्षा समान बंटन की रेखा से अधिक दूरी पर है। इसका अर्थ है कि समूह B में श्रमिकों की आयों में अधिक असमानताएँ हैं।

15.6 अपकिरण की मापों की तुलना

इस इकाई तथा पिछली इकाई में हमने विस्तार, चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन, तथा मानक विचलन जैसे अपकिरण के विभिन्न मापों के अर्थ, परिकलन, गुण व परिसीमाओं का विवेचन किया है। किंतु आपको किसी एक दी गई परिस्थिति में अपकिरण के उचित माप का चुनाव करने के योग्य होना चाहिये। आप सही चुनाव कर सकें, इसके लिए आवश्यक है कि आप इन मापों के सापेक्ष लक्षणों के विषय में जानें। अतः आइये अब हम इन मापों की एक दूसरे से तुलना करें, ताकि हम अपकिरण के इन मापों के सापेक्ष गुणों और परिसीमाओं के विषय में जान सकें।

1 **प्रकार :** विस्तार तथा चतुर्थक विचलन अपकिरण के ऐसे माप हैं जो समंकों का प्रसार प्रदान करते हैं, जबकि माध्य विचलन तथा मानक विचलन अपकिरण के ऐसे माप हैं जो केन्द्रीय प्रवृत्ति के किसी माप से विचलनों का औसत प्रदान करते हैं।

2 **परिकलन :** विस्तार एक श्रेणी की उपरिसीमा तथा निचली सीमा के मानों के बीच का अंतर होता है। चतुर्थक विचलन एक श्रेणी के तृतीय चतुर्थक तथा प्रथम चतुर्थक के मानों के बीच के अंतर को दो से भाग देने पर प्राप्त होता है। माध्य विचलन किसी श्रेणी में माध्य से निरपेक्ष विचलनों के योग को मदों की संख्या से भाग देने पर प्राप्त होता है। मानक विचलन समान्तर माध्य का वर्गमूल होता है।

3 **परिणाम :** विस्तार सरल तथा समझने में सुगम होता है। चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन तथा मानक विचलन ऐसे नहीं हैं। चतुर्थक विचलन तथा माध्य विचलन कुछ सीमा तक बोधगम्य हैं। किन्तु मानक विचलन तुलनात्मक दृष्टि से जटिल तथा अमूर्त है।

4 **मदें :** विस्तार तथा चतुर्थक विचलन के परिकलन में एक श्रेणी की समस्त मदों का ध्यान नहीं रखा जाता, किन्तु जब माध्य विचलन तथा मानक विचलन का परिकलन किया जाता है, तो श्रेणी की समस्त मदों का ध्यान रखा जाता है।

5 **प्रतिपादन :** विस्तार, चतुर्थक विचलन तथा माध्य विचलन गणितीय प्रतिपादन के योग्य नहीं होते। मानक विचलन गणितीय प्रतिपादन के योग्य होता है।

6 **चरम मान :** चतुर्थक विचलन एक श्रेणी में मदों के चरम मानों या असामान्य मानों से प्रभावित नही होता । माध्य विचलन तथा मानक विचलन में से माध्य विचलन चरम मानों से कम प्रभावित होता है। विस्तार केवल चरम मानों पर निर्भर करता है।

7 **विवृतमुखी वर्ग :** विवृतमुखी वर्गान्तरों वाले आवृत्ति बटन की स्थिति में विस्तार माध्य विचलन तथा मानक विचलन का परिकलन नहीं किया जा सकता। ऐसे बंटन के लिए चतुर्थक विचलन परिकलित किया जा सकता है।

8 **विश्वस्तता :** मानक विचलन को अपकिरण का सबसे अधिक विश्वसनीय माप माना जाता है। विस्तार या चतुर्थक विचलन या माध्य विचलन अपकिरण का ऐसा विश्वसनीय माप नहीं है। वास्तव में मानक विचलन प्रतिदर्शी विभ्रमों से कम प्रभावित होता है।

9 **उपयोग :** मानक विचलन को अपकिरण का सर्वोत्तम माप माना जाता है। इसमें अपकिरण के एक अच्छे और विश्वसनीय माप के समस्त गुण विद्यमान हैं। अतः सांख्यिकीय विश्लेषण तथा प्रतिपादन में इसका सर्वाधिक उपयोग होता है। विस्तार चतुर्थक विचलन तथा माध्य विचलन इतने लोकप्रिय नहीं है तथा इनका उपयोग केवल सीमित किंतु समुचित स्थितियों में ही किया जाता है।

15.7 सारांश

माध्य विचलन का परिकलन करते समय विचलनों के चिन्हों की उपेक्षा कर दी जाती है। इससे माप की कुछ परिसीमाएँ हो जाती हैं। ऐसी परिसीमाओं को निष्प्रभावित करने के लिए एक नया माप, जिसे मूल माध्य वर्ग विचलन कहा जाता है, अपकिरण मापने के लिए परिभाषित किया जाता है। यह केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के वर्गों के समांतर माध्य का वर्गमूल होता है। समांतर माध्य से लिया गया मूल माध्य वर्ग विचलन न्यूनतम होता है तथा इसे मानक विचलन का नाम दिया जाता है। मानक विचलन के परिकलन की दो विधियाँ

हैं : 1) प्रत्यक्ष विधि तथा 2) छोटी विधि। पद विचलों का प्रयोग करने वाली छोटी विधि का प्रयोग अधिक प्रचलित है। इसका सूत्र है : मानक विचलन $(\sigma) = C \times \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{n} - \frac{(\Sigma fd')^2}{2}}$

मानक विचलन दृढ़तापूर्वक परिभाषित होता है तो यह समस्त मदों पर आधारित होता है। यह बीजगणितीय प्रतिपादन के अनुकूल होता है तथा प्रतिदर्शी उच्चावचनों (sampling fluctuations) से न्यूनतम प्रभावित होता है। किन्तु माध्य विचलन की अपेक्षा यह चरम मदों से बहुत अधिक प्रभावित होता है। इसके कुछ गणितीय गुणधर्म भी हैं। यह मूल के परिवर्तन से प्रभावित नहीं होता, किंतु स्केल के परिवर्तन से उसी सीमा तक प्रभावित होता है जिस सीमा तक मदें प्रभावित होती हैं। इसका मान माध्य विचलन के मान से कभी कम नहीं होता। सामान्य प्रकार के समंकों के लिए माध्य विचलन मानक विचलन का लगभग 4/5, तथा चतुर्थक विचलन मानक विचलन का लगभग 2/3 होता है। समान्तर माध्य $\pm$ मानक विचलन के बीच के विस्तार में 68% मदें तथा समांतर माध्य ± 2 मानक विचलन के बीच के विस्तार में 95% मदें होती हैं।

अपकिरण मापने की लेखाचित्रीय विधि लारेंज वक्र है। इसकी परिकल्पना मैक्स ओ· लॉरेंज द्वारा की गई थी। यह दोहरी संचयी प्रतिशतता (double cumulative percentage) वक्र है। इसमें x-अक्ष पर आवृत्तियों की संचयी प्रतिशतताएँ ली जाती हैं तथा स्केल 100 से प्रारम्भ होकर 0 तक जाता है तथा हम दाहिनी ओर चलते हैं। मदों के कुल मानों की संचयी प्रतिशतताएँ y-अक्ष पर आलेखित की जाती है, तथा स्केल 0 से प्रारम्भ होकर ऊपर की ओर 100 तक जाता है। बिंदुओं (0,0) से बिन्दुओं (100,100) को मिलाने वाली रेखा को समान बंटन की रेखा कहा जाता है और एक साथ दोनों अक्ष अधिकतम असमानता के लिए लॉरेंज वक्र होते हैं। अतः समान बंटन की रेखा तथा किन्हीं समंकों के लेखाचित्र के बीच का क्षेत्रफल समंकों में उपस्थित असमानताओं की सीमा का प्रतिनिधित्व करता है।

15.8 शब्दावली और प्रतीक सूची

विचरण गुणांक : समान्तर माध्य से भाजित मानक विचलन जिसे प्रतिशतता के रूप में व्यक्त किया गया हो।

लॉरेंज वक्र : एक दोहरा संचयी प्रतिशतता लेखाचित्र जिसका उपयोग मदों की असमानताओं की सीमा का निश्चय करने के लिए किया जाता है।

मूल माध्य वर्ग विचलन : केन्द्रीय प्रवृत्ति से मदों के विचलनों के वर्गों के समांतर माध्य का वर्गमूल।

मानक विचलन : समांतर माध्य से मूल माध्य वर्ग विचलन।

प्रतीक सूची (Symbols)

विचरण गुणांक : C.V.

संयुक्त मानक विचलन : σ_{12}, σc, SDc

संयुक्त माध्य और दिये गए माध्य के बीच अंतर $X_{12} - X_1$, d, आदि मानक विचलन SD., σ, S, समान्यतः समष्टि का मानक विचलन σ द्वारा, तथा प्रतिदर्श का मानक विचलन 'S' द्वारा सूचित किया जाता है।

15.9 बोध प्रश्नों के उत्तर

क	3	49.1					
	4	156.37					
	5	(i) सही	(ii) गलत	(iii) सही	(iv) गलत	(v) गलत	
ख	1	(i) सही	(ii) गलत	(iii) सही	(iv) गलत	(v) गलत	
	2	(i) कम	(ii) 68	(iii) 6.4	(iv) गैर	(v) 0	
	3	(क) ii	(ख) iv	(ग) i	(घ) i	(ङ) i	(च) ii

15.10 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

प्रश्न

1 मानक विचलन क्या है ? अपकिरण के अन्य मापों से यह किस प्रकार श्रेष्ठ है ?

2 विचरण गुणांक क्या होता है ? विचरण के एक माप के रूप में इसका क्या कार्य है ? यह प्रसरण से किस प्रकार भिन्न है ?

3 अपकिरण के विभिन्न मापों की परिभाषा कीजिये तथा उनके सापेक्ष गुणों और परिसीमाओं की व्याख्या कीजिये।

अभ्यास

1 एक महाविद्यालय की बी॰काम॰ कक्षा के विद्यार्थियों ने सांख्यिकी में 100 अंकों में से निम्नलिखित अंक प्राप्त किये हैं। प्राप्तांकों का मानक विचलन परिकलित कीजिये।

विद्यार्थी :	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
अंक :	5	10	20	25	40	42	45	48	70	80

(उत्तर = 23.06)

2 निम्नलिखित समंकों से मानक विचलन परिकलित कीजिये :

माध्य बिंदु	आवृत्ति
1	2
2	60
3	101
4	152
5	205
6	155
7	79
8	40
9	1

(उत्तर : 1.57)

3 100 कम्पनियों के लाभों से सम्बंधित निम्नलिखित समंकों के लिए मानक विचलन परिकलित कीजिये :

लाभ (लाख रुपयों में)	कम्पनियों की संख्या
8 — 10	8
10 — 12	12
12 — 14	20
14 — 16	30
16 — 18	20
18 — 20	10

(उत्तर : 2.77)

4 रद्द किये गए उत्पादन के विश्लेषण से निम्नलिखित संख्याएँ प्राप्त हुई। समांतर माध्य तथा मानक विचलन परिकलित कीजिये।

प्रति परिचालक रद्द किये गए उत्पादन की संख्या	परिचालकों की संख्या
21 — 25	5
26 — 30	15
31 — 35	28
36 — 40	42
41 — 45	15
46 — 50	12
51 — 55	3

(उत्तर : $\overline{X} = 36.96$; $\sigma = 6.735$)

5 40 और 50 मदों वाले दो प्रतिदर्शों का समांतर माध्य एक समान 53 है, किंतु उनके मानक विचलन अलग-अलग तथा क्रमशः 18 और 8 हैं। 90 मदों वाले संयुक्त प्रतिदर्श का मानक विचलन ज्ञात कीजिये ।

(उत्तर : $\sigma_{12} = 14$)

6 निम्नलिखित समंकों का मानक विचलन व विचरण गुणांक ज्ञात कीजिये।

अंक	विद्यार्थियों की संख्या
10 से कम	12
20 से कम	30
30 से कम	65
40 से कम	107
50 से कम	202
60 से कम	222
70 से कम	230

(उत्तर : $\sigma = 13.9$, C.V. = 37.3%)

7 आपको एक विशेष नगर में 100 व्यक्तियों द्वारा उपभोग किए गए बिजली के किलोवाट घंटों से सम्बंधित समंक दिये गए हैं :

उपभोग किये गए कि· वा· घं·	उपभोक्ताओं की संख्या
0 किन्तु 10 से कम	6
10 किन्तु 20 से कम	25
20 किन्तु 30 से कम	36
30 किन्तु 40 से कम	20
40 किन्तु 50 से कम	13

(1) समांतर माध्य, (2) मानक विचलन, तथा (3) विस्तार जिसमें बीच के 50% उपभोक्ता आते हैं, परिकलित कीजिये।

(उत्तर : (1) 25.9, (2) 10.96, (3) 17.6 से 34)

8 एक छोटे नगर में फुटकर दुकानों द्वारा अर्जित लाभ के संबंध में एक सर्वेक्षण किया गया। निम्न परिणाम प्राप्त हुए।

लाभ (+)/हानि (–) ('000 रु॰ में)	दुकानों की संख्या
–4 से –3	4
–3 से –2	10
–2 से –1	22
–1 से 0	28
0 से 1	38
1 से 2	56
2 से 3	40
3 से 4	24
4 से 5	18
5 से 6	10

परिकलित कीजिए :

(1) एक फुटकर दुकान द्वारा अर्जित औसत लाभ,

(2) सारी दुकानों द्वारा अर्जित कुल लाभ

(3) लाभ का विचरण गुणांक।

(उत्तर : (1) 1348 रु॰ (2) 3,37,000 रु॰ (3) 152 .8 %)

9 एक फैक्टरी A और B दो प्रकार के बिजली के लैम्पों का उत्पादन करती हैं। उनके जीवन से सम्बंधित एक प्रयोग में, निम्नलिखित परिणाम प्राप्त हुए :

जीवन की लम्बाई (घंटों में)	लैम्पों की संख्या A	लैम्पों की संख्या B
500 — 700	5	4
700 — 900	11	30
900 — 1100	26	12
1100 — 1300	10	9
1300 — 1500	8	6

विचरण गुणांक का प्रयोग करके दोनों प्रकार के लैम्पों के जीवन की चरता की (Variability) तुलना कीजिये।

(उत्तर : C.V. (A) = 21.64%, C.V. (B) = 23.41%)

10 एक ही प्रकार के कार्य में लगी हुई दो फैक्टरियों A तथा B में औसत साप्ताहिक वेतन का मानक विचलन निम्न प्रकार है :

फैक्टरी	औसत साप्ताहिक मजदूरी (रु॰)	मजदूरी का मानक विचलन (रु॰)	श्रमिकों की संख्या
A	460	50	100
B	490	40	80

i) कौन सी फैक्टरी साप्ताहिक मजदूरी के रूप में अधिक राशि देती है ?

ii) कौन सी फैक्टरी मजदूरी के बंटन में अधिक चरता दिखाती है ?

iii) इन दोनों फैक्टरियों के कुल श्रमिकों की मज़दूरी का संयुक्त समांतर माध्य व मानक विचलन क्या है ?

(उत्तर : i) फैक्टरी A

ii) C. V. (A) = 10.87% C.V. (B) = 8.16%

iii) $x_{12} = 47.33$ रु॰ $\sigma_{12} = 49.19$ रु॰

11 निम्नलिखित समंकों के लिए लॉरेंज वक्र खीचिये :

मजदूरी (रु॰) :	300 – 400	400 – 500	500 – 600	600 – 700	700 – 800
श्रमिकों की सं॰ :					
फैक्टरी A :	40	30	40	60	40
फैक्टरी B :	300	200	180	220	100

12 20 मदों के समांतर माध्य व मानक विचलन क्रमशः 20 व 5 पाए गए। किन्तु परिकलन करते समय मद 13 को गलती से 30 पढ़ लिया गया। शुद्ध समांतर व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

(उत्तर : $\overline{x} = 19.15$, $\sigma = 4.66$)

नोट : ये प्रशन व अभ्यास आपको इकाई को अधिक अच्छी तरह समझने में सहायक होंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिये। परंतु अपने उत्तर विश्वविद्यालय को न भेजें। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

इकाई 16 वैषम्य की माप

इकाई की रूपरेखा

16.0 उद्देश्य
16.1 प्रस्तावना
16.2 वैषम्य का अर्थ
16.3 धनात्मक और ऋणात्मक वैषम्य
16.4 अपकिरण और वैषम्य में अंतर
16.5 वैषम्य के परीक्षण
16.6 वैषम्य की माप
  16.6.1 निरपेक्ष माप
  16.6.2 सापेक्ष माप
16.7 कुछ उदाहरण
16.8 सामान्य वक्र की विशेषताएं
16.9 सारांश
16.10 शब्दावली और प्रतीक सूची
16.11 बोध प्रश्नों के उत्तर
16.12 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास

16.0 उद्देश्य

इस इकाई का अध्ययन करने के पश्चात् आप इस योग्य हो सकेंगे कि :

- वैषम्य (skewness) और अपकिरण (dispersion) में भेद कर सकें,
- सममित, धनात्मक विषम और ऋणात्मक विषम समंकों में अंतर बता सके,
- विभिन्न विधियों से वैषम्य का परिकलन कर सकें,
- एक निर्दिष्ट परिस्थिति में उपयुक्त परिकलन विधि का निश्चय कर सकें,
- समंकों के विश्लेषण में प्रसामान्य वक्र की भूमिका का परिबोध और उसके विशेष गुणों की चर्चा कर सकें।

16.1 प्रस्तावना

जैसा कि आप जानते हैं, किन्हीं दिए गए संख्यात्मक समंकों का विश्लेषण करने के लिए उसके तीन मुख्य लक्षण विचारणीय होते हैं : (1) केन्द्रीय प्रवृत्ति, अर्थात् वह मान जिसके निकट (गिर्द) अन्य बहुत से मद एकत्रित होते हैं। (2) अपकिरण, अर्थात् मदों के केन्द्रीय प्रवृत्ति से विचलन की मात्रा, और (3) वैषम्य, अर्थात् मदों के केन्द्रीय प्रवृत्ति के निकट वितरण की प्रकृति। इस इकाई में आप तीसरे लक्षण, वैषम्य के बारे में पढ़ेंगे।

इकाइयों 10 से 13 में आपने केन्द्रीय प्रवृत्ति की मापों, अर्थात् समांतर माध्य, माध्यिका, भूयिष्ठका (mode gemetric mean), गुणोत्तर माध्य, हरात्मक माध्य और गतिमान माध्य का अध्ययन किया है। इकाइयों 14 और 15 में आपने अपकिरण की मापों, अर्थात् विस्तार चतुर्थक विचलन, माध्य-विचलन, मानक विचलन और लॉरेंज वक्र का अध्ययन किया है। इस इकाई में आप तीसरे लक्षण, अर्थात् वैषम्य के बारे में पढ़ेंगे।

आप वैषम्य के अर्थ, प्रयोजन और परिकलन विधियों का अध्ययन करेंगे। आप समंकों के विश्लेषण में सामान्य वक्र की भूमिका और उसकी विशेषताओं का भी अध्ययन करेंगे। वस्तुतः एक अन्य लक्षण और भी है, जिसे ककुदता (kurtoses) कहते हैं और जो समंकों के केन्द्रीय भाग में आवृत्तियों के संकेन्द्रण को प्रकट करता है। इसका अध्ययन प्रस्तुत पाठ्यक्रम के विषय-क्षेत्र से बाहर है।

16.2 वैषम्य का अर्थ

एक आवृत्ति बंटन को सममित बंटन कहते हैं, यदि आवृत्तियाँ, केन्द्रीय प्रवृत्ति के सापेक्ष सममित रूप से बंटी हों, अर्थात् यदि केन्द्रीय प्रवृत्ति (मध्य) से समदूरस्थ चर मानों की आवृत्तियाँ समान हों। निम्नलिखित दो बंटनों का अध्ययन कीजिए।

क)

x	:	10	15	20	25	30
f	:	5		26	8	5

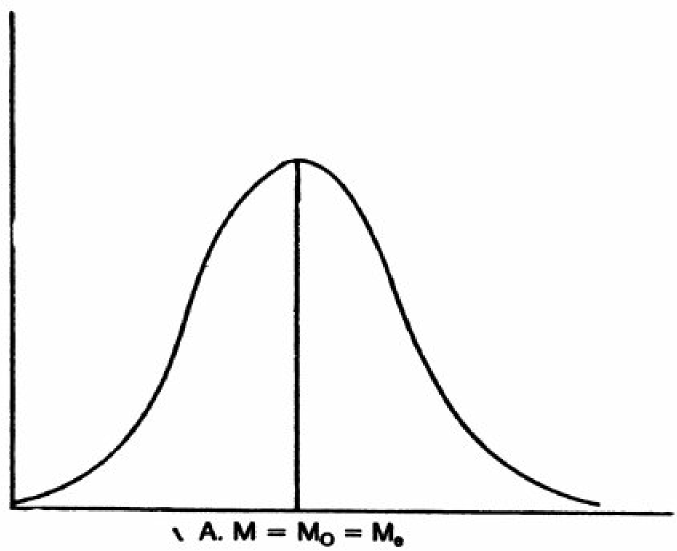
यहां x = 20, मध्य के मदों का वर्ग है।

ख)

x	:	5—9	9 — 13	13 — 17	17 — 21	21—24
f	:	7	18	25	18	7

यहां 13-17, मध्य के मदों का वर्ग है। आप सरलता से समझ सकते हैं कि ये दोनों सममित बंटन हैं। आप यह भी ध्यान दीजिए (आप परिकलन द्वारा सत्यापन कर सकते हैं) कि प्रत्येक बंटन के लिए समांतर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक के मान अभिन्न हैं। वस्तुतः प्रत्येक सममित बंटन के लिए, जिसमें आवृत्तियाँ स्थिरता से बढ़ती हों और तब स्थिरता से घटती हों (अर्थात् जो घटाकार हो)। माध्य, माध्यिका और बहुलक अभिन्न होते हैं। ग्राफ पेपर पर आलेखित ऐसे बंटनों का रूप, समझने के लिए, चित्र 16.1 का अध्ययन कीजिए ।

चित्र 16.1



यदि पूर्णतः सममित आंकड़ों के रेखाचित्र को, माध्य में से जाती हुई रेखा पर मोड़ दिया जाए, तो वक्र का एक ओर का भाग दूसरी ओर के भाग पर, पूर्णतः संपाती होता है। आप कह सकते हैं कि वक्र का एक ओर का भाग दूसरी ओर के भाग का दर्पण प्रतिबिम्ब है।

परंतु, सामान्यतः आवृत्ति बंटन पूर्णतः सममित नहीं होते। कुछ अल्पमात्र असममित हो सकते है, तो अन्य कुछ बहुत अधिक असममित हो सकते हैं। निम्न दो असममित (या विषम) बंटनों पर विचार कीजिए :

क)

x	:	5—9	9 — 13	13 — 17	17 — 21	21 — 24
f	:	7	18	25	15	7

ख)

x	:	5—9	9 — 13	13 — 17	17 — 21	21 — 24
f	:	7	28	15	10	2

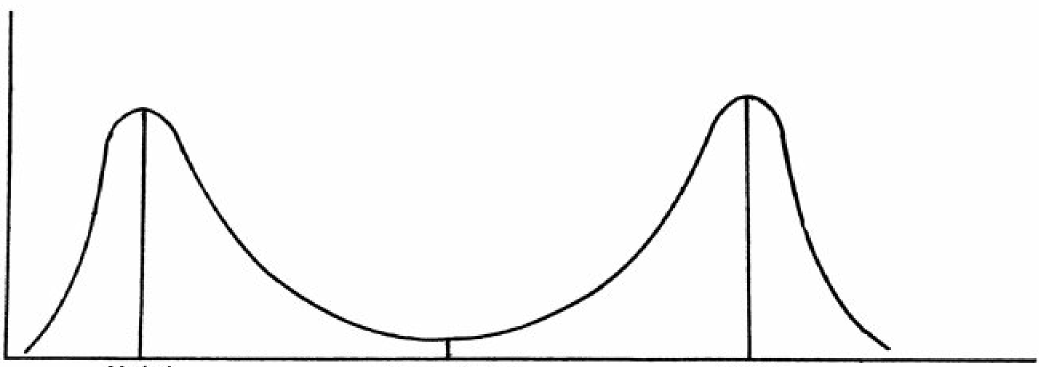
यहां आवृत्तियाँ मध्य के सापेक्ष सममित रूप से वितरित नहीं हैं। बंटन (क) में, असममिति की मात्रा कम है, जब कि बंटन (ख) में, इसकी मात्रा, तुलनात्मक रूप से अधिक है। शब्द "वैषम्य" या 'विषमता" का प्रयोग, आंकड़ों में असममिति (asymmetry) की मात्रा को प्रकट करने के लिए किया जाता है। यदि आवृत्तिबंटन सममित न हों तो इसे विषम कहते हैं। यथा शब्द "वैषम्य", असममिति को प्रकट करता है, और शब्द "विषम" असममित को। अतः एक सममित बंटन का वैषम्य शून्य होता है।

यदि एक बंटन में, आवृत्तियाँ पहले स्थिरता से घटें और फिर स्थिरता से बढें, तो भी, वह बंटन सममित हो सकता है। निम्न बंटनों पर विचार कीजिए :

मद :	10 — 20	20 — 30	30 — 40	40 — 50	50 — 60	60 — 70	70 — 80
आवृत्ति :	40	27	15	10	15	27	40

यह भी एक सममित बंटन का उदाहरण है। परंतु, इसकी स्थिति में, भूयिष्ठक के दो मान होंगे, और दोनों ही, समांतर माध्य और माध्यिका से, जो कि मध्य के वर्ग में हैं, भिन्न होंगे। ध्यान दीजिए कि ऐसे सममित बंटनों में जिन्हें द्वि-भूयिष्ठक या U- रूप कहते हैं, केवल समांतर माध्य और माध्यिका ही समान होते हैं। चित्र 16.2 को देखिए और ग्राफ पेपर पर आलेखित ऐसे बंटन के रूप का अध्ययन कीजिए।

चित्र 16.2



एक द्विभूयिष्ठक बंटन, विषम भी हो सकता है जैसा कि निम्न उदाहरण में दिखाया गया है :

मद :	10 — 15	15 — 20	20 — 25	25 — 30	30 — 35	35 — 40	40 — 50
आवृत्ति :	27	18	10	5	17	17	30

यहां भी, मध्य वर्ग या केन्द्रीय मान के सापेक्ष, दोनों ओर, मदों का वितरण समान नहीं है। अतः हम यह भी कह सकते हैं कि वैषम्य के अध्ययन से अभिप्राय, केन्द्रीय प्रवृत्ति के दोनों ओर मदों के वितरण का अध्ययन है। आंकड़ों के वैषम्य विश्लेषण से, निम्न मुख्य प्रयोजन पूरे होते हैं :

1 यह संकेन्द्रण की प्रकृति और मात्रा ज्ञात करने में सहायक होता है। अर्थात् यह ज्ञात करने में कि संकेन्द्रण उच्चतर मानों में अधिक है, या निम्नतर मानों में।

2 माध्य, माध्यिका और बहुलक में, आनुभाविक संबंध, अर्थात् $Mo = 3Md - 2\bar{x}$, एक परिमित रूप से विषम बंटन पर आधारित है। वैषम्य के माप से प्रकट होगा कि किस सीमा तक, ऐसा आनुभाविक संबंध वैध होता है।

3 वैषम्य का माप, यह ज्ञात करने में सहायक होता है कि बंटन सामान्य है या नहीं। आप सामान्य बंटन के बारे में, आगे इसी इकाई में पढ़ेंगे।

16.3 धनात्मक और ऋणात्मक वैषम्य

जब भी समंक विषम हों तो दो सम्भावनाएँ होती हैं : (1) वैषम्य धनात्मक है, या (2) वैषम्य ऋणात्मक है। घंटाकार आंकड़ों या एक बहुलक आंकड़ों में, जो कि प्राकृतिक अध्ययनों में सर्वाधिक सामान्य रूप से पाये भी जाते हैं, धनात्मक और ऋणात्मक वैषम्य अर्थात् वैषम्य की दिशा की संकल्पना को समझना सरल है। इस संबंध में, बहुलक एक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है। बहुलक के दोनों ओर समंकों का फैलाव वैषम्य की दिशा का निश्चय करने में सहायक होता है। नीचे दिए गए दो समंक समूहों पर विचार कीजिए :

क)

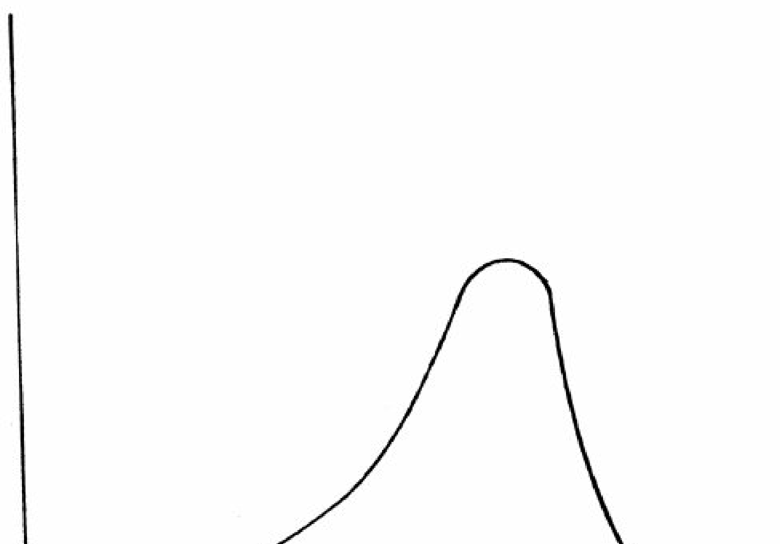
मद	2—4	4—6	6—8	8—10	10—12	12—14	14—16
आवृत्ति	5	12	27	10	8	3	1

ख)

मद	10—15	15—20	20—25	25—30	30—35	35—40	40—45
आवृत्ति	2	5	12	18	30	21	6

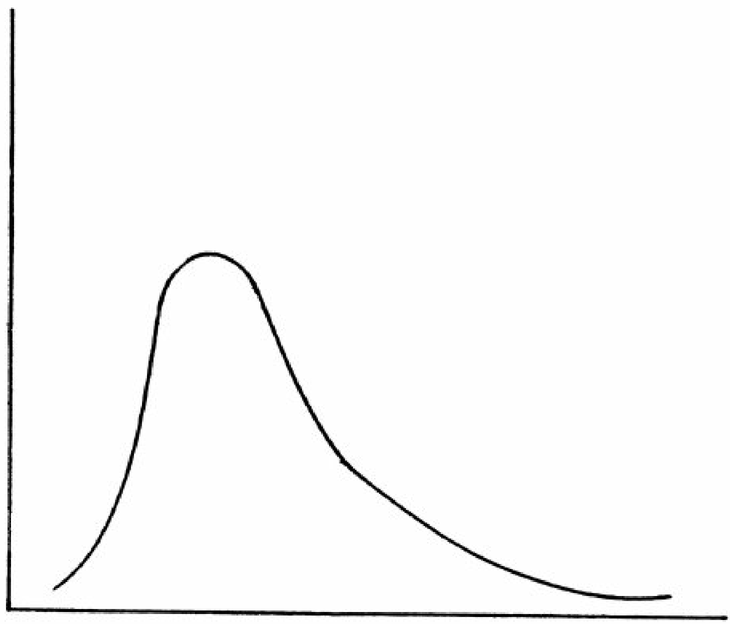
समूह (ख) के सदृश, यदि बंटन का पुच्छ भाग छोटे मानों की ओर या बाईं ओर अधिक लम्बा हो, अर्थात् बहुलक के नीचे की ओर समंकों का फैलाव अधिक हो, तो वैषम्य ऋणात्मक या वामावर्त होता है। ऐसी स्थिति में, समांतर माध्य < माध्यिका < बहुलक। ग्राफ पेपर पर आलेखित ऐसे आंकड़ों के रूप को समझने के लिए, चित्र 16.3 को ध्यान से देखिए।

चित्र 16.3



समूह (क) के सदृश यदि बंटन का पुच्छ भाग, बड़े मानों की ओर या दाईं ओर, अधिक लम्बा हो, अर्थात् बहुलक के ऊपर की ओर समंकों का फैलाव अधिक हो, तो वैषम्य धनात्मक या दक्षिणावर्त होता है। ऐसी स्थिति में समांतर माध्य > माध्यिका > बहुलक। ग्राफ पेपर पर आलेखित ऐसे आंकड़ों के रूप को समझने के लिए चित्र 16.4 को ध्यान से देखिए।

चित्र 16.4



ऐसे समंकों को दीर्घीकृत घंटाकार समंक कहते हैं। चरम धनात्मक वैषम्य तब होता है जब निम्नतम मानों की आवृत्तियाँ उच्चतम हों और फिर जैसे-जैसे मान बढ़ते जाएँ, आवृत्तियाँ स्थिरता से घटती जाएं। इसी प्रकार चरम ऋणात्मक वैषम्य तब होता है जब निम्नतम मानों की आवृत्तियाँ उच्चतम हों। ऐसे समंकों को J-रूप समंक कहते हैं। निम्न के दो समंक समूहों पर विचार कीजिए।

क)

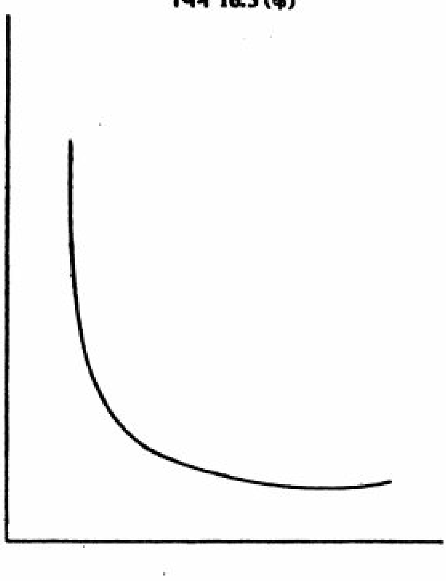
मदों के आमाप	10 — 12	12 — 14	14 — 16	16 — 18	18 — 20
आवृत्ति	27	20	12	6	3

ख)

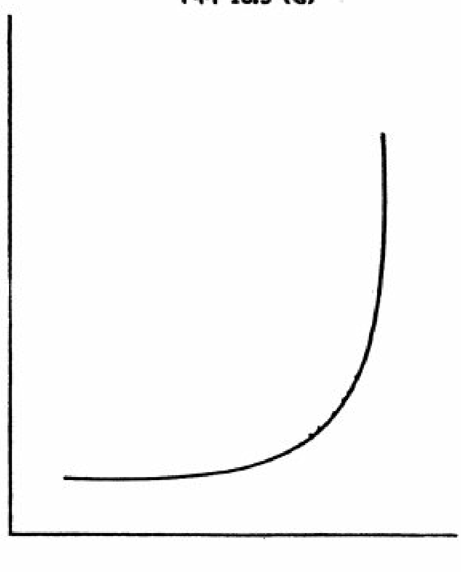
मदों के आमाप	10 — 12	12 — 14	14 — 16	16 — 18	18 — 20
आवृत्ति	3	6	12	20	27

समूह (क) में, परम धनात्मक वैषम्य है, जब कि समूह (ख) में, परम ऋणात्मक वैषम्य है। ग्राफ पेपर पर आलेखित उनके रूप, चित्र 16.5 (क) और 16.5 (ख) में प्रदर्शित रूपों के अनुसार होंगे।

चित्र 16.5 (क)



चित्र 16.5 (ख)



टिप्पणी : समंकों के विषम या असममित होने के लिए, यह आवश्यक है कि समंकों की केन्द्रीय प्रवृत्ति से विचलनों का अस्तित्व हो।

बोध प्रश्न क

1 सममित समंकों और विषम समंकों में भेद बताइए।

....

....

....

....

2 धनात्मक वैषम्य और ऋणात्मक वैषम्य में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

3 परम वैषम्य और परिमित वैषम्य में भेद बताइए।

....

....

....

....

4 घंटाकार समंकों और U-रूप समंकों में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

5 बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं या गलत।

i) सभी बंटनों को ऋणात्मक विषम या धनात्मक विषम, इन दो वर्गों में, विभाजित कर सकते हैं।

ii) एक सममित बंटन के दो आधे भाग, एक दूसरे के, प्रतिबिम्ब होते हैं।

iii) एक सममित बंटन में, (मदों के) माध्यिका से, धनात्मक और ऋणात्मक विचलनों का योगफल सदैव शून्य होता है।

iv) J- रूप बंटन, परिमित वैषम्य का निर्देश करता है।

v) यह सम्भव है कि किन्हीं समंकों के लिए, समांतर माध्य = माध्यिका = बहुलक , परंतु फिर भी वे पूर्णतः सममित न हों।

vi) धनात्मक वैषम्य सूचित करता है कि समांतर माध्य मान, बहुलक मान से कम है।

vii) एक विषम बंटन में, माध्यिका कभी भी, समांतर माध्य के समान नहीं हो सकती।

viii) बंटन के माध्य और बहुलक में अंतर, जितना अधिक होगा, उतना ही अधिक विषम वह बंटन होगा ।

ix) U- रूप आंकड़ों के दो बहुलक होते हैं।

x) दाईं ओर का पुच्छ भाग अधिक लम्बा हो तो इसका अर्थ है कि समंक ऋणात्मक विषम है।

xi) U- रूप बंटन सदैव सममित होते हैं।

xii) परम विषम समंक सदैव धनात्मक विषम होते हैं।

6 निम्नलिखित बंटनों की प्रकृति पर टिप्पणी कीजिए।

i)	14,	14,	14,	14,	14
ii)	11,	12,	14,	16,	17
iii)	1,	3,	6,	18,	42

16.4 अपकिरण और वैषम्य में अंतर

इकाइयों 14 और 15 में बताया गया है कि अपकिरण श्रेणी के केन्द्रीय माप से, उसके मदों के बिखराव, फैलाव या विचलन से सम्बंधित होता है। आपको यह भी ज्ञात है कि अपकिरण की माप, मदों के बिखराव की मात्रा या केन्द्रीय प्रवृत्ति में उनके विचलनों के समांतर माध्य को प्रकट करती है। इसके विपरीत वैषम्य, मदों की एक श्रेणी के सममिति से विचलन से सम्बंधित होता है और वैषम्य की माप, केन्द्रीय प्रवृत्ति के दोनों ओर, मदों के वितरण की असंतुलता की मात्रा को प्रकट करती है। नीचे इनके विशिष्ट लक्षण सारणीबद्ध किए गए हैं :

पक्ष	अपकिरण	वैषम्य
1 मापन	(1) व्यक्तिगत मानों के बिखराव का	(1) बंटन के सममिति से विचलन का
	(2) मानों के केन्द्रीय प्रवृत्ति से विचलन का	(2) केन्द्रीय प्रवृत्ति के दोनों ओर मदों के वितरण की प्रकृति का
2 आगणन	तीन माध्यों : समांतर माध्य, माध्यिका और बहुलक, में से किसी एक के प्रतिनिधित्वता का	तीन माध्यों : समांतर माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक में से किन्हीं दो के अंतर का
3 सममित बंटन की स्थिति में	कोई भी मान हो सकता है	मान शून्य हो सकता है।
4 उपयोगिता	समंकों के विचरण को ज्ञात करने में सहायक होता है।	आवृत्तियों का संकेन्द्रण उच्च मानों में अधिक है, या निम्नतर मानों में, यह ज्ञात करने में सहायक होता है।

16.5 वैषम्य के परीक्षण

हम यह कैसे बता सकते हैं कि कोई विशेष बंटन विषम है या नहीं। हम कहेंगे कि एक बंटन में वैषम्य विद्यमान है यदि इसमें निम्न लक्षण हों :

1 माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक संपाती न हो,

2 माध्यिका से धनात्मक विचलनों का योगफल ऋणात्मक विचलनों के योगफल के समान न हो,

3 भूयिष्ठक के दोनों ओर आवृत्तियों का बंटन समान न हो,

4 चतुर्थक माध्यिका से समदूरस्थ न हों, अर्थात $Q_3 - M_d$ और $M_d - Q_1$ असमान हों,

5 जब श्रेणी के सभी प्रेक्षणों को, ग्राफ पेपर पर आलेखित किया जाए और तब वे एक सममित वक्र प्रदान न करें। इससे अभिप्राय है कि जब रेखाचित्र को माध्यिका या माध्य पर, उध्र्वाधार विभाजित करें और तह दें, तो दोनों आधे भाग पूर्णतः संपाती न हों।

16.6 वैषम्य की माप

किसी श्रेणी में, वैषम्य की मात्रा और उसकी दिशा का अध्ययन करने के लिए वैषम्य के विभिन्न मापों का प्रयोग किया जाता है। वैषम्य के ये माप निरपेक्ष और सापेक्ष दोनों प्रकार के हो सकते हैं।

16.6.1 निरपेक्ष माप

निरपेक्ष माप हमें यह बताते हैं कि असममिति कितनी है और वह धनात्मक है, या ऋणात्मक।

वैषम्य की पहली निरपेक्ष माप, माध्य और भूयिष्ठक के या माध्य और माध्यिका के अंतर पर आधारित होती है । प्रतीक रूप में, (i) निरपेक्ष वैषम्य, Sk = माध्य-भूयिष्ठक , या (ii) निरपेक्ष वैषम्य, Sk = माध्य-माध्यिका। यदि माध्य का मान, भूयिष्ठक या माध्यिका के मान से बढ़ा हो, तो वैषम्य धनात्मक होता है अन्यथा यह ऋणात्मक होता है। ध्यान दीजिए कि एक धनात्मक विषम बंटन में, तीनों माध्यों में, समांतर माध्य का मान अधिकतम और भूयिष्ठक का मान न्यूनतम होता है। इसी प्रकार, एक ऋणात्मक विषम बंटन में, भूयिष्ठक का मान अधिकतम और समांतर माध्य का मान न्यूनतम होता है। दोनों स्थितियों में, माध्यिका, माध्य और भूयिष्ठक के बीच में होती है।

वैषम्य का दूसरा निरपेक्ष माप, चतुर्थकों पर आधारित है और इस तथ्य पर आधारित है कि सामान्यतः एक सममित बंटन में Q_1 और Q_3 माध्यिका से सम-दूरस्थ होते हैं, अर्थात् $Q_3 - M_d = M_d - Q_1$ परन्तु, यदि बंटन असममित हो, तो अधिक लम्बे पुच्छ भाग की ओर स्थित चतुर्थक, दूसरे चतुर्थक की तुलना में, माध्यिका से अधिक दूरी पर होगा। ऐसी स्थिति में, वैषम्य का निरपेक्ष माप, निम्न सूत्र द्वारा प्राप्त कर सकते हैं :

$$\text{निरपेक्ष वैषम्य} = (Q_3 - M_d) - (M_d - Q_1)$$

$$= Q_3 + Q_1 - 2\,M_d$$

सूत्र से स्पष्ट होता है कि यदि $(Q_3 - M_d)$, $(M_d - Q_1)$ से बड़ा हो तो वैषम्य धनात्मक है, अन्यथा यह ऋणात्मक है। ऐसा इसलिए, क्योंकि $Q_3 - M_d > M_d - Q_1$, सूचित करता है कि Q_3 और M_d का अंतर, M_d और Q_1 के अंतर से बड़ा है। इससे अभिप्राय है कि Q_3 की ओर या दाईं ओर का पुच्छ भाग अधिक लम्बा है, अर्थात् वैषम्य दक्षिणावर्त या धनात्मक है।

16.6.2 सापेक्ष माप

दो या दो से अधिक बंटनों के वैषम्य की तुलना करने के उद्देश्य से, निर्दिष्ट श्रेणियों या बंटनों के लिए, वैषम्य गुणांक का परिकलन किया जाता है। सापेक्ष वैषम्य मापने की दो महत्वपूर्ण विधियाँ नीचे दी गई हैं :

1 **कार्ल पियरसन का वैषम्य गुणांक :** वैषम्य मापने के लिए, इस विधि का प्रयोग बहुधा किया जाता है, और यह पहले निरपेक्ष माप पर आधारित है। वैषम्य मापने के लिए सूत्र इस प्रकार है :

$$Skp = \frac{\text{माध्य - भूयिष्ठक}}{\text{मानक विचलन}} \text{ या } \frac{\bar{x} - M_o}{\sigma}$$

अर्थात् वैषम्य के पहले निरपेक्ष माप को मानक विचलन से भाजित किया जाता है। इस प्रकार, यह मान, समंकों की इकाइयों से मुक्त होगा। सममित बंटन के लिए, इस गुणांक का मान शून्य होगा। यदि माध्य भूयिष्ठक से बड़ा हो तो वैषम्य धनात्मक होगा, अन्यथा ऋणात्मक। व्यवहार में, इस गुणांक का मान, प्रायः = 3 के बीच होता है।

यदि भूयिष्ठक सुपरिभाषित न हो तो निम्न सन्निकट संबंध का प्रयोग किया जाता है।

भूयिष्ठक = 3 (माध्यिका) - 2 (माध्य)

वैषम्य के लिए, उपरोक्त सूत्र, निम्न लघुकृत रूप ले लेता है :

$$Skp = \frac{\text{(माध्य - भूयिष्ठक)}}{\text{मानक विचलन}} \text{ या } \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma}$$

टिप्पणी : क्योंकि माध्य और मानक विचलन के परिकलन में, समंकों के सभी मदों का प्रयोग होता है, इसलिए वैषम्य मापने की, **कार्ल पियरसन** की विधि, समंकों के सभी मदों का प्रयोग करती है।

कार्ल पियरसन की विधि के प्रयोग को स्पष्ट रूप से समझने के लिए, आइये कुछ उदाहरणों पर विचार करें।

उदाहरण 1

एक कक्षा के सेक्शन A और B के, कुल 120 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों से, निम्न माप प्राप्त हुए।

सेक्शन A : $\bar{x}$ = 46.83, σ = 14.8, Mo = 51.67

सेक्शन B : $\bar{x}$ = 47.83, σ = 14.8, Mo = 47.07

निर्धारित कीजिए, कि किस सेक्शन के अंकों का बंटन, अधिक विषम है।

हलः

सेक्शन A

वैषम्य गुणांक Skp $= \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$

$= \frac{46.83 - 51.67}{14.8}$

$= \frac{-4.84}{14.8}$

$= -0.327$

सेक्शन B

वैषम्य गुणांक Skp $= \frac{\bar{x} - Mo}{\sigma}$

$= \frac{47.83 - 47.07}{14.8}$

$= \frac{0.76}{14.8}$

$= 0.051$

अतः सेक्शन A के अंकों को बंटन अधिक विषम है। सेक्शन A के लिए, वैषम्य ऋणात्मक है, जबकि सेक्शन B के लिए यह धनात्मक है।

उदाहरण 2

एक समंक समूह के लिए, निम्न सांख्यिकीय माप दिए गए हैं। मानक विचलन का मान ज्ञात कीजिए।

माध्य = 62, माध्यिका = 65 और वैषम्य गुणांक = – 0.375

हल :

वैषम्य गुणांक, जो माध्य, माध्यिका और मानक विचलन पर आश्रित है, वह कार्ल पीयरसन का वैषम्य गुणांक (Skp) है।

$$Skp = \frac{3(\bar{x} - M_d)}{\sigma}$$

दिए गए मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

$$-0.375 = \frac{3(62-65)}{\sigma}$$

$$\therefore \sigma = \frac{-3(62-65)}{0.375}$$

$$= \frac{-3(-3)}{0.375}$$

$$= \frac{9}{0.375}$$

$$= 24$$

$\therefore$ मानक विचलन का मान, 24 है।

2. **बाउले का वैषम्य-गुणांक :** यह विधि चतुर्थकों पर आधारित है, अर्थात्, वैषम्य के दूसरे निरपेक्ष माप पर । वैषम्य-गुणांक के परिकलन का सूत्र इस प्रकार है :

$$\text{बाउले वैषम्य गुणांक}, Sk_B = \frac{(Q_3 - M_d) - (M_d - Q_1)}{(Q_3 - M_d) + (M_d - Q_1)}$$

$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2\ M_d}{Q_3 - Q_1}$$

विवृतमुखी बंटन की स्थिति में, या जहां चरम मान उपस्थित हों या जब वर्ग अंतराल असमान हो, यह विधि विशेष रूप से उपयोगी है। उस स्थिति में भी, जहां स्थैतिक माप आवश्यक हों, वैषम्य मापने के लिए **बाउले** की विधि का ही प्रयोग करना चाहिए।

यदि इस गुणांक का मान शून्य हो तो बंटन सममित है। यदि गुणांक का मान धनात्मक हो तो बंटन धनात्मक विषम है और यदि मान ऋणात्मक हो, तो बंटन ऋणात्मक विषम है। इस सूत्र के अधीन, विचरण को सीमाएं ± हैं। परंतु , इस माप का मुख्य दोष यह है कि यह आंकड़ों के केन्द्रीय 50% मदों पर आधारित है, अर्थात् Q_1 के नीचे के 25% मदों और Q_3 के ऊपर के 25% मदों की उपेक्षा करता है।

बाउले की विधि को स्पष्ट रूप से समझने के लिए, उदाहरण 3 और 4 का अध्ययन कीजिए।

उदाहरण 3
दिए गए आंकड़ों के लिए, $Q_1 = 58, M_d = 59$, और $Q_3 = 61$ वैषम्य गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल :

$$Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{61 + 58 - 2 \times 59}{61 - 58}$$

$$= \frac{1}{3}$$

$$= 0.33$$

उदाहरण 4
एक आवृत्ति बटन में, चतुर्थकों पर आधारित वैषम्य गुणांक 0.6 है। यदि उपरि और निम्न चतुर्थकों का योग 100 हो, और माध्यिका 38 हो, तो उपरि चतुर्थक का मान ज्ञात कीजिए।

हल :
चतुर्थकों पर आधारित, बाउले के वैषम्य गुणांक का सूत्र निम्नानुसार है :

$$Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$

दिए गए मानों को प्रतिस्थापित करने पर,

$$0.6 = \frac{100 - 2 \times 38}{Q_3 - Q_1}$$

$$\text{या } Q_3 - Q_1 = \frac{100 - 2 \times 38}{0.6} = 40 \quad \ldots(i)$$

यह भी दिया है, कि

$$Q_3 + Q_1 = 100 \quad \ldots(2)$$

(1) और (2) को योग करने पर हमें प्राप्त है।

$$Q_3 + Q_1 + (Q_3 + Q_1) = 100 + 40$$

$$\text{या } 2Q_3 = 140$$

$$\text{या } Q_3 = 70$$

अतः उपरि चतुर्थक का मान, 70 है।

16.7 कुछ उदाहरण

उदाहरण 5

निम्न समंकों के लिए, वैषम्य के एक उपयुक्त माप का परिकलन कीजिए।

कमीशन का भुगतान	विक्रेताओं की संख्या
1000 — 1200	7
1200 — 1400	15
1400 — 1600	18
1600 — 1800	20
1800 — 2000	25
2000 — 2200	10
2200 — 2400	5

हल :

क्योंकि दिया गया बंटन विवृतमुखी नहीं है, और बहुलक निर्धारित किया जा सकता है, अतः कार्ल पियरसन का निम्न सूत्र प्रयोग करना ही उचित होगा :

$$\text{वैषम्य गुणांक} = \frac{\text{माध्य} - \text{भूयिष्ठक}}{\text{मानक विचलन}}$$

कमीशन का भुगतान (रु.)	मध्य बिंदु (x)	विक्रेताओं की संख्या (f)	$d' = \frac{x-1700}{200}$	fd′	fd′²
1000 — 1200	1100	7	—3	–21	63
1200 — 1400	1300	15	–2	–30	60
1400 — 1600	1500	18	–1	–18	18
1600 — 1800	1700	20	0	0	0
1800 — 2000	1900	25	1	25	25
2000 — 2200	2100	10	2	10	40
2200 — 2400	2300	5	3	15	45
कुल		n = 100		$\sum fd' = -9$	$\sum fd'^2 = 251$

$$\bar{x} = A + \frac{\sum fd'}{n} \times i = 1700 + \frac{-9}{100} \times 200$$

$$= 1700 - 18 = 1682$$

स्पष्टतः भूयिष्ठक वर्ग 1800–2000 है। संगत मान प्रतिस्थापित करने पर

$$= 1800 + \frac{25 - 20}{(25-20) + (25-10)} \times 200$$

$$= 1800 + \frac{5}{20} \times 200 = 1800 + 50$$

$$= 1850$$

अब मानक विचलन की परिकलन करने के लिए

$$\sigma = i \times \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{n} - \left(\frac{\sum fd'}{n}\right)^2}$$

$$= 200 \times \sqrt{\frac{251}{100} - \left(\frac{-9}{100}\right)^2}$$

$$= 200 \times \sqrt{2.51 - 0.0081}$$

$$= 1.582 \times 200$$

$$= 316.4$$

अब वैषम्य गुणांक

$$Skp = \frac{1682 - 1850}{316.4}$$

$$= -0.531$$

वैषम्य गुणांक का यह मान सूचित करता है कि बंटन ऋणात्मक विषम है और इसलिए कमीशन के उच्चतर मानों की ओर मदों का अधिक संकेन्द्रण है।

उदाहरण 6

निम्न समंकों के लिए, माध्य और माध्यिका पर आधारित वैषम्य गुणांक परिकलित कीजिए।

वर्ग अंतराल	आवृत्ति
0 — 10	6
10 — 20	12
20 — 30	22
30 — 40	48
40 — 50	56
50 — 60	32
60 — 70	18
70 — 80	6

हल :

माध्य, माध्यिका और मानक विचलन का परिकलन

वर्ग अंतराल	माध्य बिंदु (x)	$d' = \frac{x-35}{10}$	f	fd'	fd'^2	संचयी आवृत्ति
0 — 10	5	−3	6	−18	54	6
10 — 20	15	−2	12	−24	48	18
20 — 30	25	−1	22	−22	22	40
30 — 40	35	0	48	0	0	88
40 — 50	45	1	56	56	56	144
50 — 60	55	2	32	64	128	176
60 — 70	65	3	18	54	162	194
70 — 80	75	4	6	24	96	200
कुल			n = 200	$\sum fd'$ = 134	$\sum fd'^2$ = 566	

$$\overline{x} = A + \frac{\sum fd'}{n} \times i = 35 + \frac{134}{200} \times 10$$

$$= 41.7$$

माध्यिका के नीचे N/2 प्रेक्षण, या 100 प्रेक्षण हैं अतः माध्यिका वर्ग 40 — 50 में स्थित है।

$$M_d = l + \frac{N/2 - C \times i}{f}$$

$$= 40 + \frac{100 - 88}{56} \times 10$$

$$= 42.14$$

$$\sigma = i \times \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{\frac{566}{200} - \left(\frac{134}{200}\right)^2}$$

$$= 10 \times \sqrt{2.83 - 0.449}$$

$$= 1.543 \times 10 = 15.43$$

अब, माध्य और माध्यिका पर आधारित, कार्ल पियरसन का वैषम्य गुणांक है

$$Skp = \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma} = \frac{3(41.7 - 42.14)}{15.43}$$

$$= \frac{3(-0.44)}{15.43}$$

$$= -0.085$$

अतः बंटन का वैषम्य ऋणात्मक है और वैषम्य की मात्रा बहुत कम है।

उदाहरण 7

निम्न आंकड़ों के लिए चतुर्थकों पर आधारित वैषम्य-गुणांक परिकलित कीजिए

मासिक वेतन (रु॰)	कर्मचारियों की संख्या
1000 — 1200	5
1200 — 1400	14
1400 — 1600	23
1600 — 1800	50
1800 — 2000	52
2000 — 2200	25
2200 — 2400	22
2400 — 2600	7
2600 — 2800	2
	200

हल :

चतुर्थकों का परिकलन

मासिक वेतन (रु॰)	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
1000 — 1200	5	5
1200 — 1400	14	19
1400 — 1600	23	42
1600 — 1800	50	92
1800 — 2000	52	144

मासिक वेतन (रू॰)	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति
2000 — 2200	25	169
2200 — 2400	22	191
2400 — 2600	7	198
2600 — 2800	2	200

Q_1 के नीचे N/4 प्रेक्षण या 50 प्रेक्षण है। इसलिए यह वर्ग 1600 — 1800 में स्थित है।

$$Q_1 = l + \frac{N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 1600 + \frac{50 - 42}{50} \times 200$$

$$= 1632$$

Q_2 (माध्यिका) के नीचे N/2 प्रेक्षण या 100 प्रेक्षण है। अतः यह वर्ग 1800 — 2000 में स्थित है।

$$= 1800 + \frac{100 - 92}{52} \times 200$$

$$= 1830.77$$

Q_3 के नीचे 3N/4 प्रेक्षण या 150 प्रेक्षण है। अतः यह वर्ग 2000 — 2200 में स्थित है।

$$Q_3 = \frac{l + 3N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 200 + \frac{150 - 144}{25} \times 200$$

$$= 2048$$

$$\text{वैषम्य गुणांक } Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Md}{Q_3 - Q_1}$$

$$= \frac{2048 + 1632 - (2 \times 1830.77)}{2048 - 1632}$$

$$= \frac{18.46}{416} = 0.044$$

उदाहरण 8

निम्न सारणी में एक फैक्टरी के 500 कामगारों की मासिक आय का बंटन दिया गया है।

मासिक आय (रू॰)	कर्मचारियों की संख्या
1000 से कम	10
1000 — 1500	25
1500 — 2000	145
2000 — 2500	220
2500 — 3000	70
3000 और अधिक	30

1 प्रेक्षित कर्मचारियों के केन्द्रीय 50% की मासिक आय सीमाएँ ज्ञात कीजिए।

2 बाउले के वैषम्य-गुणांक का परिकलन कीजिए।

1 कर्मचारियों के केन्द्रीय 50% की मासिक आय सीमाएँ ज्ञात करने के लिए, हम Q_1 और Q_3 का परिकलन करेंगे।

चतुर्थकों का परिकलन

मासिक आय (रु॰)		संचयी आवृत्ति
1000 से कम	10	10
1000 — 1500	25	35
1500 — 2000	145	180
2000 — 2500	220	400
2500 — 3000	70	470
3000 और अधिक	30	500

Q_1 के नीचे N/4 या 125 प्रेक्षण हैं। अतः यह वर्ग 1500 — 2000 में स्थित है।

$$Q_1 = l + \frac{N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 1500 + \frac{125 - 35}{145} \times 500$$

$$= 1500 + 310.3 = 1810.3$$

Q_3 के नीचे 3N/4 या 375 प्रेक्षण हैं। अतः यह वर्ग 2000 — 2500 में स्थित है।

$$Q_3 = l + \frac{3N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 2000 + \frac{375 - 180}{220} \times 500$$

$$= 2000 + 443.18 = 2448.18$$

अतः केन्द्रीय 50% कर्मचारियों की मासिक आय रु॰ 1810.3 और रु॰ 2443.18 के बीच है।

2 बाउले के वैषम्य गुणांक का सूत्र है :

$$Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$

अब, M_d के नीचे N/2 का 250 प्रेक्षण हैं। अतः यह वर्ग 2000 — 2500 में स्थित है।

$$M_d = l + \frac{N/2 - C}{f} \times i$$

$$= 2000 + \frac{250 - 180}{220} \times 500$$

$$= 2000 + 159.1 = 2159.1$$

$$\therefore Sk_B = \frac{2443.18 + 1810.3 - (2 \times 2159.1)}{2443.18 - 1810.3}$$

$$= \frac{-64.72}{632.88} = -0.102$$

ऋणात्मक गुणांक (–0.102) सूचित करता है कि Q_3 और M_d के बीच दूरी, M_d और Q_1 के बीच की दूरी से छोटी है, अर्थात् बंटन का वैषम्य वामावर्त है।

उदाहरण 9

निम्न समंकों से, कार्ल पियरसन के वैषम्य-गुणांक का परिकलन कीजिए।

आय (रु॰ प्रतिदिन)	दुकानों की संख्या
0 से ऊपर	150
100 से ऊपर	140
200 से ऊपर	100
300 से ऊपर	80
400 से ऊपर	80
500 से ऊपर	70
600 से ऊपर	30
700 से ऊपर	14
800 से ऊपर	0

हल :

संचयी आवृत्ति बंटन को, सामान्य आवृत्ति बंटन में परिवर्तित करने पर, हमें प्राप्त है :

आय (रु॰ प्रतिदिन)	दुकानों की संख्या
0 — 100	10
100 — 200	40
200 — 300	20
300 — 400	0
400 — 500	10
500 — 600	40
600 — 700	16
700 — 800	14

क्योंकि यह एक U- रूप का बंटन है, वैषम्य के परिकलन के लिए, हम माध्य और माध्यिका का प्रयोग करेंगे।

वैषम्य गुणांक का परिकलन

आय (रु॰ प्रतिदिन)	मध्य बिंदु (x)	f	$d = \frac{x-350}{100}$	fd'	fd'^2	संचयी (आवृत्ति)
0 — 100	50	10	–3	–30	90	10
100 — 200	150	40	–2	–80	160	50
200 — 300	250	20	–1	–20	20	70
300 — 400	350	0	0	0	0	70
400 — 500	450	10	1	10	10	80
500 — 600	550	40	2	80	160	120
600 — 700	650	16	3	48	144	136
700 — 800	750	14	4	56	224	150
कुल					$\Sigma fd' = 64$	$\Sigma fd'^2 = 808$

समान्तर माध्य का परिकलन

$$\bar{x} = A + \frac{\Sigma fd}{N} \times i$$

$$= 350 + \frac{64}{150} \times 100$$

$$= 350 + 42.67 = 392.67$$

माध्यिका का परिकलन :

M_d के नीचे N/2 या 75 प्रेक्षण है। अतः यह वर्ग 400 — 500 में स्थित होगा।

$$M_d = l + \frac{N/2 - C}{f} \times i$$

$$= 400 + \frac{75 - 70}{10} \times 100$$

$$= 450$$

मानक विचलन का परिकलन :

$$\sigma = i \times \sqrt{\frac{\sum fd'^2}{N} - \left(\frac{\sum fd'}{N}\right)^2}$$

$$= 100 \times \sqrt{\frac{808}{100} - \left(\frac{64}{100}\right)^2}$$

$$= 100 \times \sqrt{5.205}$$

$$= 2.281 \times 100 = 228.1$$

$$\text{अतः } SKp = \frac{3(\bar{x} - M_d)}{\sigma} = \frac{3(392.67 - 450)}{228.1}$$

$$= \frac{-171.99}{228.1} = -0.754$$

उदाहरण 10

यदि माध्य = 50, विचरण गुणांक 40% और वैषम्य गुणांक = –0.4, तो मानक विचलन, बहुलक और माध्यिका ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\text{सूत्र } C.V. = \frac{\text{मानक विचलन}}{\text{माध्य}} \times 100$$

में, माध्य, और C.V. के मान प्रतिस्थापित करने पर, हमें प्राप्त है

$$40 = \frac{\sigma}{50} \times 100$$

$$\therefore \sigma = \frac{40 \times 50}{100} = 20$$

फिर, कार्ल पियरसन के सूत्र का प्रयोग करते हुए

$$SKp = \frac{\text{माध्य} - \text{बहुलक}}{\text{मानक विचलन}}$$

$$-0.4 = \frac{50 - Mo}{20}$$

$$\therefore Mo = 50 + 20 \times 0.4$$

$$= 58$$

आनुभविक संबंध का प्रयोग करते हुए, हमें प्राप्त है

माध्य – भूयिष्ठक = 3 (माध्य – माध्यिका)

$50 - 58 = 3$ (50 – माध्यिका)

3 (माध्यिका) $= 150 + 8$

(माध्यिका) $= \frac{158}{3}$

$= 52.67$

उदाहरण 11

निम्न समंकों के लिए, वैषम्य का एक उपयुक्त माप ज्ञात कीजिए।

बिक्री (लाख रुपयों में)	कम्पनियों की संख्या	संचयी आवृत्ति
50 से कम	8	8
50 — 60	12	20
60 — 80	20	40
80 — 100	25	65
100 से अधिक	15	80

हल :

यहां वर्ग अंतराल असमान और विवृत हैं। अतः वैषम्य निर्धारण की उपयुक्त विधि, बाउले की विधि है।

$$Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$$

अब, Q_1 के नीचे N/4 प्रेक्षण या 20 प्रेक्षण है। अतः यह वर्ग अंतराल 50 — 60 में स्थित है।

$$Q_1 = l + \frac{N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 50 + \frac{20 - 8}{12} \times 10$$

$$= 60$$

Q_2 (माध्यिका) के नीचे N/2 प्रेक्षण या 40 प्रेक्षण है। अतः यह वर्ग अंतराल 60 — 80 में स्थित होगा।

$$M_d = l + \frac{N/2 - C}{f} \times i$$

$$= 60 + \frac{40 - 20}{20} \times 20 = 80$$

Q_3 के नीचे, 3N/4 प्रेक्षण या 60 प्रेक्षण हैं, अतः यह वर्ग अंतराल 80 — 100 में होगा।

$$Q_3 = l + \frac{3N/4 - C}{f} \times i$$

$$= 80 + \frac{60 - 40}{25} \times 20 = 96$$

अब $Sk_B = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M_d}{Q_3 - Q_1}$

$$= \frac{96 + 60 - (2 \times 80)}{96 - 60}$$

$$= -0.11$$

वैषम्य गुणांक सूचित करता है कि बंटन अल्पमात्र वामावर्त विषम है। इसलिए, बिक्री के उच्चतर मानों में, निम्नतर मानों की अपेक्षा, (मदों का) अधिक संकेद्रण है।

उदाहरण 12

एक आद्यौगिक विवाद के पूर्व और पश्चात् एक फर्म से निम्न तथ्य एकत्रित किए गए :

	विवाद के पूर्व	विवाद के पश्चात्
माध्य मजदूरी (रू॰)	850	900
माध्यिका मजूरी (रू॰)	820	800
बहुलक मजूरी (रू॰)	760	600
चतुर्थक (रू॰)	750 और 920	750 और 950
S : D. (रू॰)	30	110
कर्मचारियों की संख्या	600	550

उपरोक्त समंकों का प्रयोग करके, विवाद के पूर्व और पश्चात् की, फर्म की स्थितियों की, यथासम्भव पूर्णरूप से तुलना कीजिए।

हल :

क) विवाद के परिणामस्वरूप, कर्मचारियों की संख्या, 50 घटकर, 600 से 550 हो गई है।

ख) यद्यपि माध्य मजूरी में अल्पमात्र वृद्धि हुई है, विवाद के पश्चात्, फर्म को, उसके मासिक वेतन बिल में, 15000 रू॰ की बचत होती है।

विवाद के पूर्व कुल मजूरी (600 × 850)

= 5,10,000 रू॰

विवाद के पश्चात् कुल मजूरी (550 × 900)

= 4,95,000 रू॰

अंतर = 15,000 रू॰

ग) माध्यिका मजूरी और बहुलक मजूरी घटी है। विवाद के पूर्व 50% कर्मचारी, 820 रू॰ और अधिक मजूरी पाते थे, परंतु विवाद के पश्चात् इस वर्ग के कर्मचारियों की संख्या 50% से कम है। इसी प्रकार, (विवाद के पश्चात्) अधिकांश कर्मचारी लगभग 600 रू॰ पाते हैं, जब कि (विवाद से पूर्व) अधिकांश कर्मचारी 760 रू॰ पाते थे।

घ) पहले चतुर्थक Q_1 में कोई परिवर्तन नहीं हुआ है। दूसरे चतुर्थक (अर्थात् माध्यिका) में, अल्पमात्र कमी हुई है परंतु तीसरे चतुर्थक Q_3 में वृद्धि हुई है। इस सूचना की सार्थकता निम्न सारणी में दिखाई गई है :

मजदूरी रू॰

कर्मचारियों का वर्ग	विवाद से पूर्व	विवाद के पश्चात्
(क) निम्नतम मजूरी पाने वाले 25%	750 तक	750 तक
(ख) आगामी उच्चतर 25% का वर्ग	750—820	750—800
(ग) आगामी उच्चतर 25% का वर्ग	820—920	800—950
(घ) उच्चतम मज़दूरी पाने वाले 25%	920 से अधिक	950 से अधिक

वर्ग (क) के कर्मचारी प्रभावित नहीं हुए हैं। अगले उच्चतर वर्ग (ख) के कर्मचारियों के वेतन अब वेतन के एक अधिक संकुचित विस्तार में सीमित हैं। परंतु, उच्चतम मजदूरी पाने वाले, वर्गों (ग) और (घ) के कर्मचारी अब विवाद के पश्चात् समान्यतः अधिक मजदूरी पाते हैं।

च) मानक विचलन 30 रु॰ से बढ़कर 110 रु॰ हो गया है, जिससे ज्ञात होता है कि विवाद के पश्चात् व्यक्तिगत मजदूरी के विचरण में वृद्धि हुई है। उचित तुलना के लिए हमें प्राप्त है :

विवाद से पूर्व $C.V. = \frac{30}{850} \times 100 = 3.53\%$

विवाद के पश्चात् $C.V. = \frac{110}{900} \times 100 = 12.2\,\%$

माध्य के सापेक्ष विचरण में भी वृद्धि हुई है।

छ) वैषम्य के माप है :

	विवाद से पूर्व	विवाद के पश्चात्
कार्ल पियरसन की माप	$= \frac{850 - 760}{30} = 3$	$\frac{900 - 600}{110} = 2.73$
बाउले की माप	$= \frac{920 + 750 - 2(820)}{920 - 750}$ $= 0.18$	$\frac{950+750-2(800)}{950 - 750}$ 0.50

विवाद के पश्चात् पियरसन का वैषम्य-गुणांक घटा है, जबकि बाउले का वैषम्य गुणांक बढ़ा है, और दोनों ही धनात्मक हैं। इसका अर्थ है, कि मध्य के 50% कर्मचारियों का, संकेन्द्रण, निम्नतर मजूरिओं में बढ़ा है। परंतु जब हम सभी कर्मचारियों के बारे में विचार करते हैं, तो आवृत्तियों का सापेक्ष केन्द्रण, निम्नतर मानों की ओर कम हो जाता है।

टिप्पणी : यदि एक सूत्र से प्राप्त परिणाम वैषम्य में वृद्धि सूचित करे, जबकि दूसरे से प्राप्त परिणाम कमी सूचित करे, तो इसमें कोई अशुद्धि नहीं है। वस्तुतः ऐसी परिस्थितियाँ भी हो सकती है जहां एक सूत्र धनात्मक वैषम्य प्रदान करे तो दूसरा ऋणात्मक वैषम्य। ऐसा इसलिए है कि बाउले की विधि, केवल मध्य के 50% आंकड़ों पर आधारित है, जबकि कार्ल पियरसन की विधि समस्त आंकड़ों से सम्बद्ध है।

बोध प्रश्न ख

1 वैषम्य मापने की, कार्ल पियरसन और बाउले की विधियों के सूत्र लिखिए।

....

....

....

2 वैषम्य किसे कहते हैं ?

....

....

....

3 वैषम्य और अपकिरण में अंतर स्पष्ट कीजिए।

....

....

....

....

4 बताइए कि निम्नलिखित कथन सही हैं या गलत ।

i) वैषम्य, किसी माध्य की प्रतिनिधित्वता की सीमा का निश्चय करता है।

ii) एक धनात्मक विषय बंटन में आवृत्तियों का अधिक संकेन्द्रण बाईं ओर होता है ।

iii) मानक विचलन समान होने की स्थिति में भी वैषम्य की तुलना के लिए केवल सापेक्ष माप का ही प्रयोग किया जाता है।

iv) विवृत मुखी वर्ग अंतरालों के लिए वैषम्य का परिकलन नहीं कर सकते।

v) द्वि-भूयिष्ठक बंटन में, वैषम्य का अस्तित्व नहीं होता।

vi) दो बंटनों के, जिनके विचरण गुणांक, भिन्न हों, वैषम्य भी भिन्न होते हैं।

5 रिक्त स्थानों को भरिए :

(i) यदि दिए गए बंटन के माध्य और भूयिष्ठक समान हों तो उसका वैषम्य गुणांक .... होता है।

(ii) वैषम्य धनात्मक होता है, यदि माध्य भूयिष्ठक .... हो।

(iii) एक सममित बंटन में, माध्य, माध्यिका और भूयिष्ठक .... होते हैं।

(iv) विषम बंटन की स्थिति में, माध्यिका कभी भी, ... के समान नहीं हो सकती।

(v) यदि एक आवृत्ति बंटन के, माध्य, भूयिष्ठक और मानक विचलन क्रमशः 41, 45 और 8 हों तो इसका कार्ल पियरसन वैषम्य गुणांक .... है।

(vi) एक आदर्श रूप से सममित बंटन में, 50% मद, 60 से ऊपर है और 75% मद, 75 से नीचे है। अत : Md = ... Q_3 = ..., Q_1 =......................, चतुर्थक विचलन = ... और वैषम्य गुणांक .... है।

16.8 सामान्य वक्र की विशेषताएं

देखा गया है कि प्रकृति में घटित होने वाली अधिकांश घटनाओं, जैसे मानवीय लक्षणों (ऊँचाई, भार, प्रज्ञा-गुणांक, इत्यादि) की मापों, औद्योगिक उत्पादन और कृषि उत्पादन, आदि, से सम्बंधित मापों के आवृत्ति बंटन, सममित प्रकृति के होते हैं। सामान्यतः इन सबमें, एक वर्ग से दूसरे वर्ग तक, आवृत्ति के चढ़ाव और उतार की दर, प्रायः नियत होती है। उनकी, आकृति 16.1 के सदृश होती है। सांख्यिकों ने, इन बंटनों को, एक मात्र गणितीय सूत्र द्वारा प्रकट करने का प्रयत्न किया है। क्योंकि यह सूत्र, प्रकृति में घटित होने वाले अधिकांश बंटनों का वर्णन करता है, इसलिए, इसे सामान्य वक्र कहा गया है। अभी आपके लिए उस यथार्थ गणितीय व्यंजक (सूत्र) को जानना आवश्यक नहीं है, जो सामान्य वक्र को निर्धारित करता है। परंतु, उस सूत्र द्वारा प्रदर्शित विशेषताएँ, समंकों के विश्लेषण में बड़ी उपयोगी सिद्ध होती है। सामान्य वक्र के विशेष गुण निम्नलिखित हैं।

1 यह माध्य के दोनों ओर आदर्श रूप से सममित होता है, और यह घंटाकार होता है।

2 माध्य = माध्यिका = भूयिष्ठक

3 इसका केवल एक भूयिष्ठक होता है, अर्थात् यह एक भूयिष्ठक है।

4 चतुर्थक Q_1 और Q_3 माध्यिका या माध्य से समदूरस्थ होता है इनके मान, निम्न सूत्र प्रदान करते हैं :

$$Q_1 = A.M. - 0.6745\ SD$$

$$Q_3 = A.M. + 0.6745\ SD$$

$$QD = \frac{5}{6} M.D \text{ (लगभग)}$$

$$= \frac{2}{3} S\,D \text{ (लगभग)}$$

5 माध्य से माध्य विचलन = 4/5 × (मानक विचलन)

6 सामान्य वक्र की आधारभूत विशेषताओं में से एक है, उसकी क्षेत्रफल विशेषता, जिसके कुछ उदाहरण इस प्रकार हैं :

i) माध्य ± 0.6745σ के अंतर्गत 50% क्षेत्रफल आता है अर्थात् प्रत्येक ओर, 25%

ii) माध्य ± 2.5758 σ के अंतर्गत 99% क्षेत्रफल आता है, अर्थात् प्रत्येक ओर 49.5%

iii) माध्य ± 1.96, σ के अंतर्गत, 95% क्षेत्रफल आता है, अर्थात् प्रत्येक ओर 47.5%

iv) माध्य ± 1 σ के अंतर्गत, 68.27% क्षेत्रफल आता है, अर्थात् प्रत्येक ओर 34.14%

v) माध्य ± 2σ के अंतर्गत 95.4% क्षेत्रफल आता है, अर्थात् प्रत्येक ओर 47.7%

vi) माध्य ± 3σ के अंतर्गत 99.7% क्षेत्रफल आता है अर्थात् प्रत्येक ओर 49.85%

इन विशेषताओं की उपयोगिता दिखाने के लिए हम एक उदाहरण पर विचार करेंगे।

उदाहरण 13

मान लीजिए एक बड़े समूह में से चुने गए, 100 व्यक्तियों की माध्य ऊँचाई 68 इंच है और माध्य विचलन 1.5 इंच है।

i) समस्त समूह में, मध्य के 95% व्यक्तियों की उँचाई का परिसर ज्ञात कीजिए।

ii) समस्त समूह के लिए, भूयिष्ठक, चतुर्थक विचलन, और माध्य विचलन के प्रत्याशित मान ज्ञात कीजिए।

हल :

i) हमें ज्ञात है कि मध्य के 95% मदों के मान, विस्तार माध्य = 1.96 में होते हैं। अतः अभीष्ट विस्तार है : 68 = 1.96 × 1.5 या 65.06 इंच से 70.94 इंच तक।

ii) माध्य = भूयिष्ठक 1 इसलिए भूयिष्ठक भी 68 इंच है।

$$QD = \frac{2}{3}\sigma \text{ (लगभग)}$$

$$\text{अतः } QD = \frac{2}{3} \times 1.5 = 1 \text{ इंच (लगभग)}$$

$$MD = \frac{4}{5}\sigma \text{ इंच (लगभग)}$$

$$MD = \frac{4}{5} \times 1.5 = 1.2 \text{ इंच (लगभग)}$$

वस्तुतः सामान्य वक्र सांख्यिकीय अनुमान लगाने में बड़ा ही उपयोगी है। निर्दिष्ट समंकों के केन्द्रीय भाग में, आवृत्तियों के संकेन्द्रण की मात्रा ज्ञात करने के लिए एक मानक के रूप में भी इसका प्रयोग किया जाता है। समंकों के विश्लेषण में, यह चौथा मुख्य लक्षण है, जिसे ककुदता (Kurtoses) कहते हैं। इसका विस्तार, प्रस्तुत पाठ्यक्रम के विषय क्षेत्र से बाहर है ।

16.9 सारांश

केन्द्रीय प्रवृत्ति और विचरण की माप, किसी समंक समूह के सभी लक्षणों को प्रकट नहीं करती। यह सम्भव है कि दो समंक समूहों के माध्य और मानक विचलन अभिन्न हों, परंतु उनके बंटन रूप के विचार से बहुत भिन्न हों। यदि समंकों का बंटन सममित नहीं है तो **इसे असममित या विषम बंटन कहते हैं**। वैषम्य, बंटन में सममिति के अभाव का निर्देश करता है। वैषम्य मापने की विभिन्न विधियाँ निम्नानुसार है :

निरपेक्ष माप	सापेक्ष माप	सीमाएं या विस्तार	आविष्कारक
1 माध्य-बहुलक	$\frac{\text{माध्य-बहुलक}}{\text{मानक विचलन}}$	± 3	कार्ल पियरसन
2 माध्य-माध्यिका	$\frac{3\text{ (माध्य-माध्यिका)}}{\text{मानक विचलन}}$	± 3	कार्ल पियरसन
3 $Q_3 + Q_1 - 2\,Md$	$\frac{Q_3 + Q_1 - 2Md}{Q_3 - Q_1}$	± 1	बाउले

बहुत अधिक विषम समंकों में, उच्चतम आवृत्ति एक चरम मान से सम्बंधित होती है। धनात्मक विषय बंटन का उसके दाईं ओर एक लम्बा पुच्छ भाग होता है और (इसलिए) इसे दक्षिणावर्त विषम बंटन भी कहते हैं। ऋणात्मक विषम समंकों का उनके बाईं ओर एक लम्बा पुच्छ भाग होता है और इसलिए उन्हें वामावर्त विषम

समंक भी कहते हैं। जब एक आदर्श रूप से सममित समंकों के लेखाचित्र, घंटाकार या U- रूप को, माध्य में से जाती हुई रेखा पर तह दिया जाए, तो वक्र के दोनों भाग पूर्णतः संपाती होते हैं।

प्रकृति में घटित होने वाले अधिकांश समंक समूह प्रसामान्य बंटन से मिलते जुलते होते हैं। प्रसामान्य वक्र, घंटाकार और आदर्शरूप से सममित होता है। इसमें, माध्य से विभिन्न विस्तारों के अंतर्गत आवृत्तियों की नियत प्रतिशतताएँ होती हैं। दिए गए समंक सामान्य हैं या नहीं, यह निश्चय करने में, ये प्रतिशतताएँ सहायक होती है।

16.10 शब्दावली और प्रतीक सूची

पारिभाषिक शब्दावली

घंटाकार समंक : आवृत्ति स्थिरता से बढ़ती है, एक उच्चतम मान प्राप्त करती है और फिर तेजी से घटती है ।

J-रूप समंक : उच्चतम आवृत्ति से आरम्भ हो कर, निम्नतम आवृत्ति पर समाप्त होते हैं, और इनके बीच में, आवृत्ति की एक स्थिर उतार दर होती है या उपरोक्त में क्रम बदल कर।

वैषम्य : सममिति के अभाव का निर्देश करता है।

सममित समंक : जब मध्य से समदूरस्थ चर के मानों की आवृत्तियाँ समान हों।

U -रूप आंकड़े : आंकड़ों की आवृत्तियाँ प्रारम्भ में तथा अंतर में उच्चतम हो और मध्य में निम्नतम हों।

प्रतीक सूची (Symbols)

वैषम्य गुणांक : बाउले का –SKB

वैषम्य गुणांक : पियरसन का –SKP

वैषम्य (निरपेक्ष माप) : SK, J

16.11 बोध प्रश्नों के उत्तर

क 5 (i) गलत (ii) सही (iii) सही (iv) गलत (v) गलत (vi) गलत
(vii) सही (viii) सही (ix) सही (x) गलत (xi) गलत (xii) गलत

6 (i) कोई विचरण नहीं (ii) सममित (iii) विषम

ख 4 (i) सही (ii) सही (iii) सही (iv) गलत (v) गलत (vi) हो सकता है और नहीं भी

5 (i) शून्य (ii) से अधिक (iii) समान (iv) माध्य (v) –0.5
(vi) $M_d = 60, Q_3 = 75, Q_1 = 45$, चतुर्थक विचलन गुणांक $= 0.25, SK_B = 0$

16.12 स्वपरख प्रश्न/अभ्यास :

प्रश्न

1 वैषम्य के निरपेक्ष और सापेक्ष मापों के नाम लिखिए।

2 संख्यात्मक समंकों के विश्लेषण के लिए केन्द्रीय प्रवृत्ति, अपकिरण और वैषम्य, तीन विभिन्न माप हैं। इस कथन पर, टिप्पणी दीजिए।

अभ्यास

1 एक परीक्षा में, विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांकों के निम्न आवृत्ति बंटन से, कार्ल पियरसन के वैषम्य गुणांक का मान परिकलित कीजिए :

अंक से कम :	10	20	30	40	50	60	70	80
विद्यार्थियोंकी संख्या :	5	15	30	50	80	100	120	125

(उत्तर : $\bar{x}$ = 53, σ = 17.66, Skp = 0.453)

2 नीचे दी गई सारणी से पियरसन का वैषम्य गुणांक परिकलित कीजिए :

जीवनकाल (घंटों में)	ट्यूबों की संख्या
300 — 400	14
400 — 500	46
500 — 600	58
600 — 700	76
700 — 800	68
800 — 900	62
900 — 1000	48
1000 — 1100	22
1100 — 1200	6

(उत्तर : $Skp = \frac{715.5 - 669.23}{190.2} = 0.243$)

3 निम्न आंकड़े एक पेट्रोल स्टेशन पर दैनिक बिक्री के हैं। माध्य, माध्यिका, मानक विचलन और वैषम्य गुणांक परिकलित कीजिए।

बिकी की गई मात्रा (लीटरों में)	दिनों की संख्या
700 — 1000	12
1000 — 1300	18
1300 — 1600	20
1600 — 1900	25
1900 — 2200	18
2200 — 2500	5
2500 — 2800	2

उत्तर : $\bar{x}$ = 1426, M_d = 1600, σ = 447.35, S.K = –1.167

4 निम्न सारणी में एक कम्पनी द्वारा विक्रेताओं को दिए गए दैनिक यात्रा भत्ते का बंटन दिया गया है। बाउले का वैषम्य गुणांक परिकलित कीजिए और इसके मान पर टिप्पणी कीजिए।

यात्रा भत्ता (रू॰ में)	विक्रीकर्ताओं की संख्या
100 — 120	14
120 — 140	16
140 — 160	20
160 — 180	18
180 — 200	15
200 — 220	7
220 — 240	6
240 — 260	4

(उत्तर : $Sk_B = \frac{189.33 + 133.75 - (2 \times 160)}{189.33 - 133.75} = 0.145$)

5 निम्न आंकड़ों के लिए वैषम्य की एक उपयुक्त माप परिकलित कीजिए :

आयु (वर्षों में)	कर्मचारियों की संख्या
20 से कम	13
20 — 25	29
25 — 30	44
30 — 35	60
35 — 40	112
40 — 45	94
45 — 50	45
50 से अधिक	21

($Sk_B = \dfrac{42.92 + 31.42 - (2 \times 37.77)}{42.92 - 31.42} \approx -0.104$)

6 निम्न बंटन के लिए, वैषम्य का एक उपयुक्त माप ज्ञात कीजिए :

वार्षिक बिक्री : ('000 रु॰ में)	0 – 20	20 – 50	50 – 100	100 – 250	250 – 500	500 – 1000
फर्मों की संख्या :	20	50	69	30	22	19

(उत्तर : $Sk_B = \dfrac{203.75 + 39.95 - (2 \times 76.45)}{203.75 - 39.95} = 0.554$)

7 नीचे आपको दो फैक्टरियों के मजदूरी संबंधी विवरण दिये गए हैं। इनसे यह निष्कर्ष निकाला गया है कि दोनों फैक्टरियों में वैषम्य और विचरण अभिन्न हैं। बताइए कि इनमें कौन अनुमान गलत हैं।

	फैक्टरी (रु॰)	फैक्टरी (रु॰)
समांतर माध्य	50	45
बहुलक	45	50
प्रसरण	100	100

8 एक परिमित रूप से असममित बंटन में केन्द्रीय प्रवृत्तियों में विद्यमान आनुभविक संबंध पर आधारित कार्ल पियर्सन का वैषम्य गुणांक परिकलित कीजिए :

माध्य = 23, माध्यिका = 24, मानक विचलन = 10

क्या यह बंटन धनात्मक या ऋणात्मक रूप से वैषम्ययुक्त है ?

(उत्तर : = – 0.3)

9 एक फैक्टरी में एक औद्योगिक विवाद के निपटारे के पूर्व और पश्चात् स्थिति निम्नानुसार है। कर्मचारियों के दृष्टिकोण से और प्रबंध के दृष्टिकोण से लाभ या हानि पर टिप्पणी कीजिए।

	पूर्व	पश्चात्
कर्मचारियों की संख्या	3,000	2,900
माध्य मजूरी (रु॰)	220	230
माध्यिका मजूरी (रु॰)	250	240
मानक विचलन	30	26

नोट : ये प्रश्न और अभ्यास इस इकाई को श्रेष्ठतर समझने में आपकी सहायता करेंगे। इनके उत्तर लिखने का प्रयत्न कीजिए। परंतु अपने उत्तर विश्वविद्यालय को न भेजिए। ये केवल आपके अभ्यास के लिए हैं।

कुछ उपयोगी पुस्तकें

एन॰ के॰ कक्कर एवं एन॰ डी॰ वोहरा : *सांख्यिकी* (नई दिल्ली : एस॰ चन्द एंड कम्पनी लि. , 1990) अध्याय 1

सत्य प्रकाश गुप्ता : *सांख्यिकी के सिद्धांत* (नई दिल्ली : सुल्तान चन्द एंड संस, 1990) अध्याय 1, 2

Notes

Notes

Notes

Notes